

Curso 2012/13  
**CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS/17**  
I.S.B.N.: 978-84-15910-77-0

**FRANCISCO JOSÉ PERDOMO PÍO**

**Sobre ortogonalidad y cuadratura:  
desde la circunferencia unidad al eje real**

**Directores**

**PABLO GONZÁLEZ VERA  
RUYMÁN CRUZ BARROSO**



**SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS**  
**Serie Tesis Doctorales**

# Agradecimientos

Es para mi una gran satisfacción personal el poder dedicar en este párrafo mi más sincero agradecimiento a mis directores de Tesis, los profesores Doctores D. Pablo González Vera y D. Ruymán Cruz Barroso, Catedrático de Matemática Aplicada y profesor Ayudante Doctor del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, respectivamente, por haber sabido orientarme en la dirección correcta y ofrecerme un apoyo constante. En especial, me gustaría dedicar esta Tesis a la memoria de Pablo, quien me guió sabiamente desde el primer momento y sin el cual nunca hubiera llegado hasta aquí.

Quisiera dar las gracias también a mis compañeros del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, que durante estos años me han acogido con afecto. En especial, al Dr. D. Carlos Díaz Mendoza, profesor Titular del Departamento, por sus valiosos comentarios y horas de dedicación altruista.

Mi más profundo agradecimiento también al profesor Dr. D. Adhemar Bultheel, Catedrático Emérito del Department of Computer Science, KU Leuven, por haberme invitado a realizar una estancia de investigación en este Centro durante el año 2010. Junto al profesor Dr. D. Karl Deckers, actualmente Assistant Professor in Applied Mathematics en el Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1, me brindaron una agradable y fructífera estancia.

Mi reconocimiento también al profesor Dr. D. Michael Stessin, Catedrático del Department of Mathematics and Statistics, University of Albany, New York, con quien tuve el placer de trabajar durante su visita a nuestro Departamento en el año 2009.

El apoyo diario se lo debo a mis padres Francisco y Juana, que siempre me han ayudado y aconsejado sabiamente.

Gracias a toda mi familia, amigos y compañeros por su ayuda.

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>VII</b>
<b>Summary</b>	<b>IX</b>
<b>List of most used symbols</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Ortogonalidad y cuadratura</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. La recta real . . . . .	3
1.3. La circunferencia unidad . . . . .	12
1.4. La transformación de Joukowski . . . . .	24
<b>2. Interpolación y aproximación</b>	<b>29</b>
2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss . . . . .	29
2.1.1. Convergencia en norma $L_2$ . Teorema de Erdős-Turán . . . . .	29
2.1.2. Reglas de integración producto. . . . .	33
2.1.3. Conexión entre aproximantes racionales . . . . .	48
2.2. Fórmulas de Cuadratura de tipo-Gauss con un nodo prefijado en el interior . . . . .	63
2.2.1. Caracterización . . . . .	63
2.2.2. Aspectos computacionales . . . . .	69
<b>3. Conexión entre la circunferencia unidad e intervalos no acotados de la recta real</b>	<b>75</b>
3.1. Relación entre las fórmulas de cuadratura para la función peso de Hermite y de Rogers-Szegő. . . . .	75
3.1.1. Fórmulas de cuadratura . . . . .	75
3.1.2. Cotas de error y ejemplos numéricos . . . . .	82
3.1.3. El caso límite . . . . .	87
3.2. Aplicación de los polinomios de Szegő al cálculo de integrales pesadas sobre intervalos no acotados. . . . .	90
3.2.1. Fórmulas de cuadratura . . . . .	90
3.2.2. Ejemplos y aplicaciones . . . . .	92
3.2.3. Experimentos numéricos . . . . .	96

---

## Índice general

---

3.3. Aplicación a la computación de la transformada de Fourier bajo la presencia cercana de singularidades polares. . . . .	99
3.3.1. Fórmulas de cuadratura . . . . .	99
3.3.2. Aplicación a la transformada de Fourier . . . . .	103
3.3.3. Ejemplos numéricos . . . . .	106
3.4. La transformación de Cayley. . . . .	108
3.4.1. Fórmulas de Cuadratura . . . . .	108
3.4.2. Ortogonalidad . . . . .	115
3.4.3. Ejemplos numéricos . . . . .	119
<b>4. El caso racional</b>	<b>125</b>
4.1. Ortogonalidad y cuadratura racional . . . . .	125
4.1.1. Fórmulas de cuadratura sobre $I$ . . . . .	125
4.1.2. Fórmulas de cuadratura sobre $\mathbb{T}$ . . . . .	128
4.1.3. Relación entre $I$ y $\mathbb{T}$ . . . . .	131
4.2. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio racionales positivas . . . . .	131
4.2.1. Ejemplos Numéricos . . . . .	139
4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales . . . . .	144
4.3.1. Propiedades de convergencia . . . . .	158
4.3.2. Ejemplos . . . . .	168
<b>Open problems</b>	<b>173</b>
<b>Conclusions</b>	<b>177</b>
<b>List of published papers</b>	<b>179</b>
<b>Bibliography</b>	<b>181</b>

# Summary

The Theory of Orthogonal Polynomials with respect to a positive measure (or weight function) supported on finite or infinite intervals of the real line, that has become in an important research area in Spain in the last decades, has as one direct application the approximate calculation of integrals with respect to this measure. Indeed, it is very well known that the construction of the so called *Gaussian quadrature formulas*, depends on the knowledge of the zeros of the corresponding family of orthogonal polynomials or the eigenvalues of the associated Jacobi matrices. Inspired in the Weierstrass theorem, such rules, with the highest degree of algebraic precision, are based on the exact integration of polynomials with the highest possible degree. Their importance and applicability in Approximation Theory have motivated the construction of alternative rules in situations where the use of ordinary polynomials is not appropriate, for example, when the integrand has singularities near the interval of integration. Thus, the so called *rational quadrature formulas* appear, being the role played by polynomials (rational functions with all the poles in the infinite) replaced by other rational functions with prescribed poles. This therefore leads to the *Theory of Orthogonal Rational Functions*, or alternatively, orthogonal polynomials with respect to varying measures. All these arguments highlights the intimate relationship between the concepts “orthogonality” and “quadrature”. Moreover, it has been proved also the interest of considering quadrature formulas with some of the nodes fixed in advance. For example, because these points correspond to points where some particular property should hold, or because we know some special values of the integrand in those nodes. Most often these nodes are one or both of the endpoints if the weighted integral is over a finite interval, or the endpoint if the interval is half-infinite, resulting the classical Gauss-Radau or Gauss-Lobatto rules. However, it has been also considered in recent years the situation when one or two nodes are fixed in advance inside the interval of integration, and also possible the corresponding endpoints. Two alternative approaches to this problem lead to the analysis of orthogonal polynomials with respect to variable-signed measures or to quasi-orthogonal polynomials. Note that the quadrature formulas mentioned here are quite different from Gauss-Kronrod formulas where several nodes are added to the classical Gauss nodes. In those formulas the Gauss nodes are fixed and the problem is to add free nodes in an optimal way so as to get best possible degree of accuracy (“improved Gaussian quadrature”). Here, some nodes, usually different from the Gauss nodes, are fixed, and all the remaining nodes are placed in an optimal way to obtain a good quadrature formula, whenever it exists.

Since the publication of the famous book “Orthogonal Polynomials” of Gabor Szegő in 1939, the *Theory of Orthogonal Polynomials on the Unit Circle* has become an important area of research in Applied Mathematics, with again a direct application in the approximate calculation of weighted integrals on the unit circle. In this respect, W.B. Jones, O. Njåstad and

---

## Summary

---

W.J. Thron introduced and characterized in 1989 the so called Szegő quadrature formulas, whose nodes are obtained as the zeros of *para-orthogonal polynomials* or via the eigenvalues of *Hessenberg* or *CMV matrices*, and where the exactness now is in subspaces of *Laurent polynomials* with the highest possible dimension, inspired now in the fact that they are dense in the space of the continuous functions defined on the unit circle, contrary in general to the ordinary polynomials. Such rules, that can be alternatively seen as quadrature formulas for periodic integrands with highest possible trigonometric degree of accuracy, have been studied exhaustively by the research group “Aproximation Theory” in the Department of Mathematical Analysis in La Laguna University. In analogy to the real situation, extensions to the rational case and the problem of fixing nodes in advance in the quadrature rules have been also analyzed.

It seems reasonable to think which results about the concepts “orthogonality” and “quadrature formulas” for the real line can be passed to the unit circle, and vice versa. Some results are already known. Indeed, if the measures on the finite interval  $[-1, 1]$  and the unit circle are related by the Joukowski transformation, then a connection between orthogonal polynomials on  $[-1, 1]$  and certain para-orthogonal polynomials was given by Szegő in the mentioned book (not with the use of this terminology). Also a connection between Gauss-type (Gauss, Gauss-Radau and Gauss-Lobatto) rules and certain symmetric Szegő quadrature formulas was established by A. Bultheel, L. Daruis and P. González Vera in 2001. But of course, there are still many questions in Aproximation Theory about these topics that remains to be connected from finite or infinite intervals of the real line to the unit circle, and vice versa. And this is the starting point of this Doctoral Dissertation, structured in four chapters and an appendix on some problems that remain open during it development.

The first chapter is devoted to introduce the basics and the preliminary results on orthogonality and quadrature formulas, needed for the rest. Starting from the construction of orthogonal polynomials with respect to a measure supported on a compact set of the complex plane, and recalling the well known result of Féjer about the location of its zeros, it is particularized then the most discussed cases in the literature: the real line and the unit circle. Concerning the real line, interpolatory and Gauss-type quadrature formulas are revised, and their computation detailed. Error bounds for the quadrature rules are also deduced in terms of the corresponding errors of the Padé and Padé-type approximants in the infinity to the Cauchy transform of the measure. For the unit circle case, Szegő and para-orthogonal polynomials along with interpolatory and Szegő quadrature formulas are introduced. Szegő-Radau and Szegő-Lobatto rules are also analyzed and some convergence results and error bounds are established, in particular, an error bound in terms of the corresponding errors of two point Padé and modified Padé approximants to the Herglotz-Riesz transform of the measure. The chapter is concluded by considering the Joukowski transformation, that maps the open unit disk to the extended complex plane with the interval  $[-1, 1]$  deleted, and the unit circle to the interval  $[-1, 1]$ . This transform is used to connect orthogonal polynomials on the interval and on the unit circle, Gauss-type quadrature formulas with certain symmetric Szegő rules and the corresponding Cauchy and Herglotz-Riesz transforms.

The second chapter is about interpolation and approximation questions connected between finite intervals of the real line (namely  $[-1, 1]$ ) and the unit circle. In the first part, the  $L_2$  convergence with respect to a positive measure in  $[-1, 1]$  of certain sequences of interpolating polynomials to a function by taking some special elections of the nodes is studied. The technique used here is again to pass to the unit circle by the Joukowski transformation,

---

## Summary

---

and as a result, an extension of the Erdős-Turán Interpolation theorem based on certain Gauss-type nodes is proved. We continue by considering product integration rules on  $[-1, 1]$  related to a measure that can take now complex values. A complete connection to the product integration rules on the unit circle associated with the complex measure transformed by the Joukowski transformation is given. An analysis of the convergence for certain particular elections of the nodes is obtained, presenting a more simpler proof of a result due to I.H. Sloan and W.E. Smith (1982), extended now to the Gauss-type nodes. Furthermore, error bounds for the considered product integration rules are proved and several illustrative numerical examples are carried out. Next, we study certain rational approximants to the Cauchy and Herglotz-Riesz transforms of two measures on the interval  $[-1, 1]$  and on the unit circle, respectively, related by the Joukowski transformation. As an application, estimations of the Chebyshev weight function of the first kind, the natural logarithm, the inverse of the tangent and some exponential integrals are numerically tested. This chapter concludes with the study of new alternative approach to the construction of Gauss-type quadrature formulas with a node prescribed inside the interval of integration (and also possibly the endpoints of the interval), by passing to the unit circle and considering symmetric Szegő-Lobatto quadrature formulas. An algorithm based on the LU decomposition of a certain modified Jacobi matrix for the computation of these rules is presented, by connecting the corresponding entries of the Jacobi matrix with the associated Verblunsky coefficients, and some numerical experiments involving rational modifications of the Chebyshev weight function of the first kind are carried out.

The third chapter is dedicated to connect the unit circle with unbounded intervals of the real line, so the Joukowski transformation will not be used here. We start by considering quadrature formulas for the Hermite weight function (on the real line) associated with the Rogers-Szegő weight function (on the unit circle), with the aim to approximate certain integrals over the real line for the Hermite weight and a periodic function in the integrand. Thus, a complete characterization of the corresponding Szegő quadrature formulas is given. Interpolatory type rules with nodes the roots of a complex number of modulus one are also studied, and an efficient procedure for their computation based on the Fast Fourier Transform algorithm is presented. Error bounds for the quadrature rules are obtained, some numerical examples are illustrated and also the limit cases are analyzed, giving rise on the unit circle by one hand to the Lebesgue measure and by other hand to a mass point located at  $z = 1$ . These results are nextly generalized for other weight functions different from the Hermite one, under certain conditions on integrability, but by using the same techniques. Some examples and applications including numerical experiments are considered: the Weierstrass operator, the Poisson kernel and some strong Stieltjes distributions. We continue by considering an application of these results in the computation of the Fourier transform under the presence of nearby polar singularities; some illustrative numerical experiments are carried out. Finally, the problem to estimate weighted integrals over the real line for a function that is not necessarily periodic in the integrand is studied. In this respect, a new transformation connecting the real line and the unit circle is considered: the Cayley transform. The transformed Szegő quadrature formulas are also characterized, where now the exactness is imposed in certain spaces of rational functions with poles in  $z = \pm i$ , giving thus a motivation for the next chapter. A connection between the orthogonal polynomials on the interval and the orthogonal rational functions transformed on the unit circle is established, and some numerical illustrative examples presented.

## Summary

---

The last chapter considers orthogonal rational functions and rational quadrature formulas. A complete connection between rational Gauss type quadrature formulas and rational symmetric Szegő-type rules is first established, presenting an extension to the rational case of the results by A. Bultheel, L. Daruis and P. González-Vera (2001). Here, the connection by the Joukowski transformation needs the study of rational para-orthogonal functions, and it is proved here that an appropriate election of the last pole is crucial to determine the existence of such rules. Several illustrative numerical examples are presented to illustrate this. Next, an extension to the rational case of the characterization of rational Gaussian quadrature formulas with a prescribed node inside the interval of integration is investigated in connection via the Joukowski transformation with certain symmetric rational Szegő-Lobatto quadrature formulas. As a consequence, convergence results for those rules are obtained and some illustrative numerical examples carried out.

As already said, this Doctoral Dissertation has an appendix where some problems that remain open during its development are proposed for further research.



# List of most used symbols

$\mathbb{R}$	real line
$\mathbb{C}$	complex plane
$\overline{\mathbb{C}}$	$:= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , extended complex plane (Riemann sphere)
$I$	$:= [-1, 1]$ , interval
$\mathbb{T}$	$:= \{z \in \mathbb{C} :  z  = 1\}$ , unit circle
$\mathbb{D}$	$:= \{z \in \mathbb{C} :  z  < 1\}$ , interior of unit circle
$\mathbb{E}$	$:= \{z \in \mathbb{C} :  z  > 1\}$ , exterior of unit circle
$A_B$	$:= \{z \in A : z \notin B\}$ , complement of $B$ in $A$
$\mathbb{P}$	$:= \mathbb{C}[z]$ , vectorial complex space of polynomials in the variable $z$ with complex coefficients
$\mathbb{P}_n$	$:= \text{span}\{1, z, \dots, z^n\}$ , vectorial subspace of polynomials with degree less than or equal to $n$
$\Lambda$	$:= \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ , vectorial complex space of Laurent polynomials in the variable $z$ with complex coefficients
$\Lambda_{m,n}$	$:= \text{span}\{z^m, z^{m+1}, \dots, z^n\}$ ( $m \leq n; m, n \in \mathbb{Z}$ ), vectorial subspace of $\Lambda$
$f_*(z)$	$:= f(1/\bar{z})$ , sub-star conjugate of the function $f$
$Q_n^*(z)$	$:= z^n Q_{n*}(z) = z^n \overline{Q_n(1/\bar{z})} \in \mathbb{P}_n$ , reciprocal polynomial of $Q_n \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$
$\mu$	positive Borel measure or weight function over $[a, b]$
$\hat{\mu}$	positive Borel measure or weight function over $\mathbb{T}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$	inner product induced by $\mu$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{\mu}}$	inner product induced by $\hat{\mu}$
$p_n$	$n$ -th monic orthogonal polynomial with respect to $\mu$ on $[a, b]$
$P_n$	$n$ -th orthonormal polynomial with respect to $\mu$ on $[a, b]$
$\rho_n$	$n$ -th monic Szegő polynomial with respect to $\hat{\mu}$ on $\mathbb{T}$
$\psi_n$	$n$ -th orthonormal Szegő polynomial with respect to $\hat{\mu}$ on $\mathbb{T}$
$B_n(z, \tau_n)$	$n$ -th para-orthogonal polynomial with respect to $\hat{\mu}$ on $\mathbb{T}$ with parameter $\tau_n \in \mathbb{T}$
$\delta_n$	$:= \rho_n(0)$ , $n$ -th Verblunsky parameter
$\mu_n$	$:= \int_{\mathbb{T}} z^{-n} d\hat{\mu}(z)$ , $n$ -th trigonometric moment with respect to $\hat{\mu}$ , $n \in \mathbb{Z}$
$c_n$	$:= \int_a^b x^n d\mu(x)$ , $n$ -th moment with respect to $\mu$ , $n \in \mathbb{Z}$
$J_\mu(f)$	$:= \int_a^b f(x) d\mu(x)$
$J_n^\mu(f) = J_n(f)$	$:= \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$ , $x_j \neq x_k$ if $j \neq k$ , $\{x_j\}_{j=1}^n \subset [a, b]$ , $n$ point quadrature formula on $[a, b]$
$J_n^{r,s}(f)$	$:= r\lambda_n^+ f(1) + s\lambda_n^- f(-1) + \sum_{j=1}^{n-r-s} \lambda_j^{r,s} f(x_j^{r,s})$ , $x_j^{r,s} \neq x_k^{r,s}$ si $j \neq k$ , $\{x_j^{r,s}\}_{j=1}^n \subset [a, b]$ , $r, s \in \{0, 1\}$ , $n$ point Gauss-type quadrature formula

---

**List of most used symbols**

---

$F_\mu(x)$	$:= \int \frac{d\mu(t)}{x-t}$ , Cauchy transform of the measure $\mu$
$F_n(x)$	$:= \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$ , rational approximant to $F_\mu(x)$
$H_{\dot{\mu}}(z)$	$:= \int_{\mathbb{T}} \frac{t+z}{t-z} d\dot{\mu}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\dot{\mu}(\theta)$ , Herglotz-Riesz transform of the measure $\dot{\mu}$
$H_n(z)$	$:= H_n(z) = \frac{\tilde{B}_n(z)}{B_n(z)}$ , rational approximant to $H_{\dot{\mu}}(z)$
$\mathcal{J}$	Jacobi matrix
$\mathcal{J}_n$	truncated Jacobi matrix of order $n$
$\mathcal{H}_n(\tau)$	Hessenberg matrix of order $n$
$I_{\dot{\mu}}(f)$	$:= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\dot{\mu}(\theta)$
$I_n^\mu(f) = I_n(f)$	$:= \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j)$ , $\theta_j \neq \theta_k$ si $j \neq k$ , $\{\theta_j\}_{j=1}^n \subset [-\pi, \pi)$ , $n$ point quadrature formula on $[-\pi, \pi]$
$E_n^\mu(x)$	$:= F_\mu(x) - F_n(x)$
$E_n^{\dot{\mu}}(x)$	$:= H_{\dot{\mu}}(x) - H_n(x)$
$R_n^\mu(f)$	$:= J_\mu(f) - J_n^\mu(f)$
$\mathring{R}_n^{\dot{\mu}}(f)$	$:= \mathring{I}_{\dot{\mu}}(f) - \mathring{I}_n^{\dot{\mu}}(f)$
$E[x]$	$:=$ integer part of $x$
$J(z)$	$:= \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ , Joukowski transformation
$\mathring{f}$	$:= f \circ J$
$L_n^{r,s}(f, \cdot)$	interpolant Laurent polynomial of $f$
$Q_n^{r,s}(f, \cdot)$	interpolant polynomial of $f$
$\mathcal{T}_n$	trigonometric polynomial of order $n$
$f^c(t)$	$:= \overline{f(\bar{t})}$ , super-c conjugate of $f$
$f^{inv}$	inverse function of $f$
$\mathcal{A}$	$:= \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} \subset \overline{\mathbb{C}}_I$ , sequence of poles for orthogonal rational functions on the interval $I$
$Z_k(x)$	$:= \frac{x}{1-x/\alpha_k}$
$b_k(x)$	$:= b_{k-1}(x)Z_k(x)$ , $b_0(x) \equiv 1$
$\mathcal{L}_k$	$:= \text{span}\{b_0, \dots, b_k\}$
$\mathbb{R}_{p,q}$	$:= \mathcal{L}_p \cdot \mathcal{L}_q^c = \{f \cdot g^c : f \in \mathcal{L}_p, g \in \mathcal{L}_q\}$ , space of rational functions with poles in $\mathcal{A}$
$\varphi_n$	$n$ -th orthogonal rational function on $I$ with respect to the measure $\mu$
$Q_{n,\tau_n}(x)$	$:= \varphi_n(x) + \tau_n \frac{Z_n(x)}{Z_{n-1}^c(x)} \varphi_{n-1}(x)$ , $n$ -th quasi-orthogonal rational function
$\mathcal{B}$	$:= \{\beta_1, \beta_2, \dots\} \subset \mathbb{D}$ , sequence of poles for orthogonal rational functions on the unit circle $\mathbb{T}$
$\zeta_k(z)$	$:= \frac{z-\beta_k}{1-\bar{\beta}_k z}$
$B_k(z)$	$:= B_{k-1}(z)\zeta_k(z)$ , $B_0(z) \equiv 1$ , Blaschke products
$\mathring{\mathcal{L}}_k$	$:= \text{span}\{B_0, \dots, B_k\}$
$\mathring{\mathcal{R}}_{p,q}$	$:= \mathring{\mathcal{L}}_p \cdot \mathring{\mathcal{L}}_{q^*} = \{f \cdot g^* : f \in \mathring{\mathcal{L}}_p, g \in \mathring{\mathcal{L}}_q\}$ , space of rational functions with poles in $\mathcal{B}$
$\phi_n$	$n$ -th orthogonal rational function on $\mathbb{T}$ with respect to the measure $\dot{\mu}$
$\phi_n^*$	$:= B_n(z)\phi_{n^*}$ , super-star conjugate of the $n$ -th orthogonal rational function on $\mathbb{T}$ with respect to the measure $\dot{\mu}$
$\mathring{Q}_{n,\hat{\tau}_n}(z)$	$:= \phi_n(z) + \hat{\tau}_n \phi_n^*(z)$ , $n$ -th para-orthogonal rational function

---

---

## List of most used symbols

---

### Abbreviations

DFT	Discrete Fourier transform
FFT	Fast Fourier transform
ORF	Orthogonal rational function
pORF	Para-orthogonal rational function
qORF	Quasi-orthogonal rational function

# Ortogonalidad y cuadratura

En este capítulo presentaremos las herramientas básicas que usaremos a lo largo de la Memoria. Comenzaremos estudiando algunos resultados generales sobre ortogonalidad. A continuación mostraremos los principales resultados conocidos sobre ortogonalidad y fórmulas de cuadratura en la recta real y la circunferencia unidad. En la última sección analizaremos las relaciones existentes entre la recta real y la circunferencia unidad, desde las perspectivas estudiadas en las secciones anteriores.

## 1.1. Introducción

Consideremos una medida  $\sigma$  de Borel positiva en el plano complejo. En el espacio de Hilbert  $L_2^\sigma$ , de las funciones medibles  $f$  para las cuales  $\int |f(z)|^2 d\sigma(z) < \infty$ , podemos definir el producto interior

$$\langle f, g \rangle_\sigma = \int f(z) \overline{g(z)} d\sigma(z), \quad f, g \in L_2^\sigma.$$

Supongamos que  $\{f_k\}_{k=0}^\infty$  es un sistema linealmente independiente de funciones en  $L_2^\sigma$ . Frecuentemente es conveniente transformar este sistema en otro  $\{h_k\}_{k=0}^\infty$  también linealmente independiente de manera que  $h_n$  sea una combinación lineal de las  $n + 1$  funciones  $f_0, \dots, f_n$  y además,

$$\langle h_n, h_m \rangle_\sigma = \int h_n(z) \overline{h_m(z)} d\sigma(z) = 0, \quad n \neq m.$$

Diremos que este nuevo sistema de funciones  $\{h_k\}_{k=0}^\infty$  es *ortogonal con respecto a  $\sigma$* . Si además

$$\|h_n\|_\sigma^2 = \langle h_n, h_n \rangle_\sigma = \int |h_n(z)|^2 d\sigma(z) = 1, \quad n \geq 0,$$

diremos que el es *ortonormal*. Una expresión explícita para tales funciones ortogonales se obtiene en términos la matriz de Gram asociada a  $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ ,

$$G_n := \begin{pmatrix} \langle f_0, f_0 \rangle_\sigma & \langle f_1, f_0 \rangle_\sigma & \cdots & \langle f_n, f_0 \rangle_\sigma \\ \langle f_0, f_1 \rangle_\sigma & \langle f_1, f_1 \rangle_\sigma & \cdots & \langle f_n, f_1 \rangle_\sigma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_0, f_n \rangle_\sigma & \langle f_1, f_n \rangle_\sigma & \cdots & \langle f_n, f_n \rangle_\sigma \end{pmatrix}.$$

Es bien sabido que la matriz de Gram es Hermitiana y definida positiva. Si denotamos su determinante de orden  $n$  por  $\Delta_n$ , se tiene que

$$\Delta_n := \det(G_n) > 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

es inmediato comprobar (véase por ejemplo [117, pág. 6]) que las funciones ortonormales admiten la siguiente expresión determinantal

$$h_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \langle f_0, f_0 \rangle_\sigma & \langle f_1, f_0 \rangle_\sigma & \cdots & \langle f_n, f_0 \rangle_\sigma \\ \langle f_0, f_1 \rangle_\sigma & \langle f_1, f_1 \rangle_\sigma & \cdots & \langle f_n, f_1 \rangle_\sigma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_0, f_{n-1} \rangle_\sigma & \langle f_1, f_{n-1} \rangle_\sigma & \cdots & \langle f_n, f_{n-1} \rangle_\sigma \\ f_0(z) & f_1(z) & \cdots & f_n(z) \end{vmatrix}, \quad n \geq 0 \quad (1.1)$$

donde  $\Delta_{-1} := 1$ .

Si suponemos que el espacio vectorial de los polinomios está en  $L_2^\sigma$  y consideramos de partida la base canónica  $1, z, z^2, z^3, \dots$ , se obtiene un sistema de polinomios ortonormales con respecto a la medida  $\sigma$ , que es único si imponemos que sus coeficientes directores sean positivo, concretamente, si denotamos por  $\mathbb{P} := \mathbb{C}[z]$  el espacio vectorial complejo de polinomios en la variable  $z$  con coeficientes complejos, por  $\mathbb{P}_n = \text{span}\{1, z, \dots, z^n\}$  el subespacio vectorial complejo de polinomios de grado menor o igual que  $n$  y por  $\delta_{n,m}$  la función *delta de Kronecker*, definida mediante

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ 1 & \text{si } n = m, \end{cases} \quad (1.2)$$

al realizar el proceso de ortogonalización tendremos una sucesión de polinomios  $\{H_n\}_{n=0}^\infty$  verificando

1.  $H_n(z) = \kappa_n z^n + \dots$  con  $\kappa_n > 0$  para todo  $n \geq 0$ ,
- 2.

$$\int H_n(z) \overline{H_m(z)} d\sigma(z) = \delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0.$$

Se sigue además de (1.1) que  $\kappa_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$  para todo  $n \geq 0$ , siendo el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal mónico  $h_n(z) := \frac{H_n(z)}{\kappa_n}$ , con  $\|h_n\|_\sigma = \frac{1}{\kappa_n}$ .

El Teorema Fundamental de Álgebra establece que un polinomio de grado  $n$  tiene  $n$  ceros, contando multiplicidades, ahora bien cuando trabajamos con polinomios ortogonales podemos obtener información sobre la localización de éstos. En efecto, consideremos el soporte de la medida  $\sigma$ , definido por

$$\text{supp}(\sigma) := \{z \in \mathbb{C} : \sigma(D_{z,\epsilon}) > 0, \forall \epsilon > 0\},$$

donde  $D_{z,\epsilon}$  es el disco abierto con centro  $z$  y radio  $\epsilon$  (puede comprobarse fácilmente que se trata de un conjunto cerrado). Un conjunto  $A \subset \mathbb{C}$  se dice que es convexo si dados dos puntos

## 1.2. La recta real

---

$x, y \in A$ , el segmento que los une está en  $A$ . Denotemos por  $Co(A)$  a la *envolvente convexa* de  $A$ , es decir, al menor conjunto convexo que lo contiene:

$$Co(A) = \bigcap_{\substack{A \subset G \subset \mathbb{C} \\ G \text{ convexo}}} G.$$

Entonces se tiene el siguiente resultado (véase [45, págs. 65-66]):

**Teorema 1.1.1 (Féjer)** *Si  $h_n$  es el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto a  $\sigma$ , entonces sus ceros se encuentran en  $Co(\text{supp}(\sigma))$ . Es más, si  $Co(\text{supp}(\sigma))$  no es un segmento, entonces los ceros de  $h_n$  están en su interior.*

Resuelto el problema matemático de la construcción de los polinomios ortonormales con respecto a la medida  $\sigma$ , así como la localización de sus ceros en un contexto general, resta abordar el problema desde un punto de vista numérico con el fin de dar respuestas eficientes en aquellas situaciones que surgen en las aplicaciones. En general, hay dos situaciones que han despertado un mayor interés; por un lado, intervalos acotados y no acotados de la recta real y por otro la circunferencia unidad  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , siendo estas las únicas situaciones que consideraremos en la Memoria. En las dos próximas subsecciones presentamos algunos de los resultados más relevantes de cada una de ellas.

## 1.2. La recta real

Sea  $\mu$  una medida de Borel positiva sobre  $[a, b]$ , donde  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , tal que sus momentos

$$c_k := \langle 1, x^k \rangle_\mu = \int_a^b x^k d\mu(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

existen y son fácilmente computables ( $\mathbb{P} \subset L_2^\mu$ ), y consideremos el producto interior inducido

$$\langle f, g \rangle_\mu = \int_a^b f(x)g(x)d\mu(x), \quad f, g \in L_2^\mu, \quad (1.4)$$

que sigue siendo Hermitiano dado que en esta situación solo vamos a considerar funciones reales.

Si escogemos como base de partida de  $\mathbb{P}$  la base canónica, la matriz de Gram está definida exclusivamente por los momentos. Sus determinantes reciben el nombre de *determinantes de Hankel*:

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix} > 0, \quad n \geq 0, \quad \Delta_{-1} := 1, \quad (1.5)$$

como sabemos nos permiten obtener una expresión determinantal para la familia de polinomios ortogonales mónicos  $\{p_n\}_{n=0}^\infty$  con respecto a la medida  $\mu$ :

$$p_0(x) \equiv 1, \quad p_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (1.6)$$

Los siguientes resultados clásicos recogen propiedades cruciales en la Teoría de Polinomios Ortogonales sobre intervalos del eje real. Las demostraciones pueden verse, por ejemplo, en [40, págs. 18-28], [48, págs. 28-31] ó [86, págs. 18-23] (véase también [118]).

**Teorema 1.2.1 (Ceros)** *Para todo  $n \geq 1$ , los  $n$  ceros de  $p_n$  son reales, distintos y contenidos en el intervalo abierto  $(a,b)$ .*

**Teorema 1.2.2 (Ley de recurrencia)** *La familia  $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$  de polinomios ortonormales con respecto a la medida  $\mu$  puede ser computada mediante la siguiente ley de recurrencia de tres términos:*

$$\begin{aligned} xP_n(x) &= a_{n+1}P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + a_nP_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad P_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{c_0}}, \quad P_{-1}(x) \equiv 0, \\ a_n &= \langle xP_{n-1}, P_n \rangle_{\mu}, \\ b_n &= \langle xP_n, P_n \rangle_{\mu}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

La correspondiente relación de recurrencia para la familia  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  de polinomios mónicos viene dada para,  $n \geq 0$ , por

$$p_{n+1}(x) = (x - b_n)p_n(x) - a_n^2 p_{n-1}(x), \quad p_0(x) \equiv 1, \quad p_{-1}(x) \equiv 0. \tag{1.8}$$

**Teorema 1.2.3 (Entrelazamiento de ceros)** *Si  $\{x_i^{(n)}\}_{i=1}^n$  denota los ceros de  $P_n$ , entonces  $x_i^{(n+1)} < x_i^{(n)} < x_{i+1}^{(n+1)}$ , para  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 1$ .*

Consideraremos ahora la integral

$$J_{\mu}(f) := \int_a^b f(x) d\mu(x). \tag{1.9}$$

En el caso de que nuestra medida sea absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, escribiremos con cierto abuso de notación  $d\mu(x) = \mu(x)dx$ , donde  $\mu$  es ahora una función peso en  $[a, b]$ , es decir,  $\mu(x) > 0$  en casi todo punto de  $[a, b]$ , en esta situación nuestra integral (1.9) admite la expresión

$$J_{\mu}(f) = \int_a^b f(x)\mu(x)dx.$$

En ocasiones, el cálculo exacto de esta tipo de integrales es imposible y en otras muy laborioso. La *integración numérica* es el procedimiento constructivo que nos permite obtener un valor numérico aproximado de una integral, dando lugar a expresiones computacionalmente viables. Una de las estrategias más usuales y de gran sencillez conceptual esta basada en las denominadas *fórmulas de cuadratura*, en las que una integral es aproximada por una combinación lineal de valores del integrando. Uno de los objetivos fundamentales de esta Memoria es el estudio de tales métodos.

Una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos para  $\mu$  en  $[a, b]$  es toda expresión de la forma,

$$J_n^{\mu}(f) = J_n(f) := \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j), \quad x_j \neq x_k \text{ si } j \neq k, \quad \{x_j\}_{j=1}^n \subset [a, b]^1. \tag{1.10}$$

---

<sup>1</sup>Para simplificar la notación no indicaremos  $\mu$ , siempre que, como en este caso, no genere confusión sobre la medida que estemos considerando.

## 1.2. La recta real

---

Los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  y los pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  los elegiremos de forma que  $J_n(f)$  proporcione una buena aproximación de la integral  $J_\mu(f)$ . Nótese que los nodos y pesos dependen de  $n$ , aunque no se haya indicado explícitamente<sup>2</sup>. Atendiendo a sus exigencias de construcción, respetando el espíritu de aproximación numérica, la localización y el entrelazamiento de los ceros de los polinomios ortogonales hacen que estos sean una elección, que como veremos, es óptima en algún sentido.

Cuando el intervalo  $[a, b]$  es acotado, el Teorema de Weierstrass nos garantiza la densidad de los polinomios en el espacio de las funciones continuas en  $[a, b]$ , argumento que justifica elegir los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  y los pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  de manera que  $J_n(P) = J_\mu(P)$  para todo polinomio  $P$  de grado a lo sumo  $N = N(n)$  lo más grande posible. En este sentido, introduciremos el siguiente concepto

**Definición 1.2.4** Diremos que la fórmula de cuadratura  $J_n(f)$  tiene grado de precisión o de exactitud  $d$  si integra exactamente a  $\mathbb{P}_d$ , es decir,  $J_\mu(P) = J_n(P)$ ,  $\forall P \in \mathbb{P}_d$ . Diremos que es máximo si existe  $P \in \mathbb{P}_{d+1}$  tal que  $J_\mu(P) \neq J_n(P)$ .

Un primer resultado es el siguiente (véase [48, Sección 2.5])

**Teorema 1.2.5** Dados  $n$  nodos distintos en  $[a, b]$ , existen pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  determinados de forma única tales que  $J_n(f)$  dada por (1.10) es exacta al menos en  $\mathbb{P}_{n-1}$ , es decir, su grado de precisión es mayor o igual a  $n - 1$ .

Dado un conjunto de  $n$  nodos distintos  $\{x_j\}_{j=1}^n$ , sea  $L_n(f, x)$  el único polinomio, de grado a lo sumo  $n - 1$ , que interpola a  $f$  en estos. Usando la fórmula de interpolación de Lagrange (véase [48, págs. 24-25])

$$L_n(f, x) = \sum_{j=1}^n l_j(x) f(x_j), \quad l_j \in \mathbb{P}_{n-1}, \quad l_j(x_k) = \delta_{j,k},$$

se tiene que

$$J_\mu(L_n) = \sum_{j=1}^n J_\mu(l_j) f(x_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) = J_n(f),$$

con  $\lambda_j = J_\mu(l_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Es fácil comprobar haciendo uso de la expresión del error en la interpolación que esta fórmula de cuadratura es exacta en  $\mathbb{P}_{n-1}$ . A esta fórmula de cuadratura con  $n$  nodos arbitrarios, distintos en  $[a, b]$ , donde los pesos se expresan en términos de los polinomios fundamentales de Lagrange, se le denomina de *tipo interpolatorio*. Las fórmulas de tipo interpolatorio tiene por tanto grado de precisión al menos  $n - 1$ .

Todo proceso numérico que se precie debe tener a su disposición alguna expresión del error. Si profundizamos un poco más en la teoría de interpolación, sabemos que, si  $f$  es lo suficientemente regular, entonces

$$f(x) - L_n(f, x) = \frac{f^{(n)}(\theta(x))}{n!} \omega_n(x), \quad \theta(x) \in (a, b), \quad x \in [a, b],$$

---

<sup>2</sup>En el caso de que esto fuera necesario, emplearemos la siguiente notación, al igual que en el Teorema 1.2.3:  $\{x_j^{(n)}\}_{j=1}^n$  y  $\{\lambda_j^{(n)}\}_{j=1}^n$ , respectivamente.



siendo  $\omega_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$  el *polinomio nodal*. Se sigue que

$$R_n(f) := J_\mu(f) - J_n(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n)}(\theta(x)) \omega_n(x) d\mu(x).$$

Si denotamos por  $M_n := \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|$  se tiene que

$$|R_n(f)| \leq \frac{M_n}{n!} \int_a^b |\omega_n(x)| d\mu(x),$$

podemos observar que con el fin de garantizar buenas estimaciones, la distribución de los nodos debe dar lugar a que  $|\omega_n(x)|$  tenga una magnitud lo más pequeña posible, o bien, donde sea grande resulte un lugar pequeño para la medida  $\mu$ .

Por otro lado, otra cualidad que debe tener el método numérico es mantener controlado los errores iniciales, es decir, los errores que pudieran cometerse al evaluar el integrando en los nodos. Nos interesa que no se magnifiquen, que sean estables. En definitiva, una fórmula de cuadratura es estable si existe una constante positiva  $M$  (independiente de  $n$ ) tal que

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j| \leq M.$$

Finalmente, con el fin de presentar todos los elementos del proceso numérico, se debe culminar con una respuesta a la siguiente cuestión de *convergencia*: dada una tabla triangular de nodos

$$\begin{array}{cccc} x_1^{(1)} & & & \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

¿cuál es la clase de funciones  $\mathfrak{F}$  más amplia tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(n)} f(x_j^{(n)}) = \int_a^b f(x) d\mu(x) = J_\mu(f), f \in \mathfrak{F}?$$

Para el caso de una sucesión de fórmulas de tipo interpolatorio estos dos últimos conceptos están íntimamente relacionados (véase [86, págs. 264-265])

**Teorema 1.2.6** *Sea  $J_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(n)} f(x_j^{(n)})$  una sucesión de fórmulas de tipo interpolatorio para  $\mu$  en  $[a, b]$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ , entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(f) = J_\mu(f), \forall f \in \mathcal{C}[a, b] \iff \exists M > 0 : \sum_{j=1}^n |\lambda_j^{(n)}| \leq M, \forall n \geq 0.$$

Por tanto, otro aspecto a tener en cuenta en una sucesión de fórmulas de cuadratura interpolatorias es la positividad de los pesos, ya que en este caso la estabilidad queda asegurada:

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j^{(n)}| = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(n)} = \int_a^b d\mu(x) = c_0 = M.$$

## 1.2. La recta real

---

Por ello, una línea de trabajo es tratar de construir fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio cuyos pesos sean positivos para que tanto la estabilidad como la convergencia queden garantizadas. Es más, su grado de precisión nos proporciona información sobre la positividad de sus pesos. Como nos ilustra el siguiente resultado, véase [106].

**Proposición 1.2.7** *Si  $J_n(f)$  es una fórmula de cuadratura para  $\mu$  con grado de exactitud  $d$ , entonces al menos  $E\left[\frac{d}{2}\right] + 1$  pesos son positivos, donde  $E[x]$  denota la parte entera de  $x$ .*

Por ello, sería muy útil disponer de alguna estrategia que nos permita aumentar el grado de precisión de las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio. Sabemos de antemano que el máximo grado de precisión de una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos es  $2n - 1$ , ya que si admitimos que es  $2n$  llegaríamos a un absurdo,  $0 = J_n(\omega_n^2) = J_\mu(\omega_n^2) > 0$ .

Dado que no hemos puesto condiciones sobre los nodos, parece natural plantearse si con alguna elección particular de éstos se puede incrementar el grado de exactitud. En este sentido, el procedimiento nos lo proporcionará el siguiente resultado (véase [48])

**Teorema 1.2.8 (Jacobi)** *Una fórmula de cuadratura  $J_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$  para  $\mu$  en  $[a, b]$  es exacta en  $\mathbb{P}_{n+k}$ ,  $0 \leq k \leq n - 1$ , si y solo si,*

1.  $J_n(f)$  es de tipo interpolatorio.
2. El polinomio nodal  $w_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$  cumple

$$\int_a^b x^r w_n(x) d\mu(x) = 0, \quad r = 0, 1, \dots, k. \quad (1.11)$$

Obsérvese que cuando  $k = n - 1$  se obtiene la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio de máximo grado de precisión, que tiene por nodos los ceros del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal y cuyos pesos son, como veremos, positivos. Estas fórmulas son conocidas como *fórmulas Gaussianas*

**Definición 1.2.9** *A partir de (1.11) surge el concepto de polinomio cuasi-ortogonal. Se dice que un polinomio  $w_n$  de grado  $n \geq l$  es cuasi-ortogonal de orden  $l$  en  $[a, b]$  con respecto a  $\mu$  (véanse por ejemplo [12, 41, 57]), si*

$$\int_a^b x^r w_n(x) d\mu(x) \begin{cases} = 0 & \text{si } r = 0, \dots, n - 1 - l, \\ \neq 0 & \text{si } r = n - l, \end{cases}$$

*es decir cuando le faltan  $l$  condiciones de ortogonalidad.*

Las fórmulas Gaussianas quedan caracterizadas en el siguiente (véase por ejemplo [117, pág. 20])

**Teorema 1.2.10** *Sea  $\{P_k\}_{k=0}^\infty$  la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a  $\mu$ . Entonces  $J_n(f)$  dada por (1.10) coincide con la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura Gaussiana para  $\mu$ , si y solo si,*

1. Los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  son los ceros de  $P_n(x)$ .

2. Los pesos vienen dados para  $j = 1, \dots, n$  por

$$\lambda_j = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} |P_k(x_j)|^2} > 0.$$

La bondad de las fórmulas Gaussianas no queda aquí, sus nodos y pesos pueden ser computados eficientemente mediante un problema de autovalores con respecto a ciertas matrices tri-diagonales asociadas con  $\mu$ , conocidas como matrices de Jacobi. En efecto, sea  $\mathcal{J}$  la matriz infinita definida por

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

donde  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$  vienen dados por el Teorema 1.2.2. Sea  $\mathcal{J}_n$  la truncación de orden  $n$  de la matriz de Jacobi:

$$\mathcal{J}_n = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & b_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Entonces, se tiene que los autovalores de  $\mathcal{J}_n$  coinciden con los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  de la fórmula Gaussiana  $J_n(f)$  y el cuadrado de la primera componente del autovector unitario asociado al autovalor  $x_j$  proporciona el correspondiente peso  $\lambda_j$ , para  $j = 1, \dots, n$  (véase por ejemplo, [71]).

Existen situaciones prácticas donde es útil disponer de la capacidad de fijar nodos de antemano motivada por alguna propiedad que satisface la función  $f$ , o simplemente por que se conoce con bastante precisión el valor de la función  $f$  en determinados puntos, obviamente las fórmulas Gaussianas no son una alternativa. De hecho, una aplicación puede verse en [72], en el contexto de la construcción de métodos Runge-Kutta implícitos para la solución numérica de problemas Stiff y ecuaciones diferenciales algebraicas, donde se estudia una fórmula de cuadratura para la medida de Lebesgue en el intervalo  $[0, 1]$ , con pesos positivos, máximo dominio de validez y con tres nodos fijos, siendo dos de ellos los extremos y uno situado en el interior.

Cuando se fijan uno o dos nodos en los extremos del intervalo es relativamente simple, dado que el resto de nodos se obtienen mediante la construcción de una fórmula Gaussiana con respecto a una medida modificada que vuelve a ser positiva. Por ejemplo, si fijamos  $x = a$  (Gauss-Radau), entonces los  $n - 1$  nodos restantes son los ceros del  $(n - 1)$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto a la medida  $(x - a)d\mu(x)$ . De manera similar, si  $x = b$  consideraremos  $(b - x)d\mu(x)$ . En el caso que se fijen los dos extremos (Gauss-Lobatto), los  $n - 2$  nodos restantes son los ceros del  $(n - 2)$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto a la medida  $(x - a)(b - x)d\mu(x)$ .

Sin embargo, la situación se complica si algún nodo prefijado se encuentra en el interior del intervalo. Las fórmulas de cuadratura podrían no existir, y aun en el caso de que existan tener pesos negativos o incluso que algunos nodos no se localicen en el interior del intervalo. Estas fórmulas de cuadratura, estudiadas en [12], tratan de dar una respuesta práctica alternativa a la proporcionada por las fórmulas de Gauss-Kronrod para las cuales el criterio para fijar los nodos los dicta la propia medida  $\mu$  (véase [85]).

**Definición 1.2.11** Llamaremos *fórmulas de tipo-Gauss* al conjunto de fórmulas de Gauss, Gauss-Radau y Gauss-Lobatto, ya que integran el mayor subespacio posible.

Para un análisis similar al de las fórmulas tipo-Gauss con nodos prefijados en el interior del intervalo considerando modificaciones particulares de funciones peso con signo, véase [93].

Con el fin de obtener resultados que sean válidos de manera conjunta para cualquier fórmula de cuadratura de tipo-Gauss, introduciremos en la notación<sup>3</sup> dos índices  $r, s \in \{0, 1\}$ . Muestra de ello es el siguiente resultado que proporciona una caracterización compacta de las fórmulas de tipo-Gauss.

**Teorema 1.2.12** *Sea la integral  $J_\mu(f)$  dada por (1.9) en  $[-1, 1]$  y  $r, s \in \{0, 1\}$ . Denotamos por  $J_n^{r,s}(f)$  a la siguiente fórmula de cuadratura con  $n$  nodos:*

$$J_n^{r,s}(f) = s\lambda_-^{r,s}f(-1) + \sum_{j=1}^{n-r-s} \lambda_j^{r,s}f(x_j^{r,s}) + r\lambda_+^{r,s}f(1).$$

Entonces, se tiene que  $J_n^{r,s}(P) = J_\mu(P)$ , para todo  $P \in \mathbb{P}_{2n-1-r-s}$ , si y solo si,

1.  $J_n^{r,s}(P) = J_\mu(P)$ , para todo  $P \in \mathbb{P}_{n-1}$  (tipo interpolatorio).
2. Los nodos  $\{x_j^{r,s}\}_{j=1}^{n-r-s}$  son los ceros de un polinomio ortogonal de grado  $n - r - s$  con respecto a la medida  $d\mu_{r,s}(x) = (1-x)^r(1+x)^s d\mu(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Además, los pesos  $\lambda_+^{r,s}$ ,  $\lambda_-^{r,s}$  y  $\lambda_j^{r,s}$ ,  $j = 1, \dots, n - r - s$  son positivos, y se cumple que

$$\lambda_j^{r,s} = \frac{\tilde{\lambda}_j^{r,s}}{(1-x_j^{r,s})^r(1+x_j^{r,s})^s}, \quad j = 1, \dots, n - r - s,$$

donde  $\{\tilde{\lambda}_j^{r,s}\}_{j=1}^{n-r-s}$  son los pesos de la fórmula de cuadratura Gaussiana con respecto a la medida  $\mu_{r,s}$ . El resto de pesos  $\lambda_+^{r,s}$  y  $\lambda_-^{r,s}$  se calcularán imponiendo que la fórmula integre exactamente a  $\{1, r s x\}$ .

Obsérvese que

1. Cuando  $r + s = 0$ ,  $J_n^{0,0}$  es la  $n$ -ésima fórmula Gaussiana.
2. Cuando  $r + s = 1$ ,  $J_n^{1,0}$  y  $J_n^{0,1}$  son las  $n$ -ésimas fórmulas de Gauss-Radau.
3. Cuando  $r + s = 2$ ,  $J_n^{1,1}$  es la  $n$ -ésima fórmula de Gauss-Lobatto.

<sup>3</sup>Esta notación ha sido empleada anteriormente en [98].

Señalar que en este tipo de fórmulas de cuadratura se sigue dando el entrelazamiento de ceros, propiedad fundamental para reproducir el concepto de suma de Riemann.

Veamos a continuación cómo las fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau y Gauss-Lobatto pueden ser también computadas eficientemente mediante un problema de autovalores. En efecto, sea  $\mathcal{J}$  la matriz de Jacobi asociada a  $\mu$ , consideremos la transformación de Darboux  $d\tilde{\mu}(x) = (x - \beta)d\mu(x)$ , con  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $P_n(\beta) \neq 0$  para  $n \geq 1$  y denotemos por  $\tilde{\mathcal{J}}$  la matriz mónica de Jacobi (la que procede de la ley de recurrencia para los polinomios mónicos) asociada a  $\tilde{\mu}$ . Se demuestra que (véase [10, Proposición 3.6.]

$$\tilde{\mathcal{J}} = UL + \beta I, \quad (1.13)$$

donde  $I$  es la matriz unidad y  $\mathcal{J} - \beta I = LU$  (descomposición que siempre existe al imponer  $P_n(\beta) \neq 0$ ,  $n \geq 1$ ). Es decir, una vez conocida la descomposición  $LU$  de la matriz  $\mathcal{J} - \beta I$ , (1.13) nos proporciona la matriz de Jacobi  $\tilde{\mathcal{J}}$  asociada a  $\tilde{\mu}$ .

Al considerar las truncaciones de la matriz de Jacobi, podemos hacer uso de la técnica propuesta por Gautschi y Golub (véanse [61, 62, 64, 65, 70]). Si  $\beta \in \{-1, 1\}$  y deseamos que  $\beta$  sea nodo de la cuadratura, deberemos modificar el último parámetro  $b_{n-1}$  en (1.12) por  $\hat{b}_{n-1}$  y exigir que el correspondiente  $\hat{P}_n = P_n - \hat{b}_{n-1}P_{n-1}$  tenga un cero en  $\beta$ . Esto se consigue haciendo  $\hat{b}_{n-1} = P_n(\beta)/P_{n-1}(\beta)$ . Cambiando  $b_{n-1}$  por  $b_{n-1} + \hat{b}_{n-1}$  obtenemos una matriz de Jacobi modificada  $\hat{\mathcal{J}}_n$  que nos proporcionará los nodos y pesos de la fórmula de Gauss-Radau mediante un problema de autovalores, como en el caso Gaussiano.

De igual manera, para el caso de las fórmulas de Gauss-Lobatto, tomamos  $\hat{P}_n = P_n - \hat{b}_{n-1}P_{n-1} - \hat{a}_{n-1}P_{n-2}$  exigiendo que  $\hat{a}_{n-1}$  y  $\hat{b}_{n-1}$  cumplan  $\hat{P}_{n-1}(\pm 1) = 0$ . Esto se consigue resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} P_{n-1}(1) & P_{n-2}(1) \\ P_{n-1}(-1) & P_{n-2}(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_{n-1} \\ \hat{a}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n(1) \\ P_n(-1) \end{pmatrix}$$

(se comprueba fácilmente que la matriz del sistema es no singular). Modificando la matriz de Jacobi  $\mathcal{J}_n$  en (1.12) reemplazando  $(b_{n-1}, a_{n-1})$  por  $(b_{n-1} + \hat{b}_{n-1}, a_{n-1} + \hat{a}_{n-1})$  obtenemos una nueva matriz  $\hat{\mathcal{J}}_n$  que nos proporcionará los nodos y pesos de la fórmula de Gauss-Lobatto a través de un problema de autovalores, a semejanza del caso Gaussiano. Esta técnica ha sido generalizada en [12, Sección 3] cuando  $\beta \in [-1, 1]$ .

Para concluir esta sección, recordemos que la transformada de Cauchy de una medida  $\mu$  soportada en un compacto  $K$  del plano complejo ampliado  $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (esfera de Riemann) viene dada por

$$F_\mu(z) := \int_K \frac{d\mu(t)}{z - t},$$

que es una función analítica en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ . En el caso de que  $K = [a, b]$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ), a  $F_\mu$  se le suele llamar función de Markov y en especial, cuando  $[a, b] = [0, \infty)$  se le denomina función de Stieltjes o de Markov-Stieltjes (véase por ejemplo [6, 116]). Nos centraremos en el caso  $K = [-1, 1]$ , concretamente

$$F_\mu(x) = \int_{-1}^1 \frac{d\mu(t)}{x - t}, \quad (1.14)$$

para  $|x| > 1$  es fácil comprobar que,

$$F_\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{x^k},$$

## 1.2. La recta real

---

donde los coeficientes  $c_k$  son los momentos definidos en (1.3). Nuestro propósito es aproximar  $F_\mu$  por medio de ciertas funciones racionales del tipo  $F_n(x) = \frac{Q_{n-1}(x)}{P_n(x)}$  ( $\deg(Q_{n-1}) < \deg(P_n)$ ) y con polos en  $[-1, 1]$ , tal que

$$F_\mu(x) - F_n(x) = \sum_{j=N}^{\infty} \tilde{c}_j x^{-j} = O\left(\frac{1}{x^N}\right),$$

con  $N = N(n)$  tan grande como sea posible.

Inicialmente abordamos el caso  $Q_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ ,  $P_n \in \mathbb{P}_n$  y  $N(n) = 2n - 1$ . Es fácil comprobar que  $P_n$  es precisamente el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto a  $\mu$  y que  $Q_{n-1}$  es el  $(n - 1)$ -ésimo polinomio de segunda especie, que viene dado explícitamente por

$$Q_{n-1}(x) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} d\mu(t).$$

Del Teorema 1.2.1, sabemos que  $P_n$  tiene sus  $n$  ceros simples y distintos  $\{x_j\}_{j=1}^n \subset (-1, 1)$ . Al realizar la descomposición en fracciones simples

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{x - x_j}, \quad A_j = \frac{Q_{n-1}(x_j)}{P'_n(x_j)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

nos permite definir el funcional

$$J_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j),$$

se comprueba que  $J_n(P) = J_\mu(P)$ ,  $\forall P \in \mathbb{P}_{2n-1}$ , es decir, recuperamos las fórmulas Gaussianas.

En general, sea una fórmula de cuadratura

$$J_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j), \quad x_j \neq x_k \text{ si } j \neq k, \quad \{x_j\}_{j=1}^n \subset (-1, 1), \quad (1.15)$$

sea  $P_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$  su polinomio nodal, y definamos

$$F_n(x) = J_n\left(\frac{1}{x - t}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{x - x_j} = \frac{Q_{n-1}(x)}{P_n(x)}$$

donde  $Q_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ . Entonces es fácil probar:

**Proposición 1.2.13** *Bajo las condiciones anteriores,*

$$F_\mu(x) - F_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{N+2}}\right) \Leftrightarrow J_n(f) = J_\mu(f), \quad \forall f \in \mathbb{P}_N.$$

Cuando  $N = 2n - 1$ , la correspondiente función racional  $F_n$ , que cumple  $E_n^\mu(x) := F_\mu(x) - F_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$ , es un *aproximante de Padé a  $F_\mu(x)$  en el infinito*, que se suele denotar por  $F_n(x) = [n - 1/n]_{F_\mu}(x)$ .

Cuando  $N = n - 1$ , la función racional  $F_n$  que resulta verifica  $E_n^\mu(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$ , es un *aproximante de tipo-Padé a  $F_\mu$  en el infinito*, con polos en  $\{x_j\}_{j=1}^n$ , suele denotarse por (véase [9])  $F_n(x) = (n-1/n)_{F_\mu}(x)$ .

Los casos intermedios  $n-1 < N < 2n-1$  dan lugar a los denominados *aproximantes tipo Padé de orden superior* (término introducido por C. Brezinski en [9]). Sin embargo, en esta sección nos centraremos solamente en los casos  $N = n-1$  y  $N = 2n-1$ . Para estas dos situaciones se conocen las siguientes expresiones del error:

- $N = n - 1$  (véase [9]):

$$E_n^\mu(x) = \frac{1}{P_n(x)} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{x-t} d\mu(t). \quad (1.16)$$

- $N = 2n - 1$  (véase [5]):

$$E_n^\mu(x) = \frac{1}{P_n^2(x)} \int_{-1}^1 \frac{P_n^2(t)}{x-t} d\mu(t). \quad (1.17)$$

Finalmente, si suponemos que  $f$  es una función analítica en un dominio  $G \supset [-1, 1]$  y  $\Gamma = \partial G$  (frontera de  $G$ ) es una curva rectificable, es fácil obtener a partir de la fórmula integral de Cauchy y del Teorema de Fubini la expresión

$$R_n^\mu(f) := J_\mu(f) - J_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (F_\mu(z) - F_n(z))f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma E_n^\mu(z)f(z)dz. \quad (1.18)$$

Es decir, que cuando el integrando es analítico el error en la fórmula de cuadratura (1.15) está esencialmente controlado por el correspondiente error de los aproximantes racionales a la transformada de Cauchy de la correspondiente medida. Concretamente

$$|R_n^\mu(f)| \leq M(\Gamma) \max_{z \in \Gamma} |f(z)| \max_{z \in \Gamma} |E_n^\mu(z)|,$$

donde  $M(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |dz|$ .

### 1.3. La circunferencia unidad

En esta sección abordaremos otra situación de relevante interés, la circunferencia unidad  $\mathbb{T}$ . Muchos de los resultados tiene su contrapartida en el caso real. Sin embargo, otros requieren técnicas específicas.

Sea  $\hat{\mu}$  una medida sobre  $\mathbb{T}$ , y consideremos el producto interior inducido:

$$\langle f, g \rangle_{\hat{\mu}} = \int_{\mathbb{T}} f(z) \overline{g(z)} d\hat{\mu}(z), \quad f, g \in L_2^{\hat{\mu}}(\mathbb{T}). \quad (1.19)$$

Definimos el  $k$ -ésimo *momento trigonométrico* como el número complejo

$$\mu_k := \left\langle 1, z^k \right\rangle_{\hat{\mu}} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\hat{\mu}(\theta), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.20)$$

### 1.3. La circunferencia unidad

supondremos que pueden ser fácilmente computados. La sucesión de momentos trigonométricos nos permite definir la familia de determinantes de Toeplitz (análogos a los determinantes de Hankel en el caso real)

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_{-2} & \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, n \geq 0, \quad \Delta_{-1} := 1. \quad (1.21)$$

Observar que la sucesión de momentos  $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  es *Hermitiana*, es decir,  $\mu_n = \overline{\mu_{-n}}$  para todo  $n \geq 0$ .

Szegő estudió en [113, Capítulo 11] los polinomios ortogonales en este contexto. Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a los monomios  $1, z, z^2, z^3, \dots$  obtenemos una base  $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$  formada por polinomios (mónicos) verificando

1.  $\rho_n(z) = z^n + \cdots + \delta_n \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$  para todo  $n \geq 0$ ,
2.  $\rho_n$  es ortogonal a  $\text{span}\{1, z, \dots, z^{n-1}\}$  con respecto al producto interior (1.19).

A la familia de polinomios mónicos ortogonales en  $\mathbb{T}$  con respecto a  $\hat{\mu}$  se le conoce como la *familia de polinomios de Szegő*, y a la sucesión de sus términos independientes  $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$  la *familia de coeficientes de Verblunsky*<sup>4</sup>. Como veremos próximamente, la siguiente definición jugará un papel fundamental en la teoría de polinomios de Szegő: dado un polinomio  $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$ , definimos el *polinomio recíproco* según  $p^*(z) := z^n p(1/\bar{z})$ , es decir,  $p^*(z) = \overline{a_0} z^n + \cdots + \overline{a_n} \in \mathbb{P}_n$ .

De (1.1) se deducen las siguientes expresiones determinantaes para los polinomios de Szegő y sus recíprocos en términos de los momentos trigonométricos:

$$\rho_0(z) \equiv 1, \quad \rho_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1 \quad (1.22)$$

y

$$\rho_0^*(z) \equiv 1, \quad \rho_n^*(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_1 \\ z^n & z^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad n \geq 1, \quad (1.23)$$

con  $\Delta_n$  dado por (1.21). Como consecuencia de como esta definido el producto interior es fácil verificar que

$$\left\langle \rho_m, z^k \right\rangle_{\hat{\mu}} = \left\langle \rho_m^*, z^{m-k} \right\rangle_{\hat{\mu}}, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

<sup>4</sup>También conocidos por los nombres de coeficientes de Schur, Schur-Szegő, de reflexión o de Geronimus (véase [109, Sección 1.5]).



De donde se deducen las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \langle \rho_n, z^s \rangle_{\hat{\mu}} &= \langle \rho_n^*, z^{s+1} \rangle_{\hat{\mu}} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n-1 \\ \langle \rho_n, z^n \rangle_{\hat{\mu}} &= \langle \rho_n^*, 1 \rangle_{\hat{\mu}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

En cuanto a la correspondiente familia ortonormal, que denotaremos por  $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ , se tiene que  $\psi_n = \kappa_n \rho_n$  con  $\kappa_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$  para  $n \geq 0$ . También de (1.24) y por la definición de  $\rho_n^*$ :

$$\|\rho_n\|_{\hat{\mu}} := \sqrt{\langle \rho_n, \rho_n \rangle_{\hat{\mu}}} = \|\rho_n^*\|_{\hat{\mu}} = \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}. \quad (1.25)$$

Como consecuencia del Teorema 1.1.1 el siguiente resultado nos proporciona la localización de los ceros de los polinomios de Szegő (véanse [3, pág. 184] ó [113, págs. 292-293]):

**Teorema 1.3.1 (Ceros de polinomios de Szegő)** *Los ceros de  $\rho_n$  se encuentran en  $\mathbb{D}$  para todo  $n \geq 1$ .*

Como consecuencia se deduce por un lado que los ceros de  $\rho_n^*$  se encuentran en  $\mathbb{E}$  para todo  $n \geq 1$ , y por otro lado la siguiente propiedad fundamental que cumplen los coeficientes de Verblunsky:  $|\delta_n| < 1$  para todo  $n \geq 1$  (nótese que  $\delta_0 = 1$ ). Definimos a continuación una sucesión de números comprendidos en el intervalo  $(0, 1]$ , que denotaremos por  $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\eta_n := \sqrt{1 - |\delta_n|^2}, \quad n \geq 1. \quad (1.26)$$

El siguiente resultado fundamental en la Teoría de polinomios de Szegő, que nos permite computar dichos polinomios recursivamente, puede verse demostrado en [113, págs 293-294] (véase también [67] y [109])

**Teorema 1.3.2 (Ley de recurrencia)** *Las familias  $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  de polinomios mónicos y ortonormales de Szegő respectivamente con respecto a la medida  $\hat{\mu}$  en  $\mathbb{T}$  satisfacen las leyes de recurrencia*

$$\begin{pmatrix} \rho_n(z) \\ \rho_n^*(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & \delta_n \\ \delta_n z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{n-1}(z) \\ \rho_{n-1}^*(z) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1 \quad (1.27)$$

y

$$\begin{pmatrix} \psi_n(z) \\ \psi_n^*(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\eta_n} \begin{pmatrix} z & \delta_n \\ \delta_n z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{n-1}(z) \\ \psi_{n-1}^*(z) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1 \quad (1.28)$$

con condiciones iniciales

$$\rho_0(z) = \rho_0^*(z) \equiv 1, \quad \psi_0(z) = \psi_0^*(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}, \quad (1.29)$$

siendo  $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$  la familia de coeficientes de Verblunsky para la medida  $\hat{\mu}$ ,  $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$  la sucesión definida en (1.26) y  $\mu_0 = \int_{-\pi}^{\pi} d\hat{\mu}(\theta)$ .

### 1.3. La circunferencia unidad

---

Tomando producto interior en la primera ecuación de (1.27) se deduce que el  $n$ -ésimo parámetro de Verblunsky puede ser computado a partir del  $(n-1)$ -ésimo polinomio de Szegő  $\rho_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} r_k z^k$  y de los momentos trigonométricos  $\{\mu_k\}_{k=-n}^0$  según

$$\delta_n = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} r_k \mu_{-(k+1)}}{\sum_{k=0}^{n-1} \overline{r_{n-1-k}} \mu_{-k}}, \quad (1.30)$$

o bien teniendo en cuenta que,

$$\eta_n = \frac{\|\rho_n\|_{\hat{\mu}}}{\|\rho_{n-1}\|_{\hat{\mu}}}, \quad n \geq 1, \quad (1.31)$$

lo que nos proporciona

$$\delta_n = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} r_k \mu_{-(k+1)}}{\prod_{j=1}^{n-1} (1 - |\delta_j|^2)}.$$

Esto hace que las leyes (1.27)-(1.29) puedan ser aplicadas recursivamente. A este proceso también se le conoce como *algoritmo de Levinson* (véase [87]).

Sea ahora  $\hat{\mu}$  una medida sobre el intervalo  $[-\pi, \pi]$ ,  $f$  una función  $2\pi$ -periódica y consideremos la integral

$$I_{\hat{\mu}}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\hat{\mu}(\theta). \quad (1.32)$$

En el caso de que nuestra medida sea absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, reescribiremos con cierto abuso de notación  $d\hat{\mu}(\theta) = \hat{\mu}(\theta)d\theta$  con  $\hat{\mu}$  una función peso en  $[-\pi, \pi]$ , quedando nuestra integral

$$I_{\hat{\mu}}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \hat{\mu}(\theta) d\theta.$$

Estamos interesados en aproximar (1.32) por medio de una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos de la forma

$$I_n^{\hat{\mu}}(f) = I_n(f) = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j f(\theta_j), \quad \theta_j \neq \theta_k \text{ si } j \neq k, \quad \{\theta_j\}_{j=1}^n \subset [-\pi, \pi]. \quad (1.33)$$

Dada la densidad del espacio de los polinomios trigonométricos en la clase de las funciones continuas y  $2\pi$ -periódicas (como consecuencia del Teorema de Weierstass, véase por ejemplo [89, Teorema 3.18] y [102, Teorema 4.25], parece razonable elegir los nodos y pesos de manera que  $I_n(T) = I_n^{\hat{\mu}}(T)$  para todo polinomio trigonométrico  $T$  con grado  $N = N(n)$  lo más grande posible. A tal respecto, recordemos que por un polinomio trigonométrico de grado exactamente  $m$  entendemos una función de la forma:

$$T_m(\theta) = \sum_{k=0}^m a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta), \quad |a_m| + |b_m| > 0, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \dots, m.$$

Dado que una función  $2\pi$ -periódica puede ser vista como una función en la circunferencia unidad  $\mathbb{T}$  y que un polinomio trigonométrico  $T$  de grado  $m$  puede escribirse como  $\sum_{j=-m}^m A_j z^j$ ,  $A_j \in \mathbb{C}$  (polinomio de Laurent), tomando  $z = e^{i\theta}$ , podemos plantearnos de

manera análoga lo siguiente: dada una medida  $\hat{\mu}$  y una función  $f$  sobre  $\mathbb{T}$ , consideremos la integral

$$I_{\hat{\mu}}(f) = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\hat{\mu}(z), \quad (1.34)$$

y una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos para  $\hat{\mu}$  de la forma

$$I_n^{\hat{\mu}}(f) = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j f(z_j), \quad z_j \neq z_k \text{ si } j \neq k, \quad \{z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{T}. \quad (1.35)$$

Los nodos y pesos serán elegidos de manera de que  $I_n^{\hat{\mu}}(f) = I_{\hat{\mu}}(f)$  para todo  $f$  perteneciente a un subespacio lo más amplio posible del espacio vectorial  $\Lambda = \text{span}\{z^k : k \in \mathbb{Z}\}$  (espacio de los polinomios de Laurent) con mayor grado posible. A tal respecto, consideremos  $\Lambda_{-r,s} := \text{span}\{z^k : -r \leq k \leq s\}$ , siendo  $r$  y  $s$  enteros no negativos (nótese que  $\dim(\Lambda_{-r,s}) = r + s + 1$ ).

Un resultado fundamental que motiva el buscar exactitud en subespacios de polinomios de Laurent es el hecho de que  $\Lambda$  sea denso en  $L_p^{\hat{\mu}}(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\hat{\mu}(\theta) < +\infty\}$  con  $p \geq 1$ , algo que en general no es cierto para  $\mathbb{P}$  (véase [126]).

Un primer resultado sobre la construcción de  $I_n^{\hat{\mu}}(f)$  viene dado por

**Proposición 1.3.3** *Dados  $n$  nodos distintos  $\{z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{T}$  y  $r$  y  $s$  enteros no negativos tales que  $r + s = n - 1$ , entonces existen pesos  $\hat{\lambda}_j, \dots, \hat{\lambda}_n$  tal que*

$$I_n^{\hat{\mu}}(f) = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j f(z_j) = I_{\hat{\mu}}(f), \quad \forall f \in \Lambda_{-r,s}. \quad (1.36)$$

La fórmula (1.36) se denomina de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-r,s}$  ya que  $I_n^{\hat{\mu}}(f) = I_{\hat{\mu}}(L_{n-1}(f, \cdot))$ , con  $L_{n-1}(f, z)$  el único interpolante en  $\Lambda_{-r,s}$  de  $f$  en los nodos  $z_j, j = 1, \dots, n$ . Además,  $\hat{\lambda}_j = I_{\hat{\mu}}(l_{j,n-1})$  con  $l_{j,n-1} \in \Lambda_{-r,s}$  y  $l_{j,n-1}(z_k) = \delta_{j,k}$ .

Al igual que ocurre con las fórmulas de cuadratura Gaussianas, una elección particular de los nodos permite incrementar el dominio de exactitud de  $I_n^{\hat{\mu}}(f)$ , nótese que no se ha impuesto condición alguna sobre estos en la Proposición 1.3.3. Las fórmulas de cuadratura con  $n$  nodos sobre  $\mathbb{T}$  con máximo grado de precisión, esto es, exactas en  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$ , son conocidas como *fórmulas de cuadratura de Szegő*, y fueron introducidas y caracterizadas por Jones, Njåstad y Thron en [80]. Para la construcción de estas jugarán un papel fundamental los polinomios de Szegő. Sin embargo, al contrario de las fórmulas Gaussianas, los ceros de los polinomios de Szegő no pueden ser usados como nodos de la fórmula de cuadratura, ya que estos se encuentran en  $\mathbb{D}$ . Veamos algunas consideraciones previas antes de mostrar cómo se resolvió en [80].

Diremos que un polinomio  $p$  es *k-invariante* (*invariante*) con  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  si  $p^*(z) = kp(z)^5$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Los polinomios 1-invariantes son conocidos como *autorrecíprocos* (véase [114]).

En [80] los autores complementaron la definición de *k-invariante* con el siguiente concepto: un polinomio  $B_n \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$  se dice que es *para-ortogonal* con respecto a la medida  $\hat{\mu}$  en  $\mathbb{T}$  si cumple las condiciones de ortogonalidad:

$$\langle B_n, z^k \rangle_{\hat{\mu}} = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad \langle B_n, 1 \rangle_{\hat{\mu}} \neq 0, \quad \langle B_n, z^n \rangle_{\hat{\mu}} \neq 0. \quad (1.37)$$

<sup>5</sup>Aunque en la definición se ha impuesto  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , realmente sólo pueden existir polinomios *k-invariantes* si  $k \in \mathbb{T}$  (véase [11, pág. 1035]).

### 1.3. La circunferencia unidad

---

De la propia definición de  $\rho_n$  y  $\rho_n^*$  es fácil verificar que ni son invariantes ni son para-ortogonales. Los polinomios para-ortogonales e invariantes quedan caracterizados en el siguiente

**Teorema 1.3.4** *Si  $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$  representa la sucesión de polinomios mónicos de Szegő con respecto a la medida  $\dot{\mu}$ , entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1.  $B_n$  es un polinomio de grado exacto  $n \geq 1$ , para-ortogonal e invariante.

2.

$$B_n(z) = C_n [\rho_n(z) + \tau \rho_n^*(z)], \quad C_n \neq 0, \tau \in \mathbb{T}. \quad (1.38)$$

3.

$$B_n(z) = \tilde{C}_n [z \rho_{n-1}(z) + \tilde{\tau} \rho_{n-1}^*(z)], \quad \tilde{C}_n \neq 0, \tilde{\tau} \in \mathbb{T}. \quad (1.39)$$

Además, la equivalencia entre (1.38) y (1.39) viene dada por las siguientes relaciones:  $\tilde{C}_n = C_n(1 + \tau \bar{\delta}_n)$  y  $\tilde{\tau} = \frac{\tau + \delta_n}{1 + \tau \bar{\delta}_n}$ .

El papel fundamental que juegan los polinomios para-ortogonales en la construcción de fórmulas de cuadratura de Szegő queda reflejado en el siguiente

**Teorema 1.3.5** *Sea  $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de polinomios de Szegő para la medida  $\dot{\mu}$  y denotemos por  $\rho_n^*$  al polinomio recíproco. Entonces, se tiene que,*

1. Si  $\tau \in \mathbb{T}$  y  $C \neq 0$ , entonces el  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal,

$$B_n(z, \tau) = B_n(z) = C[\rho_n(z) + \tau \rho_n^*(z)],$$

tiene exactamente  $n$  ceros distintos y situados sobre  $\mathbb{T}$ .

2. Tomando  $z_1, \dots, z_n$  los ceros de  $B_n$ , existen pesos positivos  $\dot{\lambda}_1, \dots, \dot{\lambda}_n$  tales que

$$I_n^{\dot{\mu}}(f) = \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j f(z_j) = I_{\dot{\mu}}(f), \quad \text{para todo } f \in \Lambda_{-(n-1), n-1}.$$

**Nota 1.3.6** *En cuanto a las fórmulas de cuadratura de Szegő cabe comentar lo siguiente:*

1. No están unívocamente determinadas pues dependen del parámetro  $\tau \in \mathbb{T}$ .

2. Dependen de  $2n$  parámetros y son exactas en un subespacio de polinomios de Laurent de dimensión  $2n - 1$ .

3. Son óptimas en el sentido en que no pueden existir fórmulas de cuadratura con  $n$ -nodos que sean exactas en  $\Lambda_{-n, n-1}$  o en  $\Lambda_{-(n-1), n}$ . No obstante, en [103] se comprueba que son exactas en el subespacio de dimensión  $2n$   $\Lambda_{-(n-1), n-1} \cup \{\frac{a}{z^n} + bz^n\}$  con  $a = -\frac{1}{\delta_n + \tau}$  y  $b = \frac{1}{\delta_n + \tau}$ . Esta idea fue de hecho mencionada anteriormente en [127].

En relación al cómputo de los pesos tenemos el siguiente resultado (véanse [42] y [74])

**Teorema 1.3.7** Sea  $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  la sucesión de polinomios ortonormales de Szegő para  $\hat{\mu}$ , sea  $\tau \in \mathbb{T}$  y  $B_n(z) = \psi_n(z) + \tau\psi_n^*(z)$ . Entonces, los pesos de una fórmula de cuadratura de Szegő con  $n$  nodos, se pueden expresar como:

1.  $\hat{\lambda}_j = \frac{z_j^p}{B_n'(z_j)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_n(z)}{(z-z_j)z^p} d\hat{\mu}(z)$ , siendo  $p$  cualquier entero no negativo arbitrario, tal que  $0 \leq p \leq n-1$ ,
2.  $\hat{\lambda}_j = \frac{1}{|B_n'(z_j)|^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{B_n(z)}{(z-z_j)} \right|^2 d\hat{\mu}(z)$ ,
3.  $\hat{\lambda}_j^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} |\psi_k(z_j)|^2$ ,
4.  $\hat{\lambda}_j^{-1} = 2\Re \left[ z_j \psi_n'(z_j) \overline{\psi_n(z_j)} \right] + n |\psi_n(z_j)|^2$ .

Con carácter ilustrativo presentamos el siguiente

**Ejemplo 1.3.8 (El núcleo de Poisson)** Consideremos la función peso en  $[-\pi, \pi]$  definida por

$$\hat{\mu}(\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi(1-2r\cos(\theta)+r^2)}, \quad r \in (0,1).$$

Se puede comprobar fácilmente que  $\hat{\mu}(z) = \frac{1-r^2}{2\pi|z-r|^2}$ , con  $z = e^{i\theta}$ , así  $\hat{\mu}$  es una modificación racional de la medida de Lebesgue, estudiadas por Szegő en [113]. En este ejemplo, tenemos que  $\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \hat{\mu}(\theta) d\theta = r^{|k|}$  para  $k = 0, \pm 1, \dots$  y el  $n$ -ésimo polinomio de Szegő mónico viene dado, para  $n \geq 1$ , por  $\rho_n(z) = z^{n-1}(z-r)$ . Por tanto, los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  de una fórmula de Szegő con  $n$  nodos son las raíces de la ecuación

$$\rho_n(z) + \tau\rho_n^*(z) = z^n - rz^{n-1} - \tau rz + \tau, \quad \tau \in \mathbb{T}.$$

Los pesos  $\{\hat{\lambda}_j\}_{j=1}^n$  vienen dados por (véase [125])

$$\hat{\lambda}_j = \frac{1-r^2}{(1-r^2) + (n-1)(1+r^2-2r\cos\theta_j)}, \quad z_j = e^{i\theta_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Cuando  $r = 0$ , entonces  $\hat{\mu}(\theta) \equiv \frac{1}{2\pi}$ , la medida de Lebesgue normalizada y se tiene que  $z_j = \sqrt[n]{-\tau}$  y  $\hat{\lambda}_j = \frac{1}{n}$  para  $j = 1, \dots, n$ .

Al igual que ocurre con las fórmulas Gaussianas, las fórmulas de Szegő también pueden ser computadas eficientemente mediante un problema de autovalores y autovectores. En efecto, a partir de  $\{\delta_k\}_{k=0}^{n-1}$  y  $\tau \in \mathbb{T}$  definimos

$$\mathcal{H}_n(\tau) := D_n^{-1/2} \begin{pmatrix} -\delta_1 & -\delta_2 & \cdots & -\delta_{n-1} & -\tau \\ \eta_1^2 & -\overline{\delta_1}\delta_2 & \cdots & -\overline{\delta_1}\delta_{n-1} & -\overline{\delta_1}\tau \\ 0 & \eta_2^2 & \cdots & \overline{\delta_2}\delta_{n-1} & -\overline{\delta_2}\tau \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \eta_{n-1}^2 & -\overline{\delta_{n-1}}\tau \end{pmatrix} D_n^{1/2}, \quad (1.40)$$

donde  $\eta_k$  vienen dados por (1.26) para  $k = 1, 2, \dots, n$  y  $D_n = \text{diag}[\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $\gamma_0 = 1$  y  $\gamma_k = \gamma_{k-1}\sigma_k^2 > 0$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Bajo estas condiciones, Gragg probó en [75]-[76] lo siguiente:

### 1.3. La circunferencia unidad

**Teorema 1.3.9**  $\mathcal{H}_n(\tau)$  dada por (1.40) es una matriz superior de Hessenberg unitaria e irreducible para todo  $\tau \in \mathbb{T}$ , y sus autovalores  $\{z_j\}_{j=1}^n$  coinciden con los ceros de  $B_n(z, \tilde{\tau})$  donde  $\tilde{\tau} = \frac{\tau + \delta_n}{1 + \tau \delta_n} \in \mathbb{T}$ , y el cuadrado de la primera componente del autovector unitario asociado con el autovalor  $z_j$  nos proporciona el peso  $\lambda_j$ , asumiendo que  $\mu_0 = 1$ .

Con respecto a la computación de las fórmulas de Szegő, del Teorema 1.3.9 podríamos decir que las matrices de Hessenberg son el análogo en la circunferencia unidad de las matrices tri-diagonales de Jacobi en la recta real. Sin embargo, se ha probado en [43] que existen infinitas matrices (denominadas *serpiente*) que permiten computar las fórmulas de Szegő mediante un problema de autovalores, donde en particular aparece la matriz CMV ([36, 37, 108, 109, 110]) que es la matriz banda unitaria más estrecha (véanse también [34, 38]).

A veces, el esfuerzo computacional para calcular las fórmulas de Szegő puede ser bastante alto, o puede suceder que  $\hat{\mu}$  sea una función con signo o en general una función compleja tal que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{\mu}}$  no sea un producto interior Hermitiano y la ortogonalidad carezca de sentido. En este caso podemos proceder de forma alternativa: dados  $n$  nodos distintos  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$  en  $\mathbb{T}$ , encontrar  $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$  tales que

$$\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j f(\tilde{z}_j) = I_{\hat{\mu}}(f) \quad (1.41)$$

para cualquier polinomio de Laurent  $f$  en un subespacio de dimensión  $n$ ,  $\Lambda_{-r,s}$  con  $r$  y  $s$  enteros no negativos tales que  $r + s = n - 1$ . En este caso, los pesos quedan unívocamente determinados por  $\tilde{\lambda}_j = I_{\hat{\mu}}(l_j)$  con  $l_j \in \Lambda_{-r,s}$  tal que  $l_j(\tilde{z}_k) = \delta_{j,k}$ , siendo  $\delta_{j,k}$  la función delta de Kronecker.  $\tilde{I}_n(f)$  dada por (1.41) es llamada de *tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-r,s}$*  dado que  $\tilde{I}_n(f) = I_{\hat{\mu}}(L_n(f; \cdot))$  con  $L_n(f; \cdot) \in \Lambda_{-r,s}$  tal que  $L_n(f; \tilde{z}_j) = f(\tilde{z}_j)$  para  $j = 1, \dots, n$ . Tras estas consideraciones parece lógico plantearse lo siguiente: ¿cómo elegir los nodos  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$  en  $\mathbb{T}$  para que  $\tilde{I}_n(f)$  nos proporcione una buena estimación de  $I_{\hat{\mu}}(f)$ ? De [22] (véase también [23]) tenemos los siguientes dos resultados sobre convergencia (en el contexto más general de las Funciones Racionales Ortogonales).

**Teorema 1.3.10** Sea  $\hat{\mu}$  una medida en  $\mathbb{T}$ . Dada una sucesión  $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{T}$ , sean  $\tilde{z}_{j,n}$  las raíces  $n$ -ésimas de  $\tau_n$  y consideremos

$$\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_{j,n} f(\tilde{z}_{j,n}) = I_{\hat{\mu}}(f), \quad \forall f \in \Lambda_{-r(n),s(n)},$$

donde  $\{r(n)\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{s(n)\}_{n=0}^{\infty}$  son sucesiones no decrecientes de enteros no negativos tales que  $r(n) + s(n) = n - 1$  para  $n \geq 1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = \infty$ . Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{I}_n(f) = I_{\hat{\mu}}(f)$  para toda función  $f$  acotada definida en  $\mathbb{T}$  tal que  $f(e^{i\theta}) d\hat{\mu}(\theta)$  sea integrable en  $\mathbb{T}$ .

**Teorema 1.3.11** Sean  $\hat{\sigma}$  una función y  $\hat{\mu}$  una función peso, ambas sobre  $[-\pi, \pi]$  y tales que,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\hat{\sigma}(\theta)|^2}{\hat{\mu}(\theta)} d\theta < +\infty.$$

Sean  $\{\tau_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{T}$  y  $\{\tilde{z}_{j,n}\}_{j=1}^n$  los ceros de  $B_n(z, \tau_n) = \rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z)$ , siendo  $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$  una sucesión de polinomios de Szegő para  $\dot{\mu}$ . Sean  $\{r(n)\}_{n=1}^\infty$  y  $\{s(n)\}_{n=1}^\infty$  dos sucesiones no decrecientes de enteros no negativos, tales que  $r(n) + s(n) = n - 1$  para  $n \geq 1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = \infty$ . Sea

$$\tilde{I}_n^{\dot{\sigma}}(f) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_{j,n} f(\tilde{z}_{j,n}) = I_{\dot{\sigma}}(f) = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\dot{\sigma}(z) \text{ para todo } f \in \Lambda_{-r(n), s(n)}.$$

Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{I}_n^{\dot{\sigma}}(f) = I_{\dot{\sigma}}(f)$  para toda función acotada  $f$  sobre  $\mathbb{T}$  tal que  $f(e^{i\theta}) \dot{\sigma}(\theta)$  sea integrable en  $\mathbb{T}$ .

**Nota 1.3.12** Del teorema 1.3.11 se pueden concluir

1. Existe una constante positiva  $M$  tal que para todo  $n \geq 1$ ,  $\sum_{j=1}^n |\tilde{\lambda}_{j,n}| < M$ .

2. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |\tilde{\lambda}_{j,n}| = \int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\mu}(\theta)| d\theta.$$

**Nota 1.3.13** El Teorema 1.3.11 fue probado en [22, Teorema 4.7] en un ámbito más general, en relación con fórmulas de cuadratura con nodos prefijados sobre  $\mathbb{T}$  e integrando exactamente funciones racionales con polos prefijados en el complementario de  $\mathbb{T}$  en plano complejo extendido. Por tanto, cuando todo los polos se sitúan en el origen y en el infinito, las funciones racionales se convierten en polinomios de Laurent y el Teorema 1.3.11 puede ser deducido.

En cuanto a obtener estimaciones del error enunciamos el siguiente teorema (véase [105])

**Teorema 1.3.14** Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j f(z_j)$  una cuadratura de tipo interpolatorio de  $n$  nodos en  $\Lambda_{-r,s}$  ( $r + s = n - 1$ ) para  $\dot{\mu}$ , siendo  $f$  analítica en la región  $C(\rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$  con  $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$ . Entonces,

$$|\dot{R}_n(f)| \leq \max_{\rho \in \{\rho_1, \rho_2\}} \left( \frac{1}{\rho^s(\rho - 1)} \max_{|z|=\rho} |f(z)| \right). \quad (1.42)$$

donde  $\dot{R}_n(f) := I_{\dot{\mu}}(f) - I_n(f)$ .

También haremos uso de la siguiente estimación del error (véase [33])

**Teorema 1.3.15** Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j f(x_j)$  una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos distintos sobre  $\mathbb{T}$ , de forma que  $I_n(f) = I_{\dot{\mu}}(f)$  para toda función  $f \in \Lambda_{-r,s}$  ( $r, s \geq 0$ ). Asumiendo que  $f$  sea analítica en una región  $G$  que contenga a  $\mathbb{T}$ , entonces existen números reales  $\rho_1$  y  $\rho_2$  con  $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$  tales que

$$|\dot{R}_n(f)| \leq \|f\|_{\gamma_{\rho_1} \cup \gamma_{\rho_2}} (\mu_0 + \|I_n\|) \left( \frac{\rho_1^{r+1}}{1 - \rho_1^2} + \frac{\rho_2^{1-s}}{\rho_2^2 - 1} \right), \quad (1.43)$$

donde

$$\mu_0 = \int_{-\pi}^{\pi} d\dot{\mu}(\theta), \quad \|I_n\| = \sum_{j=1}^n |\dot{\lambda}_j|,$$

$\gamma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \alpha\}$ ,  $\alpha > 0$  y  $\|f\|_A = \max\{|f(z)| : z \in A\}$ ,  $A \subset \mathbb{C}$ .

### 1.3. La circunferencia unidad

**Nota 1.3.16** Si aplicamos el Teorema 1.3.15 a una fórmula de cuadratura de Szegő con  $n$  nodos para  $\hat{\mu}$ , se tiene que  $\|I_n\| = \mu_0 = 1$  así que (1.43) se reduce a ( $r = s = n - 1$ )

$$|R_n(f)| \leq 2\|f\|_{\gamma_{\rho_1} \cup \gamma_{\rho_2}} \left( \frac{\rho_1^n}{1 - \rho_1^2} + \frac{\rho_2^{-n}}{1 - \rho_2^{-2}} \right). \quad (1.44)$$

Retomando la construcción de fórmulas de Szegő, el problema de fijar nodos en la circunferencia unidad es bien diferente al caso real. Como consecuencia de que no están unívocamente determinadas, fijar un nodo  $z_\alpha$  en una fórmula de cuadratura de Szegő con  $n$ -nodos se puede hacer directamente eligiendo el parámetro apropiado  $\tilde{\tau}_n = -z_\alpha \frac{\rho_{n-1}(z_\alpha)}{\rho_{n-1}^*(z_\alpha)} \in \mathbb{T}$ . Por tanto, las fórmulas de cuadratura de Szegő-Radau siempre existen, son únicas, con pesos positivos, exactas en  $\Lambda_{-(n-1), n-1}$  y su construcción no requiere un esfuerzo computacional extra. El siguiente paso fue dado por C. Jagels y L. Reichel en [79], caracterizando las fórmulas de cuadratura de Szegő-Lobatto, es decir, fijar dos nodos en  $\mathbb{T}$ . Una fórmula de cuadratura de Szegő con  $n$ -nodos esta caracterizada por los coeficientes de Verblunsky  $\delta_1, \dots, \delta_{n-1} \subset \mathbb{D}$  y el parámetro libre  $\tau_n \in \mathbb{T}$ . La idea propuesta en [79] para la construcción de fórmulas de Szegő-Lobatto es modificar el último parámetro de Verblunsky  $\delta_{n-1}$  por  $\tilde{\delta}_{n-1} \in \mathbb{D}$  apropiadamente y elegir  $\tau_n = \tau_n(\tilde{\delta}_{n-1}) \in \mathbb{T}$  de manera que el correspondiente polinomio para-ortogonal de grado  $n$  tenga los dos nodos prefijados como ceros. De esta manera, una fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto con  $n$  nodos para  $\hat{\mu}$  es realmente una fórmula de Szegő con  $n$  nodos para una medida modificada  $\tilde{\mu}$ , quedando garantizado el carácter positivo de los pesos. Esto se puede resumir en el siguiente

**Teorema 1.3.17** Sea  $\hat{\mu}$  una medida positiva de Borel sobre  $\mathbb{T}$ ,  $n \geq 3$  y  $z_\alpha, z_\beta \in \mathbb{T}$ ,  $z_\alpha \neq z_\beta$ . Sea  $\{\rho_j\}_{j=0}^\infty$  la familia de polinomios de Szegő para  $\hat{\mu}$  y definamos  $a := z_\alpha^{n-3} \frac{\rho_{n-2}(z_\alpha)}{\rho_{n-2}^*(z_\alpha)} \in \mathbb{T}$  y  $b := z_\beta^{n-3} \frac{\rho_{n-2}(z_\beta)}{\rho_{n-2}^*(z_\beta)} \in \mathbb{T}$ . Consideremos una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos como (1.35) con  $z_\alpha, z_\beta \in \{z_j\}_{j=1}^n$ . Entonces, se cumple una de las siguientes afirmaciones:

1. Si  $az_\alpha = bz_\beta$  (y por tanto,  $a \neq b$ ), entonces  $z_\alpha$  y  $z_\beta$  son los ceros de  $B_{n-2}(z, \gamma)$ , con  $\gamma := -\frac{\rho_{n-2}(z_\alpha)}{\rho_{n-2}^*(z_\alpha)} = -\frac{\rho_{n-2}(z_\beta)}{\rho_{n-2}^*(z_\beta)}$ . La fórmula de Szegő con  $(n-2)$  nodos determinada por este polinomio es un fórmula de Szegő-Lobatto, exacta en  $\Lambda_{-(n-3), n-3}$ .
2. Si  $a = b$  (y por tanto,  $az_\alpha \neq bz_\beta$ ), entonces  $z_\alpha$  y  $z_\beta$  son los ceros de  $B_{n-1}(z, \gamma)$ , con  $\gamma := -z_\alpha \frac{\rho_{n-2}(z_\alpha)}{\rho_{n-2}^*(z_\alpha)} = -z_\beta \frac{\rho_{n-2}(z_\beta)}{\rho_{n-2}^*(z_\beta)}$ . La fórmula de Szegő con  $(n-1)$  nodos determinada por este polinomio es un fórmula de Szegő-Lobatto, exacta en  $\Lambda_{-(n-2), n-2}$ .
3. Supongamos  $a \neq b$  y  $az_\alpha \neq bz_\beta$  (caso general) y denotemos por  $\Gamma$  el círculo con centro  $\gamma := -\frac{z_\alpha - z_\beta}{az_\alpha - bz_\beta}$  y radio  $r := \left| \frac{a-b}{az_\alpha - bz_\beta} \right|$ . Sea  $\tilde{\delta}_{n-1} \in \Gamma \cap \mathbb{D}$ , un arco que se prueba que es no vacío, y tomemos  $\tau_n = -\frac{az_\alpha - bz_\beta}{a-b} \tilde{\delta}_{n-1} - \frac{z_\alpha - z_\beta}{a-b} \in \mathbb{T}$ . Entonces, existe una fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto con  $n$  nodos cuyos nodos son los ceros de  $\tilde{B}_n(z, \tau_n) = z\tilde{\rho}_{n-1}(z) + \tau_n\tilde{\rho}_{n-1}^*(z)$  con  $\tilde{\rho}_{n-1}(z) = z\rho_{n-2}(z) + \tilde{\delta}_{n-1}\rho_{n-2}^*(z)$ , y exacta en  $\Lambda_{-(n-2), n-2}$ .

**Nota 1.3.18** Una mejora en el caso  $az_\alpha = bz_\beta$  se dio en [17]<sup>6</sup>. Sea  $L$  la recta que une  $\gamma_1 := -z_\alpha \frac{\rho_{n-2}(z_\alpha)}{\rho_{n-2}^*(z_\alpha)} \in \mathbb{T}$  y  $\gamma_2 := -z_\beta \frac{\rho_{n-2}(z_\beta)}{\rho_{n-2}^*(z_\beta)} \in \mathbb{T}$  ( $\gamma_1 \neq \gamma_2$  en este caso), tomemos  $\tilde{\delta}_{n-1}$

<sup>6</sup>En el contexto de las Funciones Racionales Ortogonales, véase también [28].



en el segmento  $L \cap \mathbb{D}$  (un conjunto no vacío) y sea  $\tau_n = z_\alpha \frac{\gamma_1 - \tilde{\delta}_{n-1}}{1 - \gamma_1 \tilde{\delta}_{n-1}} = z_\beta \frac{\gamma_2 - \tilde{\delta}_{n-1}}{1 - \gamma_2 \tilde{\delta}_{n-1}} \in \mathbb{T}$ . Entonces, como en el caso general del Teorema 1.3.17, existe una fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto con  $n$  nodos, basada en los ceros de  $\tilde{B}_n(z, \tau_n) = z\tilde{\rho}_{n-1}(z) + \tau_n\tilde{\rho}_{n-1}^*(z)$  con  $\tilde{\rho}_{n-1}(z) = z\rho_{n-2}(z) + \tilde{\delta}_{n-1}\rho_{n-2}^*(z)$ , y exacta en  $\Lambda_{-(n-2), n-2}$ . Esta situación puede verse como un caso límite del apartado 3 en el Teorema 1.3.17, puesto que una recta puede verse como un círculo de radio y centro infinitos.

Nótese que también puede ocurrir que  $z_\alpha$  y  $z_\beta$  sean ceros de algún polinomio para-ortogonal de grado  $n$ , es decir, la fórmula de cuadratura de Szegő-Radau que fija  $z_\alpha$  también fija  $z_\beta$ . Esta situación ocurre en el caso general cuando consideramos  $\tilde{\delta}_{n-1} = \delta_{n-1}$  siendo la fórmula exacta ahora en  $\Lambda_{-(n-1), n-1}$ .

Tras estas consideraciones podemos establecer el siguiente

**Teorema 1.3.19** *Bajo las hipótesis del Teorema 1.3.17, siempre existe una fórmula de Szegő-Lobatto con  $n$  nodos, exacta en  $\Lambda_{-(n-2), n-2}$ , el máximo dominio de exactitud, salvo que  $a = b$ , en cuyo caso la cuadratura tiene  $n - 1$  nodos.*

**Definición 1.3.20** *Llamaremos fórmulas de tipo-Szegő al conjunto de las fórmulas de cuadratura de Szegő, Szegő-Radau y Szegő-Lobatto.*

Para finalizar esta sección, recordemos que la transformada de Herglotz-Riesz de una medida  $\hat{\mu}$  soportada en  $\mathbb{T}$ , o equivalentemente en  $[-\pi, \pi]$ , viene dada por

$$H_{\hat{\mu}}(z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{t+z}{t-z} d\hat{\mu}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\hat{\mu}(\theta), \quad (1.45)$$

que es una función analítica en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}$  y además verifica:

1.  $\overline{H_{\hat{\mu}}(1/\bar{z})} = -H_{\hat{\mu}}(z)$ ,
2.  $H_{\hat{\mu}}(z) = \mu_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k, \quad |z| < 1$ ,
3.  $H_{\hat{\mu}}(z) = -\mu_0 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k} z^{-k}, \quad |z| > 1$ ,

donde los parámetros  $\mu_k$  son los momentos trigonométricos definidos en (1.20). Debemos observar que si la conocemos en  $\mathbb{D}$  por 1 la conocemos en  $\mathbb{E}$ . Nuestro propósito será ahora, a semejanza del caso real, comprobar que  $H_{\hat{\mu}}$  puede ser aproximada por medio de ciertas funciones racionales  $H_n(z) = \frac{\tilde{B}_n(z)}{B_n(z)}$  con polos en  $\mathbb{T}$ , tal que

$$\begin{aligned} H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z) &= \sum_{j=p+1}^{\infty} \tilde{\mu}_j z^j = O(z^{p+1}), \quad (z \rightarrow 0) \\ H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z) &= \sum_{j=q+1}^{\infty} \tilde{\mu}_{-j} z^{-j} = O(z^{-(q+1)}), \quad (z \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (1.46)$$

---

### 1.3. La circunferencia unidad

---

con  $p$  y  $q$  enteros no negativos dependientes de  $n$ , siendo su suma tan grande como sea posible.

Se sigue que  $H_n(z) = c + \frac{\hat{B}_{n-1}(z)}{B_n(z)}$ ,  $\hat{B}_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ , después de realizar la descomposición en fracciones simples

$$H_n(z) = c + \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{z - z_j}, \quad B_j = \frac{\hat{B}_{n-1}(z_j)}{B'_n(z_j)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tras algunas manipulaciones algebraicas llegamos a que

$$H_n(z) = \hat{c} + \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \frac{z_j + z}{z_j - z}, \quad \text{siendo } \hat{\lambda}_j = -\frac{B_j}{2z_j} \text{ y } \hat{c} = c + \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j.$$

Además, es fácil comprobar que de las condiciones  $H_n(0) = -H_n(\infty) = \mu_0$  se sigue que  $\hat{c} = 0$ . Definimos ahora el funcional

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j f(z_j),$$

se comprueba que  $I_n(L) = I_{\hat{\mu}}(L)$ ,  $\forall L \in \Lambda_{-p,q}$ .

En general, sea una fórmula de cuadratura

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j f(z_j), \quad z_j \neq z_k \text{ si } j \neq k, \{z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{T}, \quad (1.47)$$

siendo  $B_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$  su polinomio nodal, definimos

$$H_n(z) = I_n\left(\frac{t+z}{t-z}\right) = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \frac{z_j + z}{z_j - z} = \frac{\tilde{B}_{n-1}(z)}{B_n(z)},$$

con  $\tilde{B}_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ . Es fácil probar que

**Proposición 1.3.21** *Bajo las condiciones anteriores,*

$$\begin{cases} H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z) = O(z^{p+1}), & (z \rightarrow 0), \\ H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{q+1}}\right), & (z \rightarrow \infty). \end{cases} \Leftrightarrow I_n^{\hat{\mu}}(f) = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j f(z_j) = I_{\hat{\mu}}(f), \quad \forall f \in \Lambda_{-p,q}$$

Cuando consideramos  $p+q = n-1$ , la función racional resultante, es un *Aproximante tipo-Padé en dos puntos* a la función  $H_{\hat{\mu}}$ . En el caso de que consideremos  $B_n$  el  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal con respecto a  $\hat{\mu}$ , el aproximante resultante es conocido por *Aproximante Modificado* y fue introducido también por Jones, Njåstad y Thron en [80].

Finalmente, consideremos las siguientes expresiones para el error  $\mathring{E}_n^{\hat{\mu}}(z) := H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z)$ :

- Para los Aproximantes tipo-Padé en dos puntos (véase [74])

$$\mathring{E}_n^{\hat{\mu}}(z) = \frac{2z^{p+1}}{B_n(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(n-1)\theta} B_n(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} d\hat{\mu}(\theta), \quad z \notin \mathbb{T}. \quad (1.48)$$


---

- Para los Aproximantes Modificados (véase [80])

$$\mathring{E}_n^\mu(z) = \frac{2z^n}{B_n^2(z)} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ip\theta} B_n^2(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} d\hat{\mu}(\theta) - \gamma_n \right), \quad (1.49)$$

$$\text{con } \gamma_n = \int_{-\pi}^{\pi} B_n(e^{i\theta}) d\hat{\mu}(\theta).$$

Finalmente, si suponemos que  $f$  es una función analítica en un dominio  $G \supset \mathbb{T}$  y  $\Gamma = \partial G$  (frontera de  $G$ ) es una curva rectificable, es también fácil comprobar a partir de la fórmula integral de Cauchy y del teorema de Fubini la expresión

$$\mathring{R}_n^\mu(f) := I_\mu(f) - I_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z))g(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} E_n^\mu(z)g(z)dz, \quad (1.50)$$

siendo  $g(z) = -\frac{f(z)}{2z}$ . Es decir, que el error de la fórmula de cuadratura (1.47) está de nuevo esencialmente controlado por el correspondiente error de los aproximantes racionales a la transformada de Herglotz-Riesz. De (1.50) deducimos finalmente,

$$|\mathring{R}_n^\mu(f)| \leq \frac{1}{4\pi} \max_{z \in \Gamma} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \int_{\Gamma} |\hat{E}_n^\mu(z)| |dz|.$$

## 1.4. La transformación de Joukowsky

Uno de los objetivos fundamentales de esta Memoria es profundizar en el enriquecimiento mutuo entre ambas situaciones como consecuencia de la relación íntima entre la circunferencia unidad y el intervalo  $I$ . En dicha vinculación juega un papel trascendental la transformación de Joukowsky<sup>7</sup>

$$x = J(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad (1.51)$$

que transforma el círculo unidad  $\mathbb{D}$  en el complementario de  $[-1, 1]$  en plano complejo ampliado,  $\overline{\mathbb{C}}_I$  y la circunferencia unidad  $\mathbb{T}$  en el intervalo  $I$ . Aunque tanto  $x$  como  $z$  son variables complejas, reservamos la  $x$  para el caso del intervalo y la  $z$  para el caso de la circunferencia unidad. Cuando  $z = e^{i\theta}$ , entonces  $x = J(z) = \cos(\theta)$ .

Dada una medida  $\mu$  en  $I$  se puede inducir una nueva medida simétrica  $\hat{\mu}$  en  $\mathbb{T}$  definida de la siguiente manera, sea  $E$  un conjunto de Borel de  $\mathbb{R}$ ,

$$\hat{\mu}(E) = \mu(\{\cos \theta, \theta \in E \cap [0, \pi)\}) + \mu(\{\cos \theta, \theta \in E \cap [-\pi, 0)\}), \quad (1.52)$$

en el caso de que fuera absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, esta se puede escribir como

$$\hat{\mu}'(\theta) = \mu'(\cos \theta) |\sin \theta|. \quad (1.53)$$

Con cierto abuso de notación lo expresaremos en la forma

$$\hat{\mu}(\theta) = \mu(\cos \theta) |\sin \theta|.$$

<sup>7</sup>También conocida como transformación de Joukowski o Zhukovsky.

#### 1.4. La transformación de Joukowsky

---

Así mismo, cuando  $\mu$  y  $\hat{\mu}$  están relacionadas mediante (1.52)-(1.53), existe la siguiente relación entre integrales:

$$\int_I f(x) d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \hat{f}(z) d\hat{\mu}(z), \quad \hat{f} = f \circ J.$$

La transformación de Joukowsky permite conectar fórmulas de tipo-Gauss con fórmulas tipo-Szegő, siempre que las medidas correspondientes estén relacionadas mediante (1.52)-(1.53). Los siguientes tres resultados serán de utilidad y sus demostraciones pueden verse en [13].

**Teorema 1.4.1** Sea  $J_n(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$  la fórmula de cuadratura Gaussiana de  $n$  nodos para  $\mu$ , y sea

$$I_{2n}(\hat{f}) = \sum_{j=1}^{2n} \hat{\lambda}_j \hat{f}(z_j) = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j [\hat{f}(z_j) + \hat{f}(\bar{z}_j)]$$

la fórmula de cuadratura de Szegő de  $2n$  nodos para  $\hat{\mu}$  tomando como nodos los ceros de  $B_{2n}(z, 1)$ . Si  $\mu$  y  $\hat{\mu}$  están relacionadas por (1.52), tenemos la siguiente relación entre los nodos y pesos de ambas cuadraturas:

$$z_k = e^{i\theta_k} \text{ y } \hat{\lambda}_k = \lambda_k, \text{ para } j = 1, \dots, n, \text{ donde } x_k = \cos\theta_k.$$

**Teorema 1.4.2** Sea  $J_{n+1}(f) = \frac{1}{2} \lambda^\pm f(\pm 1) + \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$  la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau de  $n$  nodos para  $\mu$ , y sea

$$I_{2n+1}(\hat{f}) = \sum_{k=1}^{2n+1} \hat{\lambda}_k \hat{f}(z_k) = \hat{\lambda}^\pm \hat{f}(\pm 1) + \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j [\hat{f}(z_j) + \hat{f}(\bar{z}_j)]$$

la fórmula de cuadratura de Szegő de  $(2n+1)$  nodos para  $\hat{\mu}$  tomando como nodos los ceros de  $B_{2n+1}(z, \pm 1)$ . Si  $\mu$  y  $\hat{\mu}$  están relacionadas por (1.52) tenemos la siguiente relación entre los nodos y pesos de ambas cuadraturas:

$$z_k = e^{i\theta_k} \text{ y } \hat{\lambda}_k = \lambda_k \text{ para } k = 1, \dots, n, \text{ donde } x_k = \cos\theta_k \text{ y } \lambda^\pm = \hat{\lambda}^\pm.$$

**Teorema 1.4.3** Sea  $J_{n+2}(f) = \lambda^+ f(1) + \lambda^- f(-1) + \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$  la fórmula de cuadratura de Gauss-Lobatto de  $n$  nodos para  $\mu$ , y sea

$$I_{2n+2}(\hat{f}) = \sum_{k=1}^{2n+2} \hat{\lambda}_k \hat{f}(z_k) = 2\hat{\lambda}^+ \hat{f}(1) + 2\hat{\lambda}^- \hat{f}(-1) + \sum_{k=1}^n \hat{\lambda}_k [\hat{f}(z_k) + \hat{f}(\bar{z}_k)]$$

la fórmula de cuadratura de Szegő de  $(2n+2)$  nodos para  $\hat{\mu}$  tomando como nodos los ceros de  $B_{2n+2}(z, -1)$ . Si  $\mu$  y  $\hat{\mu}$  están relacionadas por (1.52) tenemos la siguiente relación entre los nodos y pesos de ambas cuadraturas:

$$z_k = e^{i\theta_k} \text{ y } \hat{\lambda}_k = \lambda_k \text{ para } k = 1, \dots, n, \text{ donde } x_k = \cos\theta_k \text{ y } \hat{\lambda}^+ = \lambda^+, \hat{\lambda}^- = \lambda^-.$$

También es bien conocida la siguiente conexión entre polinomios ortogonales y polinomios de Szegő (véase [113, Capítulo XI] y [13]):

**Teorema 1.4.4** Sea  $\mu$  una medida sobre el intervalo  $[-1, 1]$  y sea  $\hat{\mu}$  definida por (1.52). Sea  $\{\rho_j\}_{j=1}^{\infty}$  la sucesión de polinomios mónicos de Szegő asociados con  $\hat{\mu}$  y sean  $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $\mu$ ,  $\{p_j^{\pm}\}_{j=1}^{\infty}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $(1 \pm x)\mu$  y  $\{p_j^c\}_{j=1}^{\infty}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $(1 - x^2)\mu$ . Si  $x = J(z) = J(e^{i\theta})$ , se tienen para  $j \geq 1$  las siguientes relaciones:

1. 
$$p_j(x) = \{2^j(1 + \delta_{2j})\}^{-1} \{z^{-j}\rho_{2j}(z) + z^j\rho_{2j}(z^{-1})\}, \quad (1.54)$$

2. 
$$p_j^{\pm}(x) = \{2^j(1 \pm \delta_{2j+1})\}^{-1} \left\{ \frac{z^{-j}\rho_{2j+1}(z) + z^{j+1}\rho_{2j+1}(z^{-1})}{z \pm 1} \right\}, \quad (1.55)$$

3. 
$$p_j^c(x) = \{2^j(1 - \delta_{2j+2})\}^{-1} \left\{ \frac{z^{-j-1}\rho_{2j+2}(z) + z^{j+1}\rho_{2j+2}(z^{-1})}{z - z^{-1}} \right\}. \quad (1.56)$$

También nos resultara útil la siguiente relación entre las correspondientes normas:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mu} &= \left( \int_{-1}^1 |f(x)|^2 \mu(x) dx \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(e^{i\theta})|^2 \hat{\mu}(\theta) d\theta \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \| \hat{f} \|_{\hat{\mu}}, \quad \hat{f} = f \circ J. \end{aligned} \quad (1.57)$$

A lo largo de esta Memoria, trabajaremos frecuentemente con funciones peso simétricas, esto es  $\hat{\mu}(-\theta) = \hat{\mu}(\theta)$  para todo  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . El siguiente resultado puede demostrarse fácilmente de los resultados de la sección anterior:

**Lema 1.4.5** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $\hat{\mu}$  es una función peso simétrica en  $[-\pi, \pi]$ .
2. Las matrices de Toeplitz asociadas con  $\hat{\mu}$  son simétricas, es decir  $\mu_{-k} = \mu_k$  para  $k \in \mathbb{Z}$ .
3. Los momentos trigonométricos son reales:  $\mu_k \in \mathbb{R}$  para  $k \in \mathbb{Z}$ .
4. Los parámetros de Verblunsky  $\delta_k$  están en  $(-1, 1)$ , para  $k \geq 1$ .

Dada una función peso simétrica  $\hat{\mu}$  en  $[-\pi, \pi]$ , si la función  $f$  en (1.33) es también simétrica, entonces parece razonable considerar fórmulas de cuadratura donde los nodos sean reales ( $\pm 1$ ) o aparezcan en pares complejos conjugados. En este caso diremos que la fórmula de cuadratura es simétrica, y una caracterización de estas puede verse en el siguiente

**Teorema 1.4.6** Sea  $\hat{\mu}$  una función peso simétrica en  $[-\pi, \pi]$  y sea  $I_n^{\hat{\mu}}(\hat{f}) = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \hat{f}(z_j)$  una fórmula de cuadratura de Szegő con  $n$  nodos para  $\hat{\mu}$ , generada por  $B_n(z, \tau_n)$ . Entonces,

1.  $I_n^{\hat{\mu}}(\hat{f})$  es simétrica, si y solo si,  $\tau_n \in \{\pm 1\}$ .
2. Si  $z_j = \bar{z}_k$  para algún  $j$  y  $k$ ,  $1 \leq j, k \leq n$ , entonces  $\hat{\lambda}_j = \hat{\lambda}_k$ .

#### 1.4. La transformación de Joukowsky

**Demostración.-** Puesto que  $\hat{\mu}$  es simétrica, por el Lema 1.4.5 y (1.22) podemos concluir que los correspondientes polinomios de Szegő tienen coeficientes reales.

1. Si  $\tau \in \{\pm 1\}$ , al tener  $\rho_n$  coeficientes reales,  $B_n$  también los tendrá y por tanto  $I_n^{\hat{\mu}}(\hat{f})$  será simétrica. En la otra dirección, al ser  $I_n^{\hat{\mu}}(\hat{f})$  simétrica, los nodos bien son reales o bien vienen en pares conjugados. Sea  $z_k \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  se tiene que  $\rho_n(z_k) + \tau \rho_n^*(z_k) = 0 = \rho_n(\bar{z}_k) + \tau \rho_n^*(\bar{z}_k)$ , es decir,  $\tau = -\frac{\rho_n(z_k)}{\rho_n^*(z_k)} = -\frac{\rho_n(z_k)}{\rho_n^*(z_k)}$ , por tanto  $\tau \in \{\pm 1\}$ .
2. Se sigue directamente de la tercera expresión para los pesos del enunciado del Teorema 1.3.7. ■

Las relaciones existentes entre las fórmulas de cuadratura intermedias, en el intervalo y en la circunferencia unidad, se muestran en la siguiente

**Proposición 1.4.7** *Sea  $\mu$  una medida de Borel positiva en  $I$  y  $\hat{\mu}$  dada por (1.52), sean  $r, s \in \{0, 1\}$  y consideremos  $n - r - s$  nodos distintos  $\{x_j^{r,s}\}_{j=1}^{n-r-s}$  sobre  $(-1, 1)$  así como  $n$  números reales  $\lambda_+^{r,s}, \lambda_-^{r,s}$  y  $\{\lambda_j^{r,s}\}_{j=1}^{n-r-s}$ . Tomando  $x_j^{r,s} = \cos \theta_j^{r,s}$ ,  $\theta_j^{r,s} \in (0, \pi)$ , definamos  $z_j^{r,s} = e^{i\theta_j^{r,s}}$ ,  $z_{n-r-s+j}^{r,s} = \bar{z}_j^{r,s}$  y  $\hat{\lambda}_j^{r,s} = \hat{\lambda}_{n+j-r-s}^{r,s} = \lambda_j^{r,s}$ ,  $1 \leq j \leq n - r - s$ ,  $\lambda_+^{r,s} = \hat{\lambda}_+^{r,s}$  y  $\lambda_-^{r,s} = \hat{\lambda}_-^{r,s}$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $J_n^{\mu, r, s}(f) = r\lambda_+^{r,s}f(1) + s\lambda_-^{r,s}f(-1) + \sum_{j=1}^{n-r-s} \lambda_j^{r,s}f(x_j^{r,s}) = J_\mu(f)$ , para todo  $f \in \mathbb{P}_N$ .
2.  $I_{2n-r-s}^{\hat{\mu}}(\hat{f}) = 2[r\hat{\lambda}_+^{r,s}\hat{f}(1) + s\hat{\lambda}_-^{r,s}\hat{f}(-1)] + \sum_{j=1}^{2(n-r-s)} \hat{\lambda}_j^{r,s}\hat{f}(z_j^{r,s}) = I_{\hat{\mu}}(\hat{f})$ , para todo  $\hat{f} \in \Lambda_{-N, N}$ .

**Demostración.-** Consideraremos el caso  $r = s = 0$ , y en virtud de simplificar la notación, suprimiremos los super-índices.

“ $\Rightarrow$ ” supongamos que  $J_n^\mu(P) = J_\mu(P)$ ,  $\forall P \in \mathbb{P}_N$ , o equivalentemente  $J_n^\mu(T_k) = J_\mu(T_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  con  $T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$ ,  $x \in [-1, 1]$  el  $k$ -ésimo polinomio de Chebyshev. Tomando  $z^k$  con  $-N \leq k \leq N$  y  $z = e^{i\theta}$ , entonces como  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin k\theta d\hat{\mu}(\theta) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  se deduce

$$\begin{aligned} I_{2n}^{\hat{\mu}}(z^k) &= \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j z_j^k = \sum_{j=1}^n \lambda_j (z_j^k + z_j^{-k}) = 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j T_{|k|}(x_j) = 2 \int_{-1}^1 T_{|k|}(x) d\mu(x) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(|k|\theta) d\hat{\mu}(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos k\theta + i \sin k\theta) d\hat{\mu}(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} z^k d\hat{\mu}(\theta) \\ &= I_{\hat{\mu}}(z^k). \end{aligned}$$

“ $\Leftarrow$ ” Si  $I_{2n}^{\hat{\mu}}(L) = I_{\hat{\mu}}(L)$ ,  $\forall L \in \Lambda_{-N, N}$  y tomamos  $T_k(x)$  con  $0 \leq k \leq N$ , entonces

$$\begin{aligned} J_n^\mu(T_k) &= \sum_{j=1}^n \lambda_j T_k(x_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \left( \frac{e^{ik\theta_j} + e^{-ik\theta_j}}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j z_j^k \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} d\hat{\mu}(\theta) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k\theta d\hat{\mu}(\theta) = \int_{-1}^1 T_k(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

La demostración para los casos  $r + s > 0$  se puede deducir de manera similar. ■

**Nota 1.4.8** Si denotamos por  $P_n$  y  $B_{2n}$  a los correspondientes polinomios nodales mónicos para  $J_n^\mu(f)$  y  $I_{2n}^\mu(f)$  respectivamente, es decir  $P_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$  y  $B_{2n}(z) = \prod_{j=1}^{2n} (z - z_j)$ , considerando la transformación de Joukowski, tenemos

$$Q_n(x) = \frac{B_{2n}(z)}{2^n z^n}, \text{ con } x = J(z). \quad (1.58)$$

Los coeficientes de Verblunsky y los parámetros de Jacobi para  $\hat{\mu}$  y  $\mu$  respectivamente, se encuentran conectados mediante las siguientes relaciones de Geronimus (véase [66]).

**Teorema 1.4.9** Sea  $\hat{\mu}$  una función peso simétrica sobre  $[-\pi, \pi]$  verificando  $\mu_0 = 1$  y  $\mu$  la función peso en  $[-1, 1]$  relacionada con  $\hat{\mu}$  por (1.53). Sea  $\{\delta_k\}_{k=0}^\infty$  la sucesión de parámetros de Verblunsky para  $\hat{\mu}$  y  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  y  $\{b_n\}_{n=0}^\infty$  los coeficientes de la matriz de Jacobi para  $\mu$ . Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} 2a_n &= \sqrt{(1 - \delta_{2n})(1 - \delta_{2n-1}^2)(1 + \delta_{2n-2})}, \quad n \geq 1, \\ 2b_n &= \delta_{2n-1}(1 - \delta_{2n}) - \delta_{2n+1}(1 + \delta_{2n}), \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Concluimos presentando la relación existente entre las correspondientes transformadas de Cauchy y Herglotz-Riesz con respecto a  $\mu$  y  $\hat{\mu}$  respectivamente (véase, por ejemplo [95]):

$$F_\mu(x) = \frac{z}{1 - z^2} H_{\hat{\mu}}(z), \quad x = J(z). \quad (1.60)$$

# Capítulo 2

## Interpolación y aproximación

En este capítulo estudiaremos conexiones existentes en temas de interpolación y aproximación entre intervalos finitos de la recta real y la circunferencia unidad desde diferentes perspectivas. En la primera sección haremos un estudio de las fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss. Comenzaremos estudiando propiedades de interpolación nuevamente haciendo uso de la relación existente entre fórmulas de cuadratura en el intervalo y la circunferencia unidad, extenderemos el teorema de Erdős-Turán a las fórmulas de cuadratura tipo-Gauss, garantizando la convergencia de tales fórmulas. A continuación diseñamos ciertas reglas de integración producto para aproximar integrales sobre el intervalo, proporcionando además estimaciones del error y estudiando la convergencia. Para ello aprovecharemos, de nuevo, resultados ya conocidos en la circunferencia unidad. Finalmente estudiamos las conexiones existentes entre ciertos aproximantes racionales asociadas a las fórmulas de cuadratura en el intervalo y la circunferencia unidad. En la última sección analizaremos fórmulas de cuadratura sobre intervalos de la recta real con nodos prefijados, por medio del estudio de las correspondientes cuadraturas asociadas en la circunferencia unidad.

### 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

#### 2.1.1. Convergencia en norma $L_2$ . Teorema de Erdős-Turán

En esta sección analizaremos que escogiendo convenientemente los nodos de interpolación en  $[1, 1]$ , la correspondiente sucesión de polinomios interpoladores converge en norma  $L_2$  con respecto a cierta medida  $\mu$  en  $[-1, 1]$ , concretamente extenderemos el conocido Teorema de Erdős-Turán (véase, por ejemplo [39]). Para ello transformaremos nuestro problema original a uno en la circunferencia unidad mediante la transformación de Joukowski (1.51), convirtiéndolo en un problema de interpolación de funciones  $2\pi$ -periódicas mediante polinomios trigonométricos, o más general, mediante polinomios de Laurent en la circunferencia unidad. Recuperando la notación del Teorema 1.2.12, consideremos primero el caso  $r = s = 0$ , es decir, consideramos  $n$  nodos distintos  $\{x_k\}_{k=1}^n \subset (-1, 1)$  y sean  $\{z_j\}_{j=1}^{2n} \subset \mathbb{T}$  los correspondientes  $2n$  nodos distintos dado por la Proposición 1.4.7. Denotamos por  $Q_n(f; x) \in \mathbb{P}_{n-1}$  al polinomio interpolador a  $f$  en  $\{x_k\}_{k=1}^n$ , que siempre exis-



te, trataremos de encontrarla la expresión del polinomio de Laurent  $L_n(\mathring{f}; z) \in \Lambda_{-p,q}$  con  $\mathring{f} = f \circ J$ ,  $p$  y  $q$  enteros no negativos tales que  $p + q = 2n - 1$ , que interpola a  $\mathring{f}$  en  $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$ . Demostraremos que  $Q_n(f; \cos \theta) = L_n(\mathring{f}; z)$  donde  $z = e^{i\theta}$ . Para este propósito, consideremos  $p = n - 1$  y  $q = n$ , esto es, siendo  $L_n(\mathring{f}; \cdot) \in \Lambda_{-(n-1),n}$  tal que  $L_n(\mathring{f}; z_j) = \mathring{f}(z_j)$  con  $j = 1, \dots, 2n$ .  $L_n(\mathring{f}; \cdot)$  está unívocamente determinado. De la simetría del problema se sigue que  $\hat{L}_n(\mathring{f}; z) := L_n(\mathring{f}; 1/z) \in \Lambda_{-n,n-1}$  cumple también  $\hat{L}_n(\mathring{f}; z_j) = \mathring{f}(z_j)$  con  $j = 1, \dots, 2n$ . Concluiremos que  $L_n(\mathring{f}; z) = \hat{L}_n(\mathring{f}; z) = Q_n(f; \cos \theta)$  con  $z = e^{i\theta}$ , es decir,  $L_n \in \Lambda_{-(n-1),(n-1)}$ . Para ello, necesitaremos el siguiente resultado auxiliar probado en [44, Teorema 1.3].

**Teorema 2.1.1** Sean  $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n} \subset (-\pi, \pi]$  tales que  $\theta_j \neq \theta_k$  si  $j \neq k$ ,  $\{y_j\}_{j=1}^{2n}$  números reales arbitrarios y consideremos el siguiente problema de interpolación: encontrar  $S_n(\theta) \in \mathcal{T}_n$  de forma que

$$S_n(\theta_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, 2n. \quad (2.1)$$

Entonces, tomando  $\gamma_n = \sum_{j=1}^{2n} \theta_j$  se tiene que

1. Si  $\gamma_n \neq k\pi$  para cualquier  $k$ , existe una única solución de (2.1) en  $\mathcal{T}_{n-1} \oplus \text{span}\{\cos n\theta\}$  y en  $\mathcal{T}_{n-1} \oplus \text{span}\{\sin n\theta\}$ .
2. Si  $\gamma_n = k\pi$  para algún  $k$  par, existe una única solución de (2.1) en  $\mathcal{T}_{n-1} \oplus \text{span}\{\sin n\theta\}$ .
3. Si  $\gamma_n = k\pi$  para algún  $k$  impar, existe una única solución de (2.1) en  $\mathcal{T}_{n-1} \oplus \text{span}\{\cos n\theta\}$ .

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente,

**Teorema 2.1.2** Sean  $\{x_k\}_{k=1}^n$   $n$  nodos distintos en  $[-1, 1]$  y  $f$  una función real definida en  $[-1, 1]$ . Denotemos por  $Q_n(f; x)$  al polinomio interpolador de  $f$  en los nodos  $\{x_k\}_{k=1}^n$ . Sean  $\{z_j\}_{j=1}^{2n} \subset \mathbb{T}$  los correspondientes  $2n$  nodos distintos según la Proposición 1.4.7 y  $\mathring{f} = f \circ J$ . Si denotamos por  $L_n(\mathring{f}; \cdot) \in \Lambda_{-(n-1),n}$  y por  $\hat{L}_n(\mathring{f}; \cdot) \in \Lambda_{-n,n-1}$  a los respectivos polinomios de Laurent interpolatorios de  $f$  asociados a los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$ , entonces  $L_n(\mathring{f}; z) = \hat{L}_n(\mathring{f}; z) = Q_n(f; x)$ , donde  $x = \cos \theta$  y  $z = e^{i\theta}$ .

**Demostración.**- Sean  $x_k = \cos \theta_k$ , con  $\theta_k \in (0, \pi)$  y  $\theta_{n+k} = -\theta_k$  para  $k = 1, \dots, n$ . Entonces, tenemos  $2n$  nodos distintos sobre  $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ , según el Teorema 2.1.1 como  $\gamma_n = \sum_{j=1}^{2n} \theta_j = 0$  existe un único polinomio trigonométrico real  $S_n(\theta) \in \mathcal{T}_{n-1} \oplus \text{span}\{\sin n\theta\}$  de manera que

$$S_n(\theta_j) = \mathring{f}(\theta_j), \quad j = 1, \dots, 2n. \quad (2.2)$$

Como  $S_n(-\theta)$  también pertenece  $\mathcal{T}_{n-1} \oplus \text{span}\{\sin n\theta\}$  y satisface (2.2), se sigue por la unicidad que  $S_n(\theta)$  es una función par. Entonces,  $S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos k\theta = \tilde{L}_n(z)$ , con  $z = e^{i\theta}$  y  $\tilde{L}_n(z) \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ . Dado que  $\tilde{L}_n(z_j) = S_n(\theta_j) = \mathring{f}(\theta_j) = \mathring{f}(z_j)$  para  $j = 1, \dots, 2n$  y  $Q_n(f; \cos \theta) = Q_n(f; \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})) \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$  satisface las mismas condiciones de interpolación, en virtud de la unicidad se sigue la prueba. ■

**Nota 2.1.3** De la prueba del Teorema 2.1.2 se observa que las otras posibilidades de elección  $p < n - 1$  ó  $q < n - 1$  son rechazadas.

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

---

Como consecuencia del Teorema 2.1.2 y de la relación entre las normas (1.57) se sigue que,

**Corolario 2.1.4** *Bajo las mismas hipótesis que el Teorema 2.1.2 se sigue que*

$$\|f - Q_n(f; \cdot)\|_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \| \mathring{f} - L_n(\mathring{f}; \cdot) \|_{\hat{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \| \mathring{f} - \hat{L}_n(\mathring{f}; \cdot) \|_{\hat{\mu}}.$$

Consideremos ahora el caso en que  $r + s = 1$ . Ahora, la situación es más sencilla que en el caso anterior dado que ahora trabajaremos con un número impar de nodos en  $\mathbb{T}$ , esto es  $2n - 1$ , y podemos considerar el subespacio  $\Lambda_{-(n-1), n-1}$ . Se tiene el siguiente,

**Teorema 2.1.5** *Sean  $r, s \in \{0, 1\}$  de forma que  $r + s = 1$  y consideremos el conjunto de  $n$  nodos distintos  $\{x_k\}_{k=1}^{n-1} \subset (-1, 1)$  y  $x_n = -1$  si  $r = 1$  o  $x_n = 1$  si  $s = 1$ . Sea  $f$  una función real sobre  $[-1, 1]$ ,  $\{z_j\}_{j=1}^{2n-1} \subset \mathbb{T}$  el conjunto de  $2n - 1$  nodos distintos dados por la Proposición 1.4.7 con  $\mathring{f} = f \circ J$ . Sea  $Q_n^{r,s}(f; \cdot)$  el polinomio interpolador de  $f$  en los nodos  $\{x_k\}_{k=1}^n$  y  $L_n^{r,s}(\mathring{f}; \cdot) \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$  el polinomio de Laurent de interpolación de  $f$  asociado a  $\{z_j\}_{j=1}^{2n-1}$ . Entonces,  $L_n^{r,s}(\mathring{f}; \cdot)$  tiene sus coeficientes reales y se tiene que  $Q_n^{r,s}(\mathring{f}; x) = L_n^{r,s}(\mathring{f}; z)$ , donde  $x = \cos \theta$  y  $z = e^{i\theta}$ .*

**Demostración.**- Tomando  $L_n^{r,s}(g; z) = \sum_{l=-n-1}^{n-1} a_l z^l$ , dado que  $L_n^{r,s}(\mathring{f}; 1/z) \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$  es también solución del problema de interpolación se sigue  $L_n^{r,s}(\mathring{f}; z) = L_n^{r,s}(\mathring{f}; 1/z)$ , lo que implica  $a_k = a_{-k}$  para  $k = 0, \dots, n - 1$ . Entonces,

$$\begin{aligned} L_n^{r,s}(g; z) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (z^k + z^{-k}) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos k\theta \\ &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k T_k(x), \end{aligned}$$

donde  $T_k(x) = \cos(k \arccos x) = \cos k\theta$  es el  $k$ -ésimo polinomio de Chebyshev de primera especie. Por otro lado, sea  $x_k = \cos \theta_k$  y  $\theta_{n+k} = -\theta_k$  para  $k = 1, \dots, n - 1$ , con  $\theta_n = 0$  si  $r = 1$  o  $\theta_n = \pi$  si  $s = 1$ . Entonces, tenemos  $2n - 1$  nodos distintos en  $[-\pi, \pi]$  de manera que existe un único polinomio trigonométrico real  $S_n^{r,s} \in \mathcal{T}_{n-1}$  de forma que  $S_n^{r,s}(\theta_j) = \mathring{f}(e^{i\theta_j}) = f(\cos \theta_j)$ , para  $j = 1, \dots, 2n - 1$ . Además, como  $S_n^{r,s}(-\theta_j) = \mathring{f}(e^{-i\theta_j}) = \mathring{f}(e^{i\theta_j}) = f(\cos \theta_j)$ , se tiene en virtud de la unicidad que  $S_n^{r,s}$  es una función par y entonces podemos escribir  $S_n^{r,s}(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{a}_k \cos k\theta$ . De aquí y de la unicidad se sigue la prueba. ■

**Corolario 2.1.6** *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.1.5 se tiene que*

$$\|f - Q_n^{r,s}(f; \cdot)\|_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \| \mathring{f} - L_n^{r,s}(\mathring{f}; \cdot) \|_{\hat{\mu}}.$$

Finalmente, consideremos el caso  $r = s = 1$ .

**Teorema 2.1.7** *Sean  $\{x_k\}_{k=1}^{n-2} \subset (-1, 1)$  un conjunto de  $n - 2$  nodos distintos,  $x_{n-1} = -1$  y  $x_n = 1$ , sean  $\{z_j\}_{j=1}^{2n-2}$  los correspondientes  $2n - 2$  nodos distintos sobre  $\mathbb{T}$  dados por la Proposición 1.4.7,  $f$  una función real sobre  $[-1, 1]$  y  $\mathring{f} = f \circ J$ . Sea  $Q_n(f; \cdot)$  el polinomio*

interpolador de  $f$  asociado a  $\{x_k\}_{k=1}^n$  y  $L_n(\mathring{f}; \cdot) \in \Lambda_{-(n-2), n-1}$  el polinomio de Laurent de interpolación de  $\mathring{f}$  asociado a  $\{z_j\}_{j=1}^{2n-2}$ . Entonces, se sigue que

$$Q_n(f; x) = Q_n(f; \cos \theta) = \frac{1}{2} \left[ L_n(\mathring{f}; z) + L_n(\mathring{f}; 1/z) \right],$$

donde  $x = \cos \theta$  y  $z = e^{i\theta}$ .

**Demostración.**- Dado que  $L_n(\mathring{f}; z) \in \Lambda_{-(n-2), n-1}$ , entonces  $L_n(\mathring{f}; 1/z) \in \Lambda_{-(n-1), n-2}$  y se tiene que  $L_n(\mathring{f}; 1/z_j) = L_n(\mathring{f}; \bar{z}_j) = \mathring{f}(\bar{z}_j) = \mathring{f}(z_j)$ , para  $j = 1, \dots, 2n-2$ . Definimos  $H_n(z) := \frac{1}{2} \left[ L_n(\mathring{f}; z) + L_n(\mathring{f}; 1/z) \right]$ . Entonces,  $H_n \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$ ,  $H_n(z) = H_n(1/z)$  y  $H_n(z_j) = \mathring{f}(z_j)$  para  $j = 1, \dots, 2n-2$ . Si escribimos  $H_n(z) = \sum_{l=-(n-1)}^{n-1} a_l z^l$ , entonces  $a_{-k} = a_k$  para  $k = 1, \dots, n-1$ . Esto es, para  $z = e^{i\theta}$  y  $x = \cos(\theta)$ ,

$$\begin{aligned} H_n(z) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (z^k + z^{-k}) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos k\theta \\ &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k T_k(x) = \tilde{Q}_n(x) \in \mathbb{P}_{n-1}. \end{aligned}$$

Como  $\tilde{Q}_n(x_k) = H_n(z_k) = \mathring{f}(z_k) = f(\cos \theta_k) = f(x_k)$  para  $k = 1, \dots, n$ , queda probar que los coeficientes  $a_k$  son reales, para  $k = 1, \dots, n$ . Para ello, consideramos los  $(2n-2)$  nodos distintos  $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n-2}$  en  $[-\pi, \pi]$  como sigue:  $\{\theta_k\}_{k=1}^{n-2} \subset (0, \pi)$ ,  $\theta_{n+k-2} = -\theta_k$ ,  $\theta_{2n-3} = 0$ ,  $\theta_{2n-2} = \pi$ . Haciendo uso del Teorema 2.1.1 se ve que  $\gamma_{n+1} = \sum_{j=1}^{2n-2} \theta_j = \pi$ . Por tanto, existe un único polinomio trigonométrico real  $S_n$  de la forma

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n-2} \left( \tilde{a}_k \cos k\theta + \tilde{b}_k \sin k\theta \right) + \tilde{a}_{n-1} \cos(n-1)\theta$$

tal que  $S_n(\theta_j) = \mathring{f}(e^{i\theta_j}) = \mathring{f}(z_j)$ , para  $j = 1, \dots, 2n-2$ . Ahora,  $S_n(-\theta)$  es un polinomio trigonométrico de la misma forma satisfaciendo las mismas condiciones de interpolación. Entonces,  $S_n(\theta) = \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{n-2} \tilde{a}_k \cos k\theta$ ,  $\tilde{a}_k \in \mathbb{R}$  para  $k = 1, \dots, n-2$ . Por la unicidad se sigue que  $a_k = \tilde{a}_k \in \mathbb{R}$  para  $k = 0, \dots, n-2$ . ■

**Corolario 2.1.8** *Bajo las mismas hipótesis que en el Teorema 2.1.7 se sigue que*

$$\|f - Q_n(f; \cdot)\|_{\mu} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| \mathring{f} - L_n(\mathring{f}; \cdot) \|_{\hat{\mu}}.$$

**Demostración.**- Se tiene que  $\|f - Q_n(f; \cdot)\|_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \| \mathring{f} - H_n \|_{\hat{\mu}}$ , con  $H_n(z) = \frac{1}{2} \left[ L_n(\mathring{f}; z) + L_n(\mathring{f}; 1/z) \right]$ . Tomando  $\hat{L}_n(\mathring{f}; z) = L_n(\mathring{f}; 1/z)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \|f - Q_n(f; \cdot)\|_{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \frac{\mathring{f} + \hat{L}_n(\mathring{f}; \cdot)}{2} - \frac{L_n(\mathring{f}; \cdot) + \hat{L}_n(\mathring{f}; \cdot)}{2} \right\|_{\hat{\mu}} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \| \mathring{f} - L_n(\mathring{f}; \cdot) \|_{\hat{\mu}} + \| \mathring{f} - \hat{L}_n(\mathring{f}; \cdot) \|_{\hat{\mu}} \right]. \end{aligned}$$

---

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

---

La demostración se concluye dado que  $\| \hat{f} - L_n(\hat{f}; \cdot) \|_{\hat{\mu}} = \| \hat{f} - \hat{L}_n(\hat{f}; \cdot) \|_{\hat{\mu}}$ . ■

Terminaremos esta sección con un resultado de convergencia en la norma  $L_2^{\hat{\mu}}$ . Con este objetivo necesitamos la siguiente generalización del Teorema de Erdős-Turán en la circunferencia unidad, (véase [46]).

**Teorema 2.1.9** [Teorema de Erdős-Turán para la circunferencia unidad] Sea  $\hat{\mu}$  una medida sobre  $[-\pi, \pi]$  (o sobre  $\mathbb{T}$ ) y sea  $\hat{f}$  una función acotada en  $[-\pi, \pi]$  tal que  $\hat{f}\hat{\mu}$  sea integrable en  $[-\pi, \pi]$ . Para cada  $n \geq 1$ , sean  $\{z_{j,n}\}_{j=1}^{n+1}$  los ceros del  $(n+1)$ -ésimo polinomio para-ortogonal  $B_{n+1}(z, \tau_{n+1})$  con respecto a  $\hat{\mu}$  y  $\tau_{n+1} \in \mathbb{T}$ . Denotemos por  $R_n(\hat{f}; \cdot)$  el interpolante en  $\Lambda_{-p(n), q(n)}$  a  $\hat{f}$  en los nodos  $\{z_{j,n}\}_{j=1}^{n+1}$ , donde  $p(n) + q(n) = n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty$ . Entonces,  $R_n(\hat{f}; \cdot)$  converge a  $\hat{f}$  en la norma  $L_2^{\hat{\mu}}$ , esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} \left| \hat{f}(z) - R_n(\hat{f}; z) \right|^2 \hat{\mu}(\theta) d\theta = 0, \quad z = e^{i\theta}.$$

Finalmente, de los Corolarios 2.1.4, 2.1.6 y 2.1.8 y a partir del Teorema 2.1.9 podemos concluir el siguiente

**Teorema 2.1.10** Sea  $\mu$  una función peso sobre  $[-1, 1]$  y sea  $f$  una función acotada sobre  $[-1, 1]$  tal que  $f\mu$  sea integrable en  $[-1, 1]$ . Para cada  $n \geq 1$ , sea  $Q_n^{r,s}(f; x) \in \mathbb{P}_{n-1}$  el polinomio que interpola a  $f$  en los nodos que son las partes reales de los ceros de una familia uniparamétrica de polinomios para-ortogonales  $\{B_n(z, \tau_n)\}_{n \geq 0}$  asociadas a  $\hat{\mu}$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| f - Q_n^{r,s}(f; \cdot) \|_{\mu}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |f(x) - Q_n^{r,s}(f; x)|^2 \mu(x) dx = 0.$$

**Nota 2.1.11** Cuando  $r = s = 0$  en el Teorema 2.1.10 obtenemos el clásico Teorema de Erdős-Turán en relación a la interpolación en los nodos Gaussianos para  $\mu$ . Con este resultado se extiende el teorema de Erdős-Turán para los nodos de las fórmulas de Gauss-Radau y Gauss-Lobatto aprovechando de nuevo la conexión entre la circunferencia unidad y el intervalo mediante la transformación de Joukowski.

**Nota 2.1.12** Obsérvese que se ha demostrado que las fórmulas tipo-Gauss convergen.

### 2.1.2. Reglas de integración producto.

#### Aspectos Algebraicos

Consideremos fórmulas de cuadratura para la integral

$$J_{\sigma}(f) = \int_{-1}^1 f(x)\sigma(x)dx, \tag{2.3}$$

donde  $\sigma$  es Lebesgue integrable y  $f$  es Riemann integrable.  $\sigma$  y  $f$  pueden tomar valores complejos. La integral (2.3) será aproximada por medio de las llamadas *reglas de integración producto* (véase, por ejemplo [98, 99, 107]) de la forma

$$J_n^{\sigma}(f) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \tag{2.4}$$

donde  $\{x_k\}_{k=1}^n$  es un conjunto de nodos prefijados distintos entre sí en  $[-1, 1]$  y donde los pesos  $A_k$  son determinados requiriendo que (2.4) integre exactamente cualquier polinomio en  $\mathbb{P}_{n-1}$ , o equivalentemente

$$J_n^\sigma(f) = I_\sigma(Q_n(f; \cdot)), \quad (2.5)$$

con  $Q_n(f; x)$  el único polinomio  $\mathbb{P}_{n-1}$  interpolando a  $f$  en los nodos  $\{x_k\}_{k=1}^n$ .

como vimos en la sección anterior, la bondad de estas fórmulas depende de la elección de los nodos (véase [107]). En este sentido, como consecuencia de los resultados anteriores cuando escogemos  $\{x_k\}_{k=1}^n$  como los ceros del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto a una apropiada función peso  $\mu$ , la convergencia puede ser asegurada en la clase de las funciones Riemann integrables, (véase también [107, Teorema 1]). En esta sección proporcionaremos un resultado más general donde algunos nodos están localizados en  $\pm 1$ , con una demostración más corta y sencilla. Los resultados obtenidos en la sección anterior serán esenciales para este objetivo.

Sea  $\sigma$  una función compleja y consideremos  $\hat{\sigma}(\theta) := \sigma(\cos \theta)|\sin \theta|$ . En primer lugar abordaremos el caso  $r = s = 0$ . Entonces, sean  $\{x_k\}_{k=1}^n$   $n$  nodos distintos sobre  $(-1, 1)$  y los correspondientes  $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$   $2n$  nodos sobre  $\mathbb{T}$  dados por Proposición 1.4.7. La integral (2.3) se transforma ahora en

$$I_{\hat{\sigma}}(\hat{f}) = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(e^{i\theta}) \hat{\sigma}(\theta) d\theta, \quad (2.6)$$

podemos considerar las siguientes reglas producto para  $I_{\hat{\sigma}}(\hat{f})$ :

$$I_{2n}^{\hat{\sigma}}(\hat{f}) = \sum_{j=1}^{2n} \hat{A}_j \hat{f}(z_j) = I_{\hat{\sigma}}(\hat{f}), \quad \forall \hat{f} \in \Lambda_{-n, n-1} \quad (2.7)$$

y

$$\tilde{I}_{2n}^{\hat{\sigma}}(\hat{f}) = \sum_{j=1}^{2n} \tilde{\hat{A}}_j \hat{f}(z_j) = I_{\hat{\sigma}}(\hat{f}), \quad \forall \hat{f} \in \Lambda_{-(n-1), n}. \quad (2.8)$$

Nótese que  $I_{2n}^{\hat{\sigma}}(\hat{f}) = I_{\hat{\sigma}}(L_n(\hat{f}; \cdot))$  y que  $\tilde{I}_{2n}^{\hat{\sigma}}(\hat{f}) = I_{\hat{\sigma}}(\tilde{L}_n(\hat{f}; \cdot))$ , con  $L_n(\hat{f}; z) \in \Lambda_{-n, n-1}$ ,  $\tilde{L}_n(\hat{f}; z) \in \Lambda_{-(n-1), n}$ , los correspondientes polinomios de Laurent interpolatorios asociados a  $\hat{f}$  en  $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$ . Podemos probar la siguiente

**Proposición 2.1.13** *Sea  $\{x_k\}_{k=1}^n$  un conjunto de nodos prefijados distintos en  $(-1, 1)$ ,  $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$  los correspondientes  $2n$  nodos sobre  $\mathbb{T}$  dados por la Proposición 1.4.7 y sea  $J_n^\sigma(f)$  la regla de integración producto (2.4) para  $\sigma$  dada por (2.3). Entonces, para  $k = 1, \dots, n$  se sigue que*

$$A_k = \frac{\hat{A}_k + \hat{A}_{n+k}}{2} = \frac{\tilde{\hat{A}}_k + \tilde{\hat{A}}_{n+k}}{2}, \quad (2.9)$$

donde  $\{\hat{A}_j\}_{j=1}^{2n}$  y  $\{\tilde{\hat{A}}_j\}_{j=1}^{2n}$  son los pesos de  $I_{2n}^{\hat{\sigma}}(\hat{f})$  y  $\tilde{I}_{2n}^{\hat{\sigma}}(\hat{f})$  dados por (2.7) y (2.8), respectivamente.

**Demostración.**- Como  $J_n^\sigma(f) = J_\sigma(Q_n(f; \cdot))$ , siendo  $Q_n(f; \cdot) \in \mathbb{P}_{n-1}$  el polinomio interpolador de  $f$  en  $\{x_k\}_{k=1}^n$ , se sigue de la relación entre las integrales y el Teorema 2.1.2 que

$$J_n^\sigma(f) = J_\sigma(Q_n(f; \cdot)) = \frac{1}{2} I_{\hat{\sigma}}(L_n(\hat{f}; \cdot)) = \frac{1}{2} I_{\hat{\sigma}} \left( \sum_{j=1}^{2n} l_j(z) \hat{f}(z_j) \right),$$

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

donde  $\mathring{f} = f \circ J$  y  $l_j \in \Lambda_{-n, n-1}$  satisface  $l_j(z_k) = \delta_{j,k}$ . Entonces,

$$J_n^\sigma(f) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} I_{\mathring{\sigma}}(l_j) \mathring{f}(z_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} \mathring{A}_j \mathring{f}(z_j),$$

donde  $\mathring{A}_j = I_{\mathring{\sigma}}(l_j)$ . Finalmente, como  $z_{n+k} = \overline{z_k}$  y  $\mathring{f}(z_k) = \mathring{f}(\overline{z_k}) = f(x_k)$  para  $k = 1, \dots, n$ , podemos escribir

$$J_n^\sigma(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ \mathring{A}_k \mathring{f}(z_k) + \mathring{A}_{n+k} \mathring{f}(z_{n+k}) \right] = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mathring{A}_k + \mathring{A}_{n+k}}{2} \right) f(x_k).$$

La segunda igualdad en (2.9) se sigue del Teorema 2.1.2, teniendo en cuenta que  $Q_n(f; x) = \tilde{L}_n(\mathring{f}; z)$  siendo  $\tilde{L}_n(\mathring{f}; \cdot) \in \Lambda_{-(n-1), n}$  el polinomio de Laurent que interpola a  $\mathring{f}$  en  $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$ . Esto concluye la prueba.  $\blacksquare$

Estudiaremos ahora el caso  $r + s = 1$ . Sean  $n$  nodos distintos  $\{x_k\}_{k=1}^{n-1} \subset (-1, 1)$  y  $x_n = -1$  si  $r = 1$ , ó  $x_n = 1$  si  $s = 1$ , los correspondientes  $\{z_j\}_{j=1}^{2n-1} \subset \mathbb{T}$  dados por la Proposición 1.4.7, y consideremos la siguiente regla de integración producto para  $\mathring{\sigma}$  dada por (2.6):

$$I_{2n-1}^{\mathring{\sigma}}(\mathring{f}) = \sum_{j=1}^{2n-1} \mathring{A}_j \mathring{f}(z_j) = I_{\mathring{\sigma}}(\mathring{f}), \quad \forall \mathring{f} \in \Lambda_{-(n-1), n-1}. \quad (2.10)$$

Entonces, procediendo como en Proposición 2.1.13 se prueba la siguiente

**Proposición 2.1.14** *Bajo las condiciones anteriores, sea  $J_n^\sigma(f) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$  la regla de integración producto para  $\sigma$  basada en los nodos  $\{x_k\}_{k=1}^n$ , con  $r, s \in \{0, 1\}$  y  $r + s = 1$ . Entonces,*

$$A_k = \frac{\mathring{A}_k + \mathring{A}_{n-1+k}}{2}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad A_n = \frac{\mathring{A}_{2n-1}}{2},$$

y donde los  $\{\mathring{A}_j\}_{j=1}^{2n-1}$  son los pesos de la regla de integración producto dada por (2.10).

Finalmente, analizaremos el caso  $r = s = 1$ .

**Proposición 2.1.15** *Sean  $\{x_k\}_{k=1}^{n-2} \subset (-1, 1)$  un conjunto de  $n-2$  nodos distintos,  $x_{n-1} = -1$  y  $x_n = 1$ , sean  $\{z_j\}_{j=1}^{2n-2}$  los correspondientes  $2n-2$  nodos distintos sobre  $\mathbb{T}$  dados por la Proposición 1.4.7,  $f$  una función real sobre  $[-1, 1]$  y  $\mathring{f} = f \circ J$ . Sea  $J_n^\sigma(f) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$  la regla de integración producto para  $\sigma$  dada por (2.3), basadas en los nodos  $\{x_k\}_{k=1}^n$ , y consideremos las dos siguientes fórmulas para  $\mathring{\sigma}$*

$$\begin{aligned} I_{2n-2}^{\mathring{\sigma}}(\mathring{f}) &= \sum_{j=1}^{2n-2} \mathring{A}_j \mathring{f}(z_j) = I_{\mathring{\sigma}}(\mathring{f}), \quad \forall \mathring{f} \in \Lambda_{-(n-2), (n-1)}, \\ \tilde{I}_{2n-2}^{\mathring{\sigma}}(\mathring{f}) &= \sum_{j=1}^{2n-2} \tilde{\mathring{A}}_j \mathring{f}(z_j) = I_{\mathring{\sigma}}(\mathring{f}), \quad \forall \mathring{f} \in \Lambda_{-(n-1), n-2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{\mathring{A}_k + \mathring{A}_{n-2+k}}{2} = \frac{\tilde{\mathring{A}}_k + \tilde{\mathring{A}}_{n-2+k}}{2}, \quad k = 1, \dots, n-2, \\ A_{n-1} &= \frac{\mathring{A}_{2n-3}}{2} = \frac{\tilde{\mathring{A}}_{2n-3}}{2}, \\ A_n &= \frac{\mathring{A}_{2n-2}}{2} = \frac{\tilde{\mathring{A}}_{2n-2}}{2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

**Demostración.**- Sea  $J_n^\sigma(f) = J_\sigma(Q_n(f; \cdot))$  siendo  $Q_n(f; x) \in \mathbb{P}_{n-1}$  el polinomio interpolador de  $f$  asociado a  $\{x_k\}_{k=1}^n$ . Entonces por el Teorema 2.1.7,  $Q_n(f; x) = Q_n(f; \cos \theta) = \frac{1}{2} [L_n(\mathring{f}; z) + L_n(\mathring{f}; 1/z)]$ , donde  $L_n(\mathring{f}; \cdot) \in \Lambda_{-(n-1), n}$  es el polinomio de Laurent que interpola a  $\mathring{f}$  en  $\{z_j\}_{j=1}^{2n-2}$ . Es fácil verificar que  $I_{\hat{\sigma}}(L_n(\mathring{f}; z)) = I_{\hat{\sigma}}(L_n(\mathring{f}; 1/z))$ , se sigue que  $J_\sigma(Q_n(f; \cdot)) = \frac{1}{2} I_{\hat{\sigma}}(L_n(\mathring{f}; \cdot))$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} J_n^\sigma(f) &= \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = J_\sigma(Q_{n-1}(f; \cdot)) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n-2} I_{\hat{\sigma}}(l_j) \mathring{f}(z_j) \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\mathring{A}_k + \mathring{A}_{n-2+k}}{2} \mathring{f}(z_k) + \frac{\mathring{A}_{2n-3}}{2} \mathring{f}(z_{2n-3}) + \frac{\mathring{A}_{2n-2}}{2} \mathring{f}(z_{2n-2}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\mathring{A}_k + \mathring{A}_{n-2+k}}{2} f(x_k) + \frac{\mathring{A}_{2n-3}}{2} f(x_{n-1}) + \frac{\mathring{A}_{2n-2}}{2} f(x_n), \end{aligned}$$

obteniendo las primeras igualdades de (2.12). Las segundas procediendo como en la demostración del Teorema 2.1.7. ■

Sin embargo, cuando trasladamos a la circunferencia unidad nuestro problema, por las proposiciones anteriores, vemos que para computar los pesos en una regla producto para  $\sigma$  en  $[-1, 1]$ , debemos computar los pesos de una fórmula de cuadratura para  $\hat{\sigma}(\theta) = \sigma(\cos \theta) |\sin \theta|$  en  $\mathbb{T}$ , que posee el doble de pesos. Este sobre esfuerzo computacional se puede eliminar cuando  $\sigma$  es real. En efecto,

**Proposición 2.1.16** Sean  $r, s \in \{0, 1\}$  fijos,  $\{z_j\}_{j=1}^{2n-r-s}$   $2n - r - s$  nodos distintos sobre  $\mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  tal que  $z_{n-r-s+k} = \overline{z_k}$  para  $k = 1, \dots, n - r - s$ . Cuando  $s + r = 1$ ,  $z_{2n-1} = -1$  si  $r = 1$  y  $z_{2n-1} = 1$  si  $s = 1$  y cuando  $s = r = 1$ ,  $z_{2n-3} = -1$  y  $z_{2n-2} = 1$ . Sea  $\hat{\sigma}(\theta)$  una función Lebesgue integrable real y simétrica en  $[-\pi, \pi]$  y consideremos

$$I_{2n-r-s}^{r,s}(\mathring{f}) = \sum_{j=1}^{2n-r-s} \mathring{A}_j^{r,s} \mathring{f}(z_j) = I_{\hat{\sigma}}(\mathring{f}) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathring{f}(e^{i\theta}) \hat{\sigma}(\theta) d\theta, \quad \forall \mathring{f} \in \Lambda_{-(n-1), n-r-s}.$$

Entonces,

1.  $\mathring{A}_{n+k-r-s}^{r,s} = \overline{\mathring{A}_k^{r,s}}$  para  $k = 1, \dots, n - r - s$  si  $r = s$ . Es más, cuando  $r = s = 1$   $\mathring{A}_{2n-3}^{1,1}, \mathring{A}_{2n-2}^{1,1} \in \mathbb{R}$ .
2.  $\mathring{A}_j^{r,s} \in \mathbb{R}$  para  $j = 1, \dots, 2n - 1$  si  $r \neq s$ .

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

**Demostración.-** Nos ocuparemos de demostrar 2; la demostración del apartado 1 es análoga. Del Teorema 2.1.5,  $I_{\tilde{\sigma}}^{r,s}(f) = I_{\tilde{\sigma}}(L_n(\mathring{f}; \cdot))$  siendo  $L_n(\mathring{f}; z) \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$  el polinomio de Laurent que interpola a  $\mathring{f}$  en  $\{z_j\}_{j=1}^{2n-1}$ . Es decir,  $L_n(\mathring{f}; z) = \sum_{j=1}^{2n-1} l_j(z) \mathring{f}(z_j)$  con  $l_j \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$  y  $l_j(z_k) = \delta_{j,k}$ , concretamente

$$l_j(z) = \frac{z_j^{n-1} \tilde{Q}_{2n-1}(z)}{\tilde{Q}'_{2n-1}(z_j) z^{n-1} (z - z_j)},$$

donde  $\tilde{Q}_{2n-1}(z) = \prod_{j=1}^{2n-1} (z - z_j) \in \mathbb{P}_{2n-1}$  tiene coeficientes reales. Entonces, para  $j = 1, \dots, 2n-1$ ,

$$\mathring{A}_j^{r,s} = I_{\tilde{\sigma}}(l_j) = \frac{z_j^{n-1}}{\tilde{Q}'_{2n-1}(z_j)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{Q}_{2n-1}(z)}{z^{n-1} (z - z_j)} \tilde{\sigma}(\theta) d\theta, \quad z = e^{i\theta}.$$

Entonces, como  $z_{n-1+k} = \bar{z}_k$  para  $k = 1, \dots, n-1$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \overline{\mathring{A}_k^{r,s}} &= \frac{z_k^{n-1}}{\tilde{Q}'_{2n-1}(z_k)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{Q}_{2n-1}(z)}{z^{n-1} (\bar{z} - \bar{z}_k)} \tilde{\sigma}(\theta) d\theta \\ &= \frac{z_{n-1+k}^{n-1}}{\tilde{Q}'_{2n-1}(z_{n-1+k})} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{Q}_{2n-1}(1/z)}{(z^{-1})^{n-1} (z^{-1} - z_{n-1+k})} \tilde{\sigma}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por tanto, si realizamos el cambio de variables  $\theta = -t$  y tenemos en cuenta que  $\sigma$  es simétrica,  $\tilde{\sigma}(-\theta) = \tilde{\sigma}(\theta)$ , concluimos que  $\overline{\mathring{A}_k^{r,s}} = \mathring{A}_{n-1+k}^{r,s}$  para  $k = 1, \dots, n-1$ . Además, como  $z_{2n-1} \in \{\pm 1\}$ , se deduce que  $\mathring{A}_{2n-1}^{r,s} \in \mathbb{R}$ . Veamos ahora que  $\mathring{A}_j^{r,s} \in \mathbb{R}$ . En efecto, escribiendo  $z_j = e^{i\theta_j}$  para  $j = 1, \dots, 2n-1$ , considerando el conjunto de  $2n-2$  nodos  $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n-2} \subset (-\pi, \pi)$  con  $\theta_{2n-1} = -\pi$  si  $r = 1$ , ó  $\theta_{2n-1} = \pi$  si  $s = 1$  y satisfaciendo  $\theta_{n-1+k} = -\theta_k$  para  $k = 1, \dots, n-1$ , entonces existe un polinomio trigonométrico real  $S_n \in \mathcal{T}_{n-1}$  tal que  $S_n(\theta_j) = \mathring{f}(z_j)$ , para  $j = 1, \dots, 2n-1$ . Ahora,  $S_n(\theta) = \sum_{j=1}^{2n-1} S_j(\theta) \mathring{f}(z_j)$  con  $S_j \in \mathcal{T}_{n-1}$  y tal que  $S_j(\theta_k) = \delta_{j,k}$ . En virtud de la unicidad se sigue que  $S_n(\theta) = L_n(\mathring{f}; e^{i\theta})$  y consecuentemente,  $\mathring{A}_j^{r,s} = I_{\tilde{\sigma}}(S_j) \in \mathbb{R}$  para  $j = 1, \dots, 2n-1$ , puesto que  $S_j$  y  $\tilde{\sigma}$  son reales. ■

De las Proposiciones 2.1.13-2.1.16 se deduce el siguiente

**Corolario 2.1.17** Sean  $r, s \in \{0, 1\}$  fijos y consideremos el conjunto de  $n$  nodos distintos  $\{x_k\}_{k=1}^n$ . Supongamos que  $\sigma$  es una función real Lebesgue integrable en  $[-1, 1]$  y sea

$$J_n^{r,s}(f) = \sum_{k=1}^n A_k^{r,s} f(x_k) = J_{\sigma}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sigma(x) dx, \quad \forall f \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Entonces, si  $\{\mathring{A}_j\}_{j=1}^{2n-r-s}$  denota el conjunto de pesos de la cuadratura dada en Proposición 2.1.16, se tiene que

$$\begin{aligned} A_k^{r,s} &= \Re \left[ \mathring{A}_k^{r,s} \right], \quad \forall k = 1, \dots, n-r-s, \\ A_n^{r,s} &= \frac{\mathring{A}_{2n-1}^{r,s}}{2} \in \mathbb{R} \quad \text{si } r+s=1, \\ A_{n-1}^{1,1} &= \frac{A_{2n-3}^{1,1}}{2} \in \mathbb{R}, \quad A_{n-1}^{1,1} = \frac{\mathring{A}_{2n-3}^{1,1}}{2} \in \mathbb{R} \quad \text{si } r=s=1. \end{aligned} \quad (2.14)$$



Veamos que los pesos de la regla  $I_{2n-2}^{1,1}(\mathring{f})$  en Proposición 2.1.16 son de hecho reales.

**Proposición 2.1.18** Sean  $\{z_j\}_{j=1}^{2n-4}$  un conjunto de  $2n - 4$  nodos distintos en  $\mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  tales que  $z_{n-2+k} = \bar{z}_k$  para  $k = 1, \dots, n-2$ ,  $z_{2n-3} = -1$  y  $z_{2n-2} = 1$ , y sea  $\mathring{\sigma}$  una función integrable Lebesgue real y simétrica sobre  $[-\pi, \pi]$  y  $I_{\mathring{\sigma}}(\mathring{f})$  dada por (2.6). Tomando

$$I_{2n-2}^{\mathring{\sigma}}(\mathring{f}) = \sum_{j=1}^{2n-2} \mathring{A}_j \mathring{f}(z_j) = I_{\mathring{\sigma}}(\mathring{f}), \quad \forall \mathring{f} \in \Lambda_{-(n-2), n-1},$$

y

$$\tilde{I}_{2n-2}^{\mathring{\sigma}}(\mathring{f}) = \sum_{j=1}^{2n-2} \tilde{\mathring{A}}_j \mathring{f}(z_j) = I_{\mathring{\sigma}}(\mathring{f}), \quad \forall \mathring{f} \in \Lambda_{-(n-1), n-2},$$

entonces,  $\mathring{A}_j = \tilde{\mathring{A}}_j \in \mathbb{R}$ , para todo  $j = 1, \dots, 2n-2$ .

**Demostración.**- Como  $\mathring{\sigma}$  es real y simétrica, existe  $\sigma$  sobre  $[-1, 1]$  tal que  $\mathring{\sigma}(\theta) = \sigma(\cos \theta) |\sin \theta|$ . Para  $k = 1, \dots, n-2$ , tomamos  $z_k = e^{i\theta_k}$  con  $\theta_k \in (0, \pi)$ ,  $\theta_i \neq \theta_j$  si  $i \neq j$  y definimos  $x_k = \cos \theta_k$ ,  $x_{n-1} = -1$  y  $x_n = 1$ . Tenemos  $n$  nodos distintos sobre  $[-1, 1]$  de manera que para  $J_\sigma(f)$  dada por (2.3) se puede construir la correspondiente regla producto de  $n$  nodos,

$$J_n^\sigma(f) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = J_\sigma(f), \quad \forall f \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Tomemos  $\hat{I}_{2n-2}^{\mathring{\sigma}}(\mathring{f}) = \sum_{j=1}^{2n-2} \hat{A}_j \mathring{f}(z_j)$ , donde  $\hat{A}_{2n-3} = 2A_{n-1}$ ,  $\hat{A}_{2n-2} = 2A_n$  y  $\hat{A}_k = A_k = \hat{A}_{n-2+k}$ , para  $k = 1, \dots, n$ . Ahora, comprobaremos el dominio de validez de la fórmula de cuadratura. Para ello, tomando  $l$  con  $-(n-1) \leq l \leq n-1$ , y  $z = e^{i\theta}$ , tenemos

$$\hat{I}_{2n-2}^{\mathring{\sigma}}(z^l) = \sum_{j=1}^{2n-2} \hat{A}_j z_j^l = 2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-2} A_k (z_k^l + \bar{z}_k^l) + A_{n-1} (-1)^l + A_n \right].$$

Considerando para  $n \geq 0$  el  $n$ -ésimo polinomio de Chebyshev de primera especie  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ , podemos escribir

$$\hat{I}_{2n-2}^{\mathring{\sigma}}(z^l) = 2 \left[ \sum_{k=1}^{n-2} A_k T_{|l|}(x_k) + A_{n-1} T_{|l|}(-1) + A_n T_{|l|}(1) \right] = 2J_\sigma(T_{|l|}(x)).$$

Por otro lado, como  $\mathring{\sigma}(-\theta) = \mathring{\sigma}(\theta)$ ,

$$\begin{aligned} I_{\mathring{\sigma}}(z^l) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{il\theta} \mathring{\sigma}(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(l\theta) \mathring{\sigma}(\theta) d\theta = 2 \int_{-1}^1 T_{|l|}(x) \sigma(x) dx \\ &= 2J_\sigma(T_{|l|}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se sigue que  $I_{2n-2}^{\mathring{\sigma}}(z^l) = I_{\mathring{\sigma}}(z^l)$  para  $-(n-1) \leq l \leq n-1$ , o equivalentemente,  $I_{2n-2}^{\mathring{\sigma}}(L) = I_{\mathring{\sigma}}(L)$  para todo  $L \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$ . Por tanto,  $\mathring{A}_j = \tilde{\mathring{A}}_j = \hat{A}_j$  para  $j = 1, \dots, 2n-2$  y la prueba se concluye. ■

Finalmente, veremos cuando los pesos de la fórmula  $I_{2n}^{0,0}(\mathring{f})$  en Proposición 2.1.16 son también reales.

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

**Proposición 2.1.19** Sea  $\hat{\sigma}$  una función Lebesgue integrable real y simétrica sobre  $[-\pi, \pi]$ ,  $I_{\hat{\sigma}}(f)$  dada por (2.6) y  $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$  un conjunto de  $2n$  nodos distintos sobre  $\mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  de forma que  $\overline{z_k} = z_{n+k}$  para  $k = 1, \dots, n$ . Consideremos  $I_{2n}^{\hat{\sigma}}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \hat{A}_j f(z_j)$  tal que  $I_{2n}(L) = I_{\hat{\sigma}}(L)$  para  $L \in \Lambda_{-(n-1), n}$ . Entonces, los pesos  $\{\hat{A}_j\}_{j=1}^{2n}$  son reales, si y solo si,  $I_{\hat{\sigma}}(z^{-n} \tilde{Q}_{2n}) = 0$ , donde  $\tilde{Q}_{2n}(z) = \prod_{j=1}^{2n} (z - z_j)$ .

**Demostración.**- De la Proposición 2.1.16 sabemos que  $\overline{\hat{A}_j} = \hat{A}_{n+j}$  para  $j = 1, \dots, n$  y

$$\hat{A}_j = I_{\hat{\sigma}}(l_j), \quad l_j(z) = \frac{z_j^{n-1} \tilde{Q}_{2n}(z)}{\tilde{Q}'_{2n}(z_j) z^{n-1} (z - z_j)} \in \Lambda_{-(n-1), n}, \quad j = 1, \dots, 2n. \quad (2.16)$$

Considerando  $\overline{I_{2n}(f)} = \sum_{j=1}^{2n} \overline{\hat{A}_j} f(z_j)$ , entonces

$$\begin{aligned} \overline{I_{2n}(z^k)} &= \sum_{j=1}^{2n} \overline{\hat{A}_j} z_j^k = \sum_{j=1}^{2n} \hat{A}_j z_j^{-k} = \int_{-\pi}^{\pi} z^{-k} \hat{\sigma}(\theta) d\theta \\ &= I_{\hat{\sigma}}(z^k), \quad z = e^{i\theta}, \quad -n \leq k \leq n-1, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\overline{\hat{A}_j} = I_{\hat{\sigma}}(\tilde{l}_j), \quad \tilde{l}_j(z) = \frac{z_j^n \tilde{Q}_{2n}(z)}{\tilde{Q}'_{2n}(z_j) z^n (z - z_j)} \in \Lambda_{-n, n-1}, \quad j = 1, \dots, 2n. \quad (2.17)$$

La prueba sigue de (2.16)-(2.17) dado que,

$$\begin{aligned} \Im(\hat{A}_j) &= \frac{z_j^{n-1}}{2i \tilde{Q}'_{2n}(z_j)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{z_j}{z}\right) \frac{\tilde{Q}_{2n}(z)}{z^{n-1} (z - z_j)} \hat{\sigma}(\theta) d\theta \\ &= \frac{z_j^{n-1}}{2i \tilde{Q}'_{2n}(z_j)} \int_{-\pi}^{\pi} z^{-n} \tilde{Q}_{2n}(z) \hat{\sigma}(\theta) d\theta, \quad z = e^{i\theta}, \quad j = 1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

■

**Nota 2.1.20** Bajo las hipótesis de la Proposición 2.1.19, hemos visto que  $I_{2n}^{\hat{\sigma}}(f)$  tiene pesos reales, si y solo si, es exacta en  $\Lambda_{-n, n}$ . Esto es equivalente al hecho de que la fórmula de cuadratura  $I_n^{\sigma}(f)$  dada por (2.4) para  $J_{\sigma}(f)$  dada por (2.3), con  $\hat{\sigma}(\theta) = \sigma(\cos \theta) |\sin \theta|$ ,  $x_k = \Re(z_k)$  y  $A_k = \hat{A}_k$  para  $k = 1, \dots, n$ , integre exactamente cualquier polinomio en  $\mathbb{P}_n$ . Esta condición es equivalente a su vez a  $J_{\sigma}(R_n) = 0$ , siendo  $R_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$  (procediendo como en [86, pp. 101-102]). Así, haciendo uso de la transformada de Joukowsky se sigue que  $R_n(x) = z^{-n} \tilde{Q}_{2n}(z)$  con  $\tilde{Q}_{2n}(z)$  definida como en Proposición 2.1.19 y  $x = J(z)$ . Esto es,  $J_{\sigma}(R_n) = 0$  es equivalente a  $I_{\hat{\sigma}}(z^{-n} \tilde{Q}_{2n}) = 0$ .

### Estimaciones del error y convergencia

Hasta ahora hemos estudiado principalmente los aspectos algebraicos de las reglas producto  $J_{\sigma}(f)$  dadas por (2.3), imponiendo solamente que los nodos sean distintos. Pero nada se ha dicho sobre la bondad de estas fórmulas desde un punto de vista numérico,

esto es, estabilidad y convergencia. Para este propósito, realizamos una elección especial de los nodos. Sea  $\mu$  una función peso en  $[-1, 1]$  y consideremos la función peso  $\mu_{r,s}(x) = (1-x)^r(1+x)^s\mu(x)$  sobre  $[-1, 1]$ , ( $r, s \in \{0, 1\}$ ). Para  $n \geq 1$ , sean  $\{x_{k,n}^{r,s}\}_{k=1}^{n-r-s}$  los ceros del polinomio ortogonal de grado  $n$  con respecto a  $\mu_{r,s}$ , siendo  $x_{n,n}^{1,0} = x_{n-1,n}^{1,1} = -1$  y  $x_{n,n}^{0,1} = x_{n,n}^{1,1} = 1$ . Definamos

$$J_n^{r,s}(f) = \sum_{k=1}^n A_{k,n}^{r,s} f(x_{k,n}^{r,s}) = J_\sigma(f), \quad \forall f \in \mathbb{P}_{n-1}. \quad (2.18)$$

Entonces, podemos afirmar lo siguiente

**Teorema 2.1.21** *Sea  $\sigma$  una función integrable Lebesgue posiblemente compleja en  $[-1, 1]$  tal que*

$$\int_{-1}^1 \frac{|\sigma(x)|^2}{\mu(x)} dx < \infty, \quad (2.19)$$

con  $\mu$  una función peso sobre  $[-1, 1]$ . Entonces, bajo las anteriores condiciones se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n^{r,s}(f) = J_\sigma(f)$  para cualquier función  $f$  integrable Riemann en  $[-1, 1]$ .

**Demostración.**- Sea  $Q_n^{r,s}(f; x)$  el polinomio que interpola a  $f$  en los nodos  $\{x_{k,n}^{r,s}\}_{k=1}^n$ . Como  $J_n^{r,s}(f) = J_\sigma(Q_n^{r,s}(f; \cdot))$ , se sigue que  $J_\sigma(f) - J_n^{r,s}(f) = J_\sigma(f - Q_n^{r,s}(f; \cdot))$ . Por tanto,

$$|J_\sigma(f) - J_n^{r,s}(f)| \leq \int_{-1}^1 |f(x) - Q_n^{r,s}(f; x)| |\sigma(x)| dx \quad (2.20)$$

$$= \int_{-1}^1 |f(x) - Q_n^{r,s}(f; x)| \frac{|\sigma(x)|}{\sqrt{\mu(x)}} \sqrt{\mu(x)} dx. \quad (2.21)$$

Haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwartz y de (2.19) se sigue que, para una cierta constante  $M > 0$

$$|J_\sigma(f) - Q_n^{r,s}(f; \cdot)| \leq M \|f - Q_n^{r,s}(f; \cdot)\|_\mu,$$

y la prueba se sigue del Teorema 2.1.10. ■

El caso  $r = s = 0$  en Teorema 2.1.21 ha sido probado por Sloan y Smith en [107]. Aquí hemos presentado una demostración más corta y simple, extendiendo el resultado a la familia de reglas producto basados en los nodos de Gauss-Radau y Gauss-Lobatto, y basándonos de nuevo en la conexión entre la circunferencia y el intervalo. Por otro lado, haciendo uso del Teorema de Banach-Steinhaus (véase, por ejemplo [101, Teorema 2.5]) se sigue que existe una constante positiva  $M_{r,s}$  tal que para  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^n |A_{k,n}^{r,s}| \leq M_{r,s},$$

siendo  $\{A_{k,n}^{r,s}\}_{k=1}^n$  los coeficientes de las reglas producto definidas por (2.18). En [107] se da un paso más, bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.1.21, se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |A_{k,n}^{0,0}| f(x_{k,n}^{0,0}) = \int_{-1}^1 f(x) |\sigma(x)| dx. \quad (2.22)$$

En el siguiente resultado conseguimos las mismas conclusiones para las de Radau y Lobatto

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

**Teorema 2.1.22** Sea  $\{J_n^{r,s}(f)\}_{n=1}^{\infty}$  con  $r, s \in \{0, 1\}$  la familia de reglas de integración producto dada por (2.18) para  $\sigma$ , una función integrable Lebesgue sobre  $[-1, 1]$  tal que  $\int_{-1}^1 \frac{|\sigma(x)|^2}{\mu(x)} dx < +\infty$  y  $\mu$  una función peso sobre  $[-1, 1]$ . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |A_{k,n}^{r,s}| f(x_{k,n}^{r,s}) = \int_{-1}^1 f(x) |\sigma(x)| dx$$

para cualquier función integrable Riemann  $f$ .

**Demostración.** Analizaremos el caso  $r = s = 1$ , el resto de los casos son análogos. Por simplicidad en la notación, prescindiremos del uso de los super-índices en la notación. Por el Corolario 2.1.17 y la Proposición 2.1.18 se sigue que

$$A_{k,n} = \mathring{A}_{k,2n-2}, \quad k = 1, \dots, n, \quad A_{n-1,n} = \frac{\mathring{A}_{2n-3,2n-2}}{2}, \quad A_{n,n} = \frac{\mathring{A}_{2n-2,2n-2}}{2},$$

donde

$$I_{2n-2}^{\mathring{\sigma}}(\mathring{f}) = \sum_{j=1}^{2n-2} \mathring{A}_{j,2n-2} \mathring{f}(z_{j,2n-2}) = I_{\mathring{\sigma}}(\mathring{f}), \quad \forall \mathring{f} \in \Lambda_{-(n-2),n-1},$$

con  $\mathring{A}_{n-2+k,2n-2} = \mathring{A}_{k,2n-2}$  para  $k = 1, \dots, n$  y siendo  $\{z_{j,2n-2}\}_{j=1}^{2n-2}$  los correspondientes  $2n - 2$  nodos asociados sobre  $\mathbb{T}$ .

Sabemos que  $\{z_{j,2n-2}\}_{j=1}^{2n-2}$  son los ceros del polinomio para-ortogonal  $B_{2n-2}(z, -1)$  asociada  $\mu$ . Entonces, haciendo uso del Teorema 1.3.11 con  $p(n) = E \left[ \frac{n-1}{2} \right]$  y  $q(n) = n - 1 - p(n)$ , donde  $\mathring{f} = f \circ J$ , se sigue finalmente que,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |A_{k,n}| f(x_{k,n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^{n-2} \left| \mathring{A}_{k,2n-2} \right| \mathring{f}(z_{k,2n}) + \frac{\left| \mathring{A}_{2n-3,2n-2} \right|}{2} \mathring{f}(-1) + \frac{\left| \mathring{A}_{2n-2,2n-2} \right|}{2} \mathring{f}(1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2n-2} \left| \mathring{A}_{j,2n-2} \right| \mathring{f}(z_{j,2n-2}) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathring{f}(e^{i\theta}) |\mathring{\sigma}(\theta)| d\theta \\ &= \int_{-1}^1 f(x) |\sigma(x)| dx. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. ■

Nuestro siguiente objetivo es obtener sus correspondientes estimaciones del error. En primer lugar, nuevamente, consideramos la transformación de Joukowski  $x = J(z)$ . Tomando  $x = u + iv$  y  $z = \varrho e^{i\theta}$ , entonces la imagen de  $(\varrho \cos \theta, \varrho \sin \theta)$  es  $(\frac{1}{2}(\varrho + \varrho^{-1}) \cos \theta, \frac{1}{2}(\varrho - \varrho^{-1}) \sin \theta)$ . Por tanto, para  $0 < \varrho_1 < 1 < \varrho_2$ , los círculos  $\Gamma_{\varrho_i} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = \varrho_i\}$  para  $i = 1, 2$  se transformarán en las elipses

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\varrho_i} \equiv u &= \frac{1}{2} (\varrho_i + \varrho_i^{-1}) \cos \theta, & v &= \frac{1}{2} |\varrho_i - \varrho_i^{-1}| \sin \theta, \\ & -2\pi \leq \theta < 0 \text{ si } i = 1, & & 0 \leq \theta < 2\pi \text{ si } i = 2. \end{aligned}$$

Obsérvese que la suma de los semi-ejes de  $\mathcal{E}_{\varrho_i}$  son  $\varrho_1^{-1} > 1$  ó  $\varrho_2 > 1$  y que los focos de  $\mathcal{E}_{\varrho_i}$  están en  $\pm 1$  para  $i = 1, 2$ . Nótese que  $z = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ .

Sean  $\sigma$  una función integrable Lebesgue posiblemente compleja sobre  $[-1, 1]$ ,  $f$  una función integrable Riemann sobre  $[-1, 1]$ ,  $J_\sigma(f) = \int_{-1}^1 f(x)\sigma(x)dx$  y  $\mu$  una función peso sobre  $[-1, 1]$  de forma que  $\int_{-1}^1 \frac{|\sigma(x)|^2}{\mu(x)} dx < \infty$ . Para  $r, s \in \{0, 1\}$  fijos, sea  $J_n^{r,s}(f)$  dada por (2.18). Del Teorema 2.1.21 se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n^{r,s}(f) = J_\sigma(f)$ . Para  $n \geq 1$ , consideremos

$$\begin{aligned} R_n^{r,s}(f) &:= J_\sigma(f) - J_n^\sigma(f) = \int_{-1}^1 f(x)\sigma(x)dx - \sum_{k=1}^n A_{k,n}^{r,s} f(x_{k,n}^{r,s}) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{R}_{2n-r-s}^{r,s}(\mathring{f}), \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde

$$\tilde{R}_{2n-r-s}^{r,s}(\mathring{f}) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathring{f}(e^{i\theta}) \mathring{\sigma}(\theta) d\theta - \sum_{j=1}^{2n-r-s} \mathring{A}_{j,2n-r-s}^{r,s} \mathring{f}(z_{j,2n-r-s}^{r,s}). \quad (2.24)$$

Aquí,  $\mathring{f} = f \circ J$ ,  $\mathring{\sigma}(\theta) = \sigma(\cos \theta) |\sin \theta|$  para  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,  $\{z_{j,2n-r-s}^{r,s}\}_{j=1}^{2n-r-s}$  son los correspondientes  $2n - r - s$  nodos asociados<sup>1</sup> sobre  $\mathbb{T}$  y  $\{\mathring{A}_{j,2n-r-s}^{r,s}\}_{j=1}^{2n-r-s}$  el conjunto de pesos de las cuadraturas consideradas en las Proposiciones 2.1.13-2.1.15. Por tanto, tomaremos una regla de integración producto de  $(2n - r - s)$  nodos sobre la circunferencia unidad e intentaremos hacer uso de algunas cotas superiores ya conocidas en la literatura para  $\tilde{R}_{2n-r-s}^{r,s}(\mathring{f})$ , con el fin de recuperar cotas superiores de error para  $R_n^{r,s}(f)$ .

En este sentido, podríamos hacer uso de las cotas dadas en [104] para funciones analíticas salvo en un número finito de polos fuera  $\mathbb{T}$ . Sin embargo, tomaremos ventaja de ciertas cotas de error para funciones analíticas obtenidas en [33] para fórmulas de cuadratura racionales con polos prefijados fuera de  $\mathbb{T}$ . Por tanto, cuando todos los polos se localizan en el origen y en el infinito se sigue el Teorema 1.3.15

Podemos enunciar el siguiente (compárese con el enfoque propuesto en [32], donde el resultado principal, Teorema 1, puede ser deducido directamente del Teorema 1.3.15)

**Teorema 2.1.23** *Sea  $\sigma$  una función integrable Lebesgue posiblemente compleja sobre  $[-1, 1]$ ,  $J_\sigma(f) = \int_{-1}^1 f(x)\sigma(x)dx$ ,  $f$  una función analítica en una cierta región  $H$  conteniendo  $[-1, 1]$  y  $\mu$  una función peso sobre  $[-1, 1]$  tal que  $\int_{-1}^1 \frac{|\sigma(x)|^2}{\mu(x)} dx < \infty$ . Para  $r, s \in \{0, 1\}$  fijo, sea  $J_n^{r,s}(f)$  dada por (2.18). Entonces existe  $\varrho > 1$  tal que*

$$\begin{aligned} |R_n^{r,s}(f)| &= |J_\sigma(f) - J_n^{r,s}(f)| \\ &\leq \frac{1 + \varrho^{1-r-s}}{(\varrho^2 - 1)\varrho^{n-1}} (\|\sigma\| + \|J_n^{r,s}\|) \|f\|_{\mathcal{E}_\varrho}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $\|J_n^{r,s}\| = \sum_{k=1}^n |A_{k,n}^{r,s}|$ ,  $\|\sigma\| = \int_{-1}^1 |\sigma(x)| dx$ ,  $\mathcal{E}_\varrho$  denota la elipse

$$\mathcal{E}_\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{C} : (\varrho^2 + 1)^{-2} x^2 + (\varrho^2 - 1)^{-2} y^2 = \varrho^{-2}\} \quad (2.26)$$

que rodea a  $[-1, 1]$  y  $\|f\|_A = \max\{|f(z)| : z \in A\}$  con  $A \subset \mathbb{C}$ .

<sup>1</sup>Los nodos son realmente los ceros del polinomio para-ortogonal  $B_{2n-r-s}(z, \gamma)$  con respecto a una función peso  $\mathring{\mu}(\theta) := \mu(\cos \theta) |\sin \theta|$  sobre  $[-\pi, \pi]$ , donde  $\gamma = 1$  si  $r = 0$ , ó  $\gamma = -1$  si  $r = 1$ .

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

---

**Demostración.-** Se sigue de las consideraciones anteriores tomando  $p = n$ ,  $q = n - 1 - r - s$  y  $\varrho = \min\{\varrho_1^{-1}, \varrho_2\} > 1$  en el Teorema 1.3.15, teniendo en cuenta que  $\|\sigma\| = \frac{1}{2} \|\hat{\sigma}\|$  y  $\|J_n^{r,s}\| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n-r-s} \left| \hat{A}_{j,2n-r-s}^{r,s} \right|$ , siendo  $\{\hat{A}_{j,2n-r-s}^{r,s}\}_{j=1}^{2n-r-s}$  el conjunto de pesos de las fórmulas de cuadratura consideradas en las Proposiciones 2.1.13-2.1.15. ■

En relación con la estimación del radio de convergencia de la fórmula de cuadratura  $J_n^\sigma(f)$ , pasaremos a la circunferencia unidad para hacer uso del siguiente (véase [25])

**Teorema 2.1.24** *Bajo las hipótesis del Teorema 1.3.11, supongamos que  $f$  es analítica en una cierta región  $G$  conteniendo a  $\mathbb{T}$ . Sea  $\Gamma$  la frontera de  $G$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n)/n = \tilde{r}$ ,  $0 < \tilde{r} < 1$ .*

*Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| I_{\hat{\sigma}}(\hat{f}) - I_n^{\hat{\sigma}}(\hat{f}) \right|^{1/n} \leq \kappa < 1$ , donde  $\kappa = \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$  siendo*

$$\kappa_1 = \max \{ |z|^{\tilde{r}} : z \in \Gamma \cap \mathbb{D} \}, \quad \kappa_2 = \max \{ |z|^{\tilde{r}-1} : z \in \Gamma \cap \mathbb{E} \}.$$

Finalmente podemos probar el siguiente

**Teorema 2.1.25** *Bajo las hipótesis del Teorema 2.1.23 se tiene que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |J_\sigma(f) - J_n^{r,s}(f)|^{\frac{1}{n}} \leq \varrho^{-1} < 1,$$

donde  $\varrho > 1$  es el mayor  $\varrho$  tal que  $f$  es analítica en la elipse  $\mathcal{E}_\varrho \subset H$  dada por (2.26).

**Demostración.-** Obsérvese que  $\hat{f} = f \circ J$  es analítica en el anillo limitado por  $\Gamma_{\varrho^{-1}}$  y  $\Gamma_\varrho$ . De (2.23) y tomando  $p(n) = E[n/2]$  en Teorema 2.1.24 se sigue que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n^{r,s}(f)|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ \left| \tilde{R}_{2n-r-s}^{r,s}(\hat{f}) \right|^{\frac{1}{2n}} \right]^2 = \kappa^2 < 1,$$

concluyendo la prueba con  $\varrho = \kappa^{-2}$  y  $\kappa$  definidas como en el Teorema 2.1.24. ■

### Ejemplos numéricos

Para finalizar esta subsección dedicada al estudio de las reglas de integración producto, ilustraremos algunos experimentos numéricos con el fin de poner de manifiesto la efectividad de éstas fórmulas de cuadratura para la estimación de  $J_\sigma(f) = \int_{-1}^1 f(x)\sigma(x)dx$ , donde  $\sigma$  es integrable Lebesgue sobre  $[-1, 1]$ , posiblemente compleja, y  $f$  es al menos integrable Riemann. Como vimos, la elección de sus nodos viene dado por una función peso auxiliar  $\mu$  sobre  $[-1, 1]$  satisfaciendo (2.19), posteriormente trasladamos nuestro problema a la circunferencia unidad y haciendo uso de reglas de integración producto para  $I_{\hat{\sigma}}(\hat{f}) = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(e^{i\theta})\hat{\sigma}(\theta)d\theta$ , donde  $\hat{\sigma}(\theta) = \sigma(\cos \theta)|\sin \theta|$  y  $\hat{f}(e^{i\theta}) = f(\cos \theta)$  para  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , basadas en los ceros de ciertos polinomios para-ortogonales con respecto a la función peso  $\hat{\mu}(\theta) = \mu(\cos \theta)|\sin \theta|$ .

Concretamente, consideremos  $\mu(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ ; se sigue que  $\hat{\mu}(\theta) \equiv 1$  y es bien sabido que los polinomios para-ortogonales con respecto a  $\hat{\mu}$  vienen dados explícitamente por  $B_n(z, \tau_n) = z^n + \tau_n$ , con  $\tau_n \in \mathbb{T}$  para  $n \geq 1$ . Entonces, los nodos de las reglas de integración producto con las que trabajaremos son las raíces  $n$ -ésimas de  $-\tau_n$ .

Tomaremos  $n$ ,  $n + 1$  y  $n + 2$  nodos para las reglas basadas en los nodos de Gauss, Gauss-Radau y Gauss-Lobatto asociados a  $\mu$ , respectivamente.

Al igual que en la sección 2.2.2, consideraremos las funciones peso de tipo Jacobi, es decir, funciones de la forma  $\sigma(x) = (1-x)^a(1+x)^b$  con  $a$  y  $b$  tales que  $\Re(a) > -1$ ,  $\Re(b) > -1$ . Comenzaremos nuestro análisis escogiendo  $a = b = 1 + i$ , es decir  $\sigma(x) = (1 - x^2)^{1+i}$ , las cuales han sido consideradas ya en [73]. Los errores absolutos se muestran en la Tabla 2.1 para diferentes funciones y número de nodos.

$f(x)$	$n$	Gauss	Radau(+1)	Radau(-1)	Lobatto
$f_1(x)$	4	$7,951E - 05$	$2,734E - 04$	$2,760E - 04$	$2,221E - 05$
$f_1(x)$	8	$6,679E - 11$	$4,369E - 10$	$4,524E - 10$	$1,512E - 11$
$f_1(x)$	12	$4,441E - 16$	$8,882E - 16$	$9,931E - 16$	$4,441E - 16$
$f_2(x)$	4	$7,612E - 07$	$2,142E - 06$	$2,165E - 06$	$2,124E - 07$
$f_2(x)$	8	$5,551E - 12$	$1,770E - 11$	$1,897E - 11$	$1,282E - 12$
$f_2(x)$	12	$5,551E - 17$	$4,344E - 16$	$5,332E - 16$	$1,144E - 16$
$f_3(x)$	4	$6,890E - 04$	$7,081E - 04$	$7,138E - 04$	$1,947E - 04$
$f_3(x)$	8	$2,894E - 07$	$3,488E - 07$	$4,047E - 07$	$7,679E - 08$
$f_3(x)$	12	$1,876E - 10$	$3,405E - 10$	$4,322E - 10$	$6,109E - 11$
$f_4(x)$	4	$2,172E - 01$	$1,838E - 02$	$1,838E - 02$	$7,660E - 02$
$f_4(x)$	8	$5,245E - 02$	$5,770E - 03$	$5,770E - 03$	$2,106E - 02$
$f_4(x)$	12	$2,311E - 02$	$2,660E - 03$	$2,660E - 03$	$9,900E - 03$

Tabla 2.1: Errores absolutos en las reglas de integración producto  $J_\sigma(f)$ , donde  $\sigma(x) = (1 - x^2)^{1+i}$ ,  $f_1(x) = e^x$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{x-5}$ ,  $f_3(x) = \frac{1}{x-2}$  y  $f_4(x) = |x|$ .

De los resultados obtenidos se puede ver que estas fórmulas de cuadratura proporcionan estimaciones aceptables.

Para la misma función  $\sigma$ , comparamos la regla de integración producto de Gauss-Lobatto y las clásicas reglas trapezoidal y de Simpson con 11 nodos. Los errores absolutos se muestran en la Tabla 2.2 para diferentes funciones.

$f(x)$	Regla Trapezoidal	Regla de Simpson	Lobatto
$x^2$	$2,322E - 02$	$2,221E - 02$	$0,000E + 00$
$(x^2 - 2)^{-1}$	$2,312E - 02$	$2,103E - 02$	$6,287E - 07$
$e^{x^3}$	$3,525E - 02$	$3,146E - 02$	$3,634E - 07$
$ x^2 - 4 $	$7,594E - 02$	$6,715E - 02$	$1,831E - 15$
$e^{e^x}$	$1,890E - 01$	$1,752E - 01$	$3,632E - 07$
$e^x + e^{-x}$	$7,456E - 02$	$6,811E - 02$	$2,028E - 14$
$\frac{e^x}{2-x}$	$3,306E - 02$	$3,072E - 02$	$1,483E - 08$
$ x - 1,1 ^{-1}$	$9,365E - 02$	$8,133E - 02$	$5,890E - 04$
$\exp( x - 2 ^{-1})$	$4,989E - 02$	$4,504E - 02$	$3,678E - 08$
$(x + 2)^i$	$2,166E - 02$	$1,968E - 02$	$5,187E - 10$
$e^{ix}$	$1,408E - 02$	$1,223E - 02$	$9,479E - 15$

Tabla 2.2: Errores absolutos en la estimación de  $J_\sigma(f)$  con  $\sigma(x) = (1 - x^2)^{1+i}$  en las fórmulas de Gauss-Lobatto, regla Trapezoidal y regla de Simpson con 11 nodos.

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

De los resultados obtenidos, podemos concluir que nuestra cuadratura mejora a las otras dos considerablemente.

En la Tabla 2.3 se presentan los pesos y nodos de esta cuadratura. En general, el carácter complejo de los pesos es observado.

Pesos	Nodos
$0,00173068200030 + 0,00147772835192i$	$\pm 1$
$-0,00691903349088 - 0,00794349850572i$	$\pm 0,95105651629515$
$0,03105063757681 - 0,05499902209421i$	$\pm 0,80901699437495$
$0,15167700401271 - 0,06889958232889i$	$\pm 0,58778525229247$
$0,26883325999242 - 0,02670304713170i$	$\pm 0,30901699437495$
$0,31421912539220 - 0,00034569937432i$	0

Tabla 2.3: Pesos y nodos de la regla de integración producto con nodos basados en Gauss-Lobatto para  $\sigma(x) = (1 - x^2)^{1+i}$  y  $n = 11$ .

En los siguientes experimentos consideraremos  $\sigma(x) = (1 - x^2)^5$ , compararemos las reglas de integración producto propuestas con las fórmulas de cuadratura de Gauss-Jacobi. Los errores absolutos se muestran en la Tabla 2.4 para diferentes funciones con  $n = 11$ .

f(x)	Gauss	Radau(+1)	Radau(-1)	Lobatto	Gauss-Jacobi
$x^2$	$6,939E - 17$	$1,110E - 16$	$4,163E - 17$	$5,551E - 17$	$8,970E - 16$
$(x^2 - 2)^{-1}$	$1,577E - 07$	$1,834E - 08$	$1,834E - 08$	$2,406E - 08$	$8,835E - 12$
$ x $	$1,484E - 02$	$3,172E - 03$	$3,172E - 03$	$2,382E - 02$	$6,801E - 03$
$(x + 2)^i$	$3,400E - 10$	$5,772E - 11$	$9,989E - 11$	$1,964E - 11$	$2,589E - 15$
$e^{e^x}$	$2,315E - 07$	$7,185E - 08$	$4,214E - 08$	$1,465E - 08$	$7,381E - 14$
$\sin(x)$	$3,401E - 16$	$2,056E - 16$	$8,470E - 17$	$2,338E - 16$	$1,907E - 15$

Tabla 2.4: Errores absolutos en la estimación de  $J_\sigma(f)$  con  $n = 11$  y  $\sigma(x) = (1 - x^2)^5$  en las reglas de integración producto propuestas y las fórmulas de cuadratura de Gauss-Jacobi.

En vista de los resultados, en algunos casos nuestra cuadratura compite con la cuadratura de Gauss-Jacobi. Aquí, debemos tener en cuenta que como hemos fijado 11 nodos, las fórmulas de cuadratura de Gauss-Jacobi son exactas para polinomios de hasta grado 21.

En la Tabla 2.5 presentamos unos experimentos numéricos similares pero ahora tomando la misma dimensión en el dominio de exactitud de las fórmulas de cuadratura, esto es 6 y 12 nodos para las fórmulas Gauss-Jacobi y la propuesta, respectivamente.

f(x)	Gauss	Gauss-Jacobi
$x^2$	$5,551E - 17$	$1,214E - 16$
$(x^2 - 2)^{-1}$	$2,404E - 08$	$1,560E - 07$
$ x $	$2,382E - 02$	$8,418E - 03$
$(x + 2)^i$	$1,964E - 11$	$3,920E - 10$
$e^{e^x}$	$1,465E - 08$	$2,663E - 07$
$\sin(x)$	$2,526E - 16$	$1,653E - 16$

Tabla 2.5: Errores absolutos en la estimación de  $J_\sigma(f)$  con  $\sigma(x) = (1 - x^2)^5$  en las reglas de integración producto de tipo-Gauss con 12 nodos y la fórmula de cuadratura de Gauss-Jacobi con 6 nodos.



Ahora la comparación es más realista puesto que ambas son exactas para polinomios de grado menor o igual a 11. En la Tabla 2.6 mostramos los pesos y nodos de la regla de integración producto de Gauss-Lobatto con 13 nodos. Ahora, el carácter real de los pesos es puesto en relevancia, de acuerdo con la Proposición 2.1.15. Realmente, solo dos pesos son negativos, siendo precisamente los correspondientes a los nodos finales  $\pm 1$ .

Pesos	Nodos
-0,00002295008352	$\pm 1$
0,00002267380227	$\pm 0,96592582628907$
0,00010608038606	$\pm 0,86602540378444$
0,00580586112959	$\pm 0,70710678118655$
0,05378275573457	$\pm 0,5$
0,17881253704263	$\pm 0,25881904510252$
0,26177987271001	0

Tabla 2.6: Pesos y nodos de la regla de integración producto de tipo-Gauss-Lobatto con 13 nodos para  $J_\sigma(f)$  con  $\sigma(x) = (1 - x^2)^5$ .

De los resultados en las Tablas 2.3 y 2.6, cabe recalcar la presencia de nodos de la forma  $\pm x_k$  y la igualdad de los pesos correspondientes a estos nodos, lo cual explica la existencia de errores iguales a cero, (salvo redondeo), por ejemplo para la función  $f(x) = \sin x$  en la Tabla 2.4. Realmente, esto es una consecuencia de la siguiente,

**Proposición 2.1.26** *Sea  $\mu$  una función peso par sobre  $[-1, 1]$  y tomemos  $\hat{\mu}(\theta) = \mu(\cos \theta)|\sin \theta|$  para  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Entonces, la familia de polinomios para-ortogonales  $B_n(z, \tau_n)$  asociados con  $\hat{\mu}$  donde  $\tau_n \in \mathbb{T}$  satisface para  $n \geq 1$ ,*

$$B_{2n}(z, \tau_{2n}) = B_{2n}(-z, \tau_{2n}) \text{ y } B_{2n-1}(-z, \tau_{2n-1}) = -B_{2n-1}(z, -\tau_{2n-1}).$$

Además, consideremos  $\hat{\sigma}(\theta) = \sigma(\cos \theta)|\sin \theta|$  con  $\sigma$  una función compleja sobre  $[-1, 1]$  y las reglas de integración producto  $I_{2n}^{\hat{\sigma}}(f)$ ,  $I_{2n+1}^{\hat{\sigma}}(f)$  y  $I_{2n+2}^{\hat{\sigma}}(f)$  dadas por (2.7), (2.10) y (2.11), respectivamente, donde los nodos son tomados como los ceros de polinomios para-ortogonales  $B_{2n}(z, 1)$ ,  $B_{2n+1}(z, \pm 1)$  y  $B_{2n+2}(z, -1)$  asociados a  $\hat{\mu}$ , respectivamente. Nótese, que para las dos reglas  $I_{2n+1}^{\hat{\sigma}}(f)$  dadas por (2.10) tomamos  $\tau_{2n+1} = 1$  cuando  $r = 1, s = 0$  y  $\tau_{2n+1} = -1$  cuando  $r = 0, s = 1$ . Entonces, los pesos asociados con dos nodos opuestos en  $I_{2n}^{\hat{\sigma}}(f)$  y en  $I_{2n+2}^{\hat{\sigma}}(f)$  son iguales y los pesos asociados con un nodo en  $I_{2n+1}^{\hat{\sigma}}(f)$  cuando  $r = 1, s = 0$  es igual al peso asociado a su opuesto en  $I_{2n+1}^{\hat{\sigma}}(f)$  cuando  $r = 0, s = 1$ .

**Demostración.**- Obsérvese que como  $\mu$  es una función peso par,  $\hat{\mu}(\theta) = h(e^{i\theta})$  con  $h(-z) = h(z)$  para  $z \in \mathbb{T}$ . Sea  $B_n(z, \tau_n) = \rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z)$ , donde  $\rho_n$  es el  $n$ -ésimo polinomio de Szegő asociado con  $\hat{\mu}$ . Entonces, de las condiciones de ortogonalidad para  $\rho_n$  con  $n \geq 1$  y  $z = e^{i\theta}$  se sigue que

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(z) \bar{z}^k \hat{\mu}(\theta) d\theta = -i \int_{\mathbb{T}} \rho_n(z) z^{-(k+1)} h(z) dz, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

implicando  $\int_{\mathbb{T}} \rho_n(-z) z^{-(k+1)} h(z) dz = 0$  para todo  $k = 0, \dots, n-1$ . Entonces,  $\rho_n(-z) = C_n \rho_n(z)$  con  $C_n \neq 0$  y como  $\rho_n$  es mónico,  $\rho_n(-z) = (-1)^n \rho_n(z)$ . Como consecuencia,

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

$\rho_n^*(-z) = \rho_n^*(z)$  y entonces,  $B_{2n}(z, \tau_{2n})$  es una función par y  $B_{2n-1}(-z, \tau_{2n-1}) = -B_{2n-1}(z, -\tau_{2n-1})$  para  $n \geq 1$ .

Tomando ahora  $Q(z) = \prod_{l=1}^k (z^2 - z_l^2)(z^2 - \bar{z}_l^2)$ , entonces los polinomios para-ortogonales asociados a  $\dot{\mu}$  son de la forma

$$\begin{aligned} B_{2n}(z, 1) &= Q(z) \text{ y } B_{2n+2}(z, -1) = (z^2 - 1)Q(z) \text{ si } n = 2k, \\ B_{2n}(z, 1) &= (z^2 + 1)Q(z) \text{ y } B_{2n+2}(z, -1) = (z^4 - 1)Q(z) \text{ si } n = 2k + 1, \\ B_{2n+1}(z, 1) &= (z + 1) \prod_{l=1}^n (z - z_l)(z - \bar{z}_l) \text{ y } B_{2n+1}(z, -1) = -B_{2n+1}(-z, 1). \end{aligned}$$

Sean  $\pm z_1$  dos ceros opuestos de  $B_{2n}(z, 1)$  para  $n \geq 1$ , y denotemos por  $\dot{A}_{\pm 1}$  el correspondiente peso en  $I_{2n}^{\dot{\sigma}}(f)$ . Entonces,

$$\dot{A}_1 = I_{\dot{\sigma}} \left( \frac{z_1^n B_{2n}(z, 1)}{B'_{2n}(z_1, 1) z^n (z - z_1)} \right), \quad \dot{A}_{-1} = I_{\dot{\sigma}} \left( \frac{(-z_1)^n B_{2n}(z, 1)}{B'_{2n}(-z_1, 1) z^n (z + z_1)} \right),$$

y como  $B'_{2n}(-z_1, 1) = -B'_{2n}(z_1, 1)$  se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 = \dot{A}_{-1} &\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{z - z_1} + \frac{(-1)^n}{z + z_1} \right] \frac{B_{2n}(z, 1)}{z^n} \dot{\sigma}(\theta) d\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_{2n}(z, 1)}{z^s (z^2 - z_1^2)} \dot{\sigma}(\theta) d\theta = 0, \quad z = e^{i\theta}, \quad s = \begin{cases} n-1 & \text{si } n = 2k, \\ n & \text{si } n = 2k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Como  $\dot{\sigma}(\theta) = \dot{\sigma}(-\theta)$ , para concluir la demostración en este caso veremos que  $A(\theta) := \frac{B_{2n}(z, 1)}{z^s (z^2 - z_1^2)}$  con  $z = e^{i\theta}$  es una función impar. En efecto, como  $B_{2n}(z, 1)$  es un polinomio real 1-invariante, es fácil probar que  $\frac{B_{2n}(z, 1)}{z^s (z^2 - z_1^2)}$  es un polinomio real  $(-1)^{n-1}$ -invariante de grado  $2n - 2$ . Entonces, tomando  $n = 2k$  se sigue que

$$\frac{B_{2n}(z, 1)}{z^{n-1}(z^2 - z_1^2)} = \sum_{l=-(n-1)}^{n-1} c_l z^l \in \Lambda_{-(n-1), n-1},$$

donde  $c_0 = 0$  y  $c_l = -c_{-l}$  para  $l = 1, \dots, n-1$ . Esto implica por la fórmula de Euler que  $A(\theta) = 2i \sum_{k=1}^{n-1} c_k \sin k\theta$ , es decir  $A(\theta)$  es una función impar. La demostración en el resto de los casos se sigue de manera similar. ■

Como consecuencia tenemos también el siguiente

**Lema 2.1.27** *Sea  $\mu$  una función peso par en  $[-1, 1]$ , es decir  $\mu(-x) = \mu(x)$ , y tomemos  $\dot{\mu}(\theta) = \sigma(\cos \theta) |\sin \theta|$  para  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Entonces, los ceros del polinomio para-ortogonal  $B_n(z, \pm 1)$  asociado a  $\dot{\mu}$  son de la forma*

1. Si  $n = 4k$  y  $\tau = 1$ :  $\{\pm z_j, \pm \bar{z}_j\}_{j=1}^k$ ,
2. Si  $n = 4k$  y  $\tau = -1$ :  $\{\pm 1, \pm i\} \cup \{\pm z_j, \pm \bar{z}_j\}_{j=1}^{k-1}$ ,
3. Si  $n = 4k + 2$  y  $\tau = 1$ :  $\{\pm i\} \cup \{\pm z_j, \pm \bar{z}_j\}_{j=1}^k$ ,
4. Si  $n = 4k + 2$  y  $\tau = -1$ :  $\{\pm 1\} \cup \{\pm z_j, \pm \bar{z}_j\}_{j=1}^k$ ,

5. Si  $n = 2k + 1$  y  $\tau = 1$ :  $\{-1\} \cup \{z_j, \bar{z}_j\}_{j=1}^k$ ,

6. Si  $n = 2k + 1$  y  $\tau = -1$ :  $\{+1\} \cup \{-z_j, -\bar{z}_j\}_{j=1}^k$ .

Además, los pesos asociados a los nodos  $\{\pm z_j, \pm \bar{z}_j\}$  en la regla de integración producto  $J_{n+r+s}^\sigma(\hat{f})$  dada en las Proposiciones 2.1.13-2.1.15 son iguales.

Finalmente, comentar que como los nodos de las reglas de integración producto propuestas son las raíces de un número complejo de módulo 1, podríamos computar tales fórmulas alternativamente haciendo uso de las expresiones explícitas para los pesos deducidas en [105]. Allí se prueba que los pesos pueden ser computados eficientemente por medio del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT). En la Tabla 2.7 se muestran los tiempos de computación requeridos en orden de calcular los pesos de la regla de integración producto de tipo-Gauss-Lobatto tanto directamente como mediante esta técnica alternativa para diferentes números de nodos.

Nodos	Directo	FFT
20	4,850E - 04	3,100E - 05
40	1,844E - 03	7,800E - 05
100	1,184E - 02	1,870E - 04
200	5,328E - 02	4,220E - 04
500	2,810E - 01	1,110E - 03
1000	9,530E - 01	2,359E - 03
2000	3,969E + 00	5,657E - 03
5000	2,081E + 01	1,381E - 02
10000	8,217E + 01	2,953E - 02
20000	3,272E + 02	6,250E - 02
50000	2,031E + 03	1,655E - 01
100000	8,155E + 03	3,534E - 01

Tabla 2.7: Tiempos de ejecución en la computación de los pesos de la regla de integración producto de tipo-Gauss-Lobatto con  $\sigma(x) = (1 - x^2)^{1+i}$ , directamente y por medio del algoritmo FFT.

Una ilustración numérica de la cota de error (1.43) para la función peso  $\sigma(x) = (1 - x^2)^{1+i}$  se muestra en la Tabla 2.8 aplicada a la regla de integración producto de tipo-Gauss-Lobatto con 11 nodos.

### 2.1.3. Conexión entre aproximantes racionales

En esta sección nos dedicaremos al estudio de la relación entre ciertos aproximantes racionales a las transformadas de Cauchy y Herglotz-Riesz de  $\mu$  y  $\hat{\mu}$ , respectivamente, introducidas en el Capítulo 1.

Recordemos la ecuación (1.60)

$$F_\mu(x) = \frac{z}{1 - z^2} H_{\hat{\mu}}(z), \tag{2.27}$$

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

Función	Error
$e^x$	$1,830E - 05$
$\frac{1}{x-5}$	$8,577E - 07$
$\frac{1}{x-2}$	$1,051E - 04$
$e^{e^x}$	$6,088E - 05$
$x^2$	$2,667E - 21$
$\frac{1}{x^4-1,01}$	$2,450E + 01$
$(x+2)^i$	$2,694E - 09$

Tabla 2.8: Cotas de error (1.43) para la función peso  $\sigma(x) = (1 - x^2)^{1+i}$  aplicada a la regla de integración producto de tipo-Gauss-Lobatto con 11 nodos.

$x = J(z)$ , siendo  $F_\mu(x) = J_\mu\left(\frac{1}{x}\right)$  y  $H_{\hat{\mu}}(z) = I_{\hat{\mu}}\left(\frac{z+i}{-z}\right)$ . Sabemos que la función racional  $F_n(x) = J_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{Q_{n-1}(x)}{P_n(x)}$  verifica, ver Proposición (1.2.13), que dado  $n \in \mathbb{N}$

$$F_\mu(x) - F_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{N+2}}\right) \Leftrightarrow J_n(f) = J_\mu(f), \forall f \in \mathbb{P}_N.$$

es decir, que  $F_n$  interpola a  $F_\mu$  en el infinito con un cierto orden. Por un lado, sabemos por la proposición 1.4.7 que

$$J_n(f) = J_\mu(f), \forall f \in \mathbb{P}_N \iff I_{2n}^{\hat{\mu}} = I_{\hat{\mu}}(L), \forall L \in L_{-N, N}.$$

Por otro lado, de la Proposición 1.3.21, se tiene que, si  $H_{2n}(z) = I_{2n}^{\hat{\mu}}\left(\frac{z+i}{-z}\right)$  se verifica

$$\begin{aligned} H_{\hat{\mu}}(z) - H_{2n}(z) &= O(z^{N+1}), \\ H_{\hat{\mu}}(z) - H_{2n}(z) &= O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right). \end{aligned}$$

Es decir,  $H_{2n}$  interpola a  $H_{\hat{\mu}}$  con el mismo orden en el origen y en el infinito. Cabe preguntarse si ambos aproximantes están relacionados por la misma ecuación (2.27), es decir

**Teorema 2.1.28** *Suponiendo que  $F_n(x)$  satisface*

$$F_\mu(x) - F_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{N+2}}\right), \quad (x \rightarrow \infty),$$

entonces, para todo  $x \notin [-1, 1]$ ,

$$F_n(x) = \frac{z}{1-z^2} H_{2n}(z), \quad \text{con } x = J(z),$$

siendo  $H_{2n}$  la función racional dada por  $H_{2n}(z) = \frac{\tilde{B}_{2n}(z)}{B_{2n}(z)}$  donde  $B_{2n}(z) = \prod_{j=1}^{2n} (z - z_j)$  con  $z_j = e^{i\theta_j}$  y  $z_{n+j} = \bar{z}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $\tilde{B}_{2n} \in \mathbb{P}_{2n}$  satisfaciendo,

$$\begin{aligned} H_\sigma(z) - H_{2n}(z) &= O(z^{N+1}), \quad (z \rightarrow 0), \\ H_\sigma(z) - H_{2n}(z) &= O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \quad (z \rightarrow \infty). \end{aligned} \tag{2.28}$$

**Demostración.**-Tomando  $x \notin [-1, 1]$ , tal que  $x = J(z)$  y  $x_j = J(z_j)$ , obtenemos  $\frac{1}{x-x_j} = \frac{2z}{(z-z_j)(z-\bar{z}_j)}$  y por tanto,

$$\begin{aligned} F_n(x) &= 2z \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{(z-z_j)(z-\bar{z}_j)} = z \sum_{j=1}^{2n} \frac{\dot{\lambda}_j}{(z-z_j)(z-\bar{z}_j)} \\ &= - \sum_{j=1}^{2n} \frac{z_j \dot{\lambda}_j}{(z_j-z)(z_j-1/z)}. \end{aligned}$$

Ahora,  $-\frac{1}{(z_j-z)(z_j-1/z)} = \frac{z}{1-z^2} \left[ \frac{1}{z_j-z} - \frac{1}{z_j-1/z} \right]$  y por otro lado,

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{\dot{\lambda}_j z_j}{(z_j-1/z)} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\dot{\lambda}_j \bar{z}_j}{(\bar{z}_j-1/z)} = - \sum_{j=1}^{2n} \frac{\dot{\lambda}_j z}{z_j-z}.$$

Se sigue por tanto que

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{z}{1-z^2} \left[ \sum_{j=1}^{2n} \frac{\dot{\lambda}_j z_j}{z_j-z} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\dot{\lambda}_j z}{z_j-z} \right] = \frac{z}{1-z^2} \sum_{j=1}^{2n} \dot{\lambda}_j \left( \frac{z_j+z}{z_j-z} \right) \\ &= \frac{z}{1-z^2} H_{2n}(z), \end{aligned}$$

siendo  $H_{2n}$  una función racional de la forma  $\frac{\tilde{B}_{2n}}{B_{2n}}$  donde  $B_{2n}(z) = \prod_{j=1}^{2n} (z-z_j)$ . ■

**Nota 2.1.29** Si  $B_n(z) = \prod_{j=1}^n (z-z_j)$ , entonces  $B_{2n}(z) = \prod_{j=1}^{2n} (z-z_j)$  con  $z_{n+j} = \bar{z}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  puede escribirse como  $B_{2n}(z) = B_n(z) \overline{B_n(\bar{z})}$ .

Nos centraremos en los casos  $N = n-1$  y  $N = 2n-1$ .

Cuando,  $N = n-1$ ,  $F_n$  verifica  $F_\mu(x) - F_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$ , es decir,  $F_n$  es el Aproximante tipo Padé de  $F_\mu(x)$  con  $n$  polos distintos  $x_1, \dots, x_n$  en  $(-1, 1)$ , explícitamente

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{x-x_j}.$$

Tomando  $x_j = \cos(\theta_j)$ , como vimos en el Teorema anterior,  $H_{2n}(z) = \sum_{j=1}^{2n} \dot{\lambda}_j \left( \frac{z_j+z}{z_j-z} \right)$ , con  $\dot{\lambda}_j = \dot{\lambda}_{n+j} = \lambda_j$ ,  $z_j = e^{i\theta_j}$  y  $z_{n+j} = \bar{z}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , sabemos que:

$$I_{2n}^{\dot{\mu}}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \dot{\lambda}_j f(z_j) = I_{\dot{\mu}}(f), \forall f \in \Lambda_{-(n-1), (n-1)}$$

por la Proposición, 1.3.21 se sigue que

$$\begin{aligned} H_{\dot{\mu}}(z) - H_{2n}(z) &= O(z^n), (z \rightarrow 0), \\ H_{\dot{\mu}}(z) - H_{2n}(z) &= O\left(\frac{1}{z^n}\right), (z \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (2.29)$$

---

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

---

De (2.29), se tiene que  $H_{2n}$  verifica  $2n$  condiciones de interpolación ( $n$  en el origen y otras  $n$  en el infinito) mientras que la función racional  $H_{2n}$  depende de  $2n + 1$  parámetros (los coeficientes del numerador  $\tilde{B}_{2n} \in \mathbb{P}_{2n}$ ). Concluimos que puede faltar una restricción más. Para superar este inconveniente, nos planteamos con los  $2n$  nodos distintos  $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$ , la construcción de las fórmulas de cuadratura interpolatorias exacta en  $\Lambda_{-n,n-1}$  y  $\Lambda_{-(n-1),n}$ , dando lugar a

$$\hat{I}_{2n}^{\hat{\mu}}(\hat{f}) = \sum_{j=1}^{2n} \hat{\lambda}_j \hat{f}(z_j) = I_{\hat{\mu}}(\hat{f}), \quad \forall \hat{f} \in \Lambda_{-n,n-1}. \quad (2.30)$$

Y

$$\tilde{I}_{2n}^{\tilde{\mu}}(\tilde{f}) = \sum_{j=1}^{2n} \tilde{\lambda}_j \tilde{f}(z_j) = I_{\tilde{\mu}}(\tilde{f}), \quad \forall \tilde{f} \in \Lambda_{-(n-1),n}. \quad (2.31)$$

respectivamente. Podemos enunciar la siguiente

**Proposición 2.1.30** *Bajo las condiciones anteriores,*

$$I_{2n}^{\hat{\mu}}(\hat{f}) = \sum_{j=1}^{2n} \hat{\lambda}_j \hat{f}(z_j) = \frac{1}{2} \left[ \hat{I}_{2n}^{\hat{\mu}}(\hat{f}) + \tilde{I}_{2n}^{\tilde{\mu}}(\tilde{f}) \right].$$

**Demostración.**- De (2.30)-(2.31) se sigue que

$$\begin{aligned} \hat{I}_{2n}^{\hat{\mu}}(\hat{f}) &= \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \hat{f}(z_j) + \overline{\tilde{\lambda}_j} \hat{f}(\bar{z}_j), \\ \tilde{I}_{2n}^{\tilde{\mu}}(\tilde{f}) &= \sum_{j=1}^n \overline{\hat{\lambda}_j} \tilde{f}(z_j) + \hat{\lambda}_j \tilde{f}(\bar{z}_j). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\hat{I}_{2n}^{\hat{\mu}}(\hat{f}) + \tilde{I}_{2n}^{\tilde{\mu}}(\tilde{f})] &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\hat{\lambda}_j + \overline{\hat{\lambda}_j}) \hat{f}(z_j) + (\overline{\hat{\lambda}_j} + \hat{\lambda}_j) \hat{f}(\bar{z}_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 2\Re(\hat{\lambda}_j) \hat{f}(z_j) + 2\Re(\overline{\hat{\lambda}_j}) \hat{f}(\bar{z}_j) = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j [\hat{f}(z_j) + \hat{f}(\bar{z}_j)] \\ &= I_{2n}^{\hat{\mu}}(\hat{f}) \end{aligned}$$

■

Sean  $\hat{H}_{2n}$  y  $\tilde{H}_{2n}$  los aproximantes generados por las fórmulas de cuadratura (2.30) y (2.31), ambas con los mismos nodos  $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$ . Por la Proposición 2.1.30, tenemos lo siguiente,

**Corolario 2.1.31** *Bajo las condiciones anteriores,*

$$H_{2n}(z) = \frac{1}{2} \left[ \hat{H}_{2n}(z) + \tilde{H}_{2n}(z) \right] \quad (2.32)$$

y

$$F_n(x) = \frac{z}{2(1-z^2)} \left[ \hat{H}_{2n}(z) + \tilde{H}_{2n}(z) \right], \quad \forall x \notin [-1, 1], \quad z \in \mathbb{D}.$$

De (2.32) obtendremos una expresión del error  $\hat{E}_{2n}^{\hat{\mu}}(z) = H_{\hat{\mu}}(z) - H_{2n}(z)$ . En efecto, por (1.48) se tiene que

$$H_{\hat{\mu}}(z) - \hat{H}_{2n}(z) = \frac{2z^n}{B_{2n}(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(n-1)\theta} B_{2n}(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} d\hat{\mu}(\theta)$$

y

$$H_{\hat{\mu}}(z) - \tilde{H}_{2n}(z) = \frac{2z^{n+1}}{B_{2n}(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-in\theta} B_{2n}(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} d\hat{\mu}(\theta).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \hat{E}_{2n}^{\hat{\mu}}(z) &= \frac{z^n}{B_{2n}(z)} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(n-1)\theta} B_{2n}(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} d\hat{\mu}(\theta) + z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-in\theta} B_{2n}(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} d\hat{\mu}(\theta) \right] \\ &= \frac{z^n}{B_{2n}(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(n-1)\theta} B_{2n}(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} \left[ 1 + \frac{z}{e^{i\theta}} \right] d\hat{\mu}(\theta) \end{aligned}$$

y entonces

$$\hat{E}_{2n}^{\hat{\mu}}(z) = \frac{z^n}{B_{2n}(z)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} B_{2n}(e^{i\theta}) \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) d\sigma(\theta). \quad (2.33)$$

La fórmula de error (2.33) puede ser obtenida alternativamente de la expresión de error para los aproximantes de tipo Padé  $F_n$  como sigue: si en (1.16) inicialmente hacemos el cambio de variable  $t = \cos(\theta)$ , posteriormente la transformación  $x = J(z)$  y teniendo en cuenta (1.58), se tiene

$$\hat{E}_n^{\hat{\mu}}(x) = F_{\hat{\mu}}(x) - F_n(x) = \frac{z}{1-z^2} \frac{z^n}{B_{2n}(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_{2n}(e^{i\theta})}{e^{in\theta}} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) d\hat{\mu}(\theta),$$

y por tanto se sigue la fórmula (2.33), teniendo en cuenta las relaciones entre ambas transformadas.

Ahora bien, si consideramos en el Teorema 2.1.28 el caso  $N = 2n - 1$ ,  $F_n(x) = [n - 1/n]_{F_{\mu}}(x) = \frac{Q_{n-1}(x)}{P_n(x)}$ , siendo  $P_n$  el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a la medida  $\mu$ . Sabemos que  $F_{\mu}(x) - F_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$ , ( $x \rightarrow \infty$ ), análogamente al caso anterior  $H_{2n}$  dado por el Teorema 2.1.28 satisface,

$$\begin{aligned} H_{\hat{\mu}}(z) - H_{2n}(z) &= O(z^{2n}), \quad (z \rightarrow 0), \\ H_{\hat{\mu}}(z) - H_{2n}(z) &= O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right), \quad (z \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

$H_{2n}$  es un aproximante modificado. Ahora, de la expresión del error para el Aproximante de Padé  $[n - 1/n]_{F_{\mu}}(x)$  dada por (1.17) se puede deducir una expresión para el correspondiente aproximante modificado,

$$H_{\hat{\mu}}(z) - H_{2n}(z) = \frac{z^{2n}}{B_{2n}^2(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_{2n}^2(e^{i\theta})}{e^{2in\theta}} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) d\hat{\mu}(\theta). \quad (2.34)$$

---

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

---

**Nota 2.1.32** La fórmula (2.34) es equivalente a la fórmula de error (1.49) pero expresada en una forma más compacta. En efecto (2.34) se puede reescribir como

$$\frac{2z^{2n}}{B_{2n}^2(z)} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^{-(2n-1)} B_{2n}^2(x)}{x-z} d\hat{\mu}(\theta) - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_{2n}^2(x)}{x^{2n}} d\hat{\mu}(\theta) \right)$$

y por las propiedades de ortogonalidad de  $B_{2n}$  tenemos que  $\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_{2n}^2(x)}{x^{2n}} d\hat{\mu}(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} B_{2n}(x) d\hat{\mu}(\theta)$ , recuperando la fórmula de error (1.49). Además, según estos argumentos, podemos observar que la fórmula (2.34) es también válida para cualquier aproximante modificado  $H_n$  cuyo denominador viene dado por  $B_n(z) = C_n[\rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z)]$ , ( $C_n \neq 0$ ,  $\tau_n \in \mathbb{T}$ ). Se tiene así que

$$H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z) = \frac{z^n}{B_n^2(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_n^2(e^{i\theta})}{e^{in\theta}} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) d\hat{\mu}(\theta).$$

A continuación obtendremos estimaciones del error para los aproximantes de Padé y de tipo Padé asociados con la medida  $\mu$ . Para ello haremos uso de las cotas del error dadas por Jones y Waadeland en [83] para los aproximantes modificados asociados a la medida  $\hat{\mu}$  definida por (1.52). Con este objetivo consideramos los aproximantes racionales a  $F_{\mu}$  asociados con las fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss. Consideremos  $r, s \in \{0, 1\}$  y sea  $\mu_{r,s}(x) = (1-x)^r(1+x)^s \mu(x)$  como en Teorema 1.2.12. Sea  $F_n^{r,s}$  el aproximante racional a  $F_{\mu}(x)$  asociado con  $J_n^{r,s}(f)$ , esto es,  $F_n^{r,s}(x) = J_n^{r,s}\left(\frac{1}{x-\cdot}\right)$ , atendiendo a la Proposición 1.2.13, se sigue,

$$F_n^{r,s}(x) = \frac{Q_{n-1}^{r,s}(x)}{P_n^{r,s}(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{j,n}^{r,s}}{x - x_{j,n}^{r,s}} \text{ con } F_{\mu}(x) - F_n^{r,s}(x) = O\left(\frac{1}{x^{2n+1-r-s}}\right).$$

Estamos interesados en la obtención de cotas para

$$E_n^{r,s}(x) = F_{\hat{\mu}}(x) - F_n^{r,s}(x), \quad x \notin [-1, 1],$$

siendo esencial el siguiente resultado, véase [83].

**Teorema 2.1.33** Sea  $B_n$  el  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal mónico con respecto a  $\hat{\mu}$  y sea  $H_n$  el correspondiente aproximante modificado asociado a  $H_{\mu}$ , es decir,

$$H_n(z) = \frac{\tilde{B}_n(z)}{B_n(z)} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \left( \frac{z_j + z}{z_j - z} \right),$$

donde  $\{z_j\}_{j=1}^n$  son los ceros de  $B_n(z) = C_n[\rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z)]$ , ( $C_n \neq 0$ ,  $\tau_n \in \mathbb{T}$ ) y  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  los pesos de la  $n$ -ésima fórmula de Szegő. Entonces,  $|H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z)| \leq \gamma_n^{(j)}(z)$  para todo



$z \in \mathbb{D}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , donde

$$\begin{aligned}\gamma_n^{(1)}(z) &= \frac{2\prod_{j=1}^n (1 - |\delta_j|^2) [|1 + \tau b_n(z)|z|^2| + |z||1 + \tau b_n(z)|] |z|^n}{|\rho_n^*(z)|^2 [1 - |z|^2|b_n(z)|^2] |1 + \tau b_n(z)|}, \\ \gamma_n^{(2)}(z) &= \frac{2\prod_{j=1}^n (1 - |\delta_j|^2)(1 + |z|)|z|^n}{|\rho_n^*(z)|^2 (1 - |z|b_n(z)) |1 + \tau b_n(z)|}, \\ \gamma_n^{(3)}(z) &= \frac{2 [|1 + \tau b_n(z)|z|^2| + |z||1 + \tau b_n(z)|] |z|^n}{(1 - |z|^2) |1 + \tau b_n(z)|}, \\ \gamma_n^{(4)}(z) &= \frac{8|z|^n}{(1 - |z|^2) |1 + \tau b_n(z)|},\end{aligned}\tag{2.35}$$

con  $b_n(z) = \frac{\rho_n(z)}{\rho_n^*(z)}$  y de forma que  $\gamma_n^{(1)}(z) \leq \gamma_n^{(2)}(z) \leq \gamma_n^{(3)}(z) \leq \gamma_n^{(4)}(z)$ .

Por otro lado, Sea  $H_{2n-r-s}(z)$  el aproximante modificado generado por

$$B_\kappa(z) = C_\kappa[\rho_\kappa(z) + \tau_\kappa \rho_\kappa^*(z)], \quad \tau_\kappa = \begin{cases} 1 & \text{si } s = 0, \\ -1 & \text{si } s = 1, \end{cases} \quad \kappa = 2n - r - s.\tag{2.36}$$

Entonces, de los Teoremas 2.1.28 y 2.1.33, se deduce el siguiente

**Teorema 2.1.34** Para todo  $x \notin [-1, 1]$ ,  $|E_n^{r,s}(x)| \leq \left| \frac{z}{1-z^2} \right| \gamma_{2n-r-s}^{(j)}(z)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  con  $\gamma_{2n-r-s}^{(j)}$  dadas por (2.35) y  $z = x + \sqrt{x^2 - 1}$  tal que  $z \in \mathbb{D}$ .

Consideremos ahora el  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal mónico dado por  $B_n(z) = B_n(z, \tau_n) = C_n[\rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z)]$  donde  $\tau_n \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  y  $C_n = \frac{1}{1 + \tau_n \delta_n}$  ( $\delta_n = \rho_n(0)$ ). Como sabemos los ceros de  $B_n$  son distintos entre si, situados en  $\mathbb{T}$ , no son reales ni aparecen en pares conjugados. Una vez fijado  $\tau_n \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$ , sean  $z_1, \dots, z_n$  los ceros de  $B_n$  tal que  $z_j = e^{i\theta_j}$ ,  $\theta_j \in (0, \pi)$  y  $\theta_j \neq \theta_k$  si  $j \neq k$  y tomemos

$$I_n^\mu(\mathring{f}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathring{f}(e^{i\theta_j}) = I_{\tilde{\mu}}(\mathring{f}), \quad \forall \mathring{f} \in \Lambda_{-(n-1), n-1},$$

la correspondiente fórmula de Szegő con  $n$  nodos.

Definamos  $x_j = \cos(\theta_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$  tal que  $x_j \neq x_k$  si  $j \neq k$  y  $\{x_j\}_{j=1}^n \subset (-1, 1)$ , y consideremos

$$J_n^\mu(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) = I_\mu(f), \quad \forall f \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Se sabe (véase [14]) que  $\lambda_j = \frac{\lambda_j}{2} > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Considerando  $\tilde{F}_n(x)$  el aproximante de tipo Padé a  $F_\mu(x)$  generada por  $P_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$  tenemos

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{\tilde{Q}_{n-1}(x)}{\tilde{P}_n(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{x - x_j}.\tag{2.37}$$

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

Es más,  $\tilde{F}_n(x) = \frac{z}{1-z^2} \tilde{H}_{2n}(z)$ ,  $\forall x \notin [-1, 1]$  con  $z \in \mathbb{D}$ ,  $x = J(z)$  donde  $\tilde{H}_{2n}(z) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\lambda_j}{2} \left( \frac{z_j+z}{z_j-z} \right)$  con  $\lambda_{n+j} = \lambda_j$  y  $z_{n+j} = \bar{z}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Sea  $H_n(z) = H_n(z, \tau_n)$  el aproximante modificado a  $H_\mu(z)$  tal que  $H_n(z) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \left( \frac{z_j+z}{z_j-z} \right)$ . Entonces, se sigue  $\tilde{H}_{2n}(z) = \frac{1}{2}[H_n(z) + \overline{H_n(\bar{z})}]$ . Por otra parte, como  $\hat{\mu}$  es simétrica, es decir  $\hat{\mu}(-\theta) = \hat{\mu}(\theta)$ ,  $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$ , se puede probar fácilmente que  $H_{\hat{\mu}}(z) = \overline{H_{\hat{\mu}}(1/\bar{z})}$ . Tomando  $\tilde{E}_n^\mu(x) = F_\mu(x) - \tilde{F}_n(x)$ ,  $x \notin [-1, 1]$  y  $\mathring{E}_n^\mu(z) = E_n^\mu(z, \tau_n) = H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z, \tau_n)$  con  $z \in \mathbb{D}$ , se sigue que

$$\tilde{E}_n^\mu(x) = \frac{z}{z^2 - 1} \left[ \frac{\mathring{E}_n^\mu(z) + \overline{\mathring{E}_n^\mu(\bar{z})}}{2} \right]. \quad (2.38)$$

Las cotas de error del Teorema 2.1.33 se pueden usar para obtener cotas de error para  $\tilde{E}_n^\mu$ .

**Corolario 2.1.35** Para todo  $x \notin [-1, 1]$ ,

$$|\tilde{E}_n^\mu(x)| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{z}{z^2 - 1} \right| |\gamma_n^{(j)}(z) + \gamma_n^{(j)}(\bar{z})|$$

con  $\gamma_n^{(j)}$  para  $j = 1, 2, 3, 4$  dado por (2.35) y  $z = x + \sqrt{x^2 - 1}$  tal que  $z \in \mathbb{D}$ .

Con respecto a la convergencia de la sucesión  $\{\tilde{F}_n\}_{n=0}^\infty$  se tiene el siguiente

**Teorema 2.1.36** Dado  $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  y  $x_j^{(n)} = \Re(z_j^{(n)})$ ,  $j = 1, \dots, n$ , donde  $\{z_j^{(n)}\}_{j=1}^n$  son los ceros de  $B_n(z, \tau_n) = \rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z)$  con  $\rho_n$  el  $n$ -ésimo polinomio de Szegő mónico para  $\hat{\mu}$  dada por (1.52). Para cada  $n \geq 1$ , sea  $\tilde{F}_n$  el  $(n-1/n)$  aproximante de tipo Padé a  $F_\mu$  generado por  $\tilde{P}_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j^{(n)})$ . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_n(x) = F_\mu(x)$$

uniformemente sobre compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ .

**Demostración.** - Sabemos que

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{\tilde{Q}_{n-1}(x)}{\tilde{P}_n(x)} = J_n^\mu \left( \frac{1}{x-t} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j^{(n)}}{x - x_j^{(n)}}.$$

Sea  $J_n^\mu(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(n)} f(x_j^{(n)})$  la  $n$ -ésima fórmula de tipo interpolatorio basada en los nodos  $\{x_j^{(n)}\}_{j=1}^n$ . Como  $\lambda_j^{(n)} > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n^\mu(f) = J_\mu(f)$  para toda función continua en  $[-1, 1]$ . Así la convergencia puntual de la sucesión  $\tilde{F}_n(x)$  esta asegurada. Sea  $K$  un compacto sobre  $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ . Entonces,

$$|\tilde{F}_n(x)| = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j^{(n)}}{x - x_j^{(n)}} \right| \leq \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j^{(n)}}{|x - x_j^{(n)}|} \leq \frac{c_0}{\text{dist}(K, [-1, 1])}, \forall x \in K.$$

La prueba sigue por el Teorema de Stieljes-Vitali (véase por ejemplo [77]). ■

En el resto de la sección estudiaremos la velocidad exacta de convergencia para cualquier sucesión  $\{H_n(z, \tau_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $(\tau_n \in \mathbb{T})$  para  $H_{\hat{\mu}}(z)$ , es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{E}_n^{\hat{\mu}}(z)|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z)|^{1/n}.$$

En este sentido, se sabe, véase [19], que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\hat{E}_n^{\hat{\mu}}(z)|^{1/n} \leq |z|, \quad (2.39)$$

uniformemente en compactos  $K \subset \mathbb{D}$ . La desigualdad (2.39) es una consecuencia del siguiente resultado sobre la asintótica de la raíz  $n$ -ésima de una sucesión de polinomios para-ortogonales (véase [19]).

**Teorema 2.1.37** *Sea  $\hat{\mu}$  una medida positiva de Borel en  $\mathbb{T}$  y sea  $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión de polinomios para-ortogonales mónicos para  $\hat{\mu}$ . Entonces,*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |B_n|^{1/n} = 1$  uniformemente en compactos de  $\mathbb{D}$ ,
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n\|_{\mathbb{T}}^{1/n} = 1$ .

Como es usual, para cualquier función continua  $g$  en  $K \subset \mathbb{C}$ ,  $\|g\|_k = \max_{x \in K} |g(x)|$ .

Nuestro objetivo es ver que (2.39) es inmejorable, es decir, proporciona la velocidad exacta de convergencia, esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{E}_n^{\hat{\mu}}(z)|^{1/n} = |z|,$$

cuando  $\hat{\mu}$  una medida simétrica, o equivalentemente que existe una medida  $\mu$  en  $[-1, 1]$  tal que se relacionen mediante (1.52). Para ello, haremos uso de las velocidades exactas de convergencia de ciertas sucesiones de aproximantes de Padé y tipo Padé a  $F_{\mu}$ . En efecto, para  $r, s \in \{0, 1\}$  sea  $\{F_n^{(r,s)}\}_{n=1}^{\infty}$  la sucesión de aproximantes racionales asociadas con las fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss dadas en Teorema 1.4.9. Entonces, se tiene el siguiente

**Teorema 2.1.38** *Sea  $\psi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$  la transformación conforme que transforma  $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$  en el exterior del círculo unidad  $\mathbb{E}$  preservando el punto del infinito, es decir,  $\psi(\infty) = \infty$ . Entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_n^{r,s}(x)|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |F_{\mu}(x) - F_n^{r,s}(x)|^{1/n} = \frac{1}{|\psi(x)|^2} < 1, x \notin [-1, 1].$$

**Demostración.-** Para  $r, s \in \{0, 1\}$ , tomemos  $F_n^{r,s} = \frac{Q_n^{r,s}}{P_n^{r,s}}$ , con  $Q_n^{r,s} \in \mathbb{P}_{n-1}$  y  $P_n^{r,s}(x) = (1-x)^r(1+x)^s \tilde{P}_{n-r-s}^{r,s}(x)$ , siendo  $\tilde{P}_k^{r,s}$  el  $k$ -ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a  $\mu_{r,s}(t) = (1-t)^r(1+t)^s d\mu(t)$  con  $t \in [-1, 1]$ . Entonces, para todo  $x \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  se tiene (véase por ejemplo [31])

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\tilde{P}_k^{r,s}(x)|^{1/k} = \frac{|\psi(x)|}{2}, \quad (2.40)$$

---

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

---

uniformemente en compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{P}_k\|_{[-1,1]}^{1/k} = \frac{1}{2}. \quad (2.41)$$

De (1.16) la expresión del error viene dada por

$$\begin{aligned} E_n^{r,s}(x) &= \frac{1}{P_n^{r,s}(x)} \int_{-1}^1 \frac{P_n^{r,s}(t)}{x-t} d\mu(t) \\ &= \frac{(-1)^{r+s}}{(x-1)^r (x+1)^s [\tilde{P}_{n-r-s}^{r,s}(x)]^2} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{P}_{n-r-s}^{r,s}(t)}{x-t} d\mu_{r,s}(t). \end{aligned}$$

Por la ortogonalidad, podemos escribir

$$E_n^{r,s}(x) = \frac{(-1)^{r+s}}{(x-1)^r (x+1)^s [\tilde{P}_{n-r-s}^{r,s}(x)]^2} \int_{-1}^1 \frac{[\tilde{P}_{n-r-s}^{r,s}(t)]^2}{x-t} d\mu_{r,s}(t). \quad (2.42)$$

La prueba se sigue procediendo como en [31] (véase también [29] ó [30]) de (2.40), (2.41) y (2.42). ■

**Nota 2.1.39** Cuando  $r = s = 0$ , el Teorema 2.1.38 proporciona el resultado clásico sobre velocidad exacta de convergencia de las sucesiones de aproximantes de Padé  $\{[n-1/n]_{F_\mu}\}_{n=1}^\infty$  a la función de Markov  $F_\mu(x) = \int_{-1}^1 \frac{d\mu(t)}{x-t}$ .

Sea  $\{H_{2n-r-s}\}_{n=2}^\infty$  la sucesión de aproximantes modificados generada por los polinomios para-ortogonales (con  $r, s \in \{0, 1\}$  fijos)  $\{B_{2n-r-s}\}_{n=2}^\infty$  como en (2.36). Se tiene que

$$F_n^{r,s}(x) = \frac{z}{z^2 - 1} H_{2n-r-s}(z), \quad (2.43)$$

con  $x \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  y  $z \in \mathbb{D}$  tal que  $z = \frac{1}{\psi(x)}$  con  $\psi$  dada en el Teorema 2.1.38. Ahora, por (2.43) y el Teorema 2.1.38 se tiene para todo  $z \in \mathbb{D}$  que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{E}_{2n-r-s}^{\hat{\mu}}(z)|^{1/(2n-r-s)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} |H_{\hat{\mu}}(z) - H_{2n-r-s}(z)|^{1/(2n-r-s)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |E_n^{r,s}(x)|^{1/(2n-r-s)} = \frac{1}{|\psi(x)|} = |z|. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Podemos afirmar que

**Teorema 2.1.40** Sea  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$  la sucesión de aproximantes modificados para  $H_{\hat{\mu}}$ , generada por los polinomios para-ortogonales mónicos  $B_n(z, \tau_n) = C_n[\rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z)]$ , ( $C_n = \frac{1}{1+\delta_n \tau_n}$  y  $\tau_n \in \{\pm 1\}$ ), siendo  $\hat{\mu}$  una medida simétrica. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z)|^{1/n} = |z|$$

uniformemente en compactos de  $\mathbb{D}$ .

---

**Demostración.**- Sea  $H_n(z) = H_n(z, \tau_n) = \frac{\tilde{B}_n(z, \tau_n)}{B_n(z, \tau_n)}$  y  $B_n(z, \tau_n) = C_n[\rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z)]$  con  $\tau_n \in \{\pm 1\}$ . Tomando  $E_n^\mu(z, \tau_n) = H_n^\mu(z) - H_n(z, \tau_n)$ , por (2.44) se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathring{E}_{2n}^\mu(z, 1)|^{1/2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathring{E}_{2n-1}^\mu(z, 1)|^{1/2n-1} = |z| \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathring{E}_{2n}^\mu(z, -1)|^{1/2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathring{E}_{2n-1}^\mu(z, -1)|^{1/2n-1} = |z| \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathring{E}_n^\mu(z, 1)|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathring{E}_n^\mu(z, -1)|^{1/n} = |z|. \quad (2.45)$$

Supongamos ahora una sucesión arbitraria  $\{H_n(z, \tau_n)\}_{n=1}^\infty$  con  $\tau_n \in \{\pm 1\}$  y tomemos  $I_1 = \{n \in \mathbb{N} : \tau_n = 1\}$  y  $I_2 = \{n \in \mathbb{N} : \tau_n = -1\}$  de forma que  $\mathbb{N} = I_1 \cup I_2$ . Supongamos que ambos  $I_1$  e  $I_2$  poseen infinitos elementos (en otro caso la prueba es trivial). Entonces, de (2.45)

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in I_1} |\mathring{E}_n^\mu(z, \tau_n)|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathring{E}_n^\mu(z, 1)|^{1/n} = |z|, \quad (2.46)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in I_2} |\mathring{E}_n^\mu(z, \tau_n)|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathring{E}_n^\mu(z, -1)|^{1/n} = |z|. \quad (2.47)$$

Tomando  $\varepsilon > 0$ , entonces por (2.46) existe  $n_1$  tal que  $\forall n \in I_1$  y  $n > n_1$ ,  $|\mathring{E}_n^\mu(z, \tau_n)|^{1/n} - |z| < \varepsilon$  y por (2.47) existe  $n_2$  tal que  $\forall n \in I_2$  y  $n > n_2$ ,  $|\mathring{E}_n^\mu(z, \tau_n)|^{1/n} - |z| < \varepsilon$ . La demostración se concluye tomando  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . ■

Analizaremos ahora el caso cuando  $\tau_n \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$ . Se puede probar el siguiente

**Teorema 2.1.41** Sea  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$  la sucesión de aproximantes modificados para  $H_\mu$  ( $\mu$  simétrica) generada por los polinomios para-ortogonales mónicos  $B_n(z, \tau_n) = B_n(z) = C_n[\rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z)]$ ,  $\tau_n \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  y  $C_n = \frac{1}{1 + \tau_n \delta_n}$ . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |H_\mu(z) - H_n(z)|^{1/n} = |z|$$

uniformemente en compactos de  $\mathbb{D}$ .

**Demostración.**- Como  $\tau_n \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$ , los ceros de  $B_n(z, \tau_n)$  no pueden aparecer en pares conjugados. Sean  $z_{j,n} = e^{i\theta_{j,n}}$ ,  $j = 1, \dots, n$  los ceros de  $B_n(z, \tau_n)$  con  $\theta_{j,n} \in (-\pi, \pi)$ . Definimos  $x_{j,n} = \cos(\theta_{j,n})$  y considerando  $P_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_{j,n})$ . Sea  $\{\tilde{F}_n\}_{n=1}^\infty$  la sucesión de aproximantes de tipo Padé asociada a  $F_\mu$  con denominador  $P_n$  y denotamos por  $\tilde{E}_n^\mu$  al correspondiente error,  $\tilde{E}_n^\mu(x) = F_\mu(x) - \tilde{F}_n(x)$ . Entonces, de (1.16) tenemos para todo  $x \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  que

$$\tilde{E}_n^\mu(x) = \frac{1}{P_n(x)} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{x-t} d\mu(t). \quad (2.48)$$

Ahora, podemos escribir  $P_n(x) = \frac{B_n(z, \tau_n) \overline{B_n(\bar{z}, \tau_n)}}{2^n z^n}$ ,  $x = J(z)$ . Por el Teorema 2.1.37 se sigue para todo  $x \notin [-1, 1]$  que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(x)|^{1/n} = \frac{1}{2|z|} = \frac{1}{2|x + \sqrt{x^2 - 1}|} = \frac{|\psi(x)|}{2} \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\|_{[-1,1]}^{1/n} = \frac{1}{2}. \quad (2.49)$$

Entonces, por (2.48), (2.49) y procediendo como en [31] se concluye,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{E}_n^\mu(x)|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |F_\mu(x) - \tilde{F}_n(x)|^{1/n} = \frac{1}{|\psi(x)|} < 1.$$

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

Sea  $\mathring{E}_n^\mu(z) = \mathring{E}_n^\mu(z, \tau_n) = H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z, \tau_n)$ ,  $z \in \mathbb{D}$ . Entonces por (2.38),

$$|\tilde{E}_n^\mu(x)|^{1/n} = \left[ \frac{1}{2} \left| \frac{z}{z^2 - 1} \right| \left| \mathring{E}_n^\mu(z) + \overline{\mathring{E}_n^\mu(\bar{z})} \right| \right]^{1/n} \quad \text{con } x = J(z). \quad (2.50)$$

Ahora, teniendo en cuenta que si  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son dos sucesiones de números positivos tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = b$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n + b_n} = \max\{a, b\}$ . Entonces, por (2.50) se sigue que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |\mathring{E}_n^\mu(z)|^{1/n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |E_n^\mu(x)|^{1/n} = |x + \sqrt{x^2 - 1}| = |z|. \quad (2.51)$$

Ahora, de (2.40) y (2.51) se concluye la demostración. ■

Finalmente, podemos agrupar los Teoremas 2.1.40 y 2.1.41 para obtener el siguiente resultado general,

**Teorema 2.1.42 (Velocidad exacta de convergencia)** *Sea  $\hat{\mu}$  una medida simétrica en  $\mathbb{T}$  y sea  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión arbitraria de aproximantes modificados a  $H_{\hat{\mu}}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\hat{\mu}(\theta)$ . Entonces para todo compacto  $K$  en  $\mathbb{D}$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|H_{\hat{\mu}} - H_n\|_K^{1/n} = \rho(K) = \max_{z \in K} \{|z|\} < 1.$$

Para finalizar esta sección presentaremos algunos ejemplos numéricos para el cálculo aproximado de ciertas funciones especiales que pueden ser expresadas en términos de la función de Markov. Para ello haremos uso de los aproximantes racionales  $\tilde{F}_n$  dados en el Teorema 2.1.36, recordamos brevemente su cálculo. Sea  $\hat{\mu}$  dada por (1.52), consideremos los ceros  $\{z_j\}_{j=1}^n$  de  $B_n(z, \tau) = \rho_n(z) + \tau \rho_n^*(z)$  con  $\tau \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$ , siendo  $\rho_n$  el  $n$ -ésimo polinomio de Szegő mónico para  $\hat{\mu}$ . Si  $x_j = \Re(z_j)$  y  $\tilde{P}_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$ , el polinomio  $\tilde{Q}_{n-1}(x)$  viene definido por (aproximante tipo Padé),

$$F_\mu(x) - \tilde{F}_n(x) = F_\mu(x) - \frac{\tilde{Q}_{n-1}(x)}{\tilde{P}_n(x)} = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad (x \rightarrow \infty).$$

Además, dado que  $\tilde{F}_n$  depende del parámetro  $\tau \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$ , éste será elegido de manera que una condición de interpolación en (2.1.3) sea incrementada. Nos referiremos a este  $\tau$  como el *parámetro óptimo* y lo denotaremos por  $\tau^*$ . En cuanto a su computación, partiremos de la información disponible de  $\mu$  (o equivalentemente de  $F_\mu$ ), en este caso los momentos  $c_k$  dados por (1.3), computaremos los momentos modificados (véase por ejemplo [63])

$$\tilde{c}_k = \int_{-1}^{+1} T_k(t) d\mu(t)$$

donde para todo  $k \geq 0$ ,  $T_k(t) = \cos(k \arccos(t))$  denota el  $k$ -ésimo polinomio de Chebyshev de primera especie. Dado que  $\hat{\mu}$  es simétrica se tiene que  $d_{-k} = d_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\sigma(\theta) = 2\tilde{c}_k$ . De los momentos trigonométricos  $\{d_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$  podemos computar los polinomios de Szegő  $\{\rho_k\}_{k=0}^\infty$  mediante la ley de recurrencia de Szegő (Teorema 1.3.2), de ahí, los ceros de  $\rho_n(z) + \tau \rho_n^*(z)$ ,  $\tau \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  obteniendo el polinomio generador  $\tilde{P}_n$  del aproximante  $\tilde{F}_n$ . Sin embargo, procederemos de una manera más eficiente. Por medio de la ley de recurrencia

de Szegő computaremos de manera recursiva los parámetros de Verblunsky  $\delta_n = \rho_n(0)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  y  $\delta_0 = 1$ . Ahora, dado  $\tau \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$ , consideremos la matriz de Hessenberg de orden  $n$   $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n(\tau, \delta_1, \dots, \delta_n)$  (1.40) de manera que los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  y pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  puedan ser computados como un problema de autovalores. Por tanto, obtenemos

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{\tilde{Q}_{n-1}(x)}{\tilde{P}_n(x)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{x - \Re(z_j)}. \quad (2.52)$$

Consideraremos varios ejemplos que han sido estudiados anteriormente en [81]. Haremos comparaciones entre los aproximantes tipo Padé  $\tilde{F}_n = (n - 1/n)_{F_\mu}$  y los correspondientes aproximantes de Padé  $[n - 1/n]_{F_\mu}$  y  $[\frac{n}{2} - 1/\frac{n}{2}]_{F_\mu}$  cuando  $n$  es par. Recaltar que

$$F_\mu(x) - \tilde{F}_n(x) = F_\mu(x) - [\frac{n}{2} - 1/\frac{n}{2}]_{F_\mu}(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad (x \rightarrow \infty),$$

así que ambos aproximantes requieren la misma información en términos de los momentos  $c_k$ . En las tablas siguientes se muestran los errores absolutos, denotando por  $(m - 1/m)$  PTA el error del  $(m - 1/m)$  aproximante tipo Padé y por  $[m - 1/m]$  PA el error del  $[m - 1/m]$  aproximante de Padé.

**Ejemplo 2.1.43**  $\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  (medida de Chebyshev de primera especie). Ahora la función de Markov viene dada por

$$F_\mu(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}},$$

y la medida asociada  $\hat{\mu}$  en  $\mathbb{T}$  es  $\hat{\mu}(\theta) \equiv 1$  (medida de Lebesgue). En este caso los polinomios de Szegő mónicos viene dados de forma explícita por  $\rho_n(z) = z^n$  así que los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  son los ceros de  $B_n(z, \tau) = z^n + \tau$  y los pesos vienen dados por  $\lambda_j = \frac{2\pi}{n}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , (véase por ejemplo [74]). Entonces, tomando  $\tau = -e^{i\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$  de (2.52) se sigue,

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - \cos\left(\frac{\alpha+2j\pi}{n}\right)}.$$

Los cálculos pueden verse en la Tabla 2.9.

**Ejemplo 2.1.44 (El logaritmo natural)** Aquí estamos interesados en la aproximación de  $\log(1+x)$ . Tomando  $\mu(t) \equiv 1$  y escribiendo  $F_\mu(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{x-t}$ , entonces  $\log(1+x) = F_\mu(1 + \frac{x}{2})$ . Ahora,  $\hat{\mu}(\theta) = |\sin(\theta)|$  que es una medida de tipo Jacobi (por medida de tipo Jacobi en  $\mathbb{T}$  nos referimos a una medida de la forma  $\hat{\mu}(\theta) = (1 - \cos \theta)^\alpha (1 + \cos \theta)^\beta$ ,  $\alpha, \beta > -1/2$ ). Aquí, los parámetros de Verblunsky se conocen explícitamente (véase por ejemplo [68]):  $\delta_n = \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Los errores son mostrados en las Tablas 2.10 y 2.11.

## 2.1. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

$x$	$(9/10)PTA, \tau^* = i$	$[4/5]PA$	$[9/10]PA$
2	$1,320E - 11$	$6,921E - 06$	$1,319E - 11$
$2i$	$7,987E - 13$	$1,510E - 06$	$8,022E - 13$
$3 + i$	$6,179E - 15$	$2,474E - 08$	$7,628E - 15$
4	$5,329E - 15$	$1,773E - 09$	$5,995E - 15$
$1 + 0,5i$	$2,667E - 06$	$4,061E - 03$	$2,667E - 06$
$0,3i$	$1,622E - 02$	$3,300E - 01$	$1,622E - 02$
$0,2 + 0,1i$	$9,030E - 01$	$1,924E + 00$	$9,030E - 01$

Tabla 2.9: Errores absolutos de los aproximantes tipo Padé y Padé del ejemplo 2.1.43.

$x$	$(9/10)PTA, \tau = i$	$[4/5]PA$	$[9/10]PA$
1	$3,128E - 07$	$3,047E - 06$	$5,939E - 12$
$-\frac{2}{3}i$	$1,201E - 09$	$1,237E - 08$	$7,966E - 15$
$\frac{4-2i}{5}$	$5,709E - 08$	$5,727E - 07$	$2,587E - 13$
$\frac{180-200i}{181}$	$7,093E - 06$	$7,446E - 05$	$2,616E - 09$
$-\frac{2}{5}i$	$5,277E - 12$	$5,393E - 11$	$4,829E - 15$
$2 + 2i$	$1,564E - 03$	$1,788E - 02$	$8,971E - 05$
$\frac{1}{2}$	$8,258E - 11$	$8,323E - 10$	$7,994E - 15$

Tabla 2.10: Errores absolutos de los aproximantes tipo Padé y Padé del ejemplo 2.1.44.

$x$	$(9/10)PTA, \tau^* = -0,09090909090909 + 0,99585919546394i$
1	$9,757E - 09$
$-\frac{2}{3}i$	$1,142E - 11$
$\frac{4-2i}{5}$	$1,205E - 09$
$\frac{180-200i}{181}$	$3,158E - 07$
$-\frac{2}{5}i$	$1,433E - 14$
$2 + 2i$	$1,389E - 04$
$\frac{1}{2}$	$5,131E - 13$

Tabla 2.11: Errores absolutos de los aproximantes tipo Padé con parámetro óptimo del ejemplo 2.1.44.

**Ejemplo 2.1.45 (La inversa de la tangente)** Sea

$$\text{Arctan}\omega = \int_0^\omega \frac{dt}{1+t^2}.$$

Consideramos  $F_\mu(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t}(x-t)}$ , después de algunas manipulaciones, se tiene que  $\text{Arctan}\omega = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} F_\mu\left(1 + \frac{2}{\omega^2}\right)$ . Siendo la medida asociada  $\hat{\mu}$  en  $\mathbb{T}$  de tipo Jacobi,  $\hat{\mu}(\theta) = \frac{|\sin(\theta)|}{\sqrt{1-\cos(\theta)}} = \sqrt{1+\cos\theta}$ . Los parámetros Verblunsky vienen dados explícitamente por  $\delta_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Los experimentos numéricos están recogidos en las Tablas 2.12 y 2.13.



$\omega$	$(9/10)PTA, \tau = i$	$[4/5]PA$	$[9/10]PA$
$\frac{\sqrt{10}}{2}i$	$6,225E - 10$	$1,293E - 08$	$2,576E - 14$
$\frac{\sqrt{-10-20i}}{5}$	$6,157E - 12$	$1,262E - 10$	$1,519E - 14$
$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{3}$	$3,775E - 14$	$9,436E - 13$	$9,714E - 15$
$\frac{2\sqrt{-725-290i}}{29}$	$8,919E - 11$	$1,844E - 09$	$2,102E - 14$
$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$8,882E - 15$	$1,910E - 14$	$6,883E - 15$
$\frac{2\sqrt{-1515-15150i}}{303}$	$6,681E - 14$	$1,594E - 12$	$1,019E - 14$
$\frac{2\sqrt{44900-15715i}}{449}$	$1,311E - 14$	$1,832E - 13$	$8,494E - 15$

Tabla 2.12: Errores absolutos de los aproximantes tipo Padé y Padé del ejemplo 2.1.45.

$\omega$	$(9/10)PTA, \tau^* = -0,04761904761905 + 0,99886556968586i$
$\frac{\sqrt{10}}{2}i$	$1,383E - 11$
$\frac{\sqrt{-10-20i}}{5}$	$1,145E - 13$
$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{3}$	$7,299E - 15$
$\frac{2\sqrt{-725-290i}}{29}$	$1,730E - 12$
$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$4,885E - 15$
$\frac{2\sqrt{-1515-15150i}}{303}$	$7,870E - 15$
$\frac{2\sqrt{44900-15715i}}{449}$	$5,955E - 15$

Tabla 2.13: Errores absolutos de los aproximantes tipo Padé con parámetro óptimo del ejemplo 2.1.45.

**Ejemplo 2.1.46 (Integral exponencial)** Sea

$$E_n(\omega) = \int_1^\infty \frac{e^{-\omega t}}{t^n} dt, \Re(\omega) \geq 0, n = 1, 2, \dots$$

Podemos restringirnos al caso  $n = 1$  ya que se verifica la relación de recurrencia  $E_{n+1}(\omega) = \frac{e^{-\omega} - \omega E_n(\omega)}{n}$ . Estaremos pues interesados en la estimación de  $E_1(\omega)$  la cual puede ser expresada tomando  $t = \nu/\omega$ , como  $E_1(\omega) = \int_\omega^\infty \frac{e^{-\nu}}{\nu} d\nu$ ,  $|\arg(\omega)| < \pi$ . Ahora, considerando  $F_\mu(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{e^{2/(t-1)}}{x-t} dt$ , tras algunos cálculos  $E_1(\omega) = e^{1-\omega} \left[ E_1(1) - F_\mu \left( \frac{\omega+1}{\omega-1} \right) \right]$  donde  $E_1(1) \approx 0,2193839343955203$ . En este caso, los momentos  $c_k = \int_{-1}^{+1} t^k e^{2/(t-1)} dt$  pueden ser recursivamente computados procediendo de forma similar a como se hizo en [96]. En las Tablas 2.14 y 2.15 se muestran los correspondientes resultados numéricos.

De las tablas anteriores se ve que los aproximantes tipo Padé compiten favorablemente con los aproximantes de Padé. Además, la mejora al elegir el parámetro óptimo  $\tau^*$  se muestra claramente. En este aspecto, cabe indicar que (véase [14]) para cada  $n$  existen dos parámetros óptimos  $\tau^*$  y  $\bar{\tau}^*$ . Además, ambos parámetros producen el mismo aproximante. En efecto, si denotamos por  $\tilde{F}_n(x) = \tilde{F}_n(x, \tau)$  el  $(n - 1/n)$  PTA correspondiente a  $\tau \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$ , por (2.52) se sigue que  $\tilde{F}_n(x, \tau) = \tilde{F}_n(x, \bar{\tau})$ .

## 2.2. Fórmulas de Cuadratura de tipo-Gauss con un nodo prefijado en el interior

$\omega$	$(9/10)PTA, \tau = i$	$[4/5]PA$	$[9/10]PA$
2	$7,445E - 15$	$1,509E - 14$	$5,600E - 15$
$\frac{5-11i}{13}$	$4,104E - 11$	$8,605E - 11$	$1,270E - 14$
$2 - i$	$1,203E - 13$	$2,492E - 13$	$7,077E - 15$
$\frac{1-8i}{5}$	$1,147E - 10$	$2,354E - 10$	$1,238E - 14$
$\frac{7}{3}$	$1,399E - 08$	$2,710E - 08$	$1,621E - 14$
$\frac{4+2i}{5}$	$4,573E - 08$	$8,752E - 08$	$3,422E - 13$
$\frac{3}{2}$	$2,210E - 07$	$4,121E - 07$	$7,958E - 12$

Tabla 2.14: Errores absolutos de los aproximantes tipo Padé y Padé del ejemplo 2.1.46.

$\omega$	$(9/10)PTA, \tau^* = -0,39240172254712 + 0,91979393786981i$
2	$3,886E - 16$
$\frac{5-11i}{13}$	$3,560E - 13$
$2 - i$	$5,825E - 16$
$\frac{1-8i}{5}$	$1,337E - 12$
$\frac{7}{3}$	$4,033E - 10$
$\frac{4+2i}{5}$	$1,616E - 09$
$\frac{3}{2}$	$1,078E - 08$

Tabla 2.15: Errores absolutos de los aproximantes tipo Padé con parámetro óptimo del ejemplo 2.1.46.

Finalmente, como era de esperar, dado que los aproximantes satisfacen condiciones de interpolación en el infinito, la mejor estimación para  $F_\mu$  es obtenida cuando  $x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$  esta suficientemente lejos del origen.

## 2.2. Fórmulas de Cuadratura de tipo-Gauss con un nodo prefijado en el interior

En esta sección presentaremos una caracterización de las fórmulas de tipo-Gauss con un nodo extra prefijado en  $(-1, 1)$ , estudiadas en [12] aprovechando la conexión entre el intervalo  $[-1, 1]$  y la circunferencia unidad, así como sus consecuencias desde un punto de vista computacional.

### 2.2.1. Caracterización

Tal y como vimos en el capítulo anterior existen situaciones especiales en las aplicaciones que para estimar integrales del tipo

$$J_\mu(f) = \int_{-1}^1 f(x) d\mu(x) \quad (2.53)$$

siendo  $\mu$  una medida positiva en  $[-1, 1]$ , es ventajoso considerar fórmulas de cuadratura con las siguientes características, Sea  $x_\alpha \in (-1, 1)$ ,  $r, s \in \{0, 1\}$  y  $n > 1 + r + s$ , pesos

$\lambda_+^{r,s}, \lambda_-^{r,s}, \lambda_\alpha^{r,s}$  y  $\{\lambda_j^{r,s}\}_{j=1}^{n-r-s-1}$ , y nodos distintos  $\{x_j^{r,s}\}_{j=1}^{n-r-s-1} \subset (-1, 1)$  de manera que,

$$\begin{aligned} J_n^{r,s}(f) &= r\lambda_+^{r,s}f(1) + s\lambda_-^{r,s}f(-1) + \lambda_\alpha^{r,s}f(x_\alpha) + \sum_{j=1}^{n-1-r-s} \lambda_j^{r,s}f(x_j^{r,s}) \\ &= J_\mu(f), \text{ para toda } f \in \mathbb{P}_{2(n-1)-r-s}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

con  $J_\mu(f)$  dada por (1.9).

Sabemos que estas fórmulas de cuadratura existen y sus pesos son positivos, véase [12]. Nuestro objetivo en esta sección es recuperar parte de los resultados obtenidos en [12], como consecuencia de su conexión con ciertas fórmulas de cuadratura de Szegő-Radau (Lobatto). Concretamente con el fin de caracterizar la fórmula (2.54), sin usar argumentos de cuasi-ortogonalidad tal y como se hizo en [12], trasladamos con la transformación de Joukowski  $x = j(z)$ , (2.53) y (2.54) a la circunferencia unidad. Para lo cual, la medida  $\mu$  sobre  $[-1, 1]$  induce una nueva medida simétrica  $\hat{\mu}(\theta) = \mu(\cos \theta)|\sin \theta|$  sobre  $\mathbb{T}$  o equivalentemente sobre cualquier intervalo de longitud  $2\pi$ , que tomaremos sin pérdida de generalidad  $[-\pi, \pi]$ .

Por un lado, cuando  $r = s$ , veremos que siempre existe  $J_n^{0,0}(f)$  o bien  $J_n^{1,1}$  pero nunca ambas a la vez. Por otro lado, cuando  $r \neq s$  sucede algo parecido, existe si  $r = 1$  y  $s = 0$  ó  $r = 0$  y  $s = 1$  pero no simultáneamente. Es más, en aquellos casos donde la existencia este garantizada será única y sus pesos positivos.

De la proposición 1.4.7 la existencia de  $J_n^{r,s}(f)$  queda determinada por la de una fórmula de Szegő-Lobatto que tiene por nodos fijos a  $z_\alpha$  y  $\bar{z}_\alpha$  donde  $\Re(z_\alpha) = x_\alpha$ , la cual vendrá dada por el Teorema 1.3.17.

**Teorema 2.2.1** Sean  $\hat{\mu}$  una función peso simétrica sobre  $\mathbb{T}$ ,  $\rho_n$  el  $n$ -ésimo polinomio de Szegő mónico para  $\hat{\mu}$  y  $z_\alpha \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$ . Tomemos  $a := z_\alpha^{n-3} \frac{\rho_{n-2}(\bar{z}_\alpha)}{\rho_{n-2}(z_\alpha)} \in \mathbb{T}$ . Entonces,

1. si  $a = \pm \bar{z}_\alpha$  (y por tanto,  $a \neq \pm 1$ ), tomando  $\tau_n = \pm 1$ , entonces existe una única fórmula de Szegő-Lobatto con  $n$  nodos simétrica con nodos prefijados en  $\{z_\alpha, \bar{z}_\alpha\}$  y cuyos nodos son los ceros de  $\tilde{B}_n(z, \tau_n) = z\tilde{\rho}_{n-1}(z) + \tau_n\tilde{\rho}_{n-1}^*(z)$  con  $\tilde{\rho}_{n-1}(z) = z\rho_{n-2}(z) \mp x_\alpha\rho_{n-2}^*(z)$ .
2. Si  $a = \pm 1$  (y por tanto,  $a \neq \pm \bar{z}_\alpha$ ), entonces  $\{z_\alpha, \bar{z}_\alpha\}$  son ceros de  $B_{n-1}(z, \mp 1)$ . La fórmula de Szegő con  $(n-1)$  nodos determinada por este polinomio, es una regla de Szegő-Lobatto simétrica.
3. Si  $a \neq \pm 1$  y  $az_\alpha \neq \pm 1$  (caso general), tomemos  $\gamma = -\frac{\Im(z_\alpha)}{\Im(az_\alpha)} \neq 0$  y  $r = \left| \frac{\Im(a)}{\Im(az_\alpha)} \right| > 0$ . Entonces,  $\gamma - r \in (-1, 1)$  ó  $\gamma + r \in (-1, 1)$ , pero no ambos simultáneamente. Además, tomando  $\tilde{\delta}_{n-1} = \{\gamma - r, \gamma + r\} \cap (-1, 1)$ ,  $s_n = \text{sgn}\left(\frac{\Im(a)}{\Im(az_\alpha)}\right)$  y

$$\tau_n = \pm(-1)^{\frac{s_n+1}{2}} \text{ si } \tilde{\delta}_{n-1} = \gamma \pm r,$$

existe una única fórmula de Szegő-Lobatto con  $n$  nodos simétrica con nodos prefijados  $\{z_\alpha, \bar{z}_\alpha\}$  y cuyos nodos son los ceros de  $\tilde{B}_n(z, \tau_n) = z\tilde{\rho}_{n-1}(z) + \tau_n\tilde{\rho}_{n-1}^*(z)$  con  $\tilde{\rho}_{n-1}(z) = z\rho_{n-2}(z) + \tilde{\delta}_{n-1}\rho_{n-2}^*(z)$ .

En todos los casos, las fórmulas de cuadratura son exactas en  $\Lambda_{-(n-2), n-2}$ .

## 2.2. Fórmulas de Cuadratura de tipo-Gauss con un nodo prefijado en el interior

**Demostración.-** La demostración en todos los casos se sigue del Teorema 1.3.17 tomando  $z_\beta = \bar{z}_\alpha$  y  $b = \bar{a}$  y del hecho de que debe verificarse que  $\tilde{\delta}_{n-1} \in (-1, 1)$  y  $\tau_n = \pm 1$ .

Para el primer caso se sigue de la Nota 1.3.18 que  $\tilde{\delta}_{n-1}$  debe tomarse en  $(-1, 1)$  y en el segmento que une  $\gamma_1 = -\bar{a}$  y  $\gamma_2 = -a$ . Por tanto,  $\tilde{\delta}_{n-1} = -\Re[a]$  y la expresión para  $\tau_n$  sale aplicando la obtenida en la Nota 1.3.18. La prueba en el segundo caso es directa.

En la tercera situación,  $\tilde{\delta}_{n-1}$  debe ser real y escogerse en el arco  $\Gamma \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$ , siendo  $\Gamma$  el círculo con centro  $\gamma$  y radio  $r$ . Como el centro es real y  $\tilde{\delta}_{n-1} \in (-1, 1)$  deducimos que debemos tomar  $\tilde{\delta}_{n-1} = \gamma \pm r$ . Así, hemos de probar que  $|\gamma - r| < 1 \Leftrightarrow |\gamma + r| \geq 1$ . De [79, Ecuación (27)] imponiendo que  $\tilde{\delta}_{n-1}$  sea real, se tiene que  $\tilde{\delta}_{n-1}$  es una solución de la ecuación

$$x^2 - 2\gamma x + 2\gamma\Re[a] - 1 = 0.$$

Como sabemos que la regla existe, la ecuación tendrá dos soluciones reales dadas por

$$\tilde{\delta}_{n-1}^\pm = \gamma \left[ 1 \pm \sqrt{A} \right], \quad A := 1 + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{\gamma} - 2\Re[a] \right) > 0,$$

y por tanto queda probar que tan solo una de ellas se encuentra en  $(-1, 1)$ . Claramente, cuando  $|\gamma| \geq 1$  se sigue que  $|\tilde{\delta}_{n-1}^+| > 1$ , así, solo queda analizar el caso  $|\gamma| < 1$ . Si  $\gamma \in (0, 1)$ , como  $\Re[a] < 1$  se tiene que  $\sqrt{A} > \frac{1}{\gamma}$ , lo que implica  $\tilde{\delta}_{n-1}^+ > 1$ . De manera similar, si  $\gamma \in (-1, 0)$ , como  $\Re[a] > -1$  ahora  $\sqrt{A} > \frac{-1}{\gamma}$ , teniendo  $\tilde{\delta}_{n-1}^+ < -1$ . Finalmente, la expresión para  $\tau_n \in \{\pm 1\}$  se sigue del caso general en el Teorema 1.3.17. ■

Del Teorema 2.2.1, vemos que para cada  $z_\alpha \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  puede ser construida una única fórmula de Szegő-Lobatto simétrica con  $n$  nodos, donde  $\{z_\alpha, \bar{z}_\alpha\}$  están prefijados, exacta en  $\Lambda_{-(n-2), n-2}$ .

La Proposición 1.4.7 y el Teorema 2.2.1 son la clave para la construcción de fórmulas de cuadratura del tipo (2.54) desde la circunferencia unidad. Consideremos  $x_\alpha \in (-1, 1)$  fijo y escogiendo  $z_\alpha$  y  $\bar{z}_\alpha$  sobre  $\mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  tal que  $\Re(z_\alpha) = x_\alpha$  y construimos una fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto simétrica.

Por un lado, si consideremos primero un número par de nodos en la circunferencia unidad, esto es  $2n$ . Los nodos serán los ceros de

$$\tilde{B}_{2n}(z, \tilde{\tau}_{2n}) = z\tilde{\rho}_{2n-1}(z) + \tilde{\tau}_{2n}\tilde{\rho}_{2n-1}^*(z) \text{ con } \tilde{\rho}_{2n-1}(z) = z\rho_{2n-2}(z) + \tilde{\delta}_{2n-1}\rho_{2n-2}^*(z), \quad (2.55)$$

siendo  $\rho_{2n-2}$  el polinomio de Szegő mónico de grado  $2n - 2$  para  $\hat{\mu}$ ,  $\tilde{\delta}_{2n-1} \in (-1, 1)$  y  $\tilde{\tau}_{2n} \in \{\pm 1\}$ . Por tanto, hay dos posibilidades

- $\tilde{\tau}_{2n} = 1$ . De (2.55) vemos que  $\tilde{B}_{2n}(\pm 1, 1) \neq 0$ . Por tanto, sus  $2n$  ceros restantes aparecen en pares complejos conjugados sobre  $\mathbb{T}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{2n}^{\hat{\mu}}(\hat{f}) &= \hat{\lambda}_\alpha[\hat{f}(z_\alpha) + \hat{f}(\bar{z}_\alpha)] + \sum_{j=1}^{n-1} \hat{\lambda}_j[\hat{f}(z_j) + \hat{f}(\bar{z}_j)] \\ &= I_{\hat{\mu}}(\hat{f}), \text{ para } \hat{f} \in \Lambda_{-(2n-2), 2n-2}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Entonces, de la Proposición 1.4.7 con  $N = 2n - 2$  se observa que podemos computar una fórmula de cuadratura satisfaciendo (2.54) con  $r = s = 0$ . En efecto, tomando

$x_\alpha = \Re(z_\alpha)$ ,  $\lambda_\alpha^{0,0} = \dot{\lambda}_\alpha$ ,  $x_j^{0,0} = \Re(z_j)$  y  $\lambda_j^{0,0} = \dot{\lambda}_j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  se sigue que,

$$J_n^{0,0}(f) = \lambda_\alpha^{0,0} f(x_\alpha) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^{0,0} f(x_j^{0,0}) = J_\mu(f), \text{ para } f \in \mathbb{P}_{2n-2}. \quad (2.57)$$

Es bien sabido que los pesos en (2.57) son todos positivos.

- $\tilde{\tau}_{2n} = -1$ . De (2.55), vemos que  $\tilde{B}_{2n}(\pm 1, -1) = 0$ , ya que  $\tilde{\rho}_{2n-1}$  tiene coeficientes reales, y que el resto de ceros de  $\tilde{B}_{2n}(z, -1)$  aparecen sobre  $\mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  en pares complejos conjugados. La correspondiente fórmula de Szegő-Lobatto simétrica con  $2n$  nodos  $\tilde{I}_{2n}^{\dot{\mu}}(f)$  puede expresarse como

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{2n}^{\dot{\mu}}(\dot{f}) &= \dot{\lambda}_\alpha[\dot{f}(z_\alpha) + \dot{f}(\bar{z}_\alpha)] + \dot{\lambda}_+ \dot{f}(1) + \dot{\lambda}_- \dot{f}(-1) + \sum_{j=1}^{n-2} \dot{\lambda}_j[\dot{f}(z_j) + \dot{f}(\bar{z}_j)] \\ &= I_{\dot{\mu}}(\dot{f}), \text{ para } \dot{f} \in \Lambda_{-(2n-2), 2n-2}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

De nuevo por la Proposición 1.4.7, reemplazando  $n$  por  $n+1$ , tendremos computada la fórmula (2.54) cuando  $r = s = 1$ . En efecto, tomando  $x_\alpha = \Re(z_\alpha)$ ,  $\lambda_\alpha^{1,1} = \dot{\lambda}_\alpha$ ,  $\lambda_+^{1,1} = \frac{\dot{\lambda}_+}{2}$ ,  $\lambda_-^{1,1} = \frac{\dot{\lambda}_-}{2}$ ,  $x_j^{1,1} = \Re(z_j)$  y  $\lambda_j^{1,1} = \dot{\lambda}_j$ ,  $j = 1, \dots, n-2$  se sigue que,

$$\begin{aligned} J_{n+1}^{1,1}(f) &= \lambda_+^{1,1} f(1) + \lambda_-^{1,1} f(-1) + \lambda_\alpha^{1,1} f(x_\alpha) + \sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j^{1,1} f(x_j^{1,1}) \\ &= J_\mu(f), \text{ para } f \in \mathbb{P}_{2n-2}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

A continuación, consideremos la fórmula de Szegő-Lobatto simétrica de  $(2n-1)$  nodos  $\tilde{I}_{2n-1}^{\dot{\mu}}(\dot{f})$  para  $\dot{\mu}$  donde  $z_\alpha$  y  $\bar{z}_\alpha$  están prefijados. Ahora los nodos de la cuadratura son los ceros de  $\tilde{B}_{2n-1}(z, \tilde{\tau}_{2n-1}) = z\tilde{\rho}_{2n-2}(z) + \tilde{\tau}_{2n-1}\tilde{\rho}_{2n-1}^*(z)$ , donde  $\tilde{\rho}_{2n-2}(z) = z\rho_{2n-3}(z) + \tilde{\delta}_{2n-2}\rho_{2n-3}^*(z)$ ,  $\tilde{\delta}_{2n-2} \in (-1, 1)$ ,  $\tilde{\tau}_{2n-1} \in \{\pm 1\}$  y siendo  $\rho_{2n-3}(z)$  el  $(2n-3)$ -ésimo polinomio mónico de Szegő para  $\dot{\mu}$ . Como antes, analizaremos las dos posibilidades para  $\tilde{\tau}_{2n-1} \in \{\pm 1\}$ .

- $\tilde{\tau}_{2n-1} = 1$ . Como  $\tilde{\rho}_{2n-2}(\pm 1) = \tilde{\rho}_{2n-2}^*(\pm 1)$  se sigue que  $z = -1$  es el único cero real de  $\tilde{B}_{2n-1}(z, 1)$ , estando los otros  $2n-2$  sobre  $\mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  en pares complejos conjugados. La fórmula será por tanto de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{2n-1}^{\dot{\mu}}(\dot{f}) &= \dot{\lambda}_- \dot{f}(-1) + \dot{\lambda}_\alpha[\dot{f}(z_\alpha) + \dot{f}(\bar{z}_\alpha)] + \sum_{j=1}^{n-2} \dot{\lambda}_j[\dot{f}(z_j) + \dot{f}(\bar{z}_j)] \\ &= I_{\dot{\mu}}(\dot{f}), \text{ para } \dot{f} \in \Lambda_{-(2n-3), 2n-3}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Nuevamente, cuando tomamos  $N = 2n-3$ , la Proposición 1.4.7 nos permite computar la fórmula de cuadratura de (2.54) con  $r = 0$  y  $s = 1$ . En efecto, tomando  $\lambda_-^{0,1} = \frac{\dot{\lambda}_-}{2}$ ,  $\lambda_\alpha^{0,1} = \dot{\lambda}_\alpha$ ,  $x_j^{0,1} = \Re(z_j)$  y  $\lambda_j^{0,1} = \dot{\lambda}_j$ ,  $j = 1, \dots, n-2$ , entonces,

$$\begin{aligned} J_n^{0,1}(f) &= \lambda_-^{0,1} f(-1) + \lambda_\alpha^{0,1} f(x_\alpha) + \sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j^{0,1} f(x_j^{0,1}) \\ &= J_\mu(f), \text{ para } f \in \mathbb{P}_{2n-3}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

## 2.2. Fórmulas de Cuadratura de tipo-Gauss con un nodo prefijado en el interior

- $\tilde{\tau}_{2n-1} = -1$ . Ahora, con argumentos similares  $\tilde{B}_{2n-1}(z, -1)$  tiene un único cero real en  $z = 1$  y el resto sobre  $\mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  en pares complejos conjugados. Por tanto, la correspondiente  $(2n - 1)$ -ésima fórmula de Szegő-Lobatto puede expresarse como

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{2n-1}^{\tilde{\mu}}(f) &= \dot{\lambda}_+ f(1) + \dot{\lambda}_\alpha [f(z_\alpha) + f(\bar{z}_\alpha)] + \sum_{j=1}^{n-2} \dot{\lambda}_j [f(z_j) + f(\bar{z}_j)] \\ &= I_{\tilde{\mu}}(f), \text{ para } f \in \Lambda_{(2n-3), 2n-3}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

De la Proposición 1.4.7 con  $N = 2n - 3$ , obtenemos (2.54) con  $r = 1$  y  $s = 0$ , se sigue directamente. En efecto, tomando  $\lambda_+^{1,0} = \frac{\dot{\lambda}_+}{2}$ ,  $\lambda_\alpha^{1,0} = \dot{\lambda}_\alpha$ ,  $x_j^{1,0} = \Re(z_j)$  y  $\lambda_j^{1,0} = \dot{\lambda}_j$ ,  $j = 1, \dots, n - 2$ . entonces,

$$\begin{aligned} J_n^{1,0}(f) &= \lambda_+^{1,0} f(1) + \lambda_\alpha^{1,0} f(x_\alpha) + \sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j^{1,0} f(x_j^{1,0}) \\ &= J_\mu(f), \text{ para } f \in \mathbb{P}_{2n-3}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Del análisis anterior podemos enunciar el siguiente resultado

**Teorema 2.2.2** *Dados  $r$  y  $s$  en  $\{0, 1\}$ ,  $x_\alpha \in (-1, 1)$  y  $z_\alpha \in \mathbb{T}$  tal que  $x_\alpha = \Re(z_\alpha)$ . Sea  $\mu$  una función peso sobre  $[-1, 1]$  y  $\tilde{\mu}$  la función peso sobre  $\mathbb{T}$  dada por (1.52). Para  $n > 1 + r + s$  consideremos la fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto simétrica de  $(2n - r - s)$  nodos para  $\tilde{\mu}$  donde  $z_\alpha$  y  $\bar{z}_\alpha$  están prefijados. Sean  $\tilde{\delta}_{2n-(r+s+1)} \in (-1, 1)$  y  $\tilde{\tau}_{2n-(r+s)} \in \{\pm 1\}$  los parámetros que caracterizan esta cuadratura. Entonces, la fórmula de cuadratura  $J_n^{r,s}(f)$  construida en (2.57)-(2.59)-(2.61)-(2.63) coincide con (2.54), si y solo si,  $\tilde{\tau}_{2n-(r+s)+2rs} = (-1)^r$ .*

**Nota 2.2.3** *Debido a la positividad de los pesos en una fórmula de Szegő-Lobatto se sigue que los pesos de cualquier fórmula  $J_n^{r,s}(f)$  satisfaciendo (2.54) son positivos.*

Dado que el Teorema 2.2.2 caracteriza las fórmulas de tipo-Gauss con respecto a una medida  $\mu$ , parece natural que nos planteemos reescribirlo de manera que la información inicial sea en términos de  $\mu$ . Para nuestro propósito, y en virtud de la simplicidad, nos restringiremos a la cuadratura de  $n$  nodos (2.54) cuando  $r = s = 0$ , ya que el resto de casos, salvo matices, se desarrollan de manera similar. Consideremos pues, la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau

$$J_n^{0,0}(f) = J_n^\mu(f) = \lambda_\alpha f(x_\alpha) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j f(x_j), \quad (2.64)$$

tal que  $J_\mu(f) = J_n^\mu(f)$ , para todo  $f \in \mathbb{P}_{2n-2}$ , donde por simplicidad en la notación suprimiremos el super-índice  $(0, 0)$ . Teniendo en cuenta el Teorema 1.2.8 el polinomio nodal  $R_n(x) = (x - x_\alpha) \prod_{j=1}^{n-1} (x - x_j)$  es ortogonal a  $\mathbb{P}_{n-2}$ . Si denotamos por  $\{p_k\}_{k=0}^\infty$  a la sucesión de polinomios mónicos ortogonales para  $\mu$ , donde  $P_{n-1}(x_\alpha) \neq 0$ , se sigue que  $R_n(x) = p_n(x) - C_n p_{n-1}(x)$  con  $C_n = f_n(x_\alpha)$  donde  $f_n(x) = \frac{p_n(x)}{p_{n-1}(x)}$  para  $n \geq 1$ . Sabemos (véase, por ejemplo [106]) que el polinomio  $R_n$  tiene al menos  $n - 1$  ceros distintos en  $(-1, 1)$ . Sin embargo, un cero podría situarse fuera del intervalo. Por tanto, nuestro objetivo es dar

condiciones sobre  $x_\alpha$  con el fin de todos los ceros de  $R_n(x)$  sean distintos y situados en  $(-1, 1)$ .

Haciendo uso de las relaciones existentes entre las sucesiones de polinomios ortogonales asociados con  $\mu$  y  $\hat{\mu}$  respectivamente (Teorema 1.4.4), se sigue que si  $p_n$  denota el polinomio ortogonal mónico para  $\mu$  de grado  $n$  y  $\rho_{2n}$  el  $2n$ -ésimo polinomio de Szegő mónico para  $\hat{\mu}$ , de (1.54) se sigue

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n(1 + \delta_{2n})} \frac{\rho_{2n}(z) + \rho_{2n}^*(z)}{z^n} = \frac{1}{2^n(1 + \delta_{2n})} \frac{B_{2n}(z, 1)}{z^n}, \quad (2.65)$$

con  $x = J(z)$  y  $B_{2n}(z) \in \mathbb{P}_{2n}$ .

Podemos escribir  $R_n(x) = z^{-n}[B_{2n}(z) - C_n z B_{2n-2}(z)]$ . De las relaciones de recurrencia de Szegő (1.27) es fácil comprobar la relación,

$$R_n(x) = \frac{1 + \delta_{2n}}{z^n} \left[ z \left( z + \delta_{2n-1} - \frac{C_n}{1 + \delta_{2n}} \right) \rho_{2n-2}(z) + \left( 1 + z \left( \delta_{2n-1} - \frac{C_n}{1 + \delta_{2n}} \right) \right) \rho_{2n-2}^*(z) \right] = \frac{1 + \delta_{2n}}{z^n} T(z), \quad (2.66)$$

con  $x = J(z)$  y siendo  $T$  un polinomio mónico de grado  $2n$ . Por lo tanto, si admitimos que  $R_n$  tiene  $n$  ceros distintos en  $(-1, 1)$  y los denotamos por  $x_\alpha, x_1, \dots, x_{n-1}$  de manera que  $x_\alpha = \cos \alpha$  y  $x_j = \cos \theta_j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  con  $\alpha, \theta_j \in (0, \pi)$ , el polinomio  $T$  tiene  $2n$  ceros distintos sobre  $\mathbb{T}$ ,  $\{z_\alpha, \bar{z}_\alpha\} \cup \{z_j, \bar{z}_j\}_{j=1}^{n-1}$ , donde  $z_\alpha = e^{i\alpha}$  y  $z_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ . Por la Proposición 1.4.7, vemos que los ceros de  $T(z)$  son los nodos de la fórmula de Szegő-Lobatto simétrica con  $2n$  nodos para  $\hat{\mu}$  donde  $z_\alpha$  y  $\bar{z}_\alpha$  están prefijados. Por tanto,

$$T(z) = z\tilde{\rho}_{2n-1}(z) + \tilde{\tau}_{2n}\tilde{\rho}_{2n-1}^*(z), \text{ con } \tilde{\rho}_{2n-1}(z) = z\rho_{2n-2}(z) + \tilde{\delta}_{2n-1}\rho_{2n-2}^*(z). \quad (2.67)$$

Comparando las expresiones (2.66) y (2.67) se comprueba fácilmente que  $\tilde{\tau}_{2n} = 1$  y  $\tilde{\delta}_{2n-1} = \delta_{2n-1} - \frac{C_n}{1 + \delta_{2n}}$ . Entonces, la existencia de la fórmula de cuadratura  $J_n^\mu(f)$  dada por (2.64) exacta en  $\mathbb{P}_{2n-2}$  es equivalente a  $\tilde{\delta}_{2n-1} \in (-1, 1)$ , necesariamente,

$$|\tilde{\delta}_{2n-1}| < 1 \Leftrightarrow (1 + \delta_{2n})(\delta_{2n-1} - 1) < f_n(x_\alpha) < (1 + \delta_{2n})(1 + \delta_{2n-1}) \quad (2.68)$$

con  $f_n(x_\alpha) = \frac{p_n(x_\alpha)}{p_{n-1}(x_\alpha)}$ . Por otro lado, por (2.65) y como los polinomios de Szegő tienen coeficientes reales (por la simetría de  $\hat{\mu}$ ) tenemos

$$f_n(1) = \frac{\rho_{2n}(1)}{\rho_{2n-2}(1)} \text{ y } f_n(-1) = -\frac{\rho_{2n}(-1)}{\rho_{2n-2}(-1)}. \quad (2.69)$$

En [109] podemos encontrar la siguiente relación entre las normas  $L_2^\mu$  de  $\rho_n(z)$ ,  $\rho_n(\pm 1)$  y los correspondientes parámetros de Verblunsky:

$$\rho_n(1) = \|\rho_n\|_{\hat{\mu}} \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{1 + \delta_j}{1 - \delta_j}} \text{ y } \rho_n(-1) = (-1)^n \|\rho_n\|_{\hat{\mu}} \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{1 + (-1)^{j+1}\delta_j}{1 - (-1)^{j+1}\delta_j}},$$

donde  $\|\rho_n\|_{\hat{\mu}}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\rho_n(e^{i\theta})|^2 \hat{\mu}(\theta) d\theta = \prod_{j=1}^n (1 - |\delta_j|^2)$ . De (2.69), estas relaciones nos permiten escribir,

$$f_n(1) = (1 + \delta_{2n})(1 + \delta_{2n-1}) \text{ y } f_n(-1) = -(1 - \delta_{2n})(1 + \delta_{2n-1}).$$

---

## 2.2. Fórmulas de Cuadratura de tipo-Gauss con un nodo prefijado en el interior

---

Finalmente, por el Teorema 2.2.2 y (2.68) se concluye que la existencia de la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau con  $n$  nodos como (2.64) con  $x_\alpha \in (-1, 1)$  prefijado está caracterizada por la condición  $f_n(-1) < f_n(x_\alpha) < f_n(1)$ . Este resultado fue obtenido en [12] haciendo uso de la teoría de polinomios cuasi-ortogonales de hasta orden uno con respecto a la función peso  $\mu$  sobre  $[-1, 1]$ . Concluyendo que hemos obtenido una demostración alternativa aprovechando la vinculación entre la circunferencia unidad y el intervalo.

### 2.2.2. Aspectos computacionales

En esta subsección estudiaremos los aspectos computacionales derivados de la caracterización de las fórmulas tipo-Gauss mediante fórmulas de Szegő-Lobatto simétricas. Concretamente, analizaremos cómo la fórmula de cuadratura con  $n$  nodos  $J_n^{r,s}(f)$  dada por (2.54) con  $x_\alpha \in (-1, 1)$  prefijado y donde  $\pm 1$  son también posibles nodos, puede ser computada eficientemente mediante la solución de un problema de autovalores de dimensión  $n$ , asociado a ciertas matrices tridiagonales. De la Proposición 1.4.7 y el Teorema 2.2.2, vemos que la computación de  $J_n^{r,s}(f)$  para  $\mu$ , siendo  $\mu$  una medida en  $[-1, 1]$ , es equivalente a la computación de la fórmula de Szegő-Lobatto con  $(2n - r - s)$  nodos para  $I_{\hat{\mu}}(\hat{f}) = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(e^{i\theta}) \hat{\mu}(\theta) d\theta$ , donde  $\hat{\mu}(\theta) = \mu(\cos \theta) |\sin \theta|$ , con nodos prefijados  $z_\alpha$  y  $\bar{z}_\alpha$  sobre  $\mathbb{T}$  de manera que  $x_\alpha = \Re(z_\alpha)$ . Si denotamos por  $\tilde{I}_{2n-r-s}^{\hat{\mu}}(\hat{f})$  a esta fórmula, se tiene que

$$\tilde{I}_{2n-r-s}^{\hat{\mu}}(L) = I_{\hat{\mu}}(L), \text{ para } L \in \Lambda_{-[2(n-1)-r-s], 2(n-1)-r-s}.$$

Además, existe una nueva medida simétrica  $\tilde{\mu}$  de manera que,

$$\tilde{I}_{2n-r-s}^{\hat{\mu}}(\hat{f}) = I_{\tilde{\mu}}(\hat{f}) = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(e^{i\theta}) d\tilde{\mu}(\theta), \text{ para } \hat{f} \in \Lambda_{-(2n-r-s-1), 2n-r-s-1}$$

es decir,  $I_{2n-r-s}^{\hat{\mu}}(\hat{f})$  es realmente una fórmula de cuadratura de Szegő simétrica para  $\tilde{\mu}$ . Al mismo tiempo, por la Proposición 1.4.7 deducimos fácilmente que  $J_n^{r,s}(f)$  representa una fórmula de tipo-Gauss para  $\tilde{\mu}$ , siendo  $\tilde{\mu}$  la medida sobre  $[-1, 1]$  tal que  $\tilde{\mu}(\theta) = \tilde{\mu}(\cos \theta) |\sin \theta|$ . Si denotamos por  $\{\delta_k\}_{k=0}^{n-1}$  y por  $\{\tilde{\delta}_k\}_{k=0}^{n-1}$  ( $\delta_0 = \tilde{\delta}_0 = 1$ ) los  $n$  primeros coeficientes de Verblunsky para  $\hat{\mu}$  y  $\tilde{\mu}$  respectivamente se tiene que  $\tilde{\delta}_k = \delta_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-2$ . Además,  $\tilde{\delta}_{n-1}$  depende de  $\{\delta_k\}_{k=0}^{n-2}$  y puede ser fácilmente computado mediante el Teorema 2.2.1.

En resumen, la computación de  $J_n^{r,s}(f)$ , si existe, se reduce a la computación de ciertas fórmulas de tipo-Gauss con  $n$  nodos con respecto a la nueva medida  $\tilde{\mu}$  que proviene de  $\tilde{\mu}$ . Por tanto, si asumimos que conocemos los parámetros de Jacobi  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  y  $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$  de  $\mu$  y fijamos  $x_\alpha \in (-1, 1)$ , nuestro primer objetivo será computar para cada  $n$  los parámetros de Jacobi  $\{\tilde{a}_k\}_{k=1}^{n-1}$  y  $\{\tilde{b}_k\}_{k=0}^{n-1}$  asociados a  $\tilde{\mu}$ . Para ello necesitaremos las relaciones de Geronimus dadas en el Teorema 1.4.9, que relacionan los correspondientes coeficientes de Verblunsky y los parámetros de Jacobi y procederemos como en [60] de la siguiente forma: consideremos la sucesión  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  definida mediante los coeficientes de Verblunsky,

$$u_k = \frac{1}{2}(1 - \delta_k)(1 + \delta_{k-1}), \quad (2.70)$$

teniendo en cuenta (1.59) deducimos que  $b_0 + 1 = u_1$ ,  $a_k^2 = u_{2k}u_{2k-1}$  y  $b_k + 1 = u_{2k} + u_{2k+1}$ , para  $k \geq 1$ . Realizamos la factorización  $LU$  de  $\mathcal{J} + I$ , es decir:  $\mathcal{J} + I = \mathcal{L}\mathcal{U}$ , donde  $I$  es



la matriz identidad,  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{U}$  son las matrices bidiagonales inferior y superior respectivamente dadas por,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_4 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_6 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} u_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_5 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & u_7 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

y

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1^2 & b_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2^2 & b_2 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3^2 & b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{matriz de Jacobi mónica}).$$

Una vez computada la sucesión  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  de la descomposición  $LU$  de la matriz  $\mathcal{J} + I$ , por (2.70) se obtienen recursivamente los parámetros de Verblunsky  $\delta_0 = 1$  y  $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,

$$\delta_k = 1 - \frac{2u_k}{1 + \delta_{k-1}}, \quad k \geq 1, \quad (2.71)$$

o equivalentemente,

$$\delta_k = 1 - \frac{2u_k}{2 - \frac{2u_{k-1}}{2 - \frac{2u_{k-2}}{2 - \frac{\ddots}{2 - \frac{2u_2}{2 - u_1}}}}}. \quad (2.72)$$

A continuación, describiremos las pautas computacionales para el cálculo de  $J_n^{r,s}(f)$  dada por (2.54). Para fijar ideas, supongamos de nuevo el caso  $r = s = 0$ , teniendo en cuenta el Teorema 2.2.2 nuestro problema se reduce a la construcción de la única fórmula simétrica de Szegő-Lobatto con  $2n$  nodos para  $\hat{\mu}$  con  $z_\alpha$  y  $\bar{z}_\alpha$  prefijados ( $x_\alpha = \Re(z_\alpha)$ ). Tomaremos  $\tilde{\tau}_{2n} = 1$ , para que  $\pm 1$  no sean nodos de la fórmula de cuadratura. Finalmente, la Proposición 1.4.7 nos proporcionara la fórmula de cuadratura deseada. Sin embargo, nuestro objetivo es reducirlo a un problema de autovalores para una cierta matriz de Jacobi modificada. Una vez tengamos los parámetros  $\{\tilde{\delta}_k\}_{k=0}^{2n-1}$  y  $\tilde{\tau}_{2n}$  que caracterizan la fórmula de Szegő-Lobatto simétrica anterior, podremos obtener las correspondientes entradas de la matriz de Jacobi modificada  $\{\tilde{a}_k, \tilde{b}_k\}_{k=0}^{n-1}$  haciendo uso de (1.59). Esta estrategia la podemos esquematizar de forma algorítmica de la siguiente manera:

**Paso 1** Calcular la factorización  $LU$  de la matriz  $\mathcal{J}_n + I_n$  donde para  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{J}_n$  representa la submatriz principal de orden  $n$  de  $\mathcal{J}$  y  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ .

**Paso 2** De la factorización anterior obtenemos  $\{u_k\}_{k=1}^{2n-1}$ , ( $u_0 = 0$ ). Entonces, por (2.71) o (2.72) podemos computar fácilmente de manera recursiva los parámetros  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{2n-2}$  junto con los dos parámetros que caracterizan la fórmula de Szegő-Lobatto con  $2n$

## 2.2. Fórmulas de Cuadratura de tipo-Gauss con un nodo prefijado en el interior

nodos,  $\tilde{\delta}_{2n-1} \in (-1, 1)$  y  $\tilde{\tau}_{2n} \in \{\pm 1\}$  (según Teoremas 2.2.1 y 2.2.2). Como estamos trabajando en el caso  $r = s = 0$ , claramente  $\tilde{\tau}_{2n} = 1$  implica la existencia de  $J_n^\mu(f)$  y  $\tilde{\tau}_{2n} = -1$  implica la no existencia<sup>2</sup>.

**Paso 3** Los números  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{2n-2}$  y  $\tilde{\delta}_{2n-1}$ , como hemos dicho, representan los  $2n$  primeros parámetros de Verblunsky de una nueva función peso simétrica  $\tilde{\mu}$ . Asumiendo  $\tilde{\mu}(\theta) = \tilde{\mu}(\cos \theta) |\sin \theta|$ , sean  $\{\tilde{a}_k\}_{k=1}^\infty$  y  $\{\tilde{b}_k\}_{k=1}^\infty$  los coeficientes de Jacobi para  $\tilde{\mu}$ . Entonces, de las relaciones de Geronimus (1.59) se tiene,

$$\begin{aligned}\tilde{a}_k &= a_k, \quad 1 \leq k \leq n-1, \\ \tilde{b}_k &= b_k, \quad 0 \leq k \leq n-2, \\ 2\tilde{b}_{n-1} &= \delta_{2n-3}[1 - \delta_{2n-2}] - \tilde{\delta}_{2n-1}[1 + \delta_{2n-2}].\end{aligned}$$

**Paso 4** Consideremos la matriz de orden  $n$

$$\begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & \tilde{b}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

que representa la  $n$ -ésima truncación de la matriz de Jacobi asociada a  $\tilde{\mu}$ . Entonces, sus valores propios son los nodos de  $J_n^\mu(f)$  y la raíz de la primera componente del vector propio unitario correspondiente al nodo  $x_j$  proporciona el peso  $\lambda_j$ .

Por otro lado, como sabemos que  $x_\alpha$  es un valor propio de (2.73) podemos usar un método de deflación (véase por ejemplo [84, págs 242-245]) para solo computar  $x_1, \dots, x_{n-1}$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ . Obsérvese que,

$$\lambda_\alpha = c_0 - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j, \quad \text{con } c_0 = \int_{-1}^{+1} d\mu(x).$$

**Nota 2.2.4** El análisis de las otras cuadraturas  $J_n^{r,s}(f)$  en (2.54) con  $r + s > 0$  conduce a la computación de fórmulas de Gauss-Radau y Gauss-Lobatto con  $n$  nodos para  $\tilde{\mu}$

Con el fin de ilustrar numéricamente este proceso, consideraremos funciones peso de tipo Jacobi,  $\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  con  $\alpha, \beta > -1$ , que dan lugar a los polinomios ortogonales de Jacobi. Cuando tomamos  $\alpha, \beta \in \{\pm \frac{1}{2}\}$ , aparecen las funciones peso de tipo Chebyshev, que dan lugar a las familias de polinomios ortogonales de Chebyshev de diferentes especies. De hecho, sus correspondientes fórmulas Gaussianas son de las pocas cuyos coeficientes o pesos son conocidos explícitamente.

Por otro lado, cuando uno desea aproximar una integral pesada  $J_\mu(f) = \int_{-1}^1 f(x)\mu(x)dx$  donde el integrando  $f$  posee singularidades próximas a  $[-1, 1]$  pero no en él, una técnica usual consiste en agrupar todas las singularidades en una nueva función peso  $\tilde{\mu}$  y escribir

---

<sup>2</sup>En [12] se obtiene una partición de  $[-1, 1]$  que consiste en regiones "buenas" (zonas donde la fórmula Gaussiana con  $x_\alpha$  prefijado existe) y "malas" (donde tal fórmula no existe). La elección  $\tilde{\tau}_{2n} = -1$  se correspondería con haber elegido  $x_\alpha$  en una región mala. Véase [12] para los detalles.

$J_\mu(f) = J_{\tilde{\mu}} \int_{-1}^1 g(x) \tilde{\mu}(x) dx$ , siendo  $g$  una función lo suficientemente suave y  $\tilde{\mu} = p(x)\mu(x)$  tal que  $f(x) = p(x)g(x)$ . Cuando consideramos singularidades polares podemos escribir  $f = g/P$  de manera que  $J_\mu(f) = \int_{-1}^1 g(x) \frac{\mu(x)}{P(x)} dx$ , con  $P$  un polinomio positivo en  $[-1, 1]$ . Por tanto, la teoría de polinomios ortogonales con respecto a modificaciones racionales de una medida toma relevancia (véanse por ejemplo [8, 69] y [88]). Cuando  $\mu$  es de tipo Chebyshev y consideramos  $\tilde{\mu} = \mu/P$ , con  $P(x) > 0$  sobre  $[-1, 1]$ , la familia de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad con respecto a la medida

$$\tilde{\mu}(\theta) = \tilde{\mu}(\cos \theta) |\sin \theta| = \frac{\hat{\mu}(\theta)}{|h(e^{i\theta})|^2},$$

con  $\hat{\mu}$  dada por (1.52) y  $h(z)$  un polinomio del mismo grado que  $P(x)$ , se les conoce como polinomios de Bernstein-Szegő ([113, Sección 2.6.]).

Consideremos funciones peso de la forma  $\mu(x) = \frac{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}{P(x)}$  con  $\alpha = \beta = -1/2$  y  $P$  un polinomio positivo en  $[-1, 1]$ , en particular, consideraremos

$P(x) = (1 - \gamma x)^m$  con  $\gamma \in (-1, 1)$  es decir,  $\mu(x) = \frac{1}{(1-\gamma x)^m \sqrt{1-x^2}}$ . Las fórmulas Gaussianas para este tipo de funciones peso han sido analizadas en [11, 47]. En este caso tenemos, salvo un factor multiplicativo,

$$\hat{\mu}(\theta) = \mu(\cos \theta) |\sin \theta| = |z - \tilde{\gamma}|^{-2m} \text{ con } z = e^{i\theta} \text{ y } \tilde{\gamma} \in (-1, 1),$$

(véase [11]), y los polinomios de Bernstein-Szegő mónicos vienen dados explícitamente por  $\rho_n(z) = z^{n-m}(z - \tilde{\gamma})^m$  para  $n \geq m$ . Obsérvese que los parámetros de Verblunsky  $\delta_n$  son cero para todo  $n > m$ .

Ahora, haciendo uso de los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2, se tiene la siguiente

**Proposición 2.2.5** Consideremos la función peso

$$\mu(x) = \mu(x, \gamma, m) = \frac{1}{(1 - \gamma x)^m \sqrt{1 - x^2}}$$

con  $m$  un entero no negativo,  $\gamma \in (-1, 1)$  y fijemos  $x_\alpha \in (-1, 1)$ . Entonces, la correspondiente fórmula de cuadratura  $J_n^{r,s}(f)$  dada por (2.54) con  $2n \geq m + r + s$  existe, si y solo si,

$$(-1)^r \Im \left( z_\alpha^{2(m-n+(r+s))} \left( \frac{\bar{z}_\alpha - \tilde{\gamma}}{z_\alpha - \tilde{\gamma}} \right)^m \right) \leq 0, \quad (2.74)$$

donde  $z_\alpha = x_\alpha + i\sqrt{1-x_\alpha^2}$  y  $\tilde{\gamma} = 2(\frac{1}{\gamma} + \gamma)^{-1}$ .

**Nota 2.2.6** Cuando tomamos  $m = 0$ ,  $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , función de Chebyshev de primera especie. La condición (2.74) se convierte en este caso en  $(-1)^r \sin(2(n-r-s)\alpha) \geq 0$ , donde  $x_\alpha = \cos \alpha$  con  $\alpha \in (0, \pi)$ .

Comprobemos ahora la existencia de las fórmulas de cuadratura  $J_n^{0,0}(f)$  con  $n = 5$  para  $\mu(x, \gamma, m)$  y diferentes valores de  $x_\alpha, \gamma$  y  $m$ . Recordar que la existencia es equivalente al hecho de que el parámetro  $\tilde{\tau}_{2n}$  sea igual a 1. Como ilustración computaremos el parámetro de Verblunsky modificado  $\tilde{\delta}_{2n-1} \in (-1, 1)$ . Los resultados se muestran en las Tablas 2.16, 2.17 y 2.18. Finalmente en las Tablas 2.19, 2.20 y 2.21 se muestran los nodos y pesos de la fórmula de cuadratura  $J_5^{0,0}(f)$  para  $\mu(x, \gamma, m)$ , cuando tomamos distintos valores del nodo fijo  $x_\alpha$  y de los parámetros  $m \geq 0$  y  $\gamma \in (-1, 1)$ .

## 2.2. Fórmulas de Cuadratura de tipo-Gauss con un nodo prefijado en el interior

---

$\gamma$	$x_\alpha$	$\tilde{\delta}_{2n-1}$	$\tilde{\tau}_{2n}$
0,198	0,5403023059	0,6292798876	1
	-0,4161468365	0,6320230660	-1
	0,2836621855	0,2637597967	-1
	-0,1455000338	0,9476575187	1
0,8	0,5403023059	0,7016549910	-1
	-0,4161468365	0,9199641453	-1
	0,2836621855	-0,9990300645	1
	-0,1455000338	0,4674292023	-1
-0,975	0,5403023059	-0,1654997820	1
	-0,4161468365	0,3231354585	-1
	0,2836621855	0,4172583460	-1
	-0,1455000338	-0,0003754590	1

Tabla 2.16: Valores de  $\tilde{\delta}_{2n-1}$  y  $\tilde{\tau}_{2n}$  en la fórmula de cuadratura de tipo-Gauss de 5 nodos y  $x_\alpha$  prefijado para la función peso  $\mu(x, \gamma, 1) = (1 - \gamma x)^{-1}(1 - x^2)^{-1/2}$ .

$\gamma$	$x_\alpha$	$\tilde{\delta}_{2n-1}$	$\tilde{\tau}_{2n}$
0,198	0,5403023059	0,8796981024	1
	-0,4161468365	-0,7176506326	-1
	0,2836621855	-0,3967315251	-1
	-0,1455000338	0,8576175107	-1
0,8	0,5403023059	0,2487954650	-1
	-0,4161468365	-0,3573679249	1
	0,2836621855	-0,4104362350	1
	-0,1455000338	-0,0236154680	-1
-0,975	0,5403023059	-0,5574209200	1
	-0,4161468365	0,4703245040	1
	0,2836621855	0,8612859631	1
	-0,1455000338	-0,9686333180	-1

Tabla 2.17: Valores de  $\tilde{\delta}_{2n-1}$  y  $\tilde{\tau}_{2n}$  en la fórmula de cuadratura de tipo-Gauss de 5 nodos y  $x_\alpha$  prefijado para la función peso  $\mu(x, \gamma, 2) = (1 - \gamma x)^{-2}(1 - x^2)^{-1/2}$ .

$\gamma$	$x_\alpha$	$\tilde{\delta}_{2n-1}$	$\tilde{\tau}_{2n}$
0,198	0,5403023059	0,7720906475	-1
	-0,4161468365	-0,9675093827	1
	0,2836621855	-0,9555341247	-1
	-0,1455000338	0,3958561706	-1
0,8	0,5403023059	-0,2506629030	1
	-0,4161468365	0,7740235707	1
	0,2836621855	0,4519582710	-1
	-0,1455000338	-0,2694822410	1
-0,975	0,5403023059	0,3412054340	-1
	-0,4161468365	0,6308007416	-1
	0,2836621855	-0,6425455683	-1
	-0,1455000338	0,2181996360	1

Tabla 2.18: Valores de  $\tilde{\delta}_{2n-1}$  y  $\tilde{\tau}_{2n}$  en la fórmula de cuadratura de tipo-Gauss de 5 nodos y  $x_\alpha$  prefijado para la función peso  $\mu(x, \gamma, 5) = (1 - \gamma x)^{-5}(1 - x^2)^{-1/2}$ .

Nodos	Pesos
-0,97035702489884	0,13392360961570
-0,68189701062008	0,17294724994672
-0,09789314234364	0,20380393821627
0,54030230586814	0,23382327343744
0,94520492821188	0,25550192878387

Tabla 2.19: Nodos y pesos de la fórmula de cuadratura para la función peso  $\mu(x, \gamma, 1) = (1 - \gamma x)^{-1}(1 - x^2)^{-1/2}$ ,  $\gamma = 0,198$  y  $x_\alpha = 0,5403023059$ .

Nodos	Pesos
-0,92665900212908	0,01742444926955
-0,41614683654714	0,02856457507296
0,27257424007750	0,07461067432043
0,77100893618287	0,25265989346182
0,97790662465163	0,62674040787524

Tabla 2.20: Nodos y pesos de la fórmula de cuadratura para la función peso  $\mu(x, \gamma, 2) = (1 - \gamma x)^{-2}(1 - x^2)^{-1/2}$ ,  $\gamma = 0,8$  y  $x_\alpha = -0,4161468365$ .

Nodos	Pesos
-0,99626590974071	0,82277669947417
-0,92371281332772	0,16466476654577
-0,50317756406768	0,01000588863206
0,28366218546323	0,00173973046429
0,90885111943214	0,00081291488371

Tabla 2.21: Nodos y pesos de la fórmula de cuadratura para la función peso  $\mu(x, \gamma, 2) = (1 - \gamma x)^{-2}(1 - x^2)^{-1/2}$ ,  $\gamma = -0,975$  y  $x_\alpha = 0,2836621855$ .

# Capítulo 3

## Conexión entre la circunferencia unidad e intervalos no acotados de la recta real

En este capítulo estudiaremos conexiones existentes en temas de ortogonalidad y cuadratura entre intervalos no acotados de la recta real y la circunferencia unidad desde diferentes perspectivas. Comenzaremos poniendo de manifiesto que la función peso de Hermite en  $\mathbb{R}$  induce una función peso en la circunferencia unidad, que no es otra que la conocida función peso de Rogers-Szegő. Como consecuencia de esta vinculación analizaremos y caracterizaremos ciertas fórmulas de cuadratura para aproximar integrales sobre la recta real. Las ideas expuestas en esta sección serán generalizadas a continuación considerando funciones pesos más generales definidas en  $\mathbb{R}$ , que dan lugar a nuevos ejemplos de funciones peso en la circunferencia unidad. Las correspondientes fórmulas de cuadratura serán también estudiadas y caracterizadas. En la Sección siguiente haremos uso de los resultados obtenidos en las secciones anteriores en un ejemplo práctico, la aproximación de la transformada de Fourier, centrando nuestra atención principalmente en los casos con singularidades polares cercanas. Finalmente en la última sección, damos una alternativa más general a las presentadas en las secciones anteriores, mediante el uso de una cierta transformación de Moebius<sup>1</sup> conocida como transformación de Cayley.

### 3.1. Relación entre las fórmulas de cuadratura para la función peso de Hermite y de Rogers-Szegő.

#### 3.1.1. Fórmulas de cuadratura

Sea  $f$  una función  $2\pi$  periódica y acotada en  $\mathbb{R}$  de manera que  $|f(x)|e^{-\gamma x^2}$  con  $\gamma > 0$  sea integrable. Nuestro objetivo será el construir fórmulas de cuadratura con  $n$  nodos que aproxime la integral

$$J_\gamma(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu_\gamma(x)dx$$

---

<sup>1</sup>También llamada transformación de Möbius.

donde

$$\mu_\gamma(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} e^{-\gamma x^2}, \quad \gamma > 0. \quad (3.1)$$

La estrategia que emplearemos será pasar de la recta real a la circunferencia unidad. Surgiendo de manera natural la función peso sobre  $[-\pi, \pi]$  asociada a  $\mu_\gamma$ :

$$\dot{\mu}_\gamma(\theta) = \dot{\mu}(\theta) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\theta-2\pi j)^2}. \quad (3.2)$$

**Teorema 3.1.1** Sea  $f$  una función  $2\pi$  periódica sobre  $\mathbb{R}$  tal que  $|f|\mu_\gamma$  es acotada e intergrable. Entonces,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \dot{\mu}(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mu_\gamma(x) dx \quad (3.3)$$

con  $\mu_\gamma$  y  $\dot{\mu}$  dadas por (3.1) y (3.2), respectivamente.

**Demostración.**- Para algún  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , se sigue claramente que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\theta) e^{-\gamma(\theta-2\pi j)^2} \leq \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |f(\theta)| \left( 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\gamma(2\pi(j-1))^2} \right). \quad (3.4)$$

Por el criterio del cociente, la serie es convergente pues

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma(2\pi(j-1))^2}}{e^{-\gamma(2\pi(j-2))^2}} = \lim_{j \rightarrow \infty} e^{-\gamma 8\pi^2 j} = 0 < 1. \quad (3.5)$$

Por lo tanto, la serie a la izquierda de la desigualdad (3.4) es uniformemente convergente en  $[-\pi, \pi]$  de manera que la integral y el sumatorio pueden ser intercambiados,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\theta-2\pi j)^2} d\theta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-\gamma(\theta-2\pi j)^2} d\theta. \quad (3.6)$$

Por tanto, la prueba se concluye haciendo el cambio de variable  $x = \theta - 2\pi j$  en cada una de las integrales anteriores y teniendo en cuenta que  $f$  es una función  $2\pi$  periódica. ■

Debemos observar que si normalizamos la función peso  $\dot{\mu}$ , es decir,  $\int_{-\pi}^{\pi} \dot{\mu}(\theta) d\theta = 1$ , recuperamos la *medida Gaussiana envuelta*<sup>2</sup> (función peso de Rogers-Szegő) con  $q = q(\gamma) = e^{-\frac{1}{2\gamma}}$ .

$$\dot{\mu}(\theta, q) = \dot{\mu}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \log(1/q)}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\theta - 2\pi j)^2}{2 \log(1/q)}\right), \quad 0 < q < 1. \quad (3.7)$$

Nos centraremos por tanto en la construcción de fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad para la integral

$$I_{\dot{\mu}}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \dot{\mu}(\theta) d\theta \quad (3.8)$$

con el fin de estimar la integral  $J_\gamma(f)$ . Para este propósito, es crucial que la sucesión de momentos trigonométricos para  $\dot{\mu}$  sea fácilmente computable. Del Teorema 3.1.1 se deduce inmediatamente el siguiente

<sup>2</sup>Wrapped Gaussian measure (véase [109])

### 3.1. Relación entre las fórmulas de cuadratura para la función peso de Hermite y de Rogers-Szegő.

**Corolario 3.1.2** La sucesión  $\{\mu_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  de momentos trigonométricos para  $\hat{\mu}$  viene dada por

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \hat{\mu}(\theta) d\theta = q^{\frac{k^2}{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

La función peso de Rogers-Szegő no solo se caracteriza por el hecho de que sus momentos trigonométricos son conocidos explícitamente y son fácilmente computables, si no que la familia de polinomios de Szegő también es conocida (véanse por ejemplo [4, 35, 59, 78, 91] y [109, Capítulo 1.6]), concretamente: definiendo ahora para  $0 < q < 1$  los usuales coeficientes  $q$ -binomiales por

$$\begin{aligned} (n)_q &:= (1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n), \\ [j]_q &:= \frac{(n)_q}{(j)_q(n-j)_q} = \frac{(1-q^{n-j+1}) \cdots (1-q^n)}{(1-q) \cdots (1-q^j)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $(0)_q = [0]_q = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q \equiv 1$ . Como ya hemos dicho, pocas funciones peso dan lugar a expresiones explícitas de la familia de polinomios de Szegő. Sin embargo, del Corolario 3.1.2 podemos deducir el siguiente (véase [109, Teorema 1.6.7] para una prueba alternativa).

**Teorema 3.1.3** La familia de polinomios de Rogers-Szegő mónicos viene dada explícitamente por

$$\rho_n(z) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} [n]_q q^{\frac{n-j}{2}} z^j, \quad (3.11)$$

y

$$\|\rho_n\| = \sqrt{(1-q) \cdots (1-q^n)}. \quad (3.12)$$

**Demostración.**- Procederemos por inducción. Claramente,  $\delta_0 = \rho_0(z) = \varphi_0(z) \equiv 1$  y para  $n = 1$ , de (1.30) tenemos  $\delta_1 = -\mu_{-1}/\mu_0 = -\sqrt{q}$ , por tanto  $\rho_1(z) = z - \sqrt{q}$  y de (3.11),  $\|\rho_1\|_{\hat{\mu}} = \sqrt{1-q}$ . Supongamos ahora que (3.11)-(3.12) es cierto. Ahora, de (1.30) y como  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q$  se sigue que

$$\delta_{n+1} = -\frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} [n]_q q^{\frac{n-k}{2}} q^{\frac{(k+1)^2}{2}}}{\sum_{k=0}^n (-1)^k [n-k]_q q^{\frac{k}{2}} q^{\frac{k^2}{2}}} = (-1)^{n+1} q^{\frac{n+1}{2}}. \quad (3.13)$$

De (3.11) tenemos que  $\rho_n^*(z) = (-1)^n q^{-\frac{n}{2}} \rho_n(qz)$  y por tanto, de (1.27) y (3.13),

$$\rho_{n+1}(z) = z\rho_n(z) + \delta_{n+1}\rho_n^*(z) = z^{n+1} + \delta_{n+1} + \sum_{k=1}^n s_k z^k,$$

siendo

$$s_k = -\sqrt{q}(-1)^{n-k} [n]_q q^{\frac{n+k}{2}} + (-1)^{n-k+1} [n]_q q^{\frac{n-k+1}{2}}.$$

De (3.10) se comprueba fácilmente por inducción que  $\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q$  y por tanto  $s_k = (-1)^{n+1-k} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{n+1-k}{2}}$ . Finalmente, de (3.11) y (3.13) se prueba que  $\|\rho_{n+1}\|_{\hat{\mu}} = \sqrt{1-q^{n+1}} \|\rho_n\|_{\hat{\mu}}$ . ■

La caracterización de los nodos y pesos de la fórmula de cuadratura de Szegő para  $\hat{\mu}$  dada por (3.7), ver Teoremas 1.3.5, 1.3.7 y 3.1.3, queda recogida en el siguiente Teorema



**Teorema 3.1.4** Sean  $\rho_n$  el  $n$ -ésimo polinomio de Rogers-Szegő mónico dado por (3.11) y  $I_n^{\hat{\mu}}(f) = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j f(z_j)$  la fórmula de Szegő con  $n$  nodos  $\hat{\mu}$ . Entonces,

1. Los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  son las raíces de

$$B_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j \left[ 1 + \tau(-1)^n q^{j-\frac{n}{2}} \right] z^j, \quad |\tau| = 1 \quad (3.14)$$

donde  $a_j = (-1)^{n-j} [j]_q q^{\frac{n-j}{2}}$ .

2. Los pesos  $\{\hat{\lambda}_j\}_{j=1}^n$  vienen dados por

$$\hat{\lambda}_j = \frac{(1-q) \dots (1-q^n)}{2\Re \left[ z_j \rho_n'(z_j) \overline{\rho_n(z_j)} \right] + n |\rho_n(z_j)|^2}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

En resumen, las fórmulas de cuadratura de Szegő para  $\hat{\mu}$  vienen dadas explícitamente en términos de los polinomios de Rogers-Szegő, que pueden ser computados bien directamente de (3.11) o, ya que son conocidos los parámetros de Verblunsky (3.13), recursivamente por medio de las recursiones de Szegő (1.27)-(1.30), o también mediante un enfoque matricial. En ambos casos, fijado  $\tau \in \mathbb{T}$ , necesitamos resolver la ecuación algebraica de grado  $n$  dada por (3.14).

Con carácter ilustrativo, en la Tabla 3.1 se muestran los nodos y pesos de la fórmula de Szegő ( $\tau = 1$ ) con diez nodos y distintos valores del parámetro  $q$ .

q=0.1		q=0.25	
nodos	pesos	nodos	pesos
$-0,940400 \pm 0,340070i$	0,045960	$-0,922051 \pm 0,387069i$	0,019577
$-0,531157 \pm 0,847273i$	0,066977	$-0,473103 \pm 0,881007i$	0,046639
$0,066882 \pm 0,997761i$	0,100057	$0,119954 \pm 0,992779i$	0,094758
$0,624424 \pm 0,781086i$	0,133157	$0,650270 \pm 0,759703i$	0,150362
$0,955949 \pm 0,293533i$	0,153848	$0,959239 \pm 0,282596i$	0,188665
q=0.5		q=0.75	
nodos	pesos	nodos	pesos
$-0,842988 \pm 0,537932i$	0,003120	$-0,517559 \pm 0,855648i$	0,000197
$-0,333209 \pm 0,942853i$	0,020792	$0,009618 \pm 0,999954i$	0,005415
$0,234605 \pm 0,972091i$	0,073793	$0,467501 \pm 0,883993i$	0,043984
$0,703537 \pm 0,710659i$	0,163017	$0,801825 \pm 0,597559i$	0,158275
$0,965879 \pm 0,258994i$	0,239274	$0,977622 \pm 0,210369i$	0,292128
q=0.9			
nodos	pesos		
$0,112467 \pm 0,993655i$	0,0000222		
$0,475746 \pm 0,879582i$	0,0001739		
$0,734593 \pm 0,678508i$	0,0276214		
$0,904709 \pm 0,426031i$	0,146351		
$0,989421 \pm 0,145076i$	0,324221		

Tabla 3.1: Nodos y pesos para la fórmula de cuadratura de Szegő con parámetro  $\tau = 1$ , diez nodos y diversos valores del parámetro  $q$ .

### 3.1. Relación entre las fórmulas de cuadratura para la función peso de Hermite y de Rogers-Szegő.

En la Figura 3.1 se ilustran los ceros de los polinomios de Szegő, podemos una idea de su distribución con respecto a la circunferencia unidad a medida que  $q$  aumenta.

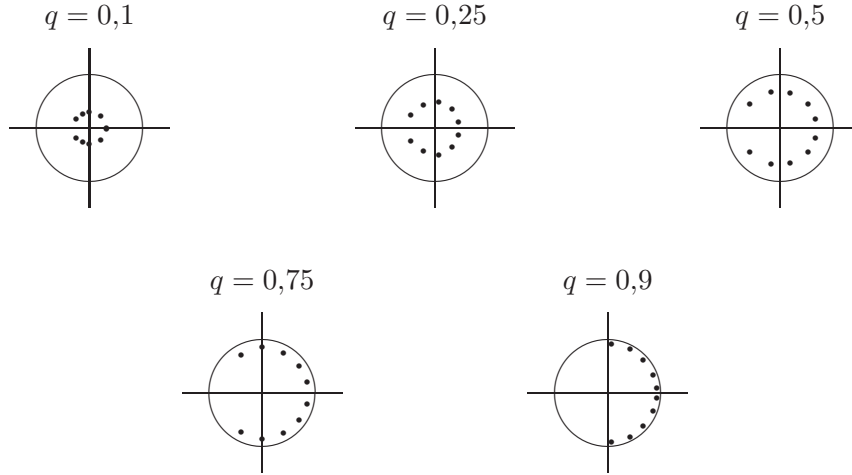


Figura 3.1: ceros de los polinomios de Szegő con parámetro  $\tau = 1$ , diez nodos y diversos valores del parámetro  $q$ .

Como alternativa, podemos aproximar  $I_{\hat{\mu}}(f)$  por medio de una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio donde sus nodos son las raíces  $n$ -ésimas de  $\tau \in \mathbb{T}$ , exactas en  $\Lambda_{-r,s}$  donde  $r + s = n - 1$ . En [105] se deduce la siguiente expresión para los pesos en esta situación:

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=-r}^s \mu_{-k} \frac{\nu^{(1-j)k}}{\tilde{z}_1^k}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.16)$$

donde  $\tilde{z}_1$  es una raíz de  $z^n = \tau$ ,  $\nu = e^{\frac{2\pi i}{n}}$  (notar que el  $j$ -ésimo nodo será  $\tilde{z}_j = \nu^{j-1} \tilde{z}_1$ ). Si reescribimos (3.16)

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=-s}^r \mu_k \nu^{(j-1)k} \tilde{z}_1^k = \frac{1}{n} \sum_{k=-s}^r \mu_k \tilde{z}_j^k = \frac{1}{n\tau} \sum_{k=-s}^r \mu_k \tilde{z}_j^k \tilde{z}_j^n, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.17)$$

reemplazando  $t = k + s + 1$  en la última expresión, se tiene la siguiente

**Proposición 3.1.5** Sea  $\tilde{I}_n^{\hat{\mu}}(f) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j f(\tilde{z}_j)$  la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio exacta en  $\Lambda_{-r,s}$  con  $r + s = n - 1$  y nodos los ceros de  $Q_n(z) = z^n - \tau$ ,  $|\tau| = 1$ . Entonces,

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{\tilde{z}_j^r}{n\tau} \sum_{k=1}^n \mu_{k-s-1} \tilde{z}_j^k \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

Si consideramos ahora la función peso  $\hat{\mu}$  dado por (3.7) se tiene el siguiente

**Corolario 3.1.6** Sea  $\tilde{I}_n^\mu(f) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j f(\tilde{z}_j)$  la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio exacta en  $\Lambda_{-r,s}$  con  $r + s = n - 1$ ,  $\mu$  dada por (3.7) y nodos los ceros de  $Q_n(z) = z^n - \tau$ ,  $|\tau| = 1$ . Entonces,

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{\tilde{z}_j^r}{n\tau} \sum_{k=1}^n q^{\frac{(k-s-1)^2}{2}} \tilde{z}_j^k, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.18)$$

En general, los pesos  $\tilde{\lambda}_j$  en (3.18) son complejos, como se ilustra en la Tabla 3.2 para diferentes valores de  $r, s, \tau, n$  y un valor fijo para el parámetro  $q = 0,8$ . desde el punto de vista práctico resulta interesante encontrar condiciones que hagan que los pesos sean reales.

$r = 3, s = 1 \quad \tau = 1$		$r = 1, s = 3 \quad \tau = i$	
$\tilde{\lambda}_1$	0,7590423518	$\tilde{\lambda}_1$	$-0,07977404066 + 0,01595864337i$
$\tilde{\lambda}_2$	$0,1477252365 + 0,0321686194i$	$\tilde{\lambda}_2$	$0,01983869415 - 0,099093103i$
$\tilde{\lambda}_3$	$-0,0272464129 - 0,0520499197i$	$\tilde{\lambda}_3$	$0,3010529561 + 0,1443773658i$
$\tilde{\lambda}_4$	$-0,0272464129 + 0,0520499197i$	$\tilde{\lambda}_4$	$0,6868823906 - 0,1345143819i$
$\tilde{\lambda}_5$	$0,1477252365 - 0,0321686194i$	$\tilde{\lambda}_5$	$0,07199999965 + 0,07327147598i$
$r = 3, s = 1, \tau = 1$		$r = s = 2, \tau = i$	
$\tilde{\lambda}_1$	$0,1134661419 + 0,08653385837i$	$\tilde{\lambda}_1$	$0,7763085726 - 0,1131370850i$
$\tilde{\lambda}_2$	$0,0323134769 + 0,1676865237i$	$\tilde{\lambda}_2$	$0,3080041488 + 0,113137085i$
$\tilde{\lambda}_3$	$-0,0008645466 + 0,2008645478i$	$\tilde{\lambda}_3$	$-0,0500344026 - 0,113137085i$
$\tilde{\lambda}_4$	$0,6041994877 - 0,4041994916i$	$\tilde{\lambda}_4$	$-0,03427831878 + 0,1131370850i$
$\tilde{\lambda}_5$	$0,2508854389 - 0,05088543939i$		

Tabla 3.2: Pesos para la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio para diversos valores de  $r, s, \tau, n$  y  $q = 0,8$ .

El siguiente resultado nos caracteriza cuando las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio tiene pesos reales.

**Proposición 3.1.7** Bajo las condiciones de la Proposición 3.1.5, tomando  $m = \min\{r, s\}$ , entonces los pesos  $\tilde{\lambda}_j$  son reales para  $j = 1, \dots, n$ , si y solo si, bien  $r = s$  o  $r \neq s$ ,  $\mu_k = \overline{\tau} \mu_{n-k}$  para  $m + 1 \leq k < n/2$  y también  $\mu_{n/2} \sqrt{\tau} \in \mathbb{R}$  cuando  $n$  es par.

**Demostración.-** De (3.17), tomando  $M = \max\{r, s\}$  tenemos que

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{1}{n} \left\{ \mu_0 + 2\Re \left[ \sum_{k=1}^m \mu_k \tilde{z}_j^k \right] + \sum_{k=m+1}^M A(k) \right\}, \quad j = 1, \dots, n$$

donde como es usual  $\sum_{j=p}^q \alpha_j = 0$  si  $q < p$  y

$$A(k) = \begin{cases} \frac{\mu_k \tilde{z}_j^k}{\mu_k \tilde{z}_j^k} & \text{si } m = s, \\ \mu_k \tilde{z}_j^k & \text{si } m = r. \end{cases}$$

### 3.1. Relación entre las fórmulas de cuadratura para la función peso de Hermite y de Rogers-Szegő.

Por tanto, la prueba cuando  $r = s$  es trivial y el caso  $r \neq s$  es equivalente a probar que  $D(\tilde{z}_j) = \sum_{k=m+1}^M \mu_k \tilde{z}_j^k \in \mathbb{R}$  para  $j = 1, \dots, n$ .

Nótese que  $\tilde{z}_j^{n-k} = \tau \tilde{z}_j^{-k}$ . Ahora,  $D(\tilde{z}_j) = \sum_{k=m+1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mu_k \tilde{z}_j^k + \tau \mu_{n-k} \tilde{z}_j^{-k}$  si  $n$  es impar y para  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} D(\tilde{z}_j) \in \mathbb{R} &\iff \Im(D(\tilde{z}_j)) = 0 \\ &\iff \sum_{k=m+1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mu_k \tilde{z}_j^k + \tau \mu_{n-k} \tilde{z}_j^{-k} - \overline{\mu_k \tilde{z}_j^k} - \overline{\tau \mu_{n-k} \tilde{z}_j^{-k}} = 0 \\ &\iff \sum_{k=m+1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\mu_k - \overline{\tau \mu_{n-k}}) \tilde{z}_j^k + (\tau \mu_{n-k} - \overline{\mu_k}) \tilde{z}_j^{-k} = 0 \\ &\iff \sum_{k=m+1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\mu_k - \overline{\tau \mu_{n-k}}) \tilde{z}_j^{k+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + (\tau \mu_{n-k} - \overline{\mu_k}) \tilde{z}_j^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k} = 0. \end{aligned}$$

Nótese que como  $\Im(D(z))$  es un polinomio de grado a lo sumo  $n-1$  con  $n$  raíces distintas, entonces  $\Im(D(z)) \equiv 0$  y  $\mu_k = \overline{\tau \mu_{n-k}}$ . Con el mismo argumento cuando  $n$  es par, concluimos para  $m+1 < k < n/2$  y  $\mu_{n/2} \sqrt{\tau} \in \mathbb{R}$ . ■

Es más, se puede mejorar para  $\tau = 1$ ,

**Corolario 3.1.8** *En las mismas condiciones que la Proposición 3.1.5, si los momentos trigonométricos son reales,  $\tau = 1$  y  $|r - s| \leq 1$ , entonces los pesos  $\tilde{\lambda}_j$  son reales para  $j = 1, \dots, n$ .*

Por la Proposición 3.1.7 vemos que cuando  $r = s$  los pesos  $\tilde{\lambda}_j$  son reales. En particular, cuando consideramos la función peso de Rogers-Szegő, los pesos son reales. Cuando  $r \neq s$  tenemos el siguiente,

**Corolario 3.1.9** *Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j f(\tilde{z}_j) = I_{\tilde{\mu}}(f)$  para toda  $f \in \Lambda_{-r,s}$ , siendo  $\tilde{\mu}$  la función peso (3.7) y  $\{\tilde{z}_j\}_{j=1}^n$  las raíces  $n$ -ésimas de  $\tau \in \mathbb{T}$ . Asumiendo que  $|r - s| > 1$ , entonces alguno de los pesos  $\tilde{\lambda}_j$  no puede ser real.*

Finalmente, desde el punto de vista computacional es útil considerar la expresión (3.16) de los pesos  $\tilde{\lambda}_j$ , ya que para  $j = 1, \dots, n$

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{1}{n} \left[ \mu_0 + \sum_{k=1}^s \mu_{-k} \left( \frac{\nu}{z_1} \right)^k \nu^{-jk} + \tau \sum_{k=s+1}^{n-1} \mu_{n-k} \left( \frac{\nu}{z_1} \right)^k \nu^{-jk} \right],$$

observando que los pesos  $\{\tilde{\lambda}_j\}_{j=1}^n$  pueden ser eficientemente computados por medio de la transformada rápida de Fourier (FFT) (véase por ejemplo, [112, págs. 78-83]) cuando la aplicamos a la sucesión

$$\left\{ \mu_0, \mu_{-1} \left( \frac{\nu}{z_1} \right), \dots, \mu_{-n} \left( \frac{\nu}{z_1} \right)^n, \tau \mu_n \left( \frac{\nu}{z_1} \right)^{n+1}, \dots, \tau \mu_1 \left( \frac{\nu}{z_1} \right)^{2n} \right\}, \quad \nu = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

### Capítulo 3. Conexión entre la circunferencia unidad e intervalos no acotados de la recta real

Ilustraremos esto último con algunos experimentos numéricos, para ello escogemos la situación particular de  $2m + 1$  nodos, es decir, escogemos como nodos los ceros de  $Q_{2m+1}(z) = z^{2m+1} - \tau$  con  $\tau \in \mathbb{T}$  y buscamos la fórmula de cuadratura en  $\Lambda_{-m,m}$ . Sabemos por la Proposición 3.1.7 que los pesos son reales. Aquí, debemos recalcar que cuando  $\tau = \pm 1$ , solo la mitad de los pesos necesita ser computada puesto que los nodos aparecen en pares conjugados. Esto, se refleja en la Tabla 3.3, donde los nodos de la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio son las raíces 11-ésimas de la unidad y los pesos se muestran para diferentes valores del parámetro  $q$ . Obsérvese que por el Corolario 3.1.8 todos los pesos son reales, y que solo algunos de ellos son negativos cuando  $q = 0,9$ .

$\lambda \backslash q$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$\lambda_{11}$	0,14003	0,18136	0,21631	0,24181	0,18309
$\lambda_{10}$	0,11360	0,12079	0,10677	0,06100	-0,01262
$\lambda_9$	0,08098	0,06138	0,03291	0,00639	0,00601
$\lambda_8$	0,05300	0,02403	0,00634	0,00016	-0,00266
$\lambda_7$	0,03727	0,00860	0,00082	0,00004	0,00077
$\lambda_6$	0,03727	0,00860	0,00082	0,00004	0,00077
$\lambda_5$	0,05300	0,02403	0,00634	0,00016	-0,00266
$\lambda_4$	0,08098	0,06138	0,03291	0,00639	0,00601
$\lambda_3$	0,11360	0,12079	0,10677	0,06100	-0,01262
$\lambda_2$	0,14003	0,18136	0,21631	0,24181	0,18309
$\lambda_1$	0,15023	0,20768	0,27371	0,38123	0,65082

Tabla 3.3: pesos de la 11-ésima fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio,  $\tau = 1$  y diversos valores de  $q$ .

#### 3.1.2. Cotas de error y ejemplos numéricos

Comenzaremos esta subsección interesándonos en la obtención de estimaciones del error

$$\mathring{R}_n(f) = I_{\hat{\mu}}(f) - I_n^{\hat{\mu}}(f) \quad (3.19)$$

con  $I_{\hat{\mu}}(f)$  la integral dada por (3.8), donde  $\hat{\mu}$  es la función peso de Rogers-Szegő (3.7) y  $I_n^{\hat{\mu}}(f)$  una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos. Un primer resultado es el siguiente

**Teorema 3.1.10** *Sea  $\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j f(\tilde{z}_j)$  la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-r,s}$  para  $\hat{\mu}$  dada por (3.7) y cuyos nodos  $\{\tilde{z}_j\}_1^n$  son las raíces  $n$ -ésimas de  $\tau \in \mathbb{T}$ ,  $r + s = n - 1$ . Entonces,*

$$|\mathring{E}_n(z)| \leq 8\pi C(q) \left| \frac{z^{r+1}}{z^n - \tau} \right| \times \begin{cases} (1 - |z|^2)^{-1/2} & , z \in \mathbb{D}, \\ (|z|^2 - 1)^{-1/2} & , z \in \mathbb{E}, \end{cases}$$

donde  $\mathring{E}_n(z) = H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z)$ , con  $H_{\hat{\mu}}$  y  $H_n$  dadas por (1.45) y (1.46) respectivamente, y

$$C(q) := 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{(2\pi(j-1))^2}{2 \log(1/q)}}. \quad (3.20)$$

**3.1. Relación entre las fórmulas de cuadratura para la función peso de Hermite y de Rogers-Szegő.**

**Demostración.-** Por la representación integral del error (1.48), se tiene que

$$\dot{E}_n(z) = \frac{2z^{r+1}}{z^n - \tau} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ir\theta}(e^{in\theta} - \tau)}{e^{i\theta} - z} \dot{\mu}(\theta) d\theta, \quad z \notin \mathbb{T}.$$

Entonces, de la definición de  $\dot{\mu}$  y  $C(q)$  en (3.7) y (3.20), respectivamente, la desigualdad de Cauchy-Schwartz y el cambio de variable  $x = e^{i\theta}$  se sigue que

$$\begin{aligned} |\dot{E}_n(z)| &= \frac{2|z^{r+1}|}{|z^n - \tau|} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ir\theta}(e^{in\theta} - \tau)}{e^{i\theta} - z} \dot{\mu}(\theta) d\theta \right| \\ &\leq \frac{2\sqrt{2\pi}|z^{r+1}|}{|z^n - \tau|} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{e^{-ir\theta}(e^{in\theta} - \tau)}{e^{i\theta} - z} \dot{\mu}(\theta) \right|^2 d\theta \right)^{1/2} \\ &\leq 4\sqrt{2\pi}C(q) \left| \frac{z^{r+1}}{z^n - \tau} \right| \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - z|^2} \right)^{1/2} \\ &= 4\sqrt{\frac{2\pi}{i}}C(q) \left| \frac{z^{r+1}}{z^n - \tau} \right| \left( \int_{\mathbb{T}} \frac{dx}{(x-z)(1-x\bar{z})} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

La demostración se sigue fácilmente aplicando el teorema de los residuos. ■

Como ilustración, en la Tabla 3.4 se muestran algunos valores de  $C(q)$ . En la Tabla 3.5 se muestran las estimaciones del error proporcionas por el Teorema 3.1.10.

$q$	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4
$C(q)$	1,108573620	1,217147241	1,310667467	1,415291772	1,545678334
$q$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$C(q)$	1,721347520	1,978807594	2,401836626	3,240710059	5,745610791

Tabla 3.4: Algunos valores de la constante  $C(q)$  definida en (3.20).

$f(\theta)$	$q$	cota de error
$\sin(\theta)$	0,1	$2,434E-20$
$e^{i\theta}$	0,3	$2,831E-20$
$e^{e^{i\theta}}$	0,5	$8,156E-06$
$\frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)+3}$	0,7	$1,758E-04$
$\frac{\cos^3(\theta)}{\sin^2(\theta)+2}$	0,9	$3,386E-02$
$e^{\cos(\theta)}$	0,1	$5,362E-07$
$e^{\sin(\theta)}$	0,9	$2,261E-06$

Tabla 3.5: Estimación del Error dada por el teorema 3.1.10.

Con carácter ilustrativo, en la Tabla 3.6 exponemos las distintas cotas dadas en el Teorema 2.1.33. Obsérvese que en este caso  $\gamma_n^{(1)}(z) = \gamma_n^{(2)}(z)$  si  $\tau b_n(z) > 0$ . En la Tabla 3.7 proporcionamos los errores de la fórmula de Szegő con 11 nodos y  $\tau = 1$ , para diferentes valores.

**Capítulo 3. Conexión entre la circunferencia unidad e intervalos no acotados de la recta real**

$z$	$\gamma_n^{(1)}(z)$	$\gamma_n^{(2)}(z)$	$\gamma_n^{(3)}(z)$	$\gamma_n^{(4)}(z)$
0,1	0,00135	0,00135	0,01355	0,04575
$0,2 + 0,2i$	0,02043	0,02045	0,15525	0,40067
$0,3i$	0,01123	0,01124	0,17614	0,43528
-0,4	0,00845	0,00845	0,38129	0,79982
$-0,5 + 0,5i$	0,04099	0,04103	2,92642	4,10048
$-0,6 - 0,6i$	0,09090	0,09100	8,79518	10,41666
-0,7i	0,10597	0,10660	2,80036	4,044189
$0,7 + 0,4i$	3,06375	3,15123	6,39438	11,34936
$0,8 - 0,5i$	12,78741	18,11506	31,05102	58,22001
$0,4 - 0,9i$	7,47507	7,63481	127,39064	132,66970
0,999	1283,63942	1283,63948	1995,00505	1999,10330
$0,999i$	42,93790	43,26794	1995,00415	2012,62582

Tabla 3.6: Cotas de error dadas por el Teorema 2.1.33 para  $z \in \mathbb{D}$ ,  $q = 0,8$ ,  $n = 2$ ,  $\tau = 1$  y  $\hat{\mu}$  dada por (3.7).

$f(\theta)$	$q$	$\gamma_n^{(1)}(z)$	$\gamma_n^{(2)}(z)$	$\gamma_n^{(3)}(z)$	$\gamma_n^{(4)}(z)$
$\sin(\theta)$	0,1	$8,906E - 16$	$8,906E - 16$	$1,000E - 15$	$3,996E - 15$
	0,4	$4,272E - 16$	$4,272E - 16$	$9,409E - 16$	$3,760E - 15$
	0,8	$6,863E - 18$	$6,863E - 18$	$6,626E - 16$	$2,646E - 15$
$e^{i\theta}$	0,3	$5,983E - 16$	$5,983E - 16$	$9,748E - 16$	$3,895E - 15$
	0,5	$2,618E - 16$	$2,618E - 16$	$8,900E - 16$	$3,556E - 15$
	0,9	$1,986E - 19$	$1,986E - 19$	$5,795E - 16$	$2,314E - 15$
$e^{e^{i\theta}}$	0,3	$1,696E - 02$	$1,696E - 02$	$2,398E - 02$	$8,701E - 02$
	0,6	$4,572E - 03$	$4,572E - 03$	$2,092E - 02$	$7,465E - 02$
	0,8	$3,434E - 04$	$3,434E - 04$	$1,741E - 02$	$6,047E - 02$
$\frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)+3}$	0,1	$1,131E - 02$	$1,131E - 02$	$1,147E - 02$	$3,414E - 02$
	0,5	$6,883E - 03$	$6,883E - 03$	$1,087E - 02$	$3,142E - 02$
	0,9	$6,843E - 05$	$6,843E - 05$	$8,628E - 03$	$2,124E - 02$
$\frac{\cos^3(\theta)}{\sin^2(\theta)+2}$	0,2	$1,438E - 01$	$1,438E - 01$	$1,559E - 01$	$4,147E - 01$
	0,6	$9,488E - 02$	$9,488E - 02$	$1,457E - 01$	$3,579E - 01$
	0,8	$3,057E - 02$	$3,057E - 02$	$1,353E - 01$	$3,003E - 01$
$e^{\cos(\theta)}$	0,2	$2,044E - 02$	$2,044E - 02$	$2,433E - 02$	$8,842E - 02$
	0,6	$4,572E - 03$	$4,572E - 03$	$2,093E - 02$	$7,465E - 02$
	0,9	$1,291E - 05$	$1,291E - 05$	$1,546E - 02$	$5,258E - 02$
$e^{\sin(\theta)}$	0,3	$1,489E - 02$	$1,489E - 02$	$2,106E - 02$	$7,639E - 02$
	0,7	$1,527E - 03$	$1,527E - 03$	$1,69E - 02$	$5,966E - 02$
	0,8	$3,015E - 04$	$3,015E - 04$	$1,529E - 02$	$5,309E - 02$

Tabla 3.7: Estimación del error de la 11-ésima fórmula de Szegő con  $\tau = 1$  y  $\hat{\mu}$  dada por (3.7).

En la Tabla 3.8 se muestran las estimaciones del error producidas por (1.42) para diferentes funciones cuando tomamos  $r = s = 5$ .

### 3.1. Relación entre las fórmulas de cuadratura para la función peso de Hermite y de Rogers-Szegő.

$f(\theta)$	Cota de error
$\sin(\theta)$	$1,001E - 12$
$e^{i\theta}$	$1,001E - 12$
$e^{e^{i\theta}}$	$5,937E - 02$
$\frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)+3}$	$3,465E - 02$
$\frac{\cos^3(\theta)}{\sin^2(\theta)+2}$	$2,924E - 01$
$e^{\cos(\theta)}$	$5,937E - 02$
$e^{\sin(\theta)}$	$4,817E - 02$

Tabla 3.8: Estimación del error para reglas de tipo interpolatorio dada por (1.42).

A continuación, haremos uso de las cotas del error dadas por el Teorema 1.3.15 en relación con fórmulas de cuadratura que integran exactamente funciones racionales con polos prefijados fuere de  $\mathbb{T}$ . Por tanto, cuando todos los polos se encuentran en el origen y el infinito, las cuadraturas basadas en polinomios de Laurent se recuperan. Destacar el carácter universal y aplicabilidad de esta cota. Una ilustración numérica de la cota de error (1.43) cuando la aplicamos a la función peso de Rogers-Szegő se muestra en la Tabla 3.9 donde contrastamos la fórmula de Szegő con seis nodos ( $\tau = 1$ ) y una de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-5,5}$  con nodos las raíces 11-ésimas de la unidad, es decir, ambas cuadraturas poseen el mismo dominio de validez. Por lo tanto, las cotas de error para ambas coinciden si tienen pesos positivos.

$f(\theta)$	$q$	Szegő	Interpolatorio
$\sin(\theta)$	0,1	$2,000E - 15$	$2,000E - 15$
$e^{i\theta}$	0,3	$2,000E - 15$	$2,00E - 15$
$e^{e^{i\theta}}$	0,5	$1,778E - 02$	$1,778E - 02$
$\frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)+3}$	0,7	$1,737E - 02$	$1,740E - 02$
$\frac{\cos^3(\theta)}{\sin^2(\theta)+2}$	0,9	$1,698E - 01$	$1,791E - 01$
$e^{\cos(\theta)}$	0,1	$1,778E - 02$	$1,778E - 02$
$e^{\sin(\theta)}$	0,9	$1,490E - 02$	$1,572E - 02$

Tabla 3.9: Estimación del error dada por (1.43).

Finalizamos esta subsección presentando diversos experimentos numéricos con el fin de comprobar la efectividad de los métodos propuestos para aproximar integrales de la forma  $\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\hat{\mu}(\theta)d\theta$  con  $\hat{\mu}$  la función peso dada por (3.7).

Comenzaremos comparando los resultados producidos por una fórmula de tipo interpolatorio con nodos las raíces de la unidad y una fórmula de Szegő ( $\tau = 1$ ), ambas con el mismo dominio de validez,  $\Lambda_{-5,5}$ . En la Tabla 3.10 se muestran los errores absolutos de ambas cuadraturas tomando diferentes valores del parámetro  $q$ .

Ahora, nos centraremos en la computación de integrales sobre la recta real  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu_{\gamma}(x)dx$ , donde  $f$  es una función  $2\pi$  periódica tal que  $|f|\mu_{\gamma}$  es integrable en  $\mathbb{R}$  y  $\mu_{\gamma}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\gamma x^2}$  con  $\gamma > 0$ . Esta integral puede ser computada eficientemente por medio de una fórmula



$q$	$f(\theta)$	Interpolatorio	Szegő
0,9	1	$1,339E - 20$	$6,924E - 15$
	$\sin(3\theta)$	$4,597E - 10$	$7,590E - 08$
0,8	$e^{i\theta}$	$2,236E - 20$	$5,013E - 17$
	$\cos^3(\theta) \sin^2(\theta)$	$7,100E - 11$	$3,340E - 08$
0,7	$e^{2i\theta}$	$5,099E - 20$	$3,030E - 18$
	$\sin^6(\theta)$	$1,751E - 02$	$1,305E - 03$
0,6	1	$2,312E - 20$	$9,200E - 19$
	$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)+2}$	$9,058E - 11$	$3,667E - 10$
0,5	$\frac{\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)+3}$	$1,420E - 07$	$2,441E - 05$
	$e^{i\theta}$	$3,902E - 03$	$2,608E - 01$
0,4	$\cos(4\theta)$	$7,069E - 10$	$7,803E - 10$
	$\cos(\theta) \sin(\theta)$	$4,585E - 10$	$2,040E - 10$
0,3	$e^{3i\theta}$	$1,332E - 20$	$2,080E - 20$
	$\frac{\cos^3(\theta)}{\sin^6(\theta)+2}$	$4,167E - 04$	$2,510E - 03$
0,2	$e^{4i\theta}$	$9,999E - 21$	$2,600E - 20$
	$\frac{\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)+3}$	$6,480E - 08$	$9,987E - 05$
0,1	1	$2,035E - 20$	$0,000E + 00$
	$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)+2}$	$9,909E - 11$	$3,245E - 11$

Tabla 3.10: Comparación entre las fórmulas de tipo interpolatorio Szegő.

de cuadratura de Gauss-Hermite. Por otro lado, por el Teorema 3.1.1,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu_{\gamma}(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\hat{\mu}(\theta)d\theta$  con  $\hat{\mu}$  dada por (3.7). Por tanto, parece natural comparar ambas fórmulas. En la Tabla 3.11 se muestran los errores absolutos correspondientes a las fórmulas de Szegő ( $\tau = 1$ ) y Gauss-Hermite (ambas con seis nodos). Podemos observar que independientemente del parámetro  $q$ , las fórmulas propuestas son competirías con Gauss-Hermite.

$f(\theta)$	$q$	Szegő	Hermite
$\cos(\theta)$	0,1	$1,000E - 20$	$2,307E - 04$
$e^{i\theta}$	0,3	$1,000E - 20$	$6,108E - 06$
$e^{e^{i\theta}}$	0,5	$5,453E - 04$	$3,443E - 02$
$\sin^2(\theta)$	0,7	$9,900E - 19$	$8,023E - 06$
$\cos^3(\theta)$	0,9	$6,015E - 15$	$3,871E - 07$

Tabla 3.11: Comparación entre las fórmulas de Hermite y Szegő.

También comparamos las fórmulas de Gauss-Hermite, Szegő y de tipo interpolatorio. Los errores absolutos de las fórmulas se muestran en la Tabla 3.12.

**3.1. Relación entre las fórmulas de cuadratura para la función peso de Hermite y de Rogers-Szegő.**

$f(\theta)$	$q$	Interpolatorio	Szegő	Hermite
$\frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)+3}$	0,1	$7,050E - 08$	$1,132E - 04$	$5,324E - 03$
	0,5	$1,263E - 07$	$2,170E - 05$	$3,507E - 05$
	0,9	$2,964E - 05$	$7,213E - 05$	$4,502E - 10$
$\frac{\cos^3(\theta)}{\sin^2(\theta)+2}$	0,2	$7,015E - 05$	$1,208E - 03$	$6,794E - 02$
	0,6	$2,595E - 04$	$8,580E - 03$	$6,544E - 03$
	0,8	$6,423E - 04$	$1,486E - 04$	$5,678E - 04$
$ \sin(2\theta) + 5 $	0,3	$2,010E - 09$	$3,001E - 09$	$2,595E - 09$
	0,7	$2,089E - 09$	$7,810E - 07$	$2,595E - 08$
	0,9	$1,753E - 09$	$1,464E - 03$	$2,595E - 09$
$ \cos(\theta) $	0,1	$1,035E - 02$	$2,773E - 02$	$1,639E - 02$
	0,5	$4,638E - 02$	$5,747E - 03$	$2,504E - 02$
	0,8	$6,497E - 04$	$2,159E - 04$	$2,156E - 04$
$e^{\cos(\theta)}$	0,2	$1,700E - 08$	$3,674E - 05$	$3,246E - 02$
	0,6	$1,153E - 06$	$7,544E - 06$	$8,035E - 04$
	0,9	$1,452E - 05$	$1,430E - 06$	$4,290E - 07$
$e^{\sin(\theta)}$	0,3	$1,300E - 08$	$2,673E - 05$	$2,830E - 03$
	0,7	$2,423E - 06$	$1,583E - 06$	$5,716E - 05$
	0,8	$6,608E - 06$	$1,380E - 07$	$4,523E - 06$

Tabla 3.12: Comparación entre las fórmulas de tipo Interpolatorio, Szegő y Hermite.

De las tablas anteriores, podemos deducir que como consecuencia de la periodicidad, las fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad proporciona mejores resultados que las fórmulas Gaussianas, especialmente cuando tratamos con integrandos analíticos y pequeños valores del parámetro  $q$ . Además, se puede observar que en muchos casos, las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio proporcionan resultados similares a las fórmulas de Szegő, lo cual pone de manifiesto el interés del estudio de este tipo de fórmulas de fácil computación.

**3.1.3. El caso límite**

En esta sección, justificaremos la distribución que parecen seguir los nodos de las fórmulas de Szegő para la función peso de Rogers cuando  $q$  varía hacia los extremos 0 y 1. como muestra la figura 3.1. Para nuestro propósito, consideremos primero la siguiente clase de funciones (clase de Schwartz)

$$S = \{f \in C^\infty : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \gamma_{\alpha, \beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty\}.$$

Tenemos el siguiente

**Teorema 3.1.11** Sea

$$\mu(x) = \mu(x, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \log\left(\frac{1}{q}\right)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2 \log\left(\frac{1}{q}\right)}\right) dx.$$

Entonces, para todo  $\phi \in \mathcal{S}$  se tiene que

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \mu(x, q) dx = \phi(0),$$

es decir, la función peso  $\mu(x, q)$  converge a una distribución  $\delta$  de Dirac cuando  $q \rightarrow 1^-$ .

**Demostración.**- Por simplicidad, haremos  $\lambda = 2 \log 1/q$  y demostraremos que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} e^{-\frac{x^2}{\lambda}} dx = \phi(0)$  para todo  $\phi \in \mathcal{S}$ . En efecto,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} e^{-\frac{x^2}{\lambda}} dx - \phi(0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} [\phi(x) - \phi(0)] \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} e^{-\frac{x^2}{\lambda}} dx \right|.$$

Ahora, por el teorema del valor medio se sigue  $\frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} = \phi'(c)$  para algún  $c \in (0, x)$  y puesto que  $\phi \in \mathcal{S}$ , existe una constante global  $C$  de manera que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} [\phi(x) - \phi(0)] \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} e^{-\frac{x^2}{\lambda}} dx \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}} |x| e^{-\frac{x^2}{\lambda}} dx = \frac{2C}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{\lambda}} dx.$$

Finalmente, haciendo el cambio de variable  $t = \frac{x^2}{\lambda}$  concluimos que

$$\frac{2C}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{\lambda}} dx = C\sqrt{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = C\sqrt{\lambda} \rightarrow 0^+ \text{ cuando } \lambda \rightarrow 0.$$

■

Podemos probar también el siguiente

**Teorema 3.1.12** Consideremos la función peso de Rogers-Szegő

$$\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}(x, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \log\left(\frac{1}{q}\right)}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - 2\pi j)^2}{2 \log\left(\frac{1}{q}\right)}\right), \quad 0 < q < 1.$$

Entonces,

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \hat{\mu}(x, q) dx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(2\pi j)$$

para toda  $\phi \in \mathcal{S}$ , es decir, la función peso de Rogers-Szegő converge a una suma doblemente infinita de distribuciones  $\delta$  de Dirac cuando  $q \rightarrow 1^-$ .

**Demostración.**- Como antes, consideremos  $\lambda = 2 \log 1/q$ . Queremos probar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi \log\left(\frac{1}{q}\right)}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - 2\pi j)^2}{2 \log\left(\frac{1}{q}\right)}\right) dx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(2\pi j)$$

para toda  $\phi \in \mathcal{S}$ . Ahora bien, como podemos intercambiar la integral y el sumatorio, es suficiente ver que

**3.1. Relación entre las fórmulas de cuadratura para la función peso de Hermite y de Rogers-Szegő.**

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} e^{-\frac{(x-2\pi j)^2}{\lambda}} dx = \phi(2\pi j),$$

lo cual se puede probar de forma similar al de la demostración del Teorema 3.1.11. ■

Con carácter ilustrativo en la Tabla 3.13 se muestran los errores absolutos de una regla de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-5,5}$  con nodos las raíces de la unidad cuando  $q = 1$ .

$f(\theta)$	Valor	Error
$\sin(\theta)$	0	$1,039E - 20$
$\cos(\theta)$	1	$0,000E + 00$
$e^{i\theta}$	1	$3,000E - 20$
$\tan(\theta)$	0	$7,639E - 20$
$\frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)+3}$	0	$1,054E - 20$
$\frac{\cos^3(\theta)}{\sin(\theta)+3}$	1/3	$1,000E - 20$
$e^{e^{i\theta}}$	$e$	$0,000E + 00$
$e^{\cos(\theta)}$	$e$	$0,000E + 00$
$e^{\sin(\theta)}$	1	$2,279E - 20$

Tabla 3.13: Errores absolutos de cuadraturas de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-5,5}$  con nodos las raíces de la unidad y  $q = 1$

Para el otro caso límite  $q \rightarrow 0^+$  tenemos:

**Teorema 3.1.13** Denotemos por  $I_n^{(q)}(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(q)} f(z_j^{(q)})$  la  $n$ -ésima fórmula de Szegő para  $\dot{\mu}(\theta) = \dot{\mu}(\theta, q)$  dada por (3.7) y  $\tau \in \mathbb{T}$ . Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$  la  $n$ -ésima fórmula de Szegő para la medida de Lebesgue normalizada  $\frac{d\theta}{2\pi}$  y mismo parámetro  $\tau$ . Entonces,  $\lim_{q \rightarrow 0^+} I_n^{(q)}(f) = I_n(f)$ .

**Demostración.-** De (1.27) y los Teoremas 1.3.5 y 1.3.7 vemos que los coeficientes  $\{\lambda_j^{(q)}\}_{j=1}^n$  y nodos  $\{z_j^{(q)}\}_{j=1}^n$  dependen continuamente de los coeficientes de Verblunsky  $\{\delta_k^{(q)}\}_{k=0}^\infty$  de  $\dot{\mu}$ . Ahora, de (3.13),  $\delta_k^{(q)} = (-1)^k q^{k/2}$  para  $k = 1, 2, \dots$  y  $\delta_0^{(q)} = 1$ . Entonces,  $\lim_{q \rightarrow 0^+} \delta_k^{(q)} = 0$  para  $k = 1, 2, \dots$  y  $\lim_{q \rightarrow 0^+} \delta_0^{(q)} = 1$ , esto es, los coeficientes de Verblunsky para la medida de Lebesgue y por tanto la demostración se sigue por argumentos de continuidad. ■

Finalmente, se tiene también,

**Teorema 3.1.14** Sea  $I_N^q(f) = \sum_{j=1}^N \tilde{\lambda}_j(q) f(\tilde{z}_j)$  la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-r,s}$  ( $r + s = N - 1$ ) con nodos las raíces  $N$ -ésimas de  $\tau \in \mathbb{T}$  para la función peso de Rogers-Szegő tomando  $q \in (0, 1)$ . Entonces,  $\lim_{q \rightarrow 0^+} I_N^q(f) = I_N(f) = \sum_{j=1}^N \lambda_j f(\tilde{z}_j)$  donde  $I_N(f)$  denota la  $N$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő para la medida de Lebesgue normalizada  $\frac{d\theta}{2\pi}$  y parámetro  $\tau$ .

**Demostración.-** Por simplicidad, tomaremos  $\tau = 1$  y  $r = s = n$  de manera que  $N = 2n + 1$ . Por tanto, los nodos de la fórmula de tipo interpolatorio con  $(2n + 1)$  nodos en  $\Lambda_{-n,n}$  son las raíces  $(2n + 1)$ -ésimas de la unidad, que son también los nodos de la

$(2n + 1)$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő para la medida de Lebesgue  $\frac{d\theta}{2\pi}$ . Por otro lado, los pesos de la cuadratura de tipo interpolatorio vienen dados por, ver (3.1.7)

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{\tilde{z}_j^n}{(2n + 1)} \sum_{k=1}^{2n+1} q^{\frac{(k-n-1)^2}{2}} \tilde{z}_j^k, \quad j = 1, \dots, 2n + 1. \quad (3.21)$$

Todo se reduce a probar que  $\tilde{\lambda}_j$  tiende a  $\frac{1}{2n+1}$  cuando  $q \rightarrow 0^+$ . Esto sigue fácilmente de (3.21) teniendo en cuenta que cuando  $q \rightarrow 0^+$  todos los sumandos son cero excepto el correspondiente a  $k = n + 1$ , es decir

$$\lim_{q \rightarrow 0^+} \tilde{\lambda}_j = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{z}_j^n \tilde{z}_j^{n+1}}{2n + 1} = \frac{\tilde{z}_j^{2n+1}}{(2n + 1)} = \frac{1}{2n + 1}.$$

■

**Nota 3.1.15** El Teorema 3.1.14 podría explicar los excelentes resultados proporcionados por las fórmulas de tipo interpolatorio para pequeños valores del parámetro  $q$ .

## 3.2. Aplicación de los polinomios de Szegő al cálculo de integrales pesadas sobre intervalos no acotados.

### 3.2.1. Fórmulas de cuadratura

En esta sección, extenderemos algunos de los resultados de la Sección 3.1 a funciones pesos más generales. Mostraremos cómo las fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad, tanto las de Szegő  $\tilde{\lambda}$  como las de tipo interpolatorio, pueden ser usadas para calcular integrales de la forma

$$\int_{\tilde{I}} f(x) \mu(x) dx, \quad (3.22)$$

donde  $\mu$  es una función acotada no negativa en un intervalo no acotado  $\tilde{I}$  y  $f$  es una función  $2\pi$  periódica de manera que  $|f|\mu$  sea integrable sobre  $\tilde{I}$ . Además, asumiremos que la sucesión  $\{\tilde{c}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  tal que  $\tilde{c}_k = \int_{\tilde{I}} e^{-ikx} \mu(x) dx$  pueden ser computados eficientemente.

El resultado clave de la estrategia a seguir viene dado por el siguiente

**Teorema 3.2.1** *Bajo las condiciones anteriores, asumamos la convergencia puntual de la serie  $\sum_{\mathbb{Z}} \mu(\theta + 2\pi j)$  a la función  $\dot{\mu}$  en casi todo punto sobre  $[-\pi, \pi]$ . Entonces  $\dot{\mu}(\theta)$  es una función peso en  $[-\pi, \pi]$  y se tiene que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \dot{\mu}(\theta) d\theta = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(x) dx. \quad (3.23)$$

**Demostración.**- Definimos  $\dot{\mu}_0(\theta) = \mu(\theta)$ ,  $\dot{\mu}_{2k}(\theta) = \dot{\mu}_{2k-1}(\theta) + \mu(\theta - 2k\pi)$  y  $\dot{\mu}_{2k-1}(\theta) = \dot{\mu}_{2k-2}(\theta) + \mu(\theta + 2k\pi)$ , para todo  $k \geq 1$ . Como  $\mu$  es no negativa, se sigue del teorema de la convergencia monótona aplicada a la sucesión  $\{\mu_k(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$  que la integral y el sumatorio pueden ser intercambiados, obteniendo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu(\theta + 2\pi j) d\theta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \mu(\theta + 2\pi j) d\theta. \quad (3.24)$$

### 3.2. Aplicación de los polinomios de Szegő al cálculo de integrales pesadas sobre intervalos no acotados.

Por tanto, la demostración se concluye haciendo el cambio de variable  $x = \theta + 2\pi j$  en cada una de las integrales en (3.24) y teniendo en cuenta que  $f$  es una función  $2\pi$  periódica. ■

**Corolario 3.2.2** *Sea  $\mu$  una función acotada no negativa en  $\mathbb{R}$  y  $f$  es una función  $2\pi$  periódica de manera que  $|f|\mu$  sea integrable sobre  $\mathbb{R}$ . Asumamos que existen dos números reales  $a$  y  $b$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ , de manera que  $\mu$  sea monótona no creciente en  $(b, +\infty)$  y monótona no decreciente en  $(-\infty, a)$ . Entonces, la función  $2\pi$  periódica  $\dot{\mu}$  definida por*

$$\dot{\mu}(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu(\theta + 2\pi j) \quad (3.25)$$

es una función peso en  $[-\pi, \pi]$  y se verifica (3.24).

**Demostración.** - Sin pérdida de generalidad, asumiremos que tanto  $a$  como  $b$  son enteros. Tenemos que

$$\dot{\mu}(\theta) = \sum_{j=-\infty}^a \mu(\theta + 2\pi j) + \sum_{j=a}^b \mu(\theta + 2\pi j) + \sum_{j=b}^{\infty} \mu(\theta + 2\pi j). \quad (3.26)$$

Tomando  $M > 0$  tal que  $\mu(x) \leq M$  para toda  $x \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\dot{\mu}(\theta) \leq \sum_{j=-\infty}^a \mu(\pi + 2\pi j) + M(b - a) + \sum_{j=b}^{\infty} \mu(-\pi + 2\pi j).$$

Ahora, por el criterio de la integral y la monotonía de  $\mu$  podemos ver que la primera y tercera serie en (3.26) son convergentes. Además, se puede comprobar que ambas series son uniformemente convergentes en  $[-\pi, \pi]$ . La prueba sigue del Teorema 3.2.1. ■

**Nota 3.2.3** *Los casos de intervalos no acotados de la forma  $\tilde{I} = (-\infty, a)$  ó  $\tilde{I} = (b, \infty)$  se pueden reducir al caso  $(-\infty, \infty)$  tomando  $\mu$  como cero fuera del intervalo  $\tilde{I}$ .*

De (3.23) vemos que la computación de la integral (3.22) puede ser obtenida a partir de la correspondiente fórmula de cuadratura para una nueva función peso  $\dot{\mu}$  definida por (3.25).

Con respecto a los momentos trigonométricos de  $\dot{\mu}$ , por el Teorema 3.2.1 se tiene para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  que

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \dot{\mu}(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \mu(x) dx = \tilde{c}_k,$$

así que podemos decir que los correspondientes momentos trigonométricos pueden ser fácilmente computados. En resumen, estamos en disposición de usar cuadraturas sobre la circunferencia unidad.

Así, sean  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j f(z_j)$  una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos para  $\dot{\mu}$  y  $z_j = e^{i\theta_j}$  con  $\theta_j \in (-\pi, \pi]$ . Entonces,

$$I_{\mu}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mu(x) dx \approx \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j f(\theta_j) = I_n(f).$$

Seguidamente, trataremos las estimaciones de error. Aquí, puesto que asumimos que  $f$  es una función  $2\pi$  periódica, podemos escribir  $f(x) = \tilde{f}(e^{ix}) = f(e^{ix})$ . Además, asumiremos en el resto de la sección que  $f$  es una función analítica en una región  $G$  del plano complejo, conteniendo a la circunferencia unidad, siendo  $\Gamma$  su frontera. Entonces, se tiene el siguiente

**Teorema 3.2.4** *En las mismas condiciones que el Teorema 3.2.1, sea  $\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j f(\tilde{z}_j)$  la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-r,s}$  ( $r$  y  $s$  enteros no negativos con  $r + s = n - 1$ ) para  $\hat{\mu}$  dada por (3.25) y cuyos nodos  $\{\tilde{z}_j\}_{j=1}^n$  son las raíces  $n$ -ésimas de  $\tau \in \mathbb{T}$ . Tomemos  $\tilde{z}_j = e^{i\tilde{\theta}_j}$  para  $j = 1, \dots, n$  y  $\mathring{R}_n(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(x)dx - \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j f(\tilde{\theta}_j)$ . Entonces,*

$$|\mathring{R}_n(f)| \leq 2C\gamma_n l(\Gamma) \max \left\{ \left| \frac{f(\psi)}{\psi} \right|, \psi \in \Gamma \right\}, \quad (3.27)$$

donde

$$C = \sum_{j=-\infty}^a \mu(\pi + 2\pi j) + M(b - a) + \sum_{j=b}^{\infty} \mu(-\pi + 2\pi j), \quad (3.28)$$

$l(\Gamma)$  es la longitud de  $\Gamma$ ,  $\gamma_n = \max\{\gamma_{n,1}, \gamma_{n,2}\}$  y

$$\gamma_{n,1} := \max \left\{ \frac{|z|^{r+1}}{|z^n - \tau|\sqrt{1 - |z|^2}}, z \in \mathbb{D} \cap \Gamma \right\},$$

$$\gamma_{n,2} := \max \left\{ \frac{|z|^{r+1}}{|z^n - \tau|\sqrt{|z|^2 - 1}}, z \in \mathbb{E} \cap \Gamma \right\}$$

**Demostración.**- Haciendo uso de los teoremas de Cauchy y Fubini, se puede probar (véase [74]) que

$$\mathring{R}_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z)) g(z) dz, \quad (3.29)$$

donde  $g(z) = -\frac{f(z)}{2z}$ . Tomando  $\mathring{E}_n(z) = H_{\hat{\mu}}(z) - H_n(z)$  para  $z \notin \mathbb{T}$ , se tiene que

$$|R_n(f)| = |\mathring{R}_n(f)| \leq \frac{1}{4\pi} \left( \max \left\{ \left| \frac{f(\psi)}{\psi} \right| : \psi \in \Gamma \right\} \right) \int_{\Gamma} |\mathring{E}_n(z)| |dz|. \quad (3.30)$$

Finalmente acotamos  $\mathring{E}_n(z)$  procediendo de la misma manera que en la demostración del Teorema 3.1.10, concluyendo así la prueba. ■

### 3.2.2. Ejemplos y aplicaciones

En esta subsección ilustraremos los resultados anteriores por medio de varios ejemplos de funciones  $\mu$  que dan lugar a funciones peso  $\hat{\mu}$  sobre  $\mathbb{T}$  cuyos momentos trigonométricos puedan ser deducidos explícitamente, y consecuentemente las cuadraturas sobre  $\mathbb{T}$  pueden ser computadas eficientemente. En lo que sigue, nos referiremos a  $\hat{\mu}$  como la *función peso asociada* con  $\mu$ .

### 3.2. Aplicación de los polinomios de Szegő al cálculo de integrales pesadas sobre intervalos no acotados.

#### 3.2.2.1 $\mu(x) = \mu_\gamma(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\gamma x^2}$ con $\gamma > 0$ y $\tilde{I} = \mathbb{R}$ .

Este ejemplo fue extensamente estudiado en la Sección 3.1. Presentaremos aquí como aplicación, la evaluación del llamado operador de Weierstrass

$$W_\sigma(f, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (3.31)$$

asumiendo que  $f$  es una función acotada y  $2\pi$  periódica en  $\mathbb{R}$ . Haciendo  $u = x - t$ , tenemos que

$$W_\sigma(f, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u+t) e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du. \quad (3.32)$$

Claramente de (3.32) y para un valor fijo  $t$ ,  $W_\sigma(f, t)$  puede ser estimado por medio de una fórmula de Szegő con  $n$  nodos para  $\dot{\mu}$  dada por (3.7) con  $q = e^{-\sigma^2}$ . Concretamente, sea  $\{I_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de fórmulas de cuadratura de Szegő tales que para  $n \geq 1$ ,

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(z_{j,n}), \quad (3.33)$$

donde  $z_{j,n} = e^{i\theta_{j,n}}$  con  $-\pi < \theta_{j,n} \leq \pi$  para  $1 \leq j \leq n$  y  $\lambda_{j,n} > 0$ . Entonces,

$$W_\sigma(f, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(\theta_{j,n} + t) = W_n(f, t), \quad (3.34)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Podemos afirmar que

**Proposición 3.2.5** *Sea  $f$  una función  $2\pi$  periódica y analítica en una región que contenga a  $\mathbb{T}$ . Entonces, la sucesión  $W_n(f, t)$  dada por (3.34) converge uniformemente a  $W_\sigma(f, t)$  sobre cualquier compacto  $K$  de  $\mathbb{R}$ .*

**Demostración.**- La convergencia puntual de  $\{W_n(f, t)\}$  es consecuencia del hecho de que cualquier sucesión de fórmulas de cuadratura de Szegő es convergente en la clase de las funciones acotadas integrables con respecto a  $\dot{\mu}$  (véase [18]).

Sea  $K$  un compacto cualquiera de  $\mathbb{R}$  y tomemos  $t \in K$ . Puesto que  $\mu_0 = 1$  y  $|f(x)| \leq M$ , se sigue que,

$$\begin{aligned} |W_n(f, t)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left| \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(\theta_{j,n} + t) \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} |f(\theta_{j,n} + t)| \leq \frac{M}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} = \frac{M}{\sqrt{2\pi\sigma}}. \end{aligned}$$

Ahora, la prueba se sigue del teorema de Stieltjes-Vitali (véase [76]). ■



3.2.2.2  $\mu(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$  con  $b^2 - 4ac < 0$  y  $\tilde{I} = \mathbb{R}$ .

Reescribiendo  $\mu(x) = \frac{\tilde{K}}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}$  con  $\tilde{K}, \gamma > 0$ , tenemos

**Proposición 3.2.6** *Los momentos trigonométricos de la correspondiente función peso asociada  $\dot{\mu}$  vienen dados por*

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \dot{\mu}(\theta) d\theta = e^{-|k|\gamma+x_0ki}.$$

**Demostración.**- Por el Teorema 3.2.1 tenemos para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  que

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \dot{\mu}(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \mu(x) dx.$$

Así,  $\mu_k$  con  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  es la transformada de Fourier para  $\mu$ , por tanto la demostración se sigue usando propiedades de la transformada de Fourier (véase por ejemplo [58]). ■

Si particularizamos  $\tilde{K} = \gamma = 1$  y  $x_0 = 0$ , de forma que  $\mu(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$  para  $x \in \mathbb{R}$ . Por el Teorema 3.2.1,

$$\dot{\mu}(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\theta - 2\pi j)^2}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (3.35)$$

En este caso, podemos sumar la serie (3.35), obteniendo

**Proposición 3.2.7** *La función peso asociada (3.35) coincide con el núcleo de Poisson (1.3.8) con  $r = 1/e$ , esto es,*

$$\dot{\mu}(\theta) = \frac{1 - r^2}{2\pi(1 - 2r \cos(\theta) + r^2)}, \quad r = \frac{1}{e}, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

**Demostración.**- Proporcionaremos dos demostraciones,

*Demostración 1*, por La Proposición 3.2.6 vemos que los momentos trigonométricos vienen dados por  $\mu_k = r^{|k|}$ , con  $r = 1/e$ . Así, la prueba se sigue del Ejemplo 1.3.8 y de la unicidad de soluciones del problema trigonométrico de los momentos (véase [80]).

Como alternativa, damos una prueba directa.

*Demostración 2*, consideremos la función Digamma

$$\Psi(a+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{a+k} \right),$$

con  $\gamma = 0,57721566\dots$  la conocida como constante de Euler-Mascheroni. Así, podemos escribir

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\theta - 2\pi j)^2} = \frac{i}{4\pi} \left\{ \Psi \left( 1 - \frac{\theta+i}{2\pi} \right) - \Psi \left( 1 - \frac{\theta-i}{2\pi} \right) \right\}$$

y

$$\sum_{j=-\infty}^0 \frac{1}{1 + (\theta - 2\pi j)^2} = \frac{i}{4\pi} \left\{ \Psi \left( \frac{\theta-i}{2\pi} \right) - \Psi \left( \frac{\theta+i}{2\pi} \right) \right\}.$$

### 3.2. Aplicación de los polinomios de Szegő al cálculo de integrales pesadas sobre intervalos no acotados.

Ahora, haciendo uso de la fórmula de reflexión  $\Psi(1-z) - \Psi(z) = \pi \cot(\pi z)$ , se sigue que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\theta - 2\pi j)^2} = \frac{i}{4} \left\{ \cot\left(\frac{\theta + i}{2}\right) - \cot\left(\frac{\theta - i}{2}\right) \right\}. \quad (3.36)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que  $\cot(z) = i \frac{1+e^{-2iz}}{1-e^{-2iz}}$ , concluimos de (3.36) que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\theta - 2\pi j)^2} = \frac{1 - r^2}{2\pi(1 - 2r \cos(\theta) + r^2)}, \quad r = \frac{1}{e}.$$

Se observa claramente la ventaja obtenida al calcular la suma de la serie por medio de la relación entre los momentos. ■

#### 3.2.2.3 $\mu(x) = x^{\gamma-1}e^{-\lambda x}$ con $\gamma > -1$ , $\lambda > 0$ y $\tilde{I} = (0, \infty)$ .

**Proposición 3.2.8** *Los momentos trigonométricos para  $\dot{\mu}$  vienen dados por*

$$\mu_k = \frac{\Gamma(\gamma)}{(\lambda + ki)^\gamma}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Demostración.**- Del Teorema 3.2.1 tenemos para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  que

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \dot{\mu}(\theta) d\theta = \int_0^{\infty} e^{-ikx} \mu(x) dx.$$

Por tanto, los momentos trigonométricos  $\mu_k$  son la transformada de Laplace para  $\mu$ , y la prueba se sigue usando propiedades de la transformada de Laplace. (véase, por ejemplo [58]). ■

#### 3.2.2.4 $\mu(x) = \exp(-(ax + b/x))$ con $a, b > 0$ y $\tilde{I} = (0, \infty)$ .

Este es un típico ejemplo de función peso fuerte de Stieltjes, esto es una función peso definida en  $(0, \infty)$  de manera que los momentos  $c_k = \int_0^{\infty} x^k \sigma(x) dx$  existen para cualquier entero  $k$ . Estas funciones pesos han sido exhaustivamente estudiadas por su conexión con el problema de momentos fuertes de Stieltjes y tópicos relacionados, véase por ejemplo [55, 82] y [90], para más detalles. Haciendo uso nuevamente de las propiedades y tablas de la transformada de Laplace (véase [58]) podemos probar el siguiente resultado donde como es usual,  $BesselK[a, b]$  representa la función de Bessel modificada de segundo tipo con parámetros  $a$  y  $b$ .

**Proposición 3.2.9** *Sea  $\dot{\mu}$  la función peso asociada con  $\mu$ . Entonces, sus momentos trigonométricos viene dados por*

$$\mu_k = \frac{2\sqrt{b} BesselK[1, 2\sqrt{b}\sqrt{a + ik}]}{\sqrt{a + ik}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Nota 3.2.10** Tomando  $\mu_1(x) = x^{\gamma-1}e^{-\lambda x}$  y  $\mu_2(x) = \exp(-(ax + b/x))$ , vemos que ambas funciones peso coinciden cuando  $\gamma = 1$ ,  $a = \lambda$  y  $b = 0$ . Si denotamos por  $\mu_{k,1}$  y  $\mu_{k,2}$  a los respectivos momentos trigonométricos, observamos que

$$\lim_{b \rightarrow 0} \mu_{k,2} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{b} \text{BesselK}[1, 2\sqrt{b}\sqrt{a+ik}]}{\sqrt{a+ik}} = \frac{1}{\sqrt{a+ik}\sqrt{a+ik}} = \frac{\Gamma(1)}{a+ki} = \mu_{k,1}.$$

### 3.2.3. Experimentos numéricos

En esta subsección presentaremos algunos experimentos numéricos en orden de ilustrar el potencial de las cuadraturas propuestas, así como la bondad de las cotas de error cuando aproximamos la integral

$$J_\mu(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu(x)dx,$$

con  $f$  una función  $2\pi$  periódica y  $\mu$  alguno de los ejemplos propuestos en la Subsección anterior.

Comenzaremos haciendo una comparación entre las fórmulas de cuadratura de Szegő y las de tipo interpolatorio ambas con el mismo dominio de validez, en este caso,  $\Lambda_{-5,5}$ . Así, la fórmula de Szegő tendrá seis nodos y la de tipo interpolatorio 11, tomados como las raíces 11-ésimas de la unidad. Los errores absolutos para estas cuadraturas se muestran en las Tablas 3.14, 3.15 y 3.16.

$x_0$	$\gamma$	$f(x)$	Interpolatorio	Szegő
0	1	$\sin x$	$2,043E - 16$	$0,000E + 00$
1	1	$\cos x$	$1,063E - 15$	$2,165E - 15$
2	1	$\sin^6 x$	$6,360E - 04$	$2,702E - 02$
3	4	$\cos^{10} x$	$9,661E - 05$	$8,788E - 02$
3	4	$\cos^4 x \sin^2 x$	$1,006E - 05$	$3,124E - 02$

Tabla 3.14: Errores absolutos para las fórmulas de tipo interpolatorio y de Szegő exactas en  $\Lambda_{-5,5}$  para  $\mu(x, x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}$  con  $\gamma > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$ .

$\lambda$	$\gamma$	$f(x)$	Interpolatorio	Szegő
1	1	$\frac{\sin^2 x}{\cos(x)+3}$	$7,878E - 06$	$3,844E - 05$
2	1	$e^{ix}$	$2,037E - 04$	$4,393E - 05$
1	2	$\frac{\cos^3 x}{\sin x + 1,1}$	$2,525E - 05$	$4,172E - 03$
2	2	$\cos^{10} x$	$4,567E - 03$	$3,800E - 04$
3	3	$\sin x$	$5,782E - 17$	$2,706E - 16$

Tabla 3.15: Errores absolutos para las fórmulas de tipo interpolatorio y de Szegő exactas en  $\Lambda_{-5,5}$  para  $\hat{\mu}(x, \lambda, \gamma) = x^{\gamma-1}e^{-\lambda x}$  con  $\gamma > -1$ ,  $\lambda > 0$  y  $x \in (0, \infty)$ .

### 3.2. Aplicación de los polinomios de Szegő al cálculo de integrales pesadas sobre intervalos no acotados.

$a$	$b$	$f(x)$	Interpolatorio	Szegő
1	1	$\frac{\sin x}{\cos x+4}$	$1,220E-08$	$2,978E-07$
1	2	$e^{e^{ix}}$	$7,438E-06$	$8,981E-05$
2	1	$\cos^{10} x$	$1,807E-03$	$1,389E-04$
2	2	$\frac{\cos^2 x}{\sin x+0,99}$	$3,137E-03$	$6,709E-05$
2	3	$\sin x$	$1,025E-17$	$3,816E-17$

Tabla 3.16: Errores absolutos para las fórmulas de tipo interpolatorio y de Szegő exactas en  $\Lambda_{-5,5}$  para  $\mu(x, a, b) = e^{-(ax+\frac{b}{x})}$  con  $a, b > 0$  y  $x \in (0, \infty)$ .

De las tablas anteriores vemos que ambas proporcionan unos resultados aceptables, y que las fórmulas de tipo interpolatorio compiten favorablemente con las de Szegő. Destacar que las de tipo interpolatorio se computan muy fácilmente.

Seguidamente, compararemos los resultados obtenidos por nuestras cuadraturas con los proporcionados por las cuadraturas Gaussianas para  $\mu$ , siempre que su construcción sea posible. Obsérvese que para la función peso  $\mu$  considerada en la Tabla 3.14 y definida en  $\mathbb{R}$ , las integrales  $I_\mu(x^k)$  para  $k \geq 1$  no existen y consecuentemente las clásicas fórmulas Gaussianas carecen de sentido. En la tabla 3.17 se presenta una comparación para funciones peso de tipo Laguerre, mostrando los errores absolutos de las fórmulas de Gauss-Laguerre y las fórmulas de Szegő ambas con el mismo número de nodos, seis en este caso.

$\lambda$	$\gamma$	$f(x)$	Gauss-Laguerre	Szegő
1	1	$e^{ix}$	$2,671E-04$	$6,355E-15$
2	1	$\sin^2 x$	$6,562E-05$	$1,305E-15$
1	2	$\frac{e^{ix}}{\sin x+4}$	$5,763E-02$	$5,247E-06$
2	2	$ \sin(2x) + 5 $	$8,532E-01$	$5,773E-15$
3	3	$\frac{\sin x}{\cos x+1,01}$	$4,242E-02$	$9,688E-04$

Tabla 3.17: Errores absoluto para las fórmulas de cuadratura de Gauss-Laguerre y Szegő con seis nodos:  $\mu(x, \lambda, \gamma) = x^{\gamma-1}e^{-\lambda x}$  con  $\gamma > -1$ ,  $\lambda > 0$  y  $x \in (0, \infty)$ .

Con respecto, a las cotas de error, consideremos primero la dada por (3.27) en el Teorema 3.2.4 que solo es válida para las fórmulas de tipo interpolatorio con nodos las raíces de  $\tau \in \mathbb{T}$  (en nuestro caso,  $\tau = 1$ ). Los resultados se muestran en las Tablas 3.18, 3.19 y 3.20.

Ilustraremos también la efectividad numérica de las cotas de error dadas por el Teorema 1.3.15 aplicado a las fórmulas de Szegő y de tipo interpolatorio, ambas con el mismo dominio de validez,  $\Lambda_{-5,5}$ , es decir,  $r = s = 5$ . Como en este caso los pesos de las fórmulas de tipo interpolatorio son positivos tenemos la misma cota de error, como se muestra en las Tablas 3.21, 3.22 y 3.23.

**Capítulo 3. Conexión entre la circunferencia unidad e intervalos no acotados de la recta real**

$x_0$	$\gamma$	$f(x)$	Cota de error
0	1	$\sin x$	$6,888E - 16$
1	1	$\cos x$	$3,730E - 16$
2	1	$\sin^6 x$	$1,909E - 05$
3	4	$\cos^{10} x$	$3,070E - 03$
3	4	$\cos^4 x \sin^2 x$	$4,548E - 04$

Tabla 3.18: Cota de error (3.27) para  $\mu(x, x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}$  con  $\gamma > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  y once nodos.

$\lambda$	$\gamma$	$f(x)$	Cota de error
1	1	$\frac{\sin^2 x}{\cos(x)+3}$	$6,201E - 05$
2	1	$e^{e^{ix}}$	$1,421E - 05$
1	2	$\frac{\cos^3 x}{\sin x + 1,1}$	$1,717E + 00$
2	2	$\cos^{10} x$	$4,382E - 04$
3	3	$\sin x$	$5,142E - 17$

Tabla 3.19: cota de error (3.27) para  $\mu(x, \lambda, \gamma) = x^{\gamma-1} e^{-\lambda x}$  con  $\gamma > -1$ ,  $\lambda > 0$ ,  $x \in (0, \infty)$  y once nodos.

$a$	$b$	$f(x)$	Cota de error
1	1	$\frac{\sin x}{\cos x + 4}$	$5,975E - 08$
1	2	$e^{e^{ix}}$	$5,997E - 06$
2	1	$\cos^{10} x$	$5,948E - 03$
2	2	$\frac{\cos^2 x}{\sin x + 0,99}$	$3,973E - 02$
2	3	$\sin x$	$4,327E - 16$

Tabla 3.20: Cota de error (3.27) para  $\mu(x, a, b) = e^{-(ax + \frac{b}{x})}$  con  $a, b > 0$ ,  $x \in (0, \infty)$  y once nodos.

$x_0$	$\gamma$	$f(x)$	Interpolatorio	Szegő
0	1	$\sin x$	$4,000E - 15$	$4,000E - 15$
1	1	$\cos x$	$4,000E - 15$	$4,000E - 15$
2	1	$\sin^6 x$	2,667	$2,667E + 00$
3	4	$\cos^{10} x$	$1,399E + 01$	$1,399E + 01$
3	4	$\cos^4 x \sin^2 x$	$2,963E - 01$	$2,963E - 01$

Tabla 3.21: Cotitas de error dadas en Teorema 1.3.15 para fórmulas de cuadratura de Szegő y de tipo interpolatorio exactas en  $\Lambda_{-5,5}$  para  $\mu(x, x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}$  con  $\gamma > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$ .

### 3.3. Aplicación a la computación de la transformada de Fourier bajo la presencia cercana de singularidades polares.

$\lambda$	$\gamma$	$f(x)$	Interpolatorio	Szegő
1	1	$\frac{\sin^2 x}{\cos x + 3}$	$2,285E - 06$	$2,285E - 06$
2	1	$e^{e^{ix}}$	$9,894E - 03$	$9,894E - 03$
1	2	$\frac{\cos^3 x}{\sin x + 1,1}$	$1,416E - 05$	$1,416E - 05$
2	2	$\cos^{10} x$	$3,393E + 00$	$3,393$
3	3	$\sin x$	$1,481E - 16$	$1,481E - 16$

Tabla 3.22: Cotas de error dadas en Teorema 1.3.15 para fórmulas de cuadratura de Szegő y de tipo interpolatorio exactas en  $\Lambda_{-5,5}$  para  $\mu(x, \lambda, \gamma) = x^{\gamma-1}e^{-\lambda x}$  con  $\gamma > -1$ ,  $\lambda > 0$  y  $x \in (0, \infty)$ .

$a$	$b$	$f(x)$	Interpolatorio	Szegő
1	1	$\frac{\sin x}{\cos x + 4}$	$3,759E - 07$	$3,759E - 07$
1	2	$e^{e^{ix}}$	$2,484E - 03$	$2,484E - 03$
2	1	$\cos^{10} x$	$9,478E - 01$	$9,478E - 01$
2	2	$\frac{\cos^2 x}{\sin x + 0,99}$	$1,311E + 00$	$1,311E + 00$
2	3	$\sin x$	$2,217E - 17$	$2,217E - 17$

Tabla 3.23: Cotas de error dadas en Teorema 1.3.15 para fórmulas de cuadratura de Szegő y de tipo interpolatorio exactas en  $\Lambda_{-5,5}$  para  $\mu(x, a, b) = e^{-(ax + \frac{b}{x})}$  con  $a, b > 0$  y  $x \in (0, \infty)$ .

### 3.3. Aplicación a la computación de la transformada de Fourier bajo la presencia cercana de singularidades polares.

En esta sección, presentamos una aplicación de nuestros resultados obtenidos en las secciones anteriores, concretamente el calculo de la transformada de Fourier de funciones que presentan singularidades polares.

#### 3.3.1. Fórmulas de cuadratura

Comenzaremos viendo cómo podemos aproximar una integral del tipo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{P(x)} dx,$$

donde  $P$  es un polinomio con coeficientes reales que no se anule en la recta real. Así, podemos asumir que  $P(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . mediante la descomposición en fracciones simples de  $1/P(x)$  y tras realizar algunos cambios elementales de variable, podemos restringirnos al estudio de integrales de la forma

$$J_{\mu_p}(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(x^2 + \alpha^2)^p} dx, \quad (3.37)$$

con  $p$  un número natural y  $\alpha$  un número real distinto de cero, aunque suficientemente cerca a cero. Veremos cómo las fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad pueden usarse para computar (3.37). Por el Teorema 3.2.1 podemos enunciar el siguiente,

**Corolario 3.3.1** Sea  $\mu_p(x) = (x^2 + \alpha^2)^{-p}$ , para  $\alpha \neq 0$ ,  $p \geq 1$ , y consideremos  $f$  una función  $2\pi$  periódica. Entonces,

$$J_{\mu_p}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_p(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\dot{\mu}_p(\theta)d\theta = I_{\dot{\mu}_p}(f),$$

donde

$$\dot{\mu}_p(\theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((\theta + 2\pi j)^2 + \alpha^2)^p}. \quad (3.38)$$

Así, del Corolario 3.3.1 se sigue claramente que la computación de la integral (3.37) en la recta real, se reduce a la computación de una integral pesada en la circunferencia unidad. Como hemos visto, cuando usamos cuadraturas en la circunferencia unidad para aproximar la integral  $J_{\dot{\mu}_p}(f)$  en (3.37), los momentos trigonométricos de  $\dot{\mu}_p(\theta)$  son la información básica requerida, es decir, las integrales

$$\mu_k^{(p)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \dot{\mu}_p(\theta) d\theta, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.39)$$

necesitan computarse previamente. Con este propósito tenemos la siguiente

**Proposición 3.3.2** Los momentos trigonométricos  $\mu_k^{(p)}$  dados por (3.39) satisfacen

$$\mu_k^{(p)} = \frac{1}{\alpha^2} \left[ \frac{2p-3}{2p-2} \mu_k^{(p-1)} + \frac{k^2}{4(p-1)(p-2)} \mu_k^{(p-2)} \right], \quad p = 3, 4, \dots \quad (3.40)$$

donde  $\mu_k^{(1)} = \frac{e^{-\alpha|k|\pi}}{\alpha}$  y  $\mu_k^{(2)} = \frac{(1 + \alpha|k|)e^{-\alpha|k|\pi}}{2\alpha^3}$ .

**Demostración.**- Obsérvese que  $\mu_k^{(p)} = I_{\mu_p}(e^{-ikx})$  y la relación  $\alpha^2 I_{\mu_p}(e^{-ikx}) = I_{\mu_{p-1}}(e^{-ikx}) - I_{\mu_p}(x^2 e^{-ikx})$ . La prueba sigue de aquí aplicando dos veces la integración por partes en la expresión  $I_{\mu_p}(x^2 e^{-ikx})$ . ■

**Nota 3.3.3** El caso  $p = 1$  ya fue estudiado en la subsección 3.2.2.2 dando una expresión explícita de la función  $\dot{\mu}_1$  dados por (3.38). En efecto, fue probado que salvo un factor multiplicativo

$$\dot{\mu}_1(\theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\theta + 2\pi j)^2 + \alpha^2} = \frac{1}{|z - e^{-\alpha}|^2}, \quad z = e^{i\theta}. \quad (3.41)$$

Así, tomando  $r = e^{-\alpha}$ , se sigue que  $\dot{\mu}_1(\theta) = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$  (núcleo de Poisson).

Para el caso  $p = 2$  tenemos también una expresión explícita de  $\mu_2$  como veremos en el siguiente

**Teorema 3.3.4** Bajo las consideraciones anteriores se sigue que

$$\dot{\mu}_2(\theta) = \frac{1}{2\alpha^2} \dot{\mu}_1(\theta) - \frac{1}{16\alpha^2} \left( \csc^2 \left( \frac{\alpha i - \theta}{2} \right) + \csc^2 \left( \frac{\alpha i + \theta}{2} \right) \right).$$

### 3.3. Aplicación a la computación de la transformada de Fourier bajo la presencia cercana de singularidades polares.

**Demostración.-** Consideremos la función Poligamma

$$\psi_n(z) = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^{n+1}}, \quad n \geq 1.$$

La siguiente fórmula de reflexión (véase [1, pág. 260]) satisface:

$$\psi_0(1-z) - \psi_0(z) = \pi \cot(\pi z), \quad \psi_1(1-z) + \psi_1(z) = \pi^2 \csc^2(\pi z). \quad (3.42)$$

Procediendo como en la demostración de la Proposición 3.2.7 para  $p = 1$  y tras algunos cálculos elementales, pero tediosos, obtenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\alpha^2 + (\theta + 2\pi j)^2)^{-2} = \\ & \frac{1}{16\pi^2} \left\{ 2\pi i \left[ \psi_0\left(-\frac{x+\alpha i}{2\pi}\right) - \psi_0\left(-\frac{x-\alpha i}{2\pi}\right) + \psi_0\left(-\frac{x-\alpha i}{2\pi} + 1\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \psi_0\left(-\frac{x-\alpha i}{2\pi} - 1\right) \right] - \left[ \psi_1\left(-\frac{x-\alpha i}{2\pi}\right) + \psi_1\left(-\frac{x+\alpha i}{2\pi}\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \psi_1\left(-\frac{x-\alpha i}{2\pi} + 1\right) + \psi_1\left(-\frac{x-\alpha i}{2\pi} - 1\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Así, la demostración se sigue de la última relación junto con (3.42). ■

En resumen, los pasos necesarios en orden de estimar la integral (3.37) haciendo uso de una fórmula de Szegő con  $n$  nodos serán los siguiente

1. Dado  $p \geq 1$ , los correspondientes momentos trigonométricos  $\mu_k^{(p)}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  son computados por (3.40).
2. Mediante las relaciones de recurrencia (1.27) (Ley de Szegő) computamos los parámetros de Verblunsky requeridos  $\delta_1, \dots, \delta_{n-1} \in \mathbb{D}$  ( $\delta_0 = 1$ ).
3. Fijando  $\tau_n \in \mathbb{T}$  junto a los anteriores parámetros, la fórmula de cuadratura de Szegő con  $n$  nodos para  $\hat{\mu}_p(\theta)$  dada por (3.38) puede ser computada de manera eficiente.
4. Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j f(z_j)$  la cuadratura obtenida, se sigue que  $z_j = e^{i\theta_j}$  para  $j = 1, \dots, n$ . Entonces,

$$J_{\mu_p}(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(\alpha^2 + x^2)^p} dx \approx \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j f(\theta_j) = J_n^{\mu_p}(f). \quad (3.43)$$

Como ilustración, para  $\hat{\mu}_2$  con  $\alpha = 1$  han sido computadas las correspondientes fórmulas de Szegő con  $n$  nodos. Los correspondientes parámetros de Verblunsky, nodos y pesos se muestran en las tablas 3.24 y 3.25, respectivamente.



$n$	$\delta_n$
0	1
1	-0,735758882342885
2	0,295067408390062
3	-0,070167828110242
4	0,016768660288210
5	-0,004008490277504
6	0,000958231141502

Tabla 3.24: Parámetros de Verblunsky asociados con  $\dot{\mu}_2(\theta)$  para  $\alpha = 1$ .

$n$	Nodos	Pesos
	-1	0,032800634680708
5	$0,65541206018352 \pm 0,997849863613590i$	0,127576179753945
	$0,91344356814822 \pm 0,406965413528771i$	0,641421666303148
6	$-0,758428421357609 \pm 0,651756342260669i$	0,033983915212768
	$0,314685214430238 \pm 0,949196089234989i$	0,157719992791071
	$0,933150164882000 \pm 0,359486814472310i$	0,593694255393610

Tabla 3.25: Nodos y Pesos de la fórmula de Szegő con  $n$  nodos para  $\dot{\mu}_2(\theta)$  con  $n = 5, 6$  y  $\alpha = \tau_n = 1$ .

**Nota 3.3.5** Pocas funciones peso en la circunferencia unidad dan lugar a expresiones explícitas de sus correspondientes polinomios de Szegő. El anterior procedimiento muestra cómo computar los polinomios de Szegő y las correspondientes fórmulas de cuadratura para la función peso  $\dot{\mu}_p$  definida en (3.38) la cual, por lo que sabemos, no han sido estudiadas con anterioridad en la literatura para  $p > 1$ . Puesto que trabajamos con funciones peso simétricas en  $[-\pi, \pi]$ , los polinomios de Szegő tienen coeficientes reales y por tanto los parámetros de Verblunsky  $\delta_n$  están en  $(-1, 1)$  para  $n \geq 1$ , como se muestra en la Tabla 3.24. La elección del parámetro  $\tau_n = 1$  implica que consideramos una fórmula de cuadratura simétrica, es decir, los nodos pueden ser reales ( $\{\pm 1\}$ ) o aparecer en pares complejos conjugados. Además, como sabemos, los pesos asociados a dos nodos complejos conjugados son iguales. Por otro lado, el carácter simétrico de  $\dot{\mu}_p$  asegura la existencia de una función peso  $\mu_p$  en  $[-1, 1]$  para la cual  $\dot{\mu}_p$  es la transformación Joukowski de  $\mu_p$ . Estudiar las propiedades de los polinomios ortogonales para la función peso  $\mu_p$  en  $[-1, 1]$  es una cuestión abierta de interés.

Por otro lado, sabemos que la integral  $I_{\dot{\mu}_p}(f)$  puede ser aproximada por una fórmula de tipo interpolatorio con  $n$  nodos en  $\Lambda_{-r,s}$  con  $r + s = n - 1$ , tomando como nodos a las raíces  $n$ -ésimas de  $\tau_n = e^{i\alpha n}$ . En esta situación, solo necesitamos computar los momentos trigonométricos  $\mu_0^{(p)}, \dots, \mu_t^{(p)}$  con  $t = \max\{r, s\}$ . Sea  $z_j = \sqrt[n]{\tau_n} = e^{\frac{i(\alpha_n + 2jn)}{n}}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , la fórmula de tipo interpolatorio con  $n$  nodos en  $\Lambda_{-r,s}$  viene dada por  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j f(z_j)$ , donde  $\tilde{\lambda}_j = \int_{-\pi}^{\pi} l_j(\theta) \dot{\mu}_p(\theta) d\theta$ , con  $l_j \in \Lambda_{-r,s}$  tal que  $l_j(z_k) = \delta_{j,k}$ . Así, tomando  $z = e^{i\theta}$  se

### 3.3. Aplicación a la computación de la transformada de Fourier bajo la presencia cercana de singularidades polares.

obtiene,

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_j &= \frac{z_j^r}{nz_j^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z^n - z_j^n}{z^r(z - z_j)} \dot{\mu}_p(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{nz_j^s} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{z^r} (z^{n-1} + z_j z^{n-2} + \dots + z_j^{n-2} z + z_j^{n-1}) \dot{\mu}_p(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{nz_j^s} \sum_{k=1}^n z_j^k \mu_{r+k-n}.\end{aligned}\quad (3.44)$$

Finalmente, obtenemos la aproximación

$$J_{\mu_p}(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(\alpha^2 + x^2)^p} dx \approx \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j f(\theta_j) = \tilde{J}_n^{\mu_p}(f), \quad (3.45)$$

con  $\tilde{\lambda}_j$  dada por (3.44) y  $\theta_j = \frac{\alpha n + 2j\pi}{n}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Concluimos esta subsección con un resultado de convergencia. Del Teorema 1.3.10 se sigue

**Teorema 3.3.6** *Sea  $f$  una función acotada y  $2\pi$  periódica de manera que  $f(x)(x^2 + \alpha^2)^{-p}$  con  $p = 1, 2, \dots$  y  $\alpha \neq 0$  sea integrable en  $\mathbb{R}$ . Entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n^{\mu_p}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{J}_n^{\mu_p}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_p(x) dx,$$

donde  $\mu_p(x) = (x^2 + \alpha^2)^{-p}$ , con  $J_n^{\mu_p}(f)$  y  $\tilde{J}_n^{\mu_p}(f)$  dadas por (3.43) y (3.45) respectivamente.

#### 3.3.2. Aplicación a la transformada de Fourier

En esta subsección aplicaremos los resultados obtenidos a la estimación de la transformada de Fourier

$$G(w) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{2\pi i x w} dx,$$

para los valores discretos  $w_k = \frac{k}{2\pi}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  y  $g(x) = \frac{f(x)}{P(x)}$ , con  $f$  suficientemente suave y  $P$  un polinomio real tal que  $P(x) \neq 0$  para  $x \in \mathbb{R}$ .

Como vimos, podemos restringirnos sin pérdida de generalidad a la computación de

$$G(w_k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(x^2 + \alpha^2)^p} e^{ikx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

con  $p$  un natural fijo. Para ello, asumiremos que  $f$  es una función  $2\pi$  periódica. Por tanto, por el Corolario 3.3.1 se tiene que,

$$G(k) = G(w_k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{ik\theta} \dot{\mu}_p(\theta) d\theta \quad \text{donde} \quad \dot{\mu}_p(\theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{[(\theta + 2\pi j) + \alpha^2]^p}. \quad (3.46)$$

Aquí,  $\dot{\mu}_p$  es una función peso cuyos momentos trigonométricos pueden ser calculados por el Teorema 3.3.2. Claramente, bajo estas condiciones el valor de la transformada de Fourier

### Capítulo 3. Conexión entre la circunferencia unidad e intervalos no acotados de la recta real

$G(k)$  puede ser aproximado por medio de una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos en  $\Lambda_{-r,s}$  de manera que  $r + s = n - 1$ . Así, sea

$$I_n(g) = \sum_{j=0}^{n-1} \overset{\circ}{\lambda}_j g(z_j)$$

una fórmula de Szegő para  $\overset{\circ}{\mu}_p$  de manera que aplicada a la integral (3.46) resulta

$$G(k) \approx \sum_{j=0}^{n-1} \overset{\circ}{\lambda}_j f(\theta_j) e^{ik\theta_j} = G_n(k), \quad z_j = e^{i\theta_j}, \quad \theta_j \in [-\pi, \pi), \quad \overset{\circ}{\lambda}_j > 0, \quad (3.47)$$

$\theta_i \neq \theta_j$  si  $j \neq k$  para  $j = 0, \dots, n-1$ .

Si asumimos que  $f$  es real, tenemos que  $\overline{G_n(k)} = \sum_{j=0}^{n-1} \overset{\circ}{\lambda}_j f(\theta_j) z_j^{-k} = G_n(-k)$ . Por tanto, en este caso nos restringiremos a valores no negativos de  $k$ . Si tomamos  $k = 0, \dots, n-1$  entonces (3.47) transforma la sucesión  $f(j) = f(\theta_j)$  para  $j = 0, \dots, n-1$  en  $G_n(0), \dots, G_n(n-1)$  (comparar con la *transformada discreta de Fourier*). Así, vemos que (3.47) puede reescribirse en notación matricial como  $G_n = D_n f_n$ , donde

$$G_n = (G_n(0), \dots, G_n(n-1))^T, \quad f_n = (f(0), \dots, f(n-1))^T \text{ y}$$

$$D_n = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\lambda}_0 & \overset{\circ}{\lambda}_1 & \cdots & \overset{\circ}{\lambda}_{n-1} \\ \overset{\circ}{\lambda}_0 z_0 & \overset{\circ}{\lambda}_1 z_1 & \cdots & \overset{\circ}{\lambda}_{n-1} z_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{\circ}{\lambda}_0 z_0^{n-1} & \overset{\circ}{\lambda}_1 z_1^{n-1} & \cdots & \overset{\circ}{\lambda}_{n-1} z_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Claramente, como  $\overset{\circ}{\lambda}_j > 0$  y  $z_j \neq z_k$  si  $j \neq k$ , se tiene que

$$\det(D_n) = \overset{\circ}{\lambda}_0 \cdots \overset{\circ}{\lambda}_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_0^{n-1} & z_1^{n-1} & \cdots & z_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Así podemos escribir  $f_n = D_n^{-1} G_n$ , de manera que la transformada inversa de Fourier puede ser también recuperada.

Supongamos ahora que (3.46) es aproximada por una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio de  $n$  nodos en  $\Lambda_{r,s}$ , con  $r + s = n - 1$  y tomando como nodos las raíces  $n$ -ésimas de un número complejo  $\tau_n \in \mathbb{T}$ ; consideremos  $\tau_n = 1$ . Para esta fórmula, sea

$$\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\lambda}_j f(x_j),$$

con  $z_j = \sqrt[n]{1}$  para  $j = 0, \dots, n-1$  y  $\{\tilde{\lambda}_j\}_{j=0}^{n-1}$  dados por (3.44). Así, cuando lo aplicamos a (3.46) obtenemos

$$G(k) \approx \tilde{G}_n(k) = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\lambda}_j f(\theta_j) e^{ik\theta_j} \text{ donde } \theta_j = \frac{2\pi j}{n}, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (3.48)$$

### 3.3. Aplicación a la computación de la transformada de Fourier bajo la presencia cercana de singularidades polares.

Tomando  $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , podemos escribir

$$G(k) \approx \tilde{G}_n(k) = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\lambda}_j f(j) w^{jk} \text{ con } f(j) = f\left(\frac{2\pi j}{n}\right). \quad (3.49)$$

Realmente, (3.49) puede ser considerada como una transformación lineal llevando la sucesión  $f(0), \dots, f(n-1)$  en la sucesión  $\tilde{G}_n(0), \dots, \tilde{G}_n(n-1)$ . De nuevo, (3.49) puede ser escrita de manera matricial  $\tilde{G}_n = \tilde{D}_n f_n$ , donde

$$\tilde{G}_n = \left( \tilde{G}_n(0), \dots, \tilde{G}_n(n-1) \right)^T, \quad f_n = (f(0), \dots, f(n-1))^T \text{ y}$$

$$\tilde{D}_n = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_0 & \tilde{\lambda}_1 & \cdots & \tilde{\lambda}_{n-1} \\ \tilde{\lambda}_0 & \tilde{\lambda}_1 w & \cdots & \tilde{\lambda}_{n-1} w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\lambda}_0 & \tilde{\lambda}_1 w^{n-1} & \cdots & \tilde{\lambda}_{n-1} w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Claramente

$$\det(\tilde{D}_n) = \tilde{\lambda}_0 \cdots \tilde{\lambda}_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

si y solo si,  $\tilde{\lambda}_j \neq 0$ , para  $j = 0, \dots, n-1$ . En este caso, podemos escribir  $f_n = \tilde{D}_n^{-1} \tilde{G}_n$ . Ahora, haciendo uso de la conocida identidad

$$\sum_{r=0}^{n-1} w^{r(j-k)} = \frac{1 - w^{n(j-k)}}{1 - w^{j-k}} = \begin{cases} n & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k, \end{cases}$$

Tenemos para  $k$  fijo que

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{n-1} \tilde{G}_n(r) w^{-kr} &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\lambda}_j f(j) w^{rj} w^{-kr} = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\lambda}_j f(j) w^{(j-k)r} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\lambda}_j f(j) \sum_{r=0}^{n-1} w^{(j-k)r} = \tilde{\lambda}_k f(k) n. \end{aligned}$$

Por tanto, siempre que  $\tilde{\lambda}_k \neq 0$  para  $k = 0, \dots, n-1$ ,  $f(k) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_k n} \sum_{r=0}^{n-1} \tilde{G}_n(r) w^{-kr}$  dará una aproximación a la transformación inversa.

Cuando  $n$  tiende a infinito, por el Teorema 3.3.6, encontramos para las estimaciones  $G_n(k)$  y  $\tilde{G}_n(k)$  dadas por (3.47) y (3.48) lo siguiente

**Corolario 3.3.7** Sea  $f$  una función acotada y  $2\pi$  periódica de manera que  $f(x)(x^2 + \alpha^2)^{-p}$  con  $\alpha \neq 0$  y  $p$  un número natural fijo, sea integrable en  $\mathbb{R}$ . Entonces, para cualquier entero  $k$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{G}_n(k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(x^2 + \alpha^2)^p} e^{ikx} dx.$$

Finalmente, usaremos el Teorema 1.3.15 con el fin de obtener una cota de error para  $G_n(k)$  y  $\tilde{G}_n(k)$ . Teniendo en cuenta que cualquier función  $2\pi$  periódica en  $\mathbb{R}$  puede verse como una función en  $\mathbb{T}$  y suponiendo que  $f$  es analítica en cierta región que contenga a  $\mathbb{T}$ , se tiene para las estimaciones  $G_n(k)$  y  $\tilde{G}_n(k)$  de

$$G\left(\frac{k}{2\pi}\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)e^{ikx}}{(x^2 + \alpha^2)^p} dx,$$

lo siguiente:

**Corolario 3.3.8** *Bajo las condiciones anteriores, existen números reales  $\varrho_1$  y  $\varrho_2$  con  $0 < \varrho_1 < 1 < \varrho_2$  de manera que para cualquier entero  $k$ ,*

$$\left| G\left(\frac{k}{2\pi}\right) - \tilde{G}_n(k) \right| \leq \varrho^{\max} \left( \mu_0^{(p)} + \|\tilde{I}_n\| \right) \left( \frac{\varrho_1^{r+1}}{1 - \varrho_1^2} + \frac{\varrho_2^{1-s}}{1 - \varrho_2^{-2}} \right), \quad r + s = n - 1, \quad (3.50)$$

$$\left| G\left(\frac{k}{2\pi}\right) - G_n(k) \right| \leq 2\mu_0^{(p)} \varrho^{\max} \left( \frac{\varrho_1^n}{1 - \varrho_1^2} + \frac{\varrho_2^{-n}}{1 - \varrho_2^{-2}} \right), \quad (3.51)$$

donde,  $\varrho^{\max} = \max\{\varrho_1^k \|\tilde{f}\|_{\Gamma_{e_1}}, \varrho_2^k \|\tilde{f}\|_{\Gamma_{e_2}}\}$ ,  $\mu_0^{(p)} = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\mu}_p(\theta) d\theta = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^p}$ ,  $\|\tilde{I}_n\| = \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{\lambda}_j|$ ,  $\Gamma_a = \{z \in \mathbb{C} : |z| = a\}$  y  $\|\tilde{f}\|_B = \max\{|\tilde{f}(z)| : z \in B\}$ , para  $a > 0$  y  $B \subset \mathbb{C}$ .

**Nota 3.3.9** *Obsérvese que ambas cotas superiores (3.50) y (3.51) dependen esencialmente del dominio de analiticidad de  $\tilde{f}$  y del dominio de validez de la fórmula de cuadratura usada.*

### 3.3.3. Ejemplos numéricos

A continuación ilustraremos numéricamente la efectividad de los procedimientos dados para computar la transformada de Fourier de funciones de la forma  $f(x)/P(x)$ , siendo  $P$  un polinomio con coeficientes reales que no se anula en la recta real. Para nuestro propósito, tomaremos  $f(x) = f_j(x)$ ,  $j = 1, 2$  con

$$f_1(x) = \cos^7 x, \quad f_2(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x + 2} \text{ y } P(x) = (x^2 + \alpha^2)^2. \quad (3.52)$$

Como estimaciones consideraremos fórmulas de cuadratura exactas en  $\Lambda_{-5,5}$ . Concretamente, fórmulas de cuadratura de Szegő con 6 nodos con  $\tau_6 = 1$  y fórmulas de tipo interpolatorio con 11 nodos, los cuales son las raíces 11-ésimas de la unidad. Ambas aproximaciones se comparan con los resultados obtenidos usando el conocido método de la Transformada Discreta de Fourier (DFT). La transformada de Fourier

$$G(w) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f_j(x)}{(x^2 + \alpha^2)^2} e^{2\pi i w x} dx, \quad j = 1, 2$$

será computada para los valores discretos  $w = w_k = \frac{k}{2\pi}$ ,  $k = 0, \dots, 5$ . Los errores relativos son expuestos en las Tablas 3.26 y 3.27.

De los resultados obtenidos observamos que los errores relativos obtenidos usando fórmulas de tipo interpolatorio son muy competitivas en comparación con las fórmulas de

**3.3. Aplicación a la computación de la transformada de Fourier bajo la presencia cercana de singularidades polares.**

$\alpha$	$k$	Interpolatorio	Szegő	DFT
1	0	$3,327E - 04$	$2,690E - 02$	$5,013E - 01$
1	3	$1,103E - 02$	$3,664E - 01$	$5,145E - 01$
1	4	$4,257E - 02$	$7,713E - 01$	$6,058E - 01$
0,5	1	$2,193E - 03$	$1,755E - 02$	$5,171E - 01$
0,5	2	$9,641E - 03$	$4,027E - 02$	$5,931E - 01$
0,5	5	$1,851E - 01$	$5,084E - 01$	$8,819E - 01$
0,1	0	$5,444E - 04$	$1,362E - 04$	$9,666E - 01$
0,1	3	$7,729E - 03$	$2,089E - 03$	$9,775E - 01$
0,1	4	$1,825E - 02$	$4,654E - 03$	$9,858E - 01$

Tabla 3.26: Errores relativos de la fórmula de Szegő con 6 nodos, de tipo interpolatorio siendo sus nodos las raíces 11-ésimas de la unidad y la Transformada Discreta de Fourier en la estimación de  $G(w_k)$  para  $f_1(x)$  dada por (3.52).

$\alpha$	$k$	Interpolatorio	Szegő	DFT
1	0	$1,113E - 05$	$2,532E - 03$	$5,114E - 01$
1	1	$6,217E - 06$	$1,415E - 02$	$4,875E - 01$
1	2	$2,582E - 04$	$5,876E - 02$	$5,187E - 01$
1	3	$1,108E - 03$	$2,521E - 01$	$5,020E - 01$

Tabla 3.27: Errores relativos de la fórmula de Szegő con 6 nodos, de tipo interpolatorio siendo sus nodos las raíces 11-ésimas de la unidad y la Transformada Discreta de Fourier en la estimación de  $G(w_k)$  para  $f_2(x)$  dada por (3.52).

cuadratura de Szegő y que ambas cuadraturas mejoran los resultados obtenidos por medio de la DFT, especialmente cuando los polos se encuentran próximos al rango de integración, es decir, cuando  $\alpha$  esta próximo a cero. Recalcar que, a pesar de que la fórmula de tipo interpolatorio usa 11 nodos, estos son las raíces 11-ésimas de la unidad y por tanto el esfuerzo computacional para estas cuadraturas es menor que el coste computacional requerido para la construcción de las fórmulas de cuadratura de Szegő.

Ahora, comprobaremos la bondad de las cotas de error dadas en el Corolario 3.3.8. Consideramos

$$f(x) = f_3(x) = \frac{1}{(\cos x + M)}, \quad |M| > 1 \quad (3.53)$$

en (3.37) y  $p = 2$ . En este caso podemos escribir

$$f(x) = \tilde{f}(e^{ix}) \text{ con } \tilde{f}(z) = \frac{2z}{z^2 + 2Mz + 1},$$

(obsérvese que  $\tilde{f}(z) = \tilde{f}(1/z)$ ) tiene dos polos reales dados por  $y_1 = -M + \sqrt{M^2 - 1}$  y  $y_2 = -M - \sqrt{M^2 - 1} = y_1^{-1}$ . Así, en el Corolario 3.3.8 podemos tomar  $\varrho_1 < \min\{|y_1|, |y_1|^{-1}\}$  y  $\varrho_2 = \varrho_1^{-1}$ . Consideraremos como antes, las fórmulas de cuadratura de Szegő y de tipo interpolatorio con el mismo dominio de validez  $\Lambda_{-5,5}$ . Numéricamente observamos que los correspondientes pesos de las fórmulas de tipo interpolatorio son positivos y por tanto, las

cotas de error serán iguales para ambas cuadraturas. Los errores absolutos se muestran en la Tabla 3.28.

$M$	$k$	error cota
5	0	$2,558E - 03$
5	2	$2,998E - 03$
5	4	$4,110E - 02$
10	1	$2,877E - 07$
10	3	$1,039E - 04$
10	4	$1,973E - 03$
20	0	$3,391E - 08$
20	2	$1,076E - 07$
20	3	$6,361E - 07$

Tabla 3.28: Cotas de error del Corolario 3.3.8 para las fórmulas de Szegő y de tipo interpolatorio exactas en  $\Lambda_{-5,5}$  en la estimación de (3.37) con  $f(x) = f_3(x)$  dada por (3.53) y  $p = 2$ .

### 3.4. La transformación de Cayley.

Hasta ahora, hemos estudiado cómo aproximar integrales en intervalos no acotados mediante el uso de fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad, pero con la condición de que la función  $f$  considerada debía ser  $2\pi$  periódica. En esta última sección veremos un procedimiento alternativo usando la conocida transformación de Cayley, que nos va a permitir considerar que la función  $f$  no sea periódica. Es más, el desarrollo de esta sección servirá como motivación para el siguiente capítulo de esta memoria, donde se estudiarán funciones racionales ortogonales que generalizan a los polinomios ortogonales.

#### 3.4.1. Fórmulas de Cuadratura

Consideramos la integral

$$J_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(x)dx, \quad (3.54)$$

la cual estamos interesados en aproximar por medio de una fórmula de cuadratura de la forma

$$J_n^\mu(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j), \quad x_j \neq x_k \text{ si } j \neq k, \quad (3.55)$$

con pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  positivos. Trasladamos nuestro problema a la circunferencia unidad mediante la transformación de Cayley,

$$z = e^{i\theta} = \frac{i-x}{i+x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{T}, \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (3.56)$$

Concretamente

$$J_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(x)dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x)(1+x^2)\mu(x) \frac{2dx}{1+x^2}.$$

### 3.4. La transformación de Cayley.

Tomamos

$$\dot{\mu}(\theta) = \tilde{\mu}(\varphi(e^{i\theta})), \text{ donde } \tilde{\mu}(x) = (1+x^2)\mu(x) \quad (3.57)$$

y sustituyendo  $x = i\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \varphi(z)$ ,  $z = e^{i\theta}$ , es decir,  $x = i\left(\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\right)$ , se sigue que  $d\theta = \frac{2dx}{1+x^2}$ , entonces

$$J_\mu(f) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) \dot{\mu}(\theta) d\theta = \frac{1}{2} I_{\dot{\mu}}(g), \quad (3.58)$$

donde  $g(e^{i\theta}) = f(\varphi(e^{i\theta}))$ .

Sea  $I_n^\mu(g) = \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j g(z_j)$  una fórmula de Szegő de  $n$  nodos para  $\dot{\mu}$  con  $z_j \in \mathbb{T}$ ,  $z_j \neq z_k$  si  $j \neq k$  y  $\dot{\lambda}_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Por tanto, para  $J_\mu(f)$  tenemos

$$J_\mu(f) \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j g(z_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j f(x_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) = J_n^\mu(f) \quad (3.59)$$

donde  $\lambda_j = \frac{\dot{\lambda}_j}{2}$  y  $x_j = \varphi(z_j) = i\left(\frac{1-z_j}{1+z_j}\right)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Obsérvese que si  $z_j = -1$  resulta en  $x_j = \infty$ , esto podría ser un problema, ya que la existencia de  $J_\mu(f)$  no implica que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  sea un número real. Para salvar este inconveniente debemos imponer la condición de que  $z = -1$  no sea un nodo en la fórmula de Szegő. Esto puede hacerse exigiendo que  $\rho_n(-1) + \tau \rho_n^*(-1) \neq 0$  o equivalentemente tomando  $\tau \in \mathbb{T}$  de manera que  $\tau \neq -\frac{\rho_n(-1)}{\rho_n^*(-1)}$ , es decir,  $\tau \neq (-1)^{n+1} \frac{\rho_n(-1)}{\rho_n(-1)}$ . Si  $\mu$  es simétrica, también lo es  $\dot{\mu}$  y los coeficientes de  $\rho_n$  son reales. Por tanto, las condiciones anteriores se convierten en  $\tau \neq (-1)^{n+1}$ .

**Proposición 3.4.1** En las condiciones previas,  $J_\mu(R) = J_n^\mu(R)$  para toda función  $R(x) = \frac{P(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$ , donde  $P \in \mathbb{P}_{2n-2}$ .

**Demostración.-** Consideramos  $R_k(x) = \frac{x^k}{(1+x^2)^{n-1}}$ ,  $0 \leq k \leq 2n-2$ . Entonces,

$$J_\mu(R_k) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} g_k(e^{i\theta}) \dot{\mu}(\theta) d\theta,$$

donde  $g_k(e^{i\theta}) = R_k(\varphi(e^{i\theta}))$  y  $\dot{\mu}(\theta) = \tilde{\mu}(\varphi(e^{i\theta})) = (1+e^{2i\theta})\mu(\varphi(e^{i\theta}))$ . Como  $x = i\frac{1-z}{1+z}$ , ( $z = e^{i\theta}$ ), tenemos  $\frac{1}{1+x^2} = \frac{(1+z)^2}{4z}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} R_k(x) &= \frac{x^k}{(1+x^2)^{n-1}} = i^k \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^k \frac{(1+z)^{2n-2}}{4^{n-1} z^{n-1}} \\ &= \frac{i^k (1-z)^k (1+z)^{2n-2-k}}{4^{n-1} z^{n-1}} = \frac{P_k(z)}{z^{n-1}}, \end{aligned}$$

con  $P_k \in \mathbb{P}_{2n-2}$ , de manera que  $g_k(z) = \frac{P_k(z)}{z^{n-1}} \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$ . Concluimos pues

$$J_\mu(R_k) = \frac{1}{2} I_{\dot{\mu}}(g_k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j g_k(z_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j f(x_j) = J_n^\mu(f).$$

■



**Nota 3.4.2** Nótese que una fórmula de Szegő con  $n$  nodos integra exactamente cualquier polinomio de Laurent en  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$ , es decir, cualquier función racional con polos en  $z = 0$  y  $z = \infty$  ambos con multiplicidad a lo sumo  $n - 1$ . Puesto que la transformación de Cayley lleva las raíces de  $x^2 + 1$ , es decir,  $\pm i$  en el  $X$ -plano a los puntos  $z = 0$  y  $z = \infty$  en el  $Z$ -plano respectivamente, los polinomios de Laurent se transforman en funciones racionales con polos múltiples en  $\pm i$ . Así, podemos decir que la transformación de Cayley preserva el dominio de exactitud de las fórmulas de cuadratura  $I_n^\mu(g)$  y  $J_n^\mu(f)$ .

También podemos probar el resultado recíproco de la Proposición 3.4.1.

**Proposición 3.4.3** Consideremos la fórmula  $J_n^\mu(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$  con  $x_j \neq x_k$  si  $j \neq k$ . Supongamos que

$$J_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(x)dx = J_\mu(R) = J_n^\mu(R), \forall R(x) = \frac{P(x)}{(1+x^2)^{n-1}}, P \in \mathbb{P}_{2n-2}.$$

Entonces, para  $z_j = \frac{i-x_j}{i+x_j} \in \mathbb{T}$  y  $\lambda_j = 2\lambda_j, j = 1, \dots, n$  tenemos que

$$I_{\hat{\mu}}(g) = \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})\hat{\mu}(\theta)d\theta = \sum_{j=1}^n \lambda_j g(z_j) = I_n^{\hat{\mu}}(g),$$

para cualquier  $g \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ , donde  $\hat{\mu}(\theta) = \tilde{\mu}(\varphi(e^{i\theta}))$  y  $\tilde{\mu}(x) = (1+x^2)\mu(x)$ .

**Demostración.**- La condición de exactitud para  $J_n^\mu(f)$  implica que  $\lambda_j > 0, j = 1, \dots, n$ , así que  $\lambda_j > 0, j = 1, \dots, n$ . Fijemos un entero  $k, -(n-1) \leq k \leq n-1$ , sin pérdida de generalidad asumamos  $k \geq 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} I_{\hat{\mu}}(z^k) &= \int_{-\pi}^{\pi} z^k \hat{\mu}(\theta)d\theta = 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{i-x}{i+x}\right)^k \mu(x)dx = 2(-1)^k \int_{\mathbb{R}} \frac{(x-i)^{2k}}{(1+x^2)^k} \mu(x)dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} r_k(x)\mu(x)dx, \quad z = e^{i\theta}, \end{aligned}$$

donde  $r_k(x) = \frac{(-1)^k(x-i)^{2k}}{(1+x^2)^k} = \frac{P(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$  y  $P_k \in \mathbb{P}_{2n-2}$ . Por tanto,

$$I_{\hat{\mu}}(z^k) = 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j r_k(x_j) = 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(\frac{i-x_j}{i+x_j}\right)^k = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j^k.$$

El espacio de funciones racionales de la forma  $R(x) = \frac{P(x)}{(1+x^2)^{n-1}}, P \in \mathbb{P}_{2n-2}$  donde  $J_n^\mu(f)$  es exacta, tiene dimensión  $2n - 1$  y  $J_n^\mu(f)$  depende de  $2n$  parámetros. Por tanto, cabe preguntarse lo siguiente: como una fórmula de Szegő con  $n$  nodos depende de  $\tau \in \mathbb{T}$  ( $\tau \neq \frac{\rho_n(-1)}{\rho_n^*(-1)}$ ), ¿es posible elegir  $\tau$  de manera que la fórmula de Szegő correspondiente determine una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos para  $\mu$  exacta en funciones de la forma:  $\frac{P(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$  con  $P \in \mathbb{P}_{2n-1}$ ?

Si consideramos  $\mu_n(x) = \frac{\mu(x)}{(1+x^2)^{n-1}}, n = 1, 2, \dots$  obtenemos una familia de funciones pesos de manera que para cada  $n$  los momentos  $c_{k,n} = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^k \mu(x)dx}{(1+x^2)^{n-1}} = \int_{\mathbb{R}} x^k \mu_n(x)dx$  existan

### 3.4. La transformación de Cayley.

para  $k = 0, 1, \dots, 2n - 2$  (asumimos que  $\mu$  es integrable en  $\mathbb{R}$ ). Además, supondremos que  $\int_{\mathbb{R}} x\mu(x)dx$  existe, por lo tanto,  $c_{2n-1,n}$  es también finito. Entonces, construimos la fórmula de Gauss con  $n$  nodos para  $\mu_n$ , es decir, existen  $n$  nodos distintos  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  sobre  $\mathbb{R}$  y  $n$  pesos positivos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tales que  $\int_{\mathbb{R}} x^k \mu_n(x) dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{x}_j^k$ ,  $0 \leq k \leq 2n - 1$ , y

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^k}{(1+x^2)^{n-1}} \mu(x) dx = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j (1+\tilde{x}_j^2)^{n-1}}{(1+\tilde{x}_j^2)^{n-1}} \tilde{x}_j^k = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j \frac{\tilde{x}_j^k}{(1+\tilde{x}_j^2)^{n-1}},$$

con  $\tilde{\lambda}_j = (1+\tilde{x}_j^2)^{n-1} \lambda_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Como resultado hemos construido una fórmula de cuadratura

$$\tilde{J}_n(f) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j f(\tilde{x}_j) \quad (3.60)$$

tal que  $\tilde{J}_n(f) = J_\mu(f)$  para toda función  $f(x) = \frac{P(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$ ,  $P \in \mathbb{P}_{2n-1}$ .

Por la Proposición 3.4.3, la fórmula de cuadratura sobre  $\mathbb{T}$ ,

$$\tilde{I}_n^{\hat{\mu}}(g) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j f(\tilde{z}_j), \quad (3.61)$$

con  $\tilde{\lambda}_j = 2\tilde{\lambda}_j$  y  $\tilde{z}_j = \frac{i-\tilde{x}_j}{i+\tilde{x}_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , es una fórmula de cuadratura de Szegő con  $n$  nodos para  $\hat{\mu}(\theta) = \tilde{\mu}(\varphi(e^{i\theta})) = (1 + [(\varphi(e^{i\theta}))]^2)(\mu(\varphi(e^{i\theta})))$ . Por tanto, existe un único  $\tilde{\tau} \in \mathbb{T}$  tal que  $\{\tilde{z}_j\}_{j=1}^n$  son los ceros de  $\tilde{B}_n(z, \tilde{\tau}) = \rho_n(z) + \tilde{\tau} \rho_n^*(z)$ .

Dado que,  $\tilde{z}_j \neq -1$ ,  $j = 1, \dots, n$ . En efecto, supongamos que existe  $r$  con  $1 \leq r \leq n$  tal que  $\tilde{z}_r = -1$ . Esto significa que para el correspondiente  $\tilde{x}_r$  tenemos  $-1 = \frac{i-\tilde{x}_r}{i+\tilde{x}_r}$ ,  $\tilde{x}_r \in \mathbb{R}$  lo que nos lleva a una contradicción.

Seguidamente, veremos cómo computar el valor  $\tilde{\tau} \in \mathbb{T}$ . Sabemos que  $\tilde{J}_n^\mu \left( \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{n-1}} \right) = J_\mu \left( \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{n-1}} \right)$  o equivalentemente,

$$\tilde{J}_n^\mu(x) = J_\mu(x) = c_1, \quad (3.62)$$

recordar que se ha supuesto que esta última integral existe.

Las Proposiciones 3.4.1 y 3.4.3 implican que la igualdad  $\tilde{J}_\mu(x) = J_\mu(x)$  es equivalente a  $I_{\hat{\mu}} \left( \frac{1-z}{1+z} \right) = I_n^{\hat{\mu}} \left( \frac{1-z}{1+z} \right)$  y como  $\frac{1-z}{1+z} = \frac{2}{z+1} - 1$ , por lo tanto (3.62) es equivalente a

$$\tilde{I}_n^{\hat{\mu}} \left( \frac{1}{z+1} \right) = I_{\hat{\mu}} \left( \frac{1}{z+1} \right), \quad z = e^{i\theta}, \quad (3.63)$$

donde  $\tilde{I}_n^{\hat{\mu}}(g)$  viene dada por (3.61) con  $\hat{\mu}(\theta) = \tilde{\mu}(\varphi(e^{i\theta}))$ .

Sea  $\rho_n$  el  $n$ -ésimo polinomio mónico de Szegő para  $\hat{\mu}$  y escribamos  $\rho_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$  con  $a_n = 1$  y  $a_0 = \rho_n(0) = \delta_n$  ( $n$ -ésimo parámetro de Verblunsky). Como sabemos, los nodos de  $\tilde{I}_n^{\hat{\mu}}(g)$  son los ceros de

$$\tilde{B}_n(z, \tilde{\tau}) = \tilde{B}_n(z) = \rho_n(z) + \tilde{\tau} \rho_n^*(z), \quad \text{para un cierto } \tilde{\tau} \neq (-1)^n. \quad (3.64)$$

Por otro lado, del carácter interpolatorio tenemos que  $\tilde{I}_n^{\hat{\mu}}(g) = I_{\hat{\mu}}(L_{n-1}(g))$  donde  $L_{n-1}(g)(z)$  es el único polinomio de Laurent en  $\Lambda_{-r,s}$  ( $r$  y  $s$  enteros arbitrarios no negativos

tales que  $r + s = n - 1$  interpolando a  $g$  en  $\tilde{z}_j$ :  $L_{n-1}(g)(\tilde{z}_j) = g(\tilde{z}_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Sin pérdida de generalidad, asumamos que  $r = 0$  y  $s = n - 1$  y sea  $L_{n-1}(g) \in \Lambda_{0,n-1} = \mathbb{P}_{n-1}$ . si denotamos por  $L_{n-1}(z)$  al polinomio interpolador de  $g(z) = \frac{1}{1+z}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Ahora, podemos comprobar fácilmente que

$$L_{n-1}(z) = \frac{-1}{\tilde{B}_n(-1)} \left( \frac{\tilde{B}_n(z) - \tilde{B}_n(-1)}{z + 1} \right) \text{ donde } \tilde{B}_n(z) = \sum_{j=0}^n (a_j + \tilde{\tau} \bar{a}_{n-j}) z^j.$$

Así, considerando los momentos trigonométricos  $\mu_k$  para  $\hat{\mu}$ ,  $\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \hat{\mu}(\theta) d\theta$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$  y tomando  $\gamma_j = \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \mu_{k+1-j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , vemos que

$$\tilde{I}_n^{\hat{\mu}} \left( \frac{1}{z+1} \right) = \frac{-1}{\tilde{B}_n(-1)} \left[ \sum_{j=1}^n a_j \gamma_j + \tilde{\tau} \sum_{j=1}^n \bar{a}_{n-j} \gamma_j \right]. \quad (3.65)$$

Por otro lado,

$$I_{\hat{\mu}} \left( \frac{1}{z+1} \right) = c_0 - ic_1 \text{ con } c_k = \int_{\mathbb{R}} x^k \mu(x) dx, \quad k = 0, 1. \quad (3.66)$$

Finalmente, de (3.63), (3.65) y (3.66) se sigue,

$$\tilde{\tau} = - \frac{\sum_{j=1}^n a_j \gamma_j + \rho_n(-1)[c_0 - ic_1]}{\sum_{j=1}^n \bar{a}_{n-j} \gamma_j + \rho_n^*(-1)[c_0 - ic_1]}. \quad (3.67)$$

La fórmula de cuadratura (3.60) correspondiente a una fórmula de Szegő con  $n$  nodos con  $\tilde{\tau} \in \mathbb{T}$  dada por (3.67) la denominaremos *fórmula de cuadratura racional tipo Gaussiana de  $n$  nodos* para  $\mu$ .

Hasta el momento hemos trabajado con fórmulas de cuadraturas para aproximar  $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(x) dx$ , generadas por fórmulas de Szegő para  $\hat{\mu}$ ,

con funciones peso  $\mu$  y  $\hat{\mu}$  relacionadas por (3.57). Cuando  $\mu$  deja de ser una función peso (es decir,  $\mu > 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}$ ), las cuadraturas de Szegő para  $\hat{\mu}$  podrían carecer de sentido. Como es usual, podemos usar como fórmulas de cuadratura con  $n$  nodos para  $\hat{\mu}$  con menor dominio de exactitud que las fórmulas de Szegő. Por ejemplo, podríamos considerar fórmulas de tipo interpolatorio con  $n$  nodos, con nodos prefijados distintos  $z_1, \dots, z_n$  sobre  $\mathbb{T}$  ( $z_j \neq -1$ ). En efecto, para enteros no negativos fijos  $r$  y  $s$  tales que  $r + s = n - 1$  existen coeficientes  $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$  satisfaciendo

$$I_n^{\hat{\mu}}(g) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j g(z_j) = I_{\hat{\mu}}(g), \quad \forall g \in \Lambda_{-r,s}.$$

Además,  $\tilde{\lambda}_j = I_{\hat{\mu}}(l_j)$  con  $l_j \in \Lambda_{-r,s}$  tal que  $l_j(z_k) = \delta_{jk}$ . Tomando  $\lambda_j = \frac{\tilde{\lambda}_j}{2}$  y  $x_j = i \left( \frac{1-z_j}{1+z_j} \right)$ ,  $j = 1, \dots, n$  y procediendo como en Proposición 3.4.1, podemos demostrar la siguiente

**Proposición 3.4.4** Sean  $\{z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{T}$ ,  $z_j \neq -1$  y  $I_n^{\hat{\mu}}(g)$  una fórmula de cuadratura exacta en  $\Lambda_{r,s}$  para  $\hat{\mu}$ . Entonces

$$J_n^{\mu}(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(x) dx = J_{\mu}(f),$$

### 3.4. La transformación de Cayley.

para toda  $f$  de la forma  $f(x) = \frac{x^k}{(1+x^2)^p}$ ,  $0 \leq k \leq 2p$ , siendo  $p = \min(r, s)$ . Recíprocamente, si

$$J_n^\mu(f) = J_\mu(f),$$

para toda  $f$  de la forma  $f(x) = \frac{x^k}{(1+x^2)^p}$ ,  $0 \leq k \leq 2p$ , entonces  $I_n^{\hat{\mu}}(g)$  es una fórmula de cuadratura para  $\hat{\mu}$  exacta en un subespacio de los polinomios de Laurent que contiene en un  $\Lambda_{-p,p}$ .

**Nota 3.4.5** Obsérvese que el subespacio de funciones racionales donde  $J_n^\mu(f)$  dada en Proposición 3.4.4 es exacta, tiene dimensión  $2p + 1$ . Así, cuando  $r = s = p$ , es decir  $n = 2p + 1$ , entonces el número de nodos coincide con la dimensión del subespacio, y  $J_n^\mu(f)$  se llamará de tipo interpolatorio.

A continuación nos centraremos en funciones peso simétricas  $\mu$ , es decir,  $\mu(-x) = \mu(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Recaltar que en este caso  $\hat{\mu}$  es también simétrica. En este caso, y tal y como ya hemos mencionado, parece natural elegir los nodos de la fórmula de cuadratura simétricos, o equivalentemente, que los nodos de la fórmula de cuadratura para  $\hat{\mu}$  aparecen en pares complejos conjugados sobre  $\mathbb{T}$ . Demostraremos que la única familia de cuadraturas de  $n$  nodos dependientes del parámetro  $\tau \in \mathbb{T}$  que satisface la condición de simetría es la fórmula de cuadratura racional tipo Gaussiana con  $n$  nodos.

En efecto, si  $\mu$  es simétrica, entonces  $c_1 = 0$ , y como  $\hat{\mu}$  es también simétrica los coeficientes de  $\rho_n$  son reales. Por tanto  $\tilde{\tau}$  dado por (3.67) es real, esto es  $\tilde{\tau} \in \{\pm 1\}$  y se expresa como

$$\tilde{\tau} = -\frac{\sum_{j=1}^n a_j \gamma_j + c_0 \rho_n(-1)}{\sum_{j=1}^n a_{n-j} \gamma_j + (-1)^n c_0 \rho_n(-1)}. \quad (3.68)$$

Como ilustración consideremos los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 3.4.6** Sea  $\mu(x) = \frac{1}{1+x^2}$  de manera que  $\hat{\mu}(\theta) \equiv 1$  (medida de Lebesgue). En este caso  $\mu_0 = 2\pi$  y  $\mu_k = 0$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  ( $c_0 = \frac{\mu_0}{2} = \pi$ ). Se sabe también que  $\rho_n(z) = z^n$ ,  $a_n = 1$  y  $a_j = 0$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ . Además,  $\gamma_j = \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \mu_{k+1-j} = (-1)^{j-1} 2\pi$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= -\frac{a_n \gamma_n + \rho_n(-1) c_0}{\rho_n^*(-1) c_0} = -\frac{(-1)^{n-1} 2\pi + (-1)^n \pi}{\pi} \\ &= -[2(-1)^{n-1} + (-1)^n] = (-1)^n. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.4.7** Sea  $\mu(x) = \frac{K}{(x^2 + \alpha^2)}$ , con  $\alpha \neq 0$  y  $\alpha \neq 1$ . La constante  $K$  se elige de manera que la correspondiente función peso  $\hat{\mu}$  este normalizada. Además, por simplicidad asumiremos  $\alpha > 0$ . En este caso obtenemos

$$\hat{\mu}(\theta) = (1 + [\varphi(z)]^2) \mu(\varphi(z)) = \frac{1-r^2}{2\pi|z-r|^2}, \quad r = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \in (-1, 1), \quad z = e^{i\theta},$$

es decir, el núcleo de Poisson (obsérvese que  $\alpha = 1$  proporciona  $r = 0$  y por tanto,  $\hat{\mu}(\theta) = \frac{1}{2\pi}$  es la medida normalizada de Lebesgue) Ahora,  $\mu_k = r^{|k|}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  y  $\rho_n(z) = z^n(z-r)$ , ( $n \geq 1$ ). Además,  $c_0 = \frac{\mu_0}{2} = \frac{1}{2}$ . Se puede comprobar que  $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_n = (-1)^n$ . En efecto,

$$\tilde{\tau} = \frac{(-1)^n + c_0 \rho_n(-1)}{(-r) + c_0 \rho_n^*(-1)} = \frac{(-1)^n + \frac{1}{r} (-1)^n (-1-r)}{-r + \frac{1}{r} (r-1)} = (-1)^n.$$

Podríamos preguntarnos si la propiedad  $\tilde{\tau} = (-1)^n$  de los dos ejemplos anteriores es consecuencia exclusivamente de la simetría.

De acuerdo con (3.67) parece que en orden de probar este resultado necesitamos conocer explícitamente los coeficientes  $\{a_j\}_{j=0}^n$  de los polinomios mónicos de Szegő, y como sabemos esto solo es posible en muy pocos casos similares a los dos anteriores.

En lugar de esto, seguiremos un argumento alternativo y probaremos lo siguiente,

**Proposición 3.4.8** *Sea  $\mu$  una función peso simétrica sobre  $\mathbb{R}$ . Entonces, el parámetro  $\tilde{\tau}$  dado por (3.68) puede expresarse como*

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_n = (-1)^n, \quad n \geq 1. \quad (3.69)$$

**Demostración.**- De (3.68) se sigue que  $\tilde{\tau}_n \in \{\pm 1\}$ . Por otro lado, como vimos, los nodos  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  de la fórmula racional tipo Gaussiana son reales y finitos, así que los nodos de la correspondiente fórmula de Szegő  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n \in \mathbb{T}$  satisfacen  $\tilde{z}_j \neq -1, j = 1, \dots, n$ . Además, como  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  son los nodos para una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos para  $\mu_n(x) = \frac{\mu(x)}{(1+x^2)^{n-1}}, x \in \mathbb{R}$ , simétrica, los nodos también lo son. Por tanto, cuando  $n$  es par los nodos  $\{\tilde{z}_j\}_{j=1}^n$  aparecen sobre  $\mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$  en pares complejos conjugados y cuando  $n$  es impar uno de los nodos sobre  $\mathbb{T}$  es igual a uno, y el resto aparecen de nuevo en pares complejos conjugados. Ahora, la demostración se sigue directamente de la Proposición 2.1 en [13]. ■

En resumen, teniendo en cuenta que si  $z \in \mathbb{T}$  y  $x = \varphi(z) = i \left( \frac{1-z}{1+z} \right)$  entonces  $\varphi(\bar{z}) = -x$  y  $\varphi(1) = 0$ , la construcción de la fórmula racional tipo Gaussiana con  $n$  nodos para una función peso simétrica  $\mu$  se hará como sigue:

1. Computamos los momentos trigonométricos  $\mu_k$ .
2. A partir de la familia  $\{\mu_k\}$ , computar los parámetros de Verblunsky  $\delta_n, n \geq 1$  (Ley de recurrencia de Szegő).
3. Si  $n$  es par, tomando  $\tilde{\tau}_n = 1$ , computamos los nodos  $z_1, \dots, z_n, (z_j \neq -1)$  y pesos  $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$  de la correspondiente fórmula de Szegő con  $n$  nodos para  $\hat{\mu}$ .

Sea ahora  $\lambda_j = \frac{\hat{\lambda}_j}{2}$  y  $x_j = i \left( \frac{1-z_j}{1+z_j} \right)$  (recaltar que  $\lambda_{n-j} = \lambda_j$  y  $x_{n-j} = -x_j, j = 1, \dots, \frac{n}{2}$ ). Por tanto,

$$J_n^\mu(f) = \sum_{j=1}^{n/2} \lambda_j [f(x_j) + f(-x_j)].$$

4. Si  $n$  es impar, tomando  $\tilde{\tau}_n = -1$ , para  $I_n^{\hat{\mu}}(g)$  podemos escribir

$$I_n^{\hat{\mu}}(g) = \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \hat{\lambda}_j [g(z_j) + g(\bar{z}_j)] + \hat{\lambda}_n g(1).$$

Por tanto,

$$J_n^\mu(f) = \lambda_n f(0) + \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \lambda_j [f(x_j) + f(-x_j)],$$

con  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  y  $\{x_j\}_{j=1}^n$  dados como en el paso 4.

### 3.4. La transformación de Cayley.

Ilustraremos el esquema anterior con el siguiente ejemplo  $\mu(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , es decir,  $\dot{\mu}(\theta) \equiv 1$  (medida de Lebesgue).

Sabemos que  $\rho_n(z) = z^n$  y también que para todo  $\tau \in \mathbb{T}$ ,  $\lambda_j = \frac{2\pi}{n}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Consideremos primero el caso en el  $n$  es par así que,  $\tilde{\tau}_n = 1$  y los nodos  $z_j \in \mathbb{T}$  son las raíces de  $B_n(z) = \rho_n(z) + \rho_n^*(z) = z^n + 1$ , esto es,  $z_j = e^{\frac{(2j-1)\pi i}{n}}$ ,  $j = 1, \dots, n/2$ ,  $\tilde{z}_{n-j} = \bar{z}_j$ . Por tanto,  $x_j = \frac{\sin((2j-1)\pi/n)}{1+\cos((2j-1)\pi/n)}$ ,  $j = 1, \dots, n/2$ , y la fórmula racional tipo Gaussiana con  $n$  nodos viene dada por

$$J_n^\mu(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n/2} [f(x_j) + f(-x_j)].$$

De manera similar, cuando  $n$  es impar, entonces  $\tilde{\tau}_n = -1$ , teniendo

$$J_n^\mu(f) = \frac{\pi}{n} \left[ f(0) + \sum_{j=1}^{(n-1)/2} [f(x_j) + f(-x_j)] \right],$$

con  $x_j = \frac{\sin(2j\pi/n)}{1+\cos(2j\pi/n)}$ ,  $j = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ .

Mencionar también que las fórmulas racionales tipo Gaussiana correspondientes al ejemplo 3.4.7, es decir,  $\mu(x) = \frac{K}{x^2+\alpha^2}$ ,  $\alpha > 0$  y  $\alpha \neq 1$ , induce la función peso  $\dot{\mu}(\theta) = \frac{1-\gamma^2}{2\pi|z-\gamma|^2}$ ,  $\gamma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \in (-1, 1)$ . En este caso  $x_j = \frac{\sin \theta_j}{1+\cos \theta_j}$ , donde  $z_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$  son los ceros  $z^{n-1}(z-\gamma) + (-1)^n(1-\gamma z) = 0$  y  $\lambda_j = \frac{\dot{\lambda}_j}{2} = \frac{\pi}{(n-1)(1+\gamma^2-2\cos \theta_j)+1-\gamma^2}$ .

#### 3.4.2. Ortogonalidad

En esta subsección deseamos establecer conexiones similares a las dadas en el Teorema (1.4.4), entre ciertos polinomios ortogonales asociados con  $\mu$  definida sobre  $\mathbb{R}$  y  $\dot{\mu}(\theta) = (1 + [\varphi(z)]^2)\mu(\varphi(z))$  definida sobre  $\mathbb{T}$  con  $\varphi(z) = i \left( \frac{1-z}{1+z} \right)$ ,  $z = e^{i\theta}$ .

Nuevamente,  $\mu_n(x) = \frac{\mu(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  y consideremos la sucesión  $\{Q_{k,n}\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots$  de polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$  de manera que  $Q_{0,n}(x) = 1$  y para  $n, k \geq 1$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} x^j Q_{k,n}(x) \mu_n(x) dx = 0, \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad n \geq 1. \quad (3.70)$$

La condición  $c_1 = \int_{\mathbb{R}} x \mu(x) dx < \infty$  garantiza la existencia de tales sucesiones  $\{Q_{k,k}\}_{k=0}^\infty$  satisfaciendo (3.70), donde  $Q_{k,k}$  es un polinomio de grado exactamente  $k$ . Sea  $\{\rho_k\}_{k=0}^\infty$  la sucesión de polinomios de Szegő mónicos para  $\dot{\mu}$ . Como vimos, los ceros de  $Q_{n,n}(x)$  proporcionan los nodos  $x_1, \dots, x_n$  de las llamadas fórmulas racionales tipo Gaussiana  $\mu$ , es decir, existen pesos positivos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tales que

$$I_n^\mu(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) = I_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(x) dx,$$

para cualquier función  $f(x) = \frac{P(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$  con  $P \in \mathbb{P}_{2n-1}$ . Además, existe un único parámetro  $\tilde{\tau} \in \mathbb{T}$  tal que  $z_j = \frac{i-x_j}{i+x_j}$  son los ceros de  $B_n(z, \tilde{\tau}) = \rho_n(z) + \tilde{\tau} \rho_n^*(z)$ . Así, tenemos para

$$x = i\frac{1-z}{1+z}, \quad z = e^{i\theta} \text{ y } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} Q_{n,n}(x) &= \prod_{j=1}^n (x - x_j) = \prod_{j=1}^n i \left( \frac{1-z}{1+z} - \frac{1-z_j}{1+z_j} \right) = \frac{i^n \prod_{j=1}^n (2z_j - 2z)}{\prod_{j=1}^n (1+z_j)(1+z)^n} \\ &= \frac{i^n (-1)^n 2^n \prod_{j=1}^n (z - z_j)}{\prod_{j=1}^n (1+z_j) (1+z)^n}. \end{aligned}$$

Ahora,  $\prod_{j=1}^n (z - z_j) = \frac{B_n(z, \tau)}{1 + \tilde{\tau} \delta_n}$ , así  $Q_{n,n}(x) = \frac{(-2i)^n}{\prod_{j=1}^n (1+z_j)} \frac{B_n(z, \tau)}{1 + \tilde{\tau} \delta_n}$ . Como  $\prod_{j=1}^n (1+z_j) = \frac{(-1)^n B_{2n}(-1)}{1 + \tilde{\tau} \delta_n}$  y  $\rho_n(-1) + \tilde{\tau} \rho_n^*(-1) \neq 0$ , hemos deducido el siguiente

**Teorema 3.4.9** *bajo las condiciones anteriores,*

$$Q_{n,n}(x) = \frac{(2i)^n}{\rho_n(-1) + \tilde{\tau} \rho_n^*(-1)} \frac{\rho_n(z) + \tilde{\tau} \rho_n^*(z)}{(1+z)^n}. \quad (3.71)$$

Anteriormente vimos que si  $\mu$  es simétrica, entonces  $\tilde{\tau} = (-1)^n$ , y por lo tanto (3.71) se convierte en este caso en

$$\begin{aligned} Q_{n,n}(x) &= \frac{(2i)^n}{\rho_n(-1) + (-1)^n \rho_n^*(-1)} \frac{\rho_n(z) + (-1)^n \rho_n^*(z)}{(1+z)^n} \\ &= \frac{(2i)^n}{2\rho_n(-1)} \frac{\rho_n(z) + (-1)^n \rho_n^*(z)}{(1+z)^n}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

dado que  $\rho_n^*(-1) = (-1)^n \overline{\rho_n(-1)} = (-1)^n \rho_n(-1)$ .

**Ejemplo 3.4.10** *Sea  $\mu(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$ . En este caso  $\mu_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$ ,  $n = 1, \dots, \hat{\mu}(\theta) \equiv 1$  y  $\rho_n(z) = z^n$ . Como  $z = \frac{i-x}{i+x}$ ,  $y \ z + 1 = \frac{2i}{i+x}$ , (3.72) implica:*

$$Q_{n,n}(x) = \frac{(2i)^n}{2\rho_n(-1)} \frac{(i+x)^n}{(2i)^n} \left[ \frac{(i-x)^n + (-1)^n (i+x)^n}{(i+x)^n} \right].$$

Como  $(\rho_n(-1) = (-1)^n)$ , se tiene que  $Q_{n,n}(x) = \frac{1}{2} [(x-i)^n + (x+i)^n]$ , es decir,  $Q_n(x) = \Re(x+i)^n$  ó equivalentemente

$$Q_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k x^{n-2k}. \quad (3.73)$$

**Ejemplo 3.4.11** *Sea  $\mu(x) = \frac{K}{x^2 + \alpha^2}$ , con  $K > 0$ ,  $\alpha > 0$  y  $\alpha \neq 1$ . Como ya hemos visto,  $\hat{\mu}(\theta) = \frac{1-\gamma^2}{2\pi|z-\gamma|^2}$  y  $\rho_n(z) = z^{n-1}(z-\gamma)$  con  $\gamma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \in (-1, 1)$ . Por tanto por (3.72),  $\forall x \in \mathbb{R}$  y para todo  $n \geq 1$ ,*

$$\begin{aligned} Q_{n,n}(x) &= \frac{(i-x)^n - \gamma [(i-x)^{n-1}(i+x) + (-1)^n (i-x)(i+x)^{n-1}] + (-1)^n (i+x)^n}{(-1)^n 2(1+\gamma)} \\ &= \frac{\Re(x+i)^n - \Re(x+i)^{n-1}(x-i)}{1+\gamma}. \end{aligned}$$

### 3.4. La transformación de Cayley.

Asumamos a continuación que una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos,

$$J_n^\mu(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(x) dx \quad (3.74)$$

satisface  $J_n^\mu(f) = J_\mu(f)$  para toda función  $f(x) = \frac{P(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$  con  $P \in \mathbb{P}_{2n-2}$  y que existe  $\tilde{P} \in \mathbb{P}_{2n-1}$  tal que  $J_n^\mu(\tilde{f}) \neq J_\mu(\tilde{f})$  donde  $\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{P}(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$ . Por la Proposición 3.4.3 existe  $\tau_n \in \mathbb{T}$ ,  $\tau_n \notin \{\tilde{\tau}_n, -\frac{\rho_n(-1)}{\rho_n^*(-1)}\}$  ( $\tilde{\tau}_n$  viene dado por (3.67)) tal que  $z_j = \frac{i-x_j}{i+x_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$  son los ceros de  $B_n(z, \tau_n) = \rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z)$ . Tomando  $Q_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$  y considerando la base ortogonal  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  para  $\mathbb{P}_n$  con respecto a  $\mu_n(x) = \frac{\mu(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$  de manera que  $P_0(x) = 1$  y para  $j = 1, \dots, n$ ,  $P_j(x)$  es un polinomio mónico de grado exactamente  $j$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} x^k P_j(x) \mu_n(x) dx = 0$  para  $k = 0, 1, \dots, j-1$ . La relación (3.74) implica que  $Q_n(x)$  es ortogonal a  $\mathbb{P}_{n-2}$ . Por tanto, podemos escribir  $Q_n(x) = P_n(x) + \tilde{C}_n P_{n-1}(x)$  con  $\tilde{C}_n \neq 0$ . Por otro lado, un argumento similar al usado en la demostración del Teorema 1.3.5, implica

$$Q_n(x) = \frac{(2i)^n}{\rho_n(-1) + \tau_n \rho_n^*(-1)} \frac{\rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z)}{(1+z)^n}, \quad (3.75)$$

obsérvese que  $\rho_n(-1) + \tau_n \rho_n^*(-1) \neq 0$ . Obtenemos pues el siguiente resultado:

**Teorema 3.4.12** *Sea  $J_\mu = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(x) dx$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} x \mu(x) dx < \infty$ , consideremos  $J_n^\mu(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$  con  $x_j \neq x_k$  si  $j \neq k$  y tomemos  $Q_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$ . Entonces, las siguientes dos afirmaciones son equivalentes,*

1.  $J_n^\mu(f) = J_\mu(f)$  para cualquier función  $f(x) = \frac{P(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$  con  $P \in \mathbb{P}_{2n-2}$  y existe  $\tilde{P} \in \mathbb{P}_{2n-1}$  tal que  $J_n^\mu\left(\frac{\tilde{P}(x)}{(1+x^2)^{n-1}}\right) \neq J_\mu\left(\frac{\tilde{P}(x)}{(1+x^2)^{n-1}}\right)$ .
2. Existen  $C_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $\tau_n \in \mathbb{T} \setminus \{\tilde{\tau}_n, -\frac{\rho_n(-1)}{\rho_n^*(-1)}\}$  tales que

$$Q_n(x) = P_n(x) + \tilde{C}_n P_{n-1}(x) = \frac{(2i)^n}{\rho_n(-1) + \tau_n \rho_n^*(-1)} \frac{\rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z)}{(1+z)^n},$$

con  $z = \frac{i-x}{i+x} \in \mathbb{T}$  y  $x \in \mathbb{R}$ .

Como es usual,  $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$  denota la sucesión de polinomios de Szegő mónicos para  $\dot{\mu}(\theta) = (1 + [\varphi(z)]^2) \mu(\varphi(z))$ ,  $z = e^{i\theta}$ .

Finalmente, mencionemos la conexión de lo anterior con ciertas funciones racionales ortogonales, y que como hemos dicho al inicio de esta subsección, motivara el abordar el estudio de funciones racionales ortogonales en el siguiente Capítulo.

Sea  $\{\xi_k\}_{k=0}^\infty$  una sucesión en  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}$ , con posibles repeticiones. Definamos  $r_k(z) = 1$  si  $\xi_k = \infty$ ,  $r_k(x) = (x - \xi_k)$  si  $\xi_k \neq \infty$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , tomemos  $D_0 = 1$  y  $D_k(z) = r_1(z) r_2(z) \cdots r_k(z)$  para  $k = 1, 2, \dots$  el definamos el espacio  $\mathcal{L}_k$  como  $\mathcal{L}_k = \{P(x)/D_k(x), P \in \mathbb{P}_k\}$ . Sea  $\mathcal{L} = \bigcup_{k=0}^\infty \mathcal{L}_k$ . Denotaremos por  $\mathcal{L}_p \cdot \overline{\mathcal{L}}_q$  el conjunto de productos de un elemento de  $\mathcal{L}_p$  y uno de  $\overline{\mathcal{L}}_q = \{\overline{R(x)} : R \in \mathcal{L}_q\}$ .



Sea  $\mu$  una función peso sobre  $\mathbb{R}$  de manera que todos los elementos de  $\mathcal{L} \cdot \bar{\mathcal{L}}$  sean integrables con respecto a ella. Definamos el producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$  sobre  $\mathcal{L}$  por

$$\langle f, g \rangle_\mu = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} \mu(x) dx.$$

Ahora podemos, construir una base ortogonal  $\{\psi_k\}_{k=0}^\infty$  en  $\mathcal{L}$  de manera que  $\psi_0 \in \mathcal{L}_0$  y  $\psi_k \in \mathcal{L}_k \setminus \mathcal{L}_{k-1}$  para  $k = 1, 2, \dots$  (por ejemplo, usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base  $\{x^k/D_k(x)\}_{k=0}^\infty$ ). Por lo tanto,  $\{\psi_k\}_{k=0}^\infty$  es una sucesión de funciones racionales ortogonales con respecto a  $\mu$  y polos prefijados en  $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}$ . Para cada  $k > 0$ ,  $\psi_k$  representa la función ortogonal racional de grado  $k$ , determinada de manera única salvo una constante de normalización. Para nuestro propósito tomaremos  $\psi_k(x) = \frac{P_k(x)}{D_k(x)}$ , donde  $P_k$  es un polinomio mónico de grado exactamente  $k$ . Se sabe que  $\psi_n$  tiene exactamente  $n$  ceros reales y distintos (véase por ejemplo [20]).

Por otro lado, dado que  $\mathcal{L}_{n-1}$  es un espacio de Chebyshev de dimensión  $n$ , si disponemos de  $n$  nodos distintos  $x_1, \dots, x_n$  sobre  $\mathbb{R}$  existen pesos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tales que

$$J_n^\mu(R) = \sum_{j=1}^n \lambda_j R(x_j) = \int_{\mathbb{R}} R(x) \mu(x) dx, \quad \forall R \in \mathcal{L}_{n-1}. \quad (3.76)$$

Ahora, un argumento similar al usado en el libro clásico [20] cuando se considera el caso particular  $\xi_k = \infty$  para  $k \geq 1$  nos conduce al siguiente resultado.

**Teorema 3.4.13** *Sea  $J_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(x) dx$ . Fijando los números reales  $x_1, \dots, x_n$  tales que  $x_j \neq x_k$  si  $j \neq k$  junto con los pesos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  y tomemos  $J_n^\mu(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$  y  $R_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)/D_n \in \mathcal{L}_n$ . Entonces, para  $0 \leq k \leq n-1$  son equivalentes:*

1.  $J_\mu(f) = J_n^\mu(f), \forall f \in \mathcal{L}_n \cdot \bar{\mathcal{L}}_k.$
2.  $J_\mu(f) = J_n^\mu(f), \forall f \in \mathcal{L}_{n-1}$  y  $\langle R_n, r \rangle_\mu = 0, \forall r \in \mathcal{L}_k$  con  $0 \leq k \leq n-1$ .

En el caso particular  $k = n-1$  se tiene lo siguiente.

**Corolario 3.4.14** *Bajo las condiciones anteriores,*

$$J_n^\mu(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) = J_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(x) dx, \quad \forall f \in \mathcal{L}_n \cdot \bar{\mathcal{L}}_{n-1} \iff$$

1.  $J_n^\mu(f) = J_\mu(f), \forall f \in \mathcal{L}_{n-1}.$
2. Los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  son los ceros de  $\psi_n$ .

Ahora, fijando  $n \geq 1$  y tomando la sucesión de polos prefijados  $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$  como sigue,

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{n-1} = i, \xi_n = \infty,$$

siendo el resto elegidos de manera arbitraria, entonces,

$$\mathcal{L}_n \cdot \bar{\mathcal{L}}_{n-1} = \left\{ \frac{P(x)}{(1+x^2)^{n-1}}, P \in \mathbb{P}_{2n-1} \right\}.$$

Sea  $\rho_n$  el  $n$ -ésimo polinomio mónico de Szegő con respecto a  $\hat{\mu}(\theta) = \tilde{\mu}(\varphi(z)), z = e^{i\theta}$ , donde  $\tilde{\mu}(x) = (1+x^2)\mu(x)$ . Entonces por la Proposición 3.4.3, los Teoremas 3.4.9 y 3.4.12 y el Corolario 3.4.14, tenemos

### 3.4. La transformación de Cayley.

---

**Teorema 3.4.15** Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\psi_n(x) = \frac{2i}{\rho_n(-1) + \tilde{\tau}\rho_n^*(-1)} \frac{\rho_n(z) + \tilde{\tau}\rho_n^*(z)}{1+z} = \frac{2i}{\rho_n(-1) + \tilde{\tau}\rho_n^*(-1)} \frac{B_n(z, \tilde{\tau})}{1+z}, \quad (3.77)$$

con  $z = \frac{i-x}{i+x}$  y  $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_n$  dado por (3.68).

**Nota 3.4.16** La relación (3.77) muestra que la  $n$ -ésima función ortogonal racional  $\psi_n(x)$  se relaciona en este caso con un polinomio  $B_n(z, \tilde{\tau})$ , ( $\tilde{\tau} \in \mathbb{T}$ ), para-ortogonal con respecto a  $\mu$ . Obsérvese que  $\psi_n$  es una función racional con un polo de multiplicidad  $n-1$  en  $x = -i$  y un polo simple en el infinito, en cambio  $\frac{B_n(z, \tilde{\tau})}{z+1}$  posee un polo de multiplicidad  $n-1$  en el infinito y un polo simple en  $z = -1$ . Puesto que la transformación de Cayley lleva a  $x = i$  y  $x = \infty$  en  $z = \infty$  y  $z = -1$  respectivamente, podemos decir que ésta preserva las singularidades de las funciones ortogonales racionales

#### 3.4.3. Ejemplos numéricos

Finalizamos este Capítulo presentando algunos experimentos numéricos basado en los resultados obtenidos anteriormente, con el objetivo de aproximar integrales sobre la recta real

$$J_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(x)dx, \quad (3.78)$$

pasándolas a la circunferencia unidad por medio de la transformación de Cayley  $x = \varphi(z)$  y considerando la integral

$$I_{\hat{\mu}}(g) = \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})\hat{\mu}(\theta)d\theta, \quad (3.79)$$

de manera que

$$J_\mu(f) = \frac{1}{2}I_{\hat{\mu}}(g) \text{ con } g(z) = f(\varphi(z)), \quad z = e^{i\theta}. \quad (3.80)$$

Consideraremos modificaciones racionales de la medida de Lebesgue sobre la recta real. La función peso  $\mu(x) = \frac{1}{1+x^2}$  induce

$$J_\mu(f) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})\hat{\mu}(\theta)d\theta, \quad (3.81)$$

con  $\hat{\mu}(\theta) \equiv 1$  (medida de Lebesgue en  $\mathbb{T}$ ). Por esta razón,  $\mu(x) = \frac{1}{(1+x^2)P(x)}$ , donde  $P(x)$  es un polinomio real positivo será llamada una modificación racional de la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ .

Además, de la descomposición en fracciones simples de  $\frac{1}{P(x)}$  se muestra que es suficiente considerar tan solo el caso

$$\mu(x) = \frac{1}{(1+x^2)(ax^2+bx+c)^m}, \quad m \geq 0, \text{ y } b^2 - 4ac < 0, \quad (3.82)$$

o equivalentemente,

$$\mu(x) = \frac{1}{(1+x^2)[(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})]^m}, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{C}, \text{ y } \Im(\alpha) > 0. \quad (3.83)$$

Tomando  $x = i \left( \frac{1-z}{1+z} \right)$ ,  $z = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , tenemos:

$$J_{\mu}(f) = K \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) \dot{\mu}(\theta) d\theta = KI_{\dot{\mu}}(g), \quad (3.84)$$

donde

$$K = \frac{|1 + \beta|^{2m}}{2^{m+1}}, \quad \dot{\mu}(\theta) = \frac{1}{2^m} \left[ \frac{(1+z)^2}{z} \right]^m \frac{1}{|z - \beta|^{2m}} = \frac{(1 + \cos \theta)^m}{|z - \beta|^{2m}}, \quad \text{y } \beta = \frac{i - \alpha}{i + \alpha},$$

es decir,  $\mu$  es una modificación racional de la función peso de tipo Jacobi  $(1 + \cos \theta)^m$ , siendo  $m$  un entero no negativo.

Seguidamente, computaremos los momentos. Por simplicidad omitiremos la constante  $\frac{K}{2^m}$  de manera que,  $\mu_{-k} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} \dot{\mu}(\theta) d\theta$ ,  $k \geq 0$ , teniendo:

$$\mu_{-k} = \frac{1}{i} \int_{\mathbb{T}} \frac{z^k (1+z)^{2m}}{z^{m+1} |z - \beta|^{2m}} dz. \quad (3.85)$$

Sin pérdida de generalidad, asumiremos que  $|\beta| < 1$ , de manera que el integrando en la expresión

$$\mu_{-k} = \frac{1}{i} \int_{\mathbb{T}} \frac{z^{k-1} (1+z)^{2m}}{(z - \beta)^m (1 - \bar{\beta}z)^m} dz, \quad k \geq 0, \quad (3.86)$$

tiene en el interior de  $\mathbb{D}$  un polo simple de multiplicidad  $m$  en  $z = \beta$  cuando  $k \geq 1$ . Para  $k = 0$  se añade un polo simple en  $z = 0$ . Ahora, los momentos pueden computarse fácilmente usando el teorema de los Residuos. Por ejemplo, cuando  $m = 1$  es decir,

$$\mu(x) = \frac{1}{(1+x^2)(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})},$$

tenemos:

$$\mu_0 = \frac{1}{i} \int_{\mathbb{T}} \frac{(1+z)^2}{z(z-\beta)(1-\bar{\beta}z)} dz = 2\pi [\text{Res}(z=0) + \text{Res}(z=\beta)] = 4\pi \frac{\Re(\beta) + 1}{1 - |\beta|^2} > 0,$$

dado que  $|\beta| < 1$ . Para  $k \geq 1$  se tiene

$$\mu_{-k} = \frac{1}{i} \int_{\mathbb{T}} \frac{z^{k-1} (1+z)^2}{(z-\beta)(1-\bar{\beta}z)} dz = 2\pi \text{Res}(z=\beta) = 2\pi \frac{\beta^{k-1} (1+\beta)^2}{1 - |\beta|^2}.$$

Tomando el caso particular  $\alpha = i$  en (3.83) se tiene

$$\mu(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{m+1}}.$$

Como en este caso  $\beta = \frac{i-\alpha}{i+\alpha} = 0$  obtenemos  $\dot{\mu}(\theta) = \dot{\mu}_m(\theta) = \frac{(1+\cos \theta)^m}{|z-\beta|^{2m}} = (1 + \cos \theta)^m$ . Así, los momentos  $\mu_k^m$  satisfacen

$$\mu_k^m = \mu_{-k}^m = \begin{cases} 0 & \text{si } k > m, \\ \frac{\binom{2m}{m-k}}{4^{m-1}} & \text{si } k \leq m. \end{cases} \quad (3.87)$$

### 3.4. La transformación de Cayley.

**Proposición 3.4.17** *Los correspondientes parámetros de Verblunsky  $\delta_n^m$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  para  $\hat{\mu}_m(\theta) = (1 + \cos \theta)^m$  vienen dados por*

$$\delta_n^m = (-1)^n \frac{m}{n+m}. \quad (3.88)$$

**Demostración.-** Sea  $\{\delta_k\}_0^\infty$  la sucesión de parámetros de Verblunsky para la familia de funciones peso (tipo Jacobi)  $\hat{\mu}(\theta) = (1 - \cos \theta)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1 + \cos \theta)^{\beta+\frac{1}{2}}$ , donde  $\alpha, \beta > -1$ , y  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Es bien sabido (véase por ejemplo [118]) que

$$\delta_{2n} = \frac{\alpha + \beta + 1}{2n + \alpha + \beta + 1} \text{ y } \delta_{2n+1} = \frac{\alpha - \beta}{2n + \alpha + \beta + 2}. \quad (3.89)$$

Claramente la función peso  $\hat{\mu}_m(\theta) = (1 + \cos \theta)^m$  se corresponde tomando  $\alpha = -\frac{1}{2}$  y  $\beta = m - \frac{1}{2}$  y se concluye la prueba. ■

**Nota 3.4.18** *Como la fórmula (3.88) es válida para cualquier número real no negativo  $m$  la computación de integrales de la forma  $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(1+x^2)^m} dx$ ,  $m > 1$  puede por tanto llevarse a cabo. Por ejemplo, supongamos  $J_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$ , es decir,  $\mu(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ . Entonces  $\hat{\mu}(\theta) = \sqrt{1 + \cos \theta}$  y los correspondientes parámetros de Verblunsky vienen dados por*

$$\delta_n = (-1)^n \frac{1/2}{n + 1/2} = \frac{(-1)^n}{2n + 1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Sea  $I_n^\mu(g)$  una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos para  $\hat{\mu}$ , es decir,  $I_n^\mu(g) = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j g(z_j)$ ,  $z_j \neq z_k$  si  $j \neq k$ . Entonces (3.84) proporciona,

$$J_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(x)dx \approx \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j).$$

donde  $\lambda_j = K \hat{\lambda}_j$  y  $x_j = i \left( \frac{1-z_j}{1+z_j} \right)$ ,  $j = 1, \dots, n$  (aquí debemos asumir que  $z_j \neq -1$ ,  $j = 1, \dots, n$ ). Las fórmulas de cuadratura para aproximar a  $I_{\hat{\mu}}(g)$  que hemos presentado son:

1. La fórmula de Szegő de  $n$  nodos con parámetro  $\hat{\tau}_n$  dado por (3.67), determina la fórmula racional tipo Gaussiana con  $n$  nodos,  $J_n^\mu(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$  exacta en  $\mathcal{L}_n \cdot \bar{\mathcal{L}}_{n-1} = \left\{ \frac{P(x)}{(x^2+1)^{n-1}} : P \in \mathbb{P}_{2n-1} \right\}$ .
2. Una cuadratura de tipo interpolatorio con el mismo dominio de validez que la fórmula de Szegő de  $n$  nodos, es decir,  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$  cuyos nodos son las raíces  $(2n-1)$ -ésimas de la unidad. Aquí los nodos de la cuadratura de tipo interpolatorio resultante para  $J_\mu(f)$ , es decir,  $\hat{J}_{2n-1}^\mu(f) = \sum_{j=1}^{2n-1} \hat{\lambda}_j f(\hat{x}_j)$  que integra exactamente en  $\mathcal{L}_{n-1} \cdot \bar{\mathcal{L}}_{n-1} = \left\{ \frac{P(x)}{(x^2+1)^{n-1}} : P \in \mathbb{P}_{2n-2} \right\}$  viene dada por  $\hat{x}_j = i \left( \frac{1-z_j}{1+z_j} \right)$  con  $z_j = \exp\left(\frac{2\pi i j}{2n-1}\right)$ ,  $j = 1, \dots, 2n-1$ . Además los pesos, pueden ser computados eficientemente por medio del algoritmo de la FFT.

### Capítulo 3. Conexión entre la circunferencia unidad e intervalos no acotados de la recta real

En algunos casos, la integral  $J_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(x)dx$  puede ser también aproximada por medio de una fórmula Gaussiana con  $n$  nodos, cuando esta es posible de construir.

Para ilustrar esto, consideraremos la siguiente integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2} \cos(x)}{(x^2 + \alpha^2)^p} dx = \frac{1}{\alpha^{2p-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\alpha x)^2} \cos(\alpha x)}{(x^2 + 1)^p} dx,$$

para distintos valores de  $\alpha$  y  $p$ . Haremos una comparación entre las cuadraturas usual de Gauss-Hermite, la fórmula racional tipo Gaussiana y la de tipo interpolatorio. Las dos primeras tendrán el mismo número de nodos, 10 en este caso, mientras que la de tipo interpolatorio tendrá 19 nodos. Los respectivos dominios serán:  $\mathbb{P}_{19}$ ,  $\mathcal{L}_{10} \cdot \overline{\mathcal{L}}_9$  y  $\mathcal{L}_9 \cdot \overline{\mathcal{L}}_9$ . Además, puesto que  $\mu$  es simétrica  $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_{10} = 1$ . En las Tablas 3.29 y 3.30 se muestran los nodos y pesos de las fórmulas de cuadratura racionales tipo Gaussiana con 10 nodos y de tipo interpolatorio con 19 nodos respectivamente, con  $p = 4$ . La simetría de la fórmula de cuadratura se puede apreciar claramente. Obsérvese que los pesos de la cuadratura de tipo interpolatorio son positivos, algo que en general no puede ser asegurado, Los errores absolutos de las fórmulas propuestas se muestran en la Tabla 3.31.

Nodos	Pesos
$\pm 2,09127604130993$	0,00344327645779
$\pm 1,17775123999842$	0,03711287401198
$\pm 0,70911047697203$	0,14632265679427
$\pm 0,12366341675207$	0,47033670328257
$\pm 0,38717909951697$	0,32453219370020

Nodos	Pesos
$\pm 0,16687048621324$	0,30453865291332
$\pm 0,34330043362379$	0,23673890119461
$\pm 0,54117293709352$	0,15302541273914
$\pm 0,77833124187158$	0,07986422735408
$\pm 1,08628957511291$	0,03191845202440
$\pm 1,53061394545393$	0,00885326068757
$\pm 2,27977036941909$	0,00138933692420
$\pm 3,94891069622917$	0,00007237377074
$\pm 12,06820527949776$	0,00000010487087
0	0,33069396353577

Tabla 3.29: Nodos y pesos de la fórmula racional tipo Gaussiana de 10 nodos para  $p = 4$

Tabla 3.30: Nodos y pesos de la fórmula de tipo interpolatorio con 19 nodos para  $p = 4$

Supongamos que estamos interesados ahora en aproximar integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(1+x^2)^{3/2}} dx,$$

para diferentes funciones  $f$ , mediante las fórmulas de cuadratura racionales tipo Gaussiana y de tipo interpolatorio, con 10 y 19 nodos, respectivamente. En la Tabla 3.32 se muestran los errores absolutos obtenidos.

Finalmente, consideremos

$$\mu(x) = \frac{1}{(1+x^2)(x^2-2x+2)},$$

que se corresponde con  $m = 1$  y  $\alpha = 1+i$  en (3.83). Aproximaremos  $J_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(x)dx$  para diferentes funciones  $f$ . Aquí, debe recalarse que  $\mu$  no es simétrica, y por tanto no

### 3.4. La transformación de Cayley.

$p$	$\alpha$	Hermite	Tipo Gaussiana	Interpolatorio
1	1	$2,55E - 03$	$2,721E - 03$	$9,469E - 05$
2	1	$9,728E - 03$	$3,998E - 04$	$1,112E - 05$
3	1	$2,192E - 02$	$1,123E - 04$	$5,560E - 07$
4	1	$3,830E - 02$	$1,575E - 05$	$4,152E - 07$
1	2	$3,976E - 06$	$5,599E - 04$	$1,783E - 07$
2	2	$5,506E - 06$	$1,874E - 05$	$8,732E - 08$
3	2	$4,345E - 06$	$5,416E - 07$	$1,182E - 08$
4	2	$2,572E - 06$	$1,446E - 07$	$5,121E - 10$
1	0,5	$1,821E - 01$	$3,439E - 02$	$1,105E - 06$
2	0,5	$1,761E + 00$	$6,941E - 03$	$8,595E - 04$
3	0,5	$1,080E + 01$	$1,868E - 03$	$1,431E - 04$
4	0,5	$5,438E + 01$	$2,278E - 03$	$5,143E - 05$
1	0,1	$2,196E + 01$	$1,222E + 00$	$4,736E - 01$
2	0,1	$1,526E + 03$	$2,501E + 00$	$3,883E - 01$
3	0,1	$1,171E + 05$	$1,065E + 01$	$6,063E - 01$

Tabla 3.31: Comparación entre los errores absolutos de las fórmulas de Hermite, racional tipo Gaussiana y de tipo interpolatorio.

$f(x)$	Tipo Gaussiana	Interpolatorio
$e^{-x^2}$	$1,604E - 03$	$2,040E - 06$
$e^{- x }$	$2,160E - 02$	$1,294E - 02$
$x^2e^{-x^2}$	$1,283E - 03$	$9,145E - 05$
$x^2e^{- x }$	$5,892E - 03$	$1,844E - 03$
$\frac{1}{2+x^2}$	$1,076E - 07$	$4,840E - 09$
$\cos(x)$	$5,981E - 02$	$5,938E - 03$
$ \sin(x) $	$2,220E - 01$	$4,734E - 02$

Tabla 3.32: Comparación entre los errores absolutos de las fórmulas racional tipo Gaussiana y tipo interpolatorio.

podemos asegurar que  $\tilde{\tau}_n = (-1)^n$ . Como necesitamos conocer estos parámetros para la computación explícita del polinomio de Szegő de grado  $n$ , tomaremos  $\tau = 1$ , así, obtendremos así una fórmula de cuadratura racional exacta en  $\mathcal{L}_{n-1} \cdot \tilde{\mathcal{L}}_{n-1}$  que llamaremos *quasi-Gauss*. Compararemos nuevamente con una de tipo interpolatorio tomando de nuevo 10 y 19 nodos respectivamente. Los errores absolutos se muestran en la Tabla 3.33.

---

**Capítulo 3. Conexión entre la circunferencia unidad e intervalos no acotados de la recta real**

---

$f(x)$	quasi-Gauss	Interpolatorio
$e^{-x^2}$	$8,710E - 04$	$1,692E - 05$
$xe^{-x^2}$	$3,049E - 04$	$1,910E - 05$
$\cos(x)$	$3,545E - 02$	$2,529E - 03$
$\frac{1}{x^2+3}$	$2,132E - 06$	$1,242E - 09$
$x$	$5,928E - 02$	$3,812E - 04$
$ x $	$5,170E - 02$	$1,480E - 04$

Tabla 3.33: Comparación entre los errores absolutos de las fórmulas Quasi-Gauss y tipo interpolatorio.

Analizando las tablas anteriores concluimos que tanto ambas fórmulas racionales tipo Gaussiana o quasi-Gauss, como las de tipo interpolatorio proporcionan una razonablemente buena aproximación en comparación con las de Gauss-Hermite, especialmente en el caso en el que los polos poseen un alto grado de multiplicidad o se colocan cerca de la recta real. Mencionar también que las fórmulas de tipo interpolatorio son sencillas de computar y proporcionan mejores resultados que las fórmulas racionales tipo Gaussiana o quasi-Gauss.

# Capítulo 4

## El caso racional

Se ha demostrado numéricamente que cuando deseamos aproximar una integral, bien sobre el intervalo o bien sobre la circunferencia unidad, con singularidades próximas al recinto de integración. Entonces las fórmulas de cuadratura racionales, basada en considerar polos en el espacio de funciones donde la regla es exacta, proporciona mejores resultados. El propósito de este capítulo será extender al caso racional ciertos resultados obtenidos en el Capítulo 2 de esta memoria.

### 4.1. Ortogonalidad y cuadratura racional

Para obtener el espacio de funciones racionales donde vamos a trabajar, que generaliza al espacio de polinomios ordinarios, debemos extender la teoría polinomios ortogonales a la teoría de funciones racionales ortogonales con polos prefijados, véase [20]. En lo que sigue, asumiremos que los polos están fuera del intervalo  $I$ , y por tanto, sus imágenes mediante la transformación de Joukowski proporcionarán una nueva sucesión de polos fuera de  $\mathbb{T}$ . La relación entre funciones ortogonales racionales en  $I$  y  $\mathbb{T}$ , que generaliza el conocido resultado de Szegő, ha sido descrita para el caso de polos reales en [123] y más en general en [52].

Para cualquier función compleja  $f(t)$ , definimos la operación involución o conjugación super-estrella por  $f_*(t) = \overline{f(1/\bar{t})}$ . Definimos la conjugación super-c por  $f^c(t) = \overline{f(\bar{t})}$ , y en consecuencia  $f_*^c$  por  $f_*^c(t) = \overline{f(1/t)}$ . Nótese que, si  $f(t)$  tiene un polo en  $t = p$ , entonces  $f_*(t)$  (respectivamente  $f^c(t)$  y  $f_*^c(t)$ ) tiene un polo en  $t = 1/\bar{p}$  (respectivamente  $t = \bar{p}$  y  $t = 1/p$ ). Además, denotaremos por  $f^{inv}$  a la inversa de la función  $f$ , para evitar confusiones con la notación  $f^{-1} = 1/f$ .

#### 4.1.1. Fórmulas de cuadratura sobre $I$

Sea una sucesión de polos complejos  $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} \subset \overline{\mathbb{C}}_I$  fija. Al menos que se indique lo contrario los polos en  $\mathcal{A}$  son complejos arbitrarios o infinito, por tanto, no tienen por que aparecer en pares conjugados. Definimos las funciones base

$$b_0(x) \equiv 1, \quad b_k(x) = b_{k-1}(x)Z_k(x), \quad \text{con} \quad Z_k(x) = \frac{x}{1 - x/\alpha_k}, \quad k \geq 1. \quad (4.1)$$



Estas funciones base generan el espacio de las funciones racionales con polos en  $\mathcal{A}$  definido por

$$\mathcal{L}_{-1} = \{0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_k := \mathcal{L}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = \text{span}\{b_0, \dots, b_k\} = \{p_j/\pi_j : p_j \in \mathbb{P}_j\}, \quad k \geq 0.$$

donde

$$\pi_0(x) \equiv 1, \quad \pi_j(x) = \prod_{k=1}^j (1 - x/\alpha_k), \quad 0 < j \leq n.$$

Con la definición de la conjugación super-c definimos  $\mathcal{L}_k^c = \{f : f^c \in \mathcal{L}_k\}$ . Nótese que  $\mathcal{L}_k$  y  $\mathcal{L}_k^c$  son generalizaciones del espacio  $\mathbb{P}_k$  de los polinomios de grado menor o igual a  $k$ . En efecto, si todos los  $\alpha_j = \infty$ , la expresión dada en (4.1) se transforma en  $Z_k(x) = Z_k^c(x) = x$  y  $b_k(x) = b_k^c(x) = x^k$ .

Consideremos la integral

$$J_\mu(f) = \int_{-1}^1 f(x) d\mu(x),$$

donde  $\mu$  es una medida de Borel positiva y acotada (para resumir, una medida) sobre  $I$ . Para aproximar  $J_\mu(f)$ , donde  $f$  es una función con singularidades (posiblemente cercanas, pero) fuera del intervalo, las fórmulas de tipo interpolatorio racionales son a menudo las preferidas. Una  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio racional se obtiene integrando una función racional interpoladora de grado<sup>1</sup>  $n - 1$  (al menos), y es de la forma

$$J_n(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k), \quad \{x_k\}_{k=1}^n \subset I, \quad x_j \neq x_k \text{ si } j \neq k, \quad \{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R},$$

de manera que  $J_\mu(f) = J_n(f)$  para toda  $f \in \mathbb{R}_{p,q} = \mathcal{L}_p \cdot \mathcal{L}_q^c = \{f \cdot g^c : f \in \mathcal{L}_p, g \in \mathcal{L}_q\}$ , con  $p + q \leq 2n - 1$  y  $0 \leq q \leq p \leq n$ . El espacio  $\mathbb{R}_{p,q}$  es entonces llamado el dominio de validez.

Los pesos  $\lambda_k$  en la fórmula de cuadratura son reales si y solo si

$$\mathbb{R}_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}^c. \quad (4.2)$$

En efecto, supongamos que los pesos son reales. Entonces, para toda  $f \in \mathbb{R}_{p,q}^c$  tenemos que

$$J_\mu(f) = \overline{J_\mu(f^c)} = \overline{J_n(f^c)} = \sum_{k=1}^n \overline{\lambda_k f^c(x_k)} = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k),$$

lo que significa que la cuadratura es exacta para toda  $f \in \mathbb{R}_{p,q}^c$  también. En la dirección contraria, supongamos que  $\mathbb{R}_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}^c$ . Entonces, para toda  $f \in \mathbb{R}_{p,q}$  tenemos que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) = J_\mu(f) = \overline{J_\mu(f^c)} = \sum_{k=1}^n \overline{\lambda_k} f(x_k).$$

De aquí es fácil comprobar que los pesos son todos reales. Nótese que para  $p = q = n - 1$ , la igualdad en (4.2) es cierta para cualquier sucesión de polos, y que la igualdad es también cierta para  $p = n$  y  $q = n - 1$  con la condición de que  $\alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}_I$ .

<sup>1</sup>El grado de una función racional se define como el máximo de los grados de los polinomios en el numerador y denominador

---

#### 4.1. Ortogonalidad y cuadratura racional

---

Sea  $\varphi_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$  una  $n$ -ésima función racional ortogonal (ORF) con respecto al producto interior

$$\langle f, g \rangle_\mu = \int_{-1}^1 f(x)g^c(x)d\mu(x);$$

es decir,

$$\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle_\mu = \begin{cases} 0, & k < n \\ 1, & k = n. \end{cases}$$

Cuando  $\alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}_I$ , los ceros  $x_k$  de  $\varphi_n(x)$  son todos distintos y están en  $(-1, 1)$ , por tanto, pueden ser elegidos como nodos para la fórmula de cuadratura  $J_n(f)$ . En esta dirección, obtenemos que la fórmula de cuadratura Gaussiana racional con  $n$  nodos tiene máximo dominio de validez, es decir, la aproximación es exacta para toda función  $f \in \mathbb{R}_{n,n-1}$ . Véanse [20, Capítulo. 11.6], [120], [53, Teorema 2.3], y [49, Thm. 2.3.5].

Consideraremos fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss racionales, estas poseen  $j$  nodos prefijados, donde  $0 < j < n$ , y con los restantes  $n-j$  nodos elegidos para alcanzar el máximo dominio de validez. La existencia de estas fórmulas dependerá de los nodos prefijados. Cuando existan, la dimensión del dominio de validez, en general, decrecerá uno por cada nodo prefijado. Casos especiales de fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss racionales son las Gauss-Radau racionales ( $j = 1$ ) y las Gauss-Lobatto racionales ( $j = 2$ ). En [51] se prueba que los nodos en una fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos,  $x_\alpha \in I$  prefijado y dominio de validez  $\mathbb{R}_{n-1,n-1}$  son los ceros de las llamadas funciones racionales quasi-ortogonales (qORF)

$$Q_{n,\tau_n}(x) = \varphi_n(x) + \tau_n \frac{Z_n(x)}{Z_{n-1}^c(x)} \varphi_{n-1}(x), \quad \tau_n = -\frac{Z_{n-1}^c(x_\alpha)\varphi_n(x_\alpha)}{Z_n(x_\alpha)\varphi_{n-1}(x_\alpha)} \in \overline{\mathbb{C}}. \quad (4.3)$$

Se prueba, en esta misma referencia que esta qORF es ortogonal a  $\mathcal{L}_{n-1}$  con respecto a la medida  $\tilde{\mu}$  soportada en un subconjunto de  $\overline{\mathbb{R}}$ , y que los correspondientes pesos en la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional viene dados por

$$\lambda_k = \left[ \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi_j(x_k)|^2 \right]^{-1}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.4)$$

donde  $\{x_k\}_{k=1}^n$  son los ceros de  $Q_{n,\tau}(x)$ . Como  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}, Q_{n,\tau_n}\}$  es una sucesión de ORFs, podemos usar, bajo la condición de que todos los polos son reales, la relación de Christoffel-Darboux [20, Teorema 11.3.1] para obtener que

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\varphi_j(x_k)|^2 = E_n^{-1} (1 - x_k/\alpha_n) Q'_{n,\tau_n}(x_k) (1 - x_k/\alpha_{n-1}) \varphi_{n-1}(x_k), \quad (4.5)$$

con

$$E_n = \lim_{x \rightarrow \alpha_{n-1}} \frac{Q_{n,\tau_n}(x)}{Z_n(x)\varphi_{n-1}(x)}. \quad (4.6)$$

La relación de Christoffel-Darboux, sin embargo, no se tiene si algún polo no es real. Por lo tanto, hasta el momento no se ha probado la igualdad en (4.5) en general. Lo haremos con el Corolario 4.3.10, usando las relaciones entre fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales.

---

Finalmente, nótese que debido al dominio de validez  $\mathbb{R}_{n-1, n-1}$ , los nodos restantes en una fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional con nodo prefijado en  $x_\alpha \in I$  no dependen de  $\alpha_n$ , por tanto, en lo que sigue podemos considerar que  $\alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}_I$ .<sup>2</sup>

#### 4.1.2. Fórmulas de cuadratura sobre $\mathbb{T}$

Para la circunferencia unidad, trabajaremos con otras funciones base. Dada una sucesión de números complejos  $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \dots\} \subset \mathbb{D}$ , definimos los productos de Blaschke<sup>3</sup> para  $\mathcal{B}$  por

$$B_0(z) \equiv 1, \quad B_k(z) = B_{k-1}(z)\zeta_k(z), \quad \text{con} \quad \zeta_k(z) = \frac{z - \beta_k}{1 - \overline{\beta_k}z}, \quad k \geq 1. \quad (4.7)$$

Estos productos de Blaschke genera los espacios encajados de funciones racionales  $\mathring{\mathcal{L}}_{-1} = \{0\}$  y  $\mathring{\mathcal{L}}_k = \text{span}\{B_0, \dots, B_k\}$ ,  $k \geq 0$ .

Con la definición de la conjugación super-estrella y super-c podemos definir  $\mathring{\mathcal{L}}_{k*} = \{f : f_* \in \mathring{\mathcal{L}}_k\}$ ,  $\mathring{\mathcal{L}}_k^c = \{f : f^c \in \mathring{\mathcal{L}}_k\}$  y  $\mathring{\mathcal{L}}_{k*}^c = \{f : f_*^c \in \mathring{\mathcal{L}}_k\}$ . Nótese que  $\mathring{\mathcal{L}}_k$  y  $\mathring{\mathcal{L}}_k^c$  son generalizaciones racionales de  $\mathbb{P}_k$  también. En efecto, si todos los  $\beta_j = 0$  (o equivalentemente,  $1/\overline{\beta_j} = \infty$  para todo  $j$ ), la expresión en (4.7) se convierte en  $\zeta_k(z) = \zeta_k^c(z) = z$  y  $B_k(z) = B_k^c(z) = z^k$ .

Consideremos ahora la integral

$$I_{\hat{\mu}}(\mathring{f}) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathring{f}(z) d\hat{\mu}(\theta), \quad z = e^{i\theta},$$

donde  $\hat{\mu}$  es una medida de Borel positiva sobre  $\mathbb{T}$ .<sup>4</sup> Sea una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio racional para aproximar  $I_{\hat{\mu}}(\mathring{f})$  de la forma

$$I_n(\mathring{f}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathring{f}(z_k), \quad \{z_k = e^{i\theta_k}\}_{k=1}^n \subset \mathbb{T}, \quad z_j \neq z_k \text{ si } j \neq k, \quad \{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R},$$

así que  $I_{\hat{\mu}}(\mathring{f}) = I_n(\mathring{f})$  para todo  $\mathring{f} \in \mathring{\mathcal{R}}_{p,q} = \mathring{\mathcal{L}}_p \cdot \mathring{\mathcal{L}}_{q*}$ , con  $n-1 \leq p+q \leq 2n-2$  y  $0 \leq q \leq p \leq n-1$ . Claramente, los pesos son reales ahora si y solo si  $\mathring{\mathcal{R}}_{p,q} = \mathring{\mathcal{R}}_{(p,q)*}$ , lo que implica que  $p = q$ .

Sea  $\phi_n \in \mathring{\mathcal{L}}_n \setminus \mathring{\mathcal{L}}_{n-1}$  una  $n$ -ésima ORF con respecto al producto interior

$$\langle \mathring{f}, \mathring{g} \rangle_{\hat{\mu}} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathring{f}(z) \mathring{g}_*(z) d\hat{\mu}(\theta).$$

El coeficiente director  $\hat{\kappa}_n$  (es decir, el coeficiente de  $B_n(z)$  en la expansión de  $\phi_n(z)$  en la base  $\{B_0, \dots, B_n\}$ ) viene dado por  $\hat{\kappa}_n = \overline{\phi_n^*(\beta_n)}$ , donde  $\phi_n^*(z) = B_n(z)\phi_{n*}(z)$ . En lo que

<sup>2</sup>El parámetro  $\tau_n$  en (4.3), sin embargo, depende de  $\alpha_n$  por medio de la ORF  $\varphi_n$ .

<sup>3</sup>Estos productos llevan el nombre de Wilhelm Blaschke, quien los introdujo por primera vez en [7].

<sup>4</sup>La medida  $\hat{\mu}$  sobre  $\mathbb{T}$  induce una medida sobre  $[-\pi, \pi]$  para la cual usaremos la misma notación  $\hat{\mu}$ .

#### 4.1. Ortogonalidad y cuadratura racional

sigue asumiremos que  $\hat{\kappa}_n \in \mathbb{R}_0^+$ . Además, sean  $\delta_k \in \mathbb{D}$ ,  $e_k \in \mathbb{R}_0^+$  y  $\hat{\rho}_k \in \mathbb{T}$  dadas por

$$\delta_k = -\frac{\left\langle \left( \frac{z - \beta_{k-1}}{1 - \bar{\beta}_k z} \right) \phi_{k-1}, \phi_j \right\rangle_{\hat{\mu}}}{\left\langle \left( \frac{1 - \bar{\beta}_{k-1} z}{1 - \beta_k z} \right) \phi_k^*, \phi_j \right\rangle_{\hat{\mu}}}, \quad 0 \leq j < k, \quad e_k = \sqrt{\left( \frac{1 - |\beta_k|^2}{1 - |\beta_{k-1}|^2} \right) \frac{1}{(1 - |\delta_k|^2)}},$$

$$\text{y } \hat{\rho}_k = \frac{\bar{\delta}_k(\beta_k - \beta_{k-1})\phi_{k-1}(\beta_k) + (1 - \bar{\beta}_{k-1}\beta_k)\phi_{k-1}^*(\beta_k)}{|\bar{\delta}_k(\beta_k - \beta_{k-1})\phi_{k-1}(\beta_k) + (1 - \bar{\beta}_{k-1}\beta_k)\phi_{k-1}^*(\beta_k)|}.$$

En [20, Capítulo 4.1] se prueba que las ORFs  $\phi_k$ ,  $k > 0$ , con respecto a la medida  $\hat{\mu}$  satisfacen una relación de recurrencia de la forma:

$$\begin{bmatrix} \phi_k(z) \\ \phi_k^*(z) \end{bmatrix} = e_k \begin{pmatrix} 1 - \bar{\beta}_{k-1}z \\ 1 - \beta_k z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_k & 0 \\ 0 & \bar{\hat{\rho}}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \delta_k \\ \bar{\delta}_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{k-1}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k-1}(z) \\ \phi_{k-1}^*(z) \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

con  $\beta_0 = 0$  y  $\zeta_0(z) = z$ . Además, se tiene que

$$\hat{\rho}_k^2 \delta_k = \frac{\phi_k(\beta_{k-1})}{\phi_k^*(\beta_{k-1})}. \quad (4.9)$$

Cuando reemplazamos el  $n$ -ésimo coeficiente  $\delta_n$ ,  $\hat{\rho}_n$  y  $e_n$  en la relación por, respectivamente

$$\xi_n = \frac{\hat{\rho}_n \delta_n + \hat{\tau}_n \bar{\hat{\rho}}_n}{\hat{\rho}_n + \bar{\hat{\rho}}_n \hat{\tau}_n \bar{\delta}_n} \in \mathbb{T} \quad (\hat{\tau}_n \in \mathbb{T}),$$

$$\varrho_n = \frac{\hat{\rho}_n + \hat{\tau}_n \bar{\hat{\rho}}_n \bar{\delta}_n}{|\hat{\rho}_n + \hat{\tau}_n \bar{\hat{\rho}}_n \bar{\delta}_n|} \in \mathbb{T} \quad \text{y} \quad \varepsilon_n = e_n |\hat{\rho}_n + \hat{\tau}_n \bar{\hat{\rho}}_n \bar{\delta}_n| \in \mathbb{R}_0^+,$$

obtenemos las llamadas funciones racionales para-ortogonales (pORF) para  $\hat{\mu}$ :

$$\hat{Q}_{n, \hat{\tau}_n}(z) = \varepsilon_n \varrho_n \frac{1 - \bar{\beta}_{n-1}z}{1 - \beta_n z} [\zeta_{n-1}(z)\phi_{n-1}(z) + \xi_n \phi_{n-1}^*(z)] = \phi_n(z) + \hat{\tau}_n \phi_n^*(z) = \hat{\tau}_n \hat{Q}_{n, \hat{\tau}_n}^*(z). \quad (4.10)$$

Los ceros  $z_k$  de  $\hat{Q}_{n, \hat{\tau}_n}(z)$  son todos distintos y contenidos en la circunferencia unidad  $\mathbb{T}$ , y por tanto, pueden ser elegidas como nodos para las fórmulas de cuadratura  $I_n(\hat{f})$ . De esta manera, obtenemos una fórmula de cuadratura de Szegő racional con  $n$  nodos, que es una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio racional sobre  $\mathbb{T}$  que tienen máximo dominio de validez ( $p = n - 1$ ), véase [20, Capítulo 5].

Debido a la presencia del parámetro  $\hat{\tau}_n$  en (4.10), los nodos y pesos en una fórmula de cuadratura de Szegő racional con  $n$  nodos no es única (a diferencia del caso del intervalo). Por la misma razón, una fórmula de cuadratura de Szegő-Radau con  $n$  nodos siempre existe y posee máximo dominio de validez, mientras que una fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional con  $n$  nodos tiene dominio de validez  $\tilde{\mathcal{R}}_{n-2}$  cuando esta existe. En [17] se prueba que los nodos en una fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional con  $n$  nodos con  $z_\alpha$  y  $z_\beta$  prefijados sobre  $\mathbb{T}$  son ceros de una pORF  $\tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n}(z) = \tilde{\phi}_n(z) + \hat{\tau}_n \tilde{\phi}_n^*(z) \in \hat{\mathcal{L}}_n$ ,  $\hat{\tau}_n \in \mathbb{T}$ , de grado  $n$  para la cual la sucesión de ORFs  $\{\tilde{\phi}_n\}_{k=0}^n$  es generada por medio de la relación

de recurrencia (4.8) con la sucesión de parámetros  $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-2}, \tilde{\delta}_{n-1}, \tilde{\delta}_n\} \subset \mathbb{D}$ ,<sup>5</sup> donde  $\tilde{\delta}_{n-1}$  y

$$\tilde{\xi}_n = \frac{\tilde{\rho}_n \tilde{\delta}_n + \tilde{\tau}_n \overline{\tilde{\rho}_n}}{\tilde{\rho}_n + \tilde{\rho}_n \tilde{\tau}_n \overline{\tilde{\delta}_n}} \in \mathbb{T} \quad (4.11)$$

vienen determinados de manera única por los nodos  $z_\alpha$  y  $z_\beta$ . Es fácil demostrar que la sucesión de ORFs  $\{\tilde{\phi}_n\}_{k=0}^n$  forma un sistema ortonormal en  $\mathring{\mathcal{L}}_n$  con respecto a medidas modificadas  $\tilde{\mu}$  sobre  $\mathbb{T}$ ; por ejemplo, con respecto a

$$d\tilde{\mu}(z) = \left\{ 1 + \mathring{c}_{\alpha,\beta} B_{(n-1)*}(z) \mathring{Q}_{2(n-1), \tilde{\tau}_{2(n-1)}}(z) \right\} d\mathring{\mu}(z), \quad \tilde{\tau}_{2(n-1)} \in \mathbb{T}, \quad (4.12)$$

donde  $\mathring{Q}_{2(n-1), \tilde{\tau}_{2(n-1)}}$  es una pORF en  $\mathring{\mathcal{L}}_{n-1} \cdot \mathring{\mathcal{L}}_{n-1}$  con respecto a la medida  $\mathring{\mu}$ , y  $\mathring{c}_{\alpha,\beta}$  es una constante dependiente de  $z_\alpha$  y  $z_\beta$  de manera que  $\mathring{c}_{\alpha,\beta} B_{(n-1)*}(z) \mathring{Q}_{2(n-1), \tilde{\tau}_{2(n-1)}}(z) \geq -1$  para toda  $z \in \mathbb{T}$ .

Además, los correspondientes pesos en la fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional viene dados por

$$\mathring{\lambda}_k = \left[ \sum_{j=0}^{n-2} |\phi_j(z_k)|^2 + |\tilde{\phi}_{n-1}(z_k)|^2 \right]^{-1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.13)$$

De [11, Proposición 4.1] y  $\tilde{Q}_{n, \tilde{\tau}_n}(z_k) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\phi}_n(z_k) = -\tau_n \tilde{\phi}_n^*(z_k)$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-2} |\phi_j(z_k)|^2 + |\tilde{\phi}_{n-1}(z_k)|^2 &= \frac{z_k |z_k - \beta_n|^2}{1 - |\beta_n|^2} \tilde{Q}'_{n, \tilde{\tau}_n}(z_k) \overline{\tilde{\phi}_n(z_k)} \\ &= \frac{z_k |z_k - \beta_n|^2}{1 - |\beta_n|^2} \tilde{Q}'_{n, \tilde{\tau}_n}(z_k) B_{n*}(z_k) \tilde{\phi}_n^*(z_k), \end{aligned} \quad (4.14)$$

En contraste con (4.5), se prueba que las igualdades en (4.14) son ciertas para toda sucesión de números complejos  $\mathcal{B} \subset \mathbb{D}$ .

Finalmente, para una medida  $\mathring{\mu}$  sobre  $\mathbb{T}$ , Consideramos la transformada de Herglotz-Riesz

$$H_{\mathring{\mu}}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} D(t, z) d\mathring{\mu}(\theta), \quad D(t, z) = \frac{t+z}{t-z}, \quad t = e^{i\theta}.$$

Las llamadas funciones racionales de segunda especie, asociadas con  $\phi_k$ , vienen dadas por

$$\begin{bmatrix} \psi_k(z) \\ -\psi_k^*(z) \end{bmatrix} = I_{\mathring{\mu}} \left( D(\cdot, z) \left\{ \begin{bmatrix} \phi_k(\cdot) \\ \phi_k^*(\cdot) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_k(z) \\ \phi_k^*(z) \end{bmatrix} \right\} \right) + I_{\mathring{\mu}} \left( \begin{bmatrix} \phi_k(\cdot) \\ -\phi_k^*(\cdot) \end{bmatrix} \right), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.15)$$

Estas funciones racionales de segunda especie están generadas por la misma relación de recurrencia (4.8) que las ORFs  $\phi_k$ , pero con  $[\phi_k \ \phi_k^*]^T$  y  $[\phi_{k-1} \ \phi_{k-1}^*]^T$  reemplazadas respectivamente por  $[\psi_k \ -\psi_k^*]^T$  y  $[\psi_{k-1} \ -\psi_{k-1}^*]^T$ ; véase [20, Capítulo 4.2]. Además, para  $k > 1$  se puede ver que

$$\begin{bmatrix} \psi_k(z) \\ -\psi_k^*(z) \end{bmatrix} = I_{\mathring{\mu}} \left( D(\cdot, z) \left\{ \begin{bmatrix} \phi_k(\cdot) \\ \phi_k^*(\cdot) \end{bmatrix} \frac{\mathring{f}(\cdot)}{\mathring{f}(z)} - \begin{bmatrix} \phi_k(z) \\ \phi_k^*(z) \end{bmatrix} \right\} \right), \quad \forall \mathring{f} \in \mathring{\mathcal{L}}_{(k-1)*}(1/\overline{\beta_k}) \setminus \{0\}, \quad (4.16)$$

donde  $\mathring{\mathcal{L}}_{(k-1)*}(w) = \{\mathring{f} \in \mathring{\mathcal{L}}_{(k-1)*} : \mathring{f}(w) = 0\}$ , véase [20, Lem. 5.2.2].

<sup>5</sup>Nótese que una vez fijo  $\delta_k$  en la recurrencia, también  $\hat{\rho}_k$  y  $e_k$ .

### 4.1.3. Relación entre $I$ y $\mathbb{T}$

Recordemos que la transformación Joukowsky  $x = J(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ , lleva el disco unidad  $\mathbb{D}$  en  $\overline{\mathbb{C}}_I$  y la circunferencia unidad  $\mathbb{T}$  en el intervalo  $I$ . Cuando  $z = e^{i\theta}$ , entonces  $x = J(z) = \cos \theta$ . En lo que sigue, asumiremos que  $x$  y  $z$  están relacionadas por esta transformación. A la sucesión  $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} \subset \overline{\mathbb{C}}_I$  le asociaremos otra  $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \dots\} \subset \mathbb{D}$ , de manera que  $J(\beta_k) = \alpha_k$ , y  $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots\} \subset \mathbb{D}$  con

$$\hat{\beta}_{2k} = \overline{\hat{\beta}_{2k-1}} = \beta_k, \quad k \geq 1. \quad (4.17)$$

Además, si  $\alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}_I$ , podemos asumir que  $\beta_n \in (-1, 1)$ .

Una conexión entre las fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad y el intervalo  $I$  es dado, por ejemplo, en [20] y [14]. Si  $\mu$  es una medida sobre  $I$ , obtenemos una medida sobre  $\mathbb{T}$  tomando

$$\dot{\mu}(E) = \mu(\{\cos \theta, \theta \in E \cap [0, \pi)\}) + \mu(\{\cos \theta, \theta \in E \cap [-\pi, 0)\}), \quad (4.18)$$

que puede también escribirse como  $\dot{\mu}(E) = \int_E |d\mu(\cos \theta)|$ . Usando la descomposición de Lebesgue de  $\mu$  no es difícil ver que  $\dot{\mu}'(\theta) = \mu'(\cos \theta) |\sin \theta|$ . Claramente esta media  $\dot{\mu}$  es simétrica de manera que  $I_{\dot{\mu}}(\hat{f}_*) = I_{\dot{\mu}}(\hat{f})$  para toda función  $\hat{f}$  sobre  $\mathbb{T}$ .

Finalmente, nótese que por medio de la transformación de Joukowsky, una función  $f(x)$  se transforma en una función  $\hat{f}(z) = (f \circ J)(z)$ , de manera que  $\hat{f}(z) = \hat{f}(z^{-1})$  y  $J_\mu(f) = \frac{1}{2} I_{\dot{\mu}}(\hat{f})$ . Además, de [54, Lema 3.1] se sigue que toda función  $f \in \mathcal{L}_k \setminus \mathcal{L}_{k-1}$  se transforma en una función  $\hat{f} \in (\hat{\mathcal{L}}_k^c \cdot \hat{\mathcal{L}}_{k*}) \setminus (\hat{\mathcal{L}}_{k-1}^c \cdot \hat{\mathcal{L}}_{(k-1)*})$ ; véase también [49, Capítulo 3.2]. Además, la siguiente relación entre las ORFs sobre  $I$  y sobre  $\mathbb{T}$  se probó en [52, Teorema 4.2].

**Teorema 4.1.1** *Sea  $\mu$  una medida sobre  $I$  y  $\dot{\mu}$  la correspondiente medida sobre  $\mathbb{T}$ , dada por (1.52). Sea  $\varphi_k$  una ORF con respecto a  $\mu$ , y sea  $\hat{\phi}_k$  la ORF con respecto a  $\dot{\mu}$  de manera que  $\hat{\kappa}_k \in \mathbb{R}_0^+$ . Entonces existen constantes no nulas  $c_k$  y  $d_k$  de manera que*

$$\varphi_k(x) = c_k B_{k*}(z) \{ \hat{\phi}_{2k}^c(z) + \hat{\phi}_{2k}^*(z) \} = d_k B_{k*}(z) \{ \zeta_k(z) \hat{\phi}_{2k-1}(z) + \hat{\phi}_{2k-1}^{c*}(z) \}. \quad (4.19)$$

La constante  $c_k$  viene dada explícitamente por

$$c_k = \rho_k \left\{ 1 + \frac{\Re\{\hat{\phi}_{2k}^c(\beta_k)\}}{\hat{\kappa}_{2k}} \right\}^{-1/2}, \quad \rho_k \in \mathbb{T}.$$

## 4.2. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio racionales positivas

En [13] se vio que en el caso polinómico existe una íntima relación entre las fórmulas de tipo Gauss y ciertas fórmulas de cuadratura de Szegő donde las medidas  $\mu$  y  $\dot{\mu}$  están relacionadas por la transformación de Joukowsky (1.52). En este respecto, las fórmulas de cuadratura de Szegő están basadas en los ceros de polinomios para-ortogonales con  $\tau \in \{\pm 1\}$ . Más tarde, haciendo uso de polinomios para-ortogonales con  $\tau \neq \pm 1$  en [14], se obtiene una familia uniparamétrica de fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio con pesos

positivos para  $\mu$ . En esta sección, generalizaremos estos resultados al caso de funciones racionales. Primeramente, necesitaremos el siguiente Lema en relación a los ceros de la  $n$ -ésima pORF y los pesos en una fórmula de cuadratura racional de Szegő con  $n$  nodos basada en los ceros de la pORF  $\mathring{Q}_{n,\pm 1}(z) = \phi_n(z) \pm \phi_n^*(z)$ .

**Lema 4.2.1** *Supongamos que los números  $\mathcal{B}_{n-1} = \{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$  son reales o aparecen en pares complejos conjugados. Asumamos que  $\dot{\mu}$  esta definida por (1.52) y sea  $\mathring{Q}_{n,\tau_n}(z) = \phi_n(z) + \tau_n \phi_n^*(z)$  la  $n$ -ésima pORF con respecto a  $\dot{\mu}$  donde  $\tau_n \in \mathbb{T}$ . entonces,*

1. Los ceros de  $\mathring{Q}_{n,\tau_n}(z)$  aparecen en pares complejos conjugados si y solo si  $\tau_n = \pm 1$ .
2.  $\mathring{Q}_{n,\tau_n}(z)$  tiene un cero en
  - a)  $z = 1$  si y solo si  $\tau_n = -1$ ,
  - b)  $z = -1$  si y solo si  $\tau_n = (-1)^{n+1}$ ,
3. Sea  $I_n(f) = \sum_{k=1}^n \dot{\lambda}_k f(z_k)$  una fórmula de cuadratura de Szegő racional con  $n$  nodos para  $\dot{\mu}$ , basada en los ceros de la pORF  $\mathring{Q}_{n,\pm 1}(z)$ . Entonces, para  $k = 1, \dots, n$ , los pesos  $\dot{\lambda}_k$  correspondientes al nodo  $z_k$  es igual al peso  $\dot{\lambda}_j$  correspondiente al nodo  $z_j = \bar{z}_k$ .

**Demostración.-** Supongamos que  $\xi$  y  $\bar{\xi}$  son ceros de  $\mathring{Q}_{n,\tau_n}(z)$ . Entonces,  $\phi_n(\xi) + \tau_n \phi_n^*(\xi) = 0$  y  $\phi_n(\bar{\xi}) + \tau_n \phi_n^*(\bar{\xi}) = 0$ . Así,

$$0 = \overline{\phi_n(\bar{\xi}) + \tau_n \phi_n^*(\bar{\xi})} = \phi_n^c(\xi) + \bar{\tau}_n \phi_n^{c*}(\xi),$$

y como  $\phi_n^c(z) = \phi_n(z)$  se tiene que

$$0 = \phi_n^c(\xi) + \bar{\tau}_n \phi_n^{c*}(\xi) = \phi_n(\xi) + \bar{\tau}_n \phi_n^*(\xi).$$

Consecuentemente,  $\tau_n = -\phi_n(\xi)/\phi_n^*(\xi) = \bar{\tau}_n$ , lo que concluye la demostración de la primera parte.

Sea ahora,  $\xi \in \{\pm 1\}$ , entonces tenemos que  $\mathring{Q}_{n,\tau_n}(\xi) = 0$  si y solo si

$$0 = \phi_n(\xi) + \tau_n \phi_n^*(\xi) = \phi_n(\xi) + \tau_n B_n(\xi) \overline{\phi_n(\xi)} = \phi_n(\xi) + \tau_n B_n(\xi) \phi_n^c(\xi).$$

Como  $\phi_n^c(z) = \phi_n(z)$  y  $B_n(\xi) = \xi^n$ , se tiene que

$$0 = \phi_n(\xi) + \tau_n B_n(\xi) \phi_n^c(\xi) = (1 + \tau_n \xi^n) \phi_n(\xi).$$

Puesto que los ceros de  $\phi_n(z)$  están todos en  $\mathbb{D}$  (véase [20]), se sigue que  $\phi_n(\xi) \neq 0$ . Por tanto,  $\mathring{Q}_{n,\tau_n}(\xi) = 0$  Si y solo si  $\tau_n = -\xi^n$ . Esto concluye la demostración de la segunda parte.

Finalmente, nótese que para la sucesión dada de números  $\mathcal{B}_{n-1}$  se tiene que  $\mathring{\mathcal{R}}_{(n-1,n-1)*}^c = \mathring{\mathcal{R}}_{n-1,n-1}$ . Consecuentemente, puesto que la medida  $\dot{\mu}$  es simétrica, tenemos para toda  $f \in \mathring{\mathcal{R}}_{n-1,n-1}$  que

$$\sum_{k=1}^n \dot{\lambda}_k f(z_k) = I_{\dot{\mu}}(f) = I_{\dot{\mu}}(f^c) = \sum_{k=1}^n \dot{\lambda}_k f^c(z_k) = \sum_{k=1}^n \dot{\lambda}_k f(\bar{z}_k).$$

## 4.2. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio racionales positivas

Puesto que para cada índice  $k$  para el cual  $\bar{z}_k \neq z_k$ , existe un índice  $j \neq k$  de manera que  $\bar{z}_k = z_j$ , se finaliza la demostración. ■

Sea  $\varphi_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$  la  $n$ -ésima ORF con respecto a la medida  $\mu$  sobre  $[-1, 1]$ , y  $\phi_n \in \dot{\mathcal{L}}_n \setminus \dot{\mathcal{L}}_{n-1}$  la  $n$ -ésima ORF mónica con respecto a la medida  $\hat{\mu}$  sobre  $\mathbb{T}$ , dada por (1.52). En [52, Teorema 5] se prueba que existe una constante distinta de cero  $C_n$  de manera que

$$\varphi_n(x) = C_n B_{n*}(z) \left\{ \hat{\phi}_{2n}^c(z) + \hat{\phi}_{2n}^*(z) \right\} = C_n B_{n*}(z) \hat{Q}_{2n,1}(z). \quad (4.20)$$

La segunda igualdad es verdad pues nuestros polos son reales o aparecen en pares complejos conjugados, y el último  $\hat{\beta}_{2n} = \beta_n$  es real, así que  $\hat{\phi}_{2n}^c(z) = \hat{\phi}_{2n}(z)$ . La relación dada por (4.20) es una generalización racional de la conexión entre polinomios ortogonales con respecto a la medida  $\hat{\mu}$  en la circunferencia unidad y los polinomios ortogonales con respecto a la medida  $\mu$  en  $[-1, 1]$ , la cual fue establecida por Szegő en su conocido libro [113, Teorema 11.5], y que juega un papel crucial en la conexión entre las fórmulas de cuadratura Gaussianas y de Szegő. Consecuentemente, con esta generalización racional podemos probar los siguientes dos teoremas.

**Teorema 4.2.2** Sean  $\hat{\mu}$  dada por (1.52), y  $\hat{I}_{2n}(f) = \sum_{k=1}^{2n} \hat{\lambda}_k f(z_k)$  una fórmula de cuadratura racional de Szegő con  $2n$  nodos para  $\hat{\mu}$ , basada en los ceros de la  $p$ ORF  $\hat{Q}_{2n,1}(z) = \hat{\phi}_{2n}(z) + \hat{\phi}_{2n}^*(z)$ . Supongamos que los ceros están ordenados de manera que  $z_{n+k} = \bar{z}_k$  para  $k = 1, \dots, n$ , con  $z_k \neq \bar{z}_j$  para cada  $1 \leq k < j \leq n$ , y siendo  $z_k = e^{i\theta_k}$  para  $k = 1, \dots, n$ . Entonces, cuando tomamos  $x_k = \cos \theta_k$  y  $\lambda_k = \hat{\lambda}_k$  para  $k = 1, \dots, n$ , la fórmula  $J_n(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$  coincide con la fórmula de cuadratura Gaussiana racional de  $n$  nodos para  $\mu$ , basada en los ceros de la  $n$ -ésima ORF  $\varphi_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$ .

**Demostración.**- De la primera y segunda parte del Lema 4.2.1 se sigue que  $\hat{Q}_{2n,1}(z)$  tiene  $2n$  ceros, diferentes de  $1$  y  $-1$ , apareciendo en pares complejos conjugados. Seguidamente por la tercera parte del Lema 4.2.1 se tiene que  $\hat{\lambda}_{n+k} = \hat{\lambda}_k$ . Considerando ahora una función arbitraria  $f \in \mathbb{R}_{n,n-1} = \mathcal{L}_n \cdot \mathcal{L}_{n-1}^c = \mathcal{L}_n^c \cdot \mathcal{L}_{n-1}$ . Claramente, la correspondiente función  $\hat{f}$  esta entonces en  $(\dot{\mathcal{L}}_n \cdot \dot{\mathcal{L}}_{n-1}^c)^c \cdot (\dot{\mathcal{L}}_n \cdot \dot{\mathcal{L}}_{n-1}^c)^* = (\dot{\mathcal{L}}_n \cdot \dot{\mathcal{L}}_{n-1}^c) \cdot (\dot{\mathcal{L}}_n \cdot \dot{\mathcal{L}}_{n-1}^c)^* = \hat{\mathcal{R}}_{2n-1,2n-1}$ . Consecuentemente,

$$\begin{aligned} J_n(f) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=1}^n \hat{\lambda}_k \hat{f}(z_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \hat{\lambda}_k \hat{f}(z_k) \\ &= \frac{1}{2} \hat{I}_{2n}(\hat{f}) = \frac{1}{2} I_{\hat{\mu}}(\hat{f}) = J_{\mu}(f). \end{aligned}$$

Finalmente, como la igualdad se tiene para cualquier  $f \in \mathbb{R}_{n,n-1}$ , la fórmula con  $n$  nodos es la fórmula de cuadratura Gaussiana racional con  $n$  nodos. ■

En la dirección contraria tenemos el siguiente

**Teorema 4.2.3** Sea  $J_n(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$  la fórmula de cuadratura Gaussiana racional con  $n$  nodos para  $J_{\mu}(f) = \int_{-1}^1 f(x) d\mu(x)$ , basada en los ceros de la  $n$ -ésima ORF  $\varphi_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$ . Tomemos  $x_k = \cos \theta_k$ , y definamos  $\{z_k\}_{k=1}^{2n}$  y  $\{\hat{\lambda}_k\}_{k=1}^{2n}$  por medio de

$$\left. \begin{aligned} z_k &= e^{i\theta_k}, & \hat{\lambda}_k &= \lambda_k \\ z_{n+k} &= e^{-i\theta_k}, & \hat{\lambda}_{n+k} &= \lambda_k \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, \dots, n.$$



Además, sea  $\hat{\mu}$  dada por (1.52). Entonces  $\hat{I}_{2n}(f) = \sum_{k=1}^{2n} \hat{\lambda}_k f(z_k) = \sum_{k=1}^n \hat{\lambda}_k [f(z_k) + f(\bar{z}_k)]$  coincide con una fórmula de cuadratura de Szegő racional con  $2n$ -nodos para  $\hat{\mu}$ , con nodos los ceros de la pORF  $\hat{Q}_{2n,1}(z) = \hat{\phi}_{2n}(z) + \hat{\phi}_{2n}^*(z)$ .

**Demostración.**- Consideremos una función arbitraria  $f \in \mathbb{R}_{n,n-1}$  y la correspondiente función  $\hat{f} \in \hat{\mathcal{R}}_{2n-1,2n-1}$ . Tenemos entonces que,

$$\begin{aligned} \hat{I}_{2n}(\hat{f}) &= \sum_{k=1}^{2n} \hat{\lambda}_k \hat{f}(z_k) = 2 \sum_{k=1}^n \hat{\lambda}_k \hat{f}(z_k) = 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \\ &= 2J_n(f) = 2J_\mu(f) = I_{\hat{\mu}}(\hat{f}). \end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula racional con  $2n$ -nodos es exacta para toda función  $\hat{f} \in \hat{\mathcal{R}}_{2n-1,2n-1}$  para la cual  $\hat{f}(z) = \hat{f}(z^{-1})$ . Consideremos ahora la pORF  $\hat{Q}_{2n,1}(z) = \hat{\phi}_{2n}(z) + \hat{\phi}_{2n}^*(z)$  con ceros en  $\{\tilde{z}_k\}_{k=1}^{2n}$ . De la primera y segunda parte del Lema 4.2.1 se sigue que  $\hat{Q}_{2n,1}(z)$  tiene  $2n$  ceros, todos diferentes de  $1$  y  $-1$  (pues  $\tilde{\tau}_{2n} = 1$ ), que aparecen en pares complejos conjugados. Así, supongamos que están ordenados de manera que  $\tilde{z}_k = \bar{\tilde{z}}_{n+k} = e^{i\tilde{\theta}_k}$  para  $k = 1, \dots, n$ , y consideremos la fórmula de cuadratura de Szegő racional con  $2n$ -nodos  $\tilde{I}_{2n}(f) = \sum_{k=1}^{2n} \tilde{\lambda}_k f(\tilde{z}_k)$  para  $\hat{\mu}$ . Por la tercera parte del Lema 4.2.1 se sigue que  $\tilde{\lambda}_{n+k} = \tilde{\lambda}_k$ . Así, considerando de nuevo una función arbitraria  $f \in \mathbb{R}_{n,n-1}$  y la correspondiente función  $\hat{f} \in \hat{\mathcal{R}}_{2n-1,2n-1}$ . Como la fórmula de cuadratura de Szegő racional con  $2n$  nodos  $\tilde{I}_{2n}(\hat{f})$  es exacta para toda  $\hat{f} \in \hat{\mathcal{R}}_{2n-1,2n-1}$ , se sigue del Teorema anterior que la fórmula de  $n$  nodos  $\tilde{J}_n(f) = \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_k f(\tilde{x}_k)$ , con  $\tilde{x}_k = \cos \tilde{\theta}_k$  y  $\tilde{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_k$ , es una fórmula de cuadratura Gaussiana racional con  $n$  nodos también. Puesto que las ORFs  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , son (salvo un factor de modulo uno) únicas, y por tanto, los nodos y pesos en la fórmula de cuadratura Gaussiana racional con  $n$  nodos son únicos también (véase la demostración de [49, Teorema 2.3.5]), se sigue que  $J_n(f)$  coincide con  $\tilde{J}_n(f)$ , y por tanto, que  $\hat{I}_{2n}(f)$  coincide con  $\tilde{I}_{2n}(f)$ . ■

Seguidamente, consideremos la medida variante compleja (véase [49, pág 200])

$$d\mu_{n-1}(x) = \frac{1}{2} \left( \beta_{n-1} - \frac{1}{\beta_{n-1}} \right) \sqrt{\alpha_n^2 - 1} \frac{(1-x^2)}{(\bar{\alpha}_{n-1} - x)|\alpha_n - x|} d\mu(x),$$

y denotemos por  $\tilde{\varphi}_{n-1}(x)$  la  $(n-1)$ -ésima ORF sobre  $I$  con respecto a esta medida, asociada con la sucesión  $\mathcal{A}_{n-1} \subset \overline{\mathbb{C}}_I$ . Además, denotemos por  $\phi_n \in \hat{\mathcal{L}}_n \setminus \hat{\mathcal{L}}_{n-1}$  la  $n$ -ésima ORF mónica con respecto a la medida  $\hat{\mu}$  sobre  $\mathbb{T}$ , dada por (1.52). De [52, Teorema 6] se sigue que existe una constante no nula  $C_{n-1}$  tal que

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{n-1}(x) &= C_{n-1} \frac{B_{n*}(z)}{\zeta_n^c(z) - \zeta_{n*}(z)} \left\{ \hat{\phi}_{2n}^c(z) - \hat{\phi}_{2n}^*(z) \right\} \\ &= \tilde{C}_{n-1} (1 - \beta_n z)^2 B_{(n-1)*}(z) \left\{ \frac{\hat{Q}_{2n,-1}(z)}{z^2 - 1} \right\}, \quad \tilde{C}_{n-1} = \frac{C_{n-1}}{1 - \beta_n^2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde  $\zeta_n(z)$  viene dada por (4.7). Nuevamente, la segunda igualdad es cierta pues los números en esta sucesión son reales o bien aparecen en pares complejos conjugados, y el último polo  $\hat{\beta}_{2n} = \beta_n$  es real, así que  $\hat{\phi}_{2n}^c(z) = \hat{\phi}_{2n}(z)$  y  $\zeta_n^c(z) = \zeta_n(z) = \zeta_{n*}^{-1}(z)$ . La

---

## 4.2. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio racionales positivas

---

relación dada por (4.22) es ahora una generalización racional de la conexión entre polinomios ortogonales con respecto a la medida  $\hat{\mu}$  en la circunferencia unidad y polinomios ortogonales con respecto a la medida  $\tilde{\mu}$ , con  $d\tilde{\mu}(x) = (1-x^2)d\mu(x)$ , en el intervalo, la cual fue introducida por Szegő en su libro [113, pag 294], y juega un papel importante en la conexión de las fórmulas de Gauss-Lobatto con las de Szegő. Como consecuencia, con esta generalización racional podemos ahora probar los siguientes dos Teoremas cuyas demostraciones son análogas a las de los Teoremas 4.2.2 y 4.2.3.

**Teorema 4.2.4** *Sea  $\hat{\mu}$  dada por (1.52), y sea  $\hat{I}_{2n}(f) = 2Af(-1) + 2Bf(1) + \sum_{k=1}^{2n-2} \hat{\lambda}_k f(z_k)$  una fórmula de cuadratura de Szegő racional con  $2n$  nodos para  $\hat{\mu}$ , basada en los ceros de la  $\hat{Q}_{2n,-1}(z) = \hat{\phi}_{2n}(z) - \hat{\phi}_{2n}^*(z)$ . Supongamos que los ceros están ordenados de manera que  $z_{n-1+k} = \bar{z}_k$  para  $k = 1, \dots, n-1$ , con  $z_k \neq \bar{z}_j$  para todo  $1 \leq k < j \leq n-1$ , y tomemos  $z_k = e^{i\theta_k}$  con  $k = 1, \dots, n-1$ . Entonces, cuando tomamos  $x_k = \cos \theta_k$  y  $\lambda_k = \hat{\lambda}_k$  para  $k = 1, \dots, n-1$ , la fórmula  $J_{n+1}(f) = Af(-1) + Bf(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k)$  coincide con la fórmula de cuadratura de Gauss-Lobatto racional con  $(n+1)$  nodos para  $\mu$  con nodos prefijados en  $1$  y  $-1$ .*

En la dirección contraria tenemos el siguiente

**Teorema 4.2.5** *Sea  $J_{n+1}(f) = Af(-1) + Bf(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k)$  la fórmula de cuadratura de Gauss-Lobatto racional con  $(n+1)$  nodos para  $\mu$  con nodos prefijados en  $1$  y  $-1$ . Tomemos  $x_k = \cos \theta_k$  y definamos  $\{z_k\}_{k=1}^{2n-2}$  y  $\{\hat{\lambda}_k\}_{k=1}^{2n-2}$  por medio de*

$$\left. \begin{aligned} z_k &= e^{i\theta_k}, & \hat{\lambda}_k &= \lambda_k \\ z_{n-1+k} &= e^{-i\theta_k}, & \hat{\lambda}_{n-1+k} &= \lambda_k \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

*Además, sea  $\hat{\mu}$  dada por (1.52). Entonces la fórmula  $\hat{I}_{2n}(f) = 2f(-1) + 2Bf(1) + \sum_{k=1}^{2n-2} \hat{\lambda}_k f(z_k) = 2Af(-1) + 2Bf(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\lambda}_k [f(z_j) + f(\bar{z}_j)]$  coincide con una fórmula de cuadratura de Szegő racional con  $2n$  nodos para  $\hat{\mu}$ , con nodos los ceros de la pORF  $\hat{Q}_{2n,-1}(z) = \hat{\phi}_{2n}(z) - \hat{\phi}_{2n}^*(z)$ .*

Hemos conectado las fórmulas de cuadratura racionales de Gauss y Gauss-Lobatto con las fórmulas de cuadratura de Szegő racionales, veamos ahora que ocurre en el caso de las cuadraturas de Gauss-Radau racionales con un nodo fijo bien en  $1$  o en  $-1$ . Para ello, necesitaremos el siguiente

**Teorema 4.2.6** *Denotemos por  $\phi_n$  la  $n$ -ésima ORF mónica con respecto a la medida  $\hat{\mu}$  sobre  $\mathbb{T}$ , dada por (1.52), y definamos  $\check{\varphi}_{n-1}^\pm \in \mathcal{L}_{n-1}$  por*

$$\begin{aligned} \check{\varphi}_{n-1}^\pm(x) &= \frac{B_{(n-1)^*}(z)}{1 \pm \zeta_n(z)} \left\{ \hat{\phi}_{2n-1}(z) \pm \hat{\phi}_{2n-1}^*(z) \right\} \\ &= \frac{B_{(n-1)^*}(z)}{1 \pm \zeta_n(z)} \hat{Q}_{2n-1, \pm 1}(z), \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde  $\hat{\beta}_{2n-1} = \bar{\beta}_n = \beta_n$ . Entonces se tiene que

$$Q_n^\pm(x) = \left( \frac{1 \pm x}{1 - x/\alpha_n} \right) \check{\varphi}_{n-1}^\pm(x)$$

es ortogonal a  $\mathcal{L}_{n-1}(\alpha_n) = \left\{ \frac{(1-x/\alpha_n)p_{n-2}(x)}{\pi_{n-1}(x)} : p_{n-2} \in \mathbb{P}_{n-2} \right\}$  con respecto a la medida  $\mu$  sobre  $I$ .

**Demostración.**- Primeramente, nótese que  $\tau_n \in \{\pm 1\}$ , así que  $\hat{Q}_{2n-1, \pm 1}^{\circ}(z)$  tiene un cero en  $z = \mp 1$ . Seguidamente, denotando la parte derecha de (4.22) por  $R_{n-1}^{\pm}(z)$ . Entonces con

$$1 \pm \zeta_n(z) = \frac{(1 \pm z)(1 \mp \beta_n)}{(1 - \beta_n z)},$$

se sigue que  $R_{n-1}^{\pm} \in \mathring{\mathcal{L}}_{n-1}^c \mathring{\mathcal{L}}_{(n-1)*}$ . Además, tenemos que

$$\begin{aligned} R_{n-1}^{\pm}(z^{-1}) &= [R_{n-1}^{\pm}]_*(z) \\ &= \frac{B_{n-1}^c(z)}{1 \pm \zeta_{n*}(z)} \left\{ \hat{\phi}_{(2n-1)*}(z) \pm B_{n*}(z) B_{(n-1)*}^c(z) \hat{\phi}_{2n-1}(z) \right\} \\ &= \frac{\zeta_n(z)}{\zeta_n(z) \pm 1} \left\{ B_{n-1}^c(z) \hat{\phi}_{(2n-1)*}(z) \pm B_{n*}(z) \hat{\phi}_{2n-1}(z) \right\} \\ &= \frac{B_{(n-1)*}(z)}{\zeta_n(z) \pm 1} \left\{ \hat{\phi}_{2n-1}^*(z) \pm \hat{\phi}_{2n-1}(z) \right\} = R_{n-1}^{\pm}(z). \end{aligned}$$

Así, hemos probado que  $\check{\varphi}_{n-1}^{\pm} \in \mathcal{L}_{n-1}$ . Seguidamente, con  $x = J(z)$  encontramos tras algunos cálculos que

$$\frac{1 \pm x}{1 - x/\alpha_n} = \frac{(1 + \beta_n^2)}{2(1 \mp \beta_n)^2} [1 \pm \zeta_n(z)] [1 \pm \zeta_{n*}(z)].$$

Así, tomando  $C_n = \frac{(1+\beta_n^2)}{2(1\mp\beta_n)^2}$ , encontramos que

$$\begin{aligned} Q_n^{\pm}(x) &= C_n B_{(n-1)*}(z) \left\{ \hat{\phi}_{2n-1}(z) \pm \hat{\phi}_{2n-1}^*(z) \right\} [1 \pm \zeta_{n*}(z)] \\ &= C_n \left\{ [1 \pm \zeta_{n*}(z)] \hat{\sigma}_{2n-1}(z) + [1 \pm \zeta_n(z)] \hat{\sigma}_{(2n-1)*}^c(z) \right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\hat{\sigma}_{2n-1}(z) = B_{(n-1)*}(z) \hat{\phi}_{2n-1}(z).$$

Consideremos ahora una función arbitraria  $f \in \mathcal{L}_{n-1}(\alpha_n)$  y la correspondiente función  $\mathring{f} \in \mathring{\mathcal{L}}_{n-1}^c \cdot \mathring{\mathcal{L}}_{(n-1)*}$ . Claramente, la función  $\mathring{f}$  es de la forma

$$\mathring{f}(z) = \frac{(z - \beta_n)q_{n-2}(z)(1 - \beta_n z)q_{n-2}^*(z)}{\mathring{\pi}_{n-1}(z)\mathring{\pi}_{n-1}^*(z)}, \quad q_{n-2} \in \mathbb{P}_{n-2}.$$

Además, como  $\mathring{f}(z) = \mathring{f}_*^c(z)$  y la medida  $\mathring{\mu}$  es simétrica (es decir,  $\forall f : I_{\mathring{\mu}}(f_*) = I_{\mathring{\mu}}(f)$ ), tenemos que

$$\langle Q_n^{\pm}, f \rangle_{\mu} = C_n \left\langle \hat{\sigma}_{2n-1}, [1 \pm \zeta_n] \mathring{f} \right\rangle_{\mathring{\mu}} = 0,$$

donde la última igualdad sigue del hecho de que  $[1 \pm \zeta_n(z)] \mathring{f}(z) \in \mathring{\mathcal{L}}_{n-1}^c \cdot \mathring{\mathcal{L}}_{(n-1)*}$ , mientras que  $\hat{\sigma}_{2n-1}(z)$  es ortogonal a  $\mathring{\mathcal{L}}_{n-1}^c \cdot \mathring{\mathcal{L}}_{(n-1)*}$  (véase [52, Thm. 2]). Esto concluye la demostración. ■

#### 4.2. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio racionales positivas

Como  $Q_n^\pm(x)$  es ortogonal a  $\mathcal{L}_{n-1}(\alpha_n)$ , esto significa que  $Q_n^\pm(x)$  es una función racional quasi-ortogonal (véase [20, Capítulo 11.5]) de la forma<sup>6</sup>

$$Q_n^\pm(x) = c_n \left\{ \varphi_n(x) + \rho^\pm \frac{Z_n(x)}{Z_{n-1}^c(x)} \varphi_{n-1}(x) \right\}, \quad c_n \in \mathbb{C}_0, \quad (4.23)$$

donde  $\varphi_k(x)$ ,  $k = n-1, n$ , denota la  $k$ -ésima ORF con respecto a la medida  $\mu$  sobre  $I$ , y

$$\rho^\pm = -\frac{\varphi_n(\pm 1)}{Z_n(\pm 1)} \cdot \frac{Z_{n-1}^c(\pm 1)}{\varphi_{n-1}(\pm 1)}.$$

Además, nótese que cuando todos los polos son infinito, el espacio  $\mathcal{L}_{n-1}(\alpha_n) = \mathbb{P}_{n-2}$ , así que el Teorema anterior es una generalización racional de la conexión entre polinomios ortogonales con respecto a la medida  $\hat{\mu}$  en la circunferencia unidad y polinomios ortogonales con respecto a la medida  $\mu^\pm$ , donde  $d\mu^\pm(x) = (1 \pm x)d\mu(x)$ , en el intervalo (véase [13, Teorema 4.4]). Por tanto, podemos ahora probar los siguientes dos teoremas, cuyas pruebas son nuevamente similares a la de los Teoremas 4.2.2 y 4.2.3.

**Teorema 4.2.7** *Tomemos  $\xi \in \{\pm 1\}$ . Sean  $\hat{\mu}$  dada por (1.52), y  $\hat{I}_{2n}(f) = 2Af(\xi) + \sum_{k=1}^{2n-2} \hat{\lambda}_k f(z_k)$  una fórmula de cuadratura de Szegő racional con  $(2n-1)$  nodos para  $\hat{\mu}$ , basada en los ceros de la pORF  $\hat{Q}_{2n-1, -\xi}(z) = \hat{\phi}_{2n-1}(z) - \xi \hat{\phi}_{2n-1}^*(z)$ . Supongamos que los ceros están ordenados de manera que  $z_{n-1+k} = \bar{z}_k$  para  $k = 1, \dots, n-1$ , con  $z_k \neq \bar{z}_j$  para todo  $1 \leq k < j \leq n-1$ , y tomemos  $z_k = e^{i\theta_k}$  para  $k = 1, \dots, n-1$ . Entonces, cuando tomamos  $x_k = \cos \theta_k$  y  $\lambda_k = \hat{\lambda}_k$  para  $k = 1, \dots, n$ , la fórmula  $J_n(f) = Af(\xi) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k)$  coincide con la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos para  $\mu$  con un nodo prefijado en  $\xi$ .*

En la dirección contraria tenemos el siguiente

**Teorema 4.2.8** *Tomemos  $\xi \in \{\pm 1\}$ . Sea  $J_n(f) = Af(\xi) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k)$  la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos para  $\mu$  con un nodo prefijado en  $\xi$ . Tomemos  $x_k = \cos \theta_k$  y definamos  $\{z_k\}_{k=1}^{2n-2}$  y  $\{\hat{\lambda}_k\}_{k=1}^{2n-2}$  por medio de*

$$\left. \begin{aligned} z_k &= e^{i\theta_k}, & \hat{\lambda}_k &= \lambda_k \\ z_{n-1+k} &= e^{-i\theta_k}, & \hat{\lambda}_{n-1+k} &= \lambda_k \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

*Además, Tomando  $\hat{\mu}$  dada por (1.52), entonces  $\hat{I}_{2n-1}(f) = 2Af(\xi) + \sum_{k=1}^{2n-2} \hat{\lambda}_k f(z_k) = 2Af(\xi) + \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\lambda}_k [f(z_k) + f(\bar{z}_k)]$  coincide con una fórmula de cuadratura de Szegő racional con  $(2n-1)$  nodos para  $\hat{\mu}$ , con nodos los ceros de la  $\hat{Q}_{2n-1, -\xi}(z) = \hat{\phi}_{2n-1}(z) - \xi \hat{\phi}_{2n-1}^*(z)$ .*

Finalmente, en el siguiente teorema daremos una generalización racional del Teorema 2.2 en [14]; es decir, probaremos para  $\tau \neq \pm 1$  que, bajo la condición de que  $\mathcal{L}_{n-1} = \mathcal{L}_{n-1}^c$ , las fórmulas de cuadratura racionales con  $n$  nodos se transforman en fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio racionales con  $n$  nodos en el intervalo con pesos positivos, las cuales son solo exactas en  $\mathcal{L}_{n-1}$  a menos que se haga una elección particular del parámetro  $\tau$ .

<sup>6</sup>En (4.23) usamos la conjugación super-c de  $Z_{n-1}(x)$  en la definición de la función racional quasi-ortogonal, pues  $\alpha_{n-1}$  puede ser un complejo arbitrario. Mientras que en [20, Capítulo 11.5], esta no aparece, pues los polos se ha asumido que son reales.

**Teorema 4.2.9** Supongamos que los polos  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$  (y por tanto, los números  $\{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ ) son reales o aparecen en pares complejos conjugados, es decir,  $\mathcal{L}_{n-1} = \mathcal{L}_{n-1}^c$  y  $\dot{\mathcal{L}}_{n-1} = \dot{\mathcal{L}}_{n-1}^c$ . Sea  $I_n(\dot{f}) = \sum_{k=1}^n \dot{\lambda}_k \dot{f}(z_k)$  una  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő racional con respecto a  $\dot{\mu}$ , dada por (1.52), donde los nodos  $\{z_k = e^{i\theta_k}\}_{k=1}^n$  son los ceros de la pORF  $\dot{Q}_{n,\tau}(z) = \phi_n(z) + \tau \phi_n^*(z)$  con  $\tau \neq \pm 1$ . Tomemos  $x_k = \cos \theta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  y  $\lambda_k = \dot{\lambda}_k/2 > 0$ , y consideremos la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio racional basada en estos nodos y pesos:

$$J_n^T(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \quad (4.24)$$

para  $\mu$ . Entonces esta fórmula de cuadratura es exacta para toda  $f \in \mathcal{L}_{n-1}$ . Además, será exacta en  $\mathcal{L}_n$  si y solo si

$$\tau = -\phi_n(\beta_n) \pm i\sqrt{1 - \phi_n^2(\beta_n)}.$$

**Demostración.**- Como para toda función  $f \in \mathcal{L}_{n-1}$  se tiene que la correspondiente función  $\dot{f} \in \dot{\mathcal{L}}_{n-1}^c \cdot \dot{\mathcal{L}}_{(n-1)*} = \dot{\mathcal{L}}_{n-1} \cdot \dot{\mathcal{L}}_{(n-1)*}$ , se sigue que

$$J_n^T(f) = \frac{1}{2} I_n(\dot{f}) = \frac{1}{2} I_{\dot{\mu}}(\dot{f}) = J_{\mu}(f),$$

lo que implica que  $J_n^T(f)$  es de tipo interpolatorio. Seguidamente, sea  $f_n(x) = \frac{\prod_{k=1}^n (x-x_k)}{\pi_n(x)} \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$ , entonces se tiene que  $J_n^T(f_n) = 0$ . Así, veamos ahora para que conjunto de nodos  $\{x_k\}_{k=1}^n$  (o equivalentemente, para que valores de  $\tau$ ) se tiene que  $J_{\mu}(f_n) = 0$ . Consideremos la correspondiente función  $\dot{f}_n \in \dot{\mathcal{L}}_n \cdot \dot{\mathcal{L}}_{n*}$ , entonces es fácil comprobar que tiene la forma

$$\dot{f}_n(z) = c_n \frac{\prod_{k=1}^n (z - z_k)(z - \bar{z}_k)}{\dot{\pi}_n(z)\dot{\pi}_n^*(z)}, \quad c_n \in \mathbb{C}_0.$$

Por otro lado, tenemos que  $\dot{Q}_{n,\tau} \in \dot{\mathcal{L}}_n$  es de la forma

$$\dot{Q}_{n,\tau}(z) = d_n \frac{\prod_{k=1}^n (z - z_k)}{\dot{\pi}_n(z)}, \quad d_n \in \mathbb{C}_0,$$

así que

$$B_{n*}(z)\dot{Q}_{n,\tau}^c(z) = \frac{\dot{\pi}_n(z)}{\dot{\pi}_n^*(z)} \cdot \bar{d}_n \frac{\prod_{k=1}^n (z - \bar{z}_k)}{\dot{\pi}_n(z)} = \bar{d}_n \frac{\prod_{k=1}^n (z - \bar{z}_k)}{\dot{\pi}_n^*(z)}.$$

En consecuencia, tenemos con  $e_n = c_n / |d_n|^2 \in \mathbb{C}_0$  que

$$\begin{aligned} \dot{F}_n(z) &= e_n B_{n*}(z)\dot{Q}_{n,\tau}(z)\dot{Q}_{n,\tau}^c(z) \\ &= e_n B_{n*}(z)\{\phi_n(z) + \tau \phi_n^*(z)\}\{\phi_n(z) + \bar{\tau} \phi_n^*(z)\} \\ &= \hat{e}_n \{\phi_n(z) + \tau \phi_n^*(z)\}\{\phi_{n*}(z) + \tau \phi_{n*}^*(z)\}, \quad \hat{e}_n = e_n \bar{\tau}. \end{aligned}$$

Como resultado,

$$\begin{aligned} J_{\mu}(f_n) &= \frac{\hat{e}_n}{2} [I_{\dot{\mu}}(\phi_n \phi_{n*}) + 2\Re\{I_{\dot{\mu}}(\phi_n \phi_{n*}^*)\}\tau + I_{\dot{\mu}}(\phi_n^* \phi_{n*}^*)\tau^2] \\ &= \frac{\hat{e}_n}{2} \|\phi_n\|_{\dot{\mu}}^2 (1 + 2\Re\{a_n\}\tau + \tau^2), \end{aligned}$$

---

## 4.2. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio racionales positivas

---

donde  $\|\phi_n\|_{\hat{\mu}}^2 = \langle \phi_n, \phi_n \rangle_{\hat{\mu}} > 0$ , y  $\bar{a}_n$  representa el coeficiente director en la expansión de  $\phi_n^*$  en las bases  $\{B_0, \dots, B_n\}$ . Nótese que

$$a_n = (\phi_n^*)^*(\beta_n) = \phi_n(\beta_n) = \phi_n^c(\beta_n) = \bar{a}_n,$$

y por tanto, es real. Además, de [20, Corolario 3.1.4] deducimos que  $1 = |\phi_n^*(\beta_n)|^2 > |\phi_n(\beta_n)|^2$ , así que  $J_\mu(f_n) = 0$  si y solo si  $1 + 2\phi_n(\beta_n)\tau + \tau^2 = 0$ , dando  $\tau = -\phi_n(\beta_n) \pm i\sqrt{1 - \phi_n^2(\beta_n)}$ . ■

**Nota 4.2.10** *En el teorema anterior, asumimos que los polos son reales o aparecen en pares complejos conjugados. Por tanto, podemos considerar los subespacios auxiliares  $\tilde{\mathcal{L}}_q \subseteq \tilde{\mathcal{L}}_p \subseteq \mathcal{L}_n$ , con  $\tilde{\alpha}_p \in \overline{\mathbb{R}}_I$ , de modo que  $\mathcal{L}_n = \tilde{\mathcal{L}}_p \cdot \tilde{\mathcal{L}}_q^c = \overline{\mathbb{R}}_{p,q}$  y  $p - q$  es mínimo (claramente, la diferencia  $p - q$  es igual al número de polos reales con multiplicidad impar). En consecuencia, para  $\tau \in \{\pm 1\}$  la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio racional con  $n$  nodos, dada por (4.24), se reduce a la fórmula de cuadratura de tipo-Gauss racional basadas en funciones racionales interpolando en  $\tilde{\mathcal{L}}_{p-1}$  cuando  $p = \lceil n/2 \rceil$  y  $q = \lfloor n/2 \rfloor$ . Cuando  $p - q > 1$ , Además, la fórmula de cuadratura de Szegő racional con  $n$  nodos para  $\tau \in \{\pm 1\}$  no puede relacionarse con una de las clásicas reglas de tipo interpolatorio racionales para obtener una fórmula de cuadratura para  $J_\mu(f) = \int_{-1}^1 f(x)d\mu(x)$ .*

### 4.2.1. Ejemplos Numéricos

En esta subsección ilustraremos los resultados obtenidos anteriormente por medio de algunos experimentos numéricos. Para ello consideraremos la función peso de Chebyshev de primera especie  $d\mu(x) = dx/\sqrt{1-x^2}$  sobre  $I$ , para la cual la correspondiente medida  $\hat{\mu}$  sobre  $\mathbb{T}$  es la medida de Lebesgue  $d\hat{\mu}(z) = dz/iz$ . Nuestro propósito entonces es obtener una caracterización de las reglas de tipo-Gauss racionales para  $\mu$  dando expresiones explícitas para la correspondiente función racional que nos proporciona los nodos, así como de los pesos en las fórmulas de cuadratura.

Dada la sucesión de números complejos  $\mathcal{B}_n = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \subset \mathbb{D}$ , la ORF mónica con respecto a la medida de Lebesgue  $\hat{\mu}$  son las llamadas bases de Takenaka-Malmquist (véase [92] y [115]), dadas por

$$\phi_n(z) = (1 - |\beta_n|^2) \frac{zB_{n-1}(z)}{1 - \bar{\beta}_nz}, \quad \text{y por tanto, } \phi_n^*(z) = \frac{1 - |\beta_n|^2}{1 - \bar{\beta}_nz}, \quad (4.25)$$

Además los nodos,  $\{z_k\}_{k=1}^n$  en una fórmula de cuadratura de Szegő racional con  $n$  nodos con respecto a la medida de Lebesgue  $\hat{\mu}$ , basada en la pORF  $\hat{Q}_{n,\tau_n}(z) = \phi_n(z) + \tau_n\phi_n^*(z)$ , satisface (véase [11, Sección 4])

$$z_k B_{n-1}(z_k) = -\tau_n,$$

mientras que los correspondientes pesos vienen dados por (véase [20, Teorema 5.4.2])

$$\lambda_k = 2\pi \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{n-1} P(z_k, \beta_j) \right\}^{-1},$$

donde  $P(z, \beta)$  denota al núcleo de Poisson:  $P(z, \beta) = \frac{1-|\beta|^2}{|z-\beta|^2}$ , con  $z \in \mathbb{T}$  y  $\beta \in \mathbb{D}$ .

---

Recordar que para las fórmulas de cuadratura racionales de Gauss, Gauss-Radau y Gauss-Lobatto trabajamos con la sucesión  $\hat{B}_{2n} = \{\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{2n}\} \subset \mathbb{D}$  dada por (4.17), y con  $\beta_n \in (-1, 1)$ , así que

$$\hat{B}_{2k-1}(z) = B_k^c(z)B_{k-1}(z) \quad \text{y} \quad \hat{B}_{2k}(z) = B_k(z)B_k^c(z). \quad (4.26)$$

En consecuencia, (4.20) junto con (4.25)–(4.26) da lugar a la siguiente expresión para una  $n$ -ésima ORF con respecto a la medida  $\mu$  sobre  $I$  (véase [54, 100] y [49, Capítulo 3]):

$$\varphi_n(x) = C_n(1 - \beta_n^2) \left\{ \frac{zB_{n-1}^c(z)}{1 - \beta_n z} + \frac{B_{(n-1)*}(z)}{z - \beta_n} \right\}, \quad C_n \in \mathbb{C}_0.$$

Así, los nodos  $x_k = J(z_k)$  de la fórmula de cuadratura Gaussiana racional con  $n$  nodos  $J_n(F)$  satisface

$$z_k \left( \frac{z_k - \beta_n}{1 - \beta_n z_k} \right) B_{n-1}(z_k)B_{n-1}^c(z_k) = -1,$$

mientras que los pesos vienen dados por

$$\lambda_k = 2\pi \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{n-1} [P(z_k, \beta_j) + P(z_k, \bar{\beta}_j)] + P(z_k, \beta_n) \right\}^{-1}. \quad (4.27)$$

Seguidamente, en un camino similar deducimos de (4.22) y (4.25)–(4.26) que

$$\tilde{\varphi}_{n-1}(x) = C_{n-1} \left\{ \frac{z(z - \beta_n)B_{n-1}^c(z) - (1 - \beta_n z)B_{(n-1)*}(z)}{z^2 - 1} \right\}, \quad C_{n-1} \in \mathbb{C}_0.$$

Así, los nodos  $x_k = J(z_k)$  en la fórmula de Gauss-Lobatto racional con  $(n+1)$  nodos  $J_{n+1}(F)$  con  $x = 1$  y  $x = -1$  prefijados, satisfaciendo

$$z_k \left( \frac{z_k - \beta_n}{1 - \beta_n z_k} \right) B_{n-1}(z_k)B_{n-1}^c(z_k) = 1,$$

mientras que los pesos vienen ahora dados por (véase Teorema 4.2.4)

$$\lambda_k = \begin{cases} 2\pi \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{n-1} [P(z_k, \beta_j) + P(z_k, \bar{\beta}_j)] + P(z_k, \beta_n) \right\}^{-1}, & z_k^2 \neq 1 \\ \pi \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{n-1} [P(z_k, \beta_j) + P(z_k, \bar{\beta}_j)] + P(z_k, \beta_n) \right\}^{-1}, & z_k^2 = 1. \end{cases}$$

Finalmente, tras algunas computaciones (4.22) y (4.25)–(4.26) nos proporcionan que

$$\check{\varphi}_{n-1}^{\pm}(x) = \frac{(1 - \beta_n^2)}{(z \pm 1)(\pm 1 - \beta_n)} \left\{ zB_{n-1}^c(z) \pm B_{(n-1)*}(z) \right\}.$$

Así, los nodos  $x_k^{\pm} = J(z_k^{\pm})$  en la fórmula de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos  $J_n(f)$  con nodo prefijado en  $x = \mp 1$  satisface

$$z_k^{\pm} B_{n-1}(z_k^{\pm})B_{n-1}^c(z_k^{\pm}) = \mp 1,$$

y los pesos vienen dados por (véase Teorema 4.2.7)

$$\lambda_k^\pm = \begin{cases} 2\pi \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{n-1} [P(z_k^\pm, \beta_j) + P(z_k^\pm, \bar{\beta}_j)] \right\}^{-1}, & z_k^\pm \neq \mp 1 \\ \pi \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{n-1} [P(z_k, \beta_j) + P(z_k, \bar{\beta}_j)] \right\}^{-1}, & z_k^\pm = \mp 1. \end{cases}$$

En los ejemplos numéricos, usaremos las anteriores expresiones para computar los nodos y pesos en las cuadraturas racionales sobre  $I$ . En [122] se describe un procedimiento numérico para computar los nodos y pesos de la cuadratura Gaussiana racional hasta el grado de precisión de la maquina en un número de operaciones de  $\mathcal{O}(m \cdot n)$ , donde  $n$  denota el número de puntos de interpolación y  $m$  representa el número de polos diferentes (dos polos  $\alpha_j$  y  $\alpha_k$  se dirán diferentes si  $\alpha_j \neq \alpha_k$  y  $\alpha_j \neq \bar{\alpha}_k$ ). Este procedimiento esta basado en las anteriores expresiones para los nodos y pesos para la cuadratura Gaussiana racional, y fue implementado en MATLAB<sup>®</sup>. Un procedimiento similar puede usarse para computar los pesos y nodos en las cuadraturas de Gauss-Radau y Gauss-Lobatto racionales. sin embargo, por restricciones de tiempo decidimos usar una implementación más corta y simple, aunque menos eficiente (y tal vez menos precisa para largos valores de  $n$ ) en MAPLE<sup>®</sup>. Todas las computaciones se han hecho con 30 dígitos de precisión en MAPLE<sup>®</sup> 9.5.

**Ejemplo 4.2.11** Definimos la función  $f^{[\alpha]}(x) = \frac{\alpha x - 1}{x - \alpha}$ , con  $\alpha = J(\beta) \in \bar{\mathbb{C}}_I$ . En [119, Teorema 3.2(2)] se prueba que

$$J_\mu(f^{[\alpha]}) = \int_{-1}^1 f^{[\alpha]}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\beta.$$

Consideremos ahora la sucesión de polos  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_4\} = \{-\frac{3}{4}\mathbf{i}, \frac{5}{4}, \frac{3-\mathbf{i}}{4}, \infty\}$ . Computaremos numéricamente  $J_\mu(f_1)$  and  $J_\mu(f_2)$ , con

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \Re\{f^{[\alpha_1]}(x) + f^{[\alpha_2]}(x) + f^{[\alpha_3]}(x)\} \text{ y } f_2(x) = f_1(x) + \frac{x}{\pi}, \quad (4.28)$$

por medio de la fórmula de cuadratura Gaussiana con  $n$  nodos (respectivamente Gauss-Radau racional con  $n$  nodos y Gauss-Lobatto racional con  $n + 1$  nodos), basadas en la sucesión de polos

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \infty\}, \quad 2 \leq n \leq 5.$$

Nótese que la solución exacta  $J_\mu(f_1) = J_\mu(f_2) = 1$ . Seguidamente, aproximaremos  $J_\mu(f_1)$  y  $J_\mu(f_2)$  por medio de una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio racional con  $n$  nodos, basada en la sucesión de polos

$$\begin{aligned} \{\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_k, \bar{\alpha}_k, \infty, \infty\} & \text{ si } n = 2k + 2, \\ \{\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_k, \bar{\alpha}_k, \infty\} & \text{ si } n = 2k + 1, \end{aligned}$$

para  $4 \leq n \leq 8$ , con  $\tau_n = e^{\mathbf{i}\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\mathbf{i})$  y con  $\tau_n = -\mathbf{i}$  (es decir, el valor óptimo para  $\tau_n \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$ ). En las Tablas 4.1-4.3 se muestran los errores relativos en la aproximación: Error  $i = |J_n(f_i) - J_\mu(f_i)| / |J_\mu(f_i)|$ ,  $i = 1, 2$ . Estas tablas nos muestran claramente que la aproximación es exacta cuando el integrando  $f_i$  esta en el dominio de validez.



$n$	Error 1	Error 2	$n$	Error 1	Error 2
2	$4,079E - 01$	$4,079E - 01$	2	$2,500E - 01$	$2,500E - 01$
3	$5,736E - 02$	$5,736E - 02$	3	$7,393E - 02$	$7,393E - 02$
4	$0,000E + 00$	$0,000E + 00$	4	$1,000E - 29$	$0,000E + 00$
5	$0,000E + 00$	$0,000E + 00$	5	$0,000E + 00$	$0,000E + 00$

Tabla 4.1: Errores relativos en las fórmulas de cuadratura Gaussiana racional con  $n$  nodos (izquierda) y Gauss-Lobatto racional con  $(n+1)$  nodos (derecha) para la estimación de  $J_\mu(f_i)$  donde  $f_i$  viene dada por (4.28) para  $i = 1, 2$ .

$n$	Error 1	Error 2	$n$	Error 1	Error 2
2	$9,011E - 01$	$6,511E - 01$	2	$8,145E - 01$	$5,645E - 01$
3	$6,846E - 02$	$1,310E - 01$	3	$1,401E - 01$	$2,026E - 01$
4	$1,000E - 29$	$3,125E - 02$	4	$1,000E - 29$	$3,125E - 02$
5	$0,000E + 00$	$0,000E + 00$	5	$4,000E - 30$	$0,000E + 00$

Tabla 4.2: Errores relativos en la fórmula de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos, prefijando  $x = -1$  (izquierda) o  $x = 1$  (derecha), para la estimación de  $J_\mu(f_i)$  donde  $f_i$  viene dada por (4.28) para  $i = 1, 2$ .

$n$	Error 1	Error 2	$n$	Error 1	Error 2
4	$1,502E - 01$	$1,502E - 01$	4	$6,286E - 02$	$6,286E - 02$
5	$2,544E - 02$	$5,669E - 02$	5	$3,482E - 02$	$3,482E - 02$
6	$2,716E - 02$	$2,716E - 02$	6	$8,039E - 03$	$8,039E - 03$
7	$1,000E - 29$	$1,563E - 02$	7	$6,000E - 30$	$1,000E - 30$
8	$0,000E + 00$	$1,000E - 29$	8	$2,000E - 30$	$0,000E + 00$

Tabla 4.3: Errores relativos en la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio racional con  $n$  nodos, con  $\tau_n = e^{i\frac{4\pi}{3}}$  (izquierda) y  $\tau_n = -i$  (derecha), para la estimación de  $J_\mu(f_i)$  donde  $f_i$  viene dada por (4.28) para  $i = 1, 2$ .

**Ejemplo 4.2.12** Finalmente, consideremos la función

$$f_3(x) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{1}{x^2 - \omega^2}\right), \quad \omega \in \mathbb{R}_I, \quad (4.29)$$

tomada de [121, Ejemplo 5.7]. Esta función posee una singularidad esencial en  $x = \omega$  y  $x = -\omega$ . Para  $\omega > 1$  pero cercana a 1, esta función es extremadamente oscilatoria cerca de dichas singularidades. Como una singularidad esencial puede verse como un polo de multiplicidad infinita, esto nos sugiere tomar

$$\alpha_k = (-1)^k \omega, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.30)$$

Para  $\omega = 25/24$  obtenemos que  $J_\mu(f_3) \approx -0,458645566330016385598360747362$  con la ayuda de MAPLE<sup>®</sup> 9.5. Primeramente, aproximaremos  $J_\mu(f_3)$  por medio de la fórmula de cuadratura Gaussiana con  $n$  nodos (respectivamente Gauss-Radau racional con  $n$  nodos y

## 4.2. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio racionales positivas

Gauss-Lobatto racional con  $n + 1$  nodos), basadas en la sucesión de polos (4.30), para  $n = 3, \dots, 15$ . La Figura 4.1 muestra los errores relativos  $|J_n(f_3) - J_\mu(f_3)| / |J_\mu(f_3)|$  como función del número de nodos en la cuadratura (nodos prefijados incluidos). Para el caso de las Gauss-Radau racionales, solo mostramos el caso en el que el nodo prefijado sea  $x = 1$  (el resultado para el nodo prefijado en  $x = -1$  es prácticamente el mismo). Seguidamente, aproximaremos  $J_\mu(f_3)$  por medio de una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio racional con  $n$  nodos, basada en la misma sucesión de polos, con  $\tau_n = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$  y con  $\tau_n = -i$  (es decir, el valor óptimo para  $\tau_n \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$ ). En la Figura 4.2 se muestra el error relativo en la aproximación, junto al error relativo cuando se usa la clásica fórmula de cuadratura Gaussiana (es decir, todos los polos  $\alpha_k$  situados en el infinito).

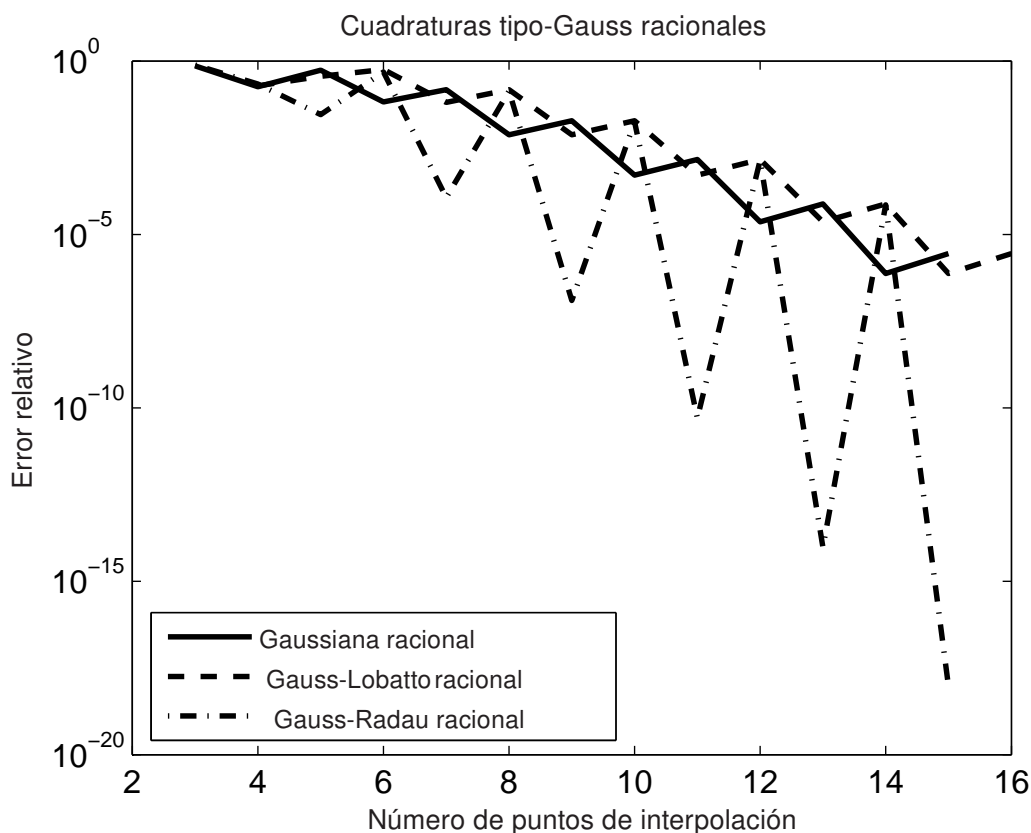


Figura 4.1: Errores relativos en las fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss racionales para la estimación de  $J_\mu(f_3)$ , donde  $f_3$  viene dada por (4.29).

Nótese que obtenemos 18 dígitos correctos con la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional con 15 nodos, mientras que las cuadraturas Gaussianas clásicas apenas alcanzan un dígito correcto para el mismo número de nodos. Para obtener la misma precisión de 18 dígitos correctos esta necesitaría  $n = 112$  nodos.

Finalmente, para  $n = 2m + 1$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , se tiene que las funciones racionales interpoladores tienen polos en ambas singularidades de  $f_3$ , cada una con la misma multiplicidad  $m$ . Esto podría explicar el carácter oscilatorio de los errores relativos como

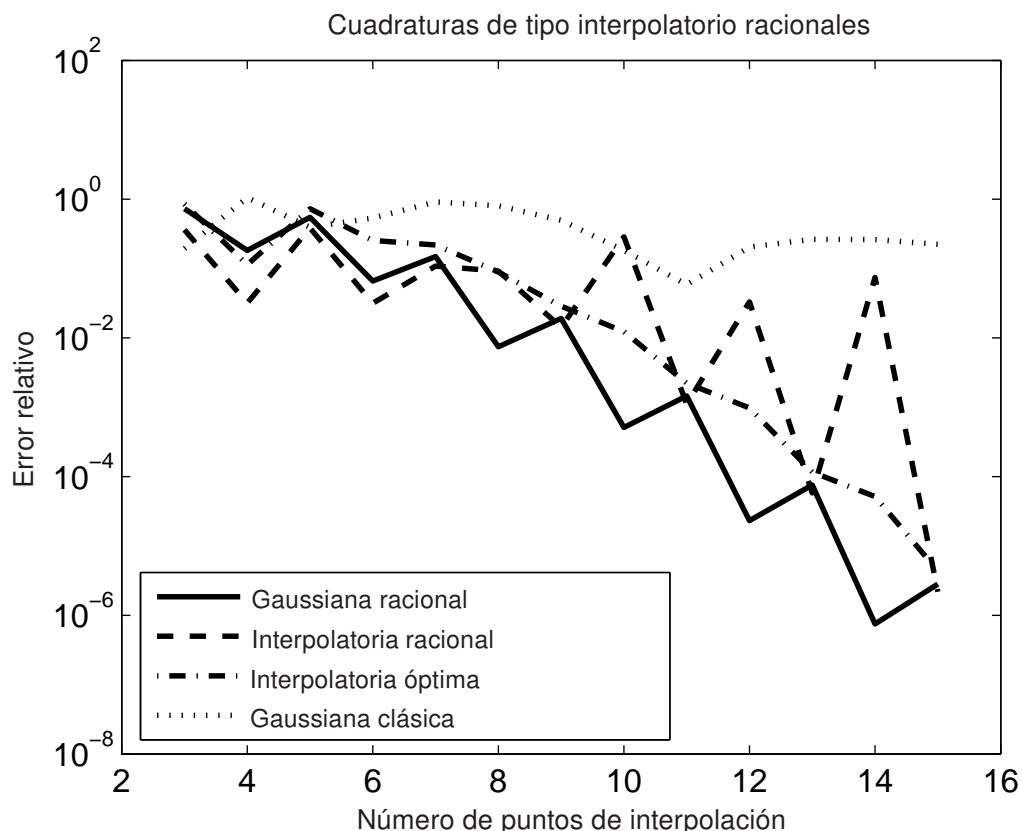


Figura 4.2: Errores relativos en las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio racionales, con  $\tau_n = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$  y  $\tau_n = -i$ , y en el caso racional y clásico de las fórmulas de cuadratura Gaussianas para la estimación de  $J_\mu(f_3)$ , donde  $f_3$  viene dado por (4.29).

función de  $n$ , con mejores resultados donde  $n$  es impar para la mayoría de cuadraturas racionales. Sin embargo, esto no explica el por que lo contrario (es decir, mejores resultados cuando  $n$  es par) ocurre para las cuadraturas Gaussianas racionales. Además, tenemos que las fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales tiene dominio de validez  $\mathbb{R}_{n-1, n-1} = \mathcal{L}\{(-1)^j \omega, j = 1, \dots, 2(n-1)\}$ . Así, ambas singularidades de  $f_3$  tienen la misma multiplicidad  $n-1$  en la sucesión de polos correspondiente al espacio  $\mathbb{R}_{n-1, n-1}$ , lo cual podría explicar los mejores resultados de las Gauss-Radau racionales (comparadas con las Gaussianas racionales) cuando  $n$  es impar.

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

En la sección anterior las fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau con  $n$  nodos y  $x_\alpha \in \{\pm 1\}$  prefijado se relacionaron con las fórmulas de cuadratura de Szegő-Radau con  $(2n-1)$  nodos y  $z_\alpha \in \{\pm 1\}$  prefijado. En esta sección consideraremos fórmulas de cuadratura

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

de Gauss-Radau racionales con  $n$  nodos, y todos los nodos (incluido el nodo prefijado  $x_\alpha$ ) en  $(-1, 1)$ . Nuestra intención es relacionarlas con fórmulas de cuadratura de Szegő-Lobatto racionales con  $2n$  nodos con  $z_\alpha = \bar{z}_\beta = J^{inv}(x_\alpha) \in \mathbb{T}$  prefijados, y encontrar una relación entre el parámetro  $\tau_n$  en la qORF  $Q_{n,\tau_n}$  y el parámetro  $\tilde{\delta}_{2n-1}$  en la pORF  $\tilde{Q}_{2n,\tilde{\tau}_n} \in \hat{\mathcal{L}}_{2n}$ . Nótese que  $\tilde{\rho}_{2n} \in \{\pm 1\}$  y  $\tilde{\delta}_{2n} \in (-1, 1)$  debido a que  $\tilde{\phi}_k^c(z) \equiv \tilde{\phi}_k(z)$  para  $k \in \{2n-1, 2n\}$ , mientras se sigue inmediatamente del Lema 4.2.1 que  $\tilde{\tau}_n$  debe ser igual a uno, así que  $\tilde{\xi}_{2n}$ , definida por (4.11), debe ser también igual a uno. Tenemos ahora, lo siguiente

**Teorema 4.3.1** *Sea  $\mu$  una medida sobre  $I$  y  $\dot{\mu}$  la correspondiente medida en  $\mathbb{T}$ , dada por (1.52). Consideremos la sucesión de ORFs  $\{\tilde{\phi}_k\}_{k=0}^{2n}$ , basada en la sucesión de números  $\hat{B}_{2n}$ , que esta generada por medio de la relación de recurrencia (4.8) con la sucesión de parámetros  $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-2}, \tilde{\delta}_{n-1}, \tilde{\delta}_n\} \subset \mathbb{D}$ , y sea  $\hat{I}_{2n}(\dot{f}) = \lambda_\alpha \dot{f}(z_\alpha) + \lambda_\beta \dot{f}(\bar{z}_\alpha) + \sum_{k=1}^{2n-2} \lambda_k \dot{f}(z_k)$  una fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional con  $2n$  nodos con  $\{z_\alpha, \bar{z}_\alpha\} \subset \mathbb{T} \setminus \{-1, 1\}$  prefijados, para  $\dot{\mu}$ , cuyos nodos son los ceros  $z_k$  de la pORF  $\tilde{Q}_{2n,1}(z) = \tilde{\phi}_{2n}(z) + \tilde{\phi}_{2n}^*(z)$ . Además, supongamos que los ceros están ordenados de manera que  $z_{n-1+k} = \bar{z}_k$  para  $k = 1, \dots, n-1$ , con  $z_k \neq \bar{z}_j$  para todo  $1 \leq k < j \leq n-1$ . Entonces, cuando tomamos  $x_\alpha = J(z_\alpha)$ ,  $\lambda_\alpha = \dot{\lambda}_\alpha$ , y  $x_k = J(z_k)$  y  $\lambda_k = \dot{\lambda}_k$  para  $k = 1, \dots, n-1$ , la fórmula  $J_n(f) = \lambda_\alpha f(x_\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k)$  coincide con la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos y  $x_\alpha \in (-1, 1)$  prefijado para  $\mu$ , basada en los ceros de la qORF  $Q_{n,\tau_n} \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$ , dada por*

$$Q_{n,\tau_n}(x) = \tilde{K}_n B_{n*}(z) \tilde{Q}_{2n,1}(z), \quad \tilde{K}_n \in \mathbb{C}_0, \quad \text{con} \quad \tau_n = -\frac{Z_{n-1}^c(x_\alpha) \varphi_n(x_\alpha)}{Z_n(x_\alpha) \varphi_{n-1}(x_\alpha)}.$$

**Demostración.**- (La demostración es similar a la del Teorema 4.2.2) Por la primera y segunda parte del Lema 4.2.1 se tiene que  $\tilde{Q}_{2n,1}(z)$  tiene  $2n$  ceros, todos diferentes de  $1$  y  $-1$ , apareciendo en pares complejos conjugados. Seguidamente, de la tercera parte del Lema 4.2.1 se sigue que  $\dot{\lambda}_\alpha = \dot{\lambda}_\beta$  y que  $\dot{\lambda}_{n-1+k} = \dot{\lambda}_k$  para  $k = 1, \dots, n-1$ . Consideremos ahora una función arbitraria  $f \in \mathbb{R}_{n-1,n-1} = \mathcal{L}_{n-1} \cdot \mathcal{L}_{n-1}^c$ . Claramente, la correspondiente función  $\dot{f}(z) = (f \circ J)(z)$  esta en  $(\mathcal{L}_{n-1} \cdot \mathcal{L}_{n-1}^c)^c \cdot (\mathcal{L}_{n-1} \cdot \mathcal{L}_{n-1}^c)_* = \hat{\mathcal{R}}_{2n-2}$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} J_n(f) &= \lambda_\alpha f(x_\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k) = \dot{\lambda}_\alpha \dot{f}(z_\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \dot{\lambda}_k \dot{f}(z_k) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\lambda}_\alpha (z_\alpha) + \dot{\lambda}_\beta \dot{f}(\bar{z}_\alpha) + \sum_{k=1}^{2n-2} \dot{\lambda}_k \dot{f}(z_k) \right\} = \frac{1}{2} \hat{I}_{2n}(\dot{f}) = \frac{1}{2} I_{\dot{\mu}}(\dot{f}) = J_\mu(f). \end{aligned}$$

Finalmente, puesto que la igualdad se tiene para todo  $f \in \mathbb{R}_{n-1,n-1}$ , la fórmula de  $n$  nodos es la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos y  $x_\alpha \in (-1, 1)$  prefijado. Esto concluye la demostración. ■

Recordar que la qORF  $Q_{n,\tau_n}$ , dada por (4.3), es ortogonal con respecto a medidas  $\tilde{\mu}$  soportadas en un conjunto  $S \subsetneq \mathbb{R}$ . Sin embargo, no hemos probado por el momento que alguna de las medidas  $\tilde{\mu}$  esta soportada en  $I$  cuando los ceros de  $Q_{n,\tau_n}$  están todos en  $(-1, 1)$ . Así, suponiendo que la qORF  $Q_{n,\tau_n}$  tiene un cero prefijado en  $x_\alpha \in (-1, 1)$ , primero necesitaremos comprobar si es posible construir una pORF  $\tilde{Q}_{2n,1}$  con ceros prefijados en  $z_\alpha = \bar{z}_\beta = J^{inv}(x_\alpha)$  antes de poder hacer cualquier afirmación en la dirección opuesta

al Teorema 4.3.1. En otras palabras, estamos interesados ahora en la relación entre los parámetros  $\tau_n$  en la qORF y  $\tilde{\delta}_{2n-1}$  en la pORF, para averiguar si  $\tilde{\delta}_{2n-1} \in \mathbb{D}$  para un  $\tau_n$  dado. Para ello, asumiremos que la qORF  $Q_{n,\tau_n}$  es ortogonal con respecto a medidas modificadas  $\tilde{\mu}$  soportadas en  $I$ , por ejemplo, con respecto a

$$d\tilde{\mu}(x) = \{1 + c_\alpha \varphi_{2n-1}(x)\} d\mu(x), \quad (4.31)$$

donde  $\varphi_{2n-1} \in \mathbb{R}_{n,n-1}$  es ortonormal en  $\mathbb{R}_{n-1,n-1}$  con respecto a la medida  $\mu$ , y  $c_\alpha$  es una constante dependiente de  $x_\alpha$  de forma que  $c_\alpha \varphi_{2n-1}(x) \geq -1$  este en  $I$ . Además, sea  $\tilde{\mu}$  la correspondiente medida en  $\mathbb{T}$  para  $\tilde{\mu}$ , dada por (1.52), y  $\tilde{\phi}_{2n} \in \tilde{\mathcal{L}}_n \cdot \tilde{\mathcal{L}}_{n*}$  la ORF con respecto a  $\tilde{\mu}$  con  $\tilde{\kappa}_{2n} \in \mathbb{R}_0^+$ . Entonces se sigue del Teorema 4.1.1 que existen constantes  $k_n \in \mathbb{C}_0$  y  $\tilde{c}_n = \tilde{\rho}_n \left\{1 + \frac{\tilde{\phi}_{2n}(\beta_n)}{\tilde{\kappa}_{2n}}\right\}^{-1/2} \in \mathbb{C}_0$  de manera que

$$k_n Q_{n,\tau_n}(x) = \tilde{c}_n B_{n*}(z) \tilde{Q}_{2n,1}(z) = \tilde{d}_n B_{n*}(z) \{\zeta_n(z) \tilde{\phi}_{2n-1}(z) + \tilde{\phi}_{2n-1}^*(z)\}. \quad (4.32)$$

En [17] se prueba que las fórmulas de cuadratura de Szegő-Lobatto racionales con nodos prefijados en  $z_\alpha$  y  $z_\beta$  sobre  $\mathbb{T}$  puede existir solamente si  $\tilde{\delta}_{n-1}$  se encuentra en un segmento circular en  $\mathbb{D}$  con un cierto centro y radio. En el Lema 4.3.3 veremos expresiones simples para este centro y radio en el caso especial en el que la medida sea simétrica y la sucesión de números complejos  $\{\beta_j\}_{j=1}^n$  son reales o parecen en pares complejos conjugados, con  $\beta_n \in (-1, 1)$ . Pero primero, necesitaremos el siguiente Lema.

**Lema 4.3.2** *Sea  $\hat{\mu}$  una medida simétrica sobre  $\mathbb{T}$ , y sea  $\phi_j$  la  $j$ -ésima ORF con respecto a  $\hat{\mu}$  y con coeficiente director  $\hat{\kappa}_j \in \mathbb{R}_0^+$ . Asumamos que los números  $\{\beta_j\}_{j=1}^{k-1}$  son reales o aparecen en pares complejos conjugados, y que  $\beta_k \in (-1, 1)$ . Entonces, existen constantes  $b_k \in \mathbb{C}_0$  y  $a_k$ , con  $\Re\{a_k\} = 0$ , de manera que*

$$\phi_{k-1}^c(z) = \left( \frac{1 - \bar{\beta}_{k-1}z}{z - \beta_{k-1}} \right) \{b_k \zeta_{k-1}(z) \phi_{k-1}(z) + a_k \phi_{k-1}^*(z)\}. \quad (4.33)$$

Las constantes satisfacen las siguientes igualdades:

$$a_k = \left( \frac{\hat{\rho}_k^2 \delta_k - \bar{\hat{\rho}}_k^2 \bar{\delta}_k}{1 - |\delta_k|^2} \right) \quad y \quad b_k = \hat{\rho}_k^2 + \bar{\delta}_k a_k.$$

**Demostración.**- Nótese que bajo las condiciones dadas sobre la medida  $\hat{\mu}$  y los números  $\{\beta_j\}_{j=1}^k$ , se tiene que  $\phi_k^c(z) \equiv \phi_k(z)$ . Así, se sigue de la relación de recurrencia (4.8) que

$$\begin{aligned} \phi_k(z) &= \hat{\rho}_k e_k \frac{1 - \bar{\beta}_{k-1}z}{1 - \beta_k z} [\zeta_{k-1}(z) \phi_{k-1}(z) + \delta_k \phi_{k-1}^*(z)] \\ &= \bar{\hat{\rho}}_k e_k \frac{1 - \beta_{k-1}z}{1 - \beta_k z} [\zeta_{k-1}^c(z) \phi_{k-1}^c(z) + \bar{\delta}_k \phi_{k-1}^{c*}(z)] = \phi_k^c(z) \\ \phi_k^*(z) &= \bar{\hat{\rho}}_k e_k \frac{1 - \bar{\beta}_{k-1}z}{1 - \beta_k z} [\bar{\delta}_k \zeta_{k-1}(z) \phi_{k-1}(z) + \phi_{k-1}^*(z)] \\ &= \hat{\rho}_k e_k \frac{1 - \beta_{k-1}z}{1 - \beta_k z} [\delta_k \zeta_{k-1}^c(z) \phi_{k-1}^c(z) + \phi_{k-1}^{c*}(z)] = \phi_k^{c*}(z), \end{aligned}$$

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

y por lo tanto que

$$e_k \frac{1 - \beta_{k-1}z}{1 - \beta_k z} (1 - |\delta_k|^2) \zeta_{k-1}^c(z) \phi_{k-1}^c(z) = \hat{\rho}_k \phi_k(z) - \bar{\rho}_k \bar{\delta}_k \phi_k^*(z) =$$

$$e_k \frac{1 - \bar{\beta}_{k-1}z}{1 - \beta_k z} \left[ (\hat{\rho}_k^2 - \bar{\rho}_k^2 \bar{\delta}_k^2) \zeta_{k-1}^c(z) \phi_{k-1}^c(z) + (\hat{\rho}_k^2 \delta_k - \bar{\rho}_k^2 \bar{\delta}_k) \phi_{k-1}^*(z) \right].$$

La igualdad en (4.33) se sigue ahora fácilmente. ■

Claramente,  $\phi_{k-1}^c(z)$  en (4.33) no depende del parámetro  $\delta_k$ . Por tanto, también las constantes  $a_k$  y  $b_k$  en Lema 4.3.2 han de ser independientes de  $\delta_k$ ; es decir, para todo parámetro  $\tilde{\delta}_k \in \mathbb{D}$  que corresponda con una medida simétrica modificada  $\tilde{\mu}$  sobre  $\mathbb{T}$ , se debe verificar que

$$a_k = \left( \frac{\tilde{\rho}_k^2 \tilde{\delta}_k - \bar{\rho}_k^2 \bar{\tilde{\delta}}_k}{1 - |\tilde{\delta}_k|^2} \right) \quad \text{y} \quad b_k = \tilde{\rho}_k^2 + \bar{\tilde{\delta}}_k a_k;$$

o, equivalentemente,

$$a_k = \frac{b_k \tilde{\delta}_k - \bar{b}_k \bar{\tilde{\delta}}_k}{1 + |\tilde{\delta}_k|^2} \quad \text{y} \quad \tilde{\rho}_k^2 = b_k - \bar{\tilde{\delta}}_k a_k. \quad (4.34)$$

Por otro lado, de la relación de recurrencia (4.8) se sigue

$$\tilde{\rho}_k = \frac{\bar{\tilde{\delta}}_k (\beta_k - \beta_{k-1}) \phi_{k-1}(\beta_k) + (1 - \bar{\beta}_{k-1} \beta_k) \phi_{k-1}^*(\beta_k)}{\left| \bar{\tilde{\delta}}_k (\beta_k - \beta_{k-1}) \phi_{k-1}(\beta_k) + (1 - \bar{\beta}_{k-1} \beta_k) \phi_{k-1}^*(\beta_k) \right|}, \quad (4.35)$$

lo que nos deja con tres condiciones para solo 2 parámetros  $\tilde{\delta}_k$  y  $\tilde{\rho}_k$ . Sin embargo, el siguiente Lema muestra que estas 3 condiciones no son linealmente independientes.

**Lema 4.3.3** *Las constantes  $a_k$  y  $b_k$ , definidas como en el Lema 4.3.2, satisfacen la siguiente igualdad:  $|b_k|^2 = 1 + |a_k|^2$ . Además, cuando  $a_k = 0$ , las igualdades en (4.34)–(4.35) se satisfacen con  $\tilde{\delta}_k = \tilde{\delta}_k^a \bar{b}_k$ , para toda  $\tilde{\delta}_k^a \in (-1, 1)$ . Se tiene entonces que  $\tilde{\rho}_k^2 = \hat{\rho}_k^2$ . Si, por otro lado,  $a_k \neq 0$ , entonces las igualdades en (4.34)–(4.35) son satisfechas para todo  $\tilde{\delta}_k \in C \cap \mathbb{D}$ , donde  $C$  representa el círculo con centro  $\left( \frac{\Im\{b_k\}}{\Im\{a_k\}}, \frac{\Re\{b_k\}}{\Re\{a_k\}} \right)$  y radio  $|a_k|^{-1}$ .*

**Demostración.**– Sea  $\tilde{\delta}_k \in \mathbb{D}$  satisfaciendo la primera igualdad en (4.34). Primero, probemos que si  $\tilde{\rho}_k \in \mathbb{T}$  viene dado por (4.35), entonces  $\tilde{\delta}_k$  y  $\tilde{\rho}_k$  satisface la segunda ecuación en (4.34) también. Para ello, asumamos que  $\sigma_k^2 = b_k - \bar{\tilde{\delta}}_k a_k$ , y definamos

$$\tilde{\phi}_k(z) = \sigma_k \tilde{e}_k \frac{1 - \bar{\beta}_{k-1}z}{1 - \beta_k z} \left[ \zeta_{k-1}(z) \phi_{k-1}(z) + \tilde{\delta}_k \phi_{k-1}^*(z) \right], \quad \beta_k \in (-1, 1), \quad \tilde{e}_k \in \mathbb{R}_0^+.$$

Entonces se sigue del Lema 4.3.2 que

$$\begin{aligned} \sigma_k \tilde{\phi}_k^c(z) - \bar{\sigma}_k \bar{\tilde{\delta}}_k \tilde{\phi}_k^{c*}(z) &= \tilde{e}_k \frac{1 - \beta_{k-1}z}{1 - \beta_k z} (1 - |\tilde{\delta}_k|^2) \zeta_{k-1}^c(z) \phi_{k-1}^c(z) \\ &= \tilde{e}_k \frac{1 - \bar{\beta}_{k-1}z}{1 - \beta_k z} \left[ (\sigma_k^2 - \bar{\sigma}_k^2 \bar{\tilde{\delta}}_k^2) \zeta_{k-1}^c(z) \phi_{k-1}^c(z) + (\sigma_k^2 \tilde{\delta}_k - \bar{\sigma}_k^2 \bar{\tilde{\delta}}_k) \phi_{k-1}^*(z) \right] \\ &= \sigma_k \tilde{\phi}_k(z) - \bar{\sigma}_k \bar{\tilde{\delta}}_k \tilde{\phi}_k^*(z). \end{aligned}$$

Así, tomando  $f_k(z) = \tilde{\phi}_k(z) - \tilde{\phi}_k^c(z)$  y  $C_k = \frac{\bar{a}_k}{\sigma_k} \bar{\delta}_k \in \mathbb{D}$ , obtenemos que

$$f_k(z) = C_k f_k^*(z) \Leftrightarrow f_k^*(z) = \overline{C_k} [f_k^*(z)]^* = \overline{C_k} f_k(z),$$

y por tanto,

$$f_k(z) = |C_k|^2 f_k(z).$$

Como  $C_k \in \mathbb{D}$ , se sigue que  $f_k(z) \equiv 0$ . En consecuencia,  $\tilde{\phi}_k(z) \equiv \tilde{\phi}_k^c(z)$  y  $\tilde{\phi}_k^*(\beta_k) \in \mathbb{R}$ , lo que significa que  $\sigma_k = \tilde{\rho}_k$  o  $\sigma_k = -\tilde{\rho}_k$ , donde  $\tilde{\rho}_k$  es dado por (4.35).

Seguidamente, asumamos que  $a_k = 0$ , se sigue que  $\Im\{b_k \delta_k\} = 0$  que es valido para todo  $\tilde{\delta}_k = \tilde{\delta}_k^a \bar{b}_k$  con  $\tilde{\delta}_k^a \in \mathbb{R}$ . Como  $\tilde{\delta}_k \in \mathbb{D}$ , encontramos que  $\tilde{\delta}_k^a \in (-|b_k|^{-1}, |b_k|^{-1})$ , donde  $\tilde{\rho}_k^2 = b_k = \tilde{\rho}_k^2 \in \mathbb{T}$ .

Finalmente, para  $a_k \neq 0$  tenemos que

$$a_k = \frac{b_k \tilde{\delta}_k - \bar{b}_k \bar{\delta}_k}{1 + |\tilde{\delta}_k|^2} \Leftrightarrow \left| \tilde{\delta}_k + \frac{\bar{b}_k}{a_k} \right|^2 = \frac{|b_k|^2 - |a_k|^2}{|a_k|^2},$$

donde usamos el hecho de que  $\bar{a}_k = -a_k$ . Por otro lado tenemos que

$$\tilde{\rho}_k^2 = b_k - \bar{\delta}_k a_k \Rightarrow \left| \tilde{\delta}_k + \frac{\bar{b}_k}{a_k} \right|^2 = \frac{1}{|a_k|^2}.$$

Así, obtenemos dos circunferencias con el mismo centro  $\left( \frac{\Im\{b_k\}}{\Im\{a_k\}}, \frac{\Re\{b_k\}}{\Im\{a_k\}} \right)$  y al menos un punto  $\delta_k$  en común. Por esta razón, sus radios han de ser los mismos, lo que concluye la prueba. ■

**Lema 4.3.4** Cuando  $\beta_k \in (-1, 1)$ , las constantes  $c_k$  y  $d_k$  en el Teorema 4.1.1 viene dadas por

$$c_k = \rho_k \left\{ 1 + \hat{\delta}_{2k} \right\}^{-1/2} \quad y \quad d_k = \rho_k \hat{\rho}_{2k} \left\{ 1 - \hat{\delta}_{2k} \right\}^{-1/2}, \quad \hat{\rho}_{2k} \in \{\pm 1\}.$$

**Demostración.**- Como la medida  $\hat{\mu}$  en el Teorema 4.1.1 es simétrica, y  $\hat{\beta}_{2k} = \beta_k = \hat{\beta}_{2k-1} \in (-1, 1)$ , se sigue de (4.9) que  $\hat{\delta}_{2k} = \hat{\rho}_{2k}^2 \hat{\delta}_{2k} = \frac{\hat{\phi}_{2k}(\beta_k)}{\hat{\kappa}_{2k}} = \frac{\hat{\phi}_{2k}^c(\beta_k)}{\hat{\kappa}_{2k}} \in (-1, 1)$ . Por tanto

$$c_k = \rho_k \left\{ 1 + \hat{\delta}_{2k} \right\}^{-1/2}.$$

Seguidamente, por medio de la relación de recurrencia (4.8) obtenemos, con  $\hat{\phi}_{2k}^c(z) \equiv \hat{\phi}_{2k}(z)$  que

$$c_k B_{k^*}(z) \{ \hat{\phi}_{2k}(z) + \hat{\phi}_{2k}^*(z) \} = c_k \hat{e}_{2k} \hat{\rho}_{2k} (1 + \hat{\delta}_{2k}) B_{k^*}(z) \{ \zeta_k(z) \hat{\phi}_{2k-1}(z) + \hat{\phi}_{2k-1}^{c^*}(z) \},$$

y por tanto, que

$$d_k = c_k \hat{e}_{2k} \hat{\rho}_{2k} (1 + \hat{\delta}_{2k}) = \rho_k \hat{\rho}_{2k} \sqrt{\frac{1 + \hat{\delta}_{2k}}{1 - |\hat{\delta}_{2k}|^2}} = \rho_k \hat{\rho}_{2k} \left\{ 1 - \hat{\delta}_{2k} \right\}^{-1/2}.$$

El siguiente Lema nos proporciona ahora una expresión de  $Q_{n, \tau_n}$  en términos de  $\hat{\phi}_{2n-2}$  y  $\hat{\phi}_{2n-2}^*$ .

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

**Lema 4.3.5** Sea  $\mu$  una medida sobre  $I$  y sea  $\hat{\mu}$  la correspondiente medida sobre  $\mathbb{T}$ , dada por (1.52). Sea  $Q_{n,\tau_n}$  la qORF con respecto a  $\mu$ , y  $\hat{\phi}_k$  la ORF con respecto a  $\hat{\mu}$  con  $\hat{\kappa}_k \in \mathbb{R}_0^+$ . Además, asumamos que  $Q_{n,\tau_n}$  es ortogonal con respecto a medidas modificadas  $\tilde{\mu}$  soportadas en  $I$ , sean  $\tilde{C}_n \in \mathbb{C}_0$  y  $\tilde{w}_n(z)$  definidas por

$$\begin{aligned}\tilde{C}_n &= \tilde{\rho}_n \tilde{\rho}_{2n} \sqrt{\left(\frac{1 - \beta_n^2}{1 - |\beta_{n-1}|^2}\right) \frac{1}{(1 - |\tilde{\delta}_{2n-1}|^2)(1 - \tilde{\delta}_{2n})}} \quad y \\ \tilde{w}_n(z) &= \tilde{\rho}_{2n-1}(z - \beta_n) + \overline{\tilde{\rho}_{2n-1}} \tilde{\delta}_{2n-1}(1 - \beta_n z),\end{aligned}$$

con  $\tilde{\rho}_n \in \mathbb{T}$ ,  $\tilde{\rho}_{2n} \in \{\pm 1\}$ ,  $\tilde{\delta}_{2n} \in (-1, 1)$ , y los parámetros  $\tilde{\delta}_{2n-1}$  y  $\tilde{\rho}_{2n-1}$  satisfaciendo

$$\hat{a}_{2n-1} = \frac{\hat{b}_{2n-1} \tilde{\delta}_{2n-1} - \overline{\hat{b}_{2n-1}} \overline{\tilde{\delta}_{2n-1}}}{1 + |\tilde{\delta}_{2n-1}|^2} \quad y \quad \tilde{\rho}_{2n-1}^2 = \hat{b}_{2n-1} - \overline{\tilde{\delta}_{2n-1}} \hat{a}_{2n-1},$$

donde  $\hat{a}_{2n-1}$  y  $\hat{b}_{2n-1}$  están definidas como en el Lema 4.3.2. Entonces, existe una constante no nula  $k_n$  de forma que

$$k_n Q_{n,\tau_n}(x) = \tilde{C}_n B_{n*}(z) \frac{1 - \overline{\beta_{n-1}} z}{(1 - \beta_n z)^2} \left\{ \tilde{w}_n(z) \zeta_{n-1}(z) \hat{\phi}_{2n-2}(z) + \tilde{w}_n^*(z) \hat{\phi}_{2n-2}^*(z) \right\}. \quad (4.36)$$

**Demostración.** - De (4.32) y el Lema 4.3.4 se sigue que

$$k_n Q_{n,\tau_n}(x) = \tilde{\rho}_n \tilde{\rho}_{2n} \left\{ 1 - \tilde{\delta}_{2n} \right\}^{-1/2} B_{n*}(z) \left\{ \zeta_n(z) \tilde{\phi}_{2n-1}(z) + \tilde{\phi}_{2n-1}^*(z) \right\},$$

con  $\tilde{\rho}_{2n} \in \{\pm 1\}$ ,  $\tilde{\delta}_{2n} \in (-1, 1)$ . A continuación, aplicando la relación de recurrencia (4.8) sobre  $\tilde{\phi}_{2n-1}$  y  $\tilde{\phi}_{2n-1}^*$  obtenemos que

$$\begin{aligned}k_n Q_{n,\tau_n}(x) &= \tilde{\rho}_n \tilde{\rho}_{2n} \left\{ 1 - \tilde{\delta}_{2n} \right\}^{-1/2} \tilde{e}_{2n-1} B_{n*}(z) \frac{(1 - \overline{\beta_{n-1}} z)}{(1 - \beta_n z)^2} \times \\ &\quad \left\{ \left[ \tilde{\rho}_{2n-1}(z - \beta_n) + \overline{\tilde{\rho}_{2n-1}} \tilde{\delta}_{2n-1}(1 - \beta_n z) \right] \zeta_{n-1}(z) \hat{\phi}_{2n-2}(z) + \right. \\ &\quad \left. \left[ \overline{\tilde{\rho}_{2n-1}} \tilde{\delta}_{2n-1}(z - \beta_n) + \tilde{\rho}_{2n-1}(1 - \beta_n z) \right] \hat{\phi}_{2n-2}^*(z) \right\},\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{\rho}_n \tilde{\rho}_{2n} \left\{ 1 - \tilde{\delta}_{2n} \right\}^{-1/2} \tilde{e}_{2n-1} = \tilde{C}_n.$$

Finalmente, tenemos que

$$\tilde{w}_n^*(z) = \overline{\tilde{\rho}_{2n-1}}(1 - \beta_n z) + \tilde{\rho}_{2n-1} \tilde{\delta}_{2n-1}(z - \beta_n),$$

lo que concluye la prueba. ■

Por otro lado, en base a (4.3) podemos probar también la siguiente expresión de  $Q_{n,\tau_n}$  en términos de  $\hat{\phi}_{2n-2}$  y  $\hat{\phi}_{2n-2}^*$ .



**Lema 4.3.6** Sea  $\mu$  una medida sobre  $I$  y sea  $\hat{\mu}$  la correspondiente medida sobre  $\mathbb{T}$ , dada por (1.52). Sea  $Q_{n,\tau_n}$  la qORF con respecto a  $\mu$ , y  $\hat{\phi}_k$  la ORF con respecto a  $\hat{\mu}$  con  $\hat{\kappa}_k \in \mathbb{R}_0^+$ . Además, sean  $\hat{C}_n \in \mathbb{C}_0$  y  $\hat{w}_n(z)$  definidas por

$$\begin{aligned}\hat{C}_n &= \rho_n \hat{\rho}_{2n} \sqrt{\left(\frac{1 - \beta_n^2}{1 - |\beta_{n-1}|^2}\right) \frac{1}{(1 - |\hat{\delta}_{2n-1}|^2)(1 - \hat{\delta}_{2n})}} \quad \text{y} \\ \hat{w}_n(z) &= \hat{\rho}_{2n-1}(z - \beta_n) + \bar{\hat{\rho}}_{2n-1} \bar{\hat{\delta}}_{2n-1}(1 - \beta_n z),\end{aligned}$$

con  $\rho_n \in \mathbb{T}$ ,  $\hat{\rho}_{2n} \in \{\pm 1\}$ ,  $\hat{\delta}_{2n} \in (-1, 1)$ , y  $\hat{\delta}_{2n-1}$  y  $\hat{\rho}_{2n-1}$  los coeficientes en la relación de recurrencia (4.8). Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}Q_{n,\tau_n}(x) &= \hat{C}_n B_{n^*}(z) \frac{1 - \bar{\beta}_{n-1}z}{(1 - \beta_n z)^2} \left\{ \left[ \hat{w}_n(z) + \check{\tau}_n \hat{b}_{2n-1}(1 - \bar{\beta}_{n-1}z) \right] \zeta_{n-1}(z) \hat{\phi}_{2n-2}(z) + \right. \\ &\quad \left. \left[ \hat{w}_n^*(z) + \check{\tau}_n(1 - \bar{\beta}_{n-1} \hat{a}_{2n-1}) \left( z - \frac{\bar{\beta}_{n-1} - \hat{a}_{2n-1}}{1 - \bar{\beta}_{n-1} \hat{a}_{2n-1}} \right) \right] \hat{\phi}_{2n-2}^*(z) \right\}. \quad (4.37)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\check{\tau}_n &= \tau_n \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n \hat{\rho}_{2n}} \left( \frac{1 + \beta_n^2}{1 + \bar{\beta}_{n-1}^2} \right) \sqrt{\left(\frac{1 - |\beta_{n-1}|^2}{1 - \beta_n^2}\right) \frac{(1 - |\hat{\delta}_{2n-1}|^2)(1 - \hat{\delta}_{2n}^2)}{(1 + \hat{\gamma}_{2n-2})}}, \\ \rho_{n-1} \in \mathbb{T}, \quad \hat{\gamma}_{2n-2} &= \begin{cases} \hat{\delta}_{2n-2}, & \beta_{n-1} \in (-1, 1) \\ \frac{\Im\{\hat{\rho}_{2n-1} \hat{\delta}_{2n-1}\}}{\Im\{\beta_{n-1}\}} \left( \frac{1 - |\beta_{n-1}|^2}{1 - |\hat{\delta}_{2n-1}|^2} \right), & \beta_{n-1} \notin (-1, 1) \end{cases}, \quad (4.38)\end{aligned}$$

con  $\hat{a}_{2n-1}$  y  $\hat{b}_{2n-1}$  definidas como en Lema 4.3.2.

**Demostración.**- Nótese que con  $x = J(z)$  y  $\alpha_k = J(\beta_k)$  tenemos que

$$\frac{Z_n(x)}{Z_{n-1}^c(x)} = \left( \frac{1 + \beta_n^2}{1 + \bar{\beta}_{n-1}^2} \right) \frac{(1 - \bar{\beta}_{n-1}z)(z - \bar{\beta}_{n-1})}{(1 - \beta_n z)(z - \beta_n)}.$$

Por tanto, de (4.3) y (4.19) se sigue que

$$\begin{aligned}Q_{n,\tau_n}(x) &= d_n B_{n^*}(z) \{ \zeta_n(z) \hat{\phi}_{2n-1}(z) + \hat{\phi}_{2n-1}^*(z) \} + \\ &\quad \tau_n \left( \frac{1 + \beta_n^2}{1 + \bar{\beta}_{n-1}^2} \right) \frac{(1 - \bar{\beta}_{n-1}z)(z - \bar{\beta}_{n-1})}{(1 - \beta_n z)^2} c_{n-1} B_{n^*}(z) \{ \hat{\phi}_{2n-2}^c(z) + \hat{\phi}_{2n-2}^*(z) \}.\end{aligned}$$

Seguidamente, usando la relación de recurrencia (4.8) para  $\hat{\phi}_{2n-1}$  y  $\hat{\phi}_{2n-1}^*$ , junto con el Lema 4.3.2 para  $\hat{\phi}_{2n-2}^c$ , y tomando  $\hat{C}_n = d_n \hat{e}_{2n-1}$  y

$$\check{\tau}_n = \tau_n \left( \frac{1 + \beta_n^2}{1 + \bar{\beta}_{n-1}^2} \right) \frac{c_{n-1}}{\hat{e}_{2n-1} d_n}$$

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

se tiene que

$$Q_{n,\tau_n}(x) = \hat{C}_n B_{n*}(z) \times \left\{ \left[ \left( \frac{1 - \bar{\beta}_{n-1}z}{1 - \beta_n z} \right) (\hat{\rho}_{2n-1} \zeta_n(z) + \bar{\rho}_{2n-1} \bar{\delta}_{2n-1}) + \check{\tau}_n \hat{b}_{2n-1} \left( \frac{1 - \bar{\beta}_{n-1}z}{1 - \beta_n z} \right)^2 \right] \zeta_{n-1}(z) \hat{\phi}_{2n-2}(z) + \left[ \left( \frac{1 - \bar{\beta}_{n-1}z}{1 - \beta_n z} \right) (\hat{\rho}_{2n-1} \hat{\delta}_{2n-1} \zeta_n(z) + \bar{\rho}_{2n-1}) + \check{\tau}_n \frac{1 - \bar{\beta}_{n-1}z}{(1 - \beta_n z)^2} [(1 - \bar{\beta}_{n-1}z) \hat{a}_{2n-1} + (z - \bar{\beta}_{n-1})] \right] \hat{\phi}_{2n-2}^*(z) \right\}.$$

Ahora, la igualdad en (4.37) se sigue fácilmente.

Finalmente, de (4.33) deducimos que

$$\Re\{\hat{\phi}_{2n-2}^c(\beta_{n-1})\} = \begin{cases} \hat{\phi}_{2n-2}(\beta_{n-1}), & \beta_{n-1} \in (-1, 1) \\ \hat{a}_{2n-1} \left( \frac{1 - |\beta_{n-1}|^2}{\beta_{n-1} - \bar{\beta}_{n-1}} \right) \hat{\kappa}_{2n-2}, & \beta_{n-1} \notin (-1, 1). \end{cases}$$

Esto concluye la prueba. ■

En los dos lemas previos hemos obtenido dos expresiones para  $Q_{n,\tau_n}$  en términos de  $\hat{\phi}_{2n-2}$  y  $\hat{\phi}_{2n-2}^*$ . La primera igualdad (4.37) se tiene siempre, mientras que la primera igualdad (4.36) es tan solo cierta bajo la asunción de que  $Q_{n,\tau_n}$  es ortogonal con respecto a medidas modificadas soportadas en  $I$ . Comparando las expresiones para  $Q_{n,\tau_n}$  en (4.36) y (4.37), encontramos que los parámetros  $\tau_n$  y  $\bar{\delta}_{2n-1}$  deben satisfacer las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} K_n \tilde{w}_n(z) - \hat{w}_n(z) &= \check{\tau}_n \hat{b}_{2n-1} (1 - \bar{\beta}_{n-1}z) \\ K_n \tilde{w}_n^*(z) - \hat{w}_n^*(z) &= \check{\tau}_n (1 - \bar{\beta}_{n-1} \hat{a}_{2n-1}) \left( z - \frac{\bar{\beta}_{n-1} - \hat{a}_{2n-1}}{1 - \bar{\beta}_{n-1} \hat{a}_{2n-1}} \right), \end{cases} \quad (4.39)$$

donde  $\tilde{w}_n(z)$ ,  $\hat{w}_n(z)$  y  $\check{\tau}_n$  son definidas como antes, y

$$K_n = \frac{\tilde{C}_n}{k_n \hat{C}_n} = \frac{\tilde{\rho}_n \bar{\rho}_{2n}}{k_n \rho_n \hat{\rho}_{2n}} \sqrt{\frac{(1 - |\hat{\delta}_{2n-1}|^2)(1 - \hat{\delta}_{2n})}{(1 - |\bar{\delta}_{2n-1}|^2)(1 - \bar{\delta}_{2n})}} \in \mathbb{C}_0.$$

Tenemos ahora el siguiente Lema.

**Lema 4.3.7** *Sea  $\mu$  una medida sobre  $I$  y sea  $\hat{\mu}$  la correspondiente medida sobre  $\mathbb{T}$ , dada por (1.52). Sea  $Q_{n,\tau_n}$  una qORF con respecto a  $\mu$  y con un cero prefijado en  $x_\alpha \in (-1, 1)$ , y asumamos que  $Q_{n,\tau_n}$  es ortogonal con respecto a medidas modificadas  $\tilde{\mu}$  soportadas en  $I$ . Además, sea  $\hat{\phi}_k$  la ORF con respecto a  $\hat{\mu}$  con  $\hat{\kappa}_k \in \mathbb{R}_0^+$ , generada por medio de la relación de recurrencia (4.8) con coeficientes  $\hat{\delta}_k \in \mathbb{D}$  y  $\hat{\rho}_k \in \mathbb{T}$ . Supongamos  $\rho_k \in \mathbb{T}$ ,  $\hat{a}_k$  y  $\hat{b}_k$  son definidas como en el Teorema 4.1.1 y el Lema 4.3.2 respectivamente, y sean  $\bar{\delta}_{2n-1} \in \mathbb{D}$  y  $\bar{\rho}_{2n-1} \in \mathbb{T}$  los coeficientes modificados en la construcción de la pORF  $\hat{Q}_{2n,1}$  con ceros prefijados en  $z_\alpha = \bar{z}_\beta = J^{inv}(x_\alpha)$ , satisfaciendo las igualdades en (4.34). Entonces los parámetros  $\tau_n$  en la qORF y  $\bar{\delta}_{2n-1}$  en la pORF están relacionados por*

$$\bar{\delta}_{2n-1} = \frac{\check{\tau}_n \hat{\rho}_{2n-1} \hat{b}_{2n-1} (1 - \bar{\beta}_{n-1} \beta_n) + \bar{\delta}_{2n-1} (1 - \beta_n^2)}{\check{\tau}_n \hat{\rho}_{2n-1} [(\beta_n - \bar{\beta}_{n-1}) + \hat{a}_{2n-1} (1 - \bar{\beta}_{n-1} \beta_n)] + (1 - \beta_n^2)}, \quad (4.40)$$

donde  $\check{\tau}_n$  viene dado por (4.38). O, equivalentemente,

$$\check{\tau}_n = \frac{\bar{\rho}_{2n-1}(\bar{\delta}_{2n-1} - \hat{\delta}_{2n-1})}{\hat{\rho}_{2n-1}^2(1 - \bar{\beta}_{n-1}\beta_n) + \bar{\delta}_{2n-1}(\bar{\beta}_{n-1} - \beta_n)}.$$

**Demostración.-** Nótese que (4.39) es equivalente a

$$\begin{cases} K_n \bar{\rho}_{2n-1}(\bar{\delta}_{2n-1} - \beta_n \hat{\rho}_{2n-1}^2) - \bar{\rho}_{2n-1}(\bar{\delta}_{2n-1} - \beta_n \hat{\rho}_{2n-1}^2) = \check{\tau}_n \hat{b}_{2n-1} \\ K_n \bar{\rho}_{2n-1}(\bar{\delta}_{2n-1} \beta_n - \hat{\rho}_{2n-1}^2) - \bar{\rho}_{2n-1}(\bar{\delta}_{2n-1} \beta_n - \hat{\rho}_{2n-1}^2) = \check{\tau}_n \hat{b}_{2n-1} \bar{\beta}_{n-1} \\ K_n \bar{\rho}_{2n-1}(\hat{\rho}_{2n-1}^2 \bar{\delta}_{2n-1} - \beta_n) - \bar{\rho}_{2n-1}(\hat{\rho}_{2n-1}^2 \hat{\delta}_{2n-1} - \beta_n) = \check{\tau}_n (1 - \bar{\beta}_{n-1} \hat{a}_{2n-1}) \\ K_n \bar{\rho}_{2n-1}(\hat{\rho}_{2n-1}^2 \bar{\delta}_{2n-1} \beta_n - 1) - \bar{\rho}_{2n-1}(\hat{\rho}_{2n-1}^2 \hat{\delta}_{2n-1} \beta_n - 1) = \check{\tau}_n (\bar{\beta}_{n-1} - \hat{a}_{2n-1}). \end{cases} \quad (4.41)$$

Por tanto, obtenemos por este camino cuatro ecuaciones con dos incógnitas  $\hat{\delta}_{2n-1}$  y  $K_n$ . con

$$\hat{\rho}_{2n-1}^2 = \hat{b}_{2n-1} - \bar{\delta}_{2n-1} \hat{a}_{2n-1} = \left[ \bar{b}_{2n-1} + \bar{\delta}_{2n-1} \hat{a}_{2n-1} \right]^{-1} \in \mathbb{T}$$

y

$$\hat{\rho}_{2n-1}^2 = \hat{b}_{2n-1} - \hat{\delta}_{2n-1} \hat{a}_{2n-1} = \left[ \hat{b}_{2n-1} + \hat{\delta}_{2n-1} \hat{a}_{2n-1} \right]^{-1} \in \mathbb{T},$$

las dos primeras ecuaciones en (4.41) se convierten en

$$\begin{cases} K_n \bar{\rho}_{2n-1} [\bar{\delta}_{2n-1} (1 + \beta_n \hat{a}_{2n-1}) - \beta_n \hat{b}_{2n-1}] - \bar{\rho}_{2n-1} [\bar{\delta}_{2n-1} (1 + \beta_n \hat{a}_{2n-1}) - \beta_n \hat{b}_{2n-1}] = \check{\tau}_n \hat{b}_{2n-1} \\ K_n \bar{\rho}_{2n-1} [\bar{\delta}_{2n-1} (\beta_n + \hat{a}_{2n-1}) - \hat{b}_{2n-1}] - \bar{\rho}_{2n-1} [\bar{\delta}_{2n-1} (\beta_n + \hat{a}_{2n-1}) - \hat{b}_{2n-1}] = \check{\tau}_n \hat{b}_{2n-1} \bar{\beta}_{n-1}, \end{cases} \quad (4.42)$$

y las dos últimas en

$$\begin{cases} K_n \bar{\rho}_{2n-1} \left[ \frac{\bar{\delta}_{2n-1} (1 - \beta_n \hat{a}_{2n-1}) - \beta_n \bar{b}_{2n-1}}{\bar{b}_{2n-1} + \bar{\delta}_{2n-1} \hat{a}_{2n-1}} \right] - \bar{\rho}_{2n-1} \left[ \frac{\hat{\delta}_{2n-1} (1 - \beta_n \hat{a}_{2n-1}) - \beta_n \bar{b}_{2n-1}}{\bar{b}_{2n-1} + \hat{\delta}_{2n-1} \hat{a}_{2n-1}} \right] = \check{\tau}_n (1 - \bar{\beta}_{n-1} \hat{a}_{2n-1}) \\ K_n \bar{\rho}_{2n-1} \left[ \frac{\bar{\delta}_{2n-1} (\beta_n - \hat{a}_{2n-1}) - \bar{b}_{2n-1}}{\bar{b}_{2n-1} + \bar{\delta}_{2n-1} \hat{a}_{2n-1}} \right] - \bar{\rho}_{2n-1} \left[ \frac{\hat{\delta}_{2n-1} (\beta_n - \hat{a}_{2n-1}) - \bar{b}_{2n-1}}{\bar{b}_{2n-1} + \hat{\delta}_{2n-1} \hat{a}_{2n-1}} \right] = \check{\tau}_n (\bar{\beta}_{n-1} - \hat{a}_{2n-1}). \end{cases} \quad (4.43)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (4.42) para  $K_n \bar{\rho}_{2n-1}$  y  $\bar{\delta}_{2n-1}$ , obtenemos

$$K_n \bar{\rho}_{2n-1} = \bar{\rho}_{2n-1} \left\{ 1 + \check{\tau}_n \hat{\rho}_{2n-1}^2 \left( \frac{(\beta_n - \bar{\beta}_{n-1}) + \hat{a}_{2n-1} (1 - \bar{\beta}_{n-1} \beta_n)}{1 - \beta_n^2} \right) \right\}, \quad (4.44)$$

y  $\bar{\delta}_{2n-1}$  dado por (4.40). Por otro lado, resolviendo el sistema de ecuaciones (4.43) para  $K_n \bar{\rho}_{2n-1}$  y  $\hat{\delta}_{2n-1}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{2n-1} &= \bar{b}_{2n-1} \frac{\check{\tau}_n \bar{\rho}_{2n-1} [(\bar{\beta}_{n-1} - \beta_n) \hat{a}_{2n-1} - (1 - \bar{\beta}_{n-1} \beta_n)] - \hat{\delta}_{2n-1} (1 - \beta_n^2)}{\check{\tau}_n \bar{\rho}_{2n-1} (\bar{\beta}_{n-1} - \beta_n) (1 - \hat{a}_{2n-1}^2) - \bar{b}_{2n-1} (1 - \beta_n^2)} \\ &= \frac{\check{\tau}_n \hat{\rho}_{2n-1} [(\bar{\beta}_{n-1} - \beta_n) \hat{a}_{2n-1} - (1 - \bar{\beta}_{n-1} \beta_n)] - \hat{\delta}_{2n-1} (1 - \beta_n^2)}{\check{\tau}_n \hat{\rho}_{2n-1} (\bar{\beta}_{n-1} - \beta_n) \hat{b}_{2n-1} - (1 - \beta_n^2)}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

mientras que  $K_n \bar{\rho}_{2n-1}$  viene dado de nuevo por (4.44). Así, queda probar que las igualdades dadas por (4.40) y (4.45) son equivalentes. Eliminando  $\check{\tau}_n$  en (4.40) y (4.45), encontramos que se debe dar

$$\frac{\bar{\rho}_{2n-1}(\bar{\delta}_{2n-1} - \tilde{\delta}_{2n-1})}{(\hat{b}_{2n-1} - \tilde{\delta}_{2n-1}\hat{a}_{2n-1})(1 - \bar{\beta}_{n-1}\beta_n) + \bar{\delta}_{2n-1}(\bar{\beta}_{n-1} - \beta_n)} = \frac{\hat{\rho}_{2n-1}(\hat{\delta}_{2n-1} - \tilde{\delta}_{2n-1})}{(\hat{a}_{2n-1} - \tilde{\delta}_{2n-1}\hat{b}_{2n-1})(\bar{\beta}_{n-1} - \beta_n) - (1 - \bar{\beta}_{n-1}\beta_n)},$$

o, equivalentemente,

$$\left\{ \bar{\rho}_{2n-1}^2(\bar{\delta}_{2n-1} - \tilde{\delta}_{2n-1}) - \hat{\rho}_{2n-1}^2(\hat{\delta}_{2n-1} - \tilde{\delta}_{2n-1}) \right\} \left\{ (1 - \bar{\beta}_{n-1}\beta_n) + \bar{\rho}_{2n-1}^2\bar{\delta}_{2n-1}(\bar{\beta}_{n-1} - \beta_n) \right\} = 0.$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}_{2n-1}^2(\bar{\delta}_{2n-1} - \tilde{\delta}_{2n-1}) - \hat{\rho}_{2n-1}^2(\hat{\delta}_{2n-1} - \tilde{\delta}_{2n-1}) = \\ & (\hat{b}_{2n-1} + \hat{\delta}_{2n-1}\hat{a}_{2n-1})(\bar{\delta}_{2n-1} - \tilde{\delta}_{2n-1}) - (\hat{b}_{2n-1} - \tilde{\delta}_{2n-1}\hat{a}_{2n-1})(\hat{\delta}_{2n-1} - \tilde{\delta}_{2n-1}) = \\ & -(\hat{b}_{2n-1}\hat{\delta}_{2n-1} - \tilde{\delta}_{2n-1}\bar{\delta}_{2n-1}) + (\hat{b}_{2n-1}\tilde{\delta}_{2n-1} - \tilde{\delta}_{2n-1}\bar{\delta}_{2n-1}) + \hat{a}_{2n-1} \left( |\hat{\delta}_{2n-1}|^2 - |\tilde{\delta}_{2n-1}|^2 \right) = 0, \end{aligned}$$

Concluyendo la prueba. ■

El siguiente Lema muestra que (4.40) proporciona una manera rápida y fácil de comprobar cuando para un  $\tau_n$  dado, los ceros de la qORF  $Q_{n,\tau_n}$  están todos en  $(-1, 1)$ .

**Lema 4.3.8** Consideremos la qORF  $Q_{n,\tau_n}$ , con  $\tau_n \in \mathbb{C}$ , y sea  $\tilde{\delta}_{2n-1}$  dada por (4.40). Entonces los ceros de la qORF  $Q_{n,\tau_n}$  están todos en  $(-1, 1)$  si y solo si  $\tilde{\delta}_{2n-1} \in \mathbb{D}$ .

**Demostración.** - Nótese que, debido a la igualdad en (4.32), es suficiente probar que uno de los ceros de  $r_{2n-1}(z) := \frac{1}{\tilde{e}_{2n-1}} \{ \zeta_n(z)\tilde{\phi}_{2n-1}(z) + \tilde{\phi}_{2n-1}^*(z) \}$  tiende a 1 o  $-1$  cuando  $|\tilde{\delta}_{2n-1}|$  tiende a uno. O equivalentemente,  $r_{2n-1}(1) = 0$  o  $r_{2n-1}(-1) = 0$  si  $\tilde{\delta}_{2n-1} \in \mathbb{T}$ .

Así, sea  $\nu \in \{\pm 1\}$ . Entonces tenemos que  $r_{2n-1}(\nu) = 0$  si y solo si

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tilde{e}_{2n-1}} \left\{ \zeta_n(\nu)\tilde{\phi}_{2n-1}(\nu) + \hat{B}_{2n-1}(\nu)\tilde{\phi}_{(2n-1)*}(\nu) \right\} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\zeta_n(\nu)}{\tilde{e}_{2n-1}} \left\{ \tilde{\phi}_{2n-1}(\nu) + \hat{B}_{2n-2}(\nu)\tilde{\phi}_{(2n-1)*}(\nu) \right\} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\tilde{e}_{2n-1}} \left\{ \tilde{\phi}_{2n-1}(\nu) + |\hat{B}_{n-1}(\nu)|^2 \tilde{\phi}_{2n-1}^c(\nu) \right\} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\tilde{\phi}_{2n-1}(\nu)}{\tilde{e}_{2n-1}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \tilde{\rho}_{2n-1} \frac{1 - \bar{\beta}_{n-1}\nu}{1 - \beta_n\nu} \left[ \zeta_{n-1}(\nu)\hat{\phi}_{2n-2}(\nu) + \tilde{\delta}_{2n-1}\hat{\phi}_{2n-2}^*(\nu) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.46)$$

lo que implica que  $\frac{\tilde{\phi}_{2n-1}(z)}{\tilde{e}_{2n-1}}$  es (salvo un factor multiplicativo) una pORF. En consecuencia, de (4.10) junto con (4.46) y el Lema 4.2.1 deducimos que  $r_{2n-1}(\nu) = 0$  si y solo si

$$\tilde{\delta}_{2n-1} = \hat{\xi}_{2n-1} := \frac{\hat{\rho}_{2n-1}\hat{\delta}_{2n-1} - \nu\overline{\hat{\rho}_{2n-1}}}{\hat{\rho}_{2n-1} - \nu\overline{\hat{\rho}_{2n-1}}\overline{\hat{\delta}_{2n-1}}} \in \mathbb{T}. \quad (4.47)$$

Como  $\tilde{\delta}_{2n-1}$  y  $\tilde{\rho}_{2n-1}$  satisfacen la igualdad en (4.34), se sigue del Lema 4.3.3 que la igualdad en (4.47) solo puede verificarse si

$$\hat{\xi}_{2n-1} \in \{\pm 1\} \text{ para } \hat{a}_{2n-1} = 0 \quad \text{o} \quad \hat{\xi}_{2n-1} \in C \cap \mathbb{T} \text{ para } \hat{a}_{2n-1} \neq 0,$$

donde  $C$  es definida como en el Lema 4.3.3. Si  $\hat{a}_{2n-1} = 0$  se sigue de (4.47) que  $\hat{\xi}_{2n-1} = -\nu$ , la cual esta en  $\{\pm 1\}$ . Esto prueba el caso de  $\hat{a}_{2n-1} = 0$ .

Finalmente, consideremos el caso  $\hat{a}_{2n-1} \neq 0$ . De la primera igualdad en (4.34) deducimos que  $\hat{\xi}_{2n-1} \in C \cap \mathbb{T}$  si y solo si

$$\hat{b}_{2n-1}\hat{\xi}_{2n-1} - \overline{\hat{b}_{2n-1}}\overline{\hat{\xi}_{2n-1}} = 2\hat{a}_{2n-1}. \quad (4.48)$$

Teniendo en cuenta que

$$\hat{a}_{2n-1} = \left( \frac{\hat{\rho}_{2n-1}^2\hat{\delta}_{2n-1} - \overline{\hat{\rho}_{2n-1}^2}\overline{\hat{\delta}_{2n-1}}}{1 - |\hat{\delta}_{2n-1}|^2} \right) \quad \text{y} \quad \hat{b}_{2n-1} = \hat{\rho}_{2n-1}^2 + \overline{\hat{\delta}_{2n-1}}\hat{a}_{2n-1},$$

encontramos que (4.48) es equivalente a

$$\left\{ \hat{\rho}_{2n-1}^2\hat{\xi}_{2n-1} - \overline{\hat{\rho}_{2n-1}^2}\overline{\hat{\xi}_{2n-1}} \right\} (1 - |\hat{\delta}_{2n-1}|^2) = (2 - \overline{\hat{\delta}_{2n-1}}\hat{\xi}_{2n-1} - \hat{\delta}_{2n-1}\overline{\hat{\xi}_{2n-1}}) \left\{ \hat{\rho}_{2n-1}^2\hat{\delta}_{2n-1} - \overline{\hat{\rho}_{2n-1}^2}\overline{\hat{\delta}_{2n-1}} \right\}. \quad (4.49)$$

Tras reemplazar  $\hat{\xi}_{2n-1}$  por la expresión en la parte derecha de (4.47) y simplificar, se ve claramente que la igualdad en (4.49) es cierta para todo  $\hat{\delta}_{2n-1} \in \mathbb{D}$  y  $\hat{\rho}_{2n-1} \in \mathbb{T}$ , lo que concluye la prueba. ■

Basándonos en los dos lemas anteriores, podemos ahora probar el siguiente,

**Teorema 4.3.9** *Sea  $\mu$  una medida sobre  $I$  y sea  $\hat{\mu}$  la correspondiente medida sobre  $\mathbb{T}$ , dada por (1.52). Sea  $J_n(f) = \lambda_\alpha f(x_\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k)$  la fórmula de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos con  $x_\alpha \in (-1, 1)$  prefijado para  $\mu$ , cuyos nodos son los ceros de la qORF  $Q_{n,\tau_n} \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$ . Tomemos  $x_k = \cos \theta_k$ , y definamos  $\{z_k\}_{k=1}^{2n-2}$  y  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n-2}$  por medio de*

$$\left. \begin{aligned} z_k &= e^{i\theta_k}, & \lambda_k &= \lambda_k \\ z_{n-1+k} &= e^{-i\theta_k}, & \lambda_{n-1+k} &= \lambda_k \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Además, sea  $z_\alpha = \overline{z}_\alpha = J^{inv}(x_\alpha)$  y  $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha$ . Entonces  $\hat{I}_{2n}(\hat{f}) = \lambda_\alpha \hat{f}(z_\alpha) + \lambda_\alpha \hat{f}(\overline{z}_\alpha) + \sum_{k=1}^{2n-2} \lambda_k \hat{f}(z_k)$  coincide con la fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional de  $2n$  nodos

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

con  $\{z_\alpha, \bar{z}_\alpha\} \subset \mathbb{T} \setminus \{-1, 1\}$  prefijados para  $\hat{\mu}$ , basada en los ceros de la pORF  $\tilde{Q}_{2n,1}$  de la forma

$$\tilde{Q}_{2n,1} = \tilde{K}_{2n} \left[ \zeta_{n-1}(z) \tilde{\phi}_{2n-1}(z) + \tilde{\phi}_{n-1}^*(z) \right], \quad \tilde{K}_{2n} \in \mathbb{C}_0,$$

con

$$\tilde{\phi}_{2n-1}(z) = \tilde{\rho}_{2n-1} \tilde{e}_{2n-1} \frac{1 - \bar{\beta}_{n-1} z}{1 - \beta_n z} \left[ \zeta_{n-1}(z) \hat{\phi}_{2n-2}(z) + \tilde{\delta}_{2n-1} \hat{\phi}_{2n-1}^*(z) \right],$$

donde  $\tilde{\delta}_{2n-1} \in \mathbb{D}$  viene dada por (4.40), donde  $\tilde{e}_{2n-1} \in \mathbb{R}_0^+$  y  $\tilde{\rho}_{2n-1} \in \mathbb{T}$  son los correspondientes coeficientes de recurrencia definidos por(4.8).

**Demostración.**- La prueba se sigue directamente de los Lemas 4.3.7–4.3.8 y (4.32). ■  
Como consecuencia de los Teoremas 4.3.1 y 4.3.9, podemos probar lo siguiente.

**Corolario 4.3.10** Sea  $\mu$  una medida sobre  $I$ . Sea  $\varphi_k$  una ORF con respecto a  $\mu$ , y supongamos que la qORF  $Q_{n,\tau_n}$ , definida por (4.3), tiene ceros en  $\{x_k\}_{k=1}^n \subset (-1, 1)$ . Entonces, se tiene que

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\varphi_j(x_k)|^2 = E_n^{-1} (1 - x_k/\alpha_n) Q'_{n,\tau_n}(x_k) (1 - x_k/\alpha_{n-1}) \varphi_{n-1}^c(x_k),$$

donde  $E_n$  esta definida por (4.6).

**Demostración.**- De los Teoremas 4.3.1 y 4.3.9, junto con (4.4), (4.13) y (4.14), se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi_j(x_k)|^2 &= \lambda_k^{-1} = \hat{\lambda}_k^{-1} = \sum_{j=0}^{2n-2} \left| \hat{\phi}_j(z_k) \right|^2 + \left| \tilde{\phi}_{2n-1}(z_k) \right|^2 = \\ &= \frac{(z_k - \beta_n)(1 - \beta_n z_k)}{1 - \beta_n^2} \tilde{Q}'_{2n,1}(z_k) B_{n*}(z_k) B_{n*}^c(z_k) \tilde{\phi}_{2n}^*(z_k), \end{aligned}$$

donde  $x_k = J(z_k)$ . Primero, nótese que

$$(1 - x/\alpha_n)(1 - x/\alpha_{n-1}) = \frac{(z_k - \beta_n)(1 - \beta_n z_k)(z - \beta_{n-1})(1 - \beta_{n-1} z_k)}{z_k^2(1 + \beta_n^2)(1 + \beta_{n-1}^2)}.$$

Por otra parte, debido a (4.32) tenemos que

$$Q'_{n,\tau_n}(x) = \frac{\tilde{c}_n}{k_n} \left[ B'_{n*}(z) \tilde{Q}_{2n,1}(z) + B_{n*}(z) \tilde{Q}'_{2n,1}(z) \right] \frac{2z^2}{z^2 - 1},$$

donde  $k_n \in \mathbb{C}_0$  y  $\tilde{c}_n = \tilde{\rho}_n \left\{ 1 + \tilde{\delta}_{2n} \right\}^{-1/2} \in \mathbb{C}_0$ . Resulta,

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\varphi_j(x_k)|^2 = (1 - x_k/\alpha_n) Q'_{n,\tau_n}(x_k) (1 - x_k/\alpha_{n-1}) F_n(z_k),$$

donde

$$F_n(z_k) = \frac{k_n(1 + \beta_n^2)(1 + \beta_{n-1}^2)}{2\tilde{c}_n(1 - \beta_n^2)} \frac{(z_k^2 - 1)}{(z_k - \beta_{n-1})(1 - \beta_{n-1} z_k)} B_{n*}^c(z_k) \tilde{\phi}_{2n}^*(z_k).$$

Como  $\tilde{\phi}_{2n}^*(z_k) = -\tilde{\phi}_{2n}(z_k)$ , obtenemos de la relación de recurrencia (4.8) que (recordar que  $\tilde{\delta}_{2n} \in (-1, 1)$  y  $\tilde{\rho}_{2n}^2 = 1$ )

$$\tilde{\phi}_{2n-1}^*(z_k) = -\zeta_n(z_k)\tilde{\phi}_{2n-1}(z_k), \quad (4.50)$$

así que

$$\tilde{\phi}_{2n}^*(z_k) = \tilde{e}_{2n}\tilde{\rho}_{2n}(\tilde{\delta}_{2n} - 1)\zeta_n(z_k)\tilde{\phi}_{2n-1}(z_k).$$

Aplicando de nuevo la relación de recurrencia para  $\tilde{\phi}_{2n-1}$  y  $\tilde{\phi}_{2n-1}^*$ , se sigue de (4.50) que

$$\zeta_{n-1}(z_k)\hat{\phi}_{2n-2}(z_k) = -\hat{\phi}_{2n-2}^*(z_k) \left[ \frac{\tilde{\rho}_{2n-1} + \zeta_n(z_k)\tilde{\rho}_{2n-1}\tilde{\delta}_{2n-1}}{\tilde{\rho}_{2n-1}\tilde{\delta}_{2n-1} + \zeta_n(z_k)\tilde{\rho}_{2n-1}} \right], \quad (4.51)$$

así que

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{2n-1}(z_k) &= \tilde{e}_{2n-1} \left( \frac{1 - \bar{\beta}_{n-1}z_k}{1 - \beta_n z_k} \right) \tilde{\rho}_{2n-1} \left[ \tilde{\delta}_{2n-1} - \frac{\tilde{\rho}_{2n-1} + \zeta_n(z_k)\tilde{\rho}_{2n-1}\tilde{\delta}_{2n-1}}{\tilde{\rho}_{2n-1}\tilde{\delta}_{2n-1} + \zeta_n(z_k)\tilde{\rho}_{2n-1}} \right] \hat{\phi}_{2n-2}^*(z_k) \\ &= \tilde{e}_{2n-1} \frac{\left( |\tilde{\delta}_{2n-1}|^2 - 1 \right) (1 - \bar{\beta}_{n-1}z_k)}{\tilde{\rho}_{2n-1}\tilde{\delta}_{2n-1}(1 - \beta_n z_k) + (z_k - \beta_n)\tilde{\rho}_{2n-1}} \hat{\phi}_{2n-2}^*(z_k). \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos que

$$F_n(z_k) = \frac{L_n(z_k^2 - 1)\zeta_{(n-1)^*}(z_k)}{(1 - \beta_{n-1}z_k)(\tilde{\rho}_{2n-1}\tilde{\delta}_{2n-1}(1 - \beta_n z_k) + (z_k - \beta_n)\tilde{\rho}_{2n-1})} B_{(n-1)^*}^c(z_k)\hat{\phi}_{2n-2}^*(z_k),$$

con

$$L_n = \frac{k_n\tilde{\rho}_{2n}(1 + \beta_n^2)(1 + \beta_{n-1}^2)}{2\tilde{\rho}_n} \sqrt{\frac{(1 - \tilde{\delta}_{2n}) \left( 1 - |\tilde{\delta}_{2n-1}|^2 \right)}{(1 - \beta_n^2)(1 - |\beta_{n-1}|^2)}}.$$

Seguidamente, del Teorema 4.1.1 y el Lema 4.3.2 deducimos que

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1}^c(x) &= \bar{c}_{n-1} B_{(n-1)^*}^c(z) \left\{ \left[ 1 - \tilde{a}_{2n-1} \left( \frac{z - \beta_{n-1}}{1 - \beta_{n-1}z} \right) \right] \hat{\phi}_{2n-2}^*(z) + \right. \\ &\quad \left. \left( \tilde{\rho}_{2n-1}^2 - \tilde{\delta}_{2n-1}\tilde{a}_{2n-1} \right) \left( \frac{1 - \bar{\beta}_{n-1}z}{1 - \beta_{n-1}z} \right) \hat{\phi}_{2n-2}^*(z) \right\}. \end{aligned}$$

Así, con la ayuda de (4.51) encontramos que

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1}^c(x_k) &= \bar{c}_{n-1} \left\{ \left( \tilde{\rho}_{2n-1}^2 - \tilde{\delta}_{2n-1}\tilde{a}_{2n-1} \right) \left( \frac{1 - \bar{\beta}_{n-1}z_k}{1 - \beta_{n-1}z_k} \right) - \right. \\ &\quad \left. \left[ 1 - \tilde{a}_{2n-1} \left( \frac{z_k - \beta_{n-1}}{1 - \beta_{n-1}z_k} \right) \right] \zeta_{(n-1)^*}(z_k) \left[ \frac{\tilde{\rho}_{2n-1} + \zeta_n(z_k)\tilde{\rho}_{2n-1}\tilde{\delta}_{2n-1}}{\tilde{\rho}_{2n-1}\tilde{\delta}_{2n-1} + \zeta_n(z_k)\tilde{\rho}_{2n-1}} \right] \right\} B_{(n-1)^*}^c(z_k)\hat{\phi}_{2n-2}^*(z_k). \end{aligned}$$

Tras algunos cálculos obtenemos que

$$F_n(z_k) = \varphi_{n-1}^c(x_k)G_n(z_k),$$

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

con

$$G_n(z_k) = L_n \bar{c}_{n-1}^{-1} (z_k^2 - 1) H_n^{-1}(z_k) \quad \text{y}$$

$$H_n(z) = \left\{ (\bar{\rho}_{2n-1}^2 - \tilde{\delta}_{2n-1} \tilde{a}_{2n-1})(z - \beta_{n-1})(\bar{\rho}_{2n-1} \bar{\delta}_{2n-1} (1 - \beta_n z) + (z - \beta_n) \tilde{\rho}_{2n-1}) - \right. \\ \left. [(1 - \beta_{n-1} z) - \tilde{a}_{2n-1}(z - \beta_{n-1})] \left[ (1 - \beta_n z) \bar{\rho}_{2n-1} + (z - \beta_n) \tilde{\rho}_{2n-1} \tilde{\delta}_{2n-1} \right] \right\}^{-1}.$$

Tomando  $H_n(z) = A_n z_k^2 + B_n z_k - C_n$ , se tiene que

$$A_n = (\bar{\rho}_{2n-1}^2 - \tilde{\delta}_{2n-1} \tilde{a}_{2n-1})(\tilde{\rho}_{2n-1} - \beta_n \bar{\rho}_{2n-1} \bar{\delta}_{2n-1}) + (\beta_{n-1} + \tilde{a}_{2n-1})(\tilde{\rho}_{2n-1} \tilde{\delta}_{2n-1} - \beta_n \bar{\rho}_{2n-1}) \\ = \bar{\rho}_{2n-1} (1 - \beta_{n-1} \beta_n) + (\beta_{n-1} - \beta_n) \tilde{\rho}_{2n-1} \tilde{\delta}_{2n-1} \\ C_n = (\bar{\rho}_{2n-1}^2 - \tilde{\delta}_{2n-1} \tilde{a}_{2n-1}) \beta_{n-1} (\bar{\rho}_{2n-1} \bar{\delta}_{2n-1} - \beta_n \tilde{\rho}_{2n-1}) + \\ (1 + \tilde{a}_{2n-1} \beta_{n-1})(\tilde{\rho}_{2n-1} - \beta_n \bar{\rho}_{2n-1} \tilde{\delta}_{2n-1}) = \bar{\rho}_{2n-1} (1 - \beta_{n-1} \beta_n) + (\beta_{n-1} - \beta_n) \tilde{\rho}_{2n-1} \tilde{\delta}_{2n-1}$$

y

$$B_n = (\bar{\rho}_{2n-1}^2 - \tilde{\delta}_{2n-1} \tilde{a}_{2n-1})[(\bar{\rho}_{2n-1} \bar{\delta}_{2n-1} - \beta_n \tilde{\rho}_{2n-1}) - \beta_{n-1}(\tilde{\rho}_{2n-1} - \beta_n \bar{\rho}_{2n-1} \bar{\delta}_{2n-1})] + \\ (\beta_{n-1} + \tilde{a}_{2n-1})(\tilde{\rho}_{2n-1} - \beta_n \bar{\rho}_{2n-1} \tilde{\delta}_{2n-1}) - (1 + \tilde{a}_{2n-1} \beta_{n-1})(\tilde{\rho}_{2n-1} \tilde{\delta}_{2n-1} - \beta_n \bar{\rho}_{2n-1}) = 0.$$

Resultando,

$$G_n(z_k) = \frac{L_n}{\bar{c}_{n-1} [\bar{\rho}_{2n-1} (1 - \beta_{n-1} \beta_n) + (\beta_{n-1} - \beta_n) \tilde{\rho}_{2n-1} \tilde{\delta}_{2n-1}]}.$$

Finalmente, se tiene que

$$E_n^{-1} = \lim_{x \rightarrow \alpha_{n-1}} \frac{Z_n(x) \varphi_{n-1}(x)}{Q_{n, \tau_n}(x)} \\ = \frac{k_n c_{n-1} (1 + \beta_n^2) (1 + \beta_{n-1}^2)}{2 \bar{c}_n} \lim_{z \rightarrow \beta_{n-1}} \frac{\{\hat{\phi}_{2n-2}^c(z) + \hat{\phi}_{2n-2}^*(z)\}}{(1 - \beta_n z)^2 \{\tilde{\phi}_{2n}(z) + \tilde{\phi}_{2n}^*(z)\}} \\ = \frac{k_n c_{n-1} (1 + \beta_n^2) (1 + \beta_{n-1}^2) \sqrt{1 - \tilde{\delta}_{2n}}}{2 \tilde{\rho}_n \tilde{\rho}_{2n}} \times \\ \lim_{z \rightarrow \beta_{n-1}} \frac{\hat{\phi}_{2n-2}^*(z) \left( \frac{\hat{\phi}_{2n-2}^c(z)}{\hat{\phi}_{2n-2}^*(z)} + 1 \right)}{(1 - \beta_n z) \{(z - \beta_n) \tilde{\phi}_{2n-1}(z) + (1 - \beta_n z) \tilde{\phi}_{2n-1}^*(z)\}} \\ = \frac{L_n}{\bar{c}_{n-1}} \lim_{z \rightarrow \beta_{n-1}} \frac{\hat{\phi}_{2n-2}^*(z)}{P_1(z) \zeta_{n-1}(z) \hat{\phi}_{2n-2}(z) + P_2(z) \hat{\phi}_{2n-2}^*(z)},$$

donde

$$P_1(z) = \tilde{\rho}_{2n-1} (z - \beta_n) + \bar{\rho}_{2n-1} \bar{\delta}_{2n-1} (1 - \beta_n z), \quad \text{y} \\ P_2(z) = \tilde{\rho}_{2n-1} \tilde{\delta}_{2n-1} (z - \beta_n) + \bar{\rho}_{2n-1} (1 - \beta_n z).$$



Como  $\hat{\phi}_{2n-2}^*(\beta_{n-1}) = \hat{\kappa}_{2n-2} \in \mathbb{R}_0^+$  y  $|\hat{\phi}_{2n-2}(\beta_{n-1})| \in \mathbb{R}^+$ , se sigue que

$$E_n^{-1} = \frac{L_n}{\bar{c}_{n-1} P_2(\beta_{n-1})} = G_n(z_k).$$

■

Concluimos esta sección con las siguientes notas.

**Nota 4.3.11** En (4.31) hemos dado un ejemplo de medida modificada en el caso del intervalo. Aquí, la medida modificada  $\tilde{\mu}$  se asumió absolutamente continua con respecto a la medida  $\mu$ . Los resultados en esta sección no dependen de esta suposición hecha en el ejemplo (4.31), pero es claro que, si la qORF  $Q_{n,\tau_n}$  es ortogonal con respecto a medidas modificadas  $\tilde{\mu}$  que son absolutamente continuas con respecto a  $\mu$ , entonces una de estas medidas modificadas será de la forma dada por (4.31). El Lema 4.3.8 prueba la existencia de medidas modificadas que están soportadas en  $I$  cuando los ceros de la qORF  $Q_{n,\tau_n}$  están todos en  $(-1, 1)$ , pero esto no prueba que alguna de ellas sea absolutamente continua con respecto a  $\mu$ . Por tanto, puede ser interesante seguir investigando si se verifica también cuando los ceros de la qORF  $Q_{n,\tau_n}$  están todos en  $(-1, 1)$ . La misma nota puede darse para el ejemplo (4.12) en el caso de la circunferencia unidad.

**Nota 4.3.12** *La relación entre fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales implica que los cálculos para construir una  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional puede hacerse tanto en el intervalo como en la circunferencia unidad. Lo mismo puede decirse de la construcción de una  $2n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional basada en una pORF con  $\hat{\tau}_{2n} = 1$  si la medida es simétrica y los polos aparecen en pares complejos conjugados o teniendo multiplicidad par cuando son reales. Como se conoce más sobre ORFs en la circunferencia unidad que en el intervalo, tales computaciones pueden a veces ser más fáciles en la circunferencia unidad. Por otro lado, claramente es menos costoso computar los nodos y pesos de una  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional por medio de un problema de autovalores de una matriz tridiagonal de orden  $n$ , que computar los nodos y pesos de una  $2n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional por medio de un problema de autovalores de una matriz pentadiagonal de orden  $2n$ . Suponiendo que los coeficientes en la relación de recurrencia son solo conocidos (por ejemplo) para las ORFs en la circunferencia, primero necesitaremos conocer la relación con los coeficientes en la relación de recurrencia para las correspondientes ORFs en el intervalo. Esta relación hemos visto que se conoce en el caso polinomial, pero por el momento no ha sido generalizada al caso racional.*

### 4.3.1. Propiedades de convergencia

En esta sección asumiremos que para todo  $n$ , los nodos en las fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales son fijos de manera que las cuadraturas existan. La idea de esta sección será mostrar como la relación existente entre las fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales puede usarse para transformar propiedades sobre convergencia en mínimos cuadrados, radio de convergencia y cotas de errores para las fórmulas de Szegő-Lobatto racionales al caso de las Gauss-Radau racionales. La principal ventaja de esta relación es que la investigación de estas propiedades

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

puede restringirse al caso de las fórmulas de cuadratura de Szegő-Lobatto racionales cuando no se conoce para ninguna de las fórmulas de cuadratura. Como se conoce más acerca de ORFs en la circunferencia unidad que en el intervalo, esta investigación suele ser más fácil en la circunferencia unidad. En los corolarios que sean consecuencia directa de la relación entre cuadraturas y los teoremas/lemas anteriores, se prescindirá de la demostración

Recordar que los nodos y pesos de la  $n$ -ésima fórmula de Szegő-Lobatto racional para la medida  $\dot{\mu}$  sobre  $\mathbb{T}$  son de hecho los nodos y pesos de una  $n$ -ésima fórmula de Szegő racional para una medida modificada  $\dot{\mu}_n$  sobre  $\mathbb{T}$ . Con esto en mente podemos probar el siguiente

**Lema 4.3.13** *Sea  $\dot{\mu}$  una medida sobre  $\mathbb{T}$ , y sea  $\dot{\mu}_n$  una medida modificada sobre  $\mathbb{T}$  correspondiente a una  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional. Si  $\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |\beta_j|) = \infty$ , entonces se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{\mu}_n = \dot{\mu}$  y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \dot{f}(e^{i\theta}) d\dot{\mu}_n(\theta) = \int \dot{f}(e^{i\theta}) d\dot{\mu}(\theta)$$

para toda función  $\dot{f}$  continua sobre  $\mathbb{T}$ .

**Demostración.**- Denotemos por  $\mathcal{M}_n(\mathbb{T})$  el espacio de medidas de Borel positivas y acotadas  $\dot{\nu}_n$  sobre  $\mathbb{T}$  tal que  $\{\phi_k\}_{k=0}^{n-2}$  forma un sistema ortonormal en  $\dot{\mathcal{L}}_{n-2}$  con respecto a la medida  $\dot{\nu}_n$  y el producto interior  $\langle \dot{f}, \dot{g} \rangle_{\dot{\nu}_n} = \int_{-\pi}^{\pi} \dot{f}(z) \dot{g}_*(z) d\dot{\nu}_n(\theta)$ . Para todo  $n$  entonces se tiene que  $\dot{\mu} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{T})$  y  $\dot{\mu}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{T})$ . La prueba se sigue del Teorema de Favard [16, Teorema 3.5]. ■

Como consecuencia del Lema previo y de la relación entre fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales Szegő-Lobatto racionales, tenemos el siguiente

**Corolario 4.3.14** *Sea  $\mu$  una medida sobre  $I$ , y sea  $\mu_n$  una medida modificada sobre  $I$  correspondiente a una  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional. Si  $\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |J^{inv}(\alpha_j)|) = \infty$ , entonces se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$  y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) d\mu_n(x) = \int f(x) d\mu(x)$$

para toda función  $f$  continua sobre  $I$ .

Resultados de convergencia para las fórmulas de cuadratura de Szegő-Lobatto racionales son ahora fácilmente obtenidos por medio de resultados conocidos para fórmulas de cuadratura de Szegő racionales. Comenzaremos con la convergencia en mínimos cuadrados, tenemos el siguiente

**Teorema 4.3.15** *Sea  $\dot{\mu}$  una medida sobre  $\mathbb{T}$ , y consideremos los subespacios de funciones racionales  $\dot{\mathcal{L}}_{p(n)} \cdot \dot{\mathcal{L}}_{q(n)*}$ , donde  $p(n)$  y  $q(n)$  son enteros no negativos tales que  $p(n) + q(n) = n$ ,  $p(n+1) \geq p(n)$ ,  $q(n+1) \geq q(n)$ , y  $\lim_{n \rightarrow \infty} q(n)/n = r \in (0, 1)$ . Tomemos  $\tilde{\mathcal{L}}_n := \dot{\mathcal{L}}_{p(n)} \cdot \dot{\mathcal{L}}_{q(n)}$  y asumamos que  $\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |\tilde{\beta}_j|) = \infty$ . Sea  $\{z_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{T}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , el conjunto de nodos de la  $n$ -ésima fórmula de Szegő-Lobatto racional para  $\dot{\mu}$  de forma que  $I_{\dot{\mu}}(\dot{f}) = I_n(\dot{f})$  para toda  $\dot{f} \in \tilde{\mathcal{L}}_{n-2} \cdot \tilde{\mathcal{L}}_{(n-2)*}$ . Entonces para toda función  $\dot{f}$  acotada sobre  $\mathbb{T}$ , para la cual*

la integral de Riemann-Stieltjes  $I_{\hat{\mu}}(\mathring{f})$  exista, la sucesión de funciones racionales  $S_{n-1} \in \mathring{\mathcal{L}}_{p(n-1)} \cdot \mathring{\mathcal{L}}_{q(n-1)*}$  que interpola a  $\mathring{f}$  en los puntos  $\{z_k\}_{k=1}^n$  converge a  $\mathring{f}$  en norma  $\mathring{\mathcal{L}}_2^{\hat{\mu}}$ , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathring{f} - S_{n-1} \right\|_{\hat{\mu}} = 0,$$

donde  $\left\| \mathring{F} \right\|_{\hat{\mu}} := \sqrt{\langle \mathring{F}, \mathring{F} \rangle_{\hat{\mu}}}$ . Lo mismo ocurre para los subespacios de funciones racionales  $\mathring{\mathcal{L}}_{p(n)}^c \cdot \mathring{\mathcal{L}}_{q(n)*}$ , con  $\tilde{\mathcal{L}}_n := \mathring{\mathcal{L}}_{p(n)}^c \cdot \mathring{\mathcal{L}}_{q(n)}$ .

**Demostración.**- Sea  $\hat{\mu}_n$  una medida modificada sobre  $\mathbb{T}$  correspondiente a la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \mathring{f} - S_{n-1} \right\|_{\hat{\mu}} &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \mathring{f}(z) - S_{n-1}(z) \right|^2 |d(\hat{\mu} - \hat{\mu}_n)(\theta)| + \left\| \mathring{f} - S_{n-1} \right\|_{\hat{\mu}_n} \\ &\leq 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left( \left| \mathring{f}(z) \right|^2 + |S_{n-1}(z)|^2 \right) |d(\hat{\mu} - \hat{\mu}_n)(\theta)| + \left\| \mathring{f} - S_{n-1} \right\|_{\hat{\mu}_n}. \end{aligned}$$

De [21, Teorema 4.1] para el caso de los subespacios de funciones racionales  $\mathring{\mathcal{L}}_{p(n)} \cdot \mathring{\mathcal{L}}_{q(n)*}$  (respectivamente, de [50, Teorema 6] para el caso de los subespacios de funciones racionales  $\mathring{\mathcal{L}}_{p(n)}^c \cdot \mathring{\mathcal{L}}_{q(n)*}$ ) se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathring{f} - S_{n-1} \right\|_{\hat{\mu}_n} = 0.$$

Seguidamente, con  $M_f = \max_{z \in \mathbb{T}} \left| \mathring{f}(z) \right|^2 < \infty$ , tenemos del Lema 4.3.13 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \mathring{f}(z) \right|^2 |d(\hat{\mu} - \hat{\mu}_n)(\theta)| \leq M_f \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |d(\hat{\mu} - \hat{\mu}_n)(\theta)| = 0.$$

Finalmente, denotemos por  $\tilde{\mathcal{R}}$  la clausura de  $\bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{R}}_n$ , donde  $\tilde{\mathcal{R}}_n = \tilde{\mathcal{L}}_n \cdot \tilde{\mathcal{L}}_{n*}$ . Como para todo  $n$  tenemos que  $|S_{n-1}(z)|^2 \in \tilde{\mathcal{R}}_{n-1}$ , se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_{n-1}(z)|^2 \in \tilde{\mathcal{R}}$ . Como consecuencia directa del criterio de la clausura discutido en [2, p. 244], tenemos ahora que  $\tilde{\mathcal{R}}$  es denso en la clase de funciones continuas sobre  $\mathbb{T}$  con respecto a la norma uniforme, así que podemos aplicar nuevamente el Lema 4.3.13 para encontrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_{n-1}(z)|^2 |d(\hat{\mu} - \hat{\mu}_n)(\theta)| = 0.$$

Esto concluye la demostración. ■

Como consecuencia del Teorema previo y de la relación entre fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales Szegő-Lobatto racionales, tenemos el siguiente

**Corolario 4.3.16** *Sea  $\mu$  una media sobre  $I$ , y asumamos que  $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |J^{inv}(\alpha_j)|) = \infty$ . Sea  $\{x_k\}_{k=1}^n \subset (-1, 1)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , el conjunto de nodos de la  $n$ -ésima fórmula de Gauss-Radau racional para  $\mu$  de forma que  $J_{\mu}(f) = J_n(f)$  para toda  $f \in \mathbb{R}_{n-1, n-1}$ . Entonces para toda función  $f$  acotada sobre  $I$ , para la cual la integral de Riemann-Stieltjes  $J_{\mu}(f)$  exista,*

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

la sucesión de funciones racionales  $R_{n-1} \in \mathcal{L}_{n-1}$  que interpola a  $f$  en los puntos  $\{x_k\}_{k=1}^n$  converge a  $f$  en norma  $\mathcal{L}_2^\mu$ , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - R_{n-1}\|_\mu = 0,$$

donde  $\|F\|_\mu := \sqrt{\langle F, F \rangle_\mu}$ .

Estudiaremos, a continuación, las cotas superiores para la aproximación de la integral  $I_{\hat{\mu}}(\hat{f})$  por medio de una fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional con  $n$  nodos  $I_n(\hat{f})$ . En [32] y [33], se derivan cotas superiores en el contexto de cuadraturas de tipo interpolatorio racionales en el intervalo y la circunferencia unidad respectivamente. Nótese, sin embargo, que los resultados en [32] para el caso de Gauss-Radau racional se obtienen fácilmente de los resultados en [33] para el caso de Szegő-Lobatto racionales, por medio del Teorema 4.3.9, junto con la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} \epsilon_n(f) &:= |J_\mu(f) - J_n(f)| = |J_\mu(f - R_{n-1})| & (4.52) \\ &= \frac{1}{2} |I_{\hat{\mu}}(\hat{f} - S_{2n-1})| = \frac{1}{2} |I_{\hat{\mu}}(\hat{f}) - \hat{I}_{2n}(\hat{f})| =: \frac{\hat{\epsilon}_{2n}(\hat{f})}{2}, \end{aligned}$$

con  $\hat{f}(z) = (f \circ J)(z)$  y  $S_{2n-1}(z) = (R_{n-1} \circ J)(z) \in \mathcal{L}_{n-1}^c \cdot \mathcal{L}_{(n-1)*}$ . En el siguiente Lema reescribiremos las cotas superiores de [33] para el caso de las fórmulas de cuadratura de Szegő-Lobatto racionales.

**Lema 4.3.17** *Sea  $\hat{\mu}$  una medida sobre  $\mathbb{T}$  y  $\hat{f}$  una función analítica en un entorno de la circunferencia unidad  $\mathbb{T}$ , supongamos que  $I_n(\hat{f})$ ,  $n \geq 2$ , es una fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional con  $n$  nodos para  $\hat{\mu}$  de manera que  $I_{\hat{\mu}}(\hat{f}) = I_n(\hat{f})$  para toda  $\hat{f} \in \hat{\mathcal{R}}_{n-2}$ . Definimos  $\hat{F}_{n-2}$  por*

$$\hat{F}_{n-2}(z) = \hat{\pi}_{n-2}(z) \hat{\pi}_{(n-2)*}(z) \hat{f}(z), \quad \text{donde } \hat{\pi}_0(z) \equiv 1, \quad \hat{\pi}_m(z) := \prod_{j=1}^m (1 - \bar{\beta}_j z), \quad m > 0,$$

y sea  $\hat{U}$  el dominio de analiticidad de  $\hat{F}_{n-2}$ . Además, sea

$$\mathcal{C}_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\},$$

y supongamos que  $r < 1 < R$  de forma que  $\mathcal{C}_r \cup \mathcal{C}_R \subset \hat{U}$ . Entonces

$$\hat{\epsilon}_n(\hat{f}) := |I_{\hat{\mu}}(\hat{f}) - I_n(\hat{f})| \leq 2 \|\hat{F}_{n-2}\|_{\mathcal{C}_r \cup \mathcal{C}_R} I_{\hat{\mu}}(1) \left\{ \frac{r^{n-1}}{1-r^2} \hat{G}_{n-2}(r) + \frac{R^{3-n}}{R^2-1} \hat{G}_{n-2}\left(\frac{1}{R}\right) \right\},$$

donde  $\|\hat{F}_{n-2}\|_{\mathcal{C}_r \cup \mathcal{C}_R} := \max \left\{ |\hat{F}_{n-2}(z)| : z \in \mathcal{C}_r \cup \mathcal{C}_R \right\}$ , y

$$\hat{G}_{n-2}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{1}{|1 - \rho \beta_j e^{it}|^2} dt, \quad |\rho| < 1,$$

con el producto en el integrando igual a 1 cuando  $n = 2$ .

Tomando  $R = 1/r$  en el Lema anterior, y reemplazando  $\hat{\epsilon}_n(\hat{f})$  por  $\hat{\epsilon}_{2n}(\hat{f})$  (y por tanto,  $n$ ,  $\beta_j$  y  $I_{\hat{\mu}}(1)$  por  $2n$ ,  $\beta_j$  y  $J_{\mu}(1)$  respectivamente), obtenemos la cota superior de [32] para el caso de las fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales.

En el caso de las fórmulas de cuadratura de Szegő racionales, se sabe que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\epsilon}_n(\hat{f}) = 0$  para toda función  $\hat{\mu}$ -integrable  $\hat{f}$ , cuando  $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\beta_j|) = \infty$  (véase [26, Sección. 4]). Lo mismo es cierto para fórmulas de cuadratura de Szegő-Lobatto racionales<sup>7</sup>.

**Teorema 4.3.18** *Sea  $\hat{\mu}$  una medida sobre  $\mathbb{T}$ , y supongamos que  $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\beta_j|) = \infty$ . Asumamos que  $I_n(\hat{f})$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , son las fórmulas de cuadratura de Szegő-Lobatto racionales con  $n$  nodos para  $\hat{\mu}$  de manera que  $I_{\hat{\mu}}(\hat{f}) = I_n(\hat{f})$  para toda  $\hat{f} \in \mathcal{R}_{n-2}$ , y sea  $\hat{\epsilon}_n(\hat{f})$  definida como en el Lema 4.3.17. Entonces se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\epsilon}_n(\hat{f}) = 0$$

para toda función  $\hat{\mu}$ -integrable  $\hat{f}$ .

**Demostración.**- Se sigue directamente de [33, Proposición 1], junto con el hecho de que cualquier sucesión de reglas con pesos positivos que converja para toda función continua, converge para toda función  $\hat{\mu}$ -integrable (véase [48, págs 127–129]). ■

Como consecuencia del Teorema anterior, tenemos el siguiente

**Corolario 4.3.19** *Sea  $\mu$  una medida sobre  $I$ , y supongamos que  $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |J^{inv}(\alpha_j)|) = \infty$ . Asumamos que  $J_n(f)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , son fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales con  $n$  nodos para  $\mu$  de manera que  $J_{\mu}(f) = J_n(f)$  para todo  $f \in \mathbb{R}_{n-1, n-1}$ , y sea  $\epsilon_n(f)$  definida por (4.52). Entonces se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n(f) = 0$$

para toda función  $\mu$ -integrable  $f$ .

Finalmente, en orden de obtener estimaciones para el radio de convergencia (límite de la raíz del error), definimos el aproximante multipuntual racional de orden  $(p + 1, q + 1)$ , con  $p + q = n - 1$  y  $1 \leq p, q \leq n - 2$ , a la transformada de Herglotz-Riesz  $F_{\hat{\mu}}(z)$  como

$$F_n(z) = -\frac{\tilde{\psi}_n(z) - \tau_n \tilde{\psi}_n^*(z)}{\tilde{\phi}_n(z) + \tilde{\tau}_n \tilde{\phi}_n^*(z)}, \quad n > 2, \quad (4.53)$$

donde  $\tilde{\psi}_n$  denota la función racional de segunda especie (véase (4.15)), asociada con la ORF  $\tilde{\phi}_n$  y la medida modificada  $\hat{\mu}_n$ . De [27, ecuación (3.17)] se sigue entonces que  $F_n(z) = I_n(D(\cdot, z))$ , mientras se sigue del Teorema 4.3.18 y [27, Teorema 3.4] que  $\{F_n(z) : n = 3, 4, \dots\}$  converge puntualmente a  $F_{\hat{\mu}}(z)$  en  $\overline{\mathbb{C}}_{\mathbb{T}}$ . Supongamos que  $\hat{f}$  es analítica en una región cerrada y conexa  $G$  para la cual  $\mathbb{T} \subset G$ ,  $G \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_* \cup \{0, \infty\}) = \emptyset$ , donde  $\mathcal{B}_* = \{1/\bar{\beta}_1, 1/\bar{\beta}_2, \dots\}$ , y cuya frontera  $\partial G$  es una unión finita de curvas de Jordan. Entonces se tiene de [27, Corolario. 3.2 y Teorema. 5.4] que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} [\hat{\epsilon}_n(\hat{f})]^{1/n} \leq \epsilon = \max\{\epsilon_1, \epsilon_2\}, \quad (4.54)$$

<sup>7</sup>véase también [17, Teorema 7]).

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

con

$$\epsilon_1 = \max_{z \in \partial G \cap \mathbb{D}} \limsup_{n \rightarrow \infty} |F_{\tilde{\mu}}(z) - F_n(z)|^{1/n} \quad \text{y} \quad \epsilon_2 = \max_{z \in \partial G \cap \mathbb{E}} \limsup_{n \rightarrow \infty} |F_{\tilde{\mu}}(z) - F_n(z)|^{1/n},$$

donde  $\mathbb{E} := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$ . Así, queda obtener expresiones para  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ , y probar que  $\epsilon \leq 1$  (como se hizo en [27] para el caso de fórmulas de cuadratura de Szegő racionales). Para ello necesitaremos el siguiente

**Lema 4.3.20** Sean  $F_n(z)$  y  $\tilde{\pi}_m(z)$  definidas en (4.53) y Lema 4.3.17 respectivamente, y sea  $\tilde{\chi}_n(z) = \tilde{\pi}_n(z)\tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n}(z)$ . Entonces para todo  $z \in \mathbb{D} \cup \mathbb{E}$  y  $n > 3$ , el error viene dado por

$$\begin{aligned} F_{\tilde{\mu}}(z) - F_n(z) &= \frac{2z\tilde{\pi}_{n-2}^*(z)\tilde{\pi}_{n-2}(z)}{\tilde{\chi}_n(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{\chi}_n(t)}{(t-z)\tilde{\pi}_{n-2}^*(t)\tilde{\pi}_{n-2}(t)} d\tilde{\mu}(\theta) \\ &= \frac{2\tilde{\pi}_{n-2}^*(z)\tilde{\pi}_{n-2}(z)}{z^{n-4}\tilde{\chi}_n(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^{n-3}\tilde{\chi}_n(t)}{(t-z)\tilde{\pi}_{n-2}^*(t)\tilde{\pi}_{n-2}(t)} d\tilde{\mu}(\theta) \\ &= \frac{2z\tilde{\pi}_{n-2}^*(z)\tilde{\pi}_{n-2}(z)}{p_{n-2}(z)\tilde{\chi}_n(z)} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{p_{n-2}(t)\tilde{\chi}_n(t)}{(t-z)\tilde{\pi}_{n-2}^*(t)\tilde{\pi}_{n-2}(t)} d\tilde{\mu}(\theta) - \vartheta_n \right], \end{aligned}$$

donde  $t = e^{i\theta}$ ,

$$\vartheta_n = c_{n-2} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n} \frac{(1 - \bar{\beta}_n t)(1 - \bar{\beta}_{n-1} t)}{(t - \beta_{n-2})} d\tilde{\mu}(\theta), \quad (4.55)$$

y  $p_{n-2}(z) = c_{n-2}z^{n-2} + \dots \in \mathbb{P}_{n-2}$ ,  $c_{n-2} \in \mathbb{C}$ .

**Demstración.-** Sea  $\mathring{\mathcal{L}}_k(v, w) = \{\mathring{f} \in \mathring{\mathcal{L}}_k : \mathring{f}(v) = 0 \text{ y } \mathring{f}(w) = 0\}$ . Para toda  $\mathring{f}_* \in \mathring{\mathcal{L}}_{n-2}(\beta_n, \beta_{n-1})$  tenemos que  $\tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n}\mathring{f}_* \in \mathring{\mathcal{R}}_{n-2}$ . Por esta razón,

$$I_{\tilde{\mu}}(\tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n}\mathring{f}_*) = I_n(\tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n}\mathring{f}_*) = 0,$$

lo que implica que  $\tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n}$  es ortogonal sobre  $\mathring{\mathcal{L}}_{n-2}(\beta_n, \beta_{n-1})$  con respecto a la medida  $\tilde{\mu}$ . Además, Sea la  $\mathring{\mu}_n$  medida modificada correspondiente a la fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional  $I_n(\mathring{f})$ . Entonces es fácil comprobar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} D(t, z)[g(t) - g(z)]d(\tilde{\mu} - \mathring{\mu}_n)(\theta) = 0, \quad \forall g \in \mathring{\mathcal{R}}_{n-2}.$$

En consecuencia, con la ayuda de (4.16) encontramos que para toda  $\mathring{f}_* \in \mathring{\mathcal{L}}_{n-2}(\beta_n, \beta_{n-1})$ ,

$$\begin{aligned} F_{\tilde{\mu}}(z) - F_n(z) &= I_{\tilde{\mu}}(D(\cdot, z)) + \frac{1}{f(z)\tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n}(z)} I_{\tilde{\mu}_n} \left( D(\cdot, z)[f(\cdot)\tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n}(\cdot) - f(z)\tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n}(z)] \right) \\ &= I_{\tilde{\mu}}(D(\cdot, z)) + \frac{1}{f(z)\tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n}(z)} I_{\tilde{\mu}} \left( D(\cdot, z)[f(\cdot)\tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n}(\cdot) - f(z)\tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n}(z)] \right) \\ &= \frac{1}{f(z)\tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n}(z)} I_{\tilde{\mu}} \left( D(\cdot, z)f(\cdot)\tilde{Q}_{n,\tilde{\tau}_n}(\cdot) \right). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $n > 3$ , y sea  $f^\circ(z) = (1 - \bar{\beta}_n z)(1 - \bar{\beta}_{n-1} z)[(z - \beta_{n-2})(z - \beta_{n-3})]^{-1}$ . Claramente,  $f^\circ_* \in \mathcal{L}_{n-2}(\beta_n, \beta_{n-1})$  así que

$$F_{\hat{\mu}}(z) - F_n(z) = \frac{(z - \beta_{n-2})(z - \beta_{n-3})}{(1 - \bar{\beta}_n z)(1 - \bar{\beta}_{n-1} z) \tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n}(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n}(t) D(t, z) \frac{(1 - \bar{\beta}_n t)(1 - \bar{\beta}_{n-1} t)}{(t - \beta_{n-2})(t - \beta_{n-3})} d\hat{\mu}(\theta).$$

Usando la fórmula de interpolación de Newton más un termino de error para  $D(t, z)$  (véase [24, ecuación (2.5)])

$$D(t, z) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-4} \frac{z \hat{\pi}_{k-1}^*(z)}{\hat{\pi}_k^*(t)} + 2 \frac{z \hat{\pi}_{n-4}^*(z)}{(t - z) \hat{\pi}_{n-4}^*(t)}, \quad \hat{\pi}_k^*(z) = z^k \overline{\hat{\pi}_k(1/\bar{z})},$$

junto con la para-ortogonalidad de  $\tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n}$  con respecto a  $\hat{\mu}$ , obtenemos la primera igualdad (4.55).

A continuación, de [27, Lema 3.1], junto con [27, ecuaciones (3.7) y (3.19)] (con  $p = n - 2$  y  $q = 1$ ), se sigue que

$$F_{\hat{\mu}}(z) - F_n(z) = \frac{2z \hat{\pi}_{n-2}^*(z)(1 - \bar{\beta}_{n-2} z)}{\tilde{\chi}_n(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{\chi}_n(t)}{\hat{\pi}_{n-2}^*(t)(1 - \bar{\beta}_{n-2} t)} \frac{d\hat{\mu}(\theta)}{(t - z)}.$$

Teniendo en cuenta que  $2(t - z)^{-1} = t^{-1}[D(t, z) + 1]$ , y usando la fórmula de interpolación de Newton más un termino de error para  $D(t, z)$  (véase [24, ecuación (2.7)])

$$D(t, z) = -1 + 2 \sum_{k=1}^{n-3} \beta_k \frac{t^k \hat{\pi}_{k-1}(z)}{z^k \hat{\pi}_k(t)} + 2 \frac{t^{n-2} \hat{\pi}_{n-3}(z)}{z^{n-3} (t - z) \hat{\pi}_{n-3}(t)},$$

junto con la para-ortogonalidad de  $\tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n}$  con respecto a  $\hat{\mu}$ , obtenemos la segunda igualdad (4.55).

Además, para todo  $p_{n-2} \in \mathbb{P}_{n-2}$  de la forma  $p_{n-2}(z) = c_{n-2} z^{n-2} + \dots$ , con  $c_{n-2} \in \mathbb{C}$ , se tiene que

$$\frac{p_{n-2}(t) - p_{n-2}(z)}{t - z} = c_{n-2} t^{n-3} + q_{n-4, z}(t), \quad q_{n-4, z} \in \mathbb{P}_{n-4}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{p_{n-2}(t) - p_{n-2}(z)}{t - z} \right) \frac{\tilde{\chi}_n(t)}{\hat{\pi}_{n-2}^*(t) \hat{\pi}_{n-2}(t)} d\hat{\mu}(\theta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n}(t) \frac{(c_{n-2} t^{n-3} + q_{n-4, z}(t))(1 - \bar{\beta}_n t)(1 - \bar{\beta}_{n-1} t)}{\hat{\pi}_{n-2}^*(t)} d\hat{\mu}(\theta) \\ &= c_{n-2} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n}(t) \frac{t^{n-3} (1 - \bar{\beta}_n t)(1 - \bar{\beta}_{n-1} t)}{\hat{\pi}_{n-2}^*(t)} d\hat{\mu}(\theta) =: \vartheta_n. \end{aligned}$$

Ahora, se sigue fácilmente la tercera igualdad (4.55). Finalmente, como  $t^{n-3} = \hat{\pi}_{n-3}^*(t) + \sum_{j=0}^{n-4} d_j \hat{\pi}_j^*(t)$ , encontramos por la para-ortogonalidad de  $\tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n}$  con respecto a  $\hat{\mu}$  que (4.55) es también cierta. ■

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

Las igualdades (4.55) y (4.55) son extensiones de [27, Teorema. 3.5] al caso de Szegő-Lobatto racional, mientras que la igualdad (4.55) puede considerarse como una extensión de [27, Teorema. 3.6]. Así, la igualdad (4.55) es la necesaria para obtener una estimación del radio de convergencia, véase también la primera nota en la página 10 de [27]. Pero primero, necesitaremos conocer algo sobre la distribución de los números complejos  $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \dots\} \subset \mathbb{D}$ . Sea  $\hat{\nu}_n^\beta$  la medida contadora normalizada la cual asigna un punto de masa a  $\beta_j$ , teniendo en cuenta la multiplicidad de  $\beta_j$ .

**Lema 4.3.21** *Consideremos una  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional  $I_n(\hat{f})$  para la medida  $\hat{\mu}$  sobre  $\mathbb{T}$ , basada en la pORF  $\tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n}(z) = \tilde{\phi}_n(z) + \hat{\tau}_n \tilde{\phi}_n^*(z)$ , y sea*

$$\hat{\mu}_n(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} \frac{1 - |\beta_n|^2}{|e^{it} - \beta_n|^2 |\tilde{\phi}_n(e^{it})|^2} dt, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Entonces,  $\hat{\mu}_n$  es una medida modificada correspondiente a la fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional  $I_n(\hat{f})$ , satisfaciendo la condición de Szegő para todo  $n > 0$  finito. Para  $n \rightarrow \infty$  se satisface la condición de Szegő (respectivamente, la condición de Rakhmanov  $\hat{\mu}'_n > 0$  en casi todo punto) si y solo si  $\hat{\mu}$  satisface la condición de Szegő (respectivamente, la Condición de Rakhmanov  $\hat{\mu}' > 0$  en casi todo punto).

**Demostración.** - La primera parte se sigue directamente de [16, Lema 3.3]. Además, para  $n$  finito, tenemos que  $\hat{\mu}'_n(\theta) = \frac{1 - |\beta_n|^2}{|e^{i\theta} - \beta_n|^2 |\tilde{\phi}_n(e^{i\theta})|^2} \in \mathbb{R}_0^+$  para todo  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Finalmente, la última parte se sigue del Lema 4.3.13. ■

**Lema 4.3.22** *Sea  $\hat{\mu}$  una medida sobre  $\mathbb{T}$  que satisface la condición de Szegő*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \hat{\mu}'(\theta) d\theta > -\infty. \quad (4.56)$$

Además, tomemos la sucesión  $\mathcal{B}$  contenida en un compacto de  $\mathbb{D}$ , y asumamos que  $\hat{\nu}_n^\beta$  converge para alguna medida  $\hat{\nu}^\beta$  en topología débil estrella. Entonces se tiene que

1.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |F_{\hat{\mu}_n}(z) - F_n(z)|^{1/n} \leq \exp[\lambda(z)] < 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ ;
2.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |F_{\hat{\mu}_n}(z) - F_n(z)|^{1/n} \leq \exp[\lambda(1/\bar{z})] < 1$  para todo  $z \in (\mathbb{E} \setminus \text{supp} \{ \hat{\nu}_n^{1/\bar{\beta}} \})$ ;

con

$$\lambda(z) = \int \log |\zeta_z(u)| d\hat{\nu}^\beta(u), \quad \zeta_z(u) = \frac{u - z}{1 - \bar{z}u}. \quad (4.57)$$

**Demostración.** - Como consecuencia del Lema 4.3.21, la asintótica para (p)ORFs que se derivo en [27, Sección. 4] bajo ciertas condiciones sobre la medida  $\hat{\mu}$  y los números complejos  $\mathcal{B}$ , siguen siendo válidas para las (p)ORFs modificadas correspondientes a la fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional, sin necesidad de condiciones adicionales sobre las medidas modificadas  $\hat{\mu}_n$ .

Así, supongamos que  $\hat{Q}_{n-2, \hat{\tau}_{n-2}}$  es una  $(n-2)$ -ésima pORF para la medida  $\hat{\mu}$ , y sea el polinomio  $p_{n-2}$  en (4.55) dado por  $p_{n-2}(z) = \hat{\pi}_{n-2}(z) \hat{Q}_{n-2, \hat{\tau}_{n-2}}(z)$ . Entonces, la



constante  $c_{n-2}$  en (4.55) es igual a  $\overline{\dot{Q}_{n-2, \hat{\tau}_{n-2}}(0)}$ . Como  $\mathcal{B}$  esta contenida de manera compacta en  $\mathbb{D}$ , se sigue que existe una constante positiva  $M_1$  (independiente de  $n$ ) tal que  $|\vartheta| \leq M_1 \left| \dot{Q}_{n-2, \hat{\tau}_{n-2}}(0) \right| \left\| \tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n} \right\|_{\infty}$ , con

$$\left\| \dot{f} \right\|_{\infty} := \max_{z \in \mathbb{T}} \left| \dot{f}(z) \right| = \max_{z \in \mathbb{D} \cup \mathbb{T}} \left| \dot{f}(z) \right|.$$

Puesto que  $M_1^{1/n} \rightarrow 1$ , y  $\left| \dot{Q}_{n-2, \hat{\tau}_{n-2}}(0) \right| \rightarrow 1$  y  $\left\| \tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n} \right\|_{\infty}^{1/n} \rightarrow 1$  debido a [27, Teoremas 4.8(1) y 4.9], se sigue que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\vartheta|^{1/n} \leq 1$ .

Consideremos ahora el caso en el cual  $z \in \mathbb{D}$ . De (4.55) se sigue que

$$\begin{aligned} |F_{\hat{\mu}}(z) - F_n(z)| &\leq 2|z| \left| \frac{\hat{\pi}_{n-2}^*(z)}{\hat{\pi}_n^*(z)} \right| \frac{1}{\left| \tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n}(z) \dot{Q}_{n-2, \hat{\tau}_{n-2}}(z) \right|} \times \\ &\quad \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\hat{\pi}_n(t)}{\hat{\pi}_{n-2}^*(t)} \right| \frac{\left| \tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n}(t) \dot{Q}_{n-2, \hat{\tau}_{n-2}}(t) \right|}{|t-z|} d\hat{\mu}(\theta) + |\vartheta_n| \right]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Así, existe una constante positiva  $M_2$  (independiente de  $n$ ) tal que

$$|F_{\hat{\mu}}(z) - F_n(z)|^{1/n} \leq M_2^{1/n} S_n^{1/n}(z) (T_n(z) + |\vartheta_n|)^{1/n},$$

donde

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \left| \frac{\hat{\pi}_{n-2}^*(z)}{\hat{\pi}_n^*(z)} \right| \frac{1}{\left| \tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n}(z) \dot{Q}_{n-2, \hat{\tau}_{n-2}}(z) \right|} \text{ y} \\ T_n(z) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\hat{\pi}_n(t)}{\hat{\pi}_{n-2}^*(t)} \right| \frac{\left| \tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n}(t) \dot{Q}_{n-2, \hat{\tau}_{n-2}}(t) \right|}{|t-z|} d\hat{\mu}(\theta). \end{aligned}$$

Procediendo como en la demostración de [27, Teorema 5.2], obtenemos que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |F_{\hat{\mu}}(z) - F_n(z)|^{1/n} &\leq \left( \lim_{n \rightarrow \infty} |B_{n-2}(z)|^{1/n} \right) \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} T_n^{1/n}(z), 1 \right\} \\ &= \exp[\lambda(z)] \cdot \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} T_n^{1/n}(z), 1 \right\}, \end{aligned}$$

y

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} T_n^{1/n}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n} \dot{Q}_{n-2, \hat{\tau}_{n-2}} \right\|_{\infty}^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{Q}_{n, \hat{\tau}_n} \right\|_{\infty}^{1/n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \dot{Q}_{n-2, \hat{\tau}_{n-2}} \right\|_{\infty}^{1/n}.$$

En [27, Teorema. 5.2] se probó que  $\lambda(z) < 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Además, de [27, Teorema 4.9] se sigue que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} T_n^{1/n}(z) \leq 1$ . Esto concluye la demostración para  $z \in \mathbb{D}$ .

Finalmente, consideremos el caso en el cual  $z \in \left( \mathbb{E} \setminus \text{supp} \left\{ \nu_n^{1/\beta} \right\} \right)$ . De (4.58) y [27, Teorema 4.8(2)] se sigue que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |F_{\hat{\mu}}(z) - F_n(z)|^{1/n} &\leq \left( \lim_{n \rightarrow \infty} |B_n(z)|^{1/n} \right) \times \\ &\quad \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z}{(z - \beta_n)(z - \beta_{n-1})} \right|^{1/n} \right) \exp[-2\lambda(z)] = \exp[-\lambda(z)] = \exp[\lambda(1/\bar{z})]. \end{aligned}$$

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

Esto concluye la prueba. ■

Con la ayuda del Lema anterior y (4.54), se prueba fácilmente el siguiente

**Teorema 4.3.23** *Sea  $\hat{\mu}$  una medida sobre  $\mathbb{T}$  que satisface la condición de Szegő (4.56). Sea la sucesión  $\mathcal{B}$  contenida en un compacto de  $\mathbb{D}$ , y asumamos que  $\hat{\nu}_n^\beta$  converge para alguna medida  $\hat{\nu}^\beta$  en topología débil estrella. Consideremos las fórmulas de cuadratura de Szegő-Lobatto racionales  $I_n(\hat{f})$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , de manera que  $I_{\hat{\mu}}(\hat{f}) = I_n(\hat{f})$  para toda  $\hat{f} \in \hat{\mathcal{R}}_{n-2}$ , y sea  $\hat{\mu}_n$  una medida modificada sobre  $\mathbb{T}$  correspondiente a la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő-Lobatto racional. Además, supongamos que  $\hat{f}$  es analítica en una región cerrada y conexa  $G$  para la cual  $\mathbb{T} \subset G$ ,  $G \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_* \cup \{0, \infty\}) = \emptyset$ , donde  $\mathcal{B}_* = \{1/\bar{\beta}_1, 1/\bar{\beta}_2, \dots\}$ , y cuya frontera  $\partial G$  es una unión finita de curvas de Jordan. Entonces se tiene*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} [\hat{\epsilon}_n(\hat{f})]^{1/n} \leq \epsilon < 1,$$

donde  $\hat{\epsilon}_n(\hat{f})$  es definida como en el Lema 4.3.17, y

$$\epsilon = \max \left\{ \max_{z \in \partial G \cap \mathbb{D}} \{\exp[\lambda(z)]\}, \max_{z \in \partial G \cap \mathbb{E}} \{\exp[\lambda(1/\bar{z})]\} \right\},$$

con  $\lambda(z)$  dada por (4.57).

Finalmente, reemplazando  $\hat{\epsilon}_n(\hat{f})$  por  $\hat{\epsilon}_{2n}(\hat{f})$  en el Teorema anterior (y por tanto,  $n$ ,  $\beta_j$  y  $I_n(\hat{f})$  por  $2n$ ,  $\hat{\beta}_j$  y  $\hat{I}_{2n}(\hat{f})$  respectivamente), y usando la siguiente identidad:

$$[\epsilon_n(f)]^{1/n} = \frac{[\hat{\epsilon}_{2n}(\hat{f})]^{2/2n}}{2^{1/n}},$$

el radio de convergencia para el caso Gauss-Radau racional se obtiene fácilmente.

**Corolario 4.3.24** *Sea  $\mu$  una medida sobre  $I$  que satisface la condición de Szegő  $\int_{-1}^1 \frac{\log \mu'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx > -\infty$ . sea la sucesión  $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$  acotada fuera de  $I$ , y asumamos que la medida contadora normalizada  $\hat{\nu}_n^{\hat{\beta}}$  para la sucesión  $\hat{\mathcal{B}} = \{\bar{\beta}_1, \beta_1, \bar{\beta}_2, \beta_2, \dots\}$ , con  $\beta_j = J^{inv}(\alpha_j)$ , converge para alguna medida  $\hat{\nu}^{\hat{\beta}}$  en topología débil estrella. Consideremos las fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales  $J_n(f)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , de manera que  $J_\mu(f) = J_n(f)$  para toda  $f \in \mathbb{R}_{n-1, n-1}$ , y sea  $\mu_n$  una medida modificada sobre  $I$  correspondiente a la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Gauss-Radau. Además, supongamos que  $f$  es analítica en una región cerrada y conexa  $H$  para la cual  $I \subset H$ ,  $H \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c \cup \{\infty\}) = \emptyset$ , donde  $\mathcal{A}^c = \{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots\}$ , y cuya frontera  $\partial H$  es una unión finita de curvas Jordan. Entonces se tiene que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} [\epsilon_n(f)]^{1/n} \leq \max_{x \in \partial H} \{\exp[2\hat{\lambda}(J^{inv}(x))]\} < 1,$$

donde

$$\hat{\lambda}(z) = \int \log |\zeta_z(u)| d\hat{\nu}^{\hat{\beta}}(u), \quad \zeta_z(u) = \frac{u-z}{1-\bar{z}u}.$$

### 4.3.2. Ejemplos

En esta subsección ilustraremos los resultados obtenidos anteriormente por medio de algunos experimentos numéricos. Para ello, al igual que en la subsección 4.2.1 consideraremos la función peso de Chebyshev de primera especie  $d\mu(x) = dx/\sqrt{1-x^2}$  sobre  $I$ , para la cual la correspondiente medida  $\hat{\mu}$  sobre  $\mathbb{T}$  es la medida de Lebesgue  $d\hat{\mu}(z) = dz/iz$ .

Por tanto, (4.36) junto con (4.25)–(4.26) nos proporciona la siguiente expresión para una  $n$ -ésima qORF con respecto a la medida  $\mu$  sobre  $I$ :

$$Q_{n,\tau_n}(x) = C_n \frac{\tilde{w}_n(z)B_{n-1}^c(z) + \tilde{w}_{n*}(z)B_{(n-1)*}(z)}{(1-\beta_n/z)(1-\beta_n z)}, \quad C_n \in \mathbb{C}_0,$$

donde se sigue del Lema 4.3.3, (4.38) y (4.40) que

$$\tilde{w}_n(z) = \pm \left[ z(1 - \tilde{\delta}_{2n-1}\beta_n) - (\beta_n - \tilde{\delta}_{2n-1}) \right],$$

con

$$\tilde{\delta}_{2n-1} = \frac{\check{\tau}_n(1 - \bar{\beta}_{n-1}\beta_n)}{\check{\tau}_n(\beta_n - \bar{\beta}_{n-1}) + (1 - \beta_n^2)} \in (-1, 1), \text{ y } \check{\tau}_n = \tau_n \left( \frac{1 + \beta_n^2}{1 + \bar{\beta}_{n-1}^2} \right) \sqrt{\left( \frac{1 - |\beta_{n-1}|^2}{1 - \beta_n^2} \right)}.$$

Como resultado, los nodos  $x_k = J(z_k)$  de la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau con  $n$  nodos  $J_n(f)$  satisface

$$z_k \left( \frac{z_k - \tilde{\beta}_n}{1 - \tilde{\beta}_n z_k} \right) B_{n-1}(z_k) B_{n-1}^c(z_k) = -1, \quad \tilde{\beta}_n := \frac{\beta_n - \tilde{\delta}_{2n-1}}{1 - \tilde{\delta}_{2n-1}\beta_n}, \quad (4.59)$$

donde debe considerarse que

$$\tilde{\beta}_n = \frac{1 + z_\alpha^2 B_{n-1}(z_\alpha) B_{n-1}^c(z_\alpha)}{z_\alpha [1 + B_{n-1}(z_\alpha) B_{n-1}^c(z_\alpha)]}, \quad (4.60)$$

para tener un nodo prefijado en  $x_\alpha = J(z_\alpha) \in (-1, 1)$ . Nótese que para  $\tau_n = 0$  (y por tanto,  $\tilde{\delta}_{2n-1} = 0$ ), se tiene que  $\tilde{\beta}_n = \beta_n$ . Además, de (4.59) se verifica fácilmente que  $\tilde{\beta}_n \in (-1, 1)$  si y solo si  $\tilde{\delta}_{2n-1} \in (-1, 1)$ . Por tanto, los nodos de una fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos con respecto a la función peso de Chebyshev de primera especie son de hecho los nodos de la fórmula Gaussiana racional de  $n$  nodos con respecto a la misma función peso, pero con máximo dominio de validez  $\mathcal{L}\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \tilde{\alpha}_n\} \cdot \mathcal{L}_{n-1}^c$  (véase también [51, Sección. 6]).<sup>8</sup> Como  $\mathcal{L}_{n-1} \cdot \mathcal{L}_{n-1}^c$  es un subespacio de  $\mathcal{L}\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \tilde{\alpha}_n\} \cdot \mathcal{L}_{n-1}^c$ , se sigue que los pesos  $\lambda_k$  de la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos  $J_n(f)$  con  $x_\alpha \in (-1, 1)$  prefijado, son también los pesos de esta fórmula de cuadratura Gaussiana racional con  $n$  nodos, por tanto, ellos vienen dados por (4.27)

En los ejemplos usaremos el mismo método numérico propuesto en la sección 4.2.1 junto con las expresiones anteriores para computar los nodos y pesos de las fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales.

<sup>8</sup>Esta observación no es válida para todas las medidas, por ejemplo, no se tiene para la función peso de Chebyshev de segundo tipo  $d\mu(x) = \sqrt{1-x^2}dx$  (véase [51, Sección. 6]).

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

**Ejemplo 4.3.25** Definimos la función  $f^{[\alpha]}(x) = \frac{\alpha x - 1}{x - \alpha}$ , con  $\alpha = J(\beta) \in \overline{\mathbb{C}}_I$ . Como vimos

$$J_\mu(f^{[\alpha]}) = \int_{-1}^1 f^{[\alpha]}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\beta.$$

Consideremos ahora la sucesión de polos  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{13}\}$ , con

$$\alpha_k = \begin{cases} J\left(1, 15 - 0,2k + i \sin\left[\frac{(k-1)\pi}{9}\right]\right), & k \leq 10 \\ \infty, & k > 10. \end{cases}$$

Aproximaremos  $J_\mu(f_1)$  y  $J_\mu(f_2)$ , con

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \Re \left\{ \sum_{k=1}^{10} f^{[\alpha_k]}(x) \right\} \quad \text{y} \quad f_2(x) = f_1(x) + \frac{x}{\pi}, \quad (4.61)$$

por medio de una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio racional con  $n$  nodos. Nótese que la solución exacta es  $J_\mu(f_1) = J_\mu(f_2) = 0,5$ . Como la fórmula de cuadratura Gaussiana racional con  $n$  nodos, basada en la sucesión de polos  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , no existe para  $1 < n < 10$ , consideraremos una fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos, basada en la sucesión de polos

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \tilde{\alpha}_n\}, \quad \tilde{\alpha}_n = J(\tilde{\beta}_n) \in \overline{\mathbb{R}}_I, \quad 2 \leq n \leq 13.$$

Primeramente, consideremos el caso en el cual el último polo es fijado por  $\tilde{\alpha}_n = \infty$ , y entonces consideramos el caso en el cual  $\tilde{\beta}_n$ , dada por (4.60), es elegido de manera que la fórmula de cuadratura tenga un nodo prefijado en  $x_\alpha \in \{0, 0,1, -0,5\}$ . En las Tablas 4.4–4.5 mostramos los errores relativos en la aproximación,

$$\text{Error } i = \left| \frac{J_n(f_i) - J_\mu(f_i)}{J_\mu(f_i)} \right|, \quad i = 1, 2.$$

El símbolo '/' significa que la fórmula de cuadratura no existe (es decir, alguno de los nodos de la qORF esta fuera de  $I$  pues  $\tilde{\delta}_{2n-1} \notin \mathbb{D}$ ).

Estas tablas muestran claramente que la aproximación por medio de una fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos (cuando existe) es exacta para  $n \geq 11$  si  $i = 1$  y para  $n \geq 12$  si  $i = 2$ , respectivamente. Además en el caso en que  $\tilde{\alpha}_n = \infty$ , la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos para  $n > 10$  es de hecho la fórmula de cuadratura Gaussiana, lo que explica la exactitud de estas cuadraturas para  $n = 11$  si  $i = 2$ .

**Ejemplo 4.3.26** Finalmente, consideremos la función

$$f_3(x) = \frac{1}{\pi} \sin \left( \frac{1}{(x-v)^2 + \omega^2} \right), \quad v \in I, \quad \omega \in \mathbb{R}_0^+, \quad (4.62)$$

esta función posee singularidades esenciales en  $x = v \pm \omega i$ . Para  $\omega$  muy próximo a 0, esta función es extremadamente oscilatoria cerca de tales singularidades. Como una singularidad esencial, puede verse como un polo de multiplicidad infinita, tomaremos

$$\alpha_k = v + (-1)^k \omega i, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.63)$$

**Capítulo 4. El caso racional**

$n$	$\tilde{\alpha}_n = \infty$ Error 1	$x_\alpha = 0$ Error 1	$\tilde{\beta}_n$	$x_\alpha = 0,1$ Error 1	$\tilde{\beta}_n$	$x_\alpha = -0,5$ Error 1	$\tilde{\beta}_n$
2	1,29E + 01	2,53E + 01	5,13e - 02	2,44E + 01	1,56E - 01	1,47E + 01	-4,74E - 01
3	5,93E + 00	2,43E + 01	2,68E - 01	1,87E + 01	3,99E - 01	9,83E + 00	-3,71E - 01
4	9,17E + 00	2,37E + 01	5,66E - 01	1,24E + 01	7,63E - 01	6,26E + 00	-2,58E - 01
5	6,63E + 00	2,34E + 01	8,34E - 01	/	1,19E + 00	4,62E + 00	-1,93E - 01
6	5,36E + 00	2,80E + 01	8,78E - 01	/	1,37E + 00	3,88E + 00	-1,88E - 01
7	1,79E + 00	8,65E + 00	4,84E - 01	/	1,15E + 00	1,55E + 00	-1,62E - 01
8	1,41E + 00	1,83E + 00	9,21E - 02	2,75E + 00	7,04E - 01	2,45E + 00	3,11E - 01
9	6,99E - 01	4,37E - 01	-3,22E - 01	8,07E - 01	3,02E - 01	/	-1,03E + 00
10	1,47E - 01	5,08E - 02	-7,64E - 01	1,47E - 01	-5,10E - 03	/	-2,68E + 00
11	4,22E - 15	/	-1,06E + 00	1,64E - 14	-1,56E - 01	/	-9,24E + 00
12	3,80E - 14	2,29E - 14	9,44E - 01	/	6,62E + 00	2,44E - 14	-8,92E - 01
13	7,59E - 14	/	-1,06E + 00	7,11E - 15	4,89E - 02	9,04E - 14	1,21E - 01

Tabla 4.4: Errores relativos en las fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales con el último polo fijo  $\tilde{\alpha}_n$  o con nodo prefijado  $x_\alpha$  para la estimación de  $J_\mu(f_1)$ , donde  $f_1$  viene dada por (4.61).

$n$	$\tilde{\alpha}_n = \infty$ Error 2	$x_\alpha = 0$ Error 2	$\tilde{\beta}_n$	$x_\alpha = 0,1$ Error 2	$\tilde{\beta}_n$	$x_\alpha = -0,5$ Error 2	$\tilde{\beta}_n$
2	1,29E + 01	2,52E + 01	5,13E - 02	2,47E + 01	1,56E - 01	1,39E + 01	-4,74E - 01
3	5,93E + 00	2,40E + 01	2,68E - 01	1,92E + 01	3,99E - 01	9,38E + 00	-3,71E - 01
4	9,17E + 00	2,32E + 01	5,66E - 01	1,31E + 01	7,63E - 01	6,04E + 00	-2,58E - 01
5	6,63E + 00	2,28E + 01	8,34E - 01	/	1,19E + 00	4,47E + 00	-1,93E - 01
6	5,36E + 00	2,73E + 01	8,78E - 01	/	1,37E + 00	3,74E + 00	-1,88E - 01
7	1,79E + 00	8,29E + 00	4,84E - 01	/	1,15E + 00	1,43E + 00	-1,62E - 01
8	1,41E + 00	1,77E + 00	9,21E - 02	2,32E + 00	7,04E - 01	2,26E + 00	3,11E - 01
9	6,99E - 01	5,56E - 01	-3,22E - 01	6,95E - 01	3,02E - 01	/	-1,03E + 00
10	1,47E - 01	2,03E - 01	-7,64E - 01	1,48E - 01	-5,10E - 03	/	-2,68E + 00
11	4,44E - 15	/	-1,06E + 00	2,25E - 02	-1,56E - 01	/	-9,24E + 00
12	3,97E - 14	2,25E - 14	9,44E - 01	/	6,62E + 00	2,25E - 14	-8,92E - 01
13	7,62E - 14	/	-1,06E + 00	6,22E - 15	4,89E - 02	8,90E - 14	1,21E - 01

Tabla 4.5: Errores relativos en las fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales con el último polo fijo  $\tilde{\alpha}_n$  o con nodo prefijado  $x_\alpha$  para la estimación de  $J_\mu(f_2)$ , donde  $f_2$  viene dada por (4.61).

Para  $v = \Re \{J(0,20 + 0,75i)\} = \frac{641}{2410} y \omega = |\Im \{J(0,20 + 0,75i)\}| = \frac{477}{1928}$ , obtenemos con MAPLE<sup>®</sup> 9.5 que  $J_\mu(f_3) \approx 0,4259620458467829$ .

Puesto que  $\alpha_k \notin \overline{\mathbb{R}}$  para todo  $k > 0$ , la fórmula de cuadratura Gaussiana racional con  $n$  nodos, basada en la sucesión de polos  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , no existe para todo  $n > 0$ . Por esta razón consideraremos una fórmula de cuadratura de Gauss-Radau racional con  $n$  nodos, basada en la sucesión de polos

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \tilde{\alpha}_n\}, \quad \tilde{\alpha}_n = J(\tilde{\beta}_n) \in \overline{\mathbb{R}}_I, \quad 2 \leq n \leq 33.$$

Primeramente, consideremos el caso en el cual el último polo está fijado por  $\tilde{\alpha}_n = \infty$ , y entonces consideramos en caso en el cual  $\tilde{\beta}_n$ , dada por (4.60), es elegido de forma que la fórmula de cuadratura tiene un nodo prefijado en  $x_\alpha \in \{0, 0, 1, 0, 2\}$ . En la figura 4.3 se

### 4.3. Relación entre las fórmulas de Gauss-Radau racionales y Szegő-Lobatto racionales

muestra gráficamente el error relativo

$$\text{Error 3} = \left| \frac{J_n(f_3) - J_\mu(f_3)}{J_\mu(f_3)} \right|$$

como función del número de nodos en la fórmula de cuadratura, mientras que los resultados numéricos, junto con el parámetro  $\tilde{\beta}_n$ , se muestran en la Tabla 4.6 para algunos valores  $n$ .

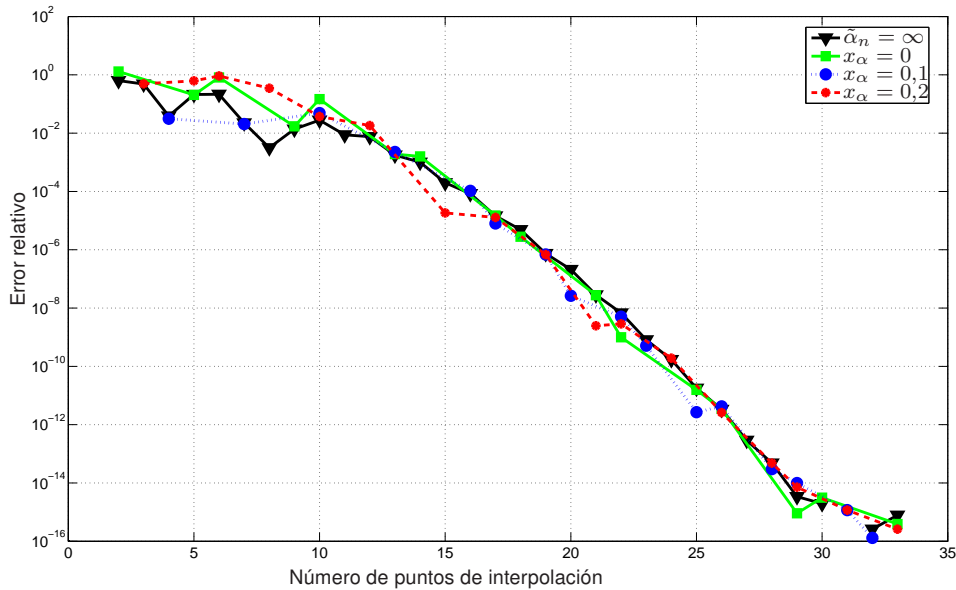


Figura 4.3: Errores relativos en las fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales con el último polo fijado en  $\tilde{\alpha}_n$  o con un nodo prefijado en  $x_\alpha$  para la estimación de  $J_\mu(f_3)$ , donde  $f_3$  viene dado por (4.62). (Para  $n = 31$ , obtenemos con el último polo fijo en  $\tilde{\alpha}_n = \infty$  que Error 3 = 0.)

$n$	$\tilde{\alpha}_n = \infty$ Error 3	$x_\alpha = 0$ Error 3	$\tilde{\beta}_n$	$x_\alpha = 0,1$ Error 3	$\tilde{\beta}_n$	$x_\alpha = 0,2$ Error 3	$\tilde{\beta}_n$
2	$6,32E - 01$	$1,30E + 00$	$9,94E - 01$	/	$1,74E + 00$	/	$5,00E + 00$
3	$4,85E - 01$	/	$1,60E + 02$	/	$-1,81E + 00$	$4,92E - 01$	$-2,17E - 01$
4	$3,87E - 02$	/	$-1,02E + 00$	$3,13E - 02$	$3,62E - 02$	/	$1,62E + 00$
5	$2,12E - 01$	$2,04E - 01$	$-1,25E - 02$	/	$1,53E + 00$	$6,22E - 01$	$-8,20E - 01$
8	$3,15E - 03$	/	$-1,04E + 00$	/	$1,35E + 00$	$3,46E - 01$	$3,59E - 01$
9	$1,37E - 02$	$1,71E - 02$	$-2,51E - 02$	/	$-2,60E + 00$	/	$2,46E + 01$
16	$8,41E - 05$	/	$-1,10E + 00$	$1,05E - 04$	$-2,30E - 01$	/	$-7,84E + 00$
17	$1,44E - 05$	$1,49E - 05$	$-5,02E - 02$	$7,99E - 06$	$9,48E - 01$	$1,28E - 05$	$1,21E - 01$
32	$2,61E - 16$	/	$-1,22E + 00$	$1,30E - 16$	$5,03E - 01$	/	$-2,36E + 01$
33	$7,82E - 16$	$3,91E - 16$	$-1,01E - 01$	/	$6,28E + 00$	$2,61E - 16$	$4,16E - 02$

Tabla 4.6: Errores relativos en las fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau racionales con el último polo fijo  $\tilde{\alpha}_n$  o con nodo prefijado  $x_\alpha$  para la estimación de  $J_\mu(f_3)$ , donde  $f_3$  viene dada por (4.62).

El gráfico muestra que globalmente las cuadraturas se comportan igualmente bien, pero localmente pueden ser a veces una mejores que otras, o no existir alguna de ellas. Nótese que las cuadraturas de Gauss-Radau racionales no existen para

$$n \in \begin{cases} \{3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31, 32\} & \text{si } x_\alpha = 0 \\ \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33\} & \text{si } x_\alpha = 0,1 \\ \{2, 4, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 23, 25, 27, 30, 32\} & \text{si } x_\alpha = 0,2. \end{cases}$$

Así, para asegurar la existencia de la fórmula de cuadratura para todo  $n$ , es mejor fijar el último polo  $\tilde{\alpha}_n$  en lugar del último nodo  $x_\alpha$ .

# Open problems

## 1. Characterization of positive Gauss-type quadrature formulas with prescribed nodes inside the interval of integration.

In the second chapter we studied the characterization of  $n$ -point positive Gauss-type quadrature formulas with a prescribed node inside the interval of integration and maximal domain of validity, already done in [12], by passing to the unit circle. Contrary to the classical Gauss-Radau rules, the quadrature formulas here does not always exist, depending on the measure and the location of the prescribed interior node. The case of two prescribed interior nodes has been also characterized in [12], taking advantage of a result due to Shohat (see [106]) concerning the location of the zeros of quasi-orthogonal polynomials of degree two. Thus, it is an open question to characterize  $n$ -point positive Gauss-type quadrature formulas with an arbitrary number of prescribed nodes inside the interval of integration and maximal domain of validity. This could be done by considering orthogonal polynomials with respect to variable-signed measures or by studying properties of the zeros of quasi-orthogonal polynomials of an arbitrary degree.

## 2. Characterization of positive quadrature formulas on the unit circle with prescribed nodes

In the second chapter we have revised that a one parameter family of positive  $n$ -point Szegő quadrature formulas can be constructed with exactness in  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$ . This parameter, that must be of modulus one, can be chosen in order to fix a node on the quadrature rule. Thus, a unique positive  $n$ -point Szegő-Radau quadrature rule always exist with exactness also in  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$ .

A characterization of positive Szegő-Lobatto rules has been also revised. Here, the domain of exactness is  $\Lambda_{-(n-2),n-2}$ , and the quadratures depend on one parameter located in an arc inside the unit circle. So we have a one parameter family of positive  $n$ -point Szegő-Lobatto quadrature formulas with the exception that if both prescribed nodes are accidentally roots of a para-orthogonal polynomial of degree  $n - 1$ , then the rule has  $n - 1$  nodes (that is, the corresponding  $(n - 1)$ -point Szegő quadrature formula is exact in  $\Lambda_{-(n-2),n-2}$  and has the two prescribed nodes).

A current research problem (see [12] in the list of published papers) is to show how the free parameter in positive  $n$ -point Szegő-Lobatto quadrature formulas can be used in order to fix a third node. Here, contrary to the previous cases, the existence is not always guaranteed and depend on the measure on the unit circle and on the location of the three nodes.



Thus, it is an open problem to characterize positive quadrature formulas on the unit circle with an arbitrary number of prescribed nodes and maximal domain of exactness. A useful result may be the characterization of positive quadrature formulas on the unit circle and exactness in  $\Lambda_{-(n-1-k),n-1-k}$  for  $k \geq 0$ , due to F. Peherstorfer (see [97, Theorem 3.1]).

**3. Rational positive quadrature formulas on the unit circle and intermediate domain of exactness**

We have mentioned in the previous open problem the result due to F. Peherstorfer about a characterization of positive quadrature formulas on the unit circle and exactness in  $\Lambda_{-(n-1-k),n-1-k}$  for  $k \geq 0$ . We find of interest to extend this result to the context of rational quadrature formulas on the unit circle.

**4. Rational positive quadrature formulas on the unit circle with an arbitrary number of prescribed nodes**

Szegő, Szegő-Radau and Szegő-Lobatto rational quadrature formulas have been characterized in the literature in recent years essentially by A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad. A next step would be to investigate how the fixed poles of the rational spaces may have influence in the election of the appropriate free parameter that characterizes the rational Szegő-Lobatto rules in order to fix a third node. And even more, it is also an open question to characterize such rules with an arbitrary number of fixed nodes.

**5. Study of a particular family of weight functions for the interval**

In Remark 3.3.5 we already commented as an open problem to study the properties of the orthogonal polynomials and the corresponding quadrature formulas associated to the weight function  $\mu_p$  on  $[-1, 1]$ , related with the weight function  $\check{\mu}_p$  given by (3.41) by the Joukowski transformation. Similarly, it is of interest to provide new examples of weight functions by following the procedure explained in Subsection 3.2, which allowed us as an application to approximate the Weierstrass operator, the Poisson kernel and some strong Stieltjes distributions.

**6. Moebius transformations and orthogonality**

We have shown in Subsection 3.4 how the Cayley transformation can be used in order to relate integrals over the real line and on the unit circle. Since this transformation is a particular case of a Moebius transformation, we can think to investigate a similar approach by using these more general transformations.

The use of Moebius transformations has been already used in the context of Orthogonal Rational Functions in [94] and [124].

**7. Connection between multi-point rational approximants**

In Subsection 2.1.3 we extended the relation between the Cauchy and Herglotz-Riesz transformations of two measures related by the Joukowski transformation, to the corresponding rational approximants. Such approximants are completely related to the quadrature formulas considered in Chapters 1 and 2. It is known that the

### Open problems

---

rational quadrature formulas considered in Chapter 4 are connected with certain multi-point rational approximants to the Cauchy and Herglotz-Riesz transformations, so it is reasonable to think if a similar approach to the one presented in Subsection 2.1.3 could be done in the rational context.

# Conclusions

The birth of the study of orthogonal polynomials on the unit circle dates back 1939, when Gabor Szegő published the Chapter 11 of his famous book *Orthogonal Polynomials*. His connection between orthogonal polynomials with respect to measures on the interval and on the unit circle related by the Joukowski transformation (Theorem 11.5) motivated to start studying connections between the interval and the unit circle in orthogonality questions. In particular, a first connection between quadrature formulas in this way was done by A. Bultheel, L. Daruis and P. González-Vera in 2001.

This Doctoral Dissertation provides a lot of new links between the concepts “orthogonality” and “quadrature formulas” from the unit circle to the interval and vice versa.

A first connection between finite intervals of the real line (without loss of generality, the interval  $[-1, 1]$ ) and the unit circle has been analyzed by the use of the Joukowski transformation. It has been shown that this technique let us present a simpler and extended proof of a result due to Sloan and Smith (1982) about the convergence of product integration rules based upon Gauss-type nodes and to obtain new error bounds for such rules. Also, a simpler proof for the characterization of Gauss-type quadrature formulas with a prescribed node inside the interval of integration has been recovered from this technique, including a detailed algorithm for their efficient computation. Certain rational approximants to the Cauchy and the Herglotz-Riesz transform of two measures on the interval and on the unit circle respectively, related by the Joukowski transformation and an analysis of the  $L_2$  convergence with respect to a positive measure on the interval of certain sequences of interpolating polynomials to functions by taking some special elections on the nodes have been also linked in the same way. The study of the exact velocity of convergence and asymptotics for the  $n$ -th root of the rational approximants studied here, along with an extension of the well known Erdős-Turán theorem, have been studied.

A second connection between unbounded intervals of the real line and the unit circle has been considered on the third chapter. Here, the use of the Joukowski transformation is not appropriate. First, it has been proved how the Hermite weight function on the real line is related to the Rogers-Szegő weight function on the unit circle. Thus, taking advantage of this link, we have characterized quadrature formulas for the computation of integrals with respect the Hermite weight of periodic functions. These ideas have been then extended for more general weight functions on the real line, where we have seen that Szegő and interpolatory rules can be applied for the computation of weighted integrals on the real line of periodic functions. Some applications to problems in Approximation Theory follows from this approach: estimations for the Weierstrass operator, the Poisson kernel and some strong Stieltjes distributions. We have applied the connection with the unit circle also by considering applications to the computation of the Fourier transform under the presence of nearby polar singularities. And finally, the

---

## Conclusions

---

approximation of weighted integrals on the real line for non periodic functions has been carried out, by using now a connection between the real line and the unit circle making through the Cayley transform.

It is very well known that classical Gaussian rules provides poor estimations when dealing with the approximation of integrals whose integrands has singularities near the interval of integration. This reason justifies the motivation to consider connections between  $[-1, 1]$  and the unit circle concerning the concepts “orthogonality” and “quadrature formulas”, but now in spaces of rational functions. Thus, in the last chapter of this Doctoral Dissertation we make use again of the Joukowski transformation to link first rational Gauss-type and rational Szegő-type quadrature formulas, proving that certain restrictions on the last pole of the rational spaces are required. Secondly, extensions of the characterization of Gauss-type quadrature formulas with a node prescribed inside the interval of integration to the rational context have been duly analyzed by passing to the unit circle, and considering certain symmetric rational Szegő-Lobatto quadrature formulas.

Several illustrative numerical examples of the theoretical results obtained in this Doctoral Dissertation have been carried out with the aim to provide a more complete analysis and showing an evidence of the applicability of our results in mathematical problems. We have also presented a list of several open questions that have appeared during the development of this work, and that they are interesting objects for future research.

# List of published papers

This Doctoral Dissertation contains the following papers that have been already published or submitted for publication:

- In Chapter 2

[1] **R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and F. Perdomo-Pío**, *Orthogonality, interpolation and quadratures on the unit circle and the interval  $[-1, 1]$* , J. Comp. Appl. Math. 235 (2010), 966-981.

[2] **R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and F. Perdomo-Pío**, *Rational approximants associated with measures supported on the unit circle and the real line*, J. Comp. Appl. Math. 236 (2011), 107-117.

[3] **A. Bultheel, R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and F. Perdomo-Pío**, *Computation of Gauss-type quadrature rules with some preassigned nodes*, Jaen J. Approx. 2(2) (2010), 163-191.

- In Chapter 3

[4] **R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and F. Perdomo-Pío**, *Quadrature formulas associated with Rogers-Szegő polynomials*, Comp. Math. Appl. 57 (2009), 308-323.

[5] **R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and F. Perdomo-Pío**, *An application of Szegő polynomials to the computation of certain weighted integrals on the real line*, Numer. Algor. 52 (2009), 273-293.

[6] **R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and F. Perdomo-Pío**, *On the computation of the Fourier transform under the presence of nearby polar singularities*, New York J. Math. 17a (2011), 1-20.

[7] **P. González-Vera, F. Perdomo-Pío and M. Stessin**, *Quadratures and orthogonality associated with the Cayley transform* (submitted).

- In Chapter 4

[8] **A. Bultheel, R. Cruz-Barroso, K. Deckers and F. Perdomo-Pío**, *Positive rational interpolatory quadrature formulas on the unit circle and the interval*, Appl. Numer. Math. 60 (2010), 1286-1299.

[9] **A. Bultheel, K. Deckers and F. Perdomo-Pío**, Rational Gauss-Radau and rational Szegő-Lobatto quadrature on the interval and the unit circle respectively, *Jaen J. Approx.* 3(1) (2011), 15-66.

Moreover, as related works we also list the following papers that have been published or in preparation:

- [10] **R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and F. Perdomo-Pío**, *On the computation of the coefficients in a Fourier series expansion*, In: B.H.V. Topping et al. ed., *Innovation in Engineering Computational Technology*, Saxe-Coburg Publications, Stirling, Scotland (2006), 347-470.
- [11] **A. Bultheel, R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and F. Perdomo-Pío**, *Computation of symmetric Szegő-type quadrature*, *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza.* 33 (2010). 177-196.
- [12] **P. González-Vera, R. Cruz-Barroso, C. Díaz-Mendoza and F. Perdomo-Pío**, *Szegő quadrature fórmulas with three prescribed nodes*, (in preparation).

# Bibliography

- [1] **M. Abramowitz and I.A. Stegun**, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York, Dover, 1972.
- [2] **N.I. Akhiezer**, *Theory of approximation*, Translated by Charles J. Hyman Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1965.
- [3] **N.I. Akhiezer**, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Hafner, New York, 1965.
- [4] **N. M. Atkishiyev and Sh. M. Nagiyev**, *On Rogers-Szegő polynomials*, J. Phys. A: Math. Gen. 27 (1994), L611-L615.
- [5] **G.A. Baker and P. Graves-Morris**, *Padé Approximants*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge Univ. Press. 1996.
- [6] **M. Bello Hernández, F. Cala Rodríguez, J.J. Guadalupe and G. López Lagomasino**, *Convergence rate of Padé-type approximants for Stieltjes functions*, J. Comp. Appl. Math. 99 (1998), 47-53.
- [7] **W. Blaschke** *Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse 67 (1915), 194-200.
- [8] **A. Branquinho, L. Golinskii and F. Marcellán**, *Orthogonal polynomials and rational modification of the Lebesgue measure on the unit circle. An inverse problem*, Compl. Var. 38(2) (1999), 137-154.
- [9] **C. Brezinski**, *Padé-Type Approximation and General Orthogonal Polynomials*, ISNM 50, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1980.
- [10] **M.I. Bueno and F. Marcellán**, *Darboux transformation and perturbation of linear functionals*, Lin. Alg. Appl. 384 (2004), 215-242.
- [11] **A. Bultheel, R. Cruz-Barroso, K. Deckers and P. González-Vera**, *Rational Szegő quadratures associated with Chebyshev weight functions*, Math. Comp. 78 (2009), 1031-1059.

---

## Bibliography

---

- [12] **A. Bultheel, R. Cruz-Barroso and M. Van Barel**, *On Gauss-type quadrature formulas with prescribed nodes anywhere on the real line*, *Calcolo*. 47(1) (2010), 28-41.
- [13] **A. Bultheel, L. Daruis and P. González-Vera**, *A connection between quadrature formulas on the unit circle and the interval  $[-1, 1]$* , *Appl. Numer. Math.* 132 (2001), 1-14.
- [14] **A. Bultheel, L. Daruis and P. González-Vera**, *Positive interpolatory quadrature formulas and para-orthogonal polynomials*, *J. Comp. Appl. Math.* 179 (2005), 97-119.
- [15] **A. Bultheel, L. Daruis and P. González-Vera**, *Quadrature formulas on the unit circle with prescribed nodes and maximal domain of validity*, *J. Comp. Appl. Math.* 231(2) (2009), 948-963.
- [16] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad**, *A Favard theorem for orthogonal rational functions on the unit circle*, *Numer. Algor.* 3(1) (1992), 81-89.
- [17] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad**, *Computation of rational Szegő-Lobatto quadrature formulas*, *Appl. Numer. Math.* 60 (2010), 1251-1263.
- [18] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad**, *Orthogonality and quadrature on the unit circle*, in: C. Brezinski, L. Gori and A. Ronveaux Eds., *Orthogonal Polynomials and their Applications*, IMACS Ann. Comput. Appl. Math. 9 (Baltzer, Basel, 1991), 205-210.
- [19] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad**, *On the convergence of multipoint Padé-type approximants and quadrature formulas on the unit circle*, *Numer. Algor.* 13 (1996), 321-344.
- [20] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, and O. Njåstad**.- *Orthogonal rational functions*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, Cambridge University Press, 1999.
- [21] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad**.- *Orthogonal rational functions and interpolatory product rules on the unit circle: III. Convergence of general sequences*, *Analysis* 20 (2000), 99-120.
- [22] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad**, *Orthogonal rational functions and interpolatory product rules on the unit circle.- II: quadrature and convergence*, *Analysis* 18 (1998), 185-200.
- [23] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad**, *Orthogonal rational functions and interpolatory product rules on the unit circle.- III: convergence of general sequences*, *Analysis* 20 (2000), 99-120.
- [24] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad**, *Orthogonality and boundary interpolation*. In A.M. Cuyt, editor, *Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation II*, (1994) pages 37-48. Kluwer



## Bibliography

---

- [25] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad**, *Quadrature formulas on the unit circle and two-point Padé approximation*, In: A.M. Cuyt (Ed.) *Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation II*, Kluwer, Dordrecht (1994), 303-318.
- [26] **Bultheel A., P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad**, *Quadrature formulas on the unit circle based on rational functions*, *J. Comp. Appl. Math* 50(1-3) (1994), 159-170.
- [27] **Bultheel A., P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad**, *Rates of convergence of multipoint rational approximants and quadrature formulas on the unit circle*, *J. Comp. Appl. Math.* 77(1-2) (1997), 77-102.
- [28] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad**, *Rational quadrature formulas on the unit circle with prescribed nodes and maximal domain of validity*, *IMA J. Numer. Anal.* 30 (2010) 940-963.
- [29] **F. Cala Rodríguez and G. López-Lagomasino**, *From Padé to Padé-type approximants. Exact rate of convergence*, *Proc. Second. Int. Conf. Approx. and Opt. in the Caribbean*. Ed. by M. Florenzano et. al., Peter Land Series in Approx. and Opt. 8 (1995), 155-163.
- [30] **F. Cala Rodríguez and G. López-Lagomasino**, *Multipoint Padé-type approximants. Exact rate of convergence*, *Contr. Approx.* 14(2) (1998), 259-272.
- [31] **F. Cala Rodríguez and H. Wallin**, *Padé-type approximants and a summability theorem by Eiermann*, *J. Comp. Appl. Math.* 39 (1992), 15-21.
- [32] **B. de la Calle Ysern**, *Error bounds for rational quadrature formulae of analytic functions*, *Numer. Math.* 101 (2005), 251-271.
- [33] **B. de la Calle Ysern and P. González-Vera**, *Rational quadrature formulae on the unit circle with arbitrary poles*, *Numer. Math.* 107 (2007), 559-587.
- [34] **M.J. Cantero, R. Cruz-Barroso and P. González-Vera**, *A matrix approach to the computation of quadrature formulas on the unit circle*, *Appl. Numer. Math.* 58 (2008), 296-318.
- [35] **M.J. Cantero, L. Moral, F. A. Grünbaum and L. Velázquez**, *Matrix-valued Szegő polynomials and quantum random walks*, *Commun. Pure Appl. Math.* 63, No. 4 (2010), 464-507.
- [36] **M. Cantero, L. Moral and L. Velázquez**, *Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle*, *Lin. Alg. Appl.* 362 (2003), 29-56.
- [37] **M.J. Cantero, L. Moral and L. Velázquez**, *Measures on the unit circle and unitary truncations of unitary operators*, *J. Approx. Theory* 139 (2006), 430-468.
- [38] **M.J. Cantero, L. Moral and L. Velázquez**, *Minimal representations of unitary operators and orthogonal polynomials on the unit circle*. *Lin. Alg. Appl.* 408 (2005), 40-65.
- [39] **E.W. Cheney**, *Introduction to Approximation Theory*, Chelsea, New York, 1966.
- [40] **T.S. Chihara**, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and Its Applications Series. Gordon and Breach, New York, 1978.

## Bibliography

---

- [41] **T.S. Chihara**, *On quasi-orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 8 (1957), 765-767.
- [42] **R. Cruz-Barroso, L. Daruis, P. González-Vera and O. Njåstad**, *Sequences of orthogonal Laurent polynomials, bi-orthogonality and quadrature formulas on the unit circle*, J. Comp. Appl. Math. 200 (2007), 424-440.
- [43] **R. Cruz-Barroso and S. Delvaux**, *Orthogonal Laurent polynomials on the unit circle and snake-shaped matrix factorizations*, J. Approx. Theory 161 (2009), 65-87.
- [44] **R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and O. Njåstad**, *On bi-orthogonal systems of trigonometric functions and quadrature formulas for periodic integrands*, Numer. Algor. 44 (2007), 309-333.
- [45] **L. Daruis and P. González-Vera**, *Ortogonalidad y cuadratura sobre la circunferencia unidad*, XVIII Escuela Venezolana de Matemáticas, 2005.
- [46] **L. Daruis and P. González-Vera**, *Some results about interpolation with nodes on the unit circle*, Indian J. Pure Appl. Math. (2000), 1273-1296.
- [47] **L. Daruis, P. González-Vera and M. Jiménez-Páiz**, *Quadrature formulas associated with rational modifications of the Chebyshev weight function*. Comp. Math. Appl. 51 (2006), 419-430.
- [48] **P.J. Davis and P. Rabinowitz**, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, New York, 1984.
- [49] **K. Deckers**, *Orthogonal Rational Functions: Quadrature, Recurrence and Rational Krylov*, PhD thesis, 4 February 2009, Department of Computer Science, K.U.Leuven.
- [50] **K. Deckers and A. Bultheel**, *Rational interpolation and quadrature on the interval and on the unit circle*, Technical Report TW574, Department of Computer Science, K.U.Leuven. 2010.
- [51] **K. Deckers, A. Bultheel and J. Van Deun**, *A generalized eigenvalue problem for quasi-orthogonal rational functions*, Technical Report TW571, Department of Computer Science, K.U.Leuven. 2010.
- [52] **K. Deckers, J. Van Deun and A. Bultheel**, *An extended relation between orthogonal rational functions on the unit circle and the interval  $[-1, 1]$* , J. Math. Anal. Appl. 334(2) (2007), 1260–1275.
- [53] **K. Deckers, J. Van Deun and A. Bultheel**, *Computing rational Gauss-Chebyshev quadrature formulas with complex poles: the algorithm*, Advances in Engineering Software 40(8) (2009), 707-717.
- [54] **K. Deckers, J. Van Deun and A. Bultheel**, *Rational Gauss-Chebyshev quadrature formulas for complex poles outside  $[-1, 1]$* , Math. Comp. 77(262) (2008), 967-983.
- [55] **C. Díaz-Mendoza, P. González-Vera and M. Jiménez-Páiz**, *Strong Stieltjes distributions and orthogonal Laurent polynomials with applications to quadratures and Padé approximation*, Math. Comp., Vol. 74, No. 252 (2005), 1843-1870.

## Bibliography

---

- [56] **C. Díaz-Mendoza, P. González-Vera, M. Jiménez-Páiz and R. Orive**, *On certain symmetric strong distributions, two point Padé approximation and related quadrature*, Appl. Numer. Math., Vol 59, No 8 (2009), 2002-2014.
- [57] **D. Dickinson**, *On quasi-orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. 12(2) (1961), 185-194.
- [58] **A. Erdélyi**, *Tables of Integral Transforms*, Vol I, McGraw-Hill, 1954.
- [59] **D. Galetti**, *A realization of the  $q$ -deformed harmonic oscillator: Rogers-Szegő and Stieltjes-Wigert polynomials*, Braz. J. Phys. Vol. 33 No. 1 (2003) 148-157.
- [60] **L. Garza, J. Hernández and F. Marcellán**, *Spectral transformations of measures supported on the unit circle and the Szegő transformation*, Numer. Algor. 49 (2008), 169-185.
- [61] **W. Gautschi**, *A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae*, In: E.B. Christoffel; The Influence of his Work in Mathematics and the Physical Sciences, P. L. Eatzer and F. Fehér editors, Birkhäuser, Basel (1981), 72-147.
- [62] **W. Gautschi**, *Algorithm 726. ORTHPOL: A package of routines for generating orthogonal polynomials and Gauss-type quadrature rules*, ACM Trans. Math. Softw. 20(1) (1994), 21-62.
- [63] **W. Gautschi**, *On the construction of Gaussian quadrature rules from modified moments*, Math. Comp. 24 (1970), 245-260.
- [64] **W. Gautschi**, *Orthogonal Polynomials Computation and Approximation*, Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [65] **W. Gautschi**, *Orthogonal polynomials, quadrature, and approximation: computational methods and software (in matlab)*, In: Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Mathematics 1883, Springer, Berlin (2006), 1-77.
- [66] **Ya.L. Geronimus**, *On the trigonometric moment problem*, Ann. Math. 47(2) (1946), 742-761.
- [67] **Ya. L. Geronimus**, *Orthogonal Polynomials: Estimates, Asymptotic Formulas, and Series of Polynomials Orthogonal on the Unit Circle and on an Interval*, Consultants Bureau, New York, 1961.
- [68] **C. Glader**, *A two parameter family of orthogonal polynomials with respect to a Jacobi-type weight function on the unit circle*, J. Math. Anal. Appl. 240 (1999), 583-599.
- [69] **E. Godoy and F. Marcellán**, *Orthogonal polynomials and rational modifications of measures*, Canad. J. Math. 45 (1993), 930-943.
- [70] **G. Golub**, *Some modified matrix eigenvalue problems*, SIAM Rev.15(2) (1973), 318-334.
- [71] **G.H. Golub and J.H. Welsch**, *Calculation of Gauss Quadrature Rules*, Math. Comp. 23 (1969), 221-230.

---

## Bibliography

---

- [72] **S. González-Pinto, D. Hernández-Abreu and J.I. Montijano**, *An efficient family of strongly A-stable Runge-Kutta collocation methods for stiff systems and DAEs. Part I: Stability and order results*, J. Comp. Appl. Math. 234(4) (2010), 1105-1116.
- [73] **P. González-Vera, G. López-Lagomasino, R. Orive and J.C. Santos**, *On the convergence of quadrature formulas for complex weight functions*, J. Math. Anal. Appl. 189 (1995), 514-532.
- [74] **P. González-Vera, J.C. Santos-León and O. Njåstad**, *Some results about numerical quadrature on the unit circle*, Adv. Comp. Math. 5 (1996), 297-328.
- [75] **W.B. Gragg**, *Positive definite Toeplitz matrices, the Arnoldi process for isometric operators and Gaussian quadrature on the unit circle*, In E.S. Nicholaev Ed., Numer. Meth. Lin. Alg., Moscow University Press, Moscow, (1982), 16-32 (in Russian).
- [76] **W.B. Gragg**, *Positive definite Toeplitz matrices, the Arnoldi process for isometric operators and Gaussian quadrature on the unit circle*, J. Comp. Appl. Math. 46 (1993), 183-198. Se trata de una versión revisada de [75].
- [77] **E. Hille**, *Analytic Function Theory*, Vol. II, Ginn and co., New York, 1962.
- [78] **Q.H. Hou, A. Lascoux and Y.P. Mu**, *Continued fractions for Rogers-Szegő polynomials*, Numer. Algor. 3(5) (2004) 81-90.
- [79] **C. Jagels, L. Reichel**, *Szegő-Lobatto quadrature rules*, J. Comp. Appl. Math. 200 (2007), 116-126.
- [80] **W.B. Jones, O. Njåstad and W.J. Thron**, *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle*, Bull. London Math. Soc. 21 (1989), 113-152.
- [81] **W.B. Jones, O. Njåstad and W.J. Thron**, *Two-point Padé expansions for a family of analytic functions*, J. Comp. Appl. Math. 9 (1983), 105-123.
- [82] **W.B. Jones, W.J. Thron and H. Waadeland**, *A Strong Stieltjes Moment Problem*, Trans. AMS 261 (1980), 503-528.
- [83] **W. Jones and H. Waadeland**, *Bounds for remainder terms in Szegő quadrature on the Unit Circle*, Approx. Comp. In: R.V.M. Zahar editor. International Series of Numerical Mathematics, Vol. 119, Birkhäuser, Basel (1994), 325-346.
- [84] **D. Kincaid and W. Cheney**, *Análisis numérico. Las matemáticas del cálculo científico*, Addison-Wesley Iberoamericana. 1994.
- [85] **A.S. Kronrod**, *Nodes and Weights for Quadrature Formulas (Sixteen-Places Tables)*, Nauka, Moscow 1964. Engl. transl.: Consultants Bureau, New York, 1965.
- [86] **V.I. Krylov**, *Approximate Calculation of Integrals*, The MacMillan Company, New York, 1962.
- [87] **N. Levinson**, *The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction*, J. Math. Phys., Vol. 25 (1947), 261-278.

## Bibliography

---

- [88] **X. Li and F. Marcellán**, Representation of Orthogonal Polynomials for modified measures, *Comm. Anal. Theory Cont. Fract.* 7 (1999), 9-22.
- [89] **B.V. Limaye**, *Functional Analysis*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1981.
- [90] **G. López-Lagomasino and A. Martínez-Finkelshtein**, Rate of convergence of two-point Padé approximants and logarithmic asymptotics of Laurent-type orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* 11 (1995), 255-286.
- [91] **D.S. Lubinsky and E.B. Saff**, Convergence of Padé approximants of partial theta functions and the Rogers-Szegő polynomials, *Constr. Approx.* 3 (1987), 331-361.
- [92] **F. Malmquist**, Sur la détermination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donné de points, C.R. Gièeme Congès des Math. Scand. Gjellerups, Copenhagen, (1926), 253-259.
- [93] **G. Monegato**, On polynomials orthogonal with respect to particular variable-signed weight functions, *Z. Angew. Math. Phys.* 31 (1980), 549-555.
- [94] **O. Njåstad and L. Velázquez**, Wall Rational Functions and Khrushchev's Formula for Orthogonal Rational Functions, *Constr. Aprox.* 30(2) (2009), 277-297.
- [95] **F. Peherstorfer**, A special class of polynomials orthogonal on the unit circle including the associated polynomials, *Constr. Approx.* 12 (1996), 161-185.
- [96] **F. Peherstorfer**, Characterization of positive quadrature formulas, *SIAM J. Math. Anal.* 12 (1981), 935-942.
- [97] **F. Peherstorfer**, Positive trigonometric quadrature formulas and quadrature on the unit circle, *Math. Comp.* 80 No 275 (2011), 1685-1701.
- [98] **P. Rabinowitz**, On the convergence of interpolatory product integration rules based on, Radau and Lobatto points, *Israel J. Math.*, Vol 56, 1 (1986), 66-74.
- [99] **P. Rabinowitz**, The convergence of interpolatory product integration rules, *BIT Num. Math.* 26(1) (1986), 131-134.
- [100] **E.A. Rovba**, Orthogonal systems of rational functions on the segment and quadratures of Gauss-type, *Mathematica Balkanica (N.S.)* 13(1-2) (1999), 187-198.
- [101] **W. Rudin**, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Science, 1991.
- [102] **W. Rudin** *Real and complex analysis*, McGraw-Hill series in Higher Mathematics, 1970.
- [103] **J.C. Santos-León and O. Njåstad**, Domain of validity of Szegő quadrature formulas, *J. Comp. Appl. Math.* 202 (2) (2007), 440-449.
- [104] **J.C. Santos-León**, Error bounds for interpolatory quadrature rules on the unit circle, *Math. Comp.* 70 No. 233 (2001), 281-296.
- [105] **J.C. Santos-León**, Product rules on the unit circle with uniformly distributed nodes. Error bounds for analytic functions, *J. Comp. Appl. Math.* 108 (1999), 195-208.

## Bibliography

---

- [106] **J.A. Shohat**, *On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients*, Trans. Am. Math. Soc. 42 (1937), 461-496.
- [107] **I.H. Sloan and W.E. Smith**, *Properties of interpolatory product integration rules*, SIAM J. Numer. Anal. 14 (1982), 427-442.
- [108] **B. Simon**, *CMV matrices: five years after*, J. Comp. Appl. Math. 208(1) (2007), 120-154.
- [109] **B. Simon**, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1: Classical Theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 54.1, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 2005.
- [110] **B. Simon**, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 2: Expectral Theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 54.2, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 2005.
- [111] **A. Sri Ranga, E.X.L. de Andrade and J.H. McCabe**, *Some Consequences of a symmetry in strong distributions*, J. Math. Anal. Appl. 193(1) (1995), 158-168.
- [112] **J. Stoer and R. Bulirsch**, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [113] **G. Szegő**, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 23, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1975.
- [114] **G. Szegő**, *On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials*. Magyar. Tud. Akad. Kutató Int. Közl. 8 (1963), 255-273.
- [115] **S. Takenaka**, *On the orthogonal functions and a new formula of interpolation*, Japanese Journal of Mathematics 2 (1925), 129-145.
- [116] **G. Valent and W. van Assche**, *The impact of Stieltjes' work on continued fractions and orthogonal polynomials: additional material*, J. Comp. Appl. Math. 65 (1995), 419-447.
- [117] **W. Van Assche**, *Analytic aspects of Orthogonal Polynomials*, Katholieke Universiteit Leuven, 1993.
- [118] **W. Van Assche**, *Orthogonal polynomials in the complex plane and on the real line*, Fields Institute Communications: 14. Fields Institute program on Special Functions, q-series and Related Topics. University of Toronto, June 12-13, 1995, American Mathematical Society. 211-245.
- [119] **J. Van Deun and A. Bultheel**, *A quadrature formula based on Chebyshev rational functions*, IMA J. Numer. Anal. 26(4) (2006), 641-656.
- [120] **J. Van Deun J. and A. Bultheel**, *Orthogonal rational functions and quadrature on an interval*, J. Comp. Appl. Math. 153(1-2) (2003), 487-495.
- [121] **J. Van Deun, A. Bultheel and P. González-Vera**, *On computing rational Gauss-Chebyshev quadrature formulas*, Math. Comp. 75(253) (2006), 307-326.
- [122] **J. Van Deun, K. Deckers, A. Bultheel and J. A. C. Weideman**, *Algorithm 882: Near best fixed pole rational interpolation with applications in spectral methods*, ACM Transactions on Mathematical Software 35(2) (2008), 14:1-14:21.

## Bibliography

---

- [123] **P. Van gucht and A. Bultheel**, *A relation between orthogonal rational functions on the unit circle and the interval  $[-1, 1]$* , Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions 8 (2000), 170-182.
- [124] **L. Velázquez**, *Spectral methods for orthogonal rational functions*, J. Funct. Anal.; 254(4) (2008), 954-986.
- [125] **H. Waadeland**, *A Szegő quadrature formula for the Poisson integral*, J. Comp. Appl. Math. In: C. Brezinski and U. Kulish editors, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), IMACS, (1992), 479-486.
- [126] **J. L. Walsh**, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 20, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1969.
- [127] **D. Watkins**, *Some perspectives on the eigenvalue problem*, SIAM Review, Vol. 35 No. 3 (1993), 430-471.