



**Universidad  
de La Laguna**

Escuela de Doctorado y Estudios de Posgrado  
Máster en Astrofísica

TRABAJO FIN DE MÁSTER

---

**Mejora de un programa de integración sobre  
el lóbulo de Roche. Aplicación a SS Cygni**

---

Pablo López Díaz

Tutor: Ignacio González Martínez-Pais

5 de julio de 2024

# Índice

<b>1. 1. Abstract</b>	<b>3</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>5</b>
2.1. El problema restringido circular de 3 cuerpos . . . . .	6
2.2. El lóbulo de Roche . . . . .	7
2.3. Variables cataclísmicas . . . . .	8
2.4. Modulación elipsoidal . . . . .	9
2.5. Limb-Darkening . . . . .	10
2.6. Gravity-Darkening . . . . .	11
<b>3. Objetivos</b>	<b>13</b>
<b>4. Los datos</b>	<b>14</b>
4.1. SS Cygni . . . . .	14
4.2. Preparación de los datos . . . . .	15
4.3. Selección de las noches . . . . .	16
4.4. Comparativa entre las mejores noches . . . . .	19
<b>5. Metodología</b>	<b>23</b>
5.1. El programa . . . . .	23
5.2. Probando el programa . . . . .	24
5.3. Generamos la biblioteca . . . . .	27
5.4. Programa comparador de curvas . . . . .	27
<b>6. Resultados</b>	<b>32</b>
<b>7. Trabajo futuro</b>	<b>38</b>
<b>A. Figuras no usadas en el texto</b>	<b>41</b>

## 1. 1. Abstract

A binary system is a set of two gravitationally bounded stars. Usually, the more massive star is referred to as the primary component, while the other one is the secondary star.

The Roche potential is the potential of a two body system as measured in a corotating reference system located at the center of mass. The equipotential surfaces of the Roche potential acquire complex shapes but we are only interested on the specific one containing the  $L_1$  Lagrange point, which is an unstable equilibrium point. This surface consists on two lobes, one around each star, which is called the Roche lobe (RL). A star's RL encloses the region where the gravity of the corresponding star dominates. This implies that the shape of a star will depart from sphere in case it fills its RL.

A binary in which only one star fills its RL it is called a close binary. In these systems, mass transfer occurs from the filling RL star to its companion through the  $L_1$  point. A cataclysmic variable (CV) is a close binary where the star that fills its RL is a late spectral type (K-M) main sequence star and its companion is a white dwarf. Depending on the mass transfer rate, the accretion disk which forms around the latter can drastically vary its temperature, modifying the flux emitted by the system. Dwarf novæ are a group of CVs whose brightness can suddenly change by 2-6 magnitudes so that the system shows two states: quiescence (Q) and eruption (E).

Due to the different apparent areas the RL shows during an orbital period, its light curve shows changes in brightness (see figura 5). This variation is called ellipsoidal modulation (EM) and it is the main concept of this work. Two effects that modify the shape of the light curves are the Limb-Darkening (LD) and the Gravity-Darkening (GD). The former describes how the brightness of a star decays from its disk's center towards the limb, while the latter describes the dependence of the temperature of a star on its gravity surface. We took into account both effects (considering 3 different laws for the LD effect) in order to evaluate the effect they have on the light curve.

The objectives of this work are to upgrade and optimize a Python script which generates synthetic light curves of a RL, to test it varying the values of different parameters of the binary, to generate a library with many different light curves and to compare each of them with the data we have of SS Cygni. From the best fits found from that comparison we can estimate some system parameters, such as the inclination.

In order to perform these comparisons it is needed a previous selection and analysis of our data. The EM is an effect produced by the star filling its RL, so in dwarf novæ it is produced by a late spectral type star. A K-M star has a low temperature and its emission can be so weak that other emissions in the system can easily hide it, for instance an accretion disk, a hot spot, etc...

Our data were acquired in 2004 and 2005 and consist on photometry from a total of 19 nights. As a dwarf nova can be in two different states depending on its emission activity and given that we were interested in low activity states, we selected those nights when SS Cygni was clearly in quiescence (see figure 8). A further selection was needed because in some of these nights the system still showed a mean flux level higher than others, so we eventually selected only 2 valid nights. Since the points with lower flux represent the EM, we obtained the lower envelope of our data and we used it as a reference for neglecting high flux points from the data. We finally divided the data into 20 equally spaced bins and, for each bin, we neglected the 80% of the points with higher residuals respect to the lower envelope.

In order to generate a library of synthetic light curves, we first evaluated the impact that varying the values of the parameters has on the light curve. These parameters are  $i$ , the inclination,  $q = M_2/M_1$ , the mass ratio between the secondary and the primary,  $T_2$ , the temperature of the secondary star and  $M_2$ . We also tested 3 different laws for the LD effect. From these testing we concluded that the shape of the RL's light curve is highly sensible to the inclination of the system, while varying the other parameters does not have a remarkable impact on the shape, although they do on the flux level. We then computed three libraries, one for each filter varying  $30^\circ \leq i \leq 60^\circ$  in steps of one degree and  $0.5 \leq q \leq 0.76$  in steps of 0.02. For the rest of the parameters we chose  $T_2 = 4590$  K and  $M_2 = 0.693M_\odot$ , as well as the most sophisticated law for the LD effect.

We then tested the comparison program by choosing one of the synthetic light curves, performing a linear transformation on it and adding normal noise. After that, we compared the resulting light curve with each synthetic curve of the library and recovered the value of the inclination of the original light curve within a small error.

We found that the inclination of SS Cygni is  $i = 43.2_{-4.7}^{-4.2}$  degrees using  $q = 0.683$  from Bitner et al. (2007), while using  $q = 0.628$  from Hill et al. (2017) we found  $i = 44.6_{-4.0}^{+4.8}$ , both for the I filter and the  $\chi^2$  comparison method. We also performed the analysis through the bootstrapping method resulting in  $i = 47.1_{-1.5}^{+1.5}$  for the I filter, which is compatible with the values obtained with  $\chi^2$ . We could not estimate the value of  $q$  since the ellipsoidal modulation analysis is not sensitive to it. Apart from the results obtained, we confirmed that identifying the real relaxed state of the system is crucial for the EM study and it is not an easy task. If one wants to perform an EM study of SS Cygni, multiple observations might be needed in order to identify correctly the pure quiescence state.

## 2. Introducción

Una binaria es un conjunto de dos estrellas gravitacionalmente ligadas. Cada una de las dos estrellas recibe el nombre de componente del sistema, siendo la más masiva la componente primaria y la menos masiva la componente secundaria (aunque en ocasiones se denomina primaria a la más luminosa). Las binarias se pueden clasificar en base al método por el cual son detectadas, a saber: visuales, espectroscópicas, eclipsantes y astrométricas.

- **Visuales:** Son aquellas que pueden ser resueltas visualmente (se pueden distinguir ambas componentes), es decir, deben estar lo suficientemente cerca de nosotros y separadas entre sí, además de tener el brillo necesario.
- **Espectroscópicas:** Se pueden resolver mediante espectroscopía, ya sea por diferencias en velocidades radiales (Doppler), espectros estelares...
- **Eclipsantes:** Se detectan mediante variaciones en las curvas de luz, ya que ambas componentes se van eclipsando mutuamente a medida que orbitan el centro de masas.
- **Astrométricas:** Se detectan mediante variaciones observadas en la trayectoria de una estrella en el plano del cielo, en forma de oscilaciones causadas por una estrella compañera que no se observa.

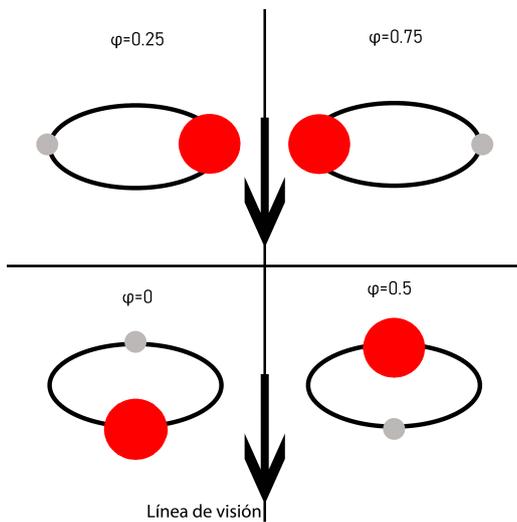


Figura 1: Distintas geometrías de una binaria atendiendo a sus fases. Con el fin de darle algo de perspectiva y generalidad, las órbitas se representan como elipses dado que se ha tomado una inclinación no nula.

La inclinación de una binaria,  $i$ , es el ángulo que forma la normal del plano orbital con la línea de visión (LOS). De esta manera, un sistema binario con  $i = 90^\circ$  mostraría eclipses ya que veríamos el sistema ‘de canto’, mientras que un sistema con  $i = 0^\circ$  se vería ‘desde arriba’. Para describir las posiciones de ambas estrellas no usaremos el tiempo, sino la fase:

$$\varphi = \frac{t - t_0}{P} \quad (1)$$

donde  $t_0$  es un tiempo de referencia que se toma como la conjunción inferior de la secundaria y  $P$  es el periodo de la binaria. Al dividir el tiempo entre el periodo orbital, la fase queda definida entre 0 y 1 y es periódica en la unidad. En la figura 5a se puede ver un esquema de las fases de una binaria, destacando los valores más relevantes de la misma.

## 2.1. El problema restringido circular de 3 cuerpos

El problema de los 3 cuerpos resulta caótico y complejo, no existiendo una solución general que sea práctica, sin embargo hay casos particulares que son tratables como el que nos interesa a nosotros. El caso restringido circular se reduce a considerar órbitas circulares y únicamente dos partículas, para estudiar el movimiento de una tercera partícula de masa despreciable respecto a las otras dos, de manera que no genera fuerza alguna sobre ellas.

El sistema de referencia (SR) que adoptaremos es uno co-rotante con el sistema, con origen en el centro de masas (CM) del mismo. Al hacer esto, el potencial tiene un término adicional por estar situados en un SR no inercial, el de la fuerza centrífuga. El potencial que siente la tercera partícula en este sistema, o potencial de Roche, es:

$$\Psi_R = -\frac{Gm_1}{R_1} - \frac{Gm_2}{R_2} - \frac{1}{2}\omega^2 P^2 \quad (2)$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de las partículas que generan el potencial,  $R_1$  y  $R_2$  son las distancias desde estas a la tercera,  $\omega$  es la velocidad angular del sistema y  $P$  es la distancia desde la tercera partícula al eje de rotación del sistema.

Con el fin de simplificar el problema, vamos primero a adimensionalizarlo. Para describir la posición de las dos primeras partículas resulta útil definir las masas adimensionalizadas como  $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ , de donde  $1 - \mu = \frac{m_1}{m_1+m_2}$ . Si  $a$  es la separación entre las dos partículas, tomando el eje X como aquel que une ambas partículas y apunta a la menos masiva, estas están situadas en  $a(-\mu, 0, 0)$  para  $m_1$  y  $a(1-\mu, 0, 0)$  para  $m_2$ . Si dividimos todas las distancias entre  $a$  conseguimos redimensionar todas las longitudes respecto a la separación de las dos partículas, por lo que redefinimos las variables  $r_1 = \frac{R_1}{a}$ ,  $r_2 = \frac{R_2}{a}$  y  $\rho = \frac{P}{a}$ . Tomando el eje Z el de rotación tenemos que  $P = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Multiplicando la ecuación (2) por el factor  $\frac{a}{G(m_1+m_2)}$  e incorporando las nuevas definiciones llegamos a:

$$\frac{a}{G(m_1+m_2)}\Psi_R = -\frac{G(1-\mu)}{r_1} - \frac{G\mu}{r_2} - \frac{1}{2}\omega^2 \rho^2 a^3 \frac{1}{G(m_1+m_2)}$$

Al haber dividido todos los términos del potencial entre la suma de las masas, hemos definido un nuevo sistema de unidades en el que  $m_1 + m_2 = 1$ . Además, vamos a tomar la unidad de tiempo de forma que  $P = 2\pi$ , lo que conlleva que  $\omega = \frac{2\pi}{P} = 1$ . Con todo esto, la tercera ley de Kepler nos devuelve  $G = 1$ , por lo que el potencial de Roche en coordenadas adimensionales es:

$$\psi_R = -\frac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (3)$$



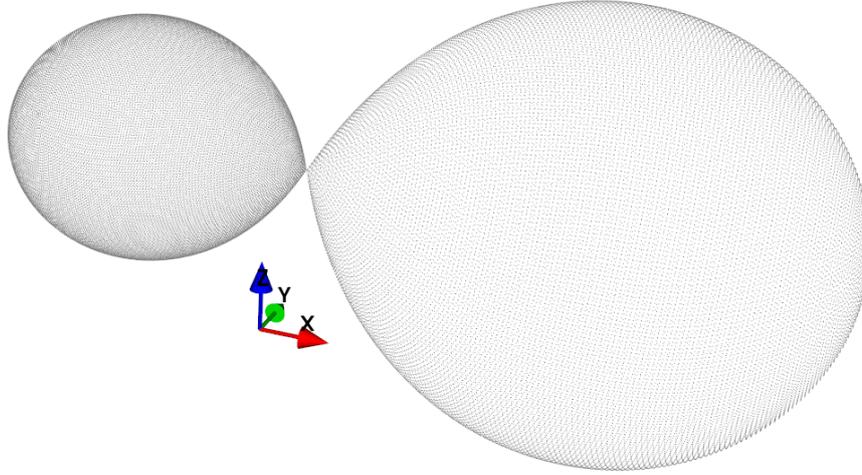


Figura 2: Representación en 3D de la superficie equipotencial que contiene al punto  $L_1$ , que a su vez define los dos LR, uno de cada estrella. En este sistema se ha escogido  $m_1 \neq m_2$ , lo que da lugar a dos LR de distintos tamaños.

## 2.2. El lóbulo de Roche

Del potencial de Roche nos interesa hallar la forma de las superficies equipotenciales (SE), esto es, en la ecuación (3), aquellos puntos donde  $\psi_R = cte$ . En general, estas SE tienen una topología complicada, pero solo nos interesa aquella que se corta a sí misma en un único punto, situado sobre la línea que une ambas partículas (ver figura 2). Este es el punto  $L_1$  de Lagrange y se trata de un punto de equilibrio inestable. A cada lado de este punto queda una hoja que recibe el nombre de lóbulo de Roche (LR). Si una estrella llena su LR, este, además de ser una SE, será también una superficie de presión y densidad constantes, lo que implica que se ajustará a su forma. En tal caso, la estrella no esférica sino ovoidea. El LR es de vital importancia a la hora de estudiar transferencia de masa en una binaria.

El tamaño del LR se define como el de una esfera cuyo volumen es el del LR. Su radio se calcula de manera aproximada mediante diferentes fórmulas, nosotros adoptaremos la de Eggleton (1983):

$$\frac{R_{L2}}{a} = \frac{0.49q^{2/3}}{0.6q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})} \quad (4)$$

donde  $R_{L2}$  es el radio del LR y  $q = m_2/m_1$  es la razón de masas.

Las binarias se pueden clasificar atendiendo a si sus componentes llenan o no sus LR:

- Binarias de contacto: Ambas estrellas llenan su LR
- Binarias cerradas: Una de las dos estrellas llena su LR
- Binarias abiertas: Ninguna estrella llena su LR



Esta misma clasificación puede verse visualmente en la figura 3, donde se muestra que, según el valor del potencial de Roche, las binarias serán de uno u otro tipo.

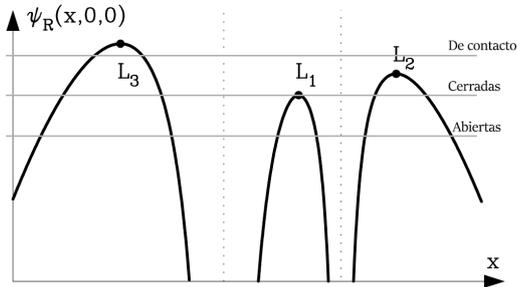


Figura 3: Clasificación de los sistemas binarios en base al potencial de Roche a lo largo del eje que une a ambas componentes. Figura cogida de Martínez-Pais (2003) y modificada bajo permiso.

Por otro lado, al ser  $L_1$  un punto de equilibrio inestable, una partícula que se encuentre en él con velocidad nula, permanecerá en él hasta que sufra una perturbación. Ante la presencia de una pequeña perturbación, la partícula abandonará  $L_1$  y caerá en el pozo gravitatorio de la otra estrella. Es decir, cuando una estrella llena su LR se produce un rebosamiento del mismo a través del punto  $L_1$ , lo que da lugar a una acreción de material conocida como acreción por rebosamiento del LR.

### 2.3. Variables cataclísmicas

Una variable cataclísmica (VC) es una binaria donde la componente primaria es una enana blanca y la secundaria una estrella de secuencia principal y tipo tardío (K-M) que llena su LR. En una VC se produce, por tanto, transferencia de masa y por tanto, acreción sobre la enana blanca. En este proceso se suele formar un disco de acreción con todo el material que se ha ido acretando, y sobre el borde de este disco se produce un choque al ser frenado el chorro de material procedente de la secundaria por el propio disco. Es lo que se conoce como ‘mancha caliente’ (ver figura 4). En el proceso de acreción se produce una conversión de energía potencial a térmica, que acabará siendo radiada. De todos los tipos de VCs, nos interesan las novae enanas. Estas muestran curvas de luz con dos claros estados de actividad que difieren entre sí en 2-6 magnitudes: quietud y erupción:

- Quietud (Q): El disco de acreción está frío ( $T < 5 \times 10^3$  K), por lo que el H se encuentra en su estado neutro. Se observan líneas en emisión originadas en el disco y la emisión de la secundaria puede ser visible.
- Erupción (E): El disco está caliente ( $T > 10^4$  K), por lo que el H está completamente ionizado. Se observan líneas anchas de absorción de H y la emisión del disco domina la curva de luz. Además, la secundaria se encuentra irradiada por el disco.

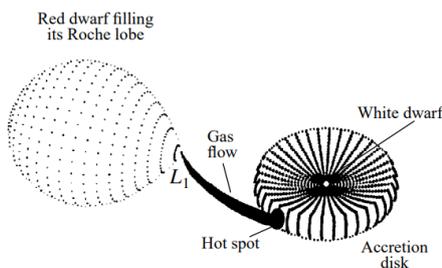


Figura 4: Figura cogida de Voloshina & Khruzina (2000).

La temperatura del disco depende del ritmo de acreción de masa, que puede tener valores muy dispares. En el paso de un estado a otro tiene lugar la ionización parcial del H, que genera una fuerte dependencia de la opacidad con la temperatura,  $\kappa \propto T^{10}$ , lo que explica las rápidas transiciones entre estados que tienen lugar en las novae enanas.

## 2.4. Modulación elipsoidal

Una curva de luz es la representación del flujo recibido de un objeto en el tiempo. En una binaria cerrada tenemos varias aportaciones al flujo que se emite, ya que tenemos la primaria, la secundaria y otras estructuras que se pueden formar por la acreción de material (disco de acreción, mancha caliente...). De todas estas aportaciones nos centraremos en la emisión de la secundaria.

La curva de luz de una estrella que llena su LR debe mostrar variaciones si la inclinación no es muy baja debido a que el LR no tiene simetría esférica. Dado que en las fases 0.25 y 0.75 observamos la máxima superficie de la estrella, debe llegarnos más flujo que en las fases 0 y 0.5. Por lo tanto, se espera una curva de luz con máximos idénticos en las fases 0.25 y 0.75, y mínimos en las fases 0 y 0.5. Este efecto se llama modulación elipsoidal (ME) y puede observarse en la figura 5b.

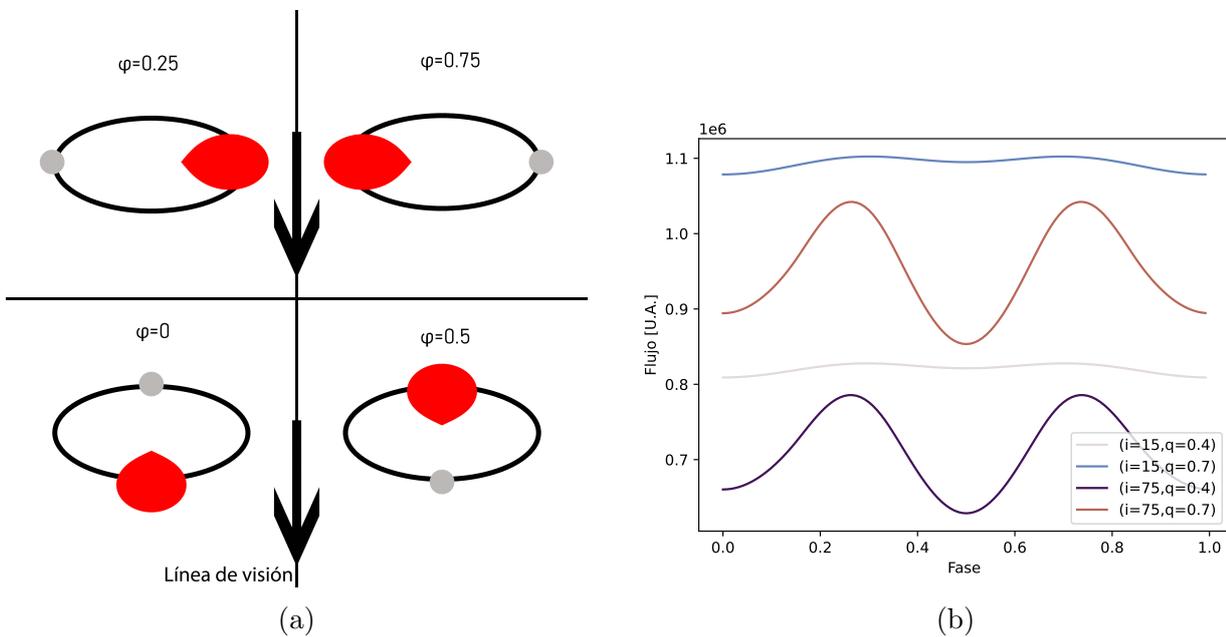


Figura 5: (a) Distintas vistas del LR de la secundaria según en qué fase se observe. (b) Curvas de luz sintéticas del LR para diferentes valores de los parámetros del sistema.

La forma de la ME depende de múltiples parámetros del sistema como  $q$ ,  $i$ ,  $T_2$ ,  $M_2$  o  $g_{\text{eff}}$ , donde  $T_2$  y  $M_2$  son la temperatura y la masa de la secundaria, y  $g_{\text{eff}}$  es su gravedad superficial efectiva,  $g_{\text{eff}} = \nabla\Psi_R$ . Pero sobre todo, la forma de la ME depende de  $i$ . Si observásemos el LR con  $i = 0^\circ$ , es decir, ‘desde arriba’, no veríamos la modulación de la curva de luz, por lo que siempre lo veríamos igual independientemente de la fase. En cambio, si la inclinación es lo suficientemente alta, el LR presenta distintas áreas a lo largo de la órbita, lo que provoca variaciones del flujo recibido.

A continuación vamos a ver dos efectos que modifican la forma de la ME y que nos interesa estudiar con cierto detalle.

## 2.5. Limb-Darkening

El Limb-Darkening (LD) consiste en un oscurecimiento aparente de la estrella al observar el borde del disco aparente de esta, efecto que modifica ligeramente la forma de las curvas de modulación elipsoidal. El LD tiene su origen en que la radiación que recibimos de una estrella procede toda de una misma profundidad óptica,  $\tau = 1$ , pero dependiendo de a qué zona miremos, esta profundidad óptica corresponderá a diferentes profundidades físicas, y por tanto a distintas temperaturas de la estrella.

En la figura 6, un observador que esté situado a la derecha de la estrella verá fotones provenientes de distintas capas de la estrella según mire al centro (A) o más cerca del limbo (B). La profundidad óptica es la misma,  $L$ , pero los fotones vienen de capas con distinta temperatura, lo que provoca esta variación en el brillo aparente de la estrella.

Este efecto se modela en primera aproximación con una sencilla ley lineal mediante:

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - u(1 - \mu) \quad (5)$$

donde  $\mu = \cos(\theta)$ ,  $\theta$  es el ángulo que forman la LOS y la dirección radial de la estrella,  $u$  es el coeficiente de LD (LDC), que varía entre 0 y 1 e  $I(1)$  es la intensidad que recibimos cuando miramos al centro del disco.

Sin embargo, la ecuación (5) es una aproximación en primer orden, por lo que podemos ir más allá y probar una ley cuadrática o una serie de potencias que proporcionan una aproximación, a priori, mucho mejor. La ley cuadrática es:

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - a(1 - \mu) - b(1 - \mu)^2 \quad (6)$$

donde  $a$  y  $b$  son dos LDC. No obstante, Claret (2000) introdujo una ley en serie de potencias que incorpora 4 coeficientes y que, hasta la fecha, es la más sofisticada:

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - \sum_{k=1}^4 a_k (1 - \mu^{k/2}) \quad (7)$$

donde los  $a_k$  son los LDC. Esta ley incorpora mejoras significativas ya que los resultados son válidos en un rango más amplio de temperaturas, por lo que se puede usar una sola ley para todo el diagrama HR, incluso con mayor precisión que las anteriores.

Para referirse a los LDC se suele utilizar una letra distinta según la ley que se adopte, pero como nosotros vamos a utilizar varias en paralelo, adoptaremos la letra  $\eta$  para referirnos a cualquiera de ellos, indicando qué ley se está usando en cada momento.

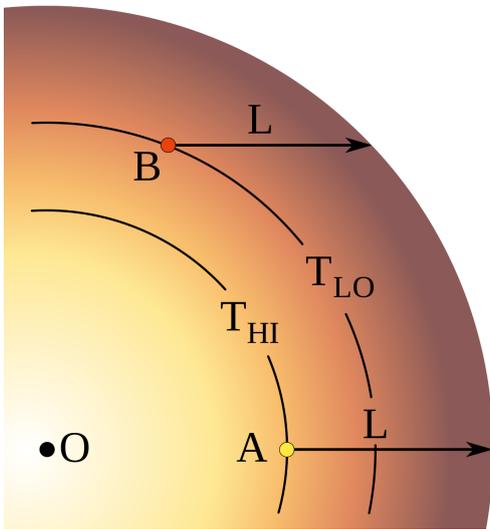


Figura 6: Efecto Limb-Darkening, producido al observar fotones que provienen de capas a distinta temperatura. El observador está situado en el infinito a la derecha de la estrella. Fuente: Wikipedia (2008).

## 2.6. Gravity-Darkening

Otro efecto que deforma las curvas de luz es el Gravity-Darkening (GD), un fenómeno físico por el cual el flujo emitido por una estrella depende de la gravedad local en su superficie. El valor de la gravedad de la estrella varía de un sitio a otro de su superficie, como puede verse en la figura 7. Por ejemplo, cerca del punto  $L_1$  la estrella se encuentra muy deformada y la gravedad local es más baja, por lo que esa zona emitirá de manera distinta que otra zona con diferente deformación.

Este efecto comenzó a modelarse mediante la ley de von Zeipel (1924), que establece que en estrellas en equilibrio barotrópico (la presión solo depende de la densidad), el flujo de energía es proporcional a la gravedad superficial efectiva,  $\mathcal{F} \propto g_{\text{eff}}$ . Por otro lado, como el flujo es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura efectiva de la estrella mediante  $\mathcal{F} \propto T_{\text{eff}}^4$ , tenemos al final una relación entre la temperatura y la gravedad:

$$T_{\text{eff}}^4 \propto g_{\text{eff}} \quad (8)$$

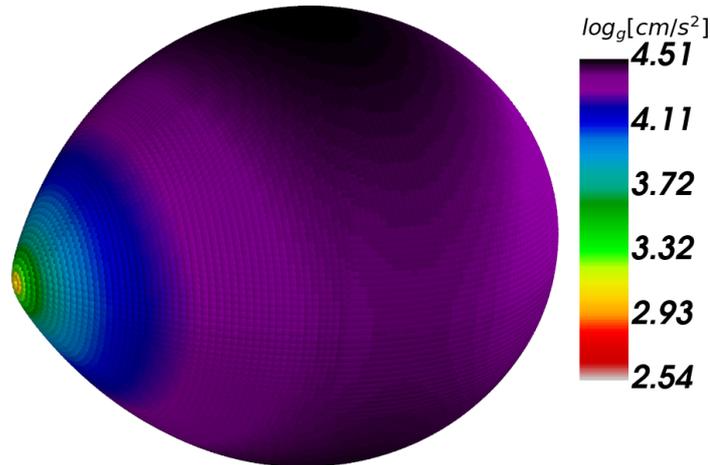


Figura 7: Gravedad superficial sobre el LR de una estrella. Se observan alteraciones en la gravedad a lo largo de su superficie. En el punto  $L_1$  la gravedad es cero ya que se trata de un punto de equilibrio.

Esto implica que las zonas con menor gravedad emitirán menos, pues están menos calientes, lo que explica que en las curvas de luz de la ME haya un flujo inferior en fase 0.5 que en fase 0 (ver figura 5). El problema es que la ley (8) asume un flujo de energía radiativo, pero la estrella secundaria en una VC es de tipo espectral tardío por lo que su envoltente es convectiva, y por lo tanto buena parte del flujo emergente se debe al enfriamiento por convección. Lucy (1967) estudió una generalización de la ecuación anterior para relacionar la temperatura con la gravedad superficial en estrellas con envoltentes convectivas, llegando a la ecuación (9). Esta ecuación conserva la forma de la ecuación (8), siendo  $\beta$  el exponente del GD (GDE). El GDE es una cantidad bolométrica, pero las observaciones se suelen hacer en bandas espectrales. Ante esto, Kopal (1959) introdujo el coeficiente del GD (GDC),  $y(\lambda)$ , como una conexión entre el GDE y las bandas fotométricas.

$$T_{\text{eff}}^4 \propto g_{\text{eff}}^\beta \quad (9)$$

Comparando la expresión (9) con la (8) se observa que para estrellas calientes (envoltura radiativa),  $\beta = 1$  y se recupera la ley de von Zeipel, mientras que para estrellas más frías (envoltura convectiva), Lucy encontró que, de media,  $\beta = 0.32$ . Sin embargo, esto supone una clara discontinuidad en el comportamiento del flujo emitido, que pasa de un valor a otro muy distinto según sea radiativo o convectivo. Como sabemos, el flujo total tiene dos contribuciones según el mecanismo de transporte de energía, y ambas se complementan en base a diversos parámetros del interior estelar (temperatura, longitud de mezcla, teoría de convección utilizada...), lo que lleva a pensar que debe haber una continuidad entre ambos métodos de enfriamiento.

Esta continuidad la proporcionó Claret (1998) cuando estudió este exponente para el caso en que ambas contribuciones existan, proporcionando extensas tablas con valores de  $y(\lambda)$  para diferentes valores de los parámetros estelares.

Claret proporciona estos coeficientes (tanto  $\eta$  como  $y$ ) para diferentes leyes y parámetros estelares, de manera que en sus tablas encontramos que  $\eta = \eta(\lambda, T_2, \log(g_{\text{eff}}), Z, V_\xi)$  e  $y = y(\lambda, T_2, \log(g_{\text{eff}}), Z, V_\xi)$ , siendo  $Z$  la metalicidad de la estrella y  $V_\xi$  la velocidad turbulenta adoptada por la teoría de convección.

Con el paso de los años, Claret ha ido perfeccionando los cálculos e incorporando nuevos modelos tanto de atmósferas como de interiores estelares. Para este trabajo, los coeficientes  $\eta$  e  $y$  los hemos tomado de Claret & Bloemen (2011).

### 3. Objetivos

El primero de los objetivos de este trabajo es mejorar y optimizar un programa de integración sobre el LR que nos permitirá generar curvas de luz sintéticas que dan cuenta de la ME. Este programa fue desarrollado por Javier Sánchez Sierras durante su Trabajo Fin de Grado en la ULL en 2017. Tras incorporar varias mejoras al mismo, probaremos el programa para evaluar el impacto de la variación de los valores de los parámetros del sistema en las curvas de luz. Sabiendo cómo afectan estas variaciones, generaremos una biblioteca de curvas de luz sintéticas con los valores de interés para cada parámetro.

El segundo objetivo es aplicar todo lo anterior a un objeto real: SS Cygni. Comparando los datos que tenemos de este objeto con la biblioteca que contiene las curvas de luz sintéticas generadas mediante el programa anterior, podremos establecer qué valores de los parámetros se ajustan mejor a nuestros datos. Actualmente, el valor de la inclinación de SS Cygni sigue siendo un problema abierto y este valor escala todos los parámetros fundamentales del sistema, ya que todos dependen de él. Por ello, es importante determinarlo y dado que nuestro método es muy sensible a la inclinación, se espera poder estimarla.

Para realizar la comparación, usaremos las superficies  $\chi^2(q, i)$  para ver si hay un valor de la inclinación que tienda a ajustarse bien con los datos, independientemente del valor de  $q$ . Además, estimaremos el valor de la inclinación también mediante el método *bootstrapping*, que es capaz de estimar el valor de un parámetro y su error, independientemente de los errores de los datos.

## 4. Los datos

### 4.1. SS Cygni

SS Cygni (SS Cyg), también conocida como HD 206697 o AAVSO 2138+43, es una variable cataclísmica que fue descubierta por Louisa Dennison Wells durante su larga estancia en el Harvard College Observatory, y publicada en su circular no. 12 (1896). Wells detectó cambios en la magnitud (brillo fotográfico por aquel entonces) de este objeto desde 7.2 a 11.2, en el transcurso de 40 días, lo que no encajaba con lo que se conocía para estrellas variables en la época. Si bien este nuevo objeto estuvo siendo observado por numerosos astrónomos, en 1908 SS Cyg despertó gran interés cuando se observaron extraordinarias variaciones en su brillo (Pickering 1908).

Poco después, Campbell (1912) reunió prácticamente todas las observaciones disponibles desde su descubrimiento hasta la fecha con el fin de dar la visión más precisa posible de SS Cygni, proporcionando numerosas curvas de luz e importantes resultados acerca de sus máximos y mínimos en magnitud. Campbell concluyó que la magnitud era de 11.8 durante dos tercios del tiempo, pero que una vez cada 50 días aumentaba hasta 8.3, permaneciendo con este brillo a veces dos días y otras veces tres, pero que seguía un patrón en el que se alternaban ambos escenarios.

Con la llegada de la espectrografía, buena parte de las observaciones se dedicaron a clasificar las estrellas por su espectro. En los comienzos, SS Cyg dio algunos problemas al intentar clasificar su espectro pero se terminó asociando a una nova (Adams & Joy 1922).

Durante el congreso de la International Astronomical Union en 1928, en Leiden (Países Bajos), se propuso reunir tantos datos de SS Cygni como fuera posible y combinarlos en una sola curva de luz, cosa que hizo nuevamente Campbell (1940) juntando nada menos que 44.000 observaciones. El artículo concluye con las palabras '*SS Cygni still remains one of the greatest enigmas in variable star astronomy, and continuous observations throughout its entire light curve are essential to the final solution of the problem presented*', lo que refleja la situación en la que se encontraban los astrónomos 44 años después del descubrimiento.

Entre 1915 y 1934, SS Cygni fue observada por AAVSO en el 93% de todas las noches posibles (Campbell 1941). Para entonces ya se había clasificado, junto con muy pocas estrellas más, como una nova enana debido a que estas sufrían explosiones como las novae pero de mucha menor intensidad y, además, se repetían en el tiempo.

Elvey & Babcock (1943) proporcionaron un extenso análisis de su espectro, llegando a la conclusión de que en su mínimo de actividad, el espectro era el de una dG5 o más tardía, mientras que en su máximo se acercaba a una estrella B temprana.

Finalmente, Joy (1954) analizó el espectro de otra estrella (AE Aquarii), determinando que debía ser una binaria porque identificaba dos espectros distintos. Esto le llevó a la conclusión de que SS Cygni debía ser algo parecido puesto que mostraba numerosas características similares. No pasó ni un año cuando Grant (1955) determinó que no era una binaria eclipsante. Poco más tarde, Joy (1956) publicó el primer conjunto de parámetros de SS Cygni, obteniendo un periodo orbital de 0.276244 días. En este estudio se proporcionaron por primera vez estimaciones de la separación entre componentes y sus masas, en función de la inclinación del sistema, ya que esta se desconocía en gran medida.

Las observaciones durante los siguientes años se centraron en determinar de dónde venían unas emisiones fluctuantes que duraban tan solo unos minutos (Grant 1955), ya que no se podían

asociar a los espectros en absorción de las dos estrellas. Poco después, Kraft (1962) postuló que estas debían venir de un disco, anillo o corteza alrededor de la estrella más caliente, argumento que caló entre los astrónomos que estudiaban este tipo de estrellas pues era una vía para explicar numerosos comportamientos de las mismas.

Con la llegada del modelo de disco de acreción de Shakura & Sunyaev (1973) se abrieron multitud de puertas para examinar muchas características de SS Cygni, dando a luz a numerosos artículos estudiando la posible morfología del disco y su relación con emisiones observadas en rayos X. Gracias a ello, se pudo empezar a determinar la inclinación del sistema, entre otras cosas. Giovannelli et al. (1983) dieron un conjunto completo de los parámetros orbitales, estimando la inclinación en unos 40 grados.

Paralelamente, Bath (1973) propuso un modelo para asociar ciertas emisiones de altas energías de las novae enanas a una mancha caliente en el disco de acreción, formada al impactar el material acretante con el disco ya formado. Con la posibilidad de estudiar la radiación en altas energías se pudo empezar a resolver temporalmente otras variaciones en el flujo que mostraban un periodo de unos 9 segundos durante la erupción del sistema (Cordova et al. 1980), que no tardaron en asociar, en parte, a esta mancha caliente.

Estudios posteriores (Hessman et al. 1984) se resumen en intentar dar sentido a las observaciones espectroscópicas, de manera que se pueda determinar el comportamiento energético general de SS Cygni. Martínez-Pais et al. (1994, 1996) analizaron observaciones espectroscópicas durante la quietud y durante la erupción de manera individual, hallando, entre otras cosas, que el tipo espectral de la secundaria debía ser K2-K3.

De aquí en adelante existe una gran cantidad de artículos acerca de SS Cygni que tratan de establecer los parámetros orbitales del sistema usando diferentes técnicas. El aumento en la resolución instrumental de los telescopios en los años siguientes abrió puertas a incorporar nuevas teorías como la existencia de manchas en la secundaria (Webb et al. 2002) o deformaciones del disco de acreción (Kononov et al. 2012), entre otras, para explicar las incongruencias que siguen existiendo.

El artículo de Miller-Jones et al. (2013) pone en serias dudas la distancia a la que se encuentra SS Cygni, ya que utilizando otra técnica de medición encontraron que está a  $(114 \pm 2)$  pc en vez de los  $(166.2 \pm 12.7)$  pc que se tenía como establecido hasta ahora con el telescopio espacial Hubble (Harrison et al. 1999). De hecho, como explican en el artículo, una distancia menor encaja bastante mejor con multitud de fenómenos que no se pueden explicar fácilmente de otra manera. Finalmente, el estudio más reciente que ofrece numerosos parámetros orbitales es Hill et al. (2017).

## 4.2. Preparación de los datos

Los datos fueron adquiridos en 2004 y 2005 (ver tabla 1) con el telescopio IAC80 usando la cámara Camelot y los filtros I, R, V, y fueron reducidos siguiendo el procedimiento estándar. Se trata de una colección de datos muy buena por el número de noches observadas y la cobertura temporal de cada una de ellas. Además, tenemos datos del sistema en diferentes estados, lo que nos servirá para poder clasificar las noches adecuadamente. De cada noche de observación se obtuvo un archivo con formato de tres columnas: tiempo de adquisición del dato,  $t$ , valor de la magnitud instrumental,  $m$ , y error de la magnitud,  $\sigma_m$ . Lo primero que hicimos fue pasar de magnitud a flujo mediante:

$$\mathcal{F} = 10^{-\frac{m}{2.5}} \quad (10)$$

Los errores en flujo fueron obtenidos propagando:

$$\sigma_F = \left| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial m} \right| \sigma_m = \frac{\ln 10}{2.5} 10^{-\frac{m}{2.5}} \sigma_m$$

Los valores del tiempo vienen en días julianos heliocéntricos (HJD). Para pasar de tiempo a fase orbital es necesario usar las efemérides del sistema y la ecuación:

$$\varphi = \frac{t - t_0}{P} \quad (11)$$

Los respectivos errores en las fases fueron calculados propagando en la ecuación anterior y resultaron ser del orden de las milésimas. Por ello decidimos omitirlos y tan solo se trabajó con los errores de los flujos.

El tiempo de referencia,  $t_0$ , lo cogemos de Hill et al. (2017) ya que es la referencia más cercana que tenemos a la fecha de adquisición de nuestros datos, con un valor de  $t_0 = 2456190.62770$  días. Por otro lado, el periodo lo cogemos de Hessman et al. (1984) ya que es la referencia clásica que hasta la fecha se sigue usando, con un valor de  $P = 0.27512973$  días. Este periodo corresponde a unas 6.6 horas, lo que significa que se puede observar SS Cygni en una noche con una buena cobertura en fase, en nuestro caso cubriendo más de un periodo en ocasiones.

La ecuación (11) puede dar un resultado positivo o negativo, dependiendo de si el tiempo de referencia se tomó antes o después de nuestros datos. De cualquier manera, el resultado es la cantidad de periodos que han pasado entre ambos tiempos, por lo que si nos quedamos únicamente con la parte decimal del resultado ya tendremos los valores de la fase orbital.

### 4.3. Selección de las noches

Como nuestro objetivo es el estudio de la modulación elipsoidal, debemos usar solo aquellas noches en que el sistema esté en quietud, que es el estado en que el disco (principal estructura emisora) emite menos y lo hace de forma más estable. Dado que entre los datos hay noches en las que el sistema está en quietud y noches en las que no, es necesario hacer una selección previa de las noches. Esta selección debe hacerse de forma muy cuidadosa porque, como veremos, incluso algunas noches en las que el sistema estaba en quietud, este se encontraba en un estado excitado que falsea la forma de la curva de modulación elipsoidal.

Tenemos un total de 19 noches de observación (ver tabla 1), habiéndose observado en los filtros I, R y V, por lo que en total tenemos 57 archivos. En las figuras 22 y 23 pueden verse todas ellas para el filtro I (para los filtros R y V la forma de la curva es similar, ver figuras 24, 25, 26 y 27). Haremos la selección usando solamente el filtro I porque la secundaria es de tipo espectral tardío y es en este filtro donde su contribución es mayor.

Para saber qué noche corresponde a cada uno de estos estados, se ha utilizado la base de datos AAVSO (American Association of Variable Stars Observers). La clasificación se puede hacer fácilmente viendo la figura 8, que contiene todas las noches de las que tenemos datos. A continuación, exponemos el proceso de selección realizado:

- De las diecinueve noches iniciales eliminamos las seis que no corresponden claramente al estado de quietud (Q) según la tabla 1, o estaban muy cerca del estado de erupción. Esto es, las noches 1, 2, 8, 17, 18 y 19.

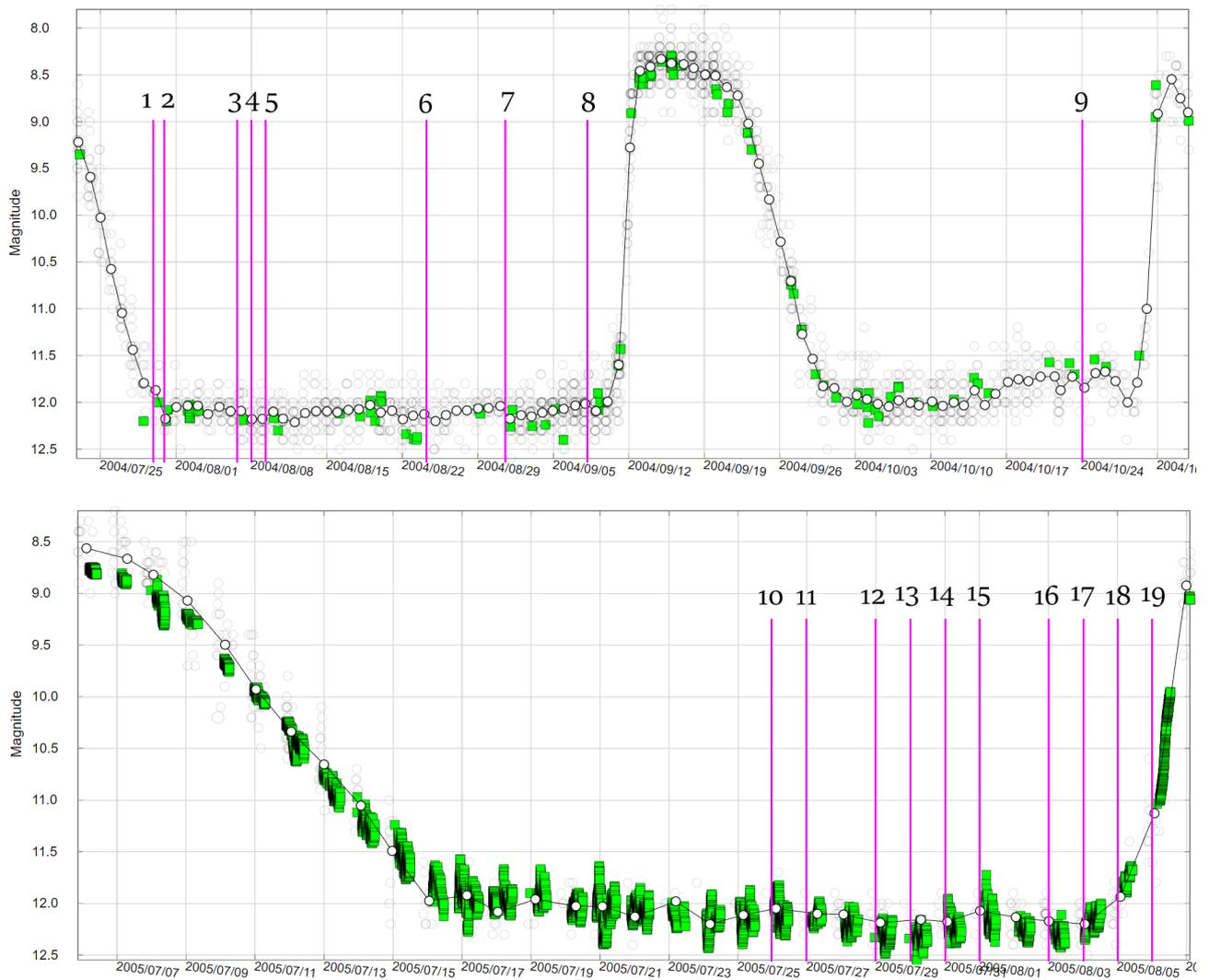


Figura 8: Curvas de luz de larga duración de SS Cygni en el rango temporal de nuestras observaciones de 2004 (arriba) y 2005 (abajo), con líneas moradas verticales que corresponden a cada una de las noches de las que tenemos datos.

Noche (nº)	Fecha	Estado	Fase	Noche (nº)	Fecha	Estado	Fase
1	30/07/2004	B	0.456 - 1.621	10	26/07/2005	Q	0.658 - 1.698
2	31/07/2004	B	0.215 - 1.254	11	27/07/2005	Q	0.226 - 1.087
3	07/08/2004	Q	0.404 - 1.707	12	29/07/2005	Q	0.395 - 0.620
4	08/08/2004	Q	0.000 - 1.071	13	30/07/2005	Q	0.258 - 1.259
5	09/08/2004	Q	0.634 - 1.980	14	31/07/2005	Q	0.912 - 1.905
6	24/08/2004	Q	0.436 - 0.933	15	01/08/2005	Q	0.599 - 1.315
7	31/08/2004	Q	0.533 - 1.635	16	03/08/2005	Q	0.852 - 1.539
8	08/09/2004	S	0.613 - 1.820	17	04/08/2005	S	0.447 - 1.179
9	24/10/2004	Q	0.691 - 1.130	18	05/08/2005	S	0.946 - 1.816
-	-	-	-	19	06/08/2005	S	0.478 - 1.351

Tabla 1: Noches de las que se tienen datos, divididas en esta tabla en dos según el año (2004 a la izquierda y 2005 a la derecha). Las letras de las columnas ‘Estado’ se refieren al estado de SS Cyg cada noche: B=Bajada de erupción, Q=Quietud, S=Subida a erupción. Las columnas ‘Fase’ contienen las fases inicial y final de cada noche.

- De las trece noches restantes, vemos en las figuras 22 y 23 que las noches 9 y 12 no tienen una forma definida ni tienen suficiente cobertura en fase. La noche 9 se encuentra cerca de una erupción y su nivel medio está por encima del nivel medio en quietud, mientras que la noche 12 se elimina por la pobre cobertura en fase.
- También se observa que las noches 7, 10 y 14 tienen la modulación elipsoidal muy deformada (ver figuras 22 y 23), seguramente contaminada por emisiones del disco, por lo que las eliminamos del análisis.
- A priori, la noche 11 podría ser válida dado que se observa la modulación elipsoidal, pero lo hace superpuesta con emisiones que la deforman de buena manera.
- Finalmente, en la figura 23 la noche 16 muestra niveles de flujo mínimo más altos que en el resto de noches (sobre todo el segundo mínimo) y, aunque se aprecia la variación buscada, debemos eliminarla pues no corresponde a un estado de quietud completa. De hecho, las siguientes noches muestran niveles de flujo en aumento. En la figura 8 se ve que esta noche se encuentra cerca de una erupción. En realidad, podemos considerar que el comienzo de la subida a erupción comienza justo en esta noche, lo que la convierte en objeto de posteriores estudios, pero no relacionados con la secundaria.

Al final quedan seis noches: 3, 4, 5, 6, 13 y 15. De estas noches, destacan las dos primeras, sobre todo la primera de ellas ya que presenta el nivel más bajo de flujo y se aprecia la modulación elipsoidal de muy buena manera, además de tener buena cobertura en fase. Vamos a comentar cada una de las noches brevemente (ver figuras 22 y 23):

- Noche 3: Aunque muestra breves emisiones posiblemente asociadas al disco, la curva tiene un nivel muy bajo de flujo y se ajusta bastante bien a la variación elipsoidal.
- Noche 4: Prácticamente igual que la noche anterior pero con algunas emisiones puntuales alrededor de la fase 0.7. También se aprecia un posible aumento de flujo en la segunda parte de la curva.

- Noche 5: De la noche anterior a esta ha aumentado el flujo significativamente y, aunque se aprecia la variación elipsoidal, parece que el sistema está en un estado excitado aun estando en quietud. El hecho de que el flujo sea mayor en fase 0.5 que en fase 0 puede indicar que el hemisferio interior de la secundaria está irradiado.
- Noche 6: Tiene un buen comportamiento pero una pobre cobertura en fase.
- Noche 13: El sistema muestra algunas emisiones aunque se aprecia la modulación buscada.
- Noche 15: Tiene un buen comportamiento aunque falta una parte entre las fases 0.3 y 0.6. Además, en la noche anterior el sistema estaba emitiendo en mayor medida que en esta, por lo que el sistema se debió excitar y puede que todavía se estuviera enfriando cuando se tomaron estos datos.

#### 4.4. Comparativa entre las mejores noches

Parece obvio que, incluso en quietud, el sistema puede estar excitado (por calentamiento del disco, irradiación de la secundaria, intensificación de la mancha caliente) probablemente a causa de variaciones en el ritmo de transferencia de masa. Es crucial que los datos con los que trabajemos al final sean lo más fieles posibles a la variación elipsoidal, por lo que es necesario evaluar si estas noches son representativas de ella.

La modulación elipsoidal se puede modelar aproximadamente mediante la ecuación (12), por lo que si la ajustamos a nuestros datos podemos obtener información del nivel medio del flujo emitido en cada noche mediante el parámetro  $C_0$ . El nivel medio del flujo da cuenta del estado de excitación en el que se encuentra el sistema.

$$\mathcal{F}(\phi) = C_0 + C_1 \cos(2\pi\phi) + C_2 \cos(4\pi\phi) \quad (12)$$

En la figura 9 pueden verse los ajustes de esta ecuación a las seis noches discutidas en el anterior apartado, mientras que los coeficientes obtenidos se encuentran en la tabla 2, destacando las dos primeras noches por su bajo nivel de flujo medio. Si a cada noche le restamos el coeficiente  $C_n = (C_0)_n - (C_0)_{\text{ref}}$ , donde  $(C_0)_n$  es el  $C_0$  obtenido por el ajuste para la noche  $n$  y  $(C_0)_{\text{ref}}$  es el mismo pero para una noche de referencia, podemos poner todas las noches en la misma referencia base de flujo. Hemos escogido como noche de referencia la 3. A continuación, superponemos las 6 noches en dos figuras: una sin restar a cada noche el coeficiente  $C_n$  (figura 10a) y otra restándolo (figura 10b). Se aprecia que, en el caso de no haber restado los coeficientes (cada noche tiene su nivel medio de flujo característico), hay dos noches que quedan por debajo del resto, que son las noches 3 y 4. Además, estas dos noches son las que muestran menos flickering (emisión aleatoria de alta frecuencia) y curvas más limpias. Todo ello nos lleva a concluir que estas noches son aquellas en las que el sistema está en su estado más relajado.

Noche ( $n^{\circ}$ )	3	4	5	6	13	15
$C_0$	0.342898	0.343749	0.359054	0.358485	0.36641	0.362731

Tabla 2: Coeficientes  $C_0$  tras el ajuste a la ecuación (12) de aquellas noches que presentan una modulación elipsoidal bastante limpia, solo para el filtro I y tras haber iterado el ajuste 10 veces.

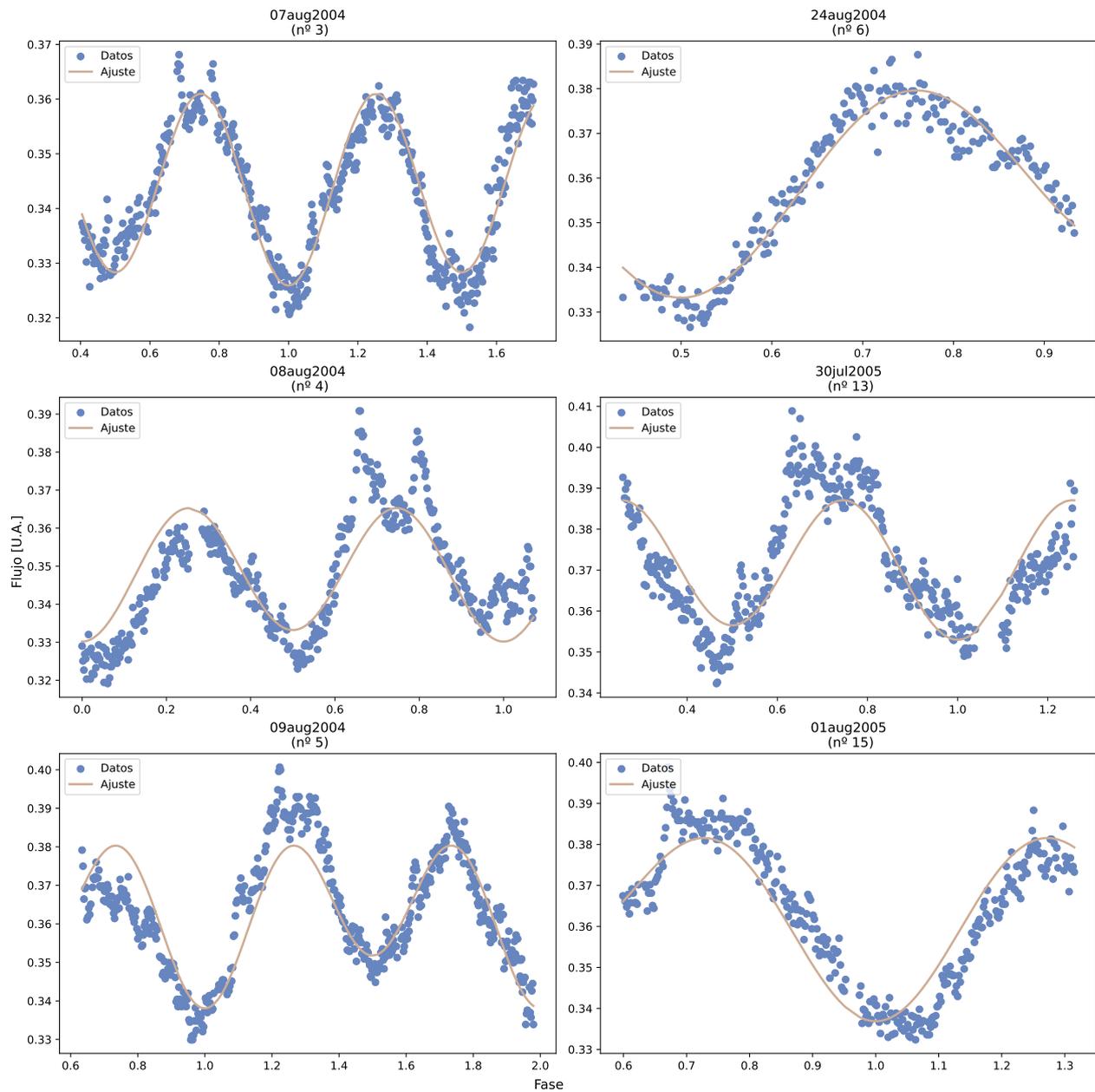


Figura 9: Resultado de ajustar la ecuación (12) a cada una de las noches. Se observa un muy buen ajuste en la noche 3 , mientras que obtenemos ajustes decentes para el resto de noches.

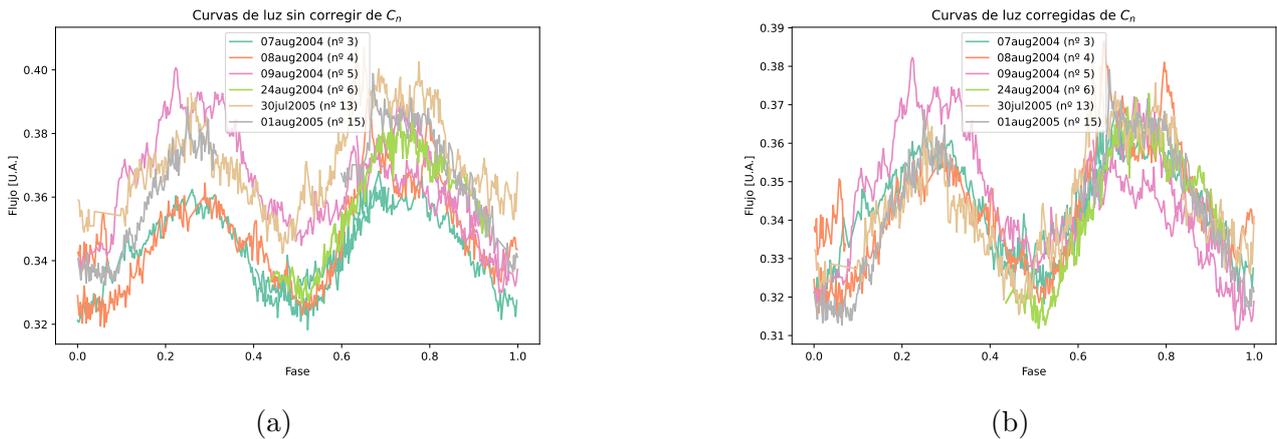


Figura 10: Superposición de las 6 noches: (a) sin corregir de  $C_n$  y (b) tras corregir de  $C_n$ . Se observa un comportamiento general de modulación elipsoidal, pero las noches del 7 y 8 de agosto son las que menor nivel de flujo medio tienen a simple vista en (a), por lo que son candidatas a ser elegidas como noches de verdadera quietud.

A continuación vamos a juntar los datos de las 6 noches tratándolas como si fueran una sola, puesto que en todas las noches se aprecia de buena manera la modulación elipsoidal y la expresión (12) se ajusta bien a todas ellas. A la vista de los resultados tras haber restado  $C_n$  y sin restarlo, continuaremos considerando ambas posibilidades.

Dado que la modulación elipsoidal es debida únicamente a la secundaria y la contaminación de las otras estructuras del sistema es siempre en emisión, debemos escoger aquellos puntos que sean más fieles a la secundaria, es decir, aquellos que correspondan a un flujo bajo respecto a la ME. Para ello vamos a ajustar la ecuación (12) a nuestros datos 10 veces, aplicando en cada iteración criterios de exclusión para eliminar puntos y que no se tengan en cuenta en la siguiente iteración. Como el objetivo es quedarnos con aquellos puntos que queden a un nivel de flujo más bajo, aplicamos un criterio de exclusión superior de  $1.5\sigma$  e inferior de  $2.5\sigma$ . Al final lo que obtenemos es una curva envolvente inferior a nuestros datos, como puede verse en la parte superior de las figuras 11a y 11b.

Esta curva envolvente inferior da cuenta de un nivel bajo de flujo en una curva de luz, por lo que podemos usarla como referencia para quedarnos finalmente con los puntos que no se alejen mucho de ella, de todos los que tenemos. Finalmente, dividimos los datos en 20 intervalos equiespaciados en fase y, para cada uno de ellos, eliminamos el 80% de los puntos con mayores residuos respecto a esta envolvente (teniendo en cuenta el signo).

En las figuras 11a y 11b podemos ver los puntos que sobreviven a este proceso junto con sus residuos. En estas figuras se observa que los datos y los residuos están menos dispersos si no restamos  $C_n$ . Esto es debido a que, juntando todas las noches sin corregir y pasándoles todo el proceso, conseguimos eliminar puntos sobre todo de aquellas noches con un nivel medio de flujo alto, es decir, de las que están más excitadas, por lo que nos quedamos con puntos que son más fieles a la modulación elipsoidal. Por el contrario, si hacemos el mismo proceso pero con las noches corregidas de  $C_n$ , eliminamos casi por igual puntos de las noches en calma y de las que no lo están, resultando en una dispersión alta en los residuos porque los datos pueden corresponder a diferentes noches, cada una con su amplitud. A su vez, esto nos dice que las noches en las que el sistema está más excitado no solo se caracterizan por un mayor nivel medio de flujo, sino también por una mayor variabilidad.

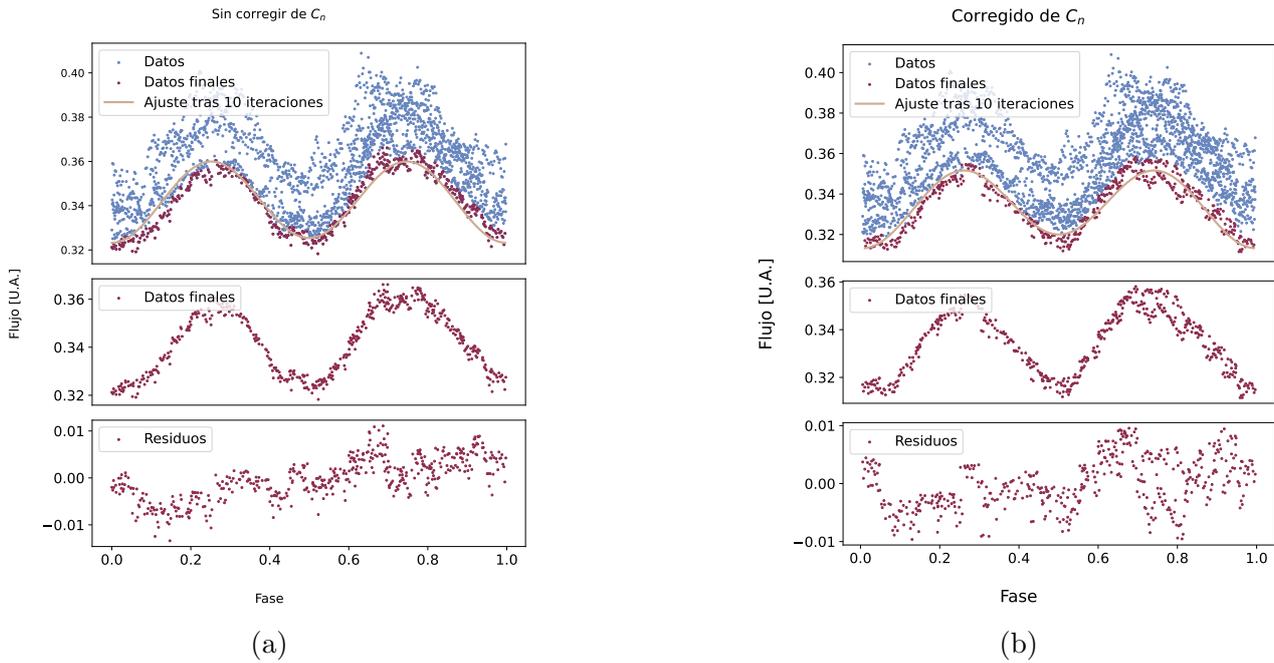


Figura 11: Envoltente inferior, datos finales y residuos tras juntar todas las noches, procediendo de dos maneras: (a) sin restar a ninguna noche su correspondiente  $C_n$  y (b) restándolo a cada una de ellas.

Tras este análisis, decidimos trabajar con las noches sin corregir de  $C_0$ . Además, viendo que existe una buena distinción entre las noches 3 y 4, y el resto (ver figura 10a), en adelante trabajaremos únicamente con estas dos. La noche 5 está bastante excitada (sobre todo de fase 0 a 0.5), la 6 tiene poca cobertura en fase y además tiene una amplitud grande y las dos restantes están excitadas básicamente en todos los puntos de la fase, respecto a las noches 3 y 4.

Juntando, pues, los datos de las noches 3 y 4, tenemos los datos a utilizar de aquí en adelante. Tras pasarles todo el proceso de depuración anteriormente explicado, el resultado puede verse en las figuras 12a y 12b.

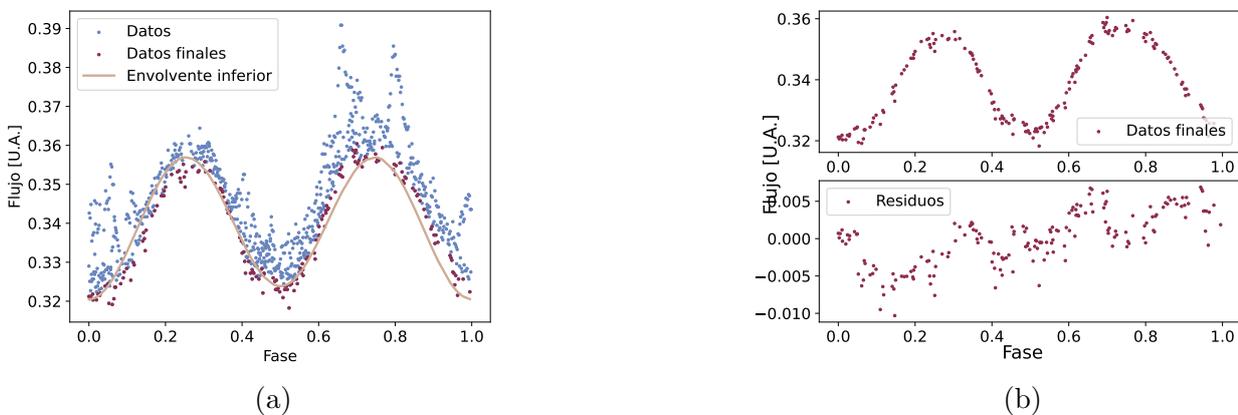


Figura 12: (a) Envoltente inferior y datos finales tras juntar únicamente las noches 3 y 4. (b) Residuos respecto a la envoltente inferior.

## 5. Metodología

Vamos a comparar la curva de luz obtenida con diferentes curvas sintéticas que corresponden a distintos valores de los parámetros del sistema. Después, seleccionaremos aquella que menor valor de  $\chi^2$  devuelva y podremos extraer de ella información del sistema.

### 5.1. El programa

Para crear las curvas de luz necesarias nos vamos a basar en un programa en Python que genera curvas de luz de un LR integrando sobre él:

$$\hat{f}(\varphi; q, i, T_2, M_2) = \int \hat{f}_\lambda(\varphi; q, i, T_2, M_2) T(\lambda) d\lambda \quad (13)$$

donde  $T(\lambda)$  es la curva de transmisión del filtro y  $\hat{f}_\lambda$  es:

$$\hat{f}_\lambda(\varphi; q, i, T_2, M_2) = \int_{LR} E_\lambda(T_2, M_2, g_{\text{eff}}) L_l(T_2, g_{\text{eff}}, \lambda) L_g(T_2, g_{\text{eff}}, \lambda) \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (14)$$

siendo  $E_\lambda(T_2, M_2, g_{\text{eff}})$  la emisión desde un punto de la superficie del LR,  $L_l(T_2, g_{\text{eff}}, \lambda)$  y  $L_g(T_2, g_{\text{eff}}, \lambda)$  los efectos del LD y GD,  $\vec{v}$  el vector visual (unitario y en la dirección de la LOS) y  $d\vec{A}$  el vector diferencial de área.

El script genera un LR formado por multitud de elementos superficiales llamados teselas, los cuales tienen un determinado espectro de cuerpo negro dependiendo de su temperatura efectiva. Este espectro se multiplica por los factores del LD y GD que correspondan, así como por el factor visual  $\vec{v} \cdot d\vec{A}$ . El programa suma los espectros de todas las teselas que son visibles para una fase dada y multiplica el espectro obtenido por el filtro indicado, para después integrar el espectro resultante y obtener el flujo en ese punto de la fase (13). Este proceso se repite para todas las fases y al final devuelve una curva de luz.

El programa fue desarrollado por Javier Sánchez Sierras durante su Trabajo Fin de Grado en 2016-2017 en la ULL. Nuestra aportación al gran trabajo realizado por Javier ha sido optimizarlo y mejorarlo, de manera que genere curvas de luz más fieles a la realidad, así como añadir algunas funcionalidades que no estaban contempladas. Las modificaciones más notables realizadas en el programa han sido las siguientes:

- Para el efecto del GD, utilizar la gravedad en cada tesela en vez de tomar un valor medio en todo el LR.
- Añadir diferentes leyes para el LD.
- Modificar el programa para leer los coeficientes del LD y GD de sus correspondientes ficheros.
- Añadir una rutina de interpolación 2D de  $(T, \log(g))$  para un cálculo más fino de los coeficientes del LD y GD.
- Añadir una rutina para la comparación entre los datos y las curvas de luz sintéticas, teniendo en cuenta distintos filtros y bibliotecas (ver final de 5.4). Una biblioteca es un conjunto de curvas de luz sintéticas en un filtro determinado, generadas variando los valores de los parámetros  $q$ , e  $i$ .

- Añadir una rutina para generar un archivo de configuración con la creación de cada biblioteca, que contenga los parámetros de la misma, el tiempo de computación que ocupó y la fecha de creación.
- Añadir la posibilidad de realizar una comparativa fijando la pendiente del ajuste entre los datos y una biblioteca (ver 5.4).

## 5.2. Probando el programa

Antes de generar una biblioteca de curvas de luz sintéticas con las que comparar nuestros datos, vamos a evaluar el comportamiento de las curvas de luz ante diferentes valores de los parámetros con los que se generan. Este comportamiento lo analizamos a partir de los valores de flujo medio y amplitud relativa de la curva de luz. El flujo medio lo definimos como:

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{F}(\varphi = 0) + 2\mathcal{F}_{\max} + \mathcal{F}(\varphi = 0.5)}{4} \quad (15)$$

Por otro lado, la amplitud relativa se calcula mediante:

$$A = \frac{\bar{\mathcal{F}} - \mathcal{F}(\varphi = 0.5)}{\bar{\mathcal{F}} - \mathcal{F}(\varphi = 0)} \quad (16)$$

Para empezar, vamos a fijar la cantidad de puntos en que se divide el periodo orbital,  $N_\varphi$ . Cuando hagamos la comparación entre curvas sintéticas y reales, el programa comparará punto a punto los flujos de cada curva. Para ello, remuestreará las fases de la curva sintética a las fases de los datos, por lo que interesa que el muestreo en fase sea del orden del muestreo en los datos. Tras el proceso realizado anteriormente con los datos de las dos noches nos quedan en total 180 puntos, por lo que muestreando la fase en 120 puntos nos aseguramos de que tengamos interpolaciones apropiadas en el remuestreo.

Lo siguiente es evaluar el comportamiento del número de teselas, generando la misma curva de luz tan solo variando este parámetro. Para ello generamos curvas de 600, 1.200, 2.400, 3.600, 4.800, 9.600 y 100.000 teselas, y consideraremos esta última como una de resolución ‘infinita’. Comparando todas ellas con la última, podremos ver qué número de teselas es suficiente para representar el caso ‘infinito’ con la suficiente precisión y ahorro de tiempo de cálculo. En la figura 13a se ven todas las curvas de luz superpuestas, mientras que en la figura 13b se representan las diferencias respecto a la curva de luz límite. En ella se aprecia que las variaciones quedan debajo del 0.5 % a partir de las 2.400 teselas, y que el flujo medio no varía ni en un 1 % en el peor de los casos. Consideramos que 3.600 teselas son suficientes ya que las variaciones quedan en torno al 0.2 % y quedan contenidas dentro del error instrumental de los datos, que es superior al 0.4 % en todos los casos.

Habiendo establecido el número de las divisiones de fase y teselas, vamos a evaluar el comportamiento de las curvas de luz con los parámetros  $(q, i, T_2, M_2)$ . Para ello, escogemos un valor de referencia para cada parámetro y variamos el que queramos evaluar, de manera que tengamos 3 curvas distintas para cada parámetro a evaluar. Por ejemplo, para ver cómo varían las curvas de luz con  $q$  generaremos 3 curvas con parámetros  $(q, i, T_2, M_2)$ ,  $(q - \Delta q, i, T_2, M_2)$  y  $(q + \Delta q, i, T_2, M_2)$ .

Los resultados de variar cada uno de estos parámetros puede verse en la figura 14. Las dos imágenes de la primera fila muestran que un aumento de  $q$  implica un aumento significativo del flujo, mientras que la amplitud relativa casi no varía. Dado que nuestros datos no están

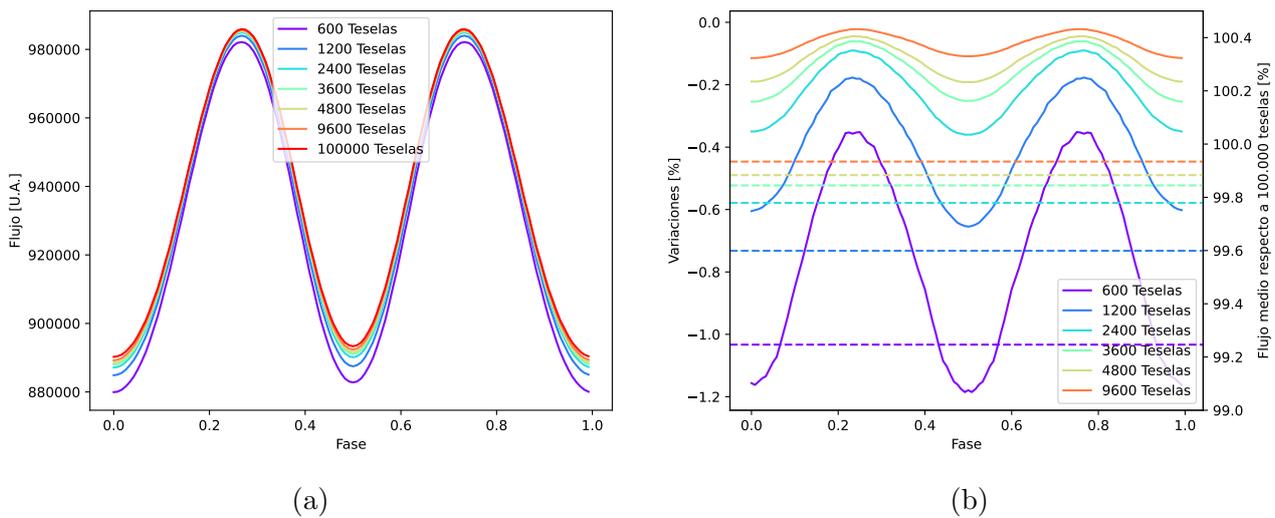


Figura 13: Comportamiento de las curvas de luz al variar el número de teselas con que se generan. En (a) se muestran las curvas de luz generadas y en (b) se comparan respecto a la curva de 100.000 teselas.

calibrados y además puede existir una emisión constante ajena a la secundaria, nos interesa el comportamiento de la curva de luz, no su nivel de flujo medio.

Por otro lado, variar  $i$  sí afecta, y mucho. La segunda fila de la figura 14 muestra el comportamiento de las curvas de luz variando este parámetro, donde ya se aprecia la gran diferencia que hay entre ellas. Se ve que la amplitud relativa varía en  $\pm 45\%$  cuando cambiamos la inclinación del sistema en  $(45 \pm 15)^\circ$ , mientras que el flujo medio lo hace en  $\pm 4\%$ . Por tanto, las curvas de luz que generemos serán altamente sensibles a la inclinación.

En la tercera fila de la figura 14 se observa que variando la temperatura de la secundaria varía mucho el flujo, como es de esperar. La figura de la derecha apenas muestra variaciones en las amplitudes relativas, por lo que las curvas mantienen su forma al cambiar la temperatura.

Si variamos los valores de  $M_2$  tenemos las dos imágenes de la cuarta fila en la figura 14, que apenas muestran diferencias entre flujos ni amplitudes.

Finalmente, comparando las diferentes leyes incorporadas para el LD generamos las curvas de la última fila en la figura 14. Se aprecia que las leyes no lineales se parecen entre sí, mientras que la lineal queda algo alejada de ellas. En la figura de la derecha se muestra que tanto la amplitud relativa como el flujo medio varían en algo más del 1% al pasar de la ley lineal a cualquiera de las otras dos.

De este estudio sacamos en claro que distintos valores de la inclinación modifican de buena manera la forma de la modulación elipsoidal, mientras que la variación del resto de parámetros puede afectar significativamente solo al nivel de flujo medio.

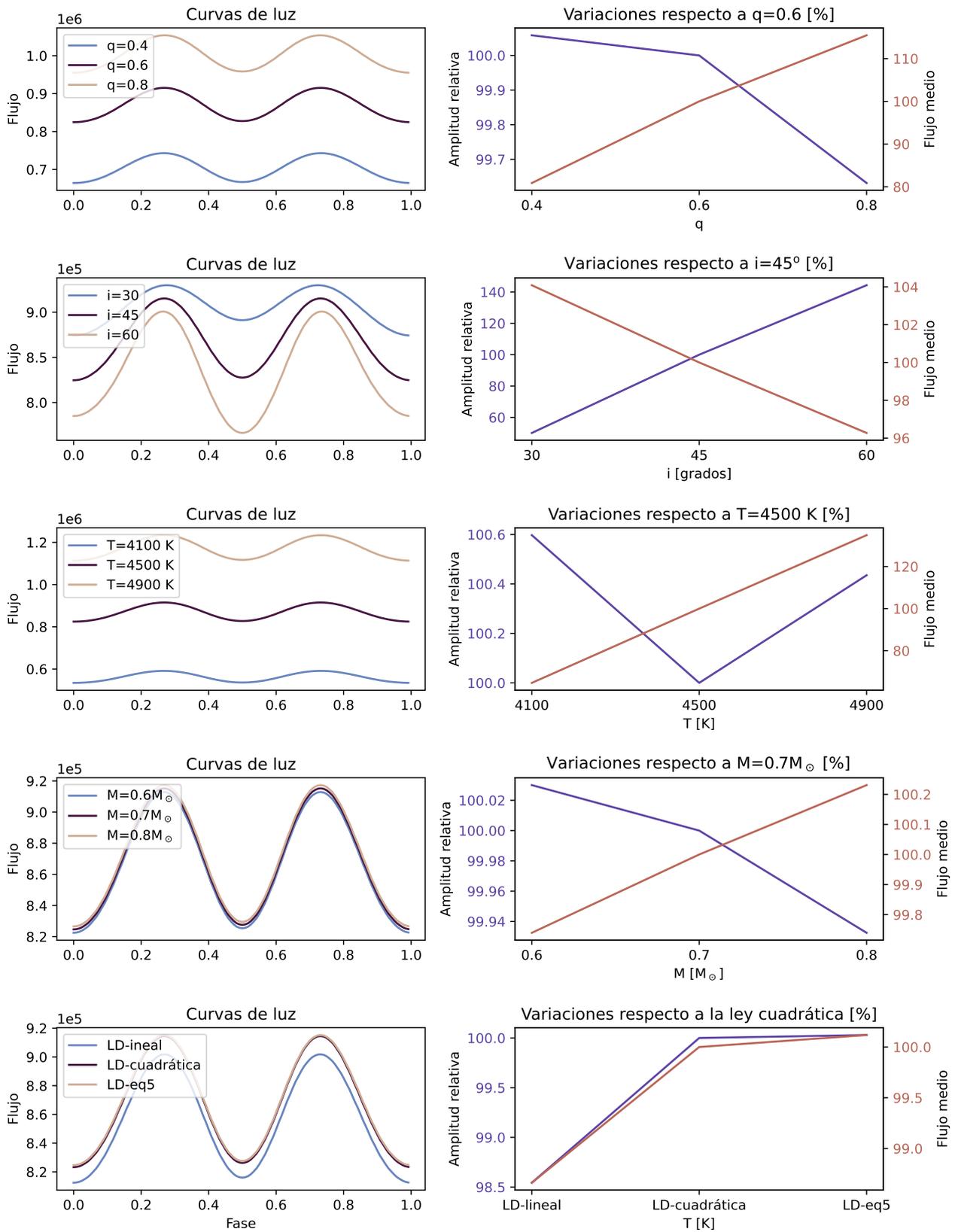


Figura 14: Columna izquierda: Curvas de luz variando los valores de los distintos parámetros. Columna derecha: Diferencias de amplitudes relativas y flujos medios respecto a las respectivas referencias.

### 5.3. Generamos la biblioteca

Una biblioteca se genera a partir del conjunto de parámetros:

$$(qIni, qFin, \Delta q, iIni, iFin, \Delta i, filtro, T_2, M_2, N_\varphi, N, LD, GD, leyLD)$$

donde  $qIni, qFin, \Delta q$  son los valores inicial, final y el paso de  $q$ , mientras que  $iIni, iFin, \Delta i$  son los mismos para la inclinación. Por otro lado,  $filtro$  indica el archivo del filtro (donde se encuentra el perfil de transmisión del filtro a utilizar),  $T_2, M_2$  son la temperatura y masa de la secundaria,  $N_\varphi$  es la cantidad de divisiones en fase que tendrá un periodo orbital y  $N$  es el número de teselas con las que se generará el LR. Finalmente,  $LD$  y  $GD$  son los efectos del Limb-Darkening y Gravity-Darkening (son valores booleanos que indican si se deben implementar o no), mientras que  $leyLD$  es la ley a utilizar en el cálculo del LD.

Los valores de temperatura y masa vienen determinados por el tipo espectral de la secundaria, que hoy en día se se toma entre K4-K5 (Smith & Dhillon 1998; Beuermann 2000; Bitner et al. 2007; Hill et al. 2017), así que utilizamos K4 y fijamos  $T = 4590$  K,  $M_2 = 0.693M_\odot$  de Habets & Heintze (1981). No es preocupante que estos valores no sean exactamente los de la secundaria, ya que en el apartado anterior hemos estudiado el efecto que tiene variar  $T$  y  $M$  y, respecto a la forma de las curvas, apenas hay diferencia.

En base a los resultados obtenidos en la figura 14 decidimos crear tres bibliotecas (una para cada filtro: I, R, V), donde  $q$  varía entre 0.5 y 0.76 en pasos de 0.02, mientras que  $i$  varía de  $30^\circ$  a  $60^\circ$  en pasos de  $1^\circ$ . Esto es, tenemos 31 valores de la inclinación por cada valor de la razón de masas, formando un total de 434 curvas de luz por cada filtro.

Finalmente, para el cálculo del LD y GD hemos tomado como metalicidad de SS Cygni la solar,  $[Fe/H=0]$ , y como velocidad turbulenta también la solar,  $V_\xi = 2$  km/s. De esta manera, los coeficientes del LD y GD solamente dependen de la temperatura y de la gravedad para cada filtro que utilicemos. Respecto al LD, decidimos utilizar la ley de la ecuación (7).

### 5.4. Programa comparador de curvas

La comparación entre los datos reales y los modelos de las bibliotecas se lleva a cabo comparando la curva real con cada una de las curvas sintéticas y generando un valor de  $\chi^2$  por cada una, definido como:

$$\chi^2(q, i) = \frac{1}{N_{gl}} \sum_k \left( \frac{f_k - \alpha - \beta \hat{f}(\varphi_k; q, i)}{\sigma_k} \right)^2 \quad (17)$$

donde  $N_{gl}$  es el número de grados de libertad,  $f_k$  son los flujos reales,  $\sigma_k$  sus errores instrumentales,  $\hat{f}$  son los flujos sintéticos (que dependen de la fase, la razón de masas y la inclinación de cada curva generada) y  $\alpha, \beta$  son los parámetros obtenidos del ajuste lineal:

$$f = \alpha + \beta \hat{f}(\varphi; q, i) \quad (18)$$

Este ajuste es necesario ya que los flujos reales vienen a falta de una constante de calibración y los sintéticos en unidades no determinadas, de manera que así los ponemos a la misma escala para que puedan ser comparados. En cuanto a  $\alpha$ , da cuenta de posibles fuentes de luz adicionales en el sistema.

El flujo expresado por los datos se puede describir mediante la suma de distintas contribuciones:

$$f(\varphi, t) = k(D + M + E(\varphi) + \mathcal{O}(t)) \quad (19)$$

donde  $k$  es una constante de calibración que se desconoce,  $D$  es una contribución extra constante (del disco, por ejemplo),  $M$  es la emisión promedio de la secundaria,  $E(\varphi)$  es la variación con la fase de la curva de luz de la ME respecto a  $M$  (de forma que  $\bar{E}(\varphi) = 0$ ) y  $\mathcal{O}(t)$  da cuenta de posibles emisiones erráticas procedentes de alguna estructura de la binaria. Tras el proceso realizado para filtrar los datos, consideraremos que  $\mathcal{O}(t) \simeq 0$ .

A la vista de la expresión (14), las unidades del flujo de las curvas generadas son  $\text{erg}/\text{cm}^2/\text{s} \cdot \mathcal{A}$ , donde  $\mathcal{A}$  son las unidades de área en que se trabaja en el LR, es decir, en el problema de los tres cuerpos restringido. La unidad de longitud en este contexto es la separación del sistema,  $a$ , por lo que las unidades de área son  $a^2$ . De la tercera ley de Kepler tenemos:

$$a^2 = \left[ GM_{\odot} \frac{M_2}{M_{\odot}} \left( \frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{2/3} (1+q)^{2/3}$$

lo que significa que, para un sistema del que conozcamos el periodo y la masa de la secundaria, la unidad de área dependerá únicamente de  $q$  mediante:

$$a^2 = S_0(1+q)^{2/3}$$

de manera que el flujo sintético en unidades físicas será:

$$\hat{F}(\varphi; q, i) = \hat{f}(\varphi; q, i) S_0(1+q)^{2/3} \quad (20)$$

El flujo sintético también puede ser separado en una componente constante y otra que dependa de la fase, de igual manera que antes comentamos para los flujos reales, de manera que:

$$\hat{f}(\varphi; q, i) = \frac{\hat{F}(\varphi; q, i)}{S_0(1+q)^{2/3}} = \frac{\hat{M}(q, i) + \hat{E}(\varphi; q, i)}{S_0(1+q)^{2/3}}$$

mientras que el flujo de los datos es (19):

$$f(\varphi) = kD + k[M + E(\varphi)]$$

Comparando estas dos expresiones con el ajuste de la ecuación (18) llegamos a:

$$\alpha = kD \quad \beta = kS_0(1+q)^{2/3} \quad (21)$$

donde hemos supuesto que el modelo da cuenta estrictamente de los datos:

$$M + E(\varphi) = \hat{M} + \hat{E}(\varphi; q, i) \quad (22)$$

es decir, que los valores  $(q, i)$  del modelo son los que corresponden realmente al sistema  $(q_0, i_0)$ . Esto significa que, del modelo óptimo (el de menor  $\chi^2$ ), podemos obtener sus parámetros  $(q_0, i_0)$  y la constante de calibración de los datos,  $k$ , a través de  $\beta$  en las expresiones (21). Conociendo  $k$ , podemos aplicarla a todos los modelos y correr nuevamente la comparativa con una diferencia: esta vez la transformación (18) solo debe tener como parámetro libre  $\alpha$  ya que  $\beta$  lo hemos

aplicado ‘a mano’. El problema es que las unidades de los flujos sintéticos dependen del modelo mediante  $a^2$ , ver (20), por lo que estas unidades únicamente coincidirán si  $(q, i) = (q_0, i_0)$ . Es necesario, pues, realizar una corrección a cada modelo en lugar de simplemente multiplicar por la constante de calibración,  $k$ .

Para que las unidades de  $\chi^2$  en ambos casos (el óptimo y otro cualquiera) sean comparables, la transformación (18) debería hacerse usando el valor de  $\beta$  correspondiente al modelo,  $\beta_j$ , no el  $\beta$  obtenido del ajuste. Usando este último, los valores que se obtienen para  $\chi^2(q, i)$  son menores de lo que serían si calibrásemos el modelo correctamente, ya que  $\beta_j$  no optimiza el ajuste mientras que  $\beta$  sí lo hace. Por tanto, el modo correcto de proceder debería ser, una vez obtenidos los  $(q_0, i_0)$ , realizar nuevamente la transformación (18) para el resto de los casos, no ajustando  $\beta$  sino usando el valor:

$$\beta_j = \beta_0 \left( \frac{1 + q_j}{1 + q_0} \right)^{2/3} \quad (23)$$

El hecho de aplicar la expresión (23) a los diferentes modelos no va a afectar al valor de  $\chi^2(\min)$  ni a los valores de  $(q_0, i_0)$ , pero sí a los valores de  $\chi^2(q, i)$  para  $(q, i) \neq (q_0, i_0)$ , que serán mayores que antes, por lo que nos permitirán afinar los errores de  $q_0$  e  $i_0$ . Por tanto, para cada valor de  $q$  sobre la superficie  $\chi^2(q, i)$  que obtengamos, calculamos el mínimo de  $\chi^2$  y su correspondiente  $i$  mediante un ajuste de tercer grado ya que las curvas  $\chi^2(i)$  no son simétricas. Después, a cada curva le sumamos la unidad y vemos qué valores de  $i$  corresponden a  $\chi^2(\min) + 1$ . Las diferencias entre estos valores de  $i$  e  $i_0$  son los errores en la inclinación.

En resumen, el proceso a seguir es:

1. Pasar la comparativa y obtener el modelo que mejor ajusta:  $\chi^2(\min) \rightarrow (q_0, i_0)$ .
2. Aplicar la ecuación (23) a todos los modelos y repetir la comparativa, bloqueando el ajuste del parámetro  $\beta$  en la ecuación (18).
3. A partir de la superficie  $\chi^2(q, i) + 1$  calcular los errores en  $i$ .

Para poner todo esto en contexto, hemos desarrollado un programa que toma una curva de luz sintética, le realiza una transformación lineal mediante la ecuación (18) y le añade ruido gaussiano. Entonces, el programa comparador debe ser capaz de indicarnos los valores de  $(q, i)$  originales, que deben ser los que minimizan  $\chi^2$ . Hemos escogido una curva sintética del filtro I con los valores  $(q, i) = (0.66, 38)$ , que se puede ver en la figura 15, junto con la transformación lineal y tras añadirle el ruido.

Una vez obtenido el  $\chi^2(\min)$ , tenemos los valores  $(q_0, i_0)$  del modelo óptimo y el  $\beta_0$  necesario para calcular las  $\beta_j$  mediante la ecuación (23) y aplicarlas a cada uno de los modelos existentes en la biblioteca. A partir de entonces, se pasa nuevamente la comparativa habiendo aplicado a cada modelo su  $\beta_j$ , obteniendo la superficie de la figura 16b donde se observa una ligera dependencia de la inclinación óptima con  $q$ . Sobre esta superficie, para cada valor de  $q$  extraemos las curvas  $\chi^2(i)$  y sobre cada una de ellas buscamos el mínimo, quedando determinados los valores de la inclinación óptima para cada valor de  $q$ . En la figura 17 se pueden ver estas curvas con los mínimos hallados en cada una de ellas. Es sobre estas curvas donde determinamos el error de la inclinación, sumando la unidad a  $\chi^2(\min)$  y viendo qué valores de  $i$  le corresponden.

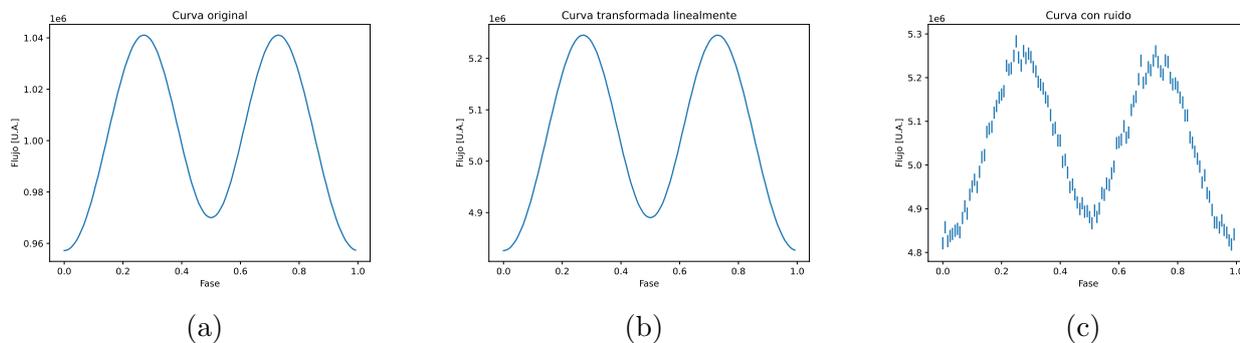


Figura 15: (a) Curva sintética, (b) misma curva sintética tras hacerle una transformación lineal y (c) curva transformada tras añadirle ruido.

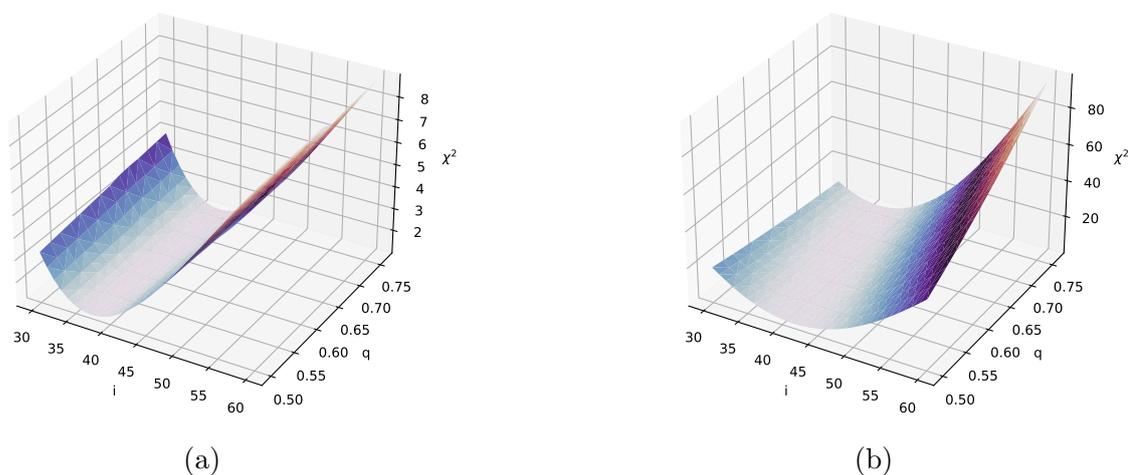


Figura 16: (a) Superficie con los valores de  $\chi^2$  tras la primera comparativa y (b) misma superficie tras aplicar las calibraciones a cada modelo y correr una segunda comparativa.

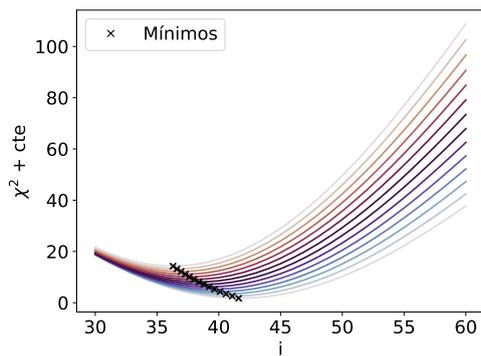


Figura 17: Curvas  $\chi^2(i)$  y sus mínimos hallados para cada valor de  $q$ . Se ha sumado una constante distinta a cada curva para visualizar de mejor manera los mínimos.

nación. Es decir, el método utilizado no es sensible al parámetro  $q$ , cosa que ya habíamos visto al estudiar la variación de los valores de los parámetros (ver figura 14). Con esto queremos decir que el método utilizado no va a servir para determinar  $q$ , pero sí  $i$ .

Durante la selección de las noches y el posterior tratamiento de los datos nos hemos centrado en aquellos del filtro I por las razones ya comentadas, pero dado que tenemos datos en los filtros I, R y V (y las respectivas bibliotecas) podemos realizar la misma comparativa teniendo en cuenta todos los datos.

Una de las mejoras al programa fue añadir una rutina para realizar una comparativa usando todos los filtros a la vez, que procede de dos formas distintas:

- Para cada modelo  $(q, i)$ , promedia los  $\chi^2$  obtenidos en todos los filtros.
- Para cada filtro, busca los parámetros  $(\beta_0, q_0)$  del modelo óptimo para poder aplicar la corrección (23) sobre todas las curvas de luz de la biblioteca correspondiente.

Tanto la primera como la segunda superficie devuelven valores iguales para  $\chi^2(\min)$ , y valores muy dispares del resto de  $\chi_j^2$ . Esto es debido a que en la primera comparativa el ajuste estaba buscando los parámetros  $(\alpha, \beta)$  que minimizan  $\chi^2$ , y variándolos conseguía encontrar ajustes bastante buenos, pero una vez hemos aplicado la calibración y hemos bloqueado el ajuste del parámetro  $\beta$  la comparativa se hace de manera realista.

Los resultados de ambas comparativas pueden verse en la figura 16, de donde ya podemos extraer bastante información acerca del método utilizado para determinar los valores de los parámetros del sistema. La figura 16a muestra un claro valor mínimo de  $\chi^2$  para una inclinación, que ronda los 37 grados. Sin embargo, de la razón de masas del sistema no podemos decir gran cosa, ya que cualquier valor de  $q$  parece tener un valor mínimo de  $\chi^2$  en torno al valor mencionado de la incli-

## 6. Resultados

Vamos a proceder a mostrar los resultados que hemos obtenido acerca de SS Cygni. En la tabla 3 podemos ver los valores obtenidos al comparar nuestros datos con las bibliotecas generadas, separando los resultados según a qué filtros pertenecen los datos analizados. En general se observa que para todos los valores de  $q$  se obtienen valores de la inclinación óptima compatibles entre sí, a los cuales les corresponden valores de  $\chi^2(\min)$  muy parecidos. También podemos deducir que la inclinación óptima es diferente según el filtro utilizado. En el filtro R se obtienen los valores más bajos, en el I aumentan 1-2 grados y los del filtro V son unos 5-6 grados superiores respecto de los obtenidos para el R. En la figura 19 se ve la superficie  $\chi^2(q, i)$  para el filtro I y sus respectivas curvas para cada valor de  $q$ , con los mínimos anotados en la tabla 3.

Por otro lado, promediando los valores de  $\chi^2$  obtenidos para los tres filtros se observa la misma tendencia (ver últimas dos columnas de la tabla 3): todos los valores de  $q$  devuelven valores razonables de la inclinación óptima, asemejándose esta a los valores de los filtros I y R por separado. Los valores de  $\chi^2$  son algo más elevados que los obtenidos con el filtro I lo que es de esperar ya que, como comentamos, la mayor parte de la emisión de la secundaria cae en el rango del filtro I, pero en los filtros R y V puede haber contribuciones significativas de otras estructuras más energéticas de la binaria. Por ello, la modulación elipsoidal puede estar más camuflada en estos filtros. En la figura 18 se muestran los datos en estos filtros junto a los mejores ajustes encontrados, donde se aprecia que los datos de los filtros R y V se alejan más del ajuste que los del filtro I. En las tres curvas de luz se observa que el máximo de  $\varphi = 0.75$  es ligeramente superior al de  $\varphi = 0.25$ , pero en los filtros R y V esta diferencia es más pronunciada que en el filtro I, lo que provoca que el modelo se ajuste peor en general.

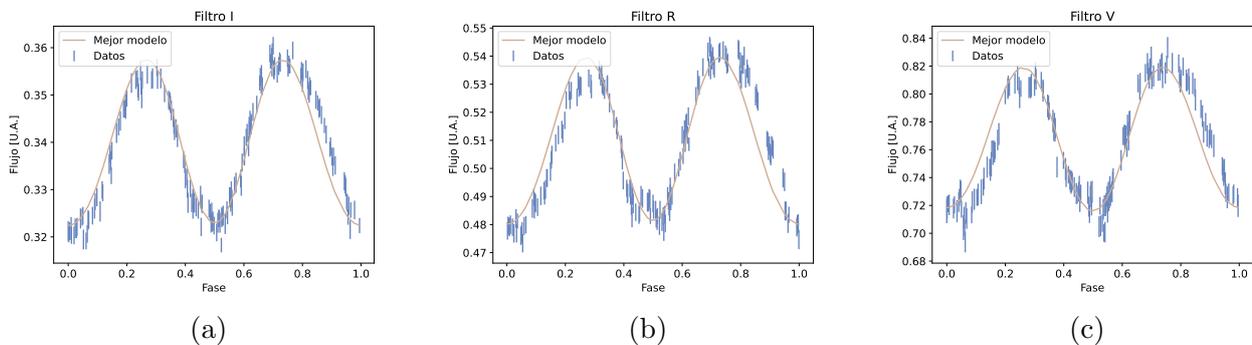


Figura 18: Datos y mejores modelos encontrados para diferentes filtros.

Cuando hablábamos de las variables cataclísmicas (apartado 2.3) comentamos que, en la acreción, una de las estructuras que puede formarse es una mancha caliente debido a la llegada de nuevo material al borde exterior del disco. Por ello, vamos a identificar si en el rango de fases en que esta estructura es visible (alrededor de fase 0.75), la emisión es mayor que en el resto de fases..

En las figuras 28 y 29 se muestran todas las noches en el filtro I con la región  $0.6 \leq \varphi \leq 0.9$  resaltada, región en la que se aprecian unas emisiones superiores que en el resto del periodo. De las noches que contienen una buena cobertura en fase (para poder ser comparados los flujos en distintas fases) y que muestran la modulación elipsoidal, prácticamente todas muestran niveles

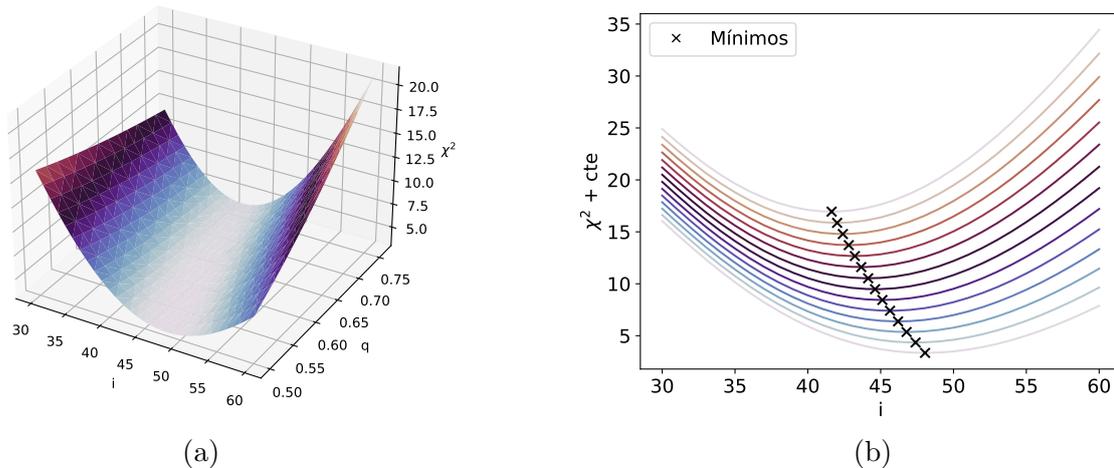


Figura 19: (a) Superficie  $\chi^2(q, i)$  para el filtro I y (b) cortes a  $q$  constante habiendo sumado una constante distinta a cada curva para visualizar mejor los mínimos hallados.

más elevados de emisión en la franja señalada. Esto lleva a pensar que hay algo que tiende a contaminar la modulación elipsoidal en los alrededores de  $\varphi = 0.75$ . Si observamos las mismas noches en los filtros R y V el comportamiento es parecido e incluso más acentuado que en el filtro I, lo que explicaría que los valores obtenidos de  $\chi^2$  sean mayores en ellos (aunque en el filtro V son similares debido a que los errores en los flujos son mayores y disminuyen el valor de  $\chi^2$ ).

Con el fin de evaluar si en torno a  $\varphi = 0.75$  puede existir alguna emisión que no corresponda a la secundaria, vamos a reducir el conjunto de datos con el que trabajamos. Una de las cosas que comentamos durante la clasificación de las noches es que, de las dos noches seleccionadas, la noche 4 muestra unos niveles de flujo por encima de lo normal a partir de la fase 0.6 (ver figura 9). Además, se ve un comportamiento al alza en cuanto a nivel de flujo medio a medida que aumenta la fase, lo que nos lleva a pensar que alguna estructura estaba empezando a emitir más. Si eliminamos los puntos existentes en el intervalo  $0.6 \leq \varphi \leq 0.9$  de la noche 4 (ver figura 20), todavía nos queda una buena muestra con la que representar la modulación elipsoidal. Con los puntos restantes de las dos noches formamos nuevamente un solo conjunto de datos y le aplicamos el tratamiento realizado en la sección 4. Al haber eliminado estos puntos, la envolvente inferior es todavía más baja, y lo que es más importante: al dividir los datos en 20 intervalos equiespaciados en fase y coger solamente cierto número de puntos dentro de cada intervalo, esta selección se hace con puntos de menor flujo para  $0.6 \leq \varphi \leq 0.9$ , lo que resulta en puntos más fieles a un estado relajado del sistema.

El resultado de comparar este nuevo conjunto de datos con las mismas bibliotecas puede verse en la tabla 4. En todos los casos se consiguen valores de  $\chi^2$  menores que antes. Respecto a los valores de la inclinación, para el filtro I se encuentran valores 2-3 grados más bajos que antes, para el filtro R unos 4 grados mayores y para el filtro V unos 4-6 grados inferiores. Si vemos el resultado de todos los filtros promediados, los valores de la inclinación son 3-4 grados superiores.

Por otro lado, el valor de  $q$  no puede ser determinado por el método utilizado, pero no es preocupante porque el valor de  $i$  resulta ser poco dependiente de  $q$ . No solo eso, sino que  $i$  también es casi independiente del resto de parámetros del sistema ( $T_2, M_2$ ) como comprobamos

$q$	Filtro I		Filtro R		Filtro V		Filtros I,R,V	
	$i$	$\chi^2$	$i$	$\chi^2$	$i$	$\chi^2$	$i$	$\chi^2$
0.50	$48.1^{+5.3}_{-5.5}$	3.35	$46.0^{+4.4}_{-4.4}$	5.05	$53.2^{+?}_{-7.5}$	3.74	$46.1^{+5.3}_{-4.5}$	4.00
0.52	$47.4^{+6.0}_{-4.8}$	3.35	$45.4^{+4.0}_{-3.9}$	5.08	$52.4^{+?}_{-7.6}$	3.71	$45.5^{+4.9}_{-5.0}$	4.0
0.54	$46.9^{+4.6}_{-5.2}$	3.36	$45.0^{+4.6}_{-4.4}$	5.11	$51.5^{+?}_{-7.8}$	3.68	$45.0^{+4.4}_{-4.3}$	4.03
0.56	$46.2^{+5.2}_{-4.6}$	3.38	$44.4^{+4.0}_{-3.9}$	5.14	$50.8^{+8.5}_{-7.1}$	3.66	$44.4^{+5.0}_{-4.9}$	4.06
0.58	$45.6^{+4.8}_{-5.1}$	3.40	$44.0^{+4.5}_{-4.5}$	5.18	$50.1^{+8.2}_{-7.4}$	3.64	$43.9^{+4.5}_{-4.3}$	4.09
0.60	$45.1^{+4.3}_{-4.6}$	3.44	$43.5^{+3.9}_{-4.0}$	5.23	$49.4^{+7.9}_{-6.7}$	3.62	$43.4^{+5.1}_{-4.9}$	4.13
0.62	$44.6^{+4.8}_{-4.0}$	3.48	$43.1^{+4.4}_{-3.6}$	5.30	$48.8^{+7.5}_{-7.1}$	3.60	$43.0^{+4.5}_{-4.4}$	4.18
0.64	$44.1^{+4.3}_{-4.6}$	3.53	$42.7^{+3.8}_{-4.2}$	5.37	$48.1^{+7.1}_{-6.4}$	3.59	$42.5^{+3.9}_{-3.9}$	4.23
0.66	$43.7^{+4.8}_{-4.1}$	3.61	$42.3^{+4.3}_{-3.8}$	5.47	$47.6^{+6.7}_{-6.9}$	3.58	$42.1^{+4.4}_{-4.6}$	4.31
0.68	$43.2^{+4.2}_{-4.7}$	3.67	$41.9^{+3.6}_{-3.4}$	5.56	$47.0^{+6.3}_{-6.3}$	3.57	$41.7^{+3.8}_{-4.1}$	4.37
0.70	$42.8^{+4.7}_{-4.3}$	3.72	$41.6^{+4.0}_{-4.1}$	5.64	$46.5^{+6.8}_{-5.8}$	3.57	$41.3^{+4.2}_{-3.7}$	4.43
0.72	$42.4^{+4.1}_{-3.9}$	3.79	$41.2^{+3.2}_{-3.8}$	5.75	$46.0^{+6.3}_{-6.3}$	3.56	$40.9^{+4.6}_{-4.4}$	4.50
0.74	$42.0^{+4.5}_{-4.6}$	3.86	$40.9^{+3.6}_{-3.4}$	5.86	$45.5^{+6.8}_{-5.9}$	3.56	$40.5^{+3.9}_{-4.0}$	4.58
0.76	$41.6^{+3.8}_{-4.1}$	3.95	$40.6^{+4.0}_{-4.2}$	5.97	$45.0^{+6.3}_{-5.4}$	3.56	$40.2^{+4.3}_{-3.6}$	4.66

Tabla 3: Valores mínimos de  $\chi^2$  e  $i$  para cada valor de  $q$ . Los errores en la inclinación son las diferencias entre las inclinaciones mostradas y aquellas que corresponden a  $\chi^2 + 1$ .

$q$	Filtro I		Filtro R		Filtro V		Filtros I,R,V	
	$i$	$\chi^2$	$i$	$\chi^2$	$i$	$\chi^2$	$i$	$\chi^2$
0.50	$45.1^{+4.3}_{-4.6}$	2.43	$49.6^{+4.8}_{-4.9}$	4.09	$47.5^{+6.7}_{-5.8}$	3.34	$50.2^{+6.1}_{-5.6}$	3.46
0.52	$44.6^{+4.9}_{-4.0}$	2.42	$49.0^{+5.4}_{-5.4}$	3.99	$46.9^{+6.4}_{-6.2}$	3.31	$49.6^{+5.7}_{-6.0}$	3.39
0.54	$44.0^{+4.4}_{-4.5}$	2.42	$48.4^{+5.0}_{-4.8}$	3.91	$46.2^{+6.1}_{-5.5}$	3.28	$49.0^{+5.3}_{-5.3}$	3.33
0.56	$43.5^{+3.9}_{-4.0}$	2.42	$47.9^{+4.5}_{-4.3}$	3.83	$45.6^{+6.7}_{-5.9}$	3.26	$48.4^{+6.0}_{-5.8}$	3.27
0.58	$43.0^{+4.4}_{-4.6}$	2.44	$47.4^{+5.0}_{-4.9}$	3.76	$45.0^{+6.3}_{-5.3}$	3.23	$47.8^{+5.5}_{-5.2}$	3.23
0.60	$42.6^{+3.9}_{-4.0}$	2.46	$47.0^{+4.4}_{-4.4}$	3.70	$44.5^{+5.8}_{-5.9}$	3.21	$47.3^{+5.0}_{-4.7}$	3.18
0.62	$42.2^{+4.4}_{-3.6}$	2.48	$46.5^{+4.9}_{-5.5}$	3.65	$44.0^{+5.3}_{-5.3}$	3.19	$46.8^{+5.6}_{-5.2}$	3.14
0.64	$41.7^{+3.7}_{-4.3}$	2.52	$46.1^{+4.3}_{-4.5}$	3.60	$43.5^{+5.9}_{-5.9}$	3.18	$46.4^{+5.0}_{-4.7}$	3.11
0.66	$41.4^{+4.2}_{-3.8}$	2.57	$45.7^{+4.8}_{-4.1}$	3.55	$43.0^{+5.3}_{-5.4}$	3.15	$45.9^{+5.5}_{-5.4}$	3.07
0.68	$41.0^{+3.5}_{-3.4}$	2.62	$45.3^{+4.1}_{-4.8}$	3.51	$42.6^{+5.8}_{-4.9}$	3.14	$45.5^{+4.9}_{-4.9}$	3.05
0.70	$40.6^{+3.9}_{-4.2}$	2.65	$44.9^{+4.5}_{-4.4}$	3.49	$42.1^{+5.2}_{-5.5}$	3.14	$45.1^{+4.3}_{-4.5}$	3.04
0.72	$40.3^{+3.2}_{-3.8}$	2.71	$44.6^{+3.8}_{-4.0}$	3.47	$41.7^{+5.7}_{-5.1}$	3.13	$44.7^{+4.7}_{-5.1}$	3.02
0.74	$39.9^{+3.6}_{-3.4}$	2.77	$44.3^{+4.2}_{-3.7}$	3.46	$41.3^{+5.0}_{-4.7}$	3.13	$44.3^{+5.2}_{-4.8}$	3.02
0.76	$39.6^{+4.0}_{-4.2}$	2.83	$43.9^{+4.6}_{-4.4}$	3.45	$41.0^{+5.5}_{-5.4}$	3.12	$43.9^{+4.5}_{-4.4}$	3.01

Tabla 4: Valores mínimos de  $\chi^2$  e  $i$  para cada valor de  $q$  tras haber eliminado los puntos indicados en la figura 20. Los errores en la inclinación son las diferencias entre las inclinaciones mostradas y aquellas que corresponden a  $\chi^2 + 1$ .

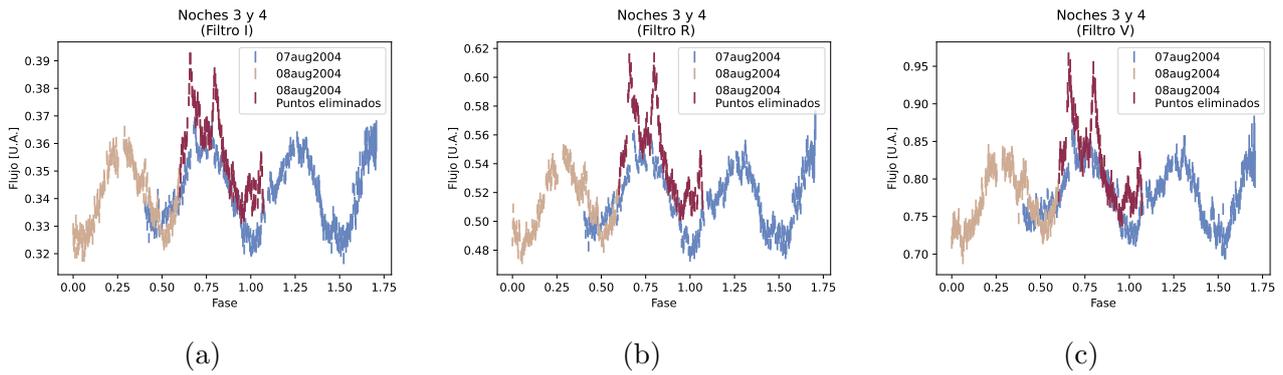


Figura 20: Noches 3 y 4 superpuestas en los filtros (a) I, (b) R y (c) V. Se indican los puntos que han sido eliminados debido a que presentan niveles de flujo que no corresponden al estado más relajado posible.

en la sección 5.2, ya que la forma de las curvas de luz solo se ve altamente influenciada por el valor de la inclinación. Esto implica que el método utilizado es prácticamente independiente del resto de los parámetros del sistema, por lo que no se lastran posibles errores ajenos.

Una importante conclusión de este estudio es que, incluso en el estado más relajado del sistema, pueden existir excitaciones. Los diferentes resultados obtenidos mediante un conjunto de datos (tabla 3) y otro (tabla 4) reflejan la gran importancia que tiene seleccionar aquellas noches que corresponden al estado más relajado del sistema. De las 19 noches iniciales tan solo hemos usado dos y después hemos tratado nuevamente estos datos para quedarnos solo con aquellos de menos flujo. Aún así, el valor de la inclinación obtenido mediante un conjunto y otro varía notablemente a pesar de que los datos de ambos conjuntos pertenecen a las noches más tranquilas. Por ello, lo ideal sería contar con una muestra lo suficientemente grande de noches de observación como hemos tenido la suerte de tener nosotros, de manera que sea representativa de todos los estados en los que puede estar el sistema y poder identificar el de máxima relajación. En cualquier caso, hay que ser muy cuidadosos a la hora de definir unos datos concretos como ‘en estado de quietud’ porque queda claro que, incluso dentro de dicho estado, hay noches en las que el sistema está excitado.

Siguiendo con el análisis, los valores de  $\chi^2$  para los mejores ajustes encontrados son ciertamente altos, siendo el mínimo valor,  $\chi^2(\text{min}) = 2.42$ , obtenido con el conjunto de datos reducido en el filtro I. El valor de  $\chi^2$  se obtiene mediante (17), que tiene en cuenta los errores en los flujos en su denominador. Unos errores subestimados en los flujos explicarían los altos valores obtenidos para  $\chi^2$ .

Con el fin de calcular los errores en la inclinación mediante un método independiente de los errores de los flujos vamos a utilizar el método *bootstrapping* (Andrae 2010), que también nos servirá para estimar los valores óptimos de  $i$ . El método de *bootstrapping* consiste en repetir el cálculo para un cierto número de curvas obtenidas mediante la sustitución de cada punto de la curva por otro de la misma, elegido aleatoriamente y contemplando la posibilidad de que se repitan. Es decir, si tenemos el conjunto de datos  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\}$ , donde los distintos  $x$  son las fases y los distintos  $y$  los flujos, algunos de los nuevos conjuntos de datos podrán ser:

- $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\}$ , el original

- $\{(x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_4, y_4)\}$
- $\{(x_1, y_4), (x_2, y_4), (x_3, y_4), (x_4, y_4)\}$

de manera que se van obteniendo diferentes valores de  $q$  e  $i$ . Este método es independiente del error en los datos ya que, al remuestrear la curva de luz original un gran número de veces, se tiene una buena muestra del error intrínseco que está codificado en los propios datos. Al final, compara todos los conjuntos de datos obtenidos con una biblioteca y podemos obtener una distribución de probabilidad para los valores de los parámetros implicados. Los resultados de realizar  $10^7$  iteraciones de *bootstrapping* pueden verse en la figura 21. Los errores mostrados corresponden a la desviación estándar de la distribución normal.

Mediante *bootstrapping*, usando el conjunto de datos original el valor de la inclinación más probable es  $i = 47.1_{-1.5}^{+1.5}$ , mientras que usando el conjunto de datos reducido (ver figura 20) se estima el valor  $i = 44.0_{-1.3}^{+1.4}$ , ambos para el filtro I. Como vemos, ahora los errores son bastante más reducidos que los que obtuvimos al inicio de este apartado (ver tablas 3 y 4), lo que nos lleva a pensar que los errores en los flujos de los datos puedan estar subestimados.

Dado que hemos estimado numerosos valores de la inclinación de SS Cygni y no podemos estimar  $q$  de ninguna manera mediante este método, vamos a utilizar dos diferentes valores de dos artículos distintos obtenidos mediante técnicas independientes de la ME. El valor de la razón de masas obtenido por Bitner et al. (2007) es de  $\langle q \rangle = 0.683 \pm 0.012$ , mientras que el encontrado por Hill et al. (2017) es de  $q = 0.628$ . En la tabla 5 se pueden ver estos resultados para todos los filtros, además de los correspondientes al *bootstrapping*.

Filtros	Conjunto de datos original				Conjunto de datos reducido			
	I	R	V	I,R,V	I	R	V	I,R,V
$q = 0.62$ (Bitner et al. 2007)	$43.2_{-4.7}^{+4.2}$	$41.9_{-3.4}^{+3.6}$	$47.0_{-6.3}^{+6.3}$	$41.7_{-4.1}^{+3.8}$	$41.0_{-3.4}^{+3.5}$	$45.3_{-4.8}^{+4.1}$	$42.6_{-4.9}^{+5.8}$	$45.5_{-4.9}^{+4.9}$
$q = 0.68$ (Hill et al. 2017)	$44.6_{-4.0}^{+4.8}$	$43.1_{-3.6}^{+4.4}$	$48.8_{-7.1}^{+7.5}$	$43.0_{-4.4}^{+4.5}$	$42.2_{-3.6}^{+4.4}$	$46.5_{-5.5}^{+4.9}$	$44.0_{-5.3}^{+5.3}$	$46.8_{-5.2}^{+5.6}$
Bootstrapping	$47.1_{-1.5}^{+1.5}$	$45.6_{-1.3}^{+1.3}$	$44.8_{-2.0}^{+2.4}$	-	$44.0_{-1.3}^{+1.4}$	$43.0_{-1.3}^{+1.4}$	$40.3_{-2.7}^{+2.5}$	-

Tabla 5: Resumen de los valores de  $i$  destacados, obtenidos mediante diferentes métodos.

En general, los valores de  $i$  estimados mediante *bootstrapping* son ligeramente inferiores que los obtenidos mediante  $\chi^2$ , pero ambos son compatibles. Los valores óptimos de la inclinación obtenidos mediante  $\chi^2$  (ver tablas 3 y 4) prácticamente comparten el mismo valor de  $\chi^2$  hasta llegar a  $q = 0.6$ , por lo que cualquiera de esos valores es igualmente bueno, valores que abarcan 2 grados de diferencia, quedando dentro de este rango los obtenidos mediante *bootstrapping*.

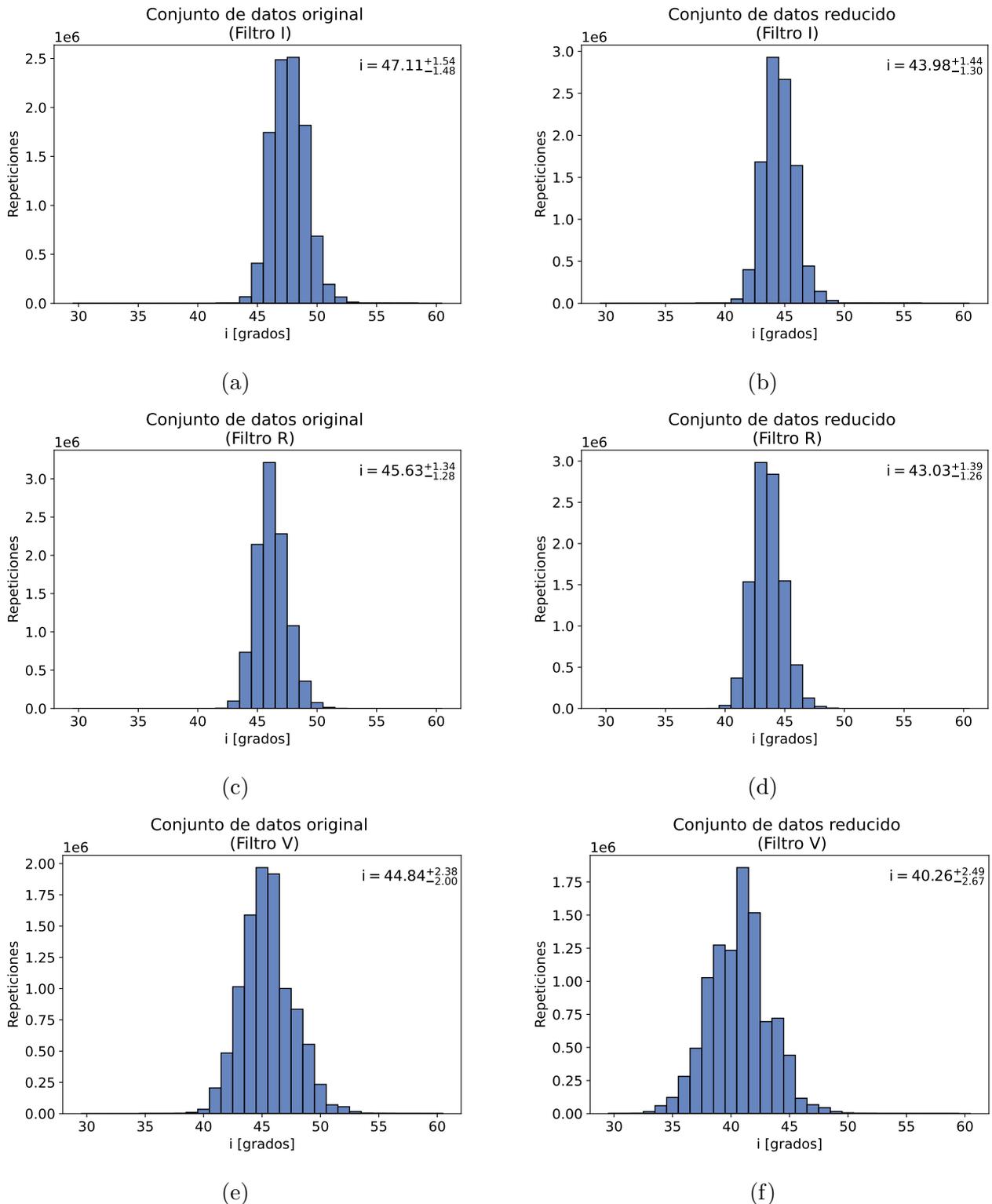


Figura 21: Histogramas con los valores más probables de la inclinación de SS Cygni mediante el método *bootstrapping*. En la columna izquierda se encuentran los resultados para cada filtro utilizando el conjunto de datos original, mientras que en la columna derecha se encuentran los del conjunto de datos reducido (ver figura 20).

## 7. Trabajo futuro

Tras este análisis acerca de la modulación elipsoidal de SS Cygni, y a la vista de la gran importancia (y dificultad) que tiene identificar el estado de relajación del sistema, existen numerosas formas de proceder para ampliar este estudio. En lo referente a mejoras del programa utilizado:

- Utilizar modelos de atmósferas estelares en lugar de la ley de Planck para la emisión desde cada tesela del LR.
- Añadir un modelo de disco de acreción.
- Añadir irradiación del hemisferio interno del LR, proveniente de las regiones internas del disco.
- Añadir un modelo de mancha caliente que pueda aportar un flujo extra en cierta parte de la órbita.
- Considerar el efecto de posibles manchas en la secundaria.
- Para el análisis, en lugar de generar toda la superficie  $\chi^2(q, i)$ , implementar una rutina que calcule  $\chi^2(\min)$  mediante un método apropiado de minimización.

Por otro lado, con los mismos datos que se tienen se pueden estudiar muchos otros aspectos:

- Una vez obtenidas las curvas de modulación elipsoidal, restarlas de modo conveniente a las noches más excitadas para estudiar el residuo y su origen físico.
- Las tres últimas noches abarcan el comienzo de la subida del sistema hacia el estado de erupción. Sería interesante restar la tendencia general y así estudiar cómo varía la modulación elipsoidal en ellas.
- Estudiar con más detalle la contribución de la emisión de la mancha caliente a la curva de luz.
- Estudiar la contribución del disco para cada noche en cada filtro.

## Referencias

- Adams, W. S. & Joy, A. H. 1922, in Publications of the American Astronomical Society, Vol. 4, Publications of the American Astronomical Society, 305
- Andrae, R. 2010, arXiv e-prints, arXiv:1009.2755
- Bath, G. T. 1973, Nature Physical Science, 246, 84
- Beuermann, K. 2000, NewA Rev., 44, 93
- Bitner, M. A., Robinson, E. L., & Behr, B. B. 2007, ApJ, 662, 564
- Campbell, L. 1912, Annals of Harvard College Observatory, 64, 33
- Campbell, L. 1940, Annals of Harvard College Observatory, 90, 93
- Campbell, L. 1941, Popular Astronomy, 49, 50
- Claret, A. 1998, A&AS, 131, 395
- Claret, A. 2000, A&A, 363, 1081
- Claret, A. & Bloemen, S. 2011, A&A, 529, A75
- Cordova, F. A., Chester, T. J., Tuohy, I. R., & Garmire, G. P. 1980, ApJ, 235, 163
- Eggleton, P. P. 1983, ApJ, 268, 368
- Elvey, C. T. & Babcock, H. W. 1943, ApJ, 97, 412
- Giovannelli, F., Gaudenzi, S., Rossi, C., & Piccioni, A. 1983, Acta Astr., 33, 319
- Grant, G. 1955, ApJ, 122, 566
- Habets, G. M. H. J. & Heintze, J. R. W. 1981, A&AS, 46, 193
- Harrison, T. E., McNamara, B. J., Szkody, P., et al. 1999, ApJL, 515, L93
- Hessman, F. V., Robinson, E. L., Nather, R. E., & Zhang, E. H. 1984, ApJ, 286, 747
- Hill, C. A., Smith, R. C., Hebb, L., & Szkody, P. 2017, MNRAS, 472, 2937
- Joy, A. H. 1954, ApJ, 120, 377
- Joy, A. H. 1956, ApJ, 124, 317
- Kononov, D. A., Giovannelli, F., Bruni, I., & Bisikalo, D. V. 2012, A&A, 538, A94
- Kopal, Z. 1959, Close binary systems
- Kraft, R. P. 1962, ApJ, 135, 408
- Lucy, L. B. 1967, Zeitschrift für Astrophysik, 65, 89

- Martínez-Pais, I. G. 2003, *Introducción a la mecánica celeste:(formulación newtoniana)* (Universidad de La Laguna, Servicio de Publicaciones)
- Martinez-Pais, I. G., Giovannelli, F., Rossi, C., & Gaudenzi, S. 1994, *A&A*, 291, 455
- Martinez-Pais, I. G., Giovannelli, F., Rossi, C., & Gaudenzi, S. 1996, *A&A*, 308, 833
- Miller-Jones, J. C. A., Sivakoff, G. R., Knigge, C., et al. 2013, *Science*, 340, 950
- Pickering, E. C. 1908, *Astronomische Nachrichten*, 179, 163
- Pickering, E. C. & Fleming, W. P. 1896, *ApJ*, 4, 369
- Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. 1973, *A&A*, 24, 337
- Smith, D. A. & Dhillon, V. S. 1998, *MNRAS*, 301, 767
- Voloshina, I. B. & Khruzina, T. S. 2000, *Astronomy Reports*, 44, 89
- von Zeipel, H. 1924, *MNRAS*, 84, 665
- Webb, N. A., Naylor, T., & Jeffries, R. D. 2002, *ApJL*, 568, L45
- Wikipedia. 2008, *Limb-Darkening*

## A. Figuras no usadas en el texto

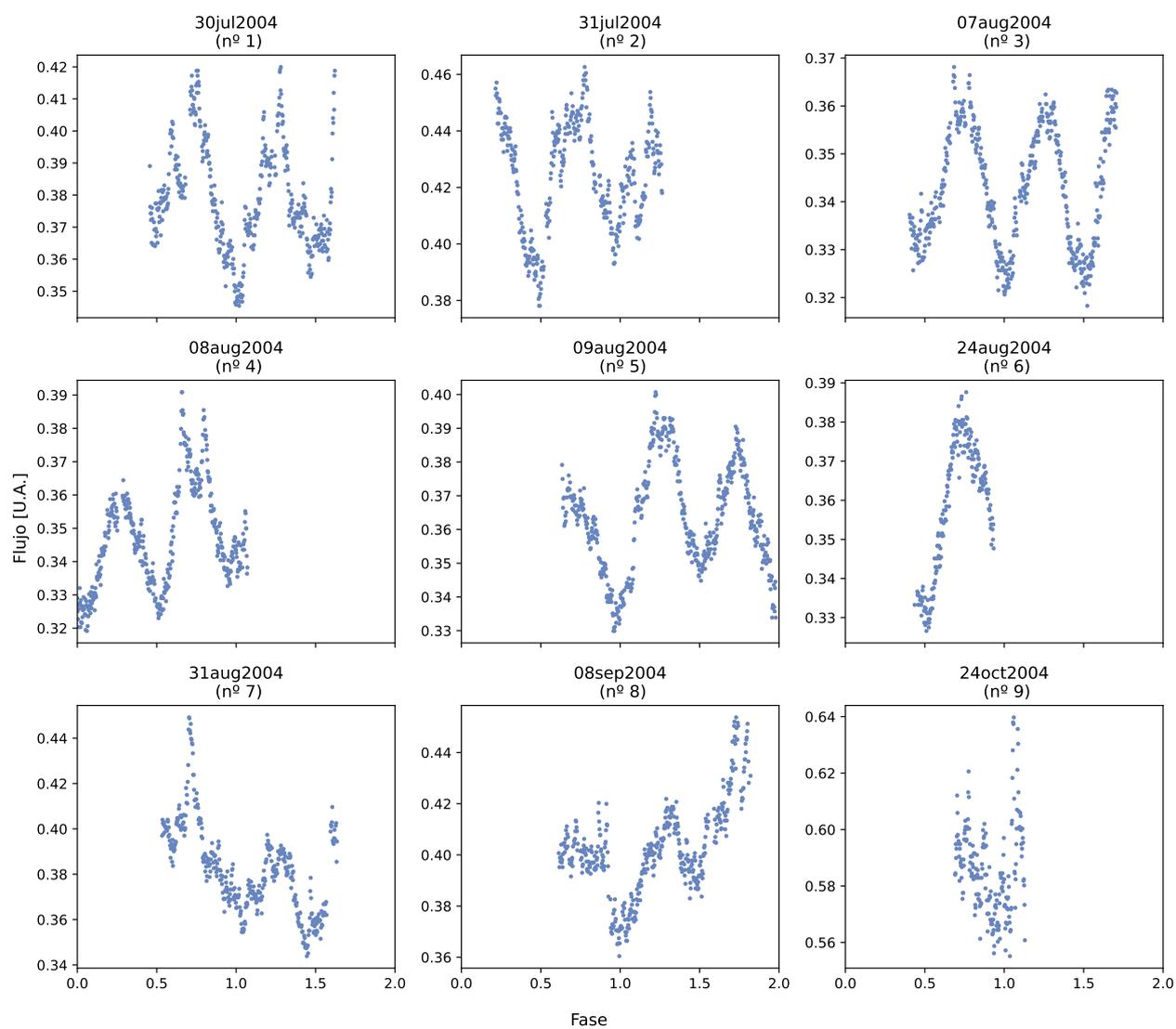


Figura 22: Curvas de luz de todas las noches de 2004 en el filtro I.

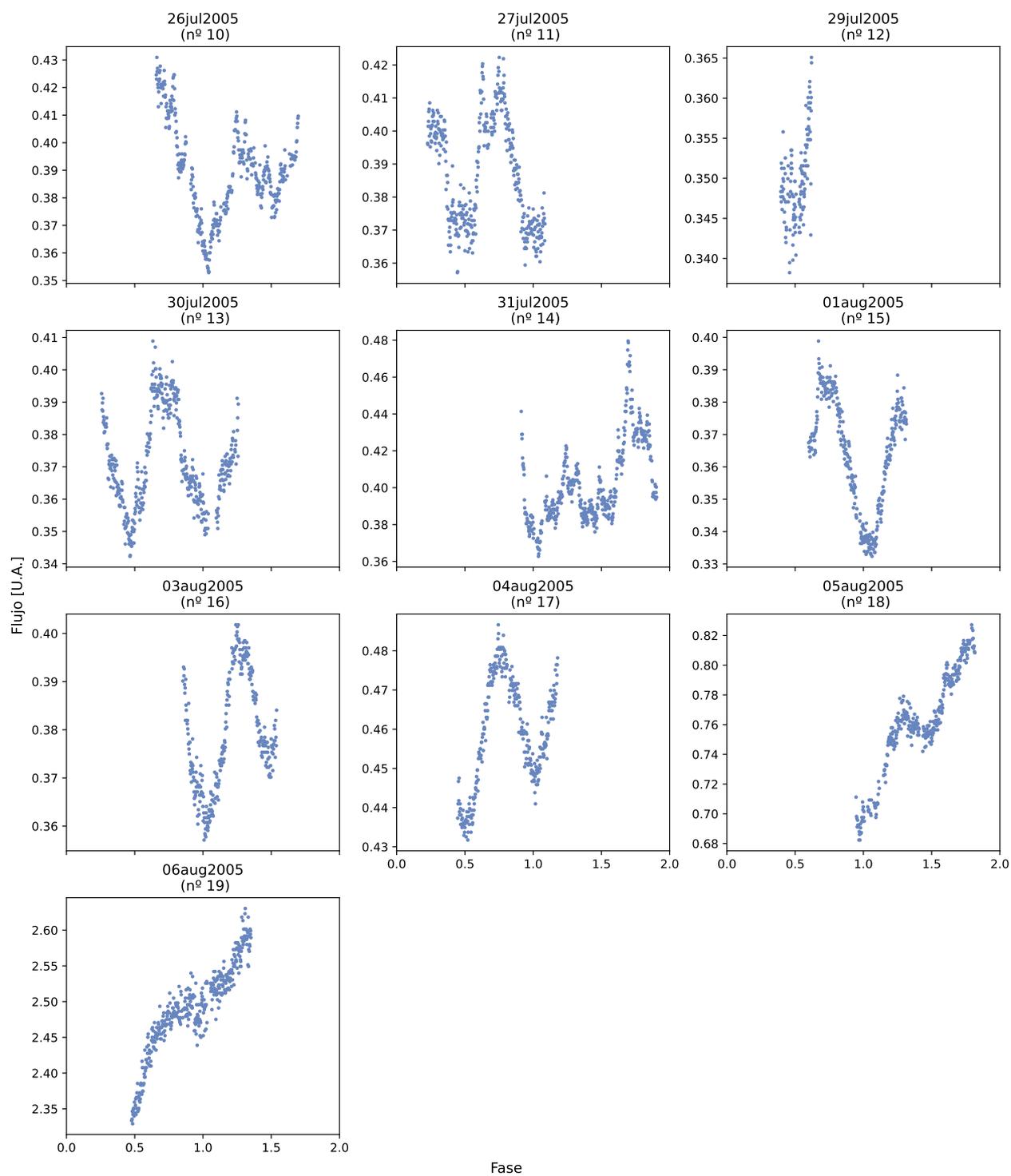


Figura 23: Curvas de luz de todas las noches de 2005 en el filtro I.

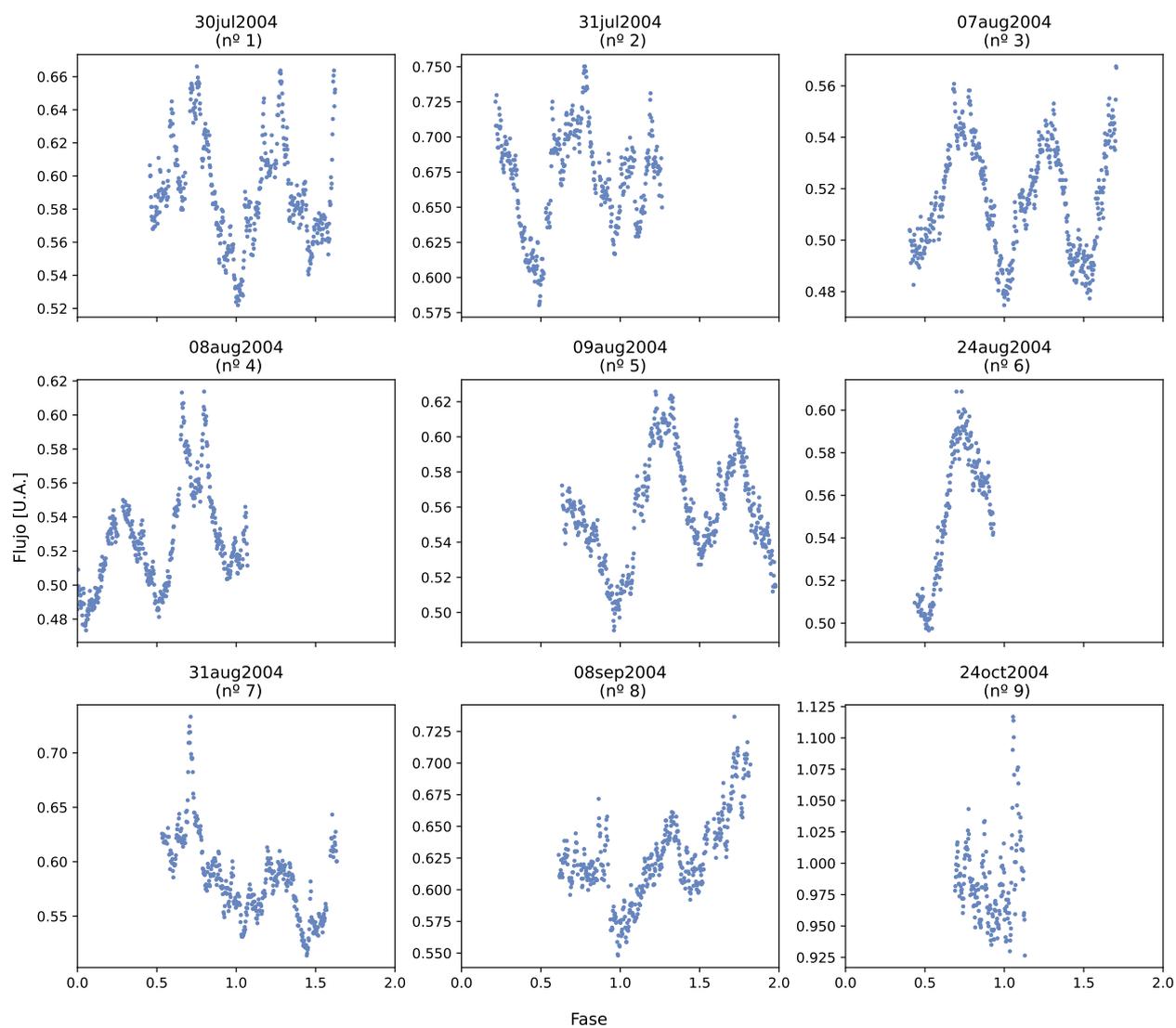


Figura 24: Curvas de luz de todas las noches de 2004 en el filtro R.

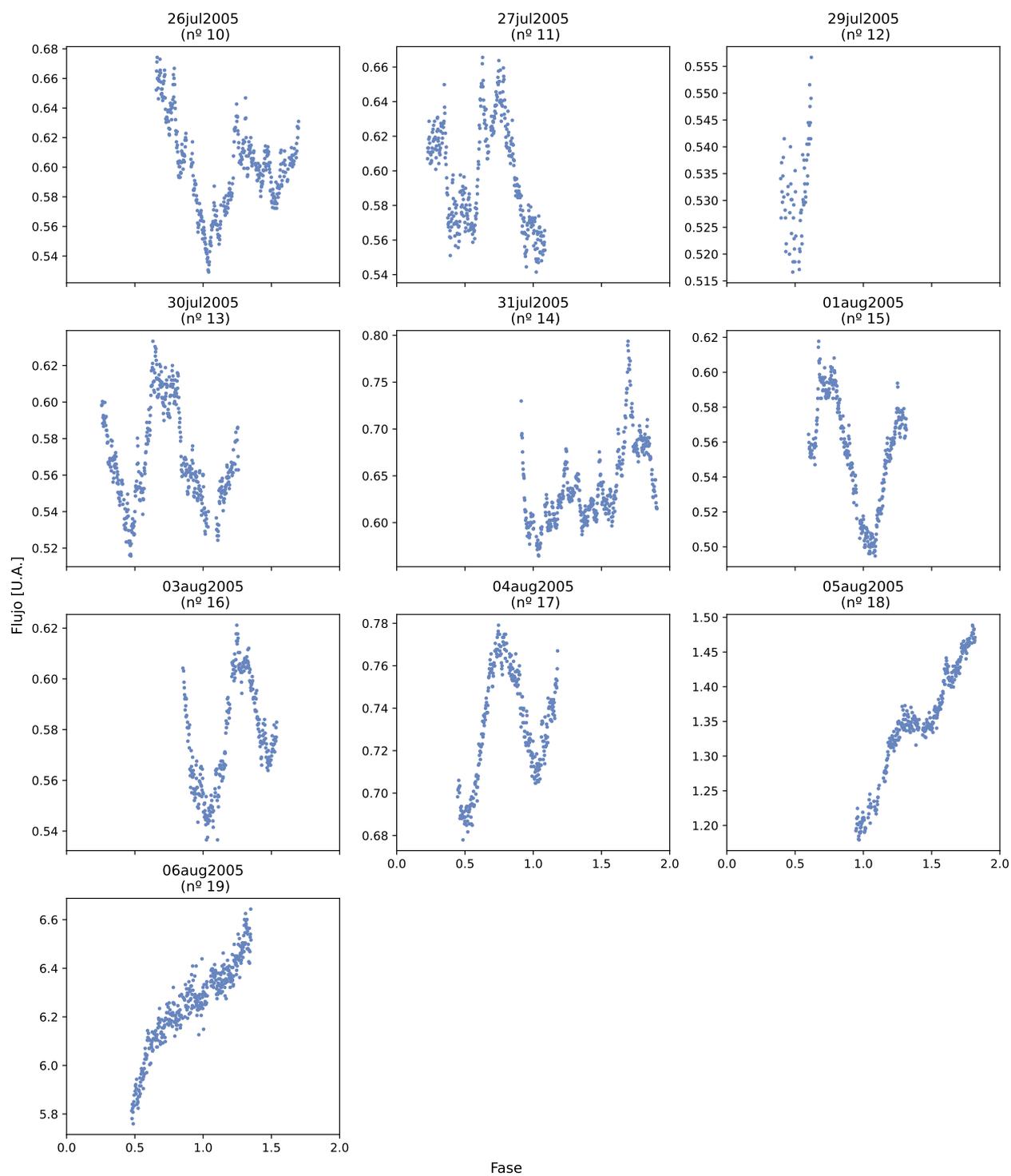


Figura 25: Curvas de luz de todas las noches de 2005 en el filtro R.

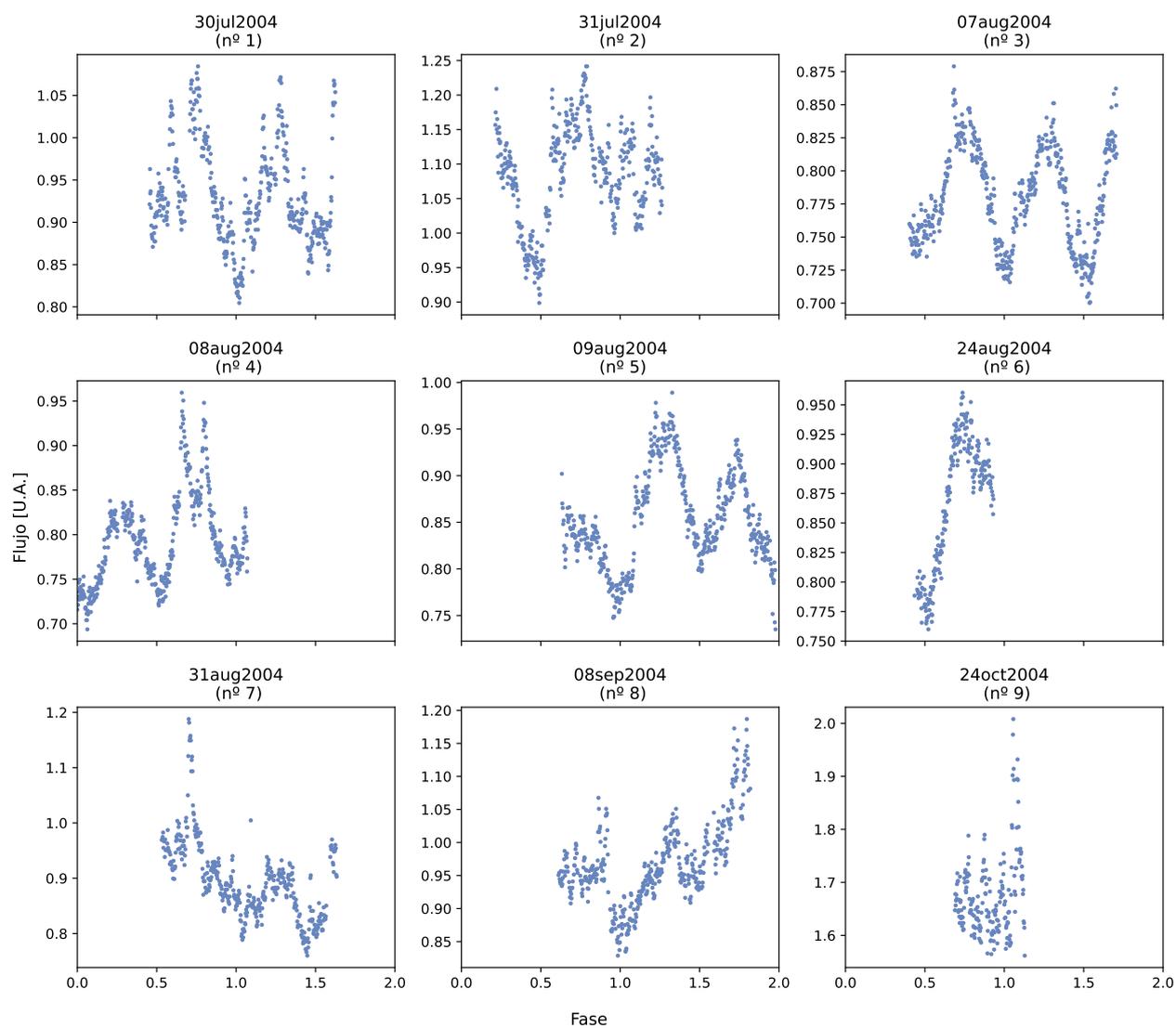


Figura 26: Curvas de luz de todas las noches de 2004 en el filtro V.

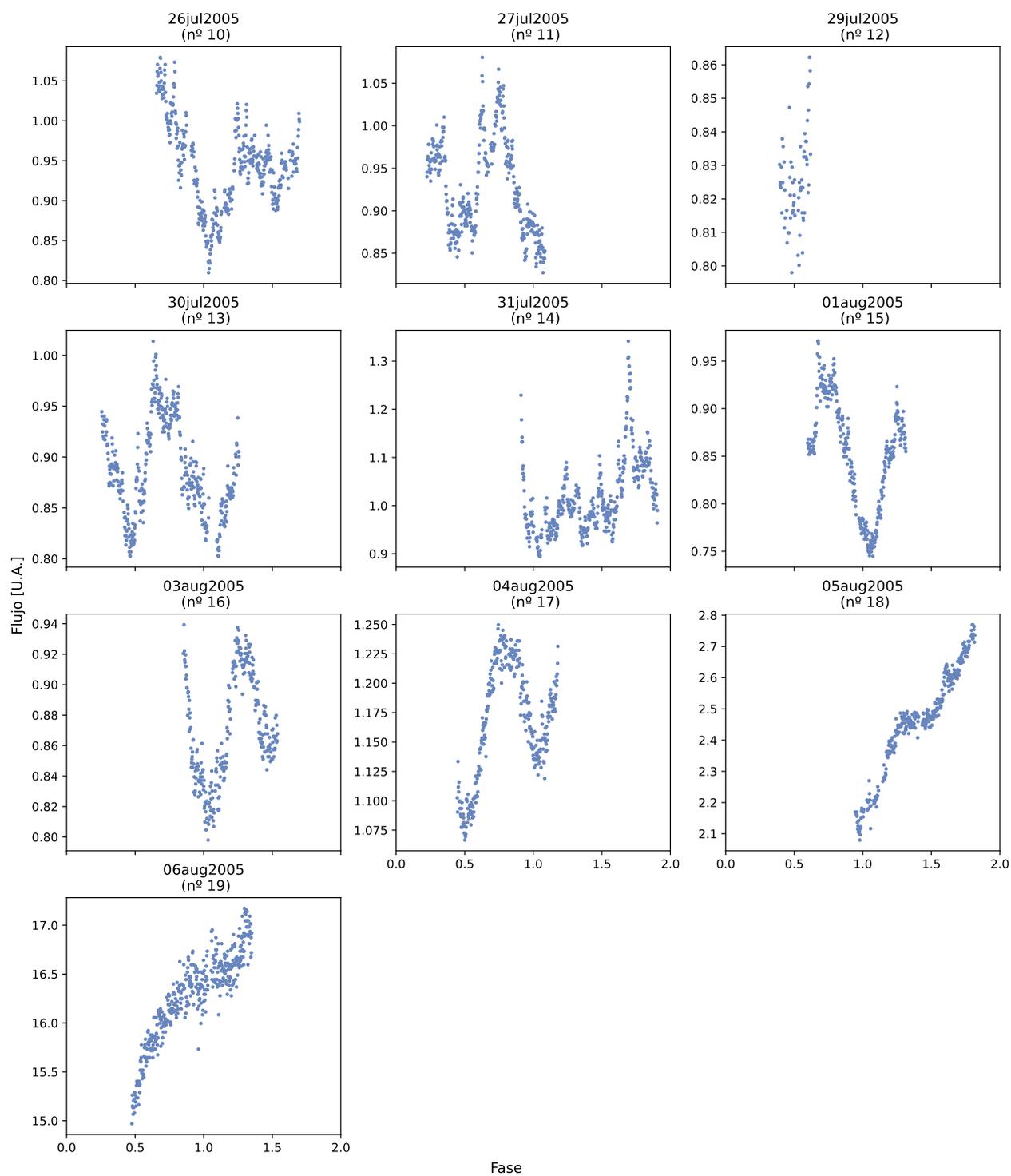


Figura 27: Curvas de luz de todas las noches de 2005 en el filtro V.

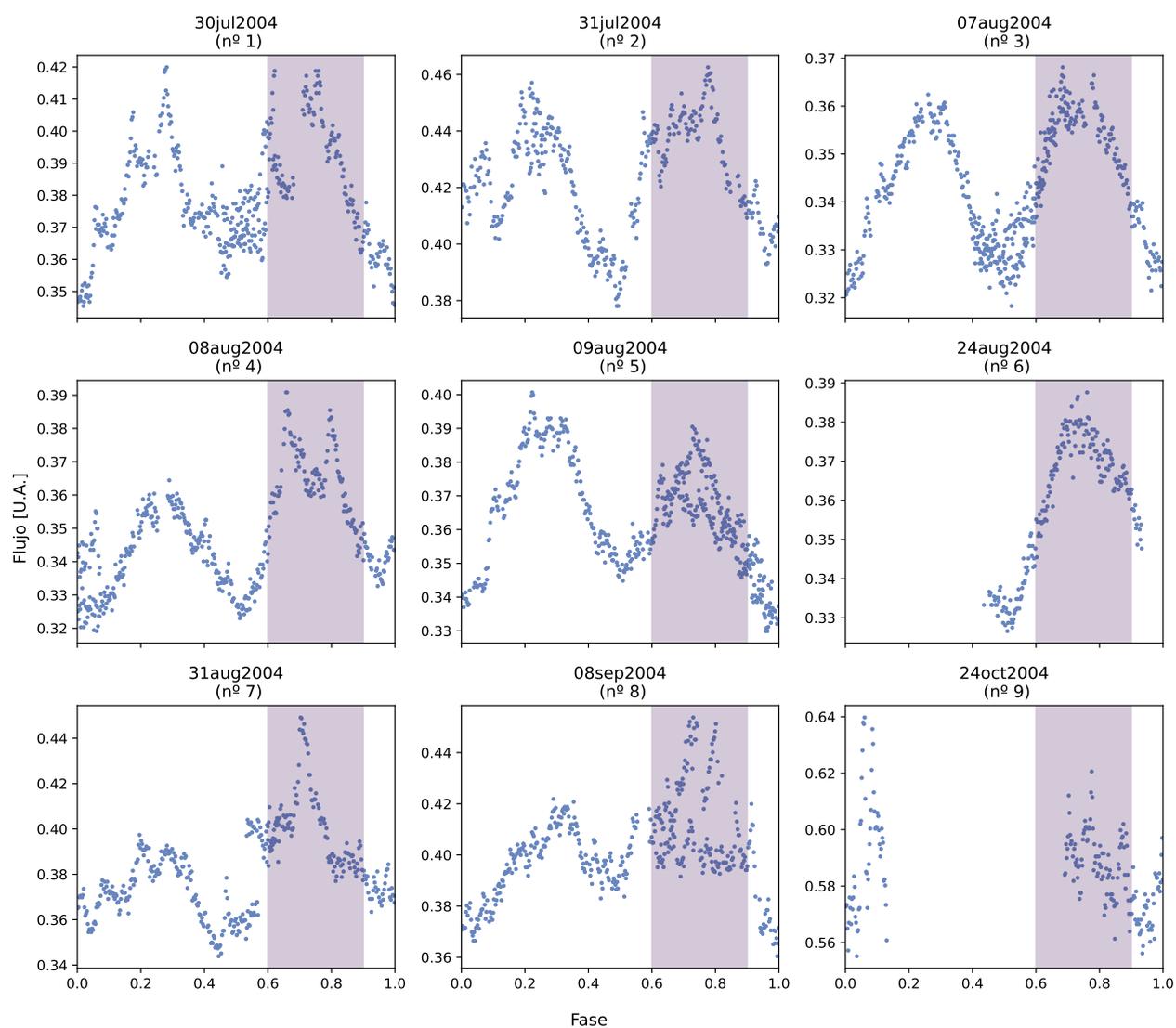


Figura 28: Curvas de luz de todas las noches del 2004 en el filtro I junto con el rango en la fase donde hay emisiones inusualmente altas de manera casi generalizada.

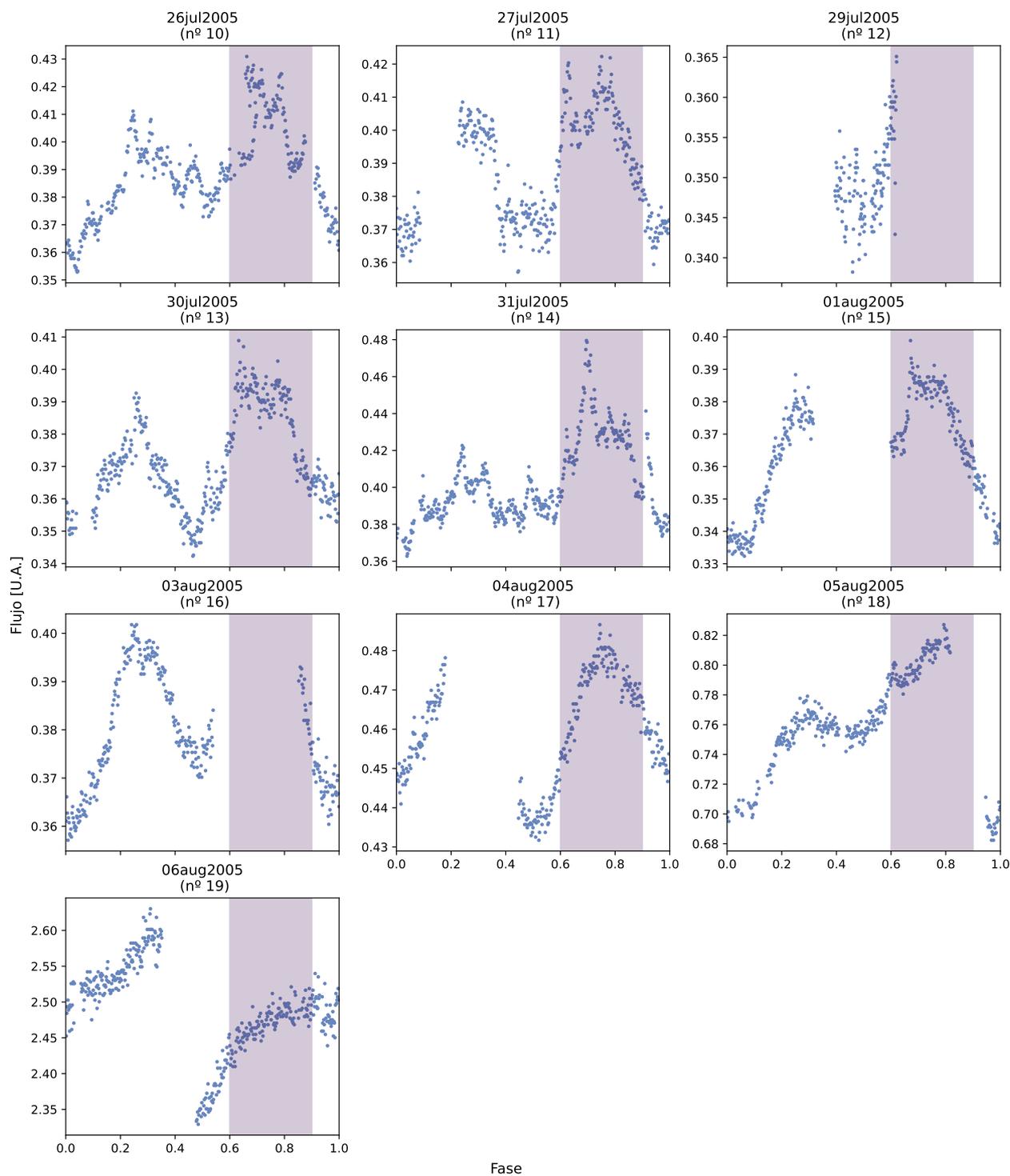


Figura 29: Curvas de luz de todas las noches del 2005 en el filtro I junto con el rango en la fase donde hay emisiones inusualmente altas de manera casi generalizada.