

Cristian José Pérez García

*Métodos numéricos para la resolución
de ecuaciones en derivadas parciales
en finanzas*

Numerical methods for solving differential partial
equations in finance

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2024

DIRIGIDO POR

María Soledad Pérez Rodríguez

María Soledad Pérez Rodríguez
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que han sido parte esencial de mi vida durante estos años de formación académica.

En primer lugar, deseo agradecer a mis padres, cuyo apoyo incondicional y constante ha sido fundamental en cada etapa de mi vida. Gracias por creer en mí y por brindarme siempre las energías necesarias para seguir adelante.

También quiero reconocer a mis amigos, su amistad ha sido un pilar importante en mi vida, y su presencia ha hecho que este viaje sea más llevadero y gratificante y en especial me gustaría agradecer el apoyo incondicional de mi novia, gracias por ser mi compañera y por estar a mi lado en cada paso de este camino. Tu apoyo ha sido una fuente constante de motivación y fuerza.

Por último me gustaría agradecer a la tutora académica de este trabajo, quien me ha acompañado durante este año y me ha dado toda la ayuda posible.

A todos ustedes, mi más sincero agradecimiento por ser parte de este logro.

Cristian José Pérez García
La Laguna, 5 de julio de 2024

Resumen · Abstract

Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado se centra en la deducción y resolución de la ecuación de Black-Scholes. El principal objetivo es comprender algunas herramientas estocásticas, analíticas y numéricas, que se utilizan en la práctica financiera actual.

El trabajo se estructura en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo, se introducen los procesos estocásticos y algunos conceptos financieros fundamentales, proporcionando la base teórica necesaria para el desarrollo posterior del trabajo. En el tercer capítulo, se presenta la deducción y posterior solución teórica de la ecuación de Black-Scholes. En el cuarto y último capítulo, se aborda la aproximación de la ecuación mediante métodos numéricos bajo diversas condiciones de contorno.

Palabras clave: *Movimiento Browniano – Lema de Itô – Ecuación de Black-Scholes – Metodo de lineas (MOL).*

Abstract

This Bachelor's Thesis focuses on the deduction and resolution of the Black-Scholes equation. The main objective is to understand some stochastic, analytical, and numerical tools that are used in current financial practice.

The work is structured into four chapters. In the first and second chapter, stochastic processes and some fundamental financial concepts are introduced, providing the theoretical basis necessary for the subsequent development of the thesis. The third chapter presents the deduction and subsequent theoretical solution of the Black-Scholes equation. In the fourth and final chapter, the approximation of the equation through numerical methods under various boundary conditions is addressed.

Keywords: *Brownian Motion – Itô's Lemma – Black-Scholes Equation – Method of Lines (MOL)*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Introducción a los procesos estocásticos	1
1.1. Principios básicos de modelos estadísticos	1
1.1.1. Espacios de probabilidad	1
1.2. Procesos Estocásticos	2
1.2.1. Procesos de Markov	3
1.2.2. Proceso de Wiener o movimiento browniano	4
1.3. Proceso de Itô	5
2. Introducción a las opciones financieras	7
2.1. Algunos conceptos financieros	7
2.2. Valoración de activos	8
2.3. Lema de Itô	10
2.4. Valoración de una cartera	11
3. La ecuación de Black-Scholes	13
3.1. Supuestos del modelo de Black-Scholes	13
3.2. Deducción de la ecuación de Black-Scholes	14
3.3. Black-Scholes para opciones de compra	15
3.4. Resolución de la ecuación de Black-Scholes para una opción de compra	16
4. Resolución numérica de la Ecuación de Black-Scholes.	23
4.1. Introducción	23
4.2. Condición de tipo Dirichlet	24
4.3. Condición de tipo Neumann	27

4.4. Condición de tipo lineal	30
4.5. Integración temporal	31
4.6. Experimentos numéricos con MATLAB	32
A. Apéndice	41
A.1. Código Matlab	41
Bibliografía	47
Poster	49

Introducción

Este estudio se enmarca en el ámbito de las matemáticas aplicadas al mundo de las finanzas, centrándose específicamente en el análisis y la resolución de ecuaciones en derivadas parciales en el contexto de la valoración de opciones financieras. El objetivo principal del trabajo es deducir la famosa ecuación de Black-Scholes [6] y su respectiva solución analítica, además de desarrollar métodos numéricos para la resolución eficiente de dicha ecuación.

La estructura del trabajo se divide en cuatro capítulos interconectados que abordan respectivamente aspectos teóricos, matemáticos y computacionales. En el primer capítulo, se establecen los fundamentos estadísticos necesarios, incluyendo espacios de probabilidad e introducción a los procesos estocásticos, así como herramientas estadísticas relevantes para el análisis de los mercados financieros.

El segundo capítulo se centra en introducir algunos conceptos financieros y ciertos aspectos de la teoría de procesos estocásticos, proporcionando una introducción detallada al Lema de Ito, fundamentales para comprender la dinámica estocástica de los precios de los activos financieros y valoración de carteras.

El tercer capítulo se dedica al estudio de la ecuación de Black-Scholes deduciendo su formulación original y aplicando métodos analíticos para resolución.

El cuarto y último capítulo se enfoca en la implementación de métodos numéricos, siguiendo las indicaciones de [3] para la aproximación numérica de la solución de la ecuación de Black-Scholes. Como en el modelo teórico no se impone un valor máximo al precio del producto subyacente sobre el que se construye el derivado financiero, lo que no se puede aplicar a un método numérico, se explora qué tipo de condición de contorno es la más apropiada, incluyendo aquellas de tipo Dirichlet, Neumann o lineales. Además, se realiza un estudio computacional utilizando el entorno de programación MATLAB para evaluar el desempeño y la precisión del método de Crank-Nicolson, comparándolo con la solución teórica establecida en el capítulo 3.

En conjunto, este trabajo intenta ofrecer una visión global de la ecuación de Black-Scholes aplicada a la valoración de opciones financieras, partiendo de su

deducción usando herramientas financieras con procesos estocásticos, obteniendo su solución analítica y testando el método de Crank-Nicolson para su integración numérica.

Introducción a los procesos estocásticos

Como ya hemos establecido en la introducción, el objetivo principal de este trabajo es la deducción, solución y aproximación mediante métodos numéricos de la ecuación de Black-Scholes. Sin embargo, antes de introducir esta ecuación se debe conocer algo de procesos estocásticos y una serie de conceptos financieros que serán fundamentales para comprenderla. Comenzamos introduciendo algunas herramientas elementales del cálculo estocástico, extraídos principalmente de [1], [5], [6], [4], dejando los conceptos financieros para el siguiente capítulo.

1.1. Principios básicos de modelos estadísticos

1.1.1. Espacios de probabilidad

Antes de definir el proceso estocástico, debemos introducir el concepto estadístico de **variable aleatoria y espacio de probabilidad**.

Una **variable aleatoria** es una función que asocia a un resultado de un experimento aleatorio un valor numérico y que podemos expresar como:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X(\omega) = x \in \mathbb{R}$$

Un ejemplo sencillo puede ser la suma de las caras al lanzar dos dados. En este caso $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 6)\}$ que estará compuesto por 36 elementos. La variable aleatoria será la siguiente:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X(i_1, i_2) = i_1 + i_2 \in [2, 12]$$

Recordemos que un **espacio de probabilidad** se define como un espacio (Ω, σ, P) , donde [1]:

1. Ω es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio que se esté considerando. Se denomina **espacio muestral**.
2. σ es una **σ -álgebra** definida sobre Ω , es una colección de subconjuntos de Ω que cumple las siguientes condiciones:

- a) $\Omega \in \sigma$
- b) Si $A_i \in \sigma \Rightarrow A_i^c \in \sigma$
- c) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma$

En este ámbito, los subconjuntos de la σ -álgebra se denominan **sucesos o eventos**.

3. P es una **medida de probabilidad** definida sobre los sucesos en la σ -álgebra, es decir, P es una función de σ que satisface:

- a) $P(\Omega)=1$
- b) $P(A) \in [0, 1], \forall A \in \sigma$
- c) Para todo conjunto numerable $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de sucesos disjuntos se tiene que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

1.2. Procesos Estocásticos

Una vez definido el espacio de probabilidad, se define un **proceso estocástico** como un conjunto de variables aleatorias ordenadas en un instante de tiempo, que representan la evolución de algún sistema a lo largo del tiempo bajo la influencia de la aleatoriedad. Matemáticamente, un **proceso estocástico** se define como una familia de variables aleatorias $\{X_t\}, t \in I$ sobre un espacio de probabilidad (Ω, σ, P) , cuyo valor cambia con el transcurso del tiempo de manera incierta. El conjunto de valores $\{X_t\} t \in T$ puede tomar estados **continuos** (conjuntos de valores no numerables) o estados **discretos** (conjuntos de valores numerables) y el conjunto índice I , que para nuestro interés representará el tiempo, puede tomar **tiempos discretos** ($I = \{0, 1, 2, \dots\}$) o **tiempos continuos** ($I = [0, \infty)$). Un ejemplo muy simple que ayudará a comprender este concepto es la caminata aleatoria.

- La **caminata aleatoria** es un proceso estocástico en tiempo discreto donde cada paso es independiente y tiene una distribución de probabilidad específica. Un ejemplo típico es una caminata aleatoria en una dimensión. Supongamos que queremos mover una unidad hacia la izquierda o hacia la derecha con la misma probabilidad, donde
 - S_i es el estado en el tiempo i , que es la posición actual de la unidad.
 - X_i son variables aleatorias independientes con misma probabilidad que representan los incrementos de la unidad en el tiempo i , que representan el cambio en la posición en cada paso y puede tomar valores en $\{-1, 1\}$, dependiendo si la unidad se desplaza hacia la izquierda o hacia la derecha respectivamente.

Así, el estado S_n en el tiempo n se define como la suma de n incrementos independientes X_i .

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Luego, sobre un espacio de probabilidad (Ω, σ, P) , donde Ω representa el conjunto de todas las secuencias posibles de n pasos, suponiendo que $P(X_i = 1) = 0.5$ y $P(X_i = -1) = 0.5$, llegamos a que la probabilidad de una secuencia particular de pasos es:

$$P((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Este ejemplo en tiempo discreto ayuda a comprender el concepto de proceso estocástico. Sin embargo, en el estudio que se realizará en los siguientes capítulos trabajaremos constantemente con procesos estocásticos en tiempo continuo como los que se presentan a continuación.

1.2.1. Procesos de Markov

El proceso de Markov se trata de un tipo particular de proceso estocástico, en el que para poder predecir el valor futuro de una variable con una cierta distribución únicamente es importante su valor actual, es decir, que su valor pasado no influye en la predicción de su futuro valor. Esta condición recibe el nombre de **propiedad de Markov**.

El valor de las acciones en bolsa suele seguir el proceso de Markov. Por ejemplo, consideremos el valor X de una acción, cuyo valor actual es de 10€ y la variación de su valor en un año se distribuye como una distribución normal de media 0 y varianza 1 ($dX \sim N(0, 1)$)¹. El cambio en el valor de X en un segundo año consecutivo se puede suponer independientemente del cambio del valor en el primer año. Por esto X se puede entender que sigue un proceso de Markov. En consecuencia, tendremos que en el primer año $dX \sim N(0, 1)$ y que en el segundo año también $dX \sim N(0, 1)$ de forma independiente. Por tanto, la variación del valor de X en dos años consecutivos será la suma de la variación en el primer año y la variación en el segundo, es decir, $N(0, 1) + N(0, 1)$. Cuando sumamos dos distribuciones normales independientes el resultado será una distribución normal donde la media es la suma de las medias anteriores y la varianza final es la suma de las varianzas. Por lo que podemos concluir que la variación del valor X en dos años se distribuirá como una normal de media 0 y varianza 2 ($dX \sim N(0, 2)$).

Generalizando esto para N años consecutivos, se tendría que la variación del proceso de X en t años seguirá una normal de media 0 y varianza N . Esta

¹ $N(\mu, \sigma^2)$ representa la distribución normal con media μ y varianza σ^2

suposición de que el valor de los activos sigue un proceso de Markov se corrobora en la práctica financiera diaria, esto es, que el precio actual de un activo ya refleja toda la información disponible, y los precios pasados no afectan a su precio futuro. La competencia entre los inversores es lo que mantiene esta eficiencia.

Para ilustrarlo, supongamos que los inversores encuentran un patrón que muestra que una acción tiene un 65 % de probabilidad de subir significativamente. Como consecuencia, los inversores comprarían masivamente esa acción, lo que aumentaría su precio de inmediato. Este aumento en el precio eliminaría el patrón detectado, y con ello, cualquier oportunidad de obtener ganancias fáciles desaparecería.

En resumen, cualquier ventaja basada en información pasada se neutraliza rápidamente por las acciones de los inversores, asegurando que el mercado sea eficiente y que los precios reflejen siempre la información más reciente.

1.2.2. Proceso de Wiener o movimiento browniano

El proceso de Wiener o movimiento browniano es un proceso estocástico particular que en finanzas aporta información acerca de la volatilidad del precio de un activo. Este concepto nos será muy útil para modelar la valoración de activos con riesgo. Un proceso estocástico $\{z_t\}_{t \geq 0}$ es un **movimiento browniano** si cumple las siguientes condiciones:

1. Es un proceso estocástico continuo.
2. $z_0 = 0$.
3. Para $t < s$, los incrementos $(z_s - z_t)$ siguen una distribución normal de media 0 y varianza $(s - t)$, es decir $z_s - z_t \sim N(0, s - t)$.
4. $(z_s - z_t)$ es independiente de la información disponible hasta el instante t , es decir, z_s se trata de un proceso de Markov, del cual hablamos en la sección anterior.

En esta definición, si en cada instante de tiempo $t \geq 0$ consideramos un incremento infinitesimal dt , por la propiedad 3 anterior aplicada a $s = t + dt$, se tiene que el incremento $dz = z_{t+dt} - z_t \sim N(0, dt)$.

Es por esto que en el ámbito financiero [2] se suele decir que $z = \{z_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Wiener si es un proceso de Markov que verifica

$$dz = \epsilon \sqrt{dt} \tag{1.1}$$

donde ϵ es una variable aleatoria que sigue una distribución normal estándar $N(0, 1)$, por lo que dz sigue una distribución normal con

$$\begin{aligned} \text{Media de } dz &= 0 \\ \text{Desviación estándar de } dz &= \sqrt{dt} \\ \text{Varianza de } dz &= dt \end{aligned} \tag{1.2}$$

El movimiento browniano proporciona una representación natural del comportamiento aleatorio de los precios de los activos financieros en el tiempo. Sus propiedades estocásticas permiten modelar de manera efectiva la incertidumbre y la variabilidad en los mercados financieros.

1.3. Proceso de Itô

El **proceso de Itô** es una herramienta fundamental en los procesos estocásticos utilizados para representar la evolución de un activo financiero en un intervalo de tiempo T .

En la práctica, el precio de los activos es aleatorio pero normalmente tienen una cierta componente determinista. Por lo general, si el precio de una acción es de $100e$ hoy, es bastante esperable que el precio mañana esté también alrededor de $100e$. Para añadir este cierto determinismo se usan los procesos de Wiener generalizados. Se dice que un proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ sigue un proceso de Wiener generalizado si en un pequeño intervalo de tiempo dt se tiene

$$dX = \mu dt + \sigma dz, \mu, \sigma \in \mathbb{R}$$

z es un proceso de Wiener, es decir, $dz = \epsilon \sqrt{dt}$ con $\epsilon \sim N(0, 1)$. Por las propiedades elementales de la distribución estándar se tendrá que

$$dX \sim N(\mu dt, \sigma^2 dt)$$

Obsérvese que si $\sigma = 0$, entonces $dX = \mu dt$, por lo que μ representa la tasa de cambio esperada en cada instante de tiempo o **drift**.

Si consideramos el caso más general en el que tanto μ como σ dependen a su vez del tiempo t y de la variable X , tenemos el llamado **proceso de Itô**,

$$dX = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dz \quad (1.3)$$

donde z es un proceso de Wiener.

En el siguiente capítulo veremos una importante aplicación en finanzas de estos procesos estocásticos.

Introducción a las opciones financieras

En este capítulo introducimos algunos conceptos financieros necesarios para entender qué es una opción financiera. Veremos una de las formas más usadas para simular matemáticamente cómo se comportan los precios de los activos financieros y una de las herramientas más importantes en la valoración de derivados, el lema de Itô. Por último, acabaremos el capítulo viendo como se construyen y valoran las carteras de inversión, lo que será fundamental a la hora de deducir la ecuación de Black-Scholes en el capítulo 3.

2.1. Algunos conceptos financieros

Un **activo** financiero es un título por el que el comprador adquiere el derecho a recibir un ingreso futuro de parte del vendedor. Así como para el comprador el título representa un activo porque es un derecho a cobrar alguna suma, para el emisor es un pasivo que representa una obligación de carácter económico con quien adquiere el activo y espera recibir una renta o un **retorno** por la inversión realizada. También podemos clasificar los activos como **libres de riesgo o con riesgo**. Por un lado los activos sin riesgo son inversiones que ofrecen un rendimiento conocido y garantizado, sin incertidumbre sobre su retorno y, por otro lado, los activos con riesgo son inversiones cuyo rendimiento futuro es incierto. Estos activos tienen la posibilidad de ganar o perder valor debido a la variabilidad de factores de mercado, como cambios en precios, tasas de interés, volatilidad y otros eventos económicos.

Algunos ejemplos de activo financiero pueden ser los siguientes:

1. **Dinero en curso**: este es el activo que puede intercambiarse de forma directa por otros bienes. No tiene rentabilidad ni riesgo de pérdida, aunque sí puede perder parte de su valor debido a la inflación.
2. **Acciones**: una acción es un activo que representa una parte de la propiedad de una empresa. El titular puede recuperar el dinero invertido en cualquier momento vendiendo las acciones y se puede obtener beneficios o perder parte e incluso toda la inversión.

3. **Depósitos bancarios:** son activos financieros emitidos por entidades financieras, como las cuentas de ahorro o los depósitos a plazo fijo. Suelen tener una baja rentabilidad pero también un bajo riesgo, por lo que son una buena opción para las personas que no quieren tomar riesgo.

Un **derivado financiero** es otro tipo particular de activo cuyo valor depende de la evolución del precio de otro activo, el **activo subyacente**. Un ejemplo clásico de derivado financiero puede ser el precio del aceite de oliva, el cual se considera un derivado financiero del precio de la oliva, que es el subyacente.

Una **opción financiera** es un tipo de derivado que representa un acuerdo entre el comprador y el vendedor, que da a su poseedor el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender cantidades determinadas del activo considerado o subyacente, en una fecha futura establecida (llamada **fecha de vencimiento**) y por una cantidad (también llamada **strike financiero**) especificada.

Un **mercado de opciones** es un mercado en el que se negocian derivados financieros. En este, dos o más agentes se comprometen a comprar y vender, respectivamente, una cantidad de uno o varios activos subyacentes, a un precio y a una fecha determinada.

Podemos distinguir entre opciones **put** y **call**. Las opciones de compra **call** dan a su poseedor el derecho a comprar un activo subyacente a un precio strike determinado, mientras que las opciones de venta **put** dan a su propietario el derecho a vender un determinado subyacente, también a un strike pactado. Dentro de estas opciones podemos encontrar más clasificaciones. **Las opciones europeas** son aquellas que solo pueden ser ejercidas por su poseedor en la fecha de vencimiento de éstas mientras que **las opciones americanas** pueden ejercerse en cualquier momento desde que se pactan y hasta su vencimiento.

Por otro lado, un **mercado de futuros** es un mercado de subastas en el que los participantes compran y venden contratos de productos básicos para su entrega en una fecha futura específica.

La principal diferencia que existe entre el mercado de opciones y el de futuros es que en los futuros tenemos la obligación de comprar o vender al precio y en la fecha establecida, mientras que en las opciones solo adquirimos el derecho, pero no la obligación de comprar o vender.

Por último un **portafolio o cartera de inversionista** es un conjunto de bonos, acciones, monedas, efectivo, materias primas, productos derivados y otros activos financieros que pertenecen a un inversionista.

2.2. Valoración de activos

Tras haber definido los conceptos financieros necesarios para el desarrollo teórico de la ecuación de Black-Scholes, podemos comenzar a tratar la valora-

ción de distintos tipos de activos financieros en tiempo continuo con el uso de ecuaciones diferenciales con términos estocásticos.

Para la valoración de un activo en tiempo continuo, se debe diferenciar entre activos libres de riesgo y activos con riesgo.

Para valorar el precio S_t de un **activo libre de riesgo** [5], se considera que la tasa de variación de dicho precio S_t es proporcional a su valor actual, con una constante de proporcionalidad r_f (que se suele llamar tasa de cambio libre de riesgo), es decir,

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_f dt \Rightarrow dS_t = r_f S_t dt \quad (2.1)$$

Por tanto, si S_0 es el valor del activo en el momento en que se realiza la inversión ($t = 0$), integrando en la ecuación diferencial,

$$\int_{S_0}^S \frac{ds}{s} = r_f \int_0^t du \Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = r_f t \Rightarrow S_t = S_0 e^{r_f t}$$

Así, obtenemos que su comportamiento es descrito por la siguiente expresión que presenta una dependencia exponencial de la tasa libre de riesgo.

$$S_t = S_0 e^{r_f t}, \quad t \in [0, T] \quad (2.2)$$

Esta fórmula (2.2) se usa a menudo para valorar cambios de moneda y, sobre todo, para valorar las fluctuaciones del dinero en curso producidas debido al cambio de los tipos de interés a lo largo del tiempo. Como prácticamente todos los activos financieros están sujetos a cambios en el valor del dinero, en sus valoraciones suele aparecer un término adicional de la forma e^{-rt} , que se suele llamar **descuento**.

Para un **activo con riesgo**, su valoración S_t es más compleja y requiere del uso de procesos estocásticos. En los modelos más usados se supone que este riesgo provoca una variación aleatoria del precio del activo, aunque dentro de unos valores razonables. Por esto el precio del activo se suele modelizar añadiéndole a la parte determinista (2.1) un término browniano de la forma.

$$dS_t = \mu(t, S_t) S_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dz \quad (2.3)$$

donde μ es la **tasa de crecimiento esperada** del activo, σ es la **volatilidad** del activo, y z es un proceso de Wiener (1.1). Esta ecuación diferencial estocástica describe que el cambio en el valor S_t del activo tiene dos componentes: una componente determinista proporcional a S_t y otra componente aleatoria también proporcional a S_t .

Como en la práctica la variación dS_t en sí misma no es interesante, ya que, por ejemplo, una variación $dS_t = 1\text{€}$ no tiene la misma valoración si el activo

vale 10€ que si vale 100€, la ecuación (2.3) nos sirve realmente para modelizar la **variación relativa** del precio, esto es,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dz \quad (2.4)$$

Claramente esta valoración sigue un proceso de Itô (1.3).

Una vez explicada la valoración relativa de activos con y sin riesgo resulta interesante introducir herramientas que ayuden a estudiar estos procesos estocásticos. Una de ellas es el lema de Itô.

2.3. Lema de Itô

El **Lema de Itô** es un resultado fundamental en el cálculo estocástico que proporciona una herramienta poderosa para manipular las variables aleatorias asociadas a los procesos de Itô y en particular, el precio de derivados financieros en los que el precio del subyacente sigue un proceso de Itô (2.4).

Sea S el precio de un activo con riesgo verificando (2.3) y sea $V(s, t)$ una función suficientemente diferenciable, que representará el precio de un derivado (una opción de compra o venta, por ejemplo) sobre un subyacente con precio S . En lo que sigue obviaremos el subíndice t en S_t para simplificar la notación. El lema de Itô nos va a servir para aproximar la variación del precio del derivado cuando el precio del subyacente varía en un cierto intervalo de tiempo.

Se consideran incrementos infinitesimales dS y dt en S y t . Aplicando el desarrollo de Taylor de $V(s, t)$ de orden 2 para aproximar $V(S + dS, t + dt)$ alrededor de (S, t) , se obtiene la expresión.

$$\begin{aligned} V(S + dS, t + dt) \approx & V(S, t) + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}dS dt + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(dt)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $\frac{\partial V}{\partial S}$, $\frac{\partial V}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ son las primeras y segundas derivadas parciales de $V(S, t)$ con respecto a S y t .

Utilizando (2.3), podemos aproximar el término dS^2 en el desarrollo de Taylor, obteniendo la dependencia de t en la notación.-

$$(dS)^2 = (\mu S dt + \sigma S dz)^2$$

Desarrollando este término, obtenemos:

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dz^2 + 2\sigma \mu S^2 dt dz + \mu^2 S^2 dt^2$$

Luego, como sabemos que z sigue un proceso de Wiener (1.1), se tiene $dz^2 = \epsilon^2 dt$ y, por lo tanto, dz^2 tiene el mismo orden de magnitud que dt cuando $dt \rightarrow 0$, esto es $dz^2 = \mathcal{O}(dt)$ ¹

Además hay que tener en cuenta que cuando dt es suficientemente pequeño, $dt^p \ll dt$ para cualquier $p > 1$, por lo que los términos $dt dz$ y dt^2 van a ser despreciables frente a dt . Por tanto,

$$dS^2 \approx \sigma^2 S^2 dz^2 \quad \text{cuando } dt \rightarrow 0$$

Sustituyendo esta expresión en la aproximación hasta la segunda derivada de (2.5) y conservando solo los términos de orden $\theta(dt^p)$, $p \leq 1$, cuando $dS \rightarrow 0$, $dt \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dz) + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\sigma^2 S^2 dt) \Rightarrow \\ \Rightarrow dV &= \mu S \frac{\partial V}{\partial S} dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dz + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \end{aligned}$$

Reagrupando los términos, obtenemos la expresión del **lema de Itô** para la variación del precio de un derivado $V(S, t)$ cuando el precio del subyacente S sigue el modelo (2.3):

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dz \quad (2.6)$$

Obsérvese que comparando (2.3) y (2.6), esto implica que la parte estocástica del derivado V va a ser la misma que la del subyacente S multiplicada por $\frac{\partial V}{\partial S}$. Esto implica muchas aplicaciones en la valoración de derivados en la actualidad.

2.4. Valoración de una cartera

En el ámbito de los derivados financieros sobre la compra o venta de acciones, para reducir el riesgo de las inversiones, los *traders* (o corredores de bolsa) suelen crear carteras o portafolios formadas por un conjunto de acciones y opciones tanto de compra como de venta (call o put) para minimizar el riesgo.

Por ejemplo, supongamos que el precio de una acción S sigue el modelo (2.3) y que $V(S, t)$ es el precio de una opción de compra sobre dichas acciones. Por el lema de Itô (2.6) visto en la sección anterior,

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dz. \quad (2.7)$$

Una cartera sobre estas acciones consiste en comprar un número determinado de acciones y vender opciones de compra sobre dichas acciones con una

¹ Como es usual, esta notación significa que para $dt \rightarrow 0$, $|dz^2| \leq C dt$ para cierta constante $C \geq 0$.

proporción de α acciones compradas por cada opción vendida. Por tanto, si se venden N opciones, el precio de la cartera Π^* será

$$\Pi^* = N\Pi, \quad \Pi = V - \alpha S$$

y la variación del precio de la cartera será

$$\begin{aligned} d\Pi^* &= Nd\Pi \\ d\Pi &= dV - \alpha dS \\ &= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dz \\ &\quad - \alpha \mu S dt - \alpha \sigma S dz \\ &= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \alpha \mu S \right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \right) dz \end{aligned} \tag{2.8}$$

El lema de Itô y esta valoración (2.8) de la variación del valor de una cartera de inversión son de suma importancia en la valoración de derivados financieros tal y como veremos en el próximo capítulo introduciendo **la ecuación de Black-Scholes**.

La ecuación de Black-Scholes

La ecuación de Black-Scholes (también llamada ecuación de Black-Scholes-Merton) es una ecuación que modeliza el precio justo o valor teórico de una opción de compra o de venta (put o call) y que depende de seis variables: la volatilidad, el tipo de opción, el precio del subyacente, el tiempo transcurrido hasta el vencimiento, el precio de strike y la tasa de interés libre de riesgo.

Para construir la ecuación de Black-Scholes debemos considerar una serie de supuestos necesarios.

3.1. Supuestos del modelo de Black-Scholes

Como en todos los modelos matemáticos, hay que suponer que se den ciertas condiciones que lo simplifican y lo hacen más manejable. En este caso, en primer lugar, supondremos que estamos en un mercado de tiempo continuo, donde el precio del subyacente sigue un proceso de Itô (1.3). Además, se consideran una serie de supuestos que difícilmente son aceptables en un mercado real, pero que nos permitirán concentrarnos en los elementos esenciales de la teoría. Alguno de estos supuestos son los siguientes: [5]

1. Los activos son perfectamente divisibles, es decir que es posible negociar cantidades no necesariamente enteras de cualquier activo.
2. La tasa de interés libre de riesgo y la volatilidad de los activos son funciones conocidas del tiempo durante la vida de la opción.
3. No hay riesgo de incumplimiento en las operaciones realizadas. Es decir, ambas partes están obligadas a cumplir su acuerdo.
4. No existen oportunidades de arbitraje, es decir que todos los activos libres de riesgo deben tener el mismo rendimiento esperado.
5. No existen costos de transacción.

3.2. Deducción de la ecuación de Black-Scholes

La idea en la que se basa la ecuación de Black-Scholes es la de determinar el valor de un derivado de forma que se pueda crear una cartera libre de riesgo.

Supongamos que un inversionista quiere construir una cartera vendiendo N derivados y comprando αN acciones ($\alpha > 0$) en un instante de tiempo t cuando el precio del subyacente es S . Por tanto, si el precio del subyacente varía a $S + dS$ para un pequeño intervalo de tiempo t a $t + dt$, teniendo en cuenta que el precio de unas acciones S verifica (2.3) y que $V(S, t)$ es el precio de un derivado sobre dichas acciones que verifica (2.7).

Como vimos en la sección (2.4), el precio de la cartera Π^* varía de la forma (2.8) (multiplicando por el número de derivados N que se vende).

Observando esta ecuación, vemos que se elimina la parte aleatoria simplemente tomando

$$\alpha = \frac{\partial V(S, t)}{\partial S}$$

y por ello se obtiene que $d\Pi = \left(\frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (3.1)$$

por lo que el precio de la cartera varía de forma determinista. Además, para que sea un activo libre de riesgo, como vimos en (2.1), debe de verificar

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = r\Pi \quad (3.2)$$

donde r es la tasa de interés vigente.

Como

$$r\Pi = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right)$$

igualando con (3.1)

$$\frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} = rV - rS \frac{\partial V}{\partial S}$$

de donde se obtiene la **ecuación de Black-Scholes**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (3.3)$$

que es una ecuación en derivadas parciales parabólica. Resolverla nos dará una manera determinista de calcular el precio justo del derivado que estamos valorando.

3.3. Black-Scholes para opciones de compra

Consideremos la ecuación de Black-Scholes en el caso particular de valorar el precio justo $C(S, t)$ de una opción de compra europea con vencimiento en T y strike financiero K cuando el valor del subyacente sea S en el instante de tiempo $t \in [0, T]$. Como ya hemos visto $C(S, t)$ verifica la ecuación de Black-Scholes (3.3) con $V = C$, esto es,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0. \quad (3.4)$$

Esta ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones, por lo que para calcular cuál es el valor $C(S, t)$ para una opción concreta necesitamos tener más información. Para ello podemos pensar en el siguiente ejemplo [2].

Supongamos que nos disponemos a comprar una opción de compra de unas acciones con fecha de vencimiento en 3 meses ($T = 90$) y strike $K = 1000$ euros y en la fecha de vencimiento de tres meses el valor de las acciones es de 1100 euros. El precio justo de la opción de compra ($C(1100, 90)$) en ese momento es de 100 euros ($1100 - 1000 = 100$). Sin embargo, si en dicha fecha ($T=90$) las acciones tuvieran un valor de 900 euros, el comprador no ejercería su derecho a comprar dichas acciones, por lo que el precio justo de la opción en ese momento sería $C(900, 90) = 0$. Por tanto sabemos que cuando $t = T$,

$$C(S, T) = \max(S - K, 0)$$

Esto se conoce como **pay-off** de la opción y constituye una condición terminal para $C(S, t)$

Por otro lado, es evidente que cuando el valor del subyacente es nulo, el precio de la opción de compra también será nulo, es decir

$$C(0, t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

También, cuando se considera que el valor del subyacente alcanza niveles muy altos, la intuición nos dice que el valor de la opción será prácticamente S , al ser un valor totalmente desproporcionado respecto a la K que hayamos fijado. Por ello se exige la siguiente condición.

$$C(S, t) \sim S, \quad S \rightarrow \infty$$

. En resumen, para valorar una opción de compra tendremos que resolver el problema diferencial:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, & S > 0, \quad t \in (0, T) \\ C(S, T) = \text{máx}(S - K, 0), & S > 0 \\ C(0, t) = 0, & t \in [0, T] \\ C(S, t) \sim S, & S \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.5)$$

3.4. Resolución de la ecuación de Black-Scholes para una opción de compra

En esta sección veremos que aplicando varios cambios de variable, podemos escribir la solución única del problema diferencial (3.5). En primer lugar, hacemos el cambio

$$\begin{aligned} S &= Ke^x, & t &= T - \frac{\tau}{\frac{\sigma^2}{2}} \\ C(S, t) &= Kv(x, \tau) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{cases} x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), & \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}, \\ \tau = \frac{\sigma^2(T-t)}{2}, & \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}, \end{cases} \quad (3.7)$$

Calculamos las derivadas parciales de $v(x, \tau)$,

$$\frac{\partial C(S, t)}{\partial S} = K \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{K}{S} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial C(S, t)}{\partial t} = K \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{K\sigma^2}{2} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C(S, t)}{\partial S^2} &= \frac{\partial \left(\frac{K}{S} \frac{\partial v(x(s), \tau(t))}{\partial x} \right)}{\partial S} \\ &= \frac{-K}{S^2} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} + \frac{K}{S} \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial S} \\ &= \frac{-K}{S^2} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Llevando esto a la ecuación (3.5)

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{K\sigma^2}{2} + Kr \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - rKv(x, \tau) = 0 \\
& \Rightarrow -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + r \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - rv = 0 \\
& \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{2}{\sigma^2} \left[\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(-r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial v}{\partial x} - rv \right] \\
& \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2} v.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Con este cambio de variable, cuando $t = T, \tau = 0$ y

$$C(S, T) = \max(S - K, 0) = \max(Ke^x - K, 0) = \max(K(e^x - 1), 0) = Kv(x, 0)$$

por lo que la condición terminal de C se transforma en la condición inicial para $v(x, \tau)$

$$v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0) \tag{3.12}$$

Como $S \in [0, \infty)$, el cambio $S = Ke^x$ es válido solo si se considera el dominio espacial $x \in (-\infty, \infty)$, entendiéndose que $S = 0 \Leftrightarrow x \rightarrow -\infty$ y $S \rightarrow \infty \Leftrightarrow x \rightarrow \infty$, por lo que obtenemos un problema con frontera libre.

Tras el primer cambio de variable, la ecuación obtenida (3.11) se parece mucho a la ecuación del calor.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Para obtener dicha ecuación, se aplica otro cambio de variable:

$$v(x, \tau) = e^{ax+b\tau} u(x, \tau) \tag{3.13}$$

para ciertas constantes a y b que debemos determinar. Derivando,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= e^{ax+b\tau} \left(au + \frac{\partial u}{\partial x} \right), & \frac{\partial v}{\partial \tau} &= e^{ax+b\tau} \left(bu + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= ae^{ax+b\tau} \left(au + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + e^{ax+b\tau} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)
\end{aligned}$$

Sustituimos en la ecuación (3.11), denotando $\alpha = \frac{2r}{\sigma^2}$:

$$e^{ax+b\tau}\left(bu + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right) = e^{ax+b\tau}\left(a^2u + 2a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + (\alpha - 1)e^{ax+b\tau}\left(au + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \alpha e^{ax+b\tau}u$$

y dividiendo por $e^{ax+b\tau}$ se obtiene:

$$bu + \frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2u + 2a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha - 1)\left(au + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \alpha u$$

Esta ecuación se puede reordenar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2a + \alpha - 1)\frac{\partial u}{\partial x} + (a^2 - b + a(\alpha - 1) - \alpha)u \quad (3.14)$$

Esta expresión se puede simplificar si conseguimos constantes a y b que verifiquen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\{2a + \alpha - 1 = 0, \quad a^2 - b + a(\alpha - 1) - \alpha = 0\} \quad (3.15)$$

Resolviendo (3.15) fácilmente se obtiene:

$$a = -\frac{(\alpha - 1)}{2}, \quad b = a^2 + a(\alpha - 1) - \alpha = -\frac{(\alpha + 1)^2}{4}$$

por lo que aplicando el cambio de variable:

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)x - \frac{1}{4}(\alpha+1)^2\tau}u(x, \tau) \quad (3.16)$$

la ecuación (3.14) es equivalente a la ecuación de calor con frontera libre

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau \in [0, T]. \quad (3.17)$$

Además, por la condición inicial (3.12) sobre v , como $e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)x} > 0$, u tiene que verificar:

$$u(x, 0) = u_0(x) = e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)x}v(x, 0) = \text{máx}\left(e^{\frac{(\alpha+1)x}{2}} - e^{\frac{(\alpha-1)x}{2}}, 0\right). \quad (3.18)$$

La solución del problema de difusión (3.17), (3.18) es bien conocida [6].

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \quad (3.19)$$

donde, en este caso

$$u_0(x) = \text{máx}\left(e^{\frac{(\alpha+1)x}{2}} - e^{\frac{(\alpha-1)x}{2}}, 0\right).$$

Como

$$e^{\frac{(\alpha+1)x}{2}} - e^{\frac{(\alpha-1)x}{2}} > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{(\alpha+1)x}{2}} > e^{\frac{(\alpha-1)x}{2}} \Leftrightarrow (\alpha + 1)x > (\alpha - 1)x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 1 - \alpha + 1)x > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0,$$

se puede reescribir $u_0(x)$ como una función a trozos:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0^+(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad u_0^+(x) = e^{\frac{(\alpha+1)x}{2}} - e^{\frac{(\alpha-1)x}{2}}$$

Para calcular la integral en (3.19) se realiza el cambio de variable:

$$y = \frac{(s-x)}{\sqrt{2\tau}}, \quad dy = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} ds, \quad s = x + \sqrt{2\tau}y$$

En los extremos:

$$s = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}, \quad s = +\infty \Leftrightarrow y = \infty$$

por lo que:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u_0^+(s) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-s}{\sqrt{2\tau}}\right)^2} ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^\infty u_0^+(x + \sqrt{2\tau}y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = I_1 - I_2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde I_1 y I_2 son las siguientes integrales:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^\infty e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (3.21)$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^\infty e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (3.22)$$

Resolviendo I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^\infty e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^\infty e^{\frac{(\alpha+1)x}{2} + \frac{(\alpha+1)}{2}\sqrt{2\tau}y} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= \frac{e^{\frac{(\alpha+1)x}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^\infty e^{\frac{(\alpha+1)\sqrt{2\tau}y}{2} - \frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

El exponente del integrando se simplifica, denotando $\nu = (\alpha + 1)\sqrt{2\tau}$,

$$\frac{1}{2}((\alpha+1)\sqrt{2\tau}y - y^2) = -\frac{1}{2} [y^2 - \nu y] = -\frac{1}{2} \left[\left(y - \frac{\nu}{2}\right)^2 - \frac{\nu^2}{4} \right] = \frac{\nu^2}{8} - \frac{1}{2} \left(y - \frac{\nu}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}[(\alpha+1)\sqrt{2\tau}y-y^2]} = e^{\frac{\nu^2}{8}} e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{\nu}{2})^2}$$

Luego,

$$I_1 = \frac{e^{\frac{(\alpha+1)x + \nu^2}{2} + \frac{\nu^2}{8}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{\nu}{2})^2} dy.$$

Aplicando un nuevo cambio de variable,

$$\rho = y - \frac{\nu}{2} = y - \frac{(\alpha+1)}{2}\sqrt{2\tau}, \quad d\rho = dy$$

y teniendo en cuenta que $\frac{\nu^2}{8} = \frac{(\alpha+1)^2\tau}{4}$, podemos simplificar aún más I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{e^{\frac{(\alpha+1)x + \nu^2}{2} + \frac{\nu^2}{8}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{\nu}{2})^2} dy = \frac{e^{\frac{(\alpha+1)x + (\alpha+1)^2\tau}{2} + \frac{(\alpha+1)^2\tau}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{\nu}{2}}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho = \\ &= e^{\frac{(\alpha+1)x + (\alpha+1)^2\tau}{2} + \frac{(\alpha+1)^2\tau}{4}} N(d_1) \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde $N(x)$ es la función de distribución acumulada de la distribución normal estándar $N(0, 1)$,

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-x} e^{-\frac{z^2}{2}} (-dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.24)$$

y

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\alpha+1)\sqrt{2\tau} \quad (3.25)$$

Para I_2 se hace el mismo procedimiento cambiando $(\alpha-1)$ por $(\alpha+1)$ y se obtiene que:

$$I_2 = \frac{e^{\frac{(\alpha-1)x + (\alpha-1)^2\tau}{2} + \frac{(\alpha-1)^2\tau}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(\alpha-1)\sqrt{2\tau}}{2}}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho = e^{\frac{(\alpha-1)x + (\alpha-1)^2\tau}{2} + \frac{(\alpha-1)^2\tau}{4}} N(d_2) \quad (3.26)$$

donde:

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\alpha-1)\sqrt{2\tau} \quad (3.27)$$

Volviendo a la solución (3.20)

$$u(x, \tau) = I_1 - I_2 = e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)x + \frac{1}{4}(\alpha+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)x + \frac{1}{4}(\alpha-1)^2\tau} N(d_2) \quad (3.28)$$

Deshaciendo el cambio (3.16), llegamos a que:

$$\begin{aligned}
 v(x, \tau) &= e^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)x + \frac{1}{2}(\alpha+1)x} N(d_1) - e^{\frac{1}{4}(\alpha+1)^2\tau - \frac{1}{4}(\alpha-1)^2\tau} N(d_2) \\
 &= e^{\frac{1}{2}x(-\alpha+1+\alpha+1)} N(d_1) - e^{\frac{1}{4}\tau((\alpha+1)^2 - (\alpha-1)^2)} N(d_2) \\
 &= e^x N(d_1) - e^{-\alpha\tau} N(d_2) \\
 &= \frac{S}{K} N(d_1) - e^{-r(T-t)} N(d_2)
 \end{aligned}$$

Y finalmente deshaciendo el primer cambio realizado (3.6), se obtiene la solución de la ecuación de Black-Scholes que buscábamos:

$$\begin{aligned}
 C(S, t) &= K v(x, t) = K \frac{S}{K} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) = \\
 &= S N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(S/K)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} + \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right) \sqrt{\sigma^2(T-t)} = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \tag{3.30}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} + \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \sqrt{\sigma^2(T-t)} = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \tag{3.31}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{\ln(S/K) + (r + (\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2}) - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = \\
 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} - \frac{\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}
 \end{aligned}$$

Por lo que, en conclusión, la solución de la ecuación de Black-Scholes (3.5) es:

$$C(S, t) = S N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
 d_2 &= \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}
 \end{aligned}$$

Resolución numérica de la Ecuación de Black-Scholes.

4.1. Introducción

En este capítulo abordaremos la resolución de la ecuación de Black-Scholes (3.5) usando el método de líneas (MOL), siguiendo las indicaciones dadas en [3].

Recordando lo visto hasta ahora, nos centraremos en la ecuación de Black-Scholes para valorar el precio $C(S, t)$ de una opción de compra europea.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0, \quad S \geq 0, \quad t \in [0, T] \quad (4.1)$$

con la condición terminal

$$C(S, T) = \max(S - K, 0) \quad (4.2)$$

y condiciones de contorno

$$\begin{cases} C(0, t) = 0 \\ C(S, t) \sim S, \quad S \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.3)$$

A la hora de trabajar numéricamente es conveniente trabajar con condiciones iniciales y no terminales como en este caso. Para solucionar este problema se realiza el siguiente cambio de variable

$$u(S, t) = C(S, T - t), \quad t \in [0, T], \quad S \geq 0$$

Así, como $C(S, t)$ es el precio de opción de compra si el precio del activo subyacente es S cuando han pasado t días desde la compra de la opción, $u(S, t)$ es el precio de la opción de compra si el precio del activo subyacente es S cuando faltan t días para el vencimiento.

De esta forma la condición terminal (4.3) se transforma en la condición inicial:

$$u(S, 0) = C(S, T) = \max(S - K, 0) \quad (4.4)$$

y el objetivo será obtener el valor de u cuando el precio del subyacente es S y faltan T días para el vencimiento ($u(S, T)$).

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

sustituyendo en la ecuación (4.1):

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + rS\frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} - ru = 0.$$

Aplicando el cambio también en las condiciones de frontera (4.3), se obtiene el problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(S, t)}{\partial t} = rS\frac{\partial u(S, t)}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} - ru(S, t) \\ u(S, 0) = \text{máx}(S - K, 0) \\ u(0, t) = 0 \\ u(S, t) \sim S, \quad S \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.5)$$

Numéricamente no se puede aproximar la solución en un intervalo infinito para la variable S . Por tanto, se toma un valor lo suficientemente grande $S_{\text{máx}}$ tal que $S \in [0, S_{\text{máx}}]$. Simular la condición $u(S, t) \sim S$ cuando $s \rightarrow +\infty$ se suele hacer, en la práctica, de una de las tres formas siguientes:

1. Condición de Dirichlet: $u(S_{\text{máx}}, t) = S_{\text{máx}} - e^{-rt}K$
2. Condición de Neumann: $\frac{\partial u(S_{\text{máx}}, t)}{\partial S} = 1$
3. Condición lineal: $\frac{\partial^2 u(S_{\text{máx}}, t)}{\partial S^2} = 0$

Uno de nuestros objetivo será analizar si la elección de una de estas condiciones de contorno en $S_{\text{máx}}$ puede ser mejor que las otras.

4.2. Condición de tipo Dirichlet

Considérese entonces, la aproximación numérica de la solución $u(S, t)$ de la EDP con condición de contorno de Dirichlet.

Para resolver numéricamente este problema en derivadas parciales, se usa el Método de Líneas (MOL).

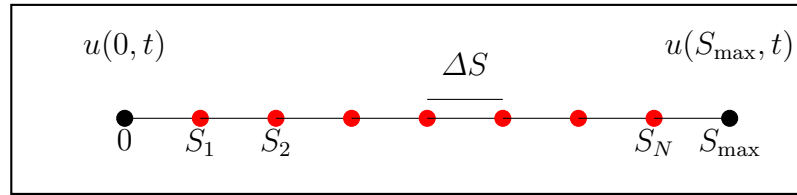
Este método consiste, en primer lugar, en discretizar la EDP sobre una malla finita de puntos en $[0, S_{\text{máx}}]$, usando diferencias finitas para aproximar las derivadas parciales respecto S . Con esto se obtiene un sistema diferencial en

derivadas ordinarias respecto a la variable temporal t , que se integra usando un método numérico apropiado.

La selección de la malla espacial dependerá fundamentalmente de las condiciones de contorno de la EDP considerada.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(S, t)}{\partial t} = rS \frac{\partial u(S, t)}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} - ru(S, t), & s \in [0, S_{\text{máx}}], \quad t \in [0, T] \\ u(S, 0) = \text{máx}(S - K, 0), \\ u(0, t) = 0, \\ u(S_{\text{máx}}, t) = S_{\text{máx}} - e^{-rt}K. \end{cases} \quad (4.6)$$

Como se tienen condiciones de Dirichlet en ambos extremos $S = 0$ y $S = S_{\text{máx}}$, tomaremos una malla equiespaciada con $N \geq 1$ puntos del interior de $[0, S_{\text{máx}}]$



Es decir, se considera la malla equiespaciada:

$$\Omega_h^D = \{S_i = i\Delta S; \quad 0 \leq i \leq N + 1\}, \quad \Delta S = \frac{S_{\text{máx}}}{N + 1},$$

con $S_0 = 0$, $S_{N+1} = S_{\text{máx}}$.

Con el MOL tratamos de encontrar aproximaciones $u_i(t) \simeq u(S_i, t)$ en los puntos interiores. Para cada $i = 1, \dots, N$, denotamos $\tilde{u}_i(t) = u(S_i, t)$, la solución exacta de (4.6) sobre los puntos de la malla Ω_h^D .

Evidentemente,

$$\frac{\partial u(S_i, t)}{\partial t} = \tilde{u}_i'(t), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Suponiendo que $u(x, t)$ es suficientemente suave, por el desarrollo de Taylor de $u(S_{i\pm 1}, t) = u(S_i \pm \Delta S, t)$ en S_i (considerando $t \in [0, T]$ fijo) es bien sabido que [4]

$$\frac{\partial u(S_i, t)}{\partial S} = \frac{u(S_{i+1}, t) - u(S_{i-1}, t)}{2\Delta S} - \frac{\Delta S^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial S^3}(S_i + \theta_i \Delta S, t) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 u(S_i, t)}{\partial S^2} = \frac{u(S_{i+1}, t) - 2u(S_i, t) + u(S_{i-1}, t))}{\Delta S^2} - \frac{\Delta S^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial S^4}(S_i + \tilde{\theta}_i \Delta S, t) \quad (4.8)$$

para ciertos $\theta_i, \tilde{\theta}_i \in (-1, 1)$

Por tanto, la solución $u(S, t)$ de (4.6) sobre cada punto interior $S_i, i = 1, \dots, N$, verifica:

$$\begin{aligned} \tilde{u}'_i(t) &= rS_i \frac{\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_{i-1}}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2 S_i^2}{2} \frac{\tilde{u}_{i-1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i+1}}{\Delta S^2} - r\tilde{u}_i + \\ &+ \Delta S^2 \left(\frac{-rS_i}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial S^3}(S_i + \theta_i \Delta S, t) - \frac{\sigma^2 S_i^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial S^4}(S_i + \tilde{\theta}_i \Delta S, t) \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

En consecuencia, si ΔS es suficientemente pequeño, si encontramos unos valores $\{u_i(t)\}_{i=1}^N$ que verifiquen

$$u'_i = rS_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2 S_i^2}{2} \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta S^2} - ru_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.10)$$

es esperable que $u_i(t)$ aproxime a la solución exacta $\tilde{u}_i(t)$, con un error proporcional a ΔS^2

Además, hay que tener en cuenta, por las condiciones de contorno.

$$u_0 = u(0, t) = 0, \quad u_{n+1} = u(S_{\text{máx}}, t) = S_{\text{máx}} - e^{-rt}K \quad (4.11)$$

En consecuencia, para obtener las aproximaciones u_i hay que resolver el sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias (4.10), (4.11) junto con la condición inicial $u_i(0) = \text{máx } S - K, 0, i = 1, \dots, N$. Este es el último paso del MOL, lo que se suele llamar **integración temporal**.

Para abordar dicha integración temporal hay que expresar vectorialmente este sistema diferencial, para ello desarrollamos incorporando las condiciones (4.11).

$$\begin{cases} u'_1 = r \frac{S_1}{2\Delta x} u_2 + \frac{\sigma^2 S_1^2}{2\Delta S^2} (-2u_1 + u_2) - ru_1 \\ u'_2 = r \frac{S_2}{2\Delta S} (u_3 - u_1) + \frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta S^2} (u_1 - 2u_2 + u_3) - ru_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u'_{N-1} = r \frac{S_{N-1}}{2\Delta S} (u_N - u_{N-2}) + \frac{\sigma^2 S_{N-1}^2}{2\Delta S^2} (u_{N-2} - 2u_{N-1} + u_N) - ru_{N-1} \\ u'_N = r \frac{S_N}{2\Delta S} (-u_{N-1}) + \frac{\sigma^2 S_N^2}{2\Delta S^2} (u_{N-1} - 2u_N) - ru_N + B_N \end{cases}$$

donde

$$B_N = B_N(t) = \left(\frac{rS_N}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2 S_N^2}{2\Delta S^2} \right) (S_{\text{máx}} - e^{-rt}K). \quad (4.12)$$

Si denotamos

$$U = U(t) = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$$

el sistema (4.10) se puede expresar como

$$U' = (A_1 + A_2 - rI)U + B(t) \quad (4.13)$$

donde:

$$A_1 = \frac{\sigma^2}{2\Delta S^2} \begin{bmatrix} -2S_1^2 & S_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_2^2 & -2S_2^2 & S_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{N-1}^2 & -2S_{N-1}^2 & S_{N-1}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_N^2 & -2S_N^2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \frac{r}{2\Delta S} \begin{bmatrix} 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_2 & 0 & S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{N-1} & 0 & S_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_N & 0 \end{bmatrix}$$

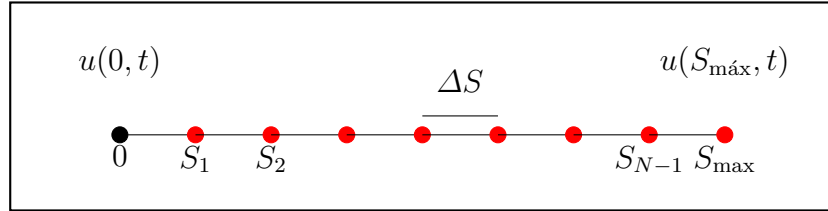
$$B(t) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ B_N(t)]^T$$

4.3. Condición de tipo Neumann

En este caso, consideramos la ecuación diferencial de Black-Scholes con la condición de contorno de Neumann, esto es,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(S, t)}{\partial t} = rS \frac{\partial u(S, t)}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} - ru(S, t); & s \in [0, S_{\text{máx}}], \quad t \in [0, T] \\ u(S, 0) = \text{máx}(S - K, 0) \\ u(0, t) = 0 \\ \frac{\partial u(S_{\text{máx}}, t)}{\partial S} = 1 \end{cases} \quad (4.14)$$

Nos encontramos ahora con que conocemos el valor de la derivada u_x en el borde $S_{\text{máx}}$, pero no lo que vale la solución $u(S_{\text{máx}}, t)$. Por ello se hace necesario cambiar la elección de una malla de $N \geq 1$ puntos de forma que $S_N = N\Delta S = S_{\text{máx}}$. Gráficamente,



donde:

$$\Omega_h^N = \{S_i = i\Delta S; \quad 0 \leq i \leq N\}, \quad \Delta S = \frac{S_{\text{máx}}}{N}$$

A continuación aplicando diferencias sobre cada punto $S_i, i = 1, \dots, N$ de manera análoga a la sección anterior, se buscan aproximaciones $\{u_i(t)\}_{i=1}^N$ que verifiquen:

$$u'_i = rS_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2 S_i^2}{2} \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta S^2} - ru_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.15)$$

Debido a que se tiene la misma condición de contorno en $S = 0$ que en el caso de Dirichlet, este sistema (4.15) es igual que el (4.10) para $i = 1, \dots, N - 1$.

Sin embargo, en este caso para u'_N no conocemos la expresión de u_{N+1} . Una de las formas de aproximar este valor usando la condición de contorno de Neumann en $S_N = S_{\text{máx}}$ es considerar el **punto virtual** $S_{N+1} = (N + 1)\Delta S = S_{\text{máx}} + \Delta S$, fuera del dominio, entendiéndose que ΔS es suficientemente pequeño para que u esté bien definido en S_{n+1} .

Por (4.7)

$$\frac{\partial u(S_{\text{máx}}, t)}{\partial S} \simeq \frac{u(S_{\text{máx}} + \Delta S, t) - u(S_{\text{máx}} - \Delta S, t)}{2\Delta S} \approx \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2\Delta S} = 1$$

así que tenemos la aproximación

$$u_{N+1} = u_{N-1} + 2\Delta S.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} u'_N &= rS_N \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} S_N^2 \frac{u_{N+1} - 2u_N + u_{N-1}}{\Delta S^2} - ru_N \\ &= rS_N + \frac{\sigma^2}{2} S_N^2 \frac{u_{N-1} + 2\Delta S - 2u_N + u_{N-1}}{\Delta S^2} - ru_N \\ \Rightarrow u'_N &= \frac{\sigma^2}{2} S_N^2 \frac{2u_{N-1} - 2u_N}{\Delta S^2} - ru_N + B_N, \quad B_N = rS_N + \frac{\sigma^2 S_N^2}{\Delta S}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Denotando

$$U = U(t) = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$$

el sistema (4.14) se puede expresar matricialmente de forma similar a (4.13) como

$$U' = (A_1 + A_2 - rI)U + B \quad (4.17)$$

pero ahora

$$A_1 = \frac{\sigma^2}{2\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2S_1^2 & S_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_2^2 & -2S_2^2 & S_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{N-1}^2 & -2S_{N-1}^2 & S_{N-1}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_N^2 & -2S_N^2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \frac{r}{2\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_2 & 0 & S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{N-1} & 0 & S_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

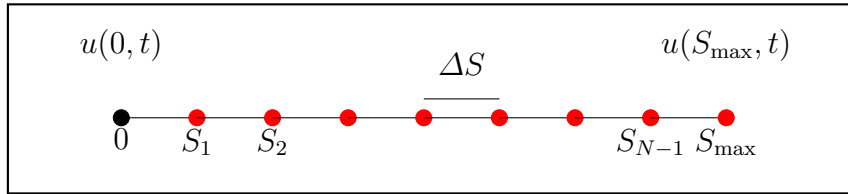
$$B = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ B_N]^T$$

4.4. Condición de tipo lineal

En este caso consideramos la ecuación de Black-Scholes con la condición de contorno de tipo lineal en $S_{\text{máx}}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(S, t)}{\partial t} = rS \frac{\partial u(S, t)}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} - ru(S, t); & s \in [0, S_{\text{máx}}], \quad t \in [0, T] \\ u(S, 0) = \text{máx}(S - K, 0) \\ u(0, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 u(S_{\text{máx}}, t)}{\partial S^2} = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

En este caso, al igual que en el problema con condiciones de Neumann, se conoce el valor de la derivada u_{xx} en el borde $S_{\text{máx}}$, pero no lo que vale su solución $u(S_{\text{máx}}, t)$. Por ello tomamos la misma malla equiespaciada que en el caso anterior.



donde $\Omega_h^N = \{S_i = i\Delta S; \quad 0 \leq i \leq N\}$, $\Delta S = \frac{S_{\text{máx}}}{N}$

De la misma forma, se buscan aproximaciones $u_i \approx u(S_i, t)$ que verifiquen

$$u'_i = rS_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2 S_i^2}{2} \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta S^2} - ru_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.19)$$

Para el caso $i = N$ volvemos a considerar el punto virtual $S_{N+1} = S_{\text{máx}} + \Delta S$. Para calcular el valor de u_{N+1} ahora utilizamos la condición de contorno lineal teniendo en cuenta por (4.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(S_{\text{máx}}, t)}{\partial S^2} &= \frac{u(S_{\text{máx}} + \Delta S, t) - 2u(S_{\text{máx}}, t) + u(S_{\text{máx}} - \Delta S, t)}{\Delta S^2} = \\ &= \frac{u_{N+1} - 2u_N + u_{N-1}}{\Delta S^2} = 0, \end{aligned}$$

por lo que se aproxima

$$u_{N+1} = 2u_N - u_{N-1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} u'_N &= r \frac{S_N}{2\Delta S} (2u_N - u_{N-1} - u_{N-1}) + \frac{\sigma^2 S_N^2}{2\Delta S^2} (u_{N-1} - 2u_N + 2u_N - u_{N-1}) - ru_N = \\ &= r \frac{S_N}{\Delta S} (u_N - u_{N-1}) - ru_N \end{aligned} \quad (4.20)$$

Como en los otros casos, expresamos esto de forma vectorial denotando.

$$U = U(t) = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$$

y el sistema (4.19) se puede expresar como

$$U' = (A_1 + A_2 - rI)U \quad (4.21)$$

donde:

$$A_1 = \frac{\sigma^2}{2\Delta S^2} \begin{bmatrix} -2S_1^2 & S_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_2^2 & -2S_2^2 & S_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{N-1}^2 & -2S_{N-1}^2 & S_{N-1}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \frac{r}{2\Delta S} \begin{bmatrix} 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_2 & 0 & S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{N-1} & 0 & S_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2S_N & 2S_N \end{bmatrix}$$

4.5. Integración temporal

El último paso del método de líneas consiste en resolver numéricamente los sistemas semi-discretos (4.13), (4.17) o (4.21). Estos sistemas son problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de dimensión $N \geq 1$, de la forma.

$$U' = f(t, u) = AU + b(t), \quad U(0) = u_0 \quad (4.22)$$

donde $A = A_1 + A_2 - rI$ está definido en (4.13), (4.17) o (4.21) en matrices A_1 y A_2 diferentes dependiendo de la condición de contorno que se tome. Respecto

al término independiente, se tiene que $b(t) = B(t)$, dado en (4.12), en el caso de Dirichlet, $b(t) = B$ (constante), dado en (4.16) en el caso de Neumann o $b(t) = 0$ en el caso de tipo lineal. Además, como vector inicial en los tres casos se tiene.

$$U_0 = U(S, 0) = \begin{pmatrix} \text{máx}(S_1 - K, 0) \\ \text{máx}(S_2 - K, 0) \\ \vdots \\ \text{máx}(S_N - K, 0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \quad (4.23)$$

teniendo en cuenta que los puntos de la malla $S_i, i = 1, \dots, N$ son diferentes según la condición de contorno.

Para resolver (4.22), (4.23) en cada caso hay que usar un método de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias apropiado. En este trabajo hemos decidido aplicar la llamada **regla trapezoidal**, debido a sus adecuadas propiedades de estabilidad y convergencia. Concretamente, aplicamos la regla trapezoidal con un tamaño de paso fijo $\tau = T/M$, $M \geq 1$.

Si denotamos los puntos de la malla temporal $t_n = n\tau$ para $n = 0, 1, 2, \dots, M$, éste método, dada una aproximación a la solución $U_n \approx U(t_n)$, da la aproximación U_{n+1} en el siguiente punto de la malla ($t_{n+1} = t_n + \tau$) mediante la fórmula

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\tau}{2}(f(t_n, U_n) + f(t_{n+1}, U_{n+1})), \quad n = 0, 1, \dots, M - 1$$

En consecuencia, aplicándolo para (4.22) se tiene

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\tau}{2}(AU_n + b(t_n)) + \frac{\tau}{2}(AU_{n+1} + b(t_{n+1}))$$

por lo que la aproximación U_{n+1} se calcula resolviendo el sistema lineal de dimensión N

$$(I - \frac{\tau}{2}A)U_{n+1} = U_n \frac{\tau}{2}AU_n + \frac{\tau}{2}(b(t_n) + b(t_{n+1}))$$

Dada la fórmula tridiagonal de la matriz A en los tres casos estudiados, este sistema se resuelve usando la descomposición LU de la matriz de coeficientes $I - \frac{\tau}{2}A$ y resolviendo los dos sistemas triangulares resultantes.

Claramente, cuando $n = M$, cada componente i del vector U_M nos dará la aproximación $u_i(T)$ a la solución u en el punto S_i cuando $t = T$.

Esta combinación de diferencias centrales de segundo orden para la discretización espacial y la regla trapezoidal para la integración temporal es lo que se suele llamar **método de Crank-Nicolson** en la literatura.

4.6. Experimentos numéricos con MATLAB

Siguiendo las especificaciones detalladas en las secciones anteriores, hemos construido el código MATLAB, que se puede ver en A.1. Así, los datos de los

parámetros utilizados son los propuestos en [3].

$$\sigma = 0.25, \quad r = 0.05, \quad K = 100, \quad M = 2N, \quad T_{\text{máx}} = 1$$

En este código hemos implementado no solo la resolución del MOL en los tres casos (4.13), (4.17) o (4.21), sino que también hemos incorporado al código la solución teórica (3.29), teniendo en cuenta que ahora.

$$\begin{cases} u(S, t) = C(S, T - t) = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2) \\ d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \end{cases} \quad (4.24)$$

Con los experimentos numéricos veremos, en primer lugar, como afecta elegir un valor concreto para $S_{\text{máx}}$ suficientemente grande. En [3] se recomienda tomar $S_{\text{máx}} = 3K$.

En las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 se ha representado la solución exacta del problema, tomando $S_{\text{máx}} = 2K, 3K, 8K$ respectivamente cuando estamos en la zona de interés $S \in [80, 120]$, dado los datos iniciales.

Primero se puede analizar la gráfica tridimensional que el código aporta acerca del valor de la opción de compra con respecto al tiempo (t) y espacio (S) de la solución teórica de la ecuación de Black-Scholes tomando los distintos valores para $S_{\text{máx}}$ que se mencionaron anteriormente.

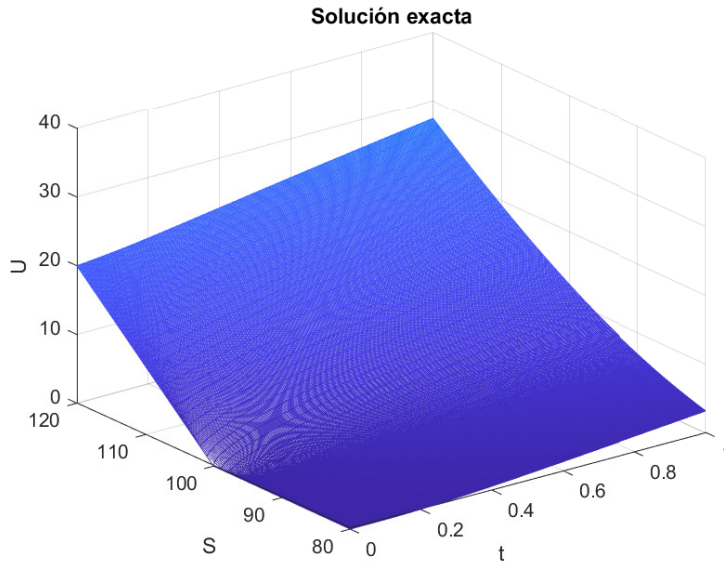


Figura 4.1. Valor de la opción de compra (4.24) para $S_{\text{máx}} = 2K$.

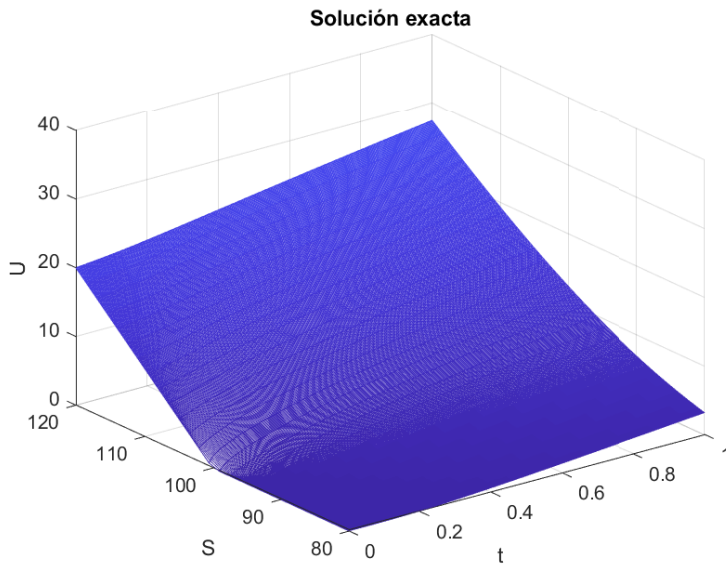


Figura 4.2. Valor de la opción de compra (4.24) para $S_{\text{máx}} = 3K$.

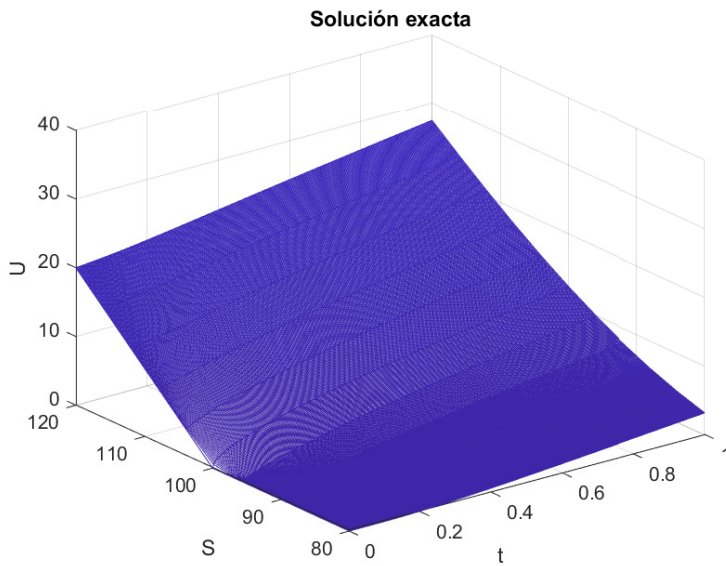


Figura 4.3. Valor de la opción de compra (4.24) para $S_{\text{máx}} = 8K$.

Analizando estas tres gráficas, apreciamos que el precio de la opción de compra será mayor conforme aumente el valor de S , reflejando la condición $u(S, t) \sim S$ cuando $S \rightarrow \infty$ independientemente de t . Además, no se aprecian diferencias a simple vista entre los 3 casos que se están considerando $S_{\text{máx}} =$

$2K, 3K, 8K$ y esto se debe a que el comportamiento entre dichas soluciones es prácticamente el mismo.

Por otra parte, con los experimentos numéricos hemos querido testar qué condición de contorno (Dirichlet, Neumann o lineal) simula mejor el comportamiento de la solución teórica (3.29).

Para ello, hemos integrado el código MATLAB A.1 con mallas equiespaciales de diferente resolución $N \in \{100, 200, 400, 800, 1600, 3200\}$ con las tres condiciones de contorno de los problemas (4.13), (4.17) y (4.21), tomando como número de puntos de la integración temporal $M = 2N$, con lo que el error cometido por la regla trapezoidal será despreciable frente al error cometido por la discretización espacial con diferencias finitas.

En las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 que nos encontramos a continuación, se ven los errores obtenidos en cada integración respecto la solución teórica (3.29) para $S_{\text{máx}} = 2K, 3K, 8K$ respectivamente, en el punto final de la integración temporal $t = T$, esto es,

$$\text{error} = \max_{1 \leq i \leq N} (U(S_i, T) - U_{M,i}) \quad (4.25)$$

donde $U_{M,i}$ es la componente i -ésima del vector U_M , para cada caso.

Por último, el código también aporta una gráfica de errores para las distintas condiciones de contorno y para cada N que se tome. Para su correcto estudio es interesante tomar la gráfica para la mayor N que se disponga ($N = 3200$), ya que será la solución que recorra más puntos de la malla espacial $[0, S_{\text{máx}}]$. Así, las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 muestran la evolución respecto al tiempo del error (4.25), tomando $N = 3200$ para las distintas condiciones de contorno ya mencionadas y $S_{\text{máx}} = 2K, 3K, 8K$ respectivamente, en escala logarítmica.

Tabla 4.1. Integración de Black-Scholes para diferentes condiciones de contorno con $S_{\text{máx}} = 2K$

N	Dirichlet	Neumann	Lineal
100	1.264026×10^{-2}	1.520617×10^{-2}	1.808380×10^{-2}
200	1.350652×10^{-2}	1.507952×10^{-2}	1.805540×10^{-2}
400	1.395493×10^{-2}	1.504780×10^{-2}	1.804830×10^{-2}
800	1.418341×10^{-2}	1.503986×10^{-2}	1.804652×10^{-2}
1600	1.429878×10^{-2}	1.503788×10^{-2}	1.804607×10^{-2}
3200	1.435675×10^{-2}	1.503738×10^{-2}	1.804596×10^{-2}

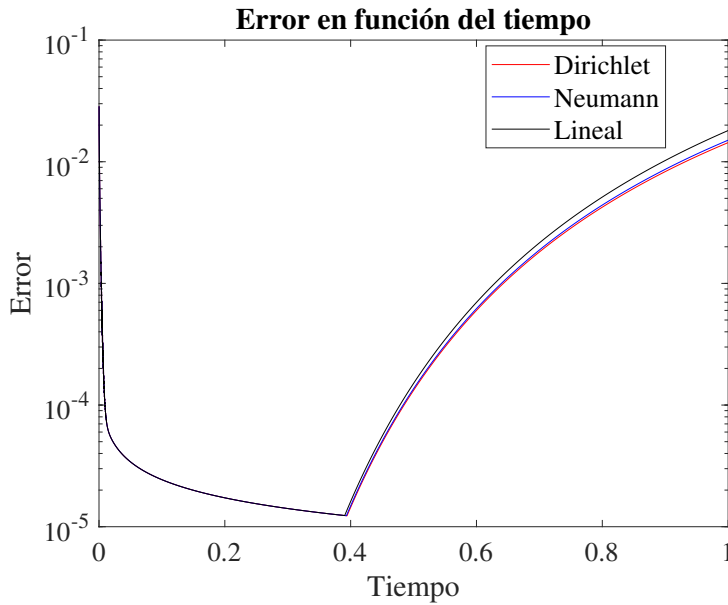


Figura 4.4. Error en función del tiempo para las diferentes condiciones de contorno con $S_{\text{máx}} = 2K$.

Tabla 4.2. Integración de Black-Scholes para diferentes condiciones de contorno con $S_{\text{máx}} = 3K$

N	Dirichlet	Neumann	Lineal
100	4.751213×10^{-3}	4.751213×10^{-3}	4.751213×10^{-3}
200	1.223709×10^{-3}	1.223709×10^{-3}	1.223709×10^{-3}
400	3.019856×10^{-4}	3.019856×10^{-4}	3.019856×10^{-4}
800	7.602516×10^{-5}	7.602516×10^{-5}	7.602516×10^{-5}
1600	1.894110×10^{-5}	1.894110×10^{-5}	2.144559×10^{-5}
3200	1.814986×10^{-5}	1.881637×10^{-5}	2.144264×10^{-5}

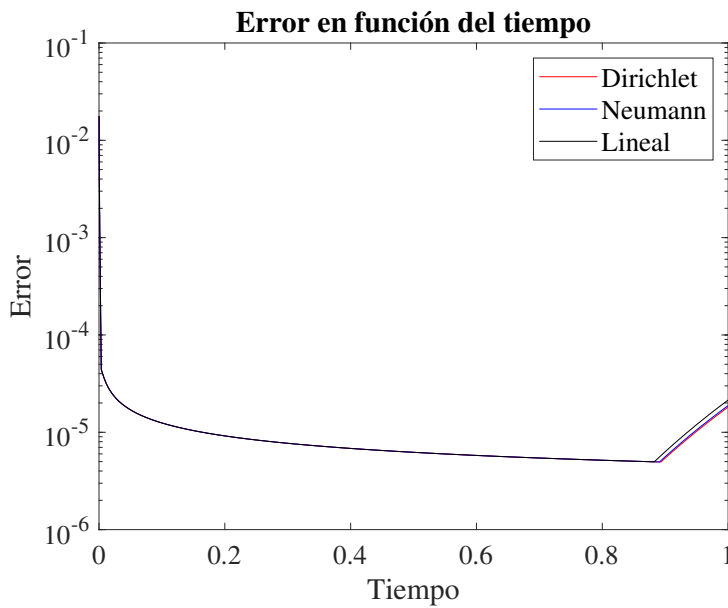
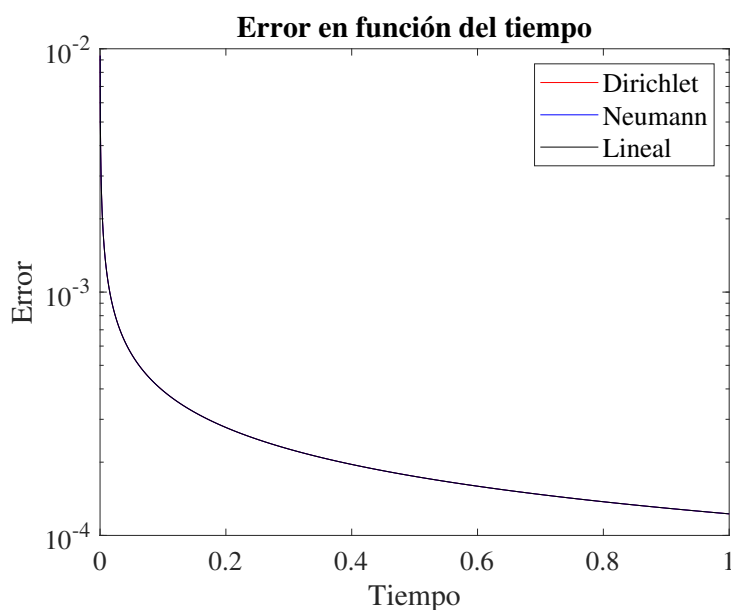


Figura 4.5. Error en función del tiempo para las diferentes condiciones de contorno con $S_{\text{máx}} = 3K$.

Tabla 4.3. Integración de Black-Scholes para diferentes condiciones de contorno con $S_{\text{máx}} = 8K$

N	Dirichlet	Neumann	Lineal
100	3.731828×10^{-2}	3.731828×10^{-2}	3.731828×10^{-2}
200	3.148936×10^{-2}	3.148936×10^{-2}	3.148936×10^{-2}
400	7.847195×10^{-3}	7.847195×10^{-3}	7.847195×10^{-3}
800	1.962552×10^{-3}	1.962552×10^{-3}	1.962552×10^{-3}
1600	4.905314×10^{-4}	4.905314×10^{-4}	4.905314×10^{-4}
3200	1.226262×10^{-4}	1.226262×10^{-4}	1.226262×10^{-4}

**Figura 4.6.** Error en función del tiempo para las diferentes condiciones de contorno con $S_{\text{máx}} = 8K$.

En las tablas 4.1, 4.2, 4.3 y sus correspondientes gráficas de error 4.4, 4.5, 4.6, se pueden observar comportamientos interesantes para determinar el mejor método para encontrar la solución aproximada.

En primer lugar, se observa que a medida que se incrementa N (la malla espacial sobre el precio S), el error entre el precio teórico de la ecuación de Black-Scholes y la solución aproximada disminuye. Esto es lógico, ya que una mayor N permite una mejor aproximación del espacio inicial $[0, S_{\text{máx}}]$.

Un resultado importante observado en las tablas y gráficas es que, cuanto menor es $S_{\text{máx}}$ (es decir, menor distancia existe entre $S_{\text{máx}}$ y el precio de strike K), mayor es la diferencia entre las distintas condiciones de contorno. Este hecho es notable si comparamos la tabla 4.1 para $S_{\text{máx}} = 2K$ y la tabla 4.3 para $S_{\text{máx}} = 8K$, las gráficas 4.4. y 4.6. hacen más evidente esta diferencia.

Finalmente, se observa que para cualquier $S_{\text{máx}}$, la condición de Dirichlet genera un error menor comparado con las condiciones de Neumann y lineal.

Por lo tanto, se considera la mejor condición de contorno para trabajar con el modelo implementado. Esto tiene su explicación en que la solución exacta (4.24) cuando hacemos $S \rightarrow \infty$, se tiene $d_j \rightarrow \infty$, $j = 1, 2$, lo que implica que $N(d_j) \rightarrow 1$, $j = 1, 2$, y, por tanto (t fijo),

$$u(S, t) \rightarrow S - Ke^{-rt} \quad (4.26)$$

Evidentemente, verifica la condición de que $u(S, t) \rightarrow S$ cuando $S \rightarrow \infty$, pero la condición (4.26) es mucho más precisa, por lo que la condición de Dirichlet cuando $S_{\text{máx}}$ es grande, simula muy bien el comportamiento de la solución exacta.

Además, un punto significativo del estudio es que los errores más pequeños se encuentran para $S_{\text{máx}} = 3K$, particularmente con la condición de Dirichlet, como se muestra en las tablas de errores 4.1, 4.2, 4.3. Se puede observar que $S_{\text{máx}} = 2K$ es un valor que no es suficiente para simular el comportamiento de la solución cuando $S \rightarrow \infty$. En cambio, en el caso $S_{\text{máx}} = 8K$ la resolución de las mallas ΔS es mucho peor que con $S_{\text{máx}} = 3K$, por lo que tendríamos que tomar el triple de puntos en la malla espacial para $S_{\text{máx}} = 8K$ para obtener una precisión similar que con $S_{\text{máx}} = 3K$. Esto hace que aumente considerablemente el coste computacional del método.

En conclusión, el mejor método de aproximación a la solución teórica es el problema aproximado con la condición de contorno de Dirichlet para $S_{\text{máx}} = 3K$.

Conclusiones

En este trabajo fin de grado, hemos estudiado en profundidad la ecuación de Black-Scholes, clave para valorar opciones financieras. Empezamos deduciendo dicha ecuación introduciendo algunos conceptos de procesos estocásticos como el movimiento browniano y el lema de Itô. Luego, resolvimos la ecuación de dos maneras: teóricamente, mediante distintos cambios de variable y numéricamente, usando el método de líneas (MOL) para aproximar el precio justo de una opción de compra.

Construimos un código en Matlab para implementar la aproximación numérica y realizamos distintos experimentos en los que observamos qué tipo de condición de contorno es más apropiada para simular el precio de la opción cuando el precio del subyacente tiende a infinito.

Nuestro análisis mostró que la mejor aproximación se obtiene con condiciones de Dirichlet y una cota superior de $S_{\text{máx}} = 3K$, (donde K es el strike de la opción). Este hallazgo es útil para implementar el método de líneas de manera más precisa.

En resumen, este trabajo no solo profundiza en la teoría de los procesos estocásticos en finanzas que están detrás de la famosa ecuación de Black-Scholes, sino que también proporciona un repaso de las herramientas analíticas y numéricas que se aplican en este ámbito, ayudando a mejorar la precisión en la valoración de opciones financieras.

A

Apéndice

A.1. Código Matlab

Código en Matlab que resuelve el (4.22).

Aquí está el código de MATLAB incluido en el documento:

```
function Total

% Creación del fichero
fil=fopen('Tabla-de-errores.txt','wt');

% Valores iniciales del problema, los cuales
% no varían según la N y M
sigma = 0.25;
r = 0.05;
K = 100;
S_max =8*K;
T_max = 1;

% Escritura de las tablas en el archivo

fprintf(fil,['Integracion-de-Black-Scholes-para' ...
'-las-diferentes-condiciones-de-contorno\n']);
fprintf(fil,['\n\nTabla-de-errores-para-M=2N-y-
distintos' ...
'-valores-de-N:\n\n']);
fprintf(fil,'N----|Dirichlet--|Neumann-|-Lineal\n');
fprintf(fil,'-----\n');

N_values = [100,200,400,800,1600,3200];
M_values = 2 * N_values;
errors_all_N = zeros(length(N_values), 3);
```

```

% Inicio del bucle para cada valor de N
for i = 1:length(N_values)

    Delta_x = S_max/ N_values(i); % Generamos la
    % malla equiespacial para cada N que queremos en la
    % tabla.
    S_total = (0: Delta_x: S_max)';

    M = M_values(i);
    tau = T_max/M;
    T = transpose(0: tau: T_max); %dimension M+1

    error_N_values = zeros(3, M+1);
    maxerror_N_values = zeros(3, 1);

    % Inicio de los cálculos para cada condición de
    % contorno
    for ifron=1:3
        if ifron==1
            S = S_total(2:end-1);
        else
            S = S_total(2:end);
        end
        n=length(S);
        A=jacobiano(ifron);
        [U_av, U_exacta_av] = integrar(ifron, A);

        error_N_values(ifron, :) =
            max(abs(U_av-U_exacta_av));

        maxerror_N_values(ifron) =
            max(error_N_values(ifron, end));
    end

    errors_all_N(i, :) = maxerror_N_values;

    % Representación del error con respecto del tiempo
    % según
    % cada condición de contorno
    figure(i);
    semilogy(T, error_N_values(1, :), 'r', T, ...

```

```

        error_N_values(2,:), 'b', T,
        error_N_values(3,:), 'k');
xlabel('Tiempo');
ylabel('Error');
title('Error-en-función-del-tiempo');
legend('Dirichlet', 'Neumann', 'Lineal');
end

% Se escriben los datos de la tabla utilizando fprintf
for i = 1:length(N_values)
    fprintf(fi1, '%-8d | %-13.6e | %-13.6e | %-13.6e\n',
        N_values(i), ...
        errors_all_N(i,1), errors_all_N(i,2),
        errors_all_N(i,3));
end

% Cierre del archivo
fclose(fi1);

% Representación tridimensional de la solución exacta de
    la
% ecuación B-S-M
figure(7);
[T_red, S_red]=ndgrid(S,T);
mesh(S_red, T_red, U_exacta_av);
xlabel('S');
ylabel('Tiempo');
zlabel('U');
title('Solución-exacta');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Subfunciones usadas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Función para calcular la solución aproximada
function [U_av, U_exacta_av] = integrar(ifron, A)

% Aplicamos la regla trapezoidal
% Valor inicial de U
U = max(S-K, 0);
% Matriz de avance de la solución aproximada
U_av = zeros(n, M+1);

```

```

% Matriz de avance de la solución exacta
U_exacta_av = zeros(n, M+1);
U_av(:, 1) = U(:);
U_exacta_av(:, 1) = U(:);

% Descomposición LU de (I-tau/2 A):

[L_g, U_g] = lu(speye(n) - tau * A/2);
t=T(1);

for j = 1:M
    rhs=vector_B(ifron ,T(j)) + vector_B(ifron ,T(j+1));
    rhs = U + (tau * A * U/2) + tau * rhs/2;
    U = U_g \ (L_g \ rhs);
    U_av(:, j+1)=U(:);
    t=t+tau;
    U_exacta_av(:, j+1)=vector_C(t);
end
end

% Función que calcula la solución teórica de la
% solución de Black-Scholes
function U_exacta = vector_C(t)
d1 = (log(S/K) + (r + 0.5 * sigma^2) * t) ./ (sigma *
    sqrt(t));
d2 = (log(S/K) + (r - 0.5 * sigma^2) * t) ./ (sigma *
    sqrt(t));
U_exacta = S .* prob_erf(d1) - K * exp(-r * t) *
    prob_erf(d2);
end

%Función para calcular el valor de la matriz A
function A=jacobiano(ifron)

A=zeros(n);

switch ifron

    case 1 %Dirichlet
        di = -2 * S.^2;
        up = [0; S(1:end-1).^2];
        lo = [S(2:end).^2; 0];

```

```

I = speye(n);

A_1= spdiags([lo, di, up], -1:1, n, n);
% Multiplicar por el término
A_1 = (sigma^2 / (2 * Delta_x^2)) * A_1;

%Construimos la matriz tridiagonal A_2
up = [0; S(1:end-1)];
lo = [-S(2:end); 0];

A_2 = spdiags([lo, up], [-1, 1], n, n);
% Multiplicar por el término
A_2 = (r / (2 * Delta_x)) * A_2;

% Implementamos A
A = (A_1+A_2-r*I);

case 2 %Neumann
di = -2 * S.^2;
up = [0; S(1:end-1).^2];
lo = [S(2:end-1).^2; 2*S(n)^2; 0];
I = speye(n);

A_1= spdiags([lo, di, up], -1:1, n, n);
A_1 = (sigma^2 / (2 * Delta_x^2)) * A_1;

up = [0; S(1:end-1)];
lo = [-S(2:end-1); 0; 0];

A_2 = spdiags([lo, up], [-1, 1], n, n);
A_2 = (r / (2 * Delta_x)) * A_2;

A = (A_1+A_2-r*I);

case 3 %Lineal
di = [-2 * S(1:end-1).^2; 0];
up = [0; S(1:end-1).^2];
lo = [S(2:end-1).^2; 0; 0];
I = speye(n);

A_1= spdiags([lo, di, up], -1:1, n, n);
A_1 = (sigma^2 / (2 * Delta_x^2)) * A_1;

```

```

        di = zeros(n,1);
        di(end) = 2*S(n);
        up = [0; S(1: end-1)];
        lo = [-S(2: end-1); -2*S(n); 0];

        A_2 = spdiags([lo, di up], -1:1, n, n);
        A_2 = (r / (2 * Delta_x)) * A_2;

        A = (A_1+A_2-r*I);
end
end

% Función para calcular el valor de B(t)
function B = vector_B(ifron ,t)
B = zeros(n,1);
switch ifron
    case 1 % Dirichlet
        B(n) = ((r*S(n))/(2*Delta_x) + (sigma^2 *
            (S(n))^2)/ ...
            (2 * Delta_x ^ 2)) * (S_max - exp(-r*t)*K);
    case 2 % Neumann
        B(n) = ((sigma^2 * (S(n))^2)/(Delta_x)) + r *
            S(n);
end
end

% Función que implementa el error normal
function error_normal = prob_erf(x)
error_normal = 0.5 * (1 + erf(x / sqrt(2)));
end

end

```

Bibliografía

- [1] G. Ayala and F. Montes, *Probabilidad Básica*, Universidad de Valencia, 2020.
- [2] J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives, Global Edition*, Pearson, 2017.
- [3] K. in 't Hout, *Numerical Partial Differential Equations in Finance: An Introduction to Computational Finance*, Cambridge University Press, 2017.
- [4] D. Kincaid, W. Cheney, *Numerical Analysis, Mathematics of Scientific Computing, Third Edition*, American Mathematical Society, 2002.
- [5] D. Lamberton and B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus to Finance*, Chapman and Hall, 1996.
- [6] P. Wilmott, S. Howison, and J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge University Press, 1995.

Numerical methods for solving differential partial equations in finance

Cristian José Pérez García

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0101397894@ull.edu.es

Abstract

THIS BACHELOR'S THESIS focuses on the deduction and resolution of the Black-Scholes equation. The main objective is to understand some stochastic, analytical, and numerical tools that are used in current financial practice.

1. Introduction to stochastic process

BROWNIAN MOTION is a type of stochastic process that, in finance, provides information about the volatility of an asset. Thus, this concept is very useful for modeling the valuation of risky assets. A stochastic process $\{z_t\}_{t \geq 0}$ is a **Brownian motion** if:

- It is a continuous stochastic process with $z_0 = 0$, where for $t < s$, the increment $(z_s - z_t)$ follows a normal distribution with mean 0 and variance $(s - t)$ and also this increment is independent of the information available up to time t .

2. Introduction to financial options

One of the most common models to value the price S of a risky value in a small time interval $(t, t + dt)$ is

$$dS = \mu(S, t)Sdt + \sigma(S, t)Sdz \quad (1)$$

where z denotes a Brownian motion.

Itô's Lemma: if $V(S, t)$ is the price of a financial derivative on an underlying asset S that is modeled by (1), then

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dz \quad (2)$$

3. The Black-Scholes Equation

Applying Itô's Lemma (2) to a derivative $V(S, t)$ where S follows a Brownian motion, we obtain the **Black-Scholes equation**:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (3)$$

"A European call option is a type of financial derivative. It is a contract between two parties, the holder and the writer, which gives the holder the right, but not the obligation, to buy from the writer a given underlying asset at a prescribed price at a prescribed time T ." [2]

The price of a European call option $C(S, t)$ will be modeled by (3) with $V = C$

By performing a series of variable changes, we derive

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

where $N(x)$ is the cumulative distribution function of the standard normal distribution $N(0, 1)$ and:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

4. Numerical Solution of the Black-Scholes Equation

To approximate numerically the value of a European call option, let us consider $u(S, t) = C(S, T - t)$ its price when the price of the underlying is S and there are t days left to T . Then, we apply the method of lines (MOL) to:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(S, t)}{\partial t} = rS \frac{\partial u(S, t)}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} - ru(S, t) \\ u(S, 0) = \max(S - K, 0) \\ u(0, t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

To simulate the fact that $u(S, t) \sim S$ when $S \rightarrow \infty$, we test three different boundary conditions with S_{\max} large enough,

$$(a) u(S_{\max}, t) = S_{\max} - e^{-rt}K; \quad (b) \frac{\partial u(S_{\max}, t)}{\partial S} = 1; \\ (c) \frac{\partial^2 u(S_{\max}, t)}{\partial S^2} = 0$$

Then, after using the method of lines, it is found that the condition that best approximates the theoretical solution is the Dirichlet condition with $(S_{\max} = 3K)$

Table 1: Black-Scholes integration error for $S_{\max} = 3K$

N	(a)	(b)	(c)
100	4.751213×10^{-3}	4.751213×10^{-3}	4.751213×10^{-3}
200	1.223709×10^{-3}	1.223709×10^{-3}	1.223709×10^{-3}
400	3.019856×10^{-4}	3.019856×10^{-4}	3.019856×10^{-4}
800	7.602516×10^{-5}	7.602516×10^{-5}	7.602516×10^{-5}
1600	1.894110×10^{-5}	1.894110×10^{-5}	1.894110×10^{-5}
3200	1.814986×10^{-5}	1.881637×10^{-5}	2.144264×10^{-5}

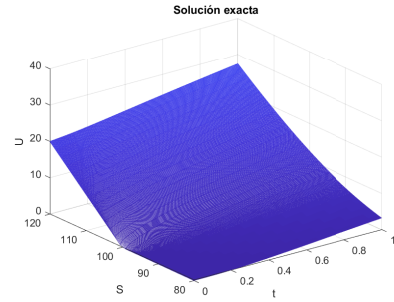


Figure 1: Call option value for $S_{\max} = 3K$.

References

- [1] J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives, Global Edition*, Pearson, 2017.
- [2] K. in 't Hout, *Numerical Partial Differential Equations in Finance: An Introduction to Computational Finance*, Cambridge University Press, 2017.