



ANÁLISIS DE LA FASE DE COMPRENSIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS EN EL DESARROLLO DE UNA SESIÓN DE CLASE

Alberto García-Díaz
Israel García-Alonso
Matías Camacho-Machín

Universidad de La Laguna

Dedicado al Profesor Martín Manuel Socas Robayna, en reconocimiento por su labor docente e investigadora durante tantos años y en favor de la Didáctica de la Matemática realizada en esta Universidad, aunque aquellos que lo conocemos sabemos que no se desligará nunca de esta actividad.

¡Feliz jubilación, Martín!

Resumen

En este trabajo se analiza cómo un profesor que ha seguido un curso de formación en resolución de problemas muestra el conocimiento adquirido en el aula. La videograbación de las sesiones permite realizar un análisis comparativo de la secuencia de formación y los elementos de formación que se reconocen en el desarrollo de la fase de comprensión del problema en su implementación en el aula. En este estudio se observa que el docente incorpora muchos aspectos desarrollados durante su formación, cuando tiene lugar la implementación. Pero, se observa que algunos conceptos como la diferencia entre dato y relación no resulta clara, lo que dificulta la explicación a sus estudiantes.

Abstract

In this article we analyze how a teacher, who was trained in a problem solving course, applies his knowledge in his teaching. Video recording the sessions let us make a comparative analysis between the training sequence received by the teacher and the training elements that we notice at the development of the comprehension stage of a problem in the classroom. In this study we show that the teacher incorporates many aspects developed in the training when the implementation takes place. But, it is observed that some concepts such as the

difference between data and relation are not clear, which makes the explanation difficult for their students.

Introducción

La resolución de problemas sigue siendo objeto de numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática, pues los problemas y, concretamente, su resolución son el corazón de la matemática. Se ha comprobado que la resolución de problemas como herramienta para el aprendizaje de las matemáticas fomenta, entre otras características, la conceptualización de la disciplina como un conjunto de dilemas a analizar en términos de recursos matemáticos (Santos-Trigo, 2019). De esta forma, esta actividad matemática exige la identificación y exploración de relaciones matemáticas (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2016) que, junto con un entorno de preguntas, desafíos y reflexiones, desarrollan el pensamiento matemático (Mason, Burton y Stacy, 2010). Además, las investigaciones ponen de manifiesto que se trata de una actividad compleja, tanto para el alumnado (Mason, Burton y Stacey, 2010; Polya, 1965), como para el profesorado, especialmente cuando la implementan en el aula e indagan sobre la mejor forma de hacerlo (Verschaffel, Greer y De Corte, 2002; Schoenfeld, 2013).

Estas dificultades también se han observado en las evaluaciones internacionales como, por ejemplo, en las pruebas PISA (INEE, 2020), donde se concluye que uno de cada cuatro estudiantes españoles no posee un adecuado pensamiento para la resolución de problemas, y sólo se muestran la “capacidad para utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos y convenciones para resolver problemas relacionados con números enteros” (p. 70). Esta situación es más grave en el caso de la Comunidad Autónoma de Canarias, donde la proporción resulta ser de casi uno de cada tres estudiantes con este perfil.

Ante esta situación, algunas instituciones educativas unen esfuerzos para desarrollar iniciativas encaminadas a mejorar la competencia matemática de los estudiantes de Canarias. Así nace el proyecto denominado *ProyectaMates* (García-Alonso, 2020), impulsado por la Universidad de La Laguna, la Sociedad Canaria *Isaac Newton* de Profesores de Matemáticas y el Servicio de Educación y Juventud del Cabildo Insular de Tenerife. Se trata de un proyecto que pone el foco en la mejora de la competencia matemática de los estudiantes a partir del desarrollo de actividades formativas dirigidas al profesorado de matemáticas, tanto de la Educación Primaria como Secundaria, a través del trabajo en resolución de problemas no rutinarios de matemáticas (García-Alonso et al., 2019) y su implementación en el aula. En este proyecto se dan cita la investigación y la práctica docente, de manera que, la investigación se pone al servicio de la práctica, incorporando estrategias de enseñanza apropiadas para el trabajo de la resolución de problemas en el aula y, a la vez, la práctica será fuente de información para la investigación, con el objeto de promover la creación de conocimiento a partir de la información aportada.

La formación diseñada y desarrollada para *ProyectaMates* se organiza en torno a la utilización de las fases descritas por Polya para la resolución de problemas, con énfasis en la primera fase, que denominamos *comprender*, ya que es clave para extraer los datos y establecer las relaciones entre ellos de cara a abordar la solución del problema planteado (Vila y Callejo, 2009).

El objetivo de este trabajo consiste en el análisis de la enseñanza de resolución de problemas que realiza un profesor o una profesora formados en *ProyectaMates*. Para ello, se ha grabado una sesión en la que propone a sus estudiantes la resolución de un problema y se analizan las estrategias seguidas por el docente. De las fases de resolución del problema que desarrolla el profesorado en el aula,

centramos la atención del estudio en la fase de *comprender*, ya que es clave para extraer los datos y establecer las relaciones entre ellos, de cara a abordar la solución del problema planteado. En el análisis identificamos qué aspectos aprendidos en el curso de formación aparecen en el discurso desarrollado en el aula durante la resolución del problema.

Marco conceptual

El conocimiento del profesorado para la enseñanza ha sido descrito por varios modelos (Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2013; Shulman, 1986). En el modelo MKT, de Ball et al. (2008), se describen los dos grandes conjuntos de conocimientos que precisa el profesorado de matemáticas: el *conocimiento del contenido* y el *conocimiento pedagógico del contenido* (figura 1).

Estos autores diferencian, a su vez, dentro del conocimiento del contenido, tres dominios:

- El *conocimiento común del contenido* (CCK): corresponde al conocimiento que adquiere una persona durante su vida escolar o personal. Permite hacer cálculos, resolver problemas correctamente, conocer una notación adecuada.
- El *conocimiento especializado del contenido* (SCK): son las matemáticas que deben conocerse para poder dar clase y *hacer visibles* las matemáticas al alumnado. Permiten responder las preguntas de los estudiantes, reconocer formas de representación particulares, elegir ejemplos y modelos que conectan con la vida cotidiana, evaluar el éxito académico de los estudiantes, ...

- El *conocimiento horizonte*: es el conocimiento relativo a cómo las matemáticas se van desarrollando en el currículo. Permite crear itinerarios de aprendizaje con ideas que permitan desarrollar conceptos en cursos sucesivos.

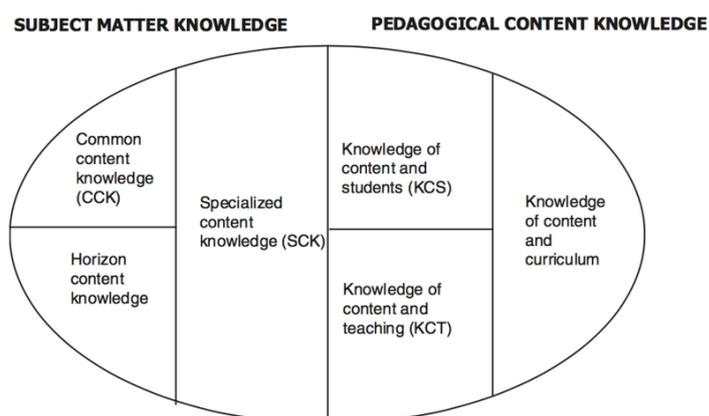


Figura 1. Diagrama del modelo MKT de conocimiento del profesorado. Fuente: Ball et al., 2008.

Y dentro del conocimiento didáctico del contenido, señalan otros tres dominios:

- El *conocimiento del contenido y los estudiantes* (KCS): es el conocimiento que combina la gestión de matemáticas y alumnado durante la implementación de las clases. Permite al profesorado anticiparse a los estudiantes y evitar errores o malas construcciones de conocimiento, a través de las creencias que éstos tienen sobre su potencial matemático, por ejemplo, y requiere conexión entre el conocimiento común del contenido y el conocimiento especializado del contenido por parte del profesorado.
- El *conocimiento del contenido y la enseñanza* (KCT): es el conocimiento que utiliza el profesorado para tomar decisiones sobre la planificación e impartición de la asignatura y a medio o largo plazo, o hacer un análisis de las dificultades con que puede encontrarse un estudiante durante su aprendizaje. Permite al profesorado, por ejemplo, tomar decisiones sobre la modificación de los ejemplos planificados o el cambio en la secuencia.

- El *conocimiento del contenido y el currículo*: conocimiento que permite al profesorado tener una visión global de la asignatura y la relación de elementos curriculares y objetivos de aprendizaje que su alumnado debe alcanzar. Este conocimiento está muy relacionado con los demás subdominios.

La formación en resolución de problemas dota a los profesores y profesoras de conocimientos común (CCK) y específico (SCK) del contenido. Pero, además, en *ProyectaMates* se ofrecen estrategias relacionadas con el proceso de enseñanza de la resolución de problemas, con lo que se aporta al conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT).

El análisis de vídeos se ha convertido en objeto de estudio muy extendido en las últimas décadas, entre otras cosas, por la facilidad que existe actualmente para tener acceso a este tipo de recurso y la potencia a la hora de captar lo que sucede en el aula. El trabajo de Planas (2006) ofrece un “modelo de análisis que pretende indagar relaciones entre entornos de aula ya existentes, interacciones sociales y procesos de construcción de conocimiento matemático” (p. 38), a través de las videograbaciones. Este modelo se basa en la división de una secuencia de aprendizaje en episodios que se analizan con el objeto de diferenciar los errores, bloqueos o dudas que pudieran producirse y cómo el grupo reacciona hasta que se resuelve, si es el caso. Utilizaremos este modelo para el análisis de las videograbaciones.

Objetivos y metodología

El objetivo de este trabajo es analizar qué estrategias desarrolladas en el curso de formación de *ProyectaMates* incorpora el profesorado al proceso de enseñanza de

resolución de problemas en su aula. Concretamente, cómo organiza la enseñanza de la fase *comprender* para la resolución de un problema no rutinario.

El profesorado analizado se ha formado en cinco momentos o episodios para la comprensión en la implementación de la resolución de problemas: lectura inicial del problema, búsqueda de datos, búsqueda de objetivos, búsqueda de relaciones y representación gráfica. Cada uno de estos episodios darán lugar a los distintos eventos que conformarán las unidades de análisis que estudiaremos en detalle, profundizando en el discurso del profesorado con los estudiantes, observando las interacciones entre la enseñanza dada por el docente y el aprendizaje producido en los estudiantes durante una sesión de resolución de problemas videograbada.

El análisis comienza con la transcripción de la videograbación y separación de los episodios. Posteriormente, se lleva a cabo un análisis cualitativo de tipo descriptivo (Bisquerra, 2004) de cada uno de los episodios identificados. Para un mejor estudio de los datos hemos denominado Etapa 1 a las indicaciones ofrecidas en la formación de *ProyectaMates* previamente a la implementación en el aula, y Etapa 2 al diálogo establecido entre el profesorado y los estudiantes durante la sesión implementada y videograbada.

La sesión videograbada tiene una duración de 55 minutos, y en ella participaron 21 estudiantes de dos grupos de 1.^{er} curso de Educación Secundaria Obligatoria (12-13 años) de Tenerife. De los 55 minutos de la sesión, casi 27 minutos se dedican a trabajar la comprensión del problema, que será donde centraremos el estudio.

Resultados

El problema no rutinario que se trabaja en este estudio es el siguiente:

En una granja hay gallinas, cerdos y cabras. Están en tres cercados cuadrados de diferente tamaño. El de las gallinas está rodeado por 20 metros de valla, el de los cerdos por una valla 20 metros mayor que el de las cabras. En total hemos usado 120 metros de valla. ¿Cuál es el perímetro de cada cercado? ¿Y el área de cada uno? Explica cómo has obtenido tu respuesta.

Junto con el problema se dota al alumnado de una base de orientación, que es un diagrama en el que se explicitan las cuatro fases de resolución y sus elementos.

A continuación, se analiza cada uno de los episodios, indicando los aspectos estudiados en el curso de formación, su inclusión en la instrucción y las intervenciones de los estudiantes que fueron relevantes en el aprendizaje en la resolución de problemas.

Episodio 1: lectura inicial

Observamos que en la Etapa 1, durante el curso de formación, el profesorado formador de *ProyectaMates* ofrece una serie de pasos que, a modo de guion, dirigen la lectura del problema (tabla 1). Por su parte, en la Etapa 2, en el aula con los estudiantes, observamos que el docente modifica algunas de las estrategias sugeridas, aunque mantienen la misma finalidad. Por ejemplo, retira el enunciado a los estudiantes o les pide que relaten lo que sucede en el problema sin utilizar datos numéricos. Por otro lado, se observa que el docente dirige sus preguntas a que los estudiantes extraigan las relaciones que se dan en el enunciado. Esto se correspondería con un episodio posterior, según se trabajó en el curso de formación, pero desde este primer episodio lo empieza a señalar.

| Instrucción Etapa 1 | Instrucción observada en Etapa 2 |
|---|--|
| Lectura individual | Lectura individual |
| Lectura en voz alta | Retirada del enunciado |
| Preguntar a los que tienen más dificultades | Preguntar por información sin usar números |
| | Preguntar qué hay que calcular |
| | Preguntar por el significado de palabras que el alumnado puede ignorar |
| Preguntas en Etapa 1 | Preguntas en Etapa 2 |
| ¿Puedes contarme un poco la situación? | ¿Qué tenemos? ¿Qué forma tienen? |
| ¿Qué es un cercado? ¿Cómo lo cerramos? | ¿Cuántos hay? ¿Son iguales? ¿Qué es el perímetro? ¿Qué es el área? |
| ¿Qué forma tiene? | |

Tabla 1. Elementos observados en el episodio de lectura inicial. Fuente: Elaboración propia

Episodio 2: búsqueda de datos

En este segundo episodio se sigue, en líneas generales, el proceso indicado en el curso de formación. Incluso se repiten, al pie de la letra, las preguntas señaladas. Por tanto, el profesorado transfiere de manera fiel la formación recibida.

En el análisis del diálogo producido en el aula, cabe destacar que se establece una discusión en torno al significado de dato. Así, un estudiante señala que “tres cercados” no es un dato. El argumento del estudiante es “porque aquí dice que hay 3 cercados cuadrados de diferente tamaño”.

Dado que se quiere diferenciar dato de relación, se ha generado un conflicto en el aprendizaje que el profesorado debe gestionar. Y, en este sentido, la duda planteada por el estudiante pone de manifiesto que la confusión acerca del significado de dato sigue presente. El docente, por su parte, sale al paso a explicarlo, señalando como característica de un dato aquello que no va a cambiar a lo largo de todo el problema: es invariante.

| Instrucción Etapa 1 | Instrucción observada en Etapa 2 |
|---|--|
| Preguntar por los datos. Insistir en la definición de dato para diferenciarlo de otro tipo de información. Insistir con preguntas hasta que aparezcan términos como “invariante” o “no dependiente”. Establecer los datos antes que objetivos, para evitar bloqueos. Evitar la representación gráfica en este escenario. Si faltan datos y los alumnos o alumnas no consiguen obtenerlos, se les guía a base de preguntas. | Preguntar por datos. Se admite localizar un dato por números del enunciado. |
| Preguntas en Etapa 1 | Preguntas en Etapa 2 |
| ¿Cuáles son los datos? ¿Por qué [...] es un dato? ¿Es invariante? | ¿Qué es un dato? ¿Por qué es un dato? ¿Cambia [...] en todo el problema? |

Tabla 2. Elementos observados en el episodio de búsqueda de datos. Fuente: Elaboración propia

Episodio 3: búsqueda de objetivos

En este episodio el profesorado realiza una intervención próxima a la trabajada en el curso de formación (tabla 3). Los estudiantes son capaces de identificar correctamente los objetivos del problema con las indicaciones dadas por el profesor o la profesora.

Episodio 4: búsqueda de relaciones

Como señalamos anteriormente, se produce una confusión cuando se busca la identificación de datos y relaciones. Se entiende por relación a la pieza de información que ofrece el problema y que puede tomar varios valores o variar según los valores que tome a lo largo del problema, que establece una conexión

| Instrucción Etapa 1 | Instrucción observada en Etapa 2 |
|---|--|
| Preguntar qué es un objetivo. | Preguntar por objetivos (ya fueron preguntados en el episodio 1) |
| Preguntar por los objetivos encontrados. | |
| No buscar el objetivo antes que los datos porque “no tiene sentido”. | |
| Fomentar el diálogo para que justifiquen por qué es objetivo. | |
| Esperar respuestas del tipo: “Está entre interrogaciones”, “es lo que piden calcular”,... | |
| Preguntas en Etapa 1 | Preguntas en Etapa 2 |
| ¿Qué es un objetivo en un problema para ti? ¿Por qué es un objetivo? ¿Hay un solo objetivo o hay más? | ¿Qué hay que calcular? |

Tabla 3. Elementos observados en el episodio de búsqueda de objetivos. Fuente: Elaboración propia

entre varios datos entre sí o entre datos y objetivos, de forma que se va estableciendo un camino en el proceso que termina en la solución.

Mientras que en el curso de formación queda clara la estrategia a seguir (tabla 4), en el aula los estudiantes muestran dificultades para entender la diferencia entre los datos y las relaciones dadas en un problema, el profesorado debe llevar a cabo varias intervenciones para resolver este conflicto. En estas intervenciones, el profesor o la profesora señala que existe la posibilidad de que algunas piezas de información dadas en el enunciado del problema pueden mostrarse como dato y como relación, simultáneamente. Este aspecto no se había trabajado en el curso de formación, ni se señaló esta posibilidad.

En este sentido, cuando el enunciado da el valor 120, los estudiantes lo señalan como un dato y no como una relación. En su intervención, el profesorado señala que tiene un carácter dual (dato-relación), dando la siguiente justificación: “si lo veo como que si cojo un cercado, más otro cercado, más el otro cercado, al final

obtengo 120 [...] así estamos como comparando [...] luego, podemos utilizarlo de las dos maneras [dato y relación]”.

| Instrucción Etapa 1 | Instrucción observada en Etapa 2 |
|---|---|
| Preguntar por las relaciones. | Preguntar por relaciones |
| Verificar por qué es relación y diferenciarlo de dato. Puede utilizarse la palabra “dependencia”. | Verificar que es una relación. Diferenciar de “dato”. |
| Algunos estudiantes tendrán que escribir más relaciones, dependiendo del conocimiento y dificultades que tengan. | Insistir hasta que se entienda. Detectar si hay un dato que es relación. |
| Indicar las relaciones que vienen explícitas en el enunciado, aunque si algún estudiante lo necesita, incluir las implícitas. | |
| Preguntas en Etapa 1 | Preguntas en Etapa 2 |
| ¿Por qué [...] es una relación? ¿Qué conecta? | ¿Por qué es una relación? ¿Qué compara? ¿Por qué [...] no es un dato? |

Tabla 4. Elementos observados en el episodio de búsqueda de relaciones. Fuente: Elaboración propia

Episodio 5: representación gráfica

El episodio que cierra la fase de comprensión del problema es la representación mediante un diagrama o gráfico de la situación – problema. Es un proceso de reescritura de la información dada en el enunciado del problema, mediante el cual se pone de manifiesto su comprensión. De hecho, también puede dar lugar a descubrir nueva información no explícita que ayude a abordar la resolución.

En este episodio el profesorado sigue el proceso descrito en el curso de formación (tabla 5). Es destacable cómo en el aula, durante la representación, se destaca información que en otro momento no se puso de manifiesto. Nos referimos a comentarios como: “el diagrama se construye con cuadrados, no con rectángulos”;

“el cercado de las gallinas es 20 metros, no el de las cabras”; “el cercado de los cerdos es mayor que el de las cabras, 20 metros mayor” y “diferenciar el significado de perímetro y área en el diagrama”.

Este diálogo permite construir un diagrama que recoge toda la información y se hace desde la puesta en común de todos los estudiantes del aula. Además, el profesorado se asegura, con sus preguntas, de que todos interpretan correctamente la información contenida en el diagrama.

| Instrucción Etapa 1 | Instrucción observada en Etapa 2 |
|---|--|
| Realizar un dibujo que contenga datos, relaciones y objetivos (no hacerlo antes). Elegir un estudiante con un buen dibujo que ejemplifique al resto. | Eligen a un alumno o alumna al azar Se va modificando el dibujo conforme se detectan errores. |
| Preguntas en Etapa 1 | Preguntas en Etapa 2 |
| ¿Quién puede hacer una representación gráfica de la situación del problema? | ¿Puedes hacer un dibujo que resuma la situación? |

Tabla 5. Elementos observados en el episodio de representación gráfica. Fuente: Elaboración propia.

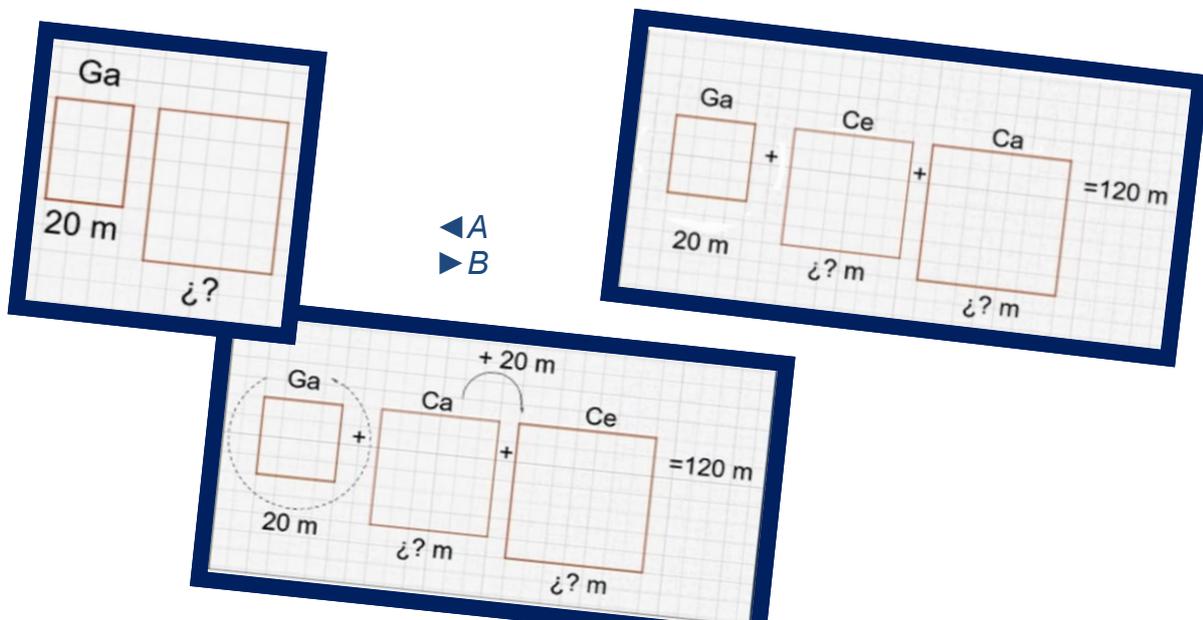


Figura 2. Representación de los cercados en tres momentos. Fuente: elaboración propia.

Discusión

De los resultados anteriores observamos que, durante la implementación, el profesorado se encarga de atender y resolver los errores y dudas de su alumnado, sin dar oportunidad a que el diálogo se establezca entre los estudiantes y sean ellos mismos los que den respuesta a las inquietudes que tienen, antes de que intervenga el profesor o la profesora. De esta forma, no se proporcionan espacios para reelaborar las ideas y ganar confianza en sus propios argumentos durante la resolución de problemas.

En su intervención se constata cómo el profesorado no ha interiorizado del todo los términos *dato*, *relación* y *objetivo* trabajados en el curso de formación. Así, señala que una relación es “una comparación”, que no es así en todos los casos, o no argumenta correctamente la afirmación que hacen los estudiantes cuando dicen que “[ser] figuras iguales” es dato, pues realmente es una relación de equivalencia. Pero lo más significativo es que el profesor o la profesora señala que existe la posibilidad de que la información dada en el problema puede presentar una dualidad *dato-relación*. Esta afirmación lleva a que justifique que el valor *120 m* es un dato (por ser información invariante en todo el problema), y como comparación entre los cercados. Además, no justifica correctamente que existe una conexión entre los perímetros de los tres recintos y el total (relación *partes-todo* aditiva). Por tanto, la intervención del profesorado deja constancia de que este no ha resuelto el conflicto cognitivo generado cuando se estudian los términos *dato* y *relación* en un problema, y su comprensión resulta compleja no solo para los estudiantes, sino también para el docente.

Con respecto a la representación (Figura 2), observamos cierta incoherencia entre las formas esperadas (cuadrados) y las hechas por el estudiante (rectángulos,

Figura 2A), que son reelaboradas inmediatamente por el profesorado (Figura 2B). Es reseñable que, en su afán por evitar la algebrización de la representación, se utilizan modos de representación que pueden ser incorrectos o, al menos, poco claros (Figura 2C). Tal es el caso en el que representa el símbolo suma entre los cuadrados que representan los cercados. No queda claro qué se suma: áreas, perímetros, longitudes de lados, ... Esto nos hace reflexionar de que la forma de representación ha de ser concisa pero precisa. La representación ha permitido conocer nueva información, como que existe diferencia entre los tamaños de los cercados, aspecto que no había aparecido en el análisis de los episodios anteriores.

Conclusiones

En este trabajo se ha analizado cómo un profesor o una profesora, que ha seguido un curso de formación en resolución de problemas, ha llevado el conocimiento adquirido para aplicarlo en el aula y lo ha aplicado. Mediante un análisis comparativo de la secuencia de formación y el estudio de los diferentes episodios con el que desarrolló la fase de *comprender* del problema en el aula, se describe y analiza el aprendizaje desarrollado por el profesorado en el curso de formación recibido.

Se observó que este profesor o profesora ha sido capaz de llevar a cabo las herramientas proporcionadas en la formación para implementar la fase de comprensión de un problema no rutinario en el aula. Si bien, es verdad que ha tenido que realizar algunas modificaciones debidas a la imprevisibilidad de los estudiantes y lo que sucede en el aula.

Por otra parte, consideramos que el profesorado ha guiado mucho el proceso de resolución, sin dejar oportunidad a que los estudiantes reformulen sus ideas o bien conduzcan aquellas en las que mostraban cierta dificultad de comprensión. Parece

necesario generar espacios de reflexión en el aula, de forma que los estudiantes puedan manifestar su razonamiento y argumentar a sus iguales, como medio para promover el aprendizaje de los conocimientos matemáticos y así adquirir confianza sobre los conceptos que se utilizan. Se busca conseguir que el profesorado adquiera la figura de mediación del conocimiento y no ser él quien lo reelabora o construye. A modo de profundización se sugiere analizar el rol de la base de orientación en este curso de formación.

Con respecto a los conceptos de *datos*, *relación* y *objetivo*, la formación proporcionada al profesorado ha generado cierta confusión en él mismo, que fue transmitida a los estudiantes. Tanto unos como otros han mostrado dificultades en la categorización de las piezas de información, lo que le llevó a no atender estos aspectos con suficiente profundidad y centrar la resolución en la representación del diagrama. Consideramos que es necesario una mejor definición de estos términos y un análisis con mayor profundidad acerca de cómo contribuye esta terminología a mejorar la resolución de problemas de los estudiantes.

Finalmente, con respecto a la representación diagramática observamos que es importante cuidar ciertos aspectos que eviten que se produzcan obstáculos en la interpretación de la información que se extrae del problema y que, a la vez, nos permita transitar a otras representaciones abstractas, como el uso del álgebra, con cierta naturalidad.

Hemos podido constatar que, la formación docente acerca de la fase de comprensión es necesaria si queremos promover oportunidades de aprendizaje matemático en los estudiantes. Pero, a la vez es necesario que el profesorado genere espacios para que esta fase se desarrolle plenamente, pues solo así

lograremos que promueva la consolidación del conocimiento matemático y construir nuevas matemáticas, a través de la resolución de problemas.

Agradecimientos

ProyectoMates: Proyecto financiado por el Excelentísimo Cabildo Insular de Tenerife. También se ha financiado en parte por el Proyecto de Investigación “Resolución de problemas y competencia matemática en la educación Primaria y Secundaria y en la formación de profesores”. EDU2017-84276-R.

Referencias bibliográficas

- Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.
- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. *Proceedings of Eighth ERME Congress*. Antalya, Turkey.
- García-Alonso, I. (2020). ProyectoMates: Reflexiones sobre la práctica docente como medio de formación de profesores de matemáticas, *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(60), 177-195.
- García-Alonso, I., García-Díaz, A., & Camacho-Machín, M. (2019). La resolución de problemas no rutinarios en el aula de primaria y secundaria. Un estudio con profesores. En *Investigación en Educación matemática XXIII*, (págs. 323-332). Valladolid.
- INEE (2020). *PISA 2018 Competencia Global. Informe español*. Madrid: Ministerio de Educación y Formación Profesional.
- Mason, J., Burton, L., y Stacy, K. (2010). *Thinking mathematically* (2nd ed.). New York: Pearson.

- Planas, N. (2006). Modelo de análisis de vídeos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación Matemática*, 18(1), 37-72.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. (J. Zugazagoitia, Trad.) México, D.F.: Trillas.
- Santos-Trigo, M. (2019). Problem-Solving in Mathematics Education (preprint). En S. Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education*. Switzerland: Springer.
- Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2016). Digital technologies and mathematical. Problem solving: Redesigning resources, materials, and extending learning environments. In K. Newton (Ed.) *Problem-solving: Strategies, challenges and outcomes* (pp. 31-49). New York: Nova Science Publishers.
- Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving: theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1 y 2), 9–34.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Vila, A., y Callejo, M.L. (2009). *Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas*. Narcea: Madrid.
- Veerschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making sense of Word problems*. The Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers.