Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Aníbal Padrón López

Fórmulas de cuadratura trigonométricas

Trigonometric quadrature formulas

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2024

Dirigido por
Ruymán Cruz Barroso

Ruymán Cruz Barroso
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi tutor, Ruymán Cruz Barroso, por su dedicación en cada etapa de este proyecto. Su esfuerzo y orientación han sido esenciales para lograr los objetivos propuestos y me han permitido crecer académicamente.

A mis padres, Vanessa López González y Aníbal Padrón García, no tengo palabras para expresar mi gratitud por todo el sacrificio y confianza que siempre me han brindado. Su ayuda ha sido fundamental en el transcurso del grado y este logro es tan suyo como mío.

A mi pareja, Sabina Zapata Pérez, agradecer su amor incondicional, apoyo y motivación en los buenos y malos momentos. Ha sido mi pilar fundamental para seguir adelante y cumplir mis objetivos.

Finalmente, agradezco al resto de mi familia y a mis amigos por su compañía, ánimo y por estar siempre a mi lado. Gracias a ellos este camino ha sido más llevadero y gratificante.

Aníbal Padrón López
La Laguna, 20 de mayo de 2024

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo principal de esta Memoria es la construcción y caracterización de fórmulas de cuadratura positivas exactas en espacios de polinomios trigonométricos para la estimación numérica de integrales con respecto a una medida positiva de Borel en $(-\pi, \pi]$ *e integrandos* 2π*-periódicos. Nuestro punto de partida es el empleado por G. Szegő, considerando sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos de grado y semigrado entero. Nuestro objetivo principal es establecer una conexión con fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad, surgiendo de manera natural relaciones entre los conceptos de ortogonalidad, para-ortogonalidad, cuasi-ortogonalidad, cuasi-paraortogonalidad e invarianza.*

Palabras clave: *Polinomios trigonométricos de grado y semigrado entero – Interpolación – Polinomios de Szegő – Polinomios para-ortogonales – Bi-ortogonalidad – Fórmulas de cuadratura.*

Abstract

The aim of this Memory is the construction and characterization of positive quadrature formulas that are exact in spaces of trigonometric functions for the numerical estimation of integrals with respect a positive Borel measure on $(-\pi, \pi]$ *and* 2π*-periodic integrands. Our starting point is the one used by G. Szegő, considering bi-orthogonal systems of trigonometric functions of integer and semi-integer degree. Our main purpose is to establish a connection between quadrature formulas on the unit circle, arising in a natural way relations between the concepts of orthogonality, para-orthogonality, quasi-orthogonality, quasi- paraorthogonality and invariance.*

Keywords: *Trigonometric polynomials of integer and semi-integer degree – Interpolation – Szegő polynomials – Para-orthogonal polynomials – Bi-orthogonality – Quadrature formulas.*

Contenido

Introducción

El célebre matemático húngaro G. Szegő introdujo en el año 1963 (véase [12]) los *Sistemas Bi-ortogonales de Polinomios Trigonométricos* con el objetivo de introducir y caracterizar fórmulas de cuadratura para integrandos 2π-periódicos con máximo grado de precisión trigonométrico alcanzable; aquí debemos decir que éstas aparecen por primera vez realmente en [6] para el caso particular de la medida de Lebesgue.

Un inconveniente que plantearon tales reglas de integración numérica era el hecho de que sólo podían tener un número par de nodos, dado que, en analogía a lo que ocurre con las clásicas fórmulas Gaussianas cuando se plantea el problema de estimar una integral definida con respecto a una medida positiva de Borel soportada en un intervalo de la recta real, los nodos óptimos eran ceros en $(-\pi, \pi]$ de polinomios trigonométricos (y por tanto, una cantidad par) que cumplían ciertas condiciones de ortogonalidad. Por esta razón, en [2, 3] se solventó este problema aplicando un proceso de ortogonalización a ciertos espacios de funciones trigonométricas, conocidos en la literatura como *Polinomios Trigonométricos de Semigrado Entero* (véase [8]), que poseen un número impar de ceros en $(-\pi, \pi]$. De este modo se pudo unificar la teoría, obteniendo una caracterización para *Fórmulas de Cuadratura con Máximo Grado de Precisión Trigonométrico Alcanzable* y un número arbitrario de nodos.

Por otro lado, en el año 1989 W.B. Jones, O. Njåstad y W. Thron introdujeron y caracterizaron en [5] las conocidas como *Fórmulas de Cuadratura de Szegő*, que son reglas de integración numérica con respecto a medidas positivas de Borel definidas en la circunferencia unidad, teniendo como máximo grado de precisión alcanzable ciertos subespacios de polinomios de Laurent definidos en la circunferencia unidad. En este sentido juega un papel clave el concepto de *Para-Ortogonalidad*, y el enfoque establecido en [2, 3] permitió también vincular ambos conceptos: "bi-ortogonalidad" y "para-ortogonalidad".

El objetivo de esta Memoria es abordar la construcción y caracterización de fórmulas de cuadratura positivas exactas en espacios de polinomios trigonométricos, siguiendo el enfoque establecido en [2, 3], pero con una diferente lectura, aportando demostraciones alternativas a algunos de los resultados (por ejemplo, Proposición 2.3, Teoremas 3.1 y 3.9, ...), e incluso aportando nuevos resultados teóricos (por ejemplo, Proposiciones 3.6, 3.12 y 3.14, Teoremas 2.7, 2.11, 3.13, 3.15, 3.19 y 3.21, ...) que completan esta Teoría. De este modo, abordamos en particular el estudio de fórmulas de cuadratura con grados de precisión intermedios (entre las tipo-interpolatorio y las de máximo grado de precisión). El trabajo contiene también algunas aportaciones numéricas novedosas, y un listado final con cuestiones abiertas relacionadas que consideramos que para ser abordadas, esta Memoria podría representar una referencia bibliográfica preliminar de gran utilidad.

1

Polinomios de Szegő, para-ortogonalidad e invariaza

Aunque el objetivo de esta Memoria es abordar la construcción y caracterización de fórmulas de cuadratura exactas en subespacios de polinomios trigonométricos, hemos optado por incluir un primer capítulo donde tratar el concepto de *Ortogonalidad en la Circunferencia Unidad*. Esto viene motivado, fundamentalmente, por el hecho de que, tal y como se dijo en la Introducción, se establecerá una relación clave en esta Memoria entre los conceptos de "*Sistemas Bi-Ortogonales de Polinomos Trigonométricos*" y "*Polinomos Para-Ortogonales Invariantes*".

De este modo consideramos en primer lugar la construcción de *Polinomios de Szegő*, incluyendo algunas de sus propiedades elementales (y fundamentales), para luego introducir los conceptos de *Para-Ortogonalidad* e *Invarianza*, que permitirán construir y caracterizar *Fórmulas de Cuadratura en la Circunferencia Unidad* con máximo grado de precisión alcanzable (exactas, en este caso, en ciertos subespacios de polinomios de Laurent definidos en la circunferencia unidad). Estas reglas de integración numérica son conocidas en la literatura como *Fórmulas de Szegő* (véase [5]).

Antes de comenzar introducimos algo de notación que será empleada no solo a lo largo de este primer capítulo sino también a lo largo de toda la Memoria. Denotaremos por $\mathbb{P}$ al espacio vectorial de polinomios con coeficientes complejos y $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}$ al subespacio vectorial de polinomios con coeficientes complejos de grado a lo sumo n. Al espacio de matrices cuadradas de tamaño n lo denotaremos por $\mathcal{M}_n$. Llamaremos a la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, su interior $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, y su exterior $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

1.1. Polinomios de Szegő

Sea f una función 2π-periódica. Nuestro objetivo es aproximar la integral

$$I_\omega(f) := \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\omega(\theta)d\theta, \tag{1.1}$$

donde ω es una función peso definida en $(-\pi,\pi]$. Es decir, $\omega \geq 0$ en $(-\pi,\pi]$, es integrable en dicho intervalo y $\omega = 0$ solo en un subconjunto de $(-\pi,\pi]$ de medida nula. Podríamos considerar en general la integral con respecto a una medida positiva de Borel definida en $(-\pi,\pi]$, pero por simplicidad nos restringiremos al caso en el que ésta es absolutamente continua.

Las reglas de integración numérica usuales para la estimación de la integral dada en (1.1) son las bien conocidas *fórmulas de cuadratura* (f.c. en lo que sigue), que son expresiones de la forma

$$I_n(f) := \sum_{k=1}^{n} A_k f(\theta_k), \quad \theta_k \in (-\pi,\pi], \quad \forall k = 1,\dots,n, \quad \theta_i \neq \theta_j \quad \text{si} \quad i \neq j. \tag{1.2}$$

Es decir, estamos considerando combinaciones lineales de evaluaciones del integrando en ciertos puntos $\{\theta_k\}_{k=1}^n$ del intervalo de integración denominados *nodos*. Asimismo, a las cantidades $\{A_k\}_{k=1}^n$ se les denomina *pesos* de la f.c.

Por un polinomio trigonométrico entendemos una función de la forma

$$T_m(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} [a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)], \quad \theta \in (-\pi,\pi], \tag{1.3}$$

donde $\{a_k\}_{k=1}^m, \{b_k\}_{k=1}^m \subseteq \mathbb{C}$. Si $|a_m| + |b_m| > 0$ se dice que T_m tiene grado exacto m. Considerando la transformación $z = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$, que transforma biyectivamente el intervalo $(-\pi,\pi]$ y la circunferencia unidad $\mathbb{T}$, se sigue de las fórmulas de Euler y Moivre que

$$\cos(n\theta) = \frac{z^n + z^{-n}}{2} \quad \text{y} \quad \sin(n\theta) = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La función (1.3) puede ser expresada por tanto como

$$T_m(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{2}(z^k + z^{-k}) - \frac{b_k i}{2}(z^k - z^{-k}) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k - b_k i}{2} z^k + \frac{a_k + b_k i}{2} z^{-k}.$$

Tomando

$$c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{a_k - b_k i}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + b_k i}{2}, \quad k = 1,\dots,m,$$

podemos expresar la función (1.3) en potencias de z^k con $-m \leq k \leq m$ como

$$T_m(\theta) = L_n(z) = \sum_{k=-m}^{m} c_k z^k, \quad z = e^{i\theta}. \tag{1.4}$$

Nota 1.1 *Se sigue de lo anterior que T_m es un polinomio trigonométrico real de grado exacto m, sí y sólo sí, T_m se escribe en la forma (1.4) siendo $c_m \neq 0$ y $c_{-k} = \overline{c_k}$, para todo $k = 0,\dots,m$. Es decir, la sucesión de sus coeficientes es hermitiana.*

Definición 1.2 *Denotamos por* $\Lambda := span\{z^k : k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ *al espacio vectorial de polinomios de Laurent en la variable* z *con coeficientes complejos, al subespacio vectorial* $\Lambda_{-p,q} := span\{z^k : -p \leq k \leq q\}$ *con* $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *siendo* $\dim(\Lambda_{-p,q}) = p + q + 1$ *y* $\Lambda_n = \Lambda_{-n,n}$.

La relación anterior entre polinomios trigonométricos y polinomios de Laurent permite interpretar $I_\omega(f)$ como una integral definida en la circunferencia unidad:

$$I_{\tilde{\omega}}(f) := \int_{\mathbb{T}} f(z)\tilde{\omega}(z)dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\omega(\theta)d\theta, \tag{1.5}$$

donde $\widetilde{\omega}$ es la función peso en $\mathbb{T}$ inducida por la función peso ω definida en $(-\pi, \pi]$. Para la estimación numérica de la integral $I_{\tilde{\omega}}(f)$ podemos emplear de nuevo una fórmula de cuadratura, en la circunferencia unidad en este caso (véase [5]):

$$\tilde{I}_n(f) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(z_k), \quad z_k \in \mathbb{T}, \quad \forall k = 1, \ldots, n, \qquad z_i \neq z_j \quad \text{si} \quad i \neq j. \tag{1.6}$$

Consideremos el espacio $L^2_{\tilde{\omega}}(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \ / \ \int_{\mathbb{T}} |f(z)|^2 \tilde{\omega}(z)dz < \infty\}$ y el producto interior inducido

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\omega(\theta)d\theta = \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}\tilde{\omega}(z)dz, \quad f, g \in L^2_{\tilde{\omega}}(\mathbb{T}), \tag{1.7}$$

el cual cumple $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$, $\langle zf, g\rangle = \langle f, \overline{z}g\rangle = \langle f, \frac{g}{z}\rangle$ $\forall z \in \mathbb{T}$, e induce la norma $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

Las siguiente definición será de gran importancia en el desarrollo de los próximos resultados.

Definición 1.3 *Fijada una función peso* ω *sobre* $(-\pi, \pi]$ *y su función peso inducida* $\tilde{\omega}$ *sobre* $\mathbb{T}$*, definimos el* k*-ésimo momento trigonométrico como*

$$\mu_k := \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}\omega(\theta)d\theta = \int_{\mathbb{T}} z^{-k}\tilde{\omega}(z)dz = \langle 1, z^k\rangle, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

Obsérvese que la sucesión de momentos definida por (1.8) es hermitiana (véase la Nota 1.1), dado que se cumple

$$\overline{\mu_k} = \overline{\langle 1, z^k\rangle} = \langle z^k, 1\rangle = \int_{\mathbb{T}} z^k\tilde{\omega}(z)dz = \langle 1, z^{-k}\rangle = \mu_{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

La familia de polinomios de Szegő, introducida por primera vez en [11, Capítulo 11], se corresponde con la base $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $\mathbb{P}$ de polinomios mónicos al aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt con respecto al producto interior (1.7). Se cumple por tanto para todo $n \geq 1$ que $\rho_n \in \mathbb{P}_n \backslash \mathbb{P}_{n-1}$, $\rho_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$, $\rho_n(z) = z^n + \cdots$ y $\rho_0 \equiv 1$.

Nuestro próximo objetivo es obtener una ley de recurrencia para esta familia de polinomios ortogonales mónicos. Es inmediato comprobar que la propiedad $\langle zf, g\rangle = \langle f, \overline{z}g\rangle$ impide que la técnica usual empleada para obtener la ley de recurrencia a tres términos para funciones peso definidas en la recta real no sea ahora válida (véase por ejemplo [12], aunque realmente puede encontrarse en prácticamente cualquier libro de texto sobre Análisis Numérico). Para solventar este inconveniente se hace necesario introducir la siguiente

Definición 1.4 *Sea* $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *con* $\{a_k\}_{k=0}^{n} \subset \mathbb{C}$ *y* $a_n \neq 0$. *Se denomina polinomio recíproco de* P *al polinomio*

$$P^*(z) := z^n \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_{n-k}} z^k \in \mathbb{P}_n. \tag{1.9}$$

Nota 1.5 *Hay que hacer especial hincapié en cómo se ha definido el polinomio recíproco. Podemos ver* $*$ *como un operador de la forma*

$$\begin{aligned} * : \mathbb{P}_n &\to \mathbb{P}_n \\ P(z) &\mapsto P^*(z). \end{aligned}$$

Si fueramos más específicos con la notación, deberíamos denotar al operador por $*_n$. *Vamos a ver un ejemplo donde esto se vea claro. Sea* $P(z) = z^{n-1} + 2z^n \in \mathbb{P}_n \backslash \mathbb{P}_{n-1}$. *Luego su polinomio recíproco es* $P^*(z) = z^n(\frac{1}{z^{n-1}} + \frac{2}{z^n}) = 2 + z \in \mathbb{P}_1$. *Si aplicamos de nuevo el operador tenemos que* $(P^*)^*(z) = z^n(2 + \frac{1}{z}) = z^{n-1} + 2z^n = P(z)$. *Luego si queremos que el operador sea una involución, debe depender del grado del polinomio sobre el que está actuando, pues podríamos pensar que* $(P^*)^*(z) = 1+2z \neq P(z)$. *Para evitar abuso de notación, usaremos simplemente* *, *entendiendo siempre que se conoce el grado* n *del polinomio sobre el que este operador está actuando.*

Sabiendo que $\rho_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$, podemos deducir condiciones de ortogonalidad para ρ_n^*. En efecto, si $z \in \mathbb{T}$,

$$\langle \rho_n^*(z), z^t\rangle = \langle z^n \overline{\rho_n(z)}, z^t\rangle = \langle z^{n-t}, \rho_n(z)\rangle = \overline{\langle \rho_n(z), z^{n-t}\rangle} = 0$$

para todo $n - t \in \{0, \ldots, n-1\}$, o equivalentemente, para todo $t \in \{1, \ldots, n\}$. Concluímos que $\rho_n^*(z) \perp \{z, z^2, \ldots, z^n\}$. Estamos ya en condiciones de probar el siguiente

Teorema 1.6 (Ley de recurrencia de Szegő) *Sea* $\tilde{\omega}$ *una función peso definida en* $\mathbb{T}$. *Entonces, la correspondiente familia* $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ *de polinomios mónicos de Szegő satisface la siguiente ley de recurrencia*

$$\rho_{n+1}(z) = z\rho_n(z) + \delta_{n+1}\rho_n^*(z), \tag{1.10}$$

donde $\rho_0(z) \equiv 1$ *y* $\delta_{n+1} = -\frac{\langle z\rho_n(z),1\rangle}{\|\rho_n\|^2}$ *para todo* $n \geq 0$.

Demostración.- Dado que $\rho_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$, vemos que

$$\langle z\rho_n(z), z^t\rangle = \langle \rho_n(z), z^{t-1}\rangle = 0 \Leftrightarrow t-1 \in \{0,\ldots,n-1\} \Leftrightarrow t \in \{1,\ldots,n\}.$$

Es decir, $z\rho_n(z) \perp \{z, z^2, \ldots, z^n\}$. Ahora pueden ocurrir dos situaciones:

1. Si $z\rho_n(z) \perp \{1\} \Rightarrow \rho_{n+1} = z\rho_n(z)$.
2. Si $z\rho_n(z) \not\perp \{1\}$, definamos el polinomio $R_{n+1}(z) := z\rho_n(z) + \delta_{n+1}\rho_n^*(z)$ con δ_{n+1} una constante arbitraria. Se tiene que $R_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1} \backslash \mathbb{P}_n$, $R_{n+1} \perp \{z, z^2, \ldots, z^n\}$ y es mónico, por lo que es candidato a ser ρ_{n+1} tomando una constante δ_{n+1} apropiada imponiendo $R_{n+1} \perp \{1\}$. Así,

$$\begin{aligned}\langle R_{n+1}, 1\rangle &= \langle z\rho_n(z) + \delta_{n+1}\rho_n^*(z), 1\rangle = \langle z\rho_n(z), 1\rangle + \delta_{n+1}\langle \rho_n^*(z), 1\rangle \\ &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_{n+1} = -\tfrac{\langle z\rho_n(z),1\rangle}{\langle \rho_n^*(z),1\rangle}.\end{aligned}$$

Nótese que esta cantidad está bien definida, dado que

$$\langle \rho_n^*(z), 1\rangle = \langle z^n\overline{\rho_n(z)}, 1\rangle = \langle z^n, \rho_n(z)\rangle = \|\rho_n\|^2 > 0.$$

Podemos englobar los dos casos anteriores en uno, pues en ambos nos queda que $\rho_{n+1}(z) = z\rho_n(z) + \delta_{n+1}\rho_n^*(z) = z\rho_n(z) - \frac{\langle z\rho_n(z),1\rangle}{\|\rho_n\|^2}\rho_n^*(z)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Vemos que la recurrencia (1.10) es computable a partir de la correspondiente familia de momentos trigonométricos (1.8). Es decir, a partir de $\rho_0 \equiv 1$ podemos calcular la familia de polinomios recursivamente dado que ρ_{n+1} y δ_{n+1} dependen exclusivamente de ρ_n y δ_n. Incluso, podemos deducir una ley de recurrencia para el polinomio recíproco sin más que tomar * en (1.10). Esto permite expresar la ley de recurrencia de Szegő de forma matricial:

$$\begin{pmatrix}\rho_n(z)\\ \rho_n^*(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & \delta_n \\ \overline{\delta_n}z & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_{n-1}(z)\\ \rho_{n-1}^*(z)\end{pmatrix}, \quad n \geq 1, \quad \text{con} \quad \rho_0(z) = \rho_0^*(z) \equiv 1. \quad (1.11)$$

Uno de los resultados fundamentales en la Teoría de Polinomios de Szegő es el siguiente

Teorema 1.7 (Ceros de los polinomios de Szegő) *Para todo $n \geq 1$, los ceros del n-ésimo polinomio de Szegő ρ_n se encuentran en $\mathbb{D}$.*

Demostración.- Sea z_0 una raíz de ρ_n: $\rho_n(z) = (z - z_0)\pi(z)$ con $\pi \in \mathbb{P}_{n-1}$. Escribiendo $\rho_n(z) + z_0\pi(z) = z\pi(z)$, aplicando norma a ambos lados de esta igualdad, y teniendo en cuenta que $\langle \rho_n(z), \pi(z)\rangle = 0$ y $\| z\pi(z) \|^2 = \| \pi(z) \|^2$, se sigue que

$$\begin{aligned}\| \pi(z) \|^2 &= \|\rho_n(z) + z_0\pi(z)\|^2 \\ &= \langle \rho_n(z) + z_0\pi(z), \rho_n(z) + z_0\pi(z)\rangle \\ &= \langle \rho_n(z), \rho_n(z)\rangle + |z_0|^2 \langle \pi(z), \pi(z)\rangle \\ &= \|\rho_n(z)\|^2 + |z_0|^2 \|\pi(z)\|^2 .\end{aligned}$$

Se sigue por tanto que $0 < \|\rho_n(z)\|^2 = (1-|z_0|^2)\|\pi(z)\|^2 \Rightarrow 1 < |z_0|$, concluyendo así que $z_0 \in \mathbb{D}$.

□

Obsérvese que de (1.10) se sigue $\delta_n = \rho_n(0)$ para todo $n \geq 1$, y por tanto, del Teorema 1.7 deducimos una propiedad fundamental:

$$\delta_n \in \mathbb{D}, \quad \forall n \geq 1. \tag{1.12}$$

Definición 1.8 *A las cantidades $\delta_n = \rho_n(0)$, $\forall n \geq 0$ se les conoce como coeficientes de Verblunsky asociados a la función peso $\tilde{\omega}$. Estas cantidades pueden aparecer en la literatura, en función del contexto, definidos como parámetros de Szegő, de Schur o de reflexión. Véase [10].*

1.2. Para-ortogonalidad e invarianza

Volviendo a nuestro objetivo, hemos visto que podemos estimar numéricamente la integral (1.5) mediante una f.c. en la circunferencia unidad (1.6). Cuando tratamos con medidas soportadas en la recta real, es bien sabido que las f.c. con máximo grado de precisión polinómico son las conocidas *Fórmulas Gaussianas*, que tienen por nodos precisamente los ceros de los correspondientes polinomios ortogonales. La razón del por qué buscar exactitud en subespacios de polinomios radica precisamente en el *Teorema de Aproximación de Weierstrass*, que establece que los polinomios son densos en el espacio de las funciones continuas definidas en un intervalo $[a, b]$ con respecto a la norma uniforme.

Sin embargo, no es cierto en general que los polinomios sean densos en el espacio de las funciones continuas definidas en $\mathbb{T}$ con respecto a la norma uniforme, algo que sí verifican los polinomios de Laurent (véase [13]). Por esta razón en la construcción de f.c. de la forma (1.6) es usual buscar exactitud en subespacios de polinomios de Laurent, y no de polinomios ordinarios.

El Teorema 1.7 establece ahora una diferencia notable, en comparación con lo que sucede con las fórmulas Gaussianas: los ceros de los polinomios ortogonales (de Szegő) se encuentran en $\mathbb{D}$, es decir, no están en el soporte de la medida (función peso en nuestro caso), y no pueden servir por tanto como candidatos a nodos de la f.c. dada en (1.6). Para solucionar este inconveniente aparecen en la literatura los conceptos de *para-ortogonalidad* e *invarianza* que abordamos en esta sección.

Parece razonable que el primer paso sea considerar las f.c. en $\mathbb{T}$ de tipo interpolatorio, es decir, las que se obtienen integrando directamente el polinomio de Laurent interpolador a la función dada en el integrando en un conjunto de n nodos distintos fijados de antemano en $\mathbb{T}$. En ese caso, la f.c. que se obtiene será exacta en el subespacio de polinomios de Laurent al que pertenece este polinomio de Laurent interpolador. Más precisamente, sean $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $p + q = n + 1$ y consideremos el subespacio $\Lambda_{-p,q}$, cuya dimensión es también $n+1$. Dada una función f definida en $\mathbb{T}$ y n nodos distintos $\{z_i\}_{i=1}^{n}$, el polinomio de Laurent $L \in \Lambda_{-p,q}$ que interpola a f en este conjunto de nodos viene dado en su forma de Lagrange por

$$L(z) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k) l_k(z), \quad l_k(z) = \left(\frac{z_k}{z}\right)^p \cdot \frac{\pi_n(z)}{(z - z_k)\pi_n'(z_k)}, \quad \pi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k).$$

Dado que $f \approx L$ se sigue integrando que

$$I_{\tilde{\omega}}(f) \approx I_{\tilde{\omega}}(L) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(z_k), \quad \lambda_k = I_{\tilde{\omega}}(l_k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Dado que $f = L$ si $f \in \Lambda_{-p,q}$, esta f.c. que hemos obtenido, donde los nodos se han fijado de antemano y los pesos se han obtenido integrando exactamente los *polinomios de Laurent fundamentales de Lagrange* es exacta al menos en $\Lambda_{-p,q}$.

El segundo paso será elegir adecuadamente los nodos de la f.c. con el fin aumentar el dominio de validez de ésta. Como es bien sabido, un polinomio de grado exacto n con coeficientes reales tendrá sus n raíces reales o complejas conjugadas (simétricas con respecto a $\mathbb{R}$). Al tratar con polinomios evaluados en $\mathbb{T}$, como es nuestro caso, buscamos una propiedad similar, es decir, considerar polinomios que tengan sus ceros situados en la circunferencia unidad o que aparezcan distribuidos simétricamente con respecto a ésta: $\alpha \neq 0$ es raíz $\Leftrightarrow \frac{1}{\overline{\alpha}}$ es raíz. Para conseguir este objetivo necesitamos recordar la Definición 1.4 y establecer la siguiente

Definición 1.9 *Decimos que un polinomio p es τ-invariante (o simplemente invariante) con $\tau \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ si $p(z) = \tau p^*(z)$, $\forall z \in \mathbb{T}$. Si $\tau = 1$, decimos que p es autorrecíproco.*

Nota 1.10 *Aunque en la literatura es común encontrar en la Definición 1.9 la condición $\tau \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ (véase por ejemplo [5]), realmente sólo tiene sentido si $\tau \in \mathbb{T}$. En efecto, si $p(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$ con $a_n \neq 0$ y $p(z) = \tau p^*(z) = \tau \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{n-k}} z^k$, se tiene que $a_0 = \tau \overline{a_n}$ y $a_n = \tau \overline{a_0} = \tau \overline{\tau} \overline{\overline{a_n}} = |\tau|^2 a_n$. Es decir, $\tau \in \mathbb{T}$.*

Cualquier polinomio invariante es proporcional a un polinomio autorrecíproco, tal y como se establece en el siguiente resultado. Esta propiedad nos indica que el valor de $\tau \in \mathbb{T}$ no será influyente en algunos de los resultados que se establecerán posteriormente.

Proposición 1.11 *Sea P un polinomio τ-invariante. Entonces* $\exists\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *tal que* $Q(z) = \lambda P(z)$ *es un polinomio autorrecíproco.*

Demostración.- Definimos $Q(z) = \lambda P(z)$. Debemos buscar el valor de $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ apropiado para que Q sea autorrecíproco.

$$Q^*(z) = (\lambda P)^*(z) = \overline{\lambda} z^n \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \overline{\lambda} P^*(z) = \overline{\lambda}\tau P(z) = \frac{\overline{\lambda}\tau}{\lambda} Q(z).$$

Para que Q sea autorrecíproco, debemos imponer que $\frac{\overline{\lambda}\tau}{\lambda} = 1$. Para ello, escribimos $\lambda = |\lambda|\, e^{i\gamma}$, $\tau = e^{i\omega}$ con $|\lambda| > 0$ y $\gamma, \tau \in (-\pi, \pi]$. Entonces,

$$1 = \frac{\overline{\lambda}\tau}{\lambda} = \frac{|\lambda|\, e^{-i\gamma} e^{i\omega}}{|\lambda|\, e^{i\gamma}} = e^{i(\omega - 2\gamma)} \Rightarrow \omega - 2\gamma = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

De la Nota 1.10 se sigue que tomando $|\lambda| = 1$ y $\gamma = \frac{\omega}{2}$ concluímos que $Q(z) = e^{i\frac{\omega}{2}} P(z)$ es autorrecíproco.

$\square$

Un resultado trivial pero fundamental es el siguiente

Lema 1.12 *Si P es un polinomio invariante, entonces $P(0) \neq 0$.*

Demostración.- Si $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ con $a_n \neq 0$ es τ-invariante, con $\tau \in \mathbb{T}$, se sigue que $P(0) = \tau P^*(0) = \tau \overline{a_n} \neq 0$.

$\square$

Como $\alpha \neq 0$ es un cero de $p \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{\alpha}}$ es un cero de p^*, cualquier polinomio p que sea invariante cumplirá que sus ceros están en $\mathbb{T}$ o aparecerán en pares de la forma $\{\alpha, \frac{1}{\overline{\alpha}}\}$ con $\alpha \neq 0$. Es evidente que los polinomios de Szegő no pueden ser invariantes dado que sabemos del Teorema 1.7 que poseen todos sus ceros en $\mathbb{D}$. Igual ocurre con los polinomios recíprocos de Szegő: sus ceros están todos situados en $\mathbb{E}$ y por tanto no pueden ser invariantes.

Para conseguir nuestro objetivo necesitamos una definición adicional.

Definición 1.13 *Decimos que un polinomio $B_n \in \mathbb{P}_n \backslash \mathbb{P}_{n-1}$ es para-ortogonal con respecto a la función peso ω definida en $\mathbb{T}$ si*

$$B_n \perp \{z, \ldots, z^{n-1}\}, \quad y \quad \langle B_n(z), 1\rangle \cdot \langle B_n(z), z^n\rangle \neq 0.$$

Ni los polinomios de Szegő ni sus recíprocos pueden ser para-ortogonales, ya que $\rho_n \perp \{1\}$ y $\rho_n^* \perp \{z^n\}$. Sin embargo, una combinación lineal de ambos puede serlo. Si tomamos $B_n(z, \omega_n) = \rho_n(z) + \omega_n \rho_n^*(z)$, $\omega_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, vemos que cumple claramente las condiciones de la Definición 1.13. Impongamos que este polinomio sea además invariante:

$$B_n^*(z,\omega_n) = z^n\overline{(\rho_n(z)+\omega_n\rho_n^*(z))} = z^n\overline{\rho_n(z)} + \overline{\omega_n}z^n\overline{\rho_n^*(z)} = \rho_n^*(z) + \overline{\omega_n}\rho_n(z)$$

y $B_n(z,\omega_n) = \tau_n B_n^*(z,\omega_n)$ con $\tau_n \in \mathbb{T}$ implica

$$\rho_n(z) + \omega_n\rho_n^*(z) = \tau_n(\rho_n^*(z) + \overline{\omega_n}\rho_n(z)) \Leftrightarrow (1-\tau_n\overline{\omega_n})\rho_n(z) = (\tau_n - \omega_n)\rho_n^*(z).$$

Como los polinomios de Szegő tienen sus ceros en $\mathbb{D}$ y sus recíprocos los tienen en $\mathbb{E}$, esta igualdad solo se cumple si $1-\tau_n\overline{\omega_n} = \tau_n - \omega_n = 0$. Es decir, si $\omega_n = \tau_n \in \mathbb{T}$. En definitiva, hemos probado que los polinomios

$$B_n(z,\tau_n) = \rho_n(z) + \tau_n\rho_n^*(z), \quad \tau_n \in \mathbb{T}, \quad \forall n \geq 0 \tag{1.13}$$

son para-ortogonales y τ_n-invariantes, $\forall n \geq 0$. Obsérvese que en este caso se cumple en la Definición 1.13, $\langle B_n(z), 1\rangle \neq 0 \Leftrightarrow \langle B_n(z), z^n\rangle \neq 0$. Y de hecho, la expresión (1.13) los caracteriza (véase [5, Teorema 6.1]):

Teorema 1.14 *Sea $\tilde{\omega}$ una función peso definida en $\mathbb{T}$. Entonces $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios para-ortonormales con respecto a $\tilde{\omega}$, sí y sólo sí, para todo $n \geq 0$ existen constantes $c_n, \omega_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tales que $X_n(z) = c_n B_n(z,\omega_n)$. Si además, X_n es τ_n-invariante, entonces $\omega_n = \frac{\overline{c_n}}{c_n}\overline{\tau_n} \in \mathbb{T}$, $\forall n \geq 0$.*

Los polinomios $B_n(z,\tau_n)$ con $\tau_n \in \mathbb{T}$ se pueden expresar de manera alternativa en términos de ρ_{n-1} y ρ_{n-1}^* sin más que aplicar la ley de recurrencia de Szegő (1.10). En efecto, si $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{T}$, entonces

$$\begin{aligned} B_n(z,\tau_n) &= \rho_n(z) + \tau_n\rho_n^*(z) \\ &= z\rho_{n-1}(z) + \delta_n\rho_{n-1}^*(z) + \tau_n \cdot \left[\overline{\delta_n}z\rho_{n-1}(z) + \rho_{n-1}^*(z)\right] \\ &= \left[1+\tau_n\overline{\delta_n}\right]\left[z\rho_{n-1}(z) + \tfrac{\delta_n+\tau_n}{1+\tau_n\overline{\delta_n}}\rho_{n-1}^*(z)\right]. \end{aligned}$$

La última igualdad es posible dado que de (1.12), $\delta_n \in \mathbb{D}$ y $\tau_n \in \mathbb{T}$ implica que $\tau_n\overline{\delta_n} \in \mathbb{D}$ y por tanto $1+\tau_n\overline{\delta_n} \neq 0$. Se sigue que

$$B_n(z,\tau_n) = c_n\left[z\rho_{n-1}(z) + \tilde{\tau}_n\rho_{n-1}^*(z)\right], \quad c_n = 1+\tau_n\overline{\delta_n}, \quad \tilde{\tau}_n = \varphi_{\delta_n}(\tau_n), \tag{1.14}$$

donde denotamos por $\varphi_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ la transformada de Möbius asociada a $a \in \mathbb{D}$, que es un automorfismo de $\mathbb{T}$.

Disponemos ya de todos los ingredientes para caracterizar las *f.c. de Szegő*. Los siguientes resultados son esenciales: se localizan los ceros de polinomios para-ortogonales e invariantes y se utilizan éstos para construir f.c. con el máximo grado de precisión alcanzable (véase [5, Teorema 6.2 y Sección 7]).

Teorema 1.15 *Sea $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios para-ortogonales con respecto a la función peso $\tilde{\omega}$ y τ_n invariantes con $\tau_n \in \mathbb{T}$ para todo $n \geq 0$. Entonces los n ceros de B_n son simples y se encuentran en $\mathbb{T}$.*

Demostración.- Del Lema 1.12 sabemos que $B_n(0) \neq 0$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ los ceros de B_n de multiplicidad impar que se encuentran en $\mathbb{T}$, cada cero contado solo una vez (si no hay, consideraremos $p = 0$). Debemos probar que $p = n$.

Sabemos que $\xi \notin \mathbb{T}$ es un cero de B_n, sí y sólo sí, $1/\overline{\xi} \notin \mathbb{T}$ es un cero de B_n. Por tanto, los ceros de B_n que no se encuentran en $\mathbb{T}$ aparecen por pares $(\xi, 1/\overline{\xi})$. Y obviamente, $\xi \in \mathbb{T} \Leftrightarrow \xi = 1/\bar{\xi}$. Hay por tanto un número par de ceros de B_n (que podría ser cero) localizados en $\mathbb{T}$ que no están en $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$. Así, los ceros de B_n que no están en $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ aparecen también en pares $(\xi, 1/\overline{\xi})$: los ceros que no se encuentran en $\mathbb{T}$, los que están en $\mathbb{T}$ y tienen multiplicidad par, y los que coinciden con algún α_i restándole 1 a su multiplicidad. Denotamos a estos ceros por los $2q$ números $\left\{\xi_1, 1/\overline{\xi_1}, \xi_2, 1/\overline{\xi_2}, \ldots, \xi_q, 1/\overline{\xi_q}\right\}$. Si no hay tales ceros entonces $q = 0$. Se tiene por tanto que $p + 2q = n$ y como $B_n(0) \neq 0$, $\xi_j \neq 0$ y $1/\overline{\xi_j} \neq \infty$, $j = 1, \ldots, q$. Definimos los siguientes tres polinomios

$$\begin{aligned}
\mathit{\Gamma}_1(z) &:= \begin{cases} (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_p) & \text{si } p \geq 1, \\ 1 & \text{si } p = 0, \end{cases} \\
\mathit{\Gamma}_2(z) &:= \begin{cases} (z-\xi_1)(z-\xi_2)\cdots(z-\xi_q) & \text{si } q \geq 1, \\ 1 & \text{si } q = 0, \end{cases} \\
\mathit{\Gamma}_3(z) &:= z^q \mathit{\Gamma}_1(z).
\end{aligned}$$

Si suponemos $p < n$, y por tanto $q \geq 1$, y teniendo en cuenta que

$$\frac{z - \frac{1}{\overline{\xi_i}}}{z} = \frac{\overline{\xi_i} z - 1}{\overline{\xi_i} z} = -\frac{1 - \overline{\xi_i} z}{\overline{\xi_i} z} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{z} - \overline{\xi_i} = \frac{1 - \overline{\xi_i} z}{z} = \bar{z} - \overline{\xi_i} = \overline{(z - \xi_i)},$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle B_n(z), \mathit{\Gamma}_3(z)\rangle_\mu &= \langle B_n(z)\frac{1}{z^q}, \mathit{\Gamma}_1(z)\rangle_\mu \\
&= \langle \mathit{\Gamma}_1(z)\mathit{\Gamma}_2(z)(z - 1/\overline{\xi_1})(z - 1/\overline{\xi_2})\cdots(z - 1/\overline{\xi_q})\frac{1}{z^q}, \mathit{\Gamma}_1(z)\rangle_\mu \\
&= \langle \mathit{\Gamma}_1(z)\mathit{\Gamma}_2(z)(-1)^q \frac{(1-\overline{\xi_1}z)(1-\overline{\xi_2}z)\cdots(1-\overline{\xi_q}z)}{\overline{\xi_1}\overline{\xi_2}\cdots\overline{\xi_q}z^q}, \mathit{\Gamma}_1(z)\rangle_\mu \\
&= \frac{(-1)^q}{\overline{\xi_1}\overline{\xi_2}\cdots\overline{\xi_q}}\langle \mathit{\Gamma}_1(z)\mathit{\Gamma}_2(z)\frac{(1-\overline{\xi_1}z)(1-\overline{\xi_2}z)\cdots(1-\overline{\xi_q}z)}{z^q}, \mathit{\Gamma}_1(z)\rangle_\mu \\
&= \frac{(-1)^q}{\overline{\xi_1}\overline{\xi_2}\cdots\overline{\xi_q}}\langle \mathit{\Gamma}_1(z)\mathit{\Gamma}_2(z), \mathit{\Gamma}_1(z)(z-\xi_1)(z-\xi_2)\cdots(z-\xi_q)\rangle_\mu \\
&= \frac{(-1)^q}{\overline{\xi_1}\overline{\xi_2}\cdots\overline{\xi_q}}\|\mathit{\Gamma}_1(z)\mathit{\Gamma}_2(z)\|^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Dado que $q \geq 1$ se cumple que el grado de $\mathit{\Gamma}_3$ es $p + q < n$ y $\mathit{\Gamma}_3(0) = 0$. Por tanto, $\mathit{\Gamma}_3(z) \in \mathit{span}\{z, \ldots, z^{n-1}\}$, y esto implica, por las condiciones de para-ortogonalidad, que $\langle B_n, \mathit{\Gamma}_3\rangle_\mu$=0. Se concluye así que $p = n$.

$\square$

Teorema 1.16 *Sea $\tilde{I}_n(f)$ la f.c. dada en (1.6) y $\pi_n = \prod_{i=1}^{n}(z-z_i)$ el polinomio nodal. $\tilde{I}_n(f)$ es exacta en $\Lambda_{-(n-1),n-1}$, sí y solo sí,*

1. *$\tilde{I}_n(f)$ es de tipo interpolatorio: $\tilde{I}_n(f) = I_{\tilde{\omega}}(f)$ para todo $f \in \Lambda_{-p,q}$ con $p,q \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ verificando $p+q+1=n$.*
2. *π_n es un polinomio para-ortogonal e invariante con respecto a $\tilde{\omega}$.*

Demostración.- "$\Rightarrow$" Es evidente que $\Lambda_{-p,q} \subset \Lambda_{-(n-1),n-1}$. Veamos que π_n es para-ortogonal e invariante con respecto a $\tilde{\omega}$. Si $1 \leq j \leq n-1$ y $z = e^{i\theta}$,

$$\langle \pi_n(z), z^j\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \pi_n(z)z^{-j}\omega(\theta)d\theta = I_{\tilde{\omega}}(\pi_n(z)z^{-j}) = \tilde{I}_n(\pi_n(z)z^{-j}) = 0,$$

dado que $\pi_n(z)z^{-j} \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$. Como los polinomios de Szegő y sus recíprocos tienen sus ceros en $\mathbb{D}$ y en $\mathbb{E}$ respectivamente, se sigue que $\langle \pi_n(z), 1\rangle_\mu \neq 0$ y $\langle \pi_n(z), z^n\rangle_\mu \neq 0$. π_n es por tanto para-ortogonal. Además, teniendo en cuenta que los ceros de π_n están en $\mathbb{T}$, los ceros de su recíproco son los mismos, cumpliéndose $\pi_n^*(z) = \tau\pi_n(z)$ con $\tau = (-1)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} z_i \in \mathbb{T}$.

"$\Leftarrow$" Como la f.c. es de tipo interpolatorio, exacta en $\Lambda_{-p,q}$, tenemos que $\lambda_j = \tilde{I}_n(l_j) = I_{\tilde{\omega}}(l_j)$ con $j = 1,\ldots,n$, siendo l_j el j-ésimo polinomio de Laurent fundamental de Lagrange. Sea $L \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ y definamos $\Gamma(z) = L(z) - \sum_{i=1}^{n} L(z_i)l_i(z)$. Se cumple $\Gamma \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ y $\Gamma(z_i) = 0$ para $i = 1,\ldots,n$, por lo que $A(z) := z^{n-1}\Gamma(z) \in \mathbb{P}_{2n-2}$ y $A(z_i) = 0$ para $i = 1,\ldots,n$. Así existe un polinomio $S \in \mathbb{P}_{n-2}$ tal que $\Gamma(z) = \frac{A(z)}{z^{n-1}} = \frac{\pi_n(z)S(z)}{z^{n-1}}$. Observamos que si $S(z) = \sum_{k=0}^{n-2} s_k z^k$, entonces

$$I_{\tilde{\omega}}(\Gamma(z)) = I_{\tilde{\omega}}\left(\pi_n(z)\cdot\sum_{j=0}^{n-2}\frac{s_j}{z^{n-1-j}}\right) = \sum_{j=0}^{n-2}\langle \pi_n(z), \overline{s}_j z^{n-1-j}\rangle = 0$$

por las condiciones de para-ortogonalidad de π_n, lo cual implica

$$\begin{aligned} I_{\tilde{\omega}}(L(z)) &= I_{\tilde{\omega}}\left(\Gamma(z) + \sum_{i=1}^{n} L(z_i)l_i(z)\right) = I_{\tilde{\omega}}(\Gamma(z)) + I_{\tilde{\omega}}\left(\sum_{i=1}^{n} L(z_i)l_i(z)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} L(z_i)I_{\tilde{\omega}}(l_i(z)) = \tilde{I}_n(L(z)). \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.17 *No existe una f.c. de n puntos de la forma (1.6) para $I_{\tilde{\omega}}(f)$ dada por (1.5) que sea exacta ni en $\Lambda_{-n,n-1}$ ni en $\Lambda_{-(n-1),n}$.*

Demostración.- Supongamos por reducción al absurdo que existe una f.c. $\tilde{I}_n(f)$ de n puntos exacta en $\Lambda_{-(n-1),n}$ para $I_{\tilde{\omega}}(f)$. Si $\pi_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$ es el polinomio nodal se sigue que $z^{-k}\pi_n(z) \in \Lambda_{-(n-1),n}$ con $0 \leq k \leq n-1$ y por tanto,

$$\langle \pi_n(z), z^k \rangle = I_{\tilde{\omega}}(z^{-k}\pi_n(z)) = \tilde{I}_n(z^{-k}\pi_n(z)) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Debe darse entonces $\pi_n = \rho_n$, por ser un polinomio mónico de grado n ortogonal a $\mathbb{P}_{n-1}$, pero esto es imposible porque los ceros de ρ_n se encuentran en $\mathbb{D}$ (Teorema 1.7).

De manera análoga, si suponemos que existe una f.c. $\tilde{I}_n(f)$ de n puntos exacta en $\Lambda_{-n,n-1}$ para $I_{\tilde{\omega}}(f)$, como $z^k\overline{\pi_n(z)} \in \Lambda_{-n,n-1}$ para $0 \leq k \leq n-1$, se llega al absurdo $\pi_n = \rho_n$ debido a

$$\langle z^k, \pi_n(z) \rangle = I_{\tilde{\omega}}(z^k\overline{\pi_n(z)}) = \tilde{I}_n(z^k\overline{\pi_n(z)}) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

$\square$

Las f.c. de Szegő caracterizadas en el Teorema 1.16 poseen pesos positivos, algo que es de suma importancia por razones de convergencia y estabilidad. En efecto, si tomamos $f_i = l_i \in \Lambda_{-p,q}$, para todo $i = 1, \ldots, n$ se sigue que

$$0 < I_{\tilde{\omega}}(|f_i|^2) = \tilde{I}_n(|f_i|^2) = \lambda_i,$$

pues $\overline{f_i} \in \Lambda_{-q,p}$ y $|f|^2 = f_i \cdot \overline{f_i} \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ $(p+q+1=n)$.

Observamos dos claras diferencias en comparación con las f.c. Gaussianas para la estimación de integrales con respecto a medidas positivas de Borel soportadas en la recta real: disponemos de una familia uniparamétrica de f.c. (pues para cada parámetro $\tau_n \in \mathbb{T}$ del polinomio para-ortogonal $B_n(z, \tau_n)$, que es el polinomio nodal, disponemos de una f.c.) y éstas son exactas en $\Lambda_{-(n-1),n-1}$, cuya dimensión es $2n-1$ (siendo el número de parámetros a determinar $2n$). No obstante, en [9] se probó el siguiente resultado donde se establece un dominio de validez de dimensión $2n$ para este tipo de reglas de integración numérica:

Teorema 1.18 *Sea $\tilde{I}_n(f)$ una f.c. de Szegő de n puntos $(n \geq 1)$ con polinomio nodal $B_n = B_n(z, \tau_n) = \rho_n(z) + \tau_n\rho_n^*(z)$, $\tau_n \in \mathbb{T}$ y $\delta_n = \rho_n(0)$ el n-ésimo coeficiente de Verblunsky con respecto a $\tilde{\omega}$. Entonces se cumple*

$$\tilde{I}_n(f) = I_{\tilde{\omega}}(f) \quad \forall f \in \Lambda_{-(n-1),n-1} \quad y \quad f(z) := \frac{z^n}{\delta_n + \tau_n} - \frac{1}{(\overline{\delta_n + \tau_n})z^n}.$$

Finalizamos este capítulo con una definición que será de utilidad posteriormente (Teorema 3.19). En la Teoría de Polinomios Ortogonales en la Recta Real es bien sabido el papel que juegan los polinomios cuasi-ortogonales, especialmente en la construcción de f.c. con grados de precisión intermedios de entre tipo interpolatorio y Gaussianas (Teorema de Jacobi). Más concretamente, decimos que un polinomio p_n de grado exacto n es cuasi-ortogonal de orden exacto s $(0 \leq s \leq n)$ con respecto a una medida positiva, o función peso dada, si cumple $p_n \perp \mathbb{P}_{n-1-s}$ y no es ortogonal a x^{n-s}. Aquí estamos entendiendo $\mathbb{P}_{-1} = \emptyset$ y de este modo, un polinomio cuasi-ortogonal de orden 0 es un polinomio ortogonal.

Por lo que hemos estudiado en este primer capítulo parece razonable pensar que el concepto análogo cuando trabajamos en la circunferencia unidad sea considerar cuasi-paraortogonalidad, y no cuasiortogonalidad, dado que hemos visto que el papel análogo al que juegan los polinomios ortogonales en la recta real lo juegan en la circunferencia unidad los polinomios para-ortogonales, y no los polinomos ortogonales (o de Szegő). Como nos interesan además polinomios que sean invariantes, y dado que si un polinomio p_n de grado exacto n es invariante y es ortogonal a z^s, será automáticamente ortogonal a z^{n-s}, la definición adecuada que debe darse para introducir condiciones de cuasi-paraortogonalidad debe implicar la pérdida de condiciones de ortogonalidad "centrosimétricas". La siguiente definición fue introducida por primera vez en la literatura en [1].

Definición 1.19 *El polinomio invariante $B_{n,2l+1} \in \mathbb{P}_n \backslash \mathbb{P}_{n-1}$ se dice que es cuasi-paraortogonal de orden exacto $2l+1$ si es ortogonal a*

$$\mathit{span}\left\{z^k : k = l+1 \ldots, n-l-1\right\} \quad \mathit{con} \quad 0 \leq l \leq E\left[\frac{n}{2}\right] - 1,$$

siendo $E[\cdot]$ la función parte entera y $\langle B_{n,2l+1}, z^l\rangle \cdot \langle B_{n,2l+1}, z^{n-l}\rangle \neq 0$.

Obsérvese que en la definición anterior, los polinomios para-ortogonales se corresponden con $l = 0$.

Nota 1.20 *Al igual que en el caso $l = 0$, se cumple que si $B_{n,2l+1}$ es invariante, entonces $\langle B_{n,2l+1}, z^l\rangle \neq 0 \iff \langle B_{n,2l+1}, z^{n-l}\rangle \neq 0$, luego en la Definición 1.19 basta decir que $B_{n,2l+1}$ no es ortogonal a z^l.*

2

Polinomios trigonométricos de grado y semigrado entero

En el Capítulo 1 hemos visto una relación existente entre polinomios trigonométricos y polinomios de Laurent a través de la transformación $z = e^{i\theta}$. De este modo, el problema de estimar numéricamente una integral con respecto a una medida positiva de Borel definida en $(-\pi, \pi]$ mediante una f.c. se ha podido transformar en uno equivalente en la circunferencia unidad, siendo necesario por tanto abordar los conceptos de ortogonalidad en la circunferencia unidad (polinomios de Szegő), para-ortogonalidad e invarianza.

El objetivo del resto de esta Memoria será unificar la Teoría de los Sistemas Bi-ortogonales y Polinomios Trigonométricos, introducidos por Szegő en [12], con el propósito de construir y caracterizar f.c. exactas en espacios de funciones trigonométricas. Para ello, presentaremos en este capítulo tales espacios de funciones, y analizaremos tanto algunas de sus propiedades algebraicas como ciertos problemas de interpolación que serán necesarios para nuestros objetivos.

2.1. Espacios de funciones trigonométricas

Consideremos el espacio de funciones

$$\mathcal{T}_n^\gamma := \operatorname{span}\left\{\cos(k+\gamma)\theta, \sin(k+\gamma)\theta\right\}_{k=0}^{n} \quad , \; \gamma \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}, \tag{2.1}$$

que verifica $\dim\left(\mathcal{T}_n^\gamma\right) = 2(n+\gamma)+1$, y sea

$$\mathcal{T}^\gamma := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n^\gamma.$$

En lo que sigue escribiremos $T_n \in \mathcal{T}_n^\gamma(\mathbb{C})$ cuando los coeficientes son complejos y en general $T_n \in \mathcal{T}_n^\gamma$ cuando son reales. Cuando $T_n \in \mathcal{T}_n^\gamma(\mathbb{C}) \backslash \mathcal{T}_{n-1}^\gamma(\mathbb{C})$ diremos que T_n tiene grado exacto n.

Con esta notación unificada recuperamos para $\gamma = 0$ los polinomios trigonométricos usuales dados en (1.3) mientras que $\gamma = \frac{1}{2}$ se corresponde con lo que en la literatura se conocen como *polinomios trigonométricos de semigrado entero* (véase por ejemplo [8]). Como se cumple la propiedad de simetría $T_n^{(\gamma)}(\theta) = (-1)^{2\gamma} T_n^{(\gamma)}(\theta + 2\pi)$ nos restringiremos a lo largo de esta Memoria a intervalos de longitud 2π, digamos $-\pi < \theta \leq \pi$.

Procedemos a continuación a generalizar la relación entre polinomios trigonométricos (1.3) y polinomios de Laurent (1.4) que se llevó a cabo en el Capítulo 1 para el caso $\gamma = 0$. La Definición 1.2 se generaliza según

$$\Lambda_n^\gamma := \mathrm{span}\left\{z^{-(n+\gamma)}, \ldots, z^{n+\gamma}\right\}, \quad n \geq 0, \quad \dim(\Lambda_n^\gamma) = \dim(\mathcal{T}_n^\gamma) = 2(n+\gamma)+1 \tag{2.2}$$

y denotaremos

$$\Lambda^\gamma := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n^\gamma = \mathbb{C}[z^{1-\gamma}, z^{\gamma-1}]. \tag{2.3}$$

Para generalizar la Nota 1.1 diremos que $L \in \Lambda_n^\gamma$ es Hermitiano si su sucesión de coeficientes lo es, lo que nos permite definir

$$(\Lambda_n^\gamma)^H := \{L \in \Lambda_n^\gamma \ : L \text{ Hermitiano}\}.$$

Sea

$$T_n^{\frac{1}{2}}(\theta) = \sum_{k=0}^{n}[a_k cos((k+\frac{1}{2})\theta) + b_k sin((k+\frac{1}{2})\theta)] \in \mathcal{T}_n^{\frac{1}{2}}(\mathbb{C})$$

y consideremos la transformación $z = e^{i\theta}$. Entonces

$$z^{k+\frac{1}{2}} = e^{(k+\frac{1}{2})i\theta} = cos((k+\tfrac{1}{2})\theta) + isin((k+\tfrac{1}{2})\theta),$$

$$z^{-(k+\frac{1}{2})} = e^{-(k+\frac{1}{2})i\theta} = cos((k+\tfrac{1}{2})\theta) - isin((k+\tfrac{1}{2})\theta),$$

por lo que $\cos\left((k+\frac{1}{2})\theta\right) = \frac{z^{k+\frac{1}{2}}+z^{-(k+\frac{1}{2})}}{2}$, $\sin\left((k+\frac{1}{2})\theta\right) = \frac{z^{k+\frac{1}{2}}-z^{-(k+\frac{1}{2})}}{2i}$ y así,

$$\begin{aligned} T_n^{\frac{1}{2}}(\theta) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}\left[a_k \frac{z^{k+\frac{1}{2}}+z^{-(k+\frac{1}{2})}}{2} + b_k \frac{z^{k+\frac{1}{2}}-z^{-(k+\frac{1}{2})}}{2i}\right] \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}\left[z^{k+\frac{1}{2}}\frac{a_k-ib_k}{2} + z^{-(k+\frac{1}{2})}\frac{a_k+ib_k}{2}\right] \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}\left[c_{k+1}z^{k+\frac{1}{2}} + c_{-k-1}z^{-(k+\frac{1}{2})}\right] \\ &= L_n(z) \in \Lambda_n^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Hemos probado por tanto el siguiente

Lema 2.1 *Para todo $T_n \in \mathcal{T}_n^\gamma(\mathbb{C})$ existe $L_n \in \Lambda_n^\gamma$ tal que $T_n(\theta) = L_n(e^{i\theta})$. Además, T_n es real, sí y sólo sí, $L_n \in (\Lambda_n^\gamma)^H$ y como consecuencia,*

$$\mathcal{T}_n^\gamma = \left\{T(\theta) : T(\theta) = L(e^{i\theta})\ , L \in (\Lambda_n^\gamma)^H\right\}.$$

El siguiente resultado es consecuencia directa de lo anterior y relaciona polinomios trigonométricos de grado y semigrado entero con polinomios autorrecíprocos, introducidos en la Definición 1.9 (recordamos de la Proposición 1.11 que los polinomios invariantes son esencialmente autorrecíprocos).

Proposición 2.2 *$T_n \in \mathcal{T}_n^\gamma \setminus \mathcal{T}_{n-1}^\gamma$ con $\gamma \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ es real, si y sólo si, $T_n(\theta) = L_n(e^{i\theta}) = \frac{P(z)}{z^{n+\gamma}}$ con $P \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)} \setminus \mathbb{P}_{2(n+\gamma)-1}$ un polinomio autorrecíproco.*

Demostración.- Del Lema 2.1 se sigue que

$$T_n(\theta) = L_n(e^{i\theta}) \quad \text{con} \quad L_n \in (\Lambda_n^\gamma)^H \setminus \left(\Lambda_{n-1}^\gamma\right)^H \quad \text{y} \quad z = e^{i\theta}.$$

Ahora bien, sabemos que:

- Si $\gamma = 0$ entonces $T_n(\theta) = \frac{P_{2n}(z)}{z^n}$ con
$$P_{2n}(z) = c_{-n} + c_{-n+1}z + \cdots + c_0 z^n + \cdots + c_n z^{2n}$$
y T_n es real, sí y sólo sí, $c_{-k} = \overline{c_k}$, para todo $k = 0, \ldots, n$.
- Si $\gamma = \frac{1}{2}$ entonces $T_n(\theta) = \frac{P_{2n+1}(z)}{z^{n+\frac{1}{2}}}$ con
$$P_{2n+1}(z) = c_{-n-1} + c_{-n}z + \cdots + c_{-1}z^n + c_1 z^{n+1} \cdots + c_{n+1}z^{2n+1}$$
y T_n es real, sí y sólo sí, $c_{-k} = \overline{c_k}$, para todo $k = 1, \ldots, n$.

Se concluye en ambos casos que $T_n \in \mathcal{T}_n^\gamma \setminus \mathcal{T}_{n-1}^\gamma$ es real, si y sólo si, $P \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)} \setminus \mathbb{P}_{2(n+\gamma)-1}$ es un polinomio autorrecíproco.

□

La relación establecida en la Proposición 2.2 permite deducir propiedades para polinomios trigonométricos de grado y semigrado entero a partir de propiedades que cumplan polinomios autorrecíprocos. Así podemos establecer el siguiente primer resultado sobre la distribución de ceros de estas funciones trigonométricas. Cabe indicar que la demostración que presentamos a continuación es similar, pero alternativa a la establecida en [2, Theorem 2.4].

Proposición 2.3 *Sea $T_n \in \mathcal{T}_n^\gamma \setminus \mathcal{T}_{n-1}^\gamma$ real. Entonces, T_n tiene exactamente $2(n+\gamma)$ ceros con parte real en $(-\pi, \pi]$ y las raíces complejas aparecen en pares conjugados.*

Demostración.- De la Proposición 2.2 podemos escribir $T_n(\theta) = L_n(e^{i\theta}) = \frac{P(z)}{z^{n+\gamma}}$ con $P \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)} \setminus \mathbb{P}_{2(n+\gamma)-1}$ un polinomio autorrecíproco. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, P tiene exactamente $2(n+\gamma)$ ceros y por el Lema 1.12, $z = 0$ no puede ser uno de ellos. L_n tiene por tanto los mismos ceros que P. Sea $\zeta = |\zeta|\, e^{i\theta}$ una raiz de L_n con $\theta \in (-\pi, \pi]$ y $|\zeta| > 0$. Entonces se tiene que

$$0 = L_n(\zeta) = L_n\left(|\zeta|\, e^{i\theta}\right) = L_n\left(e^{ln|\zeta|}e^{i\theta}\right) = L_n\left(e^{i(\theta - iln|\zeta|)}\right) = T_n(\theta - iln\,|\zeta|).$$

Luego T_n tiene exactamente $(n+\gamma)$ raíces con parte real en $(-\pi,\pi]$. Debemos probar que estas aparecen en pares complejas conjugadas. Sea $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$ una raíz de T_n y veamos que $T_n(\overline{\alpha})=0$. Observamos que $T_n(\overline{\alpha})=T_n(\alpha_1-i\alpha_2)=L_n(e^{i(\alpha_1-i\alpha_2)})=L_n(e^{\alpha_2}e^{i\alpha_1})$.

1. Si $\gamma=0$, entonces:

$$L_n(e^{\alpha_2}e^{i\alpha_1})=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{k\alpha_2}e^{ik\alpha_1}=\overline{\sum_{k=-n}^{n}c_{-k}e^{k\alpha_2}e^{-ik\alpha_1}}$$

$$=\overline{\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{-k\alpha_2}e^{ik\alpha_1}}=\overline{L_n(e^{-\alpha_2}e^{i\alpha_1})}=\overline{T_n(\alpha)}=0.$$

2. Si $\gamma=\frac{1}{2}$, entonces:

$$L_n(e^{\alpha_2}e^{i\alpha_1})=\sum_{k=0}^{n}\left[c_{k+1}e^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_2}e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_1}+c_{-k-1}e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_2}e^{-i\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_1}\right]$$

$$=\overline{\sum_{k=0}^{n}\left[c_{-k-1}e^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_2}e^{-i\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_1}+c_{k+1}e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_2}e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_1}\right]}$$

$$=\overline{L_n(e^{-\alpha_2}e^{i\alpha_1})}=\overline{T_n(\alpha)}=0.$$

En ambos casos llegamos a que $\overline{\alpha}$ es raíz de T_n y por tanto, si T_n es real, las raíces son reales o aparecen en pares complejos conjugados.

$\square$

Nota 2.4 *De la demostración del resultado anterior se sigue el siguiente resultado bien conocido para polinomios ordinarios: $T_n\in\mathcal{T}_n^{\gamma}\setminus\mathcal{T}_{n-1}^{\gamma}$ es real, si y solo si, se cumple $T_n(\alpha)=0\Leftrightarrow T_n(\overline{\alpha})=0$.*

La siguiente propiedad que vamos a establecer para polinomios trigonométricos de grado y semigrado entero, a partir de polinomios ordinarios autorrecíprocos, es el correspondiente *Teorema del Factor*.

Proposición 2.5 *Sean $\{\theta_k\}_{k=1}^{2(n+\gamma)}\subset(-\pi,\pi]$ y $T(\theta)=\prod_{k=1}^{2(n+\gamma)}sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)$. Entonces, $T\in\mathcal{T}_n^{\gamma}$.*

Demostración.- Haciendo $z=e^{i\theta}$ tenemos que

$$T(\theta)=\prod_{k=1}^{2(n+\gamma)}sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)=\prod_{k=1}^{2(n+\gamma)}\frac{e^{\frac{(\theta-\theta_k)}{2}i}-e^{-\frac{(\theta-\theta_k)}{2}i}}{2i}$$

$$=\prod_{k=1}^{2(n+\gamma)}\frac{z^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\theta_k}{2}i}-z^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta_k}{2}i}}{2i}=\prod_{k=1}^{2(n+\gamma)}\frac{z^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\theta_k}{2}i}}{2i}\left(z-e^{\theta_k i}\right)$$

$$=\frac{z^{-n-\gamma}}{(2i)^{2(n+\gamma)}}e^{-\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{2(n+\gamma)}\theta_k}\prod_{k=1}^{2(n+\gamma)}\left(z-e^{\theta_k i}\right)=\frac{P(z)}{z^{n+\gamma}},$$

donde $P\in\mathbb{P}_{2(n+\gamma)}\setminus\mathbb{P}_{2(n+\gamma)-1}$. Luego $T(\theta)=\frac{P(z)}{z^{n+\gamma}}=L_n(z)$ con $L_n\in\Lambda_n^{\gamma}$ y podemos concluir que $T\in\mathcal{T}_n^{\gamma}$.

□

También es posible probar Teoremas de la División Euclídea para polinomios trigonométricos de grado y semigrado entero. Así por ejemplo, en [8] se prueba el siguiente

Teorema 2.6 *Sea $T_{2n} \in \mathcal{T}_{2n}^0$. Entonces, T_{2n} puede ser representado de forma única como*

$$T_{2n}(\theta) = A_{n+\frac{1}{2}}(\theta)B_{n-\frac{1}{2}}(\theta) + R_n(\theta),$$

donde $A_{n+\frac{1}{2}} \in \mathcal{T}_n^{\frac{1}{2}} \backslash \mathcal{T}_{n-1}^{\frac{1}{2}}$, $B_{n-\frac{1}{2}}\mathcal{T}_{n-1}^{\frac{1}{2}}$ y $R_n \in \mathcal{T}_n^0$.

2.2. Interpolación en espacios de funciones trigonométricas

Como ya se ha comentado anteriormente, el objetivo principal de esta Memoria es la caracterización y construcción de f.c. de la forma (1.2) para la estimación de la integral dada en (1.1) con f un integrando 2π-periódico que sean exactas en espacios de polinomios trigonométricos. Al igual que sucede con las f.c. Gaussianas y las f.c. de Szegő, resultará fundamental dar respuesta a ciertos problemas de intepolación que permitan definir las f.c. trigonométricas de tipo interpolatorio (con nodos distintos localizados en $(-\pi, \pi]$ y prefijados de antemano), para a continuación plantearse buscar nodos apropiados que permitan incrementar el dominio de validez de éstas.

Al igual que hicimos al final de la sección anterior, podemos de nuevo hacer uso de la relación entre polinomios trigonométricos de grado y semigrado entero y polinomios autorrecíprocos dada en la Proposición 2.2 para dar respuesta a tales cuestiones. El primero de estos resultados se ha probado en [2, Theorem 3.1] para el caso particular $\gamma = 0$ y solo se enuncia para $\gamma \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ en [3]. Procedemos a establecer la demostración general.

Teorema 2.7 *Dado un conjunto de nodos distintos $\{\theta_k\}_{k=1}^{2(n+\gamma)+1} \subset (-\pi, \pi]$ y $\{y_k\}_{k=1}^{2(n+\gamma)+1} \subset \mathbb{R}$ con $\gamma \in \{0, \frac{1}{2}\}$, existe un único $T_n \in \mathcal{T}_n^\gamma$ tal que*

$$T_n(\theta_k) = y_k, \quad k = 1, \ldots, 2(n+\gamma)+1. \tag{2.4}$$

Demostración.- Sea $T_n(\theta) = L_n(e^{i\theta})$ con $L_n \in \Lambda_n^{\gamma,H}$. Como L_n es hermitiano, se tiene que $L_n(e^{i\theta}) = L_n(z) = \frac{P(z)}{z^{n+\gamma}}$, donde $P \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)} \setminus \mathbb{P}_{2(n+\gamma)-1}$ un polinomio autorrecíproco. Por tanto, (2.4) se reduce al siguiente problema de interpolación tomando $z_k = e^{i\theta_k}$ para $k = 1, \ldots, 2(n+\gamma)+1$:

$$P(z_k) = L_n(z_k)z_k^{n+\gamma} = L_n(e^{i\theta_k})z_k^{n+\gamma} = y_k z_k^{n+\gamma}, \quad \forall k = 1, \ldots, 2(n+\gamma)+1. \tag{2.5}$$

Por la teoría de interpolación para polinomios ordinarios sabemos que existe un único polinomio P que cumple (2.5). Lo que nos faltaría ver es que sea autorrecíproco. Para todo $k = 1, \ldots, 2(n+\gamma)+1$ se tiene que

$$P^*(z_k) = z_k^{2(n+\gamma)} \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z_k}}\right)} = z_k^{2(n+\gamma)} \overline{P(z_k)} = z_k^{2(n+\gamma)} \overline{y_k z_k^{n+\gamma}} = y_k z_k^{n+\gamma},$$

luego P^* interpola a los nodos al igual que P. Por unicidad, $P^* = P$, es decir, P es autorrecíproco, y podemos concluir que existe un polinomio trigonométrico T_n que satisface (2.4). La unicidad del polinomio trigonométrico es directa por la unicidad del polinomio autorrecíproco asociado.

□

Como consecuencia directa del Teorema 2.7 podemos probar el siguiente resultado que será esencial en el próximo capítulo para construir sistemas biortogonales de funciones trigonométricas.

Corolario 2.8 *El conjunto de funciones* $\mathcal{S} = \{cos\left[(k+\gamma)\,\theta\right], sin\left[(k+\gamma)\,\theta\right]\}_{k=0}^{n}$ *es linealmente independiente, para todo* $n \geq 0$.

Demostración.- Sean $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ con $k = 0, \ldots, n$ tales que

$$T(\theta) = a_0 cos\,(\gamma\theta) + b_0 sin\,(\gamma\theta) + \cdots + a_n cos\left[(n+\gamma)\,\theta\right] + b_n sin\left[(n+\gamma)\,\theta\right] = 0.$$

Es evidente que T_n resuelve el problema de interpolación $T_n(\theta_k) = 0$ con $\{\theta_k\}_{k=1}^{2(n+\gamma)+1} \subset (-\pi, \pi]$ arbitrarios verificando $\theta_i \neq \theta_j$ para todo $i \neq j$. Por el Teorema 2.7 tomando $y_k = 0$ para todo $k = 1, \ldots, 2(n+\gamma)+1$ debe darse $T_n \equiv 0$, dado que el problema admite solución única. Es decir, $a_k = b_k = 0$ para todo $k = 0, \ldots, n$. Con esto concluímos que $\mathcal{S}$ es linealmente independiente.

□

Del Teorema 2.7 hemos probado la existencia y la unicidad del polinomio trigonométrico de grado o semigrado entero que interpole un conjunto de nodos dados. El interpolante será un polinomio trigonométrico si el conjunto de nodos es impar mientras que será un polinomio trigonométrico de semigrado entero si el conjunto de nodos es par. Además, la demostración presentada establece un procedimiento constructivo para obtener dicha función trigonométrica, a partir de la obtención del polinomio ordinario P (autorrecíproco) que resuelve el problema de interpolación (2.5).

Para nuestros intereses resultará de interés obtener la expresión explícita de la solución en forma de Lagrange. Para ello, fijemos un conjunto de nodos distintos entre sí $\{\theta_k\}_{k=1}^{2(n+\gamma)+1} \subset (-\pi, \pi]$ y un conjunto de datos $\{y_k\}_{k=1}^{2(n+\gamma)+1} \subset \mathbb{R}$ (éstos sí pueden coincidir). Buscamos $T_n \in \mathcal{T}_n^{\gamma}$ que satisfaga (2.4) en forma de Lagrange,

$$T_n(\theta) = \sum_{k=1}^{2(n+\gamma)+1} l_k(\theta) y_k,$$

donde $l_k \in \mathcal{T}_n^\gamma$ (*polinomios trigonométricos de grado o semigrado entero fundamentales de Lagrange*) verifican

$$l_k(\theta_j) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k, \\ 0, & \text{si } j \neq k, \end{cases} \qquad \forall j, k = 1, \ldots, 2(n+\gamma)+1.$$

Es decir, l_k es la solución del problema de interpolación (2.4) para el caso $\{y_j\}_{j=1}^{2(n+\gamma)+1} = \{\delta_{j,k}\}_{j=1}^{2(n+\gamma)+1}$. De la Proposición 2.5 vemos claramente que

$$l_j(\theta) = \lambda_j \cdot \prod_{k=1,k\neq j}^{2(n+\gamma)+1} sin\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right) \in \mathcal{T}_n^\gamma, \quad \lambda_j \neq 0,$$

con λ_j escogida de forma que $l_j(\theta_j) = 1$. Definimos la función trigonométrica nodal como

$$W_n(\theta) = \prod_{k=1}^{2(n+\gamma)+1} sin\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right) \in \mathcal{T}_{n+2\gamma}^{\frac{1}{2}-\gamma},$$

luego se sigue que

$$l_j(\theta) = \lambda_j \frac{W_n(\theta)}{sin\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)} \in \mathcal{T}_n^\gamma, \quad j = 1, \ldots, 2(n+\gamma)+1.$$

Para calcular λ_j, haremos uso del infinitésimo equivalente $\sin x \sim x$, $x \to 0$ y la regla de L'Hôpital,

$$1 = l_j(\theta_j) = \lambda_j \lim_{\theta\to\theta_j} \frac{W_n(\theta)}{sin\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)} = \lambda_j \lim_{\theta\to\theta_j} \frac{W_n(\theta)}{\frac{\theta-\theta_j}{2}} = 2\lambda_j W_n'(\theta_j).$$

Tomando $\lambda_j = \frac{1}{2W_n'(\theta_j)}$, tenemos que $l_j(\theta_j) = 1$, donde

$$W_n'(\theta_j) = \frac{1}{2} \cdot \prod_{k=1,k\neq j}^{2(n+\gamma)+1} sin\left(\frac{\theta_j - \theta_k}{2}\right), \quad j = 1, \ldots, 2(n+\gamma)+1.$$

Hemos obtenido la expresión del polinomio trigonométrico interpolador en forma de Lagrange:

$$T_n(\theta) = \sum_{k=1}^{2(n+\gamma)+1} \frac{W_n(\theta) y_j}{2W_n'(\theta_j) sin\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)} \in \mathcal{T}_n^\gamma. \tag{2.6}$$

En el tercer capítulo, para probar un resultado de tipo Jacobi va a ser necesario reducir la dimensión del espacio donde el problema de interpolación tiene solución única. Lo veremos reflejado en el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [2, Theorem 3.3].

Teorema 2.9 *Sea un conjunto de nodos* $\{\theta_j\}_{j=1}^{2(n+\gamma)} \subset (-\pi,\pi]$ *distintos entre sí y sea* $\lambda_n = \sum_{j=1}^{2(n+\gamma)} \theta_j$. *Entonces:*

1. *Si* $\lambda \neq k\pi$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$, *el problema de interpolación tiene solución única en* $\mathcal{T}_n^\gamma \ominus span\,\{cos(n+\gamma)\theta\}$ *y en* $\mathcal{T}_n^\gamma \ominus span\,\{sin(n+\gamma)\theta\}$.
2. *Si* $\lambda = k\pi$ *con* k *un número entero par, el problema de interpolación tiene solución única en* $\mathcal{T}_n^0 \ominus span\,\{cosn\theta\}$ *si* $\gamma = 0$ *y en* $\mathcal{T}_n^{\frac{1}{2}} \ominus span\,\left\{sin(n+\frac{1}{2})\theta\right\}$ *si* $\gamma = \frac{1}{2}$.
3. *Si* $\lambda = k\pi$ *con* k *un número entero impar, el problema de interpolación tiene solución única en* $\mathcal{T}_n^0 \ominus span\,\{sinn\theta\}$ *si* $\gamma = 0$ *y en* $\mathcal{T}_n^{\frac{1}{2}} \ominus span\,\left\{cos(n+\frac{1}{2})\theta\right\}$ *si* $\gamma = \frac{1}{2}$.

Del Teorema 2.9 se deduce que siempre es posible encontrar un supespacio de $\mathcal{T}^\gamma$ de dimensión $2(n+\gamma)$ donde el problema de interpolación siempre admite solución única.

A continuación planteamos un problema de interpolación de tipo Hermite. Como en este caso el número de condiciones es par (interpolamos a una función y a su primera derivada en un conjunto de nodos prefijado de antemano), buscaremos en primer lugar un polinomio trigonométrico ($\gamma = 0$) que lo interpole, eliminando una de las condiciones de interpolación en la primera derivada en algún nodo prefijado de antemano. Garantizamos así que el número de condiciones coincida con la dimensión del espacio donde estamos buscando solución con $\gamma = 0$. Como es bien sabido para el caso polinómico ordinario, si prefijamos $n+1$ nodos distintos, entonces este problema de interpolación admite solución única en $\mathbb{P}_{2n+1}$, un subespacio vectorial de polinomios de dimensión $2n+2$ (coincidiendo con el número de condiciones de interpolación). Aprovechando de nuevo la conexión con polinomios autorrecíprocos dada en la Proposición 2.2 podemos hacer uso de este vínculo para probar el siguiente (véase [2, Theorem 3.2])

Teorema 2.10 *Dado un conjunto de nodos distintos* $\{\theta_k\}_{k=1}^{n+1} \subset (-\pi,\pi]$ *y un conjunto de datos* $\{y_k\}_{k=1}^{2(n+\gamma)+1} \cup \{y'_k\}_{k=1,k\neq k_0}^{2(n+\gamma)+1} \subset \mathbb{R}$ *siendo* $k_0 \in \{1,\ldots,n+1\}$ *un índice prefijado de antemano, entonces existe un único* $H_n \in \mathcal{T}_n^0$ *tal que*

$$\left.\begin{aligned} H_n(\theta_k) &= y_k, \quad k = 1,\ldots,n+1, \\ H'_n(\theta_k) &= y'_k, \quad k = 1,\ldots,n+1, \quad k \neq k_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

En segundo lugar, podemos plantear un nuevo problema de interpolación de tipo Hermite buscando exactitud en polinomios trigonométricos de semigrado entero de manera que no eliminemos ahora ninguna condición de interpolación al problema, como hicimos en el Teorema 2.10. Tenemos pues el siguiente resultado con el que finalizamos este capítulo y que, por lo que sabemos, es nuevo en la literatura.

Teorema 2.11 *Dado un conjunto de nodos distintos* $\{\theta_k\}_{k=1}^{n+1} \subset (-\pi, \pi]$ *y* $\{y_k\}_{k=1}^{2n+1} \cup \{y'_k\}_{k=1}^{2n+1} \subset \mathbb{R}$. *Entonces, existe un único* $H_n \in \mathcal{T}_n^{\frac{1}{2}}$ *tal que*

$$\left.\begin{aligned} H_n(\theta_k) &= y_k, \quad k = 1, \ldots, n+1, \\ H'_n(\theta_k) &= y'_k, \quad k = 1, \ldots, n+1. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Demostración.- Sea $H_n(\theta) = \frac{P_{2n+1}(z)}{z^{n+\frac{1}{2}}}$, donde $z = e^{i\theta}$ y $P_{2n+1} \in \mathbb{P}_{2n+1} \setminus \mathbb{P}_{2n}$ un polinomio autorrecíproco. Veamos qué problema de interpolación resuelve P_{2n+1} si tomamos $z_k = e^{i\theta_k}$ para $k = 1, \ldots, 2n+1$: como $z = e^{i\theta}$ se sigue que $\theta = -iln(z)$, lo cual implica $\theta_z = -\frac{i}{z}$ y por tanto,

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(z) &= z^{n+\frac{1}{2}} H_n(\theta) \Rightarrow P_{2n+1}(z_k) = z_k^{n+\frac{1}{2}} y_k, \\ P'_{2n+1}(z) &= \left(n + \tfrac{1}{2}\right) z^{n-\frac{1}{2}} H_n(\theta) + z^{n+\frac{1}{2}} H'_n(\theta)\theta_z \Rightarrow \\ P'_{2n+1}(z) &= \left(n + \tfrac{1}{2}\right) z^{n-\frac{1}{2}} H_n(\theta) + z^{n+\frac{1}{2}} H'_n(\theta)\tfrac{-i}{z} \\ &= z^{n-\frac{1}{2}} \left[\left(n + \tfrac{1}{2}\right) H_n(\theta) - iH'_n(\theta)\right] \\ &\Rightarrow \quad P'_{2n+1}(z_k) = z_k^{n-\frac{1}{2}} \left[\left(n + \tfrac{1}{2}\right) y_k - iy'_k\right]. \end{aligned}$$

Deducimos pues que P_{2n+1} resuelve el siguiente problema de interpolación de Hermite (polinómico ordinario):

$$\left.\begin{aligned} P_{2n+1}(z_k) &= z_k^{n+\frac{1}{2}} y_k, & k = 1, \ldots, n+1, \\ P'_{2n+1}(z_k) &= z_k^{n-\frac{1}{2}} \left[\left(n + \tfrac{1}{2}\right) y_k - iy'_k\right], & k = 1, \ldots, n+1. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Como este problema de interpolación de Hermite admite solución única, ya tendríamos probada la existencia y unicidad de H_n, a falta de justificar que P_{2n+1} es un polinomio es autorrecíproco. Para ello, veremos que P^*_{2n+1} resuelve el mismo problema que P_{2n+1} para deducir que $P_{2n+1} = P^*_{2n+1}$.

$$\begin{aligned} P^*_{2n+1}(z_k) &= z_k^{2n+1} \overline{P_{2n+1}\left(\frac{1}{\overline{z_k}}\right)} = z_k^{2n+1} \overline{P_{2n+1}(z_k)} = z_k^{2n+1} \overline{z_k^{n+\frac{1}{2}} y_k} = z_k^{n+\frac{1}{2}} y_k, \\ \left(P^*_{2n+1}(z)\right)' &= \left(z^{2n+1} \overline{P_{2n+1}(z)}\right)' = (2n+1)\, z^{2n} \overline{P_{2n+1}(z)} + z^{2n+1} \left(\overline{P_{2n+1}(z)}\right)', \\ \left(\overline{P_{2n+1}(z)}\right)' &= \left(\overline{P_{2n+1}}\left(\tfrac{1}{z}\right)\right)' = \tfrac{-1}{z^2} \overline{P'_{2n+1}}\left(\tfrac{1}{z}\right) = \tfrac{-1}{z^2} \overline{P'_{2n+1}(z)}. \end{aligned}$$

Luego la expresión de la derivada del polionmio recíproco viene dada por

$$
\begin{aligned}
\left(P_{2n+1}^*(z)\right)' &= (2n+1)\, z^{2n}\overline{P_{2n+1}(z)} + z^{2n+1}\tfrac{(-1)}{z^2}\overline{P_{2n+1}'(z)} \\
&= (2n+1)\, z^{2n}\overline{P_{2n+1}(z)} - z^{2n-1}\overline{P_{2n+1}'(z)},
\end{aligned}
$$

lo cual implica,

$$
\begin{aligned}
\left(P_{2n+1}^*(z_k)\right)' &= (2n+1)\, z_k^{2n}\overline{P_{2n+1}(z_k)} - z_k^{2n-1}\overline{P_{2n+1}'(z_k)} \\
&= (2n+1)\, z_k^{2n}\overline{z_k^{n+\frac{1}{2}}y_k} - z_k^{2n-1}\overline{z_k^{n-\frac{1}{2}}\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)y_k - iy_k'\right]} \\
&= (2n+1)\, z_k^{n-\frac{1}{2}}y_k - z_k^{n-\frac{1}{2}}\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)y_k + iy_k'\right] \\
&= \left(n+\tfrac{1}{2}\right) z_k^{n-\frac{1}{2}}y_k - iz_k^{n-\frac{1}{2}}y_k' \\
&= z_k^{n-\frac{1}{2}}\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)y_k - iy_k'\right].
\end{aligned}
$$

Vemos que P_{2n+1}^* resuelve el problema (2.9) igual que P_{2n+1}. Por unicidad, $P_{2n+1}^* = P_{2n+1}$. Es decir, P_{2n+1} es autorrecíproco, por lo que H_n existe y es único.

□

3

Bi-ortogonalidad, cuasi-ortogonalidad y conexión con la cicunferencia unidad

En este último capítulo veremos nuevos conceptos como la biortogonalidad y la cuasi-ortogonalidad de polinomios trigonométricos. Analizaremos la relación que tienen con los polinomios de Szegő y acabaremos con el estudio de las f.c. de máximo grado de precisión.

3.1. Sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas

En esta sección retomaremos el concepto de otogonalidad de manera similar a lo que se hizo en el Capítulo 1 con el producto interior (1.7) actuando sobre funciones definidas en la circunferencia unidad. En este caso trabajaremos con polinomios trigonométricos, por lo que el producto interior se definirá de la siguiente manera: Fijada una función peso ω en $(-\pi, \pi]$, para cualesquiera $f, g \in \mathcal{T}^{\gamma}$ con $\gamma \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$, se define

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\omega(\theta)d\theta \quad \text{y} \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}. \tag{3.1}$$

En el Capítulo 2 hemos estudiado ciertas propiedades de los polinomios trigonométricos considerándolos reales. En esta última parte de la memoria daremos uso a esos resultados, por lo trabajaremos con funciones real-evaluadas. Además, como prefijamos de antemano la función peso, omitiremos el subíndice ω en el producto interior.

Sabiendo que el sistema $\mathcal{S} = span\left\{cos\left[(k+\gamma)\theta\right], sin\left[(k+\gamma)\theta\right]\right\}_{k=0}^{n}$ es linealmente independiente (Corolario 2.8) con $\gamma \in \{0, \frac{1}{2}\}$ fijo, podemos construir un sistema equivalente de funciones $\{f_k, g_k\}_{k=0}^{n}$ con $g_0 = 0$ para $\gamma = 0$ mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Este sistema sigue generando T_n^{γ} y es ortogonal. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que para $k = 0, ..., n$, $g_k \in \mathcal{T}_k^{\gamma}$ y $f_k \in \mathcal{T}_k^{\gamma} \setminus span\left\{sin\left[(k+\gamma)\theta\right]\right\}$. Para $j, k = 0, ..., n$ se tiene por tanto que

$$\langle f_j, f_k\rangle = \|f_k\|^2 \delta_{j,k}, \quad \langle g_j, g_k\rangle = \|g_k\|^2 \delta_{j,k}, \quad \langle f_j, g_k\rangle = 0. \tag{3.2}$$

Nuestro primer resultado ofrece una caracterización de una base $\left\{f_k^{(\gamma)}, g_k^{(\gamma)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ de $\mathcal{T}^\gamma$.

Teorema 3.1 *Sea* $\left\{f_k^{(\gamma)}, g_k^{(\gamma)}\right\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{T}^\gamma$ *con* $\gamma \in \{0, \frac{1}{2}\}$ *tal que*

$$f_k^{(\gamma)}(\theta) = \sum_{j=0}^{k} \left[a_{kj} cos\left[(j+\gamma)\theta\right] + b_{kj} sin\left[(j+\gamma)\theta\right]\right], \quad \forall k \geq 0,$$

$$g_k^{(\gamma)}(\theta) = \sum_{j=0}^{k} \left[c_{kj} cos\left[(j+\gamma)\theta\right] + d_{kj} sin\left[(j+\gamma)\theta\right]\right], \quad \forall k \geq 0,$$

donde tomamos $a_{00} \neq 0$, $c_{00} = 0$ *y* $d_{00} \neq 0$ *para* $\gamma = 0$. *Entonces,* $\left\{f_k^{(\gamma)}, g_k^{(\gamma)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ *es base de* $\mathcal{T}^\gamma$*, si y solo si,*

$$\begin{vmatrix} a_{kk} & b_{kk} \\ c_{kk} & d_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall k \geq 0. \tag{3.3}$$

Demostración.- Vamos a definir la siguiente matriz:

$$D_n = \begin{pmatrix} V_{00} & V_{10} & \cdots & V_{n0} \\ 0 & V_{11} & \cdots & V_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2(n+1)}, \; V_{kj} = \begin{pmatrix} a_{kj} & b_{kj} \\ c_{kj} & d_{kj} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2, \; \forall\, 0 \leq j \leq k \leq n.$$

Veamos que para todo $n \geq 0$ se tiene que $\{f_k, g_k\}_{k=0}^n$ es linealmente independiente, si y solo si, $det(D_n) \neq 0$.

Decir que $\sum_{k=0}^n \left[\alpha_k f_k + \beta_k g_k\right] = 0$ para $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k=0}^n \subset \mathbb{R}$ equivale a

$$0 = \sum_{k=0}^n \left[\sum_{j=0}^k \left[(\alpha_k a_{kj} + \beta_k c_{kj})\, cos\left[(j+\gamma)\theta\right] + (\alpha_k b_{kj} + \beta_k d_{kj})\, sin\left[(j+\gamma)\theta\right]\right]\right]$$

$$= \sum_{k=0}^n \left[\sum_{j=k}^n (\alpha_j a_{jk} + \beta_j c_{jk})\right] cos\left[(k+\gamma)\theta\right]$$

$$+ \left[\sum_{j=k}^n (\alpha_j b_{jk} + \beta_j d_{jk})\right] sin\left[(k+\gamma)\theta\right],$$

y por el Corolario 2.8, se sigue que

$$\sum_{j=k}^{n} (\alpha_j a_{jk} + \beta_j c_{jk}) = 0 \text{ y } \sum_{j=k}^{n} (\alpha_j b_{jk} + \beta_j d_{jk}) = 0.$$

Esto equivale a

$$D_n \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \; \beta_0 \; \alpha_1 \; \beta_1 \cdots \alpha_n \; \beta_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0 \cdots 0 \end{pmatrix}^T,$$

que es un sistema homogéneo y tendrá solución única (la trivial), si y solo si, $det(D_n) \neq 0$.

Vemos por tanto que $\left\{f_k^{(\gamma)}, g_k^{(\gamma)}\right\}_{k=0}^n$ es una base de $\mathcal{T}^\gamma$, si y solo si, es linealmente independiente para todo $n \geq 0$, si y solo si, $det(D_n) \neq 0$ para todo $n \geq 0$. Como D_n es una matriz triangular por bloques, su determinante es el producto del determinante de los bloques. Por tanto,

$$0 \neq det(D_n) = \prod_{k=0}^n \begin{vmatrix} a_{kk} & b_{kk} \\ c_{kk} & d_{kk} \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} a_{kk} & b_{kk} \\ c_{kk} & d_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall\, 0 \leq k \leq n.$$

□

Nota 3.2 *De acuerdo con el Teorema 3.1, el sistema* $\left\{f_k^{(\gamma)}, g_k^{(\gamma)}\right\}_{k=0}^n$ *con* $g_0^{(0)} = 0$ *que se obtiene al aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt al conjunto ordenado de funciones* $S = span\left\{cos\left[(k+\gamma)\theta\right], sin\left[(k+\gamma)\theta\right]\right\}_{k=0}^n$ *es claramente una base de* $\mathcal{T}^\gamma$.

Estamos ya en condiciones de introducir el concepto de biortogonalidad. Antes de ellos, debemos definir la independencia lineal entre polinomios trigonométricos. No se debe confundir con la independencia lineal entre conjuntos de funciones, tal y como se empleó en el Corolario 2.8.

Definición 3.3 *Sean* $f, g \in \mathcal{T}^\gamma$ *de grado exacto* $n \geq 0$ *y* $\gamma \in \{0, \frac{1}{2}\}$, *de la forma*

$$f(\theta) = \textstyle\sum_{k=0}^n \left[a_k cos\left[(k+\gamma)\theta\right] + b_k sin\left[(k+\gamma)\theta\right]\right],$$

$$g(\theta) = \textstyle\sum_{k=0}^n \left[c_k cos\left[(k+\gamma)\theta\right] + d_k sin\left[(k+\gamma)\theta\right]\right].$$

Se dice que f *y* g *son linealmente independientes si*

$$\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

La definición carece de sentido para $n = \gamma = 0$, así que ese caso siempre lo omitiremos.

Definición 3.4 *Sea* ω *una función peso en* $(-\pi, \pi]$ *y* $\{f_k, g_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathcal{T}^\gamma$ *un sistema de polinomios trigonométricos reales. Diremos que el sistema es bi-ortogonal respecto a* ω *si es ortogonal (satisface (3.2)) y para todo* $n \geq 0$, $f_n, g_n \in \mathcal{T}_n^\gamma \backslash \mathcal{T}_{n-1}^\gamma$ *son linealmente independientes (denotando* $\mathcal{T}_{-1}^\gamma = \{0\}$*). Además, diremos que el sistema es bi-ortonormal si* $\|f_k\| = \|g_k\| = 1$ *para todo* $k \geq 0$.

Ahora nos interesaría estudiar la unicidad de los sistemas bi-ortonormales. El sistema no va a ser único, pero existe una relación muy estrecha entre ambos que se explica en el siguiente

Teorema 3.5 *Sean* $\{f_n, g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\left\{\tilde{f}_n, \tilde{g}_n\right\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{T}^{\gamma}$ *dos sistemas bi-ortonormales con respecto a* ω*. Entonces,* $\forall n \geq 0$*,* $\exists M_n$ *matriz ortogonal tal que*

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_n \\ \tilde{g}_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Demostración.- Como siempre, descartaremos el caso $n = \gamma = 0$, ya que tendríamos $f_0, \tilde{f}_0 \in \{1, -1\}$ y nos basta tomar $M_0 = sgn(f_0\tilde{f}_0)I_2$, donde $I_2 \equiv$ matriz identidad de orden 2.

Fijemos $n \geq 0$. $\tilde{f}_n \in \mathcal{T}_n^{\gamma} = span\,\{f_k, g_k\}_{k=0}^{n}$, luego

$$\tilde{f}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k(\theta) + b_k g_k(\theta),$$

donde $a_k = \langle \tilde{f}_n, f_k \rangle = 0$ y $b_k = \langle \tilde{f}_n, g_k \rangle = 0$ para todo $k = 0, ..., n-1$ por las condiciones de ortogonalidad de $\tilde{f}_n$. Luego, $\tilde{f}_n(\theta) = a_n f_n(\theta) + b_n g_n(\theta)$ y mediante un proceso análogo, llegamos a $\tilde{g}_n(\theta) = c_n f_n(\theta) + d_n g_n(\theta)$. Con esto, obtenemos la relación matricial

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_n \\ \tilde{g}_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} \text{ con } M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \tilde{f}_n, f_n \rangle & \langle \tilde{f}_n, g_n \rangle \\ \langle \tilde{g}_n, f_n \rangle & \langle \tilde{g}_n, g_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Si hacemos el mismo proceso con los sistemas intercambiados, se tiene que

$$\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} = \tilde{M}_n \begin{pmatrix} \tilde{f}_n \\ \tilde{g}_n \end{pmatrix} = \tilde{M}_n M_n \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} \Longrightarrow M_n^{-1} = \tilde{M}_n = \begin{pmatrix} \langle f_n, \tilde{f}_n \rangle & \langle f_n, \tilde{g}_n \rangle \\ \langle g_n, \tilde{f}_n \rangle & \langle g_n, \tilde{g}_n \rangle \end{pmatrix} = M_n^T.$$

Por tanto, M_n es ortogonal.

$\square$

Sería interesante plantearse un resultado recíproco al Teorema 3.1. Es evidente que si $\{f_n, g_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\left\{\tilde{f}_n, \tilde{g}_n\right\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{T}^{\gamma}$ son dos sistemas de polinomios trigonométricos tales que para todo $n \geq 0$, exista una matriz ortogonal M_n de forma que

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_n \\ \tilde{g}_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix},$$

no necesariamente serán bi-ortonormales esos sistemas. No obstante, podemos probar la siguiente

Proposición 3.6 *Sea* $\{f_n, g_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{T}^{\gamma}$ *un sistema bi-ortonormal y definamos* $\forall n \geq 0$*,*

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_n \\ \tilde{g}_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}$$

con M_n *matriz ortogonal. Entonces,* $\left\{\tilde{f}_n, \tilde{g}_n\right\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{T}^{\gamma}$ *es un sistema bi-ortonormal.*

Demostración.- Sea $n \geq 0$, entonces

$$M_n = \begin{pmatrix} cos(\theta_n) & (-1)^{i_n} sin(\theta_n) \\ sin(\theta_n) & (-1)^{i_n+1} cos(\theta_n) \end{pmatrix}$$

para un cierto $\theta_n \in (-\pi, \pi]$ y $i_n \in \mathbb{N}$. Veamos si se cumplen las condiciones de bi-ortonormalidad: para todo $n, k \geq 0$,

$$\langle \tilde{f_n}, \tilde{f_k} \rangle = \langle cos(\theta_n) f_n + (-1)^{i_n} sin(\theta_n) g_n, cos(\theta_k) f_k + (-1)^{i_k} sin(\theta_k) g_k \rangle$$

$$= cos^2(\theta_n)\delta_{n,m} + sin^2(\theta_n)\delta_{n,m} = \delta_{n,m},$$

$$\langle \tilde{g_n}, \tilde{g_k} \rangle = \langle sin(\theta_n) f_n + (-1)^{i_n+1} cos(\theta_n) g_n, sin(\theta_k) f_k + (-1)^{i_k+1} cos(\theta_k) g_k \rangle$$

$$= sin^2(\theta_n)\delta_{n,m} + cos^2(\theta_n)\delta_{n,m} = \delta_{n,m},$$

$$\langle \tilde{f_n}, \tilde{g_k} \rangle = \langle cos(\theta_n) f_n + (-1)^{i_n} sin(\theta_n) g_n, sin(\theta_k) f_k + (-1)^{i_k+1} cos(\theta_k) g_k \rangle$$

$$= cos(\theta_n) sin(\theta_n)\delta_{n,m} - sin(\theta_n) cos(\theta_n)\delta_{n,m} = 0.$$

Falta ver que para todo $n \geq 0$, $\tilde{f_n}$ y $\tilde{g_n}$ son linealmente independientes. Supongamos que

$$f_n(\theta) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \left[a_k cos\left[(k+\gamma)\theta\right] + b_k sin\left[(k+\gamma)\theta\right]\right],$$

$$g_n(\theta) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \left[c_k cos\left[(k+\gamma)\theta\right] + d_k sin\left[(k+\gamma)\theta\right]\right].$$

Entonces,

$$\begin{vmatrix} \tilde{a_n} & \tilde{b_n} \\ \tilde{c_n} & \tilde{d_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n cos(\theta_n) + (-1)^{i_n} c_n sin(\theta_n) & b_n cos(\theta_n) + (-1)^{i_n} d_n sin(\theta_n) \\ a_n sin(\theta_n) + (-1)^{i_n+1} c_n cos(\theta_n) & b_n sin(\theta_n) + (-1)^{i_n+1} d_n cos(\theta_n) \end{vmatrix}$$

$$= \left[a_n cos(\theta_n) + (-1)^{i_n} c_n sin(\theta_n)\right]\left[b_n sin(\theta_n) + (-1)^{i_n+1} d_n cos(\theta_n)\right] -$$

$$\left[a_n sin(\theta_n) + (-1)^{i_n+1} c_n cos(\theta_n)\right]\left[b_n cos(\theta_n) + (-1)^{i_n} d_n sin(\theta_n)\right]$$

$$= a_n d_n \left[cos(\theta_n)(-1)^{i_n+1} cos(\theta_n) - sin(\theta_n)(-1)^{i_n} sin(\theta_n)\right] -$$

$$c_n b_n \left[-(-1)^{i_n} sin(\theta_n) sin(\theta_n) + (-1)^{i_n+1} cos(\theta_n) cos(\theta_n)\right]$$

$$= (-1)^{i_n+1}\left[a_n d_n - c_n b_n\right] \neq 0,$$

debido a que f_n y g_n son linealmente independientes. Por tanto, $\tilde{f_n}$ y $\tilde{g_n}$ son linealmente independientes y $\left\{\tilde{f_k}, \tilde{g_k}\right\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{T}^{\gamma}$ es un sistema bi-ortonormal.

□

Ejemplo 3.7 *$\{cos\left[(k+\gamma)\,\theta\right], sin\left[(k+\gamma)\,\theta\right]\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{T}^{\gamma}$ es un sistema bi-ortogonal para el caso de $\omega \equiv 1$ en $(-\pi,\pi]$.*

En efecto, si tomamos $f_n(\theta) = cos\left[(n+\gamma)\,\theta\right]$ y $g_n(\theta) = sin\left[(n+\gamma)\,\theta\right]$, se tiene que

1. f_n y g_n son linealmente independientes para todo $n \geq 0$.
2. $\langle f_n, f_k\rangle = c_n\delta_{n,k}$, $\langle g_n, g_k\rangle = c_n\delta_{n,k}$ y $\langle f_n, g_k\rangle = 0$ para todo $n, k \geq 0$, donde $c_n = \pi$, $\forall n \geq 1$ y $c_0 = 2\pi$.

Si analizamos los ceros de estos polinomios trigonométricos, vemos que

$$f_n(\theta_k) = 0 \Longleftrightarrow (n+\gamma)\,\theta_k = \tfrac{(2k+1)\pi}{2} \Longleftrightarrow \theta_k = \tfrac{(2k+1)\pi}{2(n+\gamma)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$g_n(\theta_k) = 0 \Longleftrightarrow (n+\gamma)\,\theta_k = k\pi \Longleftrightarrow \theta_k = \tfrac{k\pi}{n+\gamma}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como $\theta_k \in (-\pi,\pi]$, podemos acotar el parámetro $k \in \mathbb{Z}$. Vamos a analizarlo primero para f_n:

$$-\pi < \theta_k \leq \pi \Longleftrightarrow -\pi < \frac{(2k+1)\,\pi}{2\,(n+\gamma)} \leq \pi \Longleftrightarrow -(n+\gamma) - \frac{1}{2} < k \leq n+\gamma-\frac{1}{2}.$$

Veamos qué valores puede tomar k dependiendo de γ.

1. Si $\gamma = 0$: $-n-\frac{1}{2} < k \leq n-\frac{1}{2} \Longrightarrow -n \leq k \leq n-1$,
2. Si $\gamma = \frac{1}{2}$: $-n-1 < k \leq n \Longrightarrow -n \leq k \leq n$.

Por lo tanto, f_n tiene $2(n+\gamma)$ raíces distintas en el intervalo $(-\pi,\pi]$. Veamos ahora g_n:

$$-\pi < \theta_k \leq \pi \Longleftrightarrow -\pi < \frac{k\pi}{n+\gamma} \leq \pi \Longleftrightarrow -(n+\gamma) < k \leq n+\gamma.$$

Veamos qué valores puede tomar k dependiendo de γ.

1. Si $\gamma = 0$: $-n < k \leq n \Longrightarrow -n+1 \leq k \leq n$,
2. Si $\gamma = \frac{1}{2}$: $-n-\frac{1}{2} < k \leq n+\frac{1}{2} \Longrightarrow -n \leq k \leq n$.

concluimos que tanto f_n como g_n tienen $2(n+\gamma)$ raíces distintas en el intervalo $(-\pi,\pi]$.

Hemos estudiado un caso particular con una función peso dada ($\omega \equiv 1$). Esto se puede generalizar para cualquier función peso. Al igual que con los polinomios para-ortogonales en el Capítulo 1, los ceros de los sistemas bi-ortogonales jugarán un papel esencial en la construcción de f.c. Por lo pronto podemos establecer el siguiente

Teorema 3.8 *Sea* $\{f_n, g_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{T}^{\gamma}$ *un sistema bi-ortogonal y* $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. *Entonces,* $T_n = af_n + bg_n \in \mathcal{T}_n^{\gamma}$ *tiene exactamente* $2(n+\gamma)$ *ceros reales y distintos en cualquier intervalo semiabierto de longitud* 2π.

Demostración.- Sin pérdida de generalidad, nos centraremos en el intervalo $(-\pi, \pi]$. Por la Proposición 2.3, T_n tiene exactamente $2(n+\gamma)$ ceros con parte real en $(-\pi, \pi]$ y las raíces complejas aparecen en pares conjugados. Sea p el número de raíces reales distintas con multiplicidad impar. Por construcción, existe un $t \in \{0, ..., n\}$ tal que $p = 2(t+\gamma)$. Supongamos que $t < n$, entonces

$$T_n(\theta) = \prod_{k=1}^{2(t+\gamma)} sin\left(\frac{\theta - \zeta_k}{2}\right) \prod_{k=1}^{2(n-t)} sin\left(\frac{\theta - \omega_k}{2}\right) = R_t(\theta) G_{n-t}(\theta),$$

donde $R_t \in \mathcal{T}_t^{\gamma}$ y $G_{n-t} \in \mathcal{T}_{n-t}^{0}$ es un polinomio trigonométrico que no cambia de signo en $(-\pi, \pi]$, por lo que

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} T_n(\theta) R_t(\theta) \omega(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} R_t^2(\theta) G_{n-t}(\theta) \omega(\theta) d\theta \neq 0.$$

Por otro lado, en virtud de la ortogonalidad se tiene que

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} T_n(\theta) R_t(\theta) \omega(\theta) d\theta = \langle T_n, R_t \rangle = \langle af_n + bg_n, R_t \rangle = 0.$$

Como esto es absurdo, debe ocurrir que $t = n$, o equivalentemente, $p = 2(n+\gamma)$. Con esto, concluimos que T_n tiene exactamente $2(n+\gamma)$ raíces distintas en el intervalo $(-\pi, \pi]$.

□

3.2. Relación con los polinomios de Szegő

En esta breve sección, veremos cómo obtener sistemas bi-ortogonales con respecto a una función peso ω a partir de la familia de polinomios de Szegő respecto a la función peso $\tilde{\omega}$ inducida en $\mathbb{T}$. El siguiente Teorema engloba resultados establecidos en [2], [3] y [12].

Teorema 3.9 *Sea* $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ *la familia de polinomios de Szegő y sean* $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C} \backslash \{0\}$ *tales que* $\omega_n^2 \delta_{2(n+\gamma)} \in \mathbb{R}$. *Si definimos* $f_0 \neq 0$ $g_0 = 0$ *para* $\gamma = 0$ *y*

$$\omega_n e^{-i(n+\gamma-1)\theta} \rho_{2(n+\gamma)-1}(e^{i\theta}) = f_n(\theta) + i g_n(\theta), \quad \forall n \geq 0, \tag{3.4}$$

entonces $\{f_n, g_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{T}^{\gamma}$ *es un sistema bi-ortogonal.*

Demostración.- Veamos primero que $\{f_n, g_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema ortogonal. Usando el cambio de variable $z = e^{i\theta}$ tenemos que

$$f_n(\theta) = \tfrac{1}{2}\left[\omega_n z^{-(n+\gamma-1)}\rho_{2(n+\gamma)-1}(z) + \overline{\omega_n} z^{n+\gamma-1}\overline{\rho_{2(n+\gamma)-1}(z)}\right],$$

$$g_n(\theta) = \tfrac{1}{2i}\left[\omega_n z^{-(n+\gamma-1)}\rho_{2(n+\gamma)-1}(z) - \overline{\omega_n} z^{n+\gamma-1}\overline{\rho_{2(n+\gamma)-1}(z)}\right].$$

Sean $n, m \neq 0$ tales que $n > m$. Para obtener $\langle f_n, f_m\rangle$, calculamos

1. $\langle z^{-(n+\gamma-1)}\rho_{2(n+\gamma)-1}, z^{-(m+\gamma-1)}\rho_{2(m+\gamma)-1}\rangle = \langle \rho_{2(n+\gamma)-1}, z^{n-m}\rho_{2(m+\gamma)-1}\rangle = 0$ por ortogonalidad, pues
$$z^{n-m}\rho_{2(m+\gamma)-1} \in span\{z^{n-m}, ..., z^{n+m+2\gamma-1}\} \subseteq \{z, ..., z^{2(n+\gamma)-1}\}.$$
2. $\langle z^{-(n+\gamma-1)}\rho_{2(n+\gamma)-1}, z^{m+\gamma-1}\overline{\rho_{2(m+\gamma)-1}}\rangle = \langle \rho_{2(n+\gamma)-1}, z^{n+m+2\gamma-2}\overline{\rho_{2(m+\gamma)-1}}\rangle = 0$ por ortogonalidad, pues
$$z^{n+m+2\gamma-2}\overline{\rho_{2(m+\gamma)-1}} \in span\{z^{n-m-1}, ..., z^{n+m+2\gamma-2}\} \subseteq \{1, ..., z^{2(n+\gamma)-3}\}.$$
3. $\langle z^{n+\gamma-1}\overline{\rho_{2(n+\gamma)-1}}, z^{-(m+\gamma-1)}\rho_{2(m+\gamma)-1}\rangle = \overline{\langle z^{-(n+\gamma-1)}\rho_{2(n+\gamma)-1}, z^{m+\gamma-1}\overline{\rho_{2(m+\gamma)-1}}\rangle} = 0$ por 2.
4. $\langle z^{n+\gamma-1}\overline{\rho_{2(n+\gamma)-1}}, z^{m+\gamma-1}\overline{\rho_{2(m+\gamma)-1}}\rangle = \overline{\langle z^{-(n+\gamma-1)}\rho_{2(n+\gamma)-1}, z^{-(m+\gamma-1)}\rho_{2(m+\gamma)-1}\rangle} = 0$ por 1.

Por tanto, $\langle f_n, f_m\rangle = 0$. Veamos ahora el caso $n = m$. Supongamos que $\langle f_n, f_n\rangle = 0$. Entonces $\|f_n\| = 0$, es decir,

$$\omega_n z^{-(n+\gamma-1)}\rho_{2(n+\gamma)-1}(z) + \overline{\omega_n} z^{n+\gamma-1}\overline{\rho_{2(n+\gamma)-1}(z)} = 0,$$

o equivalentemente,

$$\omega_n z\rho_{2(n+\gamma)-1}(z) = -\overline{\omega_n}\rho^*_{2(n+\gamma)-1}(z).$$

Del Teorema 1.7, deducimos que $\omega_n = 0$, pero esto es absurdo, luego $\langle f_n, f_m\rangle = \|f_n\|^2\delta_{n,m}$ para todo $n, m \geq 0$. De forma muy análoga, se llega a que $\langle g_n, g_m\rangle = \|g_n\|^2\delta_{n,m}$ para todo $n, m \geq 0$ y $\langle f_n, g_m\rangle = 0$ para todo $n \neq m$. Veamos ahora que $\langle f_n, g_n\rangle = 0$ para todo $n \geq 0$. Tomamos $z = e^{i\theta}$ y definimos la integral

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\omega_n z^{-(n+\gamma-1)}\rho_{2(n+\gamma)-1}(e^{i\theta})\right)^2\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f_n(\theta) + ig_n(\theta)\right)^2\omega(\theta)d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(f_n(\theta)^2 - g_n(\theta)^2\right)\omega(\theta)d\theta + 2i\int_{-\pi}^{\pi} f_n(\theta)g_n(\theta)\omega(\theta)d\theta,$$

y por otro lado, de (1.10),

$$I_n = \omega_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} z^{-2(n+\gamma-1)} \rho_{2(n+\gamma)-1}(e^{i\theta})^2 \omega(\theta) d\theta = \omega_n^2 \langle z\rho_{2(n+\gamma)-1}, z^{2(n+\gamma)-1}\overline{\rho_{2(n+\gamma)-1}} \rangle$$

$$= \omega_n^2 \langle \rho_{2(n+\gamma)} - \delta_{2(n+\gamma)} \rho^*_{2(n+\gamma)-1}, \rho^*_{2(n+\gamma)-1} \rangle = -\omega_n^2 \delta_{2(n+\gamma)} \left\| \rho^*_{2(n+\gamma)-1} \right\|^2.$$

Luego, $\langle f_n, g_n \rangle = 0 \iff \omega_n^2 \delta_{2(n+\gamma)} \in \mathbb{R}$.

Para completar la demostración debemos probar que f_n, g_n son linealmente independientes para todo $n \geq 0$. Veamos cuáles son los coeficientes directores de $f_n(\theta) + ig_n(\theta)$, teniendo en cuenta que $\rho_{2(n+\gamma)-1}$ es un polinomio mónico:

$$\omega_n e^{-i(n+\gamma-1)\theta} \rho_{2(n+\gamma)-1}(e^{i\theta}) = \omega_n \sum_{k=0}^{2(n+\gamma)-1} c_k e^{i(k-(n+\gamma-1))\theta}$$

$$= \omega_n \sum_{k=0}^{2n-1} c_k \left[cos\left[(k-(n+\gamma-1)\theta\right] + isin\left[(k-(n+\gamma-1))\theta\right] \right]$$

$$= \omega_n c_{2(n+\gamma)-1} \left[cos\left[(n+\gamma)\theta\right] + isin\left[(n+\gamma)\theta\right] \right] + \ldots \text{(grados menores)}$$

$$= \omega_n \left[cos\left[(n+\gamma)\theta\right] + isin\left[(n+\gamma)\theta\right] \right] + \ldots \text{(grados menores)},$$

luego obtenemos la siguiente expresión trigonométrica de f_n y g_n:

$$f_n(\theta) = \tfrac{\omega_n + \overline{\omega_n}}{2} cos\left[(n+\gamma)\theta\right] - \tfrac{\omega_n - \overline{\omega_n}}{2i} sin\left[(n+\gamma)\theta\right] + \ldots \text{(grados menores)},$$

$$g_n(\theta) = \tfrac{\omega_n - \overline{\omega_n}}{2i} cos\left[(n+\gamma)\theta\right] + \tfrac{\omega_n + \overline{\omega_n}}{2} sin\left[(n+\gamma)\theta\right] + \ldots \text{(grados menores)}.$$

Se sigue que

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega_n + \overline{\omega_n}}{2} & -\frac{\omega_n - \overline{\omega_n}}{2i} \\ \frac{\omega_n - \overline{\omega_n}}{2i} & \frac{\omega_n + \overline{\omega_n}}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \left(\omega_n^2 + \overline{\omega_n}^2 + 2\left|\omega_n\right|^2 \right) - \frac{1}{4} \left(\omega_n^2 + \overline{\omega_n}^2 - 2\left|\omega_n\right|^2 \right) = \left|\omega_n\right|^2 \neq 0.$$

Por tanto, f_n, g_n son linealmente independientes para todo $n \geq 0$ y con esto se tiene que $\{f_n, g_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{T}^\gamma$ es un sistema bi-ortogonal.

□

3.3. Fórmulas de cuadratura trigonométricas

Llegamos a la parte importante de esta Memoria, la construcción y caracterización de fórmulas de cuadratura exactas en subespacios de polinomios trigonométricos.

Recordemos que nuestro objetivo es aproximar la integral $I_\omega(f)$ dada por (1.1), donde ω es una función peso y f una función $2\pi-$periódica tal que $f\omega \in L_1[-\pi, \pi]$. $I_\omega(f)$ va a ser aproximada por medio de una f.c. de n puntos de la forma (1.2). Queremos determinar los nodos $\{\theta_k\}_{k=1}^n$ y los pesos $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ de forma que $I_n(f)$ sea exacta en un cierto subespacio de $\mathcal{T}^\gamma$ con la mayor dimensión posible. Es decir, que $I_\omega(T) = I_n(T)$ para todo $T \in \mathcal{T}_m^\gamma \subset \mathcal{T}^\gamma$, donde $m = m(n,\gamma)$ sea lo mayor posible.

El siguiente resultado es importante para avanzar en la construcción de este tipo de fórmulas:

Lema 3.10 *1. No existen f.c. de n puntos que sean exactas en $\mathcal{T}_n^\gamma$. Es decir, $m(n,\gamma) < n$.*
2. Sean $\{\theta_k\}_{k=1}^n \subset (-\pi,\pi]$ n nodos distintos. Entonces, existe un subespacio $\tilde{\mathcal{T}}_n^\gamma \subset \mathcal{T}_n^\gamma$ de dimensión n tal que se pueden determinar pesos $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ de manera única verificando $I_\omega(T_n) = I_n(T_n)$ para todo $T_n \in \tilde{\mathcal{T}}_n^\gamma$. Es decir, $I_\omega(f)$ es una f.c. trigonométrica de tipo interpolatorio.

Demostración.- Primera parte: Supongamos que existe una f.c. $I_n(f)$ exacta en $\mathcal{T}_n^\gamma$. Tomamos un polinomio trigonométrico en función de γ:

- Si $\gamma = 0$, tomamos $T_n(\theta) = \prod_{k=1}^n sin^2\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right) \in \mathcal{T}_n^0$. Luego $I_\omega(T_n) = I_n(T_n)$, es decir, $\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^n sin^2\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)\omega(\theta)d\theta = 0$, pero no puede ocurrir, pues T_n no cambia de signo.
- Si $\gamma = \frac{1}{2}$, tomamos $T_n(\theta) = sin\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)\prod_{k=1}^n sin^2\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right) \in \mathcal{T}_n^{\frac{1}{2}}$. Lo tomamos de esa manera para que no cambie de signo en $(-\pi,\pi)$ y proceder como en el caso anterior.

Segunda parte: Tomamos $\lambda_k = I_\omega(l_k)$, donde l_k denotan los polinomios trigonométricos fundamentales de Lagrange, cuya expresión se dedujo en (2.6). Vamos a diferenciar los siguientes dos casos:

- Si $n = 2t$, entonces $l_k \in \mathcal{T}_{t-1}^{\frac{1}{2}}$ y por la unicidad del polinomio trigonométrico interpolador, para todo $T_{t-1} \in \mathcal{T}_{t-1}^{\frac{1}{2}}$, se tiene que

$$T_{t-1}(\theta) = \sum_{k=1}^n l_k(\theta)T_{t-1}(\theta_k).$$

Así,

$$\begin{aligned} I_\omega(T_{t-1}) &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} T_{t-1}(\theta)\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n l_k(\theta)T_{t-1}(\theta_k)\omega(\theta)d\theta \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n T_{t-1}(\theta_k)\int_{-\pi}^{\pi} l_k(\theta)\omega(\theta)d\theta = \sum_{k=1}^n T_{t-1}(\theta_k)I_\omega(l_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n \lambda_k T_{t-1}(\theta_k) = I_n(T_{t-1}). \end{aligned}$$

Nos vale tomar $\tilde{\mathcal{T}}_n^\gamma = \mathcal{T}_{t-1}^{\frac{1}{2}}$ con $dim(\mathcal{T}_{t-1}^{\frac{1}{2}}) = n$.
- Si $n = 2t+1$, $l_k \in \mathcal{T}_t^0$ y para todo $T_t \in \mathcal{T}_t^0$, se tiene que

$$T_t(\theta) = \sum_{k=1}^n l_k(\theta)T_t(\theta_k).$$

Así,
$$I_\omega(T_t) = \int_{-\pi}^{\pi} T_t(\theta)\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n} l_k(\theta)T_t(\theta_k)\omega(\theta)d\theta$$
$$= \sum_{k=1}^{n} T_t(\theta_k)\int_{-\pi}^{\pi} l_k(\theta)\omega(\theta)d\theta = \sum_{k=1}^{n} T_t(\theta_k)I_\omega(l_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T_t(\theta_k) = I_n(T_t).$$

Nos vale tomar $\tilde{\mathcal{T}}_n^\gamma = \mathcal{T}_t^0$ con $dim(\mathcal{T}_t^0) = n$.

En ambos casos, el valor de los pesos es único, pues si suponemos que $I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\theta_k) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\lambda}_k f(\theta_k)$ cumpliendo exactitud en $\tilde{\mathcal{T}}_n^\gamma$, en particular

$$I_n(l_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k l_j(\theta_k) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\lambda}_k l_j(\theta_k) \Longrightarrow \lambda_j = \tilde{\lambda}_j, \quad \forall j = 1, ..., n.$$

Este valor viene dado por $\lambda_k = I_\omega(l_k)$.

$\square$

El siguiente paso será trasladar el concepto de cuasi-ortogonalidad al contexto trigonométrico.

Definición 3.11 *Sea $T_{n,r} \in \mathcal{T}_n^\gamma \backslash \mathcal{T}_{n-1}^\gamma$ con $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Diremos que $T_{n,r}$ es cuasi-ortogonal de orden r si es ortogonal a $\mathcal{T}_{n-1-r}^\gamma$ y no ortogonal a $\mathcal{T}_{n-r}^\gamma$.*

En esta definición solo tiene sentido definir la cuasi-ortogonalidad para $n \geq r$, entendiendo $\mathcal{T}_{-1}^\gamma = \emptyset$. Si $r = n-1$, $T_{n,n-1}$ es ortogonal a $\mathcal{T}_0^\gamma$, mientras que si $r = n$, $T_{n,n}$ no es ortogonal a ningún subespacio de $\mathcal{T}^\gamma$.

Si $\{f_k, g_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{T}^\gamma$ es un sistema bi-ortogonal y $T_{n,r} \in \mathcal{T}_n^\gamma \backslash \mathcal{T}_{n-1}^\gamma$ es cuasi-ortogonal de orden $r = 0$ (ortogonal), se tiene que $T_{n,0} = af_n + bg_n$, para ciertas constantes a, b no simultáneamente nulas. Nos gustaría obtener una expresión de $T_{n,r}$ para cualquier $r \in \{0, ..., n\}$ en función de la base $\{f_k, g_k\}_{k=0}^{n}$ de $\mathcal{T}_n^\gamma$. El resultado es similar al que se obtiene en el eje real.

Proposición 3.12 *Sea $\{f_k, g_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{T}^\gamma$ un sistema bi-ortogonal. Entonces, $T_{n,r} \in \mathcal{T}_n^\gamma \backslash \mathcal{T}_{n-1}^\gamma$ es cuasi-ortogonal de grado n y orden r, si y solo si, existen constantes $a_n, b_n, \ldots, a_{n-r}, b_{n-r} \in \mathbb{R}$ tales que*

$$T_{n,r} = a_n f_n + b_n g_n + \cdots + a_{n-r} f_{n-r} + b_{n-r} g_{n-r}, \quad (a_n, b_n), (a_{n-r}, b_{n-r}) \neq (0,0).$$

Demostración.- Sea $T_{n,r} \in \mathcal{T}_n^\gamma \backslash \mathcal{T}_{n-1}^\gamma$ cuasi-ortogonal de orden r. Como $\{f_k, g_k\}_{k=0}^{n}$ es base de $\mathcal{T}_n^\gamma$ y $T_{n,r}$ tiene grado exacto n, existen $a_n, b_n, \ldots, a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ con $(a_n, b_n) \neq (0,0)$ tales que $T_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} a_n f_n + b_n g_n$ y para todo $T \in \mathcal{T}_{n-1-r}^\gamma$ se tiene que $0 = \langle T_{n,r}, T\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k \langle f_k, T\rangle + b_k \langle g_k, T\rangle$. En particular, si $0 \leq j \leq n-r-1$, se tiene que

$$f_j \in \mathcal{T}_{n-1-r}^{\gamma} \Longrightarrow 0 = \langle T_{n,r}, f_j \rangle = a_j \|f_j\|^2 \Longrightarrow a_j = 0,$$

$$g_j \in \mathcal{T}_{n-1-r}^{\gamma} \Longrightarrow 0 = \langle T_{n,r}, g_j \rangle = b_j \|g_j\|^2 \Longrightarrow b_j = 0.$$

Como $T_{n,r}$ no es ortogonal a $\mathcal{T}_{n-r}^{\gamma}$, entonces $\langle T_{n,r}, f_{n-r} \rangle \neq 0$ o bien $\langle T_{n,r}, g_{n-r} \rangle \neq 0$, luego $(a_{n-r}, b_{n-r}) \neq (0,0)$.

Recíprocamente, si $T_{n,r} = a_n f_n + b_n g_n + \cdots + a_{n-r} f_{n-r} + b_{n-r} g_{n-r}$ con $(a_n, b_n), (a_{n-r}, b_{n-r}) \neq (0,0)$, se tiene que para todo $S \in \mathcal{T}_{n-1-r}^{\gamma}$, $\langle f_k, S \rangle = \langle g_k, S \rangle = 0$ para $k = n-r, ..., n$. Luego $\langle T_{n,r}, S \rangle = 0$. Sin pérdida de generalidad, suponemos $a_{n-r} \neq 0$. Entonces $\langle T_{n,r}, f_{n-r} \rangle = a_{n-r} \|f_{n-r}\|^2 \neq 0$. Concluimos que $T_{n,r}$ es cuasi-ortogonal de grado n y orden r.

□

A partir de ahora, nos centraremos en buscar ciertos nodos $\{\theta_k\}_{k=1}^n$ en $(-\pi, \pi]$ distintos y ciertos pesos reales $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ tales que

$$I_n(T) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T(\theta_k) = I_\omega(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_{n-1}^0. \tag{3.5}$$

El resultado clave viene a continuación es un resultado de tipo Jacobi para f.c. trigonométricas con dominios de exactitud intermedios. En [3] se da la demostración para el caso $r = 0$. Aquí se ha generalizado por tanto ese resultado (véase también [7, Lemma 2.1]).

Teorema 3.13 *Sea $I_n(T) = \sum_{k=1}^n \lambda_k T(\theta_k)$ con $\{\theta_k\}_{k=1}^n \subset (-\pi, \pi]$ distintos entre sí. Sea $n = 2(t+\gamma)$ y $0 \leq r \leq t-1$. Entonces, $I_n(T) = I_\omega(T)$ para todo $T \in \mathcal{T}_{n-r-1}^0$, si y solo si,*

1. *$I_n(f)$ es exacta en un cierto subespacio $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{T}_{n-1}^0$ de dimensión n (de tipo interpolatorio).*
2. *La función trigonométrica nodal $T_t \in \mathcal{T}_t^{\gamma}$ es cuasi-ortogonal de orden r.*

Demostración.- "$\Longrightarrow$" Supongamos que $I_n(T) = I_\omega(T)$ para todo $T \in \mathcal{T}_{n-r-1}^0$. Se tiene que

$$dim(\mathcal{T}_{n-r-1}^0) = 2(n-r-1) + 1 \geq 2(n-t) + 1 \geq n+1,$$

luego existe un subespacio $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{T}_{n-1}^0$ de dimensión n donde la f.c. es exacta en ese subespacio.

Por otro lado, sea $T_t(\theta) \in \mathcal{T}_t^{\gamma}$ la función trigonométrica nodal y sea $S \in \mathcal{T}_{t-r-1}^{\gamma}$. Tenemos que $T_t S \in \mathcal{T}_{n-r-1}^0$, por lo que

$$\langle T_t, S \rangle = I_\omega(T_t S) = I_n(T_t S) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T_t(\theta_k) S(\theta_k) = 0 \Longrightarrow T_t \perp \mathcal{T}_{t-r-1}^{\gamma}.$$

Es decir, T_t es cuasi-ortogonal de orden r.

"$\Longleftarrow$" Supongamos que se cumplen las condiciones 1 y 2. Veamos que $I_n(T) = I_\omega(T)$ para todo $T \in \mathcal{T}^0_{n-r-1}$. Sabiendo que $\mathcal{T}^0_t \subset \mathcal{T}^0_{n-r-1}$, entonces si definimos

$$\mathcal{L}_n = \begin{cases} \tilde{\mathcal{T}}^0_t, & \text{si } \gamma = 0, \\ \mathcal{T}^0_t & \text{si } \gamma = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

donde $\tilde{\mathcal{T}}^0_t = \mathcal{T}^0_t \ominus span\{cos\,(t\theta)\}$ o $\tilde{\mathcal{T}}^0_t = \mathcal{T}^0_t \ominus span\{sin\,(t\theta)\}$, por el Teorema 2.9 se tiene que en $\mathcal{L}_n$ el problema de interpolación de n nodos admite solución única. Sea $T_{n-r-1} \in \mathcal{T}^0_{n-r-1}$ y $L_n \in \mathcal{L}_n$ tal que $L_n(\theta_k) = T_{n-r-1}(\theta_k)$, $\forall k = 1, ..., n$. Se tiene que $T_{n-r-1} - L_n \in \mathcal{T}^0_{n-r-1}$ y $(T_{n-r-1} - L_n)(\theta_k) = 0$, $\forall k = 1, ..., n$, por lo que $T_{n-r-1} - L_n = T_t V_{t-r-1}$, donde $V_{t-r-1} \in \mathcal{T}^\gamma_{t-r-1}$. Como $T_t \perp \mathcal{T}^\gamma_{t-r-1}$, se tiene que $I_\omega(T_t V_{t-r-1}) = 0$, por lo que

$$I_\omega(T_{n-r-1}) = I_\omega(L_n + T_t V_{t-r-1}) = I_\omega(L_n) + I_\omega(T_t V_{t-r-1})$$

$$= I_\omega(L_n) = I_n(L_n) = I_n(T_{n-r-1}).$$

□

Como es bien sabido, que una f.c. tenga pesos positivos es de suma importancia por razones de convergencia y estabilidad. El siguiente resultado nos proporciona una relación entre el número de pesos positivos de una f.c. y el número de condiciones de ortogonalidad que cumple la función nodal.

Proposición 3.14 *Bajo las condiciones del Teorema 3.13, si $I_n(f)$ es exacta en $\mathcal{T}^0_{n-r-1}$, entonces el número ν de pesos positivos de $I_n(f)$ satisface $\nu > n - r - 1$. En particular, si $r = 0$, todos los pesos son positivos.*

Demostración.- Supongamos que $\theta_1, \ldots, \theta_\nu$ son los nodos de $I_n(f)$ con pesos asociados positivos y que $\nu \leq n - r - 1$. Definimos $S \equiv 1$ si $\nu = 0$ y $S(\theta) = \prod_{s=1}^{\nu} (\theta - \theta_s)^2 \in \mathcal{T}^0_\nu$ si $\nu > 0$. Entonces $S \in \mathcal{T}^0_{n-r-1}$, por lo que $I_n(S) = I_\omega(S)$ y llegamos a la contradicción $0 < I_\omega(S) = I_n(S) \leq 0$. Debe darse por tanto $\nu > n - r - 1$

□

De la Proposición 2.3 sabemos que si $T_n \in \mathcal{T}^\gamma_n \backslash \mathcal{T}^\gamma_{n-1}$ es real, entonces tiene exactamente $2(n+\gamma)$ ceros con parte real en $(-\pi, \pi]$, y las raíces complejas aparecen en pares complejos conjugados. El Teorema 3.8 permitió vincular condiciones de ortogonalidad con propiedades adicionales sobre estos ceros: si $T_n \perp \mathcal{T}^\gamma_{n-1}$, entonces tendrá exactamente $2(n + \gamma)$ ceros distintos en el intervalo $(-\pi, \pi]$. Si T_n posee condiciones de cuasi-ortogonalidad, se espera que el número de ceros reales vaya siendo menor cuanto más aumente el orden r. Veremos la conexión entre las condiciones de cuasi-ortogonalidad y el número de ceros distintos en $(-\pi, \pi]$ en el siguiente

Teorema 3.15 *Sea $T_{n,r} \in \mathcal{T}_n^{\gamma} \setminus \mathcal{T}_{n-1}^{\gamma}$ cuasi-ortogonal de grado n y orden r. Entonces, $T_{n,r}$ tiene al menos $2(n-r+\gamma)$ ceros distintos en $(-\pi,\pi]$.*

Demostración.- Sean $\theta_1, ..., \theta_s \in (-\pi,\pi]$ los distintos valores donde $T_{n,r}$ cambia de signo en $(-\pi,\pi]$. Entonces, $s = 2(m+\gamma)$ con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\gamma \in \{0, \frac{1}{2}\}$. Tomando

$$q_m(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } m = \gamma = 0, \\ \prod_{k=1}^{2(m+\gamma)} sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right), & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

se tiene que $T_{n,r} = q_m R_{n-m}$, donde $q_m \in \mathcal{T}_m^{\gamma}$ y $R_{n-m} \in \mathcal{T}_{n-m}^{0}$ no cambia de signo en $(-\pi,\pi]$. Supongamos que $2(m+\gamma) < 2(n-r+\gamma)$, entonces $m < n-r$, por lo que $q_m \in \mathcal{T}_{n-r-1}^{\gamma}$. Como $T_{n,r}$ es cuasi-ortogonal de orden r, por definición $\langle T_{n,r}, q_m \rangle = 0$, pero $T_{n,r} q_m = q_m^2 R_{n-m}$ no cambia de signo en $(-\pi,\pi]$. Llegamos a una contradicción, pues $0 = \langle T_{n,r}, q_m \rangle > 0$. Concluimos así que $s = 2(m+\gamma) \geq 2(n-r+\gamma)$.

□

Nota 3.16 *Del Teorema de Jacobi 3.13, se sigue que una f.c. con máximo grado de precisión trigonométrico alcanzable existe, y posee pesos positivos. La existencia queda garantizada por el Teorema 3.8, pues en ese caso sabemos que la función trigonométrica nodal posee todos sus ceros en $(-\pi,\pi]$ y son distintos. La positividad de los pesos se establece en la Proposición 3.14.*

Cuando el dominio de exactitud de la f.c. no es el máximo alcanzable, vemos que la función trigonométrica nodal posee ahora condiciones de cuasi-ortogonalidad, y por el Teorema 3.15 vemos que la existencia de esta f.c. quedará garantizada siempre y cuando se pueda asegurar que todos los ceros de la función trigonométrica nodal se encuentran en $(-\pi,\pi]$ y son distintos, algo que en general no siempre ocurre.

Nota 3.17 *Dado que la f.c. trigonométrica de n puntos con máximo grado de precisión alcanzable es exacta en un subespacio de dimensión $2n-1$, y su polinomio nodal depende esencialmente de un parámetro. A diferencia de lo que se conoce en la literatura como "f.c. trigonométrica Gaussiana"(véase por ejemplo [8]), parece más razonable que esta f.c. sea denominada "f.c. trigonométrica de Gauss-Radau".*

3.4. Conexión con cuasi-paraortogonalidad

Terminamos esta memoria con una conexión entre las f.c. trigonométricas con las de dominios intermedios de Szegő. Asumimos que $I_n(T) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T(\theta_k)$ es una f.c. trigonométrica con exactitud en $\mathcal{T}_{n-r-1}^{0}$. Tenemos que $\theta_k \in (-\pi,\pi]$ para todo $k = 1, \ldots, n$ e $I_n(T) = I_{\omega}(T)$, para todo $T \in \mathcal{T}_{n-r-1}^{0}$.

Sea $L \in \Lambda_{-(n-r-1),n-r-1}$ de modo que $L(e^{i\theta}) = L_1(\theta) + iL_2(\theta)$ con $L_1, L_2 \in \mathcal{T}^0_{n-r-1}$. Tomando $z_k = e^{i\theta_k} \in \mathbb{T}$ para $k = 1, \ldots, n$, se obtiene que

$$I_\omega(L) = I_\omega(L_1) + iI_\omega(L_2) = I_n(L_1) + iI_n(L_2) = I_n(L) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L(z_j). \quad (3.6)$$

Hemos obtenido así una f.c. de n puntos exacta en $\Lambda_{-(n-r-1),n-r-1}$. En particular, si $I_n(T)$ es una f.c. trigonométrica de máximo grado de precisión, en (3.6) obtenemos una f.c. de Szegő.

Comenzamos esta sección relacionando ciertos polinomios para-ortogonales y sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas. Consideremos un polinomio para-ortogonal y τ-invariante $B_{2(n+\gamma)} \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)} \backslash \mathbb{P}_{2(n+\gamma)-1}$. Entonces, por la Proposición 2.2 y la Proposición 1.11, podemos escribir

$$B_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}) = a_n e^{i(n+\gamma)\theta} f_n(\theta), \quad a_n \neq 0, \quad (3.7)$$

donde $f_n \in \mathcal{T}^\gamma_n \backslash \mathcal{T}^\gamma_{n-1}$ es real y $a_n \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ tal que $\frac{1}{a_n} \cdot B_{2(n+\gamma)}$ es autorrecíproco. De aquí se sigue el siguiente resultado fundamental.

Teorema 3.18 *Sea $f_n \in \mathcal{T}^\gamma_n$ dado por (3.7). Entonces, $\langle f_n, T \rangle = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}^\gamma_{n-1}$.*

Demostración.- Veamos que $\langle f_n(z), z^{j+\gamma} \rangle = 0$ para todo $-(n-1) \leq j \leq n-1$ ($z = e^{i\theta}$). De (3.7) y sabiendo que $a_n \neq 0$, la tesis equivale a probar que $\langle e^{-i(n+2\gamma)\theta} B_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}), e^{ij\theta} \rangle = 0$ para todo $-(n-1) \leq j \leq n-1$. Ahora, por [5, Theorem 6.1], se tiene que $B_{2(n+\gamma)}(z) = C(\rho_{2(n+\gamma)}(z) + \tau \rho^*_{2(n+\gamma)}(z))$ siendo C una constante no nula. Tenemos por tanto que

$$\begin{aligned} &\langle e^{-i(n+2\gamma)\theta} \left[\rho_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}) + \tau \rho^*_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}) \right], e^{ij\theta} \rangle = \\ &\langle \rho_{2(n+\gamma)}(z), z^{n+2\gamma+j} \rangle + \tau \langle \rho^*_{2(n+\gamma)}(z), z^{n+2\gamma+j} \rangle, \quad -(n-1) \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

De las propiedades de ortogonalidad de $\rho_{2(n+\gamma)}$ y de $\rho^*_{2(n+\gamma)}$ se sigue que ambos productos interiores son cero y se concluye la prueba.

□

Por lo que se aprecia, la expresión (3.7) tiene relación directa con los sistemas bi-ortogonales. En el siguiente teorema, generalizamos el resultado dado en [2, Theorem 6.12] conectando el concepto de cuasi-paraortogonalidad dado en la Definición 1.19.

Teorema 3.19 *Sea $B_{2(n+\gamma),2l+1} \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)} \backslash \mathbb{P}_{2(n+\gamma)-1}$ con $n \geq 0$. Entonces, $B_{2(n+\gamma),2l+1}$ es cuasi-paraortogonal de orden $2l+1$ y autorrecíproco, si y solo si, existe $T_n \in \mathcal{T}^\gamma_n \backslash \mathcal{T}^\gamma_{n-1}$ cuasi-ortogonal de orden exacto l tal que*

$$B_{2(n+\gamma),2l+1}(e^{i\theta}) = e^{i(n+\gamma)\theta} T_n(\theta). \quad (3.8)$$

Demostración.- "$\Longrightarrow$" Supongamos que $B_{2(n+\gamma),2l+1} \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)} \backslash \mathbb{P}_{2(n+\gamma)-1}$ es cuasi-paraortogonal de orden $2l+1$ y autorrecíproco. Como es de grado exacto $2(n+\gamma)$, entonces $e^{-i(n+\gamma)\theta} B_{2(n+\gamma),2l+1}(e^{i\theta}) = T_n(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma$. Veamos que T_n es cuasi-ortogonal de orden exacto l. Sea $T_{n-l-1} \in \mathcal{T}_{n-l-1}^\gamma$. Por la Proposición 2.2,

$$T_{n-l-1}(\theta) = \frac{P_{2(n-l-1+\gamma)}(z)}{z^{n-l-1+\gamma}},\ P_{2(n-l-1+\gamma)} \in \mathbb{P}_{2(n-l-1+\gamma)}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_{n-l-1}\rangle &= \langle z^{-n-\gamma} B_{2(n+\gamma),2l+1}(z), \tfrac{P_{2(n-l-1+\gamma)}(z)}{z^{n-l-1+\gamma}}\rangle \\ &= \langle B_{2(n+\gamma),2l+1}(z), z^{l+1} P_{2(n-l-1+\gamma)}(z)\rangle,\end{aligned}$$

donde $z^{l+1} P_{2(n-l-1+\gamma)} \in span\{z^{l+1}, ..., z^{2(n+\gamma)-l-1}\}$, por lo que $\langle T_n, T_{n-l-1}\rangle = 0$. Es decir, $T_n \perp \mathcal{T}_{n-l-1}^\gamma$ y además, T_n no es ortogonal a $\mathcal{T}_{n-l}^\gamma$, pues si lo fuera, entonces

$$\langle B_{2(n+\gamma),2l+1}, z^l\rangle = \langle T_n, e^{i(-n-\gamma+l)\theta}\rangle = \langle T_n, cos(n+\gamma-l)\theta - isin(n+\gamma-l)\theta\rangle = 0,$$

y esto contradice la definición de cuasi-paraortogonal de $B_{2(n+\gamma),2l+1}$.

"$\Longleftarrow$" Supongamos que $T_n(\theta) = e^{-i(n+\gamma)\theta} B_{2(n+\gamma),2l+1}(e^{i\theta}) \in \mathcal{T}_n^\gamma \backslash \mathcal{T}_{n-1}^\gamma$ cuasi-ortogonal de orden exacto l. Por la Proposición 2.2,

$$T_n(\theta) = \frac{P_{2(n+\gamma)}(z)}{z^{n+\gamma}},\ P_{2(n+\gamma)} \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)} \text{ autorrecíproco},$$

pero

$$P_{2(n+\gamma)}(z) = z^{n+\gamma} T_n(\theta) = B_{2(n+\gamma),2l+1}(z),$$

luego $B_{2(n+\gamma),2l+1}$ es autorrecíproco. Veamos ahora si es cuasi-paraortogonal de orden $2l+1$.

$$\begin{aligned}\langle B_{2(n+\gamma),2l+1}, z^k\rangle &= \langle e^{i(n+\gamma)\theta} T_n(\theta), e^{ik\theta}\rangle = \langle T_n, e^{i(k-(n+\gamma)\theta}\rangle \\ &= \langle T_n, cos(n+\gamma-k)\theta\rangle + i\langle T_n, sin(n+\gamma-k)\theta\rangle.\end{aligned}$$

Como $T_n \perp \mathcal{T}_{n-r-1}^\gamma$, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle B_{2(n+\gamma),2l+1}, z^k\rangle = 0 &\Longleftrightarrow n+\gamma-k \in \{-n-\gamma+r+1, ..., n+\gamma-r-1\} \\ &\Longleftrightarrow k \in \{r+1, ..., 2(n+\gamma)-r-1\}.\end{aligned}$$

Además, $\langle B_{2(n+\gamma),2l+1}, z^l\rangle = \langle T_n, cos(n+\gamma-l)\theta\rangle + i\langle T_n, sin(n+\gamma-l)\theta\rangle \neq 0$, pues T_n no es ortogonal a $\mathcal{T}_{n-l}^\gamma$. Con esto, concluimos que $B_{2(n+\gamma),2l+1}$ es cuasi-paraortogonal de orden $2l+1$ y autorrecíproco.

$\square$

Nota 3.20 *El teorema previo realmente se puede generalizar si* $B_{2(n+\gamma),2l+1}$ *es invariante, no necesariamente autorrecíproco. El resultado se adapta al igual que en* (3.7)*, multiplicando por una constante* $\lambda_{2(n+\gamma)} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *en el lado derecho de la igualdad (3.8).*

Del Teorema 3.19 con $l = 0$, se obtiene un resultado muy interesante que aumenta la dimensión de las f.c. de máximo grado de precisión y es nuevo en la literatura.

Teorema 3.21 *Sea* $I_n(f)$ *una f.c. de* n *puntos* $(n \geq 1)$ *exacta en* $\mathcal{T}^0_{n-1}$*. Entonces, existen números reales* α *y* β *no simultáneamente nulos tales que*

$$I_n(T) = I_\omega(T),\ \forall T \in \mathcal{T}^0_{n-1} \oplus span\left\{\alpha cos(n\theta) + \beta sin(n\theta)\right\}.$$

Demostración.- Tenemos que $I_n(T) = I_\omega(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}^0_{n-1}$. Por el Teorema 3.13, la función trigonométrica nodal $T_t \in \mathcal{T}^\gamma_t$ es cuasi-ortogonal de orden $r = 0$, donde $n = 2(t+\gamma)$. Por el Teorema 3.19, se tiene que $T_t(\theta) = e^{-i(t+\gamma)}B_{n,1}(z)$ con $B_{n,1} \in \mathbb{P}_n$ un polinomio paraortogonal y autorrecíproco. Por el Teorema 1.14, $B_{n,1}$ es de la forma $B_{n,1}(z) = B_n(z,1) = \rho_n(z) + \rho^*_n(z)$. A partir la f.c. trigonométrica, obtenemos una f.c. de Szegő $\tilde{I}_n(f)$ usando (3.6). $B_{n,1}$ se corresponde con el polinomio nodal de la f.c. de Szegő, pues $B_{n,1}(z_j) = z_j^{t+\gamma}T_t(\theta_j) = 0$ para todo $j = 1, ..., n$. Podemos aplicar el Teorema 1.18 para afirmar que

$$\tilde{I}_n(f) = I_{\tilde{\omega}}(f), \quad \forall f \in \Lambda_{-(n-1),n-1} \quad \text{y} \quad f(z) := \frac{z^n}{\delta_n + 1} - \frac{1}{(\overline{\delta_n} + 1)z^n}.$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} f(z) &= \tfrac{z^n}{\delta_n+1} - \tfrac{1}{(\overline{\delta_n}+1)z^n} = \tfrac{1}{\delta_n+1}e^{in\theta} - \tfrac{1}{\overline{\delta_n}+1}e^{-in\theta} \\ &= \tfrac{1}{\delta_n+1}(cos(n\theta) + isin(n\theta)) - \tfrac{1}{\overline{\delta_n}+1}(cos(n\theta) - isin(n\theta)) \\ &= \left(\tfrac{1}{\delta_n+1} - \tfrac{1}{\overline{\delta_n}+1}\right) cos(n\theta) + i\left(\tfrac{1}{\delta_n+1} + \tfrac{1}{\overline{\delta_n}+1}\right) sin(n\theta). \end{aligned}$$

Buscamos una expresión proporcional a $f(z)$ cuyos coeficientes sean reales.

$$\tfrac{1}{\delta_n+1} - \tfrac{1}{\overline{\delta_n}+1} = \tfrac{\overline{\delta_n}+1-(\delta_n+1)}{|\delta_n+1|^2} = \tfrac{-2i}{|\delta_n+1|^2}Im(\delta_n),$$

$$i\left(\tfrac{1}{\delta_n+1} + \tfrac{1}{\overline{\delta_n}+1}\right) = i\tfrac{\overline{\delta_n}+1+\delta_n+1}{|\delta_n+1|^2} = \tfrac{2i}{|\delta_n+1|^2}(Re(\delta_n) + 1),$$

Si tomamos $\alpha = -Im(\delta_n)$, $\beta = Re(\delta_n) + 1$ y $T_n(\theta) = \alpha cos(n\theta) + \beta sin(n\theta)$, se tiene que $T_n(\theta) = Cf(e^{i\theta})$ con $C = \frac{|\delta_n+\tau_n|^2}{2i}$.

$$I_n(T_n(\theta)) = I_n(Cf(e^{i\theta})) = \tilde{I}_n(Cf(z)) = I_{\tilde{\omega}}(Cf(z)) = I_\omega(Cf(e^{i\theta})) = I_\omega(T_n(\theta)),$$

Por tanto, I_n es exacta en $\mathcal{T}^0_{n-1} \oplus span\left\{\alpha cos(n\theta) + \beta sin(n\theta)\right\}$.

□

Nota 3.22 *En el Teorema 3.21 hemos partido de una f.c. trigonométrica exacta en $\mathcal{T}_{n-1}^0$, por lo que existen a_n, b_n no simultáneamente nulos tales que el polinomio nodal W_n es de la forma $W_n = a_n f_n + b_n g_n$, siendo $\{f_k, g_k\}_{k=0}^n$ un sistema bi-ortogonal asociado a ω. Sin embargo, se sigue de la demostración que los parámetros α y β dependen exclusivamente del coeficiente de Verblunsky δ_n.*

Para finalizar estudiaremos la construcción de f.c. de mayor grado de precisión trigonométrico con respecto a una función peso ω simétrica: $\omega(-\theta) = \omega(\theta)$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Esta situación particular ha sido abordada en [3]

Sabemos que $\{\theta_k\}_{k=1}^n$ son los ceros de $T_m(\theta) = af_m(\theta) + bg_m(\theta)$ donde $n = 2(m+\gamma)$, $m \geq 0$, $\{f_k, g_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathcal{T}^\gamma$ es un sistema bi-ortogonal y $a, b \in \mathbb{R}$ no simultáneamente nulos. Parece razonable plantearse en este caso la siguiente cuestión: ¿Será posible encontrar a y b tales que los ceros de $\mathcal{T}_k$ sean simétricos en $[-\pi, \pi]$?

Primero, tendremos en cuenta que los momentos trigonométricos $\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}\omega(\theta)d\theta$ son reales para todo $k \in \mathbb{Z}$ y por ello los coeficientes de los polinomios de Szegő también son reales. Por el Teorema 3.19 podemos escribir

$$T_m(\theta) = af_m(\theta) + bg_m(\theta) = e^{-i(m+\gamma)\theta} B_n(e^{i\theta}) \,, \tag{3.9}$$

donde $B_n \in \mathbb{P}_n \backslash \mathbb{P}_{n-1}$ es para-ortogonal y autorrecíproco. Tomando

$$B_n(z) = C_n \left[\rho_n(z) + \tau \rho_n^*(z)\right]$$

con $C_n \neq 0$ y $\tau \in \mathbb{T}$, de (3.9) se sigue que los ceros de $T_m(\theta)$ son simétricos en $[-\pi, \pi]$, si y solo si, los ceros complejos de $B_n(z)$ aparecen en pares conjugados en $\mathbb{T}$, es decir, $\tau = \pm 1$. Supongamos que

$$\begin{aligned} f_m(\theta) &= a_m \cos(m+\gamma)\theta + b_m \sin(m+\gamma)\theta + H_{m-1}(\theta) \,, \quad H_{m-1} \in \mathcal{T}_{m-1}^\gamma \\ g_m(\theta) &= c_m \cos(m+\gamma)\theta + d_m \sin(m+\gamma)\theta + \tilde{H}_{m-1}(\theta) \,, \quad \tilde{H}_{m-1} \in \mathcal{T}_{m-1}^\gamma \end{aligned}$$

con $|a_m| + |b_m| > 0$, $|c_m| + |d_m| > 0$. Tomando primero $\tau = 1$, tenemos que $B_n(z) = \rho_n(z) + \rho_n^*(z) = (1+\delta_n)\, z^n + \cdots + (1+\delta_n)$ con $\rho_n(0) = \delta_n$ el n-ésimo coeficiente de Verblunsky, que es real. Comparando los coeficientes de $\cos(m+\gamma)\theta$ y $\sin(m+\gamma)\theta$ en (3.9), obtenemos el sistema

$$\begin{cases} aa_m + bc_m = 2(1+\delta_n) \\ ab_m + bd_m = 0 \end{cases}$$

con

$$D_m := \begin{vmatrix} a_m & c_m \\ b_m & d_m \end{vmatrix} \neq 0$$

y solución única

$$a = \frac{2d_m(1+\delta_n)}{D_m}, \qquad b = \frac{-2b_m(1+\delta_n)}{D_m}. \tag{3.10}$$

Análogamente, teniendo en cuenta que $B_n(z) = i\left[\rho_n(z) - \rho_n^*(z)\right]$ es 1-invariante, tenemos que cuando $\tau = -1$

$$a = \frac{2c_m(1-\delta_n)}{D_m} \quad , \quad b = \frac{-2a_m(1-\delta_n)}{D_m}. \tag{3.11}$$

Con esto, hemos probado el siguiente

Teorema 3.23 *Sea $\{f_k, g_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{T}^{\gamma}$ un sistema bi-ortogonal respecto una función peso simétrica $\omega(\theta)$. Entonces, un polinomio trigonométrico de la forma $T_k(\theta) = af_k(\theta) + bg_k(\theta)$ tiene todos sus ceros símetricos y en $[-\pi, \pi]$, si y solo si, las constantes a y b están dadas por (3.10) o por (3.11).*

$\square$

3.5. Ejemplos numéricos

En esta sección veremos algunos ejemplos numéricos ilustrativos haciendo uso de algunos resultados expuestos a lo largo de la memoria. Para ello consideraremos la función peso particular $\omega(\theta) = \frac{sin^2(\theta)}{2\pi}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, para la cual se conoce explícitamente la familia de polinomios de Szegő (véase [4, Section 3]):

$$\rho_n(z) = \begin{cases} \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (k+1) z^{2k} \text{ si } n \text{ es par,} \\ z \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (k+1) z^{2k} \text{ si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

A partir de estos polinomios podemos calcular un sistema bi-ortogonal de polinomios trigonométricos haciendo uso del Teorema 3.9. Los correspondientes coeficientes de Verblunsky vienen dados por

$$\delta_n = \rho_n(0) = \frac{1+(-1)^n}{n+2} = \begin{cases} \frac{2}{n+2} \text{ si } n \text{ es par,} \\ 0 \text{ si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Como $\delta_n \in \mathbb{R}$ nos vale tomar $\omega_n = 1$ para todo $n \geq 0$ en el Teorema 3.9. Supongamos $\gamma = 0$. Entonces,

$$e^{-i(n-1)}\rho_{2n-1}(e^{i\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) e^{i(2k+2-n)\theta} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \left[cos(2k+2-n)\theta + isin(2k+2-n)\theta\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} cos(2k+2-n)\theta + i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} sin(2k+2-n)\theta.$$

Hemos obtenido por tanto un sistema bi-ortogonal $\{f_n, g_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $\mathcal{T}^0$ asociado a ω:

$$f_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} cos(2k+2-n)\theta, \qquad g_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} sin(2k+2-n)\theta.$$

Por el Teorema 3.8, cualquier combinación lineal no trivial entre f_n y g_n tendrá $2n$ ceros distintos en el intervalo $(-\pi, \pi]$. Así por ejemplo,

$$T_3(\theta) = 4f_3(\theta) - g_3(\theta) = 4(cos(\theta) + cos(3\theta)) - \frac{1}{3} sen(\theta) - sen(3\theta) \in \mathcal{T}_3^0$$

tiene 6 raíces en el intervalo $(-\pi, \pi]$, las cuales podemos computar haciendo uso de *Matlab*:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -2.4448338387551426517, & \theta_4 &= 0.69675881483465058674, \\ \theta_2 &= -1.6517441000579541038, & \theta_5 &= 1.4898485535318391347, \\ \theta_3 &= -0.86078970469845725636, & \theta_6 &= 2.2808029488913359821. \end{aligned}$$

También a modo de ejemplo, de la Proposición 3.12 y del Teorema 3.15 se sigue que el polinomio trigonométrico cuasi-ortogonal de grado 3 y orden 1 dado por $T_{3,1} = 3f_3 + 5g_3 - 5f_2 + 7g_2$ tendrá al menos 4 ceros en el intervalo $(-\pi, \pi]$. En este caso, aparecen dos ceros complejos conjugados (recordar la Proposición 2.3):

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1 &= -2.348513116, & \tilde{\theta}_4 &= 1.479117997, \\ \tilde{\theta}_2 &= -1.344766051, & \tilde{\theta}_5 &= 2.112739128 + 0.5655419094i, \\ \tilde{\theta}_3 &= 0.04943656865, & \tilde{\theta}_6 &= 2.112739128 - 0.5655419094i. \end{aligned}$$

A continuación construimos una f.c. partiendo del sistema bi-ortogonal obtenido. Tomando $r = 0$ en el Teorema 3.13 tenemos que T_3 es la función trigonométrica nodal de una f.c. $I_6(f) = \sum_{k=0}^{6} \lambda_k f(\theta_k)$ exacta en $\mathcal{T}_5^0$. Los pesos vienen dados por $\lambda_k = I_\omega(l_k)$, $k = 1, \ldots, 6$:

$$I_\omega(l_k) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{T_3(\theta)}{2T_3'(\theta_k) sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)} \omega(\theta) d\theta = \frac{1}{4\pi T_3'(\theta_k)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{T_3(\theta) sin^2(\theta)}{sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)} d\theta.$$

Obtenemos así los pesos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.047845938143875\!86, & \lambda_4 &= 0.053509882963073215727, \\ \lambda_2 &= 0.12806517552913515\!4854, & \lambda_5 &= 0.12350053736422759\!3982, \\ \lambda_3 &= 0.071112784499637771402, & \lambda_6 &= 0.073501070332938021831. \end{aligned}$$

Si aplicamos el Teorema 3.21, existirán números reales α y β no simultáneamente nulos tales que $I_6(f)$ es exacta en $\mathcal{T}_5^0 \oplus span\,\{\alpha cos(6\theta) + \beta sin(6\theta)\}$. De la demostración de este resultado se sigue que

$$\alpha = -Im(\delta_6) = 0 \text{ y } \beta = Re(\delta_6) + 1 = \frac{5}{4},$$

es decir, $I_3(f)$ es exacta en $\mathcal{T}_5^0 \oplus span\{sin(6\theta)\}$. Aunque no haya exactitud en subespacios de mayor dimensión, podemos ver cómo se aproxima el valor de la integral en los ejemplos que figuran en la Tabla 3.1.

$f(\theta)$	$I_\omega(f)$	$I_n(f)$	Error
$sin(9\theta)$	0	-0.001101245268519	0.001101245268519
$\frac{1-\theta^4}{\theta^2+3}$	-0.653862047175390	-0.635287772525030	0.018574274650361
$\|\theta\|$	0.785398163397448	0.778641457043822	0.006756706353626
e^θ	1.470431164149991	1.433252089247562	0.037179074902430
$4-\theta^3$	2	2.013205296826239	0.013205296826239

Tabla 3.1. Integración numérica correspondiente a la f.c. $I_n(f)$.

No es posible construir la f.c. correspondiente a $T_{3,1}$, pues hemos visto que dos de sus ceros no son reales. Sin embargo, esto no va a ocurrir con todos los polinomios trigonométricos cuasi-ortogonales (Teorema 3.15). Si consideramos por ejemplo el polinomio $Q_{3,1} = f_3 + g_3 + f_2 + g_2$, vemos que sus ceros son

$$\eta_1 = -2.766301129137972479 09, \qquad \eta_4 = 0.962565219563740009849,$$
$$\eta_2 = -1.68793598160547136073, \qquad \eta_5 = 1.62495770113404588 2219,$$
$$\eta_3 = -0.61223999011148236125, \qquad \eta_6 = 2.47895418015714030901 0.$$

Podemos aplicar por tanto el Teorema de Jacobi 3.13 y construir la correspondiente f.c. trigonométrica $\tilde{I}_n(f)$. Los pesos vienen dados por

$$\tilde{\lambda}_1 = 0.0344892882617644 87, \qquad \tilde{\lambda}_4 = 0.0686021714207548782,$$
$$\tilde{\lambda}_2 = 0.1611884485239421612, \qquad \tilde{\lambda}_5 = 0.1216256895206063186,$$
$$\tilde{\lambda}_3 = 0.0659705582352523144, \qquad \tilde{\lambda}_6 = 0.0572771324203006448.$$

Aunque en este caso no han aparecido pesos negativos, sabemos del Teorema 3.14 que en general, la f.c. tendrá como mucho un peso negativo. Por el Teorema 3.13, sabemos que $\tilde{I}_n(f)$ es exacta en $\mathcal{T}_4^0$. En la Tabla 3.2 se muestran las aproximaciones obtenidas con esta nueva f.c. para los mismos integrandos elegidos en la Tabla 3.1. Como cabe esperar, los errores en este caso son mayores.

Por otro lado, usando el Teorema 1.14, podemos construir polinomios para-ortogonales a partir de los polinomios de Szegő. Serán de la forma $B_n(z,\tau_n) = \rho_n(z) + \tau_n\rho_n^*(z)$ donde $\tau_n \in \mathbb{T}$. Usando [4, Proposition 3.4.] y tomando $n = 6$ y $\tau_6 = 1$, obtenemos

$$B_6(z,1) = \frac{5(1-z^8)}{4(1-z^2)} = \frac{5}{4}(z^6 + z^4 + z^2 + 1).$$

Ahora bien, como $B_6(z,1)$ es un polinomio autorrecíproco, del Teorema 3.19 se sabe que $B_6(e^{i\theta},1)e^{-3i\theta}$ es cuasi-ortogonal de orden 0. En efecto,

$f(\theta)$	$I_\omega(f)$	$\tilde{I}_n(f)$	Error
$sin(9\theta)$	0	0.111344262103377	0.111344262103377
$\frac{1-\theta^4}{\theta^2+3}$	-0.653862047175390	-0.722260067355967	0.068398020180576
$\|\theta\|$	0.785398163397448	0.813531404945142	0.028133241547693
e^θ	1.470431164149991	1.548252794364294	0.077821630214303
$4-\theta^3$	2	2.101449398015498	0.101449398015498

Tabla 3.2. Integración numérica correspondiente a la f.c. $\tilde{I}_n(f)$.

$$B_6(e^{i\theta},1)e^{-3i\theta} = \tfrac{5}{4}(e^{6i\theta}+e^{4i\theta}+e^{2i\theta}+1)e^{-3i\theta} = \tfrac{5}{4}(e^{3i\theta}+e^{i\theta}+e^{-i\theta}+e^{-3i\theta})$$

$$= \tfrac{5}{4}(2cos(3\theta)+2cos(\theta)) = \tfrac{10}{4}f_3(\theta).$$

Si tomamos ahora $\tau_6=-1$, se tiene que

$$B_6(z,-1) = \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{3}(2k-3)z^{2k} = \frac{1}{7}(3z^6+z^4-z^2-3),$$

por lo tanto,

$$B_6(e^{i\theta},-1)e^{-3i\theta} = \tfrac{1}{7}(3e^{6i\theta}+e^{4i\theta}-e^{2i\theta}-3)e^{-3i\theta} = \tfrac{1}{7}(3e^{3i\theta}+e^{i\theta}-e^{-i\theta}-3e^{-3i\theta})$$

$$= \tfrac{1}{7}(6isin(3\theta)+2isin(\theta)) = \tfrac{6i}{7}g_3(\theta).$$

En definitiva, hemos ilustrado diversos resultados estudiados a lo largo de esta memoria para la función peso particular $\omega(\theta)=\frac{sin^2(\theta)}{2\pi}$. Ha quedado claro que los diferentes conceptos de ortogonalidad estudiados están estrechamente relacionados entre sí. Las aproximaciones de las integrales ilustran la mejora de precisión de las f.c. de mayor dimensión de exactitud respecto a las f.c. de grados intermedios.

A

Anexo: Problemas abiertos

Presentamos a continuación algunas cuestiones abiertas relacionadas que consideramos que para ser abordadas, esta Memoria podría representar una referencia bibliográfica preliminar de gran utilidad.

A.0.1. Fórmulas de cuadratura exactas en subespacios de $\mathcal{T}^{1/2}$

Como ya se ha comentado anteriormente, Szegő introdujo en [12] los Sistemas Bi-ortogonales de Polinomios Trigonométricos con el objetivo de introducir y caracterizar f.c. para integrandos 2π-periódicos con máximo grado de precisión trigonométrico alcanzable. Estas f.c. están basadas en los ceros de polinomios trigonométricos con ciertas condiciones de ortogonalidad, y por tanto, poseen un número par de nodos.

Las modificaciones técnicas llevadas a cabo en [2]-[3] generalizan la teoría anterior incluyendo polinomios trigonométricos de semigrado entero (véase [8]). Esto permitió solventar la restricción que poseían las f.c. estudiadas por Szegő, permitiendo ahora un número arbitrario de nodos (véase también [7]). Sin embargo, todas estas f.c. siguen siendo exactas en subespacios de polinomios trigonométricos.

Parece razonable por tanto analizar la posible construcción y caracterización de f.c. que sean exactas en subespacios de polinomios trigonométricos de semigrado entero, llevando a cabo también suficiente experimentación numérica que permita comparar estas posibles nuevas reglas de integración numérica con las descritas en esta Memoria.

A.0.2. Unificación de la teoría considerando espacios de funciones trigonométricas encajados

En esta Memoria se ha visto que el espacio de funciones trigonométricas $\mathcal{T}_n^\gamma$ dado en (2.1) ha permitido considerar f.c. trigonométricas con un número arbitrario de nodos. Sin embargo, esta sucesión de espacios no es encajada, en el sentido de que se cumple

$$\mathcal{T}_0^0 \subset \mathcal{T}_1^0 \subset \mathcal{T}_2^0 \subset \cdots, \qquad \dim\left(\mathcal{T}_n^0\right) = 2n+1,$$

$$\mathcal{T}_0^{1/2} \subset \mathcal{T}_1^{1/2} \subset \mathcal{T}_2^{1/2} \subset \cdots, \qquad \dim\left(\mathcal{T}_n^{1/2}\right) = 2n+2,$$

pero $\mathcal{T}_n^0 \not\subset \mathcal{T}_n^{1/2}$. Esto hace que en el tránsito $n \to n+1$ sea necesario cambiar por completo la base donde trabajar, siendo por tanto un proceso no dinámico.

Parece razonable plantearse buscar, al igual que en el caso polinómico ordinario, una sucesión encajada $\{\mathcal{L}_n\}_{n=0}^{\infty}$ de espacios de funciones trigonométricas verificando $\mathcal{L}_0 = \operatorname{span}\{1\}$, $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{L}_{n+1}$ y $\dim(\mathcal{L}_n) = n+1$, para todo $n \geq 0$, donde poder construir y caracterizar f.c. con el máximo grado de precisión alcanzable.

A.0.3. Generalización del Teorema 3.21

Partiendo de una f.c. de n puntos exacta en $\mathcal{T}_{n-1}^0$, fue posible encontrar en este resultado un subespacio de dimensión $2n$ (que coincide con el número de parámetros a determinar en la f.c.) donde ésta es exacta.

Parece razonable plantearse encontrar un resultado análogo para las f.c. con grados de precisión intermedios (de tipo interpolatorio) descritas en esta Memoria, las cuales están vinculadas a funciones trigonométricas cuasi-ortogonales.

A.0.4. Sistemas bi-ortogonales asociados a medidas soportadas en subconjuntos de $(-\pi, \pi]$

Un problema abierto mucho más ambicioso sería considerar las propiedades que cumplen los sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas cuando el soporte de la medida no es todo el intervalo $(-\pi, \pi]$. El análogo en la circunferencia unidad es considerar la situación en la que la medida está soportada en arcos (podría ser un solo arco, unión de arcos disjuntos, etc). Esta teoría ha sido poco estudiada en la literatura, y su vertiente trigonométrica es a día de hoy un campo prácticamente inexplorado.

A.0.5. Sistemas bi-ortogonales múltiples

Casi tan ambicioso como el problema abierto anterior sería considerar sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas donde las condiciones de ortogonalidad se encuentren repartidas entre dos o más medidas. En el caso del Eje Real, esta situación ha sido bien estudiada, pero en la circunferencia unidad son muy pocas las referencias conocidas en la literatura, por lo que su versión trigonométrica es también un campo prácticamente desconocido.

Bibliografía

[1] A. Bultheel, R. Cruz-Barroso and C. Díaz-Mendoza. *Zeros of quasi-paraorthogonal polynomials and positive quadrature*, J. Comp. Appl. Math. 407 (2022) 114039 (22 pages).

[2] R. Cruz-Barroso, L. Daruis, P. González-Vera and O. Njåstad. *Quadrature rules for periodic integrands. Bi-orthogonality and para-orthogonality*, Annales Mathematicae et Informaticae 32 (2005) 5–44.

[3] R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and O. Njåstad. *On bi-orthogonality systems of trigonometric functions and quadrature formulas for periodic integrands*, Numer Algor 44 (2007) 309–333.

[4] L. Daruis, P. González-Vera and O. Njåstad. *Szegő quadrature formulas for certain Jacobi-type weight functions*, Math. Comp. 71, No. 238 (2001) 683–701.

[5] W. B. Jones, O. Njåstad and W. J. Thron. *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued frections associated with the unit circle*, Bull. London Math. Soc. 21 (1989), 113–152.

[6] V.I. Krylov. *Approximate Calculation of Integrals*, The MacMillan Company, New York, 1962.

[7] F. Peherstorfer *Positive trigonometric quadrature formulas and quadrature on the unit circle.*, Math. Comp. 80 No. 275 (2011) 1685–1701.

[8] A. H. Turetzkii. *On quadrature formulae that are exact for trigonometric polynomials*, East Journal on approximations 11(3) (2005) 337–359.

[9] J.C. Santos-León and O. Njåstad. *Domain of validity of Szegő quadrature formulas*, J. Comp. Appl. Math. 202 (2007) 440–449.

[10] B. Simon. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1: Classical Theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 54.1, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 2005.

[11] G. Szegő. *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 23, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1975.

[12] G. Szegő. *On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials*, Magyar. Tud. Akad. Kutató Int. Közl. 8 (1963), 255–273.

[13] J. L. Walsh. *Interpolation and Approximation*, vol 20 of Amer. Math. Colloq. Publ., Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 3rd edition, 1960. First edition, 1935.

Trigonometric quadrature formulas

Aníbal Padrón López
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101413372@ull.edu.es

Abstract

The aim of this Memory is the construction and characterization of positive quadrature formulas (q.f.) that are exact in spaces of trigonometric functions for the numerical estimation of integrals with respect a positive Borel measure on $(-\pi,\pi]$ and 2π-periodic integrands. Our starting point is the one used by G. Szegő, considering bi-orthogonal systems of trigonometric functions of integer and semi-integer degree. Our main purpose is to establish a connection between q.f. on the unit circle, arising in a natural way relations between the concepts of orthogonality, para-orthogonality, quasi-orthogonality, quasi- paraorthogonality and invariance.

1. Szegő polynomials, para-orthogonality and invariance

The family of (monic) Szegő Polynomials $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ is obtained from orthogonalization of $\mathbb{P}$ with respect to the inner product $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}\tilde{\omega}(z)dz$, where $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$. They have all their zeros in $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ and satisfy the recurrence relation

$$\rho_{n+1}(z) = z\rho_n(z) + \delta_{n+1}\rho_n^*(z), \quad \forall n\geq 0,$$

where $\rho_n^*(z) = z^n\overline{\rho_n(1/\overline{z})}$ is the reciprocal polynomial of ρ_n and $\delta_m \in \mathbb{D}$ are the so-called "Verblunsky" coefficients, $n\geq 0$, $m\geq 1$.
A polynomial P of degree n is called "$k-invariant$" if $P^* = kP$, $\exists k\in\mathbb{T}$. When $k=1$, P is called "$autorreciprocal$".
A polynomial $B_{n,2l+1} \in \mathbb{P}_n\backslash\mathbb{P}_{n-1}$ is said to be quasi-paraorthogonal of exact order $2l+1$ with $0\leq l\leq E\left[\frac{n}{2}\right]-1$, if it is orthogonal to

$$\text{span}\left\{z^{l+1},\ldots,z^{n-(l+1)}\right\} \text{ and } \langle B_{n,2l+1},z^l\rangle\cdot\langle B_{n,2l+1},z^{n-l}\rangle\neq 0.$$

$B_{n,1}$ is said to be para-orthogonal and if it is invariant, then all their zeros are distinct, lie on $\mathbb{T}$ and are characterized by

$$B_{n,1}(z) = c_n(\rho_n(z)+\tau_n\rho_n^*(z)), \quad c_n\in\mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad \tau_n\in\mathbb{T}.$$

From these polynomials it is possible to construct Szegő q.f. $I_{\tilde{\omega}}(f) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(z_k)$, being $\{z_k\}_{k=1}^n$ the zeros of $B_{n,1}$ and $\lambda_k = I_{\tilde{\omega}}(l_k)$, where l_k is the fundamental Lagrange Laurent polynomials. They are the analog on the unit circle of the well known Gaussian rules on the real axis.

2. Trigonometric Polynomials of integer and semi-integer degree

Let's consider the following space of real functions:

$$\mathcal{T}_n^{\gamma} := \text{span}\{\cos(k+\gamma)\theta, \sin(k+\gamma)\theta\}_{k=0}^n \quad, \gamma\in\left\{0,\frac{1}{2}\right\},$$

that verifies $\dim\left(\mathcal{T}_n^{\gamma}\right) = 2(n+\gamma)+1$. For $\gamma=0$, we recover the usual trigonometric polynomials.
There exists a connection between trigonometric polynomials and algebraic polynomials: $T_n(\theta) = \frac{P_{2(n+\gamma)}(z)}{z^{n+\gamma}} \in \mathcal{T}_n^{\gamma}\backslash\mathcal{T}_{n-1}^{\gamma}$, with $z=e^{i\theta}$ and $P_{2(n+\gamma)}\in\mathbb{P}_{2(n+\gamma)}\setminus\mathbb{P}_{2(n+\gamma)-1}$ an autoreciprocal polynomial. This connection allows us to obtain properties for functions of $\mathcal{T}_n^{\gamma}$ from properties of algebraic autorreciprocal polynomials.

Theorem 1 *A real trigonometric polynomial $T_n\in\mathcal{T}_n^{\gamma}\backslash\mathcal{T}_{n-1}^{\gamma}$ has exactly $2(n+\gamma)$ zeros with $-\pi<\Re(\theta)\leq\pi$. Furthermore, the non-real zeros appear in conjugate pairs.*

Theorem 2 (Lagrange interpolation) *Given $2(n+\gamma)+1$ distinct nodes $\{\theta_j\}_{j=1}^{2(n+\gamma)+1}\subset(-\pi,\pi]$, there exists a unique $T_n\in\mathcal{T}_n^{\gamma}$ such that*

$$T_n(\theta_j) = y_j, \quad j=1,\ldots,2(n+\gamma)+1,$$

$\{y_j\}_{j=1}^{2(n+\gamma)+1}$ *being a given set of real numbers.*

Theorem 3 (Hermite interpolation) *Let $\{\theta_j\}_{j=1}^{n+1}$ be $(n+1)$ distinct nodes on $(-\pi,\pi]$. Then there exists a unique trigonometric polynomial $H_n\in\mathcal{T}_n^{\frac{1}{2}}$ satisfying $H_n(\theta_j)=y_j$, $H_n'(\theta_j)=y_j'$, for $j=1,\ldots,n+1$, where $\{y_j,y_j'\}_{j=1}^{n+1}$ is a set of $2n+2$ real numbers.*

3. Bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials

Given a weight function ω on $(-\pi,\pi]$, our aim now is to orthogonalize the system $\{\cos(k+\gamma)\theta, \sin(k+\gamma)\theta\}_{k=0}^n$ with respect to the inner product $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)g(\theta)\omega(\theta)d\theta$. The result is called a "*bi-orthogonal system of trigonometric polynomials*" for ω. These systems can be actually built from Szegő polynomials.
A trigonometric polynomial $T_{n,r}\in\mathcal{T}_n^{\gamma}\backslash\mathcal{T}_{n-1}^{\gamma}$ is said to be quasi-orthogonal of exact order r if it is orthogonal to $\mathcal{T}_{n-1-r}^{\gamma}$ and not orthogonal to $\mathcal{T}_{n-r}^{\gamma}$.

Theorem 4 *$T_{n,r}\in\mathcal{T}_n^{\gamma}\backslash\mathcal{T}_{n-1}^{\gamma}$ is quasi-orthogonal of exact degree r, if and only if, exists $B_{2(n+\gamma),2r+1}\in\mathbb{P}_{2(n+\gamma)}\backslash\mathbb{P}_{2(n+\gamma)-1}$ quasi-paraorthogonal of degree $2r+1$ and autorreciprocal such that*

$$B_{2(n+\gamma),2r+1}(e^{i\theta}) = e^{i(n+\gamma)\theta}T_{n,r}(\theta).$$

The main purpose is the approximate calculation of integrals of the form

$$I_{\omega}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\omega(\theta)d\theta$$

by means of a q.f. like:

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_k f(\theta_j), \;\; \theta_j\neq\theta_k \;\text{ if }\; j\neq k, \; \theta_j\in(-\pi,\pi], \; j=1,\ldots,n.$$

Theorem 5 (Jacobi) *Let $I_n(f)$ be a q.f. for $I_\omega(f)$ with $n=2(t+\gamma)$. Then, $I_n(f)$ is exact in $\mathcal{T}_{n-r-1}^0$, if and only if,*

1. *$I_n(f)$ is exact in a certain subspace $\mathcal{L}_n\subset\mathcal{T}_{n-1}^0$ of dimension n.*
2. *The nodal trigonometric function $T_t\in\mathcal{T}_t^{\gamma}$ is quasi-orthogonal of exact degree r.*

Among the new results of this Memory, it stand out also the following

Theorem 6 (Increase in precision dimension) *Let $I_n(f)$ be a n-point q.f ($n\geq 1$) exact in $\mathcal{T}_{n-1}^0$. Then two real numbers α,β not both zero can be determined such that*

$$I_n(f) \textit{ is exact in } \mathcal{T}_{n-1}^0\oplus span\left\{\alpha cos(n\theta)+\beta sin(n\theta)\right\}.$$

Some numerical experiment are finally carried out and a list of related open problems is presented.

References

[1] R. Cruz-Barroso, L. Daruis, P. González-Vera and O. Njåstad. Quadrature rules for periodic integrands. Bi-orthogonality and para-orthogonality. *Annales Mathematicae et Informaticae* 32 (2005) 5–44.

[2] R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and O. Njåstad. On bi-orthogonal systems of trigonometric functions and quadrature formulas for periodic integrands. Numer. Algor. 44 (2007) 309-333.

[3] W. B. Jones, O. Njåstad and W. J. Thron. *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle*, Bull. London Math. Soc. 21 (1989), 113–152.

[4] G. Szegő. On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials. *Magyar Tud. Alcad. Kutató Int. Közl* 8 (1963) 255–273.