

Ana Arias García

*Modelos de Colas: Aplicación
en la gestión de un servicio
de atención al público en un
hipermercado.*

Queueing Models: Application in the
management of a customer service in a
hypermarket.

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2017

DIRIGIDO POR

D. Joaquín Sicilia Rodríguez

D. Joaquín Sicilia Rodríguez
Departamento de Matemáticas, Esta-
dística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A D. Joaquín Sicilia, tutor de este trabajo, por la paciencia, la dedicación y los buenos consejos.

A mi familia, porque a pesar de la distancia, he sentido su ánimo y su apoyo incansable día tras día a lo largo de estos años.

A todos los que forman mi pequeña familia canaria.

A Dani, por el buen equipo que hemos formado en esta recta final.

A Carlos, por ser y estar.

Resumen · Abstract

Resumen

Las colas o líneas de espera aparecen con relativa frecuencia en el día a día de cualquier empresa o establecimiento que preste un servicio al público. Hacer que desaparezcan no es una tarea fácil ya que requiere un esfuerzo económico importante y, en muchos casos, no será posible porque la demanda de los clientes es bastante grande. No obstante, con los recursos disponibles, si que se debería intentar reducir la longitud de las colas y el tiempo de permanencia de los usuarios en los sistemas, ya que ello desalienta la llegada de clientes.

Aquí reside la importancia de la Teoría de Colas, la cual se encarga del estudio matemático del comportamiento de estas líneas de espera con el fin de conseguir una optimización aproximada del funcionamiento del sistema de colas y proporcionar a los clientes un buen servicio en un tiempo de espera razonable.

Para ello se utilizan conceptos relacionados con la distribución de variables aleatorias y procesos estocásticos que buscan representar o interpretar el comportamiento del sistema, con el objetivo de tener un mayor conocimiento de las colas y así introducir las modificaciones necesarias para proporcionar un servicio adecuado a los clientes.

A lo largo de esta memoria se definen, caracterizan y clasifican los distintos sistemas de colas, se presentan algunos procesos estocásticos que rigen estos sistemas, y se exponen detalladamente algunos de los modelos más comunes. Posteriormente, y en base a la teoría previamente expuesta, se analiza el sistema de colas de un hipermercado y se muestran los resultados obtenidos.

Palabras clave: *Sistemas de Colas – Tasa de llegada – Tasa de Salida – Intensidad de tráfico – Estaciones de servicio .*

Abstract

Queues or waiting lines normally appear with relative frequency of any company or establishment that provides a service to the public. Making them disappear is not an easy task as they require a big economic effort and, in many cases, this is not possible because customer demand is quite large. However, with the available resources, we must try to reduce the length of the queues and the time the users are in the systems, since this discourages the arrival of customers. Here lies the importance of Queue Theory, which is responsible for the mathematical study of the behavior of these waiting lines in order to achieve an approximate optimization of the function of the queuing system and provide customers with an adequate service with a reasonable waiting time.

In order to do this, we use concepts related to the distribution of random variables and stochastic processes that want to represent or interpret the behavior of the system, in order to have a better knowledge of the queues and thus introduce the necessary modifications to provide an adequate service to the clients.

Throughout this memory, different queuing systems are defined, characterized and classified, some stochastic processes are introduced that govern these systems, and some of the most common models are presented in detail. Finally, based on the theory previously exposed, the queuing system of a hypermarket is analyzed and the results obtained are shown.

Keywords: *Queueing systems – Arrival rate – Service rate – Traffic intensity– Service channels or stations.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Motivación y objetivos	1
2. Descripción de un sistema de colas	3
2.1. Características de los sistemas de colas	4
2.1.1. Distribución de llegada de clientes	4
2.1.2. Patrón de servicio	5
2.1.3. Tamaño de la población de los clientes	5
2.1.4. Capacidad del sistema	5
2.1.5. Número de canales de servicio	5
2.1.6. Número de etapas del servicio	6
2.1.7. Disciplina de cola	6
2.1.8. Otras Características	7
2.2. Medidas de eficacia y rendimiento de un sistema de colas	8
2.3. Notación y clasificación	9
2.3.1. Nomenclatura básica	9
2.3.2. Descripción y clasificación de un sistema de colas	10
2.3.3. Análisis de la cola D/D/1	11
3. Algunos procesos estocásticos que rigen los sistemas de colas	15
3.1. Proceso de Poisson	15
3.2. Equivalencia entre la distribución de la tasa de llegada y del tiempo entre llegadas	18
3.3. Proceso de Nacimiento y Muerte	20
3.4. Fórmula de Little	21

4. Modelos de colas poissonianas	23
4.1. Modelo I: sistema monocanal con población ilimitada $M/M/1$	23
4.2. Modelo II: sistema multicanal con población ilimitada $M/M/c$	25
4.3. Modelo III: sistema monocanal con población limitada $M/M/1/m$...	27
4.4. Modelo IV: sistema multicanal con población limitada $M/M/c/m$	29
5. Estudio del sistema de colas de un hipermercado	31
5.1. Distribuciones de las llegadas y salidas de clientes	31
5.2. Resultados	35
6. Conclusiones y futuras líneas de trabajo	39
Bibliografía	41
Apéndice	43
A.1. Ejemplos de los datos recogidos.	43
Lista de Figuras	43
Poster	49

Introducción

En multitud de ocasiones, todos hemos experimentado la molestia de tener que esperar haciendo cola para que nos atiendan a la hora de resolver algún asunto. Esta situación es cada vez más frecuente como consecuencia del crecimiento de la población, lo que da lugar a una sociedad cada vez más urbanizada y congestionada. Por tanto, la existencia de las colas nos parece algo habitual y natural en cualquier situación o actividad. Así, por ejemplo, pasamos periodo de tiempo en el coche mientras estamos desesperados en un atasco, esperamos para ser atendidos en el médico, hacemos cola en un supermercado para pagar, etc.

Este fenómeno surge cuando la demanda real de un servicio es superior a la capacidad que existe para proporcionarlo en un intervalo de tiempo. Así, para que exista una cola, tiene que haber llegadas de clientes demandando un servicio a uno o varios servidores, los cuales tienen una cierta capacidad para atender a los demandantes. Si el servidor no está disponible inmediatamente y el cliente decide esperar, se formaría la línea de espera.

La Teoría de Colas es el estudio matemático del comportamiento de estas líneas de espera. En general, la llegada de clientes suele ser aleatoria y, por ello se utilizan conceptos relacionados con las variables aleatorias y los procesos estocásticos. Estos conceptos matemáticos proporcionan tanto una base teórica sobre el tipo de atención que podemos esperar cuando se solicita un determinado servicio, como la forma en la cual el sistema puede ser diseñado para proporcionar un determinado grado de servicio a sus clientes. Esta teoría se ha desarrollado en un intento de predecir fluctuaciones de la demanda a partir de datos de observación, para establecer así un modo de obrar que proporcione a los clientes un servicio adecuado con una espera tolerable. Al mismo tiempo, aprovecha también el conocimiento básico de una situación de colas con el fin de establecer un mejor control sobre la atención a

los clientes.

El objetivo de la Teoría de Colas no es directamente la optimización, se trata más bien de describir, explorar, conocer y comparar varias situaciones de colas, y conseguir así indirectamente una optimización aproximada del funcionamiento del sistema. En general, a diferencia de la Teoría de la Optimización que tiene como principal objetivo maximizar o minimizar una o varias funciones sujeta a ciertas restricciones, la Teoría de Colas es, precisamente, una teoría matemática descriptiva. Ésta intenta formular, interpretar y predecir, con el propósito de adquirir un mejor conocimiento de las colas y con el fin de introducir las modificaciones oportunas para conducir adecuadamente el servicio de los clientes.

El origen de la Teoría de Colas se remonta a principios del siglo XX. Se fundamentó en el esfuerzo del empleado de la Compañía Telefónica Danesa en Copenhague, Agner Kraup Erlang (Dinamarca 1878-1929) cuando, en 1909, se dispuso a analizar la congestión del tráfico telefónico con el objetivo de cumplir la demanda incierta de servicios en el sistema telefónico. Su trabajo consistió en determinar el número óptimo de líneas telefónicas para manejar frecuencias de llamadas prescritas, mediante la aplicación de técnicas establecidas de probabilidad. Para considerar las conversaciones telefónicas como una línea de espera, Erlang tuvo que definir primero lo que significarían las llegadas, cuales serían los servidores y lo que se consideraría la línea de espera en sí. Sus investigaciones representaron el inicio de un nuevo cuerpo teórico conocido actualmente como Teoría de Colas o de Líneas de Espera. Esta materia constituye hoy en día una herramienta valiosa en los negocios debido a que un gran número de problemas de tipo comercial pueden caracterizarse como problemas de congestión llegada-salida.

Motivación y objetivos

Las colas o líneas de espera tienen un protagonismo indiscutible en el mundo actual. En general, esperamos para ser atendidos en numerosas ocasiones en nuestro día a día, fruto de una sociedad cada vez más consumista y en constate crecimiento. La mejora del rendimiento de estas líneas de espera puede ser clave para la productividad y eficiencia de numerosas empresas o establecimientos que prestan servicio a la población. Además, nos ayudaría a reducir el tiempo que perdemos esperando a que atiendan o sirvan nuestras demandas de servicio.

Fue en la asignatura de Modelos de Investigación Operativa donde comprendí su gran importancia y descubrí que algo tan común como las colas puede ser objeto de profundos estudios, imprescindibles para el buen rendimiento de una empresa que presta atención al público.

Cuando más tarde, cumplimenté mis horas de la asignatura Practicas Externas en las oficinas de un hipermercado, ví una gran oportunidad de trasladar los conocimientos adquiridos en el aula al mundo real. Así, se le propuso a esta empresa la realización de un estudio de su sistema de colas con el objetivo de determinar su rendimiento y eficiencia.

Este trabajo se compone de varios capítulos en los que, previamente y dentro de un marco teórico, se describen y caracterizan los sistemas de colas, analizando posteriormente algunos de los modelos de líneas de espera más comunes y mostrando indicadores que ayudan a conocer el buen o mal funcionamiento de cada uno de ellos. Posteriormente, se describe y discute el problema de colas que existe en el hipermercado y se muestran los resultados obtenidos.

Descripción de un sistema de colas

Las colas constituyen un aspecto de la vida moderna que podemos encontrar continuamente en nuestras actividades diarias. Esta espera tiene una explicación relativamente simple: en la instalación donde se atiende a los clientes, existe una mayor demanda de servicio que servidores disponibles. Las razones pueden ser diversas, por ejemplo, la escasez de servidores por la falta de recursos económicos de la empresa, la baja productividad de los mismos para proveer el nivel de servicio necesario que evite la espera, un espacio demasiado limitado para proporcionar los servicios demandados, etc. Estas limitaciones se pueden eliminar invirtiendo y añadiendo recursos a los elementos que aumenten la capacidad del sistema. En estos casos las pregunta son: ¿Tenemos el número adecuado de servidores? ¿Compensa comprar nueva maquinaria? ¿O mejor invertimos en salas de espera? En ese caso ¿cómo de grandes?. La Teoría de Colas intenta responder a estas preguntas utilizando métodos matemáticos analíticos que describen el comportamiento y la evolución de las líneas de espera.

Un sistema de colas se puede describir como un conjunto de clientes que llegan a un establecimiento buscando un servicio, ellos esperan para ser atendidos si éste no es inmediato, y abandonan el sistema una vez que han sido servidos. Un sistema básico de este tipo puede verse esquemáticamente del siguiente modo:



Figura 2.1. Sistema básico de colas

Aunque muchos sistemas se puedan representar como en la figura 2.1, cuando se analice un sistema en concreto, deberá diseñarse una representación del sistema lo más exacta posible, caracterizando detalladamente los procesos subyacentes y teniendo en cuenta el elevado número de variables y funciones a definir. Así, en el siguiente epígrafe se detallan los aspectos más importantes que configuran un sistema de colas.

2.1. Características de los sistemas de colas

Las características básicas a tener en cuenta para definir adecuadamente un sistema de colas son:

- (a) Distribución de llegada de los clientes.
- (b) Patrón de servicio.
- (c) Tamaño de la población de los clientes.
- (d) Capacidad del sistema.
- (e) Número de canales de servicio.
- (f) Número de etapas de servicio.
- (g) Disciplina de cola.
- (h) Otras características.

Estos rasgos básicos nos proporcionan una descripción adecuada de un sistema de colas. Describiremos detalladamente cada uno de ellos.

2.1.1. Distribución de llegada de clientes

El patrón de llegadas de los clientes a un sistema de colas, o input, suele ser medido en términos del promedio de llegadas de usuarios por unidad de tiempo (tasa media de llegadas) o por el tiempo medio comprendido entre llegadas sucesivas (tasa media entre llegadas). Basta una de estas medidas para describir el sistema de entradas debido a su clara relación.

Si la corriente de entrada es totalmente conocida o determinista, el patrón de llegada está totalmente determinado, tanto por la tasa media de llegadas como por el tiempo medio entre éstas. Habitualmente, en los sistemas de colas, las llegadas no se conocen con precisión y las mismas suelen ser aleatorias. En este caso se deben caracterizar mediante distribuciones de probabilidad asociadas a estos procesos aleatorios.

El último factor a tener en cuenta en el estudio de los patrones de llegada, es la manera en que los propios patrones cambian con el tiempo. Si éstos no sufren ningún cambio a lo largo del tiempo (esto es, las probabilidades que describen el proceso de entrada son independientes del tiempo) se conoce como sistema de colas con régimen estacionario o permanente; en caso contrario, se dice no-estacionario.

2.1.2. Patrón de servicio

Algunos de los puntos ya discutidos en la distribución de llegadas, se puede aplicar también en el patrón de servicio. Éste puede ser descrito tanto por el número de clientes servidos por unidad de tiempo como por el tiempo requerido para servir a un cliente.

Los servidores pueden tener un tiempo de servicio fijo o constante, o bien ser éste variable, en cuyo caso hay que especificar la distribución que sigue la salida de clientes o el tiempo de servicio.

Por último, al igual que la distribución de llegadas, el patrón de servicio puede ser estacionario o permanente (no depende del tiempo) o no-estacionario, variando con el tiempo transcurrido.

2.1.3. Tamaño de la población de los clientes

El tamaño de la población de un sistema de colas hace referencia al número de clientes que puede demandar el servicio. Puede ser ilimitada, es decir, el sistema es susceptible de ser visitado por un gran número de clientes, todos aquellos que así lo deseen, considerándose entonces que la población es infinita. Un claro ejemplo es una gasolinera, la cual servirá a tantos clientes como acudan a los surtidores reclamando un servicio. En caso contrario, hablamos de un tamaño de población limitado, donde solo se atiende a un número determinado de clientes. Ésto sucede, por ejemplo, en la consulta de un médico, donde se atiende solamente a un determinado número de citas al día.

2.1.4. Capacidad del sistema

En algunos sistemas de colas existe una limitación física debido al tamaño del recinto destinado a la línea de espera. Así, cuando ésta alcanza una cierta longitud no se permite que entren más clientes al sistema, hasta que el espacio esté disponible por la terminación de algún servicio. A estos casos se les denomina situaciones de cola con capacidad limitada.

2.1.5. Número de canales de servicio

Llamamos canales a las estaciones de servicio paralelas dispuestas para servir a los clientes. Es evidente que es preferible utilizar sistemas multiservidor con una única línea de espera para todos los clientes, que con una cola por servidor. Por tanto, cuando se habla de canales de servicio paralelos, se habla generalmente de una cola que alimenta a varios servidores, mientras que el caso de colas independientes se asemeja a múltiples sistemas con sólo un servidor.

En la figura 2.1 se representó una cola mono-canal, mientras que en la figura 2.2 se presentan dos variantes del sistema multicanal. El primero tiene una sola cola

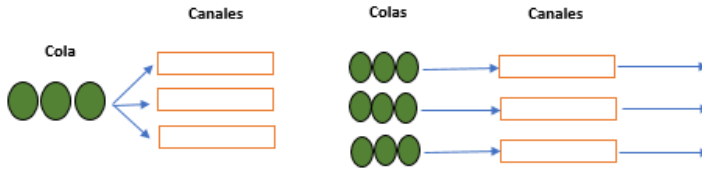


Figura 2.2. Sistema de colas multicanal

de espera conjunta, como podría darse, por ejemplo, en una peluquería, donde los clientes esperan en una única cola hasta que uno de los asientos quede libre. Mientras que en el segundo hay una sola cola para cada canal, como podemos encontrar en un parque temático, donde para cada atracción existe una única fila.

2.1.6. Número de etapas del servicio

Un sistema de colas puede tener una sola etapa o ser multietapa, es decir, el cliente puede demandar un único servicio o bien solicitar ser atendido por varios servidores, que ejecutan diferentes tareas. Una puesta a punto de un coche en un taller es un claro ejemplo de este último caso, ya que tendrán que pasar revisión distintas partes del vehículo. En algunos sistemas de colas con varias etapas se puede admitir la vuelta atrás o “reciclado”. Esta práctica es común en los procesos de fabricación, donde los controles de calidad se llevan a cabo tras ciertas etapas y aquellas partes que no cumplen objetivos de calidad son devueltas para su reciclaje. Un sistema multietapa se ilustra en la figura 2.3

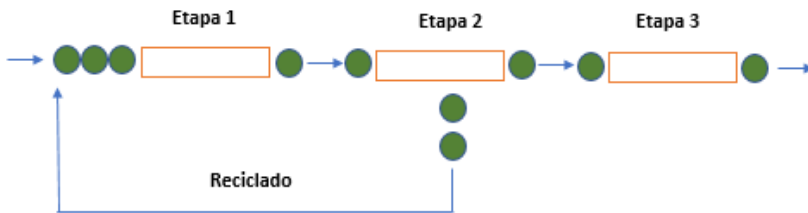


Figura 2.3. Sistema multietapa con retroalimentación

2.1.7. Disciplina de cola

La disciplina de cola hace referencia a la manera en la que los clientes son seleccionados para el servicio de entre todos los que componen la cola.

La disciplina más común en la vida cotidiana es FIFO, “primero en llegar, primero en ser servido” (toma el nombre de sus siglas en inglés, “first in, first out”). Pero, aunque es la más habitual, no es la única. La disciplina LIFO, “último en llegar, primero en salir”, también se usa habitualmente en muchos procesos de colas. También podemos encontrar colas SIRO, en las que la selección para el servicio se hace de manera aleatoria, independientemente del tiempo en cola.

Por último, existen una variedad de sistemas de colas que se rigen mediante reglas de secuencia atendiendo a ciertas prioridades. Hay dos situaciones generales que se pueden dar en esta disciplina. En la primera, llamada en inglés “preemptive”, los clientes tienen grado de prioridad. Si un cliente llega a la cola con un orden de prioridad superior al cliente que está siendo atendido, éste se retira dando paso al más importante. Dos nuevos casos pueden derivar de esta situación: la atención al cliente retirado vuelve a empezar o bien, retorna al punto en el que se había quedado. La segunda situación, se denomina “no-preemptive”. En ella, el cliente con mayor prioridad se pone a la cabeza de la cola, pero no es atendido hasta que el cliente que está siendo servido termina. El número de clases de prioridad puede ser cualquier número natural mayor que 1, siendo muy probable que se dé el caso de tener a más de un cliente en el sistema con la misma prioridad. Por ello, será necesario también especificar la disciplina para seleccionarlos, siendo lo más habitual hacerlo por orden de llegada, lo que equivale a una disciplina FIFO dentro de cada clase prioritaria.

2.1.8. Otras Características

Existen otro tipo de situaciones que pueden darse en un sistema de colas. Es posible que los clientes, en lugar de acudir al sistema de manera independiente, lo hagan simultáneamente, en cuyo caso, habría que definir la distribución de probabilidad de cada grupo de clientes. Del mismo modo, también puede ofrecerse un servicio grupal, donde el mismo servidor atiende simultáneamente a más de un cliente. En cualquier caso, en este trabajo, se considerará que los clientes llegan y son atendidos de manera independiente. Existe también la posibilidad de que los clientes sean “impacientes”, es decir, si existe más de una línea de espera, el cliente se cambie de cola e, incluso, que si éstas son demasiado largas y conllevan mucho tiempo de espera, acabe abandonando el sistema. El tiempo de servicio también puede variar con el número de clientes en la cola, trabajando más rápido o más lento. En este caso, se denominan patrones de servicio dependientes.

Las características de un sistema de colas discutidas en este capítulo son, generalmente, suficientes para describir completamente un proceso bajo estudio. Ya que existe una amplia variedad de sistemas de líneas de espera, antes de realizar cualquier análisis es absolutamente necesario describir adecuadamente el proceso que se quiere modelar. Para ello es muy importante emplear el modelo correcto o, al menos, el que mejor describe la situación real que se quiere estudiar. Este procedimiento de selección conlleva mucha reflexión y requiere reflejar correctamente las

diferentes características que configuran el sistema de colas que se desea analizar. Para realizar este estudio, debemos definir un conjunto de indicadores que ayuden a describir el comportamiento del sistema de colas. Dichos indicadores se presentan en el siguiente epígrafe.

2.2. Medidas de eficacia y rendimiento de un sistema de colas

Más allá de las características físicas de los sistemas de colas, existen otros conceptos que nos dan respuestas sobre el funcionamiento y la eficiencia de estos sistemas. Así, sería interesante tener una cierta medida del tiempo de espera que un cliente debería soportar, disponer de algún tipo de indicación sobre el número de clientes que se espera encontrar en la cola, tener una medida del tiempo ocioso de los servidores, etc. Como se ha comentado anteriormente, la mayoría de los sistemas de colas siguen patrones estocásticos, por lo que estas medidas son a menudo variables aleatorias. Para medir entonces el rendimiento del sistema, es necesario conocer la distribución de probabilidad que siguen estas variables o, al menos, una aproximación. El proceso de análisis de un sistema de cola pasa por una de estas dos etapas:

- (1) Determinar los indicadores apropiados y establecer mecanismos que permitan medir la eficiencia del sistema. Para ello debemos relacionar conceptos como los retrasos en la espera, la longitud de las colas, los tiempos de permanencia en el sistema etc., con las características vistas anteriormente, como el flujo de entrada de clientes al sistema y los procedimientos de servicio.
- (2) Diseñar un sistema “óptimo” (atendiendo a algún criterio). En esta etapa es interesante encontrar el equilibrio entre el tiempo de espera del cliente frente al tiempo de inactividad de los servidores, de acuerdo con una estructura de costes inherente. Es decir, definir un sistema cuyo coste (de diseño y operación) se justifique por el servicio que debe ofrecer. Dicho servicio se puede evaluar mediante el coste de “no ofrecerlo”. De este modo al diseñar el sistema se pretende minimizar unos supuestos costes totales. A partir de los datos proporcionados por los modelos de colas, podemos anticiparnos y extraer información que nos permita mejorar el rendimiento del sistema. Por ejemplo, conociendo el coste de servicio inactivo, podría determinarse el número óptimo de canales, o bien, teniendo información sobre el posible tamaño de la cola o el coste del espacio que se debe considerar, podría diseñarse la instalación destinada a la espera, etc. De este modo se obtendría el diseño óptimo del sistema.

En cualquier caso, para poder tomar decisiones hacen falta datos que la Teoría de Colas nos puede ofrecer. Una vez configurado el sistema, estudiamos si éste

funciona adecuadamente o no, de acuerdo a ciertos objetivos referidos al sistema, a los que denotamos indicadores de eficiencia. Los indicadores principales son:

- (a) Número medio de clientes en el sistema
- (b) Cantidad media de clientes esperando (en el sistema o en las colas)
- (c) Tiempo medio de espera (en la cola)
- (d) Tiempo medio de permanencia en el servicio
- (e) Número medio de canales no ocupados
- (f) Tiempo ocioso de los servidores (total o particular de cada servicio)

Si el análisis del sistema utilizando métodos analíticos fracasa, se debe recurrir a la simulación para intentar determinar los indicadores que hemos citado. En lo que sigue, presentamos la notación que usaremos a lo largo del trabajo para abordar posteriormente el estudio de algunos modelos de colas.

2.3. Notación y clasificación

2.3.1. Nomenclatura básica

- $\lambda_n \equiv$ Tasa de llegada: Número de usuarios por unidad de tiempo que llegan al sistema cuando hay n clientes en el mismo. Cuando el número de usuarios es independiente de los clientes que se encuentran en el sistema, se denota por λ .
- $\mu_n \equiv$ Tasa de servicio: Número de clientes por unidad de tiempo que son atendidos por el sistema cuando en él hay n clientes. Si el número de clientes atendidos es independiente de los clientes que haya en el sistema, entonces se denota μ .
- De este modo, $\frac{1}{\lambda_n}$ (o $\frac{1}{\lambda}$) representa el tiempo medio entre llegadas consecutivas y $\frac{1}{\mu_n}$ (o $\frac{1}{\mu}$) indica el tiempo medio entre salidas consecutivas, o bien, tiempo medio de servicio.
- $c \equiv$ Número de servidores o canales de servicio.
- $\psi \equiv$ Intensidad de tráfico: es el cociente entre la tasa de llegada y la tasa de servicio, esto es $\psi = \frac{\lambda_n}{\mu_n}$ ó $\frac{\lambda}{\mu}$.
- $\alpha(t) \equiv$ Número de clientes que llegan al sistema en el periodo $(0, t)$.
- $\beta(t) \equiv$ Número de clientes que abandonan el sistema en el periodo $(0, t)$.
- $n(t) \equiv$ Número de clientes que hay el sistema en el instante $t = \alpha(t) - \beta(t)$.

- $\bar{n} \equiv$ Número medio de clientes en el sistema.
- $\bar{Q} \equiv$ Número medio de clientes en la cola.
- $\bar{T}_c \equiv$ Tiempo medio que un cliente invierte en la cola.
- $\bar{T}_s \equiv$ Tiempo medio que un cliente permanece en el sistema.

2.3.2. Descripción y clasificación de un sistema de colas

La terminología empleada para la representación de los problemas de colas consta de varias letras o símbolos separadas por unas barras como A/B/C/D/E/F, donde cada uno refleja cierta característica del sistema de colas. Así, A indica la distribución de la tasa de llegada, B la distribución de la tasa de servicio, o la tasa de salida, C representa el número de canales o estaciones de servicio, D recoge el tamaño de la población, E se refiere a la restricción en la capacidad del sistema y, por último, F indica la disciplina de la cola. Cada símbolo de esta notación es sustituida por unas letras estándares que representan diversas tipologías. Así, en la tabla 2.1 se expone lo que representa cada letra

CARACTERÍSTICAS	SÍMBOLOS	EXPLICACIÓN
Distribución de la tasa de llegada (A)	D	Determinista
	M	Exponencial
	E_k	Distribución de Erlang tipo k , ($k = 1, 2, \dots$)
	G	General
Distribución de la tasa de servicio (B)	D	Determinista
	M	Exponencial
	E_k	Distribución de Erlang tipo k
	G	General
Número de canales (C)	$1, 2, \dots, \infty$	
Restricción en el tamaño de la población (D)	m, ∞	Población limitada a m clientes o infinita
Capacidad del sistema (E)	K, ∞	Sistema con capacidad K o infinita
Disciplina de la cola (F)	FIFO	First In, First Out
	LIFO	Last In, First Out
	SIRO	Servicio en orden aleatorio
	PR	Servicio prioritario

Tabla 2.1. Tabla de simbología y notación.

El símbolo G indica, en el caso de las llegadas y el servicio, que éstos siguen una distribución general de probabilidad, es decir, que el modelo presentado y sus resultados son aplicables a cualquier distribución estadística (siempre que sean variables independientes e idénticamente distribuidas (viid)). También puede resultar curioso que el símbolo M se utilice para referirse a la distribución exponencial. Su origen reside en la propiedad Markoviana de la exponencial. El uso del símbolo E_k se usa para denominar a la distribución tipo Erlang (una gamma con un número entero de grados de libertad), por lo que la M se utiliza en su lugar.

En la mayoría de sistemas de colas, los modelos no suelen tener restricción en la capacidad del sistema ni con respecto al tamaño de la población (es decir, $D = \infty$ y $E = \infty$), por lo que el cuarto y quinto símbolo se obvian. Del mismo modo, la disciplina más común es FIFO, por lo que el sexto símbolo también se omite. Por lo tanto, $D/M/3$ representará un sistema de colas con entrada determinista, servicio exponencial y 3 servidores, sin límite en el tamaño de la población y una disciplina “primero en llegar, primero en ser servido”. El modelo $M/G/c/m$ será un sistema de colas con llegadas poissonianas, servicio con distribución general, c servidores y se atiende a solo m clientes.

Para finalizar este capítulo desarrollamos un sistema de colas deterministas que nos ayudará a entender el funcionamiento de las líneas de espera.

2.3.3. Análisis de la cola D/D/1

Los problemas de colas conceptualmente más simples son aquellos en los que no es necesario describir los patrones de llegada y de servicio mediante una distribución de probabilidad. Esto se debe a que las llegadas al sistema se producen en instantes conocidos y los tiempos de servicio son constantes fijas. Estos modelos de colas se conoce como sistemas de colas deterministas.

A continuación describimos el caso elemental en el cual existe una tasa de llegada constante a un solo canal, que posee una tasa de servicio constante. Estas llegadas espacialmente reguladas siguen una disciplina FIFO. Tenemos en cuenta los siguientes parámetros para describir los modelos de colas deterministas:

- $i \equiv$ número de personas que hay en el sistema en el instante $t = 0$.
- $a \equiv$ tiempo entre llegadas consecutivas.
- $\lambda \equiv$ tasa de llegada o número de llegadas por unidad de tiempo.
 $\lambda = \frac{1}{a}$ (llega un cliente cada a minutos).
- $b \equiv$ tiempo de servicio a un cliente = tiempo entre salidas consecutivas.
- $\mu \equiv$ tasa de servicio o salida. Se tiene que $\mu = \frac{1}{b}$ (sale un cliente cada b minutos).
- $\psi \equiv$ Intensidad de tráfico, con $\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{a}$.
- $c \equiv$ número de servidores o canales de servicio.

Desarrollaremos en el siguiente epígrafe un modelo de colas deterministas monocanal, es decir, llegadas y salidas deterministas y un solo servidor. Veamos como es el comportamiento de la cola según la intensidad del tráfico ψ :

- (a) Consideramos primero el caso donde $\lambda > \mu$, es decir, la tasa de llegada es mayor que la tasa de salida y, en consecuencia, la intensidad de tráfico ψ es mayor que 1. En este caso, con el transcurso del tiempo la cola irá aumentando progresivamente fuera de cualquier límite hasta hacerse infinita, independientemente de si $i = 0$ ó $i \neq 0$. Así, cada cliente esperaría en la cola más tiempo que su predecesor, hasta llegar al punto en que los clientes tendrían un tiempo de espera enormemente grande. Por tanto, este sistema de cola es inadecuado ya que la cola crece hasta hacerse infinita.
- (b) Si $\lambda = \mu$, es decir, si la intensidad de tráfico, ψ , es igual a 1, a será igual a b . Podemos, entonces, diferenciar dos casos:
 - (I) Si no existen clientes en el sistema en el instante 0 ($i = 0$), nunca habrá cola ya que se atiende inmediatamente a cada cliente que llega.
 - (II) Si $i \neq 0$, habrá una línea de espera fija con i miembros, con lo que el número medio de clientes en la cola será i y el tiempo medio de permanencia en ella será ib .
- (c) Por último, estudiamos el caso en el que $\lambda < \mu$, es decir, la tasa de llegada es menor que la tasa de salida. Luego, ψ será menor que 1 y en consecuencia $\frac{b}{a} < 1$ y $b < a$.
 - (I) Si al comienzo no hay nadie en el sistema, (ni esperando ni en el servicio), es decir, $i = 0$, nunca habrá cola ya que antes de que llegue un cliente, el anterior ya ha sido servido. Por lo que el número medio de clientes en la cola, así como el tiempo de permanencia en ésta, serán nulos. De este modo, el tiempo medio de permanencia en el sistema es el tiempo total de servicio y será igual a b .
 - (II) Si hay clientes en el sistema al comienzo de éste, es decir $i \neq 0$, se irán atendiendo dichos clientes hasta que, llegado cierto momento, la cola finalice.

Para poder estudiar las medidas o indicadores de eficiencia del sistema debemos tener una intensidad de tráfico, $\psi < 1$.

Si suponemos también que al comienzo del sistema hay $i \geq 2$ clientes esperando, es decir, $C_0 =$ número de clientes esperando al comienzo del sistema $= i$, el tiempo que se tarda en atender a los primeros i clientes es $\Delta t_0 = ib$. Entonces, en ese periodo de tiempo Δt_0 , el número de clientes que han llegado al sistema viene dado por:

$$C_1 = \lceil \frac{ib}{a} \rceil$$

Para atender a los C_1 clientes se necesita un tiempo $\Delta t_1 = bC_1 = b\lceil \frac{ib}{a} \rceil$. En ese intervalo de tiempo Δt_1 , llegarán al sistema:

$$C_2 = \lceil \frac{bC_1}{a} + \frac{ib}{a} - \lceil \frac{ib}{a} \rceil \rceil = \lceil (\frac{b}{a} - 1)C_1 + \frac{b}{a}C_0 \rceil$$

donde bC_1 es el tiempo en el que se ha atendido a los C_1 clientes e $\frac{ib}{a} - \lceil \frac{ib}{a} \rceil$ representa la fracción de clientes sobrantes en el tiempo Δt_0 requerido para servir a los i clientes.

De manera sucesiva se repetirá el proceso r veces hasta que $\Delta t_r < a$ y se calcularán los nuevos clientes C_i , con $i = 1, 2, \dots, r - 1$ que van llegando al sistema. Así, llegará un momento en que se termine de atender a todos los clientes que han estado en la cola y los nuevos clientes que llegan al sistema son directamente atendidos sin necesidad de esperar.

Algunos procesos estocásticos que rigen los sistemas de colas

Un proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para estudiar magnitudes aleatorias que evolucionan con el tiempo. En este capítulo describimos diferentes procesos estocásticos de gran interés para la Teoría de Colas.

3.1. Proceso de Poisson

Los modelos estocásticos de colas más comunes asumen que tanto el número de llegadas al sistema como el número de salidas de éste, siguen una distribución de Poisson. Recordamos que una variable aleatoria discreta X sigue una distribución de Poisson si ésta toma valores enteros, $r = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$, con probabilidad:

$$Pr(X = r) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

Supongamos un proceso de llegada donde $\alpha(t)$ denota el número de clientes que llegan al sistema en el periodo $[0, t]$, con $t \geq 0$. Estudiaremos la distribución de las llegadas al sistema, es decir, la distribución de $\alpha(t)$.

Se dirá que el proceso estocástico $\alpha(t)$ es un *Proceso de Poisson* si satisface las siguientes condiciones:

- (a) Condición de llegada de clientes: la probabilidad de que una llegada ocurra entre el instante t y el instante $t + \Delta t$ es igual a $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, esto es,

$$Pr(\text{una llegada ocurra entre } t \text{ y } \Delta t) = \lambda \Delta t + o_1(\Delta t)$$

donde λ es una constante que no depende del número total de llegadas en el instante t y $o_1(\Delta t)$ denota un infinitésimo, es decir, una cantidad que se vuelve insignificante si comparamos $o_1(\Delta t)$ con Δt cuando $\Delta t \rightarrow 0$; esto es

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o_1(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

La probabilidad de que lleguen j clientes en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ es un infinitésimo que denotamos por $o_2(\Delta t) = \sum_{j=2}^{\infty} o_2^j(\Delta t)$, el cual representa un valor infinitamente pequeño. Por lo que podemos decir que en un intervalo infinitesimal $[t, t + \Delta t]$ solo se permite que llegue un cliente al sistema o bien, que no llegue ninguno. Por lo tanto:

$$P(\Delta\alpha(t) = 0 \text{ clientes en } [t, t + \Delta t]) = 1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t) = P_0(\Delta t)$$

donde $o(\Delta t) = o_1(\Delta t) + o_2(\Delta t)$

- (b) Condición de independencia: el número de clientes que llegan al sistema en intervalos no solapados son estadísticamente independientes. Si llamamos $\Delta\alpha_i = \alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)$ = número de clientes que llegan en el instante $[t_i, t_{i+1}]$, estas variables aleatorias $\Delta\alpha_i$ deben ser independientes. Esto da lugar a denominar también esta condición de los procesos de Poisson como proceso de incrementos independientes.
- (c) Condición de homogeneidad en el tiempo: el número de clientes que llegan al sistema en un intervalo $[t, t + \Delta t]$ no depende del instante t , sino de la amplitud Δt del intervalo considerado.

Veamos como es la distribución de un proceso de Poisson. Para esto nos interesa conocer determinar:

$$p_n(t) = \text{prob}(\alpha(t) = n) = \text{prob}(\text{ haya } n \text{ clientes en el sistema en el instante } t) = \text{prob}(\text{ hayan llegado } n \text{ clientes en el periodo } [0, t])$$

Consideramos también

$$p_n(t + \Delta t) = \text{prob}(\text{ haya } n \text{ clientes en el sistema en el instante } t + \Delta t).$$

De las hipótesis de un Proceso de Poisson tenemos entonces que:

→ Si $n \neq 0$:

$$p_n(t + \Delta t) = p_n(t)[1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t)] + p_{n-1}(t)[\lambda\Delta t + o_1(\Delta t)] + \sum_{j=2}^{\infty} p_{n-j} o_2^j(\Delta t) \quad (3.1)$$

→ Si $n = 0$:

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)[1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t)] \quad (3.2)$$

Reescribiendo 3.1 y 3.2, tenemos para $n = 0$:

$$p_0(t + \Delta t) - p_0(t) = -\lambda\Delta t p_0(t) + o(\Delta t), \quad (3.3)$$

y para $n \geq 1$:

$$p_n(t + \Delta t) - p_n(t) = -\lambda\Delta t p_n(t) + \lambda\Delta t p_{n-1}(t) + o_T(\Delta t) \quad (3.4)$$

donde $o_T(\Delta t) = p_{n-1}(t)o_1(\Delta t) + \sum_{j=2}^{\infty} p_{n-j}(t) o_2^j(\Delta t)$ y $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o_T(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Dividiendo 3.3 y 3.4 por Δt y tomando límites cuando $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos:

$$\begin{cases} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, & n = 0 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_n(t+\Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o_T(\Delta t)}{\Delta t}, & n \geq 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

de donde, las ecuaciones diferenciales que rigen un Proceso de Poisson son:

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t), \quad n = 0 \quad (3.6)$$

$$p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad n \geq 1 \quad (3.7)$$

Tenemos entonces un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primer orden, que resolveremos aplicando las condiciones iniciales, $p_n(0) = 0$ para $n > 0$ y $p_0(0) = 1$ (ya que estamos admitiendo que inicialmente no hay nadie en el sistema):

$$\begin{cases} p_0(t) = e^{-\lambda t} \\ p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \\ p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2} \\ p_3(t) = \frac{(\lambda t)^3 e^{-\lambda t}}{3!} \end{cases} \quad (3.8)$$

por lo que, el término general será:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \quad n \geq 0 \quad (3.9)$$

Esta ecuación rige las llegadas al sistema, con media λt o una tasa media de llegada de λ .

Toda esta deducción para las llegadas al sistema, son válidas para las salidas, ya que éstas también pueden seguir un Proceso de Poisson, en cuyo caso, tendríamos:

$$q_n(t) = \text{prob} (\text{en } [0, t] \text{ hayan salido } n \text{ clientes del sistema})$$

Siguiendo un razonamiento similar al proceso de llegadas se obtiene:

$$q_n(t) = \frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!}, \quad n \geq 0 \quad (3.10)$$

siendo μ la tasa de salida o tasa de servicio del sistema.

3.2. Equivalencia entre la distribución de la tasa de llegada y del tiempo entre llegadas

Veamos ahora que, si las llegadas a un sistema de colas siguen una distribución de Poisson, ello es equivalente a que la variable aleatoria asociada, definida como el tiempo entre llegadas sucesivas, sigue una distribución exponencial.

Recordamos que $\alpha(t)$ es el número de llegadas en el periodo $[0, t]$ y sea T el tiempo que transcurre entre llegadas consecutivas al sistema.

Se recoge a continuación el siguiente resultado:

Proposición: $\alpha(t)$ sigue un Proceso de Poisson de parámetro λt si, y solo si, T sigue una distribución exponencial de parámetro λ .

Demostración:

(\Rightarrow)

Supongamos que $\alpha(t)$ sigue un Proceso de Poisson con parámetro λt , entonces $p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$.

Se define la función de distribución de T como:

$$F_T(t) = \text{prob} (T \leq t) = \text{prob} (\text{Tiempo entre llegadas consecutivas} \leq t)$$

Tenemos que $\text{prob} (T > t) = \text{prob} (\text{no aparezca ningún cliente en } [t_k, t_k + t]) = \text{prob} (\text{no aparezca ningún cliente en } (0, t)) = p_0(t) = e^{-\lambda t}$, luego:

$$F_T(t) = \text{prob} (T \leq t) = 1 - \text{p}(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Y esta es la función de distribución de una exponencial de parámetro λ , luego, tal y como queríamos ver, T sigue una distribución $Exp(\lambda)$.

(\Leftarrow)

Veamos ahora que si los tiempos entre llegadas son independientes y tienen la misma distribución exponencial, entonces la tasa de llegadas $\alpha(t)$ sigue una distribución de Poisson.

Para ello, definimos:

$$p_n(t) = p(\text{haya } n \text{ clientes en el instante } t) = p(\alpha(t) = n) = p(\alpha(t) \leq n) - p(\alpha(t) < n) = p(\alpha(t) \leq n) - p(\alpha(t) \leq n - 1)$$

Ahora definimos también

$$P_n(t) = p(\text{en el instante } t \text{ haya a lo sumo } n \text{ clientes}) = p(\alpha(t) \leq n) = p(\text{suma de } n + 1 \text{ tiempos de llegada} > t)$$

Como T_i sigue una distribución $Exp(\lambda)$, entonces $\sum_{i=1}^{n+1} T_i \equiv$ Distribución de Erlang, que es un tipo especial de Gamma con parámetro p entero.

La función de densidad de una Gamma $\Gamma(a, p)$ viene dada por:

$$f(x) = \frac{a^p \cdot e^{-ax} \cdot x^{p-1}}{\Gamma(p)}$$

Por tanto, $\sum_{i=1}^{n+1} T_i$ sigue una distribución $\Gamma(\lambda, n + 1)$, y se tiene:

$$P_n(t) = p\left(\sum_{i=1}^{n+1} T_i > t\right) = \int_t^\infty \frac{\lambda \cdot (\lambda x)^n \cdot e^{-\lambda x}}{n!} dx$$

Hacemos el cambio de variable $u = x - t$, $du = dx$ y tenemos:

$$P_n(t) = \int_0^\infty \frac{\lambda^{n+1} \cdot (u + t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda u} du$$

Por el desarrollo del binomio de Newton $(u + t)^n = \sum_{i=0}^n u^{n-i} t^i \frac{n!}{(n-i)!i!}$, y permutando la integral por el sumatorio, tendremos:

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^{n+1} \cdot e^{-\lambda t} \cdot t^i}{(n-i)! i!} \int_0^\infty e^{-\lambda u} \cdot u^{n-i} du$$

Como $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$, tendremos que:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda u} u^{n-i} du = \frac{1}{\lambda^{n-i+1}} \Gamma(n-i+1) = \frac{(n-i)!}{\lambda^{n-i+1}}$$

Así tenemos $P_n(t) = \sum_{i=0}^n \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}$.

En consecuencia se obtiene $p_n(t) = P_n(t) - P_{n-1}(t)$, y llegamos a:

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^n \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Lo que se corresponde con la distribución de un proceso de Poisson.

3.3. Proceso de Nacimiento y Muerte

En la mayoría de los modelos de colas elementales se suponen que las llegadas y salidas de clientes en el sistema ocurren de acuerdo a un proceso de nacimiento y muerte o de entradas y salidas, donde, el término *nacimiento* hace referencia al número de clientes que han llegado al sistema en el intervalo $[0, t]$, $\alpha(t)$, y por *muerte* entendemos el número de clientes que abandonaron el sistema en este intervalo, denotado por $\beta(t)$.

Se considera $n(t)$ como el número de clientes en el sistema en el instante t , y vendrá dado por la diferencia entre entradas y salidas, esto es, $n(t) = \alpha(t) - \beta(t)$.

El proceso $n(t)$ es un *Proceso de Nacimiento y Muerte* si verifica las siguientes hipótesis:

- (a) Se supone que la distribución del tiempo entre llegadas consecutivas de clientes al sistema es exponencial, con parámetro $\lambda_n, n = 0, 1, 2, \dots$, siendo λ_n la tasa de llegada de clientes al sistema cuando ya en éste hay n clientes. O lo que es lo mismo, el proceso de llegadas $\alpha(t)$ es un Proceso de Poisson de parámetro λ_n . Así, se tiene:

$$\begin{cases} p_1(\Delta t) = \text{prob}(\alpha(t) = 1 \text{ en } \Delta t) = \lambda_n \Delta t \\ p_0(\Delta t) = \text{prob}(\alpha(t) = 0 \text{ en } \Delta t) = 1 - \lambda_n \Delta t \end{cases} \quad (3.11)$$

- (b) Del mismo modo, la distribución del tiempo entre salidas sucesivas es exponencial, con parámetro $\mu_n, n = 0, 1, 2, \dots$, el cual indica la tasa de salida de clientes del sistema cuando en él hay n clientes. Lo que equivale a que el proceso de salidas $\beta(t)$ es un Proceso de Poisson de parámetro μ_n . Por tanto, se obtiene:

$$\begin{cases} q_1(\Delta t) = \text{prob}(\beta(t) = 1 \text{ en } \Delta t) = \mu_n \Delta t \\ q_0(\Delta t) = \text{prob}(\beta(t) = 0 \text{ en } \Delta t) = 1 - \mu_n \Delta t \end{cases} \quad (3.12)$$

- (c) En un intervalo de tiempo infinitesimal Δt , no se permite que haya una llegada y una salida simultáneamente. Es decir, en el periodo Δt , solo se permite una llegada, una salida o bien, ninguna entrada ni salida.

Determinemos entonces la distribución del proceso $n(t)$:

Se define $p_n(t)$ como la probabilidad de que haya n clientes en el sistema en el instante de tiempo t .

Las ecuaciones diferenciales que rigen un Proceso de Nacimiento y Muerte (y por tanto los sistemas de colas poissonianas), son las *Ecuaciones de Chapman-Kolmogórov*:

$$p'_n(t) = \begin{cases} -(\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t), & \text{si } n > 0 \\ -\lambda_n p_n(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t), & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

En un régimen permanente o estacionario, las probabilidades se mantienen constantes y son independientes del tiempo, esto es, $p_n(t) = p_n$, con p_n la probabilidad de que de que haya n clientes en el sistema de manera estacionaria. Para un sistema permanente, las ecuaciones que rigen el proceso de Nacimiento y Muerte son:

$$\begin{cases} 0 = -(\lambda_n + \mu_n)p_n + \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}, & \text{si } n > 0 \\ 0 = -\lambda_n p_n + \mu_{n+1}p_{n+1}, & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Además, para este proceso, se tienen las siguientes medidas de eficiencia:

- $\bar{n}(t) \equiv$ Número medio de clientes en el sistema. $\bar{n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$.
- $\bar{Q}(t) \equiv$ Número medio de clientes en la cola en un sistema con C servidores.
 $\bar{Q}(t) = \bar{n} - C$.
- $\bar{\lambda} \equiv$ Tasa media de llegadas. $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n$.
Al tratarse de un sistema estacionario para cualquier estado n , las tasas medias de llegada y salida, $\bar{\mu}$, son iguales.

3.4. Fórmula de Little

La Formula de Little (1961) establece una relación entre el número medio de elementos en el sistema y el tiempo medio de permanencia en éste. De igual manera, se puede dar esta relación teniendo en cuenta únicamente los elementos de la cola. Sean $\alpha(t)$ el número de clientes que llega al sistema en el periodo $[0, t]$, y $\beta(t)$ el número de clientes que salen del sistema en ese mismo periodo. Recordemos que:

$$n(t) = \alpha(t) - \beta(t) = \text{número de clientes en el sistema en el instante } t.$$

Ahora definimos:

- $Q(t)$ = número de clientes en la cola en el instante $t = n(t) - c$, si $n(t) < c$ y 0 en otro caso, siendo C el número de canales o servidores.
- $\gamma(t) = \int_0^t n(t) dt$ = número total de clientes en el sistema en el periodo $[0, t]$ = tiempo total que los clientes han pasado en el sistema en el periodo $(0, t)$
- $\zeta(t) = \int_0^t Q(t) dt$ = número total de clientes en la cola en el periodo $[0, t]$.
- λ_t = tasa media de llegada en $[0, t]$. Entonces, tenemos que $\lambda_t = \frac{\alpha(t)}{t}$.
- $\bar{n}(t)$ = número medio de clientes en el sistema en $[0, t] = E[n(t)] = \frac{\gamma(t)}{t}$
- $\bar{Q}(t)$ = número medio de clientes en la cola en $[0, t] = E[Q(t)] = \frac{\zeta(t)}{t}$
- $T_s(t)$ = tiempo medio de permanencia en el sistema de un cliente en el periodo $[0, t]$, viene dado por $T_s(t) = \frac{\bar{n}(t)}{\lambda}$
- $T_c(t)$ = tiempo medio de permanencia en el sistema de un cliente en el periodo $[0, t]$, viene dado por $T_c(t) = \frac{\bar{Q}(t)}{\lambda}$

De las expresiones anteriores se deduce:

$$\bar{n}(t) = \frac{\gamma(t)}{t} = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} \cdot \frac{\alpha(t)}{t} = T_s(t) \cdot \lambda_t \tag{3.15}$$

$$\bar{Q}(t) = \frac{\zeta(t)}{t} = \frac{\zeta(t)}{\alpha(t)} \cdot \frac{\alpha(t)}{t} = T_c(t) \cdot \lambda_t \tag{3.16}$$

Nos interesa ver como evoluciona el sistema a medida que avanza el tiempo. Si llamamos:

$$\bar{n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{n}(t), \bar{\lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\lambda}(t), \bar{T}_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{T}_s$$

se obtiene, de 3.15 la *Fórmula de Little*:

$$\bar{n} = \bar{\lambda} \cdot \bar{T}_s$$

es decir, el número medio de clientes en el sistema será igual a la tasa media de llegada por el tiempo medio de permanencia en éste. Análogamente, de 3.16 se obtiene:

$$\bar{Q} = \bar{\lambda} \cdot \bar{T}_s$$

que representa el número medio de clientes en la cola y es igual a la tasa media de llegada por el tiempo medio de permanencia en la cola.

Modelos de colas poissonianas

En este capítulo estudiaremos cuatro modelos de colas poissonianas, es decir, en ellos, tanto las llegadas como las salidas del sistema, siguen un Proceso de Poisson. Partiremos de las ecuaciones de *Chapman-Kolmogórof*, que como ya vimos en el capítulo anterior, son las ecuaciones diferenciales que rigen el Proceso de Nacimiento y Muerte. Además, se asume un régimen estacionario, esto es:

$$p_n(t) = p_n = \text{prob} (\text{ en el instante } t \text{ haya } n \text{ clientes en el sistema}),$$

En este caso las ecuaciones de *Chapman-Kolmogórof* que rigen el proceso serán:

$$p'_n(t) = \begin{cases} 0 = -(\lambda_n + \mu_n)p_n + \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}, & \text{si } n > 0 \\ 0 = -\lambda_n p_n + \mu_{n+1}p_{n+1}, & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Es decir, las probabilidades son independientes del tiempo. También se admite que la intensidad de tráfico $\psi < 1$, ya que de lo contrario, la cola se hace infinita y no tiene sentido calcular ningún indicador o medida de eficiencia del sistema.

4.1. Modelo I: sistema monocal con población ilimitada M/M/1

Se consideran los siguientes parámetros:

- * Se considera un solo canal o estación de servicio, $c = 1$.
- * Como la población es ilimitada, la tasa media de llegada es contante e independiente del tiempo, $\lambda_n = \lambda$.

- * La tasa de servicio también será contante e independiente del tiempo, $\mu_n = \mu$.
- * La intensidad de tráfico ψ vendrá dada entonces por $\frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Se tendrá entonces que, sustituyendo $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = \mu$ en 4.1, llegamos a:

$$\begin{cases} 0 = -(\lambda + \mu)p_n + \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} \\ 0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 \end{cases} \quad (4.2)$$

De la última ecuación de 3.2 se deduce:

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \psi p_0 \quad (4.3)$$

Tomando diferentes valores para n en la primera ecuación y teniendo en cuenta 4.3:

$$p_n = \psi^n p_0, \forall n \geq 0 \quad (4.4)$$

Sabiendo ahora que la suma de probabilidades debe ser 1, y asumiendo $\psi > 1$, se tiene:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \psi^n} = 1 - \psi$$

Así, obtenemos que las probabilidades vendrán dadas por

$$p_n = \psi^n (1 - \psi) \quad (4.5)$$

Una vez determinadas las probabilidades p_n para todo n , procedemos a calcular ciertos indicadores de interés para conocer el funcionamiento del sistema M/M/1:

- Número medio de elementos en el sistema:

$$\bar{n} = E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \psi^n (1 - \psi) = \frac{\psi}{1 - \psi} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

- Número medio de clientes en cola:

$$\bar{Q} = E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} (n - 1) p_n = \frac{\psi^2}{1 - \psi} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- Tiempo medio de permanencia en el sistema: usando la fórmula de Little vista en el capítulo anterior, tendremos:

$$t_s = \bar{T}_s = \frac{E[n]}{\bar{\lambda}}$$

donde $\bar{\lambda}$ representa la tasa media de llegadas y será igual a λ . Así:

$$t_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu(1 - \psi)}$$

- Tiempo medio de permanencia en cola: de nuevo, usando la fórmula de Little:

$$t_c = \bar{T}_c = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{\psi^2}{\lambda(1 - \psi)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- Tiempo medio en el servicio: de las dos anteriores:

$$\epsilon = t_s - t_c = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1}{\mu}$$

En efecto, como μ denota la tasa de servicio, que es igual a la tasa de salida de clientes del sistema, entonces el tiempo medio de servicio será igual al tiempo medio entre salidas consecutivas, es decir, $\frac{1}{\mu}$.

- Así, la intensidad de tráfico o el factor de utilización del servidor también vendrá dado por la diferencia entre el número medio de clientes en el sistema y en la cola:

$$\psi = \bar{n} - \bar{m} = 1 - p_0,$$

y, además, coincide con la probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar, ya que esto sería 1 menos la probabilidad de que no tener que esperar, es decir $1 - p_0 = \text{prob}(n \geq 1)$.

- Probabilidad de que el tiempo en el sistema sea mayor que un t dado:

$$\text{prob}(T_s > t) = \psi e^{-\mu(1-\psi)t}$$

y del mismo modo, la probabilidad de que el tiempo de espera, únicamente en la cola, sea mayor que t :

$$\text{prob}(T_c > t) = e^{-\mu(1-\psi)t}$$

4.2. Modelo II: sistema multicanal con población ilimitada M/M/c

Para este modelo :

- * Se consideran c canales o servidores.
- * Como la población es ilimitada, la tasa media de llegada es contante e independiente del tiempo, $\lambda_n = \lambda$.

* Puesto que tenemos c canales, la tasa de servicio será:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & \text{si } 1 \leq n \leq c \\ c\mu, & \text{si } n \geq c \end{cases} \quad (4.6)$$

* La intensidad de tráfico ψ vendrá dada entonces por $\frac{\lambda}{c\mu} \leq 1$.

Calculamos las probabilidades $p_n, \forall n$. Para este modelo multicanal, las ecuaciones diferenciales que rigen el proceso son :

$$\begin{cases} 0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 & , \text{ si } n = 0 \\ 0 = -(\lambda + n\mu)p_n + \lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1} & , \text{ si } 1 \leq n \leq c \\ 0 = -(\lambda + c\mu)p_n + \lambda p_{n-1} + C\mu p_{n+1} & , \text{ si } n \geq c \end{cases} \quad (4.7)$$

De donde, al igual que el modelo anterior, de la ecuación dada para $n = 0$ se tiene:

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \psi p_0 \quad (4.8)$$

De la segunda ecuación de 4.7 tenemos las siguientes probabilidades:

$$p_n = \frac{\psi^n}{n!} p_0, \quad 1 \leq n \leq c \quad (4.9)$$

Y para $n \geq c$ las probabilidades vienen dadas por:

$$p_n = \frac{1}{c^{n-c} \cdot c!} \psi^n p_0 \quad (4.10)$$

En resumen, hemos obtenido:

$$p_n = \begin{cases} \frac{\psi^n}{n!} p_0 & , \text{ si } 1 \leq n \leq c \\ \frac{1}{c^{n-c} \cdot c!} \psi^n p_0 & , \text{ si } n \geq c \end{cases} \quad (4.11)$$

Imponiendo la condición $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, obtenemos el valor de p_0 :

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{r=0}^{c-1} \frac{\psi^r}{r!} + \frac{\psi^c}{c!} \frac{c}{c-\psi}} \quad (4.12)$$

y, sustituyendo p_0 en 4.11, obtendremos todas las probabilidades.

Se exponen a continuación distintos indicadores de eficiencia para este modelo de colas:

- Número medio de clientes en cola:

$$\bar{Q} = E[Q] = \frac{\psi^{c+1}}{c \cdot c!(1 - \frac{\psi}{c})^2} p_0$$

- Número medio de clientes en el sistema:

$$\bar{n} = E[Q] + \psi = \bar{Q} + \psi$$

- Sea X el número de canales no ocupados, el número medio de canales no ocupados vendrá dado por:

$$Q = E[X] = c - \psi$$

- Tiempo medio de permanencia en cola:

$$t_c = \bar{T}_c = \frac{E[m]}{\lambda} = \frac{\bar{m}}{\lambda} = \frac{\psi^{2n+1}}{\lambda \cdot c \cdot c!(1 - \frac{\psi}{c})^2} p_0$$

- Tiempo medio de permanencia en el sistema:

$$t_s = \bar{T}_s = \frac{E[n]}{\lambda} = \psi + t_c$$

- Probabilidad de que el tiempo de estancia en el sistema sea mayor que un t dado:

$$prob(T_s > t) = e^{-\mu t} \left(1 + \frac{p_0 (\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!(1-\psi)} \frac{1 - e^{-\mu t(c-1-\frac{\lambda}{\mu})}}{c-1-\frac{\lambda}{\mu}} \right)$$

- La probabilidad de que un cliente que llegue al sistema tenga que esperar:

$$prob(n > c) = \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\psi^c p_0}{c!(\frac{c-\psi}{c})} = \frac{c\mu\psi^c p_0}{c!(c\mu - \lambda)}$$

4.3. Modelo III: sistema monocal con población limitada M/M/1/m

Para este modelo se asume una restricción al tamaño de la población, que a lo sumo será de m clientes. Consideramos:

- * El sistema tiene un único servidor, $c = 1$.
- * La tasa de llegada vendrá dada por:

$$\lambda_n = \begin{cases} (m-n)\lambda, & \text{si } 1 \leq n \leq m \\ m\lambda, & \text{si } n = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

- * La tasa de servicio será en este caso $\mu_n = \mu$ con $n \geq 1$ y $\mu_0 = 0$.
- * La tasa de tráfico será de nuevo $\psi = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Las probabilidades para los distintos valores de n vienen dadas por las siguientes igualdades:

$$p_n = \frac{m!}{(m-n)!} \psi^n p_0 \tag{4.14}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^m \frac{m! \psi^n}{(m-n)!}} \tag{4.15}$$

Y, con esto, la tasa media de llegadas será:

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^m \lambda_n = \sum_{n=0}^m (m-n) \lambda p_n = \lambda(m - \bar{n})$$

A continuación veamos distintos indicadores de la eficiencia de este modelo de colas:

- Número medio de unidades en el sistema:

$$\bar{n} = E[n] = m - \frac{1}{\psi}(1 - p_0)$$

- Número medio de clientes en la cola:

$$\bar{Q} = E[Q] = m - \frac{1 + \psi}{\psi}(1 - p_0)$$

- Puesto que este modelo admite cierto límite para el tamaño de la población que el sistema es capaz de atender, existe la posibilidad de que se supere este límite y se queden elementos fuera. El número medio de unidades fuera del sistema vendrá determinado por:

$$m - \bar{n} = \frac{1}{\psi}(1 - p_0)$$

- Tiempo medio de permanencia en la línea de espera:

$$t_c = T_c = \frac{E[Q]}{\lambda(m - \bar{n})} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{m}{1 - p_0} - \frac{(1 + \psi)}{\psi} \right]$$

- Tiempo medio de permanencia en el sistema:

$$t_s = E[T_s] = \frac{E[n]}{\lambda(m - \bar{n})} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{m}{1 - p_0} - \frac{1}{\psi} \right]$$

- De los dos indicadores anteriores, tenemos que el tiempo medio de permanencia en el servicio es:

$$\epsilon = t_s - t_c = \frac{1}{\mu}$$

4.4. Modelo IV: sistema multicanal con población limitada M/M/c/m

Por último, consideramos el modelo de colas en el que, al igual que el anterior, existe una restricción m al tamaño de la población. La diferencia reside en que para este sistema, se consideran c servidores. Además ahora, tanto la tasa de llegada como la de servicio variarán según el número de clientes que haya en el sistema:

- * La tasa de llegada queda determinada por:

$$\lambda_n = \begin{cases} (m-n)\lambda, & \text{si } 1 \leq n \leq m \\ m\lambda, & \text{si } n = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

- * La tasa de servicio será en este caso:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & \text{si } 1 \leq n \leq c \\ c\mu, & \text{si } c \leq n \leq m \end{cases} \tag{4.17}$$

con $\mu_0 = 0$.

- * La tasa de tráfico será en esta ocasión $\psi = \frac{\lambda}{\mu} < c$. En este caso, para que la cola no se haga infinita y tenga sentido calcular medidas de eficiencia del sistema, imponemos que la tasa de tráfico sea menor que el número de canales disponibles.

En este último modelo, la probabilidad de que haya n clientes en el sistema son:

$$p_n = \begin{cases} \binom{m}{n} \psi^n p_0, & \text{si } 1 \leq n \leq c \\ \frac{n!}{c^{n-c} c!} \binom{m}{n} \psi^n p_0, & \text{si } c \leq n \leq m \end{cases} \tag{4.18}$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^c \binom{m}{n} \psi^n + \sum_{n=c+1}^m \frac{n!}{c! c^{n-c}} \binom{m}{n} \psi^n} \tag{4.19}$$

Las medidas de rendimiento del sistema para este modelo de cola serán:

- Número medio de elementos en el sistema:

$$\bar{n} = E[n] = \sum_{n=0}^m n p_n = \sum_{n=0}^c n p_n + \sum_{n=c+1}^m n p_n = \sum_{n=0}^c n \binom{m}{n} \psi^n p_0 + \sum_{n=c+1}^m \frac{n n!}{c! c^{n-c}} \binom{m}{n} \psi^n p_0$$

- Número medio de clientes en la cola:

$$\bar{Q} = E[Q] = \sum_{n=c+1}^m (n-c) p_n = \frac{c^c p_0}{c!} \sum_{n=c+1}^m \frac{(n-c)c!}{c^n} \binom{m}{n} \psi^n$$

- Como en el caso anterior, este modelo limita la población a la que el sistema es capaz de proporcionar servicio, por lo que cabe la posibilidad de que se rebose este límite y haya clientes fuera del sistema. Así, el número medio de clientes fuera del sistema vendrá determinado por:

$$v = m - E[n]$$

- Tiempo medio de espera en la cola:

$$t_c = T_c = \frac{E[Q]}{\lambda(m - \bar{n})}$$

- Tiempo medio de permanencia en el sistema:

$$t_s = E[T_s] = \frac{E[n]}{\lambda(m - \bar{n})}$$

Estudio del sistema de colas de un hipermercado

Basándonos en la teoría expuesta a lo largo de esta memoria, en el presente capítulo se analizará el sistema de colas de un hipermercado situado en la ciudad de Santa Cruz de Tenerife. Por petición expresa de los responsable de la empresa no se cita el nombre de la misma.

Para la realización de este estudio, día a día, a lo largo de tres meses, se recogieron los datos sobre la afluencia de clientes al establecimiento y la tasa de servicio de los diferentes canales o estaciones donde se efectuaba el pago de la compra, en el periodo comprendido entre Marzo y Mayo de 2016. En esos tres meses, quitando los días festivos, el hipermercado estuvo abierto al público durante setenta y siete días. Los datos obtenidos se agruparon y clasificaron en una hoja de cálculo, teniendo en cuenta catorce periodos de una hora (de 9 de la mañana a 11 de la noche) a lo largo de las setenta y siete jornadas laborales consideradas, con el fin de llevar a cabo el posterior análisis. Este estudio constará de diferentes procesos tales como la descripción de las distribuciones de probabilidad que siguen los datos recogidos, tanto para la llegada como para la salida de los clientes, y el cálculo de los distintos indicadores de eficiencia del sistema.

5.1. Distribuciones de las llegadas y salidas de clientes

Por similitud en el comportamiento de los datos obtenidos, se ha clasificado las jornadas laborales en diferentes periodos de tiempo para caracterizar las tasas de llegada y salida de los clientes. Así, tomaremos periodos de una hora al comienzo y al final de la jornada (de 9:00 a 10:00, de 10:00 a 11:00, de 11:00 a 12:00 y de 22:00 a 23:00) ya que hay diferencias significativas en la afluencia de clientes, y consideramos periodos de dos horas en la parte central de día ya que el número de clientes se mantiene más estable en franjas horarias contiguas de 12:00 a 14:00, de 14:00 a 16:00, de 16:00 a 18:00, de 18:00 a 20:00 y de 20:00 a 22:00.

Para cada periodo o franja horaria i -ésima considerada, sea x_i la variable aleatoria que representa las llegadas de clientes al hipermercado e y_i la que representa el número de clientes atendidos, dentro de cada uno de los periodos anteriores $i = 1, 2, \dots, 9$. Levaremos a cabo el mismo proceso para ambas variables, por lo que lo expondremos unicamente para las llegadas, asumiendo que para el servicio se procede de manera idéntica.

Para cada periodo o franja horaria, los datos de afluencia de clientes x_i al hipermercado se han agrupado en intervalos teniendo en cuenta el rango de los datos en cada periodo. Se le asigna a cada uno de ellos una marca de clase (que varía de 1 a k) que coincide con el punto medio de cada intervalo, y posteriormente con un cambio de variable se toman estas clases desde 0 en adelante. A continuación se presenta su distribución de frecuencias absolutas representándolas en un histograma. En la figura 5.1 se recoge el histograma de las llegadas de clientes en el periodo 10:00 - 11:00 horas, y en la 5.2 el histograma correspondiente al periodo 12:00-14:00 horas.

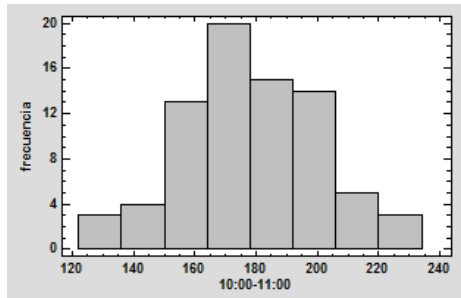


Figura 5.1. Distribución de frecuencias absolutas del periodo 10:00-11:00

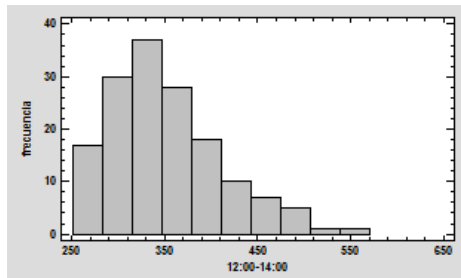


Figura 5.2. Distribución de frecuencias absolutas del periodo 12:00-14:00

Los histogramas ya proporcionan una idea de las posibles distribuciones teóricas que pueden seguir nuestros datos dentro de cada periodo de tiempo considerado. Para comprobarlo, se introducen los datos en el programa Statgraphics XVII y probamos un ajuste con una distribución de Poisson de parámetro λ igual a la media de cada franja horaria. Para comprobar que efectivamente, nuestros datos siguen una distribución de Poisson realizamos una prueba de ajuste de bondad.

Para ello, nos servimos de los intervalos considerados para descomponer el recorrido de la distribución teórica en un número finito de subconjuntos, clasificamos las observaciones muestrales según el conjunto al que pertenezcan y comparamos las frecuencias observadas en cada subconjunto con las frecuencias teóricas que corresponden con la distribución a contrastar, en este caso, la distribución de Poisson.

Denotamos las frecuencias observadas en cada clase por O_1, O_2, \dots, O_k , y las frecuencias teóricas esperadas por E_1, E_2, \dots, E_k . Trataremos ahora de decidir si las frecuencias observadas concuerdan con las esperadas de la distribución teórica. Para ello, hacemos un contraste de hipótesis utilizando la distribución Chi-cuadrado, para la cual el estadístico viene dado por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

donde el numerador de cada término de la suma viene dado por el cuadrado de la diferencia de las frecuencias observadas y esperadas.

La ecuación que define el estadístico sugiere que valores pequeños de χ^2 nos indican una mayor concordancia entre las observaciones y las probabilidades esperadas. En este contraste se rechaza la hipótesis nula (las frecuencias observadas son coherentes con las esperadas) cuando el estadístico es mayor que un determinado valor crítico que denotamos por $\chi^2_{\alpha, l}$, donde α indica el nivel de significación y l el número de grados de libertad. Se muestra a continuación a modo de ejemplo, la distribución de las llegadas en el periodo comprendido entre las 10:00 y 11:00 horas y entre las 12:00 y las 14:00 horas. En estos intervalos de tiempo tenemos 77 valores, uno por cada día, para ambas distribuciones.

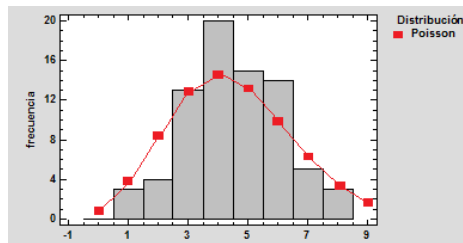


Figura 5.3. Contraste de la distribución de frecuencias absolutas con la distribución de Poisson del periodo 10:00-11:00

Pruebas de Bondad-de-Ajuste para Frec.

Prueba Chi-Cuadrada

	Limite Inferior	Limite Superior	Frecuencia Observada	Frecuencia Esperada	Chi-Cuadrada
menor o igual	1,0		3	4,63	0,57
	2,0	2,0	4	8,57	2,44
	3,0	3,0	13	12,91	0,00
	4,0	4,0	20	14,58	2,01
	5,0	5,0	15	13,18	0,25
	6,0	6,0	14	9,93	1,67
	7,0	7,0	5	6,41	0,31
	8,0	8,0	3	3,62	0,11
	9,0		0	3,17	3,17

Chi-Cuadrada = 10,5287 con 7 g.l. Valor-P = 0,160537

Figura 5.4. Tabla de frecuencias y p-valor del periodo 10:00-11:00

En el cuadro 5.4 vemos que el valor observado para la χ^2 con un nivel de significación $\alpha = 0,05$ y 7 grados de libertad es 10,5287, mientras que el valor teórico de $\chi^2_{0,05,7}$ es 14,067, por lo que podemos afirmar que las llegadas de clientes al establecimiento en el periodo comprendido entre las diez y las once de la mañana se ajusta a una distribución de Poisson.

Del mismo modo, para el periodo comprendido entre las 12:00 y las 14:00 horas se obtiene la gráfica de la figura 5.5.

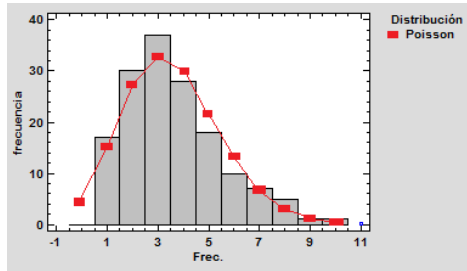


Figura 5.5. Contraste de la distribución de frecuencias absolutas con la distribución de Poisson del periodo 12:00-14:00

En la figura 5.5 se recoge con puntos la distribución teórica que se ajusta al histograma comprendido en el periodo de 12:00 a 14:00 horas. Vemos en el cuadro 5.6 que el valor del estadístico para $\alpha = 0,05$ y 7 grados de libertad es 7,53732, siendo su valor teórico $\chi^2_{0,05,7} = 14,067$ por lo que de nuevo podemos asegurar que las llegadas al hipermercado en este periodo considerado sigue de nuevo una distribución de Poisson.

Así, para cada una de ellas se admite que tanto las llegadas como las salidas siguen distribuciones de Poisson y por tanto, estaremos trabajando con modelos de colas poissonianas.

Pruebas de Bondad-de-Ajuste para Frec.
Prueba Chi-Cuadrada

	Limite Inferior	Limite Superior	Frecuencia Observada	Frecuencia Esperada	Chi-Cuadrada
menor o igual		0,0	0	4,11	4,11
	1,0	1,0	17	14,89	0,30
	2,0	2,0	30	26,98	0,34
	3,0	3,0	37	32,59	0,60
	4,0	4,0	28	29,52	0,08
	5,0	5,0	18	21,39	0,54
	6,0	6,0	10	12,92	0,66
	7,0	7,0	7	6,69	0,01
	8,0		7	4,90	0,90

Chi-Cuadrada = 7,53732 con 7 g.l. Valor-P = 0,375152

Figura 5.6. Contraste de la distribución de frecuencias absolutas con la distribución de Poisson del periodo 10:00-11:00

Podemos decir entonces que nuestro sistema de colas sigue un modelo $M/M/c$, es decir, tanto la tasa de llegada como la tasa de servicio siguen distribuciones de Poisson, tenemos un número c de canales, se considera una población ilimitada y la cola sigue una disciplina FIFO. Con esto, en el siguiente epígrafe se mostrarán los valores de los distintos indicadores de eficiencia teniendo en cuenta los modelos del capítulo anterior, lo que nos permitirá comentar y discutir el rendimiento del sistema.

5.2. Resultados

A continuación se presentan en un tablas los resultados obtenidos tras el estudio del sistema de colas del hipermercado.

En la tabla 5.1 se muestra, para los diferentes periodos considerados, la tasa media de llegadas, la tasa media de servicio, el número medio de canales y la intensidad media de tráfico. Puede comprobarse que esta intensidad es, en todos los casos, menor que el número medio de canales. Por lo que el sistema de colas es estable y se pueden determinar los indicadores o medidas de eficiencia de este sistema de colas.

Se observa también en la tabla 5.1 que existe mayor afluencia de clientes en los periodos comprendidos entre las doce y las dos del mediodía, así como de seis de la tarde a diez de la noche. Este crecimiento de la tasa de llegada se ve compensado con la apertura de un mayor número de canales de servicio lo que mantiene una intensidad de tráfico óptima y da lugar a un sistema estable.

Por el contrario, es a primera y a última hora del día donde se encuentra la menor tasa de llegada y consecuentemente un menor número de estaciones de servicio son requeridos.

Periodo	Tasa media llegada (clientes/h)	Tasa media servicio (clientes/h)	n° medio de canales	Intensidad media de tráfico
9:00-10:00	76.14	28.99	3	2.636
10:00-11:00	178.48	29.11	7	6.131
11:00-12:00	276.31	28.95	11	9.544
12:00-14:00	350.02	28.91	15	12.108
14:00-16:00	248.39	28.93	14	8.585
16:00-18:00	284.70	28.98	13	9.823
18:00-20:00	415.54	28.93	16	14.362
20:00-22:00	402.88	28.97	16	13.906
22:00-23:00	78.21	28.78	4	2.717

Tabla 5.1. Tabla de Resultados.

En la tabla 5.2 se recogen los principales indicadores de rendimiento del sistema para cada franja horaria considerada.

Periodo	n° medio clientes cola	n° medio clientes sistema	n° medio canales no ocupados	Tiempo medio espera cola (en minutos)	Tiempo medio servicio (en minutos)	Tiempo medio permanencia sistema (en minutos)
9:00-10:00	5.44	8.06	0.37	4.286	2.069	6.355
10:00-11:00	4.65	10.79	0.87	1.565	2.061	3.626
11:00-12:00	3.66	13.21	1.45	0.796	2.072	2.868
12:00-14:00	1.41	13.52	2.89	0.241	2.076	2.317
14:00-16:00	0.10	8.69	5.41	0.025	2.073	2.098
16:00-18:00	0.80	10.62	3.18	0.169	2.070	2.239
18:00-20:00	5.11	19.48	1.64	0.738	2.074	2.812
20:00-22:00	3.25	17.16	2.09	0.484	2.071	2.555
22:00-23:00	0.84	3.56	1.28	0.645	2.084	2.729

Tabla 5.2. Tabla de Resultados.

Se puede observar que el número medio de clientes en la cola en el periodo comprendido entre las 9:00 y las 10:00 es el más alto de entre todos los intervalos de

tiempo considerados pero, aún así, el tiempo medio de espera en ese periodo es de apenas 4,28 minutos, llegando a un total de tiempo medio de permanencia en el sistema de 6,35 minutos, lo que puede ser considerado razonable para los clientes. No obstante, si queremos disminuir este tiempo medio de permanencia de los clientes se debe aumentar el número de cajeros/as en esa franja horaria. Con ello se disminuirá el tiempo medio de espera de los clientes y bajará la permanencia de éstos en el sistema. En relación con ello, la empresa tiene un grupo de trabajadores asignados a otros departamentos, los cuales están disponibles para atender a los clientes en las cajas cuando fuera necesario.

Los datos recogidos en la tabla 5.1, como ya comentamos, en el periodo de 18:00 a 22:00 horas hay un crecimiento de la afluencia de público al establecimiento. Pero podemos observar aquí que, la disposición de un mayor número de canales de servicio, hace que los tiempos de espera sean muy razonables, alcanzando incluso niveles comparables a otros periodos en los que la tasa de llegada de clientes es mucho menor.

Podemos concluir entonces, basándonos en estos indicadores de rendimiento, que el mejor periodo del día, en cuanto a minimizar los tiempos de permanencia en el sistema, es entre las 14 y las 16 horas, coincidiendo con la hora de comer.

Periodo	Nº medio de canales	Tiempo medio óptimo de permanencia en el sistema (en minutos)
9:00-10:00	3	6.355
10:00-11:00	7	3.626
11:00-12:00	10	5.890
12:00-14:00	13	3.784
14:00-16:00	9	6.303
16:00-18:00	11	3.183
18:00-20:00	15	4.731
20:00-22:00	15	3.394
22:00-23:00	4	2.730

Tabla 5.3. Tabla de Resultados asumiendo un tiempo máximo de permanencia en el sistema de 5 minutos.

En la tabla 5.3 se recogen el número de canales que se necesitan por franja horaria, para que el tiempo de permanencia máximo en el sistema de un cliente no exceda de 7 minutos, periodo que consideramos aceptable para los usuarios del

sistema, considerando que al haber algo más de dos minutos en el servicio, habría menos de cinco minutos de espera en la cola.

Comparando estos resultados con los de la tablas 5.1 y 5.2, se observa que la nueva propuesta de servidores en cada periodo de tiempo, recogida en la tabla 5.3, nos lleva a obtener unos tiempos medios de permanencia en el sistema bastante aceptables. Además, con ellos se consigue disminuir el número de servidores necesarios para atender a los clientes en casi todas los periodos de tiempo considerados. Solo en los periodos primero, segundo y noveno, se mantiene el mismo numero de canales.

En las franjas horarias de 11 a 12 de la mañana, de 18 a 20 horas y de 20 a 22 horas, se propone la disminución de un servidor. Aunque lógicamente, los tiempos de permanencia en el sistema han aumentado, éstos no llegan a los 7 minutos aceptables.

En los periodos comprendidos entre las 12 y las 14 horas y las 16 y 18 horas, se propone disminuir el número de servidores en dos unidades, manteniendo que el tiempo de permanencia en cola no llega a los 5 minutos.

Por último, el ajuste más significativo en el número de canales, se daría en el periodo comprendido entre las 14 y 16 horas, coincidiendo con el horario habitual de comida, en el cual se reducen cinco servidores, pasando de los 14 actuales a considerar sólo 9.

En resumen, la disminución de servidores por periodo de tiempo es, respectivamente, 0, 0, 1, 2, 5, 2, 1, 1, 0, lo que supone que, con esta propuesta, podemos reasignar 12 trabajadores a otras labores dentro del hipermercado. Todo ello sin menoscabar la atención a los clientes, ya que con la nueva distribución de cajeros/as, el tiempo medio de permanencia en cola en cualquier franja horaria no supera los 5 minutos, lo cual es bastante razonable para el sistema de colas.

Conclusiones y futuras líneas de trabajo

En este trabajo se ha estudiado el comportamiento de los sistemas de colas que se producen en la línea de cajas de un hipermercado durante los meses de Marzo, Abril y Mayo de 2016. Se ha comprobado que tanto las llegadas como las salidas de clientes se ajustan a procesos de Poisson y, por tanto, el análisis de estas líneas de espera siguen los modelos de colas poissonianas. Se han determinado los indicadores o medidas de eficiencia de las diferentes franjas horarias en las que se ha hecho este estudio. En base a estos indicadores, podemos comprobar que tanto el número medio de clientes en cola, como el tiempo de permanencia en el sistema son valores aceptables para los clientes. Por lo que podemos afirmar que el sistema funciona adecuadamente, siendo ágil y rápida la atención a los usuarios del hipermercado.

Por último, se analizó el sistema de colas viendo si era posible reducir el número de servidores en ciertas franjas horarias, sin aumentar considerablemente el tiempo medio de espera de los clientes. En efecto, se comprobó que habían periodos de tiempo donde podría reducirse el número de servidores sin aumentar considerablemente los tiempos de espera. Así, se propuso una nueva distribución de servidores en las diferentes franjas horarias de forma que cualquier cliente que llegue al sistema, no tenga que esperar en cola más de cinco minutos, independientemente del momento en que realice su compra. Ello permite reubicar al personal hacia otras labores dentro del hipermercado sin coste adicional.

Como futuras líneas de trabajo, pensamos que sería interesante recopilar los datos de llegadas y salidas de clientes de al menos un año completo y así disponer de datos suficientes para hacer un análisis del comportamiento de los sistemas de colas por día de la semana, lo cual podría ayudar a detectar si el número de servidores diarios asignados por la empresa para atender a los clientes es el apropiado o no. También se puede extender este resultado a otros servicios que se prestan en el interior del hipermercado, como la charcutería, carnicería, pescadería o panadería, donde también se producen colas o líneas de espera de clientes cuando demandan estos servicios.

Bibliografía

- [1] SAATY, T.L.(1967) *Elementos de la Teoría de Colas*. Editorial Aguilar.
- [2] KLEINROCK, L. (1976) *Queueing systems. Vol. 1 y 2*. Editorial John Wiley and sons.
- [3] GROSS, D. Y HARRIS, C.M. (1974) *Fundamental of Queueing Theory*. Editorial John Wiley and sons.
- [4] QUESADA, V., MARTÍN, A.I., LÓPEZ MARTÍN, L.J. (1979) *Curso y ejercicios de Estadística*. Editorial Alhambra.
- [5] GONZALEZ SIERRA, M.A. (2012) *Lecciones de estadística matemática*. Servicio de Publicaciones Universidad de la Laguna.

A

Apéndice

A.1. Ejemplos de los datos recogidos.

MES	Día Mes	Día Semana	HORARIO	TASA DE LLEGADA	Nº DE CANALES DE SERVICIO	TASA DE SERVICIO
MARZO	1	Martes	9:00 - 10:00	68	1	27,15
MARZO	1	Martes	10:00 - 11:00	163	5	27,15
MARZO	1	Martes	11:00 - 12:00	265	9	27,15
MARZO	1	Martes	12:00 - 13:00	300	12	27,15
MARZO	1	Martes	13:00 - 14:00	306	11	27,15
MARZO	1	Martes	14:00 - 15:00	324	10	27,15
MARZO	1	Martes	15:00 - 16:00	185	9	27,15
MARZO	1	Martes	16:00 - 17:00	208	11	27,15
MARZO	1	Martes	17:00 - 18:00	214	14	27,15
MARZO	1	Martes	18:00 - 19:00	305	15	27,15
MARZO	1	Martes	19:00 - 20:00	388	14	27,15
MARZO	1	Martes	20:00 - 21:00	383	16	27,15
MARZO	1	Martes	21:00 - 22:00	269	15	27,15
MARZO	1	Martes	22:00 - 23:00	18	1	27,15
MARZO	2	Miércoles	9:00 - 10:00	81	3	30,99
MARZO	2	Miércoles	10:00 - 11:00	153	6	30,99
MARZO	2	Miércoles	11:00 - 12:00	279	8	30,99
MARZO	2	Miércoles	12:00 - 13:00	304	10	30,99
MARZO	2	Miércoles	13:00 - 14:00	294	12	30,99
MARZO	2	Miércoles	14:00 - 15:00	215	13	30,99
MARZO	2	Miércoles	15:00 - 16:00	213	12	30,99
MARZO	2	Miércoles	16:00 - 17:00	237	11	30,99
MARZO	2	Miércoles	17:00 - 18:00	329	14	30,99
MARZO	2	Miércoles	18:00 - 19:00	354	16	30,99
MARZO	2	Miércoles	19:00 - 20:00	449	16	30,99
MARZO	2	Miércoles	20:00 - 21:00	462	15	30,99
MARZO	2	Miércoles	21:00 - 22:00	273	12	30,99
MARZO	2	Miércoles	22:00 - 23:00	19	2	30,99
MARZO	3	Jueves	9:00 - 10:00	75	1	28,70
MARZO	3	Jueves	10:00 - 11:00	175	5	28,70
MARZO	3	Jueves	11:00 - 12:00	239	11	28,70
MARZO	3	Jueves	12:00 - 13:00	318	15	28,70
MARZO	3	Jueves	13:00 - 14:00	295	17	25,00
MARZO	3	Jueves	14:00 - 15:00	207	15	24,74
MARZO	3	Jueves	15:00 - 16:00	135	11	28,70

Figura A.1. Algunos de los datos recogidos en el mes de Marzo

MES	Día Mes	Día Semana	HORARIO	TASA DE LLEGADA	Nº DE CANALES DE SERVICIO	TASA DE SERVICIO
ABRIL	1	Viernes	9:00 - 10:00	74	3	27,44
ABRIL	1	Viernes	10:00 - 11:00	165	6	27,44
ABRIL	1	Viernes	11:00 - 12:00	262	10	27,44
ABRIL	1	Viernes	12:00 - 13:00	364	13	27,44
ABRIL	1	Viernes	13:00 - 14:00	353	13	27,44
ABRIL	1	Viernes	14:00 - 15:00	253	13	27,44
ABRIL	1	Viernes	15:00 - 16:00	250	14	27,44
ABRIL	1	Viernes	16:00 - 17:00	254	10	27,44
ABRIL	1	Viernes	17:00 - 18:00	314	13	27,44
ABRIL	1	Viernes	18:00 - 19:00	370	15	27,44
ABRIL	1	Viernes	19:00 - 20:00	465	17	27,44
ABRIL	1	Viernes	20:00 - 21:00	473	18	27,44
ABRIL	1	Viernes	21:00 - 22:00	457	20	27,44
ABRIL	1	Viernes	22:00 - 23:00	122	8	27,44
ABRIL	2	Sábado	9:00 - 10:00	82	4	26,58
ABRIL	2	Sábado	10:00 - 11:00	175	8	26,58
ABRIL	2	Sábado	11:00 - 12:00	269	14	26,58
ABRIL	2	Sábado	12:00 - 13:00	465	19	26,58
ABRIL	2	Sábado	13:00 - 14:00	490	21	26,58
ABRIL	2	Sábado	14:00 - 15:00	436	22	26,58
ABRIL	2	Sábado	15:00 - 16:00	133	19	26,58
ABRIL	2	Sábado	16:00 - 17:00	403	18	26,58
ABRIL	2	Sábado	17:00 - 18:00	476	20	26,58
ABRIL	2	Sábado	18:00 - 19:00	576	21	26,58
ABRIL	2	Sábado	19:00 - 20:00	567	21	26,58
ABRIL	2	Sábado	20:00 - 21:00	588	21	26,58
ABRIL	2	Sábado	21:00 - 22:00	596	20	26,58
ABRIL	2	Sábado	22:00 - 23:00	163	8	26,58
ABRIL	4	Lunes	9:00 - 10:00	65	2	31,08
ABRIL	4	Lunes	10:00 - 11:00	170	5	31,08
ABRIL	4	Lunes	11:00 - 12:00	283	9	31,08
ABRIL	4	Lunes	12:00 - 13:00	350	13	31,08
ABRIL	4	Lunes	13:00 - 14:00	329	15	31,08
ABRIL	4	Lunes	14:00 - 15:00	277	14	31,08
ABRIL	4	Lunes	15:00 - 16:00	133	10	31,08

Figura A.2. Algunos de los datos recogidos en el mes de Abril

MES	Dia Mes	Dia Semana	HORARIO	TASA DE LLEGADA	Nº DE CANALES DE SERVICIO	TASA DE SERVICIO
MAYO	2	lunes	9:00 - 10:00	62	6	27,99
MAYO	2	lunes	10:00 - 11:00	178	9	27,99
MAYO	2	lunes	11:00 - 12:00	283	13	27,99
MAYO	2	lunes	12:00 - 13:00	427	17	24,76
MAYO	2	lunes	13:00 - 14:00	479	21	27,99
MAYO	2	lunes	14:00 - 15:00	387	21	27,99
MAYO	2	lunes	15:00 - 16:00	278	16	27,99
MAYO	2	lunes	16:00 - 17:00	306	14	27,99
MAYO	2	lunes	17:00 - 18:00	358	18	27,99
MAYO	2	lunes	18:00 - 19:00	426	18	27,99
MAYO	2	lunes	19:00 - 20:00	485	21	27,99
MAYO	2	lunes	20:00 - 21:00	493	20	27,99
MAYO	2	lunes	21:00 - 22:00	420	14	27,99
MAYO	2	lunes	22:00 - 23:00	79	4	27,99
MAYO	4	miercoles	9:00 - 10:00	88	3	28,33
MAYO	4	miercoles	10:00 - 11:00	197	7	26,42
MAYO	4	miércoles	11:00 - 12:00	277	12	24,90
MAYO	4	miércoles	12:00 - 13:00	318	13	28,33
MAYO	4	miércoles	13:00 - 14:00	330	14	28,33
MAYO	4	miércoles	14:00 - 15:00	257	14	28,33
MAYO	4	miércoles	15:00 - 16:00	232	14	28,33
MAYO	4	miércoles	16:00 - 17:00	272	14	28,33
MAYO	4	miércoles	17:00 - 18:00	294	13	28,33
MAYO	4	miércoles	18:00 - 19:00	348	14	28,33
MAYO	4	miércoles	19:00 - 20:00	470	17	28,33
MAYO	4	miércoles	20:00 - 21:00	354	17	28,33
MAYO	4	miércoles	21:00 - 22:00	349	14	28,33
MAYO	4	miércoles	22:00 - 23:00	47	4	28,33
MAYO	5	jueves	9:00 - 10:00	82	3	28,89
MAYO	5	jueves	10:00 - 11:00	171	6	28,89
MAYO	5	jueves	11:00 - 12:00	288	10	28,89
MAYO	5	jueves	12:00 - 13:00	362	13	26,24
MAYO	5	jueves	13:00 - 14:00	325	15	28,89
MAYO	5	jueves	14:00 - 15:00	269	16	28,89
MAYO	5	jueves	15:00 - 16:00	209	14	28,89

Figura A.3. Algunos de los datos recogidos en el mes de Mayo

Lista de Figuras

2.1. Sistema básico de colas	3
2.2. Sistema de colas multicanal	6
2.3. Sistema multietapa con retroalimentación	6
5.1. Distribución de frecuencias absolutas del periodo 10:00-11:00	32
5.2. Distribución de frecuencias absolutas del periodo 12:00-14:00	32
5.3. Contraste de la distribución de frecuencias absolutas con la distribución de Poisson del periodo 10:00-11:00	33
5.4. Tabla de frecuencias y p-valor del periodo 10:00-11:00	34
5.5. Contraste de la distribución de frecuencias absolutas con la distribución de Poisson del periodo 12:00-14:00	34
5.6. Contraste de la distribución de frecuencias absolutas con la distribución de Poisson del periodo 10:00-11:00	35
A.1. Algunos de los datos recogidos en el mes de Marzo	43
A.2. Algunos de los datos recogidos en el mes de Abril	44
A.3. Algunos de los datos recogidos en el mes de Mayo	45

Queuing models: Application in the management of a customer service in a

Ana Arias García

Facultad de Ciencias - Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0100857481@ull.edu.es

Abstract

Queues or waiting lines normally appear with relative frequency of any company or establishment that provides a service to the public. Making them disappear is not an easy task as they require a big economic effort and, in many cases, this is not possible because customer demand is quite large. However, with the available resources, we must try to reduce the length of the queues and the time the users are in the systems, since this discourages the arrival of customers. Here lies the importance of Queue Theory, which is responsible for the mathematical study of the behavior of these waiting lines in order to achieve an approximate optimization of the function of the queuing system and provide customers with an adequate service with a reasonable waiting time.

1. Introduction

Queues appear when the actual demand for a service is greater than the capacity that exists to provide it over a period of time. For there to be a queue, there must be arrivals of customers demanding a service to one or more servers, which have a certain capacity to serve the claimants. If the server is not immediately available and the client decides to wait, the waiting line will be formed.

The Queue Theory is the mathematical study of the behavior of these waiting lines. In general, the arrival of clients is usually random and therefore concepts related to random variables and stochastic processes are used. These mathematical concepts provide both a theoretical basis on the type of care we can expect when a particular service is requested, and how the system can be designed to provide a certain degree of service to its clients. This theory has been developed in an attempt to predict demand fluctuations from observational data to establish a mode of operation that provides customers with an adequate service with a reasonable waiting time. At the same time, it also takes advantage of basic knowledge of a queuing situation in order

to establish better control over customer care.

2. Outline of the second chapter

A queuing system can be described as a set of customers who come to an establishment looking for a service, they wait if it's not immediate, and leave the system once they have been served. In some cases it can be assumed that customers leave the system if they get tired of waiting. When analyzing a particular system, a system representation should be designed as accurately as possible, detailing the underlying processes and taking into account the high number of systems of variables and functions to be defined. There are seven basic characteristics to consider in order to properly define a queuing system:

- Distribution of arrival of customers.
- Service pattern.
- Size of the population of customers.
- System capacity.
- Number of service channels.
- Number of service stages.
- Queue discipline.

3. Outline of the third chapter

The most common stochastic queuing models assume that both the number of arrivals to the system and the number of outputs of the system follow a Poisson distribution. It will be said that a stochastic alpha process of t , where alpha represents the arrival of clients, is a Poisson process if it satisfies the following conditions: Condition of arrival of clients Condition of independence Condition of homogeneity over time

In most basic queuing models, it is assumed that the arrivals and departures of clients in the system occur according to a process of birth and death. The differential equations control a this process, are the Chapman-Kolmogórov Equations:

$$\begin{cases} 0 = -(\lambda_n + \mu_n)p_n + \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}, & n > 0 \\ 0 = -\lambda_n p_n + \mu_{n+1}p_{n+1}, & n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

4. Outline of the fourth chapter

We will study four models of poissonian tails, that is, both arrivals and outputs of the system, follow a Poisson process. The models M/M/1, M/M/c, M/M/1/m and M/M/c/m are presented where Poisson arrivals and departures are considered and the number of service stations varies and the size of the population.

5. Outline of the fifth chapter

In this chapter, based on the theory presented throughout this memory, the queuing system of a hypermarket located in the city of Santa Cruz de Tenerife will be analyzed. In order to carry out this study, data were collected on a daily basis over a period of three months, on the inflow of customers to the establishment and the service rate of the different channels or stations where the payment of the purchase is made, Period between March and May 2016. This study will consist of different processes such as the description of the probability distributions that follows the data collected, both for the arrival and departure of customers, as well as the calculation of the different efficiency indicators of the system. In the end the results obtained will be commented on.

References

- SAATY, T.L. (1967) *Elementos de la Teoría de Colas*. Editorial Aguilar.
- KLEINROCK, L. (1976) *Queueing systems*. Vol. 1 y 2. Editorial John Wiley and sons
- GROSS, D. y HARRIS, C.M. (1974) *Fundamental of Queueing Theory*. Editorial John Wiley and sons
- QUESADA, V., MARTÍN, A.I., LÓPEZ MARTÍN, L.J. (1979) *Curso y ejercicios de Estadística*. Editorial Alhambra.
- PORTILLA, LILIANA MARGARITA; ARIAS MONTOYA, LEONEL; FERNÁNDEZ HENAO, SERGIO A. *Análisis de Líneas de Espera a través de Teoría de Colas y simulación*.