

Miguel Perdigón González

*Una introducción a la magneto-
hidrodinámica*

An introduction to magneto-hydrodynamics

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Marzo de 2024

DIRIGIDO POR
Diego Alonso Orán

Diego Alonso Orán
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento más sincero a todos aquellos que me han apoyado a lo largo de toda mi trayectoria académica. Dedico este trabajo a mi difunto abuelo.

Miguel Perdigón González
La Laguna, 5 de marzo de 2024

Resumen · Abstract

Resumen

Este trabajo de fin de grado aborda una introducción a la magneto-hidrodinámica (MHD) y al estudio de sus soluciones desde un punto de vista matemático. La MHD es un campo que combina principios de la dinámica de fluidos (ecuaciones de Euler y Navier-Stokes) y el electromagnetismo (ecuaciones de Maxwell) para estudiar el comportamiento de fluidos conductores de la electricidad, como plasmas, metales líquidos y gases ionizados. La primera parte de este trabajo se centra en derivar mediante la conocida aproximación magneto-hidrodinámica las ecuaciones de la MHD. La segunda parte del trabajo, consistirá en analizar ciertas propiedades elementales de las soluciones de la MHD como, por ejemplo, los invariantes globales o el comportamiento de las soluciones de tipo onda, cruciales para distintas aplicaciones en astrofísica o investigación de la fusión.

Palabras clave: *Magneto-hidrodinámica– Invariantes globales – Ondas magnetohidrodinámicas*

Abstract

This final degree thesis is an introduction to magneto-hydrodynamics (MHD) and the study of its solutions from a mathematical point of view. MHD is a field that combines principles of fluid dynamics (Euler and Navier-Stokes equations) and electromagnetism (Maxwell's equations) to study the behavior of electrically conducting fluids, such as plasmas, liquid metals and ionized gases. The first part of this work is focused on the derivation of the MHD equations by means of the well-known magneto-hydrodynamic approximation. The second part of the work will consist of analyzing certain elemental properties of the MHD solutions such as, for example, the global invariants or the behavior of the wave-type solutions, which are crucial for different applications in astrophysics or fusion research.

Keywords: *Magneto-hydrodynamics – Global invariants – MHD waves*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
1. Introducción	1
1.1. ¿Qué es la magneto-hidrodinámica?	1
1.2. Los comienzos de la MHD y sus aplicaciones	2
1.3. Contenido del TFG	5
2. Preliminares	7
3. Las ecuaciones de Maxwell y la mecánica de fluidos	9
3.1. Las leyes físicas	9
3.2. Leyes de constitución y leyes materiales	11
3.3. Las ecuaciones de Maxwell y su aproximación a MHD	13
3.4. La ecuación de la inducción	18
3.5. Las ecuaciones de la mecánica de fluidos	19
3.5.1. La conservación de la masa	19
3.5.2. La conservación del momento lineal	20
3.5.3. Dinámica de gases: las ecuaciones de Euler compresibles ...	22
3.5.4. Fluidos ideales: las ecuaciones de Euler incompresibles	23
3.5.5. Fluidos viscosos: las ecuaciones de Navier-Stokes	23
3.6. Las ecuaciones de la magneto-hidrodinámica	25
4. Invariantes globales para las ecuaciones de la MHD ideal incompresible	27
5. Ondas en la magneto-hidrodinámica incompresible	35
5.1. Un ejemplo ilustrativo: la ecuación de ondas uno-dimensional ...	35
5.2. Las ondas en las ecuaciones de Euler incompresibles	38
5.3. Las ondas en la MHD incompresible	41

Bibliografía	47
Poster	49

Introducción

En este capítulo, trataremos de introducir los conceptos clave de la teoría de la magneto-hidrodinámica (la cual abreviaremos a efectos prácticos como MHD), así como su evolución histórica. También comentaremos algunas de sus aplicaciones que se dividen en tres grupos: la astrofísica de plasmas, la industria y la fusión nuclear. Para concluir este capítulo, introduciremos la notación que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

Para desarrollar esta sección hemos utilizado las siguientes referencias bibliográficas [3, 5].

1.1. ¿Qué es la magneto-hidrodinámica?

El plasma es un gas ionizado formado por iones, electrones y neutrones con carga positiva que se mueven libremente. Es, con mucha diferencia, la fase más común de la materia ordinaria presente en el Universo. Un papel clave en la descripción del plasma lo juegan los campos magnéticos. Estos están presentes en fenómenos naturales como pueden ser el campo magnético solar, que provoca las manchas y erupciones solares, el campo magnético galáctico, que influye en la formación de nuevas estrellas o el conocido campo magnético terrestre, que se mantiene por el movimiento de fluidos en el núcleo de nuestro planeta, la Tierra. Además, están presentes, por ejemplo, en la industria donde se utilizan, entre otras cuestiones, para bombear y remover los metales líquidos.

Formalmente, la MHD estudia la interacción mutua entre la dinámica de fluidos y los campos magnéticos. Más concretamente, los fluidos deben ser conductores de la electricidad y no magnéticos. Esto nos reduce a estudiar los metales líquidos, los plasmas y los electrolitos fuertes (sustancias que al diluirse se descomponen mayoritariamente en iones).

La interacción entre un campo magnético, que denotaremos por \mathbf{B} , y un campo de velocidades, que denotaremos por \mathbf{u} , surge, por una parte, como resultado de la ley de Faraday y Ampère, y, por otra, por la fuerza de Lorentz generada por el cuerpo portador de corriente. El proceso que sigue se puede distinguir formalmente en tres pasos:

- El movimiento relativo de un fluido conductor y un campo magnético causa una fuerza electromagnética (de orden $|\mathbf{B} \times \mathbf{u}|$) de acuerdo a la ley de Faraday.

- Estas corrientes inducidas deben, de acuerdo a la ley de Ampère, dar lugar a un segundo campo magnético inducido. Este se agrega al primero y produce, al paso del fluido, el *arrastré* de las líneas de campo. Este resultado de *arrastré* de las líneas magnéticas del campo se conoce en el argot matemático como el Teorema de Taylor.
- La combinación de ambos campos interactúa con la densidad de corriente inducida, \mathbf{J} , para generar una fuerza de Lorentz $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Esta última actúa directamente en el conductor para inhibir el movimiento relativo del campo magnético y el fluido.

Resumidamente, el fluido arrastra consigo las líneas de campo y el campo magnético atrae al fluido conductor. Esta propiedad es uno de los distintivos característicos de la MHD. Este fuerte acoplamiento dinámico entre el fluido y los campos magnéticos complica la estructura matemática que presentan las ecuaciones que describen los procesos plasmáticos. Una parte de este trabajo estudiará analíticamente algunas propiedades fundamentales de este proceso.

1.2. Los comienzos de la MHD y sus aplicaciones

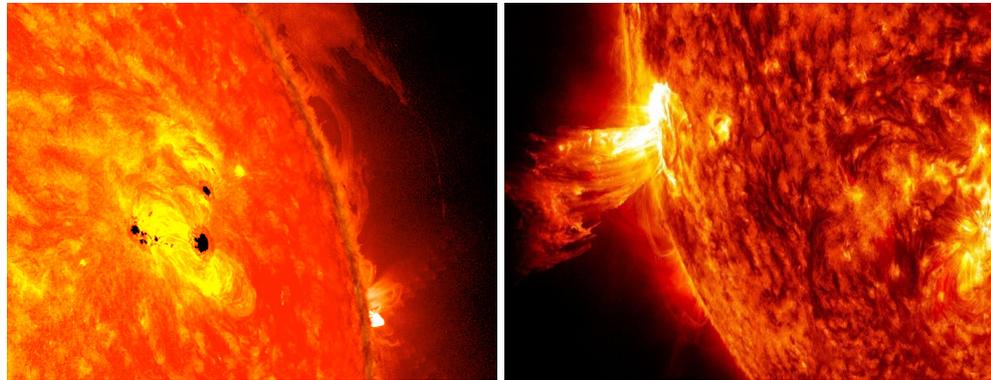
Las leyes del magnetismo y la dinámica de fluidos no son una innovación del siglo XX. No obstante, no fue hasta los años 30-40 del pasado siglo cuando la MHD se convirtió en un tema de interés mundial. Esto se debe muy probablemente al poco interés económico que suscitaban las posibilidades ofertadas por la MHD en aquel entonces. Sin embargo, ya en el siglo XIX hubo algunos avances e investigaciones en este tema. Por ejemplo, en enero de 1832, Michael Faraday intentó observar lo que denominó “la electricidad obtenida por inducción magnetoeléctrica” a partir del agua salada a través del campo magnético de la Tierra. Para ello, colocó un cable de cobre a lo largo del puente de Waterloo en Londres y ató a los extremos placas de platina sumergidas en el Támesis para completar el circuito, [6].

Sin embargo, el verdadero avance de la MHD comenzó cuando los astrofísicos descubrieron la necesidad de estudiar la ubicuidad del campo magnético y el plasma en el universo. Esto culminó en 1942 con el descubrimiento de un fenómeno propio de la MHD conocido como onda de Alfvén: una línea de campo magnético que puede transmitir ondas de inercia transversales. Esta última debe su nombre a Hannes Alfvén, fue un físico sueco del siglo XIX, fundador y figura clave en la teoría de la magneto-hidrodinámica. Es por ello que, en 1970, recibe el Premio Nobel de física por sus trabajos y descubrimientos en magneto-hidrodinámica con aplicaciones en la física del plasma.

La astrofísica de plasmas se centra en el estudio de los plasmas de la Tierra y de la magnetosfera planetaria, así como de los fenómenos físicos que surgen en los campos magnéticos solares. Los campos magnéticos llenan el espacio interestelar

y ayudan en la formación de las estrellas. Estos campos controlan el exceso de momento angular al colapsar nubes interestelares, dando lugar a formación de nuevas estrellas.

Las manchas y llamaradas solares tienen también un origen magnético. La superficie solar es un lugar de mucha actividad. El Sol está compuesto por gases cargados eléctricamente que generan grandes campos magnéticos. Las manchas solares son causadas por la diferencia de temperatura en la superficie solar lo que provoca una intensa actividad magnética. Cerca de estas manchas, las líneas de campo magnético se enredan, lo que provoca repentinas explosiones conocidas como llamaradas solares. Estos fenómenos son tremendamente interesantes y están ligados con lo que se conoce como reconexión magnética.

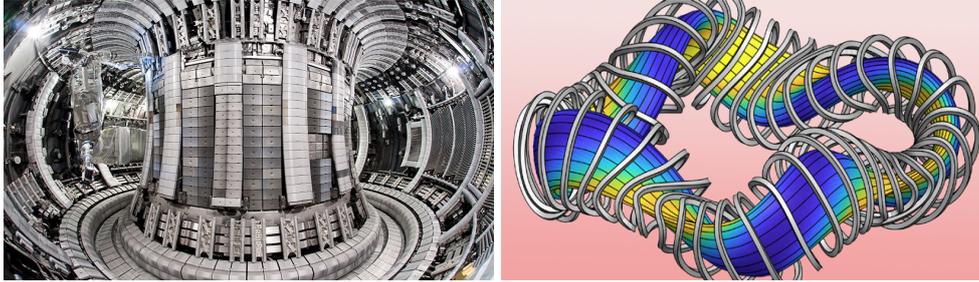


(a) Manchas solares

(b) Erupción magnética

Por otra parte, ya en la década de los 50, los físicos que estudiaban el plasma mostraron su interés en la MHD como posibilidad para controlar el ritmo de la termofusión nuclear. En particular, estaban interesados en la inestabilidad del plasma cuando se le sometía a un campo magnético. Esto se conoce como el confinamiento de plasma magnético, cuyo principal objetivo era la producción de energía mediante reacciones termonucleares.

De este interés surgieron dispositivos como el Tokamak o el Stellarator, ambos con el objetivo de obtener la fusión nuclear mediante confinamiento magnético. Aquí, la temperatura del plasma, 10^8K , debe mantenerse y las fuerzas magnéticas se usan para mantener el plasma caliente alejado de las paredes del reactor. La principal diferencia entre ambos es su configuración magnética: mientras que en los Stellarators el campo magnético usado para el confinamiento del plasma es generado en su totalidad por bobinas externas, en los Tokamaks, parte de ese campo magnético es generado por una corriente alterna que se induce en el plasma, lo que genera una gran inestabilidad y complica su operación.



(a) Tokamak

(b) Stellarator

En la ingeniería, la MHD no despertó gran interés hasta la década de los 60. Sin embargo, en 1918 J. Hartmann emprendió una investigación sobre el movimiento del mercurio a través de un campo magnético homogéneo. A Hartmann se le conoce como el padre de la MHD de metales líquidos y se acuñó el término *Hartmann flow* para describir cómo discurre un fluido viscoso, incompresible y conductor eléctrico a través de un conducto rectangular atravesado perpendicularmente por un campo magnético.

En los años 60, se popularizó el uso de sodio líquido como refrigerante en los reactores de reproducción rápida para controlar la termofusión nuclear (se requería que el plasma caliente fuera confinado lejos de las superficies materiales por fuerzas magnéticas) y la generación de energía mediante MHD (se pensó que un gas ionizado propulsado a través de un campo magnético mejoraría la eficiencia en las estaciones generadoras de energía). Aunque este último punto fue impracticable, sentó las bases de la investigación de la MHD desde el punto de vista de la metalurgia. Dos décadas más tarde, los campos magnéticos se utilizarían rutinariamente para calentar, bombear, agitar y levitar metales líquidos en la industria metalúrgica.

Otra importante aplicación en ingeniería es la que se conoce como agitación electromagnética. En esta, el metal líquido que se va a agitar se coloca en un campo magnético rotatorio. Así pues, tenemos un motor de inducción con el metal líquido haciendo de rotor. Una de sus aplicaciones más comunes es la homogeneización de la zona líquida de un lingote parcialmente solidificado.



(a) Agitador electromagnético de laboratorio

(b) Agitador electromagnético industrial

1.3. Contenido del TFG

Esta memoria está dividida en varios capítulos que procedemos a detallar a continuación.

En el capítulo 2, fijaremos la notación que usaremos en el desarrollo del trabajo, así como varios operadores matemáticos y propiedades de los mismos. Por último, enunciaremos dos teoremas clásicos del análisis matemático que nos serán de gran utilidad a la hora de demostrar ciertos resultados.

En el capítulo 3, estudiaremos las componentes principales que rigen las ecuaciones de la MHD: las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de la dinámica de fluidos. En una segunda parte, derivaremos como un caso de especial interés las ecuaciones de la magneto-hidrodinámica ideal incompresible.

En el capítulo 4, estudiaremos los invariantes globales de las ecuaciones de la magneto-hidrodinámica ideal incompresible: la conservación del momento, la conservación de la energía y la conservación de la helicidad cruzada y magnética.

Para finalizar este trabajo, en el capítulo 5, haremos un estudio lineal de las soluciones de tipo onda para las ecuaciones de la magneto-hidrodinámica ideal incompresible.

Preliminares

En este capítulo, fijaremos la notación e introduciremos los operadores diferenciales que necesitaremos para el desarrollo de este trabajo. También, incluiremos algunos de los teoremas clásicos del cálculo de varias variables. Para desarrollar esta sección hemos utilizado las referencias bibliográficas [4, 7].

Sea $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un punto del espacio y $t \in [0, \infty)$ un real no negativo. Además, sea $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $f : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar suficientemente regulares, al menos $\mathbf{u} \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ y $f \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ respectivamente. A continuación, definamos los cuatro operadores diferenciales de vital importancia en nuestro trabajo.

Definición 1. Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$. Se define el operador gradiente actuando sobre f como el vector

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Por otro lado, sea $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3) \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$. Se define el operador gradiente sobre el campo vectorial \mathbf{u} como

$$\nabla \mathbf{u} = J_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x} & \frac{\partial u^1}{\partial y} & \frac{\partial u^1}{\partial z} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x} & \frac{\partial u^2}{\partial y} & \frac{\partial u^2}{\partial z} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x} & \frac{\partial u^3}{\partial y} & \frac{\partial u^3}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

A la anterior matriz se le conoce como matriz jacobiana del campo vectorial \mathbf{u} .

Definición 2. Sea $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3) \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ un campo vectorial. Se define la divergencia sobre \mathbf{u} como el escalar

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} + \frac{\partial u^3}{\partial z}.$$

Definición 3. Sea $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3) \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ un campo vectorial. Se define el rotacional sobre \mathbf{u} como el determinante

$$\nabla \times \mathbf{u} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial u^2}{\partial z} + \frac{\partial u^3}{\partial y} \\ -\frac{\partial u^3}{\partial x} + \frac{\partial u^1}{\partial z} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial u^1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Definición 4. Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$. Se define el operador laplaciano sobre f como el escalar

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Notemos que $\Delta f = (\nabla \cdot \nabla)f$. De esta manera, se define el operador laplaciano sobre un campo vectorial $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3) \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ como

$$\Delta \mathbf{u} = (\Delta u^1, \Delta u^2, \Delta u^3).$$

Usaremos durante el trabajo distintas propiedades de los operadores diferenciales vectoriales definidos previamente.

Proposición 1. Sean $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H} \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ y $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, entonces se cumplen las siguientes identidades vectoriales

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}), \quad (2.2)$$

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{F} = -\nabla \left(\frac{|\mathbf{F}|^2}{2} \right) + (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{F}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \otimes \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) = \mathbf{G}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{H}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}), \quad (2.5)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) = \mathbf{G} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{F}) = \mathbf{H} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}), \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{F} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{F}), \quad (2.8)$$

$$(\nabla \times \mathbf{G}) \times \mathbf{F} = (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} - (\nabla \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}. \quad (2.9)$$

Para concluir, enunciemos los siguientes resultados clásicos del análisis matemático

Teorema 1 (Teorema de la divergencia). Sea V una superficie diferenciable de \mathbb{R}^3 y ∂V su frontera (regular). Sea $V \subseteq M$ y $\mathbf{u} \in C^2(M; \mathbb{R}^3)$. Entonces

$$\int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx.$$

Teorema 2 (Teorema de Stokes). Sea V una superficie de \mathbb{R}^3 , parametrizada por $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio de \mathbb{R}^2 . Si $\mathbf{u} \in C^1(\varphi(M), \mathbb{R}^3)$, se tiene que:

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dV = \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}.$$

Las ecuaciones de Maxwell y la mecánica de fluidos

En el capítulo 1 observamos que la MHD está presente en muchos campos de nuestra vida actual. Para poder comprender su naturaleza, hemos de analizar las ecuaciones que rigen su comportamiento. En este capítulo, estudiaremos sus dos componentes principales: las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de la dinámica de fluidos. Combinando ambas derivaremos las ecuaciones de la MHD.

Las ecuaciones de Maxwell son el punto de unión entre la electricidad y el magnetismo: describen el conocido electromagnetismo. Como veremos, las ecuaciones de Maxwell se definen mediante una serie de leyes físicas y leyes de constitución. A continuación, estudiaremos cada una de ellas por separado.

Para el desarrollo de las ecuaciones de Maxwell y su aproximación a la MHD hemos utilizado las referencias [3, 7]. Por otra parte, para la dinámica de fluidos hemos utilizado las referencias [2, 8].

3.1. Las leyes físicas

En esta sección, analizaremos las cuatro leyes físicas necesarias para describir las ecuaciones de Maxwell.

La ley de Ampère

La ley de Ampère relaciona el campo magnético \mathbf{B} con la corriente eléctrica. En términos matemáticos viene descrita por

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.1)$$

donde C es una curva cerrada, S la superficie que extiende a C , \mathbf{J} la densidad de corriente y \mathbf{D} la densidad de flujo eléctrico.

Aplicando el Teorema 2 a la parte izquierda de (3.1), se puede observar que

$$\int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.2)$$

Además, como (3.2) es cierto para cualquier superficie S se tiene que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) se conoce como la ley de Ampère en forma diferencial.

La ley de Gauss del campo magnético

Esta ley indica que el flujo del campo magnético \mathbf{H} a lo largo de una superficie cerrada regular es 0, es decir,

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0, \quad (3.4)$$

donde S es una superficie cerrada con volumen V . Por tanto, aplicando el Teorema 1 a la ecuación (3.4) se obtiene

$$0 = \oint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{H} \, dx. \quad (3.5)$$

Además, como (3.5) es cierto para cualquier V volumen encerrado por S , se deduce que:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) se conoce como ley de Gauss del campo magnético en forma diferencial.

La ley de Faraday

Esta ley relaciona el campo eléctrico \mathbf{E} y el flujo del campo magnético \mathbf{H} . Viene descrita matemáticamente como

$$\oint_C \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (3.7)$$

donde S es una superficie encerrada por la curva C . Aplicando el Teorema 2 a la ecuación (3.7) se obtiene

$$\oint_C \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (3.8)$$

Además, como (3.8) es cierto para cualquier superficie S encerrada por la curva C , se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E}) = 0 \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) se conoce como ley de Faraday en forma diferencial.

La ley de Gauss del campo eléctrico

En esta ley se relaciona el flujo eléctrico \mathbf{D} en una superficie cerrada con la carga total. Matemáticamente se tiene que

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \rho_c \, dx, \quad (3.10)$$

donde ρ_c es la densidad de carga eléctrica y V cualquier volumen que encierra la superficie S . Aplicando el Teorema 1 a la ecuación (3.10) se tiene que

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dx = \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \rho_c \, dx.$$

Por tanto, concluimos que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c. \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) se conoce como la ley de Gauss del campo eléctrico en forma diferencial.

3.2. Leyes de constitución y leyes materiales

En esta sección, analizaremos tanto las leyes de constitución como las leyes materiales necesarias para describir las ecuaciones de Maxwell.

Leyes de constitución

La primera ley de constitución relaciona un campo magnético con su densidad mediante un término conocido como magnetización, representado por \mathbf{M} . Viene dada matemáticamente por

$$\mathbf{H} = \mu \mathbf{B} + \mu_0 \mathbf{M},$$

donde μ es la permeabilidad magnética, es decir, el grado de magnetización de un material en respuesta a un campo magnético; y μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío, una constante independiente del campo magnético por la que se referencia la permeabilidad magnética del resto de materiales.

La segunda ley de constitución relaciona la densidad del campo eléctrico con el campo eléctrico mediante un término \mathbf{P} conocido como polarización eléctrica

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

donde ϵ es la permitividad eléctrica, una constante física que describe cómo un campo eléctrico afecta y es afectado por un medio.

Además, se da la relación $\mu_0\epsilon_0c^2 = 1$, donde c es la velocidad de la luz y ϵ_0 la permeabilidad eléctrica en el vacío.

Nosotros trataremos con una clase particular de fluidos. Más precisamente, estudiaremos líquidos eléctricamente conductores como metales líquidos, sales fundidas y similares. Para ello, utilizaremos lo que se conoce como aproximación de la magnetohidrodinámica. Así pues, asumiremos que $\mu_0 = \mu$ y $\epsilon_0 = \epsilon$.

Por último, destacaremos una ley de gran importancia, la ley de Ohm, que relaciona la densidad de corriente \mathbf{J}_c con su campo eléctrico \mathbf{E} y un parámetro, que denotaremos por σ , conocido como conductividad. Este último mide la capacidad de un material o sustancia para dejar pasar la corriente eléctrica a través de él. La expresión matemática de la ley de Ohm es

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}.$$

Además, cuando el medio se mueve con un campo de velocidades \mathbf{v} se tiene que

$$\mathbf{J}_c = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}).$$

Leyes materiales

Consideremos una partícula que se mueve con velocidad \mathbf{v} y tiene una carga q . La fuerza que actúa en esta partícula viene dada por

$$f = q\mathbf{E}_i + q\mathbf{E}_s + q(\mathbf{v} \times \mathbf{H}),$$

donde \mathbf{E}_i es el campo eléctrico inducido y \mathbf{E}_s es el campo electrostático. Si denotamos por $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s$, tenemos que

$$f = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{H})). \quad (3.12)$$

La ecuación (3.12) se conoce como fuerza de Lorentz.

Por otro lado, estudiemos la conservación de la carga. Supongamos un cierto volumen cerrado V a cuya frontera denotaremos por S , es decir, $\partial V = S$. Denotamos por $\rho_c(\mathbf{x}, t)$ a los puntos del volumen con cierta carga. Entonces, se tiene que la cantidad total de carga en V viene dada por

$$Q(t) = \int_V \rho_c(\mathbf{x}, t) dV.$$

Como la anterior integral no depende del tiempo, y asumiendo que podemos intercambiar integrales con derivadas, tenemos que

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho_c}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.13)$$

La variación de la carga total de un volumen cerrado, $\frac{dQ}{dt}(t)$, viene dada por la pérdida o ganancia de carga a través de su frontera. Matemáticamente, podemos expresar lo anterior como

$$\frac{dQ}{dt}(t) = \oint_S \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (3.14)$$

Aplicando el Teorema 1 a la ecuación (3.14), tenemos que

$$\oint_S \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}_c) \, dV. \quad (3.15)$$

Combinando las ecuaciones (3.13) y (3.15) se obtiene que

$$\int_V \frac{\partial \rho_c(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \, dV = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}_c) \, dV.$$

Por tanto, como esto es cierto para cualquier volumen cerrado V , tenemos que

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_c.$$

3.3. Las ecuaciones de Maxwell y su aproximación a MHD

Recapitulando lo obtenido hasta el momento, tenemos los siguientes sistemas de ecuaciones. Las leyes físicas derivadas en la sección 3.1 vienen dadas por

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E}) = 0, \quad (3.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c. \quad (3.19)$$

Las leyes de constitución derivadas en la sección 3.2 vienen dadas por

$$\mathbf{H} = \mu \mathbf{B} + \mu_0 \mathbf{M}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{J}_c = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}). \quad (3.22)$$

Por último, las leyes materiales, derivadas también en la sección 3.2, están dadas por

$$f = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad (3.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}(\mathbf{x}, t). \quad (3.24)$$

Para aproximar las ecuaciones completas de Maxwell a las de la MHD, tenemos que ser capaces de comparar los distintos términos que aparecen. Para ello, usaremos un argumento clásico en física que consiste en adimensionalizar las ecuaciones. En primer lugar, definimos las cantidades características asociadas a cada una de las funciones. Nótese que, por cuestión de claridad, no explicitaremos la dependencia espacial y temporal de las variables dependientes, es decir, en general sólo escribiremos \mathbf{F} para realmente expresar $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$. Estas cantidades se recogen en la siguiente tabla:

Magnitud característica	Notación
Velocidad	$[u]$
Longitud	$[L]$
Campo magnético	$[H]$
Intensidad de campo magnético	$[B]$
Corriente eléctrica	$[J]$
Campo eléctrico	$[E]$
Escala temporal	$[T] = \frac{[u]}{[L]}$

Tabla 3.1: Magnitudes características y notaciones

Definimos las nuevas variables independientes adimensionales por

$$\mathbf{x} = [L]\mathbf{x}^*, \quad \mathbf{t} = [T]\mathbf{t}^*, \quad (3.25)$$

y las variables dependientes como

$$\mathbf{v} = [u]\mathbf{v}^*, \quad \mathbf{H} = [H]\mathbf{H}^*, \quad \mathbf{B} = [B]\mathbf{B}^*, \quad \mathbf{J} = [J]\mathbf{J}^*, \quad \mathbf{E} = [E]\mathbf{E}^*. \quad (3.26)$$

De la misma manera, podemos adimensionalizar los operadores diferenciales como sigue

$$\nabla = \frac{1}{[L]}\nabla^*, \quad \Delta = \frac{1}{[L]^2}\Delta^*, \quad \partial_t = \frac{1}{[T]}\partial_t^*. \quad (3.27)$$

Antes de analizar las ecuaciones adimensionales, estudiaremos las leyes de constitución para nuestro caso particular. En MHD, consideramos sólo materiales que son conductores y libres de efectos de polarización y magnetismo, es decir, asumimos que

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} = 0. \quad (3.28)$$

Así pues, usando (3.28), las leyes de constitución quedan reducidas a

$$\mathbf{H} = \mu\mathbf{B}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}). \quad (3.31)$$

Estamos en condiciones de poder adimensionalizar las ecuaciones de Maxwell. Comenzaremos con la ley de Faraday, es decir, la ecuación (3.18). Se tiene que

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{[E]}{[L]}(\nabla^* \times \mathbf{E}^*) = -\frac{[H]}{[T]} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

y por tanto,

$$\frac{[E]}{[L]} \sim \frac{[H]}{[T]} \Leftrightarrow \frac{[E]}{[H]} \sim \frac{[L]}{[T]} = [u]. \quad (3.32)$$

Luego, concluimos que la razón entre el campo eléctrico característico y el campo magnético característico debe ser del mismo orden que la velocidad característica.

Continuemos analizando la ley de Ampère, en concreto, la ecuación (3.16). Se tiene que:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{[B]}{[L]}(\nabla^* \times \mathbf{B}^*) = [J]\mathbf{J}^* + \frac{[D]}{[T]} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t^*}.$$

Compararemos en primer lugar $\frac{[B]}{[L]}(\nabla^* \times \mathbf{B}^*)$ con $\frac{[D]}{[T]} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t^*}$. Utilizando las ecuaciones (3.29) y (3.30) se tiene que:

$$\frac{\frac{[D]}{[T]}}{\frac{[B]}{[L]}} \sim \frac{\frac{\epsilon[E]}{[T]}}{\frac{[H]}{\mu[L]}} = \frac{\mu\epsilon[E][L]}{[T][H]} = \mu\epsilon \frac{[E]}{[H]} [u].$$

Como consecuencia de (3.32) se tiene que:

$$\mu\epsilon \frac{[E]}{[H]} [u] \sim \epsilon\mu [u]^2 = \frac{[u]^2}{c^2}.$$

En MHD, nuestras velocidades son muy inferiores a la velocidad de la luz, es decir, las velocidades son no relativistas. Por tanto, $\frac{[D]}{[T]} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t^*}$ es un término despreciable.

Nos interesa comparar ahora $[J]\mathbf{J}^*$ con $\frac{[D]}{[T]} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t^*}$. Utilizando las ecuaciones (3.30) y (3.31) obtenemos que

$$\frac{[J]}{\frac{[D]}{[T]}} = \frac{[J]}{\frac{\epsilon[E]}{[T]}} = \frac{[J][T]}{\epsilon[E]} = \frac{\sigma([E] + [u] \times [H])[T]}{\epsilon[E]} = \frac{\sigma}{\epsilon} [T] + \frac{[L][H]}{[E]} \frac{\sigma}{\epsilon}.$$

Debido a que $\frac{[E]}{[L]} \sim \frac{[H]}{[T]}$, encontramos la relación

$$\frac{\sigma}{\epsilon}[T] + \frac{[L][H]}{[E]} \frac{\sigma}{\epsilon} \sim \frac{\sigma}{\epsilon}[T].$$

Así pues, podemos concluir que para las ecuaciones de la MHD, la ecuación de Ampère (3.16) se reduce a

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \quad (3.33)$$

Combinando (3.29) con (3.33), tenemos que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mu \mathbf{J}. \quad (3.34)$$

Continuamos adimensionalizando la ley de Lorentz, es decir, la ecuación (3.23). En el régimen asintótico de MHD, estamos interesados en entender las fuerzas totales que actúan en el medio, por tanto, queremos sumar en (3.23) lo que ocurre para todas las cargas por unidad de volumen. Entonces, se tiene que

$$\sum q \longrightarrow \rho_c, \quad \sum (q\mathbf{v}) \longrightarrow \mathbf{J}. \quad (3.35)$$

Por consiguiente, haciendo uso de (3.35), la ecuación de fuerzas de Lorentz se transforma en

$$\mathbf{F} = \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{H}. \quad (3.36)$$

De las ecuaciones (3.22) y (3.24), se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \sigma \nabla \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}) = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{H}),$$

es decir

$$\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{H}) - \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.37)$$

De la ecuación (3.37) podemos concluir que

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{H}). \quad (3.38)$$

Por otra parte, de las ecuaciones (3.19) y (3.30) se tiene que

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_c.$$

Sustituyendo en la ecuación (3.38) se tiene que

$$0 = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{H}) + \frac{\partial \rho_c}{\partial t} = \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_c + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{H}) + \frac{\partial \rho_c}{\partial t}. \quad (3.39)$$

Se define el tiempo de relajación de la carga como τ_e como

$$\tau_e = \frac{\epsilon}{\sigma},$$

siendo σ la conductividad y ϵ la permeabilidad eléctrica. En MHD, los tiempos de relajación son del orden de $10^{-8}[s] \ll 1$. Por tanto, para la aproximación a MHD,

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_c \gg \frac{\partial \rho_c}{\partial t}, \quad (3.40)$$

y, por consiguiente, el término $\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$ es despreciable. Así pues, la ecuación (3.24) queda reducida a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.41)$$

Despreciando el término $\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$ en la ecuación (3.39) tenemos que

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_c = -\sigma \nabla \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{H}). \quad (3.42)$$

Procedemos ahora a adimensionalizar la ecuación (3.42). Tenemos que

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_c = -\sigma \nabla \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{H}) \iff \rho_c = -\frac{\epsilon[u][H]}{[L]} (\nabla^* \cdot (\mathbf{v}^* + \mathbf{H}^*)).$$

Es decir, se tiene la relación

$$[\rho_c] \sim \frac{\epsilon[u][H]}{[L]} \iff [\rho_c][E] \sim \frac{\epsilon[u][H]}{[L]} [E].$$

Utilizando la ley de Ohm, es decir, la ecuación $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, se tiene que

$$[\rho_c][E] \sim \frac{\epsilon[u][H]}{[L]} [E] = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{[u][H]}{[L]} [J] = -\tau_e \frac{[u][H]}{[L]} [J].$$

Por tanto, la contribución del campo de fuerzas eléctrico es despreciable en comparación con las fuerzas magnéticas, es decir, la ecuación (3.36) se reduce a

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{H}. \quad (3.43)$$

En conclusión, combinando las ecuaciones (3.17), (3.18), (3.31), (3.33), (3.41) y (3.43) hemos derivado la aproximación a MHD de las ecuaciones de Maxwell que vienen dadas por el siguiente sistema

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad (3.46)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mu \mathbf{J}, \quad (3.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (3.48)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{H}. \quad (3.49)$$

3.4. La ecuación de la inducción

Usaremos las ecuaciones de la aproximación a MHD para deducir la ecuación de la inducción. Para ello, notamos que combinando las ecuaciones (3.45) y (3.46) se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} - (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right) = \frac{-1}{\sigma} (\nabla \times \mathbf{J}) + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}). \quad (3.50)$$

Utilizando en (3.50) la ecuación (3.47) se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{-1}{\sigma} \left(\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{H}) \right) \right) + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}). \quad (3.51)$$

Haciendo uso de la identidad vectorial (2.1) en el lado derecho de (3.51) obtenemos que

$$\frac{-1}{\sigma\mu} ((\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}))) + \frac{1}{\sigma\mu} \Delta \mathbf{H} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}).$$

Por tanto, usando la ecuación (3.44), se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \lambda \nabla \mathbf{H}, \quad (3.52)$$

siendo $\lambda = \frac{1}{\sigma\mu}$ el conocido como coeficiente de difusión magnética. Procedemos entonces a adimensionalizar la ecuación (3.52) obteniendo que

$$\frac{[H]}{[T]} \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial t^*} = \left(\frac{1}{[L]} [u][H] \right) (\nabla^* \times (\mathbf{v}^* \times \mathbf{H}^*)) + \frac{\lambda[H]}{[L]^2} \Delta^* \mathbf{H}^*. \quad (3.53)$$

Notando que $\frac{[T]}{[L]} [u] = 1$ se obtiene que

$$\frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial t^*} = (\nabla^* \times (\mathbf{v}^* \times \mathbf{H}^*)) + \frac{\lambda[T]}{[L]^2} \Delta^* \mathbf{H}^*. \quad (3.54)$$

Si denotamos por Re_m al número de Reynolds magnético, se tiene que

$$\frac{\lambda[T]}{[L]^2} = \frac{1}{Re_m}.$$

Por consiguiente, obtenemos que

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})) + \frac{1}{Re_m} \Delta \mathbf{H}, \quad (3.55)$$

conocida como **ecuación de la inducción**.

3.5. Las ecuaciones de la mecánica de fluidos

En esta sección presentamos la derivación de una de las ecuaciones más influyentes de los últimos siglos: las ecuaciones de Euler. Estas ecuaciones describen el movimiento de un fluido incompresible no viscoso. Sin embargo, cuando necesitamos introducir en el modelo los efectos viscosos de los fluidos, es decir, cuando el término disipativo es del mismo orden que el término convectivo, estas ecuaciones reciben el nombre de Navier-Stokes. La derivación se basa en dos principios físicos:

- La conservación de la masa,
- La conservación del momento lineal (2^o ley de Newton).

Denotaremos por Ω a una región dos o tres-dimensional ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$) en el espacio euclídeo que contiene un cierto fluido. Denotamos por $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega$ y $t \in \mathbb{R}^+$ que denota la variable temporal. Nuestras variables dependientes son las siguientes:

- La densidad de masa $\rho(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ con unidades $[\rho] = \frac{[m]}{[L]^n}$
- El campo de velocidades del fluido $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ con unidades $[u] = \frac{[L]}{[T]}$.

3.5.1. La conservación de la masa

Asumimos que para cada tiempo $t \in \mathbb{R}^+$ fijo, la función $f(\mathbf{x}, t)$ está bien definida (regular). Sea $V \subseteq \Omega$ una subregión fija de Ω . Entonces, la masa del fluido en V a tiempo t viene dada por:

$$m_V(t) = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV,$$

donde dV es el elemento de volumen en el plano o en el espacio. Además, $[m_V] = [m]$. Entonces, asumiendo que podemos derivar bajo el signo integral, se tiene que

$$\frac{d}{dt} m_V(t) = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \rho_t(\mathbf{x}, t) dV.$$

Nos preguntamos ahora cómo puede variar la masa de un fluido en una región fija V con respecto al tiempo t . Una respuesta sencilla a dicha pregunta es que, o bien entre fluido por la frontera, o bien se escape por la misma. Es decir, para un tiempo t , el flujo a través de un punto de la frontera de V (∂V asumida regular) viene dado por

$$\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n},$$

donde \mathbf{n} es la normal exterior unitaria en la frontera ∂V . Además, $[\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] = [m]$. Por tanto, utilizando el Teorema 1 se tiene que

$$\int_V \rho_t(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV.$$

Por consiguiente

$$\int_V (\rho_t(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})) = 0, \forall V \subseteq \Omega.$$

Por lo que se deduce que

$$\rho_t(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \quad (3.56)$$

La ecuación (3.56) se conoce como **ecuación de la continuidad**.

3.5.2. La conservación del momento lineal

Estudiemos ahora la conservación del momento lineal (masa por velocidad). Este principio de conservación se rige por la segunda ley de Newton que nos dice que la tasa de cambio del momento lineal debe ser compensada por la fuerza total del sistema. No obstante, calcular la tasa de cambio temporal del momento lineal es más complicado que simplemente tomar una derivada temporal. Ya abordamos esto implícitamente al derivar la ecuación de continuidad, pero es útil centrarse en este punto para la descripción espacial de la velocidad y la aceleración.

Como ρ no es, en general, constante, es difícil trabajar a nivel puntual para calcular la tasa de cambio temporal del momento lineal. Por tanto, volveremos a tomar una subregión fija $V \subseteq \Omega$ y seguiremos el mismo razonamiento que en la conservación de la masa, examinando cómo el momento lineal total en V puede cambiar con el tiempo.

Consideremos una porción de fluido en el interior de V a tiempo t . Tomemos el momento lineal en una de las direcciones, por ejemplo, en la de x . Nótese que tenemos que tener en cuenta que el fluido está entrando y saliendo de V .

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v^1 dV = \int_V \frac{\partial(\rho v^1)}{\partial t} dV.$$

La integral anterior no tiene en cuenta el cambio en el momento lineal total como consecuencia de la entrada y salida de fluido a través de la frontera de V . Esto último viene recogido por la integral

$$\int_{\partial V} (\rho v^1) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Por tanto, la tasa de cambio total del momento lineal en la dirección x viene dada por la expresión

$$T_t = \int_V \frac{\partial(\rho v^1)}{\partial t} dV + \int_{\partial V} (\rho v^1) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.57)$$

Aplicando el Teorema 1 sobre el segundo sumando del lado derecho de la ecuación (3.57) obtenemos

$$T_t = \int_V \left(\frac{\partial(\rho v^1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v^1 \mathbf{v}) \right) dV. \quad (3.58)$$

Las demás direcciones se razonarán de manera análoga sustituyendo v^1 por v^2 y, en tal caso, v^3 .

En el caso de la conservación de la masa, la expresión análoga a la anterior era igual a 0 pues no habían más factores que generaran masa. En este caso, habrán otras fuerzas que contrarresten el momento lineal. Por ello, debemos compensar la expresión (3.58) con la fuerza neta total en la dirección x actuando sobre V . Lo mismo para el resto de las direcciones con sus respectivas expresiones.

Las fuerzas que actúan sobre una pieza de material, en nuestro caso un volumen lleno de fluido, son de dos tipos:

- **Fuerzas internas** (estrés): las que se ejercen entre sí partículas vecinas de la pieza de material, lo que provoca una fuerza ejercida sobre la superficie de la pieza. Por ejemplo, la presión en el caso de un fluido.
- **Fuerzas externas**: ejercen una fuerza por unidad de volumen sobre la pieza de material. Por ejemplo, la gravedad o un campo magnético.

Sobre cualquier material actúan las fuerzas internas, luego nos centraremos en ellas. Definimos un **fluido ideal** como un fluido con la siguiente propiedad

Definición 5. *Para cualquier movimiento del fluido existe una función $p(\mathbf{x}, t)$ llamada **presión**, tal que si S es una superficie en el fluido con normal unitaria \mathbf{n} , la fuerza de estrés ejercida sobre la superficie S por unidad de área en $\mathbf{x} \in S$ a tiempo t es $p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$.*

Nótese que la fuerza actúa en la dirección de \mathbf{n} y que es ortogonal a la superficie de S , por lo que no existen fuerzas tangenciales. Esto último hace que no puedan haber rotaciones en el fluido ni, si las hubiera en un principio, forma de pararlas.

Si V es una región en el fluido en un instante de tiempo t , las fuerzas totales ejercidas en el fluido encerrado por V como resultado del estrés en su superficie vienen dadas por:

$$\mathbf{S}_{\partial V} = - \int_{\partial V} p \mathbf{n} dV,$$

(negativo porque \mathbf{n} apunta hacia fuera) donde dV es el elemento de volumen. Si \mathbf{e} es cualquier vector fijo en el espacio, por el Teorema 1 se tiene que

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{S}_{\partial V} = - \int_{\partial V} p \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} dV = - \int_V \nabla \cdot (p \mathbf{e}) dV = - \int_V \nabla p \cdot \mathbf{e} dV.$$

Por consiguiente

$$\mathbf{S}_{\partial V} = - \int_V \nabla p \, dV.$$

Usando la segunda ley de Newton, que nos dice que la suma total de fuerzas es igual a la masa por la aceleración, concluimos que

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p. \quad (3.59)$$

A esta última, podemos añadir los efectos de fuerzas externas. Teniendo en cuenta estas últimas, la ecuación (3.59) queda modificada como sigue:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{f}, \quad (3.60)$$

donde \mathbf{f} son las fuerzas externas consideradas. La ecuación (3.60) se conoce como **ley de conservación del momento lineal**.

Como caso particular, podemos tomar $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ siendo $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ y g la constante de gravitación universal.

Esta derivación está lejos de ser genérica para cualquier fluido; la conservación de la masa dio lugar a la función escalar continua (3.56) y la conservación del momento lineal dio lugar a la ecuación (3.60). Recordemos que las variables dependientes eran la densidad ρ y el campo de velocidades \mathbf{v} . Por último, debemos tener en cuenta el término de la presión que juega un papel fundamental. A continuación, diferenciaremos entre los tres casos siguientes.

3.5.3. Dinámica de gases: las ecuaciones de Euler compresibles

Consideremos un gas ideal. Este es un ejemplo de **fluido compresible**: tomando una región del fluido (una colección de partículas del fluido) moviéndose con el tiempo, su volumen puede cambiar. O lo que es lo mismo, su densidad puede variar en función del tiempo y del espacio. Por tanto, la presión en cualquier punto será una función dependiente de la densidad, esto es,

$$p = h(\rho), \quad (3.61)$$

para cierta función h . Como era de esperar, h es una función creciente (a mayor densidad, mayor presión). La elección de la función dependerá de la naturaleza del gas. Para muchos de estos, h es simplemente $h(\rho) = c_0 \rho^\gamma$, donde $c_0, \gamma > 0$.

Sustituyendo (3.61) en (3.60) tenemos las **ecuaciones de Euler compresibles**

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla h(\rho) + \mathbf{f}, \quad (3.62)$$

$$\rho_t(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.63)$$

Las ecuaciones (3.62) y (3.63) describen la dinámica de gases y consisten en un sistema de cuatro ecuaciones en derivadas parciales con cuatro variables desconocidas (ρ, v^1, v^2, v^3) . Son ecuaciones quasilineales de primer orden. Además, las discontinuidades y las ondas de choque son soluciones exclusivas de estas ecuaciones de la dinámica de gases. Un caso simplificado del sistema (3.62) - (3.63), que desarrolla discontinuidades, es la conocida como ecuación de Burgers.

3.5.4. Fluidos ideales: las ecuaciones de Euler incompresibles

Un líquido como el agua es también un ejemplo de fluido, sin embargo se diferencia de un gas porque es un **fluido incompresible**, esto es, cualquier región del fluido puede cambiar de forma, pero manteniendo el mismo volumen. Aunque hay muchas formas de caracterizar la incompresibilidad, véase [8, Proposición 1.4], una forma fácil es afirmar que la densidad ρ es constante en espacio y tiempo. En este caso, la ecuación de la continuidad (3.56) se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.64)$$

La ecuación (3.64) se conoce como **ecuación de incompresibilidad** o condición de divergencia cero.

En un líquido ideal incompresible, la presión p no es una función de la densidad ρ ni es una constante, más bien es una variable dependiente que debemos encontrar. Debe compensar el movimiento del fluido de manera que se mantenga la incompresibilidad. Por tanto, nos quedan las **ecuaciones de Euler incompresibles**

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla p + \mathbf{f}, \quad (3.65)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.66)$$

donde p es una variable dependiente que debemos resolver. Además, como p no aparece en la última ecuación, tenemos todavía un sistema de cuatro ecuaciones en derivadas parciales para cuatro variables desconocidas (v^1, v^2, v^3, p) . La densidad ya no es una variable dependiente, pero sí lo es la presión. Es decir, las ecuaciones (3.65) y (3.66) forman un sistema de ecuaciones cerrado.

3.5.5. Fluidos viscosos: las ecuaciones de Navier-Stokes

En esta sección incluiremos también ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden haciendo uso del Laplaciano de orden dos. En un líquido ideal, la única fuerza interna es la presión. Sin embargo, los líquidos que nos encontramos

en el día a día, como el aceite, no son líquidos ideales. Existe otra fuerza interna, conocida como fricción, que vulgarmente hablando se debe al “fluido frotándose contra sí mismo”. Dividiendo el fluido de una región V en dos partes mediante una superficie, la dirección de la fricción es tangente a dicha superficie de separación, a diferencia de la presión que es normal a la superficie anteriormente indicada. Esta fuerza de resistencia proviene de la velocidad relativa de las diferentes partículas del fluido. Es la responsable de la ralentización del fluido. En términos de fluidos, se le conoce como **viscosidad**.

Sin dar una derivación completa de este hecho, véase [2], esta fuerza aparece en la parte derecha de la ecuación (3.60) mediante el término

$$\nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v},$$

donde $\nu > 0$ es la constante de viscosidad y depende intrínsecamente del fluido que estamos describiendo.

Por tanto, para un líquido viscoso como puede ser el aceite, las ecuaciones son el sistema conocido como las **ecuaciones de Navier-Stokes**

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nu \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{f}, \quad (3.67)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.68)$$

Trataremos, a continuación, de adimensionalizar las ecuaciones (3.67) y (3.68). Asumiremos, por simplicidad, que el fluido es incompresible ($\rho(\mathbf{x}, t) = cte. > 0$). Consideramos también la presión característica $[p] = \rho[u]^2$.

Entonces, teniendo en cuenta (3.25)-(3.27), se tiene que la ecuación (3.67) se convierte en

$$\rho \frac{[u]}{[T]} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \rho \frac{[u]^2}{[L]} (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* - \nu \frac{[u]}{[L]^2} \Delta^* \mathbf{v}^* + \frac{[p]}{[L]} \nabla^* p^* = \mathbf{f}. \quad (3.69)$$

Multiplicando la ecuación (3.69) por $\frac{[L]}{\rho[u]^2}$ tenemos que

$$\frac{[L]}{[u][T]} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + 1 (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* - \frac{\nu}{\rho[u][L]} \Delta^* \mathbf{v}^* + \frac{[p]}{\rho[u]^2} \nabla^* p^* = \frac{[L]}{\rho[u]^2} \mathbf{f}.$$

Tengamos en cuenta que $\frac{[L]}{[u][T]} = 1$ y que $\frac{[p]}{\rho[u]^2} = 1$. Además, reescalando la fuerza como $\frac{[L]}{\rho[u]^2} \mathbf{f} = \mathbf{f}^*$ y eliminando los asteriscos obtenemos finalmente la ecuación adimensionalizada

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{f}, \quad (3.70)$$

donde $Re = \frac{[u][L]}{\nu}$ es un parámetro adimensional conocido como el **número de Reynolds**. Este coeficiente es de vital importancia para diferenciar los términos dominantes de la ecuación. En efecto, para $Re \ll 1$, el flujo está dominado por el término de la viscosidad, mientras que para $Re \gg 1$ el término convectivo es el dominante.

3.6. Las ecuaciones de la magneto-hidrodinámica

En las secciones 3.1-3.5 hemos adquirido los conocimientos básicos necesarios en electromagnetismo y dinámica de fluidos para poder derivar las ecuaciones de la MHD. Consideraremos solamente fluidos no magnéticos, conductores e incompresibles. Además, consideraremos fluidos newtonianos, es decir, aquellos cuya viscosidad ν es constante.

En primer lugar, consideramos las ecuaciones de Maxwell reducidas (3.48), (3.44), (3.47) y (3.45); así como la ley de Ohm y la fuerza de Lorentz (3.46) y (3.49), respectivamente. Combinando las anteriores, obtuvimos una ecuación del transporte para \mathbf{H} , la ecuación de la inducción, que recordemos que viene dada por

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})) + \frac{1}{Re_m} \Delta \mathbf{H}.$$

Por otro lado, las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido viscoso vienen dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{f}.$$

Entonces, teniendo en cuenta la fuerza de Lorentz $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{H}$, tenemos que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{H}. \quad (3.71)$$

Por tanto, las ecuaciones de la magnetohidrodinámica para un fluido incompresible viscoso vienen dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{H}, \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})) + \frac{1}{Re_m} \Delta \mathbf{H}, \quad (3.73)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (3.74)$$

Un caso de particular interés que estudiaremos en el capítulo siguiente es el caso simplificado cuando $Re, Re_m \gg 1$, es decir, cuando los números de Reynolds y Reynolds magnéticos son suficientemente grandes. En este caso, los términos disipativos $\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}$ y $\frac{1}{Re_m} \Delta \mathbf{H}$ son despreciables. Así, el sistema (3.72)-(3.74) se reduce a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{H}, \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})), \quad (3.76)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (3.77)$$

Este nuevo sistema se conoce como **ecuaciones de la magneto-hidrodinámica ideal incompresible**.

Observación 1. Observando el sistema (3.75)-(3.77), nos damos cuenta que tenemos un sistema de ocho ecuaciones y siete incógnitas. Esto es por que la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ es mas bien una condición en el dato inicial. Dicho de otra manera, si imponemos que $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ a tiempo $t = 0$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ para todo $t > 0$. En efecto, apliquemos el operador divergencia a la ecuación (3.76) y tenemos que

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \cdot [\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})].$$

Sabiendo que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$ para cualquier vector \mathbf{u} , se tiene que

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0,$$

por lo que, integrando en tiempo, se deduce que

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0), \quad \forall t > 0.$$

Invariantes globales para las ecuaciones de la MHD ideal incompresible

En este capítulo vamos a estudiar los invariantes globales para las ecuaciones de la MHD ideal incompresible (3.75)-(3.77) presentadas al final del capítulo anterior. Para ello, es conveniente reescribir la ecuación de la inducción (3.76). Usando la identidad vectorial (2.7) con $F = \mathbf{v}$, $G = \mathbf{H}$ combinado con la condición de divergencia cero de ambos vectores se tiene que

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{H}. \quad (4.1)$$

Usando (4.1), concluimos que el sistema (3.75)-(3.77) es equivalente a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{H}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (4.4)$$

El objetivo de este capítulo es calcular los invariantes globales (cantidades conservadas) del sistema anterior. En particular, vamos a probar que el momento, la energía, la helicidad cruzada y la helicidad magnética se conservan con respecto al tiempo. Para ello, asumiremos que existe una solución regular, es decir, para $T > 0$, se tiene que

$$\mathbf{v} \in C^1([0, T]; C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)), \quad \mathbf{H} \in C^1([0, T]; C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)), \quad p \in C([0, T]; C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})),$$

en un dominio Ω con frontera regular ($\partial\Omega \in C^1$). Además, las soluciones anteriores cumplen las siguientes condiciones de frontera

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{en } \partial\Omega, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{en } \partial\Omega, \quad (4.6)$$

siendo \mathbf{n} la normal exterior. Es decir, los campos de velocidad y magnético son tangentes a la frontera del dominio. Esto implica que no hay flujo, o en otras palabras, que ni entra ni sale fluido ni campos magnéticos del dominio. Con estas condiciones podemos probar el siguiente resultado

Teorema 3 (Cantidades conservadas). *Sea $T > 0$ y sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ con $N = 2, 3$ un dominio con frontera regular ($\partial\Omega \in C^1$). Sean $\mathbf{v} \in C^1([0, T]; C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$, $\mathbf{H} \in C^1([0, T]; C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$ y $p \in C([0, T]; C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}))$ soluciones regulares de (4.2)-(4.4) en Ω satisfaciendo las condiciones de contorno (4.5) y (4.6). Entonces, se tienen las siguientes cantidades conservadas*

1. *La conservación del momento*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \left(p + \frac{|\mathbf{H}|^2}{2} \right) \mathbf{n} \, dS. \quad (4.7)$$

2. *La conservación de la energía*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} e(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0, \quad (4.8)$$

donde $e(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{H}|^2)(\mathbf{x}, t)$ es la energía.

3. *La conservación de la helicidad cruzada*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0. \quad (4.9)$$

4. *La conservación de la helicidad magnética*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} \, d\mathbf{x} = 0, \quad (4.10)$$

donde $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, siendo \mathbf{A} el vector potencial.

Observación 2. El Teorema 3 ha sido enunciado en dominios Ω con frontera $\partial\Omega$ bajo ciertas condiciones de contorno. El mismo resultado es cierto en el espacio euclídeo \mathbb{R}^N , $N = 2, 3$ bajo ciertas condiciones de decaimiento en el infinito de las soluciones.

Observación 3. El lector podrá observar que en la conservación del momento (4.7) el término de la derecha no es idénticamente cero. Sin embargo, esto sigue expresando una ley de conservación ya que variaciones en el momento total sólo pueden venir debido a flujos a través de la frontera.

Demostración. Empezaremos demostrando la conservación del momento (4.7). Para ello, notemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}.$$

Utilizando (4.2), se tiene que:

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \mathbf{J} \times \mathbf{H})(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}. \quad (4.11)$$

Usando que $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$ se tiene que $\mathbf{J} \times \mathbf{H} = (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}$. Además, haciendo uso de la identidad vectorial (2.3) se obtiene

$$(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} = -\nabla \left(\frac{|\mathbf{H}|^2}{2} \right) + (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}. \quad (4.12)$$

Sustituyendo (4.12) en la ecuación (4.11) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} [(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \nabla p + \nabla \left(\frac{|\mathbf{H}|^2}{2} \right) - (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}](\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega} [(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \nabla p_H - (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}](\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

donde $p_H = p + \frac{|\mathbf{H}|^2}{2}$. Utilizando la identidad vectorial (2.4) para $F = G = \mathbf{v}$ y para $F = G = \mathbf{H}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} [(\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v})) + \nabla p_H](\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H})](\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p_H - \nabla \cdot (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H})](\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado la ecuación (4.4). Aplicando el Teorema 1 se obtiene que lo anterior es igual a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p_H \mathbf{I} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{H}) \, dS$$

siendo \mathbf{I} la matriz identidad. Por último, aplicando nuevamente las condiciones de contorno (4.5) y (4.6) se concluye que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \left(p + \frac{|\mathbf{H}|^2}{2} \right) \, dS,$$

probando así (4.7).

Continuamos con la demostración de la conservación de la energía (4.8). Antes de empezar con la prueba es conveniente reescribir la ecuación (4.2). Multiplicando escalarmente por \mathbf{v} se tiene que

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = -\nabla p \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{J} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{v}. \quad (4.13)$$

Notemos que

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\mathbf{v}|^2). \quad (4.14)$$

Además, de la identidad vectorial (2.8) con $F = \mathbf{v}$ y $\varphi = |\mathbf{v}|^2$, se deduce que

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right) = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.15)$$

Por otro lado, utilizando la identidad vectorial (2.8) con $F = \mathbf{v}$ y $\varphi = p$, se tiene que

$$\nabla \cdot (p\mathbf{v}) = \nabla p \cdot \mathbf{v} + p(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (4.16)$$

Combinando (4.15) y (4.16) con (4.4) se tiene que

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \nabla \cdot (p\mathbf{v}) = \nabla p \cdot \mathbf{v}. \quad (4.17)$$

Por lo cual, combinando (4.13), (4.14) y (4.17) se obtiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\mathbf{v}|^2) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} + p\mathbf{v} \right) = (\mathbf{J} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{v}. \quad (4.18)$$

A continuación, reescribamos también la ecuación (4.3). Multiplicando escalarmente por \mathbf{H} se tiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\mathbf{H}|^2) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (4.19)$$

Utilizando la identidad vectorial (2.2) con $F = \mathbf{u} \times \mathbf{H}$ y $G = \mathbf{H}$ se tiene que

$$-\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot ((\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}) - (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}). \quad (4.20)$$

Por tanto, combinando (4.19) y (4.20) se concluye que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\mathbf{H}|^2) - \nabla \cdot ((\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}). \quad (4.21)$$

De la suma de las ecuaciones (4.18) y (4.21) se tiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|\mathbf{H}|^2 + |\mathbf{v}|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{u} + p\mathbf{v} - (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} \right) = (\mathbf{J} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{J}.$$

Utilizando la primera igualdad de la identidad vectorial (2.7) con $F = \mathbf{v}$, $G = \mathbf{J}$ y $H = \mathbf{H}$, se obtiene

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{J} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{H}).$$

Por lo que se concluye que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{H}|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} + p \mathbf{v} - (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} \right) = 0. \quad (4.22)$$

Integrando (4.22) en Ω se tiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{H}|^2)(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} + p \mathbf{v} - (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} \right)(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0. \quad (4.23)$$

Utilizando el Teorema 1 en la segunda integral de la ecuación (4.23), se tiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{H}|^2)(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} + I_1 + I_2 = 0,$$

donde

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + p \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS, \quad I_2 = - \int_{\partial\Omega} ((\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

De la condición de contorno (4.5), se observa que

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + p \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS = 0.$$

Además, utilizando la identidad vectorial (2.5) con $F = \mathbf{H}$, $G = \mathbf{v}$ y $H = \mathbf{H}$, se tiene que

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} = \mathbf{v}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{v})$$

Así pues, se deduce que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|\mathbf{v}|^2 + \mathbf{H} \cdot \mathbf{H})(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \, dS = 0.$$

Utilizando las condiciones de contorno (4.5) y (4.6) se tiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{H}|^2)(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Si denotamos

$$E(t) = \int_{\Omega} (|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{H}|^2)(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x},$$

e integramos en tiempo, se tiene que

$$E(t) = E(0), \quad t > 0,$$

lo que prueba (4.8).

Continuamos ahora con la demostración de la conservación de la helicidad cruzada(4.9). Antes de empezar con la prueba es conveniente reescribir la ecuación (4.2). Aplicando a (4.2) la identidad vectorial (2.3) se tiene que

$$\partial_t \mathbf{v} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} - \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{H}$$

Podemos definir $p_v = p + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}$ y entonces tenemos que

$$\partial_t \mathbf{v} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\nabla p_v + \mathbf{J} \times \mathbf{H}$$

También reescribiremos la ecuación (4.3). Utilizando la identidad vectorial (2.6) tomando $F = \mathbf{v}$ y $G = \mathbf{H}$ y teniendo en cuenta las condiciones de contorno (4.5) y (4.6) se tiene que

$$\partial_t \mathbf{H} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}). \quad (4.24)$$

Ahora sí, estamos en condiciones de demostrar la conservación de la helicidad cruzada. Así pues, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (\partial_t \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{H}_t) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} [[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \nabla p_v + \mathbf{J} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{H} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}))] \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Utilizando ahora la identidad vectorial (2.2) tomando $F = \mathbf{v}$ y $G = \mathbf{v} \times \mathbf{H}$ se tiene que

$$\int_{\Omega} \left[\mathbf{H} \cdot (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) - \nabla \cdot (\mathbf{H} p_v) + (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \nabla \cdot (\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})) \right] d\mathbf{x},$$

donde hemos tenido en cuenta que de (4.4) se deduce que

$$\mathbf{H} \cdot \nabla p_v = \nabla \cdot (\mathbf{H} p_v) + p_v (\nabla \cdot \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{H} p_v).$$

Usando la identidad vectorial (2.7) con $F = \mathbf{H}$, $G = \mathbf{v} \times \nabla$ y $H = \mathbf{v}$ se tiene que

$$\int_{\Omega} \left[(\mathbf{v} \times \nabla) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \nabla \cdot (\mathbf{H} p_v) + (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \nabla \cdot (\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})) \right] d\mathbf{x}.$$

Aplicando el Teorema 1 se tiene que

$$- \int_{\Omega} \left[\nabla \cdot (\mathbf{H} p_v) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})) \right] d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \left[\mathbf{H} p_v + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right] \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Aplicando la identidad vectorial (2.5) usando $F = G = \mathbf{v}$ y $H = \mathbf{H}$ se tiene que

$$\int_{\partial\Omega} \left[\mathbf{H} p_v \cdot \mathbf{n} + (-\mathbf{H}|\mathbf{v}|^2 + \mathbf{v}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{v})) \cdot \mathbf{n} \right] dS.$$

Utilizando las condiciones de contorno (4.5) y (4.6), se deduce que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Demostraremos por último la conservación de la helicidad magnética (4.10). Se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{H}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\partial_t \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_t) \, d\mathbf{x}.$$

Además, como $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ y satisface la ecuación (4.3) tenemos que

$$\nabla \times (\partial_t \mathbf{A} - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}) = 0. \quad (4.25)$$

Definimos $\phi = \partial_t \mathbf{A} - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}$ por lo que, como $\nabla \times \phi = 0$, existe ψ tal que $\phi = \nabla \psi$, al menos localmente. Usando (4.25) tenemos que

$$\partial_t \mathbf{A} = \nabla \psi + \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.26)$$

Usando (4.24) y (4.26) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{A}_t \cdot \mathbf{H} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_t) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} [(\nabla \psi + \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}))] \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} [(\nabla \psi) \cdot \mathbf{H} + (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}))] \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Utilizando ahora la identidad vectorial (2.7) con $F = \mathbf{H}$, $G = \mathbf{v}$ y $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ se tiene que

$$\int_{\Omega} (\mathbf{A}_t \cdot \mathbf{H} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_t) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} [(\nabla \psi) \cdot \mathbf{H} - (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}))] \, d\mathbf{x}.$$

Por otro lado, tenemos que, de la identidad vectorial (2.8) y de la ecuación (4.4)

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{H}) = \nabla \psi \cdot \mathbf{H} + \psi (\nabla \cdot \mathbf{H}) = \nabla \psi \cdot \mathbf{H}$$

De la identidad vectorial (2.2) con $F = \mathbf{A}$ y $\mathbf{G} = \mathbf{v} \times \mathbf{H}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{A}_t \cdot \mathbf{H} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_t) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} [(\nabla \psi) \cdot \mathbf{H} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{v} \times \mathbf{H})] \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} [\nabla(\psi \cdot \mathbf{H}) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{v} \times \mathbf{H})] \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 1 obtenemos que

$$\int_{\Omega} (\mathbf{A}_t \cdot \mathbf{H} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_t) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} [\psi \mathbf{H} - \mathbf{A} \times \mathbf{v} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n} dS.$$

De la identidad vectorial (2.5) con $F = \mathbf{A}$, $G = \mathbf{v}$ y $H = \mathbf{H}$ se deduce que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} [\psi \mathbf{H} - \mathbf{A} \times \mathbf{v} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\partial\Omega} [-\mathbf{v}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{H}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) + \psi \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{\partial\Omega} [-\mathbf{v}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{H}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + (\psi \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}] dS \\ &= \int_{\partial\Omega} [-\mathbf{v}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{H}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \psi(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})] dS. \end{aligned}$$

De las condiciones de contorno (4.5) y (4.6) se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} d\mathbf{x} = 0,$$

lo que concluye la demostración de (4.10) y con ello la prueba del Teorema 3. \square

Ondas en la magneto-hidrodinámica incompresible

En este capítulo estudiaremos una clase muy importante de soluciones de las ecuaciones de la MHD incompresible. Más precisamente, analizaremos las soluciones tipo onda para las ecuaciones linealizadas. Las ondas son la forma más sencilla en que un sistema responde a perturbaciones y fuerzas aplicadas. Estas propagan la información y energía del sistema y están relacionadas con las inestabilidades y los fenómenos turbulentos. En este capítulo utilizaremos las referencias bibliográficas [3, 5].

5.1. Un ejemplo ilustrativo: la ecuación de ondas uno-dimensional

Para motivar el estudio de las ondas en la MHD, presentaremos en primer lugar un ejemplo ilustrativo usando la ecuación de ondas uno-dimensional.

Sea $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ un campo escalar y sea $c \in \mathbb{R}$ que representa la velocidad de ondas. La ecuación de ondas viene dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t). \quad (5.1)$$

Como su propio nombre indica, la ecuación de ondas (5.1) describe la propagación de una variedad de ondas viajando a velocidad $\pm c$. Es el ejemplo prototipo de una ecuación hiperbólica en EDPs. Para resolver (5.1) es típico usar el cambio de coordenadas canónico

$$\xi(x, t) = x - ct, \quad \eta(x, t) = x + ct. \quad (5.2)$$

Usando la regla de la cadena, podemos reescribir la ecuación de ondas (5.1) en las nuevas variables (5.2), obteniendo que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (5.3)$$

Por consiguiente, integrando (5.3) se tiene que

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

donde F y G son funciones arbitrarias. Volviendo a las variables (x, t) tenemos que

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

Por tanto, hemos probado que cualquier par de funciones F y G dos veces diferenciables puede ser una solución, mientras que las variables (x, t) aparezcan de la manera adecuada. En efecto,

- La función $u(x, t) = 2x - 3t$ es solución.

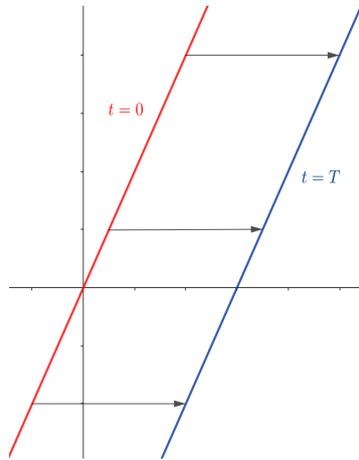


Figura 5.1: Solución $u(x, t) = 2x - 3t$ para $t = 0$ y tiempo posterior $t = T$.

- La función $u(x, t) = e^{-|x-6t|}$ es solución.

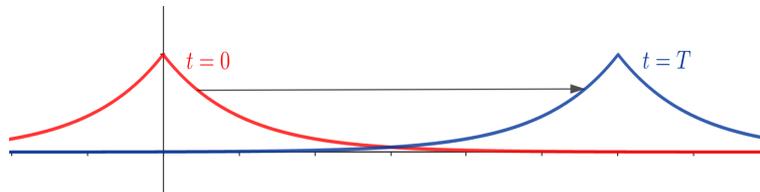


Figura 5.2: Solución $u(x, t) = e^{-|x-6t|}$ para $t = 0$ y tiempo posterior $t = T$.

Pero estas soluciones no son muy apropiadas para describir los fenómenos oscilatorios que son relevantes a la hora de describir ondas de luz o sonido. Por tanto, es más conveniente pensar en soluciones del tipo

$$u(x, t) = B\cos(k(x \pm ct)) + C\sin(k(x \pm ct)).$$

Tomando $\omega = ck$, podemos escribir

$$u(x, t) = B\cos(kx \pm \omega t) + C\sin(kx \pm \omega t).$$

Por simplicidad, consideraremos solamente una onda que se mueve hacia la derecha, es decir, sólo aquella con el signo $-$. Entonces, tenemos que

$$u(x, t) = B\cos(kx - \omega t) + C\sin(kx - \omega t). \tag{5.4}$$

Además, reescribiremos las constantes B y C como

$$B = A\cos(\delta), \quad C = A\sin(\delta), \tag{5.5}$$

para ciertas constantes A y δ adecuadas. Así pues, introduciendo (5.5) en (5.4) tenemos que

$$u(x, t) = A\cos(\delta)\cos(kx - \omega t) + A\sin(\delta)\sin(kx - \omega t). \tag{5.6}$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$ podemos reescribir (5.6) como

$$u(x, t) = A\cos[(kx - \omega t) - \delta]. \tag{5.7}$$

A la constante A se le denomina amplitud de onda y está relacionada con la energía de la misma. El parámetro δ es la fase absoluta de la onda que coincide con la fase inicial cuando $x = t = 0$.

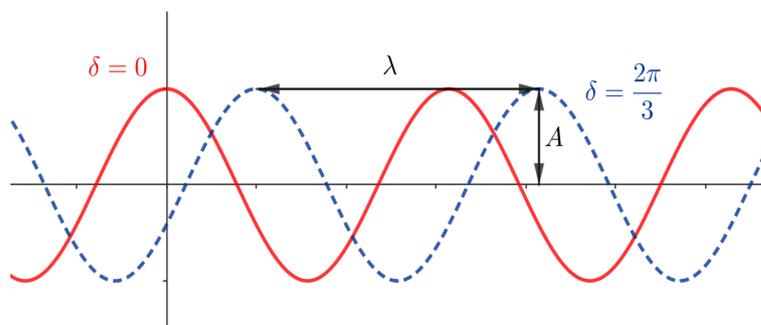


Figura 5.3: Gráfico de la solución (5.7) para $\delta = 0$ y $\delta = \frac{2\pi}{3}$.

Una cuestión interesante es la siguiente: ¿cómo de rápido se mueve una onda? Para ello, necesitamos introducir la longitud de onda λ , el vector de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y el número de onda $\kappa = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi}$. Entonces, la velocidad de onda es la longitud de onda dividido entre el periodo de la onda, esto es

$$c = \frac{\lambda}{2\pi} = \lambda f,$$

siendo $f = \frac{1}{2\pi}$ la frecuencia de onda. En términos del k -vector $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ y por tanto

$$c = \frac{\omega}{k}.$$

Por último, se conoce como fase φ al término que está dentro del coseno, es decir

$$u(x, t) = A \cos(\varphi) = A \cos(kx - \omega t - \delta).$$

Entonces, se tienen las relaciones

$$\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad k = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Usando la fórmula de Euler $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ se tiene que

$$u(x, t) = \text{Re} \left[A \exp[i(kx - \omega t - \delta)] \right].$$

Si asumimos que la amplitud sea compleja, es decir que $u(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t - \delta)]$ podemos escribir que

$$u(x, t) = \underbrace{\left[A \exp(-i\delta) \right]}_{\text{constante}} \underbrace{\left[\exp[i(kx - \omega t)] \right]}_{\text{oscilatorio}} = u_0 \left[\exp[i(kx - \omega t)] \right], \quad (5.8)$$

donde $u_0 = A \exp(-i\delta)$. La expresión (5.8) es una onda solución de la ecuación de ondas uni-dimensional (5.1).

5.2. Las ondas en las ecuaciones de Euler incompresibles

El objetivo de esta sección es estudiar las soluciones de tipo onda para la ecuación incompresible de Euler, que describe la evolución de un fluido incompresible, inviscido e ideal. Para ello, recordemos que el sistema en ausencia de fuerzas externas, viene dado por

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p, \quad (5.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (5.10)$$

Una diferencia sustancial, entre el sistema (5.9)-(5.10) y la ecuación de ondas (5.1) analizada en la sección previa, es la naturaleza vectorial y no-lineal de las ecuaciones de Euler. Como una primera aproximación al estudio de las ondas para la ecuación de Euler incompresible, es necesario linealizar el sistema (5.9)-(5.10) alrededor de un punto de equilibrio. Para ello, notamos en primer lugar que

$$p = p_0, \mathbf{v} = \mathbf{v}_0,$$

con $p_0 \in \mathbb{R}$ constante y $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, constante son soluciones triviales del sistema (5.9)-(5.10). Para linealizar las ecuaciones (5.9)-(5.10) consideremos pequeñas perturbaciones de nuestras soluciones de equilibrio (\mathbf{v}_0, p_0) , es decir,

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0 + \epsilon p_1(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0 + \epsilon \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t), \quad (5.11)$$

con $0 < \epsilon \ll 1$. Por tanto, usando el Ansatz (5.11) en las ecuación (5.9), y teniendo en cuenta la linealidad del operador gradiente, se obtiene que

$$\frac{\mathbf{v}_0}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 + \epsilon \mathbf{v}_1) \cdot (\nabla \mathbf{v}_0 + \epsilon \nabla \mathbf{v}_1) = -\nabla p_0 - \epsilon \nabla p_1.$$

Puesto que \mathbf{v}_0 y p_0 son constantes se tiene que $\frac{\mathbf{v}_0}{\partial t} = \nabla \mathbf{v}_0 = \nabla p_0 = 0$, por lo cual, simplificando, se obtiene que

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \epsilon \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 + \epsilon^2 \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 = -\epsilon \nabla p_1. \quad (5.12)$$

Es decir,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 + \underbrace{\epsilon \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_1}_{\mathcal{O}(\epsilon)} = -\nabla p_1. \quad (5.13)$$

Observemos que el término no lineal en $\mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_1$ es de menor orden con respecto a los otros términos pues $0 < \epsilon \ll 1$ y por tanto lo podemos despreciar. Finalmente, se obtiene que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 = -\nabla p_1.$$

De igual forma, usando el Ansatz (5.11) en la ecuación (5.10), de donde se deduce que

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0.$$

Por tanto, concluimos que el sistema linealizado alrededor del punto de equilibrio (\mathbf{v}_0, p_0) viene dado por

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 = -\nabla p_1, \quad (5.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0. \quad (5.15)$$

Queremos repetir la idea de encontrar soluciones de tipo onda como las que observamos para la ecuación de ondas (5.1), es decir, queremos que la perturbación varíe como $\exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))$. Nótese que ahora, debido a la naturaleza vectorial tenemos que $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Bajo ciertas condiciones mínimas de integrabilidad podemos expresar las perturbaciones mediante la suma de sus modos de Fourier, es decir,

$$p_1(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{p}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \quad \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}. \quad (5.16)$$

Obsérvese que la suma en (5.16), es una suma sobre todos los posibles vectores de onda \mathbf{k} y véase la analogía con respecto a la solución (5.8) obtenida para la ecuación de ondas (5.1).

Como el sistema (5.14)-(5.15) es lineal, sólo necesitamos resolverlo para un único (arbitrario) vector de onda \mathbf{k} . Por tanto, usando la expansión (5.16) en el sistema linealizado (5.14)-(5.15) obtenemos la siguiente relación para los coeficientes de Fourier $\hat{p}_{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}$ dada por

$$\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}(-i\omega) + \mathbf{v}_0 \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \cdot (i\mathbf{k}) = \hat{p}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \cdot (-i\mathbf{k}), \quad (5.17)$$

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}(-i\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (5.18)$$

Sacando factor común en la ecuación (5.17) se obtiene que

$$\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) i e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} = \hat{p}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} i e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \quad (5.19)$$

de donde se deduce que

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} = \hat{p}_{\mathbf{k}} \mathbf{k}. \quad (5.20)$$

De la ecuación (5.18) se tiene que

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (5.21)$$

La ecuación (5.21) expresa la ortogonalidad entre el vector \mathbf{k} y la amplitud de perturbación $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}$. Multiplicando escalarmente la ecuación (5.20) por $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}$ obtenemos que

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \cdot |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}|^2 = \hat{p}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} = 0,$$

donde en la segunda igualdad hemos usado ecuación (5.21). La única solución con una perturbación en la velocidad no trivial ($\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} \neq 0$) viene dada por la relación

$$\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0, \quad (5.22)$$

es decir, la frecuencia de las ondas sólo dependen del vector \mathbf{k} y la velocidad \mathbf{v}_0 . En general a la expresión $\omega = \omega(\mathbf{k})$ se le conoce como relación de dispersión de la onda. Por tanto, en las ecuaciones de Euler incompresibles la relación de dispersión de las ondas linealizadas viene dada por la expresión (5.22).

Esto confirma que cuando tenemos un fluido ideal e incompresible trivial homogéneo ($\mathbf{v}_0 = 0$), la única solución relación de dispersión es la trivial, es decir, $\omega = 0$. La dispersión cero indica que no hay cambio en la velocidad de propagación con respecto a la frecuencia de la onda. Todas las componentes de frecuencia se propagan a la misma velocidad y no hay separación espacial entre ellas a medida que avanzan.

5.3. Las ondas en la MHD incompresible

En esta última sección, estudiaremos soluciones tipo onda para las ecuaciones de la MHD ideal incompresible que vienen dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}, \quad (5.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H}, \quad (5.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (5.26)$$

Una solución de equilibrio del sistema (5.23)-(5.26) se obtiene tomando la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, la presión $p = p_0 \in \mathbb{R}$ y el campo magnético $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \in \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, constantes. Para linealizar las ecuaciones consideremos pequeñas perturbaciones a dicha solución considerando

$$p = p_0 + \epsilon p_1(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \epsilon \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \epsilon \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, t). \quad (5.27)$$

Introducimos las perturbaciones (5.27) en el sistema (5.23)-(5.26) y procedemos de manera análoga al caso anterior obteniendo el sistema linealizado

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 = -\nabla p_1 + (\nabla \times \mathbf{H}_1) \times \mathbf{H}_0, \quad (5.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} = (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_1, \quad (5.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_1 = 0. \quad (5.31)$$

Siguiendo la misma idea, analizaremos soluciones para el sistema (5.28)-(5.31) del tipo

$$p_1 = \sum_{\mathbf{k}} \hat{p}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{v}_1 = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{H}_1 = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (5.32)$$

Utilizando la identidad vectorial (2.9), podemos escribir

$$(\nabla \times \mathbf{H}_1) \times \mathbf{H}_0 = (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{H}_1 - (\nabla \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{H}_0. \quad (5.33)$$

Sustituyendo (5.32) en el sistema (5.28)-(5.31) y teniendo en cuenta la identidad (5.33) obtenemos las siguientes relaciones

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} = \hat{p}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} + \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{H}_0 \mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{k}}, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (5.35)$$

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{k}} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0) \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}, \quad (5.36)$$

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (5.37)$$

Reescribiendo (5.36) observamos que

$$\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{k}} = -\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0} \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}. \quad (5.38)$$

Multiplicando escalarmente la ecuación (5.34) por $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}$ se tiene que

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}|^2 = \hat{p}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} + ((\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{H}_0) \mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0) (\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}). \quad (5.39)$$

Teniendo en cuenta (5.35) y (5.37) se deduce que

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}|^2 = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0) (\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}). \quad (5.40)$$

Sustituyendo (5.38) en (5.40) se tiene que

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}|^2 = -\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0)^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}|^2,$$

y por tanto

$$\left[(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0)^2 \right] |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}|^2 = 0.$$

Para soluciones no triviales ($\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} \neq 0$) se tiene que necesariamente

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0)^2,$$

de donde se concluye que

$$\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{v}_0 \pm \mathbf{H}_0). \quad (5.41)$$

Observamos que la ecuación (5.41) tiene un nuevo efecto en la relación de dispersión que proviene del campo magnético, es decir, la frecuencia de las ondas no sólo depende del vector \mathbf{k} y la velocidad \mathbf{v}_0 , sino también del campo magnético \mathbf{H}_0 . En particular cuando $\mathbf{v}_0 = 0$, a diferencia del caso puramente hidrodinámica (ecuaciones de Euler incompresibles), tenemos lo que se conoce como **ondas de Alfvén** dadas por

$$\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0.$$

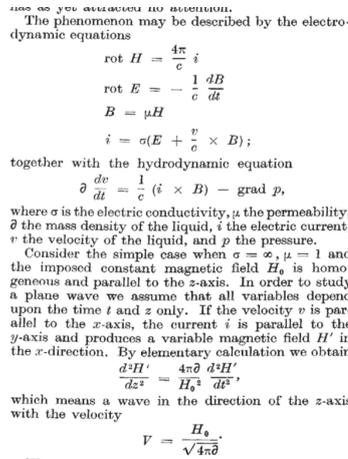


Figura 5.4: Extracto de la publicación de H. Alfvén, [1]

Este cálculo fue realizado por el físico noruego Hannes Alfvén en 1942, véase [1]. En este pequeño artículo publicado en la prestigiosa revista Nature, H. Alfvén sugirió la posibilidad de que las manchas solares estén asociadas a una perturbación magnética y mecánica que actúa como una onda electromagnética-hidrodinámica.

Observación 4 (MHD ideal compresible). Una posible ampliación del contenido de este trabajo sería realizar un análisis similar a los anteriores para estudiar la relación de dispersión de las soluciones tipo onda para las ecuaciones de la MHD ideal compresible. Estas vienen dadas por el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} &= (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p &= -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Este sistema es notablemente más complejo ya que tenemos más ecuaciones, como la ecuación para la evolución de la densidad ρ o la ecuación de evolución para la presión p . Al ser un fluido compresible no tenemos la ecuación de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, que imponía cierta rigidez de ortogonalidad entre el vector \mathbf{k} y la amplitud de la perturbación $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}$.

Conclusiones

La MHD tiene una historia relativamente reciente en el mundo científico. Este trabajo me ha permitido conocer mejor los orígenes de esta joven rama de la ciencia. Sus aplicaciones en el mundo actual son amplias y diversas, desde la industria metalúrgica hasta la termofusión nuclear. Pero no sólo se queda ahí, sino que explica importantes fenómenos físicos como las manchas solares.

Por otro lado, he podido aprender cómo se definen las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones que rigen la dinámica de fluidos, así como a derivar las ecuaciones que rigen la MHD a partir de las anteriores. En dicha sección aprendí cómo adimensionalizar ecuaciones.

He aprendido también cómo demostrar cantidades conservadas de un sistema, en este caso de las ecuaciones de la MHD ideal incompresible. En una última parte, he relacionado las ecuaciones más sencillas, como puede ser la ecuación de ondas, con otras más complejas como pueden ser las de la MHD ideal incompresible. El estudio realizado para obtener soluciones tipo onda en la ecuación de ondas lo hemos extrapolado a nuestro caso, obteniendo soluciones particulares del mismo. Aunque no deja de ser sólo un caso.

Como propuestas de ampliación del trabajo podríamos estudiar cantidades conservadas para otro tipo de fluidos, por ejemplo compresibles, o tener en cuenta la acción de las fuerzas externas. Además, proponemos continuar con el estudio de soluciones tipo onda a ecuaciones aún más complejas de la MHD donde se pueden tener en cuenta, por ejemplo, las fuerzas externas que actúan sobre el fluido. En un caso aún más complejo, podemos considerar un fluido compresible.

En definitiva, con este trabajo he podido poner en práctica los conocimientos adquiridos en el grado, así como ser consciente de la dificultad de llevar a cabo una investigación en matemáticas.

Bibliografía

- [1] H. Alfvén. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature*, vol. 150, pages 405–406, (1942).
- [2] A.J. Chorin and J.E. Marsden. A mathematical introduction to fluid mechanics. *New York: Springer*, (1990).
- [3] P.A. Davidson, An introduction to magnetohydrodynamics. *Cambridge texts in applied mathematics*, Cambridge University Press, (2001).
- [4] L.C. Evans. Partial differential equations. *American Mathematical Society*, (2022).
- [5] H.P. Goedbloed and S. Poedts. Principles in Magnetohydrodynamics with Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas. *Cambridge University Press*, New York, (2004).
- [6] M. Faraday. Experimental Researches in Electricity *Richard and John Edward Taylor, London*, Vol. 1, p. 55 (1849).
- [7] J.D. Jackson. Classical electrodynamics. *John Wiley and Sons*, (1999).
- [8] A. Majda and A. Bertozzi. Vorticity and incompressible flows. Cambridge Texts in Applied Mathematics, *Cambridge University Press*, (2002).

An introduction to magneto-hydrodynamics

Miguel Perdigón González

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0101316857@ull.edu.es

Abstract

In this work we present an introduction to magneto-hydrodynamics and study the behaviour of their solutions from a mathematical point of view. On the one hand, we will derive the MHD equations from the classical equations of electro-magnetism and hydro-dynamics. On the other hand, we will analyse certain elementary properties of the MHD solutions such as global invariants or the behaviour of wave-like solutions.

1. Introduction

MHD studies the mutual interaction between fluid dynamics and magnetic fields. In the middle of the last century it became a subject of worldwide interest. It is a crucial area that explains different physically relevant phenomena such as magnetic flares, coronal ejections or solar winds in plasma astrophysics as well as thermonuclear fusion in laboratory experimental research.

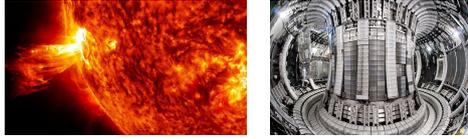


Figure 1: Magnetic flare and Tokamaks, respectively

2. Derivation of the MHD equations

The equations governing the behaviour of MHD have two main components: Maxwell's equations and the equations arising in fluid dynamics. The former are the interface between electricity and magnetism and are given by the following system of partial differential equations

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mu \mathbf{J}, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{H}. \quad (6)$$

Here, $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^N$ is the magnetic field, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ is the velocity field, $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^N$ is the electric field, $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^N$ is the current density and $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^N$ describes the Lorentz force. The fluid dynamics equations describing the evolution of a non-viscous, homogeneous and incompressible fluid are given by the Euler's equation

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla p + \mathbf{f}, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (8)$$

Here $p \in \mathbb{R}$ denotes the scalar pressure of the fluid and \mathbf{f} is an external force. Combining (1)-(6) together with (7)-(8) under a certain asymptotic regime (the MHD approximation) one can derive the so called ideal incompressible MHD

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{H}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (11)$$

3. Conserved global quantities for ideal incompressible MHD

The first result we show in this work relies on the existence of global invariants in bounded domains for smooth solutions of the ideal incompressible MHD equations (9)-(11). More precisely, we prove under some boundary value conditions that the following quantities are conserved globally in time:

1. Conservation of momentum

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \left(p + \frac{|\mathbf{H}|^2}{2} \right) \mathbf{n} \, dS.$$

2. Energy conservation

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{H}|^2)(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0.$$

3. Conservation of cross-helicity

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0.$$

4. Conservation of magnetic helicity

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Here $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, being \mathbf{A} the vector potential.

4. Waves in MHD and dispersion relation

Waves in (MHD) are pivotal for conveying information, redistributing energy, and understanding the interplay between magnetic fields and fluid motion in magnetized plasmas. Their significance extends to laboratory plasmas and astrophysical processes, providing essential insights into solar wind and star formation.

To conclude this work, we study wave type solutions for the linearized version of equations (9)-(11). To so, we perturb around a trivial equilibrium solution and look for wave-type perturbations via a Fourier mode expansion. In the purely hydrodynamic case, for $\mathbf{H} \equiv 0$, i.e. the incompressible Euler equation, we conclude that the dispersion relation for those waves is given by

$$\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0,$$

where \mathbf{v}_0 is the constant equilibrium solution. As a counterpart, for the ideal incompressible MHD, we find a more intricated dispersion relation given by

$$\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0. \quad (12)$$

The second term in (12) is known as **Alfvén waves**, first noticed in 1942 by the Nobel prize winner H. Alfvén.

References

- [1] P.A. Davidson, An introduction to magnetohydrodynamics. *Cambridge texts in applied mathematics*, Cambridge University Press, (2001).
- [2] J.D. Jackson. Classical electrodynamics. *John Wiley and Sons*, (1999).
- [3] A. Majda and A. Bertozzi. Vorticity and incompressible flows. *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, Cambridge University Press, (2002).