



UN ESTUDIO SOBRE MODELOS DE ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS EN LA FORMACIÓN DE FUTUROS PROFESORES DE SECUNDARIA

Alicia Bruno Castañeda
Israel García-Alonso
Universidad de La Laguna

En agradecimiento al profesor Martín M. Socas Robayna por su trabajo en la creación y consolidación del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se analiza el conocimiento adquirido por futuros/as profesores/as de Matemáticas de Educación Secundaria respecto a los modelos de enseñanza de los números negativos. Se ha realizado un estudio cualitativo con nueve estudiantes que cursaban un Máster de Formación del Profesorado de Secundaria, en la especialidad de Matemáticas. Se analiza si los futuros docentes conocen modelos de enseñanza tratados en su formación del Máster, en las explicaciones que darían a estudiantes de secundaria para dar sentido a las operaciones con números negativos. Siguiendo una metodología cualitativa, se comparan sus respuestas a cuestiones, realizadas antes y después de seguir un proceso de instrucción. Los resultados indican que la integración se produjo en la mitad de los estudiantes objeto de la investigación.

Abstract

In this paper, we present an analysis about the knowledge that prospective high school mathematics teachers have about teaching models of negative numbers. Using a qualitative method we study the answers of nine students of Master's Degree in Secondary Teacher Training in Mathematics. We want to know if the students use the models of negative numbers studied in their Master's training when they try to make sense operations with negative numbers to high school students. We compare their responses to questions, answered before and after following an instructional process. The results show that integration occurred in half of the students analyzed.

Introducción

La introducción de los números negativos supone un momento crucial del aprendizaje numérico de los estudiantes, el cual no está exento de dificultades didácticas. Aunque en España esta introducción comienza a finales de la Educación Primaria (11-12 años), con las primeras ideas de “negatividad”, su desarrollo completo se produce en la etapa Secundaria (12-14 años).

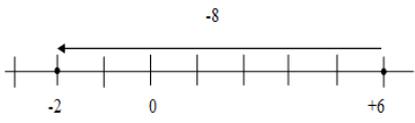
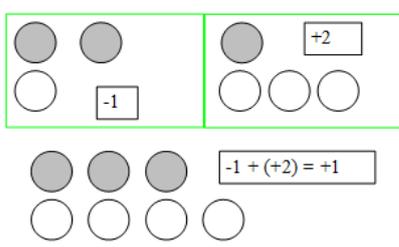
El trabajo que se presenta forma parte de un estudio más amplio que tiene como objeto indagar el conocimiento que construyen futuros/as profesores/as de secundaria respecto al aprendizaje de los números negativos. El fin último es tener evidencias que ayuden a mejorar su formación didáctica, en un momento previo a la realización de sus prácticas en las aulas y de su incorporación a la docencia.

Los números negativos han recibido menos investigación educativa en comparación a los naturales y los racionales, sin embargo, en los últimos años se ha producido un avance de la misma. Ello se refleja en la publicación del monográfico *Exploring the integer addition and subtraction landscape. Perspectives on integer thinking* (Bofferding y Weisman-Enzinger, 2018a), en el que diferentes autores exponen resultados recientes sobre este tópico.

Muchos estudiantes de secundaria tienen dificultades con los números negativos, las cuales se manifiestan, principalmente, en el uso de reglas operatorias incorrectas o una escasa comprensión de los problemas (Bell, 1986; Bofferding y Farmer, 2017, 2018a; Murray, 1985). Por ello, indican Wessman-Enzinger y Tobias (2020) que es un reto buscar modelos de instrucción que mejoren su enseñanza. En este trabajo el término modelo incluye materiales manipulativos, representaciones gráficas, situaciones reales o incluso símbolos (Vergnaud y Durand, 1976; Bell, 1986; Altiparmak y Özdoğan, 2010). Distintos trabajos analizan los modelos de enseñanza con números negativos (Tabla 1), destacando:

- 1) Reglas o símbolos. Se presentan las reglas operatorias que rigen las operaciones de manera abstracta y simbólica.
- 2) Equilibrio. Se utilizan fichas de dos colores para representar lo positivo y lo negativo, de modo que cuando se unen, se compensan, para representar el cero.
- 3) Situaciones contextualizadas. Los números negativos y las operaciones se corresponden con situaciones reales (temperaturas, deudas, ...).
- 4) Recta numérica. Los números y operaciones se ejemplifican a través de puntos y movimientos (flechas) en la recta numérica

Tabla 1. Modelos de enseñanza de los números negativos

Reglas	Recta numérica
$-1 + (+2) = +1$ Para sumar dos números enteros de distinto signo, se resta en sus valores absolutos y se pone el signo del mayor	 <p style="text-align: center;">-2 0 +6</p> <p style="text-align: center;">-2 - (+6) = -2 + (-6) = -8.</p>
Equilibrio	Situaciones contextualizadas
 <p style="text-align: center;">$-1 + (+2) = +1$</p>	El ascensor estaba en la planta 6 del edificio y se detuvo en la planta 2 del sótano. ¿Cuál fue el movimiento del ascensor? $-2 - (+6) = -2 + (-6) = -8.$ El ascensor bajó 8 plantas.

Los investigadores argumentan que no existe un modelo que haya mostrado éxito completo (Bell, 1986, Liebeck, 1990; Vig, Murray y Star, 2014) y señalan la resta y la multiplicación como foco de las principales dificultades para los estudiantes. A pesar de ello, es necesario que los futuros docentes conozcan los diferentes

modelos para tomar decisiones adecuadas en su futuro profesional.

Se conoce poco sobre cómo abordan los futuros docentes el aprendizaje de los números negativos. Tobias, Wessman-Enzinger, Olanoff (2018) indican que “las investigaciones sobre cómo los futuros profesores dan sentido a los enteros no han hecho más que empezar”. Los estudios realizados muestran, por ejemplo, sus dificultades en la representación en la recta numérica (Widjaja, Stacey y Stente, 2011) o sus estrategias de resolución de problemas (Almeida y Bruno, 2014; Bofferding, Wessman-Enzinger, 2018b; Bruno, Espinel y Martínón, 1998; Cunningham, 2009; Tobias, Wessman-Enzinger, Olanoff, 2018).

En el estudio realizado por Bofferding, Wessman-Enzinger (2018b) con 15 futuros profesores de primaria y secundaria, observaron un fuerte enfoque procedimental cuando daban explicaciones sobre la resolución de problemas con números negativos. Estos autores señalan que los futuros docentes deben tomar consciencia de que necesitan mejorar las explicaciones conceptuales que darían a sus estudiantes sobre estos números. Tobias, Wessman-Enzinger, Olanoff (2018) analizaron las justificaciones dadas por futuros docentes de primaria y secundaria al examinar problemas con números negativos contextualizados en las temperaturas, en los que la idea de distancia entre dos números era fundamental. Por ejemplo, “*El congelador de la nevera tiene una temperatura de -20° y la nevera tiene una temperatura de -14° . El congelador está 6 grados más frío que la nevera.* Las dificultades que mostraron les llevan a concluir que los futuros docentes necesitan más experiencia examinando situaciones concretas de números enteros que les permita promover una reflexión sobre la complejidad de su operatoria.

El objetivo de este trabajo es conocer si los/las futuros/as profesores/as de Educación Secundaria conocen los modelos de enseñanza de los números enteros

en el inicio de su formación y en su caso, cómo los integran en sus explicaciones didácticas, una vez que han sido tratados en la formación académica inicial.

Metodología

El estudio se realizó con nueve estudiantes graduados en Matemáticas (A1, A2, ...A9) que cursaban un Master de Formación del Profesorado de Educación Secundaria, en la especialidad de Matemáticas. Aunque en la citada especialidad había doce estudiantes, tres de ellos fueron descartados para el estudio porque no completaron algunas de las sesiones del proceso del mismo. La formación académica del alumnado participante era de un alto nivel matemático, correspondiente a cuatro cursos anuales de asignaturas del grado de Matemáticas, mientras que su conocimiento didáctico se estaba desarrollando en el momento de la toma de datos. Así, cursaban dos asignaturas de Didáctica de la Matemáticas y tres del ámbito psicológico y pedagógico. La toma de datos tuvo lugar en una de las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas.

En una primera sesión, los nueve futuros/as profesores/as contestaron a un cuestionario inicial. A continuación, se desarrolló una instrucción durante 8 horas dedicadas al aprendizaje de los números negativos. Posteriormente, pasados tres meses, contestaron un cuestionario final que contenía algunas cuestiones semejantes al cuestionario inicial.

Instrucción de aula

Ball, Thames y Phelps (2008) en su marco sobre el tipo de conocimiento que debe desarrollar un futuro docente distingue entre *Conocimiento del contenido* y el *Conocimiento didáctico del contenido* (Figura 1).

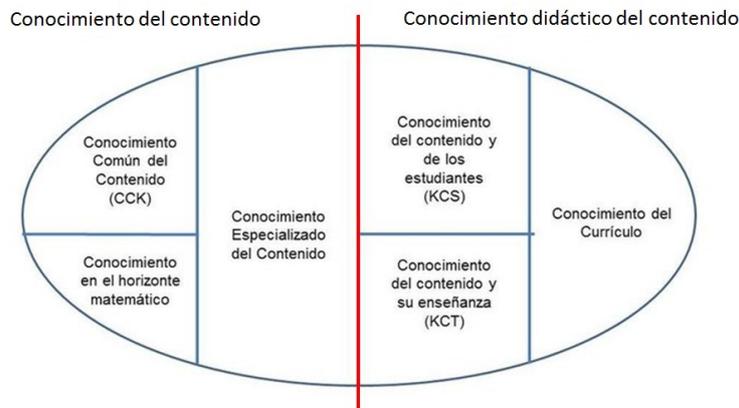


Figura 1. Modelo del conocimiento del profesor (Ball, et al., 2008)

Dentro del *Conocimiento del contenido* se destacan algunos muy específicos: *Especializado*, *Común* y en el *Horizonte matemático*. Por su parte, el *Conocimiento didáctico* incluye el relativo al *Currículo*, al *Contenido y los estudiantes* (aprendizaje) y al *Contenido y su enseñanza*.

La formación didáctica de los números negativos recibida en las sesiones de instrucción cubrió los diferentes constructos del *Conocimiento del contenido* y *Conocimiento didáctico del contenido* (Ball et al., 2008). En concreto, sobre *Conocimiento del contenido* se abordó:

1. Una reflexión histórica sobre la construcción del conjunto numérico de los números enteros.
2. Un análisis y posterior reflexión sobre los cambios conceptuales que se producen al introducir los números enteros.
3. Los tipos de situaciones en las que se utilizan los números negativos y su clasificación.

En cuanto al *Conocimiento didáctico del contenido* se trataron:

4. Las indicaciones curriculares en la etapa secundaria sobre los números enteros.

5. Los modelos de enseñanza (modelo del equilibrio, recta numérica y situaciones contextualizadas).
6. Un análisis de respuestas de estudiantes de secundaria en operaciones y problemas para observar aciertos, dificultades y errores.

La instrucción se desarrolló de manera individual, en grupos de tres estudiantes y con debates en gran grupo tras la presentación del profesor, en función de las tareas a realizar.

Cuestionario inicial y final

Los cuestionarios inicial y final se centraron en *Conocimiento especializado del contenido*, *Conocimiento del contenido y los estudiantes*, y *Conocimiento del contenido y su enseñanza*.

El cuestionario inicial estaba compuesto por tres partes.

Parte 1. Explicar el significado de las operaciones de suma, resta y multiplicación de enteros a alumnado de secundaria.

Parte 2. Corregir respuestas de estudiantes de Secundaria y proponer explicaciones para corregir los errores.

Parte 3. Resolver y proponer explicaciones para alumnado de Secundaria sobre problemas de suma y resta de números enteros.

El cuestionario final tenía tres partes

Parte 1. Explicar el significado de las operaciones de suma, resta y multiplicación de enteros a alumnado de secundaria.

Parte 2. Corregir respuestas de estudiantes de secundaria y proponer explicaciones para corregir los errores.

Parte 3. Evaluar las propuestas de explicaciones de los/las compañeros/as del máster, dadas en la parte 3 del cuestionario inicial.

En este trabajo se presentan resultados pertenecientes a la parte 1 de los cuestionarios inicial y final (Tabla 2), en las que se pedía dar una explicación para

un estudiante de secundaria sobre cómo resolver una resta y una multiplicación de números negativos. Las mismas operaciones se plantearon en los dos cuestionarios.

Tabla 2. Tarea del cuestionario inicial y final

Vas a explicar a un grupo de 1º. de ESO los números enteros. Sitúate en que los estudiantes no tienen conocimiento previo sobre estos números. Describe qué les dirías para que entendiesen cada una de las operaciones que se indican a continuación.

Resta de enteros: $(-6) - (+3) = -9$

Multiplicación de enteros: $(-4) \times (-3) = +12$

En las respuestas de los/las futuros/as docentes se evalúa el tipo de modelo que utilizan en la explicación que proponen para los estudiantes de Secundaria, siguiendo los modelos descritos en la Tabla 1, las cuales se categorizan de la siguiente forma:

- *Regla.* Explicaciones basadas en las reglas operatorias que rigen la resta y la multiplicación de números enteros.
- *Equilibrio.* Uso del modelo de fichas de dos colores.
- *Recta.* Uso de la representación de las operaciones en la recta numérica.
- *Contexto:* Uso de situaciones o contextos reales: temperaturas, deudas, ascensores...).

Resultados

En los resultados se muestran las respuestas de los nueve estudiantes en las dos cuestiones analizadas. En las tablas 3 y 4 se han sombreado las casillas, en el caso de que el futuro docente haga uso del modelo correspondiente.

Resta de enteros $(-6) - (+3) = -9$

La explicación predominante en el cuestionario inicial y final para la resta fue la basada en reglas operatorias. El uso de otros modelos se dio en menor medida en el cuestionario inicial frente al final. En el cuestionario final, siete de los nueve futuros profesores cambian su propuesta de explicación inicial incorporando otro modelo o abandonando el que implica dar únicamente las reglas operatorias. Solo los estudiantes A4 y A7 dan la misma explicación antes y después de la instrucción. En el cuestionario final, la recta numérica fue el modelo que apareció con más frecuencia, mientras que solo un alumno incorporó el modelo del equilibrio.

Tabla 3. Tipos de justificaciones en la resta de enteros

	Cuestionario inicial				Cuestionario final			
	Regla	Recta	Contexto	Equilibrio	Regla	Recta	Contexto	Equilibrio
A1								
A2								
A3								
A4								
A5								
A6								
A7								
A8								
A9								

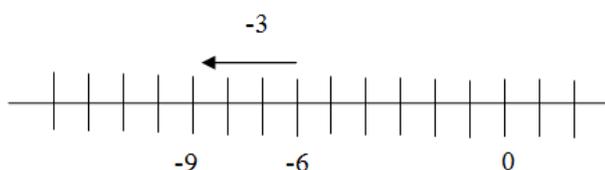
No todas las explicaciones dadas por los/las futuros/as docentes pueden considerarse adecuadas en su redacción o incluso correctas matemáticamente. Esto se ejemplifica con la explicación basada en las reglas, dada por el alumno A8:

“Habría que quitar los paréntesis, enseñando la regla del producto (+ • + = +; + • - = -; - • + = -; - • - = +), así quedaría -6-3, que es -9 porque si dos números tienen el mismo signo se suman y se pone este signo”.

Se puede observar la confusión entre la regla de los paréntesis y la regla de los signos de la multiplicación y, por otra parte, la confusión entre el signo de la resta y el signo de los números.

En ocasiones, al combinar dos modelos no llegaron a conectarlos con rigor, como se muestra a continuación en la explicación del alumno A7:

Se aplica la regla de los signos, y queda -6-3, y luego en la recta numérica:



Multiplicación de enteros $(-4) \times (-3) = 12$

Para el caso de la multiplicación de dos números enteros, en el cuestionario inicial todos/as los/las futuros/as docentes emplearon la explicación basada en una regla.

Tabla 4. Tipos de justificaciones en la multiplicación de enteros

	Cuestionario inicial					Cuestionario final			
	Reglas	Recta	Contexto	Equilibrio		Reglas	Recta	Contexto	Equilibrio
A1									
A2									
A3									
A4									
A5									
A6									
A7									
A8									
A9									

La mayoría de los/las futuros/as docentes, antes y después de la instrucción emplearon una regla operatoria semejante a la siguiente:

Multiplicar los dos números y luego multiplicar los signos con la regla de los signos: $+ \bullet + = +$; $+ \bullet - = -$; $- \bullet + = -$; $- \bullet - = +$.

En esta regla no se hace alusión a que se deben multiplicar los números en sus valores absolutos.

En el cuestionario final, A4, A5, A6 y A9 abandonan la regla operatoria por otro modelo (contexto, equilibrio y recta numérica). Por su parte A7 combina el modelo del equilibrio y las reglas operatorias. Es decir, en el caso de la multiplicación, la recta numérica no fue el principal modelo elegido al finalizar la instrucción.

Por último, si se comparan las dos cuestiones iniciales (resta y multiplicación), se observa que al principio de la instrucción la mayoría de los/las futuros/as docentes dieron muestras de conocer los modelos de reglas, contexto y recta numérica para el caso de la resta, pero no los extendían a la multiplicación. Al finalizar la instrucción hay un aumento en el uso de otros modelos, aunque las reglas siguen siendo predominantes. Por otra parte, en las respuestas finales solo dos futuros docentes usan el mismo modelo en las dos operaciones (A6 usa el modelo del equilibrio y A9 la recta numérica).

Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado un estudio preliminar, centrado en la formación de futuros/as docentes de Matemáticas sobre los números negativos. Los resultados son parciales en cuanto a las tareas analizadas y al tamaño de la muestra, y será necesario ampliarlos en posteriores trabajos.

En las tareas analizadas en esta muestra se observa que el *Conocimiento matemático especializado* de los/las futuros/as docentes necesita una instrucción que les lleve a mejorar en el uso de su lenguaje matemático. En concreto, deben cuidar la redacción de las reglas operatorias de estos números, de forma que sean adecuadas a los niveles de la Educación Secundaria, pero correctas desde lo matemático. Así, no corresponde expresar reglas poco rigurosas, como:

- para restar, aplicar la regla de la multiplicación, en lugar de la regla de los paréntesis.
- confundir el signo de los números y el signo de la operación.
- no emplear el término de valor absoluto de los números cuando sea necesario.

Coinciden los resultados con Bofferding y Wessman-Enzinger (2018b), quienes resaltaban el predominio de lo procedimental en el conocimiento de los/las futuros/as docentes. Las respuestas analizadas reflejan la necesidad de trabajar con los/las futuros/as docentes de forma más amplia los modelos de enseñanza de los números negativos, de modo que se conecte lo procedimental con lo conceptual, al tiempo que se relacionen los subdominios de *enseñanza* y *aprendizaje*. En concreto, se deben hacer explícitas las relaciones entre los diferentes modelos y poner en relieve la importancia de usar el mismo modelo en todas las operaciones.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto "Herramientas digitales y formulación de problemas matemáticos. Diseño de una instrucción para docentes de Educación Primaria" (ProID2021010018). Gobierno de Canarias. Áreas prioritarias de la Estrategia de Especialización inteligente de Canarias RIS-3, cofinanciado por el Programa Operativo FEDER Canarias 2014-2020.

Referencias bibliográficas

Almeida, R. y Bruno, A. (2014). Strategies of pre-service primary school teachers for solving addition problems with negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 45(5), 719-737.

- Altıparmak, K. y Özdoğan, E. (2010). A study on the teaching of the concept of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 41(15), 31-47.
- Ball, D., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, vol. 59(5), 389-407.
- Bofferding, L., y Wessman-Enzinger, N. M. (2017). Subtraction involving negative numbers: Connecting to whole number reasoning. *The Mathematics Enthusiast*, 14, 241-262.
- Bofferding, L. y Weissman-Enzinger, N.M. (2018a). *Exploring the integer addition and subtraction landscape. Perspectives on integer thinking*, Springer International Publishing AG. Suiza.
- Bofferding, L. y Weissman-Enzinger, N.M. (2018b). Nuances of Prospective Teachers' Interpretations of Integer Word Problems *Exploring the integer addition and subtraction landscape. Perspectives on integer thinking*, pp.191-212. Springer International Publishing AG. Suiza.
- Bruno, A. y Martínón, A. (1999). The teaching of numerical extensions: The case of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 30(6), 789-809.
- Bruno, A., Espinel, C. y Martínón, A. (1997). Prospective teacher solved additive problems with negative numbers. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 19(4), 36-55.
- Cunningham A.W. (2009). Using the number line to teach signed numbers for remedial community college mathematics. *Mathematics Teaching Research Journal*, vol.3(4), 1-40.
- Liebeck P. (1990). Scores and forfeits - an intuitive model for integer arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 21, 221-239.
- Murray, J.C. (1985). Children's informal conceptions of integer arithmetic. *IX International Conference for the Psychology of Mathematics Education*; pp. 147-153; Noordwijkerhout, The Netherlands.
- Tobias, J.M., Wessman-Enzinger, N.M., y Olanoff, D. (2018). Prospective Teachers' Attention to Children's Thinking About Integers, Temperature, and Distance. En Bofferding, L. y Weissman-Enzinger,

- N.M. (eds.). *Exploring the integer addition and subtraction landscape. Perspectives on integer thinking*, pp.130-230. Springer International Publishing AG. Suiza.
- Vergnaud, G. y Durand C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *La Revue Française de Pédagogie*, vol. 36, 28-43.
- Vig, R., Murray, E., y Star, J. R. (2014). Model breaking points conceptualized. *Educational Psychology Review*, vol. 26(1), 73-90.
- Wessman-Enzinger, N. y Tobias, J. (2020). The dimensions of prospective elementary and middle school teachers' problem posing for integer addition and subtraction, *Journal of Mathematics Teacher*, vol. 4, 105-112.
- Widjaja W., Stacey K., y Steinle V. Locating negative decimals on the number line: insights into the thinking of pre-service primary teachers. *Journal of Mathematic Behavior*, vol. 30, 80-91.