Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Jesús David Betancourt Lugo

Operadores fraccionarios mediante el lenguaje de semigrupos

Fractional operators through the semigroup language

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Mayo de 2024

Dirigido por
Marta de León Contreras

Marta de León Contreras
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Llegar al final de este trabajo de fin de grado ha sido una aventura increíble, y no podría haberlo hecho sin la ayuda de muchas personas a lo largo del camino.

Primero, quiero agradecer a mi tutora de trabajo de fin de grado, Marta. Su dedicación, sus consejos y su motivación han sido fundamentales para completar este proyecto. Aprecio enormemente todo el tiempo y esfuerzo que ha invertido en ayudarme a conseguirlo.

A mis compañeros de clase, gracias por hacer de esta experiencia algo único. Juntos hemos pasado por buenos y malos momentos, estoy agradecido por todas las risas, y el apoyo mutuo.

A mi familia, gracias por sus ánimos constantes, su amor y su apoyo incondicional. Me han dado la fuerza necesaria para llegar hasta aquí. A mis padres, gracias por todo lo que han hecho por mí, por darme las herramientas para triunfar y por estar siempre a mi lado. Y en especial a mi hermano, gracias por estar ahí y las infinitas risas en los momentos difíciles.

Y por último, a esa persona que no se ha separado de mi, a mi novia, Ainhoa. Gracias por ser un pilar fundamental en mi vida. Tu amor, tu paciencia y tu apoyo inquebrantable me han dado la motivación para seguir adelante, especialmente en los momentos más desafiantes que tuvimos que superar. No podría haberlo hecho sin ti.

Jesús David Betancourt Lugo
La Laguna, 20 de mayo de 2024.

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo del presente Trabajo de Fin de Grado es definir los operadores fraccionarios mediante el lenguaje de semigrupos. En particular, se hará un estudio más exhaustivo en el caso del laplaciano fraccionario y se indicará el método a seguir para operadores más generales. Para ello, en los primeros capítulos haremos un desarrollo previo de las principales herramientas que serán necesarias, como la transformada de Fourier y sus principales propiedades, así como la teoría de semigrupos de operadores, que jugará un papel fundamental.

Palabras clave: *Operadores fraccionarios – Semigrupos – Transformada de Fourier – Teoría espectral.*

Abstract

The main goal of this Final Degree Project is to define fractional operators by means of the semigruoup language. In particular, a more exhaustive study will be done in the case of the fractional Laplacian and in the case of more general operators the method will be illustrated. To do this, in the first chapters we will go into detail of the main tools that will be necessary, such as the Fourier transform and its main properties, as well as the theory of semigroups of operators, which will play a fundamental role.

Keywords: *Fractional operators – Semigroups – Fourier transform – Spectral theory.*

Contenido

Introducción

La teoría de potencias fraccionarias de operadores, o cálculo fraccionario, nace con la idea de definir las derivadas de orden 1/2. G.W. Leibniz introdujo la expresión de las derivadas de orden $n \in \mathbb{N}$, por lo que en 1965 L'Hôpital le escribió una carta preguntándole ¿qué pasaría si n fuera 1/2? A esto, Lebiniz le respondió "de esta paradoja se extraerán, algún día, consecuencias muy útiles". A partir de este momento, muchos matemáticos han contribuido al desarrollo de esta teoría, como Abel, Lioville, Riemann, Fourier, Laplace, Lagrange, Riesz o Weyl, entre otros.

Es curioso mencionar que las potencias no enteras (llamadas comúnmente fraccionarias) de operadores han sido definidas de múltiples maneras en análisis funcional, probabilidad, cálculo fraccionario y teoría potencial. De hecho, los autores antes mencionados dieron diferentes definiciones de las derivadas fraccionarias y algunos de ellos las emplearon para resolver problemas de física y otras ramas científicas.

En los últimos 20 años se ha vivido una explosión importante de trabajos basados en el estudio de ecuaciones con derivadas fraccionarias, puesto que se ha visto que las potencias no enteras de las derivadas modelizan mejor los procesos físicos "con memoria", como el crecimiento de un tumor o la erosión de un paisaje.

Por su parte, la teoría de semigrupos es una herramienta que nació dentro del análisis funcional pero que ha resultado ser de gran utilidad en el desarrollo de múltiples áreas del análisis matemático, como el análisis armónico y la teoría de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs). Podría decirse que el desarrollo formal de la teoría de semigrupos comenzó entre los años treinta/cuarenta del siglo pasado, siendo grandes exponentes de la misma E. Hille y K. Yosida. Ambos autores estudiaron de manera independiente las familia de operadores, $\{T_t\}_{t\geq 0}$, lineales y acotados en un espacio de Banach que satisfacen

1) $T_{t+s} = T_t T_s$.
2) $T_0 = I$ (I denota el operador identidad.)

A esta familia de operadores, $\{T_t\}_{t\geq 0}$, con las propiedades anteriores, se le denomina *semigrupo*.

Otra de las personas que pronto comenzó a trabajar en la teoría general de semigrupos fue R.S. Phillips, quien amplió la teoría de Hille y, de hecho, colaboró con él a principios de 1952 en la nueva edición de su libro para incluir los nuevos avances en la teoría, véase [5]. Además de los autores mencionados anteriormente, muchos otros han hecho contribuciones importantes en el desarrrollo de la teoría de semigrupos, como A.V Balakrishnan, E. B. Davies, N. Dunford, W. Feller, A. Pazy, J. T. Schwartz, E. Stein, etc.

En 2009, P. R. Stinga y J. L. Torrea probaron que el lenguaje de semigrupos podía utilizarse también para estudiar las propiedades fundamentales de las potencias fraccionarias de operadores. En particular se dieron cuenta de que cuando se conoce el núcleo (integral) asociado a un semigrupo, podía darse una expresión puntual para las potencias positivas del operador que generaba dicho semigrupo. Esta descripción por semigrupos tiene múltiples ventajas, como la obtención de una forma más directa y sencilla, de la expresión puntual de las potencias fraccionarias de operadores, con el cálculo explícito de las constantes que acompañaban a dicha expresión. Las fórmulas puntuales de las potencias fraccionarias de operadores revelan el carácter *no local* de los mismos, esto es, la dependencia de los valores de la función f en todo el dominio (de aquí la idea de que son operadores con "memoria"). Esta propiedad implica que los métodos locales de EDPs no se pueden aplicar para estudiar problemas relacionados con potencias fraccionarias. Por otra parte, la definición de las potencias fraccionarias por medio de semigrupos facilita y sistematiza la obtención de las *propiedades de regularidad* de los operadores fraccionarios en diferentes espacios de funciones. Estos resultados son interesantes no sólo en análisis, sino también en EDPs, porque implican estimaciones a priori de las soluciones a algunas ecuaciones en derivadas parciales.

El presente trabajo está divido en 4 capítulos. En el primero de ellos se presentan algunos conceptos y resultados preliminares, como las propiedades básicas de los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y unas pinceladas de la teoría espectral de operadores, que emplearemos posteriormente en el resto de capítulos. Seguidamente, en el segundo capítulo se introduce la teoría de la transformada de Fourier y algunos de sus resultados principales.

El tercer capítulo desarrolla la teoría de semigrupos de operadores, que será la herramienta clave para la definición de potencias fraccionarias de operadores. Para finalizar, el capítulo cuatro presenta el gran objetivo de este trabajo, los operadores fraccionarios, donde pondremos de manifiesto la utilidad de los semigrupos y sus propiedades para facilitar la obtención de fórmulas explícitas de las expresiones de dichos operadores. En particular, haremos un estudio en profundidad del laplaciano fraccionario y finalizaremos la memoria ilustrando, de manera más heurística, cómo aplicaría el método en el caso general.

1

Resultados preliminares

En este primer capítulo introductorio presentaremos algunos conceptos y propiedades necesarias para el desarrollo de la memoria. Indagaremos en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, donde recordaremos sus propiedades y algunas desigualdades relacionadas con sus respectivas normas, y presentaremos algunos resultados relevantes de la teoría espectral de operadores.

Antes de iniciar el desarrollo de esta sección vamos a fijar la notación que usaremos en lo que sigue.

Notación 1.1. *1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ denota el conjunto de funciones tales que todas sus derivadas parciales de orden k existen y son continuas.*
2. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ denota el conjunto de funciones infinitamente diferenciables.
3. $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ denota el conjunto de funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto.
4. $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
5. Si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, con $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_o^n$.
6. Si $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es suficientemente regular, $\mathcal{D}^\beta f := \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial^{\beta_1} x_1 \cdots \partial^{\beta_n} x_n}(f) = \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n}(f)$, donde $|\beta| := \beta_1 + \cdots + \beta_n$.
7. $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$.
8. Diremos que $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$, y además se define $\binom{\beta}{\alpha} := \frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!}$.

Sea $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Para funciones f y g suficientemente regulares, se tiene que

$$\mathcal{D}^\beta(fg) = \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} \mathcal{D}^\alpha f \mathcal{D}^{\beta-\alpha} g.$$

1.1. Los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$

Definición 1.2. *Se define $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$ como el espacio de las funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ medibles tales que*

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty,$$

y el espacio $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *como el espacio de las funciones medibles esencialmente acotadas, esto es, las funciones medibles en* $\mathbb{R}^n$ *que verifican*

$$\|f\|_\infty := inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C, \text{ c.t. } x \in \mathbb{R}^n\} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

Así definido, $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$, *es un espacio vectorial donde* $\|\cdot\|_p$ *es una seminorma.*

En virtud de esto, podemos definir $L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$, *como el espacio cociente* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)/\sim$, *donde la relación de equivalencia en* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $\sim$, *viene dada por*

$$f \sim g \text{ si, y sólo si, } f = g \quad \text{c.t.p.}$$

De esta forma, $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p), 1 \leq p < \infty$ *es un espacio vectorial normado. Por simplicidad en ocasiones denotaremos estos espacios simplemente por* $L^p, 1 \leq p \leq \infty$.

Recordemos la definición de exponente conjugado. Sean $1 \leq p, q \leq \infty$. Decimos que p y q son **exponentes o índices conjugados** si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Así mismo, evoquemos las desigualdades de Hölder y Minkowski, así como la desigualdad integral de Minkowski, cuyas demostraciones se pueden encontrar en [4].

Teorema 1.3. *(Desigualdades de Hölder y Minkowski)*
1. ***Desigualdad de Hölder****: Sean* $1 \leq p, q \leq \infty$ *exponentes conjugados. Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *entonces se tiene que* $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y se verifica que*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Además, la igualdad se verifica si, y solo si, $\exists \beta > 0$ *tal que* $|f|^p = \beta |g|^q$.

2. ***Desigualdad de Minkowski****: Sea* $1 \leq p \leq \infty$. *Si* $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *entonces se verifica*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Teorema 1.4. *(Desigualdad Integral de Minkowski) Sean* $(X_1, \mu_1), (X_2, \mu_2)$ *dos espacios de medida* σ*-finita,* $F : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ *una función medible y sea* $1 \leq p < \infty$, *entonces se verifica*

$$\left(\int_{X_2} \left|\int_{X_1} F(x,y)\mu_1(dx)\right|^p \mu_2(dy)\right)^{1/p} \leq \int_{X_1} \left(\int_{X_2} |F(x,y)|^p \mu_2(dy)\right)^{1/p} \mu_1(dx).$$

Presentamos a continuación un resultado que ilustra que las traslaciones son continuas en $L^p(\mathbb{R}^n)$, cuya demostración puede encontrarse en [4].

Proposición 1.5. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Se tiene que*

$$\lim_{|x|\to 0} \|f(x+\cdot) - f\|_p = 0.$$

Seguidamente, recordemos algunos resultados relacionados con la convergencia en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lema 1.6. *Sean $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_n \longrightarrow f$. Entonces, existe $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_k} \longrightarrow f$ c.t.p.*

Teorema 1.7. ***(Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)*** *Sean (X,μ) un espacio de medida y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$, con g integrable, y supongamos que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ c.t.p.. Entonces f es integrable, y*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n dx = \int f dx.$$

Otro concepto que será importante a lo largo de la memoria es el de convolución.

Definición 1.8. *Dadas $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones medibles, se define la convolución de f y g por*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

siempre que la integral exista.

Nótese que si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, la convolución se define como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x-y)}dy, \; x \in \mathbb{R}^n.$$

La convolución es una operación que dota de mejores propiedades de regularidad a las funciones implicadas; es decir, $f * g$ tendrá mejores propiedades que f y g por separado. Por este motivo, la convolución juega un papel fundamental en el análisis armónico y en las ecuaciones en derivadas parciales.

Por ejemplo, sea $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Como para cada $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que $\left|\mathcal{D}^\beta(f(x-y))g(y)\right| \leq K|g(y)|$, $y \in \mathbb{R}^n$, obtenemos que $\mathcal{D}^d(f(x-\cdot))g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Esto, junto con la continuidad de las derivadas de f, nos permite concluir que $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y para cada $\beta \in \mathbb{N}_0^n$,

$$\mathcal{D}^\beta(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{D}^\beta(f(x-y))g(y)dy,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

A lo largo de la memporia estaremos interesados en acotar operadores en espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y para ello los teoremas de interpolación son de gran utilidad. A continuación, vamos a enunciar el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin, cuya prueba puede encontrarse en [11, Capítulo 5].

Teorema 1.9. *Sean $1\le p_0,p_1,q_0,q_1\le\infty$, y $T:L^{p_0}+L^{p_1}\longrightarrow L^{q_0}+L^{q_1}$ un operador lineal tal que $\|Tf\|_{q_0}\le M_0\|f\|_{p_0}$, para $f\in L^{p_0}$ y $\|Tf\|_{q_1}\le M_1\|f\|_{p_1}$, para $f\in L^{p_1}$. Además, para $0<\theta<1$, sean p y q tales que $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$. Entonces, se tiene que*

$$\|Tf\|_q\le M_0^{1-\theta}M_1^\theta\|f\|_p,\quad f\in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Corolario 1.10. *(Desigualdad de Young). Si $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces $f*g\in L^r(\mathbb{R}^n)$, donde $1\le p,q,r\le\infty$ tales que $\frac{1}{r}+1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ y además se verifica que*

$$\|f*g\|_r\le\|f\|_p\|g\|_q.$$

Demostración. Sean $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si p' es el exponente conjugado de p, aplicando Hölder obtenemos que

$$\begin{aligned}|(f*g)(x)|&\le\int_{\mathbb{R}^n}(|g(y)|^{1/p}|f(x-y)||g(y)|^{1/p'}dy\\&\le\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)||f(x-y)|^pdy\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|dy\right)^{1/p'}\\&=\|g\|_1^{1/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)||f(x-y)|^pdy\right)^{1/p},\ x\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Elevando todo a p e integrando respecto a x tenemos que

$$\begin{aligned}\|f*g\|_p^p=\int_{\mathbb{R}^n}|(f*g)(x)|^pdx&\le\|g\|_1^{p/p'}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)||f(x-y)|^pdydx\\&=\|g\|_1^{p/p'}\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^pdxdy=\|g\|_1^{p/p'}\|g\|_1\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Tomando raíz p-ésima a ambos lados de la desigualdad concluimos que

$$\|f*g\|_p\le\|g\|_1^{1/p'+1/p}\|f\|_p=\|g\|_1\|f\|_p.$$

Por otro lado, si $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, donde p y p' son exponentes conjugados, aplicando Hölder obtenemos que

$$
\begin{aligned}
|(f*g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^{p'}\right)^{1/p'} \\
&= \|f\|_p \|g\|_{p'},\ x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

Basta tomar supremo a ambos lados de la desigualdad y concluimos que

$$\|(f*g)\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_{p'}.$$

Aplicando Riesz-Thorin, fijando $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y definimos el operador $t_f(g) := f*g$. Hemos probado que

$$\|t_f(g)\| \leq \|f\|_p\|g\|_1$$

y

$$\|t_f(g)\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_{p'}.$$

De esta forma, del teorema de Riesz-Thorin obtenemos que

$$\|t_f(g)\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta}\|f\|_p^{\theta}\|g\|_q.$$

Siendo $\frac{1}{q} = 1-\theta+\frac{\theta}{p'}$ y $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p}$. Veamos que $1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Por un lado, observamos que

$$1+\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p}+1.$$

Por otra parte, como p y p' son exponentes conjugados, se tiene que $\frac{\theta}{p'} = \theta - \frac{\theta}{p}$. Por consiguiente, $\frac{1}{q} = 1-\frac{\theta}{p}$ y como podemos escribir $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p}+\frac{\theta}{p}$, de esta forma se concluye que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p}+1 = 1+\frac{1}{r}.$$

□

1.2. Introducción a la teoría espectral de operadores

En esta memoria no podremos realizar un estudio extenso de la teoría espectral por limitaciones de espacio. Sin embargo, presentamos una breve introducción de los conceptos y resultados más relevantes (véase [15] para más información). Iniciaremos enunciando algunas definiciones y resultados básicos, que permitirán la mejor comprensión de Teorema Espectral para operadores *autoadjuntos no acotados* en espacio de Hilbert.

Como los operadores que trabajaremos en el Capítulo 4 son no acotados, daremos todas las definiciones en este contexto, considerando operadores densamente definidos, esto es, operadores $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to X$ tales que el dominio del operador, $\mathcal{D}(T)$, sea denso en el espacio de Hilbert X.

Definición 1.11. *Sean X un espacio de Banach y $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow X$ un operador lineal. Se define la* **resolvente** *de T por*

$$\rho(T) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ : \lambda I - T \ \textit{es invertible y} \ (\lambda I - T)^{-1} \ \textit{es acotado} \right\},$$

y el **espectro** *de T por*

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

A continuación vamos a dar una definición que generaliza el concepto de operador autoadjunto al caso de operadores no acotados.

Definición 1.12. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(T)$ es denso en $\mathcal{H}$. Se define*

$$\mathcal{D}(T^*) = \{\tilde{x} \in \mathcal{H} : \ \exists \tilde{y} \in \mathcal{H} \ \textit{verificando} \ \langle Tx, \tilde{x} \rangle = \langle x, \tilde{y} \rangle, \ \forall x \in \mathcal{D}(T)\}$$

y el **operador adjunto** *de T, T^*, por*

$$T^* \tilde{x} = \tilde{y}, \ \tilde{x} \in \mathcal{D}(T^*).$$

En [15, Cap. VII, Proposición 1.3] se prueba que el hecho de que $\mathcal{D}(T)$ sea denso en $\mathcal{H}$ implica que el $\tilde{y}$ en la definición de $\mathcal{D}(T^*)$ es único, y por tanto T^* está bien definido.

Definición 1.13. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(T)$ es denso en $\mathcal{H}$. Se dice que T es* **autoadjunto** *si $T^* = T$.*

Proposición 1.14. *El espectro $\sigma(T)$ de un operador autoadjunto T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ complejo es real. Además, si T es no negativo, esto es $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathcal{D}(T)$, entonces $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$.*

Introducimos ahora el concepto de medida espectral, que jugará un papel fundamental en el teorema espectral.

Definición 1.15. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, X un conjunto arbitrario y Ω una $\sigma-$álgebra de los subconjuntos de X. Una* **medida espectral** *en $(X, \Omega, \mathcal{H})$ es una correspondencia $E : \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que verifica*

1. *Para cada $A \in \Omega$, $E(A)$ es una proyección ortogonal.*
2. *$E(X) = I$ y $E(\emptyset) = 0$.*
3. *Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces $E(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)x = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} E(A_n)x$, $x \in \mathcal{H}$.*
4. *Para cada $A, B \in \Omega$, se tiene que $E(A \cap B) = E(A)E(B)$.*

De la definición anterior se deduce el siguiente resultado.

Lema 1.16. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, X un conjunto arbitrario y Ω una $\sigma-$álgebra de los subconjuntos de X. Si E es una medida espectral en $(X, \Omega, \mathcal{H})$, para cada $x, y \in \mathcal{H}$ la aplicación $E_{x,y} : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $E_{x,y}(A) = \langle E(A)x, y\rangle$, $A \in \Omega$, es una medida compleja numerablemente aditiva en Ω con variación total $\|E_{x,y}\| \leq \|x\|\|y\|$.*

Este lema nos va a permitir definir la integral respecto a una medida espectral, para más detalles, véase [15, Capítulo VII, Proposición 3.4]. Ya estamos en disposición de enunciar el teorema espectral en el contexto de operadores lineales autoadjuntos y no acotados.

Teorema 1.17. *(**Teorema espectral**) Sea $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal y autoadjunto, con $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ un subespacio denso de $\mathcal{H}$. Entonces, existe una única medida espectral asociada a $\mathcal{L}$, E, tal que*

$$\mathcal{L} = \int_{\sigma(\mathcal{L})} \lambda \, dE(\lambda),$$

donde $\sigma(\mathcal{L}) \subseteq \mathbb{R}$ y la integral se entiende en el sentido

$$\langle \mathcal{L}f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_{f,g}(\lambda), \quad f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \text{ y } g \in \mathcal{H}.$$

En nuestro caso, usaremos el teorema espectral para operadores no negativos, por lo que $\sigma(\mathcal{L}) \subset [0, \infty)$ y la integral anterior sería en la semirrecta positiva real.

Una vez queda establecido el Teorema espectral para operadores no negativos, no acotados, autoadjuntos y densamente definidos, podemos definir un cálculo funcional, esto es, para cada $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ medible, podemos definir

$$\phi(\mathcal{L}) = \int_0^\infty \phi(\lambda) dE(\lambda)$$

en $\mathcal{D}(\phi) = \{f \in \mathcal{H} : \int_0^\infty \phi^2(\lambda) \, dE_{f,f}(\lambda) < \infty\}$. Véase [15, Cap. VII, Teorema 4.5] para la completa justificación. Esto jugará un papel crucial a la hora de justificar las fórmulas de subordinación y de potencias fraccionarias dadas en términos de semigrupos del Capítulo 4.

2

Una introducción a la transformada de Fourier

En este segundo capítulo estudiaremos el concepto y las múltiples propiedades acerca de la transformada de Fourier, denominada así por el matemático y físico francés Joseph Fourier (1768-1830). En la primera sección trabajaremos la transformada en una clase de funciones suaves con rápido decaimiento (clase de Schwartz) así como en espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p \leq 2$. Además, en este capítulo introduciremos el operador laplaciano, que será el primer operador sobre el que definiremos las potencias fraccionarias en el Capítulo 4.

2.1. La transformada de Fourier en $\boldsymbol{\mathcal{S}}$

Definición 2.1. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se define* ***la transformada de Fourier*** *de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ por*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

donde $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$. También denotaremos a la transformada de Fourier de f en ξ por $\mathcal{F}(f)(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Veamos a continuación el cálculo de la transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, que nos introducirá la necesidad de considerar dicho operador en un conjunto de funciones con mejores propiedades.

Ejemplo 2.2. Sea $f(x) = \mathcal{X}_{[-1,1]}(x),\ x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i x\xi} dx = \frac{1}{-2\pi i\xi}\left(e^{-2\pi i\xi} - e^{2\pi i\xi}\right)\\ &= \frac{sen(2\pi\xi)}{\pi\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\end{aligned}$$

y $\widehat{f}(0) = 2$. Veamos que $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|sen(x)|}{x} dx \geq \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |sen(x)| dx = \frac{2}{n\pi}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{|sen(x)|}{|x|} dx &\geq \int_0^\infty \frac{|sen(x)|}{x} dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^{N\pi} \frac{|sen(x)|}{x} dx \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \end{aligned}$$

El ejemplo anterior ilustra que la transformada de Fourier, $\mathcal{F}$, no lleva funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$ a funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$, por lo que nos gustaría considerar este operador en un conjunto de funciones tal que $\mathcal{F}$ sea un operador acotado en dicho espacio y que nos permita invertir la transformada de Fourier, para así recuperar la función f. Esta clase de funciones "buenas" se conoce como la **clase de Schwartz**.

Definición 2.3. *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se dice que está en la clase de Schwartz, denotada por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o simplemente $\mathcal{S}$, si f es infinitamente diferenciable y todas sus derivadas decrecen rápidamente en el infinito, es decir,*

$$\textit{para cada } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \textit{ se tiene que } p_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty.$$

Nótese que $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. En efecto, cada $f \in \mathcal{S}$ satisface $|f(x)| \leq C(1+|x|^2)^{-n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, probaremos en esta sección que $\mathcal{S}$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Para ello, debemos introducir el concepto de aproximación de la identidad, cuyo nombre es sugerido por jugar el papel de la identidad con respecto a la convolución (véase la Proposición 2.7).

Definición 2.4. *Una **aproximación a la identidad** es una familia de funciones integrables $\{\phi_t\}_{t>0}$ que verifica las siguientes propiedades*

a) Para cada $t > 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x)dx = 1$.
b) $\sup_{t>0} \|\phi_t\|_1 < \infty$.
c) Para cada $\delta > 0$, $\lim_{t\to 0} \int_{|x|\geq\delta} |\phi_t(x)|dx = 0$.

A las aproximaciones de la identidad también se las denomina **núcleos de sumabilidad**. Una forma de obtener una aproximación a la identidad es la siguiente: sea $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Para cada $t > 0$, la familia

$$\phi_t(x) := t^{-n}\phi\left(\frac{x}{t}\right), \; x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

es una aproximación de la identidad.

En efecto, sea $t > 0$, realizando el cambio de variable $y = x/t$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^{-n}\phi\left(\frac{x}{t}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)dy = 1.$$

Asimismo, para $t > 0$ tenemos que

$$\|\phi_t\|_1 = \left\|t^{-n}\phi\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n}\left|\phi\left(\frac{x}{t}\right)\right| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)|\, dy < \infty.$$

Por tanto, tomando supremo a la izquierda de la desigualdad se concluye la propiedad *b)* de la Definición 2.4.

Por último, sea $\delta > 0$. Haciendo el cambio de variable $y = x/t$ obtenemos que

$$\lim_{t\to 0} \int_{|x|\geq\delta} t^{-n}\left|\phi\left(\frac{x}{t}\right)\right| dx = \lim_{t\to 0}\int_{|y|\geq\delta/t} |\phi(y)|dy = 0,$$

Donde en la última igualdad hemos usado que al ser ϕ integrable, la integral sobre la región $|y| > \delta/t$ se hace arbitrariamente pequeña cuando $t \to 0$.

La teoría anterior también nos permite construir ejemplos de aproximaciones de la identidad que son $\mathcal{C}^\infty$ y tienen soporte en una bola. Consideramos

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}C & , \ |x| < 1 \\ 0 & , \ |x| \geq 1 \end{cases}, \qquad \text{donde } C = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi}.$$

Puede comprobarse que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ y $\mathrm{sop}(\varphi) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \varphi(x) \neq 0\} = B(0,1)$. Por tanto, $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$ es una aproximación de la identidad, es $\mathcal{C}^\infty$ y $\mathrm{sop}(\varphi_t) = B(0,t)$.

A continuación, vamos a presentar dos ejemplos de aproximaciones a la identidad que jugarán un papel importante en esta memoria.

Ejemplo 2.5 (El núcleo de Gauss-Weierstrass). Consideremos $\{\omega_t\}_{t>0}$, definido como $\omega_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que satisface las tres condiciones de aproximación de la identidad. Primeramente, realizando el cambio de variable $x = 2y\sqrt{t}$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_t(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{2^n}{(4\pi)^{n/2}}e^{-|y|^2}dy = \left(\frac{1}{\pi^{n/2}}\right)\prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2}dy_i$$
$$= \left(\frac{1}{\pi^{n/2}}\right)(\sqrt{\pi})^n = 1.$$

Por otro lado, como $\omega_t \geq 0$, para cada $t > 0$, *b)* se deduce directo de *a)*.

Por último, para $\delta > 0$ tenemos

$$\lim_{t\to 0}\int_{|x|\geq\delta}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}dx=\lim_{t\to 0}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}dx-\int_{|x|<\delta}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}dx\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(1-\frac{1}{\pi^{n/2}}\prod_{i=1}^{n}\int_{|y_i|<\frac{\delta}{2\sqrt{t}}}e^{-|y_i|^2}dy_i\right)=0,$$

pues a medida que t tiende a 0, el límite toma el valor de la integral en $\mathbb{R}$, que sabemos que vale 1.

Ejemplo 2.6. Consideremos el núcleo de Poisson en el semiplano superior

$$P_t(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},\quad x\in\mathbb{R}^n, t>0.$$

Veamos que es una aproximación a la identidad.

Sea $t > 0$. Tras varios cambios de variables, la parametrización en coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^n$ y las identidades de la función Beta, podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}^n}P_t(x)dx=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}dx=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{t}{t^{n+1}\left(1+\left(\frac{|x|}{t}\right)^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}dx$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|u|^2)^{\frac{n+1}{2}}}du=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty\int_{\partial B(0,\rho)}\frac{1}{(1+\rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}dSd\rho$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}d\rho=\frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{s^{\frac{n-1}{2}}}{2(1+s^2)^{\frac{n+1}{2}}s^{1/2}}ds$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty\frac{s^{n/2-1}}{(1+s^2)^{\frac{n+1}{2}}}ds=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}Be\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}=1.$$

Como para cada $t > 0$, $P_t \geq 0$, al igual que para el núcleo de Gauss-Weierstrass, *b)* es directo de *a)*.

Por último, sea $\delta > 0$. Realizando el cambio de variable $x = ty$, obtenemos

$$\lim_{t\to 0}\int_{|x|>\delta}|P_t(x)|dx=\lim_{t\to 0}\int_{|x|>\delta}P_t(x)dx=\lim_{t\to 0}\left(\int_{\mathbb{R}^n}P_t(x)dx-\int_{|x|\leq\delta}P_t(x)dx\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(1-\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{|y|\leq\delta/t}\frac{1}{(1+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}dy\right)=0,$$

pues para t suficientemente pequeño, el área de integración se aproxima a $\mathbb{R}^n$ tanto como queramos.

Proposición 2.7. *Sea* $\{\phi_t\}_{t>0}$ *una aproximación de la identidad y sea* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. *Entonces,*

$$\lim_{t\to 0} \|\phi_t * f - f\|_p = 0.$$

Demostración. Como $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y)dy = 1$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ podemos escribir

$$\begin{aligned}(\phi_t * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y) f(x-y)dy - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y)(f(x-y) - f(x))dy.\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como las traslaciones son continuas en $L^p(\mathbb{R}^n)$ (véase 1.5), elegimos $\delta > 0$ tal que para $|h| < \delta$ se tiene que

$$\|f(\cdot - h) - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2\sup_{t>0} \|\phi_t\|_1}.$$

Por otro lado, para t suficientemente pequeño, por definición de aproximación de la identidad, se tiene que

$$\int_{|y|\geq\delta} |\phi_t(y)| < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_p}.$$

De esta forma, en virtud de la desigualdad triangular y la desigualdad integral de Minkowski, para t suficientemente pequeño obtenemos que

$$\begin{aligned}\|\phi_t * f - f\|_p &\leq \left\| \int_{|y|<\delta} \phi_t(y)(f(\cdot - y) - f(\cdot))dy \right\|_p \\ &\quad + \left\| \int_{|y|\geq\delta} \phi_t(y)(f(\cdot - y) - f(\cdot))dy \right\|_p \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\sup_{t>0}\|\phi_t\|_1} \int_{|y|<\delta} |\phi_t(y)|dy + 2\|f\|_p \int_{|y|\geq\delta} |\phi_t(y)|dy < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.8. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *es denso en* $L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$.

Demostración. Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$. Definimos, para cada $M \in \mathbb{N}$, la función

$$g_M(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } |x| \leq M \text{ y } |f(x)| \leq M, \\ \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para cada $1 \leq p < \infty$, se tiene que

$$|f(x) - g_M(x)|^p \leq 2^p |f(x)|^p, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Además, es claro que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $g_M(x) \to f(x)$, cuando $M \to \infty$. En virtud del Teorema de la Convergencia Dominada, para M suficientemente grande obtenemos que

$$\|f - g_M\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora vamos a aproximar g_M por una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, para ello, llamemos $g := g_M$, que es acotada y de soporte en $B(0, M)$, y usemos el método de regularización, convolucionando g con una aproximación de la identidad $\{\phi_t\}_{t>0}$ que sea infinitamente diferenciable ($\mathcal{C}^\infty$) y $\mathrm{sop}(\phi_t) = B(0,t)$, para cada $t > 0$. Veamos que $g * \phi_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, con soporte en un conjunto acotado fijo, para cada $t > 0$. En efecto, como para cada $t > 0$ podemos escribir

$$(g * \phi_t)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\phi_t(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

se tiene que $|x| \leq |x-y| + |y| < t + M$. Por otro lado, como para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\gamma > 0$ se verifica $|x|^\gamma \leq (|x-y| + |y|)^\gamma \leq 2^\gamma (|x-y|^\gamma + |y|^\gamma)$, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|x^\beta \mathcal{D}^\alpha (g * \phi_t)(x)\right| &= \left| x^\beta \int_{\substack{|y|<M \\ |x-y|<t}} g(y)\mathcal{D}^\alpha \phi_t(x-y)dy \right| \\
&\leq 2^{|\beta|} \int_{\substack{|y|<M \\ |x-y|<t}} |g(y)| \left(|x-y|^{|\beta|} + |y|^{|\beta|}\right) |\mathcal{D}^\alpha \phi_t(x-y)|\, dy \\
&\leq K \left(\|g\|_1 \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |z|^{|\beta|} |\mathcal{D}^\alpha \phi_t(z)| \right. \\
&\quad \left. + \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\mathcal{D}^\alpha \phi_t(z)| \int_{|y|<M} |g(y)||y|^{|\beta|} dy \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Así, $g * \phi_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall t > 0$. Por otra parte, por la Proposición 2.7 se tiene que para t suficientemente pequeño

$$\|g - g * \phi_t\|_p < \varepsilon/2.$$

De esta forma podemos concluir que, para t suficientemente pequeño y M suficientemente grande,

$$\|f - g * \phi_t\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g * \phi_t\|_p < \varepsilon.$$

$\square$

Nuestra intención es definir la transformada de Fourier en $\mathcal{S}$ y probar sus propiedades principales, así como la fórmula de inversión. Como $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformada de Fourier para $f \in \mathcal{S}$ se define tal y como lo hemos hecho para $L^1(\mathbb{R}^n)$. A continuación probamos las propiedades fundamentales de la transformada de Fourier.

Lema 2.9. *Sean $f, g \in \mathcal{S}$ y $h \in \mathbb{R}^n$.*

1. *(Linealidad)* $\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \widehat{f} + \mu \widehat{g}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
2. *(Traslación)* $\mathcal{F}(f(\cdot + h))(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i h \cdot \xi}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
3. *(Modulación)* $\mathcal{F}(f e^{2\pi i h \cdot x})(\xi) = \widehat{f}(\xi - h)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
4. *(Dilatación) Sea* $\lambda > 0$. *Si* $g(x) = \lambda^{-n} f(\lambda^{-1} x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *entonces* $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
5. *(Acotación)* $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ *y* $\widehat{f}$ *es uniformemente continua.*
6. *(Lema de Riemann-Lesbegue)* $\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.
7. $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
8. *Para cada* $j = 1, \ldots, n$, *se tiene que* $\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
9. *Para cada* $j = 1, \ldots, n$, *se tiene que* $\mathcal{F}(-2\pi i x_j f)(\xi) = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
10. $\int \widehat{f} g = \int f \widehat{g}$.

Demostración. 1. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Por la linealidad de la integral se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\lambda f + \mu g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f + \mu g)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx + \mu \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\
&= \lambda \widehat{f}(\xi) + \mu \widehat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

2. Realizando el cambio de variable $x + h = y$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(\cdot + h))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+h) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i (y-h) \cdot \xi} dy \\
&= e^{2\pi i h \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy = e^{2\pi i h \cdot \xi} \widehat{f}(\xi), \ \ \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

3. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f e^{2\pi i h \cdot x})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i h \cdot x} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot (\xi - h)} dx = \widehat{f}(\xi - h), \ \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

4. Consideramos $g(x) = \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x),\ x \in \mathbb{R}^n$, y realizamos el cambio de variable $y = \lambda^{-1}x$, obteniendo

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \lambda y\cdot\xi} dy \\ &= \widehat{f}(\lambda\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

5. Para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left|e^{-2\pi i x\cdot\xi}\right| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx.$$

Por tanto, tomando supremo de $\xi \in \mathbb{R}^n$ se tiene la desigualdad.
Para probar la continuidad uniforme, observamos que, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} := \{\xi + \mu_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mu_k \to 0$ cuando $k \to \infty$,

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\xi_k)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||e^{-2\pi i x\cdot\xi}(1 - e^{-2\pi i x\cdot\mu_k})| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||1 - e^{-2\pi i x\cdot\mu_k}| dx \\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty.\end{aligned}$$

Como el integrando, $|f(x)||1 - e^{-2\pi i x\cdot\mu_k}|$, tiende a cero cuando $k \to \infty$, del Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\xi_k)\right| = 0.$$

6. Nótese que podemos escribir

$$\widehat{f}(\xi) = -e^{i\pi}\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}(-e^{\pi i}) dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi\left(x - \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)} dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Realizando el cambio de variable $y = x - \frac{\xi}{2|\xi|^2}$, tenemos que

$$\widehat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^n} f\left(y + \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right) e^{-2\pi i y\cdot\xi} dy, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(\xi)\right| &= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} - f\left(x + \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x) - f\left(x + \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)\right| dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Como las traslaciones son continuas en $L^1(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \lim_{|\xi|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)\right| dx = 0.$$

7. Hacemos el cambio de variable $x - y = u$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy\right) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(u)e^{-2\pi i y\cdot\xi} e^{-2\pi i u\cdot\xi} dydu \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(u)e^{-2\pi i u\cdot\xi} du \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi} dy = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

8. Aplicando integración por partes se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_j}(f(x))e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx_j\right) dx_1 \cdots dx_{j-1}dx_{j+1}\cdots dx_n \\
&= 2\pi i\xi_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx_j\right) dx_1 \cdots dx_{j-1}dx_{j+1}\cdots dx_n \\
&= 2\pi i\xi_j \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx = 2\pi i\xi_j \widehat{f}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

9. Sea $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ cualquier sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Es claro que $\partial_{\xi_j} e^{-2\pi x_j\xi_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-2\pi i x_j(\xi_j+h_n)} - e^{-2\pi i x_j\xi_j}}{h_n}$. Del Teorema del valor medio se tiene que, para n suficientemente grande, $\left|\frac{e^{-2\pi i x_j(\xi_j+h_n)} - e^{-2\pi i x_j\xi_j}}{h_n}\right| \leq 2\pi|x_j|e^{-2\pi i x_j(\xi_j+\theta h_n)}$ para cierto $\theta \in [0,1]$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
&\left| f(x)e^{-2\pi i\sum_{1\leq i\leq n; i\neq j} x_i\xi_i} \frac{e^{-2\pi i x_j(\xi_j+h_n)} - e^{-2\pi i x_j\xi_j}}{h_n}\right| \\
&\quad \leq 2\pi|x_j||f(x)||e^{-2\pi i\sum_{1\leq i\leq n} x_i\xi_i} e^{-2\pi i x_j\theta h_n}| \leq C|x_j||f(x)|, \quad c.t.\ x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Entonces, como $x_j f$ es integrable, del Teorema de la Convergencia Dominada se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(-2\pi i x_j f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x_j f)(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\right) dx \\
&= \frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx\right) = \frac{\partial\widehat{f}}{\partial\xi_j}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

10. Aplicamos el Teorema de Fubini y obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i x\cdot y} g(x)dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot y} g(x)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y)dy.\end{aligned}$$

□

Todas las propiedades anteriores (excepto las 8 y 9) son ciertas para funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para probar la propiedad 8 hay que asumir además que $\partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y que f decae a 0 cuando $|x_j| \to \infty$. Para probar la propiedad 9 hay que añadir la hipótesis de que $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.10. *Si $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $f = e^{-\pi|x|^2}, x \in \mathbb{R}^n$. Como $\widehat{f}$ es el producto de n integrales idénticas, actuaremos en $\mathbb{R}$, considerando la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Esta f es la solución de la EDO siguiente

$$\begin{cases} u' + 2\pi x u = 0 \\ \quad u(0) = 1 \; . \end{cases}$$

En efecto, integrando $\frac{u'}{u} = -2\pi x$ tenemos que $|u(x)| = Ce^{-\pi x^2}$ y aplicando la condición de inicio tenemos que: $u(x) = e^{-\pi x^2}$. Por otra parte, se tiene que $\widehat{u}$ satisface

$$\begin{cases} (\widehat{u})' + 2\pi\xi\widehat{u} = 0 \\ \quad \widehat{u}(0) = 1 \; . \end{cases}$$

En efecto, de la propiedad *8* vista en el Lema 2.9 se tiene que

$$0 = \mathcal{F}(u' + 2\pi x u)(\xi) = \widehat{u'}(\xi) + 2\pi\widehat{xu}(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{u}(\xi) + 2\pi\widehat{xu}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Este hecho, junto con la propiedad *9* vista en el Lema 2.9, indica que $(\widehat{u}(\xi))' = \mathcal{F}(-2\pi i x u)(\xi) = -2\pi\xi\widehat{u}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, y por tanto se verifica la ecuación. Por último, se cumple la condición inicial, pues $\widehat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}} u(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}dx = 1$. Por la unicidad de soluciones de la EDO concluimos que $\widehat{u}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

□

Definición 2.11. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, una función regular (suficiente $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$). Definimos el Laplaciano de f como $\Delta f := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 f$.*

Lema 2.12. *Sea $f \in \mathcal{S}$. La transformada de Fourier del Laplaciano de f es*

$$\widehat{(-\Delta f)}(\xi) = 4\pi^2\widehat{f}(\xi)\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2\right) = 4\pi^2|\xi|^2\widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Como la transformada es lineal, vamos a calcular $-\widehat{\partial^2_{x_j} f}$ para cada $j = 1, \cdots, n$. Ya que $f \in \mathcal{S}$, tanto f como sus derivadas decaen a cero en el infinito. Entonces, aplicando integración por partes dos veces obtenemos que

$$-\widehat{\partial^2_{x_j} f}(\xi) = -2\pi i\xi_j \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx = -(2\pi i\xi_j)^2 \widehat{f}(\xi) = 4\pi^2 \xi_j^2 \widehat{f}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Finalmente, de la linealidad de la transformada, concluimos que

$$\mathcal{F}(-\Delta f)(\xi) = 4\pi^2 \widehat{f}(\xi) \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 \right) = 4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

□

Observación 2.13. *1.* Es directo deducir que, en general, para $f \in \mathcal{S}$, $\widehat{\partial^m_{x_j} f}(\xi) = (2\pi i\xi_j)^m \widehat{f}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N}$ y en consecuencia
$\mathcal{F}((-\Delta)^k f)(\xi) = (4\pi^2|\xi|^2)^k \widehat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

2. De la prueba del apartado *9)* del Lema 2.9 también se deduce que $\mathcal{D}^\beta \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}\left((-2\pi i)^{|\beta|} x^\beta f\right)(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \beta \in \mathbb{N}^n$.

3. Dado $\mathcal{L}$ un operador diferencial y $f \in \mathcal{S}$ tal que $\mathcal{L}f \in \mathcal{S}$, a la función m tal que $\widehat{\mathcal{L}f}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n$, se le denomina multiplicador o símbolo de Fourier.

Ya estamos en condiciones de probar la fórmula de inversión para la transformada de Fourier.

Teorema 2.14. *(Fórmula de inversión) La transformada de Fourier es un aplicación continua de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}$ tal que*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Vamos a probar la continuidad de la transformada de Fourier. Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ y $f \in \mathcal{S}$. En virtud de la observación anterior y las propiedades *9* y *8* del Lema 2.9, tenemos que

$$\xi^\alpha \mathcal{D}^\beta \widehat{f}(\xi) = C\xi^\alpha \mathcal{F}(x^\beta f)(\xi) = C\mathcal{F}(\mathcal{D}^\alpha(x^\beta f))(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Por tanto, usando el hecho de que $(1+|x|^N)|\mathcal{D}^\gamma f(x)| \le C, \forall N \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{N}_0^n$, se tiene que

$$\left|\xi^\alpha \mathcal{D}^\beta \widehat{f}(\xi)\right| \le C \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{D}^\alpha x^\beta f(x)| dx = C \sum_{\gamma \le \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{D}^\gamma(f) \mathcal{D}^{\alpha-\gamma}(x^\beta)| dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}p_{\delta,\gamma}(f)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x|^{n+1}}dx\\
&\leq C\sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}p_{\delta,\gamma}(f),\ \delta=max\{\beta-\alpha+\gamma+n+1,\ n+1\},\ \xi\in\mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

Como hemos logrado acotar la expresión por una combinación lineal de seminormas de f, que sabemos que son finitas, podemos concluir la continuidad de la transformada de Fourier en $\mathcal{S}$.

A continuación, vamos a probar la formula de inversión. Sean $f, g \in \mathcal{S}$. Haciendo uso de las propiedades *4* y *10* de el Lema 2.9 y el cambio de variable $\lambda x = y$, para cada $\lambda > 0$ podemos escribir

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\lambda^{-n}f(\lambda^{-1}y)\widehat{g}(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\widehat{g}(\lambda x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)\lambda^{-n}g(\lambda^{-1}x)dx,
$$

es decir,

$$
\int_{\mathbb{R}^n}f(\lambda^{-1}x)\widehat{g}(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)g(\lambda^{-1}x)dx.
$$

Como $f, g \in \mathcal{S}$, entonces $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{S}$ y podemos intercambiar el límite con la integral, de modo que al tomar $\lambda \to \infty$ obtenemos

$$
f(0)\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(x)dx=g(0)\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)dx.
$$

Si tomamos $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$, por el Lema 2.10 se sigue que

$$
f(0)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)dx.
$$

Es decir, hemos probado el resultado para $x = 0$. Ahora basta observar que $f(x) = f(0 + x) =: (\tau_x f)(0)$, $x \in \mathbb{R}^n$, y usar la propiedad *2* de el Lema 2.9 para obtener

$$
f(x)=(\tau_x f)(0)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}(\tau_x f)(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi,\ x\in\mathbb{R}^n.
$$

□

Corolario 2.15. *Sea $f \in \mathcal{S}$. Entonces, $\mathcal{F}(\widehat{f})(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. En virtud del Teorema 2.14 sabemos que

$$
f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi,\ x\in\mathbb{R}^n.
$$

Por tanto,

$$
f(-x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{-2\pi i x\cdot\xi}d\xi=\mathcal{F}(\widehat{f})(x),\ x\in\mathbb{R}^n.
$$

□

Observación 2.16. Del resultado anterior se deduce que la transformada de Fourier tiene periodo 4.

2.1.1. La transformada en $L^p, 1 \leq p \leq 2$

Hasta el momento hemos visto que la transformada de Fourier la podemos definir en el espacio de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^n)$. En esta subsección probaremos que podemos extender la definición a $L^2(\mathbb{R}^n)$ y, como consecuencia, usando un resultado de interpolación, podremos definirla en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$.

Lema 2.17. *Sea $f \in \mathcal{S}$. Se tiene que $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*

Demostración. Sean $f, h \in \mathcal{S}$. Consideremos $g = \overline{\widehat{h}}$. Entonces, $\widehat{g} = \overline{h}$ y, aplicando la propiedad *10* del Lema 2.9, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\overline{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\,\overline{\widehat{h}}.$$

Por tanto, tomando $h = f$ se tiene que $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$. □

Teorema 2.18. *La transformada de Fourier es una isometría en $L^2(\mathbb{R}^n)$, es decir, para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene que*

$$\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ y } \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2. \text{ (Identidad de Plancherel)}$$

Además,

1. $\widehat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$
2. $f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi, \ x \in \mathbb{R}^n.$

donde los límites son en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, en virtud de lo visto en el Teorema 2.8, sabemos que $\mathcal{S}$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$, por tanto, existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tal que $f_n \to f$, cuando $n \to \infty$, es decir $\|f_n - f\|_2 \to 0$, cuando $n \to \infty$. En vista de que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y de lo visto en el Teorema 2.17, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ al que, para cada $n, m > N$,

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon.$$

Es decir, la sucesión $\{\widehat{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por la completitud de $L^2(\mathbb{R}^n)$, converge. De esta forma, definimos la transformada de Fourier para funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente forma

$$\widehat{f} := \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n},$$

donde el límite es entendido en sentido de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

A continuación, veremos que esta definición no depende de la sucesión escogida inicialmente y que se verifica la igualdad de Plancherel. Primeramente, supongamos que existe otra sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tal que $g_n \to f$, cuando $n \to \infty$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grande se tiene, de nuevo a consecuencia del Teorema 2.17, lo siguiente

$$\begin{aligned}\|\widehat{f} - \widehat{g_n}\|_2 &\le \|\widehat{f} - \widehat{f_n}\|_2 + \|\widehat{f_n} - \widehat{g_n}\|_2 \\ &\le \|\widehat{f} - \widehat{f_n}\|_2 + \|f_n - f\|_2 + \|f - g_n\|_2 < \varepsilon.\end{aligned}$$

Por último, es directo del Teorema 2.17 que podemos escribir lo siguiente

$$\|\widehat{f}\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n}\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2.$$

La demostración de las propiedades *1* y *2* se pueden hacer de forma análoga, por lo que procedemos a probar *1.* En virtud del Teorema de la Convergencia Dominada, se tiene que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f \cdot \chi_{B(0,R)} - f|^2 \to 0, \quad \text{cuando } R \to \infty,$$

esto es, $f \cdot \chi_{B(0,R)} \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, al ser la transformada de Fourier un operador continuo (es una isometría) en $L^2(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $\mathcal{F}(f \cdot \chi_{B(0,R)}) \to \widehat{f}$, en $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

Observación 2.19. También podemos definir la transformada de Fourier inversa en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tal que $\|f_n - f\|_2 \to 0$, cuando $n \to \infty$. Por tanto, esta sucesión es de Cauchy y dado $\varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m > N_0$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\varepsilon > \|f_n - f_m\|_2 &= \|\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f_n)) - \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f_m))\|_2 \\ &= \|\mathcal{F}^{-1}(f_n) - \mathcal{F}^{-1}(f_m)\|_2,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado la identidad de Plancherel. Por tanto, $\{\mathcal{F}^{-1}(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y de la completitud de este, la sucesión converge. De esta forma definimos la transformada de Fourier inversa en $L^2(\mathbb{R}^n)$ de f por

$$\mathcal{F}^{-1}(f) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^{-1} f_n. \tag{2.1}$$

De forma análoga a como se vio en la prueba del Teorema 2.18, se puede comprobar que esta definición no depende de la sucesión elegida. A continuación, veamos que efectivamente esta definición es una inversa de la transformada de Fourier.

Sabemos que $f_n = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_n)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f_n)) \to f$, cuando $n \to \infty$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{F}(f) = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{F}(f_n))$, $\mathcal{F}(f_n) \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, en virtud de (2.1) tenemos que

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_n)) = \lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

Además, como $f_n \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces de (2.1) y de la continuidad de $\mathcal{F}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ se deduce que

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f_n)) = \lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

De esta forma, queda probado que el operador $\mathcal{F}^{-1}$ definido por (2.1) es el inverso de la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Hemos visto que podemos definir la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$, pero nos gustaría saber si para funciones $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, esta definición de la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ coincide con la definición usual de la transformada en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y en qué sentido. El siguiente resultado, nos da la respuesta.

Corolario 2.20. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces la transformada de Fourier definida para funciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$ coincide para c.t. $x \in \mathbb{R}^n$ con la definición ordinaria para funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, procediendo como en la prueba del Teorema 2.8, podemos construir una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tal que $\|f_n - f\|_1 + \|f_n - f\|_2 \to 0$, cuando $n \to \infty$. De este modo, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_\infty &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f_n(x) - f(x)) e^{-2\pi i x\xi} dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_n(x) - f(x)| dx = \|f_n - f\|_1 \to 0, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Es decir, $\widehat{f_n}$ converge uniformemente a $\widehat{f}$. Además, por definición sabemos que $\mathcal{F}(f) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, y por lo visto en el Lema 1.6, existe una subsucesión $\{\widehat{f_{n_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} \widehat{f_{n_j}}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)$ para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. De la unicidad del límite, concluimos que $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ c.t.p.

Corolario 2.21. *Sea $1 \leq p \leq 2$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ y $\|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$, siendo p' el exponente conjugado de p.*

Demostración. Probemos primeramente los casos para $p = 1$ y $p = 2$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, del apartado *5* del Lema 2.9 tenemos que $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Por otro lado, si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, del Teorema 2.18 tenemos que $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.
Sea $1 < p < 2$. Entonces, existe $\theta \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{p} = 1-\theta+\frac{\theta}{2}$, y en consecuencia $\frac{1}{p'} = \frac{\theta}{2}$. Del Teorema 1.9 se tiene que $\|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$. □

A continuación, vamos a aplicar los conocimientos adquiridos en este capítulo para hallar la solución de la ecuación del calor. Además, en el siguiente capítulo veremos que esta familia de soluciones conforman un semigrupo de operadores.

Ejemplo 2.22. Consideramos $\omega_t(z) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|z|^2}{4t}}, z \in \mathbb{R}^n, t > 0$ (Núcleo de Gauss-Wierstrass). En el Ejemplo 2.5 hemos probado que $\omega_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Además, No es dificil probar que para cada $t > 0$ y $1 \leq p \leq \infty$ se tiene que $\|\omega_t\|_p < \infty$. Por otra parte, para cada $t > 0$ y $1 \leq p \leq \infty$, la aplicación $T_t : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ definida por $T_t f := \omega_t * f$ está bien definida para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. En efecto, si $1 \leq p < \infty$, en virtud de la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned} |T_t f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \omega_t(x-z) f(z) dz \right| \leq \|\omega_t(x-\cdot)\|_{p'} \|f\|_p \\ &= \|\omega_t\|_{p'} \|f\|_p < \infty, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

mientras que si $p = \infty$, se tiene que $|T_t f(x)| \leq \|f\|_\infty \|\omega_t\|_1 < \infty$.

Consideremos ahora la ecuación del calor. Sea $f \in \mathcal{S}$. Buscamos soluciones clásicas de

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \Delta_x u(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.2}$$

Supongamos que la solución es suficientemente buena, de modo que podemos aplicar la transformada de Fourier en la variable espacial. Obtenemos así la siguiente ecuación diferencial en el lado de la transformada

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi,t) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi,t), & \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Resolviendo la ecuación diferencial en la variable temporal tenemos que

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

es la solución de (2.3). De esta forma, deshaciendo la transformada de Fourier tenemos que

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Queremos ver que $e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(\omega_t * f)(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n$, y de esta forma obtener que $u(x,t) = (\omega_t * f)(x)$. Aplicando el punto *7* del Lema 2.9, bastaría comprobar que $\widehat{\omega_t}(\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}, \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0$. En efecto, haciendo el cambio de variable $u = \frac{x}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\widehat{\omega_t}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} e^{-2\pi i x\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|u|^2} e^{-2\pi i u(2\sqrt{\pi}\sqrt{t}\xi)} du = \mathcal{F}\left(e^{-\pi|\cdot|^2}\right)(2\sqrt{\pi}\sqrt{t}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Aplicando ahora el Lema 2.10 concluimos que

$$\widehat{\omega_t}(\xi) = \mathcal{F}\left(e^{-\pi|\cdot|^2}\right)(2\sqrt{\pi}\sqrt{t}\xi) = e^{-\pi 4\pi t|\xi|^2} = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Como queríamos comprobar. Por consiguiente, $T_t f = \omega_t * f$ es la (única) solución de la ecuación del calor (2.2). Además, de la regularidad del núcleo de Gauss-Weierstrass se sigue que $T_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \forall t > 0$ y como $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, en virtud de la desigualdad de Young se sigue que $T_t f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, luego queda justificado el uso de la transformada de Fourier.

En este punto ya estamos en condiciones de introducir el concepto de semigrupo de operadores. En el próximo capítulo comprobaremos que el ejemplo anterior cumple la definición de semigrupo.

3

Teoría de semigrupos de operadores.

El objetivo de este capítulo es presentar al lector los conceptos de semigrupo de operadores y generador infinitesimal, así como sus propiedades principales. Para ello, en la primera sección iniciaremos con la definición de semigrupo, luego introduciremos los semigrupos uniformes y fuertemente continuos y el concepto de generador infinitesimal, así como algunas propiedades relevantes. A continuación, en la segunda sección, presentaremos el concepto de subordinación y estudiaremos el proceso de obtención de semigrupos para operadores positivos mediante este proceso.

3.1. Semigrupos uniforme y fuertemente continuos. El generador infinitesimal.

Para elaborar esta primera sección, seguiremos las referencias [3] y [9]. Introduciremos los semigrupos de operadores, el generador infinitesimal y recogeremos las propiedades que serán relevantes para el siguiente capítulo.

Definición 3.1. *Sea X un espacio de Banach. Escribimos $\mathfrak{L}(X)$ para denotar al espacio de los operadores lineales y acotados de X en X.*

Definición 3.2. *Sean X un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0} \subseteq \mathfrak{L}(X)$. Decimos que la familia $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo si verifica lo siguiente*

1. *$T_0 = I$, donde I es el operador identidad.*
2. *$T_{t+s} = T_t T_s$, $\forall t, s \geq 0$ (Propiedad de Semigrupo).*

Definición 3.3. *Sean X espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo. Se dice que es **uniformemente continuo** si*

$$\|T_t - I\|_{\mathfrak{L}(X)} \to 0, \text{ cuando } t \to 0.$$

Es decir, $\lim_{t\to 0} T_t = I$ en el sentido de $(\mathfrak{L}(X), \|\cdot\|_{\mathfrak{L}(X)})$.
*Asi mismo, diremos que un semigrupo es **fuertemente continuo** o **C_0-semigrupo** si para cada $x \in X$ verifica lo siguiente*

$$\|T_t x - x\|_X \to 0, \ \textit{cuando } t \to 0.$$

Es decir, $\lim_{t\to 0} T_t x = x$, $\forall x \in X$ *en sentido de* $(X, \|\cdot\|_X)$.

De ahora en adelante no especificaremos a que norma nos estamos refiriendo, pues se sobrentiende por el contexto.

Lema 3.4. *Sean X un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo. Si es uniformemente continuo, entonces es C_0-semigrupo.*

Demostración. Supongamos que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es uniforfemente continuo y sea $x \in X$. Entonces se tiene que

$$\|T_t x - x\| = \|(T_t - I)x\| \leq \|T_t - I\|\|x\| \to 0, \quad t \to 0.$$

□

Proposición 3.5. *Sea X un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0} \subseteq \mathfrak{L}(X)$ un C_0-semigrupo. Existen $M \geq 1$ y $\omega \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|T_t\| \leq Me^{\omega t}, t \geq 0.$$

Demostración. Primeramente, nótese que $\|T_0\| = \|I\| = 1$, luego en este caso $M = 1$, $\omega = 0$. Ahora, veamos que existe un $M \geq 1$ tal que para todo $t \in [0, 1]$, $\|T_t\| \leq M$. En efecto, de no ser así entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $0 \leq t_n < 1$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\|T_{t_n}\| > n$. De esta forma, $\lim_{n\to\infty} \|T_{t_n}\| = \infty$ y por el Principio de Acotación Uniforme se tiene que $\exists x_0 \in X$ tal que $\|T_{t_n} x_0\| \to \infty$, cuando $n \to \infty$, lo cual es absurdo pues $T_t x_0 \to x_0$, cuando $t \to 0^+$. Ahora, dado $t > 1$ podemos escribir $t = s + n$, siendo $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq s < 1$. De la propiedad de semigrupo y como $n \leq t$ se sigue que

$$\|T_t\| = \|T_s T_n\| \leq \|T_s\|\|T_1\|^n \leq MM^n = Me^{nlog(M)} \leq Me^{tlog(M)}.$$

Luego, tomando $\omega = log(M)$ se tiene que $\|T_t\| \leq Me^{t\omega}$. □

Observación 3.6. Si $\omega = 0$ decimos que el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es **uniformente acotado**; además, si $M = 1$, es decir, $\|T_t\| \leq 1$, diremos que el semigrupo es **contractivo**.

Proposición 3.7. *Sea X espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0} \subseteq \mathfrak{L}(X)$ un semigrupo de operadores. Si $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es uniformemente continuo, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} \phi : [0,\infty) &\longrightarrow \mathfrak{L}(X) \\ t \quad &\longrightarrow \quad T_t \end{aligned}$$

es continua. Por otra parte, si $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es C_0-semigrupo, entonces para cada $x \in X$ la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_x : [0,\infty) &\longrightarrow \mathfrak{L}(X) \\ t \quad &\longrightarrow \quad T_t x \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Supongamos que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es uniformemente continuo. Nótese que para $t = 0, T_0 = I$ es continuo. Consideramos $t_0 > 0$ y veamos que T_{t_0} es continuo por la derecha. En efecto, de la propiedad de semigrupo, $\forall s \geq t_0$ suficientemente cercano a t_0 se tiene que

$$\|T_{t_0} - T_s\| = \|T_{t_0}\|\|I - T_{s-t_0}\|,$$

y como el semigrupo es uniformemente continuo

$$\|I - T_{s-t_0}\| \to 0, \quad s \to t_0^+.$$

Por otra parte, de la Proposición 3.5 se tiene que $\exists M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}$ tal que $\|T_s\| \leq Me^{s\omega}, \forall s \in [0, t_0]$, entonces

$$\|T_{t_0} - T_s\| \leq \|T_s\|\|T_{t_o-s} - I\| \to 0, \quad s \to t_0^-.$$

La prueba para C_0-semigrupos no se realizará porque es completamente análoga a la realizada. □

Procedemos a presentar algunos ejemplos ilustrativos de semigrupos.

Ejemplo 3.8. Para cada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $t \geq 0$, denotamos los operadores traslación por la izquierda a:

$$T_t^l(f)(s) := f(s+t), \quad s \in \mathbb{R},$$

y traslación por la derecha a:

$$T_t^r(f)(s) = f(s-t), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Las traslaciones $\{T_t^l\}_{t\geq 0}$ y $\{T_t^r\}_{t\geq 0}$ son semigrupos. En efecto, sean $t, \widetilde{t} \geq 0$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Entonces se tiene que

$$T_0^l(f)(s) = f(s+0) = f(s) = I(f)(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

$$T_{\widetilde{t}+t}^l(f)(s) = f(s+\widetilde{t}+t) = T_{\widetilde{t}}^l(f)(s+t) = T_{\widetilde{t}}^l\left(T_t^l(f)\right)(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

La prueba para las traslaciones por la derecha es análoga.

Algunos de los espacios donde estos operadores son isometrías son los siguientes

1 $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p), 1 \leq p \leq \infty$.
2 $(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, donde C_b denota el conjunto de las funciones continuas y acotadas.

Vamos a probarlo para $\{T_t^l\}_{t\geq 0}$ (para $\{T_t^r\}_{t\geq 0}$ es análogo). Veamos que en $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ la traslación es una isometría. Sean $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $t \geq 0$. Realizamos el cambio de variable $s = \widetilde{s} - t$, y obtenemos que

$$\|T_t^l(f)\|_p = \|f(\cdot + t)\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(s+t)|^p ds\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\widetilde{s})|^p d\widetilde{s}\right)^{1/p} = \|f\|_p,$$

y $\|T_f^l f\|_\infty = \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(t+s)| = \sup_{\widetilde{s}\in\mathbb{R}} |f(\widetilde{s})| = \|f\|_\infty$, luego $\{T_t^l\}_{t\geq 0}$ es una isometría.

Veamos ahora para $(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Sean $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ y $t \geq 0$. Es claro que

$$\|T_t^l(f)\|_\infty = \|f(\cdot + t)\|_\infty = \max_{s\in\mathbb{R}} |f(s+t)| = \max_{s\in\mathbb{R}} |f(s)| = \|f\|_\infty.$$

En el capítulo anterior, introdujimos el núcleo de Gauss-Weierstrass, ω_t. Veamos que podemos definir una familia de operadores integrales con el núcleo ω_t de manera que sea un C_0-semigrupo.

Ejemplo 3.9. Sea $1 \leq p < \infty$. Para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$\{T_t f\}_{t\geq 0} := \begin{cases} \omega_t * f, & t > 0 \\ f, & t = 0. \end{cases}$$

Veamos que, efectivamente, define un C_0-semigrupo en $L^p(\mathbb{R}^n)$. En primer lugar, nótese que para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$ se tiene que $|T_t(f)(x)| \leq \|w_t\|_{p'}\|f\|_p < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, y $\|T_t f\|_p \leq \|T_t\|_1\|f\|_p$. Por consiguiente, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ está bien definido y $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathfrak{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$. Por otro lado, recordemos que $\omega_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\omega_t * \omega_s)(\xi) &= \mathcal{F}(\omega_t)\mathcal{F}(\omega_s)(\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} e^{-4\pi^2|\xi|^2 s} = e^{-4\pi^2|\xi|^2(t+s)} \\ &= \mathcal{F}(\omega_{t+s}), \quad t, s \geq 0. \end{aligned}$$

Así, como $e^{-4\pi^2|\cdot|^2 t} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para cada $t > 0$, aplicando transformada de Fourier inversa obtenemos que

$$\omega_{t+s} = \omega_t * \omega_s, \quad t, s \geq 0.$$

Por consiguiente, en virtud del Teorema de Fubini, para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\begin{aligned} T_t(T_s(f))(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \omega_t(z) \int_{\mathbb{R}^n} \omega_s(x-z-y)f(y)dydz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} \omega_t(z)\omega_s(x-z-y)dzdy \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \omega_{t+s}(x-y)f(y)dy = T_{t+s}(f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,\, t, s \geq 0.$$

Nótese que el uso del Teorema de Fubini está justificado porque $|T_u(f)(x)| \leq \|w_u\|_{p'}\|f\|_p < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$.

De esta forma, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es semigrupo en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Veamos ahora que es un C_0-semigrupo. Este resultado es corolario directo de la Proposición 2.7, pues ω_t es una aproximación a la identidad (vease el Ejemplo 2.5). Esto nos permite concluir lo siguiente

$$\lim_{t\to 0} \|\omega_t * f - f\|_p = 0, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty,$$

que es la definición de C_0-semigrupo.

Por último, veamos un ejemplo de semigrupo uniforme continuo. Trabajaremos en el espacio finito dimensional $\mathbb{C}^n$, donde cada elemento de $\mathfrak{L}(\mathbb{C}^n)$ se puede identificar con un elemento de $M_n(\mathbb{C})$, las matrices $n \times n$ con coeficientes complejos.

Proposición 3.10. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $t \geq 0$, la serie*

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

converge uniformemente. Además, la función

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ t &\longrightarrow e^{tA} \end{aligned}$$

es continua y verifica que

$$\begin{cases} e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \ t, s \geq 0 \\ e^{0A} = I. \end{cases}$$

Demostración. Como $M_n(\mathbb{C})$ es un espacio de Banach y

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = e^{t\|A\|} < \infty, \quad t > 0$$

deducimos que, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ converge, es decir, $\exists B \in M_n(\mathbb{C}), e^{tA} = B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$. Por otro lado, en virtud de la convergencia absoluta se tiene que para $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned} e^{tA}e^{sA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j A^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{t^{j-k} A^{j-k}}{(j-k)!} \frac{s^k A^k}{k!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} s^k t^{j-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t+s)^j}{j!} A^j = e^{(t+s)A}. \end{aligned}$$

Además, no es dificil comprobar que $e^{0A} = I$. Ahora, para ver la continuidad observamos que $e^{(t+h)A} - e^{tA} = e^{tA}(e^{hA} - I), \forall t, h \in \mathbb{R}$. Como

$$\|e^{hA} - I\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} \right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h|^k \|A\|^k}{k!} = e^{|h|\|A\|} - 1 \longrightarrow 0, \quad h \to 0,$$

concluimos que

$$\lim_{h\to 0} \|e^{(t+h)A} - e^{tA}\| \le \lim_{h\to 0} \|e^{tA}\| \|e^{hA} - I\| = 0, \quad \forall t \ge 0.$$

□

Lema 3.11. *Sea X espacio de Banach, y $T \in \mathfrak{L}(X)$. Si $\|T\| < 1$, entonces $I - T$ es un operador invertible y además, se verifica que*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Demostración. Consideremos la sucesión de sumas parciales

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k$$

y veamos que es una sucesión de Cauchy en $\mathfrak{L}(X)$. Para cada $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $p > q$, se tiene que

$$\|S_p - S_q\| \le \sum_{k=q+1}^{p} \|T\|^k = \frac{\|T\|^{q+1} - \|T\|^{p+1}}{1 - \|T\|} \le \frac{\|T\|^{q+1}}{1 - \|T\|},$$

luego, tomando $q \to \infty$ obtenemos que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathfrak{L}(X)$, y de la completitud de este espacio se sigue que $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ existe y pertenece a $\mathfrak{L}(X)$.

Por otro lado, como $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge, se tiene que $\lim_{n\to\infty} T^n = 0$, luego podemos escribir

$$\begin{aligned} (I - T) \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} (I - T) S_n = \lim_{n\to\infty} S_n (I - T) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=0}^{n} T^{k+1} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(I - T^{n+1} \right) = I. \end{aligned}$$

Concluimos que $I - T$ es invertible y $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$. □

Definición 3.12. *Sean X un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0} \subseteq \mathfrak{L}(X)$ un semigrupo. El operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ definido por*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t(x) - x}{t} = \left.\frac{\partial^+ T_t(x)}{\partial t}\right|_{t=0}, \quad x \in \mathcal{D}(A)$$

se denomina generador infinitesimal del semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$, donde $\mathcal{D}(A)$ es el dominio de A, dado por

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X / \ \exists \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t(x) - x}{t} \right\}.$$

Teorema 3.13. *Sea X un espacio de Banach. Un operador lineal es el generador infinitesmal de un semigrupo uniformemente continuo en X si, y solo si, es acotado en X.*

Demostración. Supongamos que A es un operador lineal y acotado en X y definimos $\{T_t\}_{t\geq 0}$ como

$$T_t = e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!},$$

donde entendemos la serie infinita como el límite de las sumas parciales en $\mathfrak{L}(X)$. Para comprobar que está bien definido, procedemos como en la prueba de la Proposición 3.10 y comprobamos que para cada $t > 0$, $T_t \in \mathfrak{L}(X)$, $\|T_t\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq e^{t\|A\|_{\mathfrak{L}(X)}}$ y

$$\|T_t - I\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \left(e^{t\|A\|} - 1\right) \to 0, \quad t \to 0^+.$$

Por tanto $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es uniformemente continuo. Por otro lado,

$$\left\| \frac{T_t - I}{t} - A \right\| = \left\| \frac{T_t - I - At}{t} \right\| = \left\| \sum_{n\geq 2} \frac{t^{n-1} A^n}{n!} \right\| \leq \left\| A \sum_{n\geq 2} \frac{t^{n-1} A^{n-1}}{(n-1)!} \right\|$$
$$= \|A(T_t - I)\| \leq \|A\| \|T_t - I\| \longrightarrow 0, \quad t \to 0^+,$$

luego A es el generador infinitesimal del semigrupo.

Por otro lado, sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo. Es claro que fijado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T_s - I\| < \varepsilon, 0 < s < \delta$, luego para $0 < h < \delta$ se tiene que

$$\left\| I - \frac{1}{h} \int_0^h T_s ds \right\| = \frac{1}{h} \left\| \int_0^h (I - T_s) ds \right\| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Fijamos $h > 0$ suficientemente pequeño tal que $\left\| I - \frac{1}{h} \int_0^h T_s ds \right\| < 1$. Entonces, por el Lema 3.11, sabemos que $\frac{1}{h} \int_0^h T_s ds$ es invertible, y por tanto $\int_0^h T_s ds$ es invertible. De esta forma, para $0 < t < h$ tenemos que

$$\frac{1}{t}(T_t - I) \int_0^h T_s ds = \frac{1}{t} \left(\int_0^h T_{s+t} ds - \int_0^h T_s ds \right) = \frac{1}{t} \left(\int_t^{h+t} T_s ds - \int_0^h T_s ds \right).$$

Entonces se tiene que

$$\frac{T_t - I}{t} = \frac{\int_h^{h+t} T_s ds - \int_0^t T_s ds}{t} \left(\int_0^h T_s ds \right)^{-1}, \quad 0 < t < h.$$

Nótese que para cada $\rho \geq 0$ se tiene que $\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_\rho^{\rho+t} T_s ds = T_\rho$. En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_\rho^{\rho+t} T_s ds - T_\rho = 0 &\Leftrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_\rho^{\rho+t} (T_s - T_\rho) ds = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{T_\rho}{t} \int_\rho^{\rho+t} (T_{s-\rho} - I) ds = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{T_\rho}{t} \int_0^t (T_u - I) du = 0, \end{aligned}$$

y esto es cierto, en virtud de (3.1) y de la continuidad de T_ρ. Por tanto,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T_t - I}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\int_h^{h+t} T_s ds - \int_0^t T_s ds}{t} \left(\int_0^h T_s ds \right)^{-1} = (T_h - I) \left(\int_0^h T_s ds \right)^{-1},$$

esto es, $(T_h - I) \left(\int_0^h T_s ds \right)^{-1} \in \mathfrak{L}(X)$ es el generador infinitesimal de T_t. □

De la prueba del resultado anterior deducimos que si $\{T_t\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo en X, entonces su generador infinitesimal $A \in \mathfrak{L}(X)$. Sin embargo, A es también generador infinitesimal del semigrupo uniformemente continuo $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$. Por tanto, debemos preguntarnos si ambos semigrupos coinciden. El siguiente teorema responde a esta pregunta.

Teorema 3.14. *Sean X un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t \geq 0}$, $\{S_t\}_{t \geq 0}$ dos semigrupos uniformemente continuos de operadores lineales y acotados en X. Si se verifica que*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T_t - I}{t} = A = \lim_{t \to 0^+} \frac{S_t - I}{t},$$

entonces $T_t = S_t$, $\forall t \geq 0$.

Demostración. Sea $T > 0$ fijo. Vamos a probar que $S_t = T_t, 0 \leq t \leq T$. De la Proposición 3.7 y la continuidad de la norma se deduce que las aplicaciones $t \longrightarrow \|T_t\|$ y $t \longrightarrow \|S_t\|$ son continuas. Además, por ser $[0,T]$ un compacto, tenemos por el Teorema de Weierstrass que $\exists C > 0 : \|T_t\|\|S_s\| \leq C$ para $0 \leq t, s \leq T$. Además, por hipótesis tenemos que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T_t - I}{t} - \lim_{t\to 0^+} \frac{S_t - I}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{T_t - S_t}{t} = 0.$$

Esto, junto con la continuidad de la norma, nos permite deducir que $\lim_{h\to 0^+} \frac{\|T_h - S_h\|}{h} = 0$. Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$ por la hipótesis $\exists \delta > 0$ tal que $h^{-1}\|T_h - S_h\| < \frac{\varepsilon}{TC}, 0 \leq h \leq \delta$. Sea $0 \leq t \leq T$ y tomemos $n \geq 1$ tal que $\frac{t}{n} \leq \delta$. De la propiedad de semigrupo y las cotas anteriores se tiene

$$\begin{aligned}
\|T_t - S_t\| &= \left\| T_{\frac{nt}{n}} - S_{\frac{nt}{n}} \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n-1} T_{(n-k)\frac{t}{n}} S_{k\frac{t}{n}} - T_{(n-k-1)\frac{t}{n}} S_{(k+1)\frac{t}{n}} \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T_{(n-k-1)\frac{t}{n}} \right\| \left\| T_{\frac{t}{n}} S_{k\frac{t}{n}} - S_{(k+1)\frac{t}{n}} \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T_{(n-k-1)\frac{t}{n}} \right\| \left\| S_{k\frac{t}{n}} \right\| \left\| T_{\frac{t}{n}} - S_{\frac{t}{n}} \right\| \leq nC \frac{\varepsilon}{TC} \frac{t}{n} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

De esta forma, hemos probado que $T_t = S_t$, para $0 \leq t \leq T$. Como T era arbitrario, concluimos que $T_t = S_t$, $\forall t \geq 0$. □

Corolario 3.15. *Sean X un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo de operadores lineales y acotados con generador infinitesimal A. Entonces, $A \in \mathfrak{L}(X)$ y $T_t = e^{tA}$, $t \geq 0$. Además, la aplicación*

$$t \longrightarrow T_t$$

es diferenciable y se verifica que

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} = AT_t = T_t A.$$

Demostración. Sabemos por el Teorema 3.13 que $A \in \mathfrak{L}(X)$ y probamos que es el generador infinitesimal del semigrupo $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$. Además, del Teorema 3.14 sabemos que $T_t = e^{tA}$, $t \geq 0$.

En virtud de las propiedades de A y del semigrupo, obtenemos que

$$\lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} - e^{tA}A \right\| \leq \lim_{h\to 0^+} \|e^{tA}\| \left\| \frac{e^{hA} - I}{h} - A \right\| = 0$$

y

$$\lim_{h\to 0^-}\left\|\frac{e^{tA}-e^{(t+h)A}}{h}-e^{tA}A\right\| \leq \lim_{h\to 0^-}\|e^{(t+h)A}\|\left\|\frac{e^{-hA}-I}{h}-e^{-hA}A\right\|$$
$$\leq \lim_{h\to 0^-}\|e^{(t+h)A}\|\left(\left\|\frac{e^{-hA}-I}{h}-A\right\|+\|A(e^{-hA}-I)\|\right)=0.$$

Concluimos que

$$\frac{\partial T_t}{\partial t}=Ae^{tA}=AT_t=T_tA.$$

□

A continuación, vamos a estudiar las propiedades específicas de los C_0-semigrupos.

Teorema 3.16. *Sean X un espacio de Banach, $\{T_t\}_{t\geq 0}\subseteq \mathfrak{L}(X)$ un C_0-semigrupo en X y sea A su generador infinitesimal.*

1. *Para cada $x\in X$ y $t\geq 0$, se tiene que*
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T_s(x)ds=T_t(x).$$
2. *Para cada $x\in X$ y $t>0$, se tiene que $\int_0^t T_s(x)ds\in\mathcal{D}(A)$ y se verifica que*
$$A\left(\int_0^t T_s(x)ds\right)=T_t(x)-x.$$
3. *Para cada $x\in\mathcal{D}(A)$ y $t>0$, se tiene que $T_t(x)\in\mathcal{D}(A)$ y $\frac{\partial}{\partial t}T_t(x)=AT_t(x)=T_tA(x)$.*
4. *Para cada $x\in\mathcal{D}(A)$, se tiene que*
$$T_t(x)-T_s(x)=\int_s^t T_\tau A(x)d\tau=\int_s^t AT_\tau(x)d\tau,\quad s,t\geq 0.$$

Demostración. 1. Sea $x\in X$ y $t\geq 0$. De la continuidad de $s\longrightarrow T_sx$ se sigue que $T_s(x)$ es integrable Riemann en la variable s. Además, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que
$$\|T_s(x)-T_t(x)\|<\varepsilon\quad\text{si } s\in(t,t+\delta).$$
De este modo, para $0<h<\delta$, se tiene que
$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T_s(x)ds-T_t(x)\right\|\leq\int_t^{t+h}\|T_s(x)-T_t(x)\|ds<\varepsilon.$$

2. Sean $x \in X$ y $t > 0$. Para cada $0 < h < t$, de la propiedad de semigrupo y el cambio de variable $\widetilde{s} = s + h$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{T_h - I}{h}\left(\int_0^t T_s(x)ds\right) &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t T_{s+h}(x)ds - \int_0^t T_s(x)ds\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T_s(x)ds - \frac{1}{h}\int_0^h T_s(x)ds.\end{aligned}$$

Tomando $h \to 0^+$ y usando la definición de generador infinitesimal y el apartado *1* de este teorema, se deduce el resultado.
3. Sean $x \in \mathcal{D}(A)$ y $t > 0$. De la propiedad de semigrupo, la continuidad de T_t y la definición de generador infinitesimal, se deduce que

$$\frac{T_{t+h}(x) - T_t(x)}{h} = \frac{T_h - I}{h}T_t(x) = T_t\left(\frac{T_h - I}{h}\right)(x) \longrightarrow T_tA(x), \quad h \to 0^+. \tag{3.2}$$

De esta forma $T_t(x) \in \mathcal{D}(A)$, $T_tA(x) = AT_t(x)$ y

$$\frac{\partial^+}{\partial t}T_t(x) = AT_t(x) = T_tA(x).$$

Adaptando el mismo argumento de la prueba del Corolario 3.15, obtenemos que

$$\frac{\partial^-}{\partial t}T_t(x) = AT_t(x) = T_t(x)A,$$

y, por tanto, queda probado el resultado.

Para probar la propiedad *4*, basta integrar la expresión en *3* entre s y t con $s, t \geq 0$, de forma que podemos escribir

$$T_t(x) - T_s(x) = \int_s^t \frac{\partial}{\partial t}T_\tau(x)d\tau = \int_s^t AT_\tau(x)d\tau = \int_s^t T_\tau A(x)d\tau, \quad x \in X.$$

□

Corolario 3.17. *Sea X un espacio de Banach. Si A es generador infinitesimal del C_0-semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0} \subseteq \mathfrak{L}(X)$, entonces $\mathcal{D}(A)$ es denso en X y A es un operador lineal cerrado.*

Demostración. Fijamos $x \in X$ y definimos $x_n = n\int_0^{\frac{1}{n}} T_s(x)ds$, $n \in \mathbb{N}$. Por lo visto en el Teorema 3.16, sabemos que $x_n \in \mathcal{D}(A), \forall n \in \mathbb{N}$, y $x_n \to x$, cuando $n \to \infty$. Por tanto, $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$.

La linealidad de A es directa de la definición de generador infinitesimal. Para ver que es cerrado, consideremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $x_n \to x$ y $A(x_n) \to y$, y veamos que $x \in \mathcal{D}(A)$ y $Ax = y$. De nuevo, por lo visto en el Teorema 3.16 se tiene

$$T_t(x_n) - x_n = \int_0^t T_s A(x_n) ds, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De la continuidad de T_t, $t \geq 0$, y la Proposición 3.5 se sigue que, para cada $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $w_n \to w$, $\|T_t w_n - T_t w\| \leq \|T_t\| \|w_n - w\| \leq M e^{wT} \|w_n - w\|, t \in [0,T]$, luego $T_t w_n \longrightarrow T_t w$ uniformemente en $t \in [0,T]$, $T > 0$. De este modo, tomando $n \to \infty$, obtenemos

$$\frac{T_t(x) - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T_s(y) ds, \quad \forall t > 0.$$

Por lo tanto, en virtud del Teorema 3.16 concluimos que $x \in \mathcal{D}(A)$ y

$$A(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{T_t(x) - x}{t} = y.$$

□

Teorema 3.18. *Sean X un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0}$, $\{S_t\}_{t\geq 0}$ dos C_0-semigrupos en X con generadores infinitesimales A y B, respectivamente. Si $A = B$, entonces $T_t = S_t, \forall t \geq 0$.*

Demostración. Supongamos que $A = B$ y sea $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$. Por el Teorema 3.16 sabemos que $S_t(x) \in \mathcal{D}(A), \forall t \geq 0$ y $S_t(x)$ es diferenciable respecto a t. Por tanto, $T_{t-s} S_s(x) \in \mathcal{D}(A)$ para $0 \leq s \leq t$, es diferenciable con respecto a s, y

$$\frac{\partial}{\partial s} T_{t-s}(S_s(x)) = -A T_{t-s}(S_s(x)) + T_{t-s}(A S_s(x)) = 0.$$

Luego, $T_{t-s} S_s(x)$ es constante en s y, por tanto, $T_t S_0(x) = T_0 S_t(x) = T_t(x) = S_t(x), \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$. Veamos que esta igualdad se verifica en todo x. Sea $y \in X = \overline{\mathcal{D}(A)}$, (en virtud del Corolario 3.17). Entonces, $\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $x_n \to y$, y de la acotación de T_t y S_t para $t \geq 0$ se sigue que

$$\|(T_t - S_t)(x_n) - (T_t - S_t)(y)\| \leq \|T_t - S_t\| \|x_n - y\| \longrightarrow 0, \ n \to \infty,$$

luego $T_t y - S_t y = \lim_{n\to\infty}(T_t(x_n) - S_t(x_n)) = 0$. □

Observación 3.19. Como vimos en el Ejemplo 3.9, $\{\omega_t * f\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. A pesar de no ser un semigrupo uniformemente continuo, normalmente se usa de manera simbólica la notación exponencial, $e^{t\Delta} f := \omega_t * f, \ f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$, pues codifica las propiedades del semigrupo. En efecto, como $\omega_t * f$ es la solución del problema de Cauchy del calor, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{t\Delta} f = \frac{\partial}{\partial t}(\omega_t * f) = \Delta(\omega_t * f) = \Delta e^{t\Delta} f$$

$$\omega_0 * f = f = e^{0\Delta} f.$$

Además, Δ es el generador de este semigrupo pues se verifica que

$$\Delta f = \lim_{t\to 0^+} \frac{\omega_t * f - f}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{t\Delta} f - f}{t} = \partial_t^+ (e^{t\Delta} f)_{|t=0} = \Delta e^{t\Delta} f_{|t=0}.$$

De manera general, si $\mathcal{L}$ es un operador no negativo definido en un cierto espacio, llamaremos semigrupo del calor generado por $\mathcal{L}$ a la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = -\mathcal{L}u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.3}$$

Y lo denotaremos simbólicamente por $e^{-t\mathcal{L}} f(x) := u(x,t)$.

3.2. La subordinación en semigrupos.

En esta sección estudiaremos cómo a partir del semigrupo de calor generado por un operador podemos obtener otro semigrupo, usando un proceso conocido usualmente como **subordinación**.

En primer lugar, vamos a estudiar cómo obtener el semigrupo del Poisson. Para ello, recurrimos a la siguiente igualdad, conocida como **fórmula de subordinación de Bochner**.

$$e^{-t\lambda} = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}} e^{-s\lambda^2}}{s^{3/2}} ds. \tag{3.4}$$

Nuestro objetivo es obtener la fórmula correspondiente para semigrupos, esto es,

$$e^{-t\sqrt{\mathcal{L}}} = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}} e^{-s\mathcal{L}}}{s^{3/2}} ds, \quad t > 0. \tag{3.5}$$

Puede comprobarse que formalmente $\{e^{-t\sqrt{\mathcal{L}}}\}_{t>0}$ satisface la propiedad de semigrupo y que si definimos $e^{-0\sqrt{\mathcal{L}}} = I$, $e^{-t\sqrt{\mathcal{L}}} f$ es solución del problema "de Poisson"

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(x,t) = \mathcal{L}u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Es por ello que a $e^{-t\sqrt{\mathcal{L}}}$ se le denomina en la literatura "el semigrupo del Poisson". Podemos ahora justificar la fórmula (3.5). Primero ilustraremos el método para el caso del operador laplaciano y después mostraremos el caso general para cualquier operador $\mathcal{L}$.

Ejemplo 3.20. Sea $f \in \mathcal{S}$ y consideremos el problema de Cauchy asociado a la ecuación de Poisson

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(x,t) = -\Delta u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Aplicando transformada de Fourier en la variable espacial obtenemos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_{tt} \widehat{u}(\xi,t) = 4\pi^2|\xi|^2 \widehat{u}(\xi,t), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Observamos que $\widehat{u}(\xi,t) = e^{-t\sqrt{4\pi^2|\xi|^2}} \widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|t}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0$ es solución del problema anterior.

De esta forma, si quisieramos conocer $u(x,t) =: P_t f(x)$ debemos invertir la transformada de Fourier de esta expresión. Nosotros emplearemos la fórmula de subordinación de Bochner. Así, tomando $\lambda = 2\pi|\xi|$ y multiplicando por $\widehat{f}(\xi)$ se tiene que

$$e^{-2\pi t|\xi|} \widehat{f}(\xi) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}}}{s^{3/2}} e^{-4\pi^2|\xi|^2 s} \widehat{f}(\xi) ds, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ t > 0. \tag{3.6}$$

Por ende, teniendo en cuenta que $\mathcal{F}(e^{s\Delta} f)(\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 s} \widehat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n, s > 0$, aplicando transformada de Fourier inversa obtenemos que

$$P_t f(x) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}}}{s^{3/2}} e^{t\Delta} f(x) ds, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

A continuación, veamos que efectivamente que $P_t f = (P_t * f)$, donde P_t es el núcleo del Poisson (visto en el Ejemplo 2.6). Realizando el cambio de variable $u = \frac{t^2+|y|^2}{4s}$ y aplicando Fubini, tenemos que

$$\begin{aligned} P_t f(x) &= \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}}}{s^{3/2}} e^{s\Delta} f ds = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}}}{s^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4s}}}{(4\pi s)^{n/2}} f(x-y) dy ds \\ &= \frac{t}{2\sqrt{\pi}(4\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2+|y|^2}{4s}}}{s^{\frac{n+3}{2}}} f(x-y) ds dy \\ &= \frac{t}{2\sqrt{\pi}(4\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \left(\frac{4u}{t^2+|y|^2} \right)^{\frac{n+1}{2}} \frac{e^{-u}}{u} f(x-y) du dy \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} f(x-y) \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{n-1}{2}} du dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} f(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) f(x-y)dy \\
&= (P_t * f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Ahora nos gustaría extender esta expresión a una clase más general de funciones, en particular a $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

Definimos, para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$,

$$
\{P_t f\}_{t\geq 0} := \begin{cases} e^{-t\sqrt{-\Delta}} f = \dfrac{t}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}}}{s^{3/2}} e^{s\Delta} f ds, & t > 0 \\ f, & t = 0, \end{cases}
$$

donde $e^{s\Delta} f = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4s}}}{(4\pi s)^{n/2}} f(x-y)dy$, el semigrupo del calor.
Veamos que es un C_0-semigrupo en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, en virtud de la desigualdad de Hölder, se tiene que $|P_t f| \leq \|P_t\|_{p'} \|f\|_p < \infty$, donde p, p' son exponentes conjugados, luego $P_t f$ está bien definido. Además, en virtud de la desigualdad de Young (Corolario 1.10) se tiene que $\|P_t f\|_p \leq \|P_t\|_1 \|f\|_p$, luego $P_t \in \mathfrak{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$.
Para probar la propiedad de semigrupo, basta observar las identidades (3.6) y (3.7) para darse cuenta de que $\widehat{P_t}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|t}$ y $\mathcal{F}(P_{t_1} * P_{t_2})(\xi) = e^{-2\pi|\xi|t_1} e^{-2\pi|\xi|t_2} = e^{-2\pi|\xi|(t_1+t_2)} = \mathcal{F}(P_{t_1+t_2})(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t_1, t_2 > 0$.
Por consiguiente, invirtiendo la transformada de Fourier obtenemos $P_{t_1} * P_{t_2} = P_{t_1+t_2}$, $t_1, t_2 > 0$. Esto significa que el núcleo de Poisson satisface la propiedad de semigrupo. Como consecuencia,

$$
\begin{aligned}
P_t(P_s f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} P_t(z) \int_{\mathbb{R}^n} P_s(x-y-z) f(y) dydz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} P_t(z) P_s(x-y-z) dzdy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(P_t * P_s)(x-y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(P_{t+s})(x-y)dy = P_{t+s} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

Además, en virtud de la Proposición 2.7, se tiene que $\lim_{t\to 0} \|P_t * f - f\|_p = 0$. Concluimos, por tanto, que se trata de un C_0-semigrupo en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Veamos ahora cómo podemos justificar la formula (3.5) en el caso general. Para ello, haremos uso del Teorema espectral.

Observación 3.21. Sea $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ un operador autoadjunto positivo tal que $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Del teorema espectral se sigue que existe una única medida espectral E, soportada en el espectro de $\mathcal{L}$ tal que

$\mathcal{L} = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$. Por consiguiente, podemos establecer un cálculo funcional de modo que $e^{-t\mathcal{L}} = \int_0^\infty e^{-t\lambda} dE(\lambda)$ y $e^{t\sqrt{\mathcal{L}}} = \int_0^\infty e^{-t\sqrt{\lambda}} dE(\lambda),\ t > 0$.
De este modo, sustituyendo en $e^{t\sqrt{\lambda}}$ por la fórmula de subordinación de Bochner y aplicando Fubini obtenemos que

$$\begin{aligned} e^{-t\sqrt{\mathcal{L}}} &= \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}} e^{-s\lambda}}{s^{3/2}} ds dE(\lambda) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}}}{s^{3/2}} \int_0^\infty e^{-s\lambda} dE(\lambda) ds \\ &= \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}}}{s^{3/2}} e^{-s\mathcal{L}} ds, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Una vez queda la fórmula justificada en $L^2(\mathbb{R}^n)$, puede extenderse la definición, usando la expresión anterior, a aquellas funciones f tales que $e^{-t\sqrt{\mathcal{L}}} f$ sea finito. Por ejemplo, si $e^{-t\mathcal{L}} \in \mathfrak{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$, entonces usando la desigualdad de Minkowski se tiene que

$$\|e^{-t\sqrt{\mathcal{L}}} f\|_p \leq \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}}}{s^{3/2}} \|e^{-s\mathcal{L}} f\|_p ds \leq C\|f\|_p < \infty.$$

Por otra parte, también pueden definirse más semigrupos subordinados, además del Poisson (vease [16, p.259]). Sea (X, μ) un espacio medible, $1 < p < \infty$, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en $L^p(X)$ con generador infinitesimal asociado $-\mathcal{L}$ y sea $0 < \alpha < 1$. Entonces $-\mathcal{L}^\alpha$ genera un semigrupo en $L^p(X)$ acotado (y analítico) $\{T_{\alpha,t}\}_{t\geq 0}$, y además, para cada $t > 0$ existe una función continua $f_{\alpha,t} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ que verifica lo siguiente

$$\forall s > 0, \quad f_{\alpha,t}(s) \geq 0; \qquad \int_0^\infty f_{\alpha,t}(s) ds = 1$$

y

$$T_{\alpha,t}(g) = \int_0^\infty f_{\alpha,t}(s) T_s(g) ds, \quad g \in L^p(X),\ t \geq 0.$$

En particular, $\{T_{1/2,t}\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo de Poisson y si $\mathcal{L} = -\Delta$ y $\{T_t\}_{t\geq 0} = \{e^{t\Delta}\}_{t\geq 0}$, entonces el generador de $\{T_{1/2,t}\}_{t\geq 0} = \{e^{-t\sqrt{-\Delta}}\}_{t\geq 0}$ es $-(-\Delta)^{1/2}$.

4

Potencias fraccionarias de operadores.

Existen muchas formas diferentes de definir las potencias “fraccionarias”(de cualquier orden $\alpha \in \mathbb{R}$) de operadores. En este capítulo estudiaremos cómo definir las potencias fraccionarias de operadores a través de la teoría de semigrupos y las principales ventajas de este enfoque. Expondremos el ejemplo del laplaciano fraccionarios y después haremos mención a cómo podría emplearse este procedimiento de manera general.

4.1. El laplaciano fraccionario.

En esta sección abordaremos el estudio del operador fraccionario más famoso de la literatura matemática reciente, el laplaciano fraccionario. Hay más de 10 formas diferentes de definir el laplaciano fraccionario, véase [6] y todas ellas resultan ser equivalentes, para funciones suficientemente buenas. Nosotros partiremos de la definición dada a través de la transformada de Fourier, que es una de las más intuitivas, y después veremos la definición por medio de semigrupos y sus principales ventajas. El contenido de esta sección está basado en [1, 13].

En la Observación 2.13 vimos que, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{S}$, $\mathcal{F}((-\Delta)^k f)(\xi) = (4\pi^2|\xi|^2)^k \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$. De esta igualdad vemos que es natural la siguiente definición del Laplaciano fraccionario.

Definición 4.1. *Sea $f \in \mathcal{S}$ y $0 < \alpha < 1$, se considera como Laplaciano fraccionario, $(-\Delta)^\alpha$, aquel operador que verifique lo siguiente*

$$\mathcal{F}((-\Delta)^\alpha f)(\xi) = (4\pi^2|\xi|^2)^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Para obtener la expresión puntual explícita de $(-\Delta)^\alpha$, para $0 < \alpha < 1$, vamos a proceder dos formas.

Primeramente, aplicando la transformada de Fourier inversa se obtiene (véase [7]) la fórmula puntual siguiente

$$(-\Delta)^\alpha f(x) = c_{n,\alpha}\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(z)}{|x - z|^{n+2\alpha}} dz, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.1}$$

donde $c_{n,\alpha}$ es una constante que depende sólo de la dimensión y de α, y p.v. denota el valor principal de Cauchy.

Observación 4.2. En (4.1) se introduce el concepto de valor principal de Cauchy de una integral. Aquí, la integral original se define como impropia porque la función

$$\frac{f(x) - f(z)}{|x - z|^{n+2\alpha}}$$

podría no ser integrable en todo $\mathbb{R}^n$, pero sí serlo localmente salvo en un conjunto de medida cero. El valor principal de Cauchy intenta dar un sentido a la integral al 'saltarse' la singularidad y tomar el límite como el radio de una esfera, alrededor del punto singular, tendiendo a cero, esto es, $(-\Delta)^\alpha f(x) = c_{n,\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-z|>\varepsilon} \frac{f(x)-f(z)}{|x-z|^{n+2\alpha}} dz$.

Es importante tener en cuenta que el valor principal de Cauchy puede que no siempre exista. Depende de la función específica y su comportamiento en la singularidad.

Asimismo, podemos obtener la expresión puntual explícita de $(-\Delta)^\alpha$ usando semigrupos. Este enfoque tiene diversas ventajas, como la obtención de la expresión puntual de manera más sencilla, y el cálculo exacto de la constante $c_{n,\alpha}$. Esta técnica fue introducida por Pablo Stinga y José Luis Torrea en 2010 (véase [12, 14]) y para ello partimos de la siguiente igualdad para la función Γ, con $0 < \alpha < 1$. Para cada $\lambda > 0$, puede comprobarse que

$$\lambda^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty (e^{-\lambda s} - 1) \frac{1}{s^{1+\alpha}} ds. \tag{4.2}$$

Sustituyendo $\lambda = 4\pi^2|\xi|^2$ y multiplicando por $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ obtenemos lo siguiente

$$(4\pi^2|\xi|^2)^\alpha \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \left(e^{-4\pi^2|\xi|^2 s} \widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\xi) \right) \frac{1}{s^{1+\alpha}} ds. \tag{4.3}$$

Usando el hecho de que $\mathcal{F}^{-1}((4\pi^2|\xi|^2)^\alpha \widehat{f}) = (-\Delta)^\alpha f$ y aplicando transformada inversa en (4.3) obtenemos

$$(-\Delta)^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \left(e^{s\Delta} f(x) - f(x) \right) \frac{1}{s^{1+\alpha}} ds, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.4}$$

Vamos a verificar que efectivamente las dos expresiones que hemos obtenido para $(-\Delta)^\alpha$ coinciden.

Teorema 4.3. *Sean $0 < \alpha < 1$ y $f \in \mathcal{S}$. Se verifica la siguiente igualdad*

$$\begin{aligned}(-\Delta)^\alpha f(x) =& c_{n,\alpha}\ \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)-f(z)}{|x-z|^{n+2\alpha}} dz \\ =& \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \left(e^{-s\Delta} f(x) - f(x)\right) \frac{1}{s^{1+\alpha}} ds, \quad x \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

donde $c_{n,\alpha} = \frac{-4^\alpha \Gamma(\frac{n}{2}+\alpha)}{\pi^{n/2}\Gamma(-\alpha)}$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Como $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_t(x-z) dz = 1$, podemos escribir

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left(e^{s\Delta} f(x) - f(x)\right) \frac{ds}{s^{1+\alpha}} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \omega_s(x-z) \left(f(z)-f(x)\right) dz \frac{ds}{s^{1+\alpha}} \\ &= \int_0^\infty \int_{|x-z|>1} \omega_s(x-z) \left(f(z)-f(x)\right) dz \frac{ds}{s^{1+\alpha}} \\ &+ \int_0^\infty \int_{|x-z|\le 1} \omega_s(x-z) \left(f(z)-f(x)\right) dz \frac{ds}{s^{1+\alpha}} = I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Veamos que I_1 e I_2 son absolutamente convergentes. Por un lado, nótese que mediante el cambio de variable $\widetilde{s} = \frac{|x-z|^2}{4s}$, podemos escribir

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{|x-z|^2}{4s}}}{(4\pi s)^{n/2}} \frac{ds}{s^{1+\alpha}} = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{4}{|x-z|^2}\right)^{\frac{n}{2}+\alpha} \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}+\alpha} e^{-s} \frac{ds}{s} = \frac{4^\alpha \Gamma(\frac{n}{2}+\alpha)}{\pi^{n/2}|x-z|^{n+2\alpha}}.$$

Entonces, como f es acotada, es directo que

$$\begin{aligned}|I_1| &\le \int_0^\infty \int_{|x-z|>1} \frac{e^{-\frac{|x-z|^2}{4s}}}{(4\pi s)^{n/2}} |f(z)-f(x)|\, dz \frac{ds}{s^{1+\alpha}} \\ &\le C\|f\|_\infty \int_{|x-z|>1} \frac{4^\alpha \Gamma(\frac{n}{2}+\alpha)}{\pi^{n/2}|x-z|^{n+2\alpha}} < \infty.\end{aligned}$$

Es decir, I_1 converge absolutamente. Con respecto a I_2, aplicando un cambio a coordenadas esféricas, podemos escribir lo siguiente

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_0^\infty \int_{|x-z|\le 1} \frac{e^{-\frac{|x-z|^2}{4s}}}{(4\pi s)^{n/2}} \left(f(z)-f(x)\right) dz \frac{ds}{s^{1+\alpha}} \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} \int_0^1 e^{-\frac{r^2}{4s}} r^{n-1} \int_{|w|=1} \left(f(x+rw)-f(x)\right) dS(w) dr \frac{ds}{s^{1+\alpha}}.\end{aligned}$$

Por el desarrollo del polinomio de Taylor de $f(x+rw)$ centrado en x, tenemos que $f(x+rw) - f(x) = r\langle \nabla f(x), w\rangle + \frac{r^2}{2}\langle \nabla^2 f(x) w, w\rangle + \mathcal{O}(r^3)$, donde $\langle \cdot,\cdot \rangle$ es el producto interior usual de $\mathbb{R}^n$. Por tanto, en la expresión anterior podemos probar que

$$\int_{|w|=1} (f(x+rw)-f(x))\,dS(w) = Cr^2\Delta f(x) + \mathcal{O}(r^3) \leq C_{n,\Delta f(x)} r^2.$$

En efecto, gracias a la simetría de S^{n-1} y el hecho de que los términos de orden r son de paridad impar, se anulan al integrar. Así, siguiendo con el cambio de variable $t = r^2/4s$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq c_{n,\Delta f(x)} \int_0^1 r^{n+1} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{r^2}{4s}}}{s^{\frac{n}{2}+\alpha}} \frac{ds}{s} dr = c_{n,\Delta f(x)} \int_0^1 r^{n+1} \left(\frac{4}{r^2}\right)^{\frac{n}{2}+\alpha} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}+\alpha} \frac{dt}{t} dr \\ &= c_{n,\Delta f(x)} 4^{\frac{n}{2}+\alpha} \Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right) \int_0^1 r^{1-2\alpha} dr = \frac{4^{\frac{n}{2}+\alpha}}{2-2\alpha} \Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right) =: c_{n,\Delta f(x),\alpha}.\end{aligned}$$

Y por tanto, I_2 es también absolutamente convergente. Ahora, aplicando Fubini obtenemos que

$$I_2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 r^{n-1} \int_{|w|=1} f(x+rw) - f(x) dS(w) \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{r^2}{4s}}}{(4\pi s)^{n/2}} \frac{ds}{s^{1+\alpha}} dr.$$

Deshaciendo el cambio a coordenadas esféricas se obtiene que

$$I_2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon<|x-z|<1} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{|x-z|^2}{4s}}}{(4\pi s)^{n/2}} (f(z)-f(x)) \frac{ds}{s^{1+\alpha}} dz.$$

Y como $(-\Delta)^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}(I_1 + I_2)$, concluimos que

$$\begin{aligned}(-\Delta)^\alpha f(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-z|>\varepsilon} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{|x-z|^2}{4s}}}{(4\pi s)^{n/2}} (f(z)-f(x)) \frac{ds}{s^{1+\alpha}} dz \\ &= \frac{-4^\alpha \Gamma(\frac{n}{2}+\alpha)}{\pi^{n/2}\Gamma(-\alpha)} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)-f(z)}{|x-z|^{\frac{n}{2}+\alpha}} dz \\ &= c_{n,\alpha}\, \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)-f(z)}{|x-z|^{n+2\alpha}} dz, \quad x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

□

Para que estas definiciones de laplaciano fraccionario cobren sentido, es deseable verificar que, para funciones suficientemente buenas, el laplaciano fraccionario converge a la identidad, cuando $s \to 0^+$, y al laplaciano cuando $s \to 1^-$. De hecho, esto es un resultado directo de la Definición 4.1 para funciones $f \in \mathcal{S}$, pues podemos escribir

$$\lim_{\alpha\to 1^-} \mathcal{F}((-\Delta)^\alpha f)(\xi) = 4\pi^2|\xi|^2\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}((-\Delta)f)(\xi),$$

y

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \mathcal{F}((-\Delta)^\alpha f)(\xi) = \widehat{f}(\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Sin embargo, este resultado se puede extender a otra clase de funciones menos restrictiva que la clase de Schwartz, por ejemplo $L^\infty \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, (véase [12, págs. 37-38]) gracias a que hemos conseguido una expresión explícita de las constantes en la expresión puntual (4.1), obtenida mediante el método de semigrupos.

Observación 4.4. En esta sección hemos obtenido dos expresiones puntuales del laplaciano fraccionario en la clase de Schwartz. Sin embargo, una vez que tenemos las fórmulas (4.1) y (4.4) podemos definir el operador laplaciano fraccionario para una clase más general de funciones, por ejemplo (véase [13, pág. 11]),

$$Ł_s := \left\{ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \ : \ \|f\|_{Ł_s} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{1+|x|^{n+2s}}dx < \infty \right\}.$$

4.1.1. Generalización de potencias fraccionarias para un operador $\mathcal{L}$.

A continuación, se pretende abordar una breve generalización de potencias fraccionarias a operadores, $\mathcal{L}$, lineales, positivos y autoadjuntos en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

En virtud del Teorema 1.17 se puede considerar la siguiente definición para potencias fraccionarias de $\mathcal{L}$.

Sea $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{L})} = L^2(\mathbb{R}^n)$ un operador no negativo y autoadjunto, y sea $0<\alpha<1$. Se define la potencia fraccionaria de $\mathcal{L}$ como

$$\mathcal{L}^\alpha := \int_{\lambda\in\sigma(\mathcal{L})} \lambda^\alpha dE(\lambda).$$

Ahora, sustituyendo en la expresión λ^α por (4.2) y aplicando Fubini, obtenemos que

$$\mathcal{L}^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty\int_0^\infty (e^{-\lambda s}-1)dE(\lambda)\frac{ds}{s^{1+\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty (e^{-s\mathcal{L}}-1)\frac{ds}{s^{1+\alpha}}.$$

Nótese que, tras definir las potencias fraccionarias de un operador $\mathcal{L}$ usando la expresión a través de semigrupos que acabamos de justificar, podemos extender la definición de $\mathcal{L}^\alpha$ a una clase más extensa de funciones, tales que la integral del lado derecho de la igualdad sea finita.

Observación 4.5. En [8, pag. 7] se prueba que efectivamente el caso del laplaciano fraccionario hecho con el método de la transformada de Fourier es un caso particular del método con el Teorema espectral.

Bibliografía

[1] E. Di Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math., 136 (2012), pp. 521–573.

[2] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, vol. 29 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

[3] K.-J. Engel and R. Nagel, *A short course on operator semigroups*, Universitext, Springer, New York, 2006.

[4] G. B. Folland, *Real analysis*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, second ed., 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[5] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, vol. Vol. XXXI of American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, RI, revised ed., 1974.

[6] M. Kwaśnicki, *Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator*, Fract. Calc. Appl. Anal., 20 (2017), pp. 7–51.

[7] N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, vol. Band 180 of Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. Translated from the Russian by A. P. Doohovskoy.

[8] A. Lischke, G. Pang, M. Gulian, F. Song, C. Glusa, X. Zheng, Z. Mao, W. Cai, M. M. Meerschaert, M. Ainsworth, and G. E. Karniadakis, *What is the fractional laplacian? a comparative review with new results*, Journal of Computational Physics, 404 (2020), p. 109009.

[9] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.

[10] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Real analysis*, vol. 3 of Princeton Lectures in Analysis, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. Measure theory, integration, and Hilbert spaces.

[11] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, vol. No. 32 of Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971.

[12] P. R. Stinga, *Ph.D. thesis*, Universidad Autónoma de Madrid (Spain), 2010.

[13] ——, *User's guide to the fractional Laplacian and the method of semigroups*, in Handbook of fractional calculus with applications. Vol. 2, De Gruyter, Berlin, 2019, pp. 235–265.

[14] P. R. Stinga and J. L. Torrea, *Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators*, Comm. Partial Differential Equations, 35 (2010), pp. 2092–2122.

[15] A. Vera López and P. Alegría Ezquerra, *Un curso de análisis funcional. Teoría y problemas*, Murcia: A. Vera López, D.L., 1997.

[16] K. Yosida, *Functional analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the sixth (1980) edition.

Fractional operators through the semigroup language

Jesús David Betancourt Lugo
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101431192@ull.edu.es

Abstract

The main goal of this Final Degree Project is to define fractional operators by means of the semigruop language. In particular, a more exhaustive study will be done in the case of the fractional Laplacian and in the case of more general operators the method will be illustrated. To do this, in the first chapters we will go into detail of the main tools that will be necessary, such as the Fourier transform and its main properties, as well as the theory of semigroups of operators, which will play a fundamental role.

1. Introduction to the Fourier transform

A function $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ is said to be in the **Schwartz class**, denoted by $\mathcal{S}$, if f is infinitely differentiable and all its derivatives decrease rapidly at infinity. In this chapter we study the main properties of the Fourier transform in $\mathcal{S}$ and $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. The **Fourier transform** of $f \in \mathcal{S}$ is defined as

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

2. Semigroups of operators' theory

Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space and $\{T_t\}_{t\ge 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$. We say that $\{T_t\}_{t\ge 0}$ is a **semigroup** if it verifies the following

1. $T_0 = I$, where I is the identity operator.
2. $T_{t+s} = T_t T_s$, $\forall t, s \in \mathbb{N}$ (semigroup Property).

Moreover, a semigroup is **uniformly continuous** if $\|T_t - I\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$ as $t \to 0$, and is **strongly continuous** or C_0-**semigroup** if $\|T_t x - x\|_X \to 0$ as $t \to 0$.

An important result is that for every uniformly continuous semigroup $\{T_t\}_{t\ge 0}$, there exists a linear operator A such that $T_t = e^{tA}$, where A is the **infinitesimal generator** of the semigroup. This is how the well-known notation for semigroups, $\{T_t\}_{t\ge 0} = \{e^{tA}\}_{t\ge 0}$, is introduced. In addition, the following is verified

$$\frac{\partial^+ T_t}{\partial t} = \frac{\partial^+ e^{tA}}{\partial t} = Ae^{tA} = AT_t = T_t A.$$

We will see some examples of semigroups. In particular, we shall see that the solution to the heat equation,

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \Delta_x u(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

for $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, is known as the heat semigroup and it is given by

$$u(x,t) = e^{t\Delta} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} f(x-z)\,dz, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

In fact, we will see that $\{e^{t\Delta}\}_{t\ge 0}$ is a C_0-semigroup in $L^p(\mathbb{R}^n)$ generated by $-\Delta$.

Also, we shall see how to obtain the Poisson semigroup by subordination of the heat semigroup. In virtue of the following identity for $\lambda > 0$,

$$e^{-t\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{t^2\lambda^2}{4u}}\,du,$$

We will be able to obtain the corresponding formula for operators. In particular, we will define the Poisson semigroup associated with $-\Delta$ as

$$e^{-t\sqrt{-\Delta}} f := \begin{cases} \dfrac{t}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}}}{s^{3/2}} e^{s\Delta} f\,ds, & t > 0 \\ f, \quad t = 0 \end{cases}$$

and we will show that, in fact $\left\{e^{-t\sqrt{-\Delta}}\right\}_{t\ge 0}$ is a C_0-semigroup in $L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p < \infty$. Moreover, we will see how subordination works for a general positive operator $\mathcal{L}$ so that we can define the associated Poisson semigroup from the heat semigroup $\{e^{-t\mathcal{L}}\}_{t\ge 0}$ in the following way:

$$\begin{cases} e^{-t\sqrt{\mathcal{L}}} f := \dfrac{t}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}}}{s^{3/2}} e^{-s\mathcal{L}} f\,ds, & t > 0 \\ f, \quad t = 0. \end{cases}$$

3. Fractional operators

We will see how to define fractional operators by using the semigroup language. In particular, we will focus on the fractional Laplacian and at the end of the chapter we will ilustrate the method for the general case.

For $0 < \alpha < 1$ and $f \in \mathcal{S}$, the fractional Laplacian is defined as the operator such that

$$\mathcal{F}((-\Delta)^\alpha f)(\xi) = (4\pi^2|\xi|^2)^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad f \in \mathcal{S},\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

In 2009, Stinga and Torrea proved that they could get a pointwise formula for $(-\Delta)^\alpha$ in terms of the semigroup language. The starting point is the following gamma function formula

$$\lambda^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty (e^{-\lambda s} - 1) \frac{1}{s^{1+\alpha}} ds, \quad \lambda > 0,\ 0 < \alpha < 1.$$

Here, if we replace $\lambda = 4\pi^2|\xi|^2$ and multiply by $\widehat{f} \in \mathcal{S}$, we obtain that

$$(4\pi^2|\xi|^2)^\alpha \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \left(e^{-4\pi^2|\xi|^2 s}\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\xi)\right) \frac{1}{s^{1+\alpha}} ds, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Thus, using the inverse Fourier transform we get that

$$(-\Delta)^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \left(e^{s\Delta} f(x) - f(x)\right) \frac{1}{s^{1+\alpha}} ds, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Now, since we explicitly know the value of $e^{t\Delta} f$, we can demonstrate that this expression coincides with the well-known principal value pointwise formula for $(-\Delta)^\alpha$, obtaining the explicit value of the constants $c_{n,\alpha}$. These constants will be fundamental to prove that $(-\Delta)^\alpha \to -\Delta$ when $\alpha \to 1^-$ y $(-\Delta)^\alpha \to I$ when $\alpha \to 0^+$.

Additionally, this pointwise definition can be extended to a more general class of functions.

References

[1] Duoandikoetxea, J. *Fourier analysis* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[2] Stinga, P. R. *User's guide to the fractional Laplacian and the method of semigroups*. Vol. 2, De Gruyter, Berlin, 2019.

[3] Pazy, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.