Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

David Specogna Acosta

Propiedades del espectro y rango numérico de un operador

Properties of the spectrum and numerical range of a bounded operator

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Mayo de 2024

Dirigido por
Teresa J. Bermúdez de León

Teresa J. Bermúdez de León
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis compañeros de carrera, por las noches de estudio, su apoyo y sus apuntes; en especial a Iris, Gabriel y Daniel. Y a mi tutora Teresa, por su ayuda y paciencia.

David Specogna Acosta
La Laguna, 20 de mayo de 2024

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es presentar algunas propiedades introductorias del espectro y del rango numérico de un opeardor acotado, dos subconjuntos del plano complejo. Tratamos algunas de las propiedades clásicas del espectro de un operador acotado: compacidad, clasificación y Teorema de la Aplicación Espectral. Para ello utilizamos en gran parte el lenguaje de las álgebras de Banach, dando demostraciones alternativas y, en algunos casos, más simples. Se presentan además propiedades como la representación por homomorfismos del espectro, o el Teorema de la Aplicación Espectral para polinomios de Laurent. También estudiamos el radio espectral y clases de operadores asociadas. Por otra parte, vemos ejemplos introductorios del rango numérico de operadores acotados. Continuamos con algunas propiedades básicas, así como la clasificación para matrices 2×2*, que facilita el estudio del caso general. Estudiamos además la convexidad del rango numérico y su relación de contenido con el espectro. Concluimos con el estudio de los puntos de la frontera del rango numérico, asegurando que si uno de dichos puntos tiene curvatura infinita, entonces es un autovalor.*

Palabras clave: *espectro – rango numérico – álgebras de Banach.*

Abstract

The main objective of this work is to present some introductory properties of the spectrum and the numerical range of a bounded operator, two subsets of the complex plane. We discuss some of the classic properties of the spectrum of a bounded operator: compactness, classification, and the Spectral Mapping Theorem. For this purpose, we largely use the language of Banach algebras, providing alternative and, in some cases, simpler proofs. Additionally, we present properties such as the representation of the spectrum by homomorphisms and the Spectral Mapping Theorem for Laurent polynomials. We also study the spectral radius and associated classes of operators. Furthermore, we introduce the numerical range of bounded operators. We begin with some basic properties, as well as the classification for 2×2 *matrices, which facilitates the study of the general case. We study the convexity of the numerical range and its containment relationship with the spectrum. We conclude with the study of the boundary points of the numerical range; if one such point has infinite curvature, then it is an eigenvalue.*

Keywords: *spectrum – numerical range – Banach algebras.*

Índice general

Introducción

El análisis del espectro de un operador tiene gran interés. En dimensión finita, su utilidad es infinita: la diagonalización es aplicable en áreas como el machine learning y la estadística, con el análisis de componentes principales, el procesamiento del lenguaje o las tenebrosas "eigenfaces"- una representación de las caras humanas que los algoritmos usan en el reconocimento facial. En su versión en dimensión infinita, el espectro encuentra utilidad en la física, en particular la resolución de ecuaciones integrales: la ecuación de ondas, la ecuación de Schrödinger, la ecuación del calor... aunque también en la formulación abstracta de la física cuántica.

En este trabajo estudiamos las propiedades clásicas del espectro de un operador acotado, así como un conjunto asociado pero distinto, el rango numérico. Si bien no es lo usual en los textos introductorios, pues se puede ver de manera extensa y con muchas consecuencias menos clásicas, nos ayudaremos de la teoría de las álgebras de Banach, principalmente para el estudio del espectro.

En el primer Capítulo damos una introducción histórica sobre la teoría espectral y del rango numérico, además de la teoría de Gelfand. Incluimos algunos resultados básicos del análisis funcional, en especial sobre espacios de Banach X y espacios de Hilbert H. Se hace especial énfasis en las propiedades del operador adjunto y en las condiciones que garantizan que un operador tenga inversa acotada.

La Sección 1.3 da una introducción a las álgebras de Banach, que consisten en álgebras normadas completas con respecto de esta norma, además de cierta compatibilidad de la norma y el producto. Concluimos con algunas propiedades, como que la multiplicación es continua en álgebras de Banach, y que las series geométricas de vectores de norma menor que uno convergen. Finalmente, resulta importante que el conjunto de elementos invertibles en un álgebra es abierto.

El segundo Capítulo trata del espectro. Damos la definición del espectro de un operador T del álgebra de operadores acotados, que denotamos $\sigma(T)$: es el conjunto de escalares λ tal que $T - \lambda I$ no es invertible. El espectro generaliza el concepto de autovalores para operadores en espacios de dimensión infinita.

Idem se puede definir en álgebras de Banach. Presentamos una clasificación del espectro, que consiste en cierta partición de este conjunto.

Si T es acotado, su espectro es no vacío, cerrado y está acotado por la norma de T. La prueba es algebráica y la damos en álgebras de Banach. Vemos que el espectro de T conmuta con la operación que toma adjuntos, $*$, y más adelante vemos que conmuta con la operación que toma inversos.

El espectro esta íntimamente relacionado con los ideales maximales del álgebra, y una consecuencia es que si A es un álgebra conmutativa, entonces $\sigma(x)$ se obtiene de evaluar todos los homomorfismos de A en $\mathbb{C}$ en el elemento x. Con ello, en la Sección 2.4, probamos el Teorema de la Aplicación Espectral para polinomios de Laurent, que son polinomios complejos en variables z y z^{-1}, aunque primero vemos la prueba más habitual para polinomios de variable z.

La Sección 2.5 introduce el radio espectral, que es la mayor distancia al origen que puede obtenerse en el espectro. Tras obtener una forma de calcularlo, estudiamos varias clases de operadores relacionadas con este número: los operadores normales, hiponormales y cohiponormales, además de los normaloides.

El tercer Capítulo trata del rango númerico de un operador acotado T, que se obtiene de evaluar el producto interior $\langle Tx, x\rangle$ donde x son los vectores unitarios de H. Vemos sus propiedades básicas, y varios ejemplos; si bien el espectro es invariante bajo similitud, el rango numérico no lo es. En la Sección 3.2 damos una clasificación completa del rango numérico de matrices 2×2, resulta que salvo cierta traslación, solo hay cuatro casos: un punto, un segmento, un disco o una elipse maciza. En todos ellos, el rango numérico es una elipse (posiblementente degenerada) con focos en los autovalores del operador, en todo caso es un conjunto convexo. Esto se resume en el Teorema de la Elipse y en una tabla al final de la sección. En la última sección, descubrimos que sorprendentemente, la convexidad del caso de dimensión 2 es suficiente para probar la convexidad en el caso de dimensión infinita. Vemos la relación con el espectro, que está contenido en la clausura del rango numérico. Finalmente, estudiamos ciertos puntos especiales de la frontera del rango numérico, los puntos de curvatura infinita. Son, intuitivamente, “esquinas”, a diferencia de bordes suaves, y resulta que son autovalores del operador.

1

Preliminares.

En este capítulo se hará una breve introducción histórica sobre las ramas importantes de la teoría de operadores, que son el esqueleto de este trabajo: el espectro y el rango numérico de un operador lineal y acotado. Dicha introducción se basa principalmente en las referencias [5] y [18]. Además, se presentan algunos resultados básicos del Análisis Funcional y de Álgebras de Banach, siendo las referencias bibliográficas [15] y [13].

1.1. Introducción histórica

Augustin Louis Cauchy, en 1826, estableció los conceptos básicos de valores propios y diagonalización, sentando las bases de la teoría espectral. Sin embargo, la diagonalización, o el teorema espectral, no se formuló en forma matricial hasta 1852 con Joseph Sylvester. El origen de la teoría espectral se debe a von Koch y Ivan Fredholm; se considera que el detonante de dicha teoría es el trabajo seminal de Fredholm de 1900 sobre ecuaciones integrales.

En 1904, David Hilbert, estudiando las ecuaciones integrales, generaliza los autovalores para formas simétricas infinitas K. Esto lo bautiza como el *espectro* de K, el conjunto de números λ tal que $K - \lambda I$ no es invertible. En 1909, Ernst Hellinger reformuló la teoría de formas cuadráticas y Hermann Weyl publicó un estudio sobre las formas acotadas y su espectro. La evolución de la teoría integral moderna está muy relacionada con la creación de la teoría espectral. El mayor avance ocurre en 1927-1929, debido al estudio revolucionario de John von Neumann donde introduce el concepto abstracto de un operador lineal en un espacio de Hilbert.

La colección de todos los operadores en un espacio de Hilbert forma un anillo; tales anillos, con diversas topologías, fueron extensamente investigados por John von Neumann y Francis J. Murray en 1936. Análogamente a los espacios de Hilbert, Israel Gelfand define el espectro $\sigma(x)$ de un elemento de un álgebra de Banach $x \in A$, como el conjunto de números complejos λ para los cuales

$x - \lambda\ 1_A$ no tiene inverso, donde 1_A denota la unidad en A. Al igual que en espacios de Hilbert, el conjunto $\sigma(x)$ es compacto y no vacío.

En la teoría de Gelfand, son importantes los caracteres, o funcionales lineales multiplicativos, es decir homomorfismos de A en $\mathbb{C}$, denotados aquí por $\phi \in Hom(A, \mathbb{C})$. Los caracteres del álgebra se corresponden con los ideales maximales del álgebra, esto es consecuencia del Teorema de Gelfand (1941). Un resultado facilitado por este formalismo es que $\sigma(x)$ resulta ser precisamente igual a las evaluaciones de todos caracteres sobre x, es decir $\sigma(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in Hom(A, \mathbb{C})\}$.

El rango númerico fue estudiado por Hilbert en 1904. Más adelante, en 1922-1924, Hausdorff y Toeplitz demuestran independientemente que el rango numérico es convexo [17], aunque la convexidad para matrices ya fue dada en 1918 y 1919. En 1951, Kippenhahn da varios resultados nuevos, incluyendo una clasificación completa del rango numérico de matrices de orden 3×3.

El estudio del rango numérico así como el estudio de la teoría espectral se consideran ramas de la teoría de operadores. Ambas ramas dan herramientas para estudiar ciertas clases de operadores. Puede resultar más sencillo estudiar las propiedades de estos subconjuntos del plano complejo, para obtener conclusiones de un operador T, más que el estudio directo del operador, que vive en un espacio de dimensión infinita.

1.2. Análisis Funcional

A lo largo del trabajo denotamos por X un espacio de Banach complejo y H un espacio de Hilbert complejo dotado de un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$. Si $z \in \mathbb{C}$, a su conjugado lo denotamos por $\overline{z}$ y a su módulo por $|z|$. Al conjunto de operadores lineales y acotados definidos de X en sí mismo lo denotamos por $L(X)$. Similarmente, el conjunto $L(X, Y)$ es el conjunto de operadores lineales y acotados definidos de X en Y. Si X es un espacio de Banach, denotamos a su espacio dual por $X^* := L(X, \mathbb{C})$, que a su vez es un espacio de Banach.

Algunos resultados de este trabajo son válidos para un espacio normado, pero nos centraremos principalmente en espacios de Hilbert, o bien en espacios normados completos.

Sean X, Y espacios de Banach, con $T \in L(X, Y)$. El *núcleo* de T es el conjunto de elementos de X que anulan a T, y lo denotamos por

$$N(T) = \{x \in X \mid Tx = 0\}.$$

El *rango* de T es el conjunto de valores que toma T,

$$R(T) = \{y \in Y \mid y = Tx \text{ para algún } x \in X\}.$$

El núcleo de T es un subespacio lineal cerrado de X, mientras que el rango es un subespacio lineal no necesariamente cerrado de Y.

Comenzamos enunciando algunas definiciones y resultados básicos que suelen verse en un primer curso de análisis funcional.

Proposición 1.1. *[16, Proposition 4.2] (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sean $T \in L(H)$ con H espacio de Hilbert y $x, y \in H$. Entonces*

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y|| \,.$$

La igualdad se alcanza sí y solo sí, x e y son linealmente dependientes.

Teorema 1.2. *[16, Theorem 4.12] (Teorema de representación de Riesz). Sea H un espacio de Hilbert. Para cada funcional lineal acotado $f \in H^*$, existe un único vector $y \in H$, denominado la representación de Riesz de f, tal que*

$$f(x) = \langle x, y\rangle \text{ para cada } x \in H \,.$$

Denotamos por $\delta_{i,j}$ la delta de Kronecker, definida por $\delta_{i,i} = 1$ y $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Si $S \subset H$ es un conjunto, denotamos por $span(S)$ al subespacio lineal de H generado por los elementos de S.

Definición 1.3. Sea H un espacio de Hilbert y $x, y \in H$. Se dice que x *es ortogonal a* y si $\langle x, y\rangle = 0$, y se denota $x \perp y$. Si $M \subset H$ es un subespacio lineal, definimos su *complemento ortogonal* por $M^\perp := \{x \in H \mid x \perp y \text{ para cada } y \in M\}$.

Con las hipótesis anteriores, se puede demostrar que $M^\perp$ es un subespacio lineal cerrado de H.

Definición 1.4. Sea H un espacio de Hilbert y $(e_n) \subset H$ una sucesión. Se dice que (e_n) es

1. una *sucesión ortonormal* si $\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{n,m}$,
2. una *base ortonormal* si es una sucesión ortonormal tal que $span\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es denso en H.

Proposición 1.5. *[16, Theorem 4.17] (Desigualdad de Bessel) Sea H un espacio de Hilbert separable y $(e_n) \subset H$ una sucesión ortonormal. Entonces para cada $x \in H$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq ||x||^2 \,.$$

Proposición 1.6. *[16, Theorem 4.18] (Identidad de Parseval) Sea H un espacio de Hilbert separable y $(e_n) \subset H$ una base ortonormal. Entonces para cada $x \in H$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = ||x||^2 \,.$$

Proposición 1.7. *Sea H un espacio de Hilbert. Para cada $T \in L(H)$, existe un único operador $T^* \in L(H)$ verificando que,*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \text{ para cada } x, y \in H \ .$$

Demostración. Sea $T \in L(H)$. Para cada $y \in H$, definimos el funcional lineal $f_y : H \to \mathbb{C}$ como

$$f_y(x) = \langle Tx, y\rangle \ .$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Proposición 1.1), y ya que T es acotado,

$$|f_y(x)| \leq ||Tx|| \ ||y|| \leq ||T|| \ ||x|| \ ||y|| \ .$$

Tomando $M = ||T|| \ ||y||$, se tiene que $|f_y(x)| \leq M||x||$, para cada $x \in H$. Es decir, f_y es un funcional lineal acotado. Por el Teorema de Representación de Riesz (Teorema 1.2), para cada $y \in H$ existe un único $z(y) \in H$, tal que

$$f_y(x) = \langle Tx, y\rangle = \langle x, z(y)\rangle \ .$$

Basta definir $T^*y := z(y)$. Es inmediato que T^* es lineal, usando la propiedad que lo define y la anti-linealidad del producto interior en el segundo argumento. Para terminar, veamos que T^* está acotado. Usemos que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \text{ para cada } x, y \in H \ .$$

En particular, si $x \in H$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$||T^*x||^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle T\ T^*x, x\rangle \leq ||T\ T^*x|| \ ||x|| \leq ||T|| \ ||T^*x|| \ ||x|| \ . \quad (1.1)$$

Dividiendo por $||T^*x||$, suponiendo que $T^*x \neq 0$, obtenemos que

$$||T^*x|| \leq ||T|| \ ||x|| \ . \quad (1.2)$$

Notar que si $T^*x = 0$, también se cumple. □

Definición 1.8. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$. El operador T^* de la Proposición 1.7 se denomina el *operador adjunto de T*.

La definición anterior tiene una generalización a espacios de Banach de forma similar.

Definición 1.9. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$. Se llama *operador adjunto* de T al operador $T^* \in L(X^*, Y^*)$, definido de manera que $(T^*y^*)(x) := y^*(Tx)$, para cada $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$ y todo $x \in X$, donde X^* denota el espacio dual de X.

Proposición 1.10. *Sea $T \in L(H)$. El operador adjunto de T es involutivo, es decir $T^{**} = T$.*

Demostración. Recordemos la propiedad que define al operador adjunto de T^*,

$$\langle T^*x, y\rangle = \langle x, (T^*)^*y\rangle \text{ para cada } x, y \in H\ .$$

Notar que $(T^*)^*$ es el único operador que verifica esta propiedad. Entonces basta probar que,

$$\langle x, (T^*)^*y\rangle = \langle x, Ty\rangle \text{ para cada } x, y \in H\ . \tag{1.3}$$

Fijemos $x, y \in H$. Partiendo de la definición del adjunto de T, pero intercambiando x con y (usando su arbitrariedad), obtenemos que

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, T^*x\rangle\ .$$

Tomando conjugadas complejas a ambos lados,

$$\langle x, Ty\rangle = \langle T^*x, y\rangle\ .$$

Usando la definición del adjunto de T^*,

$$\langle x, Ty\rangle = \langle x, (T^*)^*y\rangle\ .$$

Esto es exactamente (1.3), lo que queríamos probar. □

Corolario 1.11. Sea $T \in L(H)$. Entonces $||T||^2 = ||T^*||^2 = ||T^*T|| = ||TT^*||$.

Demostración. Por la desigualdad (1.2) de la Proposición 1.7, $||T^*|| \leq ||T||$. Basta sustituir T por T^* y aplicar que el adjunto es involutivo, entonces $||T|| \leq ||T^*||$. Por otro lado, dividiendo por $||x||^2$ en (1.1), obtenemos que $||T^*||^2 \leq ||TT^*||$ y por la discusión anterior, $||TT^*|| \leq ||T||\ ||T^*|| = ||T^*||^2$. La última igualdad a probar se obtiene sustituyendo T por T^* en el razonamiento anterior. □

Proposición 1.12. *Sea $T \in L(H)$ con H espacio de Hilbert. Entonces $(TS)^* = S^*T^*$.*

Demostración. La propiedad que define a $(TS)^*$ es que para cada $x, y \in H$,

$$\langle TSx, y\rangle = \langle x, (TS)^*y\rangle\ .$$

Por otro lado,

$$\langle TSx, y\rangle = \langle x, S^*T^*y\rangle\ ,$$

simplemente aplicando las propiedades que definen a T^* y a S^*. □

El siguiente resultado da una relación muy útil entre los núcleos y rangos de T y T^*. Su demostración se puede consultar en [8, Lemma 1.4].

Proposición 1.13. *Sea $T \in L(H)$. Entonces,*

$$N(T) = R(T^*)^\perp \text{ y } \overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$$

A continuación estudiaremos la invertibilidad de operadores. Necesitamos un resultado previo cuya demostración se puede consultar en [15, Theorem 2.11].

Teorema 1.14. *(Teorema de la aplicación abierta). Sea $T \in L(X,Y)$, con X e Y espacios de Banach. Si T es sobreyectiva, entonces T es abierta, es decir $T(A) \subset Y$ es abierto para cada $A \subset X$ abierto.*

Lema 1.15. *Sea $T \in L(X,Y)$, con X e Y espacios de Banach. Si T es inyectiva y sobreyectiva, entonces $T^{-1} \in L(Y,X)$, donde T^{-1} es la función inversa de T.*

Demostración. Es inmediato que T^{-1} es lineal. Tomemos $Tx, Ty \in Y$, (utilizando que T es sobre), y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$T^{-1}(\lambda Tx + Ty) = T^{-1}T(\lambda x + y) = \lambda x + y \ .$$

Además, de la definición de aplicación continua entre espacios normados, una aplicación biyectiva es abierta sí y solo sí, su inversa es continua. Por el Teorema de la aplicación abierta (Teorema 1.14), T es abierta, luego T^{-1} es continua, entonces es acotada. □

Nota. En particular, si $T \in L(X,Y)$ y es inyectiva, entonces T es biyectiva en su rango. Si $R(T)$ es un espacio de Banach, una consecuencia directa es que $T^{-1} \in L(R(T),X)$. En ese caso se dice que T *tiene inversa acotada en su rango.*

Nota. La demostración del Lema 1.15 nos dice que si T es acotado e inyectivo, entonces la función inversa $T^{-1} : R(T) \to X$ es lineal. Si T no es acotado, observemos que $T^{-1} : R(T) \to X$ sigue siendo lineal. Por lo tanto, decir que $T \in L(X,Y)$ no tiene inversa acotada sobre su rango, es equivalente a que o bien T no es inyectiva, o bien T tiene inversa no acotada sobre su rango.

Teorema 1.16. *(Teorema de la inversa acotada). Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Entonces T tiene inversa acotada en su rango sí y solo sí, T es inyectiva y tiene rango cerrado.*

Demostración. "$\Leftarrow$" Tenemos que T es biyectiva en su rango, además como $R(T) \subset Y$ es cerrado e Y es completo, entonces $R(T)$ es completo. Luego $T \in L(X, R(T))$, donde ambos espacios son de Banach, y aplicando el Lema 1.15, $T^{-1} \in L(R(T),X)$.
"$\Rightarrow$" Supongamos que $T^{-1} \in L(R(T),X)$. Sea $x \in X \setminus \{0\}$. Entonces existe $\alpha > 0$ tal que,

$$||x|| = ||T^{-1}Tx|| \leq \alpha ||Tx|| \ .$$

Luego,

$$\alpha^{-1}||x|| \leq ||Tx|| \ .$$

Esto es, que T está acotada inferiormente. Veamos que $R(T)$ es cerrado por sucesiones. Tomemos $(y_n) \subset R(T)$ una sucesión convergente a $y \in Y$. Esta induce una sucesión $(x_n) \subset X$ donde $Tx_n = y_n$. Como T está acotada inferiormente, para cada $m, n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \alpha^{-1}||x_m - x_n|| \leq ||T(x_m - x_n)|| = ||y_m - y_n|| \ .$$

Como (y_n) es convergente, es de Cauchy, entonces tomando límite cuando n y m tienden a infinito en lo anterior, obtenemos que (x_n) es de Cauchy. Como X es completo, (x_n) converge a x para algún $x \in X$. Pero, como T es continua, $Tx_n = y_n \to y = Tx \in R(T)$. Concluimos que $R(T)$ es cerrado.
Para ver que T es inyectiva, usemos que T está acotada inferiormente. Para cualquier $x \in X \setminus \{0\}$, tal que $Tx = 0$, tenemos que

$$\alpha^{-1}||x|| \leq ||Tx|| = 0 \ .$$

Necesariamente $x = 0$. Concluimos que $N(T) = \{0\}$, es decir T es inyectiva. □

1.3. Álgebras de Banach

Las álgebras de Banach surgieron como una generalización de las álgebras de operadores. Su abstracción permite un tratamiento más algebraico de nuestro espacio de interés principal, $L(H)$ con H un espacio de Hilbert. Si nos restringimos a cierto tipo de álgebra, en concreto las $\mathbb{C}^*$-álgebras que veremos más adelante, resulta que no solo todo álgebra de operadores $L(H)$ es una $\mathbb{C}^*$-álgebra, sino que también toda $\mathbb{C}^*$-álgebra es isomorfa a un álgebra de operadores $L(H)$. Esto es el contenido del Teorema de Gelfand-Naimark, cuya demostración se escapa de nuestros propósitos. Notemos sin embargo que las $\mathbb{C}^*$-álgebras son una caracterización, más que una generalización, de las álgebras de operadores; por lo tanto es de gran interés su estudio. Esta sección se basa en la referencia [13, Banach algebras].

Definición 1.17. Un *álgebra asociativa unitaria* A sobre un cuerpo, $\mathbb{K}$, es simultáneamente:

1. Un anillo unitario, con una suma $+$ y $\cdot$ un producto interno.
2. Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, con la misma suma y un producto externo que denotamos igual, siempre que no haya confusión.
3. Verifica la siguiente compatibilidad (asociatividad) de los productos:

$$r(xy) = (rx)y = x(ry)$$

para cada $x, y \in A$ y para cada $r \in \mathbb{K}$.

En general diremos simplemente que A es un $\mathbb{K}$-álgebra.
Un *álgebra de Banach* A es un $\mathbb{K}$-álgebra y simultáneamente un espacio de Banach, es decir un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado completo. Además, exigimos la siguiente compatibilidad de la norma y el producto,

$$||xy|| \leq ||x|| \; ||y|| \; .$$

Sea A un álgebra unitaria. Al conjunto de *elementos invertibles* de A lo denotamos por $G(A)$. Recordar que $x \in A$ es invertible si existe $y \in A$ tal que $xy = yx = e$, donde e es la unidad en A. Recordemos además que los inversos son únicos. En particular, si x tiene inverso a la izquierda y a la derecha, entonces coinciden. Los inversos a un lado no tienen por que ser únicos. Denotamos además por $G_L(A)$ y $G_R(A)$ a los conjuntos de elementos invertibles a la izquierda y a la derecha, respectivamente.

Ejemplo 1.18. Veamos algunos ejemplos de álgebras de Banach.

1. Si X es un espacio de Banach complejo, entonces $L(X)$ es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$, con las siguientes operaciones: Dados $T, S \in L(X)$, $(T + S)x := Tx + Sx$ y $TSx := T(Sx)$. Notar que la segunda es la composición de los operadores. Además, si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $(\lambda T)x := \lambda \cdot Tx$.
   En efecto, es un anillo con unidad I, y también un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Ya que los operadores son lineales, se verifica la asociatividad:
   $$\lambda(TS)x = (\lambda T)Sx = T(\lambda S) \; .$$
   Por otro lado, se verifica la desigualdad de las normas,
   $$||TS|| \leq ||T|| \; ||S|| \; .$$
2. $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) tomando $||x|| := \max x_i$, donde $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$, es un álgebra de Banach con la multiplicación a componentes.
3. $\ell^2(\mathbb{N})$ y $\ell^\infty(\mathbb{N})$ son álgebras de Banach con la multiplicación a componentes. Observar que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es unitaria, tomando e la sucesión constante 1. Pero $\ell^2(\mathbb{N})$ no lo es, ya que dicha sucesión no es cuadrado-sumable.
4. El conjunto $B(X)$ de funciones acotadas, $f : X \to \mathbb{C}$, donde X es un conjunto arbitrario, es un álgebra de Banach usando la norma del supremo y el producto de funciones usual.

Proposición 1.19. *Sean A un álgebra unitaria y $a, b, u \in A$. Si $u \in G(A)$ y $a = ub$, entonces $a \in G(A)$ sí y solo sí $b \in G(A)$.*

Demostración. "$\Rightarrow$" Tenemos que $b = u^{-1}a$. Supongamos que $aa' = e$, entonces $u^{-1}aa' = u^{-1}$ luego $b(a'u) = e$, de donde b tiene inverso a la derecha. Similarmente obtenemos que b tiene inverso a la izquierda. " $\Leftarrow$" La prueba es simétrica cambiando a por b y usando que $a = ub$. $\square$

Definición 1.20. Un *homomorfismo de álgebras* entre dos álgebras, X e Y, es una aplicación $\phi : X \to Y$ tal que

1. $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$
2. $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$
3. $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$

para cada $x \in X, y \in Y$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Por convenio, si X e Y son unitarias, se exije además que $\phi(1_X) = 1_Y$.

Nota. Es inmediato que si X e Y son unitarias y $x \in G(X)$, entonces $e = \phi(x)\phi(x^{-1})$, luego $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$.

Si bien $L(H)$ es un álgebra de Banach, también es algo más: cada operador $T \in L(H)$ tiene asociado su operador adjunto, $T^* \in L(H)$. Esto motiva la siguiente definición,

Definición 1.21. Sea A un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$. Se dice que A es un $\mathbb{C}^*$-*álgebra*, si existe una aplicación $* : A \to A$ tal que para cada $x, y \in A$ y para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene que

1. $x^{**} := (x^*)^* = x$ (involución),
2. $(x + y)^* = x^* + y^*$,
3. $(xy)^* = y^*x^*$,
4. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda}x^*$,
5. $||xx^*|| = ||x||^2$.

Observar que esto son propiedades que en su mayoría hemos probado para el operador adjunto, por lo que efectivamente $L(H)$ es un $\mathbb{C}^*$-álgebra.

Proposición 1.22. *La multiplicación es continua en álgebras de Banach. Es decir, si X es un álgebra de Banach con $(x_n), (y_n) \subset X$ tales que $x_n \to x$ e $y_n \to y$, entonces $x_ny_n \to xy$.*

Demostración. Es claro ya que

$$||x_ny_n - xy|| \leq ||(x_n - x)y_n|| + ||x(y_n - y)|| \leq ||(x_n - x)|| \, ||y_n|| + ||x|| \, ||(y_n - y)|| \to 0 \, .$$

□

Para los siguientes resultados necesitamos el concepto de serie en un espacio de Banach X. Dada (a_n) una sucesión en X, entendemos por serie al límite de la sucesión de sumas parciales usual, $\sum_{n\geq 0} a_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$, y se dice que la serie converge si existe este límite. Se tiene un resultado análogo al caso de $\mathbb{R}$, donde convergencia absoluta implica convergencia. Más aún, si X es un espacio normado, es completo sí y solo sí, verifica esta propiedad. La demostración se puede consultar en [10, Theorem 1.3.9].

Teorema 1.23. *Sea X un espacio de Banach, con $(a_n) \subset X$. Si $\sum_{n\geq 0} ||a_n||$ converge, entonces $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.*

Proposición 1.24. *(Serie de Neumann). Sea A un álgebra de Banach unitaria con unidad e. Si $x \in A$ y $||x|| < 1$, entonces $e - x$ es invertible y*

$$(e-x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} x^n \ .$$

Demostración. Primero veamos que la serie $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge. Como A es un espacio de Banach, basta ver que converge en norma. Por otro lado, $||x^n|| \leq ||x||^n$, de la definición de álgebra de Banach. Como $||x|| < 1$, entonces $\sum_{n\geq 0} ||x^n|| \leq \sum_{n\geq 0} ||x||^n = \frac{1}{1-||x||} < \infty$, ya que es una serie geométrica convergente de números reales.

Ahora probemos que la serie es el inverso de $e - x$. Puesto que la multiplicación es continua en A (Proposición 1.22),

$$\begin{aligned}(e-x)\sum_{n\geq 0} x^n &= (e-x) \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \lim_{N\to\infty} (e-x) \sum_{n=0}^{N} x^n \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} x^n - \sum_{n=0}^{N} x^{n+1} \right) = \lim_{N\to\infty} (e - x^{N+1}) = e \ .\end{aligned}$$

Notar el comportamiento de serie telescópica y que $||x||^{N+1} \to 0$ cuando $N \to \infty$, ya que $||x|| < 1$. Esto prueba que la serie es el inverso a la derecha de $(e - x)$. La parte de inverso a la izquierda es análoga. □

Corolario 1.25. Sea $T \in L(X)$, con X espacio de Banach. Si $||T|| < |\lambda|$, entonces

$$(\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n\geq 0} (\lambda^{-1} T)^n \ .$$

Demostración. Notar que $(\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}T)^{-1}$. Aplicando la Proposición 1.24, como $L(X)$ es un álgebra de Banach con unidad I, y además $||\lambda^{-1}T|| < 1$, entonces

$$\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n\geq 0} (\lambda^{-1}T)^n \ .$$

□

Proposición 1.26. *El conjunto $G(A)$ es abierto, donde A es un álgebra de Banach unitaria.*

Demostración. Sean $x \in G(A)$ y $h \in A$. Veamos que si $||h|| < \frac{1}{||x^{-1}||}$, entonces $x + h \in G(A)$. En efecto, escribimos $x + h = x(e + x^{-1}h)$. Como $|| - x^{-1}h|| \leq ||x^{-1}|| \, ||h|| < 1$, aplicando la Proposición 1.24, tenemos que $(e + x^{-1}h) \in G(A)$. Así, $x + h$ es producto de elementos invertibles, por lo tanto $x + h \in G(A)$. Con lo que se obtiene que,

$$B\left(x, \frac{1}{||x^{-1}||}\right) = \left\{y \in A \ : \ ||x - y|| < \frac{1}{||x^{-1}||}\right\} \subset G(A) \ ,$$

ya que tomando $h = y - x$, tenemos que $||h|| < \frac{1}{||x^{-1}||}$ y consecuentemente $y = x + h \in G(A)$. $\square$

2

El espectro de un operador.

Para este capítulo, daremos resultados generales en un álgebra de Banach compleja A, que se traducen directamente en resultados para $L(X)$ con X un espacio de Banach complejo. Comenzamos dando las definiciones básicas de espectro y conjunto resolvente, tanto en álgebras de Banach como para operadores. A continuación damos una versión simplificada de las particiones del espectro para operadores.

En la Sección 2.3, vemos algunas de las propiedades más importantes del espectro, dando las pruebas en álgebras de Banach: su compacidad, acotación y el Teorema de la Aplicación Espectral. Vemos, además, algunas propiedades relacionadas con la teoría de Gelfand y las usamos para probar el Teorema de la Aplicación Espectral para polinomios de Laurent. En la sección final se define el radio espectral y se estudian algunas clases de operadores relacionadas con este número real.

Nos basamos en la referencia [13, Banach algebras] para la parte de álgebras y en la referencia [8, Section 2] para la parte de operadores.

2.1. Preliminares

Comenzamos dando algunas definiciones básicas.

Definición 2.1. Sea $T \in L(X)$. Para $\lambda \in \mathbb{C}$, denotamos $T_\lambda := T - \lambda I$. Notar que $T_\lambda \in L(X)$. El *conjunto resolvente* de T es el conjunto de escalares λ, tales que T_λ tiene inversa acotada en su rango y además es densamente definida. Es decir,

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T_\lambda^{-1} \in L(R(T_\lambda), X) \ \text{ y } \ \overline{R(T_\lambda)} = X\} .$$

Por el Teorema de la Inversa Acotada (Teorema 1.16), obtenemos que

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T_\lambda \text{ es inyectiva } , \ \overline{R(T_\lambda)} = R(T_\lambda) \ \text{ y } \ \overline{R(T_\lambda)} = X\} .$$

Es decir,

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T_\lambda \text{ es inyectiva y } R(T_\lambda) = X\} \tag{2.1}$$
$$= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T_\lambda \text{ es biyectiva}\} . \tag{2.2}$$

Se define el *espectro* de T por $\sigma(T) := \mathbb{C} \backslash \rho(T)$.

Estas definiciones de conjunto resolvente y espectro se pueden generalizar en álgebras de Banach con unidad.

Definición 2.2. Sea A un álgebra de Banach con unidad e, para $x \in A$ definimos el *conjunto resolvente de x* por

$$\rho(x) := \{z \in \mathbb{C} \mid x - ze \in G(A)\} \tag{2.3}$$

y el *espectro de x* por $\sigma(x) := \mathbb{C} \setminus \rho(x)$.

Nota. Es inmediato que las definiciones coinciden. Si $T \in L(X)$ con X espacio de Banach, observemos de (2.2) que $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T_\lambda \in G(L(X))\}$, como consecuencia del Lema 1.15.

Nota. Observar que el espectro depende del álgebra. Si B es un subálgebra de A, habremos de distinguir entre $\sigma_A(x)$ y $\sigma_B(x)$.

Veamos ahora algunos ejemplos.

Definición 2.3. Sea H un espacio de Hilbert con una base ortonormal completa $(e_j)_{j\in J}$, donde J es un conjunto de índices. Se dice que T es un *operador diagonal* con diagonal $(\alpha_j)_{j\in J} \subset \mathbb{C}$ si $Te_j = \alpha_j e_j$, para cada $j \in J$.

Ejemplo 2.4. [4, Problem 61] Dada una familia de escalares acotada $(\alpha_j)_{j\in J} \subset \mathbb{C}$, las ecuaciones $Te_j = \alpha_j e_j$ determinan de forma única un operador $T \in L(H)$, con $||T|| = \sup_j |\alpha_j|$. Recíprocamente, si T es un operador diagonal con diagonal $(\alpha_j)_{j\in J}$ y acotado, entonces la sucesión $(\alpha_j)_{j\in J}$ es acotada.

Demostración. Sea $x \in H$. Entonces $x = \sum_j \beta_j e_j$, para cierta familia de escalares $(\beta_j)_{j\in J} \subset \mathbb{C}$, usando la base ortonormal. Así,

$$Tx = \sum_j \beta_j Te_j = \sum_j \beta_j \alpha_j e_j .$$

Supongamos que $\sup_j |\alpha_j| = M$. Para que T esté bien definido, la serie debe converger. Veamos que es absolutamente convergente. Por la Identidad de Parseval, como la base es ortonormal, tenemos que

$$||Tx||^2 = ||\sum_j \beta_j \alpha_j e_j||^2 = \sum_j |\beta_j|^2 |\alpha_j|^2 .$$

Por la desigualdad de Bessel, se tiene que

$$\sum_j |\beta_j|^2|\alpha_j|^2 \leq M^2 \sum_j |\beta_j|^2 \leq M^2||x||^2 .$$

Por lo tanto la serie converge para cada $x \in H$ fijo. Más aún, hemos probado que $||T||^2 \leq M^2$. Para ver la otra desigualdad tenemos que probar que para cada j,

$$\sup_{||x||=1} ||Tx|| = ||T|| \geq |\alpha_j| .$$

Fijado j, basta tomar $x = e_j$, ya que $||e_j|| = 1$ y $||Tx|| = ||\alpha_j e_j|| = |\alpha_j|$. La otra implicación es clara. □

Definición 2.5. Sea H un espacio de Hilbert con base ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. El conjunto de sucesiones complejas acotadas $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es un álgebra, usando las operaciones coordenada a coordenada, y la unidad es la sucesión constante 1. Además es un espacio normado con $||(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \sup_n |\alpha_n|$. Es decir, es un álgebra de Banach. Diremos que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es invertible si tiene inverso en el álgebra, es decir existe $(\beta_n)_{n\in N}$ acotada tal que $\alpha_n\beta_n = 1$ para cada n.

Ejemplo 2.6. [4, Problem 63] Un operador diagonal con diagonal $(\alpha_n)_{n\in N} \subset \mathbb{C}$ es un operador invertible sí y solo sí, la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es invertible en el álgebra $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Como consecuencia, $\sigma(T) = \overline{\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$.

Demostración. Sea T un operador diagonal con diagonal $(\alpha_n)_{n\in N} \subset \mathbb{C}$. Entonces por el Ejemplo 2.4, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Además, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es invertible sí y solo sí, existe una sucesión acotada $(\beta_n)_{n\in N}$ tal que $\alpha_n\beta_n = 1$. Como $\mathbb{C}$ es cuerpo, para cada n, $\beta_n \neq 0$. Entonces $\beta_n = \alpha_n^{-1}$, además como $(\beta_n)_{n\in N}$ es acotada, entonces $(\alpha_n^{-1})_{n\in N}$ es acotada. Resumiendo, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es invertible sí y solo sí $(\alpha_n^{-1})_{n\in N}$ es acotada. Por otro lado, T es invertible sí y solo sí, existe un operador $S \in L(H)$ tal que $ST = TS = I$. De aquí, $STe_n = S\alpha_n e_n = \alpha_n Se_n = 1$. Luego, $Se_n = \alpha_n^{-1}e_n$. Por el Ejemplo 2.4, estas ecuaciones definen un operador acotado sí y solo sí, $(\alpha_n^{-1})_{n\in N}$ es acotada.
Veamos ahora la consecuencia.
Recordar que $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (T - \lambda I) \text{ no es invertible}\}$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $(T - \lambda I)e_n = \alpha_n e_n - \lambda e_n = (\alpha_n - \lambda)e_n$. Por lo tanto $T - \lambda I$ es diagonal, con diagonal $(\alpha_n - \lambda)_{n\in N}$, ya que esta sucesión es acotada. Por lo tanto $T - \lambda I$ es invertible sí y solo sí, $(\alpha_n - \lambda)_{n\in N}$ es una sucesión invertible. Por la primera parte de este ejemplo, equivalentemente $\left(\frac{1}{\alpha_n-\lambda}\right)_{n\in N}$ es acotada. Luego $\lambda \in \sigma(T)$ sí y solo sí, $\left(\frac{1}{\alpha_n-\lambda}\right)_{n\in N}$ no es acotada, es decir que existe una subsucesión $\left(\frac{1}{\alpha_{n_k}-\lambda}\right) \to \infty$, o equivalentemente $\alpha_{n_k} - \lambda \to 0$, esto es que $\alpha_{n_k} \to \lambda$. O lo que es lo mismo, que $\lambda \in \overline{\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$. □

2.2. Clasificación del espectro

Desglosando la negación de las propiedades que definen al conjunto resolvente, obtenemos lo que se conoce como la partición clásica del espectro. La partición completa es algo más extensa (véase [8, Section 2.2]). Aquí daremos una versión simplificada. Tomemos $\lambda \notin \rho(T)$. Se tiene que o bien T_λ es inyectiva o no lo es. Obtenemos los siguientes casos mutuamente exclusivos:

1. T_λ no es inyectiva. Entonces existe $x \in X \setminus \{0\}$ tal que $(T-\lambda)x = 0$, es decir λ es un *autovalor* de T en el sentido clásico. Se dice que λ está en el *espectro puntual de* T, $\sigma_p(T)$.
2. T_λ es inyectiva y $R(T_\lambda)$ es denso pero no es todo X. En este caso se dice que λ está en el *espectro continuo de* T, $\sigma_c(T)$.
3. T_λ es inyectiva y no tiene rango denso. Se dice que λ está en el *espectro residual* de T, $\sigma_r(T)$.

De aquí, obtenemos que $\sigma(T) = \sigma_p(T) \ \cup \ \sigma_c(T) \ \cup \ \sigma_r(T)$, donde la unión es disjunta.

Ejemplo 2.7. Sea X un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita n. Entonces $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ para todo $T \in L(X)$. En efecto $\lambda \in \sigma(T)$ sí y solo sí, $T - \lambda I$ no es invertible. En dimensión finita, biyectiva equivale a inyectiva, entonces $T - \lambda I$ no es biyectiva sí y solo sí, existe $x \in X \setminus \{0\}$ tal que $(T - \lambda I)x = 0$, es decir $\lambda \in \sigma_p(T)$, esto es $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.

El recíproco no es cierto. Véase el siguiente ejemplo tomando X un espacio de dimensión infinita.

Ejemplo 2.8. Sea $T \in L(X)$, con X un espacio de Banach de dimensión infinita. Tomemos $T = \mu I$ con $\mu \in \mathbb{C}$. Entonces $T_\lambda = (\mu - \lambda)I$ es invertible sí y solo sí, $\mu \neq \lambda$, luego $\sigma(T) = \{\mu\} = \sigma_p(T)$.

Existen otros operadores, distintos a múltiplos de la identidad, cuyo espectro es sólo un punto. Obsérvese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9. Sea la matriz de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} ,$$

entendida como un operador $J \in L(\mathbb{C}^2)$, con $\mu \in \mathbb{C}$. Se comprueba que $Jx = \lambda x$ sí y solo sí, $\lambda = \mu$ y $x = (t, 0)$ con $t \in \mathbb{C}$ un parámetro libre. Por lo tanto $\sigma(J) = \sigma_p(J) = \{\mu\}$, pero $J \neq \mu I$.

Veamos ahora otro importante subconjunto del espectro, el espectro aproximado. Se puede decir que consiste de los escalares λ que son “aproximadamente” autovalores, véase la siguiente definición.

Definición 2.10. Sea $T \in L(X)$. El *espectro aproximado* de T, $\sigma_{ap}(T)$, consiste de los escalares λ tales que existe una sucesión de vectores unitarios x_n donde $(T-\lambda I)x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

El siguiente resultado es una caracterización de los puntos del espectro aproximado.

Proposición 2.11. *Sea $T \in L(X)$. Entonces $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ sí y solo sí, $T-\lambda I$ no es inyectiva o bien $R(T-\lambda I)$ no es cerrado, es decir, si $T-\lambda I$ no tiene inversa acotada en su rango.*

Demostración. Observemos por el Teorema 1.16 que efectivamente, las propiedades enunciadas equivalen a que $T-\lambda I$ no tiene inversa acotada en su rango. Sea $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. Entonces existe una sucesión de vectores unitarios (x_n) tal que $(T-\lambda I)x_n \to 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que $T-\lambda I$ tiene inversa acotada en su rango, entonces $(T-\lambda I)^{-1}(T-\lambda I)x_n = x_n \to (T-\lambda I)^{-1}0 = 0$, un absurdo ya que (x_n) son unitarios. Recíprocamente, sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T-\lambda I$ no tiene inversa acotada en su rango. Recordando la Nota 1.2, supongamos primero que $T-\lambda I$ tiene inversa, pero no acotada, sobre su rango. Entonces existe una sucesión $(x_n) \subset X$, tal que $y_n := (T-\lambda I)x_n$ es un sucesión unitaria, y además $(T-\lambda I)^{-1}y_n \to \infty$. Por lo tanto $z_n := \frac{1}{||(T-\lambda I)^{-1}y_n||}(T-\lambda I)^{-1}y_n$ es una sucesión de vectores unitarios que verifica $(T-\lambda I)z_n \to 0$, luego $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. La otra opción es que $T-\lambda I$ no es inyectiva. Entonces existe $x \neq 0$ tal que $(T-\lambda I)x = 0$. Basta tomar $x_n := x/||x||$, una sucesión constante unitaria que verifica $(T-\lambda I)x = 0 \to 0$ trivialmente. Se concluye en este caso también que $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. □

Corolario 2.12. Es inmediato de la proposición anterior que $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$.

Con el resultado anterior, podemos dar una subdivisión alternativa del espectro,

Proposición 2.13. *Sean $T \in L(X)$ y $\lambda \in \sigma(T)$. Si $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, entonces $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. En otras palabras, $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_p(T^*)^*$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(T)$ y supongamos que $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, entonces por la proposición anterior esto equivale a que $T-\lambda I$ tiene inversa acotada sobre su rango, en particular $R(T-\lambda I)$ es cerrado. Como además $T-\lambda I$ no es invertible entonces $\overline{R(T-\lambda I)} = R(T-\lambda I) \neq X$. Luego $N(T-\lambda I)^* = \overline{R(T-\lambda I)}^{\perp} \neq \{0\}$, por lo que $(T-\lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$ no es inyectiva, luego $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. El otro contenido es inmediato. □

Observemos que el espectro de T viene caracterizado por una propiedad algebraica, $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T_\lambda \text{ no es invertible en } L(X)\}$. Haremos un pequeño comentario sobre por qué no podemos dar una caracterización parecida de las particiones del espectro en álgebras de Banach. Observemos, por ejemplo, que $\lambda \in \sigma_p(T)$ sí y solo sí, T_λ no es inyectiva. La tentación puede ser decir que esto equivale a que T_λ no tiene inverso a la izquierda, basándonos en la siguiente propiedad de las aplicaciones. Sin embargo, esto no es cierto, como veremos después. La siguiente propiedad hace uso del Axioma de Elección.

Proposición 2.14. *[2, p. 242] Sea $f : X \to Y$ una aplicación, con X, Y conjuntos no vacíos. Entonces*

1. *f es inyectiva sí y solo sí, existe una aplicación $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$.*
2. *f es sobreyectiva sí y solo sí, existe una aplicación $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = 1_Y$.*

La propiedad anterior no funciona de la misma manera con $T \in L(X)$: la aplicación que se construye en su demostración no es necesariamente lineal. Lo único que podemos rescatar es que, si T es invertible a la izquierda (derecha), entonces es inyectiva (sobreyectiva).

Dejamos planteada la siguiente cuestión: ¿Existe una generalización de las particiones del espectro para álgebras de Banach?

2.3. Propiedades del espectro

En la Sección 1.3 se demostró que el conjunto de elementos invertibles $G(A)$, con A un álgebra de Banach unitaria, es abierto. Una consecuencia es el siguiente teorema.

Teorema 2.15. *Sea A un álgebra de Banach unitaria. Entonces*

1. *para cada $x \in A$, $\rho(x)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$.*
2. *para cada $z_0 \in \rho(x)$, la resolvente $R(z) = (x - ze)^{-1}$ admite una representación en serie de potencias alrededor de z_0, esto es que*

$$(x - ze)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (x - z_0 e)^{-n-1} (z - z_0)^n ,$$

para algún $r > 0$ y para todo $z \in B(z_0, r) \subset \rho(x)$.

Demostración. (1) De la demostración de la Proposición 1.26, se sigue que el conjunto $G(A)$ es abierto. Más aún, si $a \in G(A)$, entonces

$$B\left(a, \frac{1}{||a^{-1}||}\right) \subset G(A) .$$

Para $z_0 \in \rho(x)$, se tiene que $a := x - ez_0 \in G(A)$. Luego

$$B_1 := B\left(x - ez_0, \frac{1}{||(x-ez_0)^{-1}||}\right) \subset G(A) \ .$$

Notemos además que,

$$|z - z_0| = ||ze - z_0 e|| = ||(x - z_0 e) - (x - ze)|| = ||(x - ze) - (x - z_0 e)|| \ .$$

De aquí, si $z \in B(z_0, \frac{1}{||(x-ez_0)^{-1}||})$, entonces $x - ze \in B_1 \subset G(A)$. Por tanto $z \in \rho(x)$. Con lo que

$$B\left(z_0, \frac{1}{||(x-ez_0)^{-1}||}\right) \subset \rho(x) \ .$$

Es decir $\rho(x)$ es un conjunto abierto.
(2) Por lo que acabamos de probar basta escoger $r := \frac{1}{||(x-ez_0)^{-1}||}$. Además, usando la serie de Neumann (Proposición 1.24), tenemos que

$$\begin{aligned}
(x-ze)^{-1} &= [(x-z_0e) - (z-z_0)e]^{-1} \\
&= \left[\left(e - (z-z_0)(x-z_0e)^{-1}\right)(x-z_0e)\right]^{-1} \\
&= (x-z_0e)^{-1}\left[e - (z-z_0)(x-z_0e)^{-1}\right]^{-1} \\
&= (x-z_0e)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(x-z_0e)^{-n}(z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(x-z_0e)^{-n-1}(z-z_0)^n \ .
\end{aligned}$$

Donde hemos usado que $||(z-z_0)(x-z_0e)^{-1}|| < 1$, ya que $z \in B(z_0, r)$. □

Teorema 2.16. *Sea A un álgebra de Banach unitaria y $x \in A$. Entonces $\sigma(x)$ es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$.*

Demostración. Por la parte (1) del Teorema 2.15, tenemos que $\sigma(x) = \mathbb{C} \setminus \rho(x)$ es cerrado, ya que $\rho(x)$ es abierto. Por otro lado si $z \in \sigma(x)$ y $z \neq 0$, supongamos que $|z| > ||x||$, entonces $||(1/z)x|| < 1$ y por la Proposición 1.24,

$$x - ze = -z(e - (1/z)x) \in G(A) \ .$$

Concluimos que si $|z| > ||x||$, entonces $z \notin \sigma(x)$. Así, $\sigma(x)$ es cerrado y está acotado por la norma de x, luego es compacto (Teorema de Weierstrass en $\mathbb{C}$). Supongamos por reducción al absurdo que $\sigma(x) = \emptyset$. La serie de Neumann (Proposición 1.24) nos da que

$$(x - ze)^{-1} = -z^{-1}\sum_{n\geq 0} z^{-n}x^n = -\sum_{n\geq 0} z^{-n-1}x^n \ ,$$

siempre que $|z| > ||x||$. Tomemos un funcional lineal acotado del espacio dual $F \in A^*$, y definimos la función $g : \rho(x) \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) = F((x - ze)^{-1})$. Como estamos suponiendo que $\sigma(x) = \emptyset$, en realidad g está definida en todo el plano complejo. Usando la continuidad de F y tomando $|z| \geq 2||x||$, tenemos que

$$|g(z)| = \left| F\left(\sum_{n\geq 0} z^{-n-1} x^n \right) \right| = \left| \sum_{n\geq 0} z^{-n-1} F(x)^n \right| \tag{2.4}$$

$$\leq ||F|| \sum_{n\geq 0} |z|^{-n-1} ||x||^n \leq \frac{||F||}{|z|} \sum_{n\geq 0} 2^{-n} = 2\frac{||F||}{|z|} . \tag{2.5}$$

Por tanto tenemos que g está acotada fuera de $B(0,\ 2||x||)$. Por otro lado, por la parte (2) del Teorema 2.15, tenemos que

$$(x - ze)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (x - z_0 e)^{-n-1} (z - z_0)^n \ ,$$

para todo $z_0 \in \rho(x) = \mathbb{C}$. De aquí,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F\left((x - z_0 e)^{-n-1} \right) (z - z_0)^n \ .$$

Como F es valuada compleja, estamos diciendo que g tiene expansión en serie alrededor de z_0 para cada $z_0 \in \mathbb{C}$. Luego g es entera, en particular es continua y está acotada en el compacto $B(0,\ 2||x||)$ (Teorema de Weierstrass en $\mathbb{C}$). Por el Teorema de Liouville, como g es entera y acotada, es constante. Por otro lado, como $g(z) \to 0$ cuando $|z| \to \infty$ (usando la estimación (2.5)), entonces g es la función constante cero. Pero, si $F(y) = 0$ para cada $F \in A^*$, entonces $y = 0$. (el espacio dual separa puntos [15, Theorem 3.4]) Pero claramente, el inverso $y = (x - ze)^{-1}$ no puede ser 0. Es un absurdo de suponer que $\sigma(x) = \emptyset$. □

Corolario 2.17. Sea $T \in L(X)$, con X espacio de Banach. Entonces

$$\sigma(T) \subset B(0, ||T||) \ .$$

Como se vió en la Proposición 1.7, para cada $T \in L(H)$ se tiene un operador asociado, $T^* \in L(H)$, el operador adjunto. Veamos ahora la relación que hay entre el espectro de T y el espectro de T^*. Para ello necesitamos un resultado previo.

Proposición 2.18. *Sea $T \in L(H)$ con H espacio de Hilbert. Entonces T es invertible sí y solo sí, T^* es invertible. Además, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Demostración. Usemos que $L(H)$ es un álgebra unitaria. Entonces T es invertible sí y solo sí, $T^{-1}T = TT^{-1} = I$. Tomando adjuntos, esto equivale (el adjunto es involutivo) a que $T^*(T^{-1})^* = I = (T^{-1})^* T^*$, es decir que T^* es invertible. Además, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. □

Proposición 2.19. *Sea $T \in L(H)$ con H espacio de Hilbert. Entonces $\sigma(T^*) = \sigma(T)^* = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.*

Demostración. Sea $T \in L(H)$. Tenemos que $\lambda \in \sigma(T^*)$ sí y solo sí, $(T^* - \lambda I) = (T - \overline{\lambda} I)^*$ no es invertible, o lo que es lo mismo, que $(T - \overline{\lambda} I)$ no es invertible. Es decir, que $\overline{\lambda} \in \sigma(T)$, esto es $\lambda \in \sigma(T)^*$. □

Corolario 2.20. Sea $T \in L(H)$ con H espacio de Hilbert. Si T es auto-adjunto, es decir $T^* = T$, entonces $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Es claro ya que $T^* = T$ y por la Proposición 2.19 tenemos que $\sigma(T) = \sigma(T^*) = \sigma(T)^*$. Luego $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. □

Nota. El recíproco no es cierto. De contra-ejemplo nos sirve la matriz del ejemplo 2.9. Tomando $\mu \in \mathbb{R}$, tenemos que $\sigma(J) \subset \mathbb{R}$ pero J no es auto-adjunta. Se comprueba que una matriz es auto-adjunta sí y solo sí $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, pero claramente J no lo cumple. En efecto $a_{12} = 1$ pero $\overline{a_{21}} = 0$.

Definición 2.21. Dados $T, S \in L(X)$, con X espacio de Banach, se dice que son *similares* si existe $A \in G(L(X))$ tal que $T = A^{-1}SA$.

Proposición 2.22. *Sean $T, S \in L(X)$ operadores similares. Entonces $\sigma(T) = \sigma(S)$.*

Demostración. Sea $A \in G(L(X))$ tal que $T = A^{-1}SA$. Entonces $T - \lambda I = A^{-1}SA - \lambda I = A^{-1}(SA - \lambda A) = A^{-1}(S - \lambda I)A$. Como A^{-1} y A son invertibles, entonces $T - \lambda I$ es invertible sí y solo sí, $S - \lambda A$ es invertible, sí y solo sí, $(S - \lambda I)$ es invertible. Concluimos que $\sigma(T) = \sigma(S)$.

Para avanzar conviene estudiar algo de la teoría de Gelfand. Si X es espacio normado complejo, se llama funcional lineal a toda aplicación lineal $f : X \to \mathbb{C}$. Si A es un álgebra de Banach, en particular es un espacio normado. Podemos extender la idea de funcional, exigiendo además que f sea multiplicativa. En ese caso, denotaremos que $\phi \in Hom(A, \mathbb{C})$, los homomorfismos (de álgebras) de A en $\mathbb{C}$, también denominados caracteres.

Teorema 2.23. *(Teorema de Gelfand-Mazur). Sea A un álgebra de Banach con unidad e. Si A es un un anillo de división (todo elemento no nulo es invertible), entonces A es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $x \in A$. Como el espectro es un conjunto no vacío (Teorema 2.16), tomemos $\lambda \in \sigma(x)$. Como $x - \lambda e$ no es invertible y A es un anillo de división, entonces $x - \lambda e = 0$, luego $x = \lambda e$. Definimos $\phi : A \to \mathbb{C}$ tal que $\phi(x) = \phi(\lambda e) := \lambda$. Es claro que ϕ es un homomorfismo de álgebras inyectivo. Además por la discusión anterior, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que $\phi(\lambda e) = \lambda$, luego es sobreyectivo. También es isométrico dado que $||\phi(\lambda e)|| = ||\lambda e||$. □

Teorema 2.24. *Sea A un álgebra de Banach* ***conmutativa*** *con unidad e y $x \in A$. Entonces,*
$$\sigma(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in Hom(A, \mathbb{C})\} .$$

Demostración. Sea $x \in A$. "$\supset$" Dado $\phi \in Hom(A, \mathbb{C})$, se tiene que $\phi(x - \phi(x)e) = \phi(x) - \phi(x)\phi(e) = 0$. Como los homomorfismos preservan los elementos invertibles, entonces $x - \phi(x)e$ no puede ser invertible, por lo que $\phi(x) \in \sigma(x)$. "$\subset$" Sea $\lambda \in \sigma(x)$. Recordemos que un ideal es propio sí y solo sí no contiene la unidad. Entonces $I := A \cdot (x - \lambda e) = \{a(x - \lambda e) \mid a \in A\}$ es un ideal propio de A. La teoría del álgebra conmutativa nos da que entonces $I \subset J$ para algún ideal maximal J de A. Luego A/J es un cuerpo. Por el Teorema 2.23, entonces A/J es isomorfo a $\mathbb{C}$, digamos que mediante un isomorfismo ψ. Si π denota la proyección canónica, $\pi : A \to A/J$, obtenemos que $\phi := \psi \circ \pi \in Hom(A, \mathbb{C})$ y además $\phi(x) = \psi(x + J)$. Pero como $x - \lambda e \in I \subset J$, entonces $(x - \lambda e) + J = 0 + J$, por lo que $x + J = \lambda e + J$. Concluimos que $\phi(x) = \psi(\lambda(e + J)) = \lambda$. □

Nota. Que todo ideal este contenido en un ideal maximal no es necesariamente cierto en álgebras no conmutativas, de ahí la hipótesis de conmutatividad. Esta propiedad se debe al Lema de Zorn o Axioma de Elección.

Corolario 2.25. Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad e. Para cada $x, y \in A$, se tiene que

1. $\sigma(x + y) \subset \sigma(x) + \sigma(y)$,
2. $\sigma(xy) \subset \sigma(x) \cdot \sigma(y)$.

Demostración. (1) Se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma(x + y) &= \{\phi(x + y) \mid \phi \in Hom(A, \mathbb{C})\} = \{\phi(x) + \phi(y) \mid \phi \in Hom(A, \mathbb{C})\} \\ &\subset \{\phi(x) \mid \phi \in Hom(A, \mathbb{C})\} + \{\psi(x) \mid \psi \in Hom(A, \mathbb{C})\} = \sigma(x) + \sigma(y).\end{aligned}$$

(2) Se obtiene de la misma manera. □

Una limitación del resultado anterior es la hipótesis de álgebra conmutativa, especialmente teniendo en cuenta que casi nunca son conmutativas las álgebras de operadores. Pero, aprovechando los siguientes resultados, esto se puede remediar. Tomamos inspiración de la discusión en [12].

Definición 2.26. Sean A un álgebra y B una subálgebra de A. El *conmutador* de B es el conjunto de todos los elementos de A que conmutan con todos los elementos de B, $B' := \{x \in A \mid xy = yx \text{ para cada } y \in B\}$. Al doble conmutador, B'', se le denomina también *biconmutador*.

Nota. Notar que para cualesquiera subconjuntos $N \subset M \subset A$, se tiene que $M' \subset N'$. En efecto si $x \in M'$, entonces x conmuta con y para cada $y \in M$, en particular conmuta con y para cada $y \in N$, luego $x \in N'$. Observar además que M es un subconjunto conmutativo sí y solo sí, $M \subset M'$.

Proposición 2.27. *Sea A una $\mathbb{C}^*$-álgebra unitaria y B una $\mathbb{C}^*$-subálgebra de A. Entonces, B' es una $\mathbb{C}^*$-subálgebra unitaria de A.*

Demostración. Sean $x, y \in B'$, entonces $x, y \in A$ conmutan con z para cada $z \in B$. En particular $z(xy) = (xz)y = (xy)z$, luego $xy \in B'$. Además, $z(x+y) = zx + zy = xz + yz = (x+y)z$, luego es claro que B' es un subálgebra de A. Veamos que es cerrado bajo la involución $*$. Si $xz = zx$ para cada $z \in B$, entonces $z^*x^* = x^*z^*$. Como esto se da para cada $z \in B$, y B es una $\mathbb{C}^*$-subálgebra, también se da para $z^* \in B$, luego $zx^* = x^*z$, entonces $x^* \in B'$. Notemos ademas que 1 conmuta con cualquier $b \in B$, por lo que B' es unitaria, incluso si B no lo es. □

Teorema 2.28. *Sea A una $\mathbb{C}^*$-álgebra unitaria. Sean $x, y \in A$ que conmutan entre sí, $xy = yx$. Entonces,*

1. *$\sigma(xy) \subset \sigma(x) \cdot \sigma(y)$,*
2. *$\sigma(x+y) \subset \sigma(x) + \sigma(y)$.*

Demostración. Consideremos $B :=< \{x, y\} >$ el subálgebra generada por x e y. Como x e y conmutan, entonces B es conmutativa. Como B es conmutativa, entonces por la nota anterior se tiene que $B \subset B'$, luego $B'' \subset B'$, entonces $B'' \subset (B'')'$. Esto es, que B'' es un conjunto conmutativo. Más aún, por la Proposición 2.27, tenemos que B'' es una $\mathbb{C}^*$-subálgebra unitaria de A que contiene a B. Por lo tanto, como $x, y \in B \subset B''$, podemos aplicar el Corolario 2.25 para obtener que $\sigma_{B''}(xy) \subset \sigma_{B''}(x)\sigma_{B''}(y)$, e idem con la suma. Veamos ahora que los espectros en B'' y en A coinciden, con lo que se tendría el resultado. Queremos ver que $\sigma_{B''}(x) = \sigma_A(x)$ para cada $x \in B \subset B''$. Una forma de comprobarlo es probar que $z \in B''$ es invertible en B'' sí y solo sí, z es invertible en A, en particular para $z = x - \lambda e$. Ahora bien, si z es invertible en B'', claramente es invertible en $A \supset B''$. Recíprocamente, supongamos que $z^{-1}z = zz^{-1} = e$ con $z^{-1} \in A$ y $z \in B''$. Por la definición de B'', se tiene que para cada $b' \in B'$, $b'z = zb'$, luego $b'z^{-1} = z^{-1}b'$, por lo tanto $z^{-1} \in B''$. □

Todo este trabajo abstracto concluye con un resultado de bastante importancia para las álgebras de operadores.

Corolario 2.29. Sean $T, S \in L(H)$ tal que $TS = ST$. Entonces,

1. $\sigma(TS) \subset \sigma(T) \cdot \sigma(S)$,
2. $\sigma(T+S) \subset \sigma(T) + \sigma(S)$.

La igualdad, en general, no se da.

Ejemplo 2.30. Sea $A \in L(\mathbb{C}^2)$ invertible, entonces A y A^{-1} conmutan. Por ejemplo, tomemos $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Es sencillo calcular que $\sigma(A) = \{-1, 3\}$ y que $\sigma(A^{-1}) = \{-1, 1/3\}$. Entonces $\sigma(AA^{-1}) = \sigma(A^{-1}A) = \{1\} \neq \sigma(A)\ \sigma(A^{-1})$. En efecto, $\frac{-1}{3} \in \sigma(A)\ \sigma(A^{-1})$. Por otro lado, se tiene que $\sigma(A + A^{-1}) = \{-2, \frac{10}{3}\}$. Observemos que $2 \in \sigma(A) + \sigma(A^{-1})$ pero $2 \notin \sigma(A + A^{-1})$.

2.4. Teorema de la aplicación espectral.

En esta sección resolveremos la relación que hay entre el espectro de T y el espectro de $p(T)$, siendo p un polinomio. Antes de ello necesitamos unas definiciones previas.

Definición 2.31. Denotamos por $\mathbb{C}[z]$ el $\mathbb{C}$-álgebra de los polinomios con coeficientes complejos. Sea A un álgebra de Banach unitaria y $x \in A$. Sean $T \in L(X)$ y $p \in \mathbb{C}[z]$, entonces

$$p(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^i \ , \ p(x) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i \text{ y } p(T) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T^i \ .$$

Observar que $p(x) \in A$ y $p(T) \in L(X)$.

Proposición 2.32. *Sean A un $\mathbb{C}$-álgebra con unidad e y $a, b, c \in A$. Si $a = bc$ y $bc = cb$, entonces*

1. *$a \in G_L(A)$ sí y solo sí, $b \in G_L(A)$ y $c \in G_L(A)$*
2. *$a \in G_R(A)$ sí y solo sí, $b \in G_R(A)$ y $c \in G_R(A)$*
3. *$a \in G(A)$ sí y solo sí, $b \in G(A)$ y $c \in G(A)$*
4. *En el caso (3), los inversos de b y c conmutan.*

Demostración. (1) "$\Rightarrow$" Sea $a \in G_L(A)$, entonces existe $a' \in A$ tal que $a'a = e$. Obtenemos que $e = a'a = a'(bc) = a'(cb) = (a'b)c = (a'c)b$, de donde $c \in G_L(A)$ y $b \in G_L(A)$. "$\Leftarrow$" Sean $b, c \in G_L(A)$. Entonces existen $b', c' \in A$ tales que $b'b = c'c = e$. De aquí, $c = (b'b)c = b'(bc) = b'a$ y similarmente, $b = (c'c)b = c'a$. Obtenemos que $c'c = (c'b')a = b'b = (b'c')a = e$, por lo que $a \in G_L(A)$.
(2) La prueba es simétrica.
(3) Se obtiene de combinar (1) y (2).
(4) Se obtiene de la unicidad de los inversos a ambos lados. □

El apartado (3) de la proposición anterior no es cierto si b y c no conmutan.

Ejemplo 2.33. Sean $L, R \in L(\ell^2(\mathbb{N}))$ las traslaciones a la izquierda y a la derecha respectivamente, en $\ell^2(\mathbb{N})$. Es decir, $L(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$ y $R(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$. Entonces $LR(x_1, x_2, ...) = L(0, x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ...)$. Además, $RL(x_1, x_2, ...) = R(x_2, x_3, ...) = (0, x_2, x_3, ...)$. Nótese que L es un inverso a la izquierda de R pero no es un inverso a la derecha. Entonces $LR = I$, por lo que $LR \in G(\ell^2(\mathbb{N}))$. Pero ni L es inyectiva ni R es sobre, por lo que ninguno de ellos puede ser un operador invertible.

El siguiente importante teorema caracteriza al espectro de $p(T)$. Observar que solo usamos las propiedades de álgebra de Banach de $L(X)$. Una prueba similar se puede dar en un álgebra de Banach unitaria general. Véase [1, Lemma 2.2.4]

Teorema 2.34. *(Teorema de la aplicación espectral para polinomios). Sea $T \in L(X)$, con X espacio de Banach complejo y $p \in \mathbb{C}[z]$. Entonces,*

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) := \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\} .$$

Demostración. Tomemos p no constante, en ese caso el resultado es claro.
"$\supset$" Sea $\lambda \in \sigma(T)$ y consideremos al polinomio $q \in C[z]$, $q(z) := p(z) - p(\lambda)$. Entonces λ es una raíz de $q(z)$, por lo tanto existe $r \in \mathbb{C}[z]$ tal que
$q(z) = (z - \lambda)r(z)$. Es claro que

$$q(T) = p(T) - p(\lambda)I = (T - \lambda I)r(T) = r(T)(T - \lambda I) .$$

Ahora bien, aplicando el apartado (3) de la Proposición 2.32, como $T - \lambda I$ no es invertible ya que $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $p(T) - p(\lambda)I$ no es invertible, así que $p(\lambda) \in \sigma(p(T))$.
"$\subset$" Sea $\mu \in \sigma(p(T))$. Entonces como p no es constante, $p(z) - \mu$ es de grado n y por el Teorema Fundamental del Álgebra, existen $c, \lambda_1, ...\lambda_n \in \mathbb{C}$ tal que

$$p(z) - \mu = c(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n) .$$

Es decir, tomamos su factorización en sus raíces. De aquí,

$$p(T) - \mu I = c(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_n I) .$$

Como $\mu \in \sigma(p(T))$ entonces $p(T) - \mu I$ no es invertible. Por lo tanto existe un λ_i tal que $T - \lambda_i I$ no es invertible. Entonces $\lambda_i \in \sigma(T)$, pero además $p(\lambda_i) = \mu$, ya que λ_i es una raíz de $p(x) - \mu$, por lo tanto $\mu \in p(\sigma(T))$. □

Una posible extensión de este teorema consiste en preguntarnos si será válido sustiyendo el espectro por alguna de sus partes, como el espectro puntual, residual o continuo. Para su demostración recuérdese la Proposición 1.13.

Teorema 2.35. *Sea $T \in L(X)$, con X espacio de Banach complejo y $p \in \mathbb{C}[z]$. Entonces*

1. $\sigma_p(p(T)) = p(\sigma_p(T))$.
2. $\sigma_c(p(T)) \subseteq p(\sigma_c(T))$.
3. $\sigma_r(p(T)) \subseteq p(\sigma_r(T))$.

Demostración. (1) Observemos que podemos repetir la prueba del Teorema 2.34 con ligeros cambios. Precisamos la segunda parte de dicha demostración. Si

$$p(T) - \mu I = c(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_n I) \tag{2.6}$$

con $\mu \in \sigma_p(p(T))$, entonces $p(T) - \mu I$ no es inyectiva. Por lo tanto existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $T - \lambda_j I$ no es inyectiva (la composicion de funciones

inyectivas es inyectiva). Entonces $\lambda_j \in \sigma_p(T)$, pero además $p(\lambda_j) = \mu$, ya que λ_j es una raíz de $p(z) - \mu$, por lo tanto $\mu \in p(\sigma_p(T))$.
(2) Sea $\mu \in \sigma_c(p(T))$. Entonces $p(T)_\mu$ es inyectiva, $\overline{R(p(T)_\mu)} = X$ y $(p(T)_\mu)^{-1}$ no es acotada. Factorizamos como en (2.6). Como $p(T)_\mu$ es inyectiva entonces $T - \lambda_n I$ es inyectiva. Pero como todos conmutan, entonces $T - \lambda_i I$ es inyectiva para cada $i = 1, ...n$. Además como $p(T)_\mu$ no es acotada, entonces existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $(T - \lambda_j I)^{-1}$ no es acotada. Por otro lado, $R(p(T)_\mu) \subset R(T - \lambda_n I)$, y la conmutatividad nos da que $R(p(T)_\mu) \subset R(T - \lambda_j I)$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$. Entonces $X = \overline{R(p(T)_\mu)} \subset \overline{R(T - \lambda_j I)}$. Concluimos que $\lambda_j \in \sigma_c(T)$ con $p(\lambda_j) = \mu$.
(3) Sea $\mu \in \sigma_r(p(T))$. Entonces $p(T)_\mu$ es inyectiva pero $\overline{R(p(T)_\mu)} \neq X$. Luego $X \neq \overline{R(p(T)_\mu)} = N((p(T)_\mu)^*)^\perp$, luego $\{0\} \neq N((p(T)_\mu)^*)$. Factorizamos como en (2.6), entonces $T - \lambda_i I$ es inyectiva para cada $i = 1, ...n$. Veamos que $\overline{R(T - \lambda_j I)} \neq X$ para algún j. Equivalentemente, $N((T - \lambda_j)^*) \neq \{0\}$. Se tiene que

$$(p(T) - \mu I)^* = \overline{c}(T^* - \overline{\lambda_1} I) \cdots (T^* - \overline{\lambda_n} I) \ . \tag{2.7}$$

Tenemos que existe $x \neq 0$ tal que $(p(T) - \mu I)^* x = 0$. Entonces,

$$0 = \overline{c}(T^* - \overline{\lambda_1} I) \left((T^* - \overline{\lambda_2} I) \cdots (T^* - \overline{\lambda_n}) x \right) \ . \tag{2.8}$$

Supongamos por reducción al absurdo que $N((T - \lambda_i)^*) = \{0\}$ para cada i, entonces $y := \left((T^* - \overline{\lambda_2} I) \cdots (T^* - \overline{\lambda_n^*}) x \right) \neq 0$, pero $(T^* - \overline{\lambda_1} I) y = 0$, un absurdo. Concluimos que $\overline{R(T - \lambda_j I)} \neq X$ y que $(T - \lambda_j I)$ es inyectiva, luego $\lambda_j \in \sigma_c(T)$ con $p(\lambda_j) = \mu$. □

En lo que sigue damos contra-ejemplos de los recíprocos en los apartados (2) y (3) del teorema anterior. Veamos primero que puede existir $\lambda \in p(\sigma_r(T))$ tal que $\lambda \notin \sigma_r(p(T))$.

Ejemplo 2.36. Sea $H = \ell^2(\mathbb{N}) \times \ell^2(\mathbb{N})$ y $T \in L(H)$ con $T = (T_1, T_2)$, donde $T_1(x_n) := (0, x_1, x_2/2, ...) + (x_n)$ y $T_2 = -I$. Tomamos $p(z) := z^2$. Es claro que $T_1 - I$ es inyectiva y de rango no denso, luego $1 \in \sigma_r(T_1)$. Por otro lado, $\sigma(T_2) = \{-1\} = \sigma_p(T_2)$. Puesto que podemos representar T por

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \ ,$$

entonces $\sigma(T) = \{1, -1\}$. Por lo tanto, $p(\sigma(T)) = \{1\}$ y además, $1 \in p(\sigma_r(T))$. Pero, $T^2 = (T_1^2, I)$, entonces $T^2((0), (x_n)) = ((0), (x_n))$ por lo que $1 \in \sigma_p(T^2) = \sigma_p(p(T))$, luego como las particiones del espectro son disjuntas, se concluye que $p(\sigma_r(T)) \neq \sigma_r(p(T))$.

Veamos ahora que puede existir $\lambda \in p(\sigma_c(T))$ tal que $\lambda \notin \sigma_c(p(T))$.

Ejemplo 2.37. Sea $H = \ell^2(\mathbb{N})$ y $(a_n) \subset \mathbb{C}$ una sucesión de escalares definida por $a_n := 1 - \frac{2}{n}$. Consideramos el operador multiplicación T definido como $T(x_n) = (a_n x_n)$ para $(x_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Observar que entonces $Te_n = a_n e_n$, por lo que (a_n) es una sucesión de autovalores de T. Tomamos $p(z) := z^2$. Sea $(x_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$, se tiene que

$$(T - I)(x_n) = \left(\frac{-2}{n}\, x_n\right) \text{ por lo que } (T - I)^{-1}(x_n) = \left(\frac{-n}{2}\, x_n\right) .$$

Entonces si escojemos $(e_n)_{n\in N}$ una sucesión de vectores unitarios, se tiene que $(T - I)^{-1}e_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, luego $(T - I)^{-1}$ es un operador no acotado. Observemos además que $T - I$ es inyectiva. Además, como $e_n = (T - I)(\frac{-n}{2})e_n$ para todo $n \in N$, entonces $(e_n) \subset R(T - I)$, por lo que $\overline{R(T - I)} = \ell^2(\mathbb{N})$ y además es claro que $R(T - I) \neq \ell^2(\mathbb{N})$. Se concluye que $1 \in \sigma_c(T)$ y en consecuencia, $1 \in \sigma_c(T)^2$. Por otro lado, $T^2(x_n) = ((a_n)^2 x_n) = ((1 - \frac{2}{n})^2 x_n)$. Entonces $a_n^2 = (1 - \frac{2}{n})^2$ es una sucesión de autovalores de T^2, en particular para $n = 2$ se tiene que $(-1)^2 = 1 \in \sigma_p(T^2)$. Pero como las particiones del espectro son disjuntas, entonces $1 \notin \sigma_c(T^2)$.

Es conocido que el Teorema de la Aplicación Espectral se puede generalizar para funciones “continuas” $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$, con T un operador normal, pero su prueba, incluso su correcto enunciado, es demasiada extensa para nuestros propósitos (véase [8, Theorem 4.12]). Sin embargo, un paso en esta dirección es preguntarnos si podemos extender el teorema para $p \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, el álgebra de los polinomios de Laurent. En el sentido de que si $p \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, entonces podemos escribir $p(z) = a(z)+b(z^{-1})$, para ciertos $a, b \in \mathbb{C}[z]$. Definimos $p(T) := a(T) + b(T^{-1})$ siempre que $T \in G(L(X))$.

El siguiente resultado se puede demostrar de forma análoga al Teorema 2.34. Sin embargo, aprovechando nuestro trabajo previo, podemos dar una demostración más elegante.

Teorema 2.38. *Sea $x \in G(A)$, con A un álgebra de Banach con unidad e, y $p \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Entonces, $\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1} = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(x)\}$. Más aún,*

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x)) := \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(x)\} .$$

Demostración. Observemos que x y x^{-1} conmutan. Sea entonces $B :=< \{x, x^{-1}\} >$ el subálgebra conmutativa de A generada por x y x^{-1}, y sea B'' su biconmutador, que es un subálgebra conmutativa unitaria de A (Proposición 2.27). Además, observar que para cada $p \in C[z, z^{-1}]$, se tiene que $p(x) \in B \subset B''$. Por el Teorema 2.24, y ya que si ϕ es un homomorfismo de álgebras, verifica que $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma_{B''}(p(x)) = \{\phi(p(x)) \mid \phi \in Hom(B'', \mathbb{C})\} &= \{p(\phi(x)) \mid \phi \in Hom(B'', \mathbb{C})\} \\ &= \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma_{B''}(x)\} = p(\sigma_{B''}(x)) .\end{aligned}$$

Basta probar que $\sigma_{B''}(b) = \sigma_A(b)$ para todo $b \in B \subset B''$, puesto que $p(x), x \in B$. La demostración de esta afirmación ya se hizo en el Teorema 2.28. Para dicha parte no es necesaria la hipótesis de $\mathbb{C}^*$-álgebra. □

Nota. Esta demostración es también una prueba alternativa del Teorema 2.34.

Nota. Esta demostración a su vez prueba el siguiente refinamiento del Teorema 2.24.

Teorema 2.39. *Sea A un álgebra, posiblemente no conmutativa, con unidad e. Sea $x \in B$ con B un subálgebra conmutativa de A, y sea B'' su biconmutador. Entonces,*

$$\sigma_A(x) = \sigma_{B''}(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in Hom(B'', \mathbb{C})\} .$$

2.5. Radio espectral. Clases de operadores.

Dado $T \in L(X)$, el conjunto $\sigma(T)$ tiene asociado un número real positivo, el radio espectral. Como su nombre indica, es la mayor distancia al origen que puede obtenerse en $\sigma(T)$.

Definición 2.40. Sea $T \in L(X)$, con X un espacio de Banach no nulo. Se define como *radio espectral* de T al número real,

$$r(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| .$$

Como $\sigma(T)$ es un conjunto compacto (Teorema 2.16), y además la norma en $\mathbb{C}$ es continua, entonces el supremo anterior coincide con el máximo.

Obsérvese que la misma definición es válida en álgebras de Banach.
El teorema de la aplicación espectral nos brinda la siguiente consecuencia directa:

Corolario 2.41. Sea $T \in L(X)$. Entonces $r(T^n) = r(T)^n$ para cada $n \geq 0$

Demostración. Basta aplicar el Teorema 2.34, con $p(z) = z^n$. En particular $\sigma(T^n) = \sigma(T)^n$. De aquí,

$$r(T^n) = \max_{\lambda \in \sigma(T^n)} |\lambda| = \max_{\lambda \in \sigma(T)^n} |\lambda| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|^n = r(T)^n .$$

□

El siguiente teorema nos da una forma de calcular el radio espectral.

Teorema 2.42. *(Formula de Gelfand-Beurling). Sea $T \in L(X)$. Entonces*

$$r(T) = \lim_n ||T^n||^{1/n} .$$

Su demostración se puede consultar en [8, Theorem 2.10], o bien en su versión para álgebras de Banach en [13, Theorem 7.8].

A continuación definiremos algunas clases de operadores íntimamente relacionadas con el radio espectral.

Definición 2.43. Sea $T \in L(X)$, con X espacio de Banach. Se dice que T es *normaloide* si $r(T) = ||T||$.

Definición 2.44. Sean $T, S \in L(H)$, donde H es un espacio de Hilbert dotado de un producto interior $\langle\ ,\ \rangle$. Sea $T^* \in L(H)$ el operador adjunto de T. Denotaremos que $T \leq S$ cuando $\langle Tx, x\rangle \leq \langle Sx, x\rangle$ para cada $x \in H$.

Notar que es equivalente escribir $T - S \leq 0$. Además, $\leq$ es una relación de orden sobre $L(X)$, que verifica la propiedad reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición 2.45. Sea $T \in L(H)$. Se dice que T es un operador

1. *normal* si conmuta con su adjunto, es decir, $T^*T = TT^*$.
2. *hiponormal* si $TT^* \leq T^*T$.
3. *cohiponormal* si $TT^* \geq T^*T$, es decir si T^* es hiponormal.

Nota. Es inmediato que: T es normal sí y solo sí, T es hiponormal y cohiponormal. En particular si T es normal, es hiponormal y cohiponormal.

No todos los operadores hiponormales son normales. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2.46. [11] Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H (y por lo tanto H es isométricamente isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$). Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de escalares y $M := \sup_n |a_n|$. Definimos $T : H \to H$ como $Te_i := a_i e_{i+1}$. Esto es,

$$Tx = \sum_n \langle x, e_n\rangle a_n e_{n+1} \ .$$

Es claro que es acotado:

$$||Tx||^2 \leq \sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2 |a_n|^2 \leq M^2 \sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2 = M^2 ||x||^2 \ .$$

En esta última igualdad usamos la Identidad de Parseval. Calculemos su adjunto. Sea $y = \sum_k \langle y, e_k\rangle e_k \in H$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle = \langle \textstyle\sum_n \langle x, e_n\rangle a_n e_{n+1}, y\rangle = \textstyle\sum_n \langle x, e_n\rangle a_n \langle e_{n+1}, y\rangle = \\ \textstyle\sum_n \langle x, e_n\rangle a_n \langle e_{n+1}, \textstyle\sum_k \langle y, e_k\rangle e_k\rangle = \textstyle\sum_{n,k} \langle x, e_n\rangle a_n \overline{\langle y, e_k\rangle} \langle e_{n+1}, e_k\rangle = \\ \textstyle\sum_{n,k} \langle x, e_n\rangle a_n \overline{\langle y, e_k\rangle} \delta_{k,\ n+1} = \textstyle\sum_n \langle x, e_n\rangle a_n \overline{\langle y, e_{n+1}\rangle} = \langle x, \textstyle\sum_n e_n \overline{a_n} \langle y, e_{n+1}\rangle\rangle \ .\end{aligned}$$

Concluimos que $T^*x = \sum_n \langle x, e_{n+1}\rangle \overline{a_n} e_n$, ya que entonces $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$. Deducimos que

$$T^*e_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ \overline{a_{i-1}}e_{i-1} & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

Ahora bien, T es normal sí y solo sí, conmuta con su adjunto, o lo que es lo mismo, conmuta con su adjunto sobre los vectores de la base. Es decir, para cada i,

$$TT^*e_i = T^*Te_i\ .$$

Notemos que para $i > 1$,

$$TT^*e_i = T\overline{a_{i-1}}e_{i-1} = \overline{a_{i-1}}Te_{i-1} = \overline{a_{i-1}}a_{i-1}e_i = |a_{i-1}|^2e_i\ .$$

Por otro lado,

$$T^*Te_i = T^*a_ie_{i+1} = a_iTe_{i+1} = a_i\overline{a_i}e_i = |a_i|^2e_i\ .$$

Si $i = 1$, para que T sea normal se debe verificar que $TT^*e_1 = T0 = 0 = T^*Te_1 = T^*a_1e_2 = a_1T^*e_2 = a_1\overline{a_1}e_1 = |a_1|^2e_1$. Es decir, $a_1 = 0$.

Así que, T es normal sí y solo sí, $|a_{i-1}|^2 = |a_i|^2$ para cada $i > 1$ y $a_1 = 0$. Por lo tanto la sucesión (a_n) es constante nula. Ahora, observemos que T es hiponormal sí y solo sí, $|a_{i-1}|^2 \leq |a_i|^2$ y $0 \leq |a_1|$. Esto es, que la sucesión $(|a_n|)$es monótona creciente. De aquí podemos sacar varios ejemplos: Si la sucesión $(|a_n|)$ es

1. *estrictamente creciente*, entonces T es hiponormal y no cohiponormal, por lo tanto no es normal.
2. *estrictamente decreciente*, entonces T es cohiponormal y no hiponormal, por lo tanto no es normal.
3. *constante nula*, entonces T es hiponormal y cohiponormal, luego también es normal.

En lo que sigue vamos a caracterizar algunas de estas clases de operadores, empezando por los normaloides:

Teorema 2.47. *Sea $T \in L(X)$. T es normaloide sí y solo sí $||T^n|| = ||T||^n$ para todo $n \geq 1$.*

Demostración. “ $\Rightarrow$ ” Nótese que $||T^n|| \leq ||T||^n$ para todo $n \geq 1$. Veamos la otra desigualdad. Es claro que $r(T^k)^{\frac{1}{k}} = \lim_n ||T^{nk}||^{\frac{1}{nk}} = \lim_n ||T^n||^{\frac{1}{n}} = r(T)$. De aquí, $r(T^k) = r(T)^k$. Por otro lado como $||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq ||T||^{n\frac{1}{n}} = ||T||$ para cualquier n, entonces $r(T) \leq ||T||$. Finalmente, usando ambas propiedades y que $r(T) = ||T||$,

$$||T^n|| \geq r(T^n) = r(T)^n = ||T||^n\ .$$

“ $\Leftarrow$ ” Supongamos que $||T^n|| = ||T||^n$ para todo $n \geq 1$. Entonces

$$r(T) = \lim_n ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \lim_n ||T||^{n\frac{1}{n}} = ||T||\ .$$

□

El siguiente resultado es una caracterización muy útil de los operadores hiponormales.

Proposición 2.48. *Sea $T \in L(H)$. Entonces T es hiponormal sí y solo sí, $||T^*x|| \leq ||Tx||$ para cada $x \in H$.*

Demostración. Sea $T \in L(H)$. Se tiene que T es hiponormal sí y solo sí, para cada $x \in H$,

$$\langle TT^*x, x\rangle \leq \langle T^*Tx, x\rangle \ .$$

Usando la definición de operador adjunto en ambos lados, y que $T^{**} = T$, esto equivale a:

$$\langle T^*x, T^*x\rangle \leq \langle Tx, Tx\rangle \ .$$

O lo que es lo mismo, $||T^*x|| \leq ||Tx||$. □

Recordemos que si $T \in L(H)$ entonces $||T|| = ||T^*||$ (Corolario 1.11). Si T es normal, se da algo más, esto es que $||Tx|| = ||T^*x||$ para cada $x \in H$. De hecho, resulta que dicha propiedad es una caracterización de los operadores normales.

Corolario 2.49. Sea $T \in L(H)$. Entonces T es normal sí y solo sí,

$$||T^*x|| = ||Tx|| \quad \text{para cada } x \in H \ .$$

Demostración. Es claro que T es normal sí y solo sí, T es hiponormal y co-hiponormal. Entonces el resultado se obtiene de la Proposición 2.48. □

A continuación veremos la relación entre los operadores hiponormales y normaloides.

Teorema 2.50. *Sea $T \in L(H)$. Si T es operador hiponormal, entonces es normaloide.*

Demostración. Basta probar que $||T^n|| = ||T||^n$ para todo $n \geq 1$. Para ello probemos algunas propiedades auxiliares.

Propiedad 1. Para todo $n \geq 1$,

$$||T^n||^2 \leq ||T^{n+1}|| \ ||T^{n-1}|| \ .$$

Se tiene que

$$\|T^n x\|^2 = \langle T^n x, T^n x\rangle = \langle T^*T^n x, T^{n-1}x\rangle \leq \|T^*T^n x\| \ \|T^{n-1}x\| \ .$$

Por la Proposición 2.48, T es hiponormal sí y solo sí, $||T^*x|| \leq ||Tx||$ para todo x de H. Continuando la desigualdad,

$$||T^*T^nx||\ ||T^{n-1}x|| \leq ||T\ T^nx||\ ||T^{n-1}x|| = ||T^{n+1}x||\ ||T^{n-1}x|| \\ \leq ||T^{n+1}||\ ||T^{n-1}||\ ||x||^2\ .$$

Basta fijarse en el primer y en el último término de la desigualdad, obteniendo que

$$\|T^nx\|^2 \leq ||T^{n+1}||\ ||T^{n-1}||\ ||x||^2\ .$$

Esto prueba la propiedad. □

Propiedad 2. $||T^k|| = ||T||^k$ para todo $k \leq n$ y todo $n \geq 1$.

Por inducción lo suponemos cierto hasta n. Entonces, usando la hipótesis de inducción,

$$||T||^{2n} = (||T||^n)^2 = ||T^n||^2\ .$$

Por la Propiedad 1, y nuevamente por hipótesis de inducción,

$$||T^n||^2 \leq ||T^{n+1}||\ ||T^{n-1}|| = ||T^{n+1}||\ ||T||^{n-1}\ .$$

Dividiendo por $||T||^{n-1}$, y ya que $||T^n||^2 = ||T||^{2n}$, obtenemos que

$$||T^{n+1}|| \geq \frac{||T||^{2n}}{||T||^{n-1}} = ||T||^{n+1}\ .$$

Por lo que $||T^{n+1}|| = ||T||^{n+1}$ y aplicando el Teorema 2.47, $r(T) = ||T||$, es decir T es normaloide. □

3

Rango numérico

Al igual que el espectro, el rango numérico es un subconjunto de $\mathbb{C}$ cuyas propiedades geométricas esperamos que nos den alguna información de T. Nos interesa también si puede aportar alguna información adicional comparado con el espectro. Las referencias principales de este capítulo son [17, 3]. Daremos definiciones preliminares y ejemplos, seguido de una clasificación completa del rango numérico de las matrices 2 por 2, que es de importancia para probar la convexidad del caso general. Finalmente dedicamos una sección a algunas de las propiedades principales de este conjunto y su relación con el espectro.

3.1. Preliminares y ejemplos

En este capítulo trabajaremos con H un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(H)$ un operador acotado. Un espacio de interés será $L(\mathbb{C}^2)$ donde $\mathbb{C}^2$ es un espacio de Hilbert, con el producto interior $\langle z, w\rangle = z\overline{w}$. Si $z \in \mathbb{C}$, denotamos su parte imaginaria por $\mathfrak{Im}(z)$ y su parte real por $\mathfrak{Re}(z)$.

Comenzamos dando algunas definiciones y ejemplos preliminares.

Definición 3.1. Sea $T \in L(H)$. Se define el *rango numérico* de T por

$$W(T) := \{\langle Tx, x\rangle \mid x \in H, ||x|| = 1\} .$$

Observar que es la imagen de la forma cuadrática $\phi : S_H \subset H \to \mathbb{C}$ definida como $x \to \langle Tx, x\rangle$, con $S_H = \{x \in H \mid ||x|| = 1\}$.

Definición 3.2. Sea $T \in L(H)$. Se dice que T es *unitario* si $U^*U = UU^* = I$.

En particular, todo operador unitario es normal y verifica que $U^{-1} = U^*$. Además, para cada $x \in H$, $||Ux|| = \langle Ux, Ux\rangle = \langle x, U^*Ux\rangle = ||x||$.
En el Capítulo 2 se vió la definición de que dos operadores sean similares (Definición 2.21). Una relación mas fuerte es que sean *unitariamente similares*, o lo que es lo mismo, *unitariamente equivalentes*.

Definición 3.3. Sean $T, S \in L(H)$, con H espacio de Hilbert. Se dice que T y S son *unitariamente equivalentes* si existe $U \in L(H)$ un operador unitario tal que $T = U^*SU$.

En particular, si dos operadores son unitariamente equivalentes, entonces son similares.

Definición 3.4. Sea $T \in L(H)$. Se dice que T es *positivo* si con la notación de la Definición 2.44, $T \geq 0$.

Proposición 3.5. *Sea $T \in L(H)$. Entonces*

1. *$W(T)$ es invariante bajo equivalencia unitaria,*
2. *$W(T)$ se encuentra en el disco cerrado de radio $\|T\|$ centrado en el origen,*
3. *$W(T)$ contiene todos los autovalores de T,*
4. *$W(T^*) = W(T)^*$,*
5. *$W(I) = \{1\}$. Más generalmente, si α y β son números complejos, y T es un operador acotado en H, entonces $W(\alpha T + \beta I) = \alpha W(T) + \beta$,*
6. *Si H es de dimensión finita, entonces $W(T)$ es compacto.*
7. *$W(T) \geq 0$ sí y solo sí, T es positiva.*

Demostración. 1. Sea $S = U^*TU$ con $U^*U = UU^* = I$, y sea $x \in X$ con $||x|| = 1$. Se tiene que $\lambda \in W(S)$ sí y solo sí, $\lambda = \langle U^*TUx, x\rangle = \langle TUx, Ux\rangle$. Tomando $y = Ux$, se tiene que $||y|| = ||x|| = 1$ y $\lambda = \langle Ty, y\rangle$. Luego $\lambda \in W(S)$ sí y solo sí, $\lambda \in W(T)$.
2. Si $||x|| = 1$, entonces $|\langle Tx, x\rangle| \leq ||Tx||||x|| \leq ||T||||x||^2 = ||T||$.
3. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Tx = \lambda x$, donde sin pérdida de generalidad x es un autovector unitario. Entonces $\langle Tx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda ||x||^2 = \lambda$.
4 y 5. Son inmediatos de las propiedades del producto interior.
6. Si H es de dimension finita, la esfera $S_H \subset H$ es compacta. Entonces $W(T) = \phi(S_H)$ es la imagen continua de un compacto, luego es compacta.

Proposición 3.6. *Sea $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la traslación a la izquierda en $\mathbb{C}^2$, esto es $T(z, w) = (w, 0)$. Sea $x \in \mathbb{C}^2$ con $||x|| = 1$. Entonces se tiene la siguiente parametrización*

$$\langle Tx, x\rangle = e^{i\theta} t\sqrt{1 - t^2} \ ,$$

donde $t \in (0, 1)$ y θ es real.

Demostración. Sea $t \in (0, 1)$, luego $\sqrt{1 - t^2} \in (0, 1)$ y podemos parametrizar los vectores unitarios de $\mathbb{C}^2$ como sigue: $x = x(\theta, \varphi, t) := e^{i\varphi}(t, e^{i\theta}\sqrt{1 - t^2})$ con $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. De aquí, $Tx = (e^{i(\varphi+\theta)}\sqrt{1 - t^2}, 0)$, luego $\langle Tx, x\rangle = e^{i\theta} t\sqrt{1 - t^2}$. □

Corolario 3.7. Si $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la traslación a la izquierda en $L(C^2)$, entonces $W(T) = \overline{D}(0, 1/2)$, el disco cerrado de radio $1/2$ centrado en el origen.

Demostración. Variando $t \in (0,1)$ y $\theta \in \mathbb{R}$ en la Proposición 3.6, obtenemos una parametrización del disco, de radio $\max_{t\in(0,1)} t\sqrt{1-t^2} = 1/2$. $\square$

Hemos visto que el rango numérico es invariante bajo equivalencia unitaria, pero a diferencia del espectro, no es invariante bajo similitud. Se puede interpretar que el rango numérico distingue los operadores similares, mientras que el espectro no. Véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.8. Sea T la traslación a la izquierda en $\mathbb{C}^2$. Se tiene que $W(\lambda T) = \lambda W(T)$ es el disco cerrado de radio $|\lambda|/2$ centrado en el origen. Por lo tanto para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, el rango numérico de λT varía, pero resulta que para $\lambda \neq 0$ todos estos operadores son similares. En efecto si $S \in L(\mathbb{C}^2)$ es definido como $S(z,w) = (\lambda z, w)$, entonces $S^{-1}(z,w) = (\lambda^{-1}z, w)$ y además $STS^{-1}(z,w) = ST(\lambda^{-1}z, w) = S(w,0) = (\lambda w, 0) = \lambda T(z,w)$.

Otra propiedad del espectro que hemos visto es: si T es auto-adjunto, entonces $\sigma(T)$ es real (Corolario 2.20). Además el recíproco no es cierto.

A continuación veremos una caracterización de que el rango numérico sea un conjunto de números reales. Antes necesitamos la siguiente propiedad.

Proposición 3.9. *[16, Theorem 12.7] Sea $T \in L(H)$ con H un espacio de Hilbert. Supongamos que $\langle Tx, x\rangle = 0$ para todo $x \in H$. Se verifica que*

1. *si H es complejo, entonces $T = 0$,*
2. *si H es real y T es auto-adjunto, entonces $T = 0$.*

Proposición 3.10. *Sea $T \in L(H)$ con H espacio de Hilbert complejo. Entonces T es auto-adjunto sí y solo sí $W(T) \subset \mathbb{R}$.*

Demostración. "$\Rightarrow$" Sea T tal que $T = T^*$. Entonces $\lambda \in W(T)$ sí y solo sí, existe $x \in H$ de norma 1 tal que $\lambda = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$. Luego $\lambda \in \mathbb{R}$. "$\Leftarrow$" Sea T tal que $W(T) \subset \mathbb{R}$. Entonces para cada $x \in H$, se tiene que $\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle$. Por la Proposición 3.9, entonces $T^* = T$. $\square$

También hemos visto que si T es un múltiplo de la identidad, entonces $\sigma(T) = \{\mu\}$, y además el recíproco no es cierto. Para el rango numérico, sí resulta cierto.

Proposición 3.11. *Sea $T \in L(H)$ con H espacio de Hilbert complejo. Entonces $T = \mu I$ para algún $\mu \in \mathbb{C}$ sí y solo sí $W(T) = \{\mu\}$.*

Demostración. "$\Rightarrow$" Sea $T = \mu I$. El resultado es claro ya que $\langle \mu I x, x\rangle = \mu||x||^2 = \mu$. "$\Leftarrow$" Observemos que $W(T) = \{\mu\}$ sí y solo sí, $\langle Tx, x\rangle = \mu$ para cada $x \in H$ con $||x|| = 1$. Además $T = \mu I$ sí y solo sí, $T - \mu I = 0$. Pero, $\langle (T-\mu I)x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \langle \mu x, x\rangle = \mu - \mu||x||^2 = 0$. Por la Proposición 3.9, necesariamente $T - \mu I$ es el operador nulo. $\square$

Definición 3.12. Sea $T \in L(H)$. Se dice que T es *unitariamente diagonalizable* si existe una base (e_n) de H que consiste de autovectores de T.

Denotamos por $convex(S)$ la envoltura convexa de un conjunto S, que consiste en todas las combinaciones lineales convexas de S.

Teorema 3.13. *Sea $T \in L(H)$ con T unitariamente diagonalizable. Entonces*

$$W(T) = convex(\sigma_p(T)) \ .$$

Demostración. Por hipótesis, existe una base ortonormal (e_n) para H y una sucesión (λ_n) de números complejos tal que $Te_n = \lambda_n e_n$, para cada entero positivo n. Así,

$$Tx = T\sum_{n=0}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n = \sum_{n=0}^{\infty}\langle x, e_n\rangle \lambda_n e_n \ ,$$

$$\begin{aligned} W(T) &= \{\langle Tx, x\rangle \mid x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \left|\langle x, e_n\rangle\right|^2 \ \mid x \in H, \|x\| = 1\right\} \\ &= \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n a_n \mid 0 \leq a_n \leq 1, \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1\right\} \\ &= convex(\Lambda), \end{aligned}$$

donde $\Lambda = (\lambda_n)$ es la colección de autovalores de T. □

En general, el rango numérico es difícil de calcular. Sin embargo, resulta sencillo en ejemplos selectos. La versión infinito-dimensional del Ejemplo 3.7 nos dice que a diferencia del espectro, el rango numérico no es necesariamente un conjunto cerrado.

Ejemplo 3.14. Sea $L \in L(\ell^2(\mathbb{N}))$ donde L es la traslación a la izquierda, esto es $L(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...)$. Entonces $W(L) = D(0,1)$, el disco abierto de radio 1 centrado en el origen.

Demostración. En lo que sigue, para $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, definimos $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, ...) \in S(\mathbb{N})$. Es claro que como $||L|| = 1$, entonces $W(L) \subset \overline{D}(0,1)$ (Proposición 3.5(2)). Veamos que si $\lambda \in \partial\overline{D}(0,1)$, entonces $\lambda \notin W(L)$, luego $W(L) \subset D(0,1)$. Supongamos por reducción al absurdo que existe $\lambda \in W(L)$ con $|\lambda| = 1$. Entonces existe un vector unitario $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ tal que $\langle Lx, x\rangle = \lambda$. Pero como $||L|| = 1$, entonces $1 = |\langle Lx, x\rangle| \leq ||Lx||\ ||x|| \leq 1$. Al alcanzarse la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Proposición 1.1), entonces $Lx = \lambda x$. Un simple cálculo muestra que $Lx = \lambda x$ con $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ sí y solo sí, $x = x_\lambda$. Pero como $|\lambda| = 1$, entonces $x \notin \ell^2(\mathbb{N})$, un absurdo. Recíprocamente, sea $\lambda \in D(0,1)$, entonces $x_\lambda \in \ell^2(\mathbb{N})$. Observar que $Lx_\lambda = \lambda x_\lambda$, por lo que $\lambda \in \sigma_p(L) \subset W(L)$ (Proposición 3.5(3)). Con lo que se concluye que $W(L) = D(0,1)$. □

3.2. El rango numérico de las matrices 2×2

El interés en las matrices 2×2 está en que podemos reducir ciertos problemas de un espacio de Hilbert complejo H arbitrario al caso de dimensión 2. Por otro lado, el rango numérico en este caso está completamente clasificado. Recordemos que la *traza* de una matriz, $tr(A)$, es la suma de los elementos de su diagonal, y tanto la traza como el determinante son invariantes bajo cambios de base. La siguiente observación nos será de utilidad, y es lo que desarrollaremos en esta sección: dado que $W(T)$ es invariante bajo equivalencia unitaria, la clasificación de las matrices complejas 2×2 se reduce a matrices de diagonal nula. En efecto, si $T \in L(\mathbb{C}^2)$ no tiene traza nula, consideremos $S := T - tr(T/2)I$, es claro que $tr(S) = 0$. Por la Proposición 3.5(5), $W(S) = W(T) - tr(T/2)$, luego $W(T)$ es una traslación de $W(S)$. Hemos de probar que toda matriz de traza nula es unitariamente equivalente a una matriz de diagonal nula. Para ello recordamos el siguiente resultado del álgebra lineal,

Teorema 3.15. *(Teorema de Schur) Sea A una matriz $n \times n$ compleja. Entonces existe una matriz unitaria U tal que $T = U^*AU$ es una matriz triangular superior. Además, en la diagonal aparecen los autovalores de A, $\lambda_1, ..., \lambda_n$, contando multiplicidad.*

Recordemos que los operadores unitarios verifican que $T^* = T^{-1}$, y además las matrices ortogonales (matrices cuyos vectores son ortogonales entre sí) son operadores unitarios. Si A es una matriz, su operador adjunto es su transpuesta conjugada, $A^* = \overline{A^t}$.
Denotaremos por $col[v, w]$ la matriz cuyas columnas son los vectores v y w.

Teorema 3.16. *Sea A una matriz 2×2 con traza nula. Entonces A es unitariamente equivalente a una matriz con diagonal nula.*

Demostración. Por el Teorema de Schur, existe una matriz $T = U^*AU$ triangular superior, donde en la diagonal aparecen los autovalores de A, luego $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ es la suma de sus autovalores. Supongamos primero que A tiene un único autovalor λ, entonces $0 = tr(A) = 2\lambda$, luego $\lambda = 0$. Entonces $T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Supongamos ahora que A tiene dos autovalores distintos, luego deben ser λ y $-\lambda$. Sean v, w autovectores unitarios de λ y $-\lambda$ respectivamente. Si $v \perp w$, entonces A es diagonalizable, $A = col[v, w]^{-1}\ D\ col[v, w]$ donde D es una matriz diagonal. Además, $col[v, w]$ es una matriz ortogonal, luego $col[v, w]^{-1} = col[v, w]^*$, por lo tanto A es unitariamente equivalente a $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$. Tomemos $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, es claro que P es unitaria y además, $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}\ D\ P$, lo que concluye este caso. Si $v \not\perp w$, para cada $\theta \in \mathbb{R}$ sea $z_0 := v + e^{i\theta}w$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle Az_0, z_0\rangle &= \langle \lambda v - \lambda e^{i\theta} w, v + e^{i\theta} w\rangle = \lambda\langle v - e^{i\theta} w, v + e^{i\theta} w\rangle \\ &= \lambda\left(|v|^2 + e^{-i\theta}\langle v, w\rangle - e^{i\theta}\langle w, v\rangle - |w|^2\right) = 2i\lambda\, \mathfrak{Im}(e^{-i\theta}\langle v, w\rangle).\end{aligned}$$

Tomemos $\theta \in \arg\langle v, w\rangle$, entonces $\langle v, w\rangle = re^{i\theta}$ con $r \in \mathbb{R}^+$, luego $\langle Az_0, z_0\rangle = \mathfrak{Im}(r) = 0$. Observemos que v y w son linealmente independientes, en efecto si $\alpha v + \beta w = 0$, entonces $A(\alpha v + \beta w) = 0 = \lambda(\alpha v - \beta w)$, por lo que $\alpha v = \beta w$ (y además $\alpha v = -\beta w$) de donde $\alpha = \beta = 0$. Dado que v, w son linealmente independientes, $z_0 \neq 0$, entonces $h_1 := z_0/||z_0||$ es unitario y verifica que $\langle Ah_1, h_1\rangle = 0$. Escogemos un vector unitario ortogonal a h_1, h_2, entonces $\{h_1, h_2\}$ es una base de $\mathbb{C}^2$, con $A = col[h_1, h_2]^{-1}\, B\, col[h_1, h_2]$, y como $col[h_1, h_2]$ es una matriz ortogonal, la transformación es unitaria. Es un mero cálculo comprobar en lo anterior que $B_{11} = \langle Ah_1, h_1\rangle = 0$, entonces como $tr(A) = tr(B) = 0$ (la traza es invariante bajo cambios de base) se concluye que la diagonal de B es nula. $\square$

El siguiente resultado se basa en la referencia [17], aunque a diferencia de Shapiro, probamos el Teorema 3.17 como consecuencia del Teorema 3.16. Una demostración alternativa se puede consultar en [9]. Como comentábamos al principio de esta sección, a efectos de una clasificación basta estudiar el rango numérico de las matrices de traza nula, y por el teorema anterior nos bastan las matrices con diagonal nula. Desglosando todas las posibles matrices 2×2 de diagonal nula, nos quedan cuatro casos; el siguiente teorema dice que en todos ellos el rango numérico toma la forma de una elipse posiblemente degenerada.

Teorema 3.17. *Sea $T \in L(\mathbb{C}^2)$ una matriz 2×2. El rango numérico de T puede tomar, salvo traslación por $tr(T/2)$, únicamente una de las siguientes cuatro formas:*

1. *Un único punto $\{0\}$, si $T = 0$,*
2. *una circunferencia de radio $|a|/2$, en el caso $T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,*
3. *un segmento de línea que une los autovalores, a y $-a$, en el caso $T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, o bien,*
4. *una elipse maciza con focos en los autovalores $\pm\sqrt{ab}$ y semieje mayor $\frac{|a|+|b|}{2}$, si $T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$.*

Demostración. Si T no tiene traza nula, estudiamos $S := T - tr(T/2)I$ de traza nula, donde $W(T) = W(S) + tr(T/2)$. El Teorema 3.16 nos da que efectivamente basta estudiar estos cuatro casos. Veamos que el rango numérico toma las formas enunciadas.

1. Es trivial.

2. El resultado es una consecuencia directa del Corolario 3.7 y de la Proposición 3.5(5).

3. Diagonalizando la matriz, obtenemos que A es unitariamente equivalente a $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. El resultado se obtiene del Teorema 3.13.

4. Tenemos $T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ donde a y b son números complejos. Primero supongamos que a y b son reales y positivos. Podemos asumir $0 < b \leq a$, de lo contrario, tomamos adjuntos y usamos la Proposición 3.5(4). Luego, empleando la parametrización de la Proposición 3.6 y realizando algunos cálculos:

$$\begin{aligned} W(T) &= \left\{ t\sqrt{1-t^2} \left[(ae^{i\theta} + be^{-i\theta}) \right] : \theta \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ t\sqrt{1-t^2} [(a+b)\cos\theta + i(a-b)\sin\theta] : \theta \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1 \right\} . \end{aligned}$$

Dado que $\text{máx}_{0 \leq t \leq 1} t\sqrt{1-t^2} = 1/2$ y que $a \neq b$, esto describe una elipse con centro en el origen, eje mayor horizontal de longitud $a+b$ y eje menor vertical de longitud $a-b$. Ahora, según la geometría analítica, sabemos que para una elipse con focos $\pm F$ en el eje real, semieje mayor de longitud M y semieje menor de longitud m, tenemos $F^2 + m^2 = M^2$. En nuestro caso, $M = (a+b)/2$ y $m = (a-b)/2$, entonces

$$F = \pm\sqrt{M^2 - m^2} = \pm\sqrt{ab},$$

es decir, los focos de $W(T)$ son los autovalores de T.
Supongamos ahora que a y b son números complejos arbitrarios. Escribimos ambos en forma polar: $a = |a|e^{i\alpha}$ y $b = |b|e^{i\beta}$, y observamos que

$$\text{si } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \end{pmatrix} \text{ entonces } SAS^{-1} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \begin{pmatrix} 0 & |a| \\ |b| & 0 \end{pmatrix}.$$

Así que A es unitariamente equivalente a una matriz de diagonal nula cuyas entradas no nulas son positivas. Por lo tanto el teorema se obtiene del caso abordado anteriormente. □

Resumimos en este resultado el teorema más importante de esta sección,

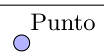
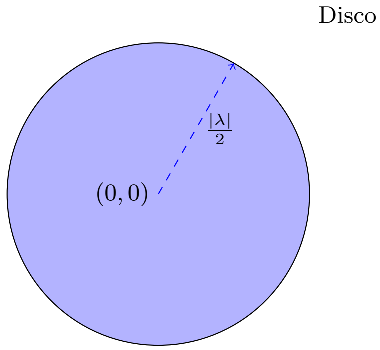
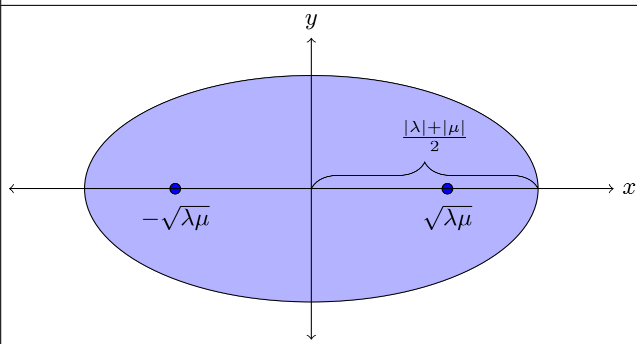
Teorema 3.18. *(Teorema de la elipse) Sea $T \in L(\mathbb{C}^2)$ una matriz 2×2. Salvo traslaciones, $W(T)$ es una elipse (posiblemente degenerada) con focos en los autovalores de T. Como consecuencia, $W(T)$ es convexo.*

Corolario 3.19. Sean $T, S \in L(\mathbb{C}^2)$. Entonces $W(T) = W(S)$ sí y solo sí, T y S son unitariamente equivalentes.

Demostración. Sólo nos falta probar la implicación a la derecha. Supongamos que $W(T) = W(S)$. Por el Teorema 3.17, T y S son unitariamente equivalentes a sólo una de las cuatro formas enunciadas. En particular, son unitariamente equivalentes entre sí. □

El rango numérico de las matrices 3×3 cambia bastante con respecto al caso 2×2 y ha sido estudiado por varios autores, hasta el punto de obtener una clasificación completa [20, 6, 7]. En este caso sigue siendo fundamental el conocimiento del espectro (de los autovalores) del operador. A diferencia del caso 2×2, donde la frontera del rango numérico es suave, el caso $n \times n$ puede presentar "esquinas", y de hecho son puntos de gran importancia.

Concluimos con una tabla resumen de esta sección, en concreto del Teorema de la Elipse. Denotamos por $T \sim^U S$ a que el operador T de traza nula es unitariamente equivalente al operador S. Recordar que si T no tiene traza nula, basta trasladar por $tr(T/2)$.

$T \sim^U S$	Espectro	Rango numérico	
$S = 0$	$\sigma(T) = \{0\}$	$W(T) = \{0\}$	
$S = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\sigma(T) = \{0\}$	$W(T) = D(0, \lvert\lambda\rvert/2)$	
$S = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\sigma(T) = \{\pm\lambda\}$	$W(T) = [-\lambda, \lambda]$	
$S = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$	$\sigma(T) = \{\pm\sqrt{\lambda\mu}\}$	$W(T)$ elipse con focos $\pm\sqrt{\lambda\mu}$	

Cuadro 3.1. Clasificación del rango numérico de las matrices 2×2 de traza nula.

3.3. Propiedades del rango numérico. Relación con el espectro.

En esta sección veremos algunas de las propiedades más importantes del rango numérico y su relación con el espectro.

Definición 3.20. Sean $T \in L(H)$ con H espacio de Hilbert, $M \subset H$ un subespacio cerrado y $P_M : H \to M$ la *proyección ortogonal* en M, es decir P_M es idempotente y auto-adjunto. Se define la *compresión* de T a M como el operador $P_M T_{|M}$ donde $T_{|M}$ es el operador resultante de restringir T a M, es decir $P_M T_{|M} : M \to M$. En este caso se dice que $P_M T_{|M}$ *se dilata* en T.

Proposición 3.21. *Sean $T \in L(H)$ con H espacio de Hilbert. Entonces $W(T)$ contiene los rangos numéricos de todas las compresiones de T, es decir para todo M subespacio cerrado, $W(P_M T_{|M}) \subset W(T)$.*

Demostración. Sea $x \in M$ con $||x|| = 1$. Entonces,

$$\langle P_M Tx, x\rangle = \langle Tx, (P_M)^* x\rangle = \langle Tx, P_M x\rangle = \langle Tx, x\rangle \ .$$

$\square$

En la sección anterior probamos que si $T \in L(H)$ donde $H = L(\mathbb{C}^2)$, entonces $W(T)$ es un conjunto convexo (Teorema 3.18). Sorprendentemente, con ello podemos probar el caso $T \in L(H)$ donde H es un espacio de Hilbert general.

Teorema 3.22. *(Teorema de Hausdorff-Toeplitz). Sea $T \in L(H)$ con H un espacio de Hilbert complejo. Entonces $W(T)$ es convexo.*

Demostración. La idea es reducir el problema al caso de dimensión 2. Sean $T \in L(H)$ y $\lambda, \mu \in W(T)$ distintos, tenemos que ver que el segmento $[\lambda, \mu]$ cae en $W(T)$. Sean x, y vectores unitarios tales que $\lambda = \langle Tx, x\rangle$ y $\mu = \langle Ty, y\rangle$, y además $\lambda \neq \mu$ implica que son linealmente independientes. Por lo tanto $M := span\{x, y\}$ es un subespacio cerrado de H de dimensión 2. Por el Teorema 3.18, el rango numérico de $P_M T$ es una elipse (posiblementente degenerada), por lo tanto es convexo. Por la proposición anterior, se tiene que $[\lambda, \mu] \subset W(P_M T_{|M}) \subset W(T)$.
$\square$

La Proposición 3.21 tiene una versión más fuerte.

Proposición 3.23. *Sea $T \in L(H)$. Entonces $W(T)$ consiste de todos los escalares λ tales que el operador λI se dilata en T.*

Demostración. Sea $\lambda \in W(T)$, tenemos que ver que λI es una compresión de T, es decir que $P_M T_{|M} = \lambda I$ para cierto subespacio cerrado $M \subset H$, equivalentemente $P_M T_{|M} - \lambda I = 0$ o bien $\langle (P_M T_{|M} - \lambda I)y, y\rangle = 0$ para cada $y \in M$. Tomemos $M :=< \{x\} >$ donde $\lambda = \langle Tx, x\rangle$ y $x \in H$ es unitario. Para cada $ax \in M$ donde $a \in \mathbb{C}$ es escalar, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle (P_M T - \lambda I)ax, ax\rangle = |a|^2\langle (P_M T - \lambda I)x, x\rangle = |a|^2\langle (T - \lambda P_M)x, P_M x\rangle \\ = |a|^2\langle (T - \lambda I)x, x\rangle = |a|^2(\langle Tx, x\rangle - \lambda) = 0 \ .\end{aligned}$$

Recíprocamente si $\lambda \in \mathbb{C}$ verifica que λI es una compresión de T, entonces $W(\lambda I) = \{\lambda\} \subset W(T)$ (Proposición 3.21). □

En el Teorema de la Elipse hemos visto que el espectro y el rango numérico pueden ser muy distintos. Sin embargo, el espectro siempre está contenido en la clausura del rango numérico.

Proposición 3.24. *Si $T \in L(H)$, entonces $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(T)$. Supongamos que $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, luego existe una sucesión de vectores unitarios x_n tal que $(T - \lambda I)x_n \to 0$. Entonces,

$$|\langle Tx_n, x_n\rangle - \lambda| = |\langle (T - \lambda I)x_n, x_n\rangle| \leq ||(T - \lambda I)x_n|| \to 0 \ .$$

Luego $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda$ y $\lambda \in \overline{W(T)}$. Por otro lado si $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, entonces por la Proposición 2.13, se tiene que $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. Por lo tanto $\overline{\lambda} \in W(T^*)$, luego por la Proposición 3.5(4), $\lambda \in W(T)$. □

Por la proposición anterior, tenemos que $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T) \subset \overline{W(T)}$. Veamos algo más sobre los puntos de la frontera de $W(T)$, que denotamos por $\partial W(T)$. Estos puntos, en general, no están en el espectro, ni en el espectro puntual, pero bajo ciertas condiciones se puede probar que son autovalores reducidos del operador T. Recordemos la definición,

Definición 3.25. Sea $T \in L(H)$. Se dice que λ es un *autovalor reducido* de T si $Tx = \lambda x$ y $T^*x = \overline{\lambda}x$ para algún $x \in H$.

Resulta que para operadores normales, autovalor y autovalor reducido significan lo mismo,

Proposición 3.26. *Sean $T \in L(H)$ un operador normal, y $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$. Entonces λ y μ son autovalores reducidos, además si x, y son autovectores de λ y μ respectivamente, entonces $x \perp y$.*

Demostración. Sea $T \in L(H)$ un operador normal. Por la Proposición 2.49, tenemos que $||Tx|| = ||T^*x||$ para cada $x \in H$, y en consecuencia $N(T) = N(T^*)$. Por otro lado es claro que $T - \lambda I$ es normal, dado que T es normal y los escalares conmutan con cualquier operador, luego $N(T-\lambda I) = N(T-\lambda I)^*$. Puesto que $||T_\lambda|| = ||(T_\lambda)^*||$ es inmediato que λ es un autovalor de T sí y solo sí, $\overline{\lambda}$ es un autovalor reducido de T. Por otro lado, si $Tx = \lambda x$ y $Ty = \mu y$ con $\lambda \neq \mu$, entonces $\langle x, y\rangle = 0$ equivale a que $(\overline{\lambda} - \overline{\mu})\langle x, y\rangle = 0$. Pero, $\langle x, Ty\rangle = \overline{\mu}\langle x, y\rangle = \langle T^*x, y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$, de donde se obtiene el resultado. □

Proposición 3.27. *[14, Theorem VI.9] Sea $T \in L(H)$ un operador positivo. Entonces existe un único operador positivo $S \in L(H)$ tal que $S^2 = T$. Se denota $S = T^{1/2}$.*

Lema 3.28. *Sea $T \in L(H)$ un operador positivo y $\lambda \in W(T)$. Si $T \leq \lambda I$, entonces λ es un autovalor reducido de T.*

Demostración. Sea $\lambda = \langle Tx, x\rangle \in W(T)$ con x un vector unitario de H. Como $T \leq \lambda I$, se tiene que

$$\begin{aligned} ||(T-\lambda I)^{1/2}x||^2 = \langle (T-\lambda I)^{1/2}x, (T-\lambda I)^{1/2}x\rangle &= \langle ((T-\lambda I)^{1/2})^*(T-\lambda I)^{1/2}, x\rangle \\ &= \langle (T-\lambda I), x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda = 0\ . \end{aligned}$$

De aquí, $(T-\lambda I)^{1/2}x = 0$ y por lo tanto, $Tx = \lambda x$. Como T es auto-adjunto, se tiene que $T^*x = \overline{\lambda}x$. □

Definición 3.29. Sea $T \in L(H)$. Se define $\mathfrak{Re}(T) = (T+T^*)/2$ y $\mathfrak{Im}(T) = (T-T^*)/2i$.

Es claro que $T = \mathfrak{Re}(T) + i\mathfrak{Im}(T)$ y que $\mathfrak{Re}(T)$ y $\mathfrak{Im}(T)$ son operadores auto-adjuntos. Recordemos que para los operadores normales, autovalor y autovalor reducido son conceptos equivalentes, además los autovectores asociados a dos autovalores distintos son ortogonales. Ahora daremos condiciones más débiles para las que también se verifica esto.

Teorema 3.30. *Sea $T \in L(H)$. Si $\lambda \in \partial W(T)$, entonces $N(T-\lambda I) = N(T^* - \overline{\lambda}I)$. Como consecuencia, λ es un autovalor de T sí y solo sí, λ es un autovalor reducido de T.*

Demostración. Salvo traslación y rotación, podemos suponer que $\lambda = 0$ y $Re(W(T)) \geq 0$ (Proposición 3.5). Como $W(\mathfrak{Re}(T)) = \mathfrak{Re}(W(T)) \geq 0$, entonces por la Proposición 3.5(7), $\mathfrak{Re}(T)$ es positivo. Si x es un vector tal que $Tx = 0$, entonces

$$\begin{aligned} ||\mathfrak{Re}(T)^{1/2}\ x||^2 = \langle \mathfrak{Re}(T)^{1/2}\ x, \mathfrak{Re}(T)^{1/2}\ x\rangle &= \langle (\mathfrak{Re}(T)^{1/2})^*\ \mathfrak{Re}(T)^{1/2}\ x, x\rangle \\ &= \langle \mathfrak{Re}(T)x, x\rangle = \mathfrak{Re}\langle Tx, x\rangle = \mathfrak{Re}\langle 0, x\rangle = 0. \end{aligned}$$

Obtenemos que $\mathfrak{Re}(T)x = 0$, además como $Tx = 0$, entonces $T^*x = 0$. Similarmente, deducimos que si $T^*x = 0$, entonces $Tx = 0$. Por lo tanto, $N(T-\lambda I) = N(T^* - \overline{\lambda}I)$ (podíamos suponer que $\lambda = 0$). De aquí, la consecuencia es directa. □

.

Ejemplo 3.31. En el Ejemplo 3.14 se probó que si $L \in \ell^2(\mathbb{N})$ es la traslación a la izquierda, $L(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$, entonces $W(L)$ es el disco unidad abierto, luego $\partial W(L) = S^1$, la circunferencia unidad. Tomemos $\lambda \in S^1$ y veamos que $N(T_\lambda) = 0$. En efecto si $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N})$, entonces $(T - \lambda I)(x_n) = 0$ sí y solo sí, $(x_{n+1} - \lambda x_n) = 0$, sí y solo sí, $x_n = \lambda x_1$ para cada $n \geq 1$. Puesto que $|\lambda| = 1$, (x_n) es cuadrado-sumable sí y solo sí, $(x_n) = (0)$. Por la proposición anterior, se concluye que L no tiene autovalores ni autovalores reducidos de módulo 1.

Corolario 3.32. Sea $T \in L(H)$. Si $\lambda \neq \mu$ son autovalores de T y $\lambda \in \partial W(T)$, entonces los autovectores asociados a λ y μ son ortogonales.

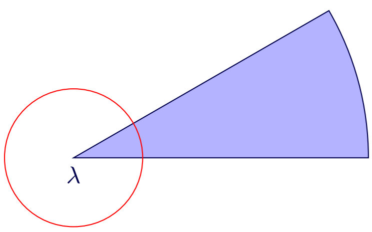
Demostración. Sean $x, y \neq 0$ tales que $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$. Como $N(T - \lambda I) = N(T - \lambda I)^*$, la demostración es similar a la Proposición 3.26. □

Corolario 3.33. Sean $T \in L(H)$ una contracción, es decir $||T|| \leq 1$, y $x \in H$. Entonces $Tx = x$ sí y solo sí, $T^*x = x$.

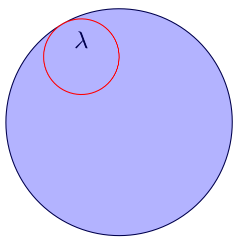
Demostración. Basta probar que $1 \in \partial W(T)$. Supongamos que $Tx = x$, basta ver que $1 \in \partial W(T)$. Como $||T|| \leq 1$, entonces $W(T) \subset \overline{D}(0, ||T||) \subset \overline{D}(0, 1)$, además $1 \in \sigma_p(T) \subset \overline{W(T)} \subset \overline{D}(0, 1)$, luego $1 \in \partial W(T)$. Suponiendo que $T^*x = x$, el razonamiento es el mismo, usando que $W(T^*) = W(T)^*$. □

Definición 3.34. Sea $T \in L(H)$. Se dice que un punto $\lambda \in \overline{W(T)}$ tiene *curvatura infinita* si no existe un disco cerrado contenido en $\overline{W(T)}$ que contenga a λ.

Por ejemplo, las "esquinas" de $W(T)$ tienen curvatura infinita; los puntos interiores no, ni los bordes suaves:



λ de curvatura infinita



λ de curvatura finita

Nota. Para la anterior definición es suficiente tomar $\lambda \in \partial W(T)$.

Los puntos de $\partial W(T)$ de curvatura infinita son especiales.

Teorema 3.35. *(Teorema de Folk) Si $\lambda \in \partial W(T)$ tiene curvatura infinita, entonces $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

Demostración. Tenemos que $\lambda = \langle Tx, x\rangle$ para cierto vector unitario x. Sea y un vector unitario ortogonal a x, y consideramos $M := span\{x, y\}$. Similarmente al Teorema de Hausdorff-Toeplitz (Teorema 3.22), tenemos que $W(P_M T_{|M})$ es una elipse posiblemente degenerada que contiene a λ. Pero además $W(P_M T_{|M}) \subset W(T)$, y como $W(T)$ no contiene ningún disco que contiene a λ, tampoco contiene ninguna elipse que contiene a λ. Por lo tanto $W(P_M T_{|M})$ es una elipse degenerada, un segmento con extremo λ o bien un punto λ, en todo caso λ es un autovalor, dado el Teorema de la Elipse 3.18. □.

Nota. Es fácil de comprobar que el Teorema de la Aplicación espectral no es cierto para el rango numérico. Tomemos $T \in L(\mathbb{C}^2)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda \neq 0$, entonces

$$\text{si } T := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \text{ entonces } W(T^2) = \{\lambda^2\} \neq W(T)^2 = [0, \lambda^2] \ .$$

Nota. Similarmente al radio espectral, se puede definir el *radio numérico*

$$w(T) := \sup_{\lambda \in W(T)} |\lambda| \ .$$

A diferencia del espectro, no es necesariamente un máximo. Resulta que $w(\cdot)$ es una norma sobre $L(H)$, con H un espacio de Hilbert complejo, equivalente a la norma usual de operadores [3, Proposition 1.5.1]. Si A es un $\mathbb{C}^*$-álgebra unitaria y $x \in A$, se define el *rango numérico de* x por (véase [19])

$$W(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in A^*, \ ||\phi|| = 1, \ \phi(1) = 1\} \ ,$$

donde A^* es el espacio dual de A. Se puede probar que coincide con la Definición 3.1. Obsérvese la similitud con la caracterización del espectro del Teorema 2.39.

Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido presentar varias propiedades del espectro y del rango numérico. Por los resultados que hemos dado, a primera vista parece que son conjuntos con buenas propiedades, sin embargo, hemos de recordar que existen multitud de problemas abiertos con respecto a su cálculo o aproximación. Nótese entonces, que nuestros ejemplos son selectos y tienen la particularidad de ser sencillos. Para concluir, damos una tabla que resume algunas de las propiedades y diferencias del rango numérico y del espectro.

Denotamos por $T \sim S$ que T es similar a S y por $T \sim^U S$ que T es unitariamente equivalente a S.

Propiedad	**Espectro**	**Rango numérico**
Acotación por $\|\|T\|\|$	✓	✓
Cerrado	✓	**x**
Convexidad	**x**	✓
$T \sim S$	$\sigma(T) = \sigma(S)$	$W(T) \neq W(S)$
$T \sim^U S$	$\sigma(T) = \sigma(S)$	$W(T) = W(S)$
Conjugación	$\sigma(T^*) = \sigma(T)^*$	$W(T^*) = W(T)^*$
T invertible	$\sigma(T^{-1}) = \sigma(T)^{-1}$	$W(T^{-1}) \neq W(T)^{-1}$
$p \in \mathbb{C}[z]$	$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$	$W(p(T)) \neq p(W(T))$
A conmutativa	$\sigma(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in Hom(A, \mathbb{C})\}$	$W(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in A^*,\ \|\|\phi\|\| = 1,\ \phi(1) = 1\}$
$T = \lambda I$	$\sigma(T) = \lambda \Leftarrow T = \lambda I$ $\not\Rightarrow$	$W(T) = \{\lambda\} \iff T = \lambda I$
$T = T^*$	$T = T^* \Rightarrow \sigma(T) \subset \mathbb{R}$ $\not\Leftarrow$	$T = T^* \iff W(T) \subset \mathbb{R}$
$dimX < \infty$	$\sigma(T)$ finito	$W(T)$ no finito
$T \in L(\mathbb{C}^2)$	$\sigma(T) = \{\text{autovalores}\}$	$W(T) =$ elipse posiblemente degenerada con focos en los autovalores

Cuadro 3.2. Comparación de algunas de las propiedades del espectro y rango numérico.

Para estudiar el espectro, hemos usado el formalismo de las álgebras de Banach. Quiero destacar el concepto de "conmutador" (en inglés: "conmutant").

Tiene gran utilidad en las demostraciones y no suele aparecer en los textos introductorios sobre el espectro de un operador. Además, es mi opinión personal como estudiante que algunas demostraciones resultan más simples con el formalismo de las álgebras de Banach. Sin embargo, ciertos conceptos son difíciles de expresar de manera algebraica: el rango de un operador, su núcleo y las clausuras de estos, la inyectividad o sobreyectividad... En consecuencia planteamos la pregunta, de si es posible generalizar a álgebras de Banach las particiones del espectro, que dependen íntimamente de los conceptos anteriores.

Bibliografía

[1] Caradus, Selwyn R; E. Pfaffenbergen, William; Yood, Bertram. *Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 1974, Volume 9.

[2] Macdonald, Ian. *The Theory of Groups.* Oxford University Press, 1968.

[3] Gau, Hwa-Long; Wu, Pei Yuan. *Numerical ranges of Hilbert space operators.* Cambridge University Press, 2021.

[4] Halmos, Paul R. *A Hilbert Space Problem Book, 2nd edition.* Springer Verlag, 2006.

[5] Harrel, Evans. *A Short History of Operator Theory.* Mathphysics.com, 2004.

[6] Keeler, Dennis S.; Rodman, Leiba; Spitkovsky, Ilya M. *The numerical range of 3×3 matrices.* Linear Algebra Appl. 252, 1997, pp. 115–139.

[7] Kippenhahn, Rudolf. *On the numerical range of a matrix.* Translated from the German by Paul F. Zachlin and Michiel E. Hochstenbach. Linear Multilinear Algebra 56, vol. 1-2 , 2008, pp 185–225.

[8] Kubrusly, Carlos S. *Spectral Theory of Bounded Linear Operators.* Springer International Publishing, 2020. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-030-33149-8

[9] Li, Chi-Kwong. *A simple proof of the elliptical range theorem.* Proceedings of the American Mathematical Society, no 7, 1996, vol. 124, pp. 1985-1986.

[10] Megginson, Robert E. *An introduction to Banach space theory.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, New York, Springer-Verlag, 1998.

[11] Mathematics Stack Exchange. *Example of hyponormal operator which is not normal.* Disponible en: https://math.stackexchange.com/q/2849869

[12] Mathematics Stack Exchange. *On the spectrum of the sum of two commuting elements in a Banach algebra.* Disponible en: https://math.stackexchange.com/q/318028

[13] Remling, Christian. *Functional analysis (Lecture Notes).* Disponible en: http://www2.math.ou.edu/~cremling/teaching/lecturenotes/fa-new/LN-I.pdf

[14] Reed, Michael; Simon, Barry. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis.* Academic Press, San Diego, 1980.

[15] Rudin, Walter. *Functional Analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. Vol. 25 , First ed, New York, McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1973.

[16] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis.* New York, McGraw-Hill, 1970.

[17] Shapiro, Joel H. *Notes on the numerical range.* Michigan state University, East Lansing, MI 48824-1027, USA, 2004.

[18] Steen, Lynn Arthur. *Highlights in the history of spectral theory.* The American Mathematical Monthly 80.4, 1973, pp. 359-381.

[19] Uchiyama, Mitsuru. *Numerical ranges of elements of involutive Banach algebras and commutativity.* Arch. Math. 69, 1997, pp. 313–318. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s000130050126

[20] Zachlin, Paul F.; Hochstenbach, Michiel E. *On the numerical range of a matrix.* Linear and Multilinear Algebra, 2008, vol. 56, pp. 185-225.

Properties of the spectrum and numerical range of a bounded operator.

David Specogna Acosta
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101365589@ull.edu.es

Abstract

The main objective of this work is to present some introductory properties of the spectrum and the numerical range of a bounded operator, two subsets of the complex plane. We discuss some of the classic properties of the spectrum of a bounded operator: compactness, classification, and the Spectral Mapping Theorem. For this purpose, we largely use the language of Banach algebras, providing alternative and, in some cases, simpler proofs. Additionally, we present properties such as the representation of the spectrum by homomorphisms and the Spectral Mapping Theorem for Laurent polynomials. We give some basic properties of the numerical range, as well as the classification for 2×2 matrices, which facilitates the study of the general case. We conclude with the study of the boundary points of the numerical range; if one such point has infinite curvature, then it is an eigenvalue.

1. Introduction

WE DEFINE THE SPECTRUM of a bounded operator in a Hilbert space, $T \in L(H)$, by

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ has no inverse in } L(H)\} .$$

If instead $x \in A$ a Banach algebra with unit e, we define

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda e \text{ has no inverse in } A\} .$$

The numerical range is defined as

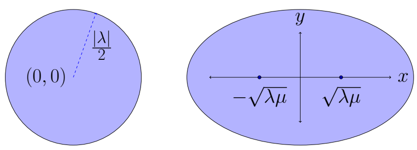
$$W(T) := \{\langle Tx, x\rangle \mid x \in H,\ ||x|| = 1\} .$$

The spectrum is a generalization of eigenvalues to infinite dimensions, while the numerical range is a related subset of the complex plane, but they have major differences.

2. Relationships

THESE ARE some important relationships between the spectrum and numerical range.

1. The numerical range of a 2×2 matrix is a (possibly degenerate) ellipse with foci at the eigenvalues.



A degenerate ellipse could also be a point or a line segment.

2. The closure of the numerical range contains the spectrum.
3. The numerical range contains all eigenvalues.
4. The "corners" of the numerical range are eigenvalues.

λ with infinite curvature $\qquad$ λ with finite curvature

The spectrum of a point $x \in A$ a conmutative Banach algebra has the following representation:

$$\sigma(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in Hom(A, \mathbb{C})\} ,$$

the evaluations of all homomorphisms from A to $\mathbb{C}$ at the vector x. The numerical range in any Banach algebra A, is defined by a similar formula,

$$W(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in A^*,\ ||\phi|| = 1,\ \phi(1) = 1\} ,$$

where instead we take ϕ to be linear functionals with additional properties.

3. Comparison of results

THE SPECTRUM AND NUMERICAL RANGE share common properties, but not all. We give a table comparing some of them.

Comparison of select properties

Property	Spectrum	Numerical range
Boundedness	✓	✓
Closedness	✓	x
Convexity	x	✓
$T \sim S$	$\sigma(T) = \sigma(S)$	$W(T) \neq W(S)$
$T \sim^U S$	$\sigma(T) = \sigma(S)$	$W(T) = W(S)$
Conjugation	$\sigma(T^*) = \sigma(T)^*$	$W(T^*) = W(T)^*$
T invertible	$\sigma(T^{-1}) = \sigma(T)^{-1}$	$W(T^{-1}) \neq W(T)^{-1}$
$p \in \mathbb{C}[z]$	$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$	$W(p(T)) \neq p(W(T))$
$dimX < \infty$	$\sigma(T)$ finite	$W(T)$ non finite

We also give an elegant proof that not only does the operation of taking the spectrum, σ, conmute with the evaluation homomorphism of a polynomial, p, but this is also true for Laurent polynomials. For any $p \in C[z, z^{-1}]$ and invertible $T \in L(H)$,

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) := \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\} .$$

References

[1] Gau, Hwa-Long; Wu, Pei Yuan. *Numerical ranges of Hilbert space operators.* Cambridge University Press, 2021.

[2] Kubrusly, Carlos S. *Spectral Theory of Bounded Linear Operators.* Springer International Publishing, 2020. Available at: https://doi.org/10.1007/978-3-030-33149-8

[3] Remling, Christian. *Functional analysis, (Lecture Notes).* Available at: http://www2.math.ou.edu/~cremling/teaching/lecturenotes/fa-new/LN-I.pdf

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna