Los sistemas de lógica modal entre S4 y S5

Alumno: Víctor Fraga Reyes

Tutora: Margarita Vázquez Campos

Grado en Filosofía. Universidad de La Laguna

Curso 2023-2024

Índice

1. Introducción

La lógica modal es una de las extensiones de la lógica clásica más conocidas. Ha sido, además, aplicada al análisis formal de varias cuestiones filosóficas. El objetivo de este trabajo es investigar la lógica modal, y su surgimiento y desarrollo histórico, exponiendo varios sistemas de lógica modal en el proceso. En particular, se investigarán los sistemas entre S4 y S5 y sus análogos en otras lógicas emparentadas con la modal.

De esta manera, en los antecedentes se hará una breve introducción a la lógica modal, a sus objetivos de investigación y al lenguaje formal utilizado en ella, tras lo que se explicará el surgimiento y desarrollo histórico de la lógica modal, partiendo de algunos antecedentes históricos en la Antigüedad, a saber, Aristóteles y la lógica megárica y estoica, y continuando con el desarrollo moderno de la disciplina, comenzando con la obra de C. I. Lewis y terminando con una breve exposición de la evolución de la semántica modal, que fue particularmente problemática. Tras esto, en el estado actual, se expone una serie de sistemas de lógica modal, con los más comunes (T, S4 y S5) en primer lugar, y los sistemas entre S4 y S5 después. En discusión y posicionamiento, se explica la utilidad de los sistemas entre S4 y S5 en sus versiones temporales y epistémicas.

2. Antecedentes

2.1. Lógica modal. Objetivos y lenguaje formal

Antes de estudiar lógica modal, cabe precisar su objeto de estudio y el significado de una serie de términos que en ella se utilizan, a saber, "necesario", "posible", "imposible" y "contingente." Con estos términos se pretende calificar los valores de verdad de las proposiciones, describiendo la manera en que son verdaderos o falsos.[1] Por un lado, oraciones como "los lados de un cuadrado son iguales en longitud" no pueden

[1] A lo largo de la historia de la filosofía, se han usado estos términos modales en otros sentidos, y muchas veces se utilizan en referencia a seres u objetos. Por ejemplo, en la oración "Dios es un ser necesario", la necesidad es algo que se está predicando de un ser, Dios, que —desde algunas perspectivas— debe existir. Sin embargo, este no es el concepto de necesidad con el que se trabaja en lógica modal moderna.

ser falsas, debido a que tener lados iguales es parte de la definición de "cuadrado." Por otra parte, el enunciado "actualmente está lloviendo y no está lloviendo" debe ser falso, puesto que es contradictorio que algo suceda y no suceda simultáneamente. A las proposiciones del primer tipo, a las que deben ser verdaderas, se las denomina proposiciones o verdades *necesarias*, mientras que a las oraciones que deben ser falsas se las llama *imposibles*. Aquellas proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas son *contingentes*. En esta categoría entran las oraciones que son, de hecho, verdaderas, pero podrían no serlo, como "el cielo es azul", pero también proposiciones que son, de hecho, falsas, pero podrían no serlo, como "los unicornios existen." Finalmente, a las proposiciones necesarias y a las contingentes, en conjunto, se las denomina *posibles*.

El interés de la lógica modal es estudiar la necesidad, la posibilidad, la contingencia y la imposibilidad *lógicas*. Como apuntan Hughes y Cresswell (1968/1973), "proposición necesaria" no quiere decir que "de continuar las cosas como están, o permaneciendo el mundo como hasta ahora, [la proposición] no pueda dejar de ser verdadera, sino, más bien, que no podría dejar de ser verdadera, *independientemente de como* (*sic*) estén las cosas." (p. 31). Así, otros usos de términos como "puede" o "es posible que" no se estudian desde el campo de la lógica modal. Una proposición que debe ser verdadera en virtud de las leyes de la física, por ejemplo, no se toma como necesaria en el sentido de la palabra que se desea estudiar, puesto que las leyes de la física son válidas para el universo que habitamos, pero podrían haber sido distintas sin que esto llevara a una contradicción. De la misma manera, "es posible" se suele usar en referencia a proposiciones cuyo valor de verdad desconocemos, pero estas cuestiones epistemológicas quedan habitualmente fuera del campo de estudio de la lógica modal.

La lógica modal es una extensión de la lógica clásica, por lo que a los operadores clásicos[2] se añaden dos más: el operador de la necesidad, escrito en el presente trabajo como $\Box$, y el operador de la posibilidad, para el que utilizaré la notación $\Diamond$. Las fórmulas con operadores modales siguen las reglas de formación de fórmulas de la lógica clásica para operadores monarios, esto es, operadores que toman solo un

[2]Los operadores clásicos más comunes son la negación, que escribo como $\neg$, que se lee "no"; la disyunción, $\vee$, que se lee "o"; la conjunción, $\wedge$, que se lee "y"; la implicación, $\rightarrow$, que se lee "implica" o "si ... entonces", y el bicondicional, $\leftrightarrow$, que se lee "si y solo si."

operando. De esta manera, $\Box p$ se lee "es necesario que p", donde p es una proposición cualquiera, y $\Diamond p$ se lee "es posible que p." El resto de nociones modales mencionadas se pueden expresar a partir de estos operadores: "es imposible que p" se expresa como $\neg\Diamond p$ y "es contingente que p" (o, en otras palabras, p es una proposición posible, pero no necesaria) se podría expresar como $\Diamond p \wedge \neg\Box p$. En realidad, uno de los operadores modales es también redundante, puesto que "es necesario que p" equivale a decir "es imposible que p sea falsa", por lo que $\Box p$ es equivalente a $\neg\Diamond\neg p$. De la misma manera, $\Diamond p$ es equivalente a $\neg\Box\neg p$. Estas expresiones y su notación lógica se resumen en el siguiente cuadro:

Expresión modal	Notación
"Es necesario que p"	$\Box p$
"Es posible que p"	$\Diamond p$
"Es imposible que p"	$\neg\Diamond p$
"Es contingente que p"	$\Diamond p \wedge \neg\Box p$

2.2. La lógica modal en Aristóteles

El filósofo griego Aristóteles fue el primero en estudiar sistemáticamente los argumentos válidos, por lo que se le suele considerar el padre de la lógica. Este filósofo fue también el primero en elaborar una teoría lógica de la necesidad, la posibilidad y la imposibilidad. Según Kneale y Kneale (1962; p. 82), el hecho de que estas nociones modales se puedan aplicar a cualquier proposición hizo que Aristóteles incluyera el estudio de estas en sus obras sobre lógica. Asimismo, "la distinción entre la predicación necesaria y la no-necesaria es básica en la teoría de los predicables, donde un accidente se define como una característica que puede o no pertenecer a una cosa dada."[3] (Kneale y Kneale, 1962; p. 82). En su tratamiento de las nociones modales, Aristóteles plantea que posibilidad e imposibilidad son una pareja de contradictorios propios, esto es, que "es posible que p" y "es imposible que p" siempre tienen valores de verdad opuestos, y que el contradictorio de "es necesario que p" es "no es necesario que p" en lugar de "es necesario que no p." También considera que los términos modales modifican toda la oración a la que se prefijan y no solo partes de la misma.

[3]Esta y todas las citas directas de este texto son traducciones propias.

No obstante, la lógica modal de Aristóteles está plagada de errores, contradicciones y confusiones. Según Kneale y Kneale (1962; p. 84), uno de los problemas es que en algunas de sus obras utiliza los términos “contingente” y “posible” de manera intercambiable, por lo que las discusiones llevadas a cabo se hacen muy difíciles de seguir. Por otro lado, la teoría aristotélica del silogismo modal —que detalla los razonamientos válidos con expresiones modales— “es generalmente reconocida como confusa e insatisfactoria y se ha conjeturado que es una obra tardía e inacabada, insertada en los *Primeros Analíticos* mucho después de la finalización del resto del libro.”[4] (Kneale y Kneale, 1962; p. 85). Sin embargo, Kneale y Kneale (1962) mencionan otras razones por las que la lógica modal aristotélica es tan complicada y confusa, lo que quizás le llevó a cometer errores. Entre ellas, quizás la más relevante es que Aristóteles no utilizaba al lógica proposicional, sino que trabajaba directamente con enunciados cuantificados, que, al combinarse con expresiones modales, dan lugar a oraciones muy complejas y difíciles de interpretar.[5] En realidad, “la base necesaria de una lógica modal es una lógica de proposiciones no analizadas como la que fue desarrollada por los estoicos. Careciendo de esto, Aristóteles no tenía un hilo claro que lo guiara.” (Kneale y Kneale, 1962; p. 91).

2.3. Los conceptos modales en los megáricos y los estoicos

La megárica y la estoica fueron otras dos escuelas que hicieron grandes contribuciones al desarrollo de la lógica en la Antigüedad. Con respecto a los megáricos, Kneale y Kneale (1962) listan tres aportaciones principales al campo de la lógica: “la invención de una serie de paradojas interesantes, la re-examinación de las nociones modales y el inicio de un importante debate sobre la naturaleza de las declaraciones

[4]Para una explicación detenida de los errores y confusiones de la silogística modal de Aristóteles, véase Kneale y Kneale (1962; pp. 87-91).

[5]Actualmente, existe la lógica modal cuantificada, pero esta se construye sobre la lógica modal de proposiciones que se explicará a lo largo de este trabajo. Históricamente, la lógica modal moderna surgió primero como lógica proposicional con la obra de C. I. Lewis en la década de 1910. Los primeros trabajos sobre lógica modal cuantificada fueron publicados por Ruth Barcan y Rudolf Carnap en 1946. No sería extraño, entonces, atribuir las dificultades de Aristóteles a la falta de una lógica modal proposicional, que ignorara el uso de cuantificadores en pro de determinar las reglas de inferencia válidas de manera aislada.

condicionales." (p. 114). En este trabajo se tratará la segunda de estas contribuciones, puesto que es la más relevante a la lógica modal. Los megáricos, influenciados por la filosofía de Parménides, no aceptaban la distinción aristotélica entre potencia y acto, puesto que esta era una explicación del movimiento y el cambio, cuya existencia rechazaban. Por ello, resulta extraño que hicieran contribuciones a la lógica modal, puesto que, sin tener en cuenta el cambio, se hace difícil entender la distinción entre "posible" y "necesario." Según Kneale y Kneale (1962), "es posible que lo que estuvieran intentando hacer fuera encontrar un lugar para las nociones modales mientras negaban la teoría aristotélica de la potencialidad real." (p. 117).

Los lógicos megáricos más importantes para la lógica modal son Diodoro Cronos y Filón de Megara. El primero de ellos da una definición de las modalidades en términos temporales, que el filósofo Boecio reporta de la siguiente manera:

> Diodoro define lo posible como aquello que o bien es o bien será (...), lo imposible como aquello que, siendo falso, no será verdadero (...), lo necesario como aquello que, siendo verdadero, no será falso (...) y lo no-necesario como aquello que o bien ya es o bien será falso. (Boecio, s. f., citado en Kneale y Kneale, 1962; p. 117).

Las definiciones diodoreanas, como se puede observar, hacen referencia a la verdad y la falsedad, de manera similar a como se hace en lógica modal actual. Asimismo, en las definiciones se aprecia que "Diodoro no está definiendo la necesidad *simpliciter*, sino más bien la necesidad en un [momento de] tiempo." (Kneale y Kneale, 1962; p. 118). Las proposiciones pueden cambiar de valor de verdad, por lo que su modalidad también podrá hacerlo. Según las definiciones de Diodoro, una proposición verdadera sobre un evento del pasado, por ejemplo, es necesaria, puesto que los hechos pasados no se pueden cambiar, pero no lo era antes de que el evento tuviera lugar.[6] Ahora bien, una vez una proposición sea necesaria o imposible, no puede dejar de serlo, ni tampoco podrá cambiar su valor de verdad.

Por otro lado, el lógico Filón de Megara también dio sus propias definiciones de los términos modales, que también conocemos gracias a Boecio. Para este filósofo "lo

[6]El ejemplo puesto por Kneale y Kneale (1962) ilustra esto bastante bien: la proposición "hubo una Revolución Francesa" "es ahora necesaria según la definición de Diodoro, pero no lo era antes de 1789." (p. 118)

posible es aquello que, por la naturaleza intrínseca de la aserción, admite verdad." (Boecio, s. f., citado en Kneale y Kneale, 1962; p. 122). Una proposición posible podría ser falsa, según Filón, si las circunstancias externas lo previnieran. Por otro lado, lo necesario es "aquello que, siendo verdadero, nunca puede, considerado en sí mismo, admitir falsedad." (Boecio, s. f., citado en Kneale y Kneale, 1962; p. 122). La imposibilidad y la no-necesidad las define, respectivamente, como la negación de la posibilidad y de la necesidad.

A diferencia de la obra lógica de Aristóteles, los tratados estoicos sobre lógica no se han conservado, por lo que nuestro conocimiento de sus teorías se basa principalmente en fuentes secundarias. La lógica estoica estaba muy influenciada por la de los megáricos, ya que, según Bobzien (2020), Zenón de Citio, el fundador de la Stoa, estudió con Diodoro Cronos. La definición estoica de las modalidades es, sin embargo, más compleja que la de los megáricos. Kneale y Kneale (1962; p. 124) la reconstruyen de la siguiente manera:

- Lo posible es aquello que admite verdad o aquello a lo que, admitiendo verdad, no le impiden ser verdad las circunstancias externas.
- Lo imposible es aquello que no admite de verdad o aquello a lo que, admitiendo verdad, le impiden ser verdad las circunstancias externas.
- Lo necesario es aquello que es verdad y no admite falsedad o aquello a lo que, admitiendo falsedad, le impiden ser falso las circunstancias externas.
- Lo no-necesario es aquello que admite falsedad o aquello a lo que, admitiendo falsedad, le impiden ser falso las circunstancias externas.

Estas definiciones son más complejas porque todas contienen una disyunción —la palabra "o"—, lo que significa que algo puede ser necesario por dos razones distintas. Por la misma razón, es difícil determinar cuáles de estas nociones es contradictoria a la otra.

2.4. Lógica modal moderna: Lewis y la implicación estricta

La implicación clásica[7], expresada en este trabajo como $p \rightarrow q$, y leída como "si p, entonces q", pretende representar formalmente la idea de consecuencia lógica, por lo que la fórmula $p \rightarrow q$ debería ser verdadera si y solo si (a partir de ahora, syss) q se sigue lógicamente de p. Sin embargo, el tratamiento funcional de verdad[8] de este conector lleva a una serie de "paradojas", llamadas así porque no parecen representar correctamente la relación de inferencia entre el antecedente y el consecuente, a pesar de ser tautologías de la lógica clásica. Estas fórmulas son conocidas como las paradojas del condicional material, que se listan a continuación:

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(2) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

(3) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

(1) dice que toda fórmula verdadera es implicada por cualquier otra. (2), que una proposición falsa implica cualquier proposición. (3) establece que dadas dos proposiciones, p y q, o bien q se sigue de p, o bien p se sigue de q. Sin embargo, si llamamos p a la proposición "Júpiter es un gigante gaseoso" y q a la proposición "la leche es blanca", no parece válido decir que o bien p implique q, o bien q implique p, pues la composición y el tamaño de Júpiter y el color de la leche no parecen estar lógicamente relacionados entre sí. Algo similar sucede con las dos primeras paradojas del condicional, que permiten establecer relaciones entre enunciados que no tienen nada que ver el uno con el otro. Según Kneale y Kneale (1962), el problema

[7] En este apartado, utilizo los términos "implicación clásica" y "condicional material" de manera intercambiable para referirme al operador $\rightarrow$ de la lógica clásica.

[8] Un operador es funcional de verdad cuando el valor de verdad de una fórmula bien formada (fbf) con dicho operador se puede determinar por medio de una función de verdad a partir de los valores de cada proposición que la componen. Esto queda recogido en las llamadas "tablas de verdad." Por ejemplo, $p \wedge q$ es verdadera si y solo si tanto p como q son verdaderas. Los operadores modales, sin embargo, no son funcionales de verdad, ya que no es posible determinar si $\Box p$ es verdadera en función del valor de verdad de p. Si se interpreta p como "el cielo es azul", p es verdadera, pero contingentemente, por lo que $\Box p$ sería falsa. Si p se interpreta como $2+2=4$, p es necesariamente verdadera, y en este caso $\Box p$ sería verdadera. Esto se explicará con más profundidad en el apartado 2.5.

de $p \to q$ es que "esta fórmula está construida usando los signos proposicionales p y q, pero no trata *acerca de* las proposiciones que expresan." (p. 554). El significado de las proposiciones no se tiene en cuenta en lógica clásica de proposiciones, por lo que el condicional material que usa no puede investigar correctamente la relación de deducibilidad entre proposiciones, ya que deja fuera una parte importante del razonamiento válido.

En 1918, C. I. Lewis publica *A Survey of Symbolic Logic*, una obra en la que desarrolla una lógica con un operador cuyo funcionamiento refleja mejor la idea de consecuencia lógica que la implicación clásica.[9] La intención de Lewis era investigar una lógica que permitiera darle un sentido más fuerte a la palabra "implica", en el que p implica q syss q se deduce de p. Este operador se llama implicación estricta, que en este trabajo escribiré como $p \strictif q$. Se define que p implica estrictamente q syss es imposible que p sea verdadera y q falsa, $\neg\Diamond(p \wedge \neg q)$[10]. Según Hughes y Cresswell (1968/1973) y Kneale y Kneale (1962), esta definición de la implicación estricta ya había sido dada por Hugh MacColl a finales del siglo XIX y principios del siglo XX. No obstante, MacColl no plantea ningún sistema axiomático en su obra, por lo que "su sistema apenas puede ser denominado lógica modal del tipo claramente moderno." (Hughes y Cresswell, 1968/1973; p. 180). La publicación de los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead dio un gran impulso al uso del método axiomático en lógica, por lo que Lewis "tuvo la gran ventaja de poder utilizar un método axiomático basado en el del propio *Principia* y lo utilizó para construir un sistema (...) en el que la implicación estricta más que la material desempeñaba el principal papel." (Hughes y Cresswell, 1968/1973; p. 180).

Con todo, debido a la no funcionalidad de verdad de los operadores modales, Lewis no tenía una semántica para su sistema lógico más allá de la idea intuitiva del significado que quería que tuvieran los operadores que usaba. Esta falta de un

[9]Cabe aclarar que Lewis no pretendía rechazar las paradojas del condicional, sino que consideraba que "cuando eran interpretadas debidamente, no eran 'ni dichos misteriosos, ni grandes descubrimientos, ni enormes absurdos', sino que simplemente reflejaban el sentido funcional de verdad en el que Russell y Whitehead estaban utilizando la palabra 'implica'." (Hughes y Cresswell, 1968/1973; p. 180). Por ello, Lewis no se deshace del condicional material, sino que extiende la lógica clásica añadiéndole la implicación estricta y algunos otros operadores.

[10]También se puede definir la implicación estricta como "es necesario que p implique q", $\Box(p \to q)$, puesto que ambas fórmulas son equivalentes.

método sistemático para determinar la verdad o falsedad de las fórmulas llevó a Lewis a encontrar "un problema de completud: incluso si estás satisfecho de que las tesis de tu sistema son aceptables, ¿cómo sabes que tu sistema axiomático recoge como tesis todas las fórmulas que considerarías aceptables? La respuesta es que no lo sabes."[11] (Bull y Segerberg, 1984; p. 6). Tras la publicación de *A Survey of Symbolic Logic*, el lógico Oskar Becker propuso axiomas adicionales que se podían añadir al sistema de *Survey*. Los axiomas de Becker eran principios de reducción, que permitirían reducir el número de operadores modales en fórmulas como $\Box\Box p$ ("es necesario que sea necesario que p") o $\Box\Diamond p$ ("es necesario que sea posible que p"). Los sistemas obtenidos al añadir los axiomas planteados por Becker parecían tener "el mismo derecho que el sistema *Survey* al título que le confirió Lewis como *el* Sistema de la Implicación Estricta." (Bull y Segerberg, 1984; p. 6).

De esta manera, en 1932, Lewis publicó, junto a Langford, otra obra sobre lógica modal, titulada *Symbolic Logic*. En esta obra, Lewis y Langford presentaban cinco sistemas de lógica modal, a los que llamaron S1, S2, S3, S4 y S5. El libro se dedica principalmente a los dos primeros sistemas —los más débiles, esto es, los que menos cantidad de teoremas tienen—, mientras que los otros tres son mencionados en el apéndice del libro. En realidad, Lewis se decantaba por los sistemas más débiles, que no contenían ningún principio de reducción, "pero confiesa que no puede proponer ningún argumento decisivo en favor de su visión." (Kneale y Kneale, 1962; p. 556). En efecto, resulta difícil pronunciarse sobre la validez de los principios de reducción y las secuencias de más de un operador modal, puesto que

> nuestras 'intuiciones lógicas', al parecer, no dan ninguna indicación fuerte sobre la cuestión de la verdad aquí. Una de las principales razones para esto, me parece, es el hecho de que las expresiones modales de mayor orden como 'posiblemente posible' o 'posiblemente imposible' apenas tienen un *uso* en el discurso ordinario o científico (fuera de la lógica modal). Un problema de importancia primaria, por tanto, es *inventar un uso* o algún tipo de 'equivalente' de un uso para las expresiones en cuestión (fuera de la lógica modal). Hecho esto, el problema de la verdad antes mencionado puede ser abordado en una base más firme. (von Wright,

[11] Esta y todas las citas directas de este texto son traducciones propias.

1952, citado en Kneale y Kneale, 1962; p. 557).

Sin embargo, y como se mencionó antes, el concepto de "necesidad" que pretende estudiar la lógica modal es el concepto de necesidad *lógica*, dejando de lado otros sentidos del término, que son quizás los que llevan a confusión. Así, "en el tratamiento de una proposición matemática plausible pero no demostrada (...), parece natural decir 'esto podría ser una verdad necesaria, pero actualmente no podemos afirmar que deba serlo'." (Kneale y Kneale, 1962; p. 565). Esto podría parecer un contraejemplo a la idea de reducir o eliminar las modalidades repetidas, pero un examen más detenido de la oración muestra que el enunciado contiene varios usos distintos de términos modales, a saber, el uso que tienen en lógica modal —"verdad necesaria" aquí quiere decir "necesidad lógica"— y un sentido más bien epistemológico —"podría ser" y "no podemos afirmar que" se están usando en referencia al desconocimiento humano. Por ello, la oración no constituye un contraejemplo real al principio de reducción, "y parece imposible que se encuentre alguno. Pues quien desee refutar el principio de esta manera debe indicar una proposición que es contingente, en el sentido estrictamente lógico, pero en ese mismo sentido solo contingentemente contingente." (Kneale y Kneale, p. 1962; p. 566).

2.5. Semántica de la lógica modal moderna

El método sintáctico en lógica modal comienza con la obra de Lewis, y se caracteriza por la construcción de sistemas deductivos sin una semántica —una manera sistemática de investigar la verdad y la falsedad de las proposiciones— explícitamente definida. Un problema a la hora de comprobar la verdad o falsedad de las proposiciones es que la semántica modal no se puede trabajar de la misma manera que la semántica clásica, puesto que, como se ha explicado antes, los operadores modales no son funcionales de verdad. En lógica clásica, la tabla de verdad de $p \wedge q$ es la siguiente:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Donde 0 y 1 representan, respectivamente, la falsedad y la verdad de la fórmula. Los valores de la conjunción $p \wedge q$ se hallan únicamente a partir de los valores de las proposiciones p y q, por lo que $\wedge$ es un operador funcional de verdad. Sin embargo, los operadores $\Box$ y $\Diamond$ no funcionan de esta manera. Si se intentara hacer una tabla de verdad para $\Diamond p$, por ejemplo, se encontraría que si p es verdadera, entonces $\Diamond p$ también lo es, pero si p es falsa, no se puede asignar un valor de verdad a $\Diamond p$. Si p fuera "este soltero está casado" —una proposición contradictoria y, por tanto, imposible—, entonces $\Diamond p$ sería falsa. Si, por el contrario, p simbolizara la proposición "el aceite está barato" —oración, de hecho, falsa, pero posible—, entonces $\Diamond p$ sería verdadera. De esta manera, no se podría establecer una tabla de verdad para el operador $\Diamond$, ya que cuando el valor de p es 0, el valor de $\Diamond p$ puede ser o bien 0, o bien 1, por lo que para evaluar una fórmula con este operador entran en juego otras consideraciones más allá de los valores de p. La no funcionalidad de verdad de los operadores modales, entonces, dificultó mucho el estudio semántico de la lógica modal. A lo largo del siglo XX hubo algunos intentos de solventar este problema, que se esbozarán en este apartado.

En lógica clásica, y muchas veces en lógica modal, la semántica es bivalente, puesto que el conjunto de valores de verdad que se puede asignar a las fórmulas y proposiciones es el conjunto $\{0, 1\}$. No obstante, comenzando con Łukasiewicz, han surgido lógicas que permiten más de dos valores de verdad, que en muchas ocasiones representan valores intermedios entre la verdad y la falsedad. Łukasiewicz, a inicios del siglo XX, añade el valor $\frac{1}{2}$ para representar algún tipo de valor intermedio entre "verdadero" y "falso", y define las tablas de verdad de los operadores clásicos y modales con este nuevo valor. Según Bull y Segerberg (1984), el lógico polaco había tenido esta idea a partir de "la discusión de Aristóteles del estatus teórico de las proposiciones sobre el futuro." (p. 8). Una oración como "habrá una batalla naval mañana" puede tener sentido, pero no se puede decir que sea verdadera o falsa, ya que es una afirmación sobre un evento futuro que aún no sabemos si sucederá o no. Esta semántica no bivalente se generalizó para permitir más valores de verdad, dando lugar a una tradición en lógica modal muy fructífera, entre cuyos méritos figura la demostración de que los sistemas S1-S5 de Lewis son distintos. Sin embargo, el conjunto de valores de verdad dados en estos métodos son, en muchas ocasiones, difíciles de interpretar intuitivamente, ya que no se da una explicación explícita del significado de los números asignados a las fórmulas.

El primer lógico en plantear una semántica propiamente dicha para la lógica modal fue Rudolf Carnap. Este lógico definía la validez en términos de "descripciones de estado", que consisten en "un conjunto de proposiciones atómicas (letras proposicionales)." (Bull y Segerberg, 1984; p. 12). Una proposición p es verdadera en una descripción de estado S syss p es un elemento del conjunto S. La verdad de las fórmulas con el resto de operadores clásicos se definen de manera muy intuitiva: $\neg\alpha$[12] es verdadera syss α es verdadera, $\alpha \wedge \beta$ es verdadera syss tanto α como β son verdaderas, etc. La verdad de las fórmulas con operadores modales se definen en referencia a una colección C de descripciones de estado. La fórmula $\Box\alpha$ es verdadera syss α es verdadera en todas las descripciones de estado que están en C, o, en otras palabras, "es necesario que α" significa que α es verdadera en toda situación. Esta regla refleja la idea, usualmente atribuida a Leibniz, de que "necesario" significa "verdadero en todos los mundos posibles." Por otro lado, $\Diamond\alpha$ es verdadera syss α es verdadera en alguna descripción de estado que pertenezca a C, esto es, "es posible que α" significa que α es verdadera en alguna circunstancia. Esta semántica planteada por Carnap se asemeja mucho a la semántica utilizada actualmente, pero no es tan versátil.

Tras Carnap, "el siguiente paso de importancia en la tradición semántica fue dado por Arthur Prior." (Bull y Segerberg, 1984; p. 14). Prior estaba preocupado por la lógica temporal, pero consideraba que esta se podía considerar una lógica modal también. En *Time and Modality*, Prior establece una semántica para sus operadores temporales en las que se "modela el tiempo como el conjunto ω de los números naturales" (Bull y Segerberg, 1984; p. 14). La relevancia de la obra de Prior para el desarrollo de la semántica modal es que los momentos de tiempo que Prior

[12] Utilizo letras griegas como metavariables. Estas representan y pueden ser sustituidas por cualquier fbf para aplicar las reglas a los casos concretos.

utiliza están *ordenados*, a diferencia de las descripciones de estado de Carnap. Al introducir una relación entre momentos de tiempo —o descripciones de estado, o mundos posibles—, Prior dio un paso muy importante hacia la semántica modal moderna, puesto que la semántica de mundos posibles desarrollada por Saul Kripke alrededor de los años 60 tiene como pilar fundamental la definición de relaciones entre los mundos o estados en los que se están evaluando las fórmulas. Así, el trabajo de Carnap y Prior "proporcionó todos los ingredientes necesarios para la lógica modal como la conocemos actualmente." (Bull y Segerberg, 1984; p. 15).

3. Estado actual

3.1. Algunos sistemas de lógica modal: T, S4 y S5

3.1.1. El sistema T

Este apartado es una reelaboración propia de la explicación de los sistemas de lógica modal hecha por Hughes y Cresswell (1968/1973; pp. 31-61). Es habitual trabajar en lógica modal utilizando un sistema axiomático. Para ello, se toman algunas fórmulas, llamadas axiomas, como punto de partida y se establecen también algunas reglas que permitan pasar de unas fórmulas a otras. La lógica modal, como ya se ha dicho, es una extensión de la lógica clásica, así que se toma una de las axiomatizaciones de esta y se añaden algunos axiomas específicos a la lógica modal. El sistema más débil que se suele utilizar en lógica modal es el sistema T, cuyos axiomas son los siguientes:

Ax1. $p \to (q \to p)$

Ax2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

Ax3. $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

Ax4. (T)[13] $\Box p \to p$

Ax5. (K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

[13]Entre paréntesis se dan los nombres que estos axiomas reciben en Bull y Segerberg (1984; p. 21).

Los tres primeros axiomas son los axiomas de Church[14] para la lógica clásica, mientras que el cuarto y el quinto axioma son específicos a la lógica modal. El axioma K es válido en todos los sistemas normales, que son los más utilizados. El axioma T, por su parte, se añade para permitir la inferencia intuitivamente válida de que si algo es necesariamente verdadero, entonces es verdadero. Es el axioma característico del sistema T, de ahí su nombre. Asimismo, para derivar otras fórmulas a partir de estos axiomas, hace falta un conjunto de reglas de deducción. Los resultados de estas demostraciones se denominan *teoremas* y el término general que incluye axiomas y teoremas es *tesis*. Las reglas de deducción de T son:

- Sustitución uniforme (SU). Si en una tesis se sustituyen todas las apariciones cualquier variable proposicional[15] por cualquier fbf, la fórmula resultante es también tesis.
- *Modus ponens* (MP). Si $\alpha \to \beta$ y α son tesis, entonces también lo es β.
- Necesariedad (N). Si α es una tesis, entonces también lo es $\Box\alpha$.

La última de estas reglas es específica a la lógica modal y se añade para reflejar la idea intuitivamente válida de que un teorema es una verdad necesaria. En los axiomas y las reglas listados solo aparecen los operadores $\neg$, $\to$ y $\Box$. El resto de operadores se introducen por medio de las siguientes definiciones:

- $p \vee q =_{Df} \neg p \to q$
- $p \wedge q =_{Df} \neg(\neg p \vee \neg q)$

[14] Como se dijo antes, el uso de sistemas axiomáticos en lógica se expandió tras la publicación de los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead en 1912. En esta obra, Russell y Whitehead dan un conjunto de cuatro axiomas que permiten demostrar todas y solo las tautologías de la lógica clásica. Sin embargo, hay otras axiomatizaciones con esta característica, como los axiomas 1-3 aquí dados, que se deben al lógico Alonzo Church. La elección de una axiomatización u otra es cuestión de preferencia, puesto que todas tienen el mismo potencial demostrativo. Escojo los axiomas de Church porque son tres, menos que los axiomas de *Principia Mathematica*.

[15] Una variable proposicional es una letra que representa una proposición. Por ejemplo, la letra p podría representar la proposición "está lloviendo." Generalmente, estas proposiciones no son interpretadas, puesto que la lógica de proposiciones estudia la inferencia válida independientemente del signficado o el contenido de las oraciones que se utilizan.

- $p \leftrightarrow q =_{Df} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $\Diamond p =_{Df} \neg\Box\neg p$

Algunos teoremas relevantes del sistema T son[16]:

T1. $p \rightarrow \Diamond p$

T2. $\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$

T3. $\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$

T4. $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$

T5. $\Diamond(p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$

T1 afirma que toda proposición verdadera es posiblemente verdadera. T2 dice que la necesidad se distribuye con respecto a la conjunción, o, en otras palabras, que "es necesario que p y q" es equivalente a "es necesario que p y es necesario que q." Algo análogo sucede con la posibilidad, la disyunción y T3. En cambio, en T4 y T5 se observa una implicación, pero no una equivalencia. Si lo fueran, las nociones modales no funcionarían como se desea, ya que "o bien el cielo es azul, o bien no lo es" es una verdad necesaria, pero de esto no se sigue que o bien sea necesario que el cielo sea azul, o bien sea necesario que no lo sea, puesto que el color del cielo es un hecho meramente contingente. La misma sustitución constituiría un contraejemplo a la conversa[17] de T5.

En la semántica de mundos posibles actualmente usada para evaluar la validez de las fórmulas, se parte de un conjunto de mundos en los que se evalúan las fórmulas como verdaderas o falsas, y de una relación binaria de accesibilidad entre estos mundos. La validez de las fórmulas se define de manera distinta para los distintos sistemas, lo que se consigue exigiendo diferentes tipos de relación. En el caso del sistema T, la relación entre mundos debe ser reflexiva, lo que quiere decir que todo mundo debe estar relacionado consigo mismo.

[16] Para una demostración detenida de estos y otros teoremas, véase Hughes y Cresswell (1968/1973; pp. 39-45).

[17] Dada una implicación, $\alpha \rightarrow \beta$, la conversa de esa implicación es $\beta \rightarrow \alpha$.

3.1.2. El sistema S4

Una característica del sistema T es que en él es muy difícil lidiar con secuencias de más de un operador modal. ¿Qué hacer con fórmulas como $\Box\Box p$ ("es necesario que sea necesario que p")? Intuitivamente, es complicado analizarlas, puesto que no está del todo claro qué condiciones se deben cumplir para que una proposición sea necesariamente necesaria. El sistema T no permite hacer nada con ellas más que dejarlas como están. Ahora bien, si consideramos que el operador $\Box$ representa la necesidad lógica, ¿no sería aceptable sostener que $\Box\Box p$ es equivalente a $\Box p$? La proposición "un cuadrado tiene cuatro lados" es necesariamente verdadera, y el que tenga esta característica no parece ser contingente. Parece, entonces, una postura razonable la de que "cuandoquiera que una proposición sea verdadera por necesidad lógica no se debe nunca a accidente casual el que lo sea." (Hughes y Cresswell, 1968/1973; p. 48). Como consecuencia de esto, se podría querer un sistema en el que fuera demostrable que $\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$. La implicación $\Box\Box p \rightarrow \Box p$ es válida en T, dado que es simplemente una instancia del axioma T. Sin embargo, su conversa no es demostrable en este sistema, por lo que en el nuevo sistema habría que añadirla como axioma. Así, definimos la base del sistema S4 tomando todos los axiomas y reglas de T y añadiendo el nuevo axioma:

Ax6. (4) $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

Evidentemente, todos los teoremas de T son también teoremas de S4, ya que todos los axiomas de T están disponibles también en S4. Algunos teoremas destacables de S4, que son demostrables gracias al nuevo axioma, son[18]:

T6. $\Box p \leftrightarrow \Box\Box p$

T7. $\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Diamond p$

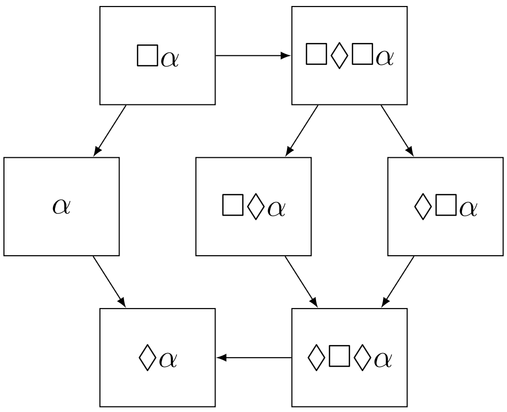
T8. $\Box\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond p$

T9. $\Diamond\Box p \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box p$

T6 significa que cualquier secuencia de $\Box$ puede ser reducida a un solo operador de necesidad. Lo mismo sucede con las cadenas de $\Diamond$ y T7. Finalmente, T8 y T9

[18]Para su demostración, véase Hughes y Cresswell (1968/1973; pp. 50-51)

son relevantes porque gracias a ellos cualquier sucesión de cuatro o más operadores modales puede ser reducida a otra con menos operadores. Definiendo una modalidad como “una secuencia ininterrumpida de cero o más operadores monádicos ($\neg$, $\Box$, $\Diamond$)” (Hughes y Cresswell, 1968/1973; p. 51), los teoremas listados muestran que S4 solo tiene 14 modalidades no equivalentes entre sí, a saber, α, $\Box\alpha$, $\Diamond\alpha$, $\Box\Diamond\alpha$, $\Diamond\Box\alpha$, $\Box\Diamond\Box\alpha$ y $\Diamond\Box\Diamond\alpha$, y sus negaciones. La relación entre las modalidades afirmativas de S4 se muestra en el siguiente diagrama, reelaborado de Hughes y Cresswell (1968/1973; p. 52):



En este diagrama, las flechas representan implicaciones demostrables en el sistema. Por ejemplo, es demostrable en S4 que $p \to \Diamond p$, por lo que hay una flecha desde α hasta $\Diamond\alpha$. Un diagrama similar para las modalidades negativas se obtiene negando todas las fórmulas que aparecen en el diagrama e invirtiendo las flechas.[19]

Semánticamente, el sistema S4 se caracteriza por una relación reflexiva —que valida el axioma T— y transitiva. Una relación R es transitiva si para todo x, para todo y, para todo z se cumple que $(xRy \land yRz) \to xRz$.[20]

3.1.3. El sistema S5

Se podría querer reducir aún más el número de modalidades no equivalentes. Una manera de hacer esto es tomando como axioma la fórmula $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ (“si es posible que p, entonces es necesario que sea posible que p”). Aceptar esta fórmula significaría considerar que cualquier proposición posible lo es por necesidad. Según Hughes y

[19] Dado que en lógica clásica, $\alpha \to \beta$ es equivalente a $\neg\beta \to \neg\alpha$.

[20] Un ejemplo de relación transitiva que puede resultar familiar es la relación $<$ (menor que) entre números. Si $x < y$ y, además, $y < z$, entonces se cumplirá que $x < z$, sean cuales sean los números x, y y z

Cresswell (1968/1973) "algunos filósofos han mantenido no solamente que todas las proposiciones necesarias son necesariamente necesarias, sino que si una proposición posee cualquier característica modal (necesidad, posibilidad, imposibilidad, contingencia), posee esa característica por necesidad." (p. 49). La adición de esta fórmula, que no es demostrable en S4, reflejaría esta postura filosófica, permitiendo estudiar de manera formal las consecuencias lógicas de la misma. Así, definimos el sistema S5 tomando todos los axiomas y reglas de T y añadiendo la fórmula mencionada como axioma:

Ax7. (E) $\Diamond p \to \Box\Diamond p$

Todos los teoremas de T son claramente teoremas de S5, ya que los axiomas de aquel siguen disponibles en este. Sin embargo, la relación entre las tesis de S4 y S5 no parece fácil de determinar a simple vista. Para establecer esta relación, se listan algunos teoremas de S5:

T10. (4) $\Box p \to \Box\Box p$

T11. $\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond p$

T12. $\Box p \leftrightarrow \Diamond\Box p$

Dado que T10 es el axioma característico de S4, y que es un teorema de S5, T10 muestra que toda tesis de S4 es también tesis de S5, o, en otras palabras, que S5 contiene a S4. T11 y T12 son relevantes porque afirman que, en S5, toda fbf con una secuencia de operadores modales alternados es reductible a una fbf con solo el último de estos operadores. Como consecuencia de T6, T7, T11 y T12, el sistema S5 contiene solamente seis modalidades no equivalentes entre sí: α, $\Box\alpha$, $\Diamond\alpha$, y sus negaciones. La relación entre las modalidades de S5 se muestra en el siguiente diagrama, reelaborado de Dummett y Lemmon (1959; p. 251):

$$\boxed{\Box\alpha} \longrightarrow \boxed{\alpha} \longrightarrow \boxed{\Diamond\alpha}$$

Las flechas, al igual que antes, representan implicaciones demostrables en S5. La relación entre las modalidades negadas se consigue negando las fórmulas de este diagrama e invirtiendo las flechas.

A nivel semántico, S5 se caracteriza porque la relación entre mundos es una relación de equivalencia, esto es, una relación reflexiva, transitiva y simétrica. Una relación R es simétrica si para todo x, para todo y, se cumple que $xRy \rightarrow yRx$. En otras palabras, una relación binaria es simétrica si al invertir los elementos de una oración verdadera, la proposición resultante sigue siendo verdadera.[21]

3.2. Los sistemas entre S4 y S5

En el apartado 3.1 se expusieron los sistemas de lógica modal más comunes, T, S4 y S5, pero existen otros. En este apartado se presentarán varios sistemas más fuertes que S4 pero más débiles que S5, que son especialmente interesantes por sus aplicaciones a varias lógicas aparte de la modal, lo que se comentará en el siguiente apartado. Los axiomas característicos de estos sistemas son fórmulas complejas y difíciles de interpretar de manera intuitiva, ya que tienen muchos operadores modales unos dentro de otros. En cuanto a su semántica, las propiedades de la relación entre mundos que harían que se validen los axiomas de estos sistemas son, asimismo, difíciles de hallar, aunque algunas de estas propiedades sí se han encontrado.

- **S4.1**
  - Sobociński (1964) define el sistema S4.1 añadiendo a S4 el axioma[22]:
  - N1. $((p \strictif \Box p) \strictif p) \rightarrow (\Diamond\Box p \strictif p)$
- **S4.1.1**
  - Por otro lado, Sobociński (1964) también define el sistema S4.1.1 añadiendo a S4 el axioma:
  - M1. $((p \strictif \Box p) \strictif \Box p) \rightarrow (\Diamond\Box p \rightarrow \Box p)$
- **S4.2**
  - Peter Geach (1973) define el sistema S4.2 como el resultado de añadir a S4 el axioma:

[21] Por ejemplo, la relación "x es hermano (o hermana) de y" es simétrica, puesto que si x es hermano/a de y, entonces y será también hermano/a de x.

[22] Los axiomas de este apartado se listan con los nombres que reciben en Sobociński (1970).

- G1. $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$

- **S4.2**
  - Peter Geach (1973) define el sistema S4.2 como el resultado de añadir a S4 el axioma:
  - G1. $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$
  - Dummett y Lemmon (1959) demuestran que este sistema tiene exactamente 10 modalidades no equivalentes. La relación entre ellas es la siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\Diamond\Box\alpha} \arrow[rr] & & \boxed{\Box\Diamond\alpha} \arrow[dr] & \\
\boxed{\Box\alpha} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \boxed{\alpha} \arrow[rr] & & \boxed{\Diamond\alpha}
\end{tikzcd}$$

- **S4.2.1**
  - Sobоćinski (1964) define el sistema S4.2.1 añadiendo a S4 el axioma N1 antes mencionado.

- **S4.3**
  - Geach (1973) define el sistema S4.3 añadiendo a S4 el axioma[23]:
  - D1. $\Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$
  - Dummett y Lemmon (1959) demuestran que este sistema contiene a S4.2 y que S4.3 tiene las mismas modalidades que el sistema S4.2.

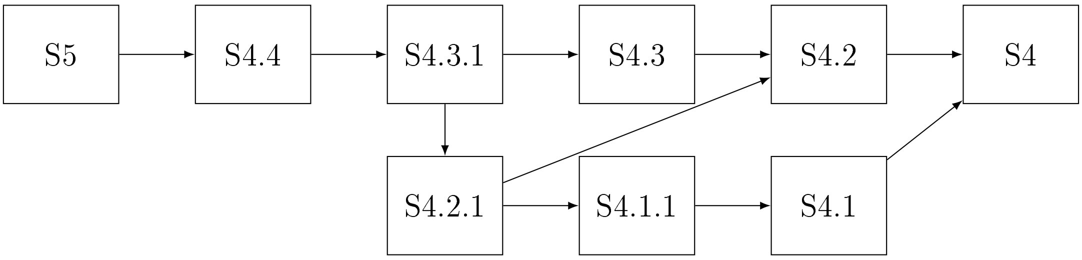
- **S4.3.1**
  - Según Sobоćinski (1964), añadiendo a S4.3 el axioma N1 se obtiene el sistema S4.3.1.

- **S4.4**

[23] Este sistema se suele atribuir a Hintikka, que lo obtuvo añadiendo el axioma (D5) $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \strictif (\Diamond(p \wedge \Diamond q) \vee \Diamond(q \wedge \Diamond p))$. Esta axiomatización, según Geach (1973; p. 8), da como resultado el mismo sistema. Escojo el axioma de Geach (1973) porque es una fórmula más simple.

- Finalmente, Sobоćinski (1964) define el sistema S4.4 añadiendo a S4 el axioma:
- R1. $p \to (\Diamond\Box p \to \Box p)$

Sobоćinski (1964) demuestra que la relación de contención entre estos sistemas es la que se indica en el siguiente diagrama, reelaborado de Hughes y Cresswell (1968/1973; p. 219):



Aquí, las flechas representan contención. S5 contiene a S4.4, que a su vez contiene a S4.3.1 y así sucesivamente.

4. Discusión y posicionamiento

La lógica modal es, en realidad, un instrumento muy versátil, dada la gran cantidad de sistemas de lógica modal disponibles. En el presente trabajo se ha hablado de lógica modal en un sentido estricto, entendiendo esta como un estudio de las nociones modales *aléticas*, esto es, las nociones de "posibilidad" y "necesidad" tal y como se definieron en el apartado 2.1 del trabajo. Sin embargo, es habitual hablar también de lógica modal en un sentido más amplio, incluyendo el estudio de otras nociones modales distintas de la necesidad y la posibilidad. Según la *Stanford Encyclopedia of Philosophy*,

> la lógica modal se puede ver en general como la lógica de diferentes tipos de modalidades, o modos de verdad: alética ("necesariamente"), epistémica ("es sabido que"), deóntica ("debe ser el caso que"), o temporal ("siempre será el caso que"), entre otras. Características comunes de estos operadores justifican la etiqueta común. En el estido estricto, sin embargo, el término "lógica modal" se reserva para la lógica de las

modalidades aléticas[24] (Ballarin, 2023).

Los operadores comunes en las lógicas modales más populares se resumen en el siguiente cuadro, reelaborado de Garson (2024):

Lógica	Símbolo	Expresión modal
Modal (alética)	$\Box$	Es necesario que
	$\Diamond$	Es posible que
Deóntica	O	Es obligatorio que
	P	Es permisible que
	F	Está prohibido que
Temporal	G	Será siempre el caso que
	F	Será el caso que
	H	Ha sido siempre el caso que
	P	Fue el caso que
Doxástica	Bx	x cree que
Epistémica	Kx	x sabe que

El objetivo de este apartado es investigar las aplicaciones de los sistemas entre S4 y S5 a estas otras lógicas.

4.1. Lógica temporal y los sistemas S4.3 y S4.3.1

La lógica temporal pretende analizar el razonamiento sobre el tiempo. Un autor pionero en la lógica temporal moderna es Arthur Norman Prior, y una obra suya de referencia es *Time and Modality*, publicada en 1957. En esta obra, Prior concibe las proposiciones de una manera poco común en lógica formal moderna, en tanto que considera que "el valor de verdad de una proposición puede ser diferente en tiempos diferentes."[25] (Prior, 1957; p. 8). Prior plantea un sistema de lógica modal-temporal inspirado en las definiciones de las modalidades dadas por Diodoro Cronos que se explicaron en el apartado 2.3 de este trabajo. Para ello, propone leer $\Box p$ como "es y será siempre el caso que p", y $\Diamond p$ como "es o será el caso que p." Después de justificar su relectura de los operadores modales, esboza una semántica multivaluada para

[24] Esta cita es de traducción propia.

[25] Esta y todas las citas directas de este texto son traducciones propias.

estos operadores. Este esbozo parte de la ficción de que existen solo dos momentos de tiempo, hoy y mañana, y utiliza un conjunto de cuatro valores de verdad, con la interpretación dada a continuación:

1. Verdadero hoy y mañana.
2. Verdadero hoy, falso mañana.
3. Falso hoy, verdadero mañana.
4. Falso hoy y mañana.

Tras esto, Prior plantea las tablas de verdad de los operadores $\wedge$, $\neg$, $\Diamond$ y $\Box$ a partir del significado que les quiere dar. Las tablas de verdad para el resto de operadores se hallarían a partir de estas teniendo en cuenta las definiciones dadas en el apartado 3.1 de este trabajo. La tabla es la siguiente:

$\wedge$	1	2	3	4	$\neg$	$\Diamond$	$\Box$
1	1	2	3	4	4	1	1
2	2	2	4	4	3	2	4
3	3	4	3	4	2	1	3
4	4	4	4	4	1	4	4

Define una fórmula válida como aquella cuyo valor de verdad sea 1 para cualquier asignación de valores a sus variables. Esta idea es generalizable a una semántica con infinitos valores de verdad, que reflejaría un tiempo infinito, y que, según Prior, validaría solo las tesis de S4. De esta manera, Prior considera que el sistema S4 es la formalización del tiempo diodoreano. Sin embargo, esto resultó ser erróneo, y Prior se retractó en un artículo posterior. En realidad, los sistemas que mejor reflejan la semántica que Prior planteaba son S4.3 y S4.3.1, dependiendo de si se está trabajando el tiempo como algo continuo o discreto. Entender el tiempo como continuo significa considerar que entre dos momentos de tiempo siempre se puede encontrar un tercero, mientras que considerar el tiempo como algo discreto elimina este requisito, de manera que todos los momentos tratados son distintos entre sí.[26]

[26]Esta concepción del tiempo podría ser útil si la unidad de medida usada fuera, por ejemplo, el día, ya que entre ellos no existe continuidad: cuando acaba un día, comienza el siguiente, sin ningún punto medio entre ellos.

Según Hughes y Cresswell (1968/1973; p. 218), si se quiere trabajar el tiempo como algo continuo, se utilizaría el sistema S4.3, y el sistema S4.3.1 sería útil si se quiere entender el tiempo como discreto.

4.2. Lógica epistémica y el sistema S4.2

El sistema S4.2 ha encontrado cierta utilidad en lógica epistémica. Stalnaker (2006) considera que este sistema se puede utilizar para definir una lógica que permita estudiar los razonamientos acerca de la creencia y el conocimiento. Stalnaker (2006) parte de cinco de ideas sobre la creencia que parece razonable aceptar, por lo menos en una visión algo idealizada de los sujetos, por lo que establece un sistema con cinco axiomas. En primer lugar, "los agentes tienen acceso introspectivo a sus creencias: si creen que ϕ, entonces saben que lo hacen"[27] (Stalnaker, 2006; p. 179). Asimismo, parece razonable aceptar que si alguien no tiene una creencia, entonces sabe que no la tiene. Por otro lado, se suele considerar el conocimiento como un tipo de creencia específico, por lo que se podría querer aceptar que si alguien sabe que ϕ, entonces cree que ϕ. El cuarto axioma se basa en la idea de que los sujetos que se está tratando son "lógicamente ominiscentes", por lo que se puede suponer que "sus creencias serán consistentes." (Stalnaker, 2006; p. 179). Bajo este supuesto, entonces, sería aceptable creer que si un sujeto cree que ϕ, entonces no cree que no ϕ, puesto que ϕ y $\neg\phi$ son creencias contradictorias. Finalmente, Stalnaker (2006) apunta que el concepto de creencia que pretende estudiar es el de "certeza subjetiva", por lo que el autor también acepta que "creer implica creer que uno sabe" (p 179). Aceptando estos cinco principios, y usando K como operador de conocimiento ("saber que") y B como operador de creencia ("creer que"), el sistema axiomático planteado por Stalnaker consta de los siguientes axiomas:

Axioma	Significado
$B\phi \to KB\phi$	Si un sujeto cree que ϕ, entonces sabe que cree que ϕ.
$\neg B\phi \to K\neg B\phi$	Si un sujeto no cree que ϕ, entonces sabe que no cree que ϕ.
$K\phi \to B\phi$	Si un sujeto sabe que ϕ, entonces cree que ϕ.
$B\phi \to \neg B\neg\phi$	Si un sujeto cree que ϕ, entonces no cree que no ϕ.
$B\phi \to BK\phi$	Si un sujeto cree que ϕ, entonces cree que sabe que ϕ.

[27] Esta y todas las citas directas de este texto son traducciones propias.

Con estas fórmulas se pueden demostrar todos los axiomas de S4. También es demostrable en el sistema de Stalnaker que “creer que ϕ” ($B\phi$) es equivalente a “no saber que no ϕ” ($\neg K \neg \phi$). Si se sustituye esta equivalencia en la fórmula $B\phi \to \neg B \neg \phi$, se obtiene el axioma característico de S4.2, por lo que el sistema de lógica epistémica planteado por Stalnaker es el sistema S4.2.

En cuanto a la semántica, el tipo de relación entre mundos que hace falta para que se valide el axioma de S4.2 se suele llamar convergente, que es una relación R que cumple la siguiente condición: para todo x, y, z, si se cumple que $xRy \wedge xRz$, entonces existe un w tal que $yRw \wedge zRw$. Esto quiere decir que, dado un mundo, si hay dos mundos distintos relacionados con él, entonces hay otro mundo relacionado con esos dos.

5. Conclusiones y vías abiertas

En este trabajo, he querido investigar los sistemas de lógica modal entre S4 y S5. Para ello, se ha hecho un recorrido histórico del desarrollo de la lógica modal, pasando por los antecedentes en la Antigüedad y explicando el surgimiento y desarrollo de la lógica modal en la actualidad. Tras esto, se explicaron los sistemas más habituales de lógica modal, T, S4 y S5, y sus propiedades deductivas y semánticas. En particular, se comentaron los axiomas que se utilizan para definir estos tres sistemas y las posibles razones por las que se podría querer aceptar dichas fórmulas. Se vio después que los sistemas S4 y S5 contienen principios de reducción, que permiten reducir el número de operadores modales en una fórmula, de manera que estos sistemas tienen menos modalidades que el sistema T. Los sistemas entre S4 y S5 son más difíciles de caracterizar, pero tienen aplicaciones interesantes en lógica temporal y epistémica, algunas de las cuales se explicaron en el apartado 4. En esta conclusión, se listarán una serie de temas que quedaron fuera de este texto, pero que se podrían continuar investigando de cara a futuros trabajos.

En cuanto a la parte histórica del trabajo, no se investigó nada sobre la lógica modal en la Edad Media o la Modernidad, puesto que no hay tanta literatura disponible al respecto. Asimismo, la obra de Hugh MacColl y sus aportaciones a la lógica modal podrían ser también un tema interesante de estudio.

En el presente trabajo, tampoco se ha hablado de la lógica modal como instrumento para el análisis formal de argumentos filosóficos de diversa índole. La variedad de lógicas modales que se ha ido desarrollando ha sido muy fructífera para estudiar la argumentación filosófica, desde el tratamiento metafísico que de las nociones de "necesidad" o "posibilidad" hasta argumentos y teorías sobre el conocimiento. Según Smets y Velázquez-Quesada (2023), "las lógicas modales son particularmente apropiadas para estudiar una amplia gama de conceptos filosóficos, incluyendo diferentes tipos de creencia, obligaciones, conocimiento, tiempo, espacio, intenciones, deseos, obligaciones, evidencia, preferencias y diversos tipos de acciones ónticas y epistémicas, entre muchos otros."[28] Especialmente interesante es la lógica que combina las diferentes nociones modales entre sí, investigando, por ejemplo, la relación entre el conocimiento y la creencia, o el conocimiento teniendo en cuenta varios sujetos.[29] Esto daría lugar a una lógica multi-modal, que podría ayudar a comprender las interacciones y relaciones entre distintos conceptos filosóficos. La lógica multimodal es un campo de estudio muy amplio y con mucho potencial para el análisis filosófico, por lo que puede resultar ser un tema de estudio interesante.

Por otro lado, la lógica modal cuantificada, cuyo estudio fue inaugurado por Ruth Barcan Marcus, también ha quedado fuera del trabajo, ya que solo se ha hablado de lógica modal proposicional. Su tesis doctoral y los artículos que publicó después en el *Journal of Symbolic Logic* fueron los primeros trabajos académicos sobre lógica modal cuantificada. Según Cresswell (2001),

> "es quizás sorprendente que, aunque la lógica modal en la forma en la que la conocemos hoy data de un artículo en *Mind* de C. I. Lewis en 1912, no fue hasta 1946 que hay una consideración en papel de lo que pasa cuando se añaden cuantificadores y predicados."[30] (p. 357).

Las contribuciones de Barcan al desarrollo de la lógica son muy importantes y una investigación histórica de estas contribuciones podría ser relevante para la historia de la lógica.

[28] Esta cita es de traducción propia.

[29] En el apartado 4.2 se trató lógica epistémica asumiendo un único sujeto de conocimiento. Sin embargo, se podría trabajar una lógica epistémica con más de un agente.

[30] Esta cita es de traducción propia.

El trabajo de Marcus y la lógica que de ahí se desarrolló es, asimismo, muy importante para la reflexión y el debate filosófico del último siglo, pues la interacción entre las nociones modales y las expresiones cuantificadas —proposiciones como "todos los A son B"— ha suscitado muchos problemas filosóficos y formales. Una de estas cuestiones es la fórmula de Barcan, $\Diamond \exists x Px \to \exists x \Diamond Px$ ("si es posible que exista algo con una propiedad P, entonces existe algo para lo que es posible tener la propiedad P"), que Barcan tomó como axioma en su trabajo. La validez de esta fórmula en lógica temporal es cuestionable. Prior (1957) propone un contraejemplo a la lectura temporal de la fórmula —si será alguna vez que alguien viajará a la Luna, entonces hay (actualmente) alguien que viajará a la Luna—, pero "supongamos que de hecho alguien viajará a la Luna algún día, pero no alguien que exista ahora." (p. 26). En realidad, aceptar o no esta fórmula en un sistema modal de primer orden hace que la semántica cambie mucho. En concreto, si se permite que el conjunto de objetos que existen varíe de un mundo a otro, entonces la fórmula puede no ser válida, pero si el conjunto de objetos existentes se mantiene fijo, entonces la fórmula sí es válida.[31] La versión alética de la fórmula ha dado lugar a diferentes posturas filosóficas en torno a su validez, por lo que es una fórmula muy debatida. Desde una postura, denominada actualismo, se considera que el conjunto de objetos no debería variar de mundo a mundo, pero otros filósofos cuestionan esta visión. La propia Barcan suscribe la posición actualista y sus textos en defensa de esta postura —así como el resto del debate en torno a la fórmula— es un tema muy interesante que me gustaría explorar.

6. Bibliografía citada

Ballarin, R. (2023). *Modern Origins of Modal Logic.* Stanford Encyclopedia of Philosophy. https://plato.stanford.edu/entries/logic-modal-origins/

Bobzien, S. (2020). *Ancient Logic.* Stanford Encyclopedia of Philosophy. https://plato.stanford.edu/entries/logic-ancient/

[31] Esto es lo que sucede en el contraejemplo de Prior: la persona que viaje a la Luna podría nacer en el futuro, lo que invalida la fórmula.

Bull, R. A. y Segerberg, K. (1984). Basic Modal Logic. En Gabbay, D. M., y Guenthner, F. (Eds.), *Handbook of Philosophical Logic* (1 ed., Vol. 2, pp. 1-88). Kluwer Academic Publishers.

Cresswell, M. J. (2001). Ruth Barcan Marcus (1921-). En Martinich, A. P. y Sosa, D. (Eds.), *A Companion to Analytic Philosophy.* (pp. 357-360). Blackwell.

Dummett, M. A. E. y Lemmon, E. J. (1959). Modal Logics between S4 and S5. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 5, 250-264.

Garson, J. (2024). *Modal Logic.* Stanford Encyclopedia of Philosophy. https://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/

Geach, P. T. (1973). *Bulletin of the Section of Logic*, 2(1), 8-10.

Hughes, G. E. y Cresswell, M. J. (1973). *Introducción a la lógica modal* (Trad. E. Guisán Seijas). Editorial Tecnos. (Trabajo original publicado en 1968).

Kneale, W. y Kneale, M. (1962). *The Development of Logic.* Oxford University Press.

Prior, A. N. (1957). *Time and Modality.* Oxford University Press.

Smets, S. y Velázquez-Quesada, F. (2023). *Philosophical Aspects of Multi-Modal Logic.* Stanford Encyclopedia of Philosophy. https://plato.stanford.edu/entries/phil-multimodallogic/

Soboćinski, B. (1964). Modal System S4.4. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 5(4) 305-312.

Soboćinski, B. (1970). Certain Extensions of Modal System S4. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 11(3), 347-368.

Stalnaker, R. (2006). On Logics of Knowledge and Belief. *Philosophical Studies*, 128(1) 169-199.

7. Anexo: reglas de formación de fbfs

Una fórmula está bien formada si se puede generar utilizando las siguientes reglas:

1. Cualquier variable proposicional es una fbf.

2. Si α es una fbf, entonces también lo son $\neg\alpha$, $\Diamond\alpha$ y $\Box\alpha$

3. Si α y β son fbfs, entonces también lo son $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ y $(\alpha \leftrightarrow \beta)$

4. Ninguna secuencia de símbolos que no resulte de la aplicación recursiva de las reglas 1-3 es fbf.

Para mayor facilidad a la hora de leer y escribir las fórmulas, me permito, como es habitual, suprimir los paréntesis exteriores de una fbf. Así, la fórmula $((p \rightarrow q) \wedge r)$ quedaría $(p \rightarrow q) \wedge r$.

8. Anexo: notación polaca

En su libro, Arthur Prior utiliza la notación ideada por Jan Łukasiewicz, que se conoce como notación polaca. En ella, los operadores se escriben utilizando letras mayúsculas y las variables proposicionales se representan con letras minúsculas. La notación polaca es una notación de prefijo, lo que quiere decir que el operador se coloca delante de los operandos, no entre ellos, como se hace en el resto de notaciones comunes. Teniendo en cuenta que el operador $\rightarrow$ se simboliza como C y el operador $\Box$ se simboliza como L, la fórmula $\Box p \rightarrow \Box\Box p$, por ejemplo, sería $CLpLLp$ en notación polaca. Los símbolos utilizados por Prior y la notación usada para ellos en este trabajo se resumen en el siguiente cuadro:

Notación polaca	Notación usada en este trabajo
Np	$\neg p$
Kpq	$p \wedge q$
Apq	$p \vee q$
Cpq	$p \rightarrow q$
Epq	$p \leftrightarrow q$
Lp	$\Box p$
Mp	$\Diamond p$