

---

# Modelización de las ondas de gravedad provocadas por la columna eruptiva del volcán Tajogaite

---

*Trabajo de Fin de Grado presentado a la  
SECCIÓN DE FÍSICA, Universidad de La Laguna en cumplimiento de lo  
requerido para el*

***Grado en Física***

*por*

**Ismael Santos Campos**

*bajo la supervisión de*

**Juan P. Díaz González**

**Fco. Javier Expósito González**



SECCIÓN DE FÍSICA  
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA  
SAN CRISTÓBAL DE LA LAGUNA  
SANTA CRUZ DE TENERIFE, CANARIAS, ESPAÑA

Mayo 2024

## Abstract

On October 1<sup>st</sup>, 2021, on the Canarian island of La Palma there could be seen a peculiar cloud formation: a series of concentric circles with Tajogaite's eruptive column at its centre. These were the result of atmospheric gravity waves at a height of roughly 6100 metres, triggered by the interaction between an inversion layer at that height and the volcano's eruptive column. The relative humidity right below the inversion layer was 85%, while over it the value dropped to 5%, making it so that the cloud pattern could form with much more contrast between the crests and valleys of the gravity wave. Moreover, the lack of heavy winds made it possible for the energy of the perturbation to dissipate with almost no anisotropy.

This final project studies the physical phenomena that made it possible for this occurrence to happen and develops a Python code to compute a mathematical model to simulate the development of atmospheric gravity waves of volcanic origin. The description of physical phenomena includes the nature, formation, and effects of both gravity waves and the eruptive column, while the mathematical model simulates the effects of mass injection into an isothermal atmosphere.

The results of the simulations show two modes of oscillation: one acoustic and one gravitational. The acoustic mode prevails near the source, while the gravitational mode dominates the atmospheric excitation far from the source. These results prove a relationship between frequency and mass flow rate from the volcano, which could lead to future work calculating the mass flow rate of a volcanic eruption from the frequency of the gravity waves it produces.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Ondas de gravedad . . . . .	2
1.2	Formación de nubes . . . . .	4
1.3	Columnas eruptivas . . . . .	5
1.3.1	Génesis de los magmas . . . . .	5
1.3.2	Desgasificación del magma . . . . .	6
1.3.3	La columna eruptiva pliniana . . . . .	7
1.3.4	La columna eruptiva del Tajogaite . . . . .	9
1.3.5	La columna eruptiva como mecanismo de perturbación . . . . .	10
1.4	Ondas de gravedad en La Palma . . . . .	10
1.5	El modelo matemático . . . . .	11
1.5.1	Ecuaciones de conservación en fluidos . . . . .	11
1.5.2	Análisis de frecuencias . . . . .	12
1.5.3	La perturbación . . . . .	13
1.5.4	La variación de presión . . . . .	14
1.6	Objetivos . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Metodología</b>	<b>16</b>
2.1	La ecuación evaluada . . . . .	17
2.2	Cambio de variable . . . . .	17
2.3	Aplicación del modelo . . . . .	18
2.3.1	Definición de variables . . . . .	18
2.3.2	Definición de funciones . . . . .	19
2.3.3	Integración numérica . . . . .	20
2.3.4	Representación gráfica . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Resultados y discusión</b>	<b>24</b>
3.1	Variación temporal de presión . . . . .	25
3.2	Variación espacial de presión . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Conclusión</b>	<b>27</b>
	<b>Referencias</b>	<b>29</b>
	<b>Catálogo de imágenes</b>	<b>31</b>
	<b>Glosario</b>	<b>32</b>
	<b>Apéndice</b>	<b>I</b>
<b>A</b>	<b>Código de Python</b>	<b>I</b>

# 1 Introducción

---

This chapter introduces the physical phenomena observed at La Palma on the 1<sup>st</sup> of October 2021: the formation of atmospheric gravity waves at a height of approximately 6100 m due to the disturbance on an inversion layer produced by Tajogaite's eruptive column, as well as the model used to simulate what happened. To fully grasp the nature of this occurrence this chapter first explains what gravity waves are and how they develop, its effects on the atmosphere and how clouds can condense due to their presence. After this the focus moves on to the introduction of eruptive columns, how they come to be and its evolution over time, to finally tie it all together with the phenomena seen in La Palma. The introduction ends with the mathematical model used for this project and its objectives.

---



Figura 1: Mar de nubes sobre el Valle de La Orotava en agosto de 2021.



Figura 2: Nube lenticular sobre el Teide en febrero de 2019.

## 1.1 Ondas de gravedad

Cuando la densidad de un fluido aumenta con la profundidad se dice que está estratificado. Estos fluidos, debido a la condición que los define, se caracterizan por tener una gran estabilidad frente a flujos verticales de masa, tendiendo a formar estratos de igual densidad prácticamente sin intercambio de masa entre ellos<sup>[1]</sup>.

La troposfera de la Tierra, por lo general, tiende a comportarse de manera opuesta a un fluido estratificado, disminuyendo su densidad con la altura. No obstante, en ocasiones esta tendencia se invierte y se forma lo que se conoce como una **inversión térmica**, donde el aire se calienta con la altura de manera que una masa de aire frío, más denso, queda bajo una masa de aire caliente, menos denso. En este caso la atmósfera se comportará localmente como un **fluido estratificado**.

La zona de inversión térmica, al ser tan estable, se comporta como una membrana que impide el intercambio de masa entre las capas de la atmósfera en la que se encuentra. Si la inversión ocurre debajo de la cota superior de una cadena montañosa, el aire frío quedará contenido entre el terreno y la inversión térmica. En el supuesto de que esta masa fría venga cargada de humedad y empujada por el viento en dirección a la montaña, el vapor de agua se concentrará en el punto en el que la inversión térmica y la montaña se encuentran, impidiendo que ascienda más.

Este aumento en la concentración de vapor de agua provocará que el aire sobresature y forme un manto de nubes que permanecerá siempre bajo la inversión térmica. Este fenómeno es conocido como **mar de nubes** (fig.1).

Supongamos ahora que la zona de inversión se sitúa cerca de la cima de una montaña, rodeándola. Si la masa de aire frío bajo la inversión viene empujada por viento lo suficientemente intenso esta podrá subir la ladera y deformar la zona de inversión, abombándola sobre la cima de la montaña. En este caso, cuando el aire frío, cargado de humedad, ascienda por encima

de la montaña este disminuirá su temperatura por debajo de la temperatura de condensación dando lugar a una nube en forma de domo que cubra la cima de la montaña.



Figura 3: Ondas de gravedad sobre el barrio de La Salud, Santa Cruz de Tenerife en enero de 2024.

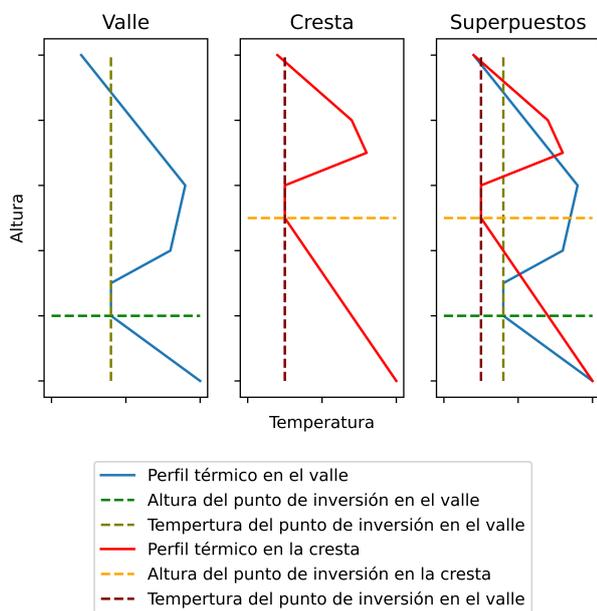


Figura 4: Diagrama mostrando la oscilación de una inversión térmica en presencia de ondas de gravedad.

Es importante resaltar que la zona de inversión también oscila junto con las ondas, deformándose y siendo empujada hacia arriba en las crestas y empujando hacia abajo en los valles, aún

A su vez, al otro lado de la montaña, la zona de inversión volverá a empujar al aire frío de vuelta a cotas más bajas, a la situación de equilibrio, haciendo que aumente su temperatura y que la nube se evapore y desaparezca. Esto dará lugar a la conocida como **nube lenticular**(fig.2).

Si la inversión térmica es lo suficientemente estable, es decir, si el gradiente de temperaturas entre las capas de la atmósfera es lo suficientemente grande, el empuje que esta ejerza sobre la masa fría será tal que la hará descender por debajo de la situación de equilibrio, por lo que se desencadena un movimiento oscilatorio: una onda. La gran estabilidad de la inversión térmica, además, favorecerá la propagación de esta onda en el espacio.

A estas ondas se las conoce como **ondas de gravedad** debido a la importancia que la gravedad tiene sobre la fuerza de empuje que determina la dinámica de este fenómeno. Cuando se forman por la presencia de una montaña se llaman **ondas de montaña**, pero no es el único mecanismo por el que pueden formarse<sup>[1]</sup>.

Las ondas de gravedad, por lo general, son indetectables desde la superficie salvo cuando la masa fría venga cargada de humedad. En ese caso, en las crestas de la onda, donde el aire se enfría al ascender, el vapor condensará y formará nubes, mientras que en los valles, donde el aire se vuelve a calentar al descender, las nubes se evaporarán. Esto dará lugar a un patrón rayado de nubes con la misma frecuencia que la onda gravitatoria que lo formó (fig.3).

sin dejar que haya intercambio de masa entre los estratos entre los que se encuentra, tal y como aparece en la figura 4. Esta naturaleza elástica del plano de inversión, similar a la de la membrana de un tambor, será crucial para que la oscilación perdure en el tiempo.

En resumen, para la formación de ondas de gravedad en la atmósfera es necesario que ocurran dos cosas: que la atmósfera se comporte como un fluido estratificado y que exista un mecanismo mediante el cual se perturbe al aire fuera del equilibrio hidrostático. Además, para que estas sean visibles, será necesario que la masa de aire frío tenga una alta humedad relativa mientras que la de aire caliente la tenga muy baja.

## 1.2 Formación de nubes

Como se comentó en la sección anterior, en las crestas de las ondas de gravedad es posible que se condense el vapor de agua presente en la masa de aire ascendente. Esta posibilidad dependerá de la concentración de vapor de agua que haya en la burbuja ascendente y de la variación de su presión y temperatura al ganar altura.

Supóngase una masa de aire con una alta humedad relativa que es forzada a ascender, disminuyendo, por tanto, su presión. Esto hace que la temperatura a la que el vapor condensa disminuya, haciendo que la masa de aire sature. Inicialmente la burbuja ascenderá adiabáticamente, por lo que su presión y temperatura cumplen la ecuación de Poisson<sup>[2]</sup>:

$$\frac{dT}{T} = k_m \frac{dP}{P}, \quad (1)$$

siendo  $k_m$  el cociente:

$$k_m = \frac{R_m}{c_{pm}}, \quad (2)$$

donde  $R_m$  es la constante particular de los gases para el aire húmedo, y  $c_{pm}$  es el calor específico a presión constante del mismo.

Una vez la burbuja sature, el vapor de agua empezará a condensar y habrá una variación de calor debida a este cambio de fase. No obstante, como primera aproximación, se puede suponer que este es un proceso *pseudoadiabático*, que sigue la misma ecuación que antes de la condensación, pero añadiendo un sumando que tiene en cuenta la variación de la relación de mezcla durante la condensación:

$$\frac{dT}{T} = k_m \frac{dP}{P} - \frac{Ldw}{c_{pm}T}. \quad (3)$$

En los valles de las ondas ocurrirá el proceso contrario: aumentará la presión y, por tanto, el aire se subsaturará, por lo que las gotículas de agua formadas se evaporarán de nuevo.

### 1.3 Columnas eruptivas

Una de los efectos más reconocibles de una erupción volcánica es la presencia de una gran columna de humo que crece desde las **bocas** de la montaña, la **columna eruptiva** o penacho, como la que se puede ver en la figura 5.

Estas columnas pueden servir como el mecanismo de perturbación que desencadene ondas de gravedad, como las provocadas por la erupción del volcán Hunga Tonga–Hunga Ha’apai en enero de 2022, que llegaron a ser medidas por todo el mundo<sup>[3]</sup>, o las que son objeto de estudio de este trabajo.

Para entender la dinámica de estas estructuras es necesario estudiar primero la composición del **magma** y su evolución al viajar desde el interior de la corteza terrestre hasta la superficie.

#### 1.3.1 Génesis de los magmas

El material volcánico que dará lugar a la columna eruptiva antes de salir a la superficie se conoce como magma. Este es una mezcla de distintas sustancias en 3 fases<sup>[4][5]</sup>:

- Una fase líquida, compuesta principalmente de silicatos y otros óxidos.
- Una fase sólida, formada mayoritariamente por cristales de olivina, piroxeno y plagioclase en el caso del basalto.
- Una fase gaseosa, que normalmente consiste en vapor de agua,  $\text{CO}_2$  y  $\text{SO}_2$ , entre otros.

La dinámica de la erupción vendrá determinada por la composición de esta mezcla, su evolución en el tiempo y la concentración relativa entre las fases que la componen. Volcanes con magmas menos evolucionados dan lugar a erupciones más efusivas que pueden incluso no llegar a formar una columna eruptiva, como ocurre en el vulcanismo hawaiano, mientras que volcanes con magmas más evolucionados pueden llegar a provocar columnas tan enormes que la cantidad de material emitido es capaz de alternar el clima durante años, como ocurrió en la erupción de 1991 del Monte Pinatubo<sup>[6]</sup>.

Debido a que el punto caliente responsable del vulcanismo en el archipiélago canario es menos intenso que el responsable de la formación de Hawaii, y la placa africana es más gruesa que la pacífica<sup>[7]</sup>, el magma canario puede formar cámaras magmáticas en la corteza y evolucionar sin erupcionar durante mucho más tiempo que el magma hawaiano<sup>[5]</sup>, lo que hace que el vulcanismo canario tienda más al dinamismo estromboliano y pueda formar pequeñas columnas eruptivas como las vistas durante la erupción del Tajogaite en 2021.



Figura 5: Columna eruptiva piliana del Monte Santa Helena el 18 de mayo de 1980.

Vale la pena señalar que en el sistema Teide-Pico viejo, en Tenerife, se han encontrado cámaras magmáticas fonolíticas (magmas muy desarrollados) a  $5\text{ km}$  de profundidad<sup>[8]</sup>, que son responsables de erupciones extremadamente explosivas (dinamismo subpliniano) como la de Montaña Blanca, hace aproximadamente 2000 años<sup>[9]</sup>. Estas erupciones serían capaces de producir columnas eruptivas mucho mayores que las vistas en las erupciones históricas de Canarias, que pueden alcanzar las decenas de kilómetros de altura.

### 1.3.2 Desgasificación del magma

Cuando el magma comienza su ascenso a la superficie experimenta una disminución de la presión que permite a los gases separarse de la disolución y formar burbujas. Este proceso favorece el crecimiento de los cristales disueltos en la mezcla, lo cual hace que la viscosidad del magma aumente<sup>[10]</sup>. El proceso de desgasificación abre la puerta a un juego entre la viscosidad del magma, la velocidad del flujo magmático y la movilidad de las burbujas de gas que será el principal determinante de la dinámica de la erupción una vez el magma llegue a la superficie.

En magmas poco viscosos y de flujo lento las burbujas tendrán una alta movilidad que les permitirá escapar del magma antes de llegar a la boca, lo que resulta en dinamismos menos explosivos como el hawaiano o el estromboliano. Este proceso de escape del gas se pudo observar en ocasiones en las laderas del Tajogaite como se puede apreciar en las figuras 6 y 7. Las nubes blancas que nacen de la ladera de la montaña corresponden a vapor de agua, siendo los demás gases expulsados por el volcán invisibles.

El gas que no logre escapar de la mezcla se concentrará en burbujas cada vez mayores, uniéndose entre ellas (coalescencia) y aumentando su volumen conforme la presión disminuye al acercarse a la boca. Al llegar a la superficie estas burbujas sufren una descompresión explosiva que volatiliza las otras dos fases de la mezcla magmática. Al ser dispersadas por el aire, las otras dos fases solidifican rápidamente en **piroclastos** de diversos tamaños, siendo estos la **ceniza**,



Figura 6: Gases escapando por las laderas del Tajogaite el 2 de octubre de 2021.



Figura 7: Escape de gases y pequeña columna eruptiva en el volcán Tajogaite el 2 de octubre de 2021.

el **picón** y las **bombas volcánicas**. Esta explosión es el primer paso en la formación de la columna eruptiva.

### 1.3.3 La columna eruptiva pliniana

En erupciones plinianas, aquellas con un **índice de explosividad volcánica**, VEI, con valor de 5 y 6, una columna eruptiva completamente formada (fig.8) se puede dividir en 3 secciones bien diferenciadas: la zona **jet**, la **convectiva** y la de **paraguas**.

A pesar de que estas erupciones son varios órdenes de magnitud mayores que la del Tajogaite, erupciones de menor explosividad pueden llegar a formar estructuras similares, aunque a una escala mucho menor y, en ocasiones, sin llegar a desarrollar alguna de las 3 secciones de la columna pliniana. Por tanto, a modo introductorio, primero se estudiará la estructura de un penacho pliniano y, posteriormente, se adaptará a la columna eruptiva del Tajogaite.

Como se explicó al final de la sección anterior, la columna eruptiva nace en la boca del volcán. La violenta descompresión de los gases en el magma pulveriza las otras dos fases de la mezcla y las envía a gran velocidad en dirección ascendente. En erupciones plinianas estas velocidades pueden alcanzar los  $600 \text{ m/s}^{[11]}$ . Son estas altas velocidades las que dan nombre a esta primera sección de columna: el **jet**.

En la zona **jet** la densidad relativa de la columna es muy superior a la del aire que la rodea, componiéndose casi exclusivamente de material volcánico (principalmente ceniza y gases), por lo que el principal mecanismo por el que este material asciende es la energía cinética resultante de la explosión en la boca. No obstante, después del impulso inicial, la columna eruptiva experimenta una rápida desaceleración debida a la atracción gravitatoria.

Gracias al Principio de Bernoulli la gran velocidad de la columna crea un área de bajas presiones en la columna de manera que el aire alrededor se ve atraída a su interior, haciendo disminuir su densidad. Además, este aire absorbido se calienta rápidamente, disminuyendo drásticamente su densidad frente a la del aire frío. La suma de estos dos procesos resulta en que la columna eruptiva, ahora formada por una mezcla de material volcánico y aire caliente, pase a tener una densidad relativa mucho menor que la del aire frío que la rodea. Esta diferencia de densidades crea fuertes corrientes convectivas que continúan empujando la columna hacia arriba más allá de lo que alcanzaría solo con la energía cinética de la zona **jet**<sup>[11][12]</sup>.



Figura 8: Columna eruptiva del volcán Pinatubo el 12 de junio de 1991.

Cuando el empuje del jet pierde protagonismo y la dinámica de la columna eruptiva pasa a venir determinada por corrientes convectivas ascendentes se pasa a la segunda y mayor sección: la zona convectiva. Esta compone el tronco de la estructura, pudiendo alcanzar decenas de kilómetros de altura.

En casos extremos es posible que en la zona jet haya demasiado material y la densidad relativa de la columna no disminuya lo suficiente para crear una corriente de convección lo suficientemente intensa para elevar toda la masa producida por el volcán. En este caso parte de la columna colapsará, precipitándose sobre la montaña y provocando flujos piroclásticos en sus laderas. Tras el colapso de la columna sí se alcanzará una diferencia de densidad suficiente para formar corrientes convectivas y el resto de la columna se seguirá desarrollando. Este colapso pudo haber ocurrido en la erupción del Vesubio del año 79<sup>[13]</sup> que provocó la destrucción de las ciudades romanas de Pompeya y Herculano.

A lo largo de la zona convectiva el aire frío continuará entrando en el interior de la columna a través de torbellinos formados por el flujo turbulento del penacho. Estos torbellinos formarán estructuras secundarias que son los que le dan la forma bulbosa característica del tronco de una columna eruptiva. De esta forma la columna irá perdiendo calor y, por tanto, capacidad de calentar el aire que absorbe, por lo que la velocidad a la que su densidad disminuye será cada vez más lenta. A su vez, la densidad de la atmósfera disminuye con la altura, por lo que llegará un punto en el que ambas densidades, atmosférica y del penacho, se igualen y desaparezcan las fuerzas de empuje. A esta altura se acumulará todo el material volcánico que haya ascendido con la columna, expandiéndose a lo ancho hasta crear un gran manto de ceniza y gases suspendidos en el aire en torno a la cima de la columna: el paraguas.

Debido a la alta inercia que carga la columna, esta no se detendrá en seco al alcanzar la altura a la que se igualan las densidades por lo que en el centro del paraguas se formará un bulbo que

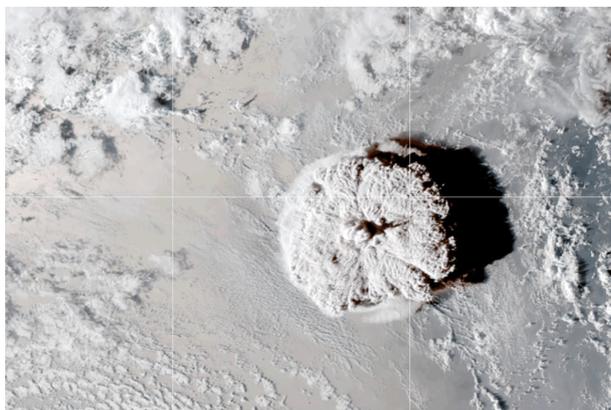


Figura 9: Paraguas del volcán Hunga Tonga-Hunga Ha'apai el 15 de enero de 2022 a las 04:50 UTC.

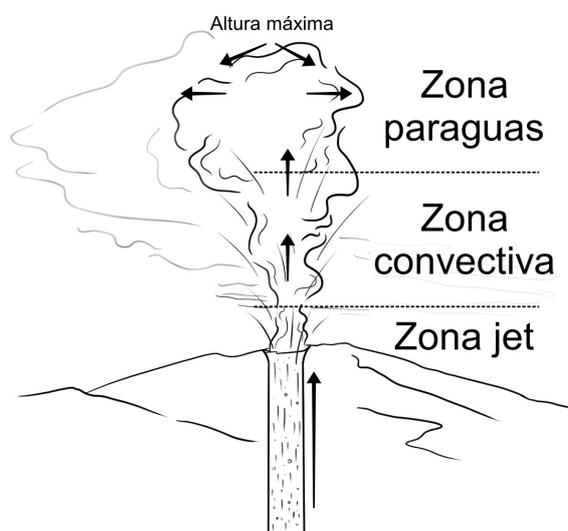


Figura 10: Diagrama de una columna eruptiva estromboliana, señalando cada zona y la dirección del flujo de masa.

tendrá una altura mayor que el resto de esta sección. Por ejemplo, en la erupción de 2022 del volcán Hunga Tonga-Hunga Ha'apai (fig. 9) mientras que el paraguas se formó a una altura de  $30\text{km}$ , el bulbo central alcanzó los  $57\text{km}$  de altitud, en la mesosfera<sup>[14]</sup>.

El material suspendido en el paraguas se verá afectado por vientos de altura en mayor medida que el resto de la columna, pudiendo ser transportados miles de kilómetros antes de precipitar.

El transporte de ceniza en la atmósfera puede tener consecuencias globales, como fue el caso de la erupción del Eyjafjallajökull en 2010, que obligó a cerrar el espacio aéreo europeo<sup>[15]</sup>, o la del Pinatubo en 1991 que afectó al clima global<sup>[6]</sup>.



Figura 11: Columna eruptiva del Tajogaite el 3 de octubre de 2021, con sus zonas y dirección del flujo de masa señalados.



Figura 12: Volcán Tajogaite en noviembre de 2021. Se pueden ver 2 bocas explosivas generando una columna eruptiva (derecha y centro), mientras una tercera, efusiva, solo forma un jet (izquierda).

Para erupciones con una explosividad menor, como fue la del Tajogaite, los efectos son más locales. En el caso palmero la ceniza llegó a precipitarse en otras islas del archipiélago, como en Gran Canaria, y afectó al tráfico aéreo interinsular.

#### 1.3.4 La columna eruptiva del Tajogaite

En erupciones menos explosivas (VEI 2 y 3) se habla de dinamismo estromboliano. Estas son las erupciones más comunes en el planeta y fue la dinámica predominante durante la erupción del Tajogaite.

La columna eruptiva asociada a esta dinámica tiene un tamaño mucho menor que en erupciones plinianas y es posible que no lleguen a formar algunas estructuras como el paraguas (fig.10). No obstante, en La Palma se llegó a formar el paraguas en varias ocasiones, gracias a la presencia de inversiones térmicas, como se ve en la figura 11.

Cabe destacar que en una erupción fisural como la del Tajogaite es común encontrar más de una boca activa al mismo tiempo, y que no todas tengan la misma dinámica, como se puede apreciar en la figura 12. Esto puede deberse a cómo los gases se mueven hacia la superficie, priorizando chimeneas con una geometría que ofrezca menos resistencia en su camino

### 1.3.5 La columna eruptiva como mecanismo de perturbación

Como se explicó en la sección 1.1, para que se dé lugar a la formación de ondas de gravedad en la atmósfera terrestre es necesario que esta se comporte como un fluido estratificado, y que se vea alterada por alguna perturbación.

La columna eruptiva de un volcán puede actuar como este mecanismo de perturbación al atravesar una inversión térmica. Como se comentó al inicio de esta introducción, la inversión térmica impide el intercambio de masa entre los estratos de la atmósfera en la que se encuentra, actuando como la membrana de un tambor. Por su parte, la columna eruptiva actúa como una baqueta que golpea dicho tambor y lo hace vibrar en torno a la situación de equilibrio. Si la inversión térmica es lo suficientemente fuerte, impedirá que la columna logre atravesarla y esto dará lugar a un juego de fuerzas entre la fuerza convectiva de la columna eruptiva y la fuerza recuperadora elástica de la inversión térmica. Este juego dará lugar a una oscilación de la atmósfera: las ondas de gravedad.

## 1.4 Ondas de gravedad en La Palma

A lo largo del día 1 de octubre de 2021 en el cielo palmero se pudo observar una formación nubosa muy peculiar. Nubes formando círculos concéntricos, con la columna eruptiva del Tajogaite en su centro (fig.13).

Este fenómeno se trata de la formación de ondas de gravedad a consecuencia de dicha erupción volcánica. Pero, para terminar de explicar este suceso, es necesario estudiar las condiciones atmosféricas que permitieron que ocurriera. Desafortunadamente no se dispone de un radiosondeo local para ese día, pero en la figura 14 se puede apreciar que la atmósfera en Canarias presentó bastante homogeneidad ese día, por lo que se pueden extrapolar los datos tomados por los radiosondeos diarios tomados desde Güímar, Tenerife, a La Palma. En la tabla 1 se pueden apreciar 3 datos importantes: la presencia de una inversión térmica a 6095 msnm, que la capa bajo esta tiene una humedad relativa del 85 % mientras que en la capa sobre la inversión es del 5 %, y que en el entorno de la inversión el viento no es muy intenso. Estos datos, sumados a la perturbación provocada por la columna eruptiva, son la razón por la que se pudo observar el patrón de nubes concéntrico:



Figura 13: Ondas de gravedad vistas desde el Roque de los Muchachos el 1 de octubre de 2021.



Figura 14: Imagen satelital de las ondas de gravedad sobre La Palma, tomada el 1 de octubre de 2021.

- La inversión térmica, necesaria para que la atmósfera se comporte como un fluido estratificado.
- La alta humedad en la masa fría, y baja humedad en la masa cálida, permitiendo que el patrón de nubes se pueda formar con facilidad, haciendo más evidente el claro contraste entre valles y crestas.
- La poca fuerza del viento, incapaz de distorsionar el patrón de nubes y permitiendo que la energía de la perturbación se disipe en todas direcciones de igual manera.

En la figura 15 se puede apreciar mejor el cambio de humedad y la inversión térmica a los 6000 metros de altura. Cabe destacar que hubo dos inversiones térmicas en la troposfera, por debajo de los 10 kilómetros de altitud, pero la primera de estas ocurrió a 836 msnm, 244 metros por debajo de la base del Tajogaite (1080 msnm), por lo que no interactuó con la columna eruptiva.

### 1.5 El modelo matemático

Para modelar estas ondas y poder estudiarlas en mayor profundidad se hizo uso del modelo de ondas de gravedad formadas por una fuente volcánica de masa desarrollado por *H. Kanamori, J. Mori, et. al. (1994)*<sup>[16]</sup>. Este modelo estudia el efecto que tiene una inyección de masa en una atmósfera isoterma y estratificada. Localmente y dentro de un mismo estrato se puede suponer que la temperatura es constante, por lo que el modelo es aplicable a las ondas producidas por el Tajogaite.

#### 1.5.1 Ecuaciones de conservación en fluidos

El modelo parte de las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía para fluidos en coordenadas cartesianas,  $(x, y, z)$ , con velocidades  $(u, v, w)$ :

$$\frac{\delta p}{\delta t} + w \frac{\delta \rho_0}{\delta z} + \rho_0 \left( \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \right) = 0, \tag{4}$$

60018 Guimar-Tenerife Observations at 00Z 01 Oct 2021

PRES hPa	HGHT m	TEMP C	DWPT C	RELH %	MIXR g/kg	DRCT deg	SKNT knot	THTA K	THTE K	THTV K
552.0	5144	-7.6	-11.4	74	2.92	120	12	314.7	324.3	315.2
529.0	5400	-10.9	-11.9	92	2.92	135	12	314.6	324.2	315.1
518.0	5641	-12.3	-12.4	99	2.86	142	12	314.8	324.3	315.3
500.0	5910	-14.1	-15.7	88	2.26	155	12	315.8	323.4	316.2
492.0	6033	-14.9	-16.9	85	2.08	165	11	316.3	323.3	316.7
488.0	6095	-12.3	-33.3	16	0.48	169	10	320.2	320.0	320.3
447.0	6765	-13.7	-45.7	5	0.14	222	5	326.6	327.1	326.6
419.0	7251	-17.4	-47.1	6	0.13	260	1	327.9	328.4	327.9
400.0	7600	-20.1	-48.1	6	0.12	150	2	328.8	329.3	328.8
333.0	8916	-30.4	-53.6	8	0.08	255	10	332.4	332.7	332.4
313.0	9360	-33.8	-55.4	9	0.07	240	12	333.5	333.8	333.5

Tabla 1: Datos del radiosondeo tomado desde Güímar el 1 de octubre de 2021 a las 00:00h<sup>[17]</sup>, destacando en verde los datos de la capa de inversión térmica.

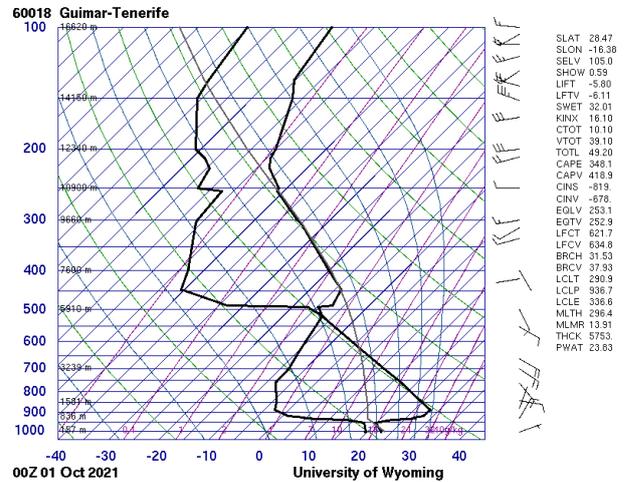


Figura 15: Radiosondeo de Güímar tomado el 1 de octubre de 2021 a las 00:00h, representado en skew-T.

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\delta u}{\delta t} &= -\frac{\delta p}{\delta x}, \\ \rho_0 \frac{\delta v}{\delta t} &= -\frac{\delta p}{\delta y}, \\ \rho_0 \frac{\delta w}{\delta t} &= -\frac{\delta p}{\delta z} - \rho g,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\frac{\delta p}{\delta t} - g\rho_0 w = c^2 \left( \frac{\delta p}{\delta t} + w \frac{\delta \rho_0}{\delta z} \right),\tag{6}$$

donde  $p$  es la variación de presión respecto al equilibrio,  $p_0$ ,  $\rho$  la variación de la densidad del aire respecto al equilibrio  $\rho_0$ ,  $g$  es la gravedad terrestre y  $c = \sqrt{\gamma R_g T_0}$  la velocidad del sonido en el estrato excitado en m/s. Se supone el aire como un gas ideal diatómico, por lo que el coeficiente adiabático es  $\gamma = 1,4$

Aplicando la conservación de la masa y de la energía, las expresiones (4) y (6), en la conservación del momento en el plano  $(x, y)$ , es decir, en las primeras dos ecuaciones de la expresión (5) se obtiene la siguiente expresión:

$$\rho_0 \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta w}{\delta z} - w \frac{g}{c^2} \right) = p \left( \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2}{\delta t^2} \right).\tag{7}$$

A su vez, suponiendo que no hay variación de densidad, esto es, suponiendo  $\rho = 0$  e introduciendo la ecuación (6) en la conservación del momento en la dirección de  $z$ , la tercera ecuación de (5), se tiene:

$$\frac{\delta^2 w}{\delta t^2} - gw \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\delta \rho_0}{\delta z} + g \frac{1}{c^2} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta p}{\delta z} + p \frac{g}{c^2} \right).\tag{8}$$

Estas dos ecuaciones, relacionadas entre ellas y añadiendo dos dependencias que se explicarán a continuación, darán lugar a la expresión para la variación de presión respecto al espacio y el tiempo.

### 1.5.2 Análisis de frecuencias

Por simplicidad, a continuación se analiza solo la propagación de ondas en el plano  $(x, z)$ , siendo este desarrollo equivalente para el plano  $(y, z)$ , con frecuencia  $\omega$  y números de onda en las direcciones  $x$  y  $z$ ,  $k$  y  $m$  respectivamente. En esta aproximación las velocidades en  $x$  y  $z$ ,  $u$  y  $w$ , así como los cocientes  $p/p_0$  y  $\rho/\rho_0$  dependen de las dos coordenadas espaciales y del tiempo según:

$$e^{(az)} e^{(i\omega t + kx + mz)}.\tag{9}$$

Añadiendo esta dependencia en las ecuaciones anteriores, (7) y (8), se obtiene que la constante  $a = 1/2H_s$ , en la que  $H_s$  es la altura de escala, en metros. Este factor representa el aumento de altitud necesario para disminuir la presión de la atmósfera por un factor de  $e$  y se expresa

como  $H_s = \frac{R_g T_0}{g}$ . Además, el cálculo de la relación de dispersión de esta onda plana tiene como resultado:

$$m^2 = k^2 \left( \frac{\omega_b^2}{\omega^2} - 1 \right) + \frac{\omega^2 - \omega_a^2}{c^2}, \quad (10)$$

donde:

- $\omega_b$  es la Frecuencia de Brunt-Väisälä, en Hz. Es la frecuencia natural a la que oscilará una masa de aire que sufra un ascenso adiabático en un entorno en equilibrio hidroestático frente a desplazamientos verticales. Viene definida por  $\omega_b^2 = \frac{g(\gamma-1)}{\gamma H_s}$ .
- $\omega_a$  es la frecuencia de corte acústica, en Hz. Esta frecuencia marca el límite bajo el cual no se propagarán ondas sonoras. Por debajo de esta frecuencia solo se encuentran oscilaciones de origen gravitatorio. Se expresa tal que  $\omega_a = \frac{c}{2H_s}$ .

De esta relación de dispersión se puede deducir que, en el caso de no haya dispersión en la componente vertical y  $x = 0$ , la frecuencia de oscilación coincidirá con la de corte acústico y, por tanto, se estará ante la presencia de ondas acústicas. La dispersión en la componente vertical,  $m$ , se supondrá nula en este trabajo pues solo considera la propagación de ondas en la componente radial, en el plano  $(x, y)$ , a lo largo de la inversión térmica.

### 1.5.3 La perturbación

La mecánica que describe el comportamiento la columna eruptiva es un tema con una alta complejidad. Como primera aproximación se puede entender que el penacho actúa sobre la atmósfera de dos formas: aportando masa en forma de material volcánico, y aportando energía en forma de calor. Por lo general el efecto de la inyección de masa es distinto al de la inyección de energía pero, debido a que el modelo para la inyección de masa es más general y sencillo que para la energía, solo se considerará el efecto de la masa sobre la atmósfera. Asimismo, se se supondrá que:

- Los flujos de masa y energía son constantes: En una erupción volcánica los flujos de masa y energía emitidos por las bocas activas no son constantes en el tiempo. No obstante, por simplicidad se supondrá que sí lo son. Esta aproximación es válida para el caso estudiado pues la variación en los flujos solo afectará a la amplitud de la onda y, en intervalos tiempos pequeños (horas), esta puede ser infinitesimal.
- La fuente es puntual: Se tratará a la columna como una función de Dirac. Teniendo en cuenta que se está trabajando en el rango de las decenas de kilómetros, una columna con una anchura en las centenas de metros se puede suponer puntual sin perder precisión.

Matemáticamente esto se expresa como dos sumandos que se añadirán a los segundos miembros de las ecuaciones (7) y (8) respectivamente:

$$\begin{aligned} 4\pi F_M e^{i\omega t} \delta(R - R_S), \\ 4\pi F_E e^{i\omega t} \delta(R - R_S), \end{aligned} \quad (11)$$

con  $F_M$  el flujo de masa, en kg/s,  $F_E$  el flujo de energía, en J/s y  $R_s$  la posición de la fuente puntual, situada en  $R_S = (0, 0, z_s)$ , con  $z_s$  siendo la altura, en metros, a la que ocurre la perturbación.

#### 1.5.4 La variación de presión

Siguiendo el desarrollo expuesto en el anexo A del artículo *H. Kanamori, J. Mori, et. al. (1994)*<sup>[16]</sup> con las ecuaciones anteriores, se llega a la siguiente expresión para la variación de presión medida desde la superficie respecto a la distancia y el tiempo, considerando únicamente el aporte de la inyección de masa.

$$p(x, y, z, t) = \frac{F_M}{\pi R} e^{-\frac{z-z_s}{2H_S}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \exp \left[ i \left( \omega t \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \sqrt{\omega^2 - \omega_a^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}} t_0 \right) \right] d\omega, \quad (12)$$

donde:

- $R$  es la distancia al origen de la perturbación en metros,  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_s)^2}$ .
- $\omega_c$  se define como  $\omega_c = \omega_b \frac{|z-z_s|}{R}$ .
- $t_0$  es el cociente  $t_0 = \frac{R}{c}$ , que tiene unidades de segundos.

Esta integral de la ecuación (12) se desarrolla como:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \exp \left[ i \left( \omega t \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \sqrt{\omega^2 - \omega_a^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}} t_0 \right) \right] d\omega \\ &= \int_0^{\omega_c} \frac{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}} \exp \left[ -\frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} \sqrt{\omega_a^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2}} t_0 \right] \cos [\omega t] d\omega + \\ & \quad - \int_{\omega_c}^{\omega_b} \frac{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}} \sin \left[ \omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \sqrt{\omega_a^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2}} t_0 \right] d\omega + \\ & \quad + \int_{\omega_b}^{\omega_a} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \exp \left[ -\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \sqrt{\omega_a^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}} t_0 \right] \cos [\omega t] d\omega + \\ & \quad + \int_{\omega_a}^\infty \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \cos \left[ \omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \sqrt{\omega^2 - \omega_a^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}} t_0 \right] d\omega, \end{aligned} \quad (13)$$

tal que la integral se divide en 4 integrales acotadas por las frecuencias  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  y  $\omega_c$  cubriendo todo el espectro de frecuencias de manera que las tres primeras integrales se evalúan en las frecuencias por debajo de las acústicas, y la última únicamente modela ondas acústicas. Esta separación es necesaria debido a que el comportamiento de la exponencial compleja de la ecuación (12) cambia entre esos intervalos de frecuencia.

Es importante resaltar que, en el caso específico que se mida la diferencia de presión a la misma altura que ocurre la perturbación,  $\omega_c$  será nulo y la expresión (13) tendrá una forma muy similar a la del modelo para la fuente de energía<sup>[16]</sup>. Sin embargo, debido a que el efecto que la fuente

de masa tiene sobre la perturbación es mucho menor que el de la energía, trabajar en este caso aporta menos información que cuando se mide a una altura  $z \neq z_s$ .

Finalmente, se puede escribir la variación de presión como:

$$\begin{aligned}
 p(x, y, z, t) = \frac{F_M}{\pi R} e^{-\frac{z-z_s}{2H_S}} & \left[ \int_0^{\omega_c} \frac{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}} \exp \left[ -\frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} \sqrt{\omega_a^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2}} t_0 \right] \cos [\omega t] d\omega + \right. \\
 & - \int_{\omega_c}^{\omega_b} \frac{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}} \sin \left[ \omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \sqrt{\omega_a^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2}} t_0 \right] d\omega + \\
 & + \int_{\omega_b}^{\omega_a} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \exp \left[ -\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \sqrt{\omega_a^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}} t_0 \right] \cos [\omega t] d\omega + \\
 & \left. + \int_{\omega_a}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \cos \left[ \omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \sqrt{\omega^2 - \omega_a^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}} t_0 \right] d\omega \right]. \tag{14}
 \end{aligned}$$

## 1.6 Objetivos

El objetivo de este trabajo consistirá en estudiar la variación de presión respecto al tiempo y la distancia debida a la presencia de ondas de gravedad de origen volcánico en la atmósfera de La Palma el día 1 de octubre de 2021. Para ello se aplicará el modelo descrito por la ecuación (14) para computar una simulación del fenómeno.

## 2 Metodología

---

This second chapter goes through the methodology followed to develop a *Python* code with which to run a simulation of the atmospheric gravity waves seen in La Palma on the 1<sup>st</sup> of October 2021, beginning with how the equations were modified to fit the *Python* language and then explaining how the code was developed and what every section of it does.

---

## 2.1 La ecuación evaluada

La variación de presión descrita por la ecuación (14) no es posible evaluarla de forma analítica, por lo que es necesario integrar numéricamente. Para ello se desarrolló un código en *Python* haciendo uso del paquete *scipy*. El código completo se puede consultar en el anexo A de este trabajo.

Antes de poder ejecutar la integración numérica primero es necesario realizar una serie de pasos previos. Para empezar, se divide la ecuación en dos partes, una variable, dependiente de la distancia, y una integral, dependiente de la frecuencia, distancia y tiempo, tal que:

$$p(\omega, R, t) = F(R)W(\omega, R, t), \quad (15)$$

con:

$$F(R) = \frac{F_M}{\pi R} e^{\frac{z-z_s}{2H_s}}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} W(\omega, R, t) = & \int_0^{\omega_c} \frac{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}} \exp \left[ -\frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} \sqrt{\omega_a^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2}} t_0 \right] \cos[\omega t] d\omega + \\ & - \int_{\omega_c}^{\omega_b} \frac{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}} \sin \left[ \omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \sqrt{\omega_a^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2}} t_0 \right] d\omega + \\ & + \int_{\omega_b}^{\omega_a} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \exp \left[ -\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \sqrt{\omega_a^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}} t_0 \right] \cos[\omega t] d\omega + \\ & + \int_{\omega_a}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \cos \left[ \omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \sqrt{\omega^2 - \omega_a^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}} t_0 \right] d\omega. \end{aligned} \quad (17)$$

La evaluación de las frecuencias acústicas requiere de mucha capacidad computacional y no aporta información relevante a este estudio. Es por eso que en este trabajo solo se estudiarán las ondas de gravedad presentes en el sistema, calculando la variación de presión para frecuencias en el intervalo de 0 Hz a  $\omega_a$ . En adelante no se tendrá en cuenta la 4ª integral de la expresión (17).

## 2.2 Cambio de variable

Tal y como se explica en el anexo B del artículo *H. Kanamori, M. Mori, et al. (1994)<sup>[16]</sup>*, en la expresión (17) aparecen una serie de indeterminaciones al computar la integración numérica. Por ello se identificó el origen de la indeterminación para cada integral y, posteriormente, se evaluó un cambio de variable que la evitara. Por conveniencia se ha llamado  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$  a las integrales que conforman la integral (17)<sup>1</sup>. Los cambios efectuados fueron:

$$h = \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} \text{ para } W_1, \quad k = \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \text{ para } W_2, \quad \text{y } l = \sqrt{\omega^2 - \omega_b^2} \text{ para } W_3. \quad (18)$$

<sup>1</sup>El programa de *Python* está preparado para poder calcular  $W(\omega, R, t)$  incluyendo la cuarta ecuación,  $W_4$ . Esta última ecuación no presenta indeterminaciones y no necesita de cambios de variable.

De manera que  $W(\omega, R, t)$  queda:

$$\begin{aligned}
W(\omega, R, t) = & 2 \int_0^{\sqrt{\omega_c}} \frac{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2(h)}}{\sqrt{2\omega_c - h^2}} \exp \left[ -\frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2(h)} \sqrt{\omega_a^2 - \omega^2(h)}}{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2(h)}} t_0 \right] \cos [\omega(h)t] dh + \\
& + 2 \int_{\sqrt{\omega_b - \omega_c}}^0 \frac{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2(k)}}{\sqrt{2\omega_c + k^2}} \sin \left[ \omega(k)t - \frac{\sqrt{\omega^2(k) - \omega_c^2} \sqrt{\omega_a^2 - \omega^2(k)}}{\sqrt{\omega_b^2 - \omega^2(k)}} t_0 \right] dk + \\
& + 2 \int_0^{\sqrt{\omega_a - \omega_b}} l \frac{\sqrt{\omega^2(l) - \omega_b^2}}{\sqrt{\omega^2(l) - \omega_c^2}} \exp \left[ -\frac{\sqrt{\omega^2(l) - \omega_c^2} \sqrt{\omega_a^2 - \omega^2(l)}}{l \sqrt{2\omega_b^2 - l^2}} t_0 \right] \cos [\omega(l)t] dl.
\end{aligned} \tag{19}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\omega(h) &= \omega_c - h^2, \\
\omega(k) &= \omega_c + k^2, \\
\omega(l) &= \omega_b + l^2.
\end{aligned} \tag{20}$$

## 2.3 Aplicación del modelo

Antes de poder computar la ecuación (15) es necesario obtener la temperatura de la capa de inversión térmica y el flujo de masa en la columna eruptiva. Para el primer dato se hizo uso de los datos del radiosondeo tomado en Güímar el 1 de octubre de 2021 a las 00:00h, proporcionados por la Universidad de Wyoming<sup>[17]</sup>, siendo este 260.85 K. Para el segundo se recurrió al artículo *Degruyter, W. y C. Bonadonna* (2012)<sup>[18]</sup>, obteniendo a una estimación del flujo de masa para una columna de 5 km de altura de  $10^5$  kg/s.

El programa de *Python* escrito para hacer simulaciones usando este modelo se divide en 4 partes que se describirán a continuación.

### 2.3.1 Definición de variables

En primer lugar se importaron los módulos necesarios para la ejecución del programa, siendo estos *pyplot*, del paquete *matplotlib*; *numpy* y *integrate*, perteneciente al paquete *scipy*.

```

# -*- coding: utf-8 -*-

from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
from scipy import integrate as integrate

```

Seguidamente, se definen las constantes físicas del sistema estudiado, tales que:

```

#Physical constants are defined.
T = 260.85 #K
GRAVITY = 9.81 #[m/s^2].
R = 8.31446261815324 #[J/(mol.K)], molar gas constant.

```

```

M_AIR= 0.0289645 #[kg/mol], molar mass of air.
MASS_FLUX = 1E5 #[kg/s] Estimation for a 5km plume.
DISTANCE_TO_PERTURBATION = 20000. #[m] #Max distance from the volcano to where clouds
↪ where seen in La Palma.
PERTURBATION_HEIGHT = 6100. #[m] #Approximate height of the inversion layer.
MEASUREMENT_HEIGHT = 0. #[m] #For a supposed barometer at sea level.

```

A continuación se fijaron las variables necesarias para la ejecución del código:

```

#Variables for the code are defined.
NUMBER_OF_POINTS = 1000
TIME_LIMIT = 7200. #[s] #How long the simulation runs.
SUBDIVISIONS = 100000 #How many subdivisions the integrals have.
SPATIAL_RESOLUTION = 100 #[m] #Distance between points in space where the difference
↪ in pressure will be calculated.
DISTANCES = int(DISTANCE_TO_PERTURBATION/SPATIAL_RESOLUTION)
RADIUS = np.linspace(1, DISTANCE_TO_PERTURBATION, DISTANCES) #[m]

```

Finalmente, se construyen las expresiones para las variables físicas del sistema. Entre ellas, las frecuencias de Brunt-Väisälä y la de corte acústica. La frecuencia  $\omega_c$  se calculará en la tercera parte del código debido a que esta depende de la distancia.

```

#Physical variables are defined:
ADIABATIC_COEFFICIENT = 1.4 #diatomic gas value.
r_air = R/M_AIR #[m/s]^2.K^-1, gas constant for air
sound_speed = np.sqrt(ADIABATIC_COEFFICIENT*r_air*T) #[m/s]
height_scale = r_air * T / GRAVITY #[m]
time = np.linspace(0., TIME_LIMIT, NUMBER_OF_POINTS) #[s]
radius = np.sqrt((RADIUS * RADIUS) + (MEASUREMENT_HEIGHT - PERTURBATION_HEIGHT) *
↪ (MEASUREMENT_HEIGHT - PERTURBATION_HEIGHT)) #[m]

#Frequencies are defined:
Acoustic_Cutoff_Frequency = sound_speed / (2 * height_scale) #[Hz]
Brunt_Vaisala_Frequency = np.sqrt((ADIABATIC_COEFFICIENT - 1) * GRAVITY /
↪ (ADIABATIC_COEFFICIENT * height_scale)) #[Hz]

```

### 2.3.2 Definición de funciones

En esta segunda parte se definieron las integrales  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$ , por separado, como funciones<sup>2</sup>. Cada función calcula primero el valor de  $\omega(i)$ , con  $i = h, k, l$ , y luego la integral correspondiente.

<sup>2</sup>El código disponible en el Anexo A también cuenta con la integral  $W_4$ , aunque no será ejecutada para este trabajo.

```

"""=====W1====="""

def W1(u):
    wu = w_c - u * u
    w1 = 2 * np.sqrt(Brunt_Vaisala_Frequency * Brunt_Vaisala_Frequency - wu *
    ↪ wu)/(np.sqrt(2 * w_c - u * u)) * np.exp(-(np.sqrt(w_c * w_c - wu * wu) *
    ↪ np.sqrt(Acoustic_Cutoff_Frequency * Acoustic_Cutoff_Frequency - wu *
    ↪ wu))/(np.sqrt(Brunt_Vaisala_Frequency * Brunt_Vaisala_Frequency - wu * wu)) *
    ↪ time_0) * np.cos(wu * time[t])
    return w1

"""=====W2====="""

def W2(u):
    wu = w_c + u * u
    w2 = 2 * np.sqrt(Brunt_Vaisala_Frequency * Brunt_Vaisala_Frequency - wu * wu) /
    ↪ (np.sqrt(u * u + 2 * w_c)) * np.sin(wu * time[t] - (np.sqrt(wu * wu - w_c * w_c) *
    ↪ np.sqrt(Acoustic_Cutoff_Frequency * Acoustic_Cutoff_Frequency - wu * wu))
    ↪ (np.sqrt(Brunt_Vaisala_Frequency * Brunt_Vaisala_Frequency - wu * wu)) * time_0)
    return w2

"""=====W3====="""

def W3(u):
    wu = Brunt_Vaisala_Frequency + u * u
    w3 = 2 * u * np.sqrt(wu * wu - Brunt_Vaisala_Frequency *
    ↪ Brunt_Vaisala_Frequency)/(np.sqrt(wu * wu - w_c * w_c)) * np.exp(-(np.sqrt(wu * wu
    ↪ - w_c * w_c) * np.sqrt(Acoustic_Cutoff_Frequency * Acoustic_Cutoff_Frequency - wu
    ↪ * wu))/(u * np.sqrt(2 * Brunt_Vaisala_Frequency + u * u)) * time_0) * np.cos(wu *
    ↪ time[t])
    return w3

```

La variable *time* aparece con un índice  $[t]$  pues para calcular la variación temporal es necesario evaluar cada integral para cada instante de tiempo.

### 2.3.3 Integración numérica

Con el fin de poder calcular tanto la evolución temporal como la radial, la integración numérica se hace para todos los instantes de tiempo en cada punto del espacio, construyendo así un array de 2 dimensiones al que se denominó  $pressure[R, t]$ . Esto se consiguió mediante el uso de dos bucles *for*: el primero en la dimensión radial y el segundo, dentro del anterior, para la dimensión temporal.

El bucle para la componente radial empieza calculando las variables dependientes de la distancia para cada valor del radio y, posteriormente, se pasa al bucle temporal donde se efectúa la integración numérica de las tres integrales para todos los valores del tiempo. Por último se

hacen las operaciones necesarias para obtener los valores de la variación de presión para cada punto del espacio e instante de tiempo.

```

pressure = np.zeros(shape = (DISTANCES, NUMBER_OF_POINTS)) #empty array to be filled by
↳ the results of each calculation for each MEASUREMENT of radius.

#Solving the integrals for each point in space.

for r in range (DISTANCES):

    #F(F_M, R) is calculated.

    F = MASS_FLUX/(np.pi*radius[r]) * np.exp(- (MEASUREMENT_HEIGHT - PERTURBATION_HEIGHT)
    ↳ / (2 * height_scale))

    #w_c is calculated.

    w_c = (np.abs(MEASUREMENT_HEIGHT-PERTURBATION_HEIGHT)/radius[r]) *
    ↳ Brunt_Vaisala_Frequency
    time_0 = radius[r] / sound_speed #[s]

    #Empty arrays to be filled by the results of the integrals below
    W_1 = np.empty(shape = NUMBER_OF_POINTS)
    W_2 = np.empty(shape = NUMBER_OF_POINTS)
    W_3 = np.empty(shape = NUMBER_OF_POINTS)

    #Solving the integrals for each moment in time.
    for t in range(NUMBER_OF_POINTS):

        #The integration limits are defined.

        a1 = 0. #Lower limit
        b1 = np.sqrt(w_c) #Upper limit

        a2 = np.sqrt(Brunt_Vaisala_Frequency - w_c) #Lower limit
        b2 = 0. #Upper limit

        a3 = 0. #Lower limit
        b3 = np.sqrt(Acoustic_Cutoff_Frequency - Brunt_Vaisala_Frequency ) #Upper limit

        #Integrals are calculated.

        W_1[t] = integrate.quad(W1, a1, b1, limit = SUBDIVISIONS)[0]

        W_2[t] = integrate.quad(W2, a2, b2, limit = SUBDIVISIONS)[0]

```

```

W_3[t] = integrate.quad(W3, a3, b3, limit = SUBDIVISIONS)[0]

W = np.empty(shape = NUMBER_OF_POINTS) #Empty array to be filled by the results of
↳ the sum below
for i in range(NUMBER_OF_POINTS):
    W[i] = W_1[i] + W_2[i] + W_3[i] #Each element of every integral is added to a
↳ single element of W.

pressure[r] = F * W

```

### 2.3.4 Representación gráfica

Finalmente se representan tanto la variación temporal de presión para un punto específico del espacio, como la variación espacial de presión para un tiempo determinado. Esta segunda representación es posible repetirla en todo el rango temporal, obteniendo así una animación de la onda de gravedad.

```

"""=====TEMPORAL PLOT=====
"""

#Distance to perturbation
D = -1 #For R = 20km. For R at any other distance, change this number, from 0 to
↳ DISTANCES - 1.

plt.figure(1)
plt.plot(time[30:], pressure[D,30:]))

plt.grid()
plt.xlabel("Tiempo [s]")
plt.ylabel("ΔPresión (Pa)")
plt.xlim(0,TIME_LIMIT)

"""=====RADIAL PLOT=====
"""

T = -1 #For time = 7200. For time at any other value, change this number, from 0 to
↳ NUMBER_OF_POINTS - 1.

plt.figure(2)
plt.plot(RADIUS[:,], pressure[:,5])

plt.grid()
plt.xlabel("Distancia [m]")
plt.ylabel("ΔPresión (Pa)")
plt.xlim(0,DISTANCE_TO_PERTURBATION)

```

En la representación temporal se descartan los primeros 30 puntos debido a la presencia de ruido en los instantes iniciales de la perturbación. Las variables  $D$  y  $T$  se utilizan para elegir a qué distancia evaluar la variación de presión frente al tiempo, y a qué tiempo calcular la variación de presión respecto a la distancia, respectivamente.

### 3 Resultados y discusión

---

In this chapter the results of the model simulations are shown and discussed, both for the pressure variation in time and space. Two modes of oscillation are found in these results, one being acoustic and the other being strictly gravitational. Finally, several plots for different moments in time are used to show the change in pressure in both time and space.

---

### 3.1 Variación temporal de presión

Haciendo uso del código descrito en la sección anterior se computó una simulación de la variación de presión medida durante 2 horas por un barómetro a nivel del mar situado a 20 km del Tajogaite. El resultado de este cálculo se puede ver en la figura 16.

Se pueden apreciar dos modos de vibración. Para diferenciar de qué modos se trata, se repite la simulación para un barómetro situado a 100 metros de la montaña. De la relación de dispersión de esta onda, descrita por la ecuación (10), se puede ver que la frecuencia en este punto, tan próximo a cero, será aproximadamente igual a la de corte acústico. Por tanto, este primer modo de oscilación corresponde con ondas acústicas de muy baja frecuencia y, en consecuencia, el segundo modo de vibración será la onda de gravedad.

En la figure 14 se pueden apreciar ambos modos de oscilación en el patrón de las nubes, pues se pueden ver franjas nubosas de menor anchura entre las franjas más anchas, que corresponden con el modo acústico y el de gravedad respectivamente.

### 3.2 Variación espacial de presión

Para estudiar la variación de presión respecto a la distancia se calculó la variación de presión frente al tiempo cada 100 metros desde el origen hasta una distancia de 20 km de la montaña a 36 segundos del inicio de la oscilación. Se obtuvo el pulso de onda que aparece en la figura 18.

El estudio de la evolución de la oscilación respecto del tiempo para todo el espacio consistió en la representación de la misma variación espacial para distintos tiempos. Poco después del inicio de la perturbación, fig.19, no se puede apreciar bien la presencia de 2 modos de oscilación.

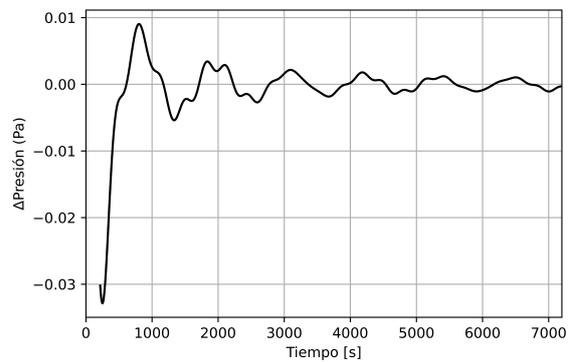


Figura 16: Variación de presión frente al tiempo a 20 km del Tajogaite.

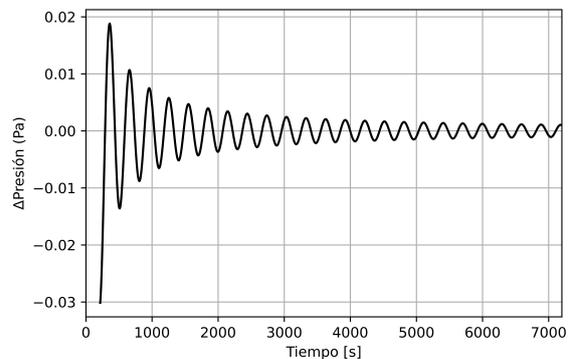


Figura 17: Variación de presión frente al tiempo a 100 m del Tajogaite.

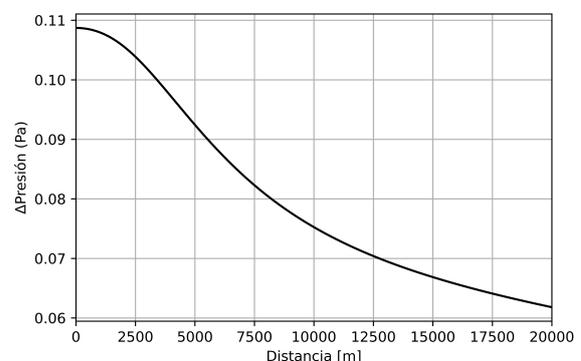


Figura 18: Variación de presión frente a la distancia 36 segundos después del inicio de la perturbación.

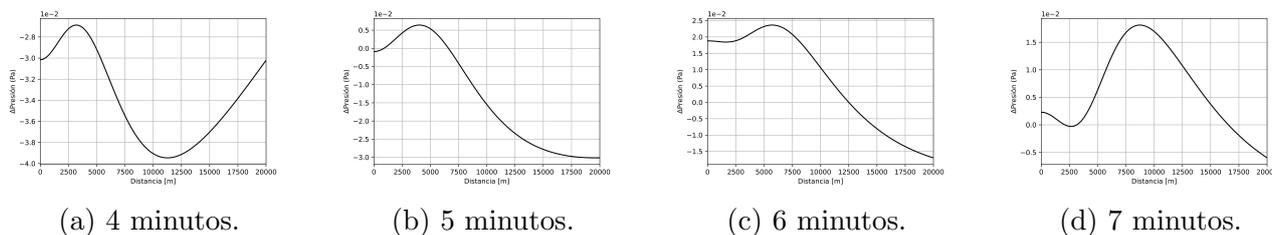


Figura 19: Variación de presión frente a la distancia entre 4 y 7 minutos después del inicio de la perturbación.

No obstante, pasado suficiente tiempo, una vez la onda se termina de formar, sí es posible distinguir ambos modos. En la figura 20 se ve cómo el modo acústico viene modulado por el modo gravitatorio, sobre todo en los primeros 10 kilómetros desde el origen.

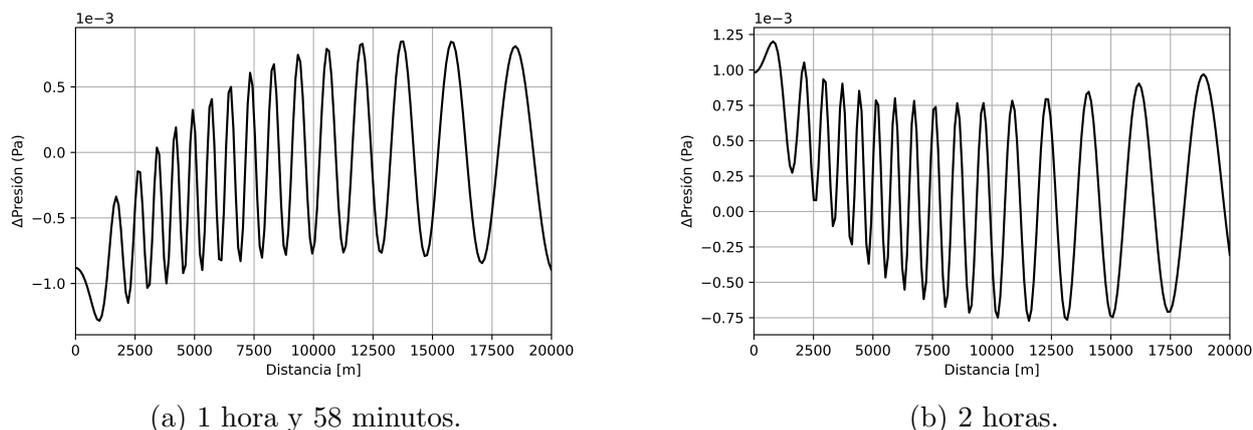


Figura 20: Variación de presión frente a la distancia entre 1 hora y 58 minutos y 2 horas después del inicio de la perturbación.

## 4 Conclusión

---

In this final chapter the conclusions for this Final Project are presented, as well as some ideas for future works in the subject.

---

Este Trabajo de Fin de Grado, por un lado, prueba que es posible aplicar un modelo diseñado para erupciones plinianas a erupciones de una explosividad mucho menor, como fue la del Tajogaite en 2021. Por otro lado abre la puerta a investigaciones futuras para, por ejemplo, realizando el trabajo inverso y obtener magnitudes vulcanológicas como el flujo de masa a partir de las frecuencias de oscilación de las ondas de gravedad que una erupción pueda provocar.

En los resultados de las simulaciones presentados en la sección anterior (figs. 16-20), las variaciones de presión medidas desde el nivel del mar se encuentran por debajo de 1 Pa, por lo que, de tener disponibles datos de barómetros reales, no sería posible discernir las ondas de gravedad del ruido de fondo. En el estudio realizado por *H. Kanamori, M. Mori, et al.*(1994)<sup>[16]</sup> para la erupción del Pinatubo en 1991 los resultados de sus simulaciones dan variaciones en las centenas de Pa para una inyección de masa (en los millares para una inyección de energía), las cuales sí fueron medidas por barómetros en la superficie. La diferencia entre estos resultados era de esperar, pues la erupción del Pinatubo fue varios órdenes de magnitud más explosiva que la del Tajogaite, por lo que provocó una perturbación en la atmósfera varios órdenes de magnitud mayor.

Es importante destacar que las condiciones que había el 1 de octubre de 2021 en La Palma dieron lugar a un escenario casi ideal para poder observar este fenómeno en erupciones de baja intensidad, que permitió tomar varias aproximaciones que simplificaron notablemente la resolución del problema. Como se comentó en la introducción de este trabajo, en la figura 14 se puede observar que las ondas se dispersan casi sin anisotropía debido a la poca intensidad del viento en altura, dando lugar a un patrón de nubes circular. Esto permite estudiar la propagación de ondas suponiendo que estas se propagan de igual forma en todas direcciones del plano  $(x, y)$ . Además de la poca intensidad del viento, la tabla 1 muestra el gran contraste en humedad relativa entre las capas entre las que se encontró la inversión térmica, lo que aumentó la nitidez de las formaciones nubosas. Todo esto hacen de este suceso un ejemplo perfecto desde el que empezar a investigar en esta materia.

## Referencias

- [1] C. Nappo, *An introduction to atmospheric gravity waves*, 2<sup>a</sup> edición. Elsevier, 2013, ISBN: 978-0-12-385223-6.
- [2] M. K. Y. R. R. Rogers, *A Short Course in Cloud Physics*. Pergamon, 1976, págs. 22-25, ISBN: 84-291-4143-X.
- [3] e. a. C.J. Wright N.P. Hindley, “Surface-to-space atmospheric waves from Hunga Tonga–Hunga Ha’apai eruption”, *Nature*, vol. 609, págs. 741-746, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41586-022-05012-5>.
- [4] F. Lécuyer, “Génesis de los magmas”, en *Fabulosos Volcanes*, Tikal Ediciones, 2002, págs. 88-89, ISBN: 84-305-4341-4.
- [5] N. Rogers, “Chapter 4 - The Composition and Origin of Magmas”, en *The Encyclopedia of Volcanoes*, H. Sigurdsson, ed., Second Edition, Amsterdam: Academic Press, 2015, págs. 93-112, ISBN: 978-0-12-385938-9. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385938-9.00004-3>.
- [6] e. a. D.E. Parker H. Wilson, “The Impact of Mount Pinatubo on World-Wide Temperatures”, *International Journal of Climatology*, vol. 16, n.º 5, págs. 487-497, 1996. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0088\(199605\)16:5<487::AID-JOC39>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0088(199605)16:5<487::AID-JOC39>3.0.CO;2-J).
- [7] J. Carracedo, *Volcanes de las Islas Canarias. Volumen IV: La Palma, El Hierro y La Gomera*, Primera edición. Rueda, 2008, ISBN: 8472071901.
- [8] I. Koulakov, L. D’Auria, J. Prudencio et al., “Local Earthquake Seismic Tomography Reveals the Link Between Crustal Structure and Volcanism in Tenerife (Canary Islands)”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 128, n.º 3, e2022JB025798, 2023, e2022JB025798 2022JB025798. DOI: <https://doi.org/10.1029/2022JB025798>.
- [9] J. Carracedo, “The Last 2 ky of Eruptive Activity 8 of the Teide Volcanic Complex: Features and Trends”, en *Teide Volcano. Active Volcanoes of the World*, V. T. J.C. Carracedo, ed., Springer-Verlag, 2013. DOI: [10.1007/978-3-642-25893-0\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-25893-0_8).
- [10] A. Burgisser y W. Degruyter, “Chapter 11 - Magma Ascent and Degassing at Shallow Levels”, en *The Encyclopedia of Volcanoes*, H. Sigurdsson, ed., Second Edition, Amsterdam: Academic Press, 2015, págs. 225-236, ISBN: 978-0-12-385938-9. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385938-9.00011-0>.
- [11] R. Sparks, “The dimensions and dynamics of volcanic eruption columns”, *Bulletin of Volcanology*, vol. 48, págs. 3-15, 1986. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01073509>.
- [12] S. Carey y M. Bursik, “Chapter 32 - Volcanic Plumes”, en *The Encyclopedia of Volcanoes*, H. Sigurdsson, ed., Second Edition, Amsterdam: Academic Press, 2015, págs. 571-585, ISBN: 978-0-12-385938-9. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385938-9.00032-8>.
- [13] A. Neri, T. Esposti Ongaro, G. Menconi et al., “4D simulation of explosive eruption dynamics at Vesuvius”, *Geophysical Research Letters*, vol. 34, n.º 4, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1029/2006GL028597>.
- [14] *Tonga Volcano Plume Reached the Mesosphere*, Consultado el 10 de mayo de 2024. dirección: <https://earthobservatory.nasa.gov/images/149474/tonga-volcano-plume-reached-the-mesosphere>.
- [15] E. T., “El Eyjafjalla”, en *Volcanes*, Tikal Ediciones, 2012, ISBN: 978-84-9928-080-6.

- 
- [16] H. Kanamori, J. Mori y D. G. Harkrider, “Excitation of atmospheric oscillations by volcanic eruptions”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 99, n.º B11, págs. 21 947-21 961, 1994. DOI: <https://doi.org/10.1029/94JB01475>.
- [17] U. de Wyoming, *Radiosondeo meteorológico de Gúímar para el 1 de octubre, 2021*, Consultado el 19 de febrero de 2024. dirección: <https://weather.uwyo.edu/cgi-bin/sounding?region=africa&TYPE=TEXT%3ALIST&YEAR=2021&MONTH=10&FROM=0100&TO=0112&STNM=60018>.
- [18] W. Degruyter y C. Bonadonna, “Improving on mass flow rate estimates of volcanic eruptions”, *Geophysical Research Letters*, vol. 39, n.º 16, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1029/2012GL052566>.

## Catálogo de imágenes

**Figura 2:** *Sombrero del Teide*, Periódico El Día, 2019, <https://www.eldia.es/tenerife/2019-02-18/3-mal-tiempo-Teide-pone-sombrero.htm>. Consultado en mayo de 2024.

**Figura 5:** *Erupción del Monte Santa Helena*, Servicio Geológico de Estados Unidos(USGS), 1980, <https://www.usgs.gov/media/images/mount-st-helens-eruption>. Consultado en mayo de 2024.

**Figura 8:** *Columna eruptiva del Pinatubo*, Servicio Geológico de Estados Unidos (USGS), 1991, <https://www.volcanodiscovery.com/fr/pinatubo/chronology-1991-eruption.html>. Consultado en mayo de 2024.

**Figura 9:** *Paraguas del Hunga Tonga-Hunga Ha'apai*, NASA Earth Observatory, 2022, <https://www.nasa.gov/earth/tonga-eruption-blasted-unprecedented-amount-of-water-into-stratosphere/>. Consultado en mayo de 2024.

**Figura 11:** *Columna eruptiva del Tajogaite*, fotografía por Marcos del Mazo, 2021, <https://www.alamy.com/roque-de-los-muchachos-spain-03rd-oct-2021-view-from-the-roque-de-los-muchachos-highest-point-of-la-palma-of-the-smoke-and-ash-column-of-the-volcano-of-cumbre-vieja-in-the-canary-island-of-la-palma-which-continues-to-erupt-lava-after-15-days-credit-marcos-del-mazoalamy-live-news-image446346844.html>. Consultado en mayo de 2024.

**Figura 12:** *Erupción del Tajogaite*, RTVE, 2021, <https://www.rtve.es/noticias/20211129/erupcion-volcan-palma-ultima-hora/2234602.shtml>. Consultado en mayo de 2024.

**Figura 13:** *Ondas de gravedad en La Palma desde el Roque de los Muchachos*, EELabs, 2021, [https://www.elespanol.com/ciencia/meteorologia/20211004/misteriosas-ondas-apa-recido-volcan-palma/616939150\\_0.html](https://www.elespanol.com/ciencia/meteorologia/20211004/misteriosas-ondas-apa-recido-volcan-palma/616939150_0.html). Consultado en mayo de 2024.

**Figura 14:** *Imagen satélite de las ondas de gravedad sobre La Palma*, Plataforma Aqua con el instrumento MODIS, 2021, <https://earthobservatory.nasa.gov/images/148924/ash-and-cloud-rings-over-la-palma>. Consultado en mayo de 2024.

**Figura 15:** *Representación gráfica en Skew-T del radiosondeo de Güímar, Tenerife, para el 1 de octubre de 2021 a las 00:00h*, Universidad de Wyoming, 2021, <https://weather.uwyo.edu/cgi-bin/sounding?region=africa&TYPE=GIF%3ASKEWT&YEAR=2021&MONTH=10&FROM=0100&TO=0100&STNM=60018>. Consultado en mayo de 2024.

## Glosario

- **Boca:** Punto de emisión de material volcánico.
- **Bomba volcánica:** piroclasto de más de 60 milímetros de diámetro.
- **Caldera:** Depresión del terreno en forma de herradura, resultado de una erupción volcánica. Cráter.
- **Ceniza volcánica:** Piroclastos con un diámetro menor de 2 milímetros.
- **Fluido estratificado:** Fluido cuya densidad aumenta con la profundidad, formando estratos entre los que no hay intercambio de masa.
- **Índice de explosividad volcánica:** Valor relativo con el que se mide la explosividad de erupciones volcánicas. Tiene valores de 1 a 8 y sigue una proporción logarítmica con la cantidad de material expulsado por la erupción.
- **Inversión térmica:** Estrato de la atmósfera en el que en la temperatura, en vez de disminuir con la altura, aumenta.
- **Montaña:** Elevación grande, redondeada y no rocosa del terreno. Cono volcánico.
- **Picón:** Piroclastos de entre 2 y 60 milímetros de diámetro. Lapilli.
- **Piroclasto:** Material volcánico sólido expulsado desde la boca de una montaña en erupción.
- **Volcán:** Terreno cubierto de lava o materiales volcánicos.

# Apéndice

## A Código de Python

```
# -*- coding: utf-8 -*-

from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
from scipy import integrate as integrate

#%% CONSTANTS

"""
First of all, all constants and variables are defined.
"""

#Physical constants are defined.
T = 260.85 #K
GRAVITY = 9.81 #[m/s^2].
R = 8.31446261815324 #[J/(mol.K)], molar gas constant.
M_AIR= 0.0289645 #[kg/mol], molar mass of air.
MASS_FLUX = 1E5 #[kg/s] Estimation for a 5km plume.
DISTANCE_TO_PERTURBATION = 20000. #[m] #Max distance from the volcano to
↳ where clouds were seen in La Palma.
PERTURBATION_HEIGHT = 6100. #[m] #Approximate height of the inversion layer.
MEASUREMENT_HEIGHT = 0. #[m] #For a supposed barometer at sea level.

#Variables for the code are defined.
NUMBER_OF_POINTS = 1000
TIME_LIMIT = 7200. #[s] #How long the simulation runs.
SUBDIVISIONS = 100000 #How many subdivisions the integrals have.
SPATIAL_RESOLUTION = 100 #[m] #Distance between points in space where the
↳ difference in pressure will be calculated.
DISTANCES = int(DISTANCE_TO_PERTURBATION/SPATIAL_RESOLUTION)
RADIUS = np.linspace(1, DISTANCE_TO_PERTURBATION, DISTANCES) #[m]
```

*#Physical variables are defined:*

```
ADIABATIC_COEFFICIENT = 1.4 #diatomic gas value.
r_air = R/M_AIR #[m/s]^2.K^-1], gas constant for air
sound_speed = np.sqrt(ADIABATIC_COEFFICIENT*r_air*T) #[m/s]
height_scale = r_air * T / GRAVITY #[m]
time = np.linspace(0., TIME_LIMIT, NUMBER_OF_POINTS) #[s]
radius = np.sqrt((RADIUS * RADIUS) + (MEASUREMENT_HEIGHT -
↪ PERTURBATION_HEIGHT) * (MEASUREMENT_HEIGHT - PERTURBATION_HEIGHT)) #[m]
```

*#Frequencies are defined:*

```
Acoustic_Cutoff_Frequency = sound_speed / (2 * height_scale) #[Hz]
Brunt_Vaisala_Frequency = np.sqrt((ADIABATIC_COEFFICIENT - 1) * GRAVITY /
↪ (ADIABATIC_COEFFICIENT * height_scale)) #[Hz]
```

*### INTEGRALS*

*"""*

*All integrals are defined as functions.*

*"""*

*"""=====W1=====*

```
def W1(u):
    wu = w_c - u * u
    w1 = 2 * np.sqrt(Brunt_Vaisala_Frequency * Brunt_Vaisala_Frequency - wu *
↪ wu)/(np.sqrt(2 * w_c - u * u)) \
    * np.exp(-(np.sqrt(w_c * w_c - wu * wu) *
↪ np.sqrt(Acoustic_Cutoff_Frequency * Acoustic_Cutoff_Frequency - wu *
↪ wu))/(np.sqrt(Brunt_Vaisala_Frequency * Brunt_Vaisala_Frequency - wu *
↪ wu)) * time_0) \
    * np.cos(wu * time[t])
    return w1
```

*"""=====W2=====*

```
def W2(u):
    wu = w_c + u * u
```

```

w2 = 2 * np.sqrt(Brunt_Vaisala_Frequency * Brunt_Vaisala_Frequency - wu *
↳ wu) / (np.sqrt(u * u + 2 * w_c)) \
* np.sin(wu * time[t] - (np.sqrt(wu * wu - w_c * w_c) *
↳ np.sqrt(Acoustic_Cutoff_Frequency * Acoustic_Cutoff_Frequency - wu *
↳ wu)) / (np.sqrt(Brunt_Vaisala_Frequency * Brunt_Vaisala_Frequency - wu
↳ * wu)) * time_0)
return w2

```

=====*W3*=====

```

def W3(u):
    wu = Brunt_Vaisala_Frequency + u * u
    w3 = 2 * u * np.sqrt(wu * wu - Brunt_Vaisala_Frequency *
↳ Brunt_Vaisala_Frequency)/(np.sqrt(wu * wu - w_c * w_c)) \
* np.exp(-(np.sqrt(wu * wu - w_c * w_c) *
↳ np.sqrt(Acoustic_Cutoff_Frequency * Acoustic_Cutoff_Frequency - wu *
↳ wu))/(u * np.sqrt(2 * Brunt_Vaisala_Frequency + u * u)) * time_0) \
* np.cos(wu * time[t])
return w3

```

=====*W4*=====

*#This function is only needed for the analysis of sound waves.*

```

a4 = Acoustic_Cutoff_Frequency      #Lower limit
b4 = 2E5                             #Upper limit

```

```

def W4(u):
    w4 = np.sqrt(u * u - Brunt_Vaisala_Frequency * Brunt_Vaisala_Frequency) /
↳ (np.sqrt(u * u - w_c * w_c)) \
* np.cos(u * time[t] - ((np.sqrt(u * u - w_c * w_c) * np.sqrt(u * u -
↳ Acoustic_Cutoff_Frequency * Acoustic_Cutoff_Frequency)) / (np.sqrt(u *
↳ u - Brunt_Vaisala_Frequency * Brunt_Vaisala_Frequency))) * time_0)
return w4

```

```
### NUMERICAL INTEGRATION
```

```
"""
```

```
To represent the pressure against distance the same function is operated 200  
↪ times: 1 time every 100 m till the 20 000m mark.
```

```
"""
```

```
pressure = np.zeros(shape = (DISTANCES, NUMBER_OF_POINTS)) #empty array to be  
↪ filled by the results of each calculation for each MEASUREMENT of  
↪ radius.
```

```
#Solving the integrals for each point in space.
```

```
for r in range (DISTANCES):
```

```
#F(F_M, R) is calculated.
```

```
F = MASS_FLUX/(np.pi*radius[r]) * np.exp(- (MEASUREMENT_HEIGHT -  
↪ PERTURBATION_HEIGHT) / (2 * height_scale))
```

```
#w_c is calculated.
```

```
w_c = (np.abs(MEASUREMENT_HEIGHT-PERTURBATION_HEIGHT)/radius[r]) *  
↪ Brunt_Vaisala_Frequency  
time_0 = radius[r] / sound_speed #[s]
```

```
#Empty arrays to be filled by the results of the integrals below
```

```
W_1 = np.empty(shape = NUMBER_OF_POINTS)
```

```
W_2 = np.empty(shape = NUMBER_OF_POINTS)
```

```
W_3 = np.empty(shape = NUMBER_OF_POINTS)
```

```
#W_4 = np.empty(shape = NUMBER_OF_POINTS)
```

```
#Solving the integrals for each moment in time.
```

```
for t in range(NUMBER_OF_POINTS):
```

```
#The integration limits are defined.
```

```
a1 = 0. #Lower limit
```

```
b1 = np.sqrt(w_c) #Upper limit
```

```

a2 = np.sqrt(Brunt_Vaisala_Frequency - w_c)      #Lower limit
b2 = 0.                                           #Upper limit

a3 = 0.
↳ #Lower limit
b3 = np.sqrt(Acoustic_Cutoff_Frequency - Brunt_Vaisala_Frequency )
↳ #Upper limit

```

*#Integrals are calculated.*

```
W_1[t] = integrate.quad(W1, a1, b1, limit = SUBDIVISIONS)[0]
```

```
W_2[t] = integrate.quad(W2, a2, b2, limit = SUBDIVISIONS)[0]
```

```
W_3[t] = integrate.quad(W3, a3, b3, limit = SUBDIVISIONS)[0]
```

```
#W_4[t] = integrate.quad(W4, a4, b4, limit = SUBDIVISIONS)[0]
```

```

W = np.empty(shape = NUMBER_OF_POINTS)          #Empty array to be filled by
↳ the results of the sum below
for i in range(NUMBER_OF_POINTS):
    W[i] = W_1[i] + W_2[i] + W_3[i] #Each element of every integral is
↳ added to a single element of W. For acoustic analysis, add +
↳ W_4[i] at the end of the sum.

```

```
pressure[r] = F * W
```

*%%TEMPORAL PLOT*

*#Distance to pertubation*

```

D = -1 #For R = 20km. For R at any other distance, change this number, from
↳ 0 to DISTANCES - 1.

```

```

print("Presión frente a tiempo a una distancia de", RADIUS[D], "metros desde
↳ el origen de la perturbación.")

```

```
plt.figure(1)
```

```
plt.plot(time[30:], pressure[D,30:], color = "k")
```

```
plt.grid()
plt.xlabel("Tiempo [s]")
plt.ylabel("ΔPresión (Pa)")
plt.xlim(0,TIME_LIMIT)

plt.savefig('time-20km.jpeg', dpi=1200)

%%RADIAL PLOT

#Time from the start of the perturbation at which the simulation is run.
T = -1 #For time = 7200. For time at any other value, change this number,
↪ from 0 to NUMBER_OF_POINTS - 1.

print("Presión frente a distancia en el instante de tiempo", time[T], "s desde
↪ el inicio de la perturbación.")

plt.figure(2)
plt.plot(RADIUS[:,], pressure[:,T], color = "k")

plt.grid()
plt.xlabel("Distancia [m]")
plt.ylabel("ΔPresión (Pa)")
plt.xlim(0,DISTANCE_TO_PERTURBATION)
plt.ticklabel_format(style='sci', axis='y', scilimits=(0,0))

plt.savefig('radial-T=999.jpeg', dpi=1200)
```