

Propagación de la luz en medios anisótropos

Departamento de Física
Trabajo Fin de Grado
Curso 2014-2015

Alumna: Ana Hernández Noda
Tutor: Dr. Cecilio Hernández Rodríguez

La Laguna a 1 de Junio de 2015

ÍNDICE

1. Introducción
2. Fundamentos de la propagación de ondas planas en medios dieléctricos, homogéneos y anisótropos
 - 2.1. El Tensor dieléctrico y el elipsoide Fresnel
 - 2.2. La indicatriz óptica
 - 2.3. Propagación de ondas monocromáticas planas
 - 2.4. Modos normales de propagación. Birrefringencia
 - 2.5. Clasificación óptica de los cristales. Superficies de onda
 - 2.6. Relación entre el vector de propagación de la onda y de la energía
3. Índices de refracción de los cristales uniáxicos y biáxicos evaluados para una dirección de propagación arbitraria
 - 3.1. Cálculo a partir de la *ecuación de Fresnel*
 - 3.2. Cálculo a partir de la *indicatriz óptica*
4. Refracción doble en cristales uniáxicos. Aplicación a un cristal de calcita y otro de cuarzo
 - 4.1. Cristal uniáxico cuando el eje óptico rota en el plano de incidencia
 - 4.1.1. Propagación de la onda ordinaria y extraordinaria
 - 4.1.2. Dispersión angular de la onda extraordinaria
 - 4.1.3. Propagación del rayo extraordinario
 - 4.1.4. Ángulo de la refracción doble “walk-off”
 - 4.1.5. Ángulo máximo de refracción doble en incidencia normal
 - 4.1. Propagación del rayo extraordinario para una orientación (ψ, ϕ) arbitraria del eje óptico
5. Conclusiones
6. Referencias

Abstract

A detailed review of the fundamentals of propagation of plane waves in dielectric, homogenous and anisotropic mediums, and of the properties of optically anisotropic materials is presented. A mathematical expression for the refractive indices is made for uniaxial and biaxial crystals, but attention is particularly focused on the uniaxial case. Huygens' construction of the double refraction using the geometrical method of the index surfaces has been studied and applied to uniaxial crystals of calcite and quartz when the optic axis is parallel to the plane of incidence. The incidence walk-off angle for any arbitrary uniaxial crystal orientation has been derived and temperature-dependent dispersion curves at normal incidence for quartz and calcite crystals are obtained for a wavelength range of 350–750 nm.

1. Introducción

Los contenidos de Óptica en el Plan de Estudios de Graduado/a en Física por la ULL, si bien no contempla en sus descriptores la propagación en medios dieléctricos homogéneos y anisótropos (DHA), deben ser una continuación natural de la teoría básica de propagación en medios dieléctricos, homogéneos e isotropos (DHI) impartida en tercer curso del Grado en Física, justificándose así el Trabajo Fin de Grado realizado.

El estudio de la propagación de la luz, considerada como la propagación de ondas electromagnéticas planas, a través de un medio anisótropo es de gran interés fenomenológico desde que Erasmus Bartholinus en 1670 describiera por primera vez el fenómeno de la doble refracción de la luz en una variedad incolora y transparente de calcita denominada espato de Islandia. Más tarde, Huygens establece las bases de la teoría ondulatoria de la luz en 1690, que le llevó a dar una interpretación estructural de la doble refracción.

Su importancia es debida a las aplicaciones tecnológicas, como la fabricación de polarizadores, retardadores o compensadores, así como su uso en Óptica No Lineal (NLO). Este trabajo, realizado precisamente en este año 2015 proclamado por la ONU, año internacional de la luz, sigue un índice que

comienza con los fundamentos físicos necesarios para entender cómo se propaga la luz en un medio anisótropo. Se define la birrefringencia como propiedad óptica fundamental y se clasifican los medios anisótropos, en uniáxicos y biáxicos, atendiendo a su grado de simetría, definiendo el eje óptico y describiendo su superficie de onda. Se calcula, a continuación, la doble refracción que sufre el rayo de luz al atravesar el cristal uniáxico o biáxico, mediante la construcción geométrica de Huygens para cualquier orientación del eje óptico del cristal. Se realizan distintas simulaciones, cambiando el ángulo de incidencia, la longitud de onda o la temperatura de algunos materiales. Finalmente se describen algunas aplicaciones básicas de interés tecnológico utilizadas en dispositivos ópticos.

2. Fundamentos de la propagación de ondas planas en medios dieléctricos, homogéneos y anisótropos.

Synopsis

There are many materials whose optical properties depend on the direction of propagation as well as polarization of the light waves. They are the anisotropic materials as for example the crystals, so that the propagation of light depends on its electric field of the wave, i.e., on its polarization. This phenomenon is called natural optic anisotropy. These optically anisotropic materials exhibit many peculiar optical phenomena, as double refraction and polarization effects. Understanding how light propagates in these materials is necessary for the design of different devices. In this first chapter all the basic concepts are introduced. The dielectric tensor is presented and normal modes of propagation of light are studied using Maxwell's equations. Then, a geometrical approach using the index ellipsoid is presented and illustrated and optical classification of crystals is discussed in terms of their symmetry properties. Finally, the fundamental concept of birefringence is introduced and a relation between wave vector and energy propagation is made.

2.1. El Tensor dieléctrico y el Elipsoide de Fresnel.

En un medio isotrópico, el vector campo eléctrico \mathbf{E} induce un vector desplazamiento eléctrico \mathbf{D} o un vector polarización \mathbf{P} , de tal forma que la

relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} , o \mathbf{P} y \mathbf{E} viene gobernada por la permitividad dieléctrica ε o susceptibilidad eléctrica χ , respectivamente.

Estas constantes son independientes de la dirección de propagación de la onda electromagnética, sin embargo, en los medios anisótropos la relación entre el campo eléctrico \mathbf{E} de la onda incidente y el desplazamiento \mathbf{D} inducido en el medio, depende de la dirección de \mathbf{E} , estando ambos vectores no paralelos en general, aunque pudieran estarlo en algunas direcciones de propagación particulares. La relación entre ambos vectores, en componentes cartesianas, tendrá un carácter tensorial de segundo rango de la forma

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j, \quad (2.1-1)$$

donde ε_{ij} es el *tensor de permitividad dieléctrica*, y donde se aplica el convenio de Einstein sobre la suma de los subíndices que aparecen repetidos.

Este tensor, llamado también *tensor dieléctrico*, es real y simétrico para medios homogéneos, no magnéticos, no absorbentes, no conductores y sin actividad óptica. Mediante la diagonalización del tensor dieléctrico, se puede obtener el sistema de ejes principales (ejes dieléctricos principales), quedando la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} de la forma

$$D_i = \varepsilon_i \delta_{ij} E_j, \quad (2.1-2)$$

quedando expresada en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \quad (2.1-3)$$

donde ε_1 , ε_2 y ε_3 son las permitividades dieléctricas principales.

También se define la inversa del tensor dieléctrico, llamado *tensor impermeabilidad* η_{ij} , que también es simétrico en un medio sin pérdidas y óptimamente inactivo. Definiendo los ejes principales, podemos escribir las componentes de este tensor como

$$\eta_{ij} = (\epsilon^{-1})_{ij} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\delta_{ij}}{n_i^2}, \quad (2.1-4)$$

donde n_1 , n_2 y n_3 son los índices de refracción principales.

Una herramienta muy utilizada para describir la propagación de una onda electromagnética es el llamado *elipsoide de Fresnel*, que es una construcción geométrica calculada mediante consideraciones energéticas. Así, utilizando la densidad volumétrica de energía W , asociada a las ondas del campo electromagnético y la ecuación 2.1-2, podemos obtener dicho elipsoide de la siguiente manera,

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon_i E_i E_i = \frac{1}{2} (\epsilon_1 E_1^2 + \epsilon_2 E_2^2 + \epsilon_3 E_3^2), \quad (2.1-5)$$

donde se ha tenido en cuenta la elección de ejes principales. Reagrupando términos, se obtiene

$$1 = \epsilon_1 \left(\frac{E_1^2}{2W} \right) + \epsilon_2 \left(\frac{E_2^2}{2W} \right) + \epsilon_3 \left(\frac{E_3^2}{2W} \right) = \epsilon_1 x_1^2 + \epsilon_2 x_2^2 + \epsilon_3 x_3^2, \quad (2.1-6)$$

donde se ha tenido en cuenta una redefinición de variables. La ecuación (2.1-6) describe el *Elipsoide de Fresnel*, de semiejes $1/\sqrt{\epsilon_1}$, $1/\sqrt{\epsilon_2}$ y $1/\sqrt{\epsilon_3}$, equivalentes a las velocidades principales v_1 , v_2 y v_3 de la fase cuando el campo eléctrico vibra en las direcciones x , y , z respectivamente. Este elipsoide, también llamado *elipsoide de velocidades*, se escribe en notación tensorial y para cualquier sistema de referencia como una cuádrica, a través de la ecuación

$$\epsilon_{ij} x_i x_j = 1. \quad (2.1-7)$$

Teniendo en cuenta las direcciones principales del vector campo eléctrico, tendremos los índices de refracción principales a frecuencias ópticas,

equivalentes con las permitividades dieléctricas relativas principales ε_{r1} , ε_{r2} y ε_{r3} , según la relación de Maxwell $n_1^2 = \varepsilon_{r1}$, $n_2^2 = \varepsilon_{r2}$ y $n_3^2 = \varepsilon_{r3}$, respectivamente.

2.2. La Indicatriz Óptica.

Si en lugar de tomar las componentes principales del vector campo eléctrico, tomamos las del vector desplazamiento eléctrico de la onda que se propaga, la ecuación (2.1-5) se puede describir como

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} = \frac{1}{2} \eta_i D_i D_i = \frac{1}{2} (\eta_1 D_1^2 + \eta_2 D_2^2 + \eta_3 D_3^2). \quad (2.2-1)$$

Reagrupando términos en la ecuación (2.2-1) y teniendo en cuenta la ecuación (2.1-4), podemos escribirla como

$$1 = \frac{1}{n_1^2} \left(\frac{D_1^2}{2W} \right) + \frac{1}{n_2^2} \left(\frac{D_2^2}{2W} \right) + \frac{1}{n_3^2} \left(\frac{D_3^2}{2W} \right), \quad (2.2-2)$$

obteniendo,

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1, \quad (2.2-3)$$

donde hemos redefinido las componentes principales del vector desplazamiento eléctrico.

Esta ecuación representa La *indicatriz óptica*, también denominada *elipsoide de índices*, porque los semiejes son los índices de refracción principales. Al igual que la ecuación 2.1-7, podemos expresar la *indicatriz óptica* mediante la expresión tensorial

$$\eta_{ij} x_i x_j = 1. \quad (2.2-4)$$

La ecuación (2.2-3) también se expresa a través de las velocidades principales, haciendo un cambio de escala, mediante

$$\mathbf{v}_1^2 x_1^2 + \mathbf{v}_2^2 x_2^2 + \mathbf{v}_3^2 x_3^2 = 1 \quad (2.2-5)$$

que es el denominado *elipsoide de Cauchy*.

2.3. Propagación de ondas monocromáticas planas.

Para el estudio de la propagación de la luz en medios anisótropos ópticamente inactivos, es necesario el estudio del comportamiento de las ecuaciones de Maxwell, suponiendo ondas monocromáticas, planas y sin pérdidas, que es el caso de propagación más simple, en estos casos.

En ausencia de cargas libres y de corrientes, las ecuaciones de Maxwell se escriben,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.3-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.3-4)$$

Asumiremos que el medio es no magnético, por lo que la permeabilidad magnética $\mu = \mu_0$ y la inducción magnética $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

Al considerar ondas planas monocromáticas, los vectores desplazamiento \mathbf{D} , campo eléctrico \mathbf{E} y campo magnético \mathbf{H} pueden escribirse como funciones de onda periódicas de la forma

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i\omega \left(t - \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}{v} \right)}, \quad (2.3-5)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega \left(t - \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}{v} \right)}, \quad (2.3-6)$$

y

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\omega \left(t - \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}{v} \right)}, \quad (2.3-7)$$

donde $v = c/n$, es la velocidad del frente de onda y n el índice de refracción a determinar, \mathbf{r} es el vector de posición del frente de onda, ω es la frecuencia de la onda, t el origen de tiempo y \mathbf{s} es el vector unitario de propagación de la onda. El vector $(\omega/v)\mathbf{s}$ es el *vector de onda* \mathbf{k} .

Si se sustituye los vectores \mathbf{D} y \mathbf{B} en las ecuaciones de Maxwell (2.3-1) y (2.3.2), se obtienen las relaciones,

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{s} = 0, \quad (2.3-8)$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{s} = 0. \quad (2.3-9)$$

resultando que ambos vectores son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Además, si se sustituye los vectores \mathbf{E} , \mathbf{D} y \mathbf{H} en las ecuaciones de Maxwell (2.3-3) y (2.3.4), se obtienen las ecuaciones,

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.3-10)$$

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = -\omega \mathbf{D}. \quad (2.3-11)$$

Estas relaciones determinan las direcciones relativas de todos los vectores implicados. En el caso de un medio isótropo, \mathbf{E} es paralelo a \mathbf{D} , siendo \mathbf{s} el vector unitario de \mathbf{k} , (Figura 1-(a)). Sin embargo, en el caso de un medio anisótropo, \mathbf{E} y \mathbf{D} estarán relacionados por medio del tensor dieléctrico, ecuación (2.1-1), y en general, no son paralelos. Además, la dirección de la energía asociada con el vector de Poynting, definido como $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, no coincide generalmente con el vector de propagación \mathbf{s} de la onda (Figura 1-(b)).

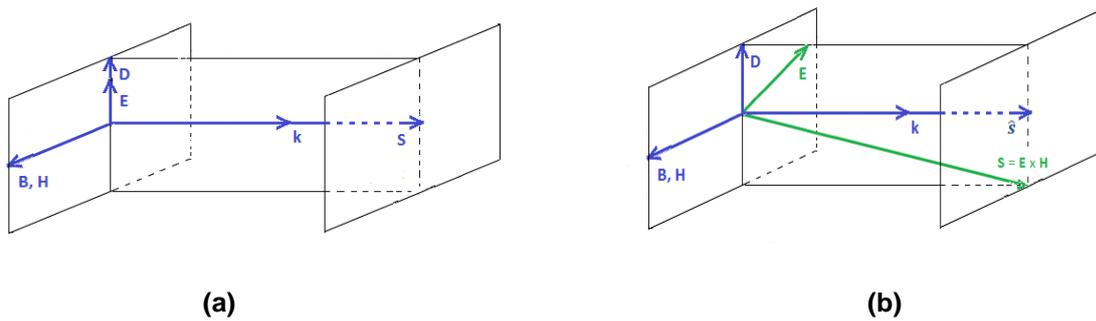


Figura 1. (a) Esquema vectorial de la propagación de una onda electromagnética de vector de onda \mathbf{k} en un medio isótropo y (b) propagación de una onda electromagnética (vector de onda \mathbf{k} en azul) y de la energía asociada (vector de Poynting \mathbf{S} en verde) en un medio anisótropo.

La relación entre los vectores \mathbf{E} y \mathbf{D} , puede obtenerse a través de las ecuaciones (2.3-10) y (2.3-11), obteniendo

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\omega^2 \mu_0 \mathbf{D}. \quad (2.3-12)$$

Sustituyendo $\mathbf{k} = (\omega/v)\mathbf{s}$, en la ecuación anterior, se obtiene

$$\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{E}) = -v^2 \mu_0 \mathbf{D}. \quad (2.3-13)$$

Utilizando la identidad vectorial $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, obtenemos la siguiente expresión

$$\mathbf{D} = \frac{1}{v^2 \mu_0} [\mathbf{E} - \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})] = \varepsilon_0 n^2 [\mathbf{E} - \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})]. \quad (2.3-14)$$

Si multiplicamos ambos miembros por el vector \mathbf{D} , sabiendo que $\mathbf{D} \cdot \mathbf{s} = 0$, se obtiene

$$D^2 = \varepsilon_0 n^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad (2.3-15)$$

observando que los vectores \mathbf{D} , \mathbf{E} y \mathbf{s} se encuentran en el mismo plano.

2.4. Modos normales de propagación. Birrefringencia.

Para obtener los modos de propagación en un medio anisótropo hay que encontrar la ecuación de ondas, conocida como *ecuación de Fresnel*, ecuación fundamental de la óptica cristalina. Utilizando las coordenadas cartesianas $i = x$, y ó z , y teniendo en cuenta (2.1-2), podemos expresar la ecuación (2.3-14) en función de las componentes del vector \mathbf{D} ó \mathbf{E} , como,

$$D_i = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_i n^2 s_i (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})}{(\varepsilon_0 n^2 - \varepsilon_i)}, \quad (2.4-1)$$

$$E_i = \frac{\varepsilon_0 n^2 s_i (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})}{(\varepsilon_0 n^2 - \varepsilon_i)}. \quad (2.4-2)$$

Multiplicando por el vector unitario \mathbf{s} en estas dos últimas expresiones, se obtiene respectivamente,

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\varepsilon_i s_i^2}{\left(n^2 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0}\right)} = \sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{(v_i^2 - v_n^2)} = 0, \quad (2.4-3)$$

y

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{\left(n^2 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0}\right)} = \frac{1}{n^2}. \quad (2.4-4)$$

Estas últimas expresiones son las más utilizadas y conocidas, indistintamente, como *ecuación de Fresnel*.

Para una dirección dada de propagación \mathbf{s} , la *ecuación de Fresnel* es cuadrática respecto de n^2 y en general da lugar a dos índices de refracción diferentes, positivos y reales, n_1 y n_2 . A cada uno de estos índices le corresponde un campo eléctrico \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 respectivamente, que resultan ser linealmente polarizados (consecuencia de la linealidad y transparencia del medio anisótropo). Cada uno de estos campos se puede descomponer en una

componente paralela, $\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})$, y perpendicular, \mathbf{E}_{\perp} , a \mathbf{s} , según la ecuación (2.3-14), como sigue

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 n^2 [\mathbf{E} - \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})] = \varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}_{\perp}. \quad (2.4-5)$$

Por tanto, utilizando esta última ecuación, podemos escribir las ondas linealmente polarizadas asociadas a \mathbf{D} de la siguiente forma:

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 n_1^2 \mathbf{E}_{\perp 1} \quad (2.4-6)$$

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon_0 n_2^2 \mathbf{E}_{\perp 2}. \quad (2.4-7)$$

Se demuestra que los vectores \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 son perpendiculares, comprobando que su producto escalar es nulo [1]. Para ello, teniendo en cuenta la simetría del tensor dieléctrico, se tiene que

$$\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D}_1 = E_{2i} D_{1i} = E_{2i} \varepsilon_{ij} E_{1j} = E_{1j} \varepsilon_{ji} E_{2j} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_2, \quad (2.4-8)$$

y teniendo en cuenta la ecuación (2.4-5), se llega a

$$n_1^2 (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_{\perp 1}) = n_2^2 (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_{\perp 2}). \quad (2.4-9)$$

Como las componentes paralelas del campo eléctrico no contribuyen a los productos escalares anteriores, entonces tenemos que

$$(n_1^2 - n_2^2) (\mathbf{E}_{\perp 1} \cdot \mathbf{E}_{\perp 2}) = 0. \quad (2.4-10)$$

Esto se cumple únicamente si hay una solución de la *ecuación de Fresnel*, o si \mathbf{D}_1 es perpendicular a \mathbf{D}_2 , ya que \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 no son, en general perpendiculares entre sí.

Por tanto, las dos ondas polarizadas linealmente tienen las direcciones de polarización de \mathbf{D} perpendiculares entre sí y, los autovectores \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 están

dirigidos a lo largo de los ejes principales de la elipse que resulta de la intersección del elipsoide de índices con el plano perpendicular a \mathbf{s} (Figura 2). Como se verá en la sección 3.2, el *elipsoide de índices* puede ser utilizado para encontrar los dos índices de refracción y las dos direcciones correspondientes de \mathbf{D} asociadas con las dos ondas independientes que pueden propagarse en una dirección de propagación determinada \mathbf{s} en un cristal. La longitud de los dos semiejes de la sección elíptica de la *indicatriz óptica*, que no siempre coinciden con los índices de refracción principales, son los dos índices de refracción de la onda que se propaga, mientras los dos ejes de esta elipse son paralelos, respectivamente, a la dirección de vibración de los vectores desplazamiento eléctrico \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 .

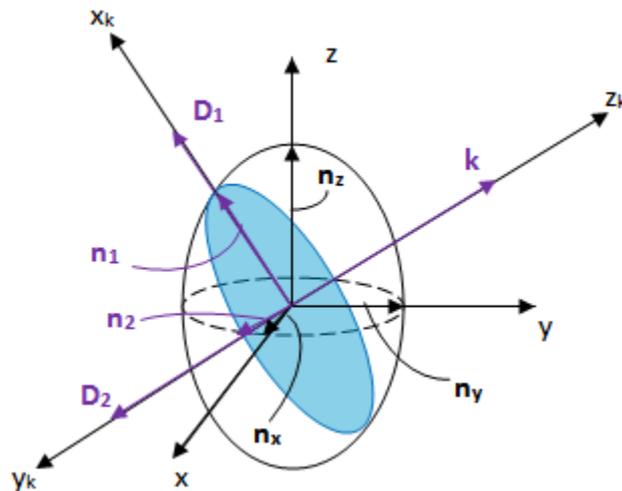


Figura 2. Representación del elipsoide de índices. Aquí n_1 y n_2 son los dos índices de refracción asociados a las ondas que se propagan en el medio en la dirección del vector de onda $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$, dadas por los vectores \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 . Los índices de refracción principales son los semiejes del elipsoide.

Cada una de estas dos componentes ortogonales en las que se divide una onda al atravesar el medio tendrá una velocidad de propagación. La diferencia entre estas velocidades, que hace que se produzca un desfase entre una de las componentes con respecto a la otra, se define como desfase por *retardo óptico* $(\Delta n)d$, escrito como Δ_B y viene dado por

$$\Delta_B = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\Delta n)d, \quad (2.4-11)$$

donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío, d es el espesor de la muestra y Δn es la *birrefringencia* lineal, evaluada como la diferencia entre los índices de refracción para cada una de las componentes en las que se descompone la luz.

2.5. Clasificación óptica de los cristales. Superficies de onda.

La *ecuación de Fresnel* puede representarse como una superficie tridimensional en el espacio de los momentos \mathbf{k} , que se conoce como *superficie normal*. En el espacio de los vectores de onda $(\omega/c)(n_x, n_y, n_z)$, recibe el nombre de *superficie de onda*. Esta superficie consiste en dos capas que, en general, tienen cuatro puntos en común y que queda unívocamente determinada por los índices principales de refracción asociados a cada dirección. Las dos líneas que unen estos puntos pasando por el origen son los *ejes ópticos*, y son direcciones especiales en las que el material se comporta como si fuera isótropo, por lo que la birrefringencia es nula. Los ejes ópticos forman con el eje Z un ángulo V , que puede determinarse a partir de los índices de refracción principales [2], mediante la ecuación,

$$\operatorname{tg}V = \frac{n_z}{n_x} \sqrt{\frac{n_y^2 - n_x^2}{n_z^2 - n_y^2}} \quad (2.5-1)$$

La Figura 3 representa un octante de la superficie de los vectores de onda.

Las propiedades ópticas de un cristal dependen de la simetría de su tensor dieléctrico ε_{ij} , que es el que determina la forma de la superficie de los vectores de onda. Así, dependiendo del número de elementos independientes que el tensor dieléctrico tenga en un sistema de ejes principales, los cristales pueden ser ópticamente clasificados en tres grandes grupos: *Isótropos*, *Uniáxicos* y *Biáxicos*. Estos tres grupos se pueden a su vez subdividir en siete sistemas cristalinos, de forma que los cristales isótropos reciben el nombre de cúbicos; los cristales uniáxicos se subdividen en trigonales, tetragonales y hexagonales; y los cristales biáxicos quedan divididos en ortorrómbicos, monoclinicos y triclinicos.

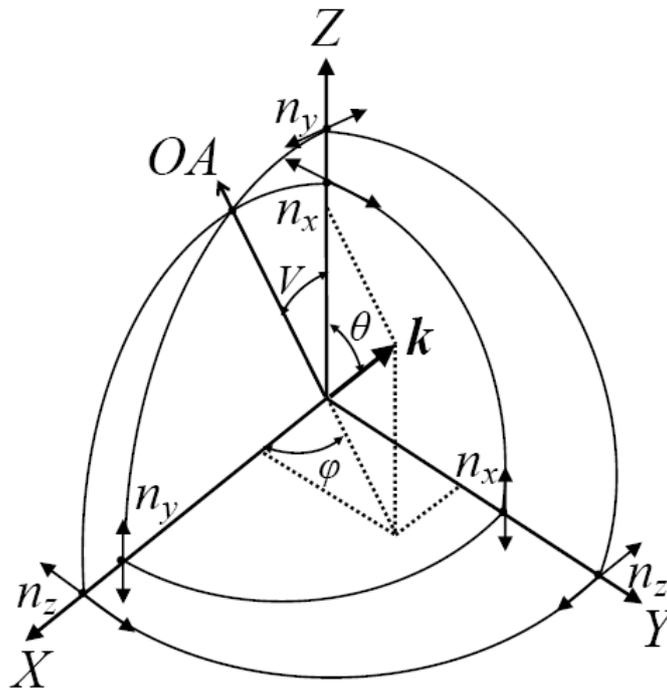


Figura 3. Representación en el primer octante de la superficie de los vectores de onda \mathbf{k} (superficie de índices). Los ángulos θ y φ , son las coordenadas esféricas del vector de onda con respecto al triedro XYZ, siendo los semiejes del elipsoide de índices igual a los índices de refracción principales $n_z > n_y > n_x$. La figura muestra los vectores de polarización lineal de las ondas que se propagan, uno de los ejes ópticos (OA) y el ángulo V entre uno de los ejes ópticos y la bisectriz paralela al eje Z.

En los cristales pertenecientes al sistema cúbico (isótropos), los tres valores principales de ε_{ij} son iguales a un escalar $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon = n^2$, ya que existen tres direcciones equivalentes cristalográficamente que son mutuamente ortogonales. Por tanto, los tres índices principales son iguales y la superficie normal consistirá en una esfera degenerada.

En el caso de los cristales uniáxicos, el *elipsoide de índices* degenera en uno de revolución en torno al eje Z, por lo que los dos valores principales correspondientes al plano perpendicular a ese eje son iguales o, lo que es lo mismo, dos de los índices de refracción serán iguales. En este caso, la superficie normal consistirá en una esfera y un elipsoide de revolución que se tocan en dos puntos sobre el eje Z, que será el único *eje óptico* del cristal.

Indicatriz óptica: <i>elección de ejes principales</i>	Sistema cristalino: <i>cambios con la longitud de onda, presión y temperatura</i>	Tensor dieléctrico: <i>sistema de ejes ópticos</i>	Tensor dieléctrico: <i>sistema de ejes cristalinos</i>
Esfera	Cúbico (cambios en el índice de refracción)	$\epsilon_0 \begin{pmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$
Uniaxial (eje óptico paralelo al eje c del cristal)	Trigonal Tetragonal Hexagonal (cambios de signo en la birrefringencia)	$\epsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$
Biaxial (ejes principales paralelos a los ejes cristalográficos (a b c) del cristal)	Ortorrómbico (cambios en la elipse de índices)	$\epsilon_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$
Biaxial (uno de los ejes principales paralelo al eje b del cristal)	Monoclínico (rotación de la indicatriz óptica y cambios en la elipse de índices)	$\epsilon_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{13} \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ \epsilon_{13} & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$
Biaxial (cualquier sistema de ejes principales)	Triclínico (sin restricciones)	$\epsilon_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$

Tabla 1. Comportamiento óptico de los cristales con distinta simetría cristalina.

Por último, en los cristales ortorrómbicos, monoclinicos y triclinicos no existen direcciones cristalográficas equivalentes, por lo que los tres valores principales y, por tanto, los índices de refracción, son diferentes $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$. En estos cristales la superficie normal también consiste en una esfera y un elipsoide de revolución pero, a diferencia de los uniáxicos, presentan dos ejes ópticos, por lo que reciben el nombre de biáxicos. Todas las propiedades de los cristales quedan resumidas en la Tabla 1.

- **Medios Uniáxicos:**

Como habíamos visto anteriormente, en los cristales uniáxicos dos de los índices de refracción serán iguales, por lo que la ecuación del elipsoide de

índices (2.2-3), eligiendo las componentes cartesianas del vector \mathbf{D} , quedará de la siguiente forma:

$$\frac{x^2 + y^2}{n_x^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1. \quad (2.5-1)$$

En este caso, el índice correspondiente a los dos valores principales del plano perpendicular al *eje óptico* recibe el nombre de *índice de refracción ordinario* $n_x = n_y = n_o$, mientras que el otro valor principal en la dirección del eje óptico es el *índice de refracción extraordinario* $n_z = n_e$.

Si $n_e > n_o$, es decir $\Delta n > 0$, el cristal uniáxico se define *positivo*, y si $n_e < n_o$, es decir $\Delta n < 0$, se define *negativo*.

Por tanto, las dos ondas que se propagan en un cristal son: las ondas ordinarias, que tienen un índice de refracción n_o y una velocidad de fase v_o que no dependen de la dirección de propagación, por lo que definen una esfera; y las ondas extraordinarias, que tienen un índice de refracción que varía con el ángulo θ , que forma el eje óptico con la dirección de propagación \mathbf{s} , desde $n(\theta = 0^\circ) = n_o$, cuando \mathbf{s} es paralelo al eje óptico, hasta $n(\theta = 90^\circ) = n_e$, cuando \mathbf{s} es perpendicular al eje óptico, definiendo un elipsoide de revolución (Figura 4).

- **Medios Biáxicos:**

En un cristal biáxico, los tres índices de refracción son diferentes y el elipsoide de índices, similarmente a la ecuación (2.2-3), adquiere la forma

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1, \quad (2.5-2)$$

donde se ha supuesto que $n_x < n_y < n_z$. En esta superficie, las secciones de cada uno de los planos estarán constituidas por una circunferencia y una elipse, de acuerdo con la ecuación (2.4-3), según la Figura (5).

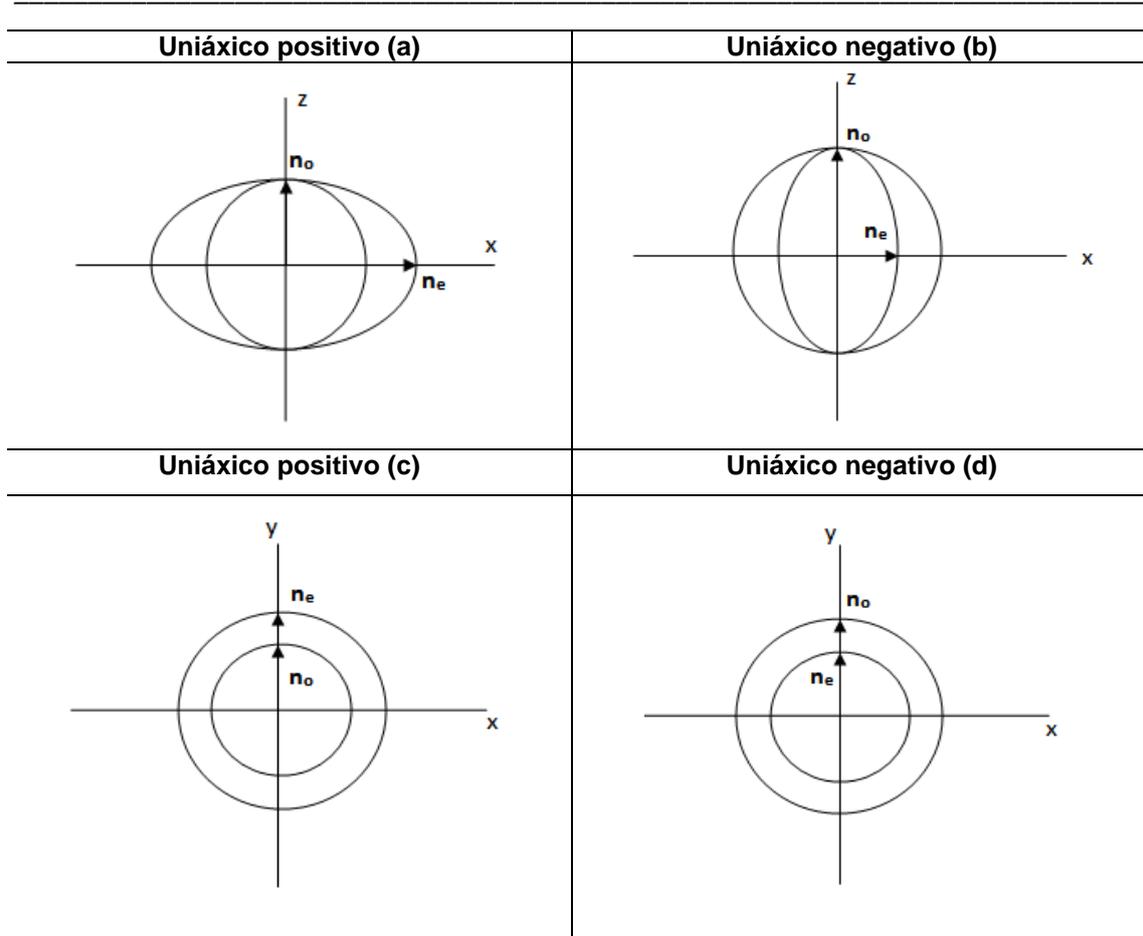


Figura 4: Intersecciones de la superficie normal en los planos paralelos (XZ) y perpendicular (XY) al eje óptico, para **(a)** un cristal uniaxial positivo en el plano XZ, **(b)** para un cristal uniaxial negativo en el plano XZ, **(c)** para un cristal uniaxial positivo en el plano XY y **(d)** para un cristal uniaxial negativo en el plano XY.

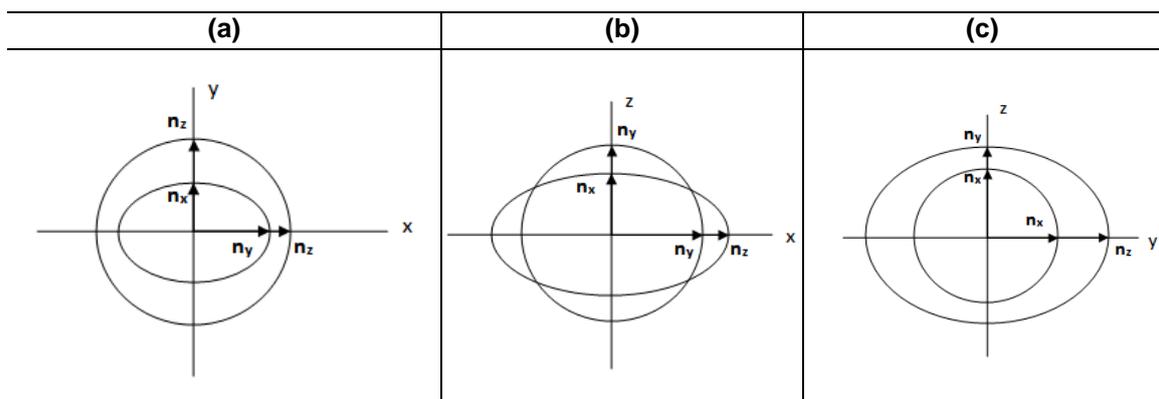


Figura 5: Secciones de la superficie de índices para un cristal biaxial en los planos **(a)** XY, **(b)** XZ y **(c)** ZY.

2.6. Relación entre el vector de propagación de la onda y de la energía.

Para determinar la dirección de la energía asociada al vector de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, es decir del rayo, resulta útil utilizar la indicatriz óptica dada por la ecuación (2.2-3), que puede escribirse como:

$$f = \eta_i D_i^2 - 1 = 0, \quad (2.6-1)$$

donde f representa la función del elipsoide de índices. La dirección normal a dicha superficie vendrá dada por ∇f , siendo \mathbf{n} el vector unitario en la dirección normal a f . Esta dirección, la normal a la superficie de los vectores de onda, es la dirección de la energía, como se demuestra a continuación.

Si la función $f = f(k_x, k_y, k_z, \omega) = 0$, diferenciando se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial k_i} dk_i + \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega = 0; \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_i} = -\frac{\partial f / \partial k_i}{\partial f / \partial \omega}. \quad (2.6-2)$$

Es decir, la velocidad de grupo v_g es proporcional a ∇f . El ángulo que forman los vectores \mathbf{E} y \mathbf{D} será el ángulo que forman los vectores de onda $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ (también suele denominarse por la dirección unitaria \mathbf{u}) y el vector rayo asociado al vector de Poynting \mathbf{S} , como se describe en la Figura 6.

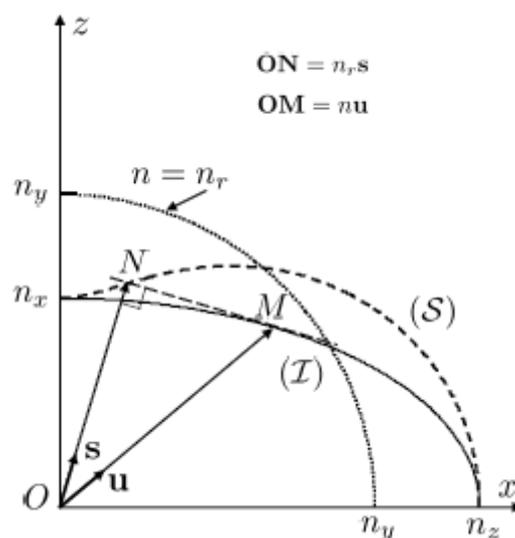


Figura 6. Relación entre la dirección de propagación de la onda ($\mathbf{u} = \mathbf{k}/k$) y el rayo ($\mathbf{s} = \mathbf{S}/S$) para un cristal biáxico en el plano $y = 0$. Se observa la superficie normal descrita (S) (curva

discontinua) por los puntos de intersección N , entre la tangente que pasa por M y el rayo normal a dicha tangente ∇f . La superficie de índices (I) son las curvas continuas.

3. Índices de refracción de los cristales uniáxicos y biáxicos evaluados para una dirección de propagación arbitraria.

Synopsis

Following the previous study, it is really important try find a numerical solution for the two main refractive indices of uniaxial and biaxial crystals and for an arbitrary propagation direction. There are two ways to obtain the results we are interested in. The first one consists in making a numerical studio of the Fresnel's equation combined with Maxwell's relations, resulting two different refractive indices which can be related to the Electric field E and Displacement vector D . However, Fresnel's equation gives only numerical values of the refractive indices and it does not give information of the polarization direction of them. This problem can be solved making a geometrical studio of the optic indicatrix. Through three different rotations, a new coordinate system (x''' , y''' , z''') can be defined, and developing the index ellipsoid equation to this new coordinate system, it yields indistinctly to the two refractive indices

3.1. Cálculo a partir de la ecuación de Fresnel.

Teniendo en cuenta la *ecuación de Fresnel* (2.4-3) y utilizando la relación de Maxwell para los índices de refracción principales, $n_1^2 = \varepsilon_{r1} = \varepsilon_1 / \varepsilon_0$; $n_2^2 = \varepsilon_{r2} = \varepsilon_2 / \varepsilon_0$; $n_3^2 = \varepsilon_{r3} = \varepsilon_3 / \varepsilon_0$, podemos escribir la *ecuación de Fresnel* como

$$\frac{n_1^2 s_1^2}{(n^2 - n_1^2)} + \frac{n_2^2 s_2^2}{(n^2 - n_2^2)} + \frac{n_3^2 s_3^2}{(n^2 - n_3^2)} = 0, \quad (3.1-1)$$

Siendo una ecuación bicuadrática en n , de coeficientes S y P , según

$$n^4 - Sn^2 + P = 0, \quad (3.1-2)$$

con

$$S = \frac{n_1^2(n_2^2 + n_3^2)s_1^2 + n_2^2(n_1^2 + n_3^2)s_2^2 + n_3^2(n_1^2 + n_2^2)s_3^2}{n_1^2s_1^2 + n_2^2s_2^2 + n_3^2s_3^2}, \quad (3.1-3)$$

$$P = \frac{n_1^2n_2^2n_3^2}{n_1^2s_1^2 + n_2^2s_2^2 + n_3^2s_3^2}$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1. \quad (3.1-4)$$

Resolviendo la ecuación, se obtiene

$$n_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(S \pm \sqrt{S^2 - 4P} \right). \quad (3.1-5)$$

Los dos autovectores, que determinan las direcciones de oscilación o polarización correspondiente a cada modo de propagación, se obtienen a partir de (2.4-1) ó (2.4-2)

$$\mathbf{D}_{1,2} = n_{1,2}^2 (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_1 s_1}{(n_{1,2}^2 - n_1^2)} \\ \frac{\varepsilon_2 s_2}{(n_{1,2}^2 - n_2^2)} \\ \frac{\varepsilon_3 s_3}{(n_{1,2}^2 - n_3^2)} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{E}_{1,2} = n_{1,2}^2 (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) \begin{pmatrix} \frac{s_1}{(n_{1,2}^2 - n_1^2)} \\ \frac{s_2}{(n_{1,2}^2 - n_2^2)} \\ \frac{s_3}{(n_{1,2}^2 - n_3^2)} \end{pmatrix}. \quad (3.1-6)$$

En la Figura 7 se representa las dos direcciones de vibración de los vectores dieléctrico $\mathbf{D}_{1,2}$; eléctrico $\mathbf{E}_{1,2}$; y magnético $\mathbf{H}_{1,2}$; para una dirección de propagación incidente \mathbf{k} , en un medio anisotrópico biáxico. En general resultan dos direcciones de propagación del rayo (vectores de Poynting, $\mathbf{S}_{1,2}$).

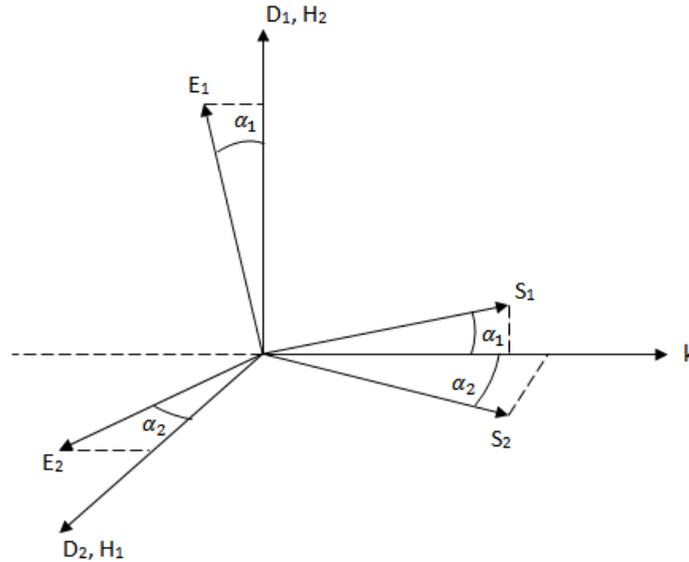


Figura 7. Esquema vectorial de las direcciones de oscilación de los campos dieléctrico, eléctrico, magnético asociados a una dirección de propagación incidente en un medio anisótropo biaxial.

3.2. Cálculo a partir de la indicatriz óptica.

La ecuación de Fresnel da los valores numéricos de los dos índices de refracción de la onda (o del rayo), sin embargo no da información de las direcciones de polarización de cada una de ellas. Se puede determinar las expresiones para estos índices a partir de la ecuación del elipsoide de índices, además de determinar la dirección de polarización de la onda con velocidad mayor y/o menor [3].

La dirección del vector de onda \mathbf{k} se puede representar mediante coordenadas esféricas (θ_k, ϕ_k) definiendo un nuevo sistema de coordenadas (x''', y''', z''') . Para ello, elegimos z''' paralelo a la dirección de propagación de la onda \mathbf{k} mediante tres rotaciones en sentido antihorario de ϕ_k alrededor del eje z en primer lugar, de θ_k alrededor de y' en segundo lugar y de δ alrededor de z'' finalmente. Estas transformaciones vienen descritas por

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta & \text{sen}\delta & 0 \\ -\text{sen}\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_k & 0 & \text{sen}\theta_k \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_k & 0 & \cos\theta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi_k & \text{sen}\phi_k & 0 \\ -\text{sen}\phi_k & \cos\phi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.2-1)$$

La ecuación del elipsoide de índices en el sistema de ejes principales (x, y, z) , dada por la ecuación (2.2-4),

$$\eta_1 x^2 + \eta_2 y^2 + \eta_3 z^2 = 1, \quad (3.2-2)$$

vendrá afectado por esta nueva elección. Para las dos primeras rotaciones,

$$\begin{aligned} x &= x'' \cos \theta_k \cos \phi_k - y'' \sin \phi_k + z'' \sin \theta_k \cos \phi_k \\ y &= x'' \cos \theta_k \sin \phi_k + y'' \cos \phi_k + z'' \sin \theta_k \sin \phi_k \\ z &= -x'' \sin \theta_k + z'' \cos \theta_k \end{aligned} \quad (3.2-3)$$

Sustituyendo (3.2-3) en (3.2-2), resulta para la elipse de polarización (plano $z'' = 0$), Figura 8:

$$Ax'^2 + By'^2 + Cx'y' = 1 \quad (3.2-4)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= (\eta_1 \cos^2 \phi_k + \eta_2 \sin^2 \phi_k) \cos^2 \theta_k + \eta_3 \sin^2 \theta_k \\ B &= \eta_1 \cos^2 \phi_k + \eta_2 \sin^2 \phi_k \\ C &= (\eta_2 - \eta_1) \sin 2\phi_k \cos \theta_k \end{aligned} \quad (3.2-5)$$

Realizando una nueva rotación anti horaria de un ángulo $\delta = \delta_1$ alrededor del eje z'' tal y como se expresa en la figura 8,

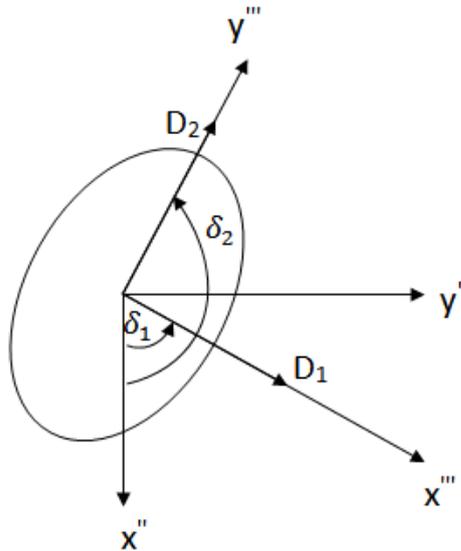


Figura 8: Relación entre los ejes de polarización (x''' , y''') y los ejes (x'' , y''). $\delta_1 = \delta$ el ángulo de polarización de x''' (D_1) con respecto a x'' , y $\delta_2 = \delta + \pi/2$ es el ángulo de polarización de y''' (D_2) con respecto a y'' . El vector de onda \mathbf{k} y los ejes z' y z'' son perpendiculares al plano de la figura.

se puede definir un nuevo sistema de ejes (x''' , y''') que vienen dados por las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} x'' &= x''' \cos \delta - y''' \sin \delta \\ y'' &= x''' \sin \delta + y''' \cos \delta \end{aligned} \quad (3.2-6)$$

donde $\delta_1 = \delta$ el ángulo de polarización de x''' (\mathbf{D}_1) con respecto a x'' , y $\delta_2 = \delta + \pi/2$ es el ángulo de polarización de y''' (\mathbf{D}_2) con respecto a y'' . En la Figura 9 se muestran los vectores implicados en todas las transformaciones realizadas.

Si se sustituye (3.2-6) en (3.2-4), se tiene

$$\begin{aligned} A(x''' \cos \delta - y''' \sin \delta)^2 + B(x''' \sin \delta + y''' \cos \delta)^2 \\ + C(x''' \cos \delta - y''' \sin \delta)(x''' \sin \delta + y''' \cos \delta) = 1 \end{aligned} \quad (3.2-7)$$

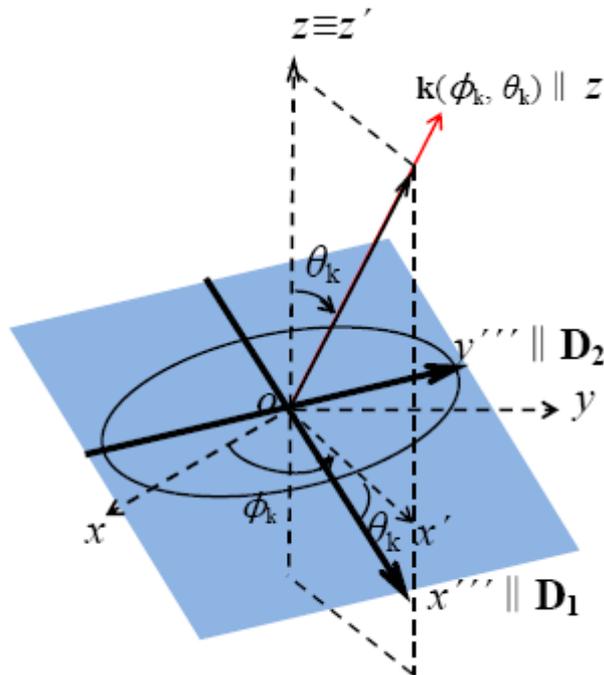


Figura 9. Transformación ortogonal del sistema de coordenadas (x, y, z) , donde se define los ejes dieléctricos principales, al nuevo sistema de coordenadas (x''', y''', z''') , siendo z'' paralelo al vector de onda \mathbf{k} . Los ejes de la elipse de polarización representan las dos polarizaciones de \mathbf{D} y los semiejes son idénticos a los índices de refracción.

y desarrollando los cuadrados, obtenemos,

$$\begin{aligned}
& A(x''''^2 \cos^2 \delta + y''''^2 \sin^2 \delta - 2x''''y'''' \sin \delta \cos \delta) \\
& + B(x''''^2 \sin^2 \delta + y''''^2 \cos^2 \delta + 2x''''y'''' \sin \delta \cos \delta) \quad . \quad (3.2-8) \\
& + C(x''''^2 \sin \delta \cos \delta - x''''y'''' \sin^2 \delta + x''''y'''' \cos^2 \delta - y''''^2 \sin \delta \cos \delta) = 1
\end{aligned}$$

Reagrupando términos se tiene:

$$\begin{aligned}
& (A \cos^2 \delta + B \sin^2 \delta + C \sin \delta \cos \delta) x''''^2 + (A \sin^2 \delta + B \cos^2 \delta - C \sin \delta \cos \delta) y''''^2 \quad . \quad (3.2-9) \\
& + ((B - A) \sin 2\delta + C \cos 2\delta) x''''y'''' = 1
\end{aligned}$$

Haciendo nulo el término $x''''y''''$, es decir,

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{C}{A - B}, \quad (3.2-10)$$

obtenemos los índices de refracción asociados a la elipse de polarización

$$A' x''''^2 + B' y''''^2 = 1, \quad (3.2-11)$$

donde

$$\begin{aligned}
A' &= A \cos^2 \delta + B \sin^2 \delta + C \sin \delta \cos \delta, \\
B' &= A \sin^2 \delta + B \cos^2 \delta - C \sin \delta \cos \delta,
\end{aligned} \quad (3.2-12)$$

siendo los índices de refracción

$$\begin{aligned}
n_1 &= 1/\sqrt{A'} \\
n_2 &= 1/\sqrt{B'}.
\end{aligned} \quad (3.2-13)$$

4. Refracción doble en cristales uniáxicos. Aplicación a un cristal de calcita y otro de cuarzo.

Synopsis

Huygens' construction of the double refraction using the geometrical method of the index surfaces has been studied and applied to uniaxial crystals of calcite

and quartz when the optic axis is parallel to the plane of incidence for 589 nm. The incidence angle-dependent double refraction (walk-off) for any arbitrary uniaxial crystal orientation has been derived and temperature-dependent dispersion curves at normal incidence for quartz and calcite crystals are obtained. Results of the incidence angle-dependent double refraction, dispersion, relative walk-off and temperature-dependent dispersion curves are obtained for 632.8 nm.

The interest in the optics of anisotropic media has grown because of their importance in passive and active devices due to its good electro optical, acousto-optic and nonlinear properties, especially in integrated form such as: phase and amplitude modulators, tunable filters, directional couplers, lasers and amplifiers and switches for signal processing [4–7]. The field of non-linear optics (NLO) was restricted primarily to uniaxial crystals, where the need for crystallographic nomenclature was modest and with increasing interest in biaxial crystals, has led to increasing rapid progress from the discovery of optical second harmonic generation (SHG) in 1961 [8]. It is of interest to determine the double refraction (walk-off) phenomenon will affect conversion efficiency if the rays at some point no longer overlap sufficiently. The walk-off corrected (WOC) non-linear optical (NLO) crystals allows increase the efficiency of a three-wave interaction as the rays propagate through the crystal in a wide range of wavelengths [9].

Historically, the study of rays in birefringent media has been developed through two methods: the geometrical method of the Huygens construction or Fermat's Principle [10–12] and since 1970 the analytical one [13–15]. The first made it possible to determine the essential characteristics of propagation of plane waves in uniaxial and biaxial media [16–19]. The second allows obtaining explicit formulas even when considering geometries without symmetries and is very important as it determines parts of algorithms devoted to computation of particular parameters of a final formula [20, 21].

There are other phenomena related to double refraction as the total reflection, the back wave refraction, the negative refraction [22, 23] and the internal conical refraction characteristic in biaxial crystals [24] that would be object of study for any crystal orientation in future works.

La propagación de la onda ordinaria en un cristal uniaxial implica que los vectores de onda y rayo asociados coincidan y satisfaga la ley de la refracción de Snell. Sin embargo, en el caso de la onda extraordinaria, el rayo toma la dirección del vector de Poynting, \mathbf{S}_e , distinta a la dirección de propagación de la onda, por lo que la ley de Snell no se cumple en este caso, siendo el cálculo de la dirección de esta propagación más complicado. El vector unitario a lo largo del eje óptico de un cristal uniaxial viene determinado por los cosenos directores $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, como se muestra en la Figura 10.

Los cosenos directores se pueden escribir como $(\cos \psi \cos \phi, \sin \psi \cos \phi, \sin \phi)$, donde ψ es el ángulo entre el eje X' y el plano donde se encuentra el eje óptico y ϕ es el ángulo entre la interfase y la dirección del eje óptico.

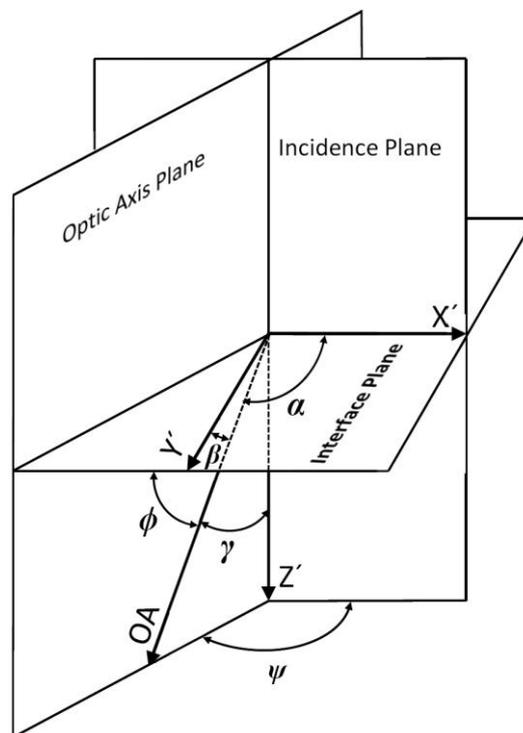


Figura 10. Orientación arbitraria del eje óptico (OA) en un cristal uniaxial. (X', Y', Z') son los ejes principales, donde se define el plano de incidencia $(X' Z')$, el plano interfase $(X' Y')$ y el plano donde se encuentra el eje óptico cuya dirección está dada por los cosenos directores $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, que a su vez se relacionan con los ángulos de orientación ϕ y ψ .

Cuando el eje óptico es perpendicular al plano de incidencia, $\psi = 90^\circ$; $\phi = 0^\circ$, los cosenos directores vienen dados por $(0, 1, 0)$ y la onda y el rayo extraordinario coinciden.

Cuando una onda incide sobre un medio uniaxial con un ángulo de incidencia θ_i , el ángulo de refracción del rayo ordinario θ_o , obedece la ley de Snell según,

$$n_i \text{sen} \theta_i = n_o \text{sen} \theta_o, \quad (4-1)$$

donde n_i y n_o son los índices de refracción de la onda incidente y de la onda ordinaria, respectivamente. Sin embargo, para una onda extraordinaria, la dirección de la onda y el rayo no coinciden. Cuando el eje óptico no es perpendicular al plano de incidencia, el índice de refracción para la onda extraordinaria n_e es una función que depende de θ , (ángulo formado entre el vector de onda extraordinario \mathbf{k}_e y el eje óptico paralelo generalmente el eje Z). Es decir, para una dirección de propagación de la onda extraordinaria \mathbf{k}_e , (s_1, s_2, s_3), según la figura 3,

$$\begin{aligned} s_1 &= \text{sen} \theta \cos \varphi \\ s_2 &= \text{sen} \theta \text{sen} \varphi . \\ s_3 &= \cos \theta \end{aligned} \quad (4-2)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de *Fresnel* 2.4-4,

$$n^2(n^2 - n_e^2)\text{sen}^2 \theta + n^2(n^2 - n_o^2)\cos^2 \theta = (n^2 - n_o^2)(n^2 - n_e^2), \quad (4-3)$$

Se obtiene

$$n(\theta) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \text{sen}^2 \theta}} . \quad (4-4)$$

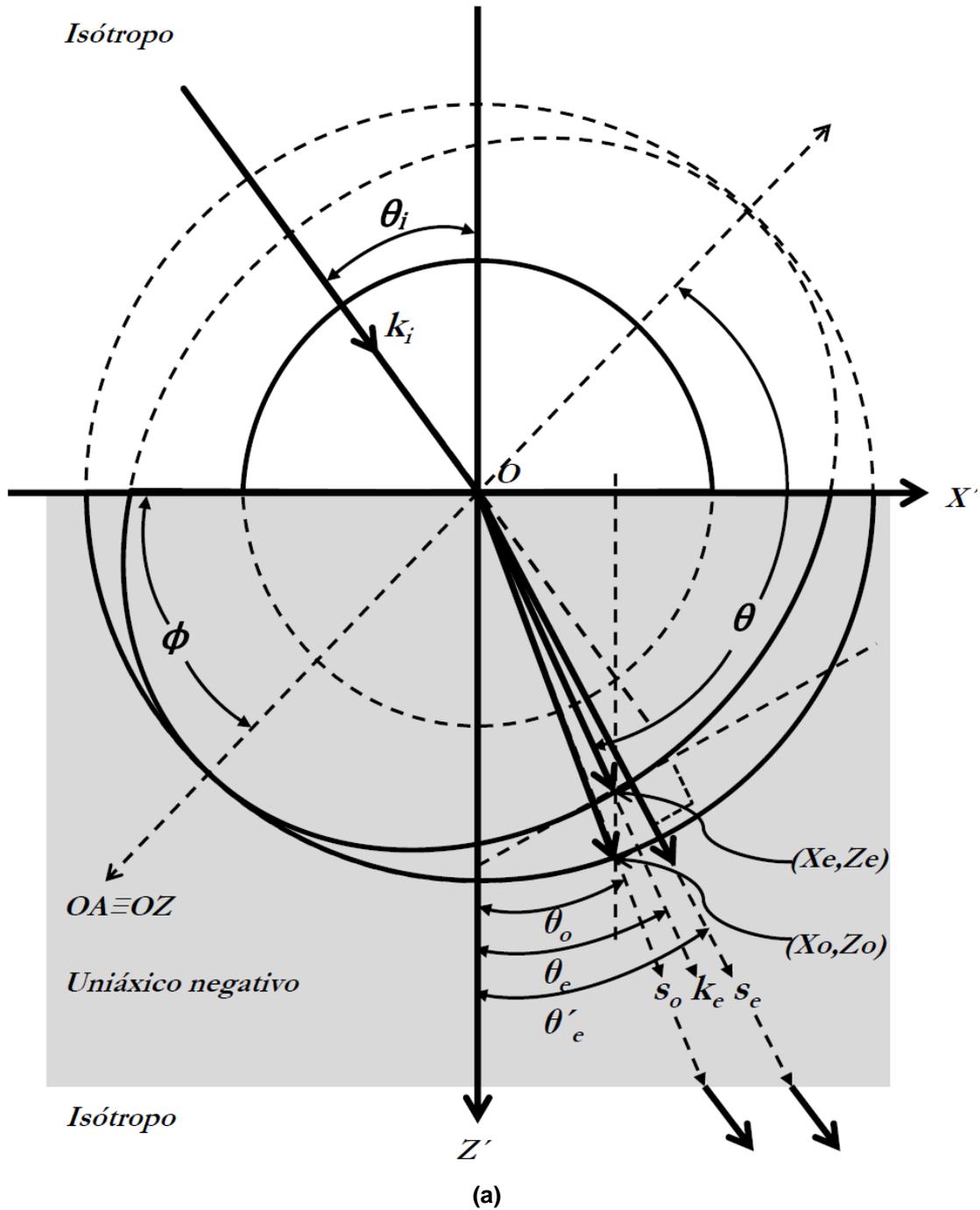
El valor de $n(\theta)$ será el índice de refracción de la onda extraordinaria $n_e(\theta)$ que se encuentra en un intervalo entre los valores n_o y n_e del material. Por tanto, según la ley de Snell para la onda extraordinaria, se cumple ahora,

$$n_i \text{sen} \theta_i = n_e(\theta) \text{sen} \theta_e . \quad (4-5)$$

4.1. Cristal uniáxico cuando el eje óptico rota en el plano de incidencia.

Para determinar la propagación de ondas y rayos en medios uniáxicos resulta muy intuitivo utilizar la construcción geométrica de Huygens, de acuerdo

a la figura 6, explicada con anterioridad. Las figuras 11(a) y 11 (b) muestran esta construcción geométrica para la onda y el rayo que se transmiten en un cristal uniaxial negativo (a) y otro positivo (b) desde un medio isótropo. Se han utilizado las superficies de índices y se ha supuesto que el eje óptico se encuentra en el plano de incidencia ($\psi = 0^\circ$), cuyo vector unitario toma el valor $(\cos\phi, 0, \text{sen}\phi)$.



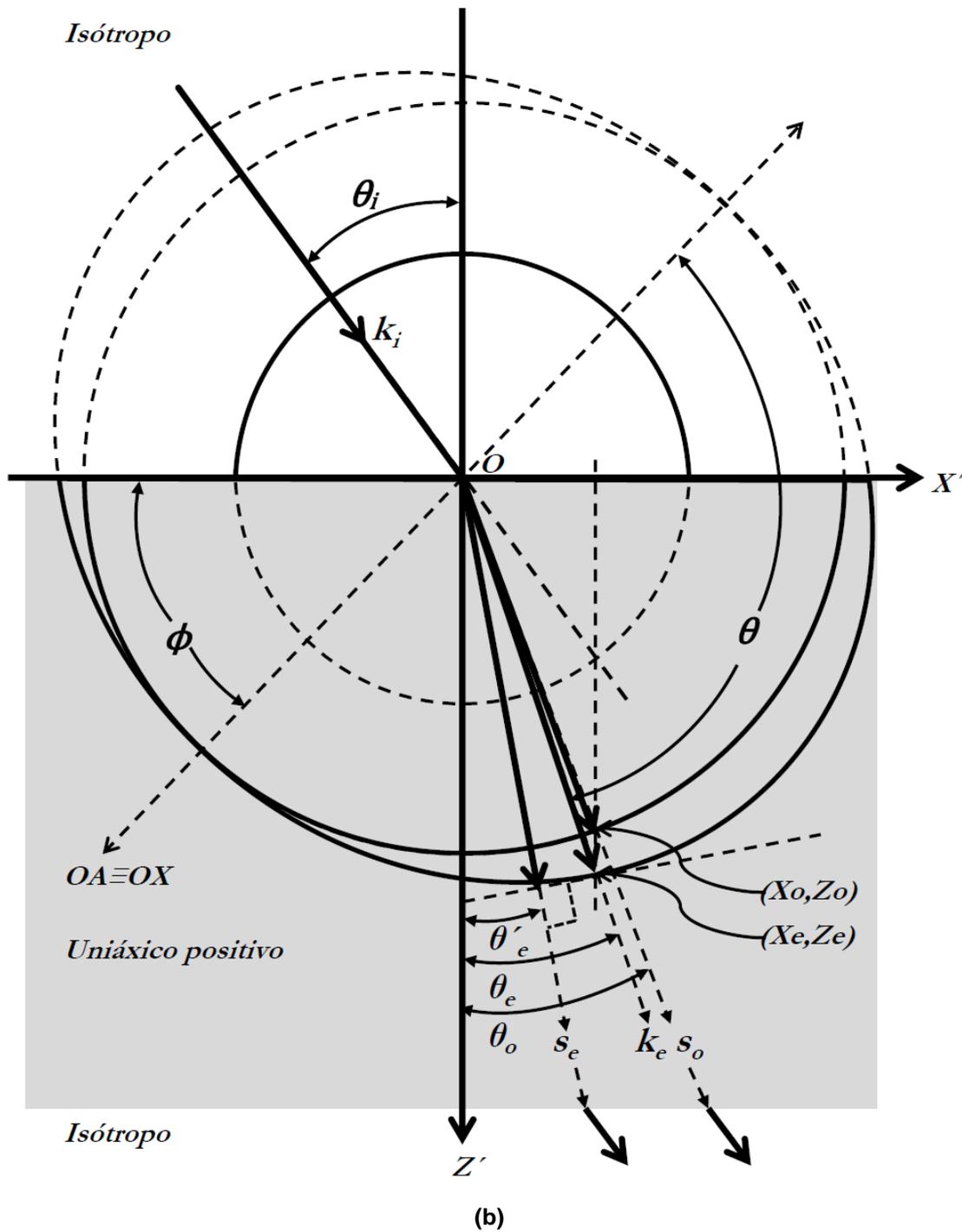


Figura 11. (a) Construcción de Huygens de la superficie de índices ópticos o vectores de onda en la interfase entre un medio isótropo y un cristal uniaxial negativo y (b) entre un medio isótropo y un cristal uniaxial positivo. La sección de la superficie de los vectores de onda para la onda extraordinaria es una elipse y un círculo para la onda ordinaria. El eje óptico es paralelo al plano de incidencia ($X'Z'$) formando un ángulo ϕ con la interfase entre el medio isótropo y anisótropo. \mathbf{k}_i es el vector de onda incidente en el medio isótropo y $\mathbf{k}_o \equiv \mathbf{s}_o$ y \mathbf{k}_e son los vectores de onda para las ondas ordinaria y extraordinaria respectivamente en el interior del cristal. θ_i es el ángulo de incidencia de la onda que incide en el cristal, θ_o y θ_e son los ángulos de refracción de las ondas ordinaria y extraordinaria, respectivamente, y θ'_e es el ángulo de refracción para el rayo extraordinario \mathbf{s}_e .

4.1.1. Propagación de la onda ordinaria y extraordinaria.

Cuando el eje óptico (OA) rota un ángulo ϕ sobre el plano de incidencia como se muestran en las figuras 11 (a) y 11 (b), la relación entre los ángulos ϕ , θ and θ_e es,

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \phi - \theta_e \quad (4.1-1)$$

Sustituyendo (4.1-1) y (4-4) en (4-5), se llega a

$$n_i \text{sen} \theta_i = \frac{n_o n_e \text{sen} \theta_e}{\sqrt{n_e^2 (\cos \phi \text{sen} \theta_e - \text{sen} \phi \cos \theta_e)^2 + n_o^2 [1 - (\cos \phi \text{sen} \theta_e - \text{sen} \phi \cos \theta_e)^2]}} \quad (4.1-2)$$

Obteniendo la siguiente ecuación cuadrática en $\cot \theta_e$ análogamente a la referencia [25]

$$A \cot^2 \theta_e + B \cot \theta_e + C = 0 \quad (4.1-3)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= n_o^2 + (n_e^2 - n_o^2) \text{sen}^2 \phi \\ B &= -2(n_e^2 - n_o^2) \text{sen} \phi \cos \phi \\ C &= n_o^2 \text{sen}^2 \phi + n_e^2 \cos^2 \phi - \frac{n_o^2 n_e^2}{n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i} \end{aligned} \quad (4.1-4)$$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene el ángulo de refracción de la onda extraordinaria en función del ángulo de incidencia, del ángulo que rota el eje óptico y de los índices de refracción del medio isótropo y anisótropo, según

$$\text{tg} \theta_e = \frac{(n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \text{sen}^2 \phi) n_i \text{sen} \theta_i}{(n_e^2 - n_o^2) n_i \text{sen} \theta_i \text{sen} \phi \cos \phi \pm n_o n_e \sqrt{n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \text{sen}^2 \phi - n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}} \quad (4.1-5)$$

Sólo una de las dos soluciones de la ecuación (4.1-5) tiene significado físico para la refracción de la onda extraordinaria, la otra correspondería a una solución que debe ser rechazada, pues resultaría una refracción en sentido contrario hacia el primer medio. Si por ejemplo tenemos un cristal uniaxial

negativo como la calcita, donde $n_o = 1.658$ y $n_e = 1.486$ para $\lambda = 589 \text{ nm}$ [26], y para una orientación del eje óptico de 45° , con un ángulo de incidencia de 45° desde el aire, las dos soluciones para la refracción de la onda extraordinaria serían $\theta_e(+)=28^\circ.16$ y $\theta_e(-)=-25^\circ.61$. Para la onda ordinaria las soluciones de la refracción serían $\theta_o(+)=25^\circ.24$ y $\theta_o(-)=-25^\circ.24$. La primera solución, es decir, $\theta_e(+)$ y $\theta_o(+)$ es la elección correcta para las ondas que se refractan. La Tabla 2 muestra las soluciones analíticas de la refracción para diferentes orientaciones ϕ del eje óptico respecto de la interfase entre el medio isótropo y medio anisótropo.

ϕ	$tg \theta_o$	$tg \theta_e$
0	$\frac{n_i \text{sen} \theta_i}{\sqrt{n_o^2 - n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}$	$\frac{n_o}{n_e} tg \theta_o$
30°	$\frac{n_i \text{sen} \theta_i}{\sqrt{n_o^2 - n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}$	$\frac{(3n_o^2 + n_e^2)n_i \text{sen} \theta_i}{\sqrt{3(n_e^2 - n_o^2)n_i \text{sen} \theta_i + 2n_o n_e \sqrt{(3n_o^2 + n_e^2) - 4n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}}$
45°	$\frac{n_i \text{sen} \theta_i}{\sqrt{n_o^2 - n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}$	$\frac{(n_o^2 + n_e^2)n_i \text{sen} \theta_i}{(n_e^2 - n_o^2)n_i \text{sen} \theta_i + n_o n_e \sqrt{2(n_o^2 + n_e^2) - 4n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}$
60°	$\frac{n_i \text{sen} \theta_i}{\sqrt{n_o^2 - n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}$	$\frac{(n_o^2 + 3n_e^2)n_i \text{sen} \theta_i}{\sqrt{3(n_e^2 - n_o^2)n_i \text{sen} \theta_i + 2n_o n_e \sqrt{(n_o^2 + 3n_e^2) - 4n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}}$
90°	$\frac{n_i \text{sen} \theta_i}{\sqrt{n_o^2 - n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}$	$\frac{n_e n_i \text{sen} \theta_i}{n_o \sqrt{n_e^2 - n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}$

Tabla 2. Tangente de los ángulos de refracción θ_o y θ_e de las ondas ordinaria y extraordinaria respectivamente con diferentes orientaciones ϕ del eje óptico en función del ángulo de incidencia.

4.1.2. Dispersión angular de la onda extraordinaria.

El ángulo de dispersión δ se define como el ángulo formado entre el vector de onda extraordinaria \mathbf{k}_e y el vector del rayo extraordinario \mathbf{S}_e , como puede observarse en la Figura 11 (a)-(b). Es decir,

$$\delta = \theta'_e - \theta_e. \quad (4.1-6)$$

Cuando el elipsoide de índices se encuentra en la sección principal XZ, como se muestra en la Figura 12,

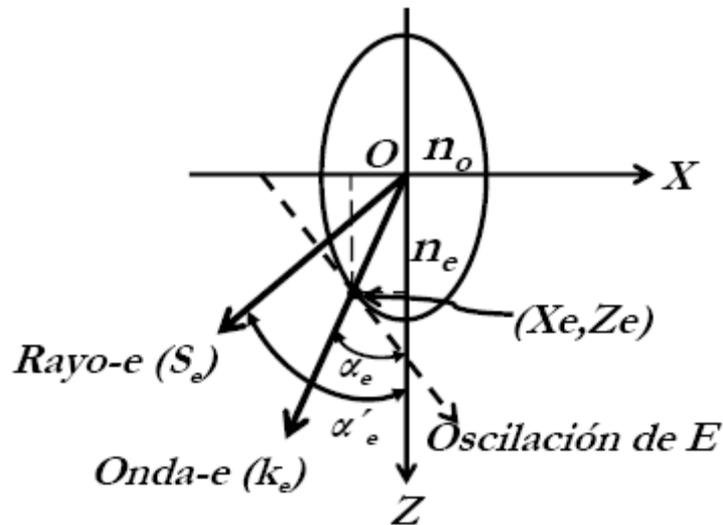


Figura. 12. Sección del elipsoide de índices en el plano XZ. La onda extraordinaria (Onda-e) dentro del medio anisótropo pasa por el punto (X_e, Z_e) cuya línea tangente es la oscilación ó vibración del campo eléctrico (Oscilación de E) de la onda plana que se propaga. El rayo extraordinario es perpendicular a esta tangente (Rayo-e).

La ecuación de la elipse es,

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1, \quad (4.1-7)$$

y el ángulo de dispersión, de acuerdo a la Figura 12, es

$$\delta = \alpha'_e - \alpha_e \quad (4.1-8)$$

donde α_e es el ángulo formado entre la onda extraordinaria que pasa por (X_e, Z_e) de la superficie de índices (indicatriz óptica) y el eje Z, dado por

$$\text{tg } \alpha_e = -\frac{X_e}{Z_e} \quad (4.1-9)$$

y α'_e es el ángulo formado entre el rayo extraordinario y el eje Z, dado por

$$\operatorname{tg} \alpha'_e = \left[\frac{dz}{dx} \right]_{(X_e, Z_e)} = \frac{n_e^2}{n_o^2} \operatorname{tg} \alpha_e. \quad (4.1-10)$$

El rayo extraordinario es perpendicular a la vibración (oscilación) del campo eléctrico, cuya dirección de oscilación es tangente a la superficie de índices en el punto (X_e, Z_e) . Sustituyendo (4.1-10) en (4.1-8), se obtiene

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(n_e^2 - n_o^2) \operatorname{tg} \alpha_e}{n_o^2 + n_e^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_e}. \quad (4.1-11)$$

Si se tiene en cuenta la ecuación (4.1-6), las Figuras 11 y 12, podemos expresar la siguiente relación entre los ángulos definidos,

$$\alpha_e = \phi - \theta_e = \theta - \frac{\pi}{2} \quad (4.1-12)$$

Sustituyendo (4.1-12) en (4.1-11), se obtiene el ángulo de dispersión δ en función del ángulo θ que el vector de onda de la onda extraordinaria refractada forma con la dirección del eje óptico, quedando

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(n_e^2 - n_o^2) \operatorname{tg} \theta}{n_e^2 + n_o^2 \operatorname{tg}^2 \theta}. \quad (4.1-13)$$

Esta expresión está de acuerdo con la referencia [27]. Finalmente, podemos expresar el ángulo de dispersión como una función de la orientación del eje óptico ϕ , y el ángulo de refracción de la onda extraordinaria θ_e ,

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(n_e^2 - n_o^2) [\operatorname{tg} \phi + (\operatorname{tg}^2 \phi - 1) \operatorname{tg} \theta_e - \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg}^2 \theta_e]}{n_o^2 + n_e^2 \operatorname{tg}^2 \phi + 2(n_o^2 - n_e^2) \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \theta_e + (n_e^2 + n_o^2 \operatorname{tg}^2 \phi) \operatorname{tg}^2 \theta_e} \quad (4.1-14)$$

Las ecuaciones (4.1-5) y (4.1-14) dan el ángulo de dispersión dependiente del ángulo de incidencia para cualquier orientación del eje óptico. Cuando $\phi = 0^\circ$ y $\phi = 90^\circ$, se obtiene el siguiente ángulo de dispersión

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(n_e^2 - n_o^2) n_i \sin \theta_i \sqrt{n_o^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}}{n_e n_o^3} \quad (4.1-15)$$

4.1.3. Propagación del rayo extraordinario.

Teniendo en cuenta las Figuras 11 y 12, se puede obtener el ángulo de refracción del rayo extraordinario θ'_e , sabiendo que,

$$\theta'_e = \phi - \alpha'_e. \quad (4.1-16)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.1-10) y (4.1-12) en (4.1-16), se tiene que

$$\operatorname{tg} \theta'_e = \frac{\operatorname{tg} \phi - \operatorname{tg} \alpha'_e}{1 + \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \alpha'_e} = \frac{(n_o^2 - n_e^2) \operatorname{tg} \phi + (n_o^2 \operatorname{tg}^2 \phi + n_e^2) \operatorname{tg} \theta_e}{n_o^2 + n_e^2 \operatorname{tg}^2 \phi + (n_o^2 - n_e^2) \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \theta_e}, \quad (4.1-17)$$

y teniendo en cuenta la tangente del ángulo de refracción θ_e de la onda extraordinaria dado por la ecuación (4.1-5), se calcula el ángulo de refracción del rayo extraordinario θ'_e en función del ángulo de incidencia para cualquier orientación del eje óptico, mediante

$$\operatorname{tg} \theta'_e = \frac{n_o n_e n_i \sin \theta_i + (n_o^2 - n_e^2) \sin \phi \cos \phi \sqrt{n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \sin^2 \phi - n_i^2 \sin^2 \theta_i}}{(n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \sin^2 \phi) \sqrt{n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \sin^2 \phi - n_i^2 \sin^2 \theta_i}}. \quad (4.1-18)$$

Esta ecuación se derivó por otros autores, utilizando métodos analíticos alternativos (método matricial) a la representación geométrica que se ha utilizado en este trabajo [28]. La Tabla 3 muestra las soluciones que permiten el cálculo del ángulo de refracción del rayo extraordinario para distintas orientaciones del eje óptico del cristal en función del ángulo de incidencia.

ϕ	$tg \theta'_e$
0	$\frac{n_e n_i \text{sen} \theta_i}{n_o \sqrt{n_o^2 - n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}$
30°	$\frac{8n_o n_e n_i \text{sen} \theta_i + \sqrt{3}(n_o^2 - n_e^2) \sqrt{3n_o^2 + n_e^2 - 4n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}{(3n_o^2 + n_e^2) \sqrt{3n_o^2 + n_e^2 - 4n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}$
45°	$\frac{2\sqrt{2}n_o n_e n_i \text{sen} \theta_i + (n_o^2 - n_e^2) \sqrt{n_o^2 + n_e^2 - 2n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}{(n_o^2 + n_e^2) \sqrt{n_o^2 + n_e^2 - 2n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}$
60°	$\frac{8n_o n_e n_i \text{sen} \theta_i + \sqrt{3}(n_o^2 - n_e^2) \sqrt{n_o^2 + 3n_e^2 - 4n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}{(n_o^2 + 3n_e^2) \sqrt{n_o^2 + 3n_e^2 - 4n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}$
90°	$\frac{n_o n_i \text{sen} \theta_i}{n_e \sqrt{n_e^2 - n_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}}$

Tabla 3. Tangente de los ángulos de refracción θ'_e del rayo extraordinario con diferentes orientaciones ϕ del eje óptico en función del ángulo de incidencia.

4.1.4. Ángulo de la refracción doble (“walk-off”).

Generalmente, los haces ordinario y extraordinario en un cristal uniáxico y en muchos biáxicos que se emplean en óptica no lineal (NLO) no van completamente solapados, como hemos visto anteriormente, sino que se dice que el haz extraordinario se separa del ordinario, denominándose este efecto como “walk-off”. A la diferencia entre el ángulo de refracción del rayo extraordinario y ordinario se llama ángulo de refracción doble ρ , y puede ser de unos cuantos grados. Para calcular este ángulo, utilizamos la siguiente expresión

$$tg \rho = tg(\theta'_e - \theta_o) = \frac{tg \theta'_e - tg \theta_o}{1 + tg \theta'_e tg \theta_o}. \quad (4.1-19)$$

Introduciendo la expresión (4.1-18) en (4.1-19) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \rho = & \frac{\left(n_o n_e n_i \sin \theta_i + (n_o^2 - n_e^2) \sin \phi \cos \phi \sqrt{n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \sin^2 \phi - n_i^2 \sin^2 \theta_i} \right) \sqrt{n_o^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}}{-n_i \sin \theta_i (n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \sin^2 \phi) \sqrt{n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \sin^2 \phi - n_i^2 \sin^2 \theta_i}} \\
 & + \frac{(n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \sin^2 \phi) \sqrt{n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \sin^2 \phi - n_i^2 \sin^2 \theta_i} \sqrt{n_o^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}}{\left(n_o n_e n_i \sin \theta_i + (n_o^2 - n_e^2) \sin \phi \cos \phi \sqrt{n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \sin^2 \phi - n_i^2 \sin^2 \theta_i} \right) n_i \sin \theta_i}
 \end{aligned}
 \tag{4.1-20}$$

Este ángulo es el mismo que el de dispersión en incidencia normal. Su valor se obtiene a partir de la expresión (4.1-20) cuando $\theta_i = 0$, obteniendo

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{(n_o^2 - n_e^2) \sin \phi \cos \phi}{n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \sin^2 \phi} .
 \tag{4.1-21}$$

La Tabla 4 muestra las ecuaciones que determinan el ángulo de “walk-off” para diferentes valores en la orientación del eje óptico.

ϕ	$\operatorname{tg} \theta'_e = \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \rho$
$0^\circ, 90^\circ$	0
30°	$\frac{\sqrt{3}(n_e^2 - n_o^2)}{3n_o^2 + n_e^2}$
45°	$\frac{n_e^2 - n_o^2}{n_o^2 + n_e^2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}(n_e^2 - n_o^2)}{n_o^2 + 3n_e^2}$

Tabla 4. Tangente del ángulo de la refracción doble ρ con diferentes orientaciones ϕ del eje óptico en incidencia normal.

La Figura 13 describe los ángulos calculados de la refracción de las ondas y rayos que intervienen en un cristal de calcita con el eje óptico orientado a 45° en función del ángulo de incidencia. Los valores calculados se corresponden para una longitud de onda de 589 nm.

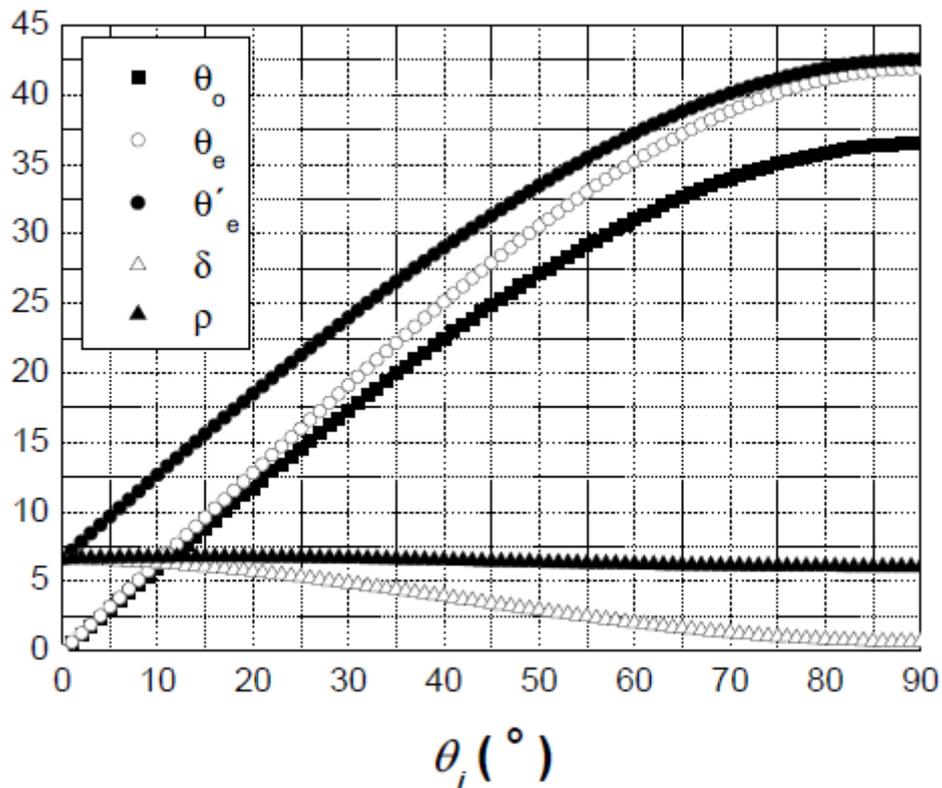


Figura 13. Ángulos de refracción, dispersión y walk-off (en grados) dependientes del ángulo de incidencia en un cristal de calcita a 589 nm de longitud de onda, cuando el eje óptico se encuentra a $\Phi = 45^\circ$ de la interfase medio isotropo-anisotropo. θ_o (■) y θ_e (○) son los ángulos de refracción de la onda ordinaria y extraordinaria respectivamente, θ'_e (●) es el ángulo de refracción del rayo extraordinario, δ (△) and ρ (▲) son los ángulos de dispersión y walk-off respectivamente.

Como puede observarse, el ángulo de walk-off es prácticamente constante con el ángulo de incidencia, cumpliéndose que,

$$\rho = \operatorname{atg} \left(\frac{n_e^2 - n_o^2}{n_o^2 + n_e^2} \right). \quad (4.1-22)$$

4.1.5. Ángulo máximo de refracción doble en incidencia normal.

En un cristal uniáxico, la separación máxima angular de los rayos ordinario y extraordinario (walk-off) a incidencia normal, ocurre cuando el vector de onda incidente satisface la ecuación (4.1-21), donde $\phi' = 90^\circ - \phi$ respecto de la normal, cumpliéndose

$$\begin{aligned}\frac{d \operatorname{tg} \rho}{d \phi} &= 0 \\ \operatorname{tg} \phi &= \frac{n_o}{n_e} \\ \operatorname{tg} \phi' &= \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{n_e}{n_o}\end{aligned}\quad (4.1-23)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.1-21) y (4.1-23) se obtiene la dispersión angular máxima a incidencia normal por medio de

$$\operatorname{tg} \rho_{\max} = \frac{(n_e^2 - n_o^2)}{2n_e n_o}, \quad (4.1-24)$$

que es una ecuación que se comporta similarmente a la (4.1-22), según la Figura 13. Por ejemplo, la calcita (uniáxico negativo) y el cuarzo (uniáxico positivo) adquieren los valores máximos del walk-off, a incidencia normal y para una longitud de onda de $\lambda = 589 \text{ nm}$, que se muestran en la tabla 5.

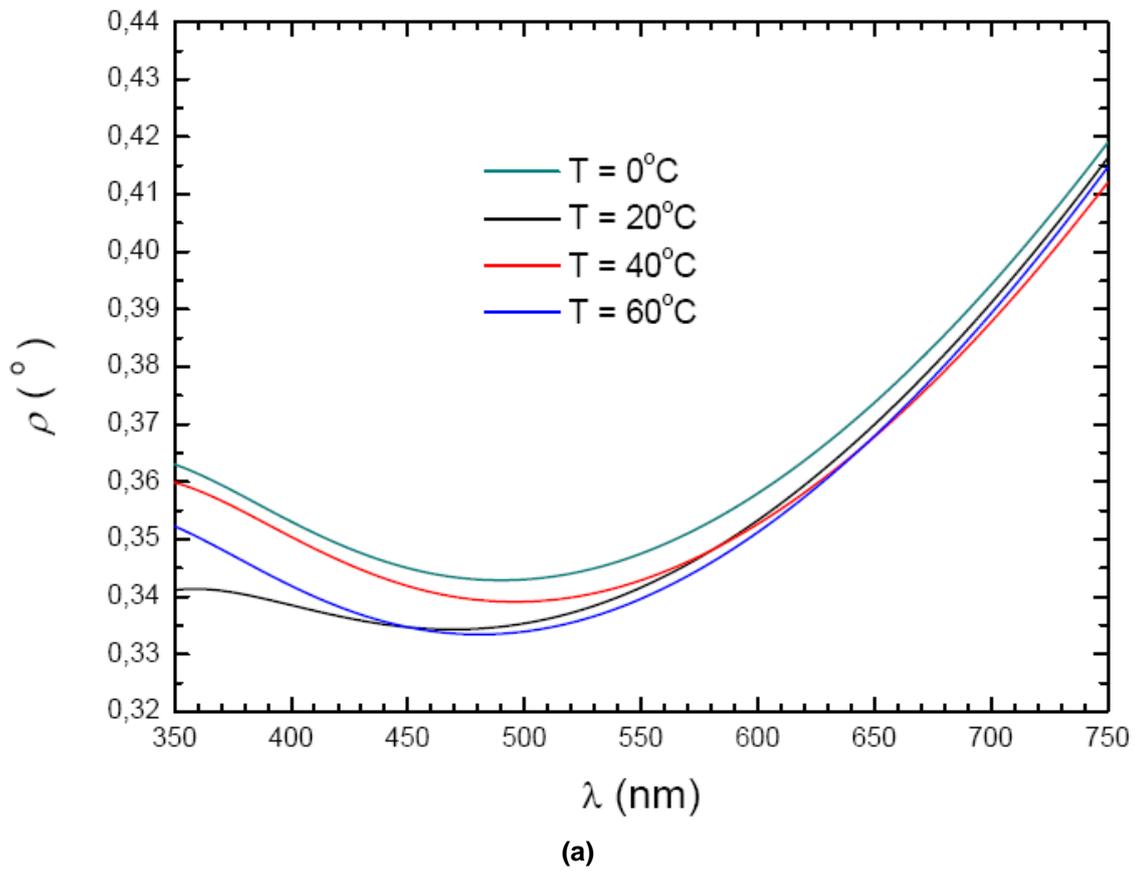
Calcita ($n_o = 1.658$ y $n_e = 1.486$) [1]	Cuarzo ($n_o = 1.544$ y $n_e = 1.553$) [1]
$\phi = 48^\circ.13$	$\phi = 44^\circ.83$
$\phi' = 42^\circ.87$	$\phi' = 45^\circ.17$
$ \rho_{\max} = 6^\circ.25$	$ \rho_{\max} = 0^\circ.35$

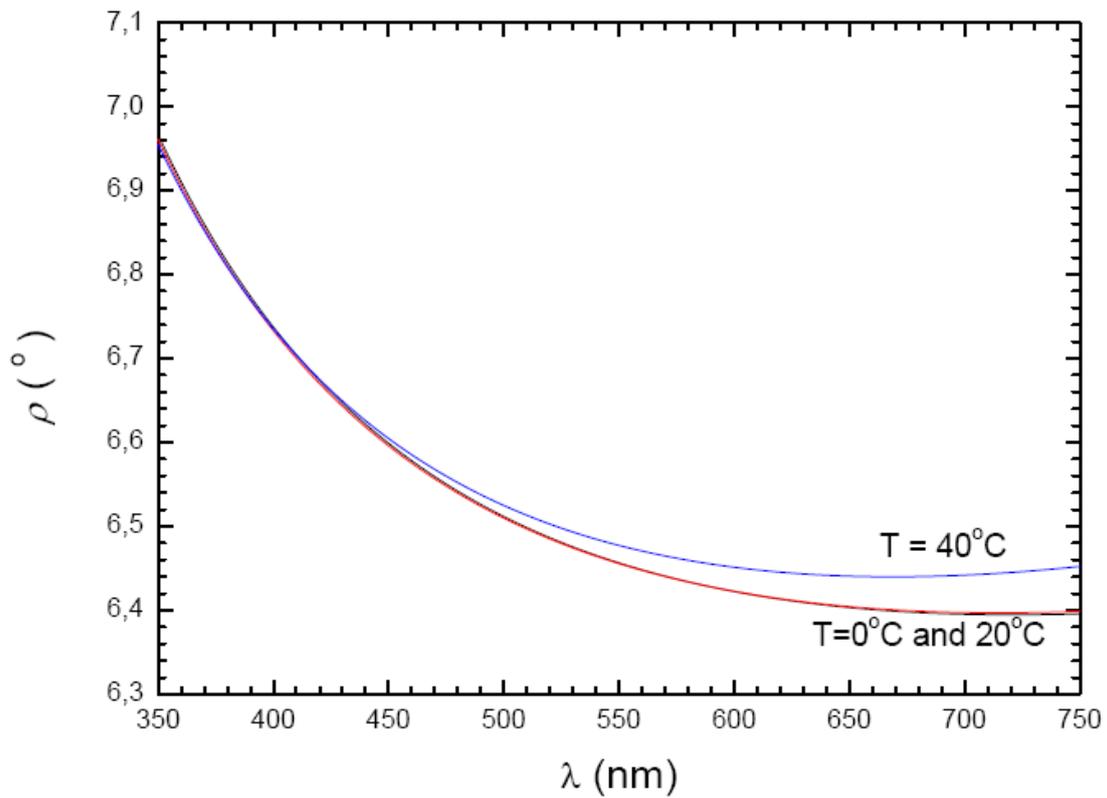
Tabla 5. Valores de la refracción doble máxima en incidencia normal en un cristal de calcita y otro de cuarzo.

Los índices de refracción varían con la longitud de onda mediante las ecuaciones de Sellmeier a diferentes temperaturas (coeficientes termo ópticos) [26, 29, 30].

$$\begin{aligned}n_o^2(T) &= A_o(T) + \frac{B_o(T)}{\lambda^2 - C_o(T)} - D_o(T)\lambda^2 \\ n_e^2(T) &= A_e(T) + \frac{B_e(T)}{\lambda^2 - C_e(T)} - D_e(T)\lambda^2\end{aligned}\quad (4.1-25)$$

Las Figuras 14(a)–(b) muestran las curvas de dispersión de la doble refracción máxima a incidencia normal para un cristal de cuarzo y calcita respectivamente, a diferentes temperaturas.





(b)

Figura 14. (a) Curvas de dispersión de la doble refracción máxima en incidencia normal en un cristal de cuarzo a diferentes temperaturas y **(b)** curvas de dispersión en un cristal de calcita. Los coeficientes de Sellmeier A, B, C y D para un rango de 350–750 nm han sido usados para temperaturas de 0°C, 20°C, 40°C y 60°C.

4.2. Propagación del rayo extraordinario para una orientación (ψ , ϕ) arbitraria del eje óptico.

El ángulo que forma el vector de onda extraordinario respecto del eje óptico θ se puede expresar en función de los ángulos ψ , ϕ y θ_e utilizando el producto escalar entre los vectores unitarios del eje óptico y la onda extraordinaria refractada mediante,

$$(\cos\psi \cos\phi, \sin\psi \cos\phi, \sin\phi) \cdot (\sin\theta_e, 0, \cos\theta_e) = \cos\theta. \quad (4.2-1)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.1-4), (4.1-5) y (4.2-1) se puede determinar θ_e en función de n_i , n_o , n_e , ψ y ϕ .

Las direcciones del vector unitario del rayo extraordinario (s_{ex} , s_{ey} , s_{ez}) del eje óptico ($\cos\psi \cos\phi$, $\text{sen}\psi \cos\phi$, $\text{sen}\phi$) y de la onda extraordinaria ($\text{sen}\theta_e$, 0, $\cos\theta_e$) son coplanarios. De esta forma,

$$\begin{vmatrix} s_{ex} & s_{ey} & s_{ez} \\ \cos\psi \cos\phi & \text{sen}\psi \cos\phi & \text{sen}\phi \\ \text{sen}\theta_e & 0 & \cos\theta_e \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2-2)$$

Además, teniendo en cuenta,

$$s_{ex}^2 + s_{ey}^2 + s_{ez}^2 = 1 \quad (4.2-3)$$

y el ángulo de dispersión δ ,

$$(s_{ex}, s_{ey}, s_{ez}) \cdot (\text{sen}\theta_e, 0, \cos\theta_e) = \cos\delta, \quad (4.2-4)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} As_{ex}^2 + Bs_{ex} + C &= 0 \\ s_{ey} &= \frac{\text{sen}\psi \cos\phi (s_{ex} - \text{sen}\theta_e \cos\delta)}{\cos\psi \cos\phi \cos^2\theta_e - \text{sen}\phi \text{sen}\theta_e \cos\theta_e} \\ s_{ez} &= \frac{\cos\delta - s_{ex} \text{sen}\theta_e}{\cos\theta_e} \end{aligned} \quad (4.2-5)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{1}{\cos^2\theta_e} \left[\frac{\text{sen}^2\psi \cos^2\phi + \text{sen}^2\theta_e (\cos\psi \cos\phi \cos\theta_e - \text{sen}\phi \text{sen}\theta_e)^2}{(\cos\psi \cos\phi \cos\theta_e - \text{sen}\phi \text{sen}\theta_e)^2} \right] \\ B &= \frac{2\text{sen}\theta_e \cos\delta}{\cos^2\theta_e} \left[\frac{\text{sen}^2\psi \cos^2\phi + (\cos\psi \cos\phi \cos\theta_e - \text{sen}\phi \text{sen}\theta_e)^2}{(\cos\psi \cos\phi \cos\theta_e - \text{sen}\phi \text{sen}\theta_e)^2} \right] \\ C &= 1 + \frac{\cos^2\delta}{\cos^2\theta_e} \left[\frac{\text{sen}^2\psi \cos^2\phi \text{sen}^2\theta_e + (\cos\psi \cos\phi \cos\theta_e - \text{sen}\phi \text{sen}\theta_e)^2}{(\cos\psi \cos\phi \cos\theta_e - \text{sen}\phi \text{sen}\theta_e)^2} \right] \end{aligned} \quad (4.2-6)$$

Cuando el eje óptico se encuentra en el plano de incidencia $\psi = 0^\circ$, los cosenos directores de la dirección del eje óptico toman los valores ($\cos\phi$, 0,

$\text{sen}\phi$). En este caso, resolviendo (4.2-5) y (4.2-6), se obtiene la dirección del rayo extraordinario como,

$$\begin{aligned} s_{ex} &= \frac{1}{\cos 2\theta_e} \left[\text{sen}\theta_e \cos\delta \pm \sqrt{\text{sen}^2\theta_e \cos^2\delta - \cos 2\theta_e (\cos^2\theta_e + \cos^2\delta)} \right] \\ s_{ey} &= 0 \\ s_{ez} &= \frac{1}{\cos\theta_e} (\cos\delta - \text{sen}\theta_e s_{ex}) \end{aligned} \quad . \quad 10)$$

5. Conclusiones

En este trabajo se ha realizado un amplio estudio de la propagación de la luz en medios anisótropos, concretamente en cristales. Se ha realizado una clasificación óptica de los cristales y se han estudiado los modos normales de propagación de la onda incidente utilizando las ecuaciones de Maxwell. Además, se ha estudiado el fenómeno de la doble refracción en cristales uniáxicos, calculando las expresiones de los ángulos de refracción de las ondas y rayos ordinarios y extraordinarios resultantes en la propagación, así como el ángulo de dispersión y el ángulo de doble refracción (walk-off), y se han dado valores de dichas cantidades para distintas orientaciones del eje óptico en incidencia normal. Un cristal de calcita y otro de cuarzo han sido analizados y se han calculado sus valores máximos del walk-off a incidencia normal y para una longitud de onda de $\lambda = 589 \text{ nm}$, así como sus curvas de dispersión en incidencia normal a diferentes temperaturas en un rango donde la longitud de onda toma valores de 350–750 nm.

El estudio de la doble refracción en cristales biáxicos no se ha podido realizar en esta memoria, debido a que la extensión de la misma no lo permite.

6. Referencias

1. Yariv, A. and Yeh, P. Optical Waves in Cystals. John Wiley and Sons. New York 1984.
2. Cabrera, J.M., Agulló López, F y López, F.J. Óptica Electromagnética. Vol. II. Addison-Wesley. Madrid 2000.
3. C. Hernández-Rodríguez and A.B. Frago-López. "Comment on refractive indices of biaxial crystals evaluated from the refractive indices ellipsoid equations". Optics and Laser Technology 2014; 55:1-5.

4. Dontu S, Popescu AA, Savastru D, Sava V, Chiricuta B, Mihailescu M, Negutu C, Vasile GC, Puscas NN. Advanced methods of characterization of the thin chalcogenide films, passive and active optical waveguides. University Politehnica of Bucharest. Scientific Bulletin, Series A 2013; 75:163–80.
5. Fisher R, Saltiel SM, Neshev DN, Krolikowski W, Kivshar YS. Transverse second-harmonic generation from disordered nonlinear crystals. Central European Journal of Physics 2008; 6:569–74.
6. Landry GD, Maldonado TA. Counterpropagating quasi-phase matching: a generalized analysis. Journal of Optical Society of America B 2004; 21:1509–20.
7. Kaway M, Mori M, Yamamoto T, Tsuboi O, Tanaka K, Morito K, Sawaki I, Sugawara M. Optical components and devices for next-generation photonic networks. Fujitsu Science Technology Journal 2006; 42:483–93.
8. Chen C. Recent advances in nonlinear optical and electro-optical materials. Annual Review of Materials Science 1986; 16:203–43.
9. Pack MV, Armstrong DJ, Smith AV, Amiet ME. Second harmonic generation with focused beams in a pair of walkoff-compensating crystals. Optics Communications 2003; 21:211–21.
10. De Witte AJ. Equivalence of Huygens' principle and Fermat's principle in ray geometry. American Journal of Physics 1959; 27:293–301.
11. Avendaño-Alejo M, Stavroudis ON, Boyain y Goitia AR. Huygens's principle and rays in uniaxial anisotropic media. I. Crystal axis normal to refracting surface. Journal of Optical Society of America A 2002; 19:1668–73.
12. Avendaño-Alejo M, Stavroudis ON. Huygens's principle and rays in uniaxial anisotropic media. II. Crystal axis orientation arbitrary. Journal of the Optical Society of America A 2002; 19:1674–9.
13. Berreman DW. Optics in Stratified and Anisotropic Media: 4×4 -Matrix Formulation. Journal of Optical Society of America 1972; 62:502–10.
14. Simon MC. Refraction in biaxial crystals: a formula for the indices. Journal of the Optical Society of America A 1987; 4:2201–4.
15. Abdulhalim I. Analytic formulae for the refractive indices and the propagation angles in biaxial and gyrotropic media. Optics Communications 1998; 157:265–72.
16. Ding W, Chen L, Liang CH. Characteristics of electromagnetic wave propagation in biaxially anisotropic left-handed materials. Progress In Electromagnetics Research 2007; 70:37–52.
17. Lizuka K. Propagation of light in anisotropic crystals. Elements of Photonics 2002; 1:263–301.
18. Wu H, Zhang C, Bai X. A complete description of polarization and transmission of nonnormal incident rays in a uniaxial birefringent plate with arbitrary optic axis. Optics Communications 2010; 283:4129–34.
19. Qi H, Wang J, Shao J, Fan Z. Analysis of electromagnetic propagation in birefringent thin film. Science in China (Series G: Physics, Mechanics and Astronomy) 2005; 48(5):513–20.

-
20. Latorre, P, Seron FJ, Gutiérrez D. Birefringence: calculation of refracted ray paths in biaxial crystals. *Visual Computer* 2012; 28:341–56.
 21. Debelov VA, Kozlov DS. A local model of light interaction with transparent crystalline media. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 2013; 19:1274–87.
 22. Luo H, Hu W, Yi X, Liu H, Zhu J. Amphoteric refraction at the interface between isotropic and anisotropic media. *Optics Communications* 2005; 254:353–60.
 23. Perez LI, Garea MT, Echarri RM. Isotropic-uniaxial crystal interfaces: negative refraction and backward wave phenomena. *Optics Communications* 2005; 254:10–18.
 24. Belsky AM, Stepanov MA. Internal conical refraction of light beams in biaxial gyrotropic crystals. *Optics Communications* 2002; 204:1–6.
 25. Zhang Z, Caulfield HJ. Reflection and refraction by interfaces of uniaxial crystals. *Optics and Laser Technology* 1996; 28:549–53.
 26. Li H, Wu F, Fan J. Sellmeier coefficients for the refractive indices of calcite at crystal different temperatures. *Journal of Applied Optics* 2004; 5:7–10.
 27. Liang QT. Simple ray tracing formulas for uniaxial optical crystals. *Applied Optics* 1990; 29:1008-10.
 28. Avendaño-Alejo M. Analysis of the refraction of the extraordinary ray in a plane-parallel uniaxial plate with an arbitrary orientation of the optical axis. *Optics Express* 2005; 13:2549–55.
 29. Zhao S, Wu F. The study on dispersive equation and thermal refractive index coefficient of quartz crystal. *Acta Photonica Sinica* 2006; 35:1183–86.
 30. Ghosh G. Dispersion-equation coefficients for the refractive index and birefringence of calcite and quartz crystals. *Optics Communications* 1999; 163:95-102.
 31. Ren H, Liu L, Liu D and Song Z. Double refraction and reflection of sequential crystal interfaces with arbitrary orientation of the optic axis and application to optimum design. *Journal of Modern Optics* 2005; 52:529–39.