

Jorge David Ávila Álvarez

Grafos y grupos

Graphs and groups

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Mayo de 2024

DIRIGIDO POR
Ignacio García Marco

Ignacio García Marco
Matemáticas, Estadística e
Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi tutor, Ignacio García Marco, por brindarme la oportunidad de realizar este trabajo y por su guía a lo largo de este proceso.

Agradecer a todos los buenos profesores que he tenido durante mi grado. Su dedicación y los conocimientos impartidos, así como sus consejos, han sido fundamentales en mi formación académica.

Un agradecimiento especial a mi familia, y en particular a mi madre y a mi padre, por su amor, su educación y por convertirme en la persona que soy hoy.

Finalmente, quiero agradecer a mi novia Ana, quien ha estado a mi lado ofreciéndome su apoyo incondicional y su amor durante este camino, y a mis amigos, tanto a aquellos de toda la vida como a los que he conocido durante la etapa universitaria. En especial a Marcos, Araceli, Michael, Jesús, Ainhoa e Irene, por su apoyo constante y por estar siempre ahí cuando los he necesitado. Su amistad ha sido un pilar en mi vida y en este viaje académico.

Jorge David Ávila Álvarez
La Laguna, 20 de mayo de 2024

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo de este trabajo es establecer conexiones entre la teoría de grupos y la teoría de grafos. Para ello se introducirán los grafos de Cayley y se utilizarán para demostrar que todo grupo finito es el grupo de automorfismos de un grafo finito (Teorema de Frucht). Asimismo se caracterizará cuándo un grafo es de Cayley en función de su grupo de automorfismos (Teorema de Sabidussi). Además estudiaremos dos problemas clásicos de la teoría de grafos: el cómputo del número cromático y la determinación de grafos hamiltonianos. Estudiaremos estos problemas en el contexto de los grafos de Cayley y obtendremos resultados haciendo uso de su estructura algebraica.

Palabras clave: *Grupos – Grafos de Cayley – Número cromático – Grafo hamiltoniano.*

Abstract

The aim of this work is to establish connections between group theory and graph theory. To this end, Cayley graphs will be introduced and used to prove that every finite group is the automorphism group of a finite graph (Frucht's Theorem). Additionally, we will characterize when a graph is a Cayley graph based on its automorphism group (Sabidussi's Theorem). Furthermore, we will study two classic problems in graph theory: the computation of the chromatic number and the determination of hamiltonian graphs. We will study these problems in the context of Cayley graphs and obtain results using their algebraic structure.

Keywords: *Groups – Cayley graphs – Chromatic number – hamiltonian graph.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Grafos y grupos	1
1.1. De grafos a grupos: el grupo de automorfismos de un grafo	1
1.2. De grupos a grafos: grafos de Cayley de un grupo	6
2. Teoremas de Frucht y Sabidussi	13
2.1. El Teorema de Frucht	13
2.2. El Teorema de Sabidussi	16
3. El número cromático de un grupo	21
3.1. El número cromático de un grafo.	21
3.2. El número cromático mínimo de un grupo	26
3.3. El número cromático máximo de un grupo	28
3.3.1. Grupos abelianos finitos	29
3.3.2. Grupos nilpotentes finitos	30
4. Grupos hamiltonianos	35
Bibliografía	45
Poster	47

Introducción

La teoría de grupos es un área de las matemáticas que estudia los grupos, conjuntos dotados de una operación binaria, que es asociativa, tiene elemento neutro y cada elemento tiene inverso. El concepto de grupo sirve para modelizar simetrías en diversidad de contextos. Por este motivo la teoría de grupos tiene una gran diversidad de aplicaciones, pues los grupos son utilizados en, por ejemplo, topología, para clasificar espacios topológicos homotópicos, física cuántica, para estudiar la simetría de las partículas elementales, biología, en el estudio de la estructura de las proteínas, o en informática, en la teoría de codificación.

Los grafos de Cayley son una herramienta que permite estudiar la estructura y propiedades de los grupos. Un grafo de Cayley se construye a partir de un grupo y un conjunto de generadores. Los vértices del grafo son los elementos del grupo, y las aristas conectan pares de elementos que se pueden obtener uno del otro mediante la multiplicación por un generador. Estos grafos fueron propuestos por primera vez en 1878 por el matemático británico Arthur Cayley [5]. Cayley pretendía representar gráficamente los grupos abstractos para poder estudiar de una forma más visual sus propiedades. Más tarde, en 1909, Max Dehn reintrodujo los grafos de Cayley bajo el nombre de *Gruppenbild* (diagrama de grupo). Una de las aplicaciones más importantes que consiguió fue la solución al problema de la palabra en grupos fundamentales de superficies, problema que es indecible para grupos en general. El problema de la palabra consiste en, dada una presentación de un grupo y un elemento del grupo, determinar si el elemento es el neutro. Este problema en los grupos fundamentales es equivalente al de determinar cuándo una curva cerrada sobre una superficie es contráctil. Este avance dió nacimiento a la conocida como teoría geométrica de grupos, tema de investigación muy activo en la actualidad.

Por otro lado, los grafos, un conjunto de vértices conectados por un conjunto de aristas, son una herramienta potente que permite modelar relaciones entre objetos de una manera simple y visual. Son importantes, entre muchos motivos, debido a su versatilidad ya que se pueden usar para representar una amplia variedad de sistemas en diferentes áreas del conocimiento, como la físi-

ca, la química, la informática, la biología, la economía y las ciencias sociales. Además, se pueden utilizar para resolver problemas de optimización en diversos campos, como la planificación de rutas, la asignación de recursos y el diseño de redes.

Algunos de los problemas clásicos de la teoría de grafos son el estudio del número cromático y el problema del ciclo o camino hamiltoniano. El número cromático de un grafo es el mínimo número de colores con los que se pueden colorear los vértices de un grafo de forma de que dos vértices conectados por una arista no tengan asignado el mismo color. El estudio de este número tiene diversas aplicaciones, uno de los resultados más relevantes es el Teorema de los cuatro colores, que establece que cualquier mapa geográfico puede ser coloreado en este sentido con cuatro o menos colores. Además, tiene utilidad en campos como la genética, pues se puede utilizar para analizar la estructura de los cromosomas y encontrar anomalías en ellos. Por otro lado, el problema del ciclo hamiltoniano consiste en encontrar un camino en un grafo, que empiece y acabe en el mismo vértice, y que pase por todos los vértices del grafo exactamente una vez. Este problema tiene interés sobre todo en el ámbito de la optimización, como por ejemplo en planificación de tareas, encontrando la secuencia más eficiente que pase por todas las tareas. Además, también tiene utilidad en electrónica a la hora de diseñar y probar circuitos electrónicos que necesiten de que un camino pase por todas las componentes.

Estos dos problemas son muy complejos. Desde un punto de vista teórico, muchas de las conjeturas sin resolver de la teoría de grafos tratan sobre el número cromático o sobre grafos hamiltonianos. Por otro lado, desde un punto de vista computacional, no se conocen algoritmos eficientes que reciban un grafo y determinen su número cromático o si contiene un ciclo hamiltoniano. En este trabajo se estudiarán estos dos problemas en el contexto de los grafos de Cayley, explotando la estructura de grupo subyacente para proporcionar resultados. De esta forma se establecerá una conexión entre estas dos ramas de las matemáticas.

En el primer capítulo se dará una introducción a la teoría de grafos. Definiremos el grupo de automorfismos de un grafo, introduciremos de forma formal los grafos de Cayley de un grupo y estudiaremos la relación entre el grupo de automorfismos de un grafo de Cayley y el propio grupo.

En el segundo capítulo se dará entrada a dos teoremas que hacen de puente entre la teoría de grupos y la teoría de grafos. En primer lugar se enunciará y demostrará el Teorema de Frucht, que establece la universalidad del grupo de automorfismos de un grafo, es decir, que todo grupo finito es grupo de automorfismos de un grafo, también finito. Para la prueba haremos uso de los grafos de Cayley y de la teoría desarrollada en el primer capítulo. En segundo lugar se estudiará el problema de caracterizar cuándo un grafo es de Cayley. La respuesta a esta cuestión viene dada por el conocido como Teorema de Sabidussi que

caracteriza cuando un grafo es de Cayley en función de su grupo de automorfismos. Para terminar el capítulo se utilizará este último teorema para dar el primer ejemplo de un grafo transitivo que no es de Cayley, el grafo de Petersen.

En el tercer capítulo abordaremos el estudio del número cromático en grafos de Cayley. Primero presentaremos algunos resultados conocidos para grafos en general, como el Teorema de Brooks. En segunda instancia nos restringiremos al estudio en los grafos de Cayley, se definirá el número cromático mínimo/máximo de un grupo como el menor/mayor número cromático de sus grafos de Cayley. Enunciaremos y demostraremos un resultado de Babai, en donde se demuestra que el número cromático mínimo de un grupo finito es menor o igual a tres. Respecto al número cromático máximo, dar una cota a este valor es un problema abierto en grupos en general. Sin embargo lo resolveremos para grupos abelianos y nilpotentes.

Para finalizar, en el capítulo cuatro abordaremos el problema del ciclo hamiltoniano en grafos de Cayley. De esta forma se estudiará una versión de la conjetura de Lovász, la cual afirma que todo grafo de Cayley conexo posee un ciclo hamiltoniano. Se demostrará que todo grafo de Cayley de un grupo abeliano y del grupo diedral D_p con p primo poseen un ciclo hamiltoniano. Además, se probará que cualquier grafo de Cayley de un grupo de Dedekind tiene un camino hamiltoniano.

En resumen, el trabajo pretende adentrarse en el mundo de la teoría de grafos bajo un punto de vista algebraico, usando como herramienta principal los grafos de Cayley. Se busca hacer una introducción a diferentes temas de investigación abiertos en la actualidad. Además de la elección de los temas y resultados a tratar, y la forma de presentarlos, son aportaciones propias:

- La demostración del Teorema de Frucht (Teorema 2.1). En este teorema de muestra cómo construir, dado un grupo Γ , un grafo G de forma que su grupo de automorfismos sea exactamente Γ . En la demostración original de Frucht se busca minimizar el número de vértices de G . Sin embargo, en la demostración incluida en esta memoria se aporta un grafo (con más vértices) que permite simplificar algunas partes técnicas de la demostración.
- El estudio de cuándo el número cromático máximo de un grupo Γ , $\chi_{\max}(\Gamma)$, es igual a dos. Este problema es equivalente al de caracterizar los grupos tales que todos sus grafos de Cayley, respecto de un sistema generador minimal, son bipartitos. En la Proposición 3.18 se demuestra que si Γ es un grupo abeliano, entonces $\chi_{\max}(\Gamma) = 2$ si y solo si Γ es un 2-grupo. Además, en la Proposición 3.27 se prueba que si Γ es un 2-grupo (abeliano o no), entonces $\chi_{\max}(\Gamma) = 2$. Además si Γ es nilpotente o, más generalmente, resoluble, se puede demostrar que $\chi_{\max}(\Gamma) = 2$ si y solo si Γ es un 2-grupo. Esto nos anima a conjeturar que, quizás, se pueda eliminar la hipótesis de resoluble.

- Por último, se aporta una segunda demostración propia (Proposición 4.8) de que el grafo de Petersen no es de Cayley, utilizando varios resultados recogidos en la memoria.

Grafos y grupos

En este capítulo se introducirán los primeros conceptos necesarios sobre grafos y grupos, así como la notación que usaremos a lo largo del trabajo. Además se demostrarán algunas propiedades básicas que se utilizarán con frecuencia. El capítulo se divide en dos secciones. En la primera se hará una introducción básica a la teoría de grafos, se definirá el grupo de automorfismos de un grafo, el grado, los caminos y los conceptos de transitividad y asimetría. En la segunda sección se introducirán los grafos de Cayley y se estudiará la relación de estos grafos con su grupo de automorfismos.

1.1. De grafos a grupos: el grupo de automorfismos de un grafo

Denotaremos a un grafo como $G = (V, E)$ donde V es el conjunto de los vértices del grafo y E el conjunto de las aristas. Salvo que se mencione lo contrario, todos los grafos tendrán un conjunto V , finito de vértices, serán simples (es decir, sin aristas dobles ni bucles), no serán dirigidos y el subconjunto $\{u, v\} \subset V$ denotará la arista entre u y v , siendo estos dos vértices distintos del grafo. Procedamos ahora con la definición del grupo de automorfismos de un grafo.

Definición 1.1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo, un automorfismo de G es una aplicación biyectiva $f : V \rightarrow V$ que cumple que:*

$$\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E.$$

De forma natural, se define el grupo de automorfismos de G como el conjunto $\text{Aut}(G) = \{f \mid f \text{ es un automorfismo de } G\}$, dotado de la operación binaria $\cdot : \text{Aut}(G) \times \text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(G)$ definida como $f \cdot g = g \circ f$.

El par $(\text{Aut}(G), \cdot)$ es un grupo, es más, es un subgrupo de $\text{Sym}(V)$, el grupo de las permutaciones de los elementos de V . En efecto, si $f \in \text{Aut}(G)$ entonces

$f : V \rightarrow V$ es biyectiva y, por tanto, $f \in \text{Sym}(V)$. Además el producto es una ley de composición interna ya que si $f, g \in \text{Aut}(G)$, entonces $g \circ f$ es biyectiva y:

$$\{u, v\} \in E \xLeftrightarrow{f \in \text{Aut}(G)} \{f(u), f(v)\} \in E \xLeftrightarrow{g \in \text{Aut}(G)} \{g(f(u)), g(f(v))\} \in E.$$

Por tanto, la composición de automorfismos es un automorfismo de G . Además, como $\text{Sym}(V)$ es un grupo finito, el inverso de cualquier automorfismo vuelve a ser un automorfismo. Con esto concluimos entonces que $(\text{Aut}(G), \cdot)$ es un grupo. Veamos en la Figura 1.1 algunos ejemplos de grupo de automorfismos.

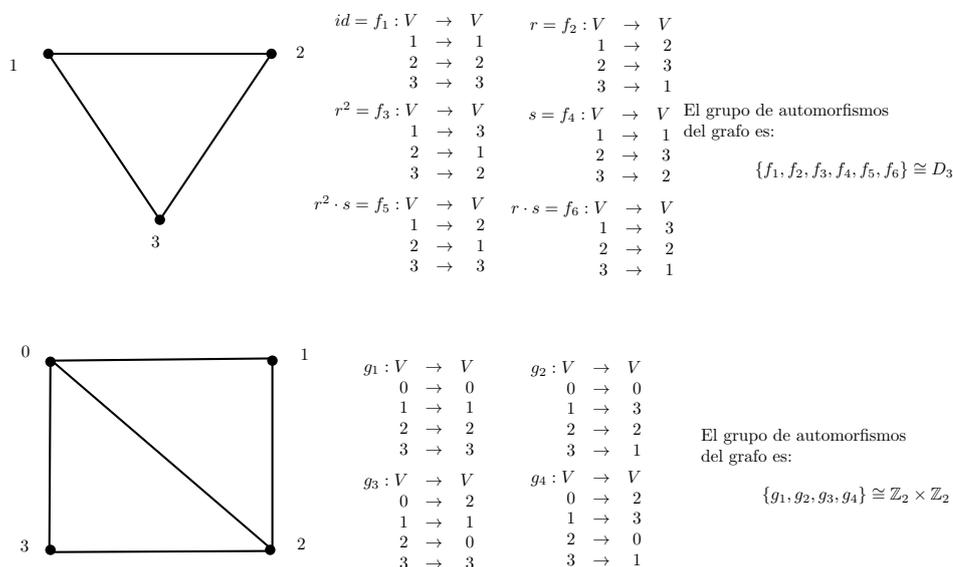


Figura 1.1. Grafos con grupo de automorfismos isomorfo al grupo diedral D_3 y a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

A continuación daremos los conceptos de grado, camino y distancia en grafos. Además demostraremos que los automorfismos preservan grados y distancias.

Definición 1.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $v \in V$ un vértice, se define el grado de v como el número de aristas incidentes en v , y lo denotamos por $\text{deg}(v)$. Al ser G simple este número coincide con el número de vecinos de v , es decir:

$$\text{deg}(v) = \#\{u \in V / \{v, u\} \in E\}.$$

Denotaremos por $\Delta(G)$ al mayor de los grados del grafo G . Diremos que G es regular si para todo par de vértices $u, v \in V$ se tiene que $\text{deg}(u) = \text{deg}(v) = k$. En este caso, diremos que G es un grafo k -regular.

Proposición 1.3. Sean $G = (V, E)$ un grafo y $f \in \text{Aut}(G)$. Si $u, v \in V$ son dos vértices tales que $f(u) = v$, entonces $\deg(u) = \deg(v)$.

Demostración. Sean $u, v \in V$ tales que $f(u) = v$. Supongamos además que $\deg(u) = d$. Por tanto, existen $w_1, \dots, w_d \in V$ tales que $\{u, w_i\} \in E$ para todo i . De la definición de automorfismo se tiene que $\{v, f(w_i)\} \in E$. Además, del hecho de que f es inyectiva se tiene que $f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_d)$ son vértices distintos de V con lo que deducimos que $\deg(u) \leq \deg(v)$.

Por otro lado, $\text{Aut}(G)$ es grupo, por lo que f^{-1} es un automorfismo cumpliendo que $f^{-1}(v) = u$. Siguiendo el mismo razonamiento que antes tenemos que $\deg(v) \leq \deg(u)$. Juntando las dos desigualdades concluimos que $\deg(u) = \deg(v)$. \square

Definición 1.4. Sea $G = (V, E)$ un grafo, y $u, v \in V$ dos vértices.

- Un camino de longitud ℓ entre u, v es una $\ell + 1$ tupla $(a_0, a_1, \dots, a_\ell) \in V^{\ell+1}$ con $a_0 = u$ y $a_\ell = v$ que cumple que $\{a_{i-1}, a_i\} \in E$ para todo $i \in \{1, \dots, \ell\}$. En el caso de que $u = v$ y que $a_i \neq a_j$ para $1 \leq i < j \leq \ell$, diremos que el camino es un ciclo.
- La distancia entre u, v es la menor longitud de un camino entre u, v , la denotaremos por $d(u, v)$. En caso de no existir un camino entre u, v diremos que $d(u, v) = \infty$.
- Decimos que el grafo G es conexo si para cualquier par de vértices $u, v \in V$ existe un camino entre ellos.

Proposición 1.5. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $u, v \in V$ dos vértices. Si f es un automorfismo de G entonces $d(u, v) = d(f(u), f(v))$.

Demostración. Sea f un automorfismo de G y $\alpha = (u, a_1, \dots, a_{\ell-1}, v)$ un camino con longitud igual a la distancia entre u y v . Como f es automorfismo y $\{a_{i-1}, a_i\} \in E$, tenemos que $(f(u), f(a_1), \dots, f(a_{\ell-1}), f(v))$ es un camino entre $f(u)$ y $f(v)$ de longitud ℓ , por lo que $d(f(u), f(v)) \leq d(u, v)$. Razonando de igual manera con f^{-1} se obtiene la igualdad. \square

Definición 1.6. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que:

- G es transitivo si dados cualesquiera dos vértices $u, v \in V$, existe un automorfismo $f \in \text{Aut}(G)$ tal que $f(u) = v$.
- G es un grafo asimétrico si $\text{Aut}(G) = \{1\}$.

Lema 1.7. Todo grafo transitivo es regular.

Demostración. Sean $G = (V, E)$ un grafo transitivo y $u, v \in V$. Como G es transitivo, existe $f \in \text{Aut}(G)$ tal que $f(u) = v$ y por la Proposición 1.3 tenemos que $\deg(u) = \deg(v)$. Concluimos entonces que G es regular. \square

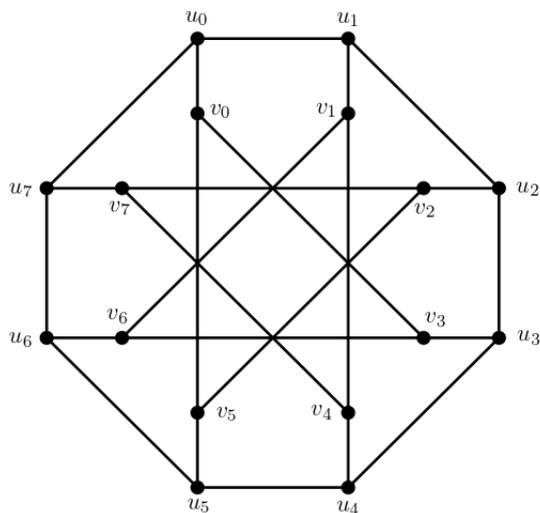


Figura 1.2. Grafo de Möbius-Kantor.

Un ejemplo de grafo transitivo es el grafo de Möbius-Kantor que se encuentra en la Figura 1.2. La justificación de que este grafo es transitivo se obtendrá como Corolario de la Proposición 2.6 en el capítulo dos. Un ejemplo más sencillo es el grafo con n vértices y cada par de vértices conectados por una arista. (Ver Figura 1.3). Este grafo se denomina el grafo completo con n vértices y se denota por \mathcal{K}_n .

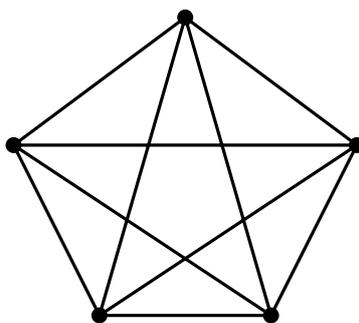


Figura 1.3. Grafo completo \mathcal{K}_5 es transitivo.

El grafo \mathcal{K}_n es transitivo pues su grupo de automorfismos es el grupo de las permutaciones de n elementos. Para cualquier par de vértices podemos considerar el automorfismo que los permuta, teniendo así la transitividad.

A continuación, presentamos una familia infinita de grafos asimétricos $\{C_i\}_{i \geq 1}$, estos serán clave en la demostración del Teorema de Frucht en el Capítulo dos.

Definición 1.8. Definimos el grafo C_i , $i \geq 1$ como el grafo formado por los vértices $V = \{1, 2, \dots, 6 + i\}$ y que tiene como únicas aristas las pertenecientes a los caminos $(1, 2, 3, 4)$ y $(3, 5, 6, \dots, 6 + i)$ (ver Figura 1.4).

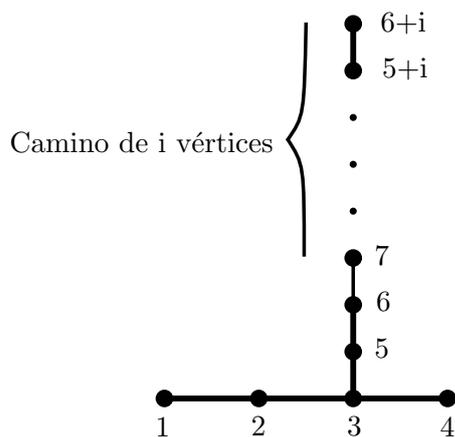


Figura 1.4. Familia infinita de grafos asimétricos.

Lema 1.9. El grafo C_i es asimétrico para todo $i \geq 1$.

Demostración. Sea $f \in \text{Aut}(C_i)$. Por la Proposición 1.3 se deduce que $f(3) = 3$ pues es el único vértice de grado tres. Además, por la propia definición de automorfismo, y la misma Proposición 1.3, $f(4) = 4$ pues es el único vértice de grado uno con un vecino de grado tres y $f(2) = 2$ pues no hay otro vértice con un vecino de grado uno y otro de grado tres. De aquí como $f(1)$ debe ser vecino de 2 y $f(1) \neq f(3) = 3$, tenemos que $f(1) = 1$. Además, $f(5) = 5$ pues $f(5)$ debe ser un vecino de 3 y los demás vecinos de 3 hemos visto que son puntos fijos. Por último, $f(6) = 6$ pues $f(6)$ tiene que ser adyacente a 5 y $f(6) \neq f(3) = 3$ y, con un razonamiento similar, los vértices del camino restante deben mantenerse constantes bajo f . Concluimos así que f debe ser la identidad y, por tanto, $\text{Aut}(C_i) = \{1\}$. \square

En el Lema 1.7 vimos que todo grafo transitivo es regular, sin embargo, el recíproco no es cierto, es más, existen grafos regulares y asimétricos. El ejemplo clásico de grafo regular y asimétrico es el denominado grafo de Frucht (ver Figura 1.5).

Robert Wertheimer Frucht fue un matemático chileno-alemán especializado en la teoría de grafos y simetrías asociadas a estos. Algunas de sus contribuciones son el **Teorema de Frucht**, que trataremos más adelante, y el **grafo de Frucht**, un grafo regular de grado 3 descrito por el mismo en 1938 [8].

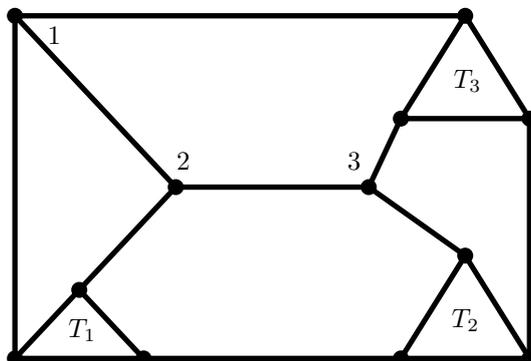


Figura 1.5. El grafo de Frucht.

El grafo consta de 12 vértices dispuestos formando tres triángulos T_1 , T_2 , T_3 y tres vértices, 1, 2, 3, ajenos a los triángulos. A continuación se verá que, en efecto, el grafo es asimétrico.

Proposición 1.10. *El grafo de Frucht es asimétrico.*

Demostración. Sea f un automorfismo del grafo de Frucht. En primer lugar, por la definición de automorfismo, si $u, v, w \in V$ forman un triángulo, entonces sus imágenes $f(u), f(v), f(w)$ también deben formar un triángulo. Por tanto las imágenes de los vértices de un T_i deben formar algún T_j . Con esto se tiene además que $\{1, 2, 3\} = \{f(1), f(2), f(3)\}$.

Por otro lado, definiendo la distancia de un vértice a un triángulo como la menor distancia a alguno de sus vértices, tenemos que 1, 2, 3 tienen distancias distintas a los triángulos T_1, T_2 y T_3 . Y con la Proposición 1.5 se puede deducir que $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ y $f(3) = 3$. Además, T_1 es el único triángulo con un vértice vecino a 2 con lo que la imagen de T_1 es el mismo. Así mismo T_2 es el único que es adyacente a los otros dos triángulos por tanto la imagen de T_2 y T_3 también deben ser ellos mismos.

Por último solo queda ver que los vértices de un triángulo no permutan entre ellos. Esto se deduce del hecho que 1, 2, 3 son puntos fijos y de que hay un único vértice en T_2 a distancia uno de T_1 (respectivamente de T_3). \square

1.2. De grupos a grafos: grafos de Cayley de un grupo

En esta sección trabajaremos con la definición de grafo de Cayley. Salvo que se mencione lo contrario nos referiremos siempre a grupos finitos, aunque muchas de las definiciones y propiedades siguientes se pueden extender para grupos infinitos.

Se utilizarán grafos dirigidos y con arcos coloreados, $D = (V, A, C)$, donde V es un conjunto de vértices, C es un conjunto finito (colores) y A un conjunto

de arcos. Para referirnos a los arcos denotamos el arco de $a \in V$ hacia $b \in V$ con color $c \in C$ como $\{(a, b), c\}$.

Definición 1.11. Sea Γ un grupo, $S = \{s_1, \dots, s_r\} \subset \Gamma$ un subconjunto que no contenga al neutro de Γ . Se define:

- El grafo de Cayley de Γ asociado a S como $\text{Cay}(\Gamma, S)$ el grafo con conjunto de vértices $V = \Gamma$ y aristas los subconjuntos $\{a, a \cdot s\}$ tal que $s \in S$, es decir:

$$E = \{\{a, b\} \subset \Gamma / a \cdot b^{-1} \in S \vee b \cdot a^{-1} \in S\}.$$

- El grafo de Cayley coloreado y dirigido de Γ asociado a S como el grafo $\text{ColCay}(\Gamma, S)$ con conjunto de vértices $V = \Gamma$, conjunto de colores S y conjunto de arcos coloreados:

$$A = \{\{(a, b), s_i\} / a \cdot s_i = b\}.$$

Algunos ejemplos de estos grafos se ven en la Figura 1.6. En esta definición se puede observar que el grafo de Cayley no solo depende del grupo Γ , sino también del conjunto S que estamos tomando. Es más, podemos inferir alguna propiedad del grafo si conocemos propiedades de S .

Proposición 1.12. Sea Γ un grupo y $S \subset \Gamma$ un conjunto que no contenga al neutro. Entonces, el grafo de Cayley $\text{Cay}(\Gamma, S)$ es conexo si y solo si S es un conjunto generador de Γ .

Demostración. Supongamos que $\text{Cay}(\Gamma, S)$ es un grafo conexo y sea $a \in \Gamma$. Como el grafo es conexo entonces existe un camino desde el neutro de Γ hasta a , es decir, existe $\alpha = (1, a_1, \dots, a_\ell, a)$ en $\text{Cay}(\Gamma, S)$. Entonces, por la Definición 1.11, existen $s_0, \dots, s_{\ell-1} \in S \cup S^{-1}$, con S^{-1} el conjunto de los inversos de S , tales que $1 \cdot s_0 = a_1, a_1 \cdot s_1 = a_2, \dots, a_{\ell-1} \cdot s_{\ell-1} = a$. Observamos que como Γ es finito entonces $S^{-1} \subset \langle S \rangle$. Por lo que concluimos entonces que $a = s_0 \cdot \dots \cdot s_{\ell-1} \in \langle S \rangle$.

Supongamos ahora que S genera al grupo, y sea $a \in \Gamma$ un elemento del grupo. Veamos que existe un camino entre a y el 1. Como S es generador, entonces $a = s_1 \cdot \dots \cdot s_\ell$ con $s_i \in S$ para todo i . Además $\{s_1 \cdot \dots \cdot s_{i-1}, s_1 \cdot \dots \cdot s_i\}$ es arista, por lo que basta considerar el camino $(1, s_1, s_1 \cdot s_2, \dots, s_1 \cdot \dots \cdot s_\ell = a)$. Ahora, si tomamos dos elementos a, b cualesquiera del grupo, tenemos que hay un camino de a hasta el 1 y otro del 1 hasta b . La concatenación de estos dos caminos es otro camino que va desde a hasta b . \square

A continuación vamos a estudiar ciertas propiedades del grupo de automorfismos del grafo de Cayley coloreado y dirigido, veamos primero su definición.

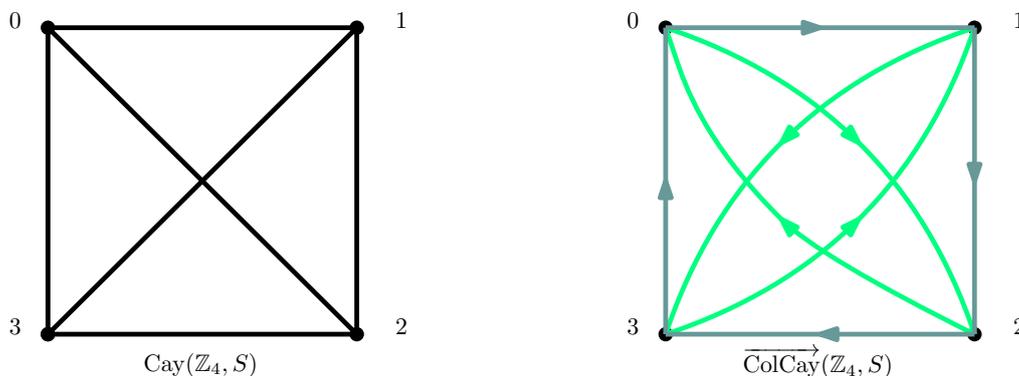


Figura 1.6. Grafos de Cayley de \mathbb{Z}_4 con $S = \{1, 2\}$.

Definición 1.13. Sea $D = (V, A, C)$ un grafo coloreado y dirigido, definimos un automorfismo coloreado y dirigido de D como una aplicación $f : V \rightarrow V$ biyectiva que conserva la dirección de los arcos y los colores, es decir, cumple que:

$$\{(a, b), c\} \in E \iff \{(f(a), f(b)), c\} \in E.$$

Definimos el grupo de automorfismos coloreados y dirigidos de D como $\text{Aut}(D)$. La demostración de que $(\text{Aut}(D), \cdot)$, donde \cdot es la aplicación composición, es grupo sigue de igual manera que en el caso no dirigido.

Lema 1.14. Sea Γ un grupo y $S \subset \Gamma \setminus \{1\}$, entonces:

$$\text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)) \leq \text{Aut}(\text{Cay}(\Gamma, S)).$$

Demostración. Como ambos son grupos, basta ver el contenido. Denotaremos el conjunto de arcos de $\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)$ como A y el de aristas de $\text{Cay}(\Gamma, S)$ como E .

Sea $f \in \text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S))$ y $\{a, b\} \in E$ entonces por la Definición 1.11 existe $s \in S$ tal que $a \cdot s = b$ o $b \cdot s = a$. Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que se cumple $a \cdot s = b$, tenemos que:

$$\begin{aligned} a \cdot s = b &\iff \{(a, b), s\} \in A \iff \{(f(a), f(b)), s\} \in A \iff \\ &\iff f(a) \cdot s = f(b) \iff \{f(a), f(b)\} \in E. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $\{a, b\} \in E \iff \{f(a), f(b)\} \in E$, lo cual implica que $f \in \text{Aut}(\text{Cay}(\Gamma, S))$. \square

En general estos dos grupos no son iguales, como se muestra en la Figura 1.7. Como vimos en la Figura 1.1, $\text{Aut}(G) = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\} \cong D_3$, sin embargo, $\text{Aut}(D) = \{f_1, f_2, f_3\} \cong \mathbb{Z}_3$.



Figura 1.7. $G = \text{Cay}(\mathbb{Z}_3, \{1\})$ y $D = \overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, \{1\})$.

Calcular el grupo de automorfismos de un grafo en general puede ser un problema muy complicado, sin embargo, para $\text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S))$ vamos a poder determinar todos los elementos en el caso de que S sea un conjunto generador. Para ello definimos la aplicación $f_a : \Gamma \rightarrow \Gamma$ como $f_a(x) = a \cdot x$ para todo $a \in \Gamma$. Veamos que estas aplicaciones son, en efecto, los elementos de $\text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S))$.

Lema 1.15. *Sea Γ un grupo y $S \subset \Gamma \setminus \{1\}$, entonces, $f_a \in \text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S))$ para todo $a \in \Gamma$.*

Demostración. Sea $a \in \Gamma$. Veamos que f_a es un automorfismo coloreado y dirigido. Para ver la biyectividad basta ver que es inyectiva pues Γ es un grupo finito. En efecto, si $x, y \in \Gamma$ cumplen que $f_a(x) = f_a(y) \Rightarrow a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$. Falta ver que f_a conserva los arcos, y esto se cumple pues si:

$$\{(x, y), s\} \in A \iff x \cdot s = y, \quad s \in S \iff a \cdot x \cdot s = a \cdot y \iff \{(f_a(x), f_a(y)), s\} \in A.$$

Por tanto $f_a \in \text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S))$. □

Proposición 1.16. *Sea Γ un grupo y $S \subset \Gamma \setminus \{1\}$ un conjunto generador, es decir, $\langle S \rangle = \Gamma$. Entonces:*

$$\text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)) = \{f_a : \Gamma \rightarrow \Gamma / f_a(x) = a \cdot x, a \in \Gamma\}.$$

Demostración. En virtud del lema anterior basta probar un contenido. Sea $f \in \text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S))$ y sea $a := f(1)$. De la Definición 1.11 tenemos que:

$$x \cdot s = y \iff f(x) \cdot s = f(y).$$

Sea $x \in \Gamma$ y $s \in S$, entonces $\exists y \in \Gamma$ tal que $x \cdot s = y$, por lo que $f(x) \cdot s = f(y)$. Aplicando f a la primera igualdad tenemos que $f(x \cdot s) = f(y) = f(x) \cdot s$, por lo que $\forall x \in \Gamma, s \in S$ tenemos que:

$$f(x \cdot s) = f(x) \cdot s. \tag{1.1}$$

Como por hipótesis S genera a Γ , tenemos que $x = s_1 \cdot s_2 \cdots s_r$ con $s_i \in S, \forall i \in \{1, \dots, r\}$. Entonces:

$$f(x) = f(s_1 \cdots s_r) \stackrel{(1.1)}{=} f(s_1 \cdots s_{r-1}) \cdot s_r = \cdots = f(s_1) \cdot s_2 \cdots s_r \stackrel{(1.1)}{=} f(1) \cdot x$$

Por lo tanto $f \in \{f_a : \Gamma \rightarrow \Gamma / f_a(x) = a \cdot x, a \in \Gamma\}$. □

Como consecuencia de los Lemas 1.14, 1.15 y la Proposición 1.16 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.17. *Sea Γ un grupo y $S \subset \Gamma \setminus \{1\}$. Entonces, $\text{Cay}(\Gamma, S)$ es un grafo transitivo y, por tanto, regular.*

Demostración. Sean $a, b \in \Gamma$, entonces por el Lema 1.15, tenemos que $f_{ba^{-1}} \in \text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S))$ y por tanto, por el Lema 1.14 se tiene que $f \in \text{Cay}(\Gamma, S)$. Y como $f(a) = b$, tenemos que para todo $a, b \in \Gamma$ se tiene que existe $f \in \text{Cay}(\Gamma, S)$ tal que $f(a) = b$, por lo que el grafo es transitivo y por tanto, por el Lema 1.7, también es regular. \square

Veamos ahora que el grado de un grafo de Cayley coincide con el número de elementos de $S \cup S^{-1}$, siendo $S^{-1} = \{s^{-1}/s \in S\}$.

Lema 1.18. *Sea Γ un grupo y S un subconjunto de $\Gamma \setminus \{1\}$. Entonces,*

$$\text{Cay}(\Gamma, S) = \text{Cay}(\Gamma, S \cup S^{-1}).$$

Demostración. Ambos grafos tienen el mismo conjunto de vértices por lo que solo debemos ver que tienen las mismas aristas. En efecto, si $\{a, b\}$ es una arista de $\text{Cay}(\Gamma, S \cup S^{-1})$ separamos dos casos.

- Si $\exists s \in S$ tal que $b = a \cdot s$, entonces $\{a, b\}$ es arista de $\text{Cay}(\Gamma, S)$.
- Si $\exists s \in S$ tal que $b = a \cdot s^{-1}$, entonces $b \cdot s = a$ y, por tanto, $\{a, b\}$ es arista de $\text{Cay}(\Gamma, S)$.

\square

Proposición 1.19. *Sea Γ un grupo y $S \subset \Gamma \setminus \{1\}$. Entonces, $\Delta(\text{Cay}(\Gamma, S)) = \#(S \cup S^{-1})$.*

Demostración. Como todo grafo de Cayley es regular, basta ver qué grado tiene el elemento neutro. Por el Lema 1.18, podemos suponer que si $s \in S$ y $o(s) \neq 2$ entonces $s^{-1} \notin S$. Entonces, si S tiene t elementos de orden distinto de 2 y k elementos de orden 2, se tiene que $\#(S \cup S^{-1}) = 2t + k$. Además, como Γ es finito, por cada elemento s de orden mayor a 2 en S tenemos, en $\text{Cay}(\Gamma, S)$, las dos aristas $\{1, s\}$ y $\{1, s^{o(s)-1}\}$. Por otro lado, por cada $c \in S$ de orden 2 tenemos la única arista $\{1, c\}$. Por tanto, $\Delta(\text{Cay}(\Gamma, S)) = 2t + k$.

\square

El Lema 1.14 nos da una relación interesante entre los grupos de automorfismos de los grafos de Cayley asociados a un grupo Γ . Ahora la cuestión que vamos a abordar es. ¿Existe alguna relación entre Γ y los grupos $\text{Aut}(\text{Cay}(\Gamma, S))$ y $\text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S))$? En un principio pudiera parecer que $\Gamma \cong \text{Aut}(\text{Cay}(\Gamma, S))$.

Pero esto no es cierto en general. En la Figura 1.7. se muestra el grafo de Cayley de \mathbb{Z}_3 con $S = \{1\}$ pero como vimos en la Figura 1.1, el grupo de automorfismos de este grafo es D_3 .

Sin embargo, si existe una relación fuerte entre los tres grupos, como veremos en los siguientes resultados.

Proposición 1.20. *Sea Γ un grupo y $S \subset \Gamma \setminus \{1\}$ un conjunto que genere a Γ , es decir, $\langle S \rangle = \Gamma$. Entonces $\Gamma \cong \text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S))$.*

Demostración. Por la Proposición 1.16, tenemos que:

$$\text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)) = \{f_a : \Gamma \rightarrow \Gamma / f(x) = a \cdot x, a \in \Gamma\}.$$

Vamos a definir directamente el isomorfismo entre los grupos:

$$\begin{aligned} \Phi : \Gamma &\rightarrow \text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)) \\ a &\rightarrow \Phi(a) = f_{a^{-1}} \end{aligned}$$

Por la Proposición 1.16, la aplicación esta bien definida, por lo que solo debemos comprobar que es biyectiva y homomorfismo de grupos.

Veamos que es homomorfismo de grupos. Sean $a, b \in \Gamma$, entonces tenemos que $\Phi(a \cdot b) = f_{(a \cdot b)^{-1}}$ y $\Phi(a) \cdot \Phi(b) = f_{a^{-1}} \cdot f_{b^{-1}} = f_{b^{-1}} \circ f_{a^{-1}}$. Veamos que estas dos aplicaciones son iguales puntualmente.

$$\forall x \in \Gamma, f_{(a \cdot b)^{-1}}(x) = (a \cdot b)^{-1} \cdot x = b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot x = b^{-1} \cdot f_{a^{-1}}(x) = f_{b^{-1}} \circ f_{a^{-1}}(x).$$

Concluimos que $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$ y por tanto Φ es un homomorfismo.

Para la biyectividad basta ver la inyectividad pues Γ es un grupo finito y $\#\Gamma = \#\text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S))$. Veamos que es inyectiva. Sea $x \in \text{Ker}(\Phi)$ entonces $f_{x^{-1}} = \Phi(x) = 1$ por lo que $f_{x^{-1}}(x) = x$ que implica que $x^{-1} \cdot x = x$ y por tanto $x = 1$. Concluimos entonces que Φ es isomorfismo de grupos. \square

Corolario 1.21. *Sea Γ un grupo y $S \subset \Gamma$ un conjunto que genere a Γ , es decir, $\langle S \rangle = \Gamma$. Entonces $\Gamma \leq \text{Aut}(\text{Cay}(\Gamma, S))$.*

Demostración. Es un Corolario directo del Lema 1.14 y de la Proposición 1.20. \square

Estos resultados nos aportan una relación fuerte entre grupos y grafos, ya que nos dicen que todo grupo puede ser obtenido como el grupo de automorfismos de un grafo coloreado y dirigido y que todo grupo es subgrupo del grupo de automorfismos de un grafo no dirigido ni coloreado. Ahora, surgen las siguientes preguntas: "¿Todo grupo podrá obtenerse a través del grupo de automorfismos de un grafo?" Y, debido a las ventajas que supone trabajar con grafos de Cayley, dado un grafo cualquiera "¿podemos determinar si es de Cayley?" Estas cuestiones dan lugar al siguiente capítulo.

Teoremas de Frucht y Sabidussi

Gracias a los resultados ya vistos, podemos dar una respuesta afirmativa a las dos preguntas que hacen de cierre en el capítulo anterior. En este capítulo se enunciarán y demostrarán el Teorema de Frucht y el Teorema de Sabidussi. El primero, dado un grupo Γ , establece una forma constructiva de obtener un grafo cuyo grupo de automorfismos sea Γ . El segundo caracteriza cuándo un grafo es de Cayley en función de su grupo de automorfismos.

2.1. El Teorema de Frucht

Este teorema fue enunciado por Dénes König y demostrado por Robert Frucht en [8], quien demuestra, de forma constructiva, la universalidad de los grupos de automorfismos de grafos, es decir, que todo grupo finito se puede obtener como el grupo de automorfismos de un grafo. A continuación se enunciará el teorema y daremos nuestra propia demostración.

Teorema 2.1. (Teorema de Frucht). *Sea Γ un grupo finito, entonces existe un grafo G tal que el grupo de automorfismos de G es isomorfo a Γ , es decir, $\text{Aut}(G) \cong \Gamma$.*

Demostración. Sea $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subset \Gamma$ un conjunto generador del grupo. Consideramos los grafos $G' = \text{Cay}(\Gamma, S)$ y $\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)$, a partir del primero se construye el grafo G de la siguiente manera. Por cada $a \in \Gamma$ se añade un vértice adicional a' y una arista $\{a, a'\}$. Al vértice a' lo llamaremos copia de a . Seguidamente, por cada arco coloreado (a, b) con color s_i de $\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)$ se hace lo siguiente:

1. Se elimina la arista $\{a, b\}$ de G .
2. Se incluye una copia del grafo C_i de la Definición 1.8. A este grafo lo denominamos *gadget* del arco $\{(a, b), s_i\}$.
3. Se añaden las aristas $\{a, 1\}$ y $\{b, 4\}$. (Ver Figura 2.1).

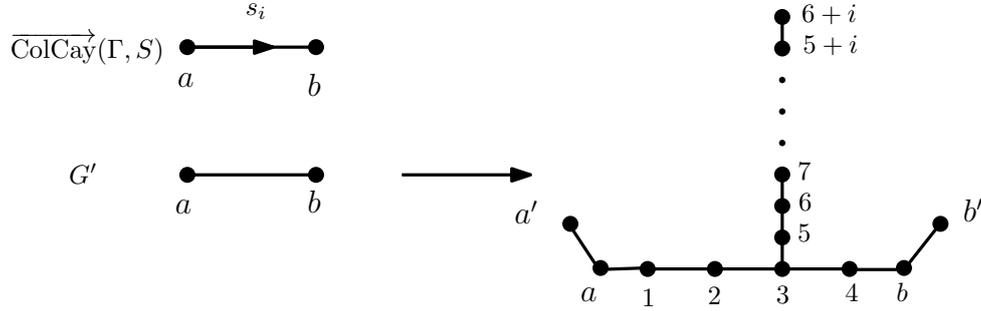


Figura 2.1. Construcción del grafo G .

En la Figura 2.2 se muestra la construcción de G a partir de $\Gamma = D_3 = \langle r, s/r^3 = s^2 = 1, r \cdot s = s \cdot r^2 \rangle$ y $S = \{r, s\}$.

Veamos ahora que el grupo de automorfismos de G es isomorfo al grupo de automorfismos de $\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)$. Definimos el isomorfismo

$$\Phi : \text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)).$$

Como $\Phi(f) = f|_{\Gamma}$. Veamos que esta bien definido y en efecto es isomorfismo.

Sea $f \in \text{Aut}(G)$. En primer lugar, tenemos que cada vértice en $\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)$ tiene k aristas salientes y k aristas entrantes, siendo k el cardinal de S . En consecuencia, por construcción de G , los vértices que se corresponden con un elemento del grupo en G tienen grado igual a $2k + 1$. Entonces, si $k > 1$, por la Proposición 1.3, $f(x) \in \Gamma \forall x \in \Gamma$, pues los demás vértices en G tienen grado 1, 2 o 3, que es menor que $2k + 1$. En el caso $k = 1$ también se cumple que $f(x) \in \Gamma$ si $x \in \Gamma$ pues los demás vértices de grado 3 no poseen un vecino de grado uno. Concluimos entonces que $\Phi(f)(\Gamma) \subset \Gamma$. Además si x' es el vértice copia de x , entonces $f(x') = f(x)'$ pues es el único vértice de grado uno adyacente a x .

Veamos ahora que $\Phi(f)$ es automorfismo. Consideramos G_0 el subgrafo de G obtenido al eliminar los vértices $x \in \Gamma$, los vértices x' y las aristas adyacentes a ellos. Entonces G_0 no es conexo y sus componentes conexas son los *gadgets*. Como $f \in \text{Aut}(G)$ entonces f restringida a G_0 es un automorfismo de G_0 . Por la definición de automorfismo la imagen de una componente conexa debe ser también una componente conexa, por tanto, como dos *gadgets* de distintos colores tienen distinto número de vértices, tenemos que la imagen bajo f de un *gadget* de color s debe ser de nuevo otro *gadget* asociado a s . Concluimos entonces que la imagen por f de un *gadget* del arco $\{(a, b), s\}$ es un *gadget* del arco $\{(f(a), f(b)), s\}, \forall a, b \in \Gamma$. Sea ahora $\{(a, b), s\}$ un arco de $\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)$, por construcción de G , existe el *gadget* del arco $\{(a, b), s\}$, y por lo ya comentado, la imagen de dicha estructura esta asociada a s , y tiene dirección $(f(a), f(b))$, y por tanto, de nuevo por construcción del grafo G , $\{(f(a), f(b)), s\}$ es un arco de

$\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)$. Razonando de la misma forma con f^{-1} tenemos la doble implicación de la Definición 1.13 y por tanto $f|_{\Gamma}$ es automorfismo de el grafo de Cayley coloreado y dirigido. Por lo que Φ esta bien definida.

Φ es claramente un homomorfismo, además es inyectivo pues si f restringida a Γ es la identidad entonces la imagen por f de los subgrafos C_i es el mismo C_i y al ser C_i asimétrico (ver Lema 1.9), tenemos que f debe ser la identidad. Concluimos entonces que el núcleo de Φ es el trivial y por tanto Φ es inyectiva.

Veamos ahora la sobreyectividad. Sea $f \in \text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S))$ entonces definimos $F : V(G) \rightarrow V(G)$ como $F|_{\Gamma} = f$, $F(x') = f(x)'$ y F sobre los *gadgets* de forma que la imagen del *gadget* del arco $\{(a, b), s\}$, es el *gadget* del arco $\{(f(a), f(b)), s\}$. Veamos que F esta bien definida. En efecto, sea $x \in V(G)$, si $x \in \Gamma$ entonces $F(x) = f(x) \in \Gamma \subset V(G)$. Si $x \notin \Gamma$ tenemos dos opciones:

1. Existe un único $a \in \Gamma$ tal que $x = a'$, entonces $F(x) = f(a)' \in V(G)$.
2. Existen únicos $a, b \in \Gamma$ y $s \in S$ tal que x sea vértice del *gadget* del arco $\{(a, b), s\}$. Entonces por definición de G se tiene que $\{(a, b), s\}$ es arco de $\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)$ y como f es automorfismo entonces $\{(f(a), f(b)), s\}$ también es un arco. Por tanto, por construcción de G , existe el *gadget* del arco $\{(f(a), f(b)), s\}$ en G y, por tanto, $\exists F(x) \in V(G)$.

Además F conserva las aristas por propia definición, por lo que $F \in \text{Aut}(G)$ y además $\Phi(F) = f$.

Concluimos que $\text{Aut}(G)$ es isomorfo a $\text{Aut}(\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S))$ y, por tanto, como S genera a Γ , por la Proposición 1.20 se tiene que $\Gamma \cong \text{Aut}(G)$. \square

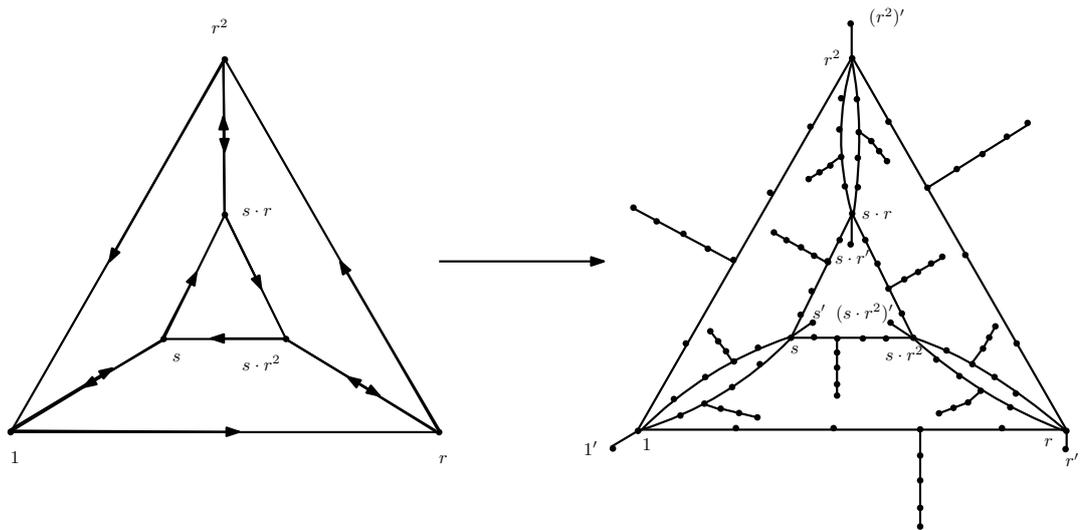


Figura 2.2. Grafo con grupo de automorfismos isomorfo a D_3 .

En la demostración original de Frucht se aporta una construcción con menos vértices. No obstante, en esta memoria se ha optado por presentar una construcción propia que simplifique alguno de los argumentos técnicos de la prueba.

Es de destacar que la forma de construir estos grafos aumenta, de forma considerable, tanto el número de vértices, como el grado máximo del grafo. Siguiendo esta construcción con un grupo Γ y un conjunto generador S con k elementos, se vio en la demostración que el grado máximo del grafo resultante es $2k + 1$, además tenemos que el número de vértices empleados es igual a $\#\Gamma \cdot \frac{k^2+13k+4}{2}$.

Existen otras versiones más fuertes del Teorema de Frucht, en las que se trata de lograr el mismo resultado usando familias de grafos específicas. Una de estas versiones se basa en usar grafos regulares de grado 3, está fue probada por Frucht en [7]. Ocho años más tarde Gert Sabidussi demostró en [13] que cualquier grupo es isomorfo al grupo de automorfismos de infinitos grafos k -regulares, para $k \geq 3$, e infinitos grafos ℓ -cromáticos, es decir grafos con número cromático (ver Sección 3.2) igual a ℓ , para $\ell \geq 2$.

Otras versiones del Teorema buscan minimizar el número de vértices utilizado. Hasta el momento, dado un grupo cualquiera, no se conoce qué número mínimo de vértices debe tener un grafo para que su grupo de automorfismo sea isomorfo al grupo. Sin embargo, László Babai demostró, en [13], que este número no es superior a dos veces el orden del grupo.

2.2. El Teorema de Sabidussi

En esta sección se caracterizarán los grafos de Cayley, además se darán ejemplos en los que se usará el teorema para comprobar si ciertos grafos son de Cayley o no.

Los grafos de Cayley han sido caracterizados por muchos autores, uno de los primeros fue Gert Sabidussi en [14]. Para enunciar y demostrar el Teorema de Sabidussi, requeriremos de algunos conceptos previos.

Definición 2.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que un subgrupo H de los automorfismos de G actúa regular si para todo $x, y \in V$ existe un único automorfismo $f \in H$ tal que $f(x) = y$.

Lema 2.3. Sean $G = (V, E)$ un grafo y $H \leq \text{Aut}(G)$ que actúa regular sobre G . Entonces, $\#V = \#H$.

Demostración. Fijando un vértice v cualquiera tenemos que, como H actúa regular, para todo $u \in V$ existe f_u en H tal que $f_u(v) = u$, además dados dos vértices distintos $u, u' \in V$, los automorfismos f_u y $f_{u'}$ también serán distintos,

por tanto deducimos que $\#V \leq \#H$. Por otro lado, dado $f \in H$ tenemos que existe $u \in V$ tal que $f(v) = u$ y dados dos automorfismos distintos f, g , como H actúa regular, también se tiene que $f(v) \neq g(v)$, deduciendo así la otra desigualdad. \square

Lema 2.4. Sean $G = (V, E)$ un grafo, H un subgrupo de los automorfismos de G y u un vértice. Entonces H actúa regular si y solo si para todo $v \in V$ existe un único $f \in H$ tal que $f(u) = v$.

Demostración. Si H actúa regular, entonces de la Definición 2.2 se tiene directamente el resultado.

Veamos la otra implicación. Supongamos que para todo $v \in V$ existe un único automorfismo f de H tal que $f(u) = v$. Sean ahora x, y dos vértices, veamos que existe un único automorfismo h de H tal que $h(x) = y$. Por hipótesis tenemos que existen $f, g \in H$ tal que $f(u) = x$ y $g(u) = y$. Entonces $f^{-1} \cdot g \in H$ y $f^{-1} \cdot g(x) = g \circ f^{-1}(x) = y$, lo que garantiza la existencia. Además si existe otro automorfismo α en H que cumple que $\alpha(x) = y$, tenemos que $\alpha(f(u)) = y$ y de la unicidad de la hipótesis tenemos que $f \cdot \alpha = g$ y por tanto $\alpha = f^{-1} \cdot g$ lo cual, garantiza la unicidad. \square

Ahora si estamos en condiciones de enunciar y demostrar el Teorema de Sabidussi.

Teorema 2.5. (Teorema de Sabidussi). Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces, G es un grafo de Cayley si y solo si existe $H \leq \text{Aut}(G)$ que actúa regular.

Demostración. Supongamos que G es un grafo de Cayley, esto es, existe Γ grupo y S un subconjunto del grupo tal que $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$. Por el Lema 1.15 tenemos que el grupo $H := \{f_a : \Gamma \rightarrow \Gamma / f_a(x) = a \cdot x, a \in \Gamma\}$ es subgrupo del grupo de automorfismos de $\overrightarrow{\text{ColCay}}(\Gamma, S)$. Además por el Lema 1.14 concluimos que H es subgrupo de $\text{Aut}(\text{Cay}(\Gamma, S)) = \text{Aut}(G)$. Veamos ahora que H actúa regular. Sean x, y en $V = \Gamma$, entonces tenemos que $f_{y \cdot x^{-1}} \in H$ y $f_{y \cdot x^{-1}}(x) = y$. Por otro lado, si existen dos automorfismos f_a, f_b en H tal que $f_a(x) = f_b(x) = y$, entonces $a \cdot x = b \cdot x$ concluyendo así que $a = b$ y, por tanto, $f_a = f_b$. Por lo que H actúa regular.

Supongamos ahora que existe $H \leq \text{Aut}(G)$ que actúa regular, veamos que G es de Cayley. Sean $v \in V$ y $v_1, \dots, v_s \in V$ los vecinos de v . Como H actúa regular entonces para cada v_i existe φ_i en H tal que $\varphi_i(v) = v_i$. Definimos Ω como el conjunto de estos automorfismos, veamos que G es isomorfo a $\text{Cay}(H, \Omega)$. Definimos $\Phi : V \rightarrow H$ como $\Phi(u) := \psi_u$ el único automorfismo de H que cumple que $\psi_u(u) = v$. Veamos que Φ es isomorfismo de grafos, es decir, es una aplicación biyectiva que conserva y refleja las aristas.

Φ es aplicación pues por propia definición la imagen de un elemento existe y está en H , y además, si $x, y \in V$ tal que $x = y$ entonces $\psi_x(x) = u = \psi_y(x)$

y como H actúa regular entonces $\psi_x = \psi_y$. Por otro lado, Φ es inyectiva pues si $x, y \in V$ tal que $\psi_x = \psi_y$ entonces por definición $x = \psi_x^{-1}(v) = \psi_y^{-1}(v) = y$. La inyectividad junto con el Lema 2.3 demuestran que Φ es biyectiva.

Por último veamos que Φ conserva las aristas. Sea $\{x, y\} \in E$ entonces, como ψ_x es un automorfismo, $\{v, \psi_x(y)\} \in E$, por lo que $v_i := \psi_x(y)$ es algún vecino de v , y por tanto, existe $\varphi_i \in \Omega$ tal que $\varphi_i(v) = v_i = \psi_x(y)$. Además, como $v = \psi_y(y)$, tenemos que $(\psi_y \cdot \varphi_i)(y) = \psi_x(y)$. Como H actúa regular y $\psi_y, \psi_x, \varphi_i \in H$, entonces $\psi_y \cdot \varphi_i = \psi_x$, concluyendo por la Definición 1.11 que $\{\Phi(x), \Phi(y)\}$ es una arista de $\text{Cay}(H, \Omega)$. Supongamos ahora que $\{\Phi(x), \Phi(y)\}$ es una arista, entonces existe $\varphi_i \in \Omega$ tal que $\psi_x \cdot \varphi_i = \psi_y$, evaluando en x se tiene que $\varphi_i(v) = \psi_y(x)$ y por la definición de φ_i tenemos que $\{v = \psi_y(y), \psi_y(x)\} \in E$, por lo que, como ψ_y es automorfismo, $\{x, y\} \in E$. Con todo lo anterior concluimos que Φ es isomorfismo. \square

Para ilustrar cómo utilizar el Teorema vamos a demostrar que el grafo de la Figura 1.2 es un grafo de Cayley. Este grafo es conocido como el grafo de Möbius-Kantor, y pertenece a una familia conocida como los grafos de Petersen generalizados. El grupo de automorfismos tiene noventa y seis elementos, como se ve en [9], sin embargo, para demostrar que el grafo es de Cayley basta considerar el subgrupo generado por dos de ellos, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 2.6. *El grafo de Möbius-Kantor es de Cayley.*

Demostración. En la demostración seguiremos la etiquetación de los vértices de la Figura 1.2 y trataremos a los subíndices como clases de equivalencia módulo ocho. Más precisamente, los vértices son $\{u_0, \dots, u_7, v_0, \dots, v_7\}$ y las aristas son de tres tipos: $\{u_i, u_{i+1}\}$, $\{v_i, v_{i+3}\}$ y $\{u_i, v_i\}$ con $0 \leq i \leq 7$. Definimos los siguientes automorfismos:

$$\begin{array}{ll} \alpha : V \longrightarrow V & \gamma : V \longrightarrow V \\ u_i \longmapsto u_{i+1} & u_i \longmapsto v_{3i} \\ v_i \longmapsto v_{i+1} & v_i \longmapsto u_{3i} \end{array}$$

En efecto, tanto α como γ , son automorfismos pues ambos son aplicaciones biyectivas, y veamos que además conservan las aristas:

- Aristas del tipo $\{u_i, u_{i+1}\}$. En este caso tenemos que las imágenes por α y γ son $\{u_{i+1}, u_{i+2}\}$ y $\{v_{3i}, v_{3i+3}\}$ respectivamente, y en efecto, son aristas del grafo.
- Aristas del tipo $\{v_i, v_{i+3}\}$. Las imágenes en este caso son, por α , $\{v_{i+1}, v_{i+4}\}$, y por γ , $\{u_{3i}, u_{3i+9} = u_{3i+1}\}$ y tenemos que ambas imágenes son aristas del grafo.
- Aristas del tipo $\{u_i, v_i\}$. En este caso las imágenes son, por α , $\{u_{i+1}, v_{i+1}\}$ y, por γ , $\{u_{3i}, v_{3i}\}$ que son aristas del grafo.

Por tanto $\alpha, \gamma \in \text{Aut}(G)$, además tenemos que el orden de α es ocho, el orden de γ es dos y cumplen que $\alpha \cdot \gamma = \gamma \cdot \alpha^3$. Con todo lo mencionado, consideramos el grupo $H := \langle \alpha, \gamma \rangle = \{\alpha^i, \gamma \cdot \alpha^i / 0 \leq i \leq 7\}$, el denominado grupo semidiedral de orden 16. Veámos que H actúa regular, para ello, por el Lema 2.4 basta ver que para cada vértice x del grafo existe un único automorfismo f_x de H tal que $f_x(u_0) = x$. Tenemos dos casos.

- $x = u_i$. Entonces basta considerar $f = \alpha^i \in H$.
- $x = v_i$. Consideramos $f = \gamma \cdot \alpha^i \in H$.

Entonces, como estos dieciséis automorfismos son distintos entre ellos y el orden de H es dieciséis, tenemos que, por el Lema 2.4, H actúa regular. Por tanto, en virtud del Teorema 2.5 el grafo de Möbius-Kantor es de Cayley. \square

Es de notar que, como el grafo de Möbius-Kantor es de Cayley, entonces por el Corolario 1.17 es transitivo lo cual justifica su uso como ejemplo de grafo transitivo en la Figura 1.2.

Por el Corolario 1.17 tenemos que todo grafo de Cayley es también transitivo y regular, sin embargo, el recíproco no es cierto. A continuación se estudiará un contraejemplo a esta afirmación.

Definición 2.7. *El grafo de Petersen [9] es un grafo formado por diez vértices, regular de grado 3 y transitivo. Si denotamos a los vértices como u_i, v_i , con $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, y entendemos los subíndices como clases módulo cinco, entonces las aristas del grafo son: $\{u_i, u_{i+1}\}$, $\{u_i, v_i\}$ y $\{v_i, v_{i+2}\}$ (Ver Figura 2.3).*

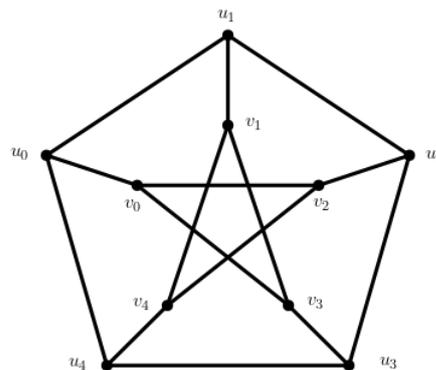


Figura 2.3. Grafo de Petersen.

Como se puede observar en la Figura, el grafo de Petersen no tiene ciclos de longitud 4 ni de longitud 10. Estos hechos serán de utilidad para demostrar que el grafo de Petersen no es de Cayley.

Proposición 2.8. *El grafo de Petersen no es de Cayley.*

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe H grupo tal que para algún conjunto $S \subset H \setminus \{1\}$, el grafo de Petersen es $\text{Cay}(H, S)$. Como el grafo de Petersen es conexo entonces, por la Proposición 1.12, S debe ser un conjunto generador. Como el grafo tiene diez vértices entonces el orden de H debe ser diez y, por tanto $H = \mathbb{Z}_{10}$ o $H = D_5$. Además, por el Teorema de Lagrange, los ordenes de los elementos de S pueden ser dos, cinco o diez. En S no pueden haber elementos de orden diez, pues se puede comprobar que el grafo no tiene ningún ciclo de longitud diez (no es hamiltoniano). Además, debido al Lema 1.18, podemos asumir que si $s \in S$ con orden de s distinto a 2, entonces su inverso no pertenece a S . Por tanto si S tiene k elementos de orden dos y t de orden cinco, entonces, por la Proposición 1.19, el grado de un vértice de $\text{Cay}(H, S)$ es igual a $k + 2t$, y como el grafo de Petersen es de grado tres entonces $k + 2t = 3$ dejando solo dos opciones, $k = 1$ y $t = 1$ o $k = 3$ y $t = 0$. Dividimos la prueba en cuatro casos:

- $H = \mathbb{Z}_{10}$, $k = 1$ y $t = 1$. En este caso $S = \{5, x\}$ con x de orden cinco. Pero esto no es posible pues, como $0 + 5 + x = 0 + x + 5$, entonces $(0, 5, 5 + x, x, 0)$ es un ciclo de longitud cuatro en $\text{Cay}(H, S)$. Pero el grafo de Petersen no tiene estos ciclos.
- $H = \mathbb{Z}_{10}$, $k = 3$ y $t = 0$. Esto es imposible pues, en \mathbb{Z}_{10} solo hay un elemento de orden dos.
- $H = D_5$, $k = 1$ y $t = 1$. En este caso $S = \{r^i, r^j \cdot s\}$. Vamos a ver que $(1, r^i, r^{i+j} \cdot s, r^j \cdot s, 1)$ forman un ciclo de longitud cuatro. De la definición de grafo de Cayley, y por la forma de S es claro que $\{1, r^i\}, \{r^i, r^{i+j} \cdot s\}$ y $\{1, r^j \cdot s\}$ son aristas, solo falta comprobar que $\{r^{i+j} \cdot s, r^j \cdot s\}$ es una arista. En efecto tenemos que $r^{i+j} \cdot s \cdot r^i = r^{i+j} \cdot r^{-i} \cdot s = r^j \cdot s$. Por lo que el grafo de Cayley tiene un ciclo de longitud cuatro, que es imposible pues, el grafo de Petersen no los tiene.
- $H = D_5$, $k = 3$ y $t = 0$. Veamos que en este caso el grafo es hamiltoniano. Tenemos que $S = \{r^i \cdot s, r^j \cdot s, r^k \cdot s\}$, además $r^i \cdot s \cdot r^j \cdot s = r^l \neq 1$, por lo que r^l es de orden cinco. Podemos formar el ciclo de orden diez:

$$(1, r^i \cdot s, r^l, r^{l+i} \cdot s, \dots, r^{4l} r^{4l+i} \cdot s, 1).$$

Esto también es absurdo pues el grafo de Petersen no es hamiltoniano.

Concluimos entonces que H no puede existir y por tanto el grafo de Petersen no es de Cayley. \square

En el capítulo cuatro daremos una demostración alternativa a este resultado de manera más directa.

El número cromático de un grupo

Existen diversidad de parámetros que se pueden asociar a un grafo. En este capítulo nos centraremos en uno de los más importantes, el número cromático.

Dado un grafo cualquiera y un valor $k \in \mathbb{Z}^+$, determinar si el número cromático es menor o igual a k es un problema complejo, es más, es uno de los 21 problemas NP-completos de Karp [10]. Sin embargo, hay familias de grafos en las que este problema puede resultar más sencillo o en las que podemos dar el valor exacto o, al menos, cotas para este número. El objetivo de este capítulo es estudiar este parámetro en grafos de Cayley, y usar herramientas algebraicas de teoría de grupos para dar una cota superior a su valor. Para ello seguiremos el trabajo de Babai ([3]). El capítulo consta de tres secciones. En la primera sección se introducirá la definición y se hará un estudio del número cromático para grafos en general. En la segunda sección se definirá el número cromático mínimo de un grupo utilizando los grafos de Cayley, y se determinará su valor para cualquier grupo finito. Por último, en la tercera sección, se estudiará el número cromático máximo de los grupos abelianos y nilpotentes.

3.1. El número cromático de un grafo.

El objetivo de esta sección es encontrar cotas del número cromático de un grafo general en función de su grado máximo. En este sentido se demostrará el Teorema de Brooks (Teorema 3.8).

En primer lugar vamos a definir qué es una coloración y qué es el número cromático de un grafo.

Definición 3.1. Sean $G = (V, E)$ un grafo y $k \in \mathbb{Z}^+$. Una k -coloración de G es una asignación de colores a sus vértices de forma que vértices adyacentes tengan colores distintos. En otras palabras, es una aplicación $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ que cumple que si $\{u, v\} \in E$ entonces $f(u) \neq f(v)$. Decimos que G es k -coloreable si existe una k -coloración de G .

Definición 3.2. Sea $G = (V, E)$ grafo, definimos el número cromático de G como el menor número de colores necesarios para colorear G , es decir, como el mínimo de $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que existe una k -coloración de G . Denotaremos el número cromático de G por $\chi(G)$.

A modo de ejemplo, consideramos el grafo ciclo con n -vértices, que denotamos por C_n . Se observa que si n es impar, entonces C_n no es 2-coloreable, de aquí se deduce que, $\chi(C_n) = 2$ si n es par y $\chi(C_n) = 3$ si n es impar (ver Figura 3.1).



Figura 3.1. 2-coloración de C_4 y 3-coloración de C_5 .

Como ya se ha mencionado, el cómputo del número cromático es un problema difícil en general. Sin embargo, podemos caracterizar cuándo un grafo tiene número cromático igual a dos.

Definición 3.3. Un grafo $G = (V, E)$ se dice bipartito si su conjunto de vértices se puede separar en dos conjuntos disjuntos, de manera que las aristas no pueden conectar vértices de un mismo conjunto. Es decir, existen $V_1, V_2 \subset V$ tales que $V_1 \cup V_2 = V$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, cumpliendo que si $e \in E$ entonces $e \cap V_1 \neq \emptyset$ y $e \cap V_2 \neq \emptyset$.

Lema 3.4. Sea $G = (V, E)$ un grafo con al menos una arista. Entonces G es bipartito si y solo si $\chi(G) = 2$.

Demostración. Supongamos que G es bipartito, entonces existen $V_1, V_2 \subset V$ en las condiciones de la Definición 3.3. Del hecho de que las aristas no conectan vértices del mismo conjunto tenemos que la aplicación $f(v) = 1$ si $v \in V_1$ y $f(v) = 2$ si $v \in V_2$ es una 2-coloración. Entonces $\chi(G) \leq 2$. Además, como G tiene al menos una arista, tenemos que $\chi(G) \neq 1$ y concluimos que $\chi(G) = 2$.

Supongamos ahora que $\chi(G) = 2$ y sea $f : V \rightarrow \{1, 2\}$ una 2-coloración. Definimos $V_1 = f^{-1}(1)$ y $V_2 = f^{-1}(2)$. Es directo que, $V_1 \cup V_2 = V$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y además, si $\{x, y\} \in E$ entonces $f(x) \neq f(y)$ por lo que x, y están en conjuntos distintos. Se concluye que G es bipartito. \square

Veamos a continuación que si todos los vértices de un grafo tienen grado menor o igual a k , entonces es $k + 1$ -coloreable.

Lema 3.5. *Sea $G = (V, E)$ un grafo de grado máximo $\Delta(G) = k$ entonces G es $k + 1$ -coloreable, y por tanto $\chi(G) \leq k + 1$.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre n , el número de vértices de G . Si $n = 1$ entonces G no tiene aristas y, por tanto, es 1-coloreable. Ahora supongamos que G tiene n vértices, sea $a \in V$ y consideramos el grafo $H = (V \setminus \{a\}, E')$ donde $E' = \{e \in E/a \notin e\}$. Se tiene que $\Delta(H) \leq \Delta(G) \leq k$ y aplicando la hipótesis de inducción sobre H se obtiene, $g : V \setminus \{a\} \rightarrow \{1, \dots, k + 1\}$, una $k + 1$ -coloración de H . Sean ahora, v_1, \dots, v_t los vecinos de a en G , entonces $\deg(a) = t \leq k$. Tomamos $c \in \{1, \dots, k + 1\} \setminus \{g(v_1), \dots, g(v_t)\}$ y $f : V \rightarrow \{1, \dots, k + 1\}$ como $f(x) = g(x)$ si $x \neq a$ y $f(a) = c$. Es claro que f es una $k + 1$ -coloración de G . \square

Notemos que la cota del Lema 3.5 es óptima para un grafo general, pues existen grafos de grado máximo k cuyo número cromático es $k + 1$. Por ejemplo, un ciclo impar tiene grado máximo 2 y número cromático tres. También se observa que el grafo completo \mathcal{K}_{k+1} tiene grado máximo igual a k y no admite una k -coloración, por tanto, su número cromático es $k + 1$.

Además, para $k \geq 3$ el grafo completo es el único grafo conexo de grado máximo k cuyo número cromático es $k + 1$. Este resultado es conocido como el Teorema de Brooks [4], a continuación se demostrará dicho teorema siguiendo la prueba que se realiza en [17].

Definición 3.6. *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $V' \subset V$. Se define el grafo inducido por V' en G , y se denota por $G[V']$, al grafo con vértices V' y con conjunto de aristas $E' = \{e \in E/e \subset V'\}$, es decir, todas las aristas de E que conectan vértices de V' .*

Lema 3.7. *Sean $G = (V, E)$ un grafo con grado máximo $\Delta(G) \leq k$, $V' \subset V$ y $f : V' \rightarrow \{1, \dots, k\}$ una k -coloración de $G[V']$. Sea $P = (v_1, \dots, v_j)$ un camino de G que no tiene ningún vértice en V' . Entonces se puede extender la coloración de $G[V']$ al grafo $G[V' \cup \{v_1, \dots, v_{j-1}\}]$; es decir, existe $g : V' \cup \{v_1, \dots, v_{j-1}\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ una k -coloración de $G[V' \cup \{v_1, \dots, v_{j-1}\}]$ tal que $g(u) = f(u) \forall u \in V'$.*

Demostración. Como $\Delta(G[V']) \leq \Delta(G) \leq k$ y $v_2 \notin V'$ entonces $\deg(v_1) < k$ en $G[V']$. Por tanto, existe $t \in \{1, \dots, k\}$ tal que $f(v) \neq t$ para todo v vecino de v_1 en $G[V']$. Definimos entonces $g(v_1) = t$. Siguiendo, en orden, el mismo razonamiento para v_i con $i < j$ obtenemos la k -coloración buscada. \square

A la forma de extender la coloración del Lema 3.7 la denotaremos como $\text{Pathcolor}(v_1, v_2, \dots, v_{j-1}; v_j)$. Notemos que al finalizar el procedimiento, el vértice v_j se mantiene sin colorear.

Teorema 3.8. (Teorema de Brooks). *Sea $G = (V, E)$ un grafo con, $3 \leq \Delta(G) \leq k$. Si ninguna componente conexa de G es el grafo \mathcal{K}_{k+1} , entonces G es k -coloreable.*

Demostración. Asumimos que G es conexo. Si no lo fuera, procedemos sobre cada componente conexa.

Sea n el número de vértices de G . Procedemos por inducción sobre n . Si $n = 1$ entonces G es k -coloreable.

Sea ahora $n > 1$. Si G no es k -regular, entonces existe $v \in V$ con $\deg(v) < k$. Consideramos el grafo H resultante de eliminar este vértice de G . Aplicando la hipótesis de inducción, tenemos que H es k -coloreable, y como $\deg(v) < k$, podemos extender esta k -coloración a G .

Supongamos ahora que G es k -regular. Como G es conexo y no es el grafo completo, entonces existen $v_1, v_2, v_3 \in V$ tal que $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_2\} \in E$ pero con $\{v_1, v_3\} \notin E$. Sea $P = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_r)$ un camino empezando en v_1, v_2, v_3 que no pase 2 veces por el mismo vértice y lo más largo posible. Separemos dos casos:

- Si $r = n$. Sea $v_j \in V$ un vecino de v_2 distinto de v_1, v_3 . Notar que en efecto v_j existe pues $\deg(v_2) = k \geq 3$. Ahora, coloreamos v_1, v_3 del mismo color, y aplicamos los procedimientos $\text{Pathcolor}(v_4, \dots, v_{j-1}; v_j)$ y $\text{Pathcolor}(v_n, \dots, v_j; v_2)$. Tras esto, el único vértice aún sin colorear es v_2 . Sin embargo, como v_1 y v_3 son vecinos de v_2 con el mismo color, tenemos que se puede extender la k -coloración a v_2 .
- Si $r < n$. Dado que P es lo más largo posible, tenemos que todos los vecinos de v_r están en P . Sea v_j el vecino de v_r con menor índice y consideramos el camino $C = (v_j, \dots, v_r)$. Notar que todos los vecinos de v_r están en C . Sea H el subgrafo inducido por los vértices que no están en C . Como G es conexo, entonces existe v en C con un vecino en H , por lo que H no es k -regular y por tanto no es el grafo completo \mathcal{K}_{k+1} . Aplicando la hipótesis de inducción sobre H obtenemos una k -coloración de este. Sea v_l el vértice de mayor índice en C con un vecino en H y sea u en H vecino de v_l . Notar que $l < r$ pues v_r tiene todos sus vecinos en C . Ahora, como v_{l+1} no tiene vecinos en H , podemos colorear del mismo color a v_{l+1} y a u . Aplicamos ahora el procedimiento $\text{Pathcolor}(v_{l+2}, \dots, v_r, v_j, \dots, v_{l-1}; v_l)$ dejando sin colorear solo a v_l , al cuál le podemos asociar un color pues u, v_{l+1} son vecinos de v_l del mismo color. Finalmente conseguimos una k -coloración de G . \square

Por último, vamos a estudiar cómo calcular el número cromático del producto cartesiano de grafos. Esto nos será de utilidad más adelante para demostrar que el número cromático máximo de un grupo finito es menor o igual a tres (Teorema 3.17).

Definición 3.9. *Sean $G = (V(G), E(G))$, $H = (V(H), E(H))$ dos grafos. Definimos el producto cartesiano de G por H como el grafo $G \square H$ con conjunto de*

vértices $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ y conjunto de aristas formado por aristas del tipo $\{(g_1, h), (g_2, h)\}$ tal que $\{g_1, g_2\} \in E(G)$, y las del tipo $\{(g, h_1), (g, h_2)\}$ con $\{h_1, h_2\} \in E(H)$.

En la Figura 3.2 se puede ver un ejemplo de esta construcción.

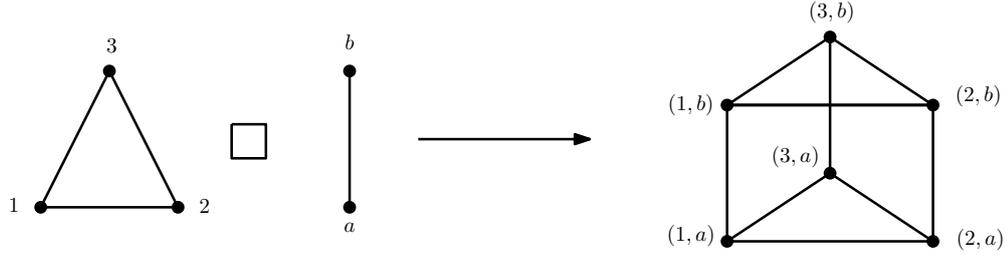


Figura 3.2. Producto cartesiano $C_3 \square C_2$.

El siguiente resultado de Vizing [16] nos permite calcular $\chi(G \square H)$ en función de $\chi(G)$ y $\chi(H)$.

Proposición 3.10. Sean $G = (V(G), E(G))$, $H = (V(H), G(H))$ dos grafos. Entonces $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

Demostración. Sean $a = \chi(G)$, $b = \chi(H)$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $a \geq b$. Sean además p, q las coloraciones, $p : V(G) \rightarrow \{1, \dots, a\}$ y $q : V(H) \rightarrow \{1, \dots, b\}$, de G y H respectivamente. Definimos la aplicación $f : V(G) \times V(H) \rightarrow \{1, \dots, a\}$ como $f(g, h) = p(g) + q(h) \bmod a$. Veamos que f es una coloración del producto de G con H . En efecto, sea $e \in E(G \square H)$ una arista, entonces tenemos dos casos.

- $e = \{(g_1, h), (g_2, h)\}$ con $\{(g_1, g_2)\} \in E(G)$. Entonces $f(g_1, h) = f(g_2, h)$ si y solo si $p(g_1) = p(g_2) \bmod a$ y como $p(g_1), p(g_2) \leq a$ tenemos que se da la igualdad si y solo si $p(g_1) = p(g_2)$ lo cual no es posible pues p es una coloración de G .
- $e = \{(g, h_1), (g, h_2)\}$ con $\{h_1, h_2\} \in E(H)$. Entonces $f(g, h_1) = f(g, h_2)$ si y solo si $q(h_1) = q(h_2) \bmod a$ y como $q(h_1), q(h_2) \leq b \leq a$ la igualdad se cumple si y solo si $q(h_1) = q(h_2)$ que vuelve a ser imposible pues q es una coloración de H .

Concluimos que f es una coloración del producto de G con H y por tanto $\chi(G \square H) \leq \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

Por otro lado supongamos que f es una coloración de $G \square H$ con $n = \chi(G \square H)$ colores. Sea $h \in V(H)$, entonces definimos $F : V(G) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ como $F(g) = f(g, h)$. Veamos que F es una coloración de G . En efecto, F es una aplicación y además si $\{g_1, g_2\} \in E(G)$ tenemos que $\{(g_1, h), (g_2, h)\} \in$

$E(G \square H)$, por lo que, como f coloración, $F(g_1) = f(g_1, h) \neq f(g_2, h) = F(g_2)$. Concluimos así que F es una coloración de G y por tanto $\chi(G) \leq \chi(G \square H)$. Concluimos entonces que $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$. \square

3.2. El número cromático mínimo de un grupo

En esta sección vamos a estudiar el número cromático de un grupo, que se define por medio de sus grafos de Cayley. El resultado principal de esta sección es el Teorema 3.15, donde se determina este valor para todo grupo finito.

Definición 3.11. *Sea Γ un grupo finito, el número cromático de Γ , denotado por $\chi(\Gamma)$, es el menor de los números cromáticos de los grafos de Cayley conexos de Γ , es decir, $\chi(\Gamma) = \min\{\chi(\text{Cay}(\Gamma, C)) / \Gamma = \langle C \rangle, 1 \notin C\}$.*

Es de notar que en la definición anterior basta tomar el mínimo solo sobre los conjuntos generadores minimales.

A continuación vamos a dar una cota superior para este número, para ello seguiremos [3]. Presentamos primero una proposición que nos permitirá reducir el estudio a los grupos finitos simples. Recordar que un grupo se dice simple si no tiene ningún subgrupo normal propio.

Proposición 3.12. *Sea Γ un grupo finito, $N \trianglelefteq \Gamma$ un subgrupo normal de Γ y $C \subset \Gamma$ un conjunto generador con $C \cap N = \emptyset$. Entonces, $\chi(\text{Cay}(\Gamma, C)) \leq \chi(\text{Cay}(\Gamma/N, C/N))$. En particular, $\chi(\Gamma) \leq \chi(\Gamma/N)$.*

Demostración. En primer lugar, observemos que $1 \cdot N \notin C/N$. En efecto, si existe $x \in \Gamma$ tal que $x \cdot N \cdot c \cdot N = x \cdot N$ con $c \in C$ entonces $c \cdot N = 1 \cdot N$ y por tanto $c \in N$ lo cual no es posible pues $C \cap N = \emptyset$. Por tanto, podemos considerar el grafo simple $\text{Cay}(\Gamma/N, C/N)$.

Sea ahora $k = \chi(\text{Cay}(\Gamma/N, C/N))$ y sea f una k -coloración del grafo $\text{Cay}(\Gamma/N, C/N)$. Veamos que existe una k -coloración de $\text{Cay}(\Gamma, C)$. Sea $g : \Gamma \rightarrow \{1, \dots, k\}$ la aplicación definida por $g(x) = f(x \cdot N)$, para todo $x \in \Gamma$, veamos que g es una k -coloración. Si $\{x, y\}$ es una arista de $\text{Cay}(\Gamma, C)$ entonces $\exists c \in C$ tal que $x \cdot c = y$, entonces $x \cdot N \cdot c \cdot N = y \cdot N$, con $c \cdot N \in C/N$ y, como f es coloración, se tiene que $g(x) = f(x \cdot N) \neq f(y \cdot N) = g(y)$. Concluimos que g es una k -coloración de $\text{Cay}(\Gamma, C)$ y por tanto $\chi(\text{Cay}(\Gamma, C)) \leq k$.

Veamos ahora que $\chi(\Gamma) \leq \chi(\Gamma/N)$. Sea S , con $1 \notin S$, el conjunto generador de Γ/N tal que si $X = \text{Cay}(\Gamma/N, S)$ entonces $\chi(X) = \chi(\Gamma/N)$. Si denotamos por π al epimorfismo canónico entonces $\pi^{-1}(S) = C$ es un conjunto generador de Γ . Además $C \cap N = \emptyset$, por lo que aplicando la desigualdad probada tenemos que $\chi(\Gamma) \leq \chi(\text{Cay}(\Gamma, C)) \leq \chi(X) = \chi(\Gamma/N)$.

\square

En [3], Babai hace uso del Teorema de clasificación de grupos simples [6] para la demostración del siguiente resultado. Más concretamente, el hecho de que todo grupo finito, simple y no cíclico está generado por dos elementos, donde uno de ellos es de orden dos. Curiosamente, en el año en el que Babai enunció el resultado, el Teorema de clasificación de grupos simples aún no estaba probado, ya que su demostración se consideró terminada siete años más tarde.

Teorema 3.13. *Sea Γ un grupo finito. Entonces $\chi(\Gamma) \leq 3$*

Demostración. Veamos primero el resultado para grupos finitos simples. Supongamos que Γ es un grupo finito simple. Tenemos dos opciones:

- Γ es un grupo cíclico. Entonces $\Gamma = \mathbb{Z}_p$, por ser cíclico y simple, y tomamos el conjunto generador $C = \{1\}$. Como $\text{Cay}(\mathbb{Z}_p, C)$ es un ciclo de longitud p , se tiene que $\chi(\Gamma) \leq 3$.
- Γ no es un grupo cíclico. Entonces por el Teorema de clasificación de grupos simples existen $a, b \in \Gamma$, con $o(a) = 2$, tales que $\Gamma = \langle a, b \rangle$. Tomamos entonces $C = \{a, b\}$ como conjunto generador. Como a es una involución y b no es de orden 2, entonces, por la Proposición 1.19, $\Delta(\text{Cay}(\Gamma, C)) = 3$. Ahora, si $\text{Cay}(\Gamma, C) \neq \mathcal{K}_4$, se sigue del Teorema 3.8 que $\chi(\text{Cay}(\Gamma, C)) \leq 3$, y por tanto $\chi(\Gamma) \leq 3$. Supongamos por reducción al absurdo que $\text{Cay}(\Gamma, C) = \mathcal{K}_4$, entonces el orden de Γ es 4. Por tanto, $\Gamma = \mathbb{Z}_4$ o $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, siendo ambas posibilidades absurdas, pues Γ es simple.

Sea ahora Γ un grupo finito cualquiera. Prosigamos por inducción sobre $n = \#\Gamma$. Si $\#\Gamma = 1$ entonces el resultado es trivial. Supongamos que $\#\Gamma = n$. Separamos dos casos. Si Γ es un grupo simple, entonces por la primera parte de la demostración $\chi(\Gamma) \leq 3$. Por otro lado, si Γ no es simple, entonces existe $N \trianglelefteq \Gamma$ un subgrupo normal propio, teniendo así que $\#(\Gamma/N) < \#\Gamma$. Entonces por la Proposición 3.12 y la hipótesis de inducción tenemos que $\chi(\Gamma) \leq \chi(\Gamma/N) \leq 3$. \square

Con este resultado el problema de computar el número cromático de un grupo cualquiera se ve facilitado en gran medida, sin embargo, nos gustaría poder caracterizar este valor en términos de propiedades del grupo. Para ello vamos a caracterizar cuándo un grupo tiene número cromático igual a dos.

Proposición 3.14. *Sea Γ un grupo finito distinto del trivial. Entonces $\chi(\Gamma) = 2$ si y solo si Γ tiene un subgrupo de índice 2.*

Demostración. Supongamos que Γ tiene un subgrupo H de índice 2. Entonces H es subgrupo normal de Γ . Por la Proposición 3.12 tenemos que $\chi(\Gamma) \leq \chi(\Gamma/H) = \chi(\mathbb{Z}_2) = 2$.

Supongamos ahora que $\chi(\Gamma) = 2$. Sea $C \subset \Gamma$ un conjunto generador que cumple que el grafo $X = \text{Cay}(\Gamma, C)$ tenga $\chi(X) = 2$. Por el Lema 3.4

tenemos que X es bipartito. Sea $V_1, V_2 \subset \Gamma$ la bipartición de los vértices de X . Supongamos sin pérdida de generalidad que $1 \in V_1$ y denotamos por $H := \{c_1 \cdots c_{2k}/c_i \in C \text{ y } k \in \mathbb{N}\}$. Veamos que $V_1 = H$.

Veamos que $H \subset V_1$. Prosigamos por inducción sobre k . Sea $k = 1$ y $c_1, c_2 \in C$. Como $1 \in V_1$ y $\{1, c_1\}$ es una arista de X entonces, por ser X bipartito, $1 \cdot c_1 \in V_2$ y, por el mismo razonamiento, $c_1 \cdot c_2 \in V_1$. Asumamos cierto que $c_1 \cdots c_{2r} \in V_1$ para $r = k - 1$ y probémoslo para $r = k$. Por hipótesis de inducción tenemos que $c_1 \cdots c_{2k-2} \in V_1$ y, procediendo como antes, tenemos que $c_1 \cdots c_{2k} \in V_1$. Veamos ahora que $V_1 \subset H$. Si $x \in V_1$ entonces, como C es generador, tenemos que $x = c_1 \cdots c_r$ con $c_i \in C$. Si r fuera impar entonces se comprueba que $c_1 \cdots c_{r-1} \in V_1$ y, por tanto, $x = c_1 \cdots c_r \in V_2$ lo cual es absurdo pues $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Concluimos así que r debe ser par teniendo así que $V_1 = H$.

Además como $1 \in H$, H es cerrado para el producto y Γ es un grupo finito, tenemos que H es un subgrupo de Γ . Veamos que tiene índice dos. Sea $c \in C$, veamos que $\Gamma/H = \{1 \cdot H, c^{-1} \cdot H\}$. Si $x \in H$ es claro que $x \cdot H = 1 \cdot H$, por otro lado, si $x \notin H$ entonces $x \in V_2$, por lo que $x \cdot c \in V_1$ concluyendo así que $x \cdot H = c^{-1} \cdot H$. \square

Ahora, si juntamos la Proposición 3.14 con el Teorema 3.13 tenemos lo siguiente:

Teorema 3.15. *Sea Γ un grupo finito, entonces:*

$$\chi(\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \#\Gamma = 1, \\ 2 & \text{si } \Gamma \text{ tiene un subgrupo de índice 2, o} \\ 3 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

3.3. El número cromático máximo de un grupo

Una vez resuelto el problema del número cromático de un grupo, Babai consideró el número cromático máximo de un grupo.

Definición 3.16. *Sea Γ un grupo finito. Definimos el número cromático máximo del grupo, y lo denotamos por $\chi_{\max}(\Gamma)$, al mayor de los números cromáticos de los grafos de Cayley de Γ respecto de un conjunto generador minimal. Es decir,*

$$\chi_{\max}(\Gamma) = \max \{ \chi(\text{Cay}(\Gamma, H)) / H \text{ generador minimal} \}.$$

Babai propuso varias conjeturas sobre él ([3]). En particular, conjeturó que existe $M > 0$ tal que $\chi_{\max}(\Gamma) \leq M$ para todo Γ grupo finito. Este problema sigue abierto, sin embargo sí se ha verificado la conjetura para ciertas familias de grupos. En esta sección se estudiará el número cromático máximo para los grupos abelianos y los grupos nilpotentes.

3.3.1. Grupos abelianos finitos

En primer lugar estudiaremos los grupos abelianos en los que veremos que el número cromático máximo, al igual que el mínimo, está acotado por tres. Además, también se caracterizara cuándo este valor es exactamente dos.

Teorema 3.17. *Sea Γ un grupo abeliano finito. Entonces $\chi_{\max}(\Gamma) \leq 3$.*

Demostración. Sea $S = \{s_1, \dots, s_r\}$ un conjunto generador minimal de Γ . Definimos, $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, a $S_i := \langle s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_r \rangle$ y a n_i como el menor entero positivo que cumple que $n_i \cdot s_i \in S_i$. Como S es minimal se tiene que $n_i \geq 2$. Si $n_i \leq 3$ denotamos por C_{n_i} al grafo ciclo de longitud n_i . Si $n_i = 2$ entonces C_{n_i} es el grafo con dos vértices unidos por una arista. Identificaremos a los vértice de C_{n_i} con los enteros módulo n_i .

Definimos el homomorfismo de grafos:

$$\begin{aligned} \varphi : V(\text{Cay}(\Gamma, S)) &\longrightarrow V(C_{n_1} \square \cdots \square C_{n_r}) \\ x = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot s_i &\mapsto (\alpha_1 \bmod n_1, \dots, \alpha_r \bmod n_r) \end{aligned}$$

En efecto, veamos que φ es un homomorfismo de grafos, es decir, una aplicación que conserva las aristas. En primer lugar comprobemos que es aplicación. Sean $x, y \in \Gamma$ tal que $x = y$. Como S es generador se tiene que $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot s_i = \sum_{i=1}^r \beta_i \cdot s_i = y$. Por tanto, para ver que $\varphi(x) = \varphi(y)$ basta ver que $\alpha_i \equiv \beta_i \pmod{n_i}$. Como $\sum_{i=1}^r (\alpha_i - \beta_i) \cdot s_i = 0$ entonces para cada i tenemos que $(\alpha_i - \beta_i) \cdot s_i \in S_i$. Dividiendo $\alpha_i - \beta_i$ entre n_i tenemos que $\alpha_i - \beta_i = c \cdot n_i + k$ con $0 \leq k < n_i$. Entonces, tenemos que $c \cdot n_i \cdot s_i + k \cdot s_i \in S_i$. Como, por definición, $c \cdot n_i \cdot s_i \in S_i$, tenemos que $k \cdot s_i \in S_i$. Además, como $k < n_i$, tenemos, por la definición de n_i , que $k = 0$, concluyendo así que $\alpha_i \equiv \beta_i \pmod{n_i}$. Por tanto φ es aplicación.

Probemos ahora que φ conserva las aristas. Sea $e \in E(\text{Cay}(\Gamma, S))$. Entonces $e = \{x, x + s_i\}$ para cierto $i \in \{1, \dots, r\}$. Si tomamos $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{Z}$ tales que $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot s_i$, tenemos que $\varphi(x) = (\alpha_1 \bmod n_1, \dots, \alpha_i \bmod n_i, \dots, \alpha_r \bmod n_r)$ y $\varphi(x + s_i) = (\alpha_1 \bmod n_1, \dots, \alpha_i + 1 \bmod n_i, \dots, \alpha_r \bmod n_r)$. Como $\{\alpha_i \bmod n_i, \alpha_i + 1 \bmod n_i\} \in E(C_{n_i})$ entonces, $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E(C_{n_1} \square \cdots \square C_{n_r})$.

Sea S el conjunto generador minimal de Γ tal que $\chi_{\max}(\Gamma) = \chi(\text{Cay}(\Gamma, S))$. Como φ es homomorfismo entonces $\chi(\text{Cay}(\Gamma, S)) \leq \chi(C_{n_1} \square \cdots \square C_{n_r})$ pues, dada $f : V(C_{n_1} \square \cdots \square C_{n_r}) \rightarrow V(C_{n_1} \square \cdots \square C_{n_r})$ una k -coloración del grafo $C_{n_1} \square \cdots \square C_{n_r}$, entonces la aplicación $g = f \circ \varphi$ es una k -coloración de $\text{Cay}(\Gamma, S)$. Y en virtud de la Proposición 3.10 y que el número cromático de un ciclo es menor igual a tres, tenemos que $\chi_{\max}(\Gamma) \leq 3$. \square

Este resultado establece una cota óptima para el problema con grupos abelianos. A continuación vamos a caracterizar cuándo $\chi_{\max}(\Gamma) = 2$ para Γ un grupo abeliano finito.

Proposición 3.18. *Sea Γ un grupo abeliano finito con más de un elemento. Entonces, $\chi_{\max}(\Gamma) = 2$ si y solo si Γ es un 2-grupo.*

Demostración. Supongamos por contrareciproco que Γ no es un 2-grupo. Como Γ es abeliano tenemos que $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}_{p_i}^{n_i}$, donde p_1, \dots, p_k son primos, no necesariamente distintos, y $p_1 \neq 2$. Sea ahora el sistema generador minimal canónico $C = \{e_i\}_{i=1}^k$. El orden de e_1 es $p_1^{n_1}$, que es impar. Entonces, el grafo $\text{Cay}(\Gamma, C)$ tiene un ciclo de orden impar y por tanto su número cromático es mayor o igual a tres. Concluimos que $\chi_{\max}(\Gamma) \geq 3$.

Supongamos ahora que Γ es un 2-grupo. Sea $C = \{c_1, \dots, c_r\}$ un conjunto generador minimal, veamos que $\chi(\text{Cay}(\Gamma, C)) = 2$. Sea $f : \Gamma \rightarrow \{0, 1\}$ definida como $f(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \pmod{2}$. Veamos que f es una 2-coloración. Es aplicación pues si $x = y \in \Gamma$ con $f(x) \neq f(y)$ entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot c_i$ con $\alpha_1 + \dots + \alpha_r$ par e $y = \sum_{i=1}^r \beta_i \cdot c_i$ con $\beta_1 + \dots + \beta_r$ impar. Por tanto $0 = \sum_{i=1}^r d_i \cdot c_i$ con $d_1 + \dots + d_r$ impar, donde $d_i = \alpha_i - \beta_i$. Como la suma es impar, algún d_i debe ser impar, supongamos sin pérdida de generalidad que d_1 es impar. Entonces $d_1 \cdot c_1 = -\sum_{i=2}^r d_i \cdot c_i$. Como Γ es un 2-grupo y d_1 es impar, entonces d_1 es coprimo con el orden de c_1 , por lo que por la identidad de Bezout, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $s \cdot d_1 \equiv 1 \pmod{o(c_1)}$. Por tanto $c_1 = -s \sum_{i=2}^r d_i \cdot c_i$, lo cual es absurdo pues C es minimal. Concluimos entonces que $f(x) = f(y)$ y por tanto f es aplicación. Además claramente es una 2-coloración, por lo que concluimos que para todo conjunto generador minimal $\chi(\text{Cay}(\Gamma, C)) = 2$ y, por tanto, $\chi_{\max}(\Gamma) \leq 2$. Como Γ tiene más de un elemento concluimos que $\chi_{\max}(\Gamma) = 2$. □

Este resultado y el Teorema 3.17 resuelven por completo el problema del cálculo de χ_{\max} para grupos abelianos finitos. Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 3.19. *Sea Γ un grupo abeliano finito. Entonces,*

$$\chi_{\max}(\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \#\Gamma = 1, \\ 2 & \text{si } \Gamma \text{ es un 2-grupo, o} \\ 3 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

3.3.2. Grupos nilpotentes finitos

A continuación vamos a proceder a hacer el mismo estudio para los grupos nilpotentes. De esta forma extenderemos los resultados vistos anteriormente en grupos abelianos. Denotaremos al centro de un grupo Γ como $Z(\Gamma)$.

Definición 3.20. *Un grupo Γ se dice nilpotente si existe una cadena de subgrupos $\{1\} = Z_0 \trianglelefteq Z_1 \cdots \trianglelefteq Z_n = \Gamma$ tal que $Z_1 = Z(\Gamma)$ y $Z_{i+i}/Z_i = Z(\Gamma/Z_i)$.*

Todos los grupos abelianos son grupos nilpotentes, sin embargo esta familia es mas extensa pues, por ejemplo, el grupo de los cuaterniones Q_8 no es abeliano pero si es nilpotente. Otros ejemplos de grupos nilpotentes son los p -grupos. También es de destacar que los grupos nilpotentes son, de la propia definición, grupos resolubles. Sin embargo estas dos familias no son iguales, pues el grupo alternado A_4 es resoluble pero, al tener un centro trivial, no es nilpotente.

Para extender el Teorema 3.17 se va a utilizar el subgrupo de Frattini de un grupo, que procedemos a definir.

Definición 3.21. *Sea Γ un grupo. Un subgrupo H se dice maximal si la condición $H \subset H' \subset \Gamma$, con H' subgrupo de Γ , implica que $H = H'$ o $H' = \Gamma$. El subgrupo de Frattini de Γ , que denotamos por $\Phi(\Gamma)$, es la intersección de todos los subgrupos maximales de Γ .*

A continuación vamos a proceder a demostrar las propiedades del subgrupo de Frattini necesarias para demostrar la cota del número cromático máximo.

Lema 3.22. *Sea Γ un grupo y C un conjunto generador minimal. Entonces:*

- a) $\Phi(\Gamma) \trianglelefteq \Gamma$.
- b) $\Phi(\Gamma) \cap C = \emptyset$.
- c) $C/\Phi(\Gamma)$ es generador minimal de $\Gamma/\Phi(\Gamma)$.

Demostración. a) Vamos a probar que el subgrupo de Frattini es característico, es decir, para todo f automorfismo de grupos de Γ se tiene que $f(\Phi(\Gamma)) = \Phi(\Gamma)$. Sea $f \in \text{Aut}(\Gamma)$, veamos que para todo $H \leq \Gamma$ maximal entonces $f(H)$ también es maximal. Sea $J \leq \Gamma$ tal que $f(H) \subsetneq J$, como f es biyectiva tenemos que $H \subsetneq f^{-1}(J)$ con H maximal, por lo que $f^{-1}(J) = \Gamma$, concluyendo que $J = \Gamma$. Por tanto:

$$f(\Phi(\Gamma)) = f(\cap_{H \leq \Gamma \text{ max}} H) = \cap_{f(H) \leq \Gamma \text{ max}} f(H) = \Phi(\Gamma).$$

Por lo que en efecto el subgrupo de Frattini es característico, veamos que esto implica normalidad. Sea $g \in \Gamma$, entonces $f_g(x) = g^{-1} \cdot x \cdot g$ es un automorfismo, por tanto $f_g(\Phi(\Gamma)) = \Phi(\Gamma)$ para todo $g \in \Gamma$, concluyendo así que $\Phi(\Gamma) \trianglelefteq \Gamma$.

- b) Supongamos por reducción al absurdo que $\exists x \in \Phi(\Gamma) \cap C$. Como C es minimal tenemos que $\langle C \setminus \{x\} \rangle$ es un subgrupo propio de Γ , por tanto, existe M un subgrupo maximal tal que $\langle C \setminus \{x\} \rangle \subset M \neq \Gamma$. Por otro lado, como $x \in \Phi(\Gamma)$, tenemos que $x \in M$. Y como $\langle C \setminus \{x\} \rangle \subset M$ y $x \in M$ entonces $\langle C \rangle \subset M \neq \Gamma$, que es absurdo pues C es conjunto generador de Γ .
- c) Debido al Lema 3.22.a) tenemos que $\Gamma/\Phi(\Gamma)$ es grupo. Sea $C = \{c_1, \dots, c_r\}$, es claro que $C/\Phi(\Gamma) = \{c_1 \cdot \Phi(\Gamma), \dots, c_r \cdot \Phi(\Gamma)\}$ genera a $\Gamma/\Phi(\Gamma)$, veamos que es minimal. Supongamos por reducción al absurdo que $c_1 \cdot \Phi(\Gamma) \in \langle c_2 \cdot \Phi(\Gamma), \dots, c_r \cdot \Phi(\Gamma) \rangle$. Entonces $\exists k \in \Phi(\Gamma)$ tal que $c_1 \cdot k \in \langle c_2, \dots, c_r \rangle$. Vamos a demostrar que:

- (1) $\Gamma = \langle k, c_2, \dots, c_r \rangle$.
 (2) $k \notin \langle c_2, \dots, c_r \rangle$.

En efecto, (1) es cierto pues $c_1 \in \langle k, c_2, \dots, c_r \rangle$. Además, (2) es cierto pues, si $k \in \langle c_2, \dots, c_r \rangle$ entonces, $c_1 \in \langle c_2, \dots, c_r \rangle$ y esto contradice la minimalidad de C . De 1 se deduce que $\exists D \subset \langle k, c_2, \dots, c_r \rangle$ sistema minimal de generadores y de 2 que, necesariamente, $k \in D$; pero esto contradice el Lema 3.22.b). En consecuencia $C/\Phi(\Gamma)$ es minimal. \square

Corolario 3.23. *Sea Γ un grupo, entonces, $\chi_{\max}(\Gamma) \leq \chi_{\max}(\Gamma/\Phi(\Gamma))$.*

Demostración. Sea C un sistema generador minimal de Γ tal que $\chi_{\max}(\Gamma) = \chi(\text{Cay}(\Gamma, C))$. Debido a los Lemas 3.22.a) y 3.22.b) podemos aplicar la Proposición 3.12 con el subgrupo de Frattini, teniendo así que $\chi(\text{Cay}(\Gamma, C)) \leq \chi(\text{Cay}(\Gamma/\Phi(\Gamma), C/\Phi(\Gamma)))$. Y, como $C/\Phi(\Gamma)$ es generador minimal por el Lema 3.22.c), se tiene que $\chi(\text{Cay}(\Gamma, C)) \leq \chi_{\max}(\Gamma/\Phi(\Gamma))$. \square

Por tanto en un grupo general podemos reducir el problema a encontrar una cota para el número cromático máximo al cocientar con el grupo de Frattini. En general este problema puede seguir siendo complejo, pero en el caso de los grupos nilpotentes vamos a demostrar que este cociente siempre es un grupo abeliano.

Lema 3.24. *Sea Γ un grupo nilpotente. Entonces todo subgrupo maximal de Γ es normal.*

Demostración. Sea M subgrupo maximal y, como Γ es nilpotente, consideramos la cadena $\{1\} = Z_0 \trianglelefteq Z_1 \cdots \trianglelefteq Z_n = \Gamma$ con $Z_1 = Z(\Gamma)$ y $Z_{i+i}/Z_i = Z(\Gamma/Z_i)$. Veamos ahora que $M \cdot Z_i \trianglelefteq M \cdot Z_{i+1}$. Sean $g \in M \cdot Z_{i+1}$ y $x \in M \cdot Z_i$, veamos que $g^{-1} \cdot x \cdot g \in M \cdot Z_i$. Como $g \in M \cdot Z_{i+1}$ entonces existen $m \in M$ y $z_{i+i} \in Z_{i+1}$ tales que $g = m \cdot z_{i+i}$. Además como $x \in M \cdot Z_i$ entonces existen $k \in M$ y $z_i \in Z_i$ tales que $x = k \cdot z_i$. Por ser Γ grupo nilpotente tenemos que $z_{i+i} \cdot Z_i \in Z(\Gamma/Z_i)$. Juntando todo lo anterior se tiene que:

$$g^{-1} \cdot x \cdot g \cdot Z_i = z_{i+i}^{-1} \cdot m^{-1} \cdot n \cdot z_i \cdot m \cdot z_{i+i} \cdot Z_i = m^{-1} \cdot n \cdot m \cdot Z_i.$$

Por tanto $g^{-1} \cdot x \cdot g = m^{-1} \cdot n \cdot m \cdot z$ con $z \in Z_i$, concluyendo que $g^{-1} \cdot x \cdot g \in M \cdot Z_i$.

Ahora tenemos la cadena $M \trianglelefteq M \cdot Z_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq M \cdot Z_n = \Gamma$. Sea $j \neq n$ el mayor índice tal que $M = M \cdot Z_j$. Como M es maximal tenemos que $M \cdot Z_{j+1} = \cdots = M \cdot Z_n = \Gamma$ y, por tanto, $M = M \cdot Z_j \trianglelefteq M \cdot Z_{j+1} = \Gamma$, concluyendo que M es subgrupo normal. \square

Proposición 3.25. *Sea Γ un grupo nilpotente. Entonces, el cociente $\Gamma/\Phi(\Gamma)$ es un grupo abeliano.*

Demostración. En virtud del Lema 3.22.a) tenemos que $\Gamma/\Phi(\Gamma)$ es grupo, veamos ahora que es abeliano. Sea M un subgrupo maximal de Γ , por el Lema 3.24 tenemos que $M \trianglelefteq \Gamma$ y por ser maximal se tiene que Γ/M es un grupo simple. Ahora, como Γ es nilpotente, entonces Γ es resoluble y por tanto Γ/M es resoluble y simple, por lo que es un grupo abeliano.

Sea $\Gamma' = \langle x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \mid x, y \in \Gamma \rangle$ el conmutador de Γ . Veamos que $\Gamma' \subset M$. Sea $x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \in \Gamma'$, como Γ/M es abeliano tenemos que $x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot M = 1 \cdot M$ por lo que $x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \in M$. Como hemos visto, el conmutador está contenido en todo subgrupo maximal, por tanto, por la Definición 3.21, podemos concluir que $\Gamma' \leq \Phi(\Gamma)$.

Sean ahora $x \cdot \Phi(\Gamma)$, $y \cdot \Phi(\Gamma) \in \Gamma/\Phi(\Gamma)$. Por el contenido anterior tenemos que $x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \in \Phi(\Gamma)$ por tanto $x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot \Phi(\Gamma) = 1 \cdot \Phi(\Gamma)$ concluyendo que $x \cdot y \cdot \Phi(\Gamma) = y \cdot x \cdot \Phi(\Gamma)$ teniendo así que $\Gamma/\Phi(\Gamma)$ es abeliano. \square

Este último resultado nos permite dar la cota del número cromático máximo para los grupos nilpotentes.

Teorema 3.26. *Sea Γ un grupo nilpotente. Entonces, $\chi_{max}(\Gamma) \leq 3$.*

Demostración. Por el Corolario 3.23 tenemos que $\chi_{max}(\Gamma) \leq \chi_{max}(\Gamma/\Phi(\Gamma))$. Además, como Γ es nilpotente, tenemos que $\Gamma/\Phi(\Gamma)$ es abeliano. Por tanto, por el Teorema 3.17, $\chi_{max}(\Gamma) \leq \chi_{max}(\Gamma/\Phi(\Gamma)) \leq 3$. \square

En la Proposición 3.18 se vió que todo 2-grupo abeliano, con más de un elemento, tiene número cromático máximo igual a dos. A continuación vamos a hacer uso del subgrupo de Frattini para demostrar que todo 2-grupo Γ , con más de un elemento, tiene $\chi_{max}(\Gamma) = 2$.

Proposición 3.27. *Si Γ es un 2-grupo con más de un elemento, entonces $\chi_{max}(\Gamma) = 2$.*

Demostración. Sea Γ un 2-grupo, por el Corolario 3.23 tenemos que $\chi_{max}(\Gamma) \leq \chi_{max}(\Gamma/\Phi(\Gamma))$. Por otro lado, como Γ es 2-grupo, tenemos que Γ es nilpotente y, por la Proposición 3.25, tenemos que $\Gamma/\Phi(\Gamma)$ es un 2-grupo abeliano. Gracias a la Proposición 3.18 esto implica que $\chi_{max}(\Gamma) \leq \chi_{max}(\Gamma/\Phi(\Gamma)) = 2$, teniendo así el resultado. \square

Grupos hamiltonianos

Al igual que calcular el número cromático, saber si un grafo es hamiltoniano o no es un problema muy complicado. Es más, al igual que el número cromático, es un problema NP-completo [10] y, en consecuencia, no se conocen algoritmos eficientes que reciban un grafo y determinen si es hamiltoniano o no.

Definición 4.1. Sea G un grafo. Un camino en G se dice hamiltoniano si pasa por todos los vértices de G de manera única. Además si el camino es un ciclo, se le dice ciclo hamiltoniano.

Al grafo G se le dice grafo hamiltoniano si posee un ciclo hamiltoniano.

Un ejemplo de estos grafos se encuentra en la Figura 4.1.

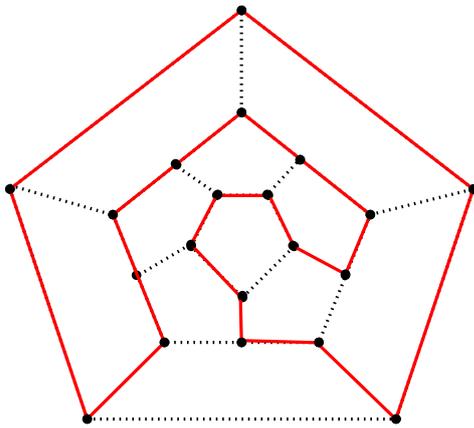


Figura 4.1. El grafo del esqueleto del dodecaedro es hamiltoniano.

El problema de buscar un ciclo hamiltoniano es un clásico en la teoría de grafos. Lovász conjeturó en 1969 [11] que todo grafo finito, conexo y transitivo posee un camino hamiltoniano, esto es conocido como la conjetura de Lovász. Además, solo se conocen 5 ejemplos, entre los que se encuentra el grafo de Petersen (ver Figura 2.7), para los que la conjetura de Lovász es falsa si sustituimos

camino por ciclo. Por tanto, Lovász propuso la conjetura más fuerte de que todo grafo finito, conexo y transitivo es hamiltoniano, salvo los cinco ejemplos conocidos. Por otro lado, se sabe que ninguno de estos 5 ejemplos es un grafo de Cayley, como por ejemplo vimos con el grafo de Petersen en la Proposición 2.8. Además, los grafos de Cayley son transitivos (Corolario 1.17) y, si tomamos un conjunto generador, son conexos (Proposición 1.12). Por esto, una versión más débil de la conjetura es que todo grafo de Cayley conexo es hamiltoniano. Es de mencionar que hoy en día estos problemas siguen abiertos aunque se han logrado ligeros avances.

En este capítulo trataremos esta última versión de la conjetura de Lovász. Se demostrará que los grafos de Cayley conexos de grupos abelianos y diedrales D_p con p primo son hamiltonianos. Además veremos que todo grafo de Cayley de un grupo de Dedekind posee un camino hamiltoniano. Se aporta una demostración de estos tres resultados, basada en las ideas de [15].

Definición 4.2. *Un grupo Γ se dice hamiltoniano si $\text{Cay}(\Gamma, C)$ es un grafo hamiltoniano para todo C conjunto generador.*

Tomando esto en cuenta, podemos reescribir la versión débil de la conjetura de Lovász como que todo grupo es hamiltoniano. Es de notar que en la definición anterior basta tomar solo los conjuntos generadores minimales. Pues si C no es minimal, podemos obtener un subconjunto $D \subset C$ que sí sea generador minimal y, como $\text{Cay}(\Gamma, D)$ es un subgrafo de $\text{Cay}(\Gamma, C)$, si el primero es hamiltoniano, el segundo también.

Antes de dar la demostración de que todo grupo abeliano es hamiltoniano vamos a introducir la notación sobre caminos que usaremos en la prueba. Si $S = (s_1, \dots, s_r)$ es un camino entonces $S^{-1} = (s_r, \dots, s_1)$ denotará el camino inverso. Por otro lado, si $S = (s_1, \dots, s_r)$, $C = (c_1, \dots, c_s)$ son dos caminos y existe una arista entre s_r y c_1 , entonces $SC = (s_1, \dots, s_r, c_1, \dots, c_s)$ es la concatenación de S con C .

Teorema 4.3. *Si Γ es un grupo abeliano, entonces es hamiltoniano.*

Demostración. Sea Γ un grupo abeliano y $C = \{c_1, \dots, c_r\}$ un conjunto generador minimal, veamos que $\text{Cay}(\Gamma, C)$ es hamiltoniano. Vamos a proceder por inducción sobre r , el número de generadores. Para la base de la inducción, si $r = 1$ entonces el grupo es cíclico, y el ciclo $S = (1, c_1, c_1^2, \dots, c_1^{s-1}, 1)$, con s el orden de c_1 , es un ciclo hamiltoniano. Nuestra hipótesis de inducción es que si un grupo abeliano está generado minimalmente por $r - 1$ elementos entonces, su grafo de Cayley es hamiltoniano. Prosigamos con la inducción para el caso de r generadores. Como C es minimal entonces por la Proposición 1.12 tenemos que $G = \text{Cay}(\Gamma, C \setminus \{c_1\})$ es un subgrafo no conexo de $\text{Cay}(\Gamma, C)$. Veamos que este grafo tiene k componentes conexas, con k el menor entero positivo tal que

$kc_1 \in \langle C \setminus \{c_1\} \rangle$. Tenemos que tc_1, lc_1 están en distintas componentes para $0 \leq t < l \leq k - 1$, pues de darse lo contrario, entonces existirá un camino en G entre tc_1 y lc_1 , o lo que es equivalente $tc_1 + \alpha_2c_2 + \dots + \alpha_r c_r = lc_1$ por lo que $(l - t)c_1 \in \langle C \setminus \{c_1\} \rangle$ con $0 < l - t < k$, que no es posible por la definición de k . Por tanto, hay al menos k componentes conexas. Además como C es generador, cualquier elemento $y \in \Gamma$ será $y = tc_1 + \alpha_2c_2 + \dots + \alpha_r c_r$, con $0 \leq t \leq k - 1$, pues $kc_i \in \langle C \setminus \{c_1\} \rangle$. Por tanto, hay un camino en G entre y y tc_1 , estando por tanto y en la componente conexa de tc_1 . Concluimos que G tiene k componentes conexas, que denotaremos G_0, \dots, G_{k-1} , con $ic_1 \in G_i$. Además, es claro que $x \in C_i$ si y solo si tiene una escritura de la forma $x = ic_1 + \alpha_2c_2 + \dots + \alpha_r c_r$, con $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Sea ahora $H = \langle C \setminus \{c_1\} \rangle$, entonces $C_0 = \text{Cay}(H, C \setminus \{c_1\})$. Aplicando la hipótesis de inducción, existe un ciclo hamiltoniano $S_0 = (0, r_1, \dots, r_\ell, 0)$ en C_0 . Es claro entonces que el ciclo $S_i = (ic_1, ic_1 + r_1, \dots, ic_1 + r_\ell, ic_1)$ es hamiltoniano en C_i . Por tanto, los vértices de los ciclos S_0, \dots, S_{k-1} particionan el conjunto de vértices de el grafo $\text{Cay}(\Gamma, C)$ (ver Figura 4.2).

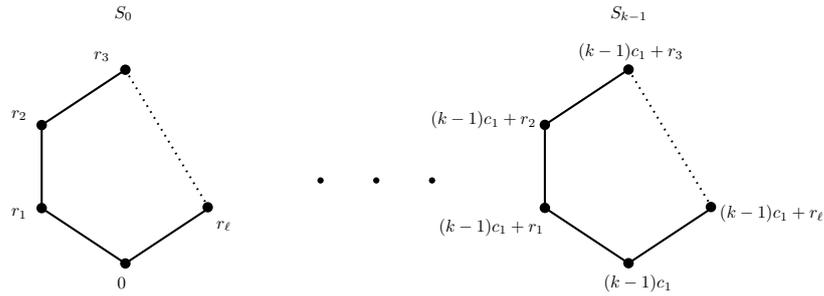


Figura 4.2. Los vértices de $\text{Cay}(\Gamma, C)$ están dispuestos en k ciclos.

Ahora definimos los caminos $R_i = (ic_1, ic_1 + r_1, \dots, ic_i + r_{\ell-1})$. Del hecho de que $c_1 \in C$ y que Γ sea abeliano tenemos que $\{ic_1 + r_{\ell-1}, (i + 1)c_1 + r_{\ell-1}\}$ y $\{ic_1, (i + 1)c_1\}$ son aristas de $\text{Cay}(\Gamma, C)$. Por lo que, $R = R_0R_1^{-1} \dots R_{k-1}$, si k impar, o $R = R_0R_1^{-1} \dots R_{k-1}^{-1}$, si k par, es un camino en $\text{Cay}(\Gamma, C)$.

Por tanto dividimos la prueba en dos casos:

- Si k impar,

$$R = (0, \dots, r_{\ell-1}, c_1 + r_{\ell-1}, \dots, c_1, \dots, (k - 1)c_1, \dots, (k - 1)c_1 + r_{\ell-1}).$$

Que es un camino que pasa por todos los vértices de forma única salvo por los elementos del camino $R' = ((k - 1)c_1 + r_\ell, \dots, c_1 + r_\ell, c_1)$. Por tanto la concatenación RR' es el ciclo hamiltoniano deseado.

- Si k par,

$$R = (0, \dots, r_{\ell-1}, c_1 + r_{\ell-1}, \dots, c_1, \dots, (k-1)c_1 + r_{\ell-1}, \dots, (k-1)c_1).$$

Y como $\{(k-1)c_1, (k-1)c_1 + r_{\ell}\}$ es una arista en el grafo, la prueba sigue igual que en el caso k impar.

□

En la Figura 4.3 se puede ver una representación del ciclo RR' para $k = 3$ y $k = 4$.

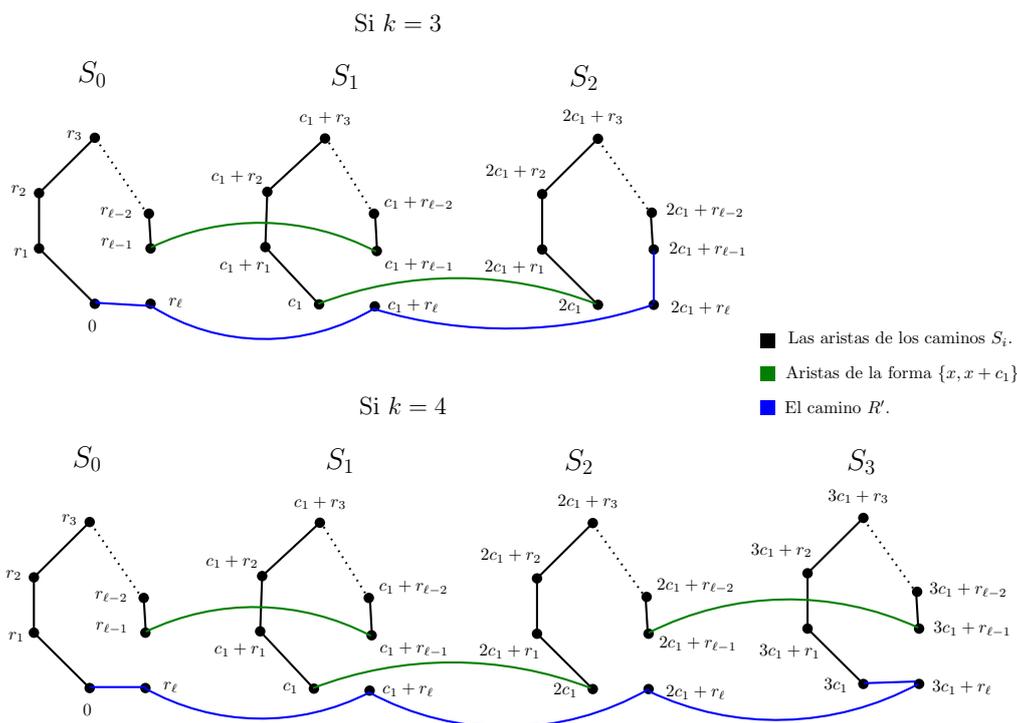


Figura 4.3. El camino RR' en $\text{Cay}(I, C)$ descrito en el Teorema 4.3.

Para grafos dirigidos se puede definir de forma natural el concepto de camino/ciclo hamiltoniano.

Definición 4.4. Sea $D = (V, A)$ un grafo dirigido. Decimos que un camino dirigido en D es hamiltoniano si recorre todos los vértices del grafo de manera única. Además si el camino es un ciclo, se le dice ciclo dirigido hamiltoniano.

Es de notar que la versión dirigida del resultado anterior no es cierta. Sirva como contraejemplo el grafo no hamiltoniano dirigido $\overrightarrow{\text{Cay}}(\mathbb{Z}_6, \{2, 3\})$ (ver Figura 4.4). Sin embargo $\overrightarrow{\text{Cay}}(\mathbb{Z}_6, \{2, 3\})$ sí posee un camino dirigido hamiltoniano. Es más, si en vez de ciclos, buscamos caminos hamiltonianos dirigidos el resultado anterior vuelve a ser cierto. Además podremos generalizarlo a grupos de Dedekind, es decir, grupos donde todo subgrupo es normal.

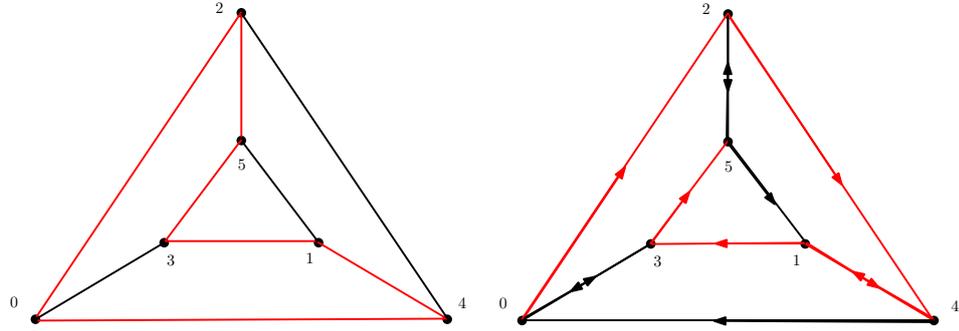


Figura 4.4. $\text{Cay}(\mathbb{Z}_6, \{2, 3\})$ sí es hamiltoniano. $\overrightarrow{\text{Cay}}(\mathbb{Z}_6, \{2, 3\})$ no es hamiltoniano, pero tiene un camino hamiltoniano.

Teorema 4.5. *Todo grafo de Cayley dirigido de un grupo de Dedekind posee un camino hamiltoniano.*

Demostración. Sea Γ un grupo de Dedekind y sea C un sistema generador minimal. Vamos a proceder por inducción sobre r , el número de elementos de C . Si $r = 1$ el grupo es cíclico y por tanto el grafo de Cayley cumple con el resultado. Supongamos entonces por inducción que dado un grupo de Dedekind generado por menos de r elementos, entonces su grafo de Cayley dirigido posee un camino hamiltoniano.

Sea $c \in C$ y sea k orden de c . Como Γ es de Dedekind, entonces $H = \Gamma/\langle c \rangle$ es un grupo y además, por el Teorema de correspondencia, es un grupo de Dedekind. Por otro lado, $(C \setminus \{c\})/\langle c \rangle = B$ genera a H y B tiene menos de r elementos, por lo que aplicando la hipótesis de inducción tenemos que $\overrightarrow{\text{Cay}}(H, B)$ tiene un camino hamiltoniano $(b_1 \cdot \langle c \rangle, \dots, b_\ell \cdot \langle c \rangle)$. Por tanto para cada elemento $b_i \cdot c^t$ de la clase de b_i , existe un $c_i \in C$ tal que $b_i \cdot c^t \cdot c_i = b_{i+1} \cdot c^l$, esto es, para cada elemento de la clase de b_i existe un arco, mediante c_i en $\overrightarrow{\text{Cay}}(\Gamma, C)$ hacia un elemento de la clase de b_{i+1} . Para facilitar la notación vamos a hacer un cambio de representante en las clases de b_i . Definimos $d_1 = b_1$ y $d_{i+1} = d_i \cdot c^{k-1} \cdot c_i$. Construimos ahora el camino de la Figura 4.5:

$$P = (d_1, d_1 \cdot c, \dots, d_1 \cdot c^{k-1}, d_2, d_2 \cdot c, \dots, d_\ell, \dots, d_\ell \cdot c^{k-1}).$$

Afirmamos que P es un camino hamiltoniano en $\overrightarrow{\text{Cay}}(\Gamma, C)$. En primer lugar, P es camino pues $c, c_1, \dots, c_\ell \in C$. Además, P no repite vértices pues dos elementos de la forma $d_i \cdot c^t, d_j \cdot c^l$ con $i \neq j$, son distintos pues tienen clases de equivalencia distintas en H , y dos elementos $d_i \cdot c^l, d_i \cdot c^t$, con $l < t < k$, no son iguales pues el orden de c es k . Por último, P pasa por cada elemento de todas las clases de equivalencia de H , por tanto recorre todos los elementos del grupo. \square

Por último, veamos que los grupos diedrales D_p (los grupos de simetrías de un polígono regular con p lados) con p primo, son hamiltonianos. Para ello, antes

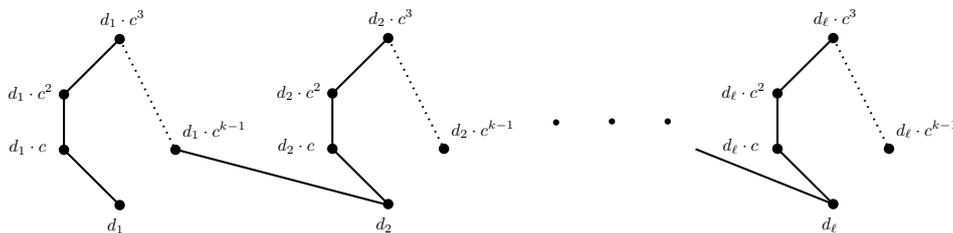


Figura 4.5. Descripción del camino hamiltoniano en un grafo de Cayley de un grupo de Dedekind.

vamos a caracterizar los sistemas generadores minimales de D_p . Denotaremos por r a la rotación que lleva cada vértice del polígono a su vecino en sentido horario y por s a una reflexión cualquiera. Por tanto $D_p = \langle r, s/o(r) = p, o(s) = 2, r \cdot s \cdot r = s \rangle$.

Lema 4.6. *Todos los generadores minimales de D_p con p primo son de la forma:*

- $\{r^k, r^i \cdot s\}$ con $1 \leq k < p$ y $0 \leq i < p$.
- $\{r^i \cdot s, r^j \cdot s\}$ con $0 \leq i < j < p$.

Demostración. Sea C un generador minimal de D_p . Tenemos dos opciones:

- Existe $a = r^k \in C$ con $1 \leq k < p$. En este caso ningún otro elemento de la forma r^i estará en C pues $o(a) = \frac{p}{\text{mcd}(k,p)} = p$, y por tanto, $\langle a \rangle = \{r^i/0 \leq i < p\}$. Además, en C debe haber al menos otro elemento pues a no genera a D_p , y tenemos que cualquier $r^i \cdot s$ junto con a es generador de D_p . Pues $s = r^{p-i} \cdot r^i \cdot s \in \langle a, r^i \cdot s \rangle$ y $r \in \langle a \rangle$, y por tanto $D_p = \langle r, s \rangle = \langle a, r^i \cdot s \rangle$.
- Si $r^k \notin C$ para todo k . En este caso C debe tener al menos dos elementos también y además cualquier par de elementos de la forma $C = \{r^i \cdot s, r^j \cdot s\}$ con $r^i \neq r^j$ genera a D_p . Pues el producto tiene orden p . \square

En la Figura 4.6 se puede ver el grafo $\text{Cay}(D_3, C)$ cuando C es un generador como en el lema anterior.

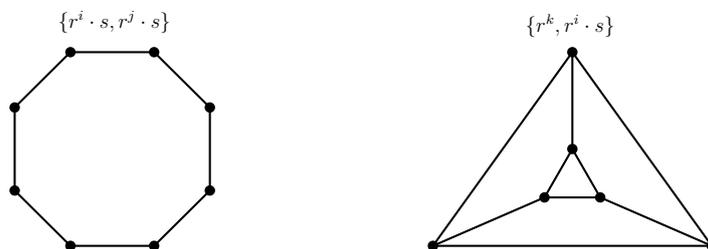


Figura 4.6. Grafos de Cayley de D_3 respecto de un sistema minimal de generadores C . A la izquierda si $C = \{r^i \cdot s, r^j \cdot s\}$, con $0 \leq i < j \leq 2$, y a la derecha si $C = \{r^k, r^i \cdot s\}$, con $k \in \{1, 2\}$ y $i \in \{0, 1, 2\}$.

Teorema 4.7. *El grupo diedral D_p con p primo es hamiltoniano.*

Demostración. Sea C un conjunto generador minimal de D_p , veamos que el grafo $\text{Cay}(D_p, C)$ es hamiltoniano. Por el lema anterior tenemos dos casos:

- $C = \{r^i \cdot s, r^j \cdot s\}$ con $r^i \neq r^j$. Como C está formado por dos involuciones entonces, por la Proposición 1.19, $\Delta(\text{Cay}(D_p, C)) = 2$. Por tanto, $\text{Cay}(D_p, C)$ es un ciclo y, en consecuencia, hamiltoniano.
- $C = \{r^k, r^j \cdot s\}$. Como $\langle r^k \rangle = \langle r \rangle$, entonces $\exists i < p$ tal que $r^j = r^{ik}$. Por tanto $C = \{r^k, r^{ik} \cdot s\}$. En este caso construimos el ciclo siguiente:

$$(1, r^k, \dots, r^{(p-1)k}, r^{(i-1)k} \cdot s, r^{(i-2)k} \cdot s, \dots, s, r^{(p-1)k} \cdot s, \dots, r^{ik} \cdot s, 1).$$

El ciclo es hamiltoniano. En efecto, hasta $r^{(p-1)k}$ las aristas vienen inducidas por r^k . La siguiente arista viene dada por $r^{ik} \cdot s$. Y el resto, salvo la última, vuelven a ser generadas por r^k . Por tanto es un ciclo en $\text{Cay}(D_p, C)$ y además recorre todos los elementos del grupo concluyendo que es hamiltoniano. \square

Como se adelantó en el Capítulo 2, vamos a proceder a demostrar con herramientas de este capítulo que el grafo de Petersen no es de Cayley.

Proposición 4.8. *El grafo de Petersen no es de Cayley.*

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe Γ un grupo y $S \subset \Gamma \setminus \{1\}$ un conjunto tal que el grafo de Petersen es $\text{Cay}(\Gamma, S)$. Como el grafo tiene diez vértices entonces Γ debe ser \mathbb{Z}_{10} o D_5 . En virtud de los Teoremas 4.3 y 4.7, tenemos que el grafo de Petersen es hamiltoniano. Esto es absurdo pues se puede comprobar que el grafo no posee ningún ciclo hamiltoniano. \square

Conclusiones

En este trabajo se ha establecido una conexión entre la teoría de grupos y la teoría de grafos mediante el estudio de los grafos de Cayley. Se han analizado las propiedades de estos grafos y se han demostrado los Teoremas de Frucht y Sabidussi, que relacionan el grupo de automorfismos de un grafo con el propio grupo.

Además, se ha abordado el problema del número cromático, tanto en el contexto de la teoría de grafos como en el de la teoría de grupos. Se ha determinado el número cromático mínimo de cualquier grupo finito y se ha dado una cota superior para el número cromático máximo de un grupo nilpotente.

Por último, se ha estudiado el problema del ciclo o camino hamiltoniano en grafos de Cayley. Se ha demostrado que todo grupo abeliano y todo grupo diedral D_p con p primo son hamiltonianos. Además, se ha probado que todo grafo de Cayley de un grupo de Dedekind posee un camino hamiltoniano.

El trabajo deja abierta la puerta a futuras investigaciones sobre los temas estudiados. En este sentido las posibles continuaciones se centran en los contenidos de los temas tres y cuatro. En el tema tres un siguiente paso natural sería investigar una cota superior para los grupos resolubles, extendiendo el Teorema 3.26. Además, como se menciona en la introducción, el estudio de cuándo $\chi_{\max}(\Gamma) = 2$ es una aportación propia. En esta memoria se ha demostrado: (1) si Γ es abeliano, entonces $\chi_{\max}(\Gamma) = 2$ si y solo si Γ es un 2-grupo (Proposición 3.18), y (2) si Γ es un 2-grupo, entonces $\chi_{\max}(\Gamma) = 2$ (Proposición 3.27). Usando resultados de [12] se puede demostrar el siguiente resultado (del que no se ha incluido una demostración en esta memoria por falta de espacio):

Teorema 4.9. *Sea Γ un grupo resoluble. Entonces, $\chi_{\max}(\Gamma) = 2$ si y solo si Γ es un 2-grupo.*

Este resultado anima a pensar que, quizás, se pueda eliminar la hipótesis de resoluble. En el capítulo cuatro el siguiente paso a seguir podría ser determinar si todo grafo de Cayley de un grupo diedral es hamiltoniano o no. Sobre este aspecto, además de D_p con p primo, se conoce que los grupos D_{2n} son hamiltonianos ([1]). Asimismo, también se propone el estudio en los grupos nilpotentes,

lo cual extendería el Teorema 4.3 o encontraría un contraejemplo a la conjetura de Lovász.

En resumen, este trabajo ha logrado establecer una conexión entre la teoría de grupos y la teoría de grafos, centrándonos en aspectos relacionados con temas de investigación abiertos en la actualidad.

Bibliografía

- [1] Alspach B.; Chen C.C.; Dean M. *Hamilton paths in Cayley graphs on generalized dihedral groups*. *Ars Mathematica Contemporanea*. Vol. 3 (2010), pp. 29-47.
- [2] Babai L. *Automorphism groups, isomorphism, reconstruction*. En Graham, Ronald L.; Grötschel, Martin; Lovász, László (editores). *Handbook of Combinatorics*. North-Holland. Vol. 2 (1994), pp. 1447-1540.
- [3] Babai L. *Chromatic number and subgraphs of Cayley graphs*. En Alavi, Yousef; Lick, Don R (editores). *Theory and applications of graphs*. (1978), pp. 10-22.
- [4] Brooks R.L. *On colouring the nodes of a network*. Cambridge Philosophical Society. Vol. 37 (1941), pp. 194-197.
- [5] Cayley A. *Desiderata and suggestions: No. 2. The Theory of groups: graphical representation*. *American Journal of Mathematics*. Vol. 1 (1878), pp. 174-176.
- [6] Conway J.H.; Wilson R.A. *Atlas of Finite Groups*. Oxford University Press (1985).
- [7] Frucht R. *Graphs of degree three with a given abstract group*. *Canadian Journal of Mathematics*. Vol. 1 (1949), pp. 365-378.
- [8] Frucht R. *Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe*. *Compositio Mathematica*. Vol. 6 (1938), pp. 239-250.
- [9] Frucht R., Graver J., Watkins M. *The groups of the generalized Petersen graphs*. Cambridge Philosophical Society. Vol. 70 (1971), pp. 211-218.
- [10] Karp, Richard M. *Reducibility Among Combinatorial Problems*. En R.E. Miller; J. W. Thatcher; J.D. Bohlinger (editores). *Complexity of Computer Computations*. New York: Plenum. (1972), pp. 85-103.
- [11] Lovász L. *Combinatorial Structures and their Applications*. Proceedings of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and Their Applications (1969).
- [12] Lucchini A. *On the orders of the non-Frattini elements of a finite group*. *Arch. Math*. Vol. 110, (2018), pp. 421-426.

- [13] Sabidussi G. *Graphs with given group and given graph-theoretical properties*. Canadian Journal of Mathematics. Vol. 9 (1957), pp. 515-525.
- [14] Sabidussi G. *Vertex-transitive graphs*. Monatshefte Math. Vol. 68 (1964), pp. 426-438.
- [15] Stelow M. *Hamiltonicity in Cayley graphs and digraphs of finite abelian groups*. The University of Chicago Mathematics REU (2017).
- [16] Vizing V. G. *The Cartesian product of graphs*, Vycisl. Sistemy. Vol. 9 (1963), pp. 30-43.
- [17] Zajac M. *A short proof of Brooks Theorem*. ArXiv:1805.11176 [math.CO].

Graphs and groups

Jorge David Ávila Álvarez

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
 Universidad de La Laguna
 alu0101434544@ull.edu.es

Abstract

The aim of this work is to establish connections between group theory and graph theory. To this end, Cayley graphs will be introduced and used to prove that every finite group is the automorphism group of a finite graph (Frucht's Theorem). Additionally, we characterize when a graph is a Cayley graph based on its automorphism group (Sabidussi's Theorem). Furthermore, we study two classical problems in graph theory: the computation of the chromatic number and the determination of hamiltonian graphs. We study these problems in the context of Cayley graphs and obtain results taking advantage of their algebraic structure.

1. Cayley graphs

Let Γ , a group, and $C \subset \Gamma \setminus \{1\}$. Then, the Cayley graph of Γ generated by C is the graph, $\text{Cay}(\Gamma, C)$, with:

- Vertices: the elements of Γ .
- Edges: $\{x, x \cdot c\}$ with $x \in \Gamma, c \in C$.

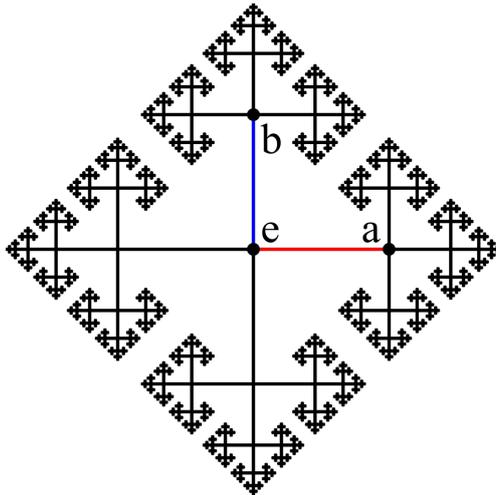


Figure 1: The Cayley graph of the free group on two generators a and b .

Definition. Let $G = (V, E)$ a graph. An automorphism of G is a bijective map $f : V \rightarrow V$ that preserves edges, that is:

$$\{x, y\} \in E \iff \{f(x), f(y)\} \in E.$$

We define the automorphism group of G as the set of all automorphisms of G , $\text{Aut}(G)$, with the composition.

2. Sabidussi's and Frucht's Theorems

Sabidussi's Theorem characterizes Cayley graphs based on their automorphism group.

Sabidussi's Theorem. Let $G = (V, E)$ a graph. Then, G is a Cayley graph if and only if exists $H \leq \text{Aut}(G)$ acting regularly on G .

On the other hand, Frucht's theorem proves the universality of automorphism groups.

Frucht's Theorem. For every finite group Γ , there exists a graph G such that $\Gamma \cong \text{Aut}(G)$.

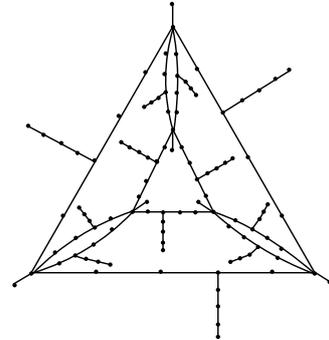


Figure 2: Graph, G , with $\text{Aut}(G) = D_3$, the dihedral group of order 6.

3. Classical problems in graph theory

Computing the chromatic number of a graph and determining whether a graph is hamiltonian are two classical problems in graph theory. Both problems are complex to solve. However, we study these problems in the context of Cayley graphs and we exploit their algebraic structure to obtain results.

We define the minimum (respect. maximum) chromatic number of a group Γ as the minimum (respect. maximum) of the chromatic numbers of $\text{Cay}(\Gamma, C)$, as C ranges over the minimal set of generators of Γ . Then we get:

Theorem. Let Γ be a finite group. Then, the minimum chromatic number of Γ is:

$$\chi(\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Gamma = \{1\}, \\ 2 & \text{if } \Gamma \text{ have a index 2 subgroup, or} \\ 3 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Theorem. Let Γ be a nilpotent group. Then, the maximum chromatic number of Γ is:

$$\chi_{\max}(\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Gamma = \{1\}, \\ 2 & \text{if } \Gamma \text{ is a 2-group, or} \\ 3 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

On the other hand, we say that a group is hamiltonian if all its connected Cayley graphs are hamiltonian, i.e, they all possess a cycle passing through all their vertices.

Theorem. All finite abelian groups and dihedral groups D_p , with p prime, are hamiltonian.

References

- [1] Babai L. *Chromatic number and subgraphs of Cayley graphs*. En Alavi, Yousef; Lick, Don R (editores). Theory and applications of graphs. (1978), pp. 10-22.
- [2] Cayley A. *Desiderata and suggestions: No. 2. The Theory of groups: graphical representation*. American Journal of Mathematics. Vol. 1 (1878), pp. 174-176.
- [3] Lovász L. *Combinatorial Structures and their Applications*. Proceedings of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and Their Applications (1969).