

Lucio González Morado

Análisis Tiempo-Frecuencia

Time-Frequency Analysis

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2024

DIRIGIDO POR

Rodrigo Francisco Trujillo González

Rodrigo Francisco Trujillo
González
*Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife*

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que contribuyeron de manera directa e indirecta en la realización de este Trabajo de Fin de Grado.

En primer lugar, deseo agradecer a mi director de tesis, Rodrigo Francisco Trujillo González, por su guía experta y su constante apoyo a lo largo de todo el proceso. Su dedicación y consejos fueron esenciales para la culminación de este proyecto.

Asimismo, quiero expresar mi profunda gratitud a mis compañeros de clase que, aunque no participaron directamente en este proyecto, siempre estuvieron dispuestos a compartir ideas y proporcionar ánimo cuando más lo necesitaba.

Por último, pero no menos importante, quiero agradecer a mi familia por su inquebrantable apoyo y comprensión durante este exigente proceso académico. Su amor y aliento fueron mi mayor motivación para superar los desafíos que surgieron en el camino.

Gracias a todas las personas que han contribuido a mi desarrollo como matemático, y más importante aún, como persona.

Lucio González Morado
La Laguna, 8 de julio de 2024

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo se abordará la teoría básica del Análisis Tiempo-Frecuencia, que nos permite expresar las señales en tiempo y frecuencia simultáneamente y no perder información. Todo el desarrollo estará acompañado continuamente de imágenes, permitiendo así visualizar los conceptos de forma más clara. Introduciremos la herramienta más básica en el análisis tiempo-frecuencia, la Transformada de Fourier, estudiando primero su motivación y viendo finalmente las limitaciones que ofrece a la hora de representar señales. Asimismo, estudiaremos el concepto de Principio de Incertidumbre y funciones de densidad tiempo-frecuencia, para las que se tratará de establecer las propiedades a considerar a la hora de construirlas y la dificultad que esto supone. Abordaremos también funciones de densidad específicas, como son la Transformada Corta de Fourier y la Distribución de Wigner, analizando cómo se construyen, su motivación y sus propiedades. Además, consideraremos las diferencias entre ambas densidades, explicando las ventajas y desventajas de una frente a la otra. Finalmente, realizaremos una breve introducción a un método de construcción de densidades tiempo-frecuencia mucho más general y que engloba las dos funciones de densidad tratadas anteriormente.

Palabras clave: *Transformada de Fourier – Principio de Incertidumbre – Función de densidad tiempo-frecuencia – Transformada Corta de Fourier – Distribución de Wigner*

Abstract

This work will address the basic theory of time-frequency analysis, which allows us to express signals in both time and frequency simultaneously without losing information. Throughout the development, graphs will be continuously provided to visualize concepts more clearly. We will introduce the most basic tool in time-frequency analysis, the Fourier transform, first studying its motivation and then examining the limitations it presents when representing signals. Additionally, we will study the concepts of the Uncertainty Principle and time-frequency density function, aiming to establish which properties to consider when constructing them and the difficulties involved. We will also delve into specific density functions, such as the Short-Time Fourier Transform and the Wigner distribution, analyzing how they are constructed, their motivation, and their properties. Moreover, we will consider the differences between these densities, explaining the advantages and disadvantages of one over the other with graphs. Finally, we will provide a brief introduction to a more general method of constructing time-frequency densities that encompasses the two density functions discussed earlier.

Keywords: *Fourier Transform – Uncertainty Principle – Time-frequency density function – Short-Time Fourier Transform – Wigner Distribution*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Introducción al Análisis Tiempo-Frecuencia	1
1.1. Fundamentos del análisis de Fourier	1
1.1.1. Series de Fourier	2
1.1.2. Transformada de Fourier	4
1.2. Funciones de densidad conjunta tiempo-frecuencia	8
1.2.1. Conceptos básicos densidades tiempo-frecuencia	9
1.2.2. Principio de Incertidumbre	11
1.2.3. Características ideales de las densidades tiempo-frecuencia .	14
2. Transformada Corta de Fourier	19
2.1. Introducción a la transformada corta de Fourier	19
2.2. Tipos de ventanas y diferencias	25
2.3. Propiedades	27
3. Distribución de Wigner	35
3.1. Introducción a la Distribución de Wigner	35
3.2. Propiedades	38
3.3. Distribución de Wigner vs Transformada Corta de Fourier	42
4. Enfoque General y Método del Núcleo	47
4.1. Método del núcleo	47
4.2. Propiedades básicas del núcleo	51
Bibliografía	57
Poster	59

Introducción

Desde los albores de la humanidad, el ser humano ha buscado comprender el mundo que lo rodea, desde los movimientos celestiales hasta los patrones en la naturaleza. Uno de los aspectos más fascinantes de esta búsqueda ha sido el estudio del tiempo y la frecuencia, dos dimensiones fundamentales que subyacen en casi todos los fenómenos observables. A medida que la ciencia ha avanzado, hemos desarrollado herramientas cada vez más sofisticadas para analizar y comprender estos aspectos esenciales de la realidad.

El análisis tiempo-frecuencia emerge como una poderosa herramienta en este viaje de exploración, permitiéndonos desentrañar la complejidad de señales y fenómenos que varían en el tiempo y la frecuencia. Este enfoque nos permite capturar la evolución de los eventos a lo largo del tiempo, mientras que simultáneamente revela las distintas frecuencias que componen estas señales, desvelando así detalles ocultos e insights profundos.

El análisis tiempo-frecuencia tiene raíces profundas en disciplinas tan diversas como la física, la ingeniería, la matemática y la música. Desde los primeros esfuerzos por descomponer señales en sus componentes armónicos, hasta el advenimiento de la Teoría de Fourier en el siglo XIX, hemos sido testigos de un progreso continuo en nuestra capacidad para entender y manipular el espectro temporal y frecuencial.

El desarrollo de la Transformada de Fourier, y más tarde de la Transformada Corta de Fourier y la distribución de Wigner, ha marcado hitos significativos en esta evolución. Estas herramientas han encontrado aplicaciones en una amplia gama de campos, desde la ingeniería de comunicaciones hasta la neurociencia, desde el análisis de señales sísmicas hasta el procesamiento de audio y video.

A lo largo de este trabajo exploraremos los conceptos básicos del análisis tiempo-frecuencia y estudiaremos como se emplea. En el primer capítulo, daremos los primeros pasos hacia la comprensión del análisis tiempo-frecuencia al introducir la Transformada de Fourier. Esta transformación esencial nos permite descomponer una señal en sus componentes de frecuencia, revelando así la estructura frecuencial de la señal. No obstante, pese a que la Transformada de

Fourier proporciona información detallada sobre las componentes de frecuencia de una señal, no ofrece una representación simultánea de cómo estas frecuencias cambian en el tiempo, por lo que no obtenemos información completa de la señal. Por tanto, en este capítulo también introduciremos las funciones de densidad tiempo-frecuencia, que nos brindan información detallada sobre cómo varían las frecuencias en función del tiempo, proporcionando una visión más completa de la señal en estudio.

En el segundo capítulo, nos adentraremos a estudiar una función de densidad concreta, la Transformada Corta de Fourier, una técnica que nos permite realizar análisis tiempo-frecuencia en señales no estacionarias. Dicha transformada divide la señal en segmentos temporales cortos y luego aplica la Transformada de Fourier a cada segmento, utilizando para este cometido una función ventana, lo que nos permite observar cómo varían las frecuencias a lo largo del tiempo.

Más adelante, en el tercer capítulo, exploraremos la distribución de Wigner, una técnica más avanzada que proporciona una representación tiempo-frecuencia con mayor resolución. Esta transformada nos permite obtener una imagen detallada de la evolución temporal de las frecuencias presentes en una señal, lo que resulta invaluable en aplicaciones donde se requiere un análisis fino y preciso de la señal. De esta forma, analizaremos este método y lo compararemos con el de la Transformada Corta de Fourier, estudiado en el anterior capítulo, para ver las ventajas y desventajas de cada uno de ellos.

Finalmente, en el cuarto capítulo, exploraremos el método del núcleo como un marco unificador que integra los aspectos esenciales de las técnicas empleadas en los dos anteriores capítulos. De esta forma, revisaremos cómo el método del núcleo generaliza la noción de transformación de señales, permitiendo crear un número infinito de funciones de densidad tiempo-frecuencia, de las que podremos saber sus propiedades simplemente estudiando una función presente en el método y conocida como núcleo.

Introducción al Análisis Tiempo-Frecuencia

Las señales que nos rodean en nuestro entorno han sido motivo de estudio a lo largo de los años debido a su importancia en una amplia gama de campos científicos y tecnológicos. El análisis de señales es fundamental para comprender y procesar la información que nos transmiten, lo que ha llevado al desarrollo de diversas técnicas y herramientas para su estudio.

El Análisis Tiempo-Frecuencia se distingue por su capacidad para proporcionar una representación simultánea de la información temporal y frecuencial de una señal, superando las limitaciones de los enfoques tradicionales que se centran exclusivamente en el dominio del tiempo o de la frecuencia.

Este capítulo comenzará explorando los fundamentos teóricos que subyacen al Análisis Tiempo-Frecuencia, como son las Series de Fourier y la Transformada de Fourier junto con su limitación en la resolución de la dualidad tiempo-frecuencia. Para así poder introducir y empezar a estudiar las conocidas como funciones de densidad tiempo-frecuencia, las cuales serán nuestra herramienta principal en el Análisis Tiempo-Frecuencia.

1.1. Fundamentos del análisis de Fourier

En esta sección, exploraremos los conceptos básicos del análisis de Fourier, una herramienta esencial en el campo de las matemáticas aplicadas, la física y la ingeniería. El análisis de Fourier nos permite descomponer funciones periódicas complejas en sumas de funciones sinusoidales más simples. Comenzaremos por entender las series de Fourier, que son fundamentales para representar cualquier función periódica como una combinación de senos y cosenos. A partir de ahí, introduciremos la transformada de Fourier, que extiende estos conceptos al análisis de señales no periódicas, proporcionando un marco poderoso para estudiar y manipular señales en dominios de tiempo y frecuencia.

1.1.1. Series de Fourier

De manera similar a la expansión de una función infinitamente diferenciable en una serie de potencias, las funciones periódicas en particular pueden ser representadas, con hipótesis mucho menos restrictivas que la diferenciabilidad, como una serie de funciones trigonométricas mediante las Series de Fourier, las cuales vienen definidas a partir del teorema que veremos a continuación, cuya demostración no desarrollaremos pero se puede consultar en [2].

Teorema 1.1 (Series de Fourier) *Sea $t_0, T \in \mathbb{R}$ y $f(t)$ una función compleja de variable real t , que es integrable Riemann en el intervalo $[t_0 - \frac{T}{2}, t_0 + \frac{T}{2}]$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$ existen A_k y B_k tal que dado $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$, la siguiente igualdad se cumple en todo punto del intervalo donde no existan discontinuidades (en casi todo punto por ser f integrable Riemann),*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t \quad (1.1)$$

La representación de f presente en (1.1) se denomina como su serie de Fourier y se usa mayoritariamente para representar funciones periódicas, ya que si extendemos dicha serie a \mathbb{R} (no la evaluamos simplemente en un intervalo) esta resulta ser periódica de periodo T .

Los coeficientes A_k y B_k de la serie de Fourier bajo las condiciones del teorema pueden ser calculados gracias a que el siguiente sistema,

$$1, \cos \frac{2\pi t}{T}, \sin \frac{2\pi t}{T}, \cos \frac{4\pi t}{T}, \sin \frac{4\pi t}{T}, \dots$$

conforma una base ortogonal en el intervalo $[t_0 - \frac{T}{2}, t_0 + \frac{T}{2}]$. Es decir, dados $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} \cos \frac{2\pi n t}{T} \cos \frac{2\pi m t}{T} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ T/2 & \text{si } n = m \neq 0 \\ T & \text{si } n = m = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} \sin \frac{2\pi n t}{T} \sin \frac{2\pi m t}{T} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \text{ o } n = m = 0 \\ T/2 & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} \cos \frac{2\pi n t}{T} \sin \frac{2\pi m t}{T} dt = 0 \quad (1.4)$$

Utilizando las relaciones de ortogonalidad mencionadas anteriormente, podemos calcular los coeficientes de Fourier de inmediato. Necesitamos multiplicar ambos lados de la ecuación (1.1) por $\cos(\omega_k t)$ e integrar desde $-T/2$ hasta

$+T/2$ para cada $k' \in \mathbb{N}$. Debido a la ortogonalidad mostrada en (1.2) y (1.4), solo permanecerán los términos con $k = k'$.

Esto nos proporciona,

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} f(t) \cos(\omega_k t) dt \quad \text{para } k \neq 0 \quad (1.5)$$

y para $k = 0$,

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} f(t) dt \quad (1.6)$$

De la misma forma podemos obtener los B_k multiplicando por el seno y utilizando la ortogonalidad vista en (1.3) y (1.4),

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} f(t) \sin(\omega_k t) dt \quad \text{para todo } k \quad (1.7)$$

Una vez visto esto, es posible introducir la notación compleja para las Series de Fourier. Nuestra herramienta más importante para esto será la identidad de Euler,

$$e^{i\alpha t} = \cos(\alpha t) + i \sin(\alpha t)$$

Lo que nos permite reescribir el seno y el coseno de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha t) &= \frac{1}{2}(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}) \\ \sin(\alpha t) &= \frac{1}{2i}(e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}) \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.1):

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k - iB_k}{2} e^{i\omega_k t} + \frac{A_k + iB_k}{2} e^{-i\omega_k t} \right)$$

Con lo que usando la siguiente notación,

$$\begin{aligned} C_0 &= A_0, \\ C_k &= \frac{A_k - iB_k}{2}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \\ C_{-k} &= \frac{A_k + iB_k}{2}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

obtenemos,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad (1.8)$$

Además si sustituimos (1.5), (1.6) y (1.7) en (1.8) tenemos,

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.9)$$

La representación de los coeficientes en la serie de Fourier, ya sea en su forma trigonométrica (senos y cosenos) o en su forma exponencial compleja, captura la esencia periódica de las funciones. Esto se debe a que la serie de Fourier descompone una función periódica en una suma infinita de funciones sinusoidales o exponenciales complejas, cada una con su propia frecuencia y amplitud, mediante los cuales se puede reconstruir la función original. La serie de Fourier aprovecha la periodicidad de la función para representarla como una suma de componentes que oscilan a diferentes frecuencias. Cada coeficiente corresponde a una frecuencia específica y contiene la información necesaria para reconstruir la contribución de esa frecuencia a la función original. La magnitud de los coeficientes indica cuánto contribuye esa frecuencia específica a la forma general de la función.

Cabe destacar que la forma compleja de expresar las Series de Fourier, así como los coeficientes C_k , serán nuestras bases para introducir la Transformada de Fourier en la siguiente subsección, que viene motivada por la idea de extender el desarrollo en Series de Fourier a funciones no periódicas. Es posible encontrar más detalle de todo el desarrollo llevado a cabo hasta ahora consultando [3].

Por otra parte, en el Teorema 1.1 vimos que dada una función f su serie de Fourier coincide con la misma en casi todo punto. Por tanto, para entender la esencia de las Series de Fourier, es importante tener en cuenta que podemos acercarnos a f en todo punto donde la función sea continua tanto como queramos considerando únicamente los n primeros términos de la serie de Fourier para un n suficientemente grande. Veamos un ejemplo gráfico de como a medida que consideramos más términos nos vamos acercando más a nuestra función.

Ejemplo 1.1: Sea f la función presente en (1.10) definida en $[-2, 2]$, obtenemos las siguientes gráficas para su serie de Fourier truncada a n términos

$$f(t) = \begin{cases} 5, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{cases} \quad (1.10)$$

Se puede observar claramente como a medida que aumentamos el valor de n la representación se va acercando cada vez más a la función original.

1.1.2. Transformada de Fourier

Antes de ver la definición formal de la Transformada de Fourier, veamos cómo viene motivada a partir de lo visto en la subsección anterior. Dicha transformada nace del deseo de extender las Series de Fourier a funciones no periódicas, o lo que es lo mismo con periodo infinito. Sabemos que la igualdad (1.8) se

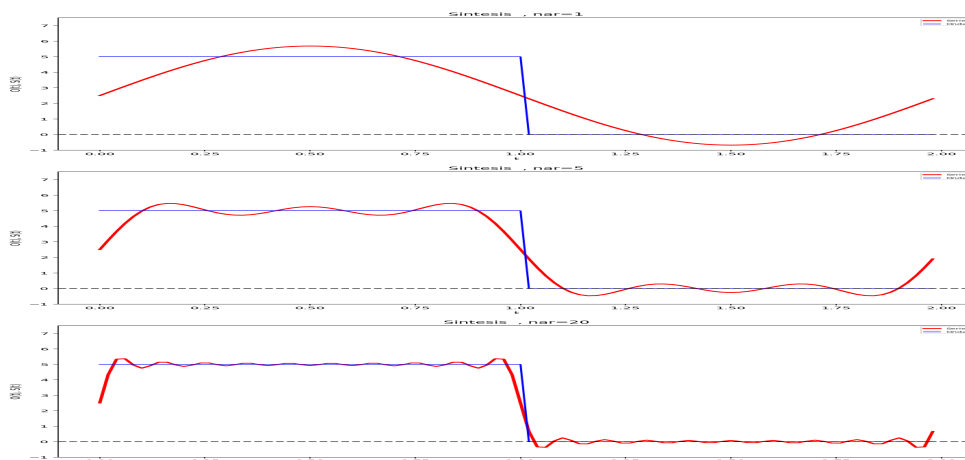


Figura 1.1. Representación de la suma de los n primeros términos de la serie de Fourier, en rojo, frente a la función f en azul. En la primera imagen $n=1$, en la segunda $n=5$ y en la tercera $n=20$.

cumple para todo T , por lo que suponiendo que el límite existe, podemos tomar límites para $T \rightarrow \infty$ en ambos lados de la igualdad. Como C_k y w_k dependen de T los trataremos como una función de variable T .

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(T) e^{i\omega_k(T)t}$$

Sustituyendo C_k a partir de la identidad (1.9),

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(t') e^{-i\omega_k(T)t'} dt' \right) e^{i\omega_k(T)t}$$

Si llamamos $\Delta\omega_k(T) = \omega_{k+1}(T) - \omega_k(T) = \frac{2\pi}{T}$ obtenemos lo siguiente,

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta\omega_k(T)}{2\pi} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(t') e^{-i\omega_k(T)t'} dt' \right) e^{i\omega_k(T)t}$$

Por tanto, definiendo $h(\omega) = \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(t') e^{-i\omega t'} dt'$ tenemos,

$$f(t) = \frac{\Delta\omega_k(T)}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(\omega_k(T)) e^{i\omega_k(T)t}$$

Como $\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta\omega_k(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} = 0$, nos encontramos ante una suma de Riemann para $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega$. Lo que nos lleva a la siguiente expresión, ya que hemos supuesto que el límite existe,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.11)$$

Si nos fijamos la expresión de dentro del paréntesis en (1.11), esta es el equivalente a los C_k presentes en (1.8) para esta generalización a funciones de periodo infinito. Y es precisamente esto a lo que denominaremos Transformada de Fourier. Cabe destacar que, aunque no lo haremos debido a la extensión limitada del trabajo, es posible demostrar formalmente que para toda función $f \in L^2(\mathbb{C})$ la expresión (1.11) se cumple y está bien definida [8]. Donde $L^2(\mathbb{C}) = L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ denota al conjunto de funciones cuadrado integrables definidas de \mathbb{R} a \mathbb{C} .

Definición 1.2 (Transformada de Fourier) . Sea $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$, la Transformada de Fourier $F(\omega)$ de $f(t)$ se define como:

$$F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.12)$$

De hecho, dado F la Transformada de Fourier de una función $f \in L^2(\mathbb{C})$, a partir de igualdad (1.11) también podemos definir la inversa de la Transformada de Fourier,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.13)$$

llamada así ya que permite obtener f a partir de su transformada, lo que es posible porque como ya comentamos para $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ se cumple (1.11).

Por otra parte, una propiedad importante que podemos obtener a partir de lo ya expuesto y que utilizaremos a lo largo de los próximos capítulos es la siguiente,

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega(-t+t_0)} d\omega \quad (1.14)$$

donde δ es la conocida como delta de Dirac. Esta igualdad se obtiene gracias a la propiedad ya comentada de recuperar f mediante su Transformada de Fourier inversa. Es decir, sea $f \in L^2(\mathbb{C})$ y F su Transformada de Fourier,

$$f(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega = \int_{\mathbb{R}} f(t') \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega \right) dt$$

lo que nos lleva a (1.14) por definición de la delta de Dirac.

Una vez vista la definición de la transformada, es necesario introducir tres importantes proposiciones que no demostraremos pero nos ayudarán en el desarrollo de los capítulos posteriores. Si se desea más información, estas se tratan con mucho más detalle en [2].

Proposición 1.3 (Identidad de Parseval) Sean $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ y $F(\omega)$ su transformada, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Proposición 1.4 Sean $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ y $F(\omega)$ su Transformada de Fourier. Si f tiene soporte acotado entonces F tiene soporte no acotado y viceversa.

Proposición 1.5 Sean $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ y $F(\omega)$ su Transformada de Fourier. Entonces, dado $a \in \mathbb{R}$, la Transformada de Fourier, $G(\omega)$, de $g(t) = f(at)$ será $G(\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

La segunda proposición está altamente relacionada con el conocido como Principio de Incertidumbre, el cual veremos detenidamente en la próxima sección y cobrará una gran importancia en el Análisis Tiempo-Frecuencia.

Nuestro objetivo ahora es analizar para que sirve la transformada y su importancia. En nuestro día a día estamos continuamente rodeados de señales, nuestra voz, el ruido de los coches o la música que escuchamos son claros ejemplos de ello, y es aquí donde la Transformada de Fourier juega un papel esencial. Las señales son comúnmente representadas en el dominio del tiempo, en base a su amplitud, la cual representa la intensidad de un sonido; no obstante, aunque esta representación es muy importante, no nos permite comprender el comportamiento de la señal al cien por cien, ya que un factor tan importante como el de las frecuencias no es fácilmente apreciable. Es por esto que es necesario una herramienta que permita descomponer una señal en sus componentes de frecuencia, y es precisamente lo que hace la Transformada de Fourier, hecho que se entiende a partir de todo lo visto hasta ahora. Cabe destacar que la representación de una señal en el dominio de la frecuencia se hace en base al módulo de la Transformada de Fourier, ya que esta puede no ser real. El conjunto de valores que nos da la representación se conocen como espectro de la señal, es decir, el conjunto de frecuencias que componen la señal.

Para hacernos una idea de lo que estamos hablando veamos un pequeño ejemplo en el que se nos muestra la gráfica de dos señales y su espectro.

Ejemplo 1.2 Sean las señales f y g definidas en (1.15) veamos sus representaciones en tiempo y frecuencia.

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi 20t) & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ \sin(2\pi 50t) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ \sin(2\pi 100t) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} \sin(2\pi 100t) & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ \sin(2\pi 50t) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ \sin(2\pi 20t) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.15)$$

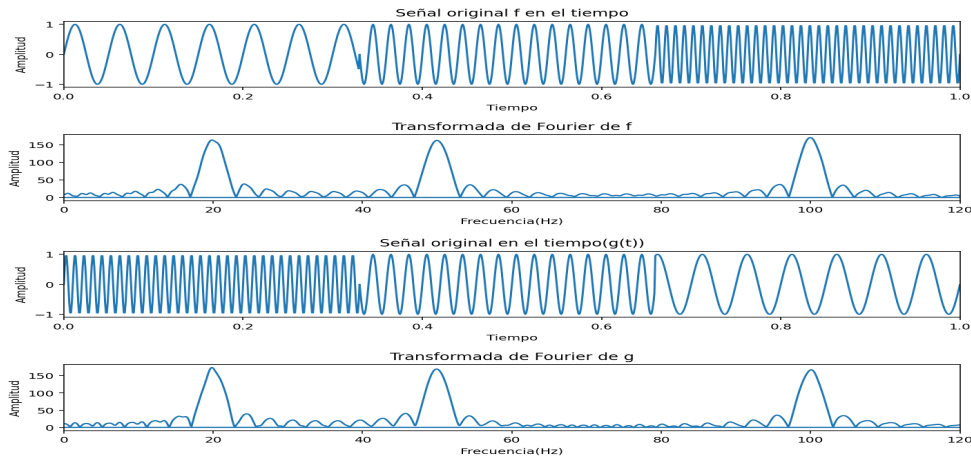


Figura 1.2. En esta imagen se grafican f y g junto al módulo de sus respectivas transformadas. Estas gráficas han sido producidas por python utilizando las referencias encontradas en [9]

En la Figura 1.2 puede observar que en las gráficas de ambas transformadas las frecuencias más presentes son 20, 50 y 100, lo que se ajusta a nuestra motivación del principio de la subsección y lo podemos entender por cómo están definidas cada una de las partes de f y g .

Por otro lado, al introducir este tipo de representación en el dominio de la frecuencia, podríamos haber llegado a plantearnos por qué no usarla exclusivamente y prescindir de la del tiempo. Sin embargo, las gráficas de la Figura 1.2 ilustran perfectamente el problema que esto conllevaría, ya que muestran como dos señales tienen transformadas de Fourier muy similares, al incluir las mismas frecuencias, pero son muy diferentes, ya que las frecuencias aparecen en tiempos distintos. Por tanto, si solo consideráramos la representación de la magnitud de las frecuencias, perderíamos información sobre como estas están distribuidas a lo largo del tiempo. Esto sería, como tener las notas de una canción, pero no saber como ordenarlas, lo que permitiría hacer múltiples canciones diferentes.

Todo esto ilustra las grandes limitaciones que surgen de considerar únicamente el espectro, las gráficas de la transformada por separado no nos aportan información suficiente sobre el tiempo. Este problema con el que nos topamos es el principal responsable del nacimiento del Análisis Tiempo-Frecuencia, para tratar de buscar una gráfica que nos aporte información de tiempo y frecuencia simultáneamente, lo que se desarrollará en la siguiente sección.

1.2. Funciones de densidad conjunta tiempo-frecuencia

En la subsección 1.1.2 introdujimos la herramienta principal del análisis de Fourier, la Transformada de Fourier, y descubrimos que su representación tiene grandes limitaciones, al no proporcionarnos información suficiente, al menos a

plena vista, sobre el comportamiento de las señales a lo largo del tiempo. Con el objetivo de suplir con estas limitaciones, a lo largo de esta sección discutiremos cómo deberíamos buscar una función que describa las características de las señales simultáneamente en tiempo y frecuencia, y que pueda utilizarse y manipularse de la misma manera que cualquier densidad probabilística. Antes de comenzar, se ha de recalcar que para el desarrollo de esta sección ha sido de gran ayuda el libro de Análisis Tiempo-Frecuencia por excelencia, el de Cohen [4]

De aquí en adelante consideraremos $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ una señal cualquiera en el dominio del tiempo y $F(\omega)$ su representación en el dominio de la frecuencia, es decir, su Transformada de Fourier.

1.2.1. Conceptos básicos densidades tiempo-frecuencia

Para tratar de encontrar una función que nos proporcione un método gráfico para analizar a la vez tiempo y frecuencia, es necesario introducir una serie de conceptos básicos que nos permitirán establecer lo que buscamos.

Cuánta energía tiene una señal y específicamente cuánta energía se necesita para producirla es una idea fundamental para el análisis de la misma. En el caso de la teoría electromagnética, la densidad de energía eléctrica es el cuadrado absoluto del campo eléctrico. En los circuitos, la densidad de energía es proporcional al voltaje al cuadrado. Para una onda de sonido, es la presión al cuadrado. Por lo tanto, la energía o intensidad de una señal generalmente es $|f(t)|^2$. Es decir, en un pequeño intervalo de tiempo Δt , se requiere una cantidad de energía $|f(t)|^2 \Delta t$ para producir la señal en ese momento. Dado que $|f(t)|^2$ es la energía por unidad de tiempo, esta función puede llamarse apropiadamente como la densidad de energía con respecto al tiempo. Dado $t \in \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo, se interpreta

$$\begin{aligned} |f(t)|^2 &= \text{energía por unidad de tiempo en el tiempo } t \\ |f(t)|^2 \Delta t &= \text{energía fraccional en el intervalo de tiempo } \Delta t \text{ y tiempo } t \end{aligned}$$

Si $|f(t)|^2$ es la energía por unidad de tiempo en el instante t , entonces, es rápido deducir que la energía total E se obtiene sumando o integrando a lo largo de todo el tiempo.

$$E = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$$

Además, al estar trabajando con señales, es decir, funciones de $L^2(\mathbb{C})$, E será finita.

Por otro lado, análogamente a la densidad de energía en el tiempo, podemos considerar la energía por unidad de frecuencia $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\omega)$ (se multiplica la Transformada de Fourier por esta constante para poder aplicar la Identidad de

Parseval posteriormente). Esta función se denominará espectro de densidad de energía. Dado $\omega \in \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo, se interpreta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}|F(\omega)|^2 &= \text{energía por unidad de frecuencia en la frecuencia } \omega \\ \frac{1}{2\pi}|F(\omega)|^2\Delta\omega &= \text{energía fraccional en el intervalo de frecuencia } \Delta\omega \text{ y} \\ &\quad \text{frecuencia } \omega \end{aligned}$$

Es evidente que en términos físicos la energía total de la señal debería ser independiente del método utilizado para calcularla. Por lo tanto, si la densidad de energía por unidad de frecuencia es $|F(\omega)|^2$, la energía total deberá ser su integral sobre todas las frecuencias y deberá ser igual a la energía total de la señal calculada en el dominio del tiempo. Esta igualdad se cumple por la ya mencionada Identidad de Parseval (Proposición 1.3).

$$E = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Cabe destacar que en ocasiones es conveniente trabajar con las señales normalizadas, ya que se simplifican los cálculos al hacer que la energía total para la nueva señal sea uno y proporcionarnos la misma información.

Al igual que ocurre con las densidades de probabilidad, para cada densidad de energía aparecen conceptos como la media, la desviación típica o la covarianza. Estos son calculados al igual que en estadística, pero cambiando la función de densidad de probabilidad por la de densidad de energía. La desviación típica asociada al espectro de densidad de energía se conoce como ancho de banda.

En base a todas estas características, lo que buscamos y queremos encontrar es una función de densidad conjunta, $P(t, \omega)$, de manera que defina la energía en un tiempo t y una frecuencia ω a partir de una señal dada.

$$\begin{aligned} P(t, \omega) &= \text{energía en el tiempo } t \text{ y en la frecuencia } \omega \\ P(t, \omega)\Delta\omega\Delta t &= \text{energía fraccional en la celda tiempo-frecuencia} \\ &\quad \Delta t\Delta\omega \text{ en } t \omega \end{aligned}$$

No obstante, a la hora de buscar dicha función P nos surgen una gran cantidad de preguntas. ¿Existen densidades conjuntas tiempo-frecuencia que satisfagan nuestras ideas intuitivas de un espectro variable en el tiempo? ¿Cómo pueden construirse? ¿Pueden interpretarse como densidades reales? ¿Representan las correlaciones entre tiempo y frecuencia? ¿Qué condiciones razonables se pueden imponer para obtener tales densidades? Y en el caso de no existir, ¿qué es lo mejor que podemos lograr? ¿Existen limitaciones inherentes a tal desarrollo? A estas preguntas trataremos de responder a lo largo de este capítulo.

1.2.2. Principio de Incertidumbre

Para empezar a responder las preguntas que nos hacemos, es necesario introducir el conocido como Principio de Incertidumbre, ya que es de vital importancia a la hora de establecer las bases de la función que buscamos. Debemos ser particularmente cuidadosos en nuestro estudio, ya que el Principio de Incertidumbre ha desempeñado un papel destacado en discusiones, tanto metafísicas como de otro tipo, sobre el análisis conjunto tiempo-frecuencia. Tanto es así que el descubrimiento del Principio de Incertidumbre en 1926 por Heisenberg es uno de los grandes logros del siglo en la física.

La densidad en el tiempo es $|f(t)|^2$ y la densidad en frecuencia es $|F(\omega)|^2$, pero $f(t)$ y $F(\omega)$ están relacionados y, por lo tanto, no deberíamos sorprendernos al descubrir que hay una relación entre sus densidades. La relación es tal que si una densidad es estrecha, entonces la otra es amplia, es decir, si una señal es corta, su ancho de banda (variación en la frecuencia) será muy grande. No es que tanto el tiempo como la frecuencia no puedan hacerse arbitrariamente estrechos, sino que las densidades de tiempo y frecuencia no pueden hacerse ambas estrechas.

Pese a lo directo que es este planteamiento este descubrimiento es uno de los más profundos de la física. En la física clásica y en la vida cotidiana, parecía claro que podíamos determinar simultáneamente la posición y la velocidad de los objetos. Nadie imaginaba que no podemos colocar una pelota en un lugar dado con una velocidad dada. Sin embargo, la física actual, y más concretamente la mecánica cuántica, dice precisamente esto y es uno de los grandes descubrimientos sobre el comportamiento de la materia. Matemáticamente el Principio de Incertidumbre se ve reflejado en el teorema que veremos a continuación.

Teorema 1.6 (Principio de Incertidumbre) *Sea $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ una señal normalizada y $F(\omega)$ su Transformada de Fourier. Si $\langle t \rangle$ es la media asociada a la densidad de energía en el tiempo y $\langle \omega \rangle$ la asociada a la densidad de energía en la frecuencia,*

$$\begin{aligned}\langle t \rangle &= \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt \\ \langle \omega \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega |F(\omega)|^2 d\omega\end{aligned}$$

y σ_t es la desviación típica en el tiempo y σ_ω en la frecuencia,

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \int_{\mathbb{R}} (t - \langle t \rangle)^2 |f(t)|^2 dt \\ \sigma_\omega^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 |F(\omega)|^2 d\omega\end{aligned}\tag{1.16}$$

entonces,

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \quad (1.17)$$

Demostración. Primero, notemos que no se produce pérdida de generalidad si tomamos señales que tienen un tiempo medio y una frecuencia media de cero. En efecto, si tenemos una señal $f(t)$ normalizada, entonces una señal definida como,

$$f_{new}(t) = e^{-j\langle w \rangle (t + \langle t \rangle)} f(t + \langle t \rangle)$$

tiene la misma forma tanto en tiempo como en frecuencia que f , exceptuando que ha sido trasladada tanto en tiempo como en frecuencia para que las medias sean cero.

Al contrario, si tenemos una señal, $f_{new}(t)$, que tiene un tiempo medio y una frecuencia media de cero y queremos una señal con la misma forma pero con tiempos y frecuencias medias específicos, entonces basta con considerar,

$$f(t) = e^{-j\langle w \rangle (t + \langle t \rangle)} f_{new}(t - \langle t \rangle)$$

Sea f' la derivada en sentido distribucional (consultar [7]) de f y \bar{f} el conjugado de f , integrando por partes tenemos,

$$\int_{\mathbb{R}} t f(t) \overline{f'(t)} dt = t |f(t)|^2 \Big|_{t=-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} (|f(t)|^2 + t f'(t) \overline{f(t)}) dt$$

Como $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ entonces $\lim_{|t| \rightarrow \infty} t |f(t)|^2 = 0$ y tenemos la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt &= - \int_{\mathbb{R}} t f(t) \overline{f'(t)} dt - \int_{\mathbb{R}} t f'(t) \overline{f(t)} dt \\ &= -2 \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} t f(t) \overline{f'(t)} dt \right) \end{aligned}$$

donde $\operatorname{Re}(z)$ define la parte real de z .

Teniendo en cuenta que para todo $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{Re}(z)| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ entonces,

$$\left| -2 \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} t f(t) \overline{f'(t)} dt \right) \right| \leq \left| 2 \int_{\mathbb{R}} t f(t) \overline{f'(t)} dt \right|$$

Ahora, empleando la desigualdad de Cauchy-Schwartz y teniendo en cuenta que $|f'| = |\overline{f'}|$,

$$2 \left| \int_{\mathbb{R}} t f(t) \overline{f'(t)} dt \right| \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Recopilando todos los cálculos anteriores,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.18)$$

Para finalizar con la demostración definamos la Transformada de Fourier de f' a partir de F , la transformada de f . Integrando por partes y teniendo en cuenta que $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f'(t) e^{-i\omega t} dt &= f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{t=-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega F(\omega) \end{aligned}$$

Utilizando ahora la Identidad de Parseval (Proposición 1.3),

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |i\omega F(\omega)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Por último, si sustituimos en la desigualdad (1.18) terminamos la prueba, ya que nos quedaría,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |F(\omega)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

es decir, teniendo en cuenta que f esta normalizada y las medias son 0,

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$$

■

Toda esta prueba ha sido desarrollada siguiendo la referencia [5].

Este teorema representa el hecho comentado al principio de la subsección, si el valor de una de las desviaciones típicas es muy pequeño el de la otra tendrá que ser lo suficientemente grande para que se cumpla (1.17), es decir el producto de las desviaciones típicas no se puede hacer arbitrariamente pequeño. Este hecho implica que si una señal acumula la mayoría de su energía en un corto periodo de tiempo (la función de densidad de energía en el tiempo es estrecha), la energía estará distribuida entre una cantidad grande de frecuencias (la función de densidad de energía en la frecuencia será ancha) y viceversa. Ilustremos este hecho con un ejemplo.

Ejemplo 1.3 Sean $f(t) = e^{-10t^2}$, $g(t) = e^{-t^2}$ y $h(t) = e^{-\frac{t^2}{4}}$, gaussianas cada vez más anchas.

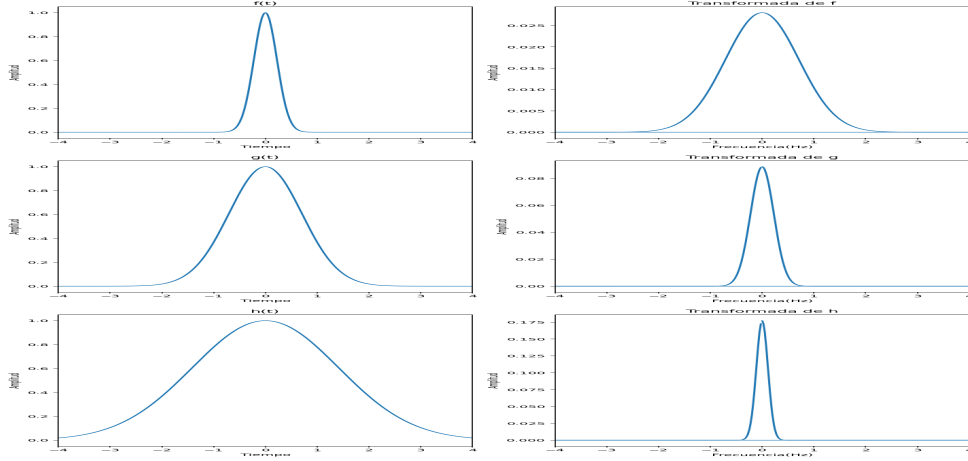


Figura 1.3. Representaciones temporales de f , g y h de arriba hacia abajo, junto a sus respectivas representaciones espectrales en el intervalo tanto temporal como espectral $[-4, 4]$.

En efecto, en la Figura 1.3 de este ejemplo práctico se puede observar perfectamente como a medida que una señal se estrecha en el dominio del tiempo también se va haciendo más ancha en el dominio de la frecuencia. De hecho, este caso específico refleja la propiedad (1.5), la cual surge como consecuencia del principio de incertidumbre

1.2.3. Características ideales de las densidades tiempo-frecuencia

Una vez introducidas las bases, y con el objetivo de establecer nuestra función, veremos algunas de las condiciones que se deberían cumplir en el caso ideal de que $P(t, \omega)$ respondiera a nuestros intereses.

Marginales: De manera análoga a lo que ocurre con las densidades de probabilidad conjunta y sus densidades marginales, la suma de la distribución de energía para todas las frecuencias en un momento particular debería proporcionar la densidad de energía en el tiempo, y la suma sobre todos los momentos a una frecuencia específica debería dar el espectro de densidad de energía. Por lo tanto, idealmente, una densidad conjunta en tiempo y frecuencia debería cumplir con:

$$\int_{\mathbb{R}} P(t, \omega) d\omega = |f(t)|^2$$

$$\int_{\mathbb{R}} P(t, \omega) dt = \frac{1}{2\pi} |F(\omega)|^2$$
(1.19)

Energía total: La energía de la densidad debería ser igual a la energía total de la señal

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} P(t, \omega) dt d\omega \quad (1.20)$$

Nótese que si nuestra función P satisface las marginales, automáticamente satisface el requisito de energía total. No obstante, el recíproco no es cierto. De hecho, en el siguiente capítulo estudiaremos una función de densidad que no cumple (1.19), pero sí (1.20) y que pese a esto da una representación considerablemente fiel de las características en tiempo y frecuencia de la señal.

Soporte finito: Supongamos que una señal no comienza hasta el tiempo t_1 . Queremos que la densidad conjunta tampoco comience hasta t_1 . De manera similar, si la señal se detiene después del tiempo t_2 , esperamos que la densidad sea cero después de ese tiempo. En ese caso, decimos que la densidad tiene un soporte temporal finito. De manera similar, si el espectro es cero fuera de una banda de frecuencia, entonces la densidad también debería ser cero fuera de la banda. En tal caso, decimos que la densidad tiene un soporte espectral finito. Podemos expresar estos requisitos matemáticamente como:

$$P(t, \omega) = 0 \quad \text{para } t \text{ fuera de } (t_1, t_2) \quad \text{si } f(t) \text{ es cero fuera de } (t_1, t_2) \quad (1.21)$$

$$P(t, \omega) = 0 \quad \text{para } \omega \text{ fuera de } (\omega_1, \omega_2) \quad \text{si } S(\omega) \text{ es cero fuera de } (\omega_1, \omega_2) \quad (1.22)$$

Una de las propiedades de la Transformada de Fourier que vimos en la sección (1.1.2), la Proposición 1.4, nos muestra que una señal no puede tener una duración finita y, al mismo tiempo, estar limitada en frecuencia. Si una densidad conjunta que cumple la propiedad de las marginales cumpliera también la de de soporte finito, no podría estar limitada a una región finita del plano tiempo-frecuencia. En caso contrario, las densidades de energía de la señal serían limitadas tanto en tiempo como en frecuencia, lo cual contradice la proposición. Si resulta que una densidad está limitada en una región finita, entonces no cumple con las propiedades de soporte finito y/o las marginales.

Principio de Incertidumbre conjunto: En una densidad conjunta las desviaciones típicas se calculan de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (t - \langle t \rangle)^2 P(t, \omega) d\omega dt \\ \sigma_\omega^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 P(t, \omega) dt d\omega \end{aligned} \quad (1.23)$$

con

$$\begin{aligned} \langle t \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} t P(t, \omega) d\omega dt \\ \langle \omega \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \omega P(t, \omega) dt d\omega \end{aligned}$$

Por tanto, otra de las propiedades que podríamos querer imponer a nuestra función P es la que denominaremos como Principio de Incertidumbre conjunto, es decir que el producto de las desviaciones típicas calculadas empleando (1.16) sea el mismo que empleando (1.23). Fijémonos que el hecho de que se cumpla la condición de las marginales mencionada al principio de la subsección, garantiza esta imposición, ya que por (1.19) tendríamos que

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (t - \langle t \rangle)^2 P(t, \omega) d\omega dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (t - \langle t \rangle)^2 \left(\int_{\mathbb{R}} P(t, \omega) d\omega \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (t - \langle t \rangle)^2 |f(t)|^2 dt\end{aligned}$$

en el dominio del tiempo y

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\sigma_\omega^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 P(t, \omega) d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 \left(\int_{\mathbb{R}} P(t, \omega) dt \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 |F(\omega)|^2 dt\end{aligned}$$

en el dominio de la frecuencia.

Este hecho nos muestra que la propiedad de las marginales, al igual que ocurría con la de la energía total, es más restrictiva que la del principio de incertidumbre conjunto.

La característica principal resultante del cumplimiento del principio de incertidumbre conjunto (independientemente de si se cumple la propiedad de las marginales) es que la densidad conjunta no podrá estar concentrada en ambas direcciones. Si lo estuviera, produciría marginales estrechas, lo cual sería una violación del Principio de Incertidumbre, ya que siguiendo el mismo razonamiento de la subsección 1.2.2, si el producto de las varianzas asociadas a cada marginal está acotado, ambas marginales no pueden ser estrechas al mismo tiempo, independientemente de la señal. Este hecho se puede observar mediante un ejemplo gráfico que nos esquematiza esta situación en la Figura 1.4, donde vemos como cuando la función de densidad conjunta es ancha en tiempo se estrecha en frecuencia y viceversa.

Por otro lado, cabe destacar que debido a que el Principio de Incertidumbre es intrínseco a la señal esta propiedad será esencial para desarrollar una función de densidad conjunta que represente fielmente su comportamiento.

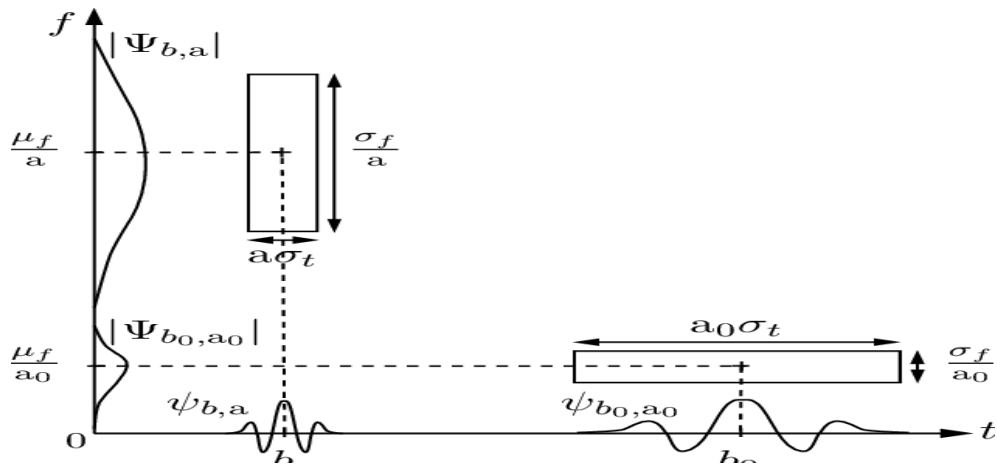


Figura 1.4. Los rectángulos representan dos funciones de densidad conjunta, la anchura representa cómo de concentradas están dichas funciones en el tiempo y su altura en la frecuencia. En los laterales se observan sus respectivas marginales.

Invertibilidad: En matemáticas siempre es de utilidad tanto desarrollar procesos como revertirlos una vez desarrollados. Por tanto, la última condición que vamos a exponer es la de invertibilidad, la cual nos puede llegar a facilitar mucho el trabajo con la densidad en cuestión. Dicha propiedad consiste en la posibilidad de obtener la señal original a partir de la función de densidad conjunta P .

Una vez debatido qué propiedades sería interesante que cumpliera nuestra función, el problema reside en encontrar una función de densidad que cumpla todas. Desde un punto de vista matemático, hay un número infinito de densidades conjuntas que cumplen con estos requisitos. Sin embargo, escribirlas explícitamente no es fácil y no es obvio cuáles, de entre este conjunto infinito, son las “correctas”, es decir las que representan de forma fiel nuestra señal. Además, estas condiciones han sido las que hemos ido revisando nosotros, pero como estas se podrían haber impuesto muchas otras.

Debido a la infinidad de soluciones posibles, las matemáticas no pueden resolver el problema, aunque pueden guiarnos para restringir lo que es posible y lo que no lo es. El problema radica en la ciencia, la ingeniería y el deseo de lograr objetivos específicos. Los métodos desarrollados para obtener densidades no son derivaciones matemáticas estrictas, sino que se basan en consideraciones físicas, sugerencias matemáticas y en el método científico tradicional. Por tanto, a lo largo de los próximos dos capítulos nos centraremos en dos funciones de densidad concretas, y posiblemente las más utilizadas, como son la Transformada Corta de Fourier y la Distribución de Wigner, y veremos cuáles de las características mencionadas en este tema cumplen.

En resumen, la situación actual es que no contamos con una teoría completa. No obstante, las ideas y técnicas desarrolladas hasta ahora son potentes, nos proporcionan una considerable comprensión de la naturaleza de las señales, se ajustan en gran medida a nuestra intuición y se han aplicado con inmenso éxito a problemas prácticos. A menudo, algunos de los resultados predichos claramente no son plausibles, y eso es lo que hace que el tema sea desafiante. Debido a que no tenemos una teoría completa y exhaustiva, es importante entender qué se sabe con certeza, qué es especulativo y qué suposiciones ocultas se incluyen en cualquier prueba en particular, y a partir de aquí desarrollar modelos como los que veremos en los próximos capítulos.

Transformada Corta de Fourier

Como ya adelantamos y tras haber visto las dificultades que supone encontrar una función de densidad conjunta adecuada debido a la infinidad de propiedades a considerar, a lo largo de este capítulo estudiaremos la densidad conocida como Transformada Corta de Fourier. De esta manera, analizaremos las propiedades de esta función, viendo así cuáles de las características propuestas en el anterior capítulo cumple, sus inconvenientes y su fidelidad a la hora de representar las señales.

Cabe destacar que todas las gráficas expuestas en este capítulo han sido generadas manualmente en Python siguiendo las referencias encontradas en [10],

2.1. Introducción a la transformada corta de Fourier

Al igual que en la primera sección del anterior capítulo esta sección sigue en gran medida el desarrollo planteado en [4].

La Transformada Corta de Fourier es el método más ampliamente utilizado para estudiar señales no estacionarias. El concepto detrás de éste es simple y poderoso. Tal y como vimos en el primer capítulo, si suponemos que escuchamos una pieza musical que dura una hora, donde al principio hay violines y al final tambores, al analizar toda la hora mediante la Transformada de Fourier, en su representación se mostrarán picos en las frecuencias correspondientes a los violines y tambores. Esto nos indicará que hubo violines y tambores, pero no nos dará ninguna indicación de cuándo se tocaron los violines y cuándo los tambores. La idea más directa para tratar de solucionar dicho problema es dividir la hora en segmentos de, por ejemplo, cinco minutos y analizar cada intervalo con la Transformada de Fourier. Al examinar el espectro (valores de la Transformada de Fourier) de cada segmento, veremos en qué intervalos de cinco minutos ocurrieron los violines y tambores. Si queremos localizar aún mejor, dividimos la hora en segmentos de un minuto o incluso intervalos de tiempo más pequeños y analizamos cada segmento con la Transformada de Fourier. Es precisamente esta la idea básica de la Transformada Corta de Fourier: dividir la señal en pequeños

segmentos de tiempo y analizar cada segmento con la Transformada de Fourier para determinar las frecuencias que existían en ese segmento. De esta manera, la totalidad de estos espectros indicarán cómo varía el espectro en el tiempo.

Basándonos en este concepto veamos como se desarrolla el método a nivel matemático. Para estudiar las propiedades de la señal en el tiempo t , queremos enfatizar la señal en ese momento y minimizarla en otros momentos. Esto se logra multiplicando la señal por una función de ventana, $h(t)$, centrada en t , para producir una señal modificada.

$$f_h(\tau) = f(\tau) h(\tau - t)$$

La señal modificada es una función de dos tiempos, el tiempo fijo en el que estamos interesados, t , y el tiempo variable, τ . La función de ventana se elige para dejar la señal más o menos sin alterar alrededor del tiempo t , pero para suprimir la señal en momentos distantes del tiempo de interés. Es decir,

$$f_h(\tau) \approx \begin{cases} f(t) & \text{para } \tau \text{ cerca de } t \\ 0 & \text{para } \tau \text{ lejos de } t \end{cases}$$

El término “ventana” proviene de la idea de que estamos buscando examinar solo una pequeña porción de la señal, similar a cuando miramos por una ventana real y vemos solo una parte relativamente pequeña del paisaje. En este caso, queremos ver solo una pequeña porción. Dado que la señal modificada enfatiza la señal alrededor del tiempo t , la Transformada de Fourier reflejará la distribución de frecuencia alrededor de ese tiempo.

Definición 2.1 La Transformada Corta de Fourier $F_h(t, \omega)$ de una señal $f(t)$ se define utilizando una ventana $h(t) \in L^2(\mathbb{C})$ con $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2 dt = 1$, como

$$F_h(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) h(\tau - t) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.1)$$

Por tanto, nuestra función $P(t, \omega)$ que tanto buscamos, la llamaremos $P_{SP}(t, \omega)$ y vendrá definida de la siguiente forma

$$P_{SP}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} |F_h(t, \omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} f(\tau) h(\tau - t) e^{-i\omega\tau} d\tau \right|^2 \quad (2.2)$$

Es claro que, para cada valor de tiempo, obtenemos un espectro y la totalidad de estos espectros es lo que forma nuestra función $P_{SP}(t, \omega)$. A la gráfica de $P_{SP}(t, \omega)$ la denominaremos como espectrograma.

Veamos dos ejemplos para entender como funciona esta herramienta:

Ejemplo 2.1: Veamos cómo el espectrograma mejora notablemente los problemas que teníamos a la hora de distinguir frecuencias a lo largo del tiempo. Para esto volveremos a utilizar las funciones $f(t)$ y $g(t)$ que vimos en el capítulo 1, cuya representación en tiempo y frecuencia ya estudiamos en la Figura 1.2.

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi 20t) & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ \sin(2\pi 50t) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ \sin(2\pi 100t) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} \sin(2\pi 100t) & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ \sin(2\pi 50t) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ \sin(2\pi 20t) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

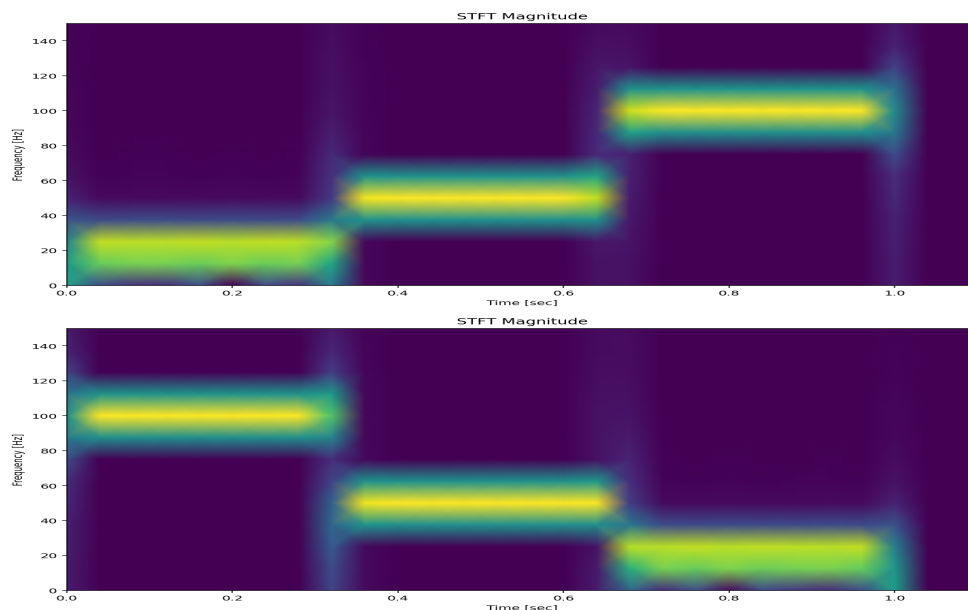


Figura 2.1. Espectrogramas f y g .

En estas imágenes se grafican los espectrogramas de f y g , con la frecuencia en el eje de ordenadas y el tiempo en el de abscisas. De ahora en adelante los colores de los espectrogramas representarán la intensidad de cada frecuencia en un tiempo dado, siendo el amarillo el de mayor intensidad. Para estos espectrogramas se usa la conocida como ventana de Hann estrecha.

Vemos que, a diferencia de usando la representación en el tiempo o en la frecuencia (Figura 1.2), con el espectrograma podemos diferenciar estas señales perfectamente, ya que, pese a poseer las mismas frecuencias, suceden en tiempos distintos. De esta manera, podemos observar rápidamente qué frecuencias aparecen y en que momentos ocurren.

Ejemplo 2.2: Mostremos ahora un ejemplo analítico de aplicación de la Transformada Corta de Fourier para que veamos cómo se calcula. Sea $\omega_0 \in \mathbb{R}$, consideremos la siguiente señal,

$$f(t) = e^{i\omega_0 t}$$

y dado $a \in \mathbb{R}$ definimos la ventana

$$h(t) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{at^2}{2}}$$

Nótese que la ventana se hará más y más estrecha alrededor de t a medida que hagamos el valor de a más grande, y que por el contrario disminuyendo el valor de a esta se hará más ancha. Por tanto, según como hemos planteado la construcción de la Transformada Corta de Fourier hasta ahora, nos interesa una a pequeña para obtener una ventana que localice bien el tiempo.

La Transformada Corta de Fourier sería entonces,

$$\begin{aligned} F_h(t, \omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau)h(\tau - t)e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau' + t)h(\tau - t)e^{-i\omega(\tau')} d\tau' \\ &= \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega_0(\tau'+t)} e^{-i\omega(\tau'+t)} e^{-\frac{a}{2}\tau'^2} d\tau' \\ &= \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-it(\omega-\omega_0)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{a}{2}\tau'^2 - i\tau(\omega-\omega_0)} d\tau' \end{aligned}$$

donde se ha empleado el cambio de variable $\tau' = \tau - t$. Ahora, teniendo en cuenta la siguiente igualdad,

$$\frac{a}{2}\tau'^2 + i\tau'(\omega - \omega_0) = \frac{a}{2}\left(\tau' + \frac{i(\omega - \omega_0)}{a}\right)^2 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2a}$$

podemos resolver la integral empleando que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ y el cambio de variable $u^2 = \frac{a}{2}\left(\tau' + \frac{i(\omega-\omega_0)}{a}\right)^2$. De ahora en adelante utilizaremos $\exp(x) = e^x$ para que se observe mejor la prueba,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-a}{2}\tau'^2 - i\tau(\omega - \omega_0)\right) d\tau' &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{a}{2}\left(\tau' + \frac{i(\omega - \omega_0)}{a}\right)^2 - \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2a}\right) d\tau' \\ &= \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2a}\right) \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \exp(-u^2) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2a}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, nuestra F_h será,

$$\begin{aligned} F_h(t, \omega) &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2a}\right) \exp(-it(\omega - \omega_0)) \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2a}\right) \exp(-it(\omega - \omega_0)) \frac{\sqrt{2\pi}}{(a\pi)^{\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

lo que da lugar al siguiente espectrograma,

$$P_{SP}(t, \omega) = \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{a}\right) \frac{1}{\sqrt{a\pi}}$$

Se observa cómo la influencia de la ventana aparece representada por una gaussiana, cuya anchura dependerá de a . No obstante, al contrario de lo que ocurre con h , cuanto mayor sea el valor de a más ancha será dicha gaussiana. Por tanto, cuanto más estrecha sea la ventana h mayor será el rango de frecuencias alrededor de ω_0 con valores significativamente distintos de 0 presentes en el espectrograma, es decir, peor definida estará la frecuencia real de f en el espectrograma, la cual sabemos que es ω_0 por como hemos definido la señal. Este hecho lo podemos observar en las gráficas de la Figura 2.2 que se ve a continuación.

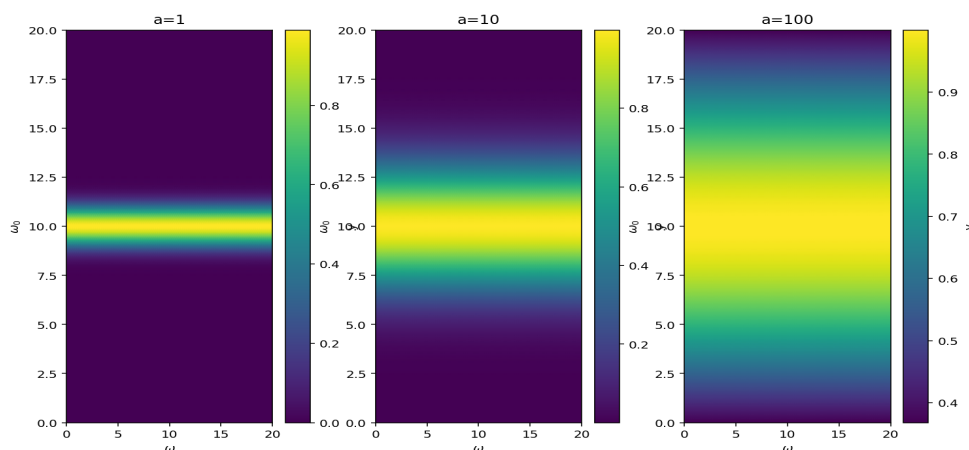


Figura 2.2. Representación de $P_{SP}(t, \omega)$ para $\omega_0 = 10$ y $a=1$, $a=10$ y $a=100$ respectivamente

Este fenómeno nos sirve como introducción para lo que veremos en las siguientes páginas, el estudio de una frecuencia dada a partir de una ventana, así como la relación entre la anchura de la ventana y la precisión que nos ofrece el espectrograma en tiempo y frecuencia.

Dado que estamos interesados en analizar la señal alrededor del tiempo t , hemos elegido de antemano una función de ventana estrecha en los alrededores de t . No obstante, también podríamos estar interesados en estudiar las propiedades temporales para una frecuencia dada. De esta manera, si tuviéramos este objetivo, escogeríamos ventanas centradas en una frecuencia. Por tanto, siguiendo un proceso análogo al de antes, pero con el tiempo en vez de las frecuencias y con la inversa de la Transformada de Fourier, obtendríamos lo que podemos llamar Inversa de Fourier de Frecuencia Corta. Es decir, a partir de una ventana $H(\omega)$ centrada en ω tenemos que la Inversa de Fourier de Frecuencia Corta, $f_H(t)$, viene dada por,

$$f_H(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(\omega') H(\omega - \omega') e^{i\omega't} d\omega'$$

No obstante, dado f una señal y F su transformada, si relacionamos la ventana en el tiempo, $h(t)$, con la ventana en la frecuencia, $H(\omega)$, mediante la Transformada de Fourier

$$H(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.3)$$

entonces, utilizando la propiedad de la delta de Dirac (1.14) y las inversas de las transformadas de Fourier,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} F_h(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) h(\tau - t) e^{-i\tau\omega} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(\omega') e^{i\tau\omega'} d\omega' \right) \left(\int_{\mathbb{R}} H(\omega'') e^{i(\tau-t)\omega''} d\omega'' \right) e^{-i\tau\omega} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} F(\omega') H(\omega'') e^{-i\tau(\omega - \omega' - \omega'')} e^{-i\omega''t} d\tau d\omega' d\omega'' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} F(\omega') H(\omega'') \delta(\omega'' - (\omega - \omega')) e^{-i\omega''t} d\omega' d\omega'' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(\omega') H(\omega - \omega') e^{-i(\omega - \omega')t} d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} f_H(t, \omega) \end{aligned}$$

por lo que,

$$\frac{1}{2\pi} F_h(t, \omega) = f_H(t, \omega) e^{-i\omega t}$$

Por tanto, podemos observar que la transformada corta en el tiempo es igual a la corta en la frecuencia salvo por un factor cuyo módulo es 1. Este hecho implica que el equivalente al espectrograma para la transformada corta en la frecuencia coincidirá con el espectrograma de la transformada corta en el tiempo.

$$P_{SP}(t, \omega) = |f_H(t, \omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} |F_h(t, \omega)|^2 \quad (2.4)$$

Esto muestra que el espectrograma, tal y como lo definimos al principio (2.2), es suficiente para estudiar las propiedades tanto del tiempo como de la frecuencia. Para estudiar las propiedades en la frecuencia basta con escoger una ventana $h(t)$ ancha, ya que, como acabamos de ver, el espectrograma resultante será idéntico al que obtendríamos con el método de la Inversa de Fourier de Frecuencia Corta para una ventana definida por la Transformada de Fourier de h , la cual, por el principio de incertidumbre, sabemos que será estrecha en frecuencia.

2.2. Tipos de ventanas y diferencias

Con lo comentado al final de la anterior sección nos podemos dar cuenta que el resultado que obtengamos de la transformada dependerá en gran medida de la ventana que usemos. Por tanto, en esta sección veremos ejemplos de diferentes ventanas que podemos emplear.

Hemos visto que el tamaño de la ventana puede cambiar dependiendo de qué queramos obtener de la señal. Por tanto, ilustremos mediante otro ejemplo lo que ya adelantamos con el Ejemplo 2.2, la diferencia entre usar una ventana estrecha y una ancha. Para ello recuperemos la función $f(t)$ definida en (1.15).

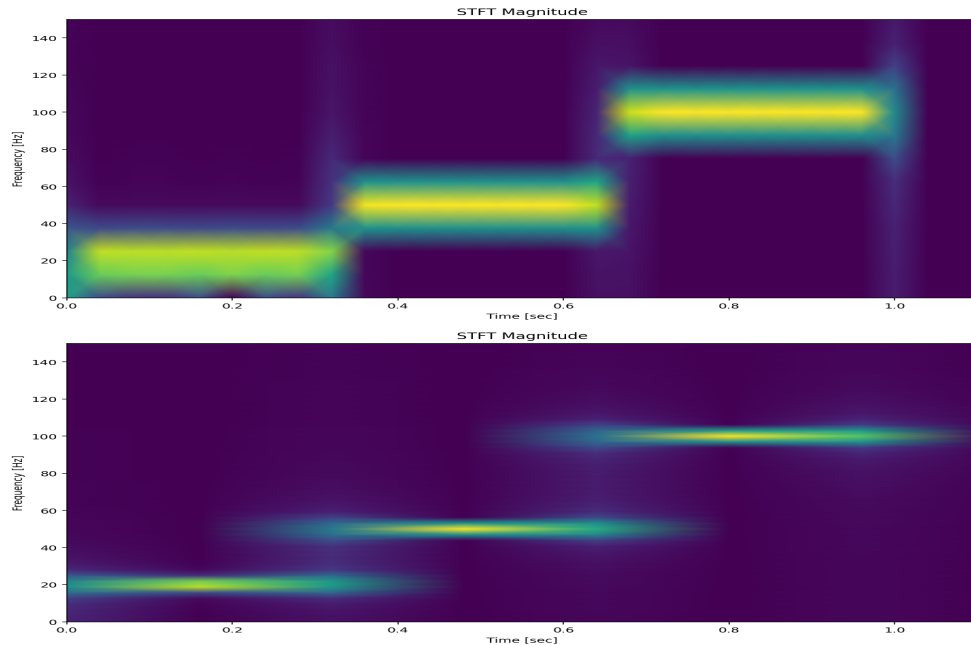


Figura 2.3. Espectrograma de f con ventana estrecha y ancha.

En estas imágenes se grafican los espectrogramas de f , en la parte superior con una ventana estrecha en el tiempo y en la inferior con una ancha. Vemos como al utilizarse una ventana estrecha en el tiempo, podemos distinguir perfectamente en que tiempos empieza cada frecuencia, pero tenemos un rango de frecuencias más amplio que en la segunda imagen, reflejado en el ancho de la barra. Por otro lado, en la segunda imagen las barras son más estrechas, con lo que tenemos más definidas las frecuencias, pero no se sabe exactamente cuando empieza una frecuencia y cuando acaba otra.

Los espectrogramas que hemos ido utilizando de ejemplo en la Figura 2.1 y Figura 2.3 emplean la conocida como ventana de Hann, pero esta no es la única con la que se puede trabajar. A parte de esta, entre las ventanas más conocidas

y empleadas se encuentran algunas como la ventana rectangular, la Blackman o la Hamming, todas de soporte compacto.

Dichas ventanas serán definidas para un tamaño $N \in \mathbb{N}$ dado, a partir de la función característica $\chi_{[0,N]}(t)$, la cual es una función real que vale 1 para toda t en el intervalo $[0, N]$ y 0 para todo t fuera de dicho intervalo:

$$\text{Hann: } v_{Hn}(t) = \left(0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right)\right) \chi_{[0,N]}(t)$$

$$\text{Rectangular: } v_R(t) = \chi_{[0,N]}(t)$$

$$\text{Hamming: } v_{Hm}(t) = \left(0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right)\right) \chi_{[0,N]}(t)$$

$$\text{Blackman: } v_B(t) = \left(0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi t}{N}\right)\right) \chi_{[0,N]}(t)$$

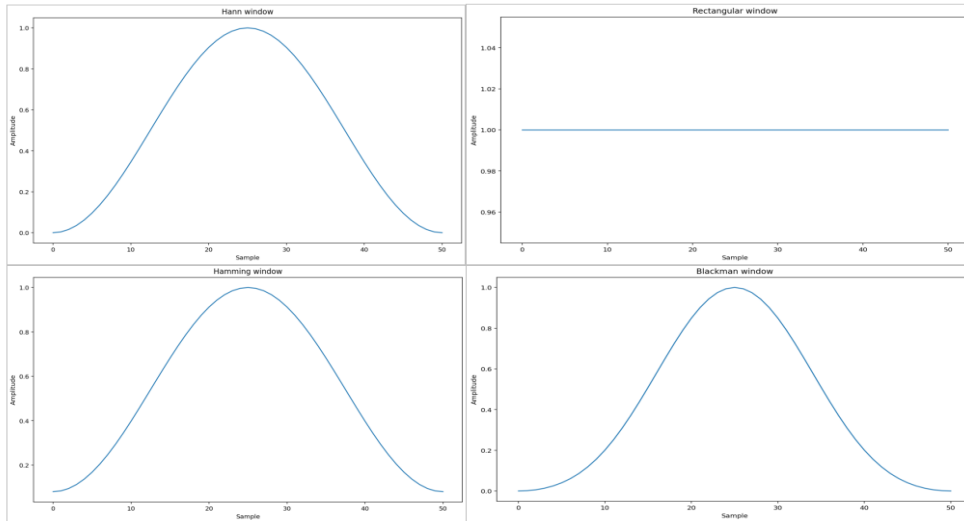


Figura 2.4. En esta imagen podemos ver un ejemplo de las distintas ventanas mencionadas. La de arriba a la izquierda es la de Hann, la que esta a su derecha la rectangular, la de abajo a la izquierda la Hamming y por último la Blackman. Todas las ventanas tienen tamaño $N=50$

Cabe destacar que el uso de una ventana u otra dependerá del tipo de señal a la que nos enfrentemos y lo que queramos obtener de ella. Por ejemplo, la ventana rectangular funciona mal con señales que cambian de frecuencia rápidamente pero es muy precisa para las que no cambian, mientras que con la Blackman sucede lo contrario.

En la Figura 2.5 se observa lo ya comentado, para la primera señal, que cambia rápidamente en el tiempo, la ventana rectangular tiene grandes problemas, ya que lo que debería ser una línea recta se mezcla de forma más tenue con otras frecuencias. Por otro lado, en la Blackman sí que vemos una recta bien

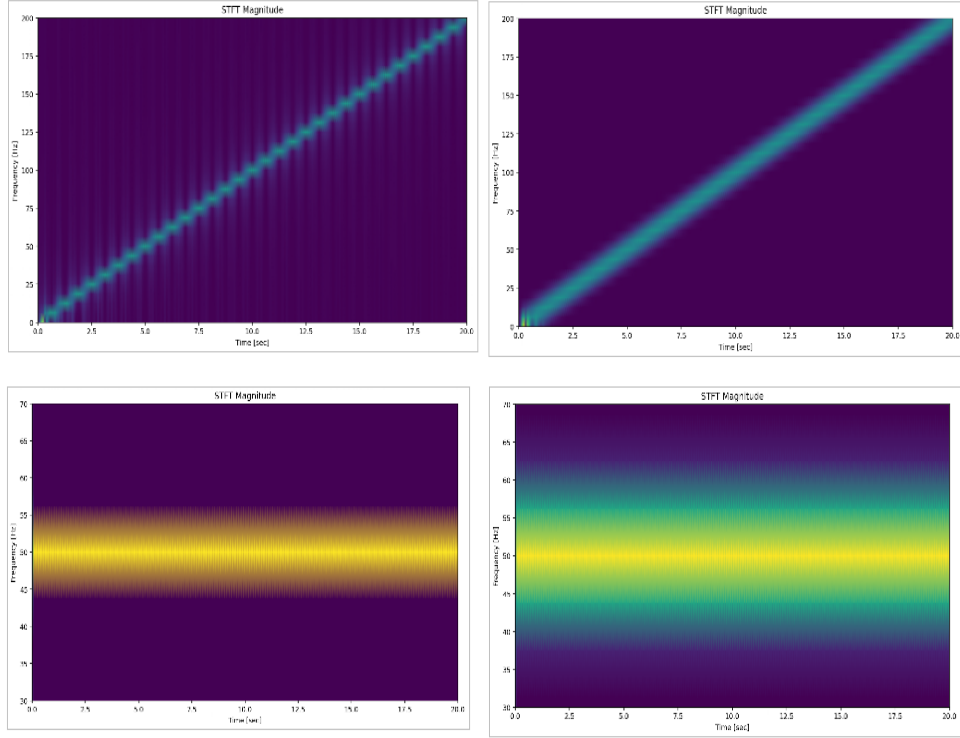


Figura 2.5. Espectrogramas de $\sin(10t^2 2\pi)$ en la parte superior y $\sin(10t\pi)$ en la parte inferior. Las ventanas utilizadas son la rectangular y la Blackman respectivamente con el mismo tamaño.

definida. Sin embargo, en el segundo caso donde solo hay una frecuencia y esta no cambia a lo largo del tiempo, la ventana rectangular es bastante más precisa.

2.3. Propiedades

Una vez introducida la Transformada Corta de Fourier y vistos sus fundamentos, toca centrarnos en sus propiedades, discutiendo a su vez cuáles de las características mencionadas en la subsección 1.2.3 cumple esta función de densidad con la que estamos trabajando.

Energía total: Como ya sabemos (1.20) la energía total, E , se obtiene integrando sobre todo tiempo y frecuencias, es decir,

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} P_{SP}(t, \omega) d\omega dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |F_h(t, \omega)|^2 d\omega dt$$

Además, como $F_h(t, \omega)$ es la Transformada de Fourier de $f(\tau)h(\tau - t)$ a partir de la variable τ , tal y como se observa en su expresión (2.1), podemos utilizar la identidad de Parseval (1.3) y obtener la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |F_h(t, \omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^2 |h(\tau - t)|^2 d\tau \quad (2.5)$$

por lo que,

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |F_h(t, \omega)|^2 d\omega dt = \int_{\mathbb{R}^2} |f(\tau)|^2 |h(\tau - t)|^2 d\tau dt$$

Utilizando el cambio de variable $s = \tau - t$

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} |f(\tau)|^2 |h(s)|^2 d\tau ds = \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^2 d\tau \int_{\mathbb{R}} |h(s)|^2 ds$$

Como al definir la transformada corta habíamos exigido que h estuviera normalizada obtenemos

$$E = \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^2 d\tau$$

por lo que se cumple el requisito de mantener la energía total de la señal original.

Marginales: Veamos si se cumple la propiedad de conservar las marginales expuesta en la subsección 1.2.3. En primer lugar, integremos en la frecuencia. Utilizando una vez más (2.5),

$$\int_{\mathbb{R}} P_{SP}(t, \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |F_h(t, \omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^2 |h(\tau - t)|^2 d\tau \quad (2.6)$$

lo cual, en general, es distinto de $\int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^2 d\tau$

De la misma forma, integrando en el tiempo, con $H(\omega)$ la Transformada de Fourier de $h(t)$, tal y como vimos al principio del capítulo (2.3), y utilizando en este caso la inversa de la Transformada de Fourier y la relación (2.4)

$$\int_{\mathbb{R}} P_{SP}(t, \omega) dt = \int_{\mathbb{R}} |f_H(t, \omega)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} |F(\omega)|^2 |H(\omega - \omega')|^2 d\tau \quad (2.7)$$

lo que una vez más no corresponde con la marginal de la densidad de energía de la señal.

La razón por la que las marginales no coinciden es que el espectrograma mezcla las densidades de energía de la ventana con las del señal, lo que introduce efectos no relacionados con las propiedades de la señal original.

Obsérvese que la marginal resultante de integrar en las frecuencias depende únicamente de la magnitud de la señal y la ventana, y no de sus fases (2.7). De manera similar, la marginal resultante de integrar en el tiempo depende solo de las amplitudes de las transformadas de Fourier de la señal y la ventana (2.6).

Soporte finito: Recordemos que para una señal de duración finita, esperamos que la función de densidad sea cero antes de que comience la señal y después de que termine, lo que conocemos como propiedad de soporte finito. Veamos si el espectrograma cumple con esta propiedad.

Supongamos que se elige un tiempo t_0 antes de que comience la señal. ¿Será el espectrograma cero para ese tiempo? En general, no, porque la señal modificada como función de τ no necesariamente será cero, ya que la ventana puede recoger parte de la señal de los alrededores de t_0 . Es decir, aunque $f(t_0)$ pueda ser cero, $f(\tau)h(\tau - t_0)$ puede no ser cero para ciertos τ cercanos a t_0 . Este efecto se manifiesta mayoritariamente para valores de tiempo cercanos al principio o al final de la señal y se observa perfectamente en la gráfica inferior de la Figura 2.3, donde el espectrograma toma valores distintos de 0 en tiempos mayores a 1, aunque teóricamente la señal ya haya terminado en estos tiempos.

Consideraciones similares se aplican al dominio de la frecuencia. Por lo tanto, el espectrograma no posee la propiedad de soporte finito ni en el tiempo ni en la frecuencia.

Principio de incertidumbre: Es evidente que tal y como hemos definido la Transformada Corta de Fourier el principio de incertidumbre está muy presente. Este hecho se refleja en lo comentado sobre las ventanas en la sección 2.1, si deseamos una buena localización en el tiempo, debemos elegir una ventana estrecha en el dominio del tiempo, $h(t)$, y si queremos una buena localización en la frecuencia, debemos elegir una ventana estrecha, $H(\omega)$, en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, tanto $h(t)$ como $H(\omega)$ no pueden hacerse arbitrariamente estrechas al mismo tiempo, ya que, al ser una equivalente a la Transformada de Fourier de la otra a la hora de estudiar el espectrograma 2.4, deben cumplir con el Principio de Incertidumbre.

Hay que destacar que los resultados obtenidos utilizando el espectrograma generalmente no brindan información exclusivamente sobre la señal, ya que la Transformada Corta de Fourier entrelaza la señal y la ventana. Este hecho es apreciable en las diferencias ya expuestas en la Figura 2.5 al usar diferentes ventanas. Por lo tanto, debemos ser cautelosos al interpretar los resultados y debemos intentar desentrelazar la ventana. Esto no siempre es fácil. De hecho, debido a la simetría básica en la definición de la Transformada Corta de Fourier entre la ventana y la señal, debemos tener cuidado de no utilizar la señal para estudiar la ventana. Es importante tener en cuenta que las matemáticas no hacen ninguna distinción, esta debe surgir solo de una elección juiciosa de la ventana, la cual está totalmente bajo nuestro control.

Invertibilidad: En el tema anterior hablamos sobre la importancia de la propiedad de invertibilidad en las funciones de densidad conjuntas, pero ¿por qué es tan relevante?

El hecho de poder pasar del espectrograma a la señal, y de la señal al espectrograma, indistintamente, puede ser de gran utilidad a la hora de enfrentarnos a problemas de la vida real, como puede ser en la eliminación de ruido. Cuando hablamos de ruido nos referimos a toda aquella interferencia que a la hora de medir interactúa con nuestra señal, como por ejemplo una señal ajena a nuestra señal principal.

Un ejemplo de esto, basándonos en la señal $f(t)$ presente en (1.15), y simplificando mucho la situación, sería el siguiente. Supongamos que estamos escuchando a una orquesta en la que primero suenan los violines, luego las trompetas y por último los tambores, todos por separado. Queremos grabar esta orquesta, pero justo en el tramo final, en la parte de los tambores, se escucha el chirrido de una silla, estropeándonos así nuestra grabación. Suponiendo que la señal captada por nuestra grabadora fuera la siguiente,

$$f_r(t) = \begin{cases} \sin(2\pi 20t) & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ \sin(2\pi 50t) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ \sin(2\pi 100t) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t < 0.8 \\ \sin(2\pi 100t) + r(t) & \text{si } 0.8 \leq t < 0.82 \\ \sin(2\pi 100t) & \text{si } 0.82 \leq t < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Donde los violines vendrían representados por $\sin(2\pi 20t)$, las trompetas por $\sin(2\pi 50t)$, los tambores por $\sin(2\pi 100t)$ y por último $r(t)$, una función de ruido aleatoria generada por python, representaría la silla. Obviamente, este caso está muy simplificado y en la práctica trabajaríamos con señales mucho más complejas y no tan fácilmente identificables, aún así este ejemplo visualiza muy bien la importancia de la invertibilidad.

En la Figura 2.6 se aprecian las gráficas de la señal tanto en tiempo como en frecuencia. En principio mirando nuestra señal en el dominio del tiempo es imposible saber cuál es la influencia del chirrido de la silla, ya que la señal en el lugar donde ocurre el chirrido ha cambiado completamente. Por otro lado, si miramos en el de la frecuencia nos encontramos en una situación similar. No obstante, veamos que pasa al analizar su espectrograma (Figura 2.7).

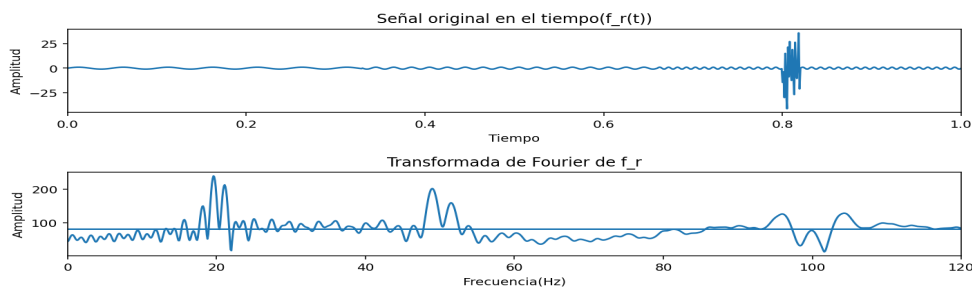


Figura 2.6. En la parte superior se muestra $f_r(t)$ en el dominio del tiempo y en la inferior en el dominio de la frecuencia.

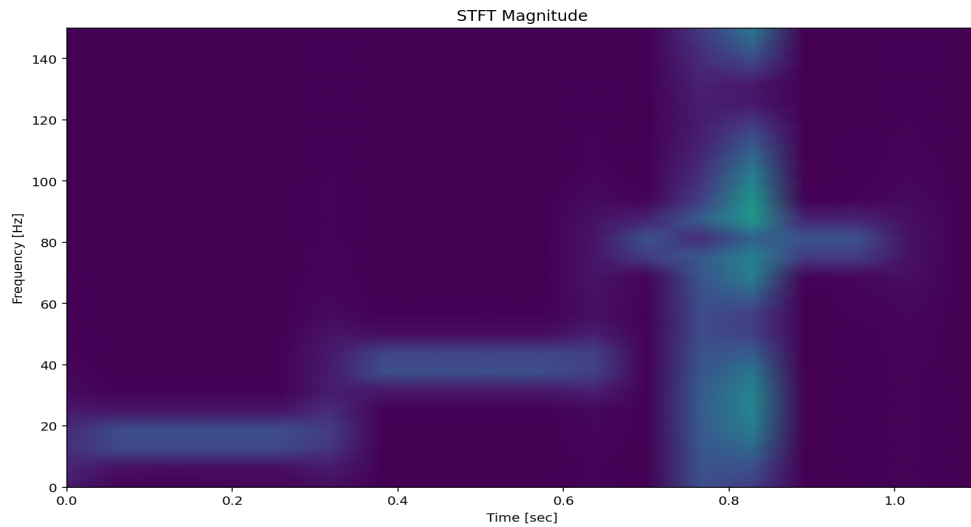


Figura 2.7. Espectrograma de $f_r(t)$.

En el caso del espectrograma, al poder identificar que frecuencias existen y en que momento se producen, es fácilmente identificable cuáles son las frecuencias producidas por la silla, ya que justo en ese instante las frecuencias difieren en gran medida de las frecuencias posteriores y anteriores, que sabemos que son las del tambor. De esta manera, si existiera una forma de invertir el proceso y pasar del espectrograma a la señal, podríamos eliminar las frecuencias que difieren mucho de las del violín en el espectrograma, lo cual no es muy complicado, y obtener la señal que buscamos utilizando dicha inversa, es decir $f(t)$.

Ahora, habiendo visto esto, la pregunta clave es, ¿se puede recuperar la señal a partir del espectrograma? Dado que el espectrograma es el cuadrado absoluto de la Transformada Corta de Fourier, a menudo se afirma que hemos perdido la fase, es decir la posición relativa de la señal, y, por lo tanto, no se puede recuperar la señal. No obstante, este argumento no es correcto, porque la fase que hemos perdido es la fase de la Transformada Corta de Fourier, no la fase de la señal. De hecho, tanto la fase como la amplitud de la señal aparecen en la fase y la amplitud de la Transformada Corta de Fourier. Por lo tanto, tener la amplitud de la Transformada Corta de Fourier puede ser suficiente para recuperar la señal. Ahora veremos en qué condiciones esto es cierto.

Teorema 2.1 (Inversa del espectrograma) *Sea $f(t), h(t) \in L^2(\mathbb{C})$ tal que f no es idénticamente nula, se satisface que $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2 dt = 1$ y la expresión $\int_{\mathbb{R}} h(u' + \frac{\tau}{2}) \overline{h(u' - \frac{\tau}{2})} e^{-i\theta u'} du'$ no se anula para ningún τ . Entonces, es posible recuperar la señal f a partir de su espectrograma $|F_h|^2$ y su ventana h mediante la siguiente expresión,*

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi c} \int_{\mathbb{R}} \frac{M(\theta, \tau)}{\int_{\mathbb{R}} h(u' + \frac{\tau}{2}) \overline{h(u' - \frac{\tau}{2})} e^{-i\theta u'} du'} e^{-i\theta \frac{\tau}{2}} d\theta \quad (2.8)$$

donde $c \in \mathbb{C}$ es una constante y $M(\theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |F_h(t, \omega)|^2 e^{i\theta t + i\tau \omega} dt d\omega$

Demostración. Para empezar la prueba, veamos la siguiente sucesión de igualdades

$$\begin{aligned} M(\theta, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F_h(t, \omega) \overline{F_h(t, \omega)} e^{j\theta t + j\tau \omega} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^4} f(\tau') h(\tau' - t) e^{-i\omega \tau'} \overline{f(\tau'') e^{i\omega \tau''} \overline{h(\tau'' - t)}} e^{i\theta t + i\tau \omega} d\tau' d\tau'' d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^4} f(\tau') h(\tau' - t) \overline{f(\tau'')} e^{-i\omega(\tau' - \tau - \tau'')} \overline{h(\tau'' - t)} e^{i\theta t} d\tau' d\tau'' d\omega dt \end{aligned}$$

Utilizando el cambio de variable $s = \tau' - \tau$ y la propiedad reflejada en la expresión (1.14),

$$\begin{aligned} M(\theta, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^4} f(s + \tau) h(s + \tau - t) \overline{f(\tau'')} e^{-i\omega(s - \tau'')} \overline{h(\tau'' - t)} e^{i\theta t} ds d\tau'' d\omega dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(s + \tau) \overline{f(\tau'')} h(s + \tau - t) \overline{h(\tau'' - t)} e^{i\theta t} \delta(s - \tau'') ds d\tau'' dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(s + \tau) \overline{f(s)} h(s + \tau - t) \overline{h(s - t)} e^{i\theta t} ds dt \end{aligned}$$

Cambiando de variable $u = s - t$ y separando las integrales,

$$\begin{aligned} M(\theta, \tau) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(s + \tau) \overline{f(s)} h(u + \tau) \overline{h(u)} e^{i\theta(s-u)} ds du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s + \tau) \overline{f(s)} e^{i\theta s} ds \int_{\mathbb{R}} h(u + \tau) \overline{h(u)} e^{-i\theta u} du \end{aligned}$$

Si $u = u' - \frac{\tau}{2}$ y $s = s' - \frac{\tau}{2}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(s' + \frac{\tau}{2}) \overline{f(s' - \frac{\tau}{2})} e^{i\theta s'} ds' \int_{\mathbb{R}} h(u' + \frac{\tau}{2}) \overline{h(u' - \frac{\tau}{2})} e^{-i\theta u'} du'$$

Por lo que,

$$\int_{\mathbb{R}} f(s' + \frac{\tau}{2}) \overline{f(s' - \frac{\tau}{2})} e^{i\theta s'} ds' = \frac{M(\theta, \tau)}{\int_{\mathbb{R}} h(u' + \frac{\tau}{2}) \overline{h(u' - \frac{\tau}{2})} e^{-i\theta u'} du'} \quad (2.9)$$

Por otro lado, como $\int_{\mathbb{R}} f(s' + \frac{\tau}{2}) \overline{f(s' - \frac{\tau}{2})} e^{i\theta s'} ds'$ se corresponde con la inversa de la Transformada de Fourier de $f(s' + \frac{\tau}{2}) \overline{f(s' - \frac{\tau}{2})}$, podemos usar su relación con la Transformada de Fourier, y unido a lo anterior tenemos que

$$f(t + \frac{\tau}{2}) \overline{f(t - \frac{\tau}{2})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{M(\theta, \tau)}{\int_{\mathbb{R}} h(u' + \frac{\tau}{2}) \overline{h(u' - \frac{\tau}{2})} e^{-i\theta u'} du'} e^{-i\theta t} d\theta$$

Tomando $t = \frac{\tau}{2}$,

$$f(\tau) \overline{f(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{M(\theta, \tau)}{\int_{\mathbb{R}} h(u' + \frac{\tau}{2}) \overline{h(u' - \frac{\tau}{2})} e^{-i\theta u'} du'} e^{-i\theta \frac{\tau}{2}} d\theta$$

Como por hipótesis f no es idénticamente nula, podemos considerar sin pérdida de generalidad que $f(0)$ es distinto de 0, ya que, de no serlo, basta con considerar una traslación de f que haga $f(0)$ distinto de 0. Por tanto,

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi \overline{f(0)}} \int_{\mathbb{R}} \frac{M(\theta, \tau)}{\int_{\mathbb{R}} h(u' + \frac{\tau}{2}) \overline{h(u' - \frac{\tau}{2})} e^{-i\theta u'} du'} e^{-i\theta \frac{\tau}{2}} d\theta$$

Por tanto, como $\overline{f(0)}$ es una constante, llegamos finalmente a (2.8), obteniendo que la señal puede ser recuperada a partir de su Transformada Corta de Fourier. No obstante, hay que tener en cuenta que para que todo este proceso sea posible se ha de poder dividir entre $\int_{\mathbb{R}} h(u' + \frac{\tau}{2}) \overline{h(u' - \frac{\tau}{2})} e^{-i\theta u'} du'$, por lo que es necesario que no existan regiones donde esta integral se anule, lo cual lo tenemos por hipótesis. ■

A lo largo de todo el capítulo hemos visto que la Transformada Corta de Fourier nos ofrece un método bastante eficaz a la hora de analizar la señal en tiempo y frecuencia, ya que, cambiando las ventanas, nos permite estudiar en profundidad las propiedades de la señal que nos interesan. Asimismo, la existencia de la inversa convierte a esta transformada en una herramienta muy pragmática. No obstante, este no es el único método utilizado en el Análisis Tiempo-Frecuencia, hecho que veremos en el próximo capítulo, donde estudiaremos la función de Distribución de Wigner.

Distribución de Wigner

En el capítulo anterior nos hemos centrado en una de las posibles densidades para estudiar tiempo y frecuencia simultáneamente, no obstante, como ya adelantamos, existen muchas otras igualmente válidas. A lo largo de este capítulo analizaremos otra de las densidades más empleadas, la denominada como Distribución de Wigner, y al igual que con la Transformada Corta de Fourier veremos sus características y cuáles de las propiedades expuestas en la subsección 1.2.3 cumple. Además, al final del capítulo estudiaremos las diferencias y similitudes de la Distribución de Wigner y la Transformada Corta de Fourier.

Cabe destacar que al igual que en el anterior capítulo todas las gráficas presentes en este capítulo han sido desarrolladas manualmente en Python siguiendo las referencias encontradas en [10] y [11].

3.1. Introducción a la Distribución de Wigner

La Distribución de Wigner fue introducida por primera vez en 1948 por el físico estadounidense Eugene Wigner y el ingeniero francés André Ville de manera independiente, y viene dada por la siguiente definición.

Definición 3.1 La función de Distribución de Wigner $W(t, \omega)$ de una señal $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ se define de la siguiente forma

$$W_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.1)$$

Esta función de densidad se basa en el concepto de autocorrelación, que mide cómo una señal está correlacionada consigo misma a medida que se desplaza en el tiempo. Aunque no entraremos a estudiar esta operación en profundidad, hemos de tener presente que mide cómo de similar es la señal a sí misma tras un desplazamiento centrado alrededor de t y viene dada por

$$R(\tau) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} dt$$

que se parece en gran medida a la expresión presente en (3.1).

Por tanto, para desplazamientos pequeños (τ cercano a 0), es decir, para tiempos cercanos a t , esta correlación es típicamente más fuerte porque la señal está más correlacionada consigo misma en intervalos de tiempo cortos. Esto significa que las características de la señal en y alrededor de t se destacan. En caso de querer encontrar más información sobre esta función esto es posible consultando [6].

De este modo, intentando entender las bases de la Distribución de Wigner de una forma un poco más intuitiva, fijémonos en la ecuación (3.1). Para cada t , podemos considerar como si estuviéramos utilizando una medida de autocorrelación puntual ($f(t + \frac{\tau}{2}) \overline{f(t - \frac{\tau}{2})}$), donde la señal se compara puntualmente consigo misma desplazada. A esto hay que añadir que estamos aplicando la Transformada de Fourier a esta medida de autocorrelación, la cual está expresada en función de τ para t fijo, lo que nos permite obtener los valores de las frecuencias presentes en la autocorrelación puntual para todos los desplazamientos. Como ya explicamos antes, las características de la señal en y alrededor de t se destacan, por tanto, en este caso las frecuencias correspondientes a desplazamientos pequeños en la correlación (es decir, cerca de t) se convertirán en las más destacadas en la representación de frecuencia, obteniendo así las frecuencias presentes en $f(t)$ en el tiempo t .

Por otra parte, cabe destacar que, pese a que hemos definido esta densidad mediante la señal en el dominio del tiempo, también la podemos definir mediante la Transformada de Fourier.

Proposición 3.1 *Sea $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ una señal y $F(\omega)$ su Transformada de Fourier, entonces*

$$\begin{aligned} W_f(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} F\left(\omega - \frac{\omega''}{2}\right) \overline{F\left(\omega + \frac{\omega''}{2}\right)} e^{-i\omega''t} d\omega'' \end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar consideramos la Transformada de Fourier de $W_f(t, \omega)$ y aplicamos el cambio de variable $u = t + \frac{\tau}{2}$ y $v = t - \frac{\tau}{2}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} W_f(t, \omega) e^{-i\omega't} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i(\omega\tau - \omega't)} d\tau dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-iu(\omega + \frac{\omega'}{2})} du \int_{\mathbb{R}} \overline{f(v)} e^{-iv(\omega - \frac{\omega'}{2})} dv \\ &= \frac{1}{2\pi} F\left(\omega + \frac{\omega'}{2}\right) \overline{F\left(\omega - \frac{\omega'}{2}\right)} \end{aligned}$$

Ahora, usando la inversa de Fourier y el cambio de variable $\omega' = \omega''$, llegaríamos a la expresión que buscamos,

$$\begin{aligned}
W_f(t, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} F\left(\omega + \frac{\omega'}{2}\right) \overline{F\left(\omega - \frac{\omega'}{2}\right)} e^{i\omega' t} d\omega' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} F\left(\omega - \frac{\omega''}{2}\right) \overline{F\left(\omega + \frac{\omega''}{2}\right)} e^{-i\omega'' t} d\omega''
\end{aligned}$$

■

Uno de los principales inconvenientes de la Distribución de Wigner son las interferencias que se generan al multiplicar la señal por su conjugada. Un ejemplo de esto son las interferencias cruzadas, que es el nombre que reciben las distorsiones que aparecen en la representación de tiempo-frecuencia de una señal cuando ésta contiene múltiples componentes de frecuencia. Este hecho se debe a que la suma Distribución de Wigner no es lineal ($W_{f_1+f_2} \neq W_{f_1} + W_{f_2}$).

Ilustremos las interferencias cruzadas con el siguiente caso. Dada la señal $f(t) = \sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 100t)$ su Distribución de Wigner no representará exclusivamente las frecuencias asociadas a $\sin(2\pi 50t)$ y $\sin(2\pi 100t)$, sino que también aparecerán términos cruzados debido a la correlación entre $\sin(2\pi 50t)$ y $\sin(2\pi 100t)$. Estos términos cruzados representan la interacción entre los componentes de la señal y no corresponden directamente a ninguna característica real de la señal en el dominio del tiempo o de la frecuencia. Para observar esto veamos, en la Figura 3.1, la representación gráfica de la Distribución de Wigner, la cual podemos graficar perfectamente gracias a que la Distribución de Wigner da lugar a una función real, tal y como se mostrará más adelante en (3.2).

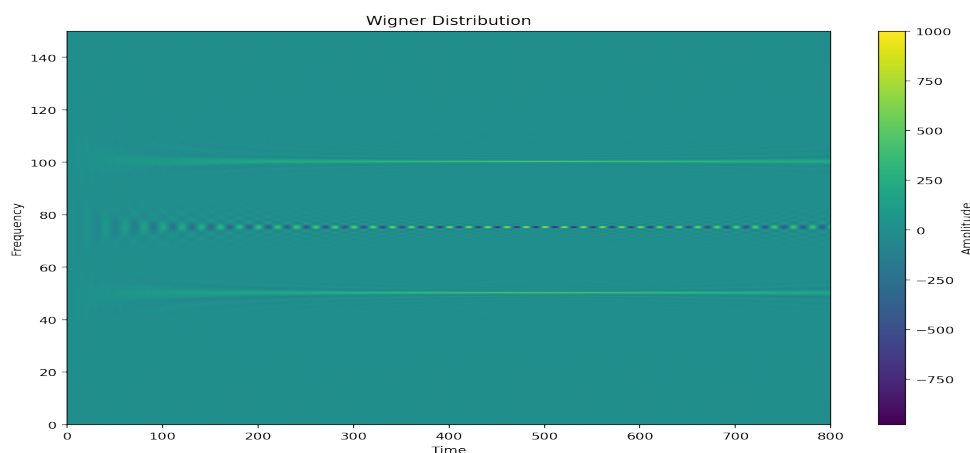


Figura 3.1. En esta gráfica podemos ver la representación de la Distribución de Wigner de la función $f(t)$ que acabamos de definir, donde los colores indican la intensidad de cada frecuencia en cada tiempo.

Se aprecia lo que comentábamos, pese a que las frecuencias correspondientes a la señal aparecen, 100 y 50, a su vez se crea una frecuencia entre medias que

no describe el comportamiento de la misma, esta es fruto de las interferencias cruzadas.

Por otro lado, aparte de las interferencias cruzadas existen otro tipos de interferencias, como son las provocadas por puntos de la señal lejanos a un punto específico t . La medida de autocorrelación puntual implica comparar la señal consigo misma en dos puntos separados por una distancia τ , centrados alrededor de t . La integración sobre τ en la fórmula de la Distribución de Wigner implica que todas las partes de la señal, independientemente de su distancia a t , pueden contribuir teóricamente a la representación en t , pese a que vimos que las frecuencias que forman parte de la señal serán las más destacadas. Esto significa que características lejanas pueden influir en el resultado debido a la naturaleza no local de la densidad con la que trabajamos. Por tanto, las variaciones significativas en la señal, como cambios abruptos en la amplitud o en la frecuencia, pueden crear efectos pronunciados en la autocorrelación y, por ende, en la Distribución de Wigner. Esto se debe a que estas variaciones alteran drásticamente la similitud entre la señal y su versión desplazada, lo que se refleja en la medida de autocorrelación puntual. Un ejemplo de este suceso lo veremos en la siguiente sección, en el apartado en el que analizaremos la propiedad de soporte finito de la Distribución de Wigner.

3.2. Propiedades

Una vez introducida la Distribución de Wigner centrémonos en sus propiedades.

Función real: La función de Distribución de Wigner es siempre real, aunque la señal no lo sea. Este hecho se puede comprobar considerando el conjugado de la función de Wigner,

$$\overline{W(t, \omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t + \frac{\tau}{2}\right)} e^{i\omega\tau} d\tau$$

y empleando el cambio de variable $\tau' = -\tau$

$$\overline{W(t, \omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau'}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau'}{2}\right)} e^{-i\omega\tau'} d\tau' = W(t, \omega) \quad (3.2)$$

Marginales: En este caso, a diferencia de con la Transformada Corta de Fourier, se cumplirá la propiedad de las marginales, siendo este uno de los motivos por el que esta función de densidad nace como alternativa a la Transformada Corta de Fourier. Comprobemos este hecho primero integrando sobre la frecuencia y usando la propiedad mostrada en 1.14,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} W(t, \omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\omega\tau} d\omega d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} \delta(\tau) d\tau \\
&= |f(t)|^2
\end{aligned}$$

Veámoslo ahora integrando sobre el tiempo y usando una vez más la misma propiedad de la delta de Dirac,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} W(t, \omega) dt &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} F\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \overline{F\left(t + \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\omega\tau} dt d\omega' \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \overline{F\left(\omega + \frac{\omega'}{2}\right)} \delta(\tau) d\omega' \\
&= \frac{1}{2\pi} |F(\omega)|^2
\end{aligned}$$

Por tanto, hemos comprobado que la propiedad de las marginales se cumple tanto en el tiempo como en la frecuencia. Esto implica que el principio de incertidumbre estará muy presente en la Distribución de Wigner, ya que está asociado a las densidades, que en este caso vienen dadas por las marginales. Además, como ya comentamos en el primer capítulo, en la subsección 1.2.3, el hecho de que se cumpla la propiedad de las marginales implica que el requisito de energía total también se cumplirá, es decir,

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} W(t, \omega) dt d\omega = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Soporte finito: Otra de las propiedades que vimos en el Capítulo 1.1 fue la de soporte finito. Nótese que para obtener la Distribución de Wigner en un momento particular, sumamos fragmentos compuestos por el producto de la señal en un tiempo pasado multiplicado por la señal en un tiempo futuro, siendo el desplazamiento al pasado igual que al futuro. Por lo tanto, para determinar las propiedades de la Distribución de Wigner en un tiempo t , es de gran ayuda hacer un ejercicio mental y plegar la parte izquierda de la señal sobre la derecha, ya que es en esencia lo que estamos haciendo, para ver si hay alguna superposición. Si la hay, entonces esas propiedades estarán presentes en mayor o menor medida en el tiempo t .

El argumento que acabamos de exponer nos lleva a darnos cuenta que la Distribución de Wigner cumple la propiedad de soporte finito en el tiempo (1.21). Si tenemos una señal $f(t)$ que vale 0 hasta llegar a un tiempo t_1 , haciendo el ejercicio de plegar la señal sobre $t < t_1$ todas las partes de la señal se superpondrán con 0, o lo que es lo mismo si $f(t + \frac{\tau}{2}) \neq 0$ entonces $\overline{f(t - \frac{\tau}{2})} = 0$ y viceversa, por lo que el producto es 0. En base al mismo razonamiento lo mismo ocurre

para los $t > t_1$ si la señal vale 0 a partir de un punto t_1 . Por tanto, uniendo estos dos casos obtenemos que para la función de Wigner se cumplirá la propiedad de soporte finito.

No obstante, cabe destacar que el hecho de que una señal valga 0 en una región no implica que dicha región tome valor 0 en la Distribución de Wigner. Una señal podría, por ejemplo, empezar en un tiempo t_1 y continuar hasta un tiempo t_2 , que exista una pausa repentina hasta t_3 y a partir de aquí volver a emitirse hasta finalizar en el tiempo t_4 . De esta manera, la Distribución de Wigner de dicha señal sabemos, por lo comentado sobre la propiedad de soporte finito, que valdrá 0 hasta llegar a t_1 y después de t_4 , no obstante podría no tomar valor 0 desde el tiempo t_2 al t_3 pese a que la señal original tome valor 0 en este intervalo de tiempo. Este hecho es fácil de imaginar si hacemos el ejercicio de doblar la función que comentamos antes. Para verlo con un ejemplo concreto, si tenemos la siguiente señal $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi 100t) & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ \sin(2\pi 50t) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t < 1 \end{cases}$$

y la dobláramos alrededor de $\frac{1}{2}$, la parte futura y pasada de la señal interactuarían de tal forma que en este punto no valdría 0. Por tanto, ocurre lo que vimos al final de la primera sección, los puntos 'lejanos' a $\frac{1}{2}$ interceden con la propiedad de soporte finito debido al cambio brusco que supone dejar de valer 0 repentinamente. Veámoslo mediante la gráfica de la Distribución de Wigner.

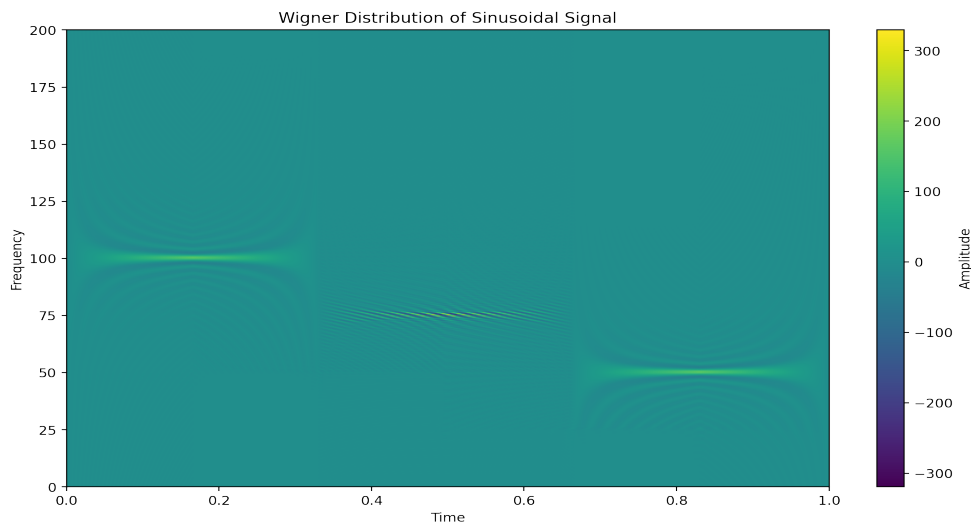


Figura 3.2. En esta gráfica podemos ver la representación de la Distribución de Wigner de la función $f(t)$.

Gracias a esta gráfica podemos apreciar que la Distribución de Wigner de la función propuesta es distinta de 0 en $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ pese a que $f(t)$ vale 0 en esta región. La función de densidad resalta correctamente las frecuencias correspondientes a la señal, no obstante, en el intervalo que vale 0 se aprecia una interferencia.

Invertibilidad: En el anterior capítulo ya vimos la importancia de que las funciones de densidad tuvieran inversas, en este caso la Distribución de Wigner también cumplirá la propiedad de invertibilidad, lo que veremos con el siguiente teorema.

Teorema 3.2 (Inversa de la Distribución de Wigner) Sea $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ tal que f no es idénticamente nula. Entonces, es posible recuperar la señal f a partir de su Distribución de Wigner W_f mediante la siguiente expresión,

$$f(\tau) = \frac{2\pi}{c} \int_{\mathbb{R}} W_f\left(\frac{\tau}{2}, \omega\right) e^{i\tau\omega} d\omega \quad (3.3)$$

con $c \in \mathbb{C}$

Demostración. La Distribución de Wigner de una señal $f(t)$ cualquiera es la Transformada de Fourier de $f(t + \frac{\tau}{2})\overline{f(t - \frac{\tau}{2})}$ con respecto a τ multiplicada por una constante. Por lo que aplicando la inversa de la Transformada de Fourier, se tiene

$$f\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} = 2\pi \int_{\mathbb{R}} W_f(t, \omega) e^{i\tau\omega} d\omega$$

Si tomamos $t = \frac{\tau}{2}$ y al igual que en la demostración del teorema de la inversa de la Transformada Corta de Fourier (Teorema 4.2) consideramos, sin pérdida de generalidad, $\overline{f(0)} \neq 0$, ya que al f no ser idénticamente nula por hipótesis podemos encontrar una traslación de la señal que satisfaga este requisito, obtenemos lo siguiente

$$f(\tau) = \frac{2\pi}{\overline{f(0)}} \int_{\mathbb{R}} W_f\left(\frac{\tau}{2}, \omega\right) e^{i\tau\omega} d\omega$$

con lo que llegamos a (3.3) si denotamos $c = \overline{f(0)}$. ■

Este resultado nos muestra que la señal puede ser recuperada conociendo únicamente la Distribución de Wigner y una constante, por lo tanto esta función de densidad es invertible en el sentido que le hemos dado.

3.3. Distribución de Wigner vs Transformada Corta de Fourier

Ahora que ya hemos analizado las propiedades principales de la Distribución de Wigner, al igual que lo hicimos en el anterior capítulo para la Transformada Corta de Fourier, es natural preguntarnos cuáles son las diferencias entre ambas funciones de densidad y por qué deberíamos usar una y no otra.

A menudo se ha dicho que una de las ventajas de la Distribución de Wigner sobre el espectrograma es que no tenemos que molestarnos en elegir la ventana. Este punto de vista pasa por alto la esencia del problema. El espectrograma no es una densidad única, es una clase infinita de funciones de densidad conjunta, y decir que una ventaja es que no hay que elegir tiene tanto sentido como decir que un libro es mejor que una biblioteca porque no tenemos que elegir qué libro leer. El punto principal por el que se desarrolla la Distribución de Wigner es que se considera que da una mucho mayor resolución que el espectrograma simultáneamente en tiempo como en frecuencia. Es decir, la ventaja no es que no tengamos que preocuparnos por elegir una ventana, es que incluso si nos preocupáramos, no encontraríamos una que produzca un espectrograma con mejor resolución que el de Wigner.

Otro punto a favor de la Distribución de Wigner frente al espectrograma es que ésta cumple la propiedad de las marginales. Esta propiedad es de gran utilidad a en la práctica, ya que, por ejemplo, a la hora de calcular promedios en tiempo y frecuencia, podemos usar directamente la Distribución de Wigner sin pasar por la expresión en el tiempo de la señal.

Por otro lado, una de las ventajas del espectrograma es que tiene muchísimas menos interferencias que la Distribución de Wigner. Como ya hemos ido comentando a lo largo de todo el capítulo la Distribución de Wigner es mucho más sensible al ruido, ya que este puede afectar a partes lejanas de la señal. Además, las interferencias cruzadas pueden hacer que aparezcan frecuencias que no aportan información real de la señal, hecho que no ocurre en la transformada corta de Fourier.

Una vez comentadas las diferencias analizaremos dos ejemplos en las que se enfrenta el espectrograma de una función con su Distribución de Wigner, para así poder visualizarlas gráficamente algunas de las diferencias expuestas.

Ejemplo 3.1: En este primer ejemplo la señal a tener en cuenta será la misma que hemos ido utilizando para poner ejemplos desde el capítulo 1.

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi 100t) & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ \sin(2\pi 50t) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ \sin(2\pi 20t) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

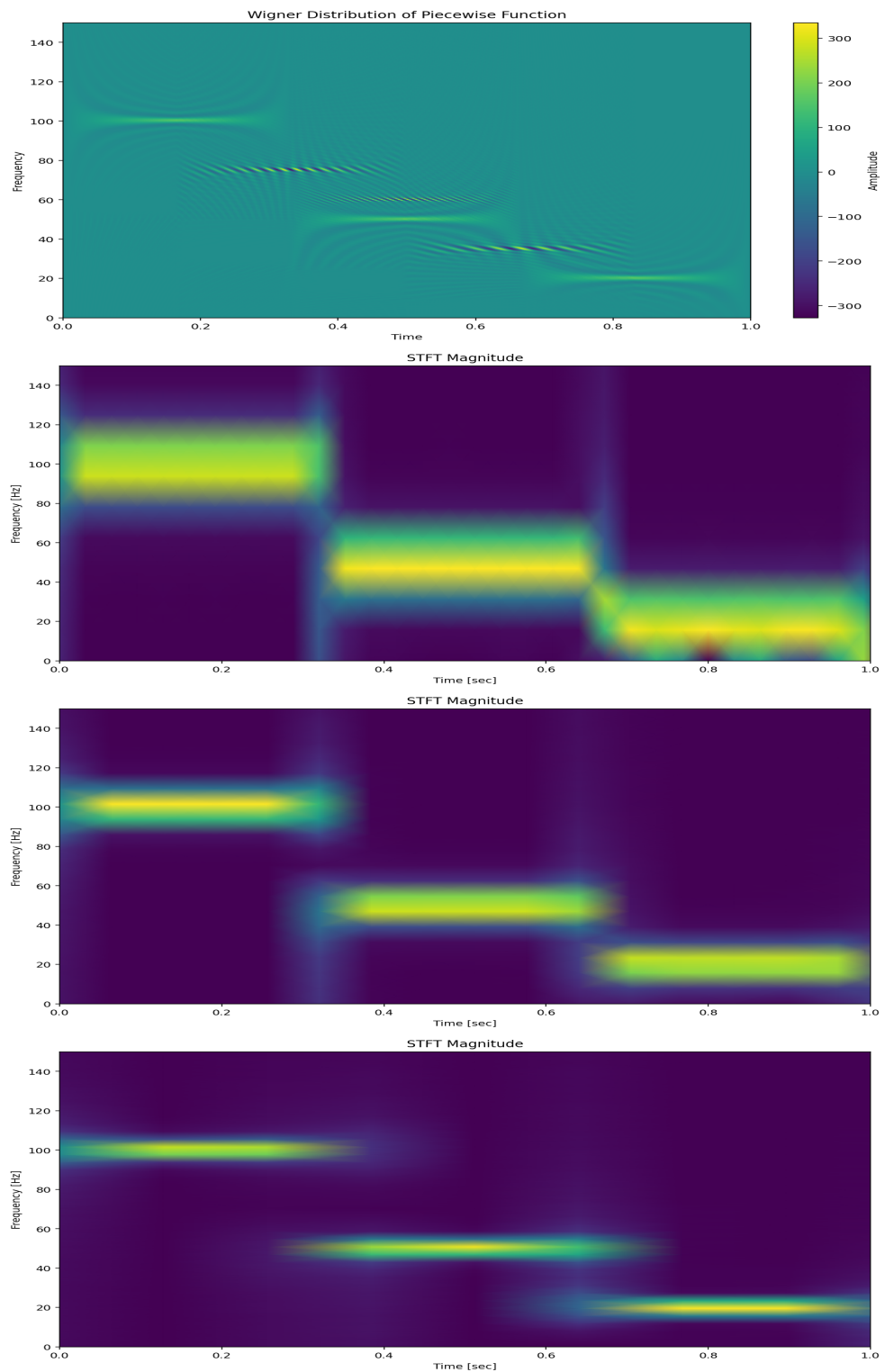


Figura 3.3. En la primera imagen se muestra la Distribución de Wigner de nuestra función $f(t)$. Por otra parte, en las imágenes siguientes podemos observar espectrogramas con la ventana de Hann de dicha función con diferentes tamaños de ventana. En primer lugar una ventana estrecha, después una más intermedia y por último una ventana ancha .

Si miramos la Figura 3.3 de la página anterior, nos damos cuenta que este ejemplo ilustra la mayor resolución que ofrece la Distribución de Wigner en tiempo y frecuencia. Pese a que es verdad que aparecen las interferencias cruzadas que hemos ido comentando a lo largo del capítulo, si nos fijamos en las frecuencias principales y en que tiempo se producen es observable a simple vista la mayor resolución. En la primera gráfica, que refleja la Distribución de Wigner, tanto tiempo como frecuencia están mejor delimitados que en las otras tres. Es cierto que en los espectrogramas podríamos hacer las ventanas más y más anchas (estrechas), obteniendo incluso mejor resolución espectral (temporal) que con la Distribución de Wigner, no obstante esto carecería de sentido, ya que la información temporal (espectral) sería totalmente perdida y sería prácticamente como no tener información de la señal.

Ejemplo 3.2: En este segundo ejemplo, analizaremos tanto el espectrograma como la Distribución de Wigner de la señal f definida a partir de la función $\sin(2\pi 20t)$ en el intervalo $[0, 1]$ con un factor aleatorio de ruido en $[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]$, el cual ha sido generado en Python. Dicha señal da lugar a la gráfica en el dominio del tiempo que se encuentra a continuación (Figura 3.4), donde se puede apreciar el ruido implementado a la perfección.

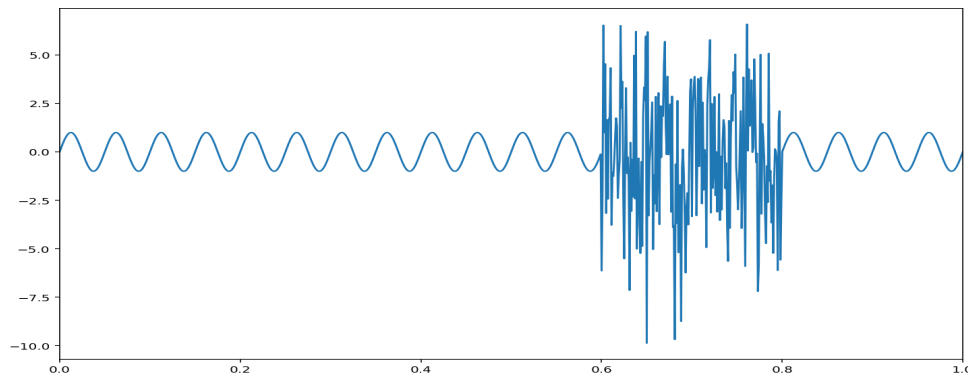


Figura 3.4.

Si analizamos su espectrograma y Distribución de Wigner, presentes en la Figura 3.5 de la página siguiente, vemos como se puede apreciar perfectamente una de las diferencias comentadas, en la Distribución de Wigner partes lejanas de la señal se afectan entre sí, mientras que en el espectrograma esto no ocurre. Este hecho se observa en dichas gráficas ya que, mientras que en el espectrograma el ruido presente en la señal solo afecta a partes cercanas de la misma, en la Distribución de Wigner aparecen frecuencias que no pertenecen a la señal principal en todo el dominio del tiempo, las cuales son provocadas por el ruido.

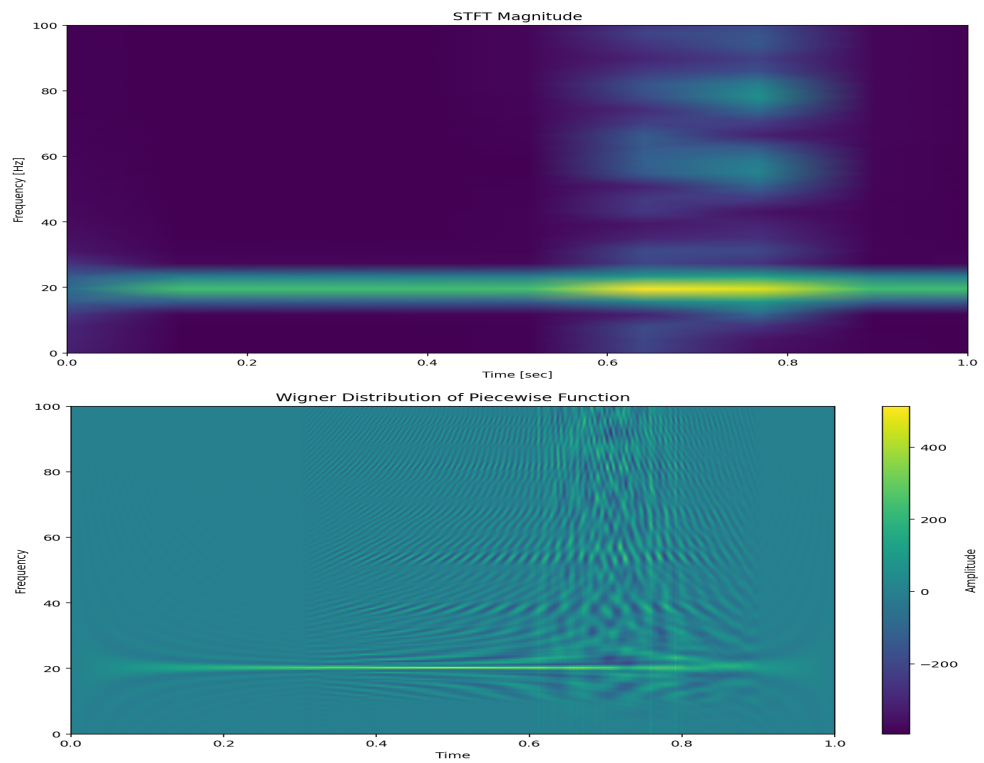


Figura 3.5. En la primera imagen se muestra el espectrograma con una ventana de Hann de la función seno con ruido ya comentada, mientras que en la segunda imagen la representación de su Distribución de Wigner.

Enfoque General y Método del Núcleo

En los capítulos 2 y 3 hemos visto dos ejemplos de funciones de densidad conjunta tiempo-frecuencia, como son la Transformada Corta de Fourier y la Distribución de Wigner. A lo largo de este último capítulo trataremos de estudiar las funciones de densidad conjunta desde un punto de vista mucho más general y analizaremos sus propiedades conjuntas.

La Distribución de Wigner, tal como se considera en el análisis de señales, fue el primer ejemplo de una densidad conjunta tiempo-frecuencia que era cualitativamente diferente al espectrograma. A partir de esto, hubo una considerable actividad en las décadas de 1940, 1950 y 1960, ideando densidades que eran similares en espíritu a la Distribución de Wigner, en el sentido de que cumplían con las marginales y otras propiedades deseables. Entre las densidades propuestas entonces (en el análisis de señales y la mecánica cuántica) se encontraban la de Rihaczek, Page y Margenau-Hill. No obstante, no fue hasta finales de los años 80 que el físico y matemático Leon Cohen ideó un método que podía generar de manera sencilla un número infinito de nuevas funciones de densidad conjunta. Este enfoque caracteriza las densidades tiempo-frecuencia mediante una función auxiliar, la función núcleo. Las propiedades de una densidad se reflejan mediante simples restricciones en el núcleo, y al examinar el núcleo, se puede determinar fácilmente las propiedades de la densidad. Esto permite elegir aquellos núcleos que generan densidades con propiedades prescritas y deseables. Esta clase general puede derivarse mediante el método de funciones características. Precisamente esto es en lo que nos centraremos en este capítulo, en explicar el método y las ideas generales asociadas con él, aunque no nos pararemos a demostrar rigurosamente sus propiedades [4].

4.1. Método del núcleo

El método mencionado en la introducción afirma que toda función de densidad conjunta tiempo-frecuencia viene dada por la siguiente fórmula general,

$$C(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(u - \frac{1}{2}\tau)} f(u + \frac{1}{2}\tau) \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t - i\tau\omega + i\theta u} du d\theta d\tau \quad (4.1)$$

donde $\Phi(\theta, \tau)$ es una función de dos dimensiones llamada núcleo.

El núcleo determina la función de densidad conjunta y sus propiedades. Más adelante veremos una tabla en la que se enumeran algunas densidades y sus respectivos núcleos correspondientes (Figura 4.1). Es rápidamente apreciable que para la Distribución de Wigner, $\phi(\theta, \tau) = 1$. Sin embargo, no se debería atribuir una importancia particular a esto, ya que para cada función de densidad es posible escribir una forma general equivalente de manera que el núcleo de dicha densidad tome valor 1, en cuyo caso el núcleo de la Distribución de Wigner tomaría un valor diferente.

Por otra parte, tal y como hicimos con las funciones de densidad de los dos pasados capítulos esta expresión general también puede ser expresada a través de la frecuencia.

Proposición 4.1 *Dado $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ y $F(\omega)$ su Transformada de Fourier, entonces la función general expresada en (4.1) viene dada en el dominio de la frecuencia de la siguiente forma,*

$$C(t, \omega) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{F(u + \frac{1}{2}\theta)} F(u - \frac{1}{2}\theta) \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t - i\tau\omega + i\tau u} du d\theta d\tau \quad (4.2)$$

Demostración. Si expresamos f mediante la inversa de la Transformada de Fourier y utilizamos la propiedad de la delta de Dirac expuesta en (1.14), obtenemos la siguiente serie de igualdades,

$$\begin{aligned} C(t, \omega) &= \frac{1}{16\pi^4} \int_{\mathbb{R}^5} \overline{F(\omega')} e^{-i\omega'(u - \frac{1}{2}\tau)} F(\omega'') e^{i\omega''(u + \frac{1}{2}\tau)} \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t - i\tau\omega + i\theta u} du d\theta d\tau d\omega' d\omega'' \\ &= \frac{1}{16\pi^4} \int_{\mathbb{R}^5} \overline{F(\omega')} e^{-i\omega(\omega' - \omega'' - \theta)} F(\omega'') e^{i\frac{1}{2}\tau(\omega'' + \omega')} \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t - i\tau\omega} du d\theta d\tau d\omega' d\omega'' \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^4} \overline{F(\omega')} \delta(\omega' - \omega'' - \theta) F(\omega'') e^{i\frac{1}{2}\tau(\omega'' + \omega')} \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t - i\tau\omega} d\theta d\tau d\omega' d\omega'' \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{F(\omega'' + \theta)} F(\omega'') e^{i\frac{1}{2}\tau(2\omega'' + \theta)} \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t - i\tau\omega} d\theta d\tau d\omega'' \end{aligned}$$

Por lo que realizando el cambio de variable $\omega'' = u - \frac{\theta}{2}$, llegamos a la expresión (4.2), demostrando así la proposición. ■

Cabe destacar que como ya adelantamos anteriormente hay una gran cantidad de formas de describir la clase general de todas las funciones de densidad tiempo-frecuencia, las cuales se usan dependiendo del contexto físico.

Name	Kernel: $\phi(\theta, \tau)$	Distribution: $C(t, \omega)$
General class (Cohen ^[125])	$\phi(\theta, \tau)$	$\frac{1}{4\pi^2} \iiint e^{-j\theta t - j\tau\omega + j\theta u} \phi(\theta, \tau) s^*(u - \frac{1}{2}\tau) s(u + \frac{1}{2}\tau) du d\tau d\theta$
Wigner ^[584]	1	$\frac{1}{2\pi} \int e^{-j\tau\omega} s^*(t - \frac{1}{2}\tau) s(t + \frac{1}{2}\tau) d\tau$
Margenau-Hill ^[358]	$\cos \frac{1}{2}\theta\tau$	$\text{Re} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s(t) S^*(\omega) e^{-j\tau\omega}$
Kirkwood ^[305] Rihaczek ^[484]	$e^{j\theta\tau/2}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} s(t) S^*(\omega) e^{-j\tau\omega}$
Born-Jordan ¹ (Cohen ^[125])	$\frac{\sin \frac{1}{2}\theta\tau}{\frac{1}{2}\theta\tau}$	$\frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{ \tau } e^{-j\tau\omega} \int_{t- \tau /2}^{t+ \tau /2} s^*(u - \frac{1}{2}\tau) s(u + \frac{1}{2}\tau) du d\tau$
Page ^[419]	$e^{j\theta \tau }$	$\frac{\partial}{\partial t} \left \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t s(t') e^{-j\omega t'} dt' \right ^2$
Choi-Williams ^[117]	$e^{-\theta^2\tau^2/\sigma}$	$\frac{1}{4\pi^{3/2}} \iint \frac{1}{\sqrt{\tau^2/\sigma}} e^{-\sigma(u-t)^2/\tau^2 - j\tau\omega} s^*(u - \frac{1}{2}\tau) s(u + \frac{1}{2}\tau) du d\tau$
Spectrogram	$\int h^*(u - \frac{1}{2}\tau) e^{-j\theta u} h(u + \frac{1}{2}\tau) du$	$\left \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-j\omega\tau} s(\tau) h(\tau - t) d\tau \right ^2$
Zhao-Atlas-Marks ^[626]	$g(\tau) \tau \frac{\sin a\theta\tau}{a\theta\tau}$	$\frac{1}{4\pi a} \int g(\tau) e^{-j\tau\omega} \int_{t- \tau /a}^{t+ \tau /a} s^*(u - \frac{1}{2}\tau) s(u + \frac{1}{2}\tau) du d\tau$

Figura 4.1. Tabla en inglés encontrada en [4] con los núcleos de diferentes funciones de densidad. La señal viene representada por s en lugar de f , la conjugada con s^* y j es el número imaginario i .

Hay tres ventajas básicas al caracterizar las funciones de densidad tiempo-frecuencia mediante la función del núcleo. Primero, podemos obtener y estudiar las funciones de densidad con ciertas propiedades al restringir el núcleo. Por ejemplo, supongamos que queremos todas las densidades que satisfacen las marginales. Veremos que para asegurar la satisfacción de las marginales, el núcleo debe tener la propiedad simple $\phi(0, \tau) = \phi(t, 0) = 1$. Por lo tanto, si queremos estudiar las densidades que satisfacen las marginales, consideramos solo núcleos que cumplan con estas condiciones. Esto aún deja un número infinito de opciones, pero tenemos la garantía de que se cumplen las marginales.

En segundo lugar, las propiedades de una densidad se pueden determinar fácilmente mediante un simple examen del núcleo. Por ejemplo, si el núcleo cumple con la condición recién discutida, entonces sabemos que la densidad cumple con las marginales y no necesitamos realizar más cálculos.

En tercer lugar, dada una función del núcleo, es fácil generar una densidad.

Antes de discutir las condiciones en el núcleo que garantizan que una función de densidad conjunta tenga unas propiedades particulares, vale la pena detenerse a estudiar como encontrar el núcleo de una función de densidad determinada.

Determinación del núcleo. Hemos incidido en la importancia del núcleo y como este determina las características de una función de densidad tiempo-frecuencia. Por tanto, es de suma importancia saber como calcularlo. Para esto, en primer lugar fijémonos en que la expresión general (4.1) refleja la Transformada de Fourier sobre la variable θ de la siguiente función,

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{f(u - \frac{1}{2}\tau)} f(u + \frac{1}{2}\tau) \phi(\theta, \tau) e^{-i\tau\omega + i\theta u} dud\tau$$

Por tanto tomando la inversa de la Transformada de Fourier tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} C(t, \omega) e^{i\theta t} dt = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{f(u - \frac{1}{2}\tau)} f(u + \frac{1}{2}\tau) \phi(\theta, \tau) e^{-i\tau\omega + i\theta u} dud\tau$$

Como volvemos a obtener una expresión que tiene una Transformada de Fourier implícita, esta vez sobre t , podemos volver a tomar la inversa otra vez

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} C(t, \omega) e^{i\theta t + i\tau\omega} dt d\omega = \frac{\phi(\theta, \tau)}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(u - \frac{1}{2}\tau)} f(u + \frac{1}{2}\tau) e^{i\theta u} du$$

Es decir, podemos despejar el núcleo y llegar a nuestro objetivo, tenerlo definido a partir de nuestra función de densidad y la señal:

$$\phi(\theta, \tau) = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} C(t, \omega) e^{i\theta t + i\tau\omega} dt d\omega}{\int_{\mathbb{R}} \overline{f(u - \frac{1}{2}\tau)} f(u + \frac{1}{2}\tau) e^{i\theta u} du}$$

Ejemplo 5.1: Apliquemos esto que acabamos de demostrar al espectrograma, para así corroborar los datos de la Figura 4.1.

Siguiendo la igualdad vista en el segundo capítulo, la (2.9), y uniendo esto con lo que acabamos de ver, es sencillo conocer el núcleo del espectrograma

$$\phi(\theta, \tau) = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |F_h(\omega)|^2 e^{i\theta t + i\tau\omega} dt d\omega}{\int_{\mathbb{R}} \overline{f(u + \frac{\tau}{2})} f(u - \frac{\tau}{2}) e^{i\theta u} du} = \int_{\mathbb{R}} h(u + \frac{\tau}{2}) \overline{h(u - \frac{\tau}{2})} e^{-i\theta u} du$$

que coincide con lo que se observa en la tabla de la Figura 4.1.

4.2. Propiedades básicas del núcleo

Ahora discutiremos algunas de las propiedades básicas de las funciones de densidad conjuntas tiempo-frecuencia, que se han ido considerado a lo largo de los anteriores capítulos, y mostraremos cómo se reflejan como restricciones en el núcleo.

Marginales: Si integramos en la forma general (4.1) con respecto a la frecuencia y empleamos una vez más las propiedad de la delta de Dirac vista en (1.14),

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} C(t, \omega) d\omega &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \overline{f(u - \frac{1}{2}\tau)} f(u + \frac{1}{2}\tau) \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t - i\tau\omega + i\theta u} dud\theta d\tau d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\delta(\tau) f(u - \frac{1}{2}\tau)} f(u + \frac{1}{2}\tau) \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t + i\theta u} dud\theta d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |f(u)|^2 \phi(\theta, 0) e^{-i\theta t + i\theta u} dud\theta
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como queremos que esto sea igual a $|s(t)|^2$, se debe dar la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(\theta, 0) e^{-i\theta t + i\theta u} d\theta = \delta(t - u)$$

y esto se da únicamente para $\phi(\theta, 0) = 1$.

Por tanto este es el requisito para que se cumpla esta marginal. Por otro lado, si integramos en el tiempo, pero esta vez en la expresión equivalente de $C(t, \omega)$ en el dominio de la frecuencia (4.2) y usando un proceso análogo

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} C(t, \omega) d\omega &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^4} \overline{F(u + \frac{1}{2}\theta)} F(u - \frac{1}{2}\theta) \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t - i\tau\omega + i\tau u} dud\theta d\tau dt \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\delta(\theta) F(u + \frac{1}{2}\theta)} F(u - \frac{1}{2}\theta) \phi(\theta, \tau) e^{-i\tau\omega + i\tau u} dud\tau d\theta \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} |F(u)|^2 \phi(0, \tau) e^{-i\tau\omega + i\tau u} dud\tau
 \end{aligned}$$

lo que nos lleva a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(0, \tau) e^{-i\tau\omega + i\tau u} d\tau = \delta(\omega - u)$$

que se da únicamente si $\phi(0, \tau) = 1$.

Esto nos deja con que la condición de las marginales se cumplirá si y solo si $\phi(0, \tau) = 1$ y $\phi(\theta, 0) = 1$.

Energía total: Si la propiedad de las marginales se cumple, entonces, por supuesto, la propiedad de energía total también se cumplirá. No obstante,

sabemos que es posible conservar la energía total de la señal, E , sin necesidad de que se cumplan las marginales, tal y como ocurre en el espectrograma. Por tanto, si integramos también en el tiempo en la expresión de (4.3) tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} C(t, \omega) d\omega dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |f(u)|^2 \phi(\theta, 0) e^{-i\theta t + i\theta u} du d\theta dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\theta) |f(u)|^2 \phi(\theta, 0) e^{i\theta u} du d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 \phi(0, 0) e^{i\theta u} du\end{aligned}$$

por lo que si queremos que esta expresión sea igual a la energía de la señal, entonces se debe cumplir que $\phi(0, 0) = 1$.

Función real: Otra de las características que es interesante de la función de densidad puede ser la de ser una función real. Por tanto, veamos que imposición ha de hacerse al núcleo para que esto se cumpla. Estudiemos $\overline{C(t, \omega)}$, y hagamos los cambios de variable $\tau' = -\tau$ y $\theta' = -\theta$

$$\begin{aligned}\overline{C(t, \omega)} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} f(u - \frac{1}{2}\tau) \overline{f(u + \frac{1}{2}\tau) \phi(\theta, \tau)} e^{i\theta t + i\tau\omega - i\theta u} du d\theta d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} f(u + \frac{1}{2}\tau') \overline{f(u - \frac{1}{2}\tau') \phi(-\theta', -\tau')} e^{-i\theta' t - i\tau'\omega + i\theta' u} du d\theta' d\tau'\end{aligned}$$

Observando esta expresión nos damos cuenta de que el único requisito que debe cumplir el núcleo para que $\overline{C(t, \omega)} = C(t, \omega)$, y por tanto C sea real, es que $\phi(-\theta, \tau) = \overline{\phi(\theta, -\tau)}$

Soporte finito: Otra idea interesante es determinar cómo se define la propiedad de soporte finito, que tanto hemos mencionado durante los capítulos, a través del núcleo. Aunque no lo demostraremos, debido a la extensión limitada del trabajo, la propiedad de soporte finito se cumplirá siempre y cuando se dé la siguiente igualdad,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t, \theta) e^{-i\theta t} d\theta = 0 \quad \text{para todo } |\tau| < 2|t| = 0$$

en el caso del tiempo (1.21), y esta otra igualdad,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t, \theta) e^{-i\tau\omega} d\tau = 0 \quad \text{para todo } |\theta| < 2|\omega|$$

en el caso de la frecuencia (1.22).

Invertibilidad: La última propiedad que analizaremos será la de invertibilidad. Queremos saber si es posible obtener una expresión general que nos dé la señal original a través de una función de densidad definida a partir de (4.1).

Teorema 4.2 (Inversa función de densidad general) Sean las funciones $f(t), \phi(\theta, \tau) \in L^2(\mathbb{C})$ tal que f no es idénticamente nula, y se satisface que $\phi(\theta, \tau)$ no se anula para ningún τ ni θ . Entonces, dada una función de densidad, $C(\theta, \tau)$, definida por la expresión general (4.1), es posible recuperar la señal mediante la siguiente expresión,

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M(\theta, \tau)}{\phi(\theta, \tau)} e^{-i\theta\frac{\tau}{2} + i\theta t + i\omega\tau} d\theta d\omega dt \quad (4.4)$$

donde $c \in \mathbb{C}$ es una constante y $M(\theta, \tau) = \phi(\theta, \tau) \int_{\mathbb{R}} \overline{f(u - \frac{1}{2}\tau)} f(u + \frac{1}{2}\tau) e^{i\theta u} du$

Demostración. Para comenzar la prueba, consideremos la siguiente igualdad

$$\frac{M(\theta, \tau)}{\phi(\theta, \tau)} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(u - \frac{1}{2}\tau)} f(u + \frac{1}{2}\tau) e^{i\theta u} du$$

Utilizando la relación entre la Transformada de Fourier y su inversa,

$$\overline{f(u - \frac{1}{2}\tau)} f(u + \frac{1}{2}\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{M(\theta, \tau)}{\phi(\theta, \tau)} e^{-i\theta u} d\theta$$

Si tomamos $u = \frac{\tau}{2}$,

$$\overline{f(0)} f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{M(\theta, \tau)}{\phi(\theta, \tau)} e^{-i\theta\frac{\tau}{2}} d\theta \quad (4.5)$$

Por otra parte, es fácil darse cuenta de que

$$C(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} M(\theta, \tau) e^{-i\tau\omega - i\theta t} d\tau d\theta$$

Por lo que usando la relación entre la Transformada de Fourier y su inversa, primero a partir de la variable τ y después con θ ,

$$M(\theta, \tau) = \int_{\mathbb{R}^2} C(t, \omega) e^{i\theta t + i\omega\tau} dt d\omega \quad (4.6)$$

Finalmente, uniendo (4.5) y (4.6) y considerando, sin pérdida de generalidad, $\overline{f(0)} \neq 0$, ya que, de no serlo, basta con considerar una traslación de f que haga $f(0)$ distinto de 0, lo que es posible porque f no es idénticamente nula,

$$f(\tau) = \frac{1}{\overline{f(0)} 2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M(\theta, \tau)}{\phi(\theta, \tau)} e^{-i\theta\frac{\tau}{2} + i\theta t + i\omega\tau} d\theta d\omega dt$$

Por tanto, como $\overline{f(0)}$ es una constante, llegamos finalmente a (4.4), obteniendo que la señal puede ser recuperada a partir de su función de densidad. No obstante, hay que tener en cuenta que para que todo este proceso sea posible se ha de poder dividir entre el núcleo, por lo que es necesario que no existan regiones donde este se anule, lo cual lo tenemos por hipótesis. ■

Bibliografía

- [1] G. Bachman, L. Narici y E. Beckenstein. *Fourier and Wavelet Analysis* Springer Science, 2000.
- [2] B. Boashash. *Time-Frequency Signal Analysis and Processing. A Comprehensive Reference* 2nd edition. Elsevier Ltd. 2003, 2016.
- [3] T. Butz. *Fourier Transformation for Pedestrians*. 2nd edition. Springer 2006, 2015.
- [4] L. Cohen. *Time-frequency analysis*. Prentice Hall-PTR, 1995.
- [5] M. Faulhuber. *Time-Frequency Analysis. Lecture Notes*. NuHAG, Faculty of Mathematics, University of Vienna, 2022.
- [6] F. Hlawatsch y F. Auger. *Time-Frequency Analysis. Concepts and Methods*. ISTE Ltd, 2008.
- [7] L. Hormander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. 2nd edition. Springer, 2003.
- [8] W. Rudin. *Real and complex analysis*. 3rd edition. McGraw-Hill, Inc, 1987.
- [9] Scipy.org. *scipy.signal.stft* [en línea]. Disponible en: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.signal.stft.html>.
- [10] Scipy.org. *Fourier Transforms (scipy.fft)* [en línea]. Disponible en: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/fft.html>.
- [11] Stackoverflow. *Plotting Wigner-Ville distribution with pyftb on python 3* [en línea]. Disponible en: <https://stackoverflow.com/questions/49676072/plotting-wigner-ville-distribution-with-pyftb-on-python-3>

Análisis tiempo-frecuencia

Lucio González Morado

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0101397900@ull.edu.es

Abstract

This paper address the basic theory of Time-Frequency Analysis, which allows us to express signals in both time and frequency simultaneously without losing information.

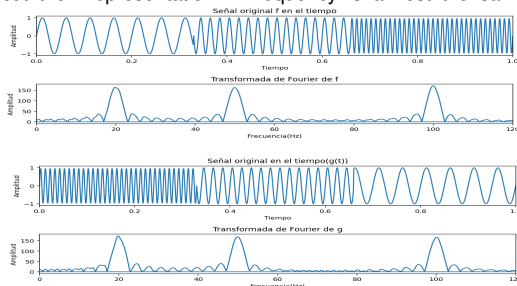
1. Introduction

Since the dawn of humanity, humans have sought to understand the world around them, from celestial movements to patterns in nature. One of the most fascinating aspects of this quest has been the study of time and frequency, two fundamental dimensions underlying almost all observable phenomena.

Motivated by Fourier series, the first concept that appears when beginning the study of frequencies is the Fourier transform, which is defined from a signal $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ as,

$$F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

This tool allows us to obtain information about the frequencies present in a signal from its representation in time, which is of great importance when studying the signal. However, when representing these frequencies on a graph, a significant limitation arises: very different signals may have similar frequency representations. We can see this limitation in the next example, where functions f and g are so different but their representation in frequency is almost the same,



Therefore, stemming from these limitations, Time-Frequency Analysis is born, through which an attempt is made to seek functions known as time-frequency densities that represent time and frequency simultaneously. However, the task of finding them is complicated, due, among other things, to the well known as Uncertainty Principle.

2. Short Time Fourier Transform

The Short-Time Fourier Transform (STFT) is a widely used method for analyzing non-stationary signals. Its concept involves dividing a signal into small time segments and analyzing each segment with the Fourier Transform to determine the frequencies present. To analyze these segments mathematically, a windowing function $h(t)$ is used, which enhances the signal near the study time and minimizes it at distant times,

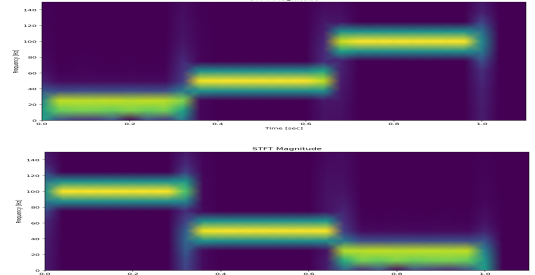
$$F_h(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) h(\tau - t) e^{-i\omega \tau} d\tau$$

This latter gives rise to the expression written below, so the signals characteristics could be represented in the real plane,

$$P_{STP}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} |F_h(t, \omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} f(\tau) h(\tau - t) e^{-i\omega \tau} d\tau \right|^2$$

TRABAJO FIN DE GRADO, Convocatoria de junio, 2024

This allows for tracking frequency variations over time. For example, when applied to a musical piece with changing instruments, STFT reveals the presence of different frequencies at different time intervals. We can see how the problem that we introduce before is solved. Using the same signals f and g ,

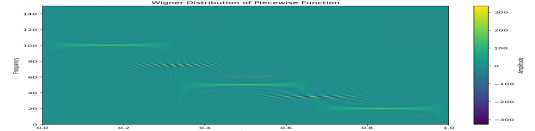


3. Wigner Distribution

We also study the Wigner Distribution. This density function is based on the concept of autocorrelation, which measures how a signal is correlated with itself as it shifts over time and it also solves the problem we have talked. In this case, no window is used, and the Wigner Distribution is defined only using the signal as follows:

$$W_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\omega \tau} d\tau$$

As this function is real it can be directly represented in the plane. However it has some differences with the STFT. The main difference is that the Wigner Distribution is more precise, although it presents more interference and false components than the STFT, as we can see for the function f



4. Kernel method

Finally, in the last chapter, we explore the kernel method as a unifying framework that integrates the essential aspects of the two density functions discussed earlier. The properties of the functions generated by this method will be determined by another function known as the kernel, as shown below.

$$C(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} f\left(u - \frac{1}{2}\tau\right) f\left(u + \frac{1}{2}\tau\right) \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t - i\tau \omega + i\theta u} du d\theta d\tau$$

The most significant fact about this last method is that we can study the density properties only by studying its kernel.

References

- [1] B. Boashash. *Time-Frequency Signal Analysis and Processing. A Comprehensive Reference* 2nd edition. Elsevier Ltd. 2003, 2016.
- [2] T. Butz. *Fourier Transformation for Pedestrians*. 2nd edition. Springer 2006, 2015.
- [3] L. Cohen. *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall-PTR, 1995..