

Universidad de La Laguna

Facultad de Física

**INTRODUCCIÓN
A LA
TEORÍA DE CUERDAS**

Autor: Jaime Alberto Noda Darías

Supervisor: Jose M^a Gómez Llorente

Agradecimientos

Agradecer en primer lugar a mi tutor por la ayuda que me ha ofrecido y sobre todo por la comprensión mostrada durante todo el proceso de realización del trabajo.

A mis padres y a mi hermana, por estar ahí siempre y hacer de mí la persona que soy hoy día. A mis abuelos, porque todo lo que hago es primero mérito suyo antes que mío. A Alicia, por estar detrás de cada uno de mis proyectos brindando todo el apoyo necesario.

Y dedico este logro especialmente al Yeyo, al que la vida no le permitió por escasas semanas estar presente a la hora de mi graduación. Sé que te hubiera alegrado más que a nadie verlo, así que va por ti.

Abstract

The aim of this final degree project is to serve as an introductory tool for the study of string theory. This theory requires knowledge that is not entirely accessible to undergraduate physics students, so we will not dive deeply into each concept but rather provide a general overview to understand the theoretical framework governing this theory. In fact, this work will focus solely on bosonic string theory, excluding fermions and, therefore, supersymmetry and superstrings as they are part of more advanced theories.

We will begin by defining the principle of least action through several examples that will help illustrate the importance of this methodology for analyzing the dynamics of a system. The first object we will study is the classical string, for which we will derive the equation of motion from its action. Next, we will do the same with the relativistic point particle, which will allow us to observe some properties that will later appear in the case of the relativistic string. This type of string is the object that truly interests us and will be the fundamental piece of the theory.

The dynamics of the relativistic string can be studied starting from the Nambu-Goto action or the Polyakov action. Throughout the project, we will examine the symmetries inherent to each action and the advantages of working with one or the other depending on the concept being developed. We will also demonstrate through certain operations that both actions are actually equivalent. We will use the Polyakov action to define an interesting quantity in the theory: the stress-energy tensor.

After analyzing the relativistic string, we will proceed to the quantization of the string. This quantization can be carried out using two methods: canonical quantization and light-cone gauge quantization.

For canonical quantization, we will need to promote the coordinates field which we have been working with classically to an operator in the corresponding Hilbert space. Then, we define the ground state and the quantum theory begins to develop with the help of the Virasoro algebra. Using this quantization method, we will encounter negative-norm states known as 'ghost states'. One of the challenges of canonical quantization is the elimination of these ghost states. Additionally, we will see how the number of dimensions of the theory emerges, which turns out to be 26 dimensions.

In the case of light-cone gauge quantization, we will quantize the theory in such a way that these negative-norm states are not predicted, but with the disadvantage that our theory will no longer be manifestly invariant under Lorentz transformations. We will define the light-cone coordinates in terms of the spacetime coordinates in which our bosonic string is moving and ensure that the same conditions we had in the classical theory still hold. This quantization allows us to analyze the mass spectrum of open and closed strings, where we find states corresponding to particles such as the tachyon, graviton, and dilaton.

Índice

Introducción	1
1 Principio de Mínima Acción	2
1.1 Ejemplos del Principio de Mínima Acción en física	4
1.1.1 Ecuación de onda	5
1.1.2 Ecuaciones de Einstein	6
1.1.3 Ecuación de Klein-Gordon	8
1.1.4 Ecuación de Dirac	9
2 La cuerda clásica	10
2.1 La partícula puntual relativista	11
3 La cuerda relativista	13
3.1 La acción de Nambu-Goto	13
3.2 La acción de Polyakov	16
4 La cuantización de la cuerda	20
4.1 La cuantización canónica	20
4.2 La cuantización del cono de luz	26
5 Más allá de nuestros objetivos	32
Conclusiones	35

Introducción

Uno de los grandes objetivos en la historia de la física ha sido siempre la unificación. A lo largo del siglo pasado, se invirtieron grandes esfuerzos en desarrollar teorías que combinaran áreas profundamente investigadas como lo era el electromagnetismo con nuevas ramas de la física que surgieron durante esta etapa, como es el caso de la mecánica cuántica. Así fueron apareciendo teorías como la electrodinámica cuántica, que explica el comportamiento del electromagnetismo a nivel cuántico, o la teoría electrodébil, que acopla la electrodinámica cuántica y la interacción nuclear débil. A principios de la década de 1970, se consiguió agrupar la teoría electrodébil con el modelo que describe la interacción nuclear fuerte: la cromodinámica cuántica, consiguiendo una teoría que incluye tres de las cuatro interacciones fundamentales del universo conocida como el Modelo Estándar de la física de partículas.

El Modelo Estándar clasifica todas las partículas elementales conocidas hasta el momento y ha demostrado su éxito en repetidas ocasiones al predecir numerosos resultados que han sido evidenciados experimentalmente. El hecho de que no se le considere como una Teoría del Todo (TOE por sus siglas en inglés: *Theory of Everything*) radica precisamente en esa cuarta interacción que no es capaz de incorporar: la gravitación. Cuando se intenta describir la gravedad con una teoría cuántica de campos se producen teorías no renormalizables, es decir, aparecen divergencias que se traducen en un fracaso de la cuantización de la gravedad. Este es uno de los grandes problemas a los que se enfrenta el Modelo Estándar, no obstante, no es el único. La teoría no es capaz de explicar la razón de la existencia de tres generaciones de quarks y leptones, ni el origen de sus masas o la jerarquía aparente entre las mismas. Además, contiene 19 parámetros arbitrarios fijados de manera que las predicciones se ajusten a los resultados experimentales. También es importante destacar que no da explicación de fenómenos como la materia oscura o la energía oscura, ni de la prevalencia de materia sobre antimateria en el universo.

Debido a éstas y otras varias cuestiones importantes sin resolver, la meta final de la física teórica sigue siendo la búsqueda de una teoría que consiga unificar las cuatro interacciones fundamentales y de la cual emerjan todas las respuestas a estos problemas. Desde finales del siglo XX hasta día de hoy se han propuesto numerosas Teorías del Todo, siendo la teoría de cuerdas la principal candidata para lograr describir la física que gobierna la realidad.

El presente trabajo pretende ser una recopilación bibliográfica de diversas fuentes, organizada y planteada de manera que sea accesible para estudiantes del Grado en Física y que otorgue un conocimiento elemental de los fundamentos sobre los que se construye la teoría de cuerdas. La profundización y el completo entendimiento de este campo requiere de herramientas que no se encuentran al alcance del nivel del grado, por lo que el objetivo de esta memoria es proporcionar una visión general del marco teórico en el que se basa la teoría y servir como punto de partida para un estudio avanzado de la misma. Por estos motivos, se encontrarán en cada capítulo referencias a distintos documentos o libros de donde han sido extraídos los desarrollos llevados a cabo, reduciendo mi aportación únicamente a la agrupación y explicación de los conceptos y concediendo el mérito a los autores originales de dicha bibliografía.

1. Principio de Mínima Acción

We will state the principle of least action and derive the Euler-Lagrange equations for mechanical systems, extending it to the case of fields. We will apply the principle to obtain some important equations in physics, such as Einstein's equations and the wave equation for a string, which we will use later on.

A lo largo de esta sección, se seguirá el desarrollo encontrado en la referencia [1]. La formulación más general de la ley que gobierna el movimiento de los sistemas mecánicos es el principio de mínima acción o principio de Hamilton. De acuerdo a éste, si un sistema ocupa en los instantes t_1 y t_2 unas posiciones definidas por dos conjuntos de coordenadas $q^{(1)}$ y $q^{(2)}$, entonces el sistema se mueve entre esas posiciones de manera que la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.1)$$

toma el mínimo valor posible. En realidad, el principio de mínima acción establece que la integral debe ser un mínimo sólo para longitudes infinitesimales del camino de integración. Para caminos de longitud arbitraria, S debe ser un extremo, no necesariamente un mínimo. La función $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ es el lagrangiano que caracteriza el sistema y la integral S es conocida como la *acción*. La particularidad de que el lagrangiano contenga únicamente q y \dot{q} , pero no las derivadas de orden superior, refleja el hecho de que el estado mecánico del sistema está completamente definido cuando las coordenadas y las velocidades están dadas.

Procedamos a derivar ahora las ecuaciones diferenciales que resuelven el problema de minimizar la integral S . Por simplicidad, asumiremos primero que el sistema tiene sólo un grado de libertad, de modo que sólo se debe determinar una función $q(t)$.

Sea $q = q(t)$ la función para la cual S es un mínimo, entonces S aumenta cuando $q(t)$ se reemplaza por cualquier función de la forma

$$q(t) + \delta q(t)$$

donde $\delta q(t)$ es una función que es pequeña en todas partes en el intervalo de tiempo desde t_1 hasta t_2 . A $\delta q(t)$ se le conoce como la variación de la función $q(t)$. Dado que para $t = t_1$ y para $t = t_2$, todas las funciones $q(t) + \delta q(t)$ deben tomar los valores $q^{(1)}$ y $q^{(2)}$ respectivamente, se sigue que

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

La variación en S se puede escribir como

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt. \end{aligned}$$

Efectuando la integración por partes en el segundo término y usando las condiciones de contorno, obtenemos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt.$$

Para que S tenga un mínimo, la variación debe ser cero para cualquier δq , lo que implica que la integral debe ser cero. Esto es posible únicamente si el integrando es cero, lo que lleva a la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (1.2)$$

Cuando el sistema tiene más de un grado de libertad, las diferentes funciones $q_i(t)$ deben variarse independientemente en el principio de mínima acción, obteniéndose así las ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Podemos ahora generalizar la ecuación (1.2) para el estudio de campos considerando una función del espacio-tiempo $\varphi(\mathbf{r}, t)$. El lagrangiano en este caso depende de φ y de sus derivadas parciales $\mathcal{L}[\varphi(\mathbf{r}, t), \partial\varphi/\partial\mathbf{r}, \partial\varphi/\partial t]$ y tenemos, por tanto, la siguiente acción:

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}) d^4x. \quad (1.3)$$

Para encontrar las ecuaciones de movimiento, consideramos una variación de φ y calculamos la variación de S :

$$\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi,$$

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial\mathbf{r})} \delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial t)} \delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \right) d^4x.$$

Podemos reescribir δS teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}}\right) &= \frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial\mathbf{r}}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial\mathbf{r}}, \\ \delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial t}, \end{aligned}$$

obteniendo de esta manera:

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial\mathbf{r})} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial t)} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial t} \right) d^4x.$$

Aplicamos integración por partes a los términos espacial y temporal:

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial\mathbf{r})} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial\mathbf{r}} d^4x = \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial\mathbf{r})} \delta\varphi \right) \Big|_{\text{frontera}} - \int \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial\mathbf{r})} \right) \delta\varphi d^4x.$$

Como en el caso anterior, el término de frontera se anula bajo la suposición de que $\delta\varphi$ es cero en los límites del dominio de integración, por lo que:

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial\mathbf{r})} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial\mathbf{r}} d^4x = - \int \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial\mathbf{r})} \right) \delta\varphi d^4x.$$

De igual modo, para el término temporal se tiene:

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial t)} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial t} d^4x = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial t)} \delta\varphi \right) \Big|_{\text{frontera}}^0 - \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial t)} \right) \delta\varphi d^4x.$$

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial t)} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial t} d^4x = - \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial t)} \right) \delta\varphi d^4x.$$

Incorporando ambos términos, la variación de la acción resultante es:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial\mathbf{r})} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial t)} \right) \right] \delta\varphi d^4x.$$

Si minimizamos esta acción para cualquier $\delta\varphi$, obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial\mathbf{r})} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0. \quad (1.4)$$

1.1. Ejemplos del Principio de Mínima Acción en física

El principio de mínima acción es una herramienta clave para la construcción de teorías, ya que permite desarrollar el estudio de un sistema mecánico partiendo de un elemento base: la acción implicada en su movimiento. Siguiendo este principio, se pueden obtener ecuaciones que fueron originalmente formuladas empleando otras técnicas, lo que parece indicar que forma parte de los cimientos sobre los que se erigen las teorías de la mecánica. Este método ha sido particularmente importante en la teoría de cuerdas, donde las acciones de Nambu-Goto y de Polyakov permiten explorar las propiedades dinámicas y cuánticas de las cuerdas. Nos adentraremos en el estudio de dichas acciones en los capítulos posteriores.

En estos nuevos apartados, analizaremos una serie de ejemplos que ilustran cómo esta metodología puede aplicarse para obtener algunas de las ecuaciones más importantes de la física. Demostraremos cómo la acción y la densidad lagrangiana de cada caso específico nos conducen, a través del principio de mínima acción, a las expresiones que caracterizan la dinámica de los distintos sistemas.

1.1.1. Ecuación de onda

La ecuación de onda describe cómo se propagan las ondas en un medio, y podemos obtenerla considerando la densidad lagrangiana de una cuerda ideal en vibración [2]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\rho(\partial_t\psi)^2 - T(\partial_x\psi)^2),$$

donde $\psi(x, t)$ describe el desplazamiento de la cuerda, ρ es la densidad lineal de masa, y T es la tensión de la cuerda.

La acción S está dada por:

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int \frac{1}{2} (\rho(\partial_t\psi)^2 - T(\partial_x\psi)^2) d^4x.$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento, aplicamos el principio de mínima acción, que establece que la variación de la acción es cero:

$$\delta S = 0.$$

Calculamos la variación de la acción respecto a ψ :

$$\delta S = \int [\rho(\partial_t\psi)\delta(\partial_t\psi) - T(\partial_x\psi)\delta(\partial_x\psi)] d^4x.$$

Dado que $\delta(\partial_t\psi) = \partial_t(\delta\psi)$ y $\delta(\partial_x\psi) = \partial_x(\delta\psi)$, podemos reescribir la variación de la acción como:

$$\delta S = \int [\rho(\partial_t\psi)\partial_t(\delta\psi) - T(\partial_x\psi)\partial_x(\delta\psi)] d^4x.$$

Aplicamos integración por partes a ambos términos. Consideremos primero el término temporal:

$$\int \rho(\partial_t\psi)\partial_t(\delta\psi) d^4x = [\rho\partial_t((\partial_t\psi)\delta\psi)]\Big|_{\text{frontera}} - \int \rho(\partial_t^2\psi)\delta\psi d^4x.$$

El primer término, como ya hemos visto, se anula debido a la ausencia de variaciones $\delta\psi$ en los extremos del dominio de integración:

$$[\rho\partial_t((\partial_t\psi)\delta\psi)]\Big|_{\text{frontera}} = 0.$$

Por tanto, tenemos:

$$\int \rho(\partial_t\psi)\partial_t(\delta\psi) d^4x = - \int \rho(\partial_t^2\psi)\delta\psi d^4x.$$

De manera similar, para el término espacial:

$$\int -T(\partial_x\psi)\partial_x(\delta\psi) d^4x = -[T\partial_x((\partial_x\psi)\delta\psi)]\Big|_{\text{frontera}} + \int T(\partial_x^2\psi)\delta\psi d^4x.$$

En este caso encontramos dos tipos de condiciones de contorno: extremos de la cuerda fijos y derivadas espaciales nulas. Es decir, este término puede anularse o bien por la ausencia de variaciones en los extremos o bien porque las primeras derivadas espaciales sean cero. En cualquier caso se tiene:

$$-[T\partial_x((\partial_x\psi)\delta\psi)]\Big|_{\text{frontera}} = 0.$$

Entonces:

$$\int -T(\partial_x\psi)\partial_x(\delta\psi) d^4x = \int T(\partial_x^2\psi)\delta\psi d^4x.$$

Sumando ambos términos, la variación de la acción se convierte en:

$$\delta S = \int [-\rho(\partial_t^2\psi)\delta\psi + T(\partial_x^2\psi)\delta\psi] d^4x.$$

Para que $\delta S = 0$ para cualquier $\delta\psi$, el integrando debe ser cero, obteniendo así la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\rho\partial_t^2\psi - T\partial_x^2\psi = 0.$$

Reescribimos esta ecuación en una forma más familiar:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0,$$

donde $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ es la velocidad de propagación de la onda en la cuerda.

1.1.2. Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein también pueden derivarse del principio de mínima acción aplicando la variación a la integral de la densidad lagrangiana del campo gravitatorio, también conocida como la acción de Hilbert-Einstein [3]:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int R\sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_{\text{matter}}\sqrt{-g} d^4x,$$

donde R es el escalar de Ricci, $\kappa = 8\pi G$, g es el determinante del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, y $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ es la densidad lagrangiana de la materia.

Para obtener las ecuaciones de Einstein, consideramos la variación de la acción con respecto al tensor métrico $g_{\mu\nu}$:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int \delta(R\sqrt{-g}) d^4x + \int \delta(\mathcal{L}_{\text{matter}}\sqrt{-g}) d^4x.$$

Primero, calculamos la variación del término $\sqrt{-g}$:

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.$$

Entonces, la variación de $R\sqrt{-g}$ se convierte en:

$$\delta(R\sqrt{-g}) = R\delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}\delta R = R\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta R.$$

Para la variación del escalar de Ricci R , utilizamos:

$$\delta R = g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

La variación del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ se puede expresar en términos de la variación del tensor métrico como:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda,$$

donde $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ es la variación de la conexión de Levi-Civita. Esta variación está dada por:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}).$$

Sustituyendo $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ en $\delta R_{\mu\nu}$:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \left(\frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}) \right) - \nabla_\nu \left(\frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\nabla_\lambda \delta g_{\mu\sigma} + \nabla_\sigma \delta g_{\mu\lambda} - \nabla_\mu \delta g_{\lambda\sigma}) \right).$$

Después de simplificar y combinar términos, obtenemos:

$$\delta R = g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \nabla^\lambda \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla^\lambda \delta g_{\nu\lambda}).$$

Así, la variación de $R\sqrt{-g}$ se convierte en:

$$\delta(R\sqrt{-g}) = \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \nabla^\lambda \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla^\lambda \delta g_{\nu\lambda}).$$

Aplicando integración por partes y descartando los términos de frontera, la última parte se anula, dejando:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x.$$

Para incluir la contribución de la materia, variamos el término $\mathcal{L}_{\text{matter}}\sqrt{-g}$:

$$\delta(\mathcal{L}_{\text{matter}}\sqrt{-g}) = \sqrt{-g} \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{matter}}}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\text{matter}} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \right).$$

donde el segundo término proviene de la variación del determinante del tensor métrico $\sqrt{-g}$ con respecto a $g_{\mu\nu}$ mencionada al inicio del desarrollo.

La densidad lagrangiana de la materia contribuye al tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$, definido como:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{matter}})}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Finalmente, combinando ambas variaciones, la variación total de la acción es:

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x.$$

Para que $\delta S = 0$ para cualquier $\delta g^{\mu\nu}$, el integrando debe ser cero, lo que nos lleva a las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

1.1.3. Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de Klein-Gordon describe la dinámica de un campo escalar ϕ con masa m . Esta ecuación es fundamental en la teoría cuántica de campos y se puede derivar del principio de mínima acción aplicando la variación a la acción asociada a un campo escalar libre [4]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2).$$

La acción correspondiente es:

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) d^4x.$$

Calculamos la variación de la acción respecto a ϕ :

$$\delta S = \int \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu (\delta\phi) + \partial^\mu \phi \partial_\mu (\delta\phi) - 2m^2 \phi \delta\phi) \right] d^4x.$$

Podemos simplificar la variación usando que $\partial_\mu (\delta\phi) = \delta(\partial_\mu \phi)$:

$$\delta S = \int [\partial_\mu \phi \partial^\mu (\delta\phi) - m^2 \phi \delta\phi] d^4x.$$

Usamos integración por partes en el término $\partial_\mu \phi \partial^\mu (\delta\phi)$, suponiendo que las variaciones $\delta\phi$ son cero en la frontera del dominio de integración:

$$\int \partial_\mu \phi \partial^\mu (\delta\phi) d^4x = [\partial_\mu (\partial^\mu \phi \delta\phi)] \Big|_{\text{frontera}} - \int \partial_\mu \partial^\mu \phi \delta\phi d^4x.$$

Al anularse el término de frontera resulta:

$$\int \partial_\mu \phi \partial^\mu (\delta\phi) d^4x = - \int \partial_\mu \partial^\mu \phi \delta\phi d^4x.$$

Por lo tanto, la variación de la acción se convierte en:

$$\delta S = \int [-\partial_\mu \partial^\mu \phi \delta\phi - m^2 \phi \delta\phi] d^4x.$$

Para que $\delta S = 0$ para cualquier $\delta\phi$, el integrando debe ser cero, obteniendo así la ecuación de Euler-Lagrange:

$$-\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = 0.$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)\phi = 0,$$

donde $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ es el operador de d'Alembert.

1.1.4. Ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac describe la dinámica de partículas fermiónicas, como es el caso de los electrones. Esta es otra de las ecuaciones más relevantes en la teoría cuántica de campos y también se puede derivar del principio de mínima acción [5].

La densidad lagrangiana para un campo de Dirac ψ es:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi,$$

donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ es el conjugado de Dirac y γ^μ son las matrices gamma.

La acción correspondiente es:

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi d^4x.$$

Calculamos la variación de la acción respecto a $\bar{\psi}$ y ψ :

$$\delta S = \int [\delta\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\delta\psi] d^4x.$$

Para que la variación sea cero para cualquier $\delta\bar{\psi}$, el término dentro del integrando debe ser cero:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0.$$

De manera similar, la variación respecto a ψ da:

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m) = 0.$$

Estas expresiones son la ecuación de Dirac y su conjugada, y caracterizan el movimiento de los fermiones en la teoría cuántica de campos.

2. La cuerda clásica

We will study the motion of a classical string starting from the equation derived in the previous section. Additionally, we will analyze the relativistic point particle and its action to observe the similarity it has with the relativistic string and the properties they share.

Antes de adentrarnos en el caso de la cuerda relativista, es conveniente llevar a cabo un pequeño estudio de la cuerda clásica con el objetivo de comprender plenamente su dinámica y poder aplicar y extrapolar este conocimiento a la situación general que abordaremos en la siguiente sección. Por ahora, trataremos con cuerdas que tienen masa y tensión y que pueden vibrar tanto transversal como longitudinalmente. Para el desarrollo de este capítulo se ha seguido la referencia [2].

Consideremos una cuerda de longitud L con densidad de masa por unidad de longitud μ_0 y tensión T_0 . Las oscilaciones transversales de la cuerda se describen por la ecuación de movimiento que hemos derivado en la sección 1.1.1 :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Dividiendo ambos lados por μ_0 y definiendo $v_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}$, obtenemos la ecuación de onda clásica:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

donde v_0 es la velocidad de propagación de las ondas transversales en la cuerda.

Para una cuerda con extremos fijos, las condiciones de frontera son:

$$y(t, 0) = y(t, a) = 0.$$

Las condiciones iniciales típicas incluyen la posición y la velocidad inicial de cada punto en la cuerda:

$$y(0, x) = f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = g(x),$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ describen la configuración inicial y la velocidad de la cuerda, respectivamente.

Las soluciones a la ecuación de onda para una cuerda con extremos fijos se pueden expresar como una serie de modos normales. Cada modo tiene una frecuencia específica dada por:

$$\omega_n = \frac{n\pi v_0}{L}, \quad (2.2)$$

donde n es un entero positivo. Estas frecuencias corresponden a las distintas maneras en que la cuerda puede vibrar transversalmente.

2.1. La partícula puntual relativista

Una vez descrita la dinámica de la cuerda clásica, podemos avanzar hacia otra de las herramientas clave para construir la base de la teoría de cuerdas: la partícula puntual relativista. En esta sección formularemos la teoría relativista que describe una partícula puntual libre de masa en reposo $m > 0$. Se denomina partícula libre a cualquier partícula que no está sujeta a ninguna fuerza.

La acción S_{nr} para una partícula no relativista libre está dada por la integral temporal de la energía cinética:

$$S_{nr} = \int \mathcal{L}_{nr} dt = \int \frac{1}{2} m v^2(t) dt, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad v = |\mathbf{v}|. \quad (2.3)$$

La ecuación de movimiento que se sigue del principio de Hamilton es

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0.$$

La partícula libre se mueve con velocidad constante. Sabemos que la acción S_{nr} no es correcta en el caso relativista puesto que esta acción permite que la partícula se mueva con cualquier velocidad constante, incluso una que exceda la velocidad de la luz (c ni siquiera aparece en esta acción).

Ahora construimos una acción relativista S para la partícula puntual libre. Dado que estamos interesados en la física relativista, es conveniente representar el movimiento de la partícula en el espacio-tiempo. La trayectoria trazada por la partícula en el espacio-tiempo se llama la línea de mundo de la partícula. Incluso una partícula estática traza una línea en el espacio-tiempo, ya que el tiempo siempre fluye.

Una acción físicamente consistente debe producir ecuaciones de movimiento invariantes de Lorentz. Supongamos que un observador particular nos dice que una partícula parece estar moviéndose de acuerdo con sus ecuaciones de movimiento. Entonces, deberíamos esperar que cualquier otro observador de Lorentz nos diga que la partícula está realizando un movimiento físico, pues sería inconsistente que un observador afirme que cierto movimiento está permitido y que otro afirme que el mismo movimiento está prohibido. Si las ecuaciones de movimiento se cumplen en un marco de Lorentz fijo, deben cumplirse en todos. Esto es lo que significa la invariancia de Lorentz de las ecuaciones de movimiento. Para garantizar esta invariancia, necesitamos que la acción sea un escalar de Lorentz, es decir, para cualquier línea de mundo de una partícula, todos los observadores de Lorentz deben calcular el mismo valor para la acción.

La acción correcta para la partícula puntual relativista es

$$S = -mc \int_P ds.$$

donde P hace referencia a la línea de mundo y ds se conoce como intervalo relativista.

Podemos relacionar ds con dt mediante

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Esto nos permite escribir la acción como una integral en el tiempo:

$$S = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.4)$$

donde t_i y t_f son los valores del tiempo en los puntos inicial y final de la línea de mundo P , respectivamente. De esta versión de la acción, vemos que el lagrangiano relativista para la partícula puntual es

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

El lagrangiano es igual a menos la energía en reposo por un factor relativista. Este lagrangiano no tiene sentido cuando $v > c$ ya que deja de ser real. Por lo tanto, la restricción de velocidad máxima se implementa.

La invariancia ante reparametrización es una propiedad importante de la acción de la partícula puntual (2.4). Significa que el valor de la acción es independiente de la parametrización elegida para calcularla. A pesar de ello, las líneas de mundo se describen como líneas parametrizadas, por lo que la parametrización interviene en el cálculo de la acción.

Podemos parametrizar la línea de mundo P de una partícula puntual usando un parámetro τ (como se muestra en la figura 1). Este parámetro debe ser estrictamente creciente a medida que la línea de mundo va desde el punto inicial x_i^μ hasta el punto final x_f^μ , pero es por lo demás arbitrario. A medida que τ recorre el intervalo $[\tau_i, \tau_f]$, describe el movimiento de la partícula.

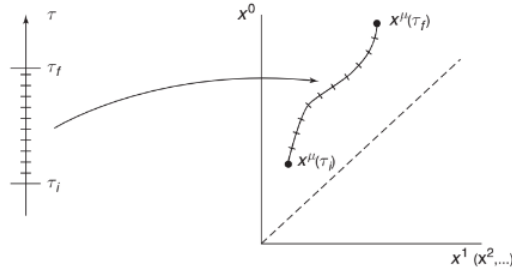


Figura 1: Línea de mundo parametrizada por τ .

Tener una parametrización de la línea de mundo significa que tenemos expresiones para las coordenadas x^μ como funciones de τ :

$$x^\mu = x^\mu(\tau).$$

Dado esto, la integral en la acción se puede escribir como

$$S = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}, \quad (2.5)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski. Esta forma de la acción muestra claramente su independencia de la parametrización y su invariancia de Lorentz.

3. La cuerda relativista

In this section, we will delve into the dynamics of the relativistic string. We will study the two actions used in string theory: the Nambu-Goto and the Polyakov actions. We will examine their symmetries, the equations of motion derived from each, and the equivalence between both of them.

Hemos visto hasta ahora el comportamiento de una cuerda clásica y de una partícula puntual relativista, conceptos que sirven ambos de preludeo a nuestro objetivo principal: el estudio de una cuerda cuántica relativista. Sin embargo, no podemos adentrarnos aún en la cuantización de una cuerda sin revisar primero las acciones que describen la dinámica de la cuerda relativista.

Estudiaremos las dos acciones con las que se trabaja comúnmente en teoría de cuerdas: la acción de Nambu-Goto y la acción de Polyakov. Para ello, seguiremos los desarrollos encontrados en las referencias [2], [6] y [7]. Naturalmente, ambas acciones son diferentes descripciones de un mismo movimiento, por lo que resultan ser equivalentes. Atenderemos a las simetrías que poseen y a la estructura de cada una de ellas, siendo conveniente escoger una u otra según el aspecto de la teoría que estemos considerando.

3.1. La acción de Nambu-Goto

El inicio de esta sección es una extensión natural del anterior apartado. En lugar de tratar con partículas puntuales, consideramos objetos unidimensionales que pueden vibrar y moverse en un espacio-tiempo relativista.

Para el caso de la partícula puntual relativista vimos que ésta traza una línea del mundo al moverse por el espacio-tiempo. En cambio, los objetos unidimensionales con los que tratamos ahora, las cuerdas, dibujan una superficie del mundo: la *hoja del mundo*. La acción para la partícula la escribimos en términos de un intervalo de longitud, por lo que para la cuerda resulta coherente expresarla en términos de superficie.

La primera acción que estudiaremos para la cuerda relativista, la acción de Nambu-Goto, es una formulación clásica de la teoría de cuerdas que toma como dicha superficie el área de la hoja del mundo barrida por la cuerda en el espacio-tiempo.

La hoja del mundo de una cuerda se describe mediante dos parámetros τ y σ , donde τ representa el tiempo propio y σ representa la coordenada a lo largo de la cuerda. Las coordenadas del espacio-tiempo se expresan como funciones de estos parámetros: $X^\mu(\tau, \sigma)$, donde μ varía de 0 a 3 en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

La métrica inducida en la hoja del mundo se define como:

$$G_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}, \quad (3.1)$$

donde ξ^α ($\alpha = 0, 1$) son las coordenadas τ y σ , y $g_{\mu\nu}$ es una métrica general del espacio-tiempo.

La acción de Nambu-Goto tiene la siguiente forma:

$$S_{NG} = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det(G_{\alpha\beta})}, \quad (3.2)$$

donde T es la tensión de la cuerda y $\det(G_{\alpha\beta})$ es el determinante de la métrica inducida.

Simetrías de la acción de Nambu-Goto

Se observan dos simetrías importantes:

1. Invariancia de Reparametrización

La acción es invariante bajo reparametrizaciones de los parámetros τ y σ . Esto significa que cualquier cambio de variables $(\tau, \sigma) \rightarrow (\tau', \sigma')$ que preserve el orden de los puntos en la hoja del mundo no cambia la forma de la acción. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\tau = \tau(\tau', \sigma'), \quad \sigma = \sigma(\tau', \sigma').$$

Esto significa que la física descrita por la acción no depende de la elección específica de estos parámetros, una propiedad similar a la invariancia de la acción de una partícula puntual relativista bajo reparametrizaciones del tiempo propio.

2. Invariancia de Poincaré

La acción también es invariante bajo transformaciones del grupo de Poincaré, que es una extensión de las transformaciones de Lorentz que incluye el grupo de traslaciones y rotaciones espaciales del espacio de Minkowski:

$$X^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu + c^\mu$$

donde Λ es una transformación de Lorentz y c^μ corresponde a una traslación constante.

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera determinan el comportamiento de la cuerda abierta en sus extremos. Estas condiciones pueden ser de Neumann (derivadas con respecto a σ que se hacen nulas) o de Dirichlet (coordenadas fijas en los extremos). Las condiciones de Dirichlet implican que los extremos de la cuerda están fijos en puntos específicos del espacio-tiempo en el que se encuentra inmersa. Este estado se interpreta como la cuerda anclada a lo que se conoce como una D-brana.

1. Condiciones de Dirichlet

Estas condiciones se describen mediante coordenadas constantes:

$$X^\mu(\tau, \sigma = 0) = X_0^\mu, \quad X^\mu(\tau, \sigma = \pi) = X_\pi^\mu. \quad (3.3)$$

2. Condiciones de Neumann

En las condiciones de Neumann, los extremos de la cuerda son libres de moverse, y la derivada espacial del campo X^μ en los extremos es cero:

$$\left. \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\pi} = 0. \quad (3.4)$$

Estas condiciones reflejan la libertad de la cuerda para moverse dentro del espacio-tiempo (Neumann) o la restricción de la misma a un subespacio fijo (Dirichlet).

Para las cuerdas cerradas, en cambio, encontramos como condición de contorno que la coordenada σ debe cumplir periodicidad: $X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau)$.

Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento para la cuerda relativista se obtienen variando la acción de Nambu-Goto con respecto a las coordenadas $X^\mu(\tau, \sigma)$. Estas ecuaciones describen cómo la cuerda se mueve y oscila en el espacio-tiempo.

Comencemos escribiendo la acción de Nambu-Goto (3.2) como la integral doble de una densidad lagrangiana \mathcal{L} :

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L}$$

dado que la acción es una integral de \mathcal{L} sobre τ y σ , variamos S con respecto a X^μ y utilizamos las derivadas de \mathcal{L} para encontrar las ecuaciones de movimiento.

La densidad lagrangiana es:

$$\mathcal{L} = -T \sqrt{-\det(G_{\alpha\beta})}$$

y la variación de S :

$$\delta S = \int d\tau d\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \delta \dot{X}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \delta X'^\mu \right)$$

Utilizando la integración por partes y asumiendo que las variaciones δX^μ se desvanecen en los límites de τ , obtenemos

$$\delta S = \int d\tau d\sigma \left[-\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \right) \right] \delta X^\mu$$

Minimizando la acción, obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \right) = 0.$$

Si definimos los momentos canónicos:

$$\mathcal{P}_\tau^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}, \quad \mathcal{P}_\sigma^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu},$$

obtenemos la ecuación:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\tau^\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\sigma^\mu}{\partial \sigma} = 0 \quad (3.5)$$

3.2. La acción de Polyakov

La acción de Polyakov está dada por:

$$S_P = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

donde $h_{\alpha\beta}$ es la métrica en la hoja de mundo, diferente de la métrica inducida $G_{\alpha\beta}$.

Simetrías de la acción de Polyakov

La acción de Polyakov comparte las simetrías que encontramos para el caso de la de Nambu-Goto: la invariancia de Poincaré y la invariancia ante reparametrización. Además, esta acción posee una nueva simetría conocida como invariancia de Weyl [6]:

La acción es invariante bajo transformaciones de Weyl (ver figura 2) de la métrica de la hoja de mundo:

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow e^{2\phi(\tau,\sigma)} h_{\alpha\beta}, \quad (3.7)$$

donde $\phi(\tau, \sigma)$ es una función arbitraria. La invariancia de Weyl refleja la libertad de escalar la métrica en la hoja de mundo sin cambiar el estado físico asociado.

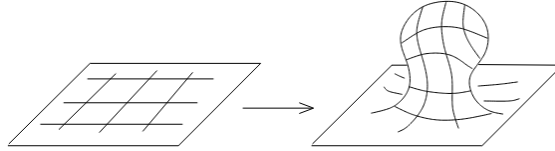


Figura 2: Un ejemplo de transformación de Weyl.

Gauge conforme

Atendiendo a la invariancia bajo transformaciones de Weyl (3.7), escogeremos una métrica localmente conforme plana:

$$h_{\alpha\beta} = e^{2\phi} \eta_{\alpha\beta}, \quad (3.8)$$

donde $\phi(\sigma, \tau)$ es alguna función en el mundo. Elegir una métrica de la forma (3.8) se conoce como un gauge conforme.

Podemos también establecer $\phi = 0$ para acabar con la métrica plana del espacio de Minkowski:

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \quad (3.9)$$

Las ecuaciones de movimiento y el tensor energía-impulso

Con la elección de la métrica plana (3.9), la acción de Polyakov se simplifica considerablemente y se convierte en la teoría de D campos escalares libres.

$$S = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \partial_\alpha X \cdot \partial_\alpha X, \quad (3.10)$$

y las ecuaciones de movimiento para X^μ se reducen a la ecuación de onda libre:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0. \quad (3.11)$$

Hemos elegido un gauge para la métrica $h_{\alpha\beta}$, pero debemos asegurarnos también de que la ecuación de movimiento para $h_{\alpha\beta}$ se satisfaga. La variación de la acción con respecto a la métrica da lugar a una cantidad especial: el tensor energía-impulso, $T_{\alpha\beta}$.

Definimos el tensor energía-impulso como

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})}} \frac{\delta S_\sigma}{\delta h^{\alpha\beta}}. \quad (3.12)$$

Si calculamos la variación de la acción de Polyakov con respecto a $h^{\alpha\beta}$ en (3.6) obtenemos:

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \cdot \partial_\delta X. \quad (3.13)$$

La ecuación de movimiento asociada a la métrica $h_{\alpha\beta}$ es simplemente $T_{\alpha\beta} = 0$, lo que resulta en las ligaduras:

$$T_{01} = \dot{X} \cdot X' = 0, \quad T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + X'^2) = 0. \quad (3.14)$$

Por lo tanto, observamos que las ecuaciones de movimiento de la cuerda son las ecuaciones de onda libre (3.11) sujetas a las dos restricciones (3.14) que surgen de la ecuación de movimiento $T_{\alpha\beta} = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu &= 0, \\ T_{01} &= \dot{X} \cdot X' = 0, \\ T_{00} = T_{11} &= \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + X'^2) = 0. \end{aligned}$$

Equivalencia entre las acciones de Nambu-Goto y de Polyakov

Una vez definido el tensor energía-impulso, podemos utilizarlo como herramienta para demostrar la equivalencia entre las dos acciones que hemos planteado para la cuerda relativista. Las ecuaciones de movimiento para el campo $h^{\alpha\beta}$ se obtienen al establecer la variación de la acción de Polyakov S_P con respecto a $h^{\alpha\beta}$ igual a cero, $\delta S_P = 0$. Siguiendo la estructura del tensor energía-impulso (3.12) tenemos:

$$\delta S_P \equiv \int \frac{\delta S_P}{\delta h^{\alpha\beta}} \delta h^{\alpha\beta} = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})} \delta h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0,$$

lo cual se cumple si y sólo si $T_{\alpha\beta} = 0$.

Si utilizamos la expresión que hemos hallado anteriormente para el tensor energía-impulso (3.13) resulta:

$$\delta S_P = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})} \delta h^{\alpha\beta} \left(\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \cdot \partial_\delta X \right) = 0,$$

lo que nos ofrece las ecuaciones de campo para $h^{\alpha\beta}$:

$$\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \cdot \partial_\delta X = 0,$$

operando, tenemos:

$$\frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \cdot \partial_\delta X = \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X = G_{\alpha\beta},$$

Por último, tomando la raíz cuadrada del negativo del determinante en ambos lados nos queda:

$$\frac{1}{2} \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \cdot \partial_\delta X = \sqrt{-\det(G_{\alpha\beta})},$$

quedando demostrado que la acción de Polyakov, S_P , es equivalente a la acción de Nambu-Goto, S_{NG} .

Expansiones de modos

Estudiemos ahora la solución a las ecuaciones de movimiento para las cuerdas cerradas que surgen de la acción de Polyakov. Para ello, primero introducimos las coordenadas del cono de luz en la hoja del mundo [6]:

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma, \quad (3.15)$$

en términos de las cuales las ecuaciones de movimiento quedan como

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0. \quad (3.16)$$

La solución más general es:

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-) \quad (3.17)$$

para funciones arbitrarias X_L^μ y X_R^μ . Estas describen ondas que se mueven hacia la izquierda y hacia la derecha respectivamente. Por supuesto, la solución aún debe obedecer tanto las restricciones (3.14) como la condición de periodicidad,

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau). \quad (3.18)$$

La solución más general para cuerdas cerradas puede ser expandida en modos de Fourier:

$$\begin{aligned} X_L^\mu(\sigma^+) &= \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} \alpha' p^\mu \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^+}, \\ X_R^\mu(\sigma^-) &= \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} \alpha' p^\mu \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^-}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde varias normalizaciones como $\alpha' = \frac{1}{2\pi T}$ y el factor $1/n$ han sido elegidos por conveniencia posterior.

X_L y X_R no satisfacen individualmente la condición de periodicidad (3.18) debido a los términos lineales en σ^\pm . Sin embargo, la suma de ellos es invariante bajo el cambio $\sigma \rightarrow \sigma + 2\pi$ como se requiere. Los coeficientes de los modos de Fourier, α_n^μ y $\tilde{\alpha}_n^\mu$, han de obedecer

$$\alpha_n^\mu = (\alpha_{-n}^\mu)^*, \quad \tilde{\alpha}_n^\mu = (\tilde{\alpha}_{-n}^\mu)^*. \quad (3.20)$$

En las coordenadas de cono de luz de la hoja del mundo σ^\pm las dos ligaduras (3.14) se convierten en:

$$(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0. \quad (3.21)$$

Estas ecuaciones imponen restricciones sobre los momentos p^μ y los modos de Fourier α_n^μ y $\tilde{\alpha}_n^\mu$, como se puede observar:

$$\partial_- X^\mu = \partial_- X_R^\mu = \frac{\alpha'}{2} p^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-},$$

donde hemos definido α_0^μ como $\alpha_0^\mu \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu$.

La ligadura (3.21) puede entonces ser escrita como

$$(\partial_- X)^2 = \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,p} \alpha_m \cdot \alpha_p e^{-i(m+p)\sigma^-} = \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,n} \alpha_m \cdot \alpha_{n-m} e^{-in\sigma^-} \equiv \alpha' \sum_n L_n e^{-in\sigma^-} = 0,$$

definiendo la suma de los modos del oscilador de la siguiente manera:

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m. \quad (3.22)$$

También podemos hacer lo mismo para los modos que se mueven hacia la izquierda, donde nuevamente definimos una suma análoga de modos de operador,

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_m \tilde{\alpha}_{n-m} \cdot \tilde{\alpha}_m, \quad \text{con } \tilde{\alpha}_0^\mu \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu. \quad (3.23)$$

Las restricciones que surgen de L_0 y \tilde{L}_0 incluyen una una cantidad importante del espacio de Minkowski: el cuadrado del momento p^μ . Tenemos una expresión para esta cantidad:

$$p^\mu p_\mu = -M^2. \quad (3.24)$$

Por lo que los modos de los operadores L_0 y \tilde{L}_0 nos dan la masa efectiva de una cuerda en términos de los modos excitados del oscilador:

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \sum_{n>0} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} = \frac{4}{\alpha'} \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_n \cdot \tilde{\alpha}_{-n}. \quad (3.25)$$

Dado que tanto α_0^μ como $\tilde{\alpha}_0^\mu$ son iguales, tenemos dos expresiones para la masa efectiva: una en términos de los osciladores que se mueven hacia la derecha, α_n^μ , y otra en términos de los osciladores que se mueven hacia la izquierda, $\tilde{\alpha}_n^\mu$. Ambos términos deben ser iguales entre sí. Esto se conoce como igualación de niveles, propiedad que jugará un papel importante en el siguiente capítulo donde nos adentramos en la teoría cuántica.

4. La cuantización de la cuerda

We begin the quantization of the string now that we have a clear understanding of the tools we have studied in the previous sections. We will develop the two frequently used methods: canonical quantization and light-cone gauge quantization. We will analyze the problems that arise in each of them and how we can solve these issues.

En esta sección, cuantizaremos la cuerda siguiendo dos procedimientos distintos: la cuantización canónica y la cuantización del gauge del cono de luz. Seguiremos los desarrollos encontrados en la referencia [7]. Encontraremos distintos inconvenientes con ambos procedimientos: para el caso de la cuantización canónica surgen estados de norma negativa que tenemos que suprimir, y con la cuantización del cono de luz evitaremos esos estados de norma negativa pero perderemos la invariancia de Lorentz. Tanto para la eliminación de dichos estados en el primer método como para recuperar la invariancia de Lorentz en el segundo, veremos que emergen los mismos dos valores de los parámetros libres de la teoría, uno de ellos siendo las dimensiones del espacio-tiempo en el que se mueve nuestra cuerda bosónica.

4.1. La cuantización canónica

En la cuantización canónica, comenzamos cambiando los corchetes de Poisson del formalismo hamiltoniano por conmutadores. Además, trataremos el campo X^μ como un operador del espacio de Hilbert correspondiente. Por tanto, los modos α , la constante x^μ y el momento total p^μ también deben convertirse a operadores. Para los modos α_m^μ , tenemos (omitiendo el factor i):

$$\begin{aligned} [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] &= [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m,-n}, \\ [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] &= 0, \end{aligned}$$

Si definimos dos nuevos operadores:

$$\hat{a}_m^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{m}}\hat{\alpha}_m^\mu, \quad \hat{a}_m^{\mu\dagger} \equiv \frac{1}{\sqrt{m}}\hat{\alpha}_{-m}^{\mu\dagger}, \quad \text{para } m > 0, \quad (4.1)$$

éstos cumplen lo siguiente:

$$[\hat{a}_m^\mu, \hat{a}_n^{\nu\dagger}] = [\hat{a}_m^\mu, \hat{a}_n^{\nu\dagger}] = \eta^{\mu\nu}\delta_{m,n} \text{ para } m, n > 0. \quad (4.2)$$

De esta manera tenemos una estructura algebraica análoga al álgebra construida a partir de los operadores de creación/anihilación de la mecánica cuántica, excepto que para $\mu = \nu = 0$ obtenemos un signo negativo debido a la naturaleza de la métrica:

$$[\hat{a}_m^0, \hat{a}_n^{0\dagger}] = \eta^{00}\delta_{m,n} = -\delta_{m,n}. \quad (4.3)$$

Atenderemos más adelante al significado de este signo negativo en los conmutadores.

Podemos proceder ahora a definir el estado fundamental, que denotamos por $|0\rangle$, como el estado que es aniquilado por todos los operadores de bajada \hat{a}_m^μ :

$$\hat{a}_m^\mu |0\rangle = 0 \text{ para } m > 0.$$

Partiendo de este estado fundamental se construyen los estados físicos actuando sobre el mismo con los operadores de subida $\hat{a}_m^{\mu\dagger}$:

$$|\phi\rangle = \hat{a}_{m_1}^{\mu_1\dagger} \hat{a}_{m_2}^{\mu_2\dagger} \cdots \hat{a}_{m_n}^{\mu_n\dagger} |0; k^\mu\rangle,$$

que también son autoestados del operador momento: $\hat{p}^\mu |\phi\rangle = k^\mu |\phi\rangle$. Cada uno de estos estados corresponde a una excitación diferente de la cuerda, y estas excitaciones se identifican en la teoría como las distintas partículas elementales existentes.

Debido al signo negativo que aparece en (4.3) nos encontramos con estados de norma negativa. Por ejemplo, considerando el estado $|\psi\rangle = \hat{a}_m^{0\dagger} |0; k^\mu\rangle$, para $m > 0$, al calcular su norma tenemos:

$$\| |\psi\rangle \|^2 = \langle 0 | \hat{a}_m^0 \hat{a}_m^{0\dagger} | 0 \rangle = \langle 0 | [\hat{a}_m^0, \hat{a}_m^{0\dagger}] | 0 \rangle = -\langle 0 | 0 \rangle.$$

Estos estados no físicos se conocen como *estados fantasma* y tenemos que deshacernos de ellos para que nuestra teoría sea consistente.

Además de convertir los modos α en operadores, debemos hacer lo mismo con los generadores L_m debido a que se construyen a partir de los mismos. Para ello, primero debemos definir el convenio de orden normal como

$$: \alpha_i \cdot \alpha_j := \begin{cases} \alpha_i \cdot \alpha_j & \text{si } i \leq j, \\ \alpha_j \cdot \alpha_i & \text{si } i > j, \end{cases}$$

lo que dice que ponemos un operador con un índice inferior a la izquierda de un operador con un índice superior, que en nuestro caso es equivalente a decir que ponemos todos los operadores de bajada a la izquierda de los operadores de subida.

Aplicando el orden normal obtenemos la siguiente expresión para \hat{L}_m :

$$\hat{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \hat{\alpha}_{m-n} \cdot \hat{\alpha}_n : . \quad (4.4)$$

Las relaciones de conmutación para los operadores \hat{L}_m en función de las obtenidas para los operadores α están dadas por el álgebra de Virasoro:

$$[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = (m - n) \hat{L}_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2 - 1) \delta_{m,-n}, \quad (4.5)$$

donde c se llama carga central. En la teoría de cuerdas bosónica, c equivale a la dimensión del espacio-tiempo donde se mueven las cuerdas.

La desaparición del tensor de energía-momento en la teoría clásica implica que $L_m = 0$ para todo m y, por tanto, $L_0 = 0$. Sin embargo, al cuantizar la teoría no podemos decir que $\hat{L}_0 |\phi\rangle = 0$ debido a que al ordenar normalmente el operador \hat{L}_0

podríamos tener alguna constante arbitraria. Para el caso de una cuerda abierta la desaparición de la restricción L_0 se transforma en

$$(\hat{L}_0 - a)|\phi\rangle = 0, \quad (4.6)$$

donde a es una constante. Esto se conoce como la condición de masa en el cascarón para la cuerda abierta. Mientras que para una cuerda cerrada se tiene

$$(\hat{L}_0 - a)|\psi\rangle = 0, \quad (\hat{\bar{L}}_0 - a)|\psi\rangle = 0, \quad (4.7)$$

donde $\hat{\bar{L}}$ es el operador correspondiente al generador clásico \bar{L} .

El orden normal también agrega términos de corrección a la fórmula de masa. Para cuerdas abiertas y cerradas se obtiene, respectivamente:

$$\alpha' M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} : \hat{\alpha}_{-n} \cdot \hat{\alpha}_n : - a = \hat{N} - a, \quad (4.8)$$

$$\frac{4}{\alpha'} M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} : \hat{\alpha}_{-n} \cdot \hat{\alpha}_n : - a = \sum_{n=1}^{\infty} : \hat{\tilde{\alpha}}_{-n} \cdot \hat{\tilde{\alpha}}_n : - a \Rightarrow \hat{N} - a = \hat{\bar{N}} - a, \quad (4.9)$$

donde hemos definido el operador número \hat{N} como

$$\hat{N} = \sum_{n=1}^{\infty} : \hat{\alpha}_{-n} \cdot \hat{\alpha}_n : = \sum_{n=1}^{\infty} n : \hat{a}_n^\dagger \cdot \hat{a}_n : .$$

\hat{N} es el operador número de derecha y $\hat{\bar{N}}$ es el operador número de izquierda.

Si restamos las dos condiciones (4.7) de la cuerda cerrada, obtenemos que:

$$(\hat{L}_0 - a - \hat{\bar{L}}_0 + a)|\phi\rangle = 0 \Rightarrow (\hat{L}_0 - \hat{\bar{L}}_0)|\phi\rangle = 0$$

$$\hat{N} = \hat{\bar{N}}. \quad (4.10)$$

Esta es la condición de igualdad de niveles de la cuerda bosónica y es la única restricción que relaciona los modos de movimiento a la izquierda y a la derecha.

El operador número nos permite construir el espectro de masas de la cuerda otorgando diferentes valores a n :

$$\begin{aligned} \alpha' M^2 &= -a \text{ (estado fundamental } n=0), \\ \alpha' M^2 &= -a + 1 \text{ (primer estado excitado } n=1), \\ \alpha' M^2 &= -a + 2 \text{ (segundo estado excitado } n=2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Estados físicos

Antes de definir los estados espurios, es importante insistir en la implicación de que un estado sea físico. Hemos visto en la acción de Polyakov que la ecuación de movimiento es $T_{\alpha\beta} = 0$. El requisito mínimo que deben satisfacer los estados físicos es que se cumpla:

$$\langle \psi | T_{\alpha\beta} | \psi' \rangle = 0.$$

Para que esto sea cierto, han de cumplirse también las siguientes condiciones para los L_n :

$$L_0|\psi\rangle = a|\psi\rangle \quad \text{y} \quad L_{n>0}|\psi\rangle = 0.$$

La primera relación es la condición de masa (4.6) y la segunda la impone el hecho de que $|\psi\rangle$ es un estado físico y por tanto debe ser aniquilado por todos los $\hat{L}_{n>0}$.

Estados espurios

Un estado, $|\psi\rangle$, se dice que es espurio si satisface la condición de masa (4.6) y es ortogonal a todos los demás estados físicos,

$$\langle \phi | \psi \rangle = 0, \quad \forall \text{ estados físicos } |\phi\rangle.$$

En general, un estado espurio puede escribirse como

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}_{-n} |\chi_n\rangle, \quad (4.11)$$

donde $|\chi_n\rangle$ es algún estado que satisface la nueva condición de masa dada por

$$(\hat{L}_0 - a + n) |\chi_n\rangle = 0. \quad (4.12)$$

Esto se obtiene de la definición de un estado espurio, ya que si $\langle \phi | \psi \rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \hat{L}_0|\psi\rangle - a|\psi\rangle = 0 &\Rightarrow \hat{L}_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}_{-n} |\chi_n\rangle \right) - a \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}_{-n} |\chi_n\rangle \right) = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left([\hat{L}_0, \hat{L}_{-n}] + \hat{L}_{-n} \hat{L}_0 \right) |\chi_n\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} a \hat{L}_{-n} |\chi_n\rangle &= 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \hat{L}_{-n} + \hat{L}_{-n} \hat{L}_0 \right) |\chi_n\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} a \hat{L}_{-n} |\chi_n\rangle &= 0 \quad (\text{de (4.5)}), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\hat{L}_{-n} n + \hat{L}_{-n} \hat{L}_0 - \hat{L}_{-n} a \right) |\chi_n\rangle = 0, &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}_{-n} (\hat{L}_0 - a + n) |\chi_n\rangle = 0, \end{aligned}$$

lo cual se cumple para todos los estados $|\chi_n\rangle$ y por tanto obtenemos:

$$(\hat{L}_0 - a + n) |\chi_n\rangle = 0.$$

Para ver que un estado espurio $|\psi\rangle$ es ortogonal a cualquier estado físico $|\phi\rangle$, consideramos:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle\phi|\hat{L}_{-n}|\chi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\langle\chi_n|\hat{L}_n|\phi\rangle\right)^* = \sum_{n=1}^{\infty} (\langle\chi_n|0|\phi\rangle)^* = 0,$$

donde hemos tenido en cuenta que $\hat{L}_{-n}^\dagger = \hat{L}_n$ y que $|\phi\rangle$ es un estado físico y por tanto debe ser aniquilado por todos los $\hat{L}_{n>0}$.

Dado que un estado espurio $|\psi\rangle$ es ortogonal a todos los estados físicos, si requerimos que $|\psi\rangle$ también sea un estado físico, entonces por definición es ortogonal a sí mismo, es decir, $|\psi\rangle$ tiene norma cero

$$\| |\psi\rangle \|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 0,$$

Por ende, hemos conseguido construir estados físicos de norma cero que son precisamente los estados que necesitamos utilizar para deshacernos de los estados fantasma en nuestra teoría de cuerdas bosónica.

Fijación de las constantes a y c

Para eliminar de nuestra teoría los estados fantasma tendremos que fijar los valores de las constantes a y c . La demostración rigurosa de ello la ofrece el *no-ghost theorem* (teorema de no fantasmas, ver referencia [8]), pero dado que su explicación requiere de herramientas avanzadas nos ceñiremos a asumir ciertas proposiciones que sugieren que podemos evitar estos fantasmas utilizando los estados espurios que hemos definido.

Para encontrar el valor correspondiente de a , comenzaremos con la expresión más simple que nos permite llegar a dicho resultado: un estado espurio físico de nivel 1. Se define de la siguiente manera:

$$|\psi\rangle = \hat{L}_{-1}|\chi_1\rangle, \quad (4.13)$$

donde $|\chi_1\rangle$ cumple las condiciones $(\hat{L}_0 - a + 1)|\chi_1\rangle = 0$ y $\hat{L}_{m>0}|\chi_1\rangle = 0$.

Como hemos asumido que $|\psi\rangle$ es un estado físico, debe satisfacer la condición de masa (4.6):

$$(\hat{L}_0 - a)|\psi\rangle = 0,$$

junto con la relación

$$\hat{L}_{m>0}|\psi\rangle = 0.$$

De esta última tenemos para \hat{L}_1 que $\hat{L}_1|\psi\rangle = 0$, lo que implica que

$$\hat{L}_1(\hat{L}_{-1}|\chi_1\rangle) = \left([\hat{L}_1, \hat{L}_{-1}] + \hat{L}_{-1}\hat{L}_1\right)|\chi_1\rangle = [\hat{L}_1, \hat{L}_{-1}]|\chi_1\rangle = 2\hat{L}_0|\chi_1\rangle = 2(a-1)|\chi_1\rangle = 0,$$

y dado que $2(a-1)|\chi_1\rangle$ debe ser cero (porque $|\psi\rangle$ es físico), tenemos que $\boxed{a=1}$. Esta restricción forma parte del límite entre los estados físicos de norma positiva y negativa (figura 3).

Por otro lado, para determinar el valor adecuado de c para los estados espurios físicos, necesitamos un estado espurio de nivel 2, cuya forma general está dada por:

$$|\psi\rangle = \left(\hat{L}_{-2} + \gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1} \right) |\chi_2\rangle, \quad (4.14)$$

donde γ es una constante, que se fijará para asegurar que $|\psi\rangle$ tenga norma cero y que $|\chi_2\rangle$ obedezca las relaciones:

$$(\hat{L}_0 - a + 2)|\chi_2\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \hat{L}_{m>0}|\chi_2\rangle = 0.$$

Si $|\psi\rangle$ tiene norma cero, entonces satisface $\hat{L}_{m>0}|\psi\rangle = 0$ y por lo tanto debe cumplir también $\hat{L}_1|\psi\rangle = 0$. Operando tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 \left(\hat{L}_{-2} + \gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1} \right) |\chi_2\rangle &= 0, \\ \left([\hat{L}_1, \hat{L}_{-2} + \gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}] + (\hat{L}_{-2} + \gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}) \hat{L}_1 \right) |\chi_2\rangle &= 0, \\ \left([\hat{L}_1, \hat{L}_{-2} + \gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}] \right) |\chi_2\rangle &= \left(3\hat{L}_{-1} + 4\gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_0 + 2\gamma \hat{L}_{-1} \right) |\chi_2\rangle = 0, \\ \left(3\hat{L}_{-1} - 4\gamma \hat{L}_{-1} + 2\gamma \hat{L}_{-1} \right) |\chi_2\rangle &= (3 - 4\gamma + 2\gamma) \hat{L}_{-1} |\chi_2\rangle = 0, \\ 3 - 2\gamma = 0 &\Rightarrow \gamma = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho de que si $a = 1$ entonces la condición $(\hat{L}_0 - a + 2)|\chi_2\rangle$ implica que $\hat{L}_0|\chi_2\rangle = -|\chi_2\rangle$.

Entonces, si el estado $|\psi\rangle$ es espurio y físico, debemos tener $\gamma = \frac{3}{2}$ y cualquier estado espurio físico general de nivel 2 tendrá la forma:

$$|\psi\rangle = \left(\hat{L}_{-2} + \frac{3}{2} \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1} \right) |\chi_2\rangle. \quad (4.15)$$

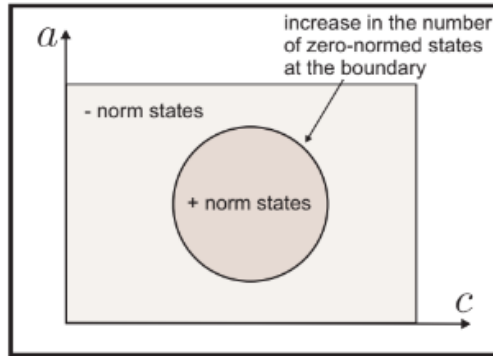


Figura 3: Representación del espacio de Hilbert de nuestra teoría.

Dado que $\hat{L}_{m>0}|\psi\rangle = 0$, tenemos que $\hat{L}_2|\psi\rangle = 0$, lo que implica:

$$\begin{aligned} \hat{L}_2 \left(\hat{L}_{-2} + \frac{3}{2} \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1} \right) |\chi_2\rangle = 0 &\Rightarrow \left([\hat{L}_2, \hat{L}_{-2} + \frac{3}{2} \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}] \right) |\chi_2\rangle = 0, \\ \left(13\hat{L}_0 + 9\hat{L}_{-1}\hat{L}_1 + \frac{c}{2} \right) |\chi_2\rangle = \left(-13 + \frac{c}{2} \right) |\chi_2\rangle = 0, \\ \boxed{c = 26}. \end{aligned}$$

Así pues, si queremos que $|\psi\rangle$ sea tanto espurio como físico, entonces debemos tener que $c = 26$, que es la otra parte del límite entre los estados físicos de norma positiva y negativa.

En definitiva, si queremos deshacernos de los estados fantasma debemos restringir los valores de a , γ y c a 1, $3/2$ y 26, respectivamente. Además, dado que la carga central c es equivalente a la dimensión del espacio-tiempo de fondo para nuestra teoría de cuerdas bosónica, entonces la teoría solo es físicamente aceptable en el caso de que exista en un espacio de 26 dimensiones. Es importante reiterar que en este apartado no hemos llevado a cabo una demostración rigurosa de la eliminación de los estados fantasma de nuestra teoría, sino que hemos asumido que podemos construir nuestro espacio de Hilbert mediante estados físicos modulados por estados espurios físicos. El razonamiento se basa en que dos estados físicos que difieren en uno de estos estados espurios físicos (de norma cero) serán equivalentes.

4.2. La cuantización del cono de luz

En la sección anterior realizamos la cuantización siguiendo un procedimiento que dejaba nuestra teoría manifiestamente invariante bajo transformaciones de Lorentz, pero encontrábamos como inconveniente que se predecían estados de norma negativa. Para resolver este problema, vimos que era necesario fijar $a = 1$ y $c = 26$ como restricciones del álgebra de Virasoro. Con el método que aplicaremos ahora ocurrirá lo contrario, evitaremos la existencia de los estados fantasma pero a costa de que nuestra teoría ya no sea manifiestamente invariante bajo transformaciones de Lorentz. Veremos que, como en el caso anterior, al ponerle solución a dicho problema volverán a aparecer las restricciones $a = 1$ y $c = 26$.

La propiedad de invarianza ante reparametrización vuelve a cobrar importancia al emplear este método de cuantización, ya que nos permite hacer ciertos cambios en las coordenadas sin cambiar la teoría. En términos de las coordenadas del cono de luz de la hoja del mundo σ^+ y σ^- , es conveniente ahora reparametrizar las mismas como:

$$\sigma^\pm \rightarrow \tilde{\sigma}^\pm = \xi^\pm(\sigma^\pm), \quad (4.16)$$

También existe la posibilidad de hacer una elección de gauge para la teoría. En concreto, si se elige un gauge no covariante particular, el gauge del cono de luz, es posible describir un espacio de Fock que esté manifiestamente libre de estados de norma negativa.

Comenzaremos definiendo las coordenadas del cono de luz para el espacio-tiempo en el que se mueve nuestra cuerda bosónica. En general, se definen las coordenadas

del cono de luz para un espacio-tiempo tomando combinaciones lineales de la coordenada temporal junto con otra coordenada transversal o espacial. En nuestro caso elegiremos como coordenada transversal la coordenada del espacio-tiempo X^{D-1} . De esta manera, las coordenadas del cono de luz para el espacio-tiempo, X^+ y X^- , se definen como

$$X^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 + X^{D-1}), \quad X^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 - X^{D-1}). \quad (4.17)$$

Por consiguiente, el conjunto de coordenadas espacio-temporales será $\{X^-, X^+, X^i\}_{i=1}^{D-2}$.

En este sistema de coordenadas del cono de luz, el producto interno de dos vectores V y W está dado por

$$V \cdot W = -V^+W^- - V^-W^+ + \sum_{i=1}^{D-2} V^iW^i. \quad (4.18)$$

Mientras que la elevación/bajada de índices se realiza como

$$V_+ = -V^-, \quad V_- = -V^+, \quad V_i = V^i. \quad (4.19)$$

Hemos de tener en cuenta que al estar tratando dos coordenadas del espacio-tiempo de manera diferente del resto, X^0 y X^{D-1} , hemos perdido la invariancia manifiesta de Lorentz y, por lo tanto, nuestra simetría de Lorentz $SO(1, D-1)$ se convierte en $SO(D-2)$.

Dado que las coordenadas τ y σ están dadas por combinaciones lineales de σ^+ y σ^- , podemos reparametrizarlas como:

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \tilde{\tau} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^+ + \tilde{\sigma}^-) = \frac{1}{2}(\xi^+(\sigma^+) + \xi^-(\sigma^-)), \\ \sigma &\rightarrow \tilde{\sigma} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^+ - \tilde{\sigma}^-) = \frac{1}{2}(\xi^+(\sigma^+) - \xi^-(\sigma^-)). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Con esta definición de $\tilde{\tau}$, podemos ver que es una solución de la ecuación de onda sin masa. Lo mismo ocurre para $X^\mu(\tau, \sigma)$, como vimos al obtener las ecuaciones de movimiento (3.16):

$$\partial_+ \partial_- \tilde{\tau} = 0, \quad \partial_+ \partial_- X^\mu(\tau, \sigma) = 0. \quad (4.21)$$

Por tanto, podemos simplificar nuestra teoría escogiendo una reparametrización de τ que satisfaga (4.21) tal que $\tilde{\tau}$ esté relacionada con una de las $X^\mu(\tau, \sigma)$. Además, al fijar $\tilde{\tau}$ también estaremos fijando $\tilde{\sigma}$.

Concretamente, el gauge del cono de luz corresponde a elegir una reparametrización de τ tal que:

$$\tilde{\tau} = \frac{X^+}{l_s p^+} + x^+, \quad (4.22)$$

donde x^+ es alguna constante arbitraria y l_s es la longitud de la cuerda $l_s = \sqrt{\alpha'}$. Despejando X^+ , tenemos la siguiente elección para esta coordenada:

$$X^+(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}) = x^+ + l_s^2 p^+ \tilde{\tau}. \quad (4.23)$$

Si analizamos la expansión en modos de $X^+(\tau, \sigma)$ para la cuerda abierta:

$$X^+(\tau, \sigma) = x^+ + l_s^2 p^+ \tau + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^+ e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \quad (4.24)$$

podemos ver que este gauge corresponde a fijar $\alpha_n^+ = 0$ para todo $n \neq 0$. Si hacemos lo mismo con la expansión en modos de X^+ para la cuerda cerrada, vemos que el gauge del cono de luz fija los modos $\alpha_n^+ = (\alpha_n^+)^\dagger = 0$ para todo $n \neq 0$.

Para estudiar lo que ocurre con los modos de oscilación de X^- en el gauge del cono de luz, utilizaremos el hecho de que se tienen que seguir cumpliendo las restricciones de Virasoro (3.14):

$$T_{01} = T_{10} = \dot{X} X' = 0, \quad T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + (X')^2) = 0,$$

que podemos escribir también como:

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0. \quad (4.25)$$

En términos de las coordenadas del cono de luz, las restricciones (4.25) se convierten en

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{2l_s^2 p^+} (\dot{X}^i \pm (X^i)'), \quad (4.26)$$

donde $i = 1, \dots, D-2$. Además, para una cuerda abierta con condiciones de frontera de Neumann tenemos la siguiente expresión:

$$X^-(\tau, \sigma) = x^- + l_s^2 p^- \tau + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (4.27)$$

Al insertar esta expresión en (4.26), obtenemos

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+ l_s} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : - a \delta_{n,0} \right), \quad (4.28)$$

y así solo el modo cero sobrevive para X^- como fue el caso para X^+ . Por lo tanto, se puede expresar la teoría de cuerdas bosónica en términos de osciladores transversales solamente y, por lo tanto, una cuerda solo tiene oscilaciones transversales, al igual que las partículas sin masa solo tienen polarizaciones transversales.

En coordenadas de cono de luz, la fórmula de masa (3.24) la podemos reescribir utilizando el producto interno (4.18) como:

$$M^2 = -p^\mu p_\mu = 2p^+ p^- - \sum_{i=1}^{D-2} p^i p^i. \quad (4.29)$$

Particularizando la expresión (4.28) para $n = 0$ tenemos:

$$\alpha_0^- \equiv p^- l_s = \frac{1}{p^+ l_s} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-m}^i \alpha_m^i : - a \right) = \frac{1}{p^+ l_s} \left(\frac{1}{2} (\alpha_0^i)^2 + N - a \right),$$

y teniendo en cuenta que $\alpha_0^i \equiv p^i l_s$, podemos operar para obtener:

$$l_s^2 p^+ p^- = \frac{1}{2} (p^i)^2 l_s^2 + (N - a) \Rightarrow 2p^+ p^- - (p^i)^2 = \frac{2}{l_s^2} (N - a) = -p^\mu p_\mu,$$

$$M^2 = \frac{2}{l_s^2} (N - a).$$

Por lo tanto, en el gauge del cono de luz, tenemos que la fórmula de masa en el cascarón para una cuerda abierta está dada por

$$M^2 = \frac{2}{l_s^2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n}^i \alpha_n^i : - a = \frac{2}{l_s^2} (N - a). \quad (4.30)$$

Recuperación de la invariancia manifiesta de Lorentz

En la cuantización canónica, tuvimos que incluir todos los osciladores en el espectro que, por las relaciones de conmutación (4.3):

$$[\alpha_m^\mu, (\alpha_n^\nu)^\dagger] = \eta^{\mu\nu} \delta_{m,n},$$

llevan a estados de norma negativa. Sin embargo, para el gauge del cono de luz todas las excitaciones son generadas por osciladores transversales (α_n^i). El conmutador de las oscilaciones transversales ya no tiene el valor negativo que proviene de la componente 00 de la métrica y, por esta razón, no tenemos estados fantasma en la cuantización del gauge del cono de luz.

El primer estado excitado, que está dado por:

$$\alpha_{-1}^i |0; k^\mu\rangle, \quad (4.31)$$

pertenece a una representación vectorial de $(D - 2)$ componentes del grupo de rotación $SO(D - 2)$ en el espacio transversal. Como regla general, la invariancia de Lorentz implica que los estados físicos forman una representación de $SO(D - 1)$ para estados masivos y $SO(D - 2)$ para estados sin masa. Por lo tanto, dado que $\alpha_{-1}^i |0; k^\mu\rangle$ pertenece a una representación de $SO(D - 2)$, debe corresponder a un estado sin masa si nuestra teoría de cuerdas bosónica ha de ser invariante bajo Lorentz. Para ver qué implica esto, consideremos el resultado de actuar sobre el primer estado excitado con el operador de masa al cuadrado:

$$M^2(\alpha_{-1}^i |0; k^\mu\rangle) = \frac{2}{l_s^2} (N - a)(\alpha_{-1}^i |0; k^\mu\rangle) = \frac{2}{l_s^2} (1 - a)(\alpha_{-1}^i |0; k^\mu\rangle). \quad (4.32)$$

para tener un valor propio de 0 para el operador de masa, y así estar en concordancia con la invariancia de Lorentz, debemos imponer que $\boxed{a = 1}$.

Ahora que tenemos un valor para a , queremos determinar la dimensión del espacio-tiempo D (antes llamada c). Para ello conviene recordar que la constante a surgió cuando impusimos el orden normal en la expresión:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{-m}^i \alpha_m^i, \quad (4.33)$$

como se puede ver en la relación (4.28) para $n = 0$. Entonces, aplicando el orden normal obtenemos:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{-m}^i \alpha_m^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-m}^i \alpha_m^i : + \frac{D-2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m, \quad (4.34)$$

ya que $[\alpha_m^i, \alpha_{-m}^i] = m\delta_{ij}$. La segunda suma en el lado derecho es divergente y usaremos la regularización de la función zeta de Riemann para abordar este problema.

Primero consideraremos la suma:

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}, \quad (4.35)$$

que está definida para cualquier $s \in \mathbb{C}$. Para $\text{Re}(s) > 1$, esta suma converge a la función zeta de Riemann $\zeta(s)$. La función zeta tiene una continuación analítica única hasta $s = -1$ (lo que correspondería a nuestra suma), para la cual toma el valor $\zeta(-1) = -1/12$.

Así, al insertar esto en (4.34) obtenemos que el segundo término se convierte en:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-m}^i \alpha_m^i : - \frac{D-2}{24}. \quad (4.36)$$

Pero comparando con (4.28) para $n = 0$ esto debe ser igual a:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-m}^i \alpha_m^i : - a, \quad (4.37)$$

y, por tanto:

$$\frac{D-2}{24} = a. \quad (4.38)$$

Dado que ya hemos encontrado que $a = 1$, para recuperar la invariancia de Lorentz obtenemos también que $\boxed{D = 26}$.

En resumen, primero cuantizamos nuestra teoría canónicamente, que poseía invariancia de Lorentz manifiesta pero también estados de norma negativa. Nos deshicimos de estos estados imponiendo las restricciones $a = 1$ y $c = D = 26$. Aquí, en la cuantización del cono de luz, comenzamos con una teoría que estaba libre de estados de norma negativa pero que ya no poseía invariancia de Lorentz manifiesta. Pudimos recuperar la invariancia de Lorentz a costa de una vez más imponer esas mismas restricciones para a y D .

Espectro de masas

Podemos llevar a cabo ahora un breve análisis del espectro de masas para cuerdas tanto abiertas como cerradas. El completo entendimiento de dicho espectro requiere de conocimientos en teoría de grupos que se escapan al nivel de la memoria.

■ Cuerdas abiertas

Para los primeros niveles de masa, los estados físicos de la cuerda abierta son los siguientes:

- Para $N = 0$ hay un taquión (masa imaginaria) $|0; k^\mu\rangle$, cuya masa está dada por $\alpha' M^2 = -1$, donde $\alpha' = l_s^2/2$.
- Para $N = 1$ hay un bosón vectorial $\alpha_{-1}^i |0; k^\mu\rangle$ que, debido a la invariancia de Lorentz, es sin masa. Este estado da una representación vectorial de $SO(24)$.
- Para $N = 2$ tenemos el primer estado con masa positiva. Los estados son $\alpha_{-2}^i |0; k^\mu\rangle$ y $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0; k^\mu\rangle$ con $\alpha' M^2 = 1$. Estos tienen 24 y $24 \times 25/2$ estados, respectivamente. Por lo tanto, el número total de estados es 324, que es la dimensionalidad de la representación del tensor de segundo rango simétrico y sin traza de $SO(25)$. Entonces, en este sentido, el espectro consiste en un único estado masivo de espín dos en el nivel de masa $N = 2$.

■ Cuerdas cerradas

Para la cuerda cerrada se debe tener en cuenta la condición de coincidencia de nivel ya que hay modos tanto de movimiento a la izquierda como a la derecha. El espectro de la cuerda cerrada se puede deducir del de la cuerda abierta ya que un estado de cuerda cerrada es un producto tensorial de un estado de movimiento a la izquierda y un estado de movimiento a la derecha, cada uno de los cuales tiene la misma estructura que los estados de cuerda abierta. La masa de los estados en el espectro de la cuerda cerrada está dada por

$$\alpha' M^2 = 4(N - 1) = 4(\tilde{N} - 1).$$

Los estados físicos de la cuerda cerrada en los dos primeros niveles de masa son:

- El estado fundamental $|0; k^\mu\rangle$ tiene masa $\alpha' M^2 = -4$ y es nuevamente un taquión.
- Para el nivel $N = 1$ hay un conjunto de $24^2 = 576$ estados de la forma

$$|\Omega^{ij}\rangle = \alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0; k^\mu\rangle,$$

correspondiente al producto tensorial de dos vectores sin masa, uno de movimiento a la izquierda y otro de movimiento a la derecha. La parte de $|\Omega^{ij}\rangle$ que es simétrica y sin traza en i y j se transforma bajo $SO(24)$ como una partícula de espín-2 sin masa, el gravitón. El término de traza $\delta^{ij} |\Omega^{ij}\rangle$ es un escalar sin masa, que se llama el dilatón y la parte antisimétrica $|\Omega^{ij}\rangle = -|\Omega^{ji}\rangle$ se transforma bajo $SO(24)$ como un tensor antisimétrico de segundo rango.

5. Más allá de nuestros objetivos

In this final section, we will explore some interesting aspects of the theory that go beyond our objectives. First, we will see how to introduce fermions and the different types of consistent string theories we can find. Moreover, we will briefly explain string interactions using path integrals.

En esta última sección, seguiremos las referencias [7], [8] y [9]. Hasta ahora todos los conceptos que hemos desarrollado a lo largo de la memoria han formado parte de la teoría de cuerdas bosónica, pero es evidente que esta teoría no puede de ninguna manera ser una Teoría del Todo debido a que no hemos introducido los fermiones. Para lograr una descripción completa de la naturaleza tenemos que recurrir a otros tipos de teorías de cuerdas que sí los incluyen, y todas ellas implementan una nueva propiedad: la supersimetría.

La supersimetría es una simetría que relaciona partículas elementales de un tipo de espín con otra partícula que difiere en media unidad de espín. Estas parejas se llaman supercompañeros. Así, para cada bosón existe su supercompañero fermión y viceversa. A mediados de los años 80 se descubrió que existen 5 teorías de cuerdas consistentes que incluyen fermiones:

- Tipo I
- Tipo II-A
- Tipo II-B
- Heterótica $SO(32)$
- Heterótica $E_8 \times E_8$

Además, en estas teorías de *supercuerdas* no aparecen los taquiones como ocurre en la teoría de cuerdas bosónica. Resulta que se puede demostrar, de manera no perturbativa, que las 5 teorías están relacionadas entre sí a través de dualidades y forman parte de la misma teoría, la teoría M. Para que estas teorías de cuerdas sean físicamente consistentes, requieren 10 dimensiones para el espacio-tiempo. Sin embargo, según nuestra concepción actual del universo sólo tiene 4 dimensiones, por lo que estamos obligados a suponer que estas 6 dimensiones adicionales son extremadamente pequeñas.

Existe una propuesta que explicaría por qué no percibimos esas dimensiones extra, y es el concepto de la compactificación. La idea que plantea es que estas dimensiones podrían estar plegadas sobre sí mismas de manera que parecería que nuestro universo sólo tuviera 3 dimensiones espaciales, pero realmente contendría otras 6 dimensiones compactificadas a pequeña escala. Debido al inmenso número de maneras posibles de plegar estas 6 dimensiones, se daría lugar a esa misma cantidad de universos con propiedades distintas.

Interacciones entre cuerdas

Otro de los tantos aspectos de la teoría de cuerdas que no hemos tratado son las interacciones entre cuerdas. Para abordar este tema, es necesario introducir una herramienta clave: la integral de camino. Haremos una breve revisión de la misma y de cómo nos permite estudiar los fenómenos de interacción, sin profundizar completamente en todo el formalismo que conlleva.

La integral de camino de Feynman es una forma de representar una teoría cuántica, y es un método muy natural para describir interacciones en la teoría de cuerdas. En la cuantización por integrales de camino, las amplitudes se obtienen sumando sobre todos los posibles caminos que se interpolan entre los estados inicial y final. Cada camino se pondera por el factor:

$$e^{(iS_{cl}/\hbar)}$$

donde S_{cl} es la acción clásica para el camino dado. Así, se definiría una amplitud en la teoría de cuerdas sumando sobre todas las hojas del mundo que conectan las curvas iniciales y finales dadas, como en la figura 4(a) para la cuerda abierta y la figura 4(b) para la cuerda cerrada.

Las amplitudes cuánticas entre configuraciones de cuerdas se obtienen de la siguiente manera:

$$\langle b | \text{evolución} | a \rangle = \sum_{\text{worldsheets}} \int [DX] e^{-S_P[X]} O_a[X] O_b[X] \quad (5.1)$$

donde $O_i[X]$ son los llamados operadores de vértice, que incluyen la información sobre el estado entrante y saliente.

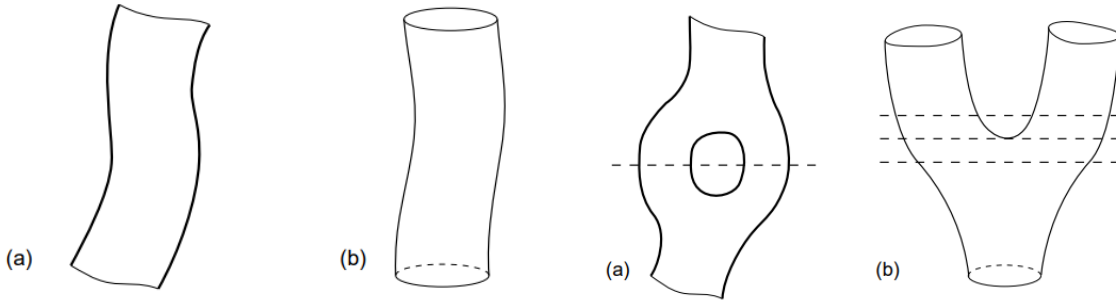


Figura 4: (a) Hoja del mundo de cuerda abierta con la topología de una tira. (b) Hoja del mundo de cuerda cerrada con la topología de un cilindro.

Figura 5: (a) Corrección cuántica a la propagación de la cuerda abierta. (b) Desintegración de una cuerda cerrada en dos.

La interacción entre cuerdas puede entenderse intuitivamente al considerar la unión y división de cuerdas. Estas interacciones están determinadas por la topología de las hojas del mundo. Podemos imaginar varias formas en que las cuerdas podrían interactuar, como por ejemplo una interacción de contacto o una fuerza de largo alcance mediada por algún campo cuántico. Sin embargo, no es posible añadir

tales interacciones a la teoría de cuerdas de una manera que sea consistente con las simetrías. Las únicas interacciones permitidas son aquellas que ya están implícitas en la suma sobre las hojas del mundo.

Consideremos las hojas del mundo mostradas en la figura 5. La figura 5(a) parece una corrección cuántica a la amplitud de cuerda abierta de la figura 4(a), que involucra estados intermedios con dos cuerdas abiertas. La figura 5(b) tiene tres cuerdas cerradas externas y representa una cuerda que se desintegra en dos. Esta resulta ser la forma correcta de introducir interacciones en la teoría de cuerdas.

Es interesante considerar el proceso de la figura 5(b) en el que una cuerda cerrada se divide en dos, o en el proceso inverso, dos se unen en una. Esta es la interacción básica de la cuerda cerrada. En la teoría de cuerdas cerradas, todas las partículas se obtienen como varios estados de excitación de la cuerda, y todas las interacciones surgen de este único proceso.

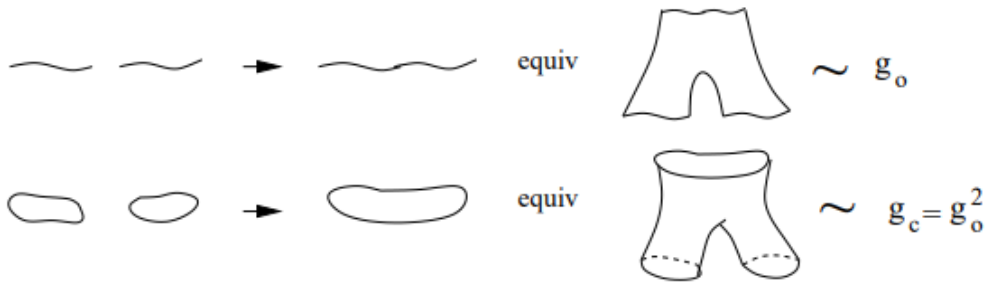


Figura 6: Interacciones básicas en teoría de cuerdas. En la parte superior encontramos la interacción entre dos cuerdas abiertas y en la inferior entre dos cuerdas cerradas.

En la teoría de cuerdas abiertas, la situación es similar, pero las hojas del mundo tienen bordes. En la figura 7 se muestra cómo dos cuerdas abiertas pueden unirse en sus extremos para formar una cuerda cerrada. Esto implica que cualquier teoría de cuerdas abiertas necesariamente contiene cuerdas cerradas, ya que las cuerdas abiertas pueden formar cuerdas cerradas mediante la unión de sus extremos.

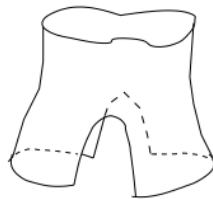


Figura 7: Vértice de cuerda que acopla cuerdas abiertas a cuerdas cerradas.

Conclusiones

A lo largo de la memoria hemos realizado un recorrido por todos los conceptos y herramientas que nos ayudan a comprender las bases de la teoría de cuerdas bosónica. Dimos comienzo planteando el principio de mínima acción y varios ejemplos que ilustran el potencial de esta técnica para estudiar la dinámica de los sistemas. Este capítulo introductorio cobraría importancia más adelante al plantear las acciones de Nambu-Goto y de Polyakov. A continuación, analizamos la dinámica de la cuerda clásica y de la partícula puntual relativista. Ambos sistemas nos ayudarían a entender posteriormente el caso de la cuerda relativista, que es el principal objeto de interés. El movimiento de esta cuerda hemos visto que puede ser estudiado partiendo de las dos acciones mencionadas, y a la hora de cuantizarla también nos encontramos con dos métodos diferentes: la cuantización canónica y la cuantización del cono de luz.

En el capítulo dedicado a dichos métodos, han surgido ciertos problemas que nos conducen a la siguiente reflexión. Cuando cuantizamos una teoría, nada nos garantiza que el desarrollo sea sencillo ni exitoso. El caso de los osciladores armónicos parece sugerir que cuantizar un sistema es un proceso trivial, en el que se discretizan los niveles de energía y se logra una correspondencia uno a uno entre resultados obtenidos con las teorías clásica y cuántica. Sin embargo, cuando intentamos cuantizar la gravedad, por ejemplo, nos encontramos con que es un verdadero desafío. Analizando la cuantización de las cuerdas, podemos sacar en claro que cuando se intenta desarrollar una teoría cuántica de sistemas complejos pueden aparecer anomalías cuya dificultad de solución dependerá de su naturaleza. Al llevar a cabo la cuantización canónica, han aparecido los estados de norma negativa, que son un claro ejemplo de que en nuestro caso no podemos encontrar esa equivalencia la teoría cuántica y la clásica.

La teoría de cuerdas, a pesar de no contar con ninguna evidencia experimental por el momento, es la principal candidata a Teoría del Todo. Es capaz de describir las partículas del Modelo Estándar, las interacciones entre ellas y las fuerzas fundamentales que gobiernan el universo a partir de un elemento a priori tan básico como es la cuerda. Esto la convierte también en una teoría con gran encanto, que intenta describir la naturaleza como una inmensa armonía compuesta por las vibraciones de las cuerdas. Además, el gravitón aparece como uno de los estados de la cuerda cerrada, por lo que el cuanto de la gravedad emerge de manera natural en la teoría.

Actualmente, la comunidad científica no puede estar segura de que algún día se demostrará su validez, pero mientras tanto sí ha encontrado grandes beneficios en los esfuerzos invertidos en su desarrollo. Se han logrado avances interesantes en el campo de las matemáticas, especialmente en topología con la teoría de nudos y las 4-variedades. En física, se han encontrado aplicaciones del principio holográfico y la correspondencia AdS/CFT en las áreas de la materia condensada y los agujeros negros [10]. Cabe destacar además que la teoría de cuerdas ha sido capaz de producir predicciones consistentes de parámetros como la constante cosmológica [11]. Por tanto, podemos concluir que independientemente de si realmente estamos ante una Teoría del Todo o no, resulta de gran importancia continuar trabajando en ella e intentar encontrar alguna evidencia que nos acerque por fin a la descripción unificada de nuestro universo.

Bibliografía

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mechanics (Course of Theoretical Physics, Volume 1)*, Butterworth-Heinemann, 1976.
- [2] Barton Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, 2004.
- [3] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, 1973.
- [4] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1995.
- [5] J.D. Bjorken, S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, 1964.
- [6] David Tong, *String Theory*, Cambridge University, 2009. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string/string.pdf>
- [7] Kevin Wray, *An Introduction to String Theory*, University of California, 2011. https://math.berkeley.edu/~kwwray/papers/string_theory.pdf
- [8] Joseph Polchinski, *String Theory (Vols 1 and 2)*, Cambridge University Press, 1998.
- [9] Ángel M. Uranga, *Introduction to String Theory*, Cambridge University, 2012. <https://members.ift.uam-csic.es/auranga/Lect.pdf>
- [10] J. Zaanen, Y. Liu, Y.-W. Sun, and K. Schalm, *Holographic Duality in Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press, 2015.
- [11] N. Avilán, J.R. Roldán, *The Cosmological Constant Problem from the Point of View of String Theory*, Universidad de Los Andes, Bogotá, 2018. <https://arxiv.org/pdf/1011.5708>

Lista de figuras

- 1. Figura 1: Barton Zwiebach, *A First Course in String Theory*. [2]
- 2. Figura 2: David Tong, *String Theory*. [6]
- 3. Figura 3: Kevin Wray, *An Introduction to String Theory*. [7]
- 4. Figura 4: Joseph Polchinski, *String Theory (Vols 1 and 2)*. [8]
- 5. Figura 5: Joseph Polchinski, *String Theory (Vols 1 and 2)*. [8]
- 6. Figura 6: Ángel M. Uranga, *Introduction to String Theory*. [9]
- 7. Figura 7: Ángel M. Uranga, *Introduction to String Theory*. [9]