Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Yanira de la Peña Guerra Guerra

Introducción a la Teoría Tauberiana

Introduction to Tauberian Theory

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, julio de 2024

DIRIGIDO POR
Lourdes Rodríguez Mesa

Lourdes Rodríguez Mesa
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mi tutora Lourdes por su paciencia, esfuerzo y confianza en mí a lo largo de todo el año, no podría haber tenido a alguien mejor.

A mi familia, en especial a mi madre, por estar apoyándome siempre y alentarme cuando más lo necesitaba.

Y por último, a todos mis amigos, en especial a Alex, sin el cual la universidad no hubiese sido lo mismo.

Yanira de la Peña Guerra Guerra
La Laguna, 8 de julio de 2024

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo se introducen y analizan algunos de los teoremas tauberianos clásicos. En una primera parte se abordan los teoremas más conocidos relativos a la sumabilidad para series numéricas, en particular, las contribuciones realizadas por Tauber, Hardy y Littlewood para la sumabilidad de Cesàro y la sumabilidad de Abel. Por otro lado, se examina el famoso teorema tauberiano de Wiener para funciones medibles, a partir del cual se deduce el de Ingham. Como aplicación de estos resultados se presenta una prueba del Teorema de los números primos. El trabajo también contiene un apéndice donde se recogen algunos temas clave para el desarrollo de la memoria como la transformación de Fourier o la función zeta de Riemann.

Palabras clave: *teorema tauberiano – sumabilidad Cesàro – sumabilidad Abel – transformación de Fourier – convolución – función zeta de Riemann*

Abstract

In this work, some of the classic Tauberian theorems are introduced and analyzed. In the first part, the most well-known theorems related to summability for numerical series are addressed, particularly the contributions made by Tauber, Hardy, and Littlewood regarding Cesàro summability and Abel summability. On the other hand, the famous Wiener Tauberian theorem for measurable functions is examined, from which Ingham's theorem is deduced. As an application of these results, a proof of the Prime Number Theorem is presented. The work also contains an appendix that includes some key items for the development of the study, such as the Fourier transform and the Riemann zeta function.

Keywords: *Tauberian theorem – Cesàro summability – Abel summability – Fourier transform – convolution – Riemann zeta function.*

Contenido

Introducción

En el campo de las matemáticas o de la física el estudio del comportamiento asintótico de una función o la convergencia de una serie tiene especial interés. Y la teoría tauberiana trata precisamente ese tipo de propiedades asintóticas.

El origen de los teoremas tauberianos se sitúa en 1897 cuando el matemático austriaco A. Tauber publicó un breve artículo sobre la convergencia de series numéricas que contenía un resultado inverso al Teorema de Abel. Este teorema afirma que si una serie infinita $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge y su suma es s, entonces la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$$

converge para $|x| < 1$ y $f(x) \to s$, cuando $x \to 1^-$. De manera general, un teorema abeliano asegura que un método de sumabilidad es coherente con la convergencia de una serie, en el sentido de que el método de sumabilidad asigna a cada serie convergente el valor de su suma. Un teorema tauberiano va en la dirección contraria, esto es, encontrar condiciones que garanticen que una serie sumable es convergente.

En el primer capítulo de esta memoria abordamos los teoremas tauberianos clásicos que se centran en la sumabilidad de Cesàro y la sumabilidad de Abel. Introducimos y analizamos las principales características de estos dos métodos de sumabilidad y probamos el Teorema de Abel.

A continuación examinamos diferentes teoremas tauberianos. Consideramos primero los resultados de este tipo relativos a las series Abel sumables, entre los que destaca el teorema original establecido por Tauber en 1897. Estudiamos después algunos teoremas tauberianos para la sumabilidad de Cesàro. En particular, probamos un resultado de Hardy que admite una condición tauberiana más general que la dada por Tauber. Sin embargo, al tratar con la sumabilidad de Cesàro, que reduce el conjunto de series sumables respecto al método de Abel, no es un resultado óptimo. El propio Hardy conjeturó que su teorema debía ser cierto para las series Abel sumables.

El Teorema de Littlewood que analizamos en la cuarta sección del capítulo resuelve la conjetura. Para su demostración consideramos las ideas, basadas en el Teorema de aproximación de Weierstrass, que siguió Karamata para simplificar la prueba original de Littlewood.

El planteamiento de Karamata también está presente en el teorema tauberiano de Hardy y Littlewood que abordamos en la última sección del capítulo 1 y que proporciona condiciones que permiten obtener la sumabilidad de Cesàro a partir de la sumabilidad de Abel.

El segundo capítulo lo dedicamos a otro de los pilares de la teoría tauberiana: el Teorema de Wiener. Este teorema cambia el escenario de las series por el de las funciones medibles esencialmente acotadas.

En la primera sección presentamos la demostración del teorema. El resultado que proporcionamos incluye además la contribución aportada por Pitt para funciones medibles esencialmente acotadas lentamente oscilantes.

Uno de los aspectos importantes del Teorema de Wiener-Pitt es que permite dar una prueba no muy compleja del Teorema de los números primos como puede verse en la última sección del capítulo 2. Previamente debemos considerar un teorema tauberiano, el de Ingham, que se obtiene haciendo uso del Teorema de Wiener-Pitt.

En los temas tratados en el segundo capítulo están implicados algunos tópicos que recogemos en el apéndice de esta memoria. Entre ellos, la convolución y la transformación de Fourier cobran especial relevancia. Añadimos asimismo sendas secciones para tratar las principales propiedades de las funciones de la clase de Schwartz y de la función zeta de Riemann que necesitamos para las pruebas de los Teoremas de Wiener-Pitt y de Ingham.

Para la elaboración de este trabajo hemos tomado como punto de partida las obras de Hardy [6] y de Korevaar [9] para el primer capítulo y el libro de Rudin [13], en particular el capítulo 9, para el segundo.

En la bibliografía mostrada al final de la memoria hemos incorporado además los artículos que mencionamos a lo largo del trabajo y que contienen los resultados originales que tratamos en nuestro estudio.

1

Teoremas tauberianos para series

Cuando en matemáticas se introduce la noción de serie numérica aparece la idea de que se trata de la suma de una cantidad infinita (numerable) de términos. El planteamiento de sumas de estas características estaban presentes ya en la antigüedad. Basta recordar la famosa *paradoja del corredor* planteada por el filósofo griego Zenón de Elea hace más de 2400 años (ver, por ejemplo, [3]). En ella, el sentido común nos dice que la suma de una cantidad infinita de números debe dar como resultado un número finito.

Aunque la noción formal de convergencia de una serie fue introducida de manera precisa a principios del siglo XIX por el matemático francés A.L. Cauchy, la idea de convergencia parecía estar bien establecida en los trabajos anteriores de grandes matemáticos como Euler, Poisson o Fourier.

El concepto es sencillo. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$. Decimos que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es *convergente* y su suma es s cuando la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, siendo $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge a s. Una serie que no es convergente se dice que es *divergente*.

Una de las series más conocidas es la serie geométrica $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n$, con $r \in \mathbb{R}$, que es convergente si y solo si $|r| < 1$. Basta observar que cuando $r = 1$ se tiene que $s_n = n$, y que, en otro caso,

$$s_n = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De esta forma, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y solo si $|r| < 1$, y en este caso la suma es

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{r}{1-r}.$$

Si la serie es divergente es porque no existe el límite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Y esto puede suceder porque $s_n \longrightarrow \infty$, $n \to \infty$, como es el caso de la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} n$ para la que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty,$$

o bien porque la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un comportamiento más caótico en el infinito, como sucede con la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}$, siendo $s_{2n-1}=1$ y $s_{2n}=0$, $n\in\mathbb{N}$.

Parecía que no se podía decir nada más sobre las series divergentes. Sin embargo, este tipo de series supuso un interesante objeto de estudio para matemáticos relevantes, lo que condujo al desarrollo de una importante teoría en matemáticas. El punto de partida fue la búsqueda de un significado adecuado para el concepto de suma de una serie divergente. Es así como surgen los diferentes *métodos de sumabilidad* para series. En este trabajo tratamos dos de los tipos de sumabilidad clásicos: el de Cesàro y el de Abel.

1.1. Sumabilidad Cesàro y sumabilidad Abel

Un método de sumabilidad pretende asignar un valor a una serie divergente. El método debe suponer una generalización del concepto de convergencia en el sentido de que la definición que se dé para la suma de una serie divergente debe ser válida también para las series convergentes y, en tal caso, que proporcione el mismo valor que el límite de la sucesión de sumas parciales. En lo que sigue para indicar que el valor de la suma de una serie es el dado por un método de sumabilidad (S) escribiremos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s \ \ (S).$$

Por otro lado, para que el método de sumabilidad sea útil se espera que permita realizar "operaciones lineales". Para ser precisos, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que, respecto a un determinado método de sumabilidad (S) y para ciertos $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ se cumple

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \alpha \ \ (S) \quad \text{y} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = \beta \ \ (S),$$

entonces se quiere que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n+b_n) = \alpha+\beta \ \ (S) \quad \text{y} \ \sum_{n\in\mathbb{N}} ca_n = c\alpha \ \ (S), \ \ c\in\mathbb{R}.$$

Definición 1.1. *(Método de sumabilidad en sentido Cesàro). Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$. Decimos que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es Cesàro sumable a $s\in\mathbb{R}$, y escribimos $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s$ (C) cuando*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\frac{s_1+\cdots+s_n}{n} = s,$$

donde $s_k = a_1+\cdots+a_k$, $k\in\mathbb{N}$.

De esta forma, una serie es sumable en el sentido de Cesàro cuando la sucesión $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de las medias aritméticas de las sumas parciales es convergente.

Veamos algunos ejemplos. Para la serie divergente $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}$ se tiene que $s_k = 1$, si k es impar, y $s_k = 0$, cuando k es par. Por tanto,

$$\sigma_n = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2n}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1/2, & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

y de este modo, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 1/2$, por lo que la serie es divergente pero Cesàro sumable y su suma de Cesàro es $1/2$.

Por otra parte, sea $r \in (-1,1)$. Sabemos que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n$ es convergente y su suma es $r(1-r)^{-1}$. Veamos que es Cesàro sumable al mismo valor. Para ello recordamos que $s_k = r(1-r^k)(1-r)^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sigma_n = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} &= \frac{r}{1-r}\,\frac{(1-r)+(1-r^2)+\cdots+(1-r^n)}{n} \\ &= \frac{r}{1-r}\,\frac{n-(r+r^2+\cdots+r^n)}{n} = \frac{r}{1-r}\left(1-\frac{s_n}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = r(1-r)^{-1}$ (nótese que $s_n \longrightarrow r(1-r)^{-1}$, $n \to \infty$) y concluimos que la serie es Cesàro sumable a $r(1-r)^{-1}$.

A la vista de este segundo ejemplo cabe preguntarse si la convergencia de una serie implica la sumabilidad en sentido Cesàro al mismo valor y de esta forma el método de sumabilidad introducido supone una generalización como ya comentamos. La respuesta es afirmativa.

Proposición 1.2. *Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s$, para cierto $s \in \mathbb{R}$. Entonces la serie es Cesàro sumable y $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s$ (C).*

Demostración. Consideramos la sucesión de las sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y la sucesión de las medias aritméticas de estas sumas parciales $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Fijamos $\varepsilon > 0$. Sabemos que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $|s_n - s| < \varepsilon/2$, $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$. Ahora escribimos

$$|\sigma_n - s| = \left|\frac{s_1 + \cdots + s_n - ns}{n}\right| \le \frac{|s_1 - s| + \cdots + |s_n - s|}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tomando $A = |s_1 - s| + \cdots + |s_{n_0} - s|$ se sigue que, para $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$,

$$|\sigma_n - s| \le \frac{A}{n} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{|s_k - s|}{n} \le \frac{A}{n} + \varepsilon\frac{n-n_0}{2n} \le \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2},$$

y así, si $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$, es tal que $A/n_1 < \varepsilon/2$ se concluye que $|\sigma_n - s| < \varepsilon$, cuando $n > n_1$. □

Es claro que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ son sumables en el sentido de Cesàro a α y β, respectivamente, entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$ (C) y $\sum_{n\in\mathbb{N}}(ca_n) = c\alpha$ (C), $c \in \mathbb{R}$. Esto, junto con la Proposición 1.2, nos dice que el método de sumabilidad en sentido Cesàro es coherente.
Presentamos a continuación una caracterización de las series Cesàro sumables.

Proposición 1.3. *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$. Consideramos la sucesión $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida mediante*

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} k a_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se tiene que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s$ (C) si, y solo si, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\tau_n}{n(n+1)}$ es convergente a s.

Demostración. Sean $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de las sumas parciales y $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de las medias aritméticas de las sumas parciales. Consideramos $s_0 = \sigma_0 = 0$. Observamos en primer lugar que

$$\begin{aligned}\tau_n &= (a_1 + \cdots + a_n) + (a_2 + \cdots + a_n) + \cdots (a_{n-1} + a_n) + a_n \\ &= s_n + (s_n - s_1) + \cdots + (s_n - s_{n-2}) + (s_n - s_{n-1}) \\ &= n s_n - (s_1 + \cdots + s_{n-1}) = n s_n - (n-1)\sigma_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Por otro lado, ya que $n\sigma_n = s_1 + \cdots + s_n$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$s_n = n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\tau_n = n(n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}) - (n-1)\sigma_{n-1} = n^2\sigma_n - (n^2-1)\sigma_{n-1},$$

y

$$u_n := \frac{\tau_n}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}\sigma_n - \frac{n-1}{n}\sigma_{n-1}.$$

De esta forma, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ es una serie telescópica y $\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{n}{n+1}\sigma_n$, $n \in \mathbb{N}$. Es claro entonces que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = s \text{ si, y solo si, } \lim_{n\to\infty} \sigma_n = s,$$

y el resultado queda así establecido. □

Introducimos ahora el método de sumabilidad de Abel que, como veremos, es más general que el método en sentido Cesàro.

Definición 1.4. *(Método de sumabilidad en sentido Abel) Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$. Decimos que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es Abel sumable a s, y escribimos $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s$ (A) si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ converge cuando $|x| < 1$ y*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = s, \quad \textit{siendo } f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n,\ |x| < 1.$$

Consideremos algunos ejemplos ilustrativos. Vimos que la serie divergente $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}$ es Cesàro sumable con suma $1/2$. Esta serie también es Abel sumable a $1/2$ pues

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}x^n=-\sum_{n\in\mathbb{N}}(-x)^n=-\frac{x}{1+x},\quad |x|<1,$$

y $\lim_{x\to1^-}f(x)=1/2$. Esta circunstancia no es exclusiva de este ejemplo. De hecho como veremos luego en la Proposición 1.6, toda serie Cesàro sumable es siempre Abel sumable.

Analicemos ahora la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}n$. Claramente no es convergente. Tampoco es sumable en sentido Cesàro. En efecto, es fácil ver que $s_{2n}=-n$ y $s_{2n-1}=n$, $n\in\mathbb{N}$. Entonces, para cada $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $s_{2n-1}+s_{2n}=0$, y, por tanto,

$$\sigma_{2n}=\frac{(s_1+s_2)+\cdots+(s_{2n-1}+s_{2n})}{2n}=0,$$

y

$$\sigma_{2n-1}=\frac{(s_1+s_2)+\cdots+(s_{2n-3}+s_{2n-2})+s_{2n-1}}{2n-1}=\frac{n}{2n-1},$$

de donde se sigue

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{2n}=0\quad\text{y}\quad\lim_{n\to\infty}\sigma_{2n-1}=\frac{1}{2}.$$

Veamos que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}n$ es Abel sumable. Teniendo en cuenta que las series $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-x)^n$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}}n(-x)^{n-1}$ son uniformemente convergentes en $[-r,r]$, para $r\in(0,1)$, podemos escribir

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}nx^n=-x\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{d}{dx}((-x)^n)=-x\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}(-x)^n\Big)\\&=x\frac{d}{dx}\Big(\frac{x}{1+x}\Big)=\frac{x}{(1+x)^2},\quad x\in(-1,1).\end{aligned}$$

Además, $\lim_{x\to1^-}f(x)=1/4$, por lo que la serie es Abel sumable a $1/4$.

Por último, como ejemplo de una serie que no es Abel sumable podemos considerar $\sum_{n\in\mathbb{N}}n$. Razonando como antes se tiene que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}nx^n=x\frac{d}{dx}\Big(\frac{x}{1-x}\Big)=\frac{x}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1),\tag{1.2}$$

y entonces $\lim_{x\to1^-}\sum_{n\in\mathbb{N}}nx^n=+\infty$.

Veamos a continuación que el método de sumabilidad en sentido Abel es coherente con la noción de convergencia de una serie. Este resultado fue establecido en 1826 por N.H. Abel [1].

Proposición 1.5 (Teorema de Abel). *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ y $s\in\mathbb{R}$. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n$ es convergente con suma s, entonces la serie es Abel sumable al valor s.*

Demostración. Sean $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$ y $s_0 = 0$. Por hipótesis $s_n \longrightarrow s$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, pongamos $|s_n| \le C_0$, $n \in \mathbb{N}$, para cierta $C_0 > 0$, y además, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s_n - s| < \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}, n > n_0. \tag{1.3}$$

Probamos primero que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ es convergente cuando $x \in (-1,1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k x^k &= \sum_{k=1}^n (s_k - s_{k-1}) x^k = \sum_{k=1}^n s_k x^k - x \sum_{k=1}^n s_{k-1} x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n s_k x^k - x \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k = s_n x^n + (1-x) \sum_{k=1}^{n-1} s_k x^k, \quad x \in (-1,1).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Ya que $|s_n x^n| \le C_0 |x|^n$, $n \in \mathbb{N}$, y $x \in (-1,1)$ se sigue que $\lim_{n\to\infty} s_n x^n = 0$. Además,

$$\Big|\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^k\Big| \le C_0 \sum_{k\in\mathbb{N}} |x|^k = C_0 \frac{|x|}{1-|x|} < \infty.$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$ en (1.4) se deduce que

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n = (1-x) \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n x^n < \infty, \quad x \in (-1,1). \tag{1.5}$$

Probamos ahora que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = s$. Sean $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que se cumple (1.3). Teniendo en cuenta que $(1-x)\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = x$, $x \in (0,1)$, podemos escribir

$$\begin{aligned}|f(x) - s| &= \Big|(1-x) \sum_{n\in\mathbb{N}} (s_n - s) x^n + s(1-x) \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n - s\Big| \\ &= \Big|(1-x) \sum_{n\in\mathbb{N}} (s_n - s) x^n - s(1-x)\Big| \\ &\le \Big|(1-x) \sum_{n=1}^{n_0} (s_n - s) x^n\Big| + \Big|(1-x) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (s_n - s) x^n\Big| + |s|(1-x) \\ &=: D_1(x) + D_2(x) + D_3(x), \quad x \in (0,1).\end{aligned}$$

Puesto que $|s_n| \le C_0$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $D_1(x) \le 2(C_0 + |s|) n_0 (1-x)$, $x \in (0,1)$. Por otro lado, de (1.3)

$$D_2(x) \le \varepsilon (1-x) \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = \varepsilon x < \varepsilon, \quad x \in (0,1).$$

Por tanto, para cierta $C > 0$, $|f(x) - s| \le C(1-x) + \varepsilon$, $x \in (0,1)$. Podemos elegir entonces $0 < \delta < 1$ suficientemente pequeño para que $|f(x) - s| < 2\varepsilon$, $x \in (1-\delta, 1)$. □

Mostramos a continuación que el método de sumabilidad en sentido Abel generaliza el método de Cesàro.

Proposición 1.6. *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *y* $s \in \mathbb{R}$. *Si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s\,(C)$ *entonces* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s\,(A)$.

Demostración. Como antes, denotamos por $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de las sumas parciales y por $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de las medias aritméticas de las sumas parciales y consideramos $s_0 = \sigma_0 = 0$.

Por hipótesis, $\sigma_n \longrightarrow s$, cuando $n \to \infty$. Luego, $|\sigma_n| \le C_0$, $n \in \mathbb{N}$, para cierta constante $C_0 > 0$. Haciendo uso de (1.1) y (1.4) obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k x^k &= s_n x^n + (1-x)\sum_{k=1}^{n-1} s_k x^k \\ &= (n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1})x^n + (1-x)\sum_{k=1}^{n-1}(k\sigma_k - (k-1)\sigma_{k-1})x^k \\ &= (n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1})x^n + (1-x)(n-1)\sigma_{n-1}x^{n-1} \\ &\quad + (1-x)^2\sum_{k=1}^{n-2} k\sigma_k x^k, \quad x \in (-1,1).\end{aligned}$$

Observamos que para cada $x \in (-1,1)$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|(n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1})x^n + (1-x)(n-1)\sigma_{n-1}x^{n-1}| \le 2C_0\big(n|x|^n + (n-1)|x|^{n-1}\big),$$

y, ya que $\lim_{m\to\infty} m|x|^m = 0$ (pues $|x| < 1$), se sigue que

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} n\sigma_n x^n, \quad x \in (-1,1).$$

Veamos que $f(x) \longrightarrow s$, cuando $x \to 1^-$. Fijamos $\varepsilon > 0$ y elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ para que $|\sigma_n - s| < \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$. Teniendo en cuenta (1.2) podemos escribir

$$\begin{aligned}|f(x) - s| &= \Big|(1-x)^2\sum_{n\in\mathbb{N}} n(\sigma_n - s)x^n + s(1-x)^2\sum_{n\in\mathbb{N}} nx^n - s\Big| \\ &= \Big|(1-x)^2\sum_{n\in\mathbb{N}} n(\sigma_n - s)x^n - s(1-x)\Big| \\ &\le \Big|(1-x)^2\sum_{n=1}^{n_0} n(\sigma_n - s)x^n\Big| + \Big|(1-x)^2\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n(\sigma_n - s)x^n\Big| + |s|(1-x) \\ &=: D_1(x) + D_2(x) + D_3(x), \quad x \in (0,1).\end{aligned}$$

Razonando como en la demostración de la Proposición 1.5 y usando de nuevo (1.2) obtenemos que, para cierta constante $C > 0$,

$$|f(x) - s| < C(1-x) + \varepsilon(1-x)^2\sum_{n\in\mathbb{N}} nx^n = C(1-x) + \varepsilon x, \quad x \in (0,1).$$

Luego, podemos tomar $0 < \delta < 1$ para que $|f(x) - s| < 2\varepsilon$, $x \in (1-\delta, 1)$. □

Observación 1.7. Nótese que el resultado en la Proposición 1.5 puede deducirse inmediatamente de las Proposiciones 1.2 y 1.6.

1.2. Teorema de Tauber

Atendiendo a los resultados en las Proposiciones 1.2 y 1.6, si $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$ se tiene el siguiente esquema:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s \Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s\,(C) \Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s\,(A).$$

Además, los ejemplos dados en la sección anterior confirman que los recíprocos no son ciertos en general. El problema natural que surge a raíz de esta circunstancia es el de encontrar condiciones que aseguren que las implicaciones inversas son ciertas. El primer resultado de este tipo fue establecido por el matemático austriaco A. Tauber [14] en 1897 y a partir de él se ha obtenido un largo número de teoremas de la misma clase a los que se denomina *teoremas tauberianos*. Asimismo, la condición que permite obtener el resultado inverso es conocida como *condición tauberiana*.
Presentamos en primer lugar el resultado que supuso el origen de la teoría tauberiana y que se conoce como *Primer teorema de Tauber*.

Teorema 1.8 (Teorema de Tauber). *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es Abel sumable con valor s. Si*

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0, \tag{1.6}$$

entonces, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es convergente y $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s$.

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$. En virtud de (1.6) podemos elegir $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|na_n| < \varepsilon$, cuando $n > n_1$. De esta forma se sigue que para cierta $C > 0$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k| = \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n_1} + \sum_{k=n_1+1}^{n}\Big)k|a_k| < \frac{C}{n} + \varepsilon\frac{n-n_1}{n} < \frac{C}{n} + \varepsilon, \quad n > n_1.$$

Podemos elegir entonces $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geq n_1$, tal que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k| < 2\varepsilon, \quad n > n_2. \tag{1.7}$$

Por otro lado, ya que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es Abel sumable a s se sigue que, para cierto $0 < \delta < 1$,

$$|f(x) - s)| = \Big|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n - s\Big| < \varepsilon, \quad x \in (1-\delta, 1),$$

y, por tanto, podemos escoger $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 \geq n_2$ de manera que

$$|f(x) - s| < \varepsilon, \quad x \in \Big(1 - \frac{1}{n_3}, 1\Big). \tag{1.8}$$

Sea $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Por (1.8) se tiene que $|f(x_n) - s| < \varepsilon$, $n > n_3$. Por otro lado, teniendo en cuenta que $|na_n| < \varepsilon$, $n > n_3$, que se verifica la estimación

$$1 - x_n^k = (1 - x_n)(1 + x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^{k-1}) \leq k(1 - x_n) = \frac{k}{n}, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

y (1.7) obtenemos que, si $n \in \mathbb{N}$, $n > n_3$, entonces

$$\begin{aligned}|s_n - f(x_n)| &= \Big|\sum_{k=1}^{n} a_k(1 - x_n^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x_n^k\Big| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_n^k}{k} \\ &\leq 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=0}^{\infty} x_n^k = 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{n(1 - x_n)} = 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Luego, $|s_n - s| \leq |s_n - f(x_n)| + |f(x_n) - s| < 4\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, $n > n_3$, y se concluye que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge a s. □

Otro de los teoremas tauberianos más simples nos dice que las series numéricas de términos no negativos que son Abel sumables son convergentes.

Teorema 1.9. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Si se cumple que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s$ (A) para cierto $s \in [0, \infty)$ entonces la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es convergente con suma s.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es divergente. Como $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, y, por tanto, la sucesión de las sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty. \tag{1.9}$$

Por hipótesis, para cada $x \in (-1, 1)$ existe $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ y además, $f(x) \longrightarrow s$, cuando $x \to 1^-$.

Vamos a ver que (1.9) implica que $f(x) \longrightarrow +\infty$, cuando $x \to 1^-$. Esta contradicción nos permite concluir que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es convergente. Y además, la suma ha de ser s puesto que toda serie convergente es Abel sumable al mismo valor (Proposición 1.5).

Fijamos $M > 0$. Queremos encontrar $\delta > 0$ suficientemente pequeño de manera que $f(x) > M$ cuando $x \in (1 - \delta, 1)$. Teniendo en cuenta (1.9) elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n > 2M$, $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$.

Consideramos $s_0 = 0$. Teniendo en cuenta que para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = s_n - s_{n-1}$, y que $s_n \geq s_{n-1}$ (pues $a_n \geq 0$), se tiene que

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (s_n - s_{n-1})x^n \geq \sum_{n=1}^{n_0} (s_n - s_{n-1})x^n = \sum_{n=1}^{n_0} s_n x^n - x\sum_{n=1}^{n_0} s_{n-1}x^{n-1} \\ &= s_{n_0}x^{n_0} + (1 - x)\sum_{n=1}^{n_0-1} s_n x^n \geq s_{n_0}x^{n_0} > 2Mx^{n_0}, \quad x \in (0, 1).\end{aligned}$$

Ya que $\lim_{x\to 1^-} 2x^{n_0} = 2$ podemos tomar $\delta \in (0, 1)$ de manera que $2x^{n_0} > 1$ cuando $x \in (1 - \delta, 1)$. Se deduce entonces que $f(x) > M$, cuando $x \in (1 - \delta, 1)$, esto es, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ lo que contradice que la serie sea Abel sumable. □

1.3. Teoremas tauberianos para series Cesàro sumables

Ya que la sumabilidad Cesàro implica la sumabilidad Abel (Proposición 1.6), la condición tauberiana $na_n \longrightarrow 0$, $n \to \infty$, que aparece en el Teorema 1.8 es suficiente para asegurar la implicación "sumabilidad Cesàro $\Longrightarrow$ convergencia". Presentamos en esta sección otras condiciones tauberianas que también son válidas para esta implicación.

Teorema 1.10. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Consideramos $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} ka_k$, $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s$ (C), para cierta $s \in \mathbb{R}$. Entonces, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es convergente a s si, y solo si,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{n} = 0.$$

Demostración. En la prueba de la Proposición 1.3 vimos que

$$\frac{\tau_n}{n} = s_n - \frac{n-1}{n}\sigma_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de las sumas parciales, $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de las medias aritméticas de las sumas parciales y $\sigma_0 = 0$. Además, por hipótesis, $\sigma_n \longrightarrow s$, $n \to \infty$, de donde se sigue que $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\sigma_{n-1} = s$. Es claro entonces que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{n} = 0,$$

si, y solo si, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, esto es, si, y solo si, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge a s. □

En 1910 el matemático G.H. Hardy [5] obtuvo un resultado inverso para la sumabilidad Cesàro en el que la condición dada por A. Tauber ($na_n \longrightarrow 0$, $n \to \infty$, esto es, $a_n = o(1/n)$) se sustituía por la condición, más general, $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada ($a_n = O(1/n)$).

Teorema 1.11. *[Teorema de Hardy, 1910] Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Si la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es Cesàro sumable con valor $s \in \mathbb{R}$, entonces la serie es también convergente y su suma es s.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s$ (C). Atendiendo al Teorema 1.10 nuestro objetivo es mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{n} = 0, \tag{1.10}$$

siendo $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} ka_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Procedemos por reducción al absurdo. Para ello asumimos que (1.10) no se verifica. Veamos que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\tau_n}{n(n+1)}$ no es convergente. De esta forma, teniendo en cuenta la Proposición 1.3, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ no es Cesàro sumable y llegamos a una contradicción.

Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de las sumas parciales de la serie a analizar, esto es,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\tau_k}{k(k+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vamos a probar que esta sucesión no es de Cauchy y, por tanto, no converge.

Consideramos $c_0 > 0$ tal que $n|a_n| \le c_0$, $n \in \mathbb{N}$. Ya que hemos supuesto que (1.10) no es cierto, podemos elegir $c \in (0, c_0)$ y una sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ estrictamente creciente, con $n_1 \ge 2$ tal que

$$\frac{\tau_{n_k}}{n_k} > c, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Sean $c_2 = 1 - c/(2c_0)$ y $c_3 \in (c_2, 1)$. Nótese que $c_2 \in (1/2, 1)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ denotamos por m_k el menor natural tal que $c_2 n_k \le m_k < c_3 n_k$. Observamos que

$$m_k = \begin{cases} c_2 n_k, & \text{si } c_2 n_k \in \mathbb{N}, \\ E[c_2 n_k] + 1, & \text{si } c_2 n_k \not\in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Aquí, $E[x]$ representa la parte entera de $x \in \mathbb{R}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$S_{n_k} - S_{m_k - 1} = \sum_{n=m_k}^{n_k} \frac{\tau_n}{n(n+1)} = \sum_{n=m_k}^{n_k} \tau_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Se entiende $S_0 = 0$. Además, si $k, n \in \mathbb{N}$ y $m_k \le n \le n_k$, se obtiene que

$$|\tau_{n_k} - \tau_n| \le c_0 (n_k - n) \le c_0 (n_k - m_k) \le c_0 n_k (1 - c_2) = \frac{c}{2} n_k.$$

Luego, teniendo en cuenta (1.11), se sigue que

$$\tau_n \ge \tau_{n_k} - |\tau_n - \tau_{n_k}| \ge c n_k - \frac{c}{2} n_k = \frac{c}{2} n_k, \quad k, n \in \mathbb{N},\ m_k \le n \le n_k,$$

y entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$S_{n_k} - S_{m_k - 1} \ge \frac{c}{2} n_k \sum_{n=m_k}^{n_k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{c}{2} n_k \left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{n_k + 1} \right) \ge \frac{c}{2} \left(\frac{1}{c_3} - 1 \right) > 0.$$

Por tanto, la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy y la prueba queda establecida. □

1.4. Teorema de Littlewood

El Teorema de Hardy (Teorema 1.11) es un teorema tauberiano que admite una condición más débil que la del Teorema de Tauber (Teorema 1.8) pero considera la sumabilidad de Cesáro que es más restrictiva que la de Abel. El propio

Hardy conjeturó que su resultado se podía obtener para las series Abel sumables y de esa forma extender el resultado de Tauber al considerar una condición más general. Fue J.E. Littlewood [10] quien en 1911 verificó la conjetura planteada por Hardy, generalizando de esta forma los resultados anteriores de Tauber y de Hardy.

Señalamos que este trabajo marcó el comienzo de la famosa colaboración entre estos dos grandes matemáticos británicos, Hardy y Littlewood, una cooperación que se prolongó durante 35 años y que ha resultado ser una de las más fructíferas en la historia de las matemáticas.

El trabajo de J.E. Litlewood sorprendió a muchos matemáticos, no por la condición tauberiana, que parecía natural a partir del Teorema de Hardy, sino por el hecho de que fuera una prueba bastante complicada. Durante mucho tiempo no fue posible encontrar razonamientos que simplificaran su demostración. Hasta que en 1930 Karamata [8] impresionó con un argumento simple e ingenioso basada en el Teorema de aproximación de Weierstrass[1]. Este teorema es la clave del siguiente resultado técnico que utilizó en la demostración.

Lema 1.12. *Sea h una función definida en $[0,1]$ que es continua salvo en cierto $r \in (0,1)$, donde presenta una discontinuidad de salto finito. Para cada $\varepsilon > 0$ existen dos polinomios p y q tales que $p(t) < h(t) < q(t)$, $t \in [0,1]$, y se verifica*

$$\int_0^1 (h(t) - p(t))dt < \varepsilon \quad y \quad \int_0^1 (q(t) - h(t))dt < \varepsilon.$$

Demostración. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que

$$h(r^-) = \lim_{t \to r^-} h(t) < \lim_{t \to r^+} h(t) = h(r^+).$$

Sea $\varepsilon > 0$ y consideramos $\delta \in (0,r)$ que será elegido con más precisión después. Definimos la función Φ mediante

$$\Phi(t) = \begin{cases} h(t) + \dfrac{\varepsilon}{2}, & t \in [0, r-\delta) \cup (r,1], \\ \max\left\{h(t) + \dfrac{\varepsilon}{2}, \ell(t)\right\}, & t \in [r-\delta, r], \end{cases}$$

donde $\ell(t)$, $t \in [r-\delta, r]$, es la función cuya gráfica es el segmento lineal que une los puntos $A = (r-\delta, h(r-\delta) + \varepsilon/2)$ y $B = (r, h(r^+) + \varepsilon/2)$.

La función Φ es continua en $[0,1]$. En efecto, es claro que es continua en $t \in [0,1] \setminus \{r-\delta, r\}$. Por otro lado, $\ell(r-\delta) = h(r-\delta) + \varepsilon/2$, por lo que

[1] **Teorema de aproximación de Weierstrass**. Si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p de modo que

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

$$\lim_{t\to(r-\delta)^+}\Phi(t) = \lim_{t\to(r-\delta)^-}\Phi(t) = h(r-\delta)+\frac{\varepsilon}{2} = \Phi(r-\delta).$$

Asimismo, como $\ell(r) = h(r^+)+\varepsilon/2$,

$$\lim_{t\to r^+}\Phi(t) = \lim_{t\to r^-}\Phi(t) = h(r^+)+\frac{\varepsilon}{2} = \Phi(r).$$

El Teorema de aproximación de Weierstrass implica entonces que existe un polinomio q de manera que

$$\max_{t\in[0,1]}|q(t)-\Phi(t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ya que, por definición, $\Phi(t)\ge h(t)+\varepsilon/2$, $t\in[0,1]$, y se satisface que $q(t) > \Phi(t)-\varepsilon/4$, $t\in[0,1]$, se sigue que $q(t) > h(t)$, $t\in[0,1]$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (q(t)-h(t))\,dt &= \int_0^1 (q(t)-\Phi(t))\,dt + \int_0^1 (\Phi(t)-h(t))\,dt \\ &\le \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}\int_{[0,r-\delta)\cup(r,1]} dt + M\int_{[r-\delta,r]} dt \le \frac{3\varepsilon}{4}+M\delta,\end{aligned}$$

siendo $M = \sup_{t\in[0,1]}|\Phi(t)-h(t)|$. Elegimos ahora δ suficientemente pequeño para que $M\delta < \varepsilon/4$ y concluimos que

$$\int_0^1 (q(t)-h(t))\,dt < \varepsilon.$$

Para encontrar el polinomio p procedemos análogamente considerando la función

$$\Psi(t) = \begin{cases} h(t)-\dfrac{\varepsilon}{2}, & t\in[0,r)\cup(r+\delta,1], \\ \min\left\{h(t)-\dfrac{\varepsilon}{2},\gamma(t)\right\}, & t\in[r,r+\delta], \end{cases}$$

siendo $\gamma(t)$, $t\in[r,r+\delta]$, la función que une los puntos $C = (r,h(r^-)-\varepsilon/2)$ y $D = (r+\delta,h(r+\delta)-\varepsilon/2)$.

Razonando como antes se puede ver que Ψ es continua en $[0,1]$ y, haciendo uso de nuevo del Teorema de aproximación de Weierstrass, encontramos un polinomio p tal que

$$\max_{t\in[0,1]}|\Psi(t)-p(t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Así, puesto que $\Psi(t)\le h(t)-\varepsilon/2$, $t\in[0,1]$, y $p(t) < \Psi(t)+\varepsilon/4$, $t\in[0,1]$, se sigue que $p(t) < h(t)$, $t\in[0,1]$. Además,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (h(t)-p(t))\,dt &= \int_0^1 (h(t)-\Psi(t))\,dt + \int_0^1 (\Psi(t)-p(t))\,dt \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\int_{[0,r)\cup(r+\delta,1]} dt + N\int_{[r,r+\delta]} dt + \frac{\varepsilon}{4} \le \frac{3\varepsilon}{4}+N\delta < \varepsilon,\end{aligned}$$

donde $N = \sup_{t\in[0,1]}|h(t)-\Psi(t)|$ y δ es suficientemente pequeño. □

Presentamos ahora el teorema tauberiano de Littlewood [10] cuya demostración considera las ideas aportadas por Karamata [8] con alguna variante añadida por Wielandt [15].

Teorema 1.13. *[Teorema de Littlewood] Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada. Si la serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *es Abel sumable con valor* $s \in \mathbb{R}$*, entonces la serie es convergente y su suma es* s*.*

Demostración. Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de las sumas parciales. Nuestro objetivo es demostrar que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Para ello vamos a expresar s_n, $n \in \mathbb{N}$, mediante

$$s_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k g(x_n^k), \tag{1.12}$$

para cierta función g definida en $[0,1]$ y cierta sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1)$. Concretamente, definimos la función g como $g(t) = \mathscr{X}_{[e^{-1},1]}(t)$, $t \in [0,1]$, y $x_n = e^{-1/n}$, $n \in \mathbb{N}$. Observamos que, para cada $n, k \in \mathbb{N}$,

$$g(x_n^k) = \begin{cases} 1, & \text{si } e^{-1} \le e^{-k/n} \le 1, \\ 0, & \text{si } e^{-k/n} < e^{-1}, \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } k \le n, \\ 0, & \text{si } k > n, \end{cases} \tag{1.13}$$

de donde se infiere (1.12). Nótese además que $x_n \longrightarrow 1^-$, cuando $n \to \infty$. Por tanto, nuestro propósito se consigue si establecemos que

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k g(x^k) = s. \tag{1.14}$$

Por hipótesis se tiene que $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k x^k < \infty$, $x \in (-1,1)$, y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = s$. Vamos a probar que si P es un polinomio verificando $P(0) = 0$, entonces

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k P(x^k) = sP(1). \tag{1.15}$$

Obsérvese que para $P(x) = x$, la propiedad (1.15) representa la hipótesis sobre f. Sea $P(x) = \sum_{m=1}^N r_m x^m$, $x \in \mathbb{R}$, con $N \in \mathbb{N}$ y $r_m \in \mathbb{R}$, $m = 1, \dots, N$. Se tiene que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k P(x^n) = \sum_{m=1}^N r_m \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k x^{nk} = \sum_{m=1}^N r_m f(x^n), \quad x \in (-1,1),$$

y entonces,

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k P(x^k) = s \sum_{m=1}^N r_m = sP(1).$$

Ahora para probar (1.14) usaremos la condición de acotación para la sucesión $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que nos permite tomar $c > 1$ de modo que $na_n \ge -c$, $n \in \mathbb{N}$. Bajo esta hipótesis demostraremos que

$$\limsup_{x\to 1^-}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k g(x^k) \le s, \quad \text{y que} \quad \liminf_{x\to 1^-}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k g(x^k) \ge s,$$

y así (1.14) quedará establecido.
Consideramos la función $h(t) = \frac{g(t)-t}{t(1-t)}$, $t \in (0,1)$, $h(0) = -1$ y $h(1) = 1$. De esta forma,

$$h(t) = \begin{cases} -(1-t)^{-1}, & t \in [0, e^{-1}), \\ t^{-1}, & t \in [e^{-1}, 1], \end{cases}$$

y $g(t) = t(1-t)h(t)+t$, $t \in [0,1]$. Nótese que h es una función continua en $[0,1]\setminus e^{-1}$ y con una discontinuidad de salto finito en $t = e^{-1}$.

Sea $\varepsilon > 0$. El Lema 1.12 asegura la existencia de dos polinomios p, q tales que $p(t) < h(t) < q(t)$, $t \in [0,1]$,

$$\int_0^1 (h(t)-p(t))dt < \varepsilon \quad \text{y} \quad \int_0^1 (q(t)-h(t))dt < \varepsilon.$$

Definimos los polinomios $u(t) = t(1-t)p(t)+t$ y $v(t) = t(1-t)q(t)+t$, $t \in \mathbb{R}$. Observamos que $u(0) = v(0) = 0$ y $u(1) = v(1) = 1$. Por tanto, de (1.15) se obtiene que

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k u(x^k) = \lim_{x\to 1^-}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k v(x^k) = s. \tag{1.16}$$

Además, $u(t) \le g(t) \le v(t)$, $t \in [0,1]$,

$$\int_0^1 \frac{g(t)-u(t)}{t(1-t)}dt = \int_0^1 (h(t)-p(t))dt < \varepsilon,$$

y

$$\int_0^1 \frac{v(t)-g(t)}{t(1-t)}dt = \int_0^1 (q(t)-h(t))dt < \varepsilon.$$

Para cada $x \in (0,1)$ podemos escribir

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k g(x^k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k v(x^k) - \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k (v(x^k)-g(x^k)).$$

Además, ya que $-a_n \le c/n$, $n \in \mathbb{N}$, que $v(t) \ge g(t)$, $t \in [0,1]$, y que para cada $x \in (0,1)$ se verifica que

$$1-x^k = (1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1}) \le k(1-x), \quad k \in \mathbb{N},$$

podemos deducir que

$$\begin{aligned} -\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k (v(x^k)-g(x^k)) &\le c\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{v(x^k)-g(x^k)}{k} \le c\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{v(x^k)-g(x^k)}{1-x^k}(1-x) \\ &= c\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{v(x^k)-g(x^k)}{x^k(1-x^k)}(x^k-x^{k+1}) \end{aligned}$$

$$= c\sum_{k\in\mathbb{N}}(q(x^k)-h(x^k))(x^k-x^{k+1}), \quad x\in(0,1).$$

Luego,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k g(x^k) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k v(x^k) + c\sum_{k\in\mathbb{N}}(q(x^k)-h(x^k))(x^k-x^{k+1}), \quad x\in(0,1),$$

de donde, haciendo uso de (1.16), se sigue que

$$\limsup_{x\to1^-}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k g(x^k) \le s + c\int_0^1 (q(t)-h(t))dt < s + c\varepsilon. \tag{1.17}$$

Nótese que si F es una función acotada Riemann integrable en $[0,1]$ entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(t)dt &= \Big(\int_0^x + \int_x^1\Big)F(t)dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big[F(x^n)x^n + \sum_{k=1}^{n-1} F(x^k)(x^k-x^{k+1})\Big] + \int_x^1 F(t)dt \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} F(x^k)(x^k-x^{k+1}) + \int_x^1 F(t)dt, \quad x\in(0,1),\end{aligned}$$

y así, tomando límite cuando $x\to1^-$ se deduce que

$$\int_0^1 F(t)dt = \lim_{x\to1^-}\sum_{k\in\mathbb{N}} F(x^k)(x^k-x^{k+1}),$$

propiedad que se ha utilizado en la estimación (1.17).

De forma análoga,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k g(x^k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(g(x^k)-u(x^k)) + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k u(x^n), \quad x\in(0,1).$$

De nuevo usando que $na_n \ge -c$, $n\in\mathbb{N}$, y procediendo como antes obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(g(x^k)-u(x^k)) &\ge -c\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{g(x^k)-u(x^k)}{k} \ge -c\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{g(x^k)-u(x^k)}{1-x^k}(1-x) \\ &= -c\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{g(x^k)-u(x^k)}{x^k(1-x^k)}(x^k-x^{k+1}) \\ &= -c\sum_{k\in\mathbb{N}}(h(x^k)-p(x^k))(x^k-x^{k+1}), \quad x\in(0,1).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k g(x^k) \ge \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k u(x^k) - c\sum_{k\in\mathbb{N}}(h(x^k)-p(x^k))(x^k-x^{k+1}), \quad x\in(0,1),$$

y haciendo uso de (1.16), se sigue que

$$\liminf_{x\to 1^-} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k g(x^k) \geq s - c\int_0^1 (h(t)-p(t))\,dt > s - c\varepsilon. \tag{1.18}$$

La arbitrariedad de ε en (1.17) y (1.18) conducen a (1.14) y la prueba termina. □

Observación 1.14. Si analizamos la prueba comprobaremos que la condición tauberiana que permite establecer el Teorema 1.13 es más general que la dada en su enunciado. Observamos que para demostrar el resultado se ha usado la propiedad $na_n \geq -c$, $n \in \mathbb{N}$, para cierta $c > 0$, estimación que se infiere de la hipótesis sobre la acotación de la sucesión $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y que es claramente menos restrictiva. □

1.5. De sumabilidad Abel a Cesàro

Como ya comentamos, a partir del trabajo de J.E. Littlewood comenzó una colaboración matemática con G.H. Hardy muy productiva y juntos obtuvieron numerosos teoremas de tipo tauberiano. El que presentamos para terminar este capítulo establece condiciones que permiten deducir la sumabilidad Cesàro a partir de la sumabilidad en sentido Abel. De nuevo, mostramos la prueba basada en las ideas de Karamata que simplificaron la demostración original.

Teorema 1.15. *Sea $(a_n)_{n\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es Abel sumable a cierto $s \in \mathbb{R}$. Supongamos que $s_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, donde $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de sumas parciales. Entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es sumable a s en sentido Cesàro.*

Demostración. De acuerdo a (1.5), $f(x) = (1-x)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^k < \infty$, $x \in (-1,1)$, y

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^k = s.$$

Veamos que para cualquier polinomio P se cumple

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^k P(x^k) = s\int_0^1 P(t)\,dt.$$

Basta demostrarlo para $P(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Si P es constante el resultado es claro. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $P(t) = t^n$. Se tiene que

$$(1-x)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^k x^{kn} = \frac{1-x}{1-x^{n+1}} f(x^{n+1}) = \frac{f(x^{n+1})}{1+x+\cdots+x^n}, \quad x \in (-1,1).$$

Luego,

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^k P(x^k) = \frac{s}{n+1} = s\int_0^1 t^n\,dt = s\int_0^1 P(t)\,dt.$$

Consideramos ahora una función h continua en $[0,1]$ salvo en $r \in (0,1)$ donde presenta una discontinuidad de salto finito. Se verifica que

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^k h(x^k) = s\int_0^1 h(t)\,dt. \tag{1.19}$$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Haciendo uso del Lema 1.12 escogemos dos polinomios p y q de manera que $p(x) < h(x) < q(x)$, $x \in [0,1]$,

$$\int_0^1 (h(x)-p(x))\,dx < \varepsilon, \quad \text{y} \quad \int_0^1 (q(x)-h(x))\,dx < \varepsilon. \tag{1.20}$$

Dado que $s_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, podemos escribir, para cada $x \in (0,1)$,

$$(1-x)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^k p(x^k) \leq (1-x)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^k h(x^k) \leq (1-x)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^k q(x^k).$$

Tomando límites cuando $x \to 1^-$, usando la propiedad que hemos visto para polinomios y (1.20) obtenemos

$$\begin{aligned} s\int_0^1 h(t)\,dt - s\varepsilon \leq s\int_0^1 p(t)\,dt &\leq \liminf_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^k h(x^k) \\ &\leq \limsup_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^k h(x^k) \leq s\int_0^1 q(t)\,dt \leq s\varepsilon + s\int_0^1 h(t)\,dt. \end{aligned}$$

La arbitrariedad de ε implica la propiedad (1.19).

Veamos ahora que $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ es Cesàro sumable a s. Para ello, definimos la función h como $h(t) = t^{-1}\mathcal{X}_{[e^{-1},1]}(t)$, $t \in (0,1]$, y $h(0) = 0$. Así h es continua en $[0,1]$ salvo en $r = e^{-1}$ donde tiene una discontinuidad de salto finito. Consideramos además la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $x_n = e^{-1/n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Como $x_n \longrightarrow 1^-$, $n \to \infty$, la propiedad (1.19) implica que

$$\lim_{n\to\infty}(1-x_n)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x_n^k h(x_n^k) = s\int_0^1 h(t)\,dt = s\int_{e^{-1}}^1 \frac{dt}{t} = s.$$

Vamos a mostrar que si $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de las medias aritméticas de las sumas parciales entonces

$$\lim_{n\to\infty}(1-x_n)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x_n^k h(x_n^k) = \lim_{n\to\infty}\sigma_n.$$

De acuerdo a (1.13) se sigue que para $k, n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n^k h(x_n^k) = 1$, si $k \leq n$, y $x_n^k h(x_n^k) = 0$, cuando $k > n$. Entonces,

$$(1-x_n)\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x_n^k h(x_n^k) = (1-e^{-1/n})\sum_{k=1}^n s_n = (1-e^{-1/n})n\sigma_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Y de aquí, teniendo en cuenta que $\lim_{z\to 0} z^{-1}(1-e^{-z}) = 1$, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty}(1-e^{-1/n})n\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\sigma_n,$$

y podemos así concluir la demostración. □

2

Teoremas tauberianos para funciones medibles

La teoría tauberiana obtuvo un importante impulso de la teoría de números, en particular, de la búsqueda de pruebas sencillas para el Teorema de los números primos. En este campo, el estudio de Hardy y Littlewood no parecía muy satisfactorio y fueron muchos los matemáticos que abordaron el problema. Entre ellos, el matemático estadounidense N. Wiener que trabajó durante algunos años en cuestiones relacionadas y culminó su estudio con la publicación en la prestigiosa revista Annals of Mathematics de un completo artículo sobre teoría tauberiana [16]. El trabajo de Wiener tuvo un gran impacto en la comunidad matemática pues permitió abrir un amplio campo de aplicaciones para los teoremas tauberianos. La implicación de la transformación de Fourier como uno de los elementos principales de su análisis tuvo especial relevancia.

2.1. Teorema de Wiener

Abordamos en esta primera sección el resultado central del capítulo, el Teorema de Wiener, un teorema de tipo tauberiano que trata con funciones medibles acotadas. En él se dan condiciones que permiten obtener un resultado inverso del siguiente (que se puede deducir fácilmente haciendo uso del Teorema de la convergencia dominada):

Sea ϕ una función en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(x) \longrightarrow 0$, $|x| \to +\infty$. Entonces, para toda función $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\lim_{|x|\to+\infty} (K * \phi)(x) = 0.$$

Como veremos, el Teorema de Wiener no proporciona el recíproco exacto de esta propiedad. Hay que considerar funciones lentamente oscilantes (Definición 2.3) para obtener el resultado inverso, observación que añadió Pitt [11] en relación al trabajo de Wiener. Para asegurar el resultado inverso se pide que la transformada de Fourier de la función K no se anule en ningún punto de $\mathbb{R}^n$, siendo ésta la condición tauberiana en este contexto. Esta propiedad caracteriza la densidad en $L^1(\mathbb{R}^n)$

de cierto subespacio invariante por traslaciones (Teorema 2.2), que será clave en la demostración del Teorema de Wiener.

Primero establecemos el siguiente resultado de interés por sí mismo y que usaremos en la demostración del Teorema 2.2. Aquí $\widehat{f}$ denota la transformada de Fourier de la función f (ver sección A.1).

Proposición 2.1. *Sean $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y E un subespacio de $L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $\phi * f = 0$, $f \in E$. Supongamos que el conjunto $Z(E)$ definido por*

$$Z(E) = \left\{u \in \mathbb{R}^n : \widehat{f}(u) = 0, f \in E\right\} \tag{2.1}$$

es vacío entonces $\phi * f = 0$, para toda función f en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Puesto que $Z(E) = \emptyset$ existe una función $f \in E$ tal que $\widehat{f}(x) \neq 0$. Como E es un subespacio podemos suponer además que $\widehat{f}(x) = 1$. Teniendo en cuenta la Proposición A.6 podemos elegir $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $r_x > 0$, de manera que $\|h\|_1 < 1$ y $\widehat{h}(u) = 1 - \widehat{f}(u)$, cuando u pertenece a la bola $B(x, r_x)$ de centro x y radio r_x. Podemos escribir así $\mathbb{R}^n = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} B(x, r_x)$.

Usando el [13, Teorema 6.20] consideramos una sucesión $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones no negativas en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ verificando las siguientes propiedades:

(i) $\operatorname{sop}(\psi_k) \subseteq B(x_k, r_k)$ para ciertos $x_k \in \mathbb{R}^n$ y $r_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$;

(ii) $\sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_k(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) Para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, existen $m \in \mathbb{N}$ y W abierto en $\mathbb{R}^n$ de modo que $K \subseteq W$ y

$$\sum_{k=1}^{m} \psi_k(x) = 1, \quad x \in W.$$

Señalamos que cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ y $r_k > 0$ verifican que para ciertas funciones $f_k \in E$ y $h_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $f_k(x_k) = 1$ y $\|h_k\|_1 < 1$, se cumple

$$\widehat{h_k}(u) = 1 - \widehat{f_k}(u), \quad u \in B(x_k, r_k).$$

Queremos probar que $\phi * f = 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Veamos primero que $\phi * F = 0$, siendo $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{F}$ tiene soporte compacto. Para tales funciones F en virtud de (i), (ii) y (iii) se tiene que para cierta $m \in \mathbb{N}$

$$\widehat{F} = \sum_{k=1}^{m} F_k,$$

donde F_k, $k = 1, \ldots, m$ son funciones en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte en $B(x_k, r_k)$. Por ello, basta probar que si $k \in \mathbb{N}$, $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\operatorname{sop}\widehat{F} \subseteq B(x_k, r_k)$ entonces $\phi * F = 0$.
Fijamos $k \in \mathbb{N}$ y $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ de manera que su transformada de Fourier tiene soporte en $B(x_k, r_k)$. Elegimos f_k y h_k como antes y definimos $g_0 = \widehat{F}$, $g_j = h_k * g_{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, y $G = \sum_{j=0}^{\infty} g_j$.

Se tiene que $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$. En efecto, ya que $|\widehat{h_k}(u)| \le \|h_k\|_1 < 1$, $u \in \mathbb{R}^n$, se sigue que

$$\|G\|_1 \le \sum_{j=0}^{\infty} \|g_j\|_1 \le \sum_{j=0}^{\infty} \|h_k\|_1 \|g_{j-1}\|_1 \le \|g_0\|_1 \sum_{j=0}^{\infty} \|h_k\|_1^j = \frac{\|g_0\|_1}{1-\|h_k\|_1} < \infty,$$

y, haciendo uso de la Proposición A.5,

$$\widehat{G}(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{g_j}(u) = \widehat{F}(u) \sum_{j=0}^{\infty} (\widehat{h}_k(u))^j = \frac{\widehat{F}(u)}{1-\widehat{h_k}(u)}, \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

De esta forma, $\widehat{F}(u) = (1-\widehat{h_k}(u))\widehat{G}(u) = \widehat{f}_k(u)\widehat{G}(u)$, $u \in B(x_k, r_k)$. Observamos que como el soporte de $\widehat{F}$ está contenido en $B(x_k, r_k)$, el soporte de G también está en $B(x_k, r_k)$, por lo que $\widehat{F}(u) = \widehat{f}_k(u)\widehat{G}(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$. Por la Proposición A.5 se deduce que $F = f_k * G$ y, entonces, las propiedades en la Proposición A.4 conducen a

$$F * \phi = (f_k * G) * \phi = G * (f_k * \phi) = G * 0 = 0.$$

Supongamos ahora que $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Sabemos, en virtud del Teorema A.11 que $\widehat{F} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y puesto que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (Proposición A.7) podemos elegir $(G_k)_{k\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $G_k \longrightarrow \widehat{F}$, $k \to \infty$, en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Usando de nuevo el Teorema A.11, consideramos $(H_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{H_k} = G_k$, $k \in \mathbb{N}$. Se tiene que $H_k \longrightarrow F$, $k \to \infty$, en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y, entonces, $H_k * \phi \longrightarrow F * \phi$, $k \to \infty$, uniformemente en $\mathbb{R}^n$. Ya que para cada $k \in \mathbb{N}$, $H_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{H_k} = G_k$ tiene soporte compacto, por el argumento visto anteriormente se sigue que $H_k * \phi = 0$ y, en consecuencia, $F * \phi = 0$.

Por último, sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Teniendo en cuenta que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$ ([4, Theorem 8.17]) dado $\varepsilon > 0$ elegimos $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ de manera que $\|f - F\|_1 < \varepsilon$. Ya que $F * \phi = 0$ se tiene entonces que $f * \phi = (f - F) * \phi$ y, por tanto,

$$\|f * \phi\|_\infty \le \|f - F\|_1 \|\phi\|_\infty < \varepsilon \|\phi\|_\infty,$$

de donde se deduce, dada la arbitrariedad de ε, que $f * \phi = 0$. □

Como comentamos, el siguiente teorema juega un papel fundamental en la prueba del Teorema de Wiener.

Teorema 2.2. *Sean $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y E el menor subespacio cerrado de $L^1(\mathbb{R}^n)$ invariante por traslaciones que contiene a K. Entonces $E = L^1(\mathbb{R}^n)$ si y solo si $\widehat{K}(u) \neq 0$, $u \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. En primer lugar observamos que si $f \in E$ entonces f se puede escribir como límite (en $L^1(\mathbb{R}^n)$) de una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es una combinación lineal finita de traslaciones de K, esto es,

$$f_n(x) = \sum_{m\in J_n} a_{m,n} \tau_{x_{m,n}} K,$$

para ciertos $a_{m,n} \in \mathbb{R}$ y $x_{m,n} \in \mathbb{R}^n$ y siendo $J_n \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito.

Teniendo en cuenta las propiedades de la transformación de Fourier (Proposiciones A.2 y A.3) se sigue que

$$\widehat{f}(u) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m\in J_n} a_{m,n} e^{-i\langle u, x_{m,n}\rangle} \widehat{K}(u), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Por tanto, si denotamos por $Z(E)$ el conjunto dado por (2.1) se tiene que $Z(E) = \{u \in \mathbb{R}^n : \widehat{K}(u) = 0\}$. De esta forma, nuestro objetivo es probar que

$$E = L^1(\mathbb{R}^n) \text{ si y solo si } Z(E) = \emptyset. \tag{2.2}$$

Supongamos que $E = L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, en particular, $\psi(x) = e^{-|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, pertenece a E. De acuerdo a (A.5), $\widehat{\psi}(u) \neq 0$, $u \in \mathbb{R}^n$, lo que implica que $Z(E) = \emptyset$.

Asumamos ahora que $Z(E) = \emptyset$ y que $E \subsetneq L^1(\mathbb{R}^n)$. Elegimos $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \setminus E$. Ya que E es cerrado tenemos que $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \setminus \overline{E}$ y haciendo uso del Teorema de Hahn-Banach[1] podemos encontrar un funcional T en $(L^1(\mathbb{R}^n))'$ de manera que $T(f_0) = 1$ y $T(f) = 0$, $f \in E$. Teniendo en cuenta que el dual de $L^1(\mathbb{R}^n)$ es isomorfo a $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ([4, Theorem 6.15]) se sigue que existe $\phi_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$T(g) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_0(x) g(x)\, dx, \quad g \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Luego, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_0(x) f_0(x)\, dx = 1$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_0(x) f(x)\, dx = 0, \quad f \in E. \tag{2.3}$$

Dado que E es invariante por traslaciones se sigue que $\check{\phi}_0 * f = 0$, $f \in E$. Aquí, $\check{\phi}_0(z) = \phi_0(-z)$, $z \in \mathbb{R}^n$. De la Proposición 2.1, puesto que $Z(E) = \emptyset$, se deduce entonces que $\check{\phi}_0 * f = 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De esta forma $T = 0$ lo que conduce a que $\phi_0(x) = 0$ en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Pero esto contradice el hecho de que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_0(x) f_0(x)\, dx = 1$, por lo que queda establecido que si $Z(E) = \emptyset$ se ha de cumplir que $E = L^1(\mathbb{R}^n)$. □

Introducimos a continuación la noción de función lentamente oscilante.

Definición 2.3. *Se dice que una función $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es lentamente oscilante cuando para cada $\varepsilon > 0$ existen $R > 0$ y $\delta > 0$ de manera que*

$$|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon \quad x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| < \delta, \text{mín}\{|x|, |y|\} > R. \tag{2.4}$$

Observamos que si una función $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es uniformemente continua en $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > R\}$, para algún $R > 0$, entonces es lentamente oscilante. Por otra parte,

[1] **Teorema de Hahn-Banach**. Sean X un espacio normado y M un subespacio de X. Supongamos que $x_0 \in X$. Entonces, $x_0 \in \overline{M}$ si y solo si, todo funcional $T \in X'$ tal que $T(x) = 0$, $x \in M$, verifica $T(x_0) = 0$.

una función lentamente oscilante no tiene por qué ser continua. Consideramos por ejemplo la siguiente función f definida en $\mathbb{R}$ mediante

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x} \mathscr{X}_{[k,k+1)}(x), \quad x \in [1,\infty) \quad \text{y} \quad \phi(x) = 0, \quad (-\infty, 1).$$

Fijamos $0 < \delta < 1/2$ y $R > 1$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x-y| < \delta$ y $|x| \geq |y| > R$. Es claro que si $x, y < 0$ entonces $\phi(x) = \phi(y) = 0$. Por otro lado si para algún $k_0 \in \mathbb{N}$, $x, y \in [k_0, k_0+1)$, entonces

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{1}{xy} < \frac{1}{R^2}.$$

En otro caso, podemos asegurar que para cierto $k_0 \in \mathbb{N}$ se tiene $y \in [k_0, k_0+1)$ y $x \in [k_0+1, k_0+2)$. Entonces,

$$|\phi(x) - \phi(y)| = \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right| = \frac{x+y}{xy} \leq \frac{2}{y} < \frac{2}{R},$$

y dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir R suficientemente grande para que $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon$, $|x|, |y| > R$, $|x-y| < \delta$.

Estamos ya en condiciones de establecer el Teorema de Wiener-Pitt.

Teorema 2.4 (Teorema de Wiener-Pitt). *Sean $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $\widehat{K}(u) \neq 0$, $u \in \mathbb{R}^n$, y*

$$\lim_{|x|\to\infty} (K * \phi)(x) = a\widehat{K}(0),$$

para cierto $a \in \mathbb{R}$. Entonces, para cada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se verifica

$$\lim_{|x|\to\infty} (f * \phi)(x) = a\widehat{f}(0).$$

Si ϕ es además lentamente oscilante se tiene que

$$\lim_{|x|\to\infty} \phi(x) = a.$$

Demostración. Consideramos el subespacio E definido por

$$E = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty} (f * \phi)(x) = a\widehat{f}(0) \right\}.$$

Nuestro objetivo es establecer que $E = L^1(\mathbb{R}^n)$. Observamos que si $\psi = \phi - a$, teniendo en cuenta que $f * \psi = f * \phi - a\widehat{f}(0)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, podemos escribir

$$E = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty} (f * \psi)(x) = 0 \right\}.$$

Claramente E es un subespacio de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Veamos que es cerrado. Para ello consideramos $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E y $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $\|f_k - f\|_1 \longrightarrow 0$, $k \to \infty$. Sea $\varepsilon > 0$ y elegimos $k_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $\|f_{k_0} - f\|_1 < \varepsilon$. Tenemos que

$$\begin{aligned} |(f*\psi)(x)| &\le |(f-f_{k_0})*\psi)(x)| + |(f_{k_0}*\psi)(x)| \\ &\le \|f-f_{k_0}\|_1\|\psi\|_\infty + |(f_{k_0}*\psi)(x)| < \varepsilon\|\psi\|_\infty + |(f_{k_0}*\psi)(x)|, \quad x\in\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ya que $f_{k_0} \in E$, podemos encontrar $R > 0$ de modo que $|f_{k_0} * \psi(x)| < \varepsilon$, $|x| > R$. De esta forma, $|(f*\psi)(x)| < \varepsilon(\|\psi\|_\infty + 1)$ y se concluye que $f \in E$.

Por otro lado, E es invariante por traslaciones. En efecto, sean $f \in E$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se tiene que

$$((\tau_{x_0}f)*\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-x_0)\psi(y)dy = (f*\psi)(x-x_0), \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Por tanto, dado que $f \in E$ se infiere que $((\tau_{x_0}f)*\psi)(x) \longrightarrow 0$, $|x| \to \infty$, y se obtiene que $\tau_{x_0}f \in E$.

Observamos asimismo que, por hipótesis, $K \in E$. Luego, en virtud del Teorema 2.2 concluimos que $E = L^1(\mathbb{R}^n)$.

Asumimos ahora que ϕ es lentamente oscilante. Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existen $R > 0$ y $\delta > 0$ para los que se verifica (2.4). Consideramos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $f \ge 0$, $f(x) = 0$, $|x| \ge \delta$ y $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$. De acuerdo a lo demostrado anteriormente se tiene que

$$\lim_{|x|\to\infty} (f*\phi)(x) = a\widehat{f}(0) = a.$$

Entonces, podemos elegir $R_0 > R + \delta$ de manera que

$$|(f*\phi)(x) - a| < \varepsilon, \quad |x| > R_0.$$

Como $\int_{|y|<\delta} f(y)dy = 1$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| > R_0$ podemos escribir

$$\begin{aligned} |\phi(x)-a| &\le |\phi(x) - (f*\phi)(x)| + |(f*\phi)(x)-a| \\ &= \left|\int_{|y|<\delta} f(y)(\phi(x)-\phi(x-y))dy\right| + |(f*\phi)(x)-a| \\ &< \int_{|y|<\delta} |f(y)||\phi(x)-\phi(x-y)|dy + \varepsilon. \end{aligned}$$

Observamos que si $|x| > R_0$ e $|y| < \delta$, entonces $|x-y| > R_0 - \delta > R$. Haciendo uso entonces de (2.4) se concluye que

$$|\phi(x)-a)| < \varepsilon(\|f\|_1 + 1), \quad |x| > R_0,$$

esto es, $\lim_{|x|\to\infty}\phi(x) = a$. □

2.2. Teorema de Ingham

Para la demostración del Teorema de los números primos necesitamos el siguiente teorema de tipo tauberiano que fue establecido por A.E. Ingham [7] y que puede probarse a partir del Teorema de Wiener-Pitt que hemos analizado.

Teorema 2.5 (Teorema de Ingham). *Supongamos que g es una función real definida en $(0,\infty)$ no decreciente tal que $g(x)=0$, $x\in(0,1)$. Asumimos además que*

$$G(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} g\left(\frac{x}{k}\right) = ax\ln x + bx + x\delta(x), \quad x\in(0,\infty),$$

para ciertas $a,b\in\mathbb{R}$ y siendo $\lim_{x\to+\infty}\delta(x)=0$. Entonces,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = a.$$

Demostración. Consideramos la función $\phi(x)=e^{-x}g(e^x)$, $x\in\mathbb{R}$. Nuestro objetivo se alcanzará cuando probemos que

$$\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=a. \tag{2.5}$$

Sea $\varepsilon>0$. Elegimos $f_1,f_2\geq 0$ de manera que $\operatorname{sop} f_1\subset(-\varepsilon,0)$, $\operatorname{sop} f_2\subset(0,\varepsilon)$ y $\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)dx=1$, $j=1,2$. Veamos que

$$e^{-\varepsilon}(f_2*\phi)(x)\leq\phi(x)\leq e^{\varepsilon}(f_1*\phi)(x), \quad x\in\mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Sea $x\in\mathbb{R}$. Observamos primero que si $-\varepsilon\leq y\leq 0\leq z\leq\varepsilon$, teniendo en cuenta que g es no decreciente, se sigue que

$$\phi(x-z)=\frac{g(e^{x-z})}{e^{x-z}}\leq\frac{g(e^x)}{e^{x-\varepsilon}}=e^{\varepsilon}\phi(x),$$

y

$$\phi(x)=\frac{g(e^x)}{e^x}\leq e^{\varepsilon}\frac{g(e^{x-y})}{e^{x+\varepsilon}}\leq e^{\varepsilon}\frac{g(e^{x-y})}{e^{x-y}}=e^{\varepsilon}\phi(x-y).$$

De esta forma

$$(f_1*\phi)(x)=\int_{-\varepsilon}^{0}f_1(y)\phi(x-y)dy\geq e^{-\varepsilon}\phi(x)\int_{-\varepsilon}^{0}f_1(y)dy=e^{-\varepsilon}\phi(x),$$

y

$$(f_2*\phi)(x)=\int_{0}^{\varepsilon}f_2(z)\phi(x-z)dz\leq e^{\varepsilon}\phi(x)\int_{0}^{\varepsilon}f_2(z)dz=e^{\varepsilon}\phi(x),$$

y (2.6) queda probado.

Nuestro siguiente objetivo es establecer que

$$\lim_{x\to+\infty}(f_j*\phi)(x)=a, \quad j=1,2. \tag{2.7}$$

De esta forma, de (2.6) se deduce que

$$ae^{-\varepsilon}\le \liminf_{x\to+\infty}\phi(x)\le \limsup_{x\to+\infty}\phi(x)\le ae^{\varepsilon}, \quad \varepsilon>0,$$

y ya que ε es arbitrario se concluye la propiedad (2.5).

Para establecer (2.7) haremos uso del Teorema tauberiano de Wiener-Pitt (Teorema 2.4). Afirmamos, en primer lugar, que $\phi\in L^\infty(\mathbb{R})$. En efecto, sea $h(s)=s^{-1}g(s)$, $s\in(0,\infty)$. Nótese que $\phi(x)=h(e^x)$, $x\in\mathbb{R}$, por lo que basta ver que h es una función acotada en $(0,\infty)$.

De acuerdo a las hipótesis sobre g se tiene que $h(s)=0$, $s\in(0,1)$. Supongamos entonces que $s\ge 1$ y consideramos $r_s\in\mathbb{N}$ tal que $s\in[2^{r_s-1},2^{r_s})$. Observamos que si $k\ge r_s+1$ entonces $2^{r_s-k}<1$ y, por tanto, $g(2^{-k}s)=0$, $k\ge r_s+1$. Luego,

$$g(s)=\sum_{k=0}^{r_s}\Big(g\big(\frac{s}{2^k}\big)-g\big(\frac{s}{2^{k+1}}\big)\Big).$$

Por otro lado, puesto que $\delta(x)\longrightarrow 0$, $x\to+\infty$, podemos elegir $r_0\in\mathbb{N}$ de modo que $|\delta(x)|<1$, $x>2^{r_0}$. Teniendo en cuenta que g es una función no decreciente se sigue que

$$\begin{aligned} g(z)-g\big(\frac{z}{2}\big) &\le \sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^{k+1}g\big(\frac{z}{k}\big)=\sum_{k\in\mathbb{N}}g\big(\frac{z}{k}\big)-\sum_{k\in\mathbb{N}}(1+(-1)^k)g\big(\frac{z}{2k}\big)\\ &=\sum_{k\in\mathbb{N}}g\big(\frac{z}{k}\big)-2\sum_{k\in\mathbb{N}}g\big(\frac{z}{2k}\big)=G(z)-2G\big(\frac{z}{2}\big)\\ &=z(a\ln 2+\delta(z)-\delta\big(\frac{z}{2}\big))\le z(a\ln 2+2), \quad z>2^{r_0+1}. \end{aligned}$$

Cuando $z\in[1,2^{r_0+1}]$ se tiene que

$$g(z)-g\big(\frac{z}{2}\big)\le g(z)\le g(2^{r_0+1})=C\le Cz.$$

Luego, hemos encontrado $A>0$ de manera que $g(z)-g(\frac{z}{2})\le Az$, $z\in[1,\infty)$ y entonces

$$g(s)\le A\sum_{k=0}^{r_s}\frac{s}{2^k}\le 2As,$$

esto es, $h(s)\le 2A$, $s\ge 1$. Queda así establecido que h es una función acotada en $(0,\infty)$ y, por tanto, que $\phi\in L^\infty(\mathbb{R})$.

Buscamos ahora una función $K\in L^1(\mathbb{R})$ que satisfaga las condiciones dadas en el Teorema 2.4. Para ello fijamos $\alpha\in(0,\infty)\setminus\mathbb{Q}$ y consideramos la función $r(x)=e^{-x}E[e^x]$, $x\in\mathbb{R}$, donde $E[z]$, $z\in\mathbb{R}$, representa la función parte entera. Definimos la función K mediante

$$K(x) = 2r(x) - r(x-1) - r(x-\alpha), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Notamos en primer lugar que $K(x) = 0$, $x < 0$. Luego, para demostrar que $K \in L^1(\mathbb{R})$ será suficiente si vemos que $e^x K(x)$, $x \in \mathbb{R}$, es una función acotada en $[0,\infty)$. Tenemos que

$$e^x K(x) = 2E[e^x] - eE[e^{x-1}] - e^\alpha E[e^{x-\alpha}], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ya que para todo $a \in \mathbb{R}$ se verifica

$$e^x = e^a e^{x-a} \leq e^a E[e^{x-a}] < e^a\big(e^{x-a}+1\big) = e^x + e^a, \quad x \in \mathbb{R},$$

se sigue que $-(e+e^\alpha) \leq e^x K(x) \leq 2$, esto es, $|e^x K(x)| \leq e + e^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$. Así,

$$\|K\|_1 \leq (e+e^\alpha)\int_0^\infty e^{-x}dx < \infty.$$

Veamos a continuación que $\widehat{K}(u) \neq 0$, $u \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\widehat{K}(u) = \begin{cases} (2-e^{-iu}-e^{-i\alpha u})\dfrac{\widetilde{\zeta}(1+iu)}{1+iu}, & u \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ 1+\alpha, & u = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Aquí $\widetilde{\zeta}(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$, denota la función zeta de Riemman. La definición de $\widetilde{\zeta}$ y sus características básicas pueden encontrarse en la sección A.4 del apéndice. Entre sus propiedades se tiene que $\widetilde{\zeta}(1+iu) \neq 0$, $u \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (Proposición A.14). De esta forma, y ya que α es un número irracional, se sigue que $\widehat{K}(u) \neq 0$, $u \in \mathbb{R}$.

Demostramos entonces (2.8). Sean $u \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $z = \sigma + iu$, con $\sigma > 0$. Haciendo un cambio de variable y teniendo en cuenta la propiedad *(b)* en la Proposición A.13 podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}} r(x)e^{-zx}dx = \int_0^\infty E[e^x]e^{-x(z+1)}dx = \int_1^\infty E[s]s^{-z-2}ds = \frac{\widetilde{\zeta}(1+z)}{1+z}.$$

Luego, en virtud del Teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned}
\widehat{K}(u) &= \lim_{\sigma\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} K(x)e^{-(\sigma+iu)x}dx \\
&= \lim_{\sigma\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} (2r(x)-r(x-1)-r(x-\alpha))e^{-(\sigma+iu)x}dx \\
&= \lim_{\sigma\to 0^+}\big(2-e^{-(\sigma+iu)}-e^{-\alpha(\sigma+iu)}\big)\frac{\widetilde{\zeta}(1+\sigma+iu)}{1+\sigma+iu} \\
&= (2-e^{-iu}-e^{-i\alpha u})\frac{\widetilde{\zeta}(1+iu)}{1+iu}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, de nuevo por el Teorema de convergencia dominada y sabiendo que el residuo $\operatorname{Res}(\widetilde{\zeta};1) = 1$ (ver sección A.4) obtenemos que

$$\begin{aligned}\widehat{K}(0) &= \lim_{u\to 0}\int_{\mathbb{R}} K(x)e^{-iux}dx = \lim_{u\to 0}(2-e^{-iu}-e^{-i\alpha u})\frac{\widetilde{\zeta}(1+iu)}{1+iu}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{2-e^{-iu}-e^{-i\alpha u}}{iu}\frac{iu\widetilde{\zeta}(1+iu)}{1+iu} = \lim_{u\to 0}\frac{2-e^{-iu}-e^{-i\alpha u}}{iu}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1-e^{-iu}}{iu}+\alpha\lim_{u\to 0}\frac{1-e^{-i\alpha u}}{i\alpha u} = 1+\alpha,\end{aligned}$$

y así queda establecido (2.8).

La siguiente propiedad que debemos probar es que

$$\lim_{x\to+\infty}(K*\phi)(x) = a\widehat{K}(0) = a(1+\alpha). \tag{2.9}$$

Observamos que

$$(K*\phi)(x) = e^{-x}\int_{\mathbb{R}}\big(2E[e^{x-y}]-eE[e^{x-1-y}]-e^{\alpha}E[e^{x-\alpha-y}]\big)g(e^y)dy,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Denotamos por $v(x) = E[e^x]$ y $h(x) = g(e^x)$, $x\in\mathbb{R}$. Nótese que $v(x) = h(x) = 0$, $x<0$, y que

$$(K*\phi)(x) = e^{-x}\big(2(v*h)(x)-e(v*h)(x-1)+e^{\alpha}(v*h)(x-\alpha),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Probamos ahora que

$$(v*h)(x) = \int_0^x H(y)dy,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{2.10}$$

siendo

$$H(y) = G(e^y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} g(e^{y-\ln k}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} h(y-\ln k),\quad y\in\mathbb{R}.$$

Dado que $v(x) = h(x) = 0$, $x<0$, se sigue que $(v*h)(x) = 0$, $x<0$, y también que $H(x) = 0$, $x<0$, por lo que (2.10) es obvio cuando $x<0$.

Sea $x\geq 0$. Observamos que v puede expresarse mediante

$$v(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{X}_{[0,\infty)}(z-\ln k),\quad z\in\mathbb{R}.$$

Nótese también que para cada $z\in\mathbb{R}$ se trata de una suma con un número finito de términos no nulos. Haciendo un sencillo cambio de variable obtenemos

$$\begin{aligned}(v*h)(x) &= \int_{\mathbb{R}} v(x-z)h(z)dz = \int_{\mathbb{R}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{X}_{[0,\infty)}(x-y)h(y-\ln k)dy\\ &= \int_0^x\sum_{k\in\mathbb{N}} h(y-\ln k)dy = \int_0^x H(y)dy,\end{aligned}$$

y (2.10) queda probado. Usando la hipótesis sobre la función G se tiene que

$$\int_0^x H(y)dy = \int_0^x G(e^y)dy = \int_1^{e^x}(a\ln t+b+\delta(t))dt$$

$$= at(\ln t - 1)\Big]_{t=1}^{e^x} + b(e^x - 1) + \int_1^{e^x} \delta(t)\,dt$$
$$= a(e^x(x-1)+1) + b(e^x - 1) + \int_1^{e^x} \delta(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

y así,

$$e^{-x}(v * h)(x) = a(x-1) + b + e^{-x}\Big(a - b + \int_1^{e^x} \delta(t)\,dt\Big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Denotando por δ_1 a la función definida por

$$\delta_1(x) = e^{-x}\Big(a - b + \int_1^{e^x} \delta(t)\,dt\Big), \quad x \in \mathbb{R},$$

podemos escribir

$$(K * \phi)(x) = a(1+\alpha) + 2\delta_1(x) - \delta_1(x-1) - \delta_1(x-\alpha).$$

En virtud del Teorema de convergencia dominada se obtiene que

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} \int_1^{e^x} \delta(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \delta(e^x s)\,ds = 0,$$

de donde se deduce que

$$\lim_{x\to+\infty} (K * \phi)(x) = a(1+\alpha) = a\widehat{K}(0).$$

□

2.3. El Teorema de los números primos

Terminamos el capítulo con una de las aplicaciones distinguidas de la teoría tauberiana. Concretamente, haremos uso del Teorema tauberiano de Ingham para dar una demostración del célebre Teorema de los números primos.
Denotamos por $\mathbb{P}$ el conjunto de los números primos y consideramos la función $\pi : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, que para cada número positivo cuenta el número de primos menor o igual que él, esto es, $\pi(x) = \mathrm{card}\{p \in \mathbb{P} : p \le x\}$, $x \in (0,\infty)$.

Teorema 2.6 (Teorema de los números primos). *Se verifica*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1,$$

esto es, $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$*, cuando* $x \to +\infty$.

Para su demostración introducimos la función $\Lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Lambda(n) = \ln p$, si $n = p^k$, siendo $p \in \mathbb{P}$ y $k \in \mathbb{N}$, y $\Lambda(n) = 0$, en otro caso. Consideramos además las funciones ψ y F definidas en $(0,\infty)$ mediante

$$\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) \quad \text{y} \quad F(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \psi\big(\frac{x}{m}\big), \quad x \in (0,\infty).$$

Observamos que ψ, y por tanto F, se anula en el intervalo $(0,2)$. Recogemos a continuación algunas propiedades de ψ y F que son fundamentales para la demostración del Teorema 2.6.

Proposición 2.7. *(a) Existe una función b definida en (e,∞) y acotada tal que*

$$F(x) = x\ln x - x + b(x)\ln x, \quad x \in (e,\infty).$$

(b) Se verifica

$$\frac{\psi(x)}{x} \le \frac{\pi(x)\ln x}{x} \le \frac{1}{\ln x} + \frac{\psi(x)\ln x}{x\ln(x/\ln^2 x)}, \quad x \in (e,\infty).$$

(c) Se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Demostración. (a) Ya comentamos que $F(1) = 0$. Vamos a mostrar que

$$F(n) - F(n-1) = \ln n, \quad n \in \mathbb{N},\ n \ge 2. \tag{2.11}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Podemos escribir

$$F(n) - F(n-1) = \sum_{m=1}^{E[n/2]} \Big(\psi\big(\frac{n}{m}\big) - \psi\big(\frac{n-1}{m}\big)\Big).$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, se tiene que

$$\psi\big(\frac{n}{m}\big) - \psi\big(\frac{n-1}{m}\big) = \sum_{k\in\mathbb{N},\, k\le E[\frac{n}{m}]} \Lambda(k) - \sum_{k\in\mathbb{N},\, k\le E[\frac{n-1}{m}]} \Lambda(k) = \begin{cases} \Lambda\Big(\dfrac{n}{m}\Big), & \text{si } \dfrac{n}{m} \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{si } \dfrac{n}{m} \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

La última igualdad se obtiene a partir del hecho de que, para $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, se tiene que $E[\frac{n}{m}] = E[\frac{n-1}{m}] + 1$, si $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$, y $E[\frac{n}{m}] = E[\frac{n-1}{m}]$, cuando $\frac{n}{m} \notin \mathbb{N}$. De esta forma,

$$F(n) - F(n-1) = \sum_{m|n} \Lambda\Big(\frac{n}{m}\Big) = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Como es usual, $m|n$, con $n, m \in \mathbb{N}$, denota que m es divisor de n. Si escribimos n en términos de su descomposición (única) en factores primos, esto es, $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$, siendo p_j un número primo de multiplicidad $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, r$, entonces se sigue que

$$F(n) - F(n-1) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \Lambda(p_i^j) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \ln p_i = \sum_{i=1}^{r} k_i \ln p_i = \ln n,$$

y (2.11) queda establecido.

Se infiere que $F(n) = \ln n!$, $n \in \mathbb{N}$. Nótese que $F(1) = 0$ y que, en virtud de (2.11),

$$F(n) = \sum_{k=2}^{n} F(k) - F(k-1) = \sum_{k=2}^{n} \ln k = \ln n!, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\int_{n-1}^{n} \ln t\, dt \leq \ln n \leq \int_{n}^{n+1} \ln t\, dt$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se obtiene que

$$\int_1^n \ln t\, dt \leq F(n) \leq \int_1^{n+1} \ln t\, dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

y si $n \in \mathbb{N}$ y $n \leq x \leq n+1$, podemos escribir

$$\int_1^n \ln t\, dt \leq F(n) \leq F(x) \leq F(n+1) \leq \int_1^{n+2} \ln t\, dt.$$

Luego, puesto que $J(z) = \int_1^z \ln t\, dt = z \ln z - z + 1$, $z \in [1, \infty)$, y que

$$\int_1^n \ln t\, dt = J(x) - \int_n^x \ln t\, dt \quad \text{y} \quad \int_1^{n+2} \ln t\, dt = J(x) + \int_x^{n+2} \ln t\, dt$$

se deduce que, para todo $x \in [1, \infty)$,

$$-\ln x \leq -\int_n^x \ln t\, dt \leq F(x) - J(x) \leq \int_x^{n+2} \ln t\, dt \leq \int_x^{x+2} \ln t\, dt \leq 2 \ln(x+2).$$

De aquí se sigue que

$$|F(x) - x \ln x + x| \leq 1 + 2 \ln(x+2), \quad x \in [1, \infty).$$

Tomando $b(x) = \frac{F(x) - x \ln x + x}{\ln x}$, $x \in (e, \infty)$, es claro que $F(x) = x \ln x - x + b(x) \ln x$, $x \in (e, \infty)$. Además,

$$|b(x)| \leq B(x) = \frac{1 + 2 \ln(2+x)}{\ln x}, \quad x \in (e, \infty),$$

siendo B una función acotada en (e, ∞) (nótese que $\lim\limits_{x \to +\infty} B(x) = 2$). Queda así probado (a).

Nos ocupamos ahora de (b). Sea $x \in (e, \infty)$. Denotamos por

$$\mathbb{P}_x = \left\{ n \in \mathbb{N} : n \leq x \text{ y } n = p^k, \text{ para ciertos } p \in \mathbb{P} \text{ y } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si $p \in \mathbb{P}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $p^k \le x$ si, y solo si, $1 \le k \le E[\frac{\ln x}{\ln p}]$. Entonces,

$$\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{P}_x} \Lambda(n) = \sum_{p \in \mathbb{P},\, p \le x} E\Big[\frac{\ln x}{\ln p}\Big] \ln p \le \sum_{p \in \mathbb{P},\, p \le x} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p = \pi(x) \ln x,$$

y la primera desigualdad en (b) queda establecida.
Por otro lado, si $1 < y < x$ se tiene que

$$\pi(x) - \pi(y) = \sum_{p \in \mathbb{P},\, y < p \le x} 1 \le \sum_{p \in \mathbb{P},\, y < p \le x} \frac{\ln p}{\ln y} \le \frac{\psi(x)}{\ln y}.$$

Luego,

$$\pi(x) \le \pi(y) + \frac{\psi(x)}{\ln y} \le y + \frac{\psi(x)}{\ln y}, \quad 1 < y < x.$$

Tomando $y = \frac{x}{\ln^2 x}$ se obtiene que $1 < y < x$. En efecto, basta tener en cuenta que $\ln z < \sqrt{z}$, $z > 1$, y $z < z \ln^2 z$, cuando $z > e$. Se concluye que

$$\frac{\pi(x) \ln x}{x} \le \frac{1}{\ln x} + \frac{\psi(x) \ln x}{x \ln(x/\ln^2 x)}.$$

Para la prueba de (c) usaremos el Teorema tauberiano de Ingham (Teorema 2.5). Consideramos $g(x) = \psi(x)$, $x \in (0, \infty)$. Es claro que g es una función real no decreciente y $g(x) = 0$, $x \in (0,1)$. Además, de acuerdo con (a)

$$G(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}} g\Big(\frac{x}{k}\Big) = F(x) = x \ln x - x + x\delta(x), \quad x \in (e, \infty),$$

siendo $\delta(x) = \frac{b(x) \ln x}{x}$, $x \in (e, \infty)$. Puesto que b es una función acotada y $\frac{\ln x}{x} \longrightarrow 0$, $x \to +\infty$, se cumple que $\delta(x) \longrightarrow 0$, cuando $x \to +\infty$.

El Teorema 2.5 nos dice entonces que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

como queríamos probar. □

A

Apéndice

Para el desarrollo del capítulo 2 ha sido necesario considerar algunos conceptos y propiedades previos que no figuran en los contenidos de las asignaturas del grado cursadas y que hemos tenido que estudiar para abordar de manera adecuada los resultados de la memoria. Hemos considerado conveniente añadirlos en este apéndice por completitud y también para que la memoria refleje el trabajo que se ha realizado.

Evidentemente estos tópicos que tratamos admiten un estudio más profundo que el que aquí presentamos, pero nuestro objetivo es recoger las definiciones y propiedades que necesitamos para los enunciados y pruebas de los Teoremas de Wiener-Pitt y de Ingham que trabajamos en el capítulo anterior.

A.1. Transformación de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$

Sea f una función en el espacio de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^n)$. Se define su transformada de Fourier, a la que denotamos por $\widehat{f}$, mediante

$$\widehat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle u,x\rangle}dx, \quad u \in \mathbb{R}^n. \tag{A.1}$$

Es claro, puesto que $|e^{-i\langle u,x\rangle}| = 1$, $x, u \in \mathbb{R}^n$, que $\widehat{f}$ está bien definida en $\mathbb{R}^n$. Es más, es una función acotada pues, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $|\widehat{f}(u)| \leq \|f\|_1 < \infty$, $u \in \mathbb{R}^n$.

Se puede definir entonces la transformación de Fourier $\mathfrak{F}$ como el operador lineal que a cada función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ le hace corresponder su transformada de Fourier, esto es, $\mathfrak{F}(f) = \widehat{f}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. En la memoria usaremos indistintamente las dos notaciones $\mathfrak{F}(f)$ ó $\widehat{f}$ para representar la transformada de Fourier de la función f.

Veamos que el operador $\mathfrak{F}$ es una aplicación de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en el espacio $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, constituido por las funciones f de clase C^∞ en $\mathbb{R}^n$ que se anulan en el infinito, esto es, tales que $\lim_{|u|\to\infty} f(u) = 0$.

Teorema A.1. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se tiene que $\widehat{f}$ es una función uniformemente continua y acotada en $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\lim_{|u|\to\infty} \widehat{f}(u) = 0. \tag{A.2}$$

El resultado en (A.2) es el conocido como *Lema de Riemann-Lebesgue.*

Demostración. Ya comentamos que $\widehat{f}$ es acotada, de hecho,

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(u)| \leq \|f\|_1, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Por otro lado observamos que si se prueba que $\widehat{f}$ es continua y que se cumple (A.2) entonces $\widehat{f}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$. Basta tener en cuenta que dado $\varepsilon > 0$, la propiedad (A.2) implica que $|\widehat{f}(u)| < \varepsilon$, cuando $|u|$ es suficientemente grande, y que si $\widehat{f}$ es continua en $\mathbb{R}^n$ entonces es uniformemente continua en cualquier compacto de $\mathbb{R}^n$.

Para probar la continuidad de $\widehat{f}$ en $u_0 \in \mathbb{R}^n$ podemos hacer uso del Teorema de la convergencia dominada[1] pues se tiene que

$$\widehat{f}(u) - \widehat{f}(u_0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(e^{-i\langle u,x\rangle} - e^{-i\langle u_0,x\rangle})dx, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

y $|F_u(x)| = |f(x)(e^{-i\langle u,x\rangle} - e^{-i\langle u_0,x\rangle})| \leq 2|f(x)|$, $x, u \in \mathbb{R}^n$, siendo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Luego,

$$\lim_{u\to u_0} (\widehat{f}(u) - \widehat{f}(u_0)) = 0.$$

Establecemos ahora (A.2). Fijamos $\varepsilon > 0$ y asumimos primero que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, esto es, una función de clase C^∞ y con soporte compacto contenido en $B(0,R)$, para algún $R > 0$.
Sea $u \in \mathbb{R}^n$, $|u| > \pi$. Haciendo el cambio de variables $x = y + \pi u/|u|^2$ en (A.1) obtenemos

$$\widehat{f}(u) = -\int_{\mathbb{R}^n} f\big(y + \frac{\pi u}{|u|^2}\big)e^{-i\langle u,y\rangle}dy,$$

por lo que,

$$2\widehat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(f(x) - f\big(x + \frac{\pi u}{|u|^2}\big)\Big)e^{-i\langle u,x\rangle}dx.$$

Ya que el soporte de f está contenido en $B(0,R)$ y $|u| > \pi$ se tiene que

$$f(x) - f\big(x + \frac{\pi u}{|u|^2}\big) = 0, \quad |x| > R + 1.$$

[1] **Teorema de la convergencia dominada (en $\mathbb{R}^n$).** Sea f una función medible y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tal que $f_k(x) \longrightarrow f(x)$, $k \to \infty$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si existe g integrable en $\mathbb{R}^n$ de manera que $|f_k(x)| \leq g(x)$, c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces f es integrable y

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Además, por ser f continua, es uniformemente continua en $K = \overline{B(0,R+1)}$ lo que nos permite elegir $0<\delta<1$ tal que $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, cuando $x,y\in K$, $|x-y|<\delta$. Se tiene entonces que,

$$2|\widehat{f}(u)| \le \int_K \Big| f(x) - f\big(x+\frac{\pi u}{|u|^2}\big)\Big| dx < \varepsilon |K|, \quad |u| > \frac{\pi}{\delta},$$

y (A.2) queda probado. Aquí $|K|$ representa la medida de Lebesgue del conjunto K (en este caso, el volumen de la bola $B(0,R+1)$ $(\pi^{n/2}(R+1)^n/\Gamma(n/2+1))$.

Supongamos ahora que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Teniendo en cuenta que $C_c(\mathbb{R}^n)$ es un conjunto denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$ ([12, Theorem 3.14]) elegimos $g\in C_c(\mathbb{R}^n)$ de modo que $\|f-g\|_1<\varepsilon$. Entonces,

$$|\widehat{f}(u)| \le |\widehat{f}(u) - \widehat{g}(u)| + |\widehat{g}(u)| \le \|f-g\|_1 + |\widehat{g}(u)| < \varepsilon + |\widehat{g}(u)|, \quad u\in\mathbb{R}^n,$$

y la propiedad (A.2) para f se deduce de la ya establecida para g. □

Recogemos a continuación algunas propiedades algebraicas básicas que verifica la transformación de Fourier.

En lo que sigue, si f es una función definida en $\mathbb{R}^n$ y $x\in\mathbb{R}^n$ denotamos por $\tau_x f$ a la *función traslación* definida por $(\tau_x f)(z) = f(z-x)$, $z\in\mathbb{R}^n$.

Proposición A.2. *Sean $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se verifican las siguientes propiedades:*

(a) (traslación) Para cada $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\mathfrak{F}(\tau_x f)(u) = e^{-i\langle x,u\rangle}\mathfrak{F}(f)(u), \quad u\in\mathbb{R}^n.$$

(b) (factor de fase) Para cada $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\mathfrak{F}\Big(e^{i\langle x,\cdot\rangle} f\Big)(u) = (\tau_x\mathfrak{F}(f))(u), \quad u\in\mathbb{R}^n.$$

(c) (dilatación) Si $\lambda>0$ se tiene que

$$\mathfrak{F}(f(\frac{\cdot}{\lambda}))(u) = \lambda^n\mathfrak{F}(f)(\lambda u), \quad u\in\mathbb{R}^n.$$

(d) (fórmula de multiplicación)

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{F}(f)(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathfrak{F}(g)(x)dx.$$

Demostración. Las tres primeras afirmaciones siguen fácilmente haciendo uso del adecuado cambio de variables en las integrales correspondientes. Para la fórmula de multiplicación solo hay que tener en cuenta el Teorema de Fubini que permite escribir

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{F}(f)(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,z\rangle} g(x)dxdz = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\mathfrak{F}(g)(z)dz.$$

□

Las siguientes propiedades analíticas son de especial relevancia en la teoría de la transformación de Fourier. Usaremos la siguiente notación.
Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, siendo $\mathbb{N}_0 = N \cup \{0\}$, y $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, definimos los operadores diferenciales D^α y D_α como

$$D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \quad \text{y} \quad D_\alpha = i^{-|\alpha|} D^\alpha = (-i\partial_{x_1})^{\alpha_1} \cdots (-i\partial_{x_n})^{\alpha_n}.$$

Asimismo, si P es un polinomio en $\mathbb{R}^n$, esto es, para cierto conjunto finito de multiíndices $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{N}_0^n$, y $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}} \subseteq \mathbb{R}$,

$$P(u) = \sum_{\alpha \in \mathbb{I}} c_\alpha u^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{I}} c_\alpha u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n}, \quad u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n,$$

entonces definimos los operadores $P(D)$ y $P(-D)$ mediante

$$P(D) = \sum_{\alpha \in \mathbb{I}} c_\alpha D_\alpha \quad \text{y} \quad P(-D) = \sum_{\alpha \in \mathbb{I}} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D_\alpha.$$

Proposición A.3. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y P un polinomio en $\mathbb{R}^n$.*
(a) Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $P(D)f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\mathfrak{F}(P(D)f)(u) = P(u)\mathfrak{F}(f)(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$.
(b) Si $Pf \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\mathfrak{F}(Pf)(u) = P(-D)\mathfrak{F}(f)(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Señalamos primero que basta probar las propiedades para el polinomio $P(x) = x_1$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. En efecto, nótese que la linealidad de la transformación de Fourier y la propiedad multiplicativa de la exponencial, esto es, $e^{-i\langle u,x\rangle} = \prod_{k=1}^n e^{-iu_k x_k}$, $u = (u_1, \cdots, u_n)$, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, hace que podamos reducir el caso a los polinomios de la forma $Q(x) = x_1^m$, $m \in \mathbb{N}_0$. Y la propiedad para Q se deduce por inducción una vez se demuestre para $P(x) = x_1$.
Podemos considerar así la cuestión en dimensión $n = 1$. Sea $P(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$P(D) = -i\frac{d}{dt} \quad \text{y} \quad P(-D) = i\frac{d}{dt}.$$

(a) Para este caso basta suponer f derivable tal que $f(t) \longrightarrow 0$, $|t| \to +\infty$, y $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Nótese que $P(D)f = -if'$. Integrando por partes obtenemos

$$\mathfrak{F}(-if')(s) = -i\int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-ist}dt = s\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ist}dt = s\mathfrak{F}(f)(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

(b) Asumimos ahora que $tf \in L^1(\mathbb{R})$. Debemos ver que $\mathfrak{F}(tf)(s) = i(\mathfrak{F}(f))'(s)$, $s \in \mathbb{R}$.
Sea $s \in \mathbb{R}$. Podemos escribir para cada $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\frac{\widehat{f}(s+h) - \widehat{f}(s)}{h} = \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} f(t)(e^{-i(s+h)t} - e^{-ist})dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ist}\Big(\frac{e^{-iht} - 1}{h}\Big)dt.$$

Ya que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{-iht} - 1}{h} = -it, \quad t \in \mathbb{R},$$

y $tf \in L^1(\mathbb{R})$ podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada para obtener $(\widehat{f})'(s) = -i\mathfrak{F}(tf)(s)$. $\square$

A.2. La convolución clásica

El Teorema tauberiano de Wiener-Pitt (Teorema 2.4) se enuncia en términos de la convolución de Fourier. Presentamos en esta sección los aspectos básicos de la misma.

Sean f y g dos funciones medibles en $\mathbb{R}^n$. Se define la *convolución* $f * g$ mediante

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

para aquellos $x \in \mathbb{R}^n$ para los que existe la integral. Nótese que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$|(f*g)(x)| \le \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dy \le \|g\|_\infty \|f\|_1 < \infty, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

esto es, $\|f*g\|_\infty \le \|g\|_\infty \|f\|_1$, y la función $f*g$ está bien definida en todo $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, haciendo uso del Teorema de Fubini podemos ver que si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la convolución $f*g$ es también una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$. En efecto, sean f, g funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 &\le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dydx = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|dz = \|f\|_1 \|g\|_1.\end{aligned}$$

De manera directa se obtienen las siguientes propiedades algebraicas para la convolución.

Proposición A.4. *Sean f, g, h funciones complejas medibles en $\mathbb{R}^n$. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $f*g = g*f$;
2. $(f*g)*h = f*(g*h)$;
3. $f*(g+h) = f*g + f*h$;
4. $c(f*g) = (cf)*g = f*(cg)$, $c \in R$.

Una característica relevante de la convolución de dos funciones que la relaciona con la transformación de Fourier es la que presentamos a continuación.

Proposición A.5. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se tiene que*

$$\mathfrak{F}(f*g)(u) = \mathfrak{F}(f)(u)\mathfrak{F}(g)(u), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Sea $u \in \mathbb{R}^n$. Haciendo un sencillo cambio de variables se obtiene que

$$\mathfrak{F}(f*g)(u) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)g(z)e^{-i\langle u,x\rangle}dzdx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(z)e^{-i\langle u,y+z\rangle}dzdx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle u,y\rangle} g(z) e^{-i\langle u,z\rangle} dydz = \mathfrak{F}(f)(u)\mathfrak{F}(g)(u).$$

□

El resultado que sigue lo utilizamos en la prueba de la Proposición 2.1 fundamental en el estudio del Teorema tauberiano de Wiener-Pitt (Teorema 2.4). Afirma que cualquier función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ puede ser aproximada (en norma $\|\cdot\|_1$) por una función cuya transformada de Fourier es constante en un entorno de un punto dado.

Proposición A.6. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Para cada $\varepsilon > 0$ existen $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $r > 0$ tal que $\|h\|_1 < \varepsilon$ y*

$$\widehat{h}(u) = \widehat{f}(u_0) - \widehat{f}(u), \quad u \in \mathbb{R}^n, |u - u_0| < r. \tag{A.3}$$

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$. Sea $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\phi}(z) = 1$, $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| < 1$. Para cada $\lambda > 0$ definimos la función h_λ mediante

$$\begin{aligned} h_\lambda(x) &= \widehat{f}(u_0)\phi_\lambda(x) - (f * \phi_\lambda)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\Big(e^{-i\langle u_0,y\rangle}\phi_\lambda(x) - \phi_\lambda(x-y)\Big)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde $\phi_\lambda(x) = e^{i\langle u_0,x\rangle}\lambda^{-n}\phi(x/\lambda)$, $x \in \mathbb{R}^n$.
Ya que $f, \phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ podemos asegurar que, para cada $\lambda > 0$, las funciones ϕ_λ y $f * \phi_\lambda$ y, por tanto h_λ, son también absolutamente integrables. Además, en virtud de las propiedades en las Proposiciones A.2 y A.5 se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{h_\lambda}(u) &= \widehat{f}(u_0)\widehat{\phi_\lambda}(u) - \widehat{f}(u)\widehat{\phi_\lambda}(u) \\ &= \Big(\widehat{f}(u_0) - \widehat{f}(u)\Big)\widehat{\phi}(\lambda(u-u_0)), \quad u \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que ϕ fue elegida de manera que $\widehat{\phi}(z) = 1$, cuando $|z| < 1$, se deduce que

$$\widehat{h_\lambda}(u) = \widehat{f}(u_0) - \widehat{f}(u), \quad u \in \mathbb{R}^n, |u - u_0| < \frac{1}{\lambda}.$$

De esta forma, h_λ, $\lambda > 0$, satisface (A.3) con $r = 1/\lambda$. Podemos encontrar $\lambda > 0$ adecuado para asegurar que además $\|h_\lambda\|_1 < \varepsilon$. Para ello basta demostrar que $\|h_\lambda\|_1 \longrightarrow 0$, cuando $\lambda \to \infty$.
Observamos que

$$\begin{aligned} \|h_\lambda\|_1 &= \frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{i\langle u_0,x-y\rangle}\Big(\phi\big(\frac{x}{\lambda}\big) - \phi\big(\frac{x-y}{\lambda}\big)\Big)dy\right| dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\left|\phi(z) - \phi\big(z - \frac{y}{\lambda}\big)\right| dzdy, \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Vamos a establecer que la última integral converge a 0 cuando $\lambda \to \infty$ haciendo uso del Teorema de la convergencia dominada. Denotamos por F_λ, $\lambda > 0$, la función definida por

$$F_\lambda(y) = |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} \left|\phi(z) - \phi\big(z - \frac{y}{\lambda}\big)\right| dz = |f(y)| \left\|\phi - \tau_{y/\lambda}\phi\right\|_1, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Es claro que $|F_\lambda(y)| \leq 2\|\phi\|_1 |f(y)|$, $y \in \mathbb{R}^n$, para cada $\lambda > 0$, siendo $2\|\phi\|_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Además, para cada $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{\lambda \to \infty} F_\lambda(y) = 0.$$

En efecto, sean $y \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$. Puesto que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$ elegimos $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|\phi - g\|_1 < \delta$. Entonces, para cada $\lambda > 0$,

$$\left\|\phi - \tau_{y/\lambda}\phi\right\|_1 \leq \|\phi - g\|_1 + \|g - \tau_{y/\lambda} g\|_1 + \|\tau_{y/\lambda}(\phi - g)\|_1 < 2\delta + \|g - \tau_{y/\lambda} g\|_1.$$

Supongamos que el soporte de g está contenido en la bola $B(0, R)$. Ya que g es uniformemente continua en el compacto $K = \overline{B(0, R+1)}$, existe $0 < \sigma < 1$ tal que $|g(u) - g(v)| < \delta$, cuando $u, v \in K$ y $|u - v| < \sigma$. Podemos además elegir $\lambda_0 > 0$ de modo que $|y|/\lambda < \sigma$, $\lambda > \lambda_0$. Así, el soporte de $\tau_{y/\lambda} g$ cuando $\lambda > \lambda_0$ está contenido en la bola $B(0, R+1)$. Entonces, podemos escribir

$$\|g - \tau_{y/\lambda} g\|_1 = \int_K \left|g(z) - g\big(z - \frac{y}{\lambda}\big)\right| dz < \delta \int_K dz \leq \delta |K|, \quad \lambda > \lambda_0.$$

Se sigue que $\|\phi - \tau_{y/\lambda}\phi\| < C\delta$, $\lambda > \lambda_0$, para cierta $C > 0$, de donde se infiere que $\lim_{\lambda \to \infty} F_\lambda(y) = 0$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Se tienen de esta forma las condiciones para poder aplicar el Teorema de la convergencia dominada y concluir que $\lim_{\lambda \to \infty} \|h_\lambda\|_1 = 0$. □

A.3. Funciones de la clase de Schwartz

Decimos que una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pertenece a la clase de Schwartz cuando es de *rápido decrecimiento*, esto es, cuando para todo $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que

$$\gamma_{m,\alpha}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |D^\alpha f(x)| < \infty.$$

Denotamos por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ a esta familia de funciones.

Claramente, $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), +, \cdot_{\mathbb{C}})$ es un espacio vectorial. Nótese que, si $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, entonces para todo $m \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que

$$\gamma_{m,\alpha}(\lambda f + \mu g) \leq \lambda \gamma_{m,\alpha}(f) + \mu \gamma_{m,\alpha}(g).$$

Además es un subespacio de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Basta observar que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces, considerando $m \in \mathbb{N}$ tal que $2m > n$ se sigue que

$$\|f\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\gamma_{m,0}(f)}{(1+|x|^2)^m} dx \leq C\gamma_{m,0}(f) \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^m} dr < \infty. \tag{A.4}$$

En $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se define la topología generada por la familia $\{\gamma_{m,\alpha}\}_{m\in\mathbb{N}_0,\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ de manera que si $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene que $\phi_n \longrightarrow \phi$, $n \to \infty$, cuando para todo $m \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se verifica que $\gamma_{m,\alpha}(\phi_n - \phi) \longrightarrow 0$, $n \to \infty$.

Es claro que el espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ de las funciones de clase C^∞ con soporte compacto está contenido en la clase de Schwartz. Veamos además que es un subespacio denso en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposición A.7. *El espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ respecto a la topología definida por la familia $\{\gamma_{m,\alpha}\}_{m\in\mathbb{N}_0,\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$.*

Demostración. Es suficiente considerar $n = 1$. Sea $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Elegimos una función $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(x) = 1$, $|x| \leq 1$, y $\phi(x) = 0$, $|x| \geq 2$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ denotamos por ϕ_k a la función dada por $\phi(x) = \phi(x/k)$, $x \in \mathbb{R}$. Nótese que para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica que ϕ_k es una función en $C_c^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en $[-2k, 2k]$ y tal que $\phi_k(x) = 1$, $x \in [-k,k]$. Además, para cada $\ell \in \mathbb{N}_0$,

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}\phi_k(x) = \frac{1}{k^\ell}\phi^{(\ell}\Big(\frac{x}{k}\Big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Fijamos $\varepsilon > 0$ y consideramos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(1+x^2)^{-1} < \varepsilon$, $|x| > k_0$.
Sean $m, r \in \mathbb{N}_0$. Nuestro objetivo es ver que para k suficientemente grande se tiene que $\gamma_{m,r}(f - f\phi_k) < \varepsilon$. De esta forma, la sucesión $(f\phi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ converge a f en la topología de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ y se termina la prueba.

Haciendo uso de la regla de Leibniz para la derivación de un producto y teniendo en cuenta que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\left|(1+x^2)^m \frac{d^r}{dx^r}[f(x)(1-\phi_k(x))]\right| \\
&\quad = \left|(1+x^2)^m \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} \frac{d^{r-j}}{dx^{r-j}} f(x) \frac{d^j}{dx^j}\phi_k(x) + (1+x^2)^m(1-\phi_k(x))\frac{d^r}{dx^r}f(x)\right| \\
&\quad \leq C\left(\sum_{j=1}^r \left|\frac{d^j}{dx^j}\phi_k(x)\right| + \frac{1-\phi_k(x)}{1+x^2}\right) \leq C\left(\sum_{j=1}^r \frac{1}{k^j} + \frac{1-\phi_k(x)}{1+x^2}\right) \\
&\quad \leq C\left(\frac{1}{k} + \frac{1-\phi_k(x)}{1+x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Observamos que si $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, entonces $\phi_k(x) - 1 = 0$, $x \in [-k_0, k_0]$. Luego,

$$\gamma_{m,r}(f - f\phi_k) \leq C\left(\frac{1}{k} + \sup_{|x|>k_0} \frac{1-\phi_k(x)}{1+x^2}\right) \leq C\left(\frac{1}{k} + 2\varepsilon\right), \quad k \geq k_0,$$

y entonces podemos elegir $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 \geq k_0$ de tal forma que $\gamma_{m,r}(f - f\phi_k) < C\varepsilon$, cuando $k \geq k_1$. □

Otras propiedades interesantes de las funciones de rápido decrecimiento son las siguientes.

Proposición A.8. [2] *Sea $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

(a) Para cada $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, se tiene que $D^\beta f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\gamma_{m,\alpha}(D^\beta f) = \gamma_{m,\alpha+\beta}(f)$.
(b) Para todo polinomio P se tiene que $Pf \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Además, si $m \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, se cumple que, para ciertos $m_k \in \mathbb{N}_0$ y $\beta_k \in \mathbb{N}_0^n$, $k = 1, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_{m,\alpha}(Pf) \leq C \sum_{k=1}^{r} \gamma_{m_k,\beta_k}(f).$$

Demostración. La propiedad *(a)* es clara. Y para establecer *(b)* basta aplicar la regla de Leibniz para la derivación del producto Pf y tener en cuenta *(a)* y el hecho de que la derivada de un polinomio sigue siendo un polinomio. □

Comentamos en la sección A.2 que la convolución de dos funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$ es una función absolutamente integrable. La convolución es también una operación cerrada en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposición A.9. *Si $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sean f, g dos funciones de la clase de Schwartz. Para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g)$. En efecto, ya que $D^\alpha f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, por (A.4) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(D^\alpha f)(x-u)g(u)|du \leq \gamma_{0,0}(g) \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f(z)|dz \leq C\gamma_{0,0}(g)\gamma_{m,\alpha}(f),$$

siendo $m \in \mathbb{N}$, $m > n/2$. Por otro lado, si $\ell \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\begin{aligned}(1+|x|^2)^\ell |(f*g)(x)| &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} ((1+|x-u|^2)^\ell + (1+|u|^2)^\ell)|f(x-u)g(u)|du \\ &\leq C\gamma_{\ell,0}(f)\|g\|_1 + \gamma_{\ell,0}(g)\|f\|_1 < \infty, \quad x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Se puede deducir entonces que $\gamma_{\ell,\alpha}(f * g) < \infty$, para $\ell \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. □

Establecimos en el Teorema A.1 que la transformación de Fourier es una aplicación lineal de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Vamos a ver que se trata de un homeomorfismo lineal en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. En la demostración haremos uso del siguiente caso particular.

[2] Este resultado nos dice que, si P es un polinomio y $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, entonces las aplicaciones $f \longrightarrow Pf$ y $f \longrightarrow D^\beta f$ son funciones continuas de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo.

Ejemplo A.10. Sea $\phi(x) = e^{-c|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, siendo $c > 0$. Es fácil comprobar que es una función en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. De hecho, para todo $m \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$$(1+|x|^2)^m D^\alpha e^{-c|x|^2} = P(x)e^{-c|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

para cierto polinomio P y entonces, $\gamma_{m,\alpha}(f) < \infty$. Veamos que

$$\mathfrak{F}(\phi)(u) = \Big(\frac{\pi}{c}\Big)^{n/2} e^{-|u|^2/(4c)}, \quad u \in \mathbb{R}^n. \tag{A.5}$$

Nótese que si $c = 1/2$, entonces $\mathfrak{F}(\phi) = (2\pi)^{n/2}\phi$.
Asumimos primero que $c = 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\phi)(u) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)} e^{-i(u_1x_1+\cdots+u_nx_n)} dx_1\cdots dx_n \\ &= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-iu_kt} dt, \quad u = (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Sea $f(t) = e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Es claro que f satisface la ecuación diferencial $y' + 2ty = 0$. Haciendo uso de las propiedades en la Proposición A.3 se tiene que $F(s) = \mathfrak{F}(f)(s)$, $s \in \mathbb{R}$, satisface la ecuación diferencial $2z' + sz = 0$. Luego, $F(s) = F(0)e^{-s^2/4}$, $s \in \mathbb{R}$. Ya que

$$F(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

obtenemos que $F(s) = \sqrt{\pi}e^{-s^2/4}$. Por tanto, $\mathfrak{F}(\phi)(u) = \pi^{n/2}e^{-|u|^2/4}$, $u \in \mathbb{R}^n$, cuando $c = 1$.

En virtud de la propiedad *(c)* en la Proposición A.2 se sigue que para $c > 0$ se tiene que $\mathfrak{F}(\phi)(u) = (\pi/c)^{n/2}e^{-|u|^2/(4c)}$, $u \in \mathbb{R}^n$. □

Teorema A.11. *La transformación de Fourier es una transformación lineal, biyectiva, continua y con inversa continua de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí misma. Además, si $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que*

$$\mathfrak{F}^{-1}(F)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} F(u)e^{i\langle x,u\rangle} du, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{A.6}$$

De esta forma, $\mathfrak{F}^4 = (2\pi)^{2n}\mathrm{Id}$, siendo Id *el operador identidad.*

Demostración. La transformación de Fourier es claramente un operador lineal. Además, si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, en virtud de la Proposición A.3, para cada $m \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, si P es el polinomio en $\mathbb{R}^n$ definido por $P(u) = (1+|u|^2)^m$, $u \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$P(u)D^\alpha\mathfrak{F}(f)(u) = (-i)^{|\alpha|}\mathfrak{F}\big[P(D)(x^\alpha f)\big](u), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Teniendo en cuenta además (A.4) y la Proposición A.8 se sigue que existe $C > 0$ de manera que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces para ciertos $m_k \in \mathbb{N}_0$ y $\beta_k \in \mathbb{N}_0^n$, $k = 1,\ldots,r$, $r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\gamma_{m,\alpha}(\mathfrak{F}(f)) &\le \|\mathfrak{F}\big[P(D)(x^\alpha f)\big]\|_\infty \le \big\|P(D)x^\alpha f\big\|_1 \le C\gamma_{m,0}(P(D)x^\alpha f)\\ &\le C\sum_{k=1}^{r}\gamma_{m_k,\beta_k}(f),\end{aligned}\tag{A.7}$$

lo que implica que $\mathfrak{F}(f)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Esta estimación también nos dice que $\mathfrak{F}$ es continua (respecto a la topología en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) pues si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ verifican $f_k\longrightarrow f$, $k\to\infty$, respecto a la topología en la clase de Schwartz, teniendo en cuenta que $\mathfrak{F}(f_k)-\mathfrak{F}(f)=\mathfrak{F}(f_k-f)$, $k\in\mathbb{N}$, de (A.7) se obtiene que $\mathfrak{F}(f_k)\longrightarrow\mathfrak{F}(f)$, $k\to\infty$, en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Sea $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Vamos a mostrar que

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{F}(f)(u)e^{i\langle x,u\rangle}du,\quad x\in\mathbb{R}^n.\tag{A.8}$$

Hemos visto que $\widehat{f}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ por lo que la integral en (A.8) es convergente. Consideramos primero $x=0$. Teniendo en cuenta las propiedades *(c)* y *(d)* en la Proposición A.2, para cada función $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda>0$, si $\psi_\lambda(x)=\psi(x/\lambda)$, $x\in\mathbb{R}^n$, entonces se verifica

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{F}(f)(u)\psi_\lambda(u)du&=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathfrak{F}(\psi_\lambda)(x)dx=\lambda^n\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathfrak{F}(\psi)(\lambda x)dx\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f\big(\frac{x}{\lambda}\big)\mathfrak{F}(\psi)(x)dx.\end{aligned}$$

Ya que f,ψ y sus transformadas de Fourier son funciones en la clase de Schwartz, de acuerdo al Teorema de la convergencia dominada y tomando límites cuando $\lambda\to\infty$ se deduce que

$$\psi(0)\int_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{F}(f)(u)du=f(0)\int_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{F}(\psi)(x)dx.$$

En particular, si $\psi(x)=e^{-|x|^2/2}$, de (A.5) se infiere que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{F}(f)(u)du=f(0)(2\pi)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|x|^2/2}dx=f(0)(2\pi)^n,$$

y de esta forma queda probado (A.8) para $x=0$.
Sea ahora $x\in\mathbb{R}^n$. Consideramos la función $h(z)=\tau_{-x}f(z)=f(z+x)$, $z\in\mathbb{R}^n$. Por lo que acabamos de probar y la Proposición A.2 *(a)* podemos escribir

$$f(x)=h(0)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{F}(h)(u)du=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{F}(f)(u)e^{i\langle x,u\rangle}du,$$

esto es, se cumple (A.8).
La biyectividad se sigue fácilmente de (A.8). Nótese que si $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathfrak{F}(f)=0$, entonces por (A.8) se sigue que $f=0$ y tenemos que $\mathfrak{F}$ es inyectiva. Por otro lado, si $F\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $f(x)=(2\pi)^{-n}\mathfrak{F}(F)(-x)$, entonces $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(f)(u) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{F}(F)(-x)e^{-i\langle u,x\rangle}dx\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{F}(F)(x)e^{i\langle u,x\rangle}dx = F(u), \quad u\in\mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

obteniendo la fórmula de inversión (A.6). Esta fórmula nos dice que para $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $f(x) = (2\pi)^{-n}\mathfrak{F}^2(f)(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\mathfrak{F}^4(f)(x) = (2\pi)^n\mathfrak{F}^2(f)(-x) = (2\pi)^{2n}f(x), \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

□

Como señalamos a continuación, la fórmula de inversión que hemos probado para funciones de la clase $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es también válida para las funciones en el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ con transformada de Fourier también en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Corolario A.12. *Sea Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(u)e^{i\langle x,u\rangle}du, \quad \textit{para casi todo } x\in\mathbb{R}^n. \tag{A.9}$$

Demostración. Sea F la función dada por

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(u)e^{i\langle x,u\rangle}du, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Obsérvese que esta función está bien definida en todo $\mathbb{R}^n$ pues $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nuestro propósito es demostrar que $f = F$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$. Para ello basta ver que, para toda función $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^n}(F(x)-f(x))\phi(x)dx = 0. \tag{A.10}$$

Sea $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Aplicando la fórmula de multiplicación (Proposición A.2 *(d)*) podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\widehat{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(u)\phi(u)du.$$

Por otro lado, aplicando el Teorema de Fubini y (A.8)

$$\int_{\mathbb{R}^n}F(x)\widehat{\phi}(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(u)\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\phi}(x)e^{i\langle x,u\rangle}dxdu = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(u)\phi(u)du.$$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n}(F(x)-f(x))\widehat{\phi}(x)dx = 0.$$

Teniendo en cuenta el Teorema A.11 podemos concluir que se satisface (A.10) y por tanto, $F = f$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$. □

A.4. Función zeta de Riemann

La función zeta de Riemann es una de las funciones complejas más conocidas en matemáticas. Aparece en incontables ramas de investigación y está relacionada directamente con la célebre conjetura de Riemann sobre sus ceros, lo que ha hecho de esta función uno de los objetos de estudio más estimados en el campo de las matemáticas.

Desde el punto de vista de la teoría de números, la *función zeta de Riemann* se define como

$$\zeta(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^z}, \quad z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, z > 1.$$

Observamos en primer lugar que la función está bien definida en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 1\}$ pues

$$\Big| \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^z} \Big| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, z}} < \infty, \quad \mathrm{Re}\, z > 1.$$

Además, la serie converge uniformemente en los conjuntos compactos de dicho semiplano, por lo que la función ζ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 1\}$.

La función zeta de Riemann puede expresarse de diferentes maneras. En el siguiente resultado presentamos otras dos. Una de ellas involucra al conjunto de los números primos, que en lo que sigue denotamos por $\mathbb{P}$, y la segunda expresión permite su extensión a valores de $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Proposición A.13. *Para cada* $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z > 1$, *se tiene*

(a) $\zeta(z) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}.$

(b) $\zeta(z) = z \int_1^\infty E[x] x^{-1-z} dx = \frac{z}{z-1} + z \int_1^\infty (E[x] - x) x^{-1-z} dx.$

Demostración. *(a)* Para cada $m \in \mathbb{N}$ denotamos por A_m el conjunto de los múltiplos de m. Teniendo en cuenta que la serie converge absolutamente, podemos reordenarla y escribir

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A_2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in A_{2^k}\setminus A_{2^{k+1}}} \Big) \frac{1}{n^z} = \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A_2} \frac{1}{n^z} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{kz}} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A_2} \frac{1}{n^z} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{kz}} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A_2} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{1-2^{-z}} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A_2} \frac{1}{n^z}, \quad \mathrm{Re}\, z > 1.\end{aligned}$$

Razonando de manera análoga con 3 en lugar de 2 obtenemos que, si $\mathrm{Re}\, z > 1$ entonces,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A_2} \frac{1}{n^z} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus(A_2\cup A_3)} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\setminus A_2 \\ n\in A_{3^k}\setminus A_{3^{k+1}}}} \Big) \frac{1}{n^z}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus(A_2\cup A_3)} \frac{1}{n^z} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^{kz}} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus(A_2\cup A_3)} \frac{1}{n^z}$$
$$= \frac{1}{1-3^{-z}} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus(A_2\cup A_3)} \frac{1}{n^z}.$$

Por tanto,

$$\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{-z}} \frac{1}{1-3^{-z}} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus(A_2\cup A_3)} \frac{1}{n^z}, \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

De esta forma si $\mathbb{P} = \{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, repitiendo el proceso N veces llegamos a que

$$\zeta(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-p_k^{-z}} \Big(1 + \sum_{n\in I_N} \frac{1}{n^z}\Big), \quad \operatorname{Re} z > 1, \tag{A.11}$$

donde $I_N := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2,\ n \not\in A_{p_j},\ j = 1,\dots,N\}$, $N \in \mathbb{N}$. Nótese que si $N \in \mathbb{N}$, entonces

$$0 \leq \sum_{n\in I_N} \frac{1}{|n^z|} \leq \sum_{n=p_{N+1}}^{\infty} \frac{1}{|n^z|} = \sum_{n=p_{N+1}}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}, \quad \operatorname{Re} z > 1,$$

y puesto que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$, para $\operatorname{Re} z > 1$, es convergente se sigue que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n\in I_N} \frac{1}{n^z} = 0, \quad \operatorname{Re} z > 1,$$

y entonces, tomando límite cuando $N \to \infty$ en (A.11) se obtiene *(a)*.
(b) Sea $N \in \mathbb{N}$. Haciendo cálculos directos obtenemos

$$z\int_1^{N+1} E[x]x^{1-z}dx = z\sum_{k=1}^{N} k\int_k^{k+1} x^{-1-z}dx = \sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{1}{k^{z-1}} - \frac{k}{(k+1)^z}\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{z-1}} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k^{z-1}} + \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k^z} = 1 - \frac{N+1}{(N+1)^z} + \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k^z}$$
$$= -\frac{N}{(N+1)^z} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^z}, \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

Luego,

$$\lim_{N\to\infty} z\int_1^{N+1} E[x]x^{-1-z}dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^z} = \zeta(z), \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

De aquí se sigue además que

$$\zeta(z) = z\int_1^{\infty} (E[x]-x)x^{-1-z}dx + z\int_1^{\infty} x^{-z}dx$$
$$= z\int_1^{\infty} (E[x]-x)x^{-1-z}dx + \frac{z}{z-1}, \quad \operatorname{Re} z > 1,$$

y así *(b)* queda establecido. □

Observamos que la función $b(x) = E[x] - x$, $x \in \mathbb{R}$, es una función acotada, de hecho, $|b(x)| \le 1$, $x \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\left| z \int_1^\infty b(x) x^{-1-z} dx \right| \le |z| \int_1^\infty x^{-1-\operatorname{Re} z} dx = \frac{|z|}{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

De esta forma la función $\widetilde{\zeta}$ definida por

$$\widetilde{\zeta}(z) = \frac{z}{z-1} + z \int_1^\infty b(x) x^{-1-z} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

define una extensión de la función zeta de Riemann que es holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ excepto en $z = 1$ donde hay un polo simple con residuo $\operatorname{Res}(\widetilde{\zeta}; 1) = 1$.

Una propiedad importante que cumple esta extensión es la siguiente.

Proposición A.14. *La función $\widetilde{\zeta}$ no tiene ceros en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 1\} \setminus \{1\}$, esto es,*

$$\widetilde{\zeta}(1 + it) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Teniendo en cuenta la propiedad *(a)* en la Proposición A.13 es claro que $\widetilde{\zeta}(\sigma + it) = \zeta(\sigma + it) \neq 0$ cuando $\sigma > 1$. Además,

$$\log \widetilde{\zeta}(z) = \log \zeta(z) = -\sum_{p \in \mathbb{P}} \log(1 - p^{-z}) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{p^{-mz}}{m}, \quad z = \sigma + it,\ \sigma > 1.$$

Ya que $\log|z| = \operatorname{Re}(\log(z))$, $z \neq 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\log|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it)\zeta(\sigma + 2it)| &= \operatorname{Re}\big(3\log\zeta(\sigma) + 4\log(\zeta(\sigma + it)) + \log(\zeta(\sigma + 2it)\big) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{p^{-m\sigma}}{m} \operatorname{Re}(3 + 4p^{-imt} + p^{-2imt}) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{p^{-m\sigma}}{m} (3 + 4\cos(mt\ln p) + \cos(2mt\ln p)) \ge 0 \\
&= 2\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{p^{-m\sigma}}{m} (1 + \cos(mt\ln p))^2 \ge 0, \quad \sigma > 1.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it)\zeta(\sigma + 2it)| \ge 1, \quad \sigma > 1,$$

y

$$|(\sigma - 1)\zeta(\sigma)|^3 \left| \frac{\zeta^4(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \ge \frac{1}{\sigma - 1}, \quad \sigma > 1, \tag{A.12}$$

Supongamos que $\widetilde{\zeta}(1 + it) = 0$. Entonces

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} = \lim_{\sigma \to 1^+} \frac{\widetilde{\zeta}(\sigma + it) - \widetilde{\zeta}(1 + it)}{\sigma - 1} = \widetilde{\zeta}'(1 + it).$$

Sabemos que

$$\lim_{\sigma\to 1^+}(\sigma-1)\widetilde{\zeta}(\sigma)=1,$$

por lo que

$$\lim_{\sigma\to 1^+}|(\sigma-1)\zeta(\sigma)|^3\left|\frac{\zeta^4(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4|\zeta(\sigma+2it)|=|\widetilde{\zeta}'(1+it)|^4|\widetilde{\zeta}(1+2it)|<\infty.$$

Pero esto contradice (A.12). Concluimos entonces que $\widetilde{\zeta}(1+it)\neq 0$. □

Bibliografía

[1] N.H. ABEL Recherches sur la série $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$. *J. für Math.*, **1** (1826), 311–339.

[2] T.M. APOSTOL *Mathematical Analysis*, 2nd Edition. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1981.

[3] P. CASTRO *La paradoja de Zenón* [en línea]. Disponible en https://matematicasiesoja.wordpress.com/wp-content/uploads/2020/04/paradoja_zenon.pdf.

[4] G.B. FOLLAND *Real Analysis: modern techniques and its applications.* Second Edition. Wiley-Interscience Publ., New York, 1999.

[5] G.H. HARDY Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series. *Proc. London Math. Soc.*, **s2-8** (1) (1910), 301–320.

[6] G.H. HARDY *Divergent series.* Oxford Univ. Press, London, 1967.

[7] A.E. INGHAM On Wiener's method in Tauberian teorems. *Proc. London Math. Soc. (2)*, **38** (1935), 458–480.

[8] J. KARAMATA Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. *Math. Z.*, **32** (1930), 319–320.

[9] J. KOREVAAR *Tauberian theory. A century of developments.* Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[10] J.E. LITTLEWOOD The converse of Abel's theorem on power series. *Proc. London Math. Soc. (2)*, **9** (1911), 434–448.

[11] H.R. PITT General Tauberian theorems. *Proc. London Math. Soc.*, **44** (1938), 243–288.

[12] W. RUDIN *Real and complex analysis.* Third Edition. McGraw-Hill, Singapoure, 1987.

[13] W. RUDIN *Functional Analysis.* Second Edition. McGraw-Hill, Singapoure, 1991.

[14] A. TAUBER Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reichen, *Monatsh. Math. u. Phys.*, **8** (1897), 273–277.

[15] H. WIELANDT Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes. *M*ath. Z., **56** (1952), 206-207.

[16] N. WIENER Tauberian Theorems. *Ann. of Math. (2)*, **33** (1) (1932), 1–100.

[17] N. WIENER *The Fourier integral and certain of its applications.* Cambridge Univ. Press, London, 1933.

Introduction to Tauberian Theory

Yanira de la Peña Guerra Guerra
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101365275@ull.edu.es

Abstract

In this work, some of the classic Tauberian theorems are introduced and analyzed. In the first part, the most well-known theorems related to summability for numerical series are addressed, particularly the contributions made by Tauber, Hardy, and Littlewood regarding Cesàro summability and Abel summability. On the other hand, the famous Wiener Tauberian theorem for measurable functions is examined, from which Ingham's theorem is deduced. As an application of these results, a proof of the Prime Number Theorem is presented. The work also contains an appendix that includes some key items for the development of the study, such as the Fourier transform and the Riemann zeta function.

1. Introduction

The origin of Tauberian theory dates back to 1897 when the Austrian mathematician A. Tauber published a brief article and an inverse for Abel's Theorem was given. In general, an Abelian theorem ensures that a summability method is consistent with the convergence of a series, in the sense that the summability method assigns the value of the sum to each convergent series. A Tauberian theorem goes in the opposite direction; that is, it seeks to find conditions that guarantee that a summable series is convergent.

2. Tauberian theorems for series

In the first chapter of this dissertation, we address the classical Tauberian theorems that focus on Cesàro summability and Abel summability. We introduce and analyze the main characteristics of these two summability methods and prove Abel's Theorem.
We then examine various Tauberian theorems. We first consider results of this type related to Abel summable series, among which Tauber's original theorem established in 1897 stands out.

Tauber's Theorem. Let $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ and $s \in \mathbb{R}$. Suppose that $\sum a_n$ is Abel summable to s. If $na_n \to 0$, when $n \to \infty$, then the series $\sum a_n$ is convergent and $\sum a_n = s$.

We then study some Tauberian theorems for Cesàro summability. In particular, we prove the following result by Hardy.

Hardy's Theorem. Let $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ be such that $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a bounded sequence. If the series $\sum a_n$ is Cesàro summable with sum $s \in \mathbb{R}$, then the series is convergent and its sum is s.

We observe that this theorem admits a more general Tauberian condition than that given by Tauber. However, when dealing with Cesàro summability, which reduces the set of summable series compared to the Abel method, it is not an optimal result. Hardy himself conjectured that his theorem should be true for Abel summable series. Littlewood solved the conjecture.

Littlewood's Theorem. Let $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ be such that $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a bounded sequence. If the series $\sum a_n$ is Abel summable with sum $s \in \mathbb{R}$, then the series is convergent and its sum is s.

For the proof of Littlewood's theorem we consider the ideas based on Weierstrass's Approximation Theorem, which Karamata followed to simplify Littlewood's original proof. Karamata's approach is also present in the Tauberian theorem of Hardy and Littlewood, which we discuss. This theorem provides conditions that allow us to derive Cesàro summability from Abel summability.

Hardy and Littlewood's Theorem. Let $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ be such that the series $\sum a_n$ is Abel summable with sum s. Suppose that $s_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, where $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is the sequence of partial sums. Then, the series $\sum a_n$ is Cesàro summable with sum $s \in \mathbb{R}$.

3. Tauberian theorems for measurable functions

The second chapter is dedicated to another cornerstone of the Tauberian theory: the Wiener's Theorem. This theorem shifts the focus from series to essentially bounded measurable functions. The result we provide also includes the contribution made by Pitt for slowly oscillating measurable functions.

Wiener-Pitt's Theorem. Let $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ and $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ be such that $\widehat{K}(u) \neq 0$, $u \in \mathbb{R}^n$, and

$$\lim_{|x|\to\infty} (K * \phi)(x) = a\widehat{K}(0),$$

for certain $a \in \mathbb{R}$. Then, for all $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{|x|\to\infty} (f * \phi)(x) = a\widehat{f}(0).$$

If ϕ is also slowly oscillating, then $\lim_{|x|\to\infty} \phi(x) = a$.

One of the important aspects of the Wiener-Pitt Theorem is that it allows for a relatively simple proof of the Prime Number Theorem. Prior to this, we need to consider a Tauberian theorem, namely Ingham's theorem, which is derived using the Wiener-Pitt Theorem.

Ingham's Theorem. Suppose g is a non-decreasing real function defined on $(0,\infty)$ such that $g(x) = 0$, $x \in (0,1)$. Additionally, assume that

$$G(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} g\left(\frac{x}{k}\right) = ax\ln x + bx + x\delta(x), \quad x \in (0,\infty),$$

for certain $a, b \in \mathbb{R}$, and $\lim_{x\to+\infty} \delta(x) = 0$. Then,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = a.$$

The chapter finishes with one of the distinguished applications of Tauberian theory: to provide a proof of the famous Prime Number Theorem.

4. Appendix

In the topics covered in the second chapter, several items are involved, which we gather in the appendix of the essay. Among them, convolution and Fourier transformation are particularly relevant. We also include sections to discuss the main properties of Schwartz functions and the Riemann zeta function that we need for the proofs of the Wiener-Pitt and Ingham Theorems.

References

[1] G.H. Hardy *Divergent series.* Oxford Univ. Press, London, 1967.

[2] J. Korevaar *Tauberian theory. A century of developments.* Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[3] J.E. Littlewood The converse of Abel's theorem on power series. *Proc. London Math. Soc. (2)*, **9** (1911), 434–448.

[4] W. Rudin *Functional Analysis.* Second Edition. McGraw-Hill, Singapoure, 1991.

[5] N. Wiener Tauberian Theorems. *Ann. of Math. (2)*, **33** (1) (1932), 1–100.