Tania Gutiérrez Gutiérrez

Espacios Topológicos Finitos

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, septiembre de 2017

Dirigido por

José Manuel García Calcines

José Manuel García Calcines
Dpto. de Matemáticas, Estadística e
Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Este trabajo de fin de grado está dedicado a:

Mi familia, de la cual he recibido todo el apoyo y la comprensión durante los años de la carrera.

Mis compañeros del grado, con los que he compartido buenos momentos a lo largo de esta etapa universitaria pero que, sobre todo, nos hemos ayudado en gran medida unos a otros a resolver una gran cantidad de dudas matemáticas para superar las dificultades que nos han surgido.

Mi tutor, José M. García Calcines, por todo el trabajo, esfuerzo y apoyo que he obtenido en la elaboración de esta memoria.

Resumen · Abstract

Resumen

En esta memoria estudiamos una noción que, poco a poco, ha ido cobrando interés a lo largo de los años. Se trata de la noción de espacio topológico finito*, la cual posee una gran complejidad de características relevantes. Concretamente, analizamos la correspondencia biunívoca que existe entre los espacios topológicos finitos y los conjuntos finitos preordenados, demostrando que ambos objetos matemáticos pueden considerarse los mismos. Bajo esta relación, los conjuntos finitos parcialmente ordenados (posets) se corresponden con los espacios topológicos finitos que verifican el axioma T_0 de separación. Además de dicha equivalencia, estudiamos la continuidad, homotopía y conexidad de los espacios topológicos finitos. Finalmente, vemos la relación que existe entre los espacios topológicos finitos T_0 y los poliedros compactos. En este sentido, a cada espacio topológico T_0 finito X se le asocia un complejo simplicial finito $\mathcal{K}(X)$ cuya realización geométrica tiene el mismo tipo de homotopía débil que X. Del mismo modo, a cada complejo simplicial finito K se le asocia un espacio topológico finito T_0, denotado por $\mathcal{X}(K)$, homotópicamente equivalente a la realización geométrica de K. Este análisis corresponde con la denominada Teoría de McCord.*

Palabras clave: *espacio topológico finito – conjunto parcialmente ordenado (poset) – diagrama de Hasse – complejo simplicial – realización geométrica – equivalencia débil.*

Abstract

In this memory we study a notion, that has slowly gained interest over the years. This fact refers to the concept of finite topological space*, which has a great deal of relevant complex features. Specifically, we analyze a biunivocal correspondence that exists between finite topological spaces and finite preordered sets, proving that both mathematical objects can be considered the same. Taking into account this relation, finite partially ordered sets correspond to finite topological spaces verifying T_0 axiom. In addition to such an equivalence, we study continuity, homotopy and connectedness of finite topological spaces. Finally, we see the relation between T_0 finite topological spaces and compact polyhedra. In this sense, each T_0 finite topological space X is related to a finite simplicial complex $\mathcal{K}(X)$ whose geometric realization has the same weak homotopy type as X. In the same way each finite simplicial complex K is related to a T_0 finite topological space, denoted by $\mathcal{X}(K)$, which is homotopically equivalent to the geometric realization of K. This analysis corresponds to McCord Theory.*

Keywords: *finite topological space – partially ordered sets (poset) – Hasse diagram – simplicial complex – geometric realization – weak equivalence.*

Contenido

Agradecimientos III

Resumen/Abstract V

Introducción IX

1. Generalidades sobre espacios topológicos y Teoría de Homotopía 1
- 1.1. Espacios topológicos. Espacios de funciones 1
- 1.2. Teoría de homotopía básica 4
- 1.3. Equivalencias débiles. 6

2. Espacios topológicos finitos 13
- 2.1. Espacios finitos y primeras propiedades 13
- 2.2. Conjuntos parcialmente ordenados 15
- 2.3. Continuidad y conexidad en espacios topológicos finitos 20
- 2.4. Tipo de homotopía: La teoría de Stong. 25

3. Complejos simpliciales y Teoría de McCord 33
- 3.1. Generalidades sobre complejos simpliciales 33
- 3.2. Teoría de McCord 39

Bibliografía 43

Lista de Figuras 45

Poster 47

Introducción

El objetivo principal de esta memoria se centra fundamentalmente en el estudio detallado de los espacios topológicos finitos y su teoría de homotopía. Expondremos una serie de resultados significativos sobre este tema, haciendo posible que el lector tenga un conocimiento más profundo de este tipo de espacios y poniendo de manifiesto su gran riqueza de propiedades, más allá de servir tradicionalmente como mera fuente de contraejemplos en Topología Conjuntista.

En 1937 P. Alexandroff publicó un artículo [11] en el que expuso su estudio acerca de la correspondencia biyectiva que existe entre los espacios topológicos finitos y los conjuntos finitos preordenados. Demostró que los espacios topológicos finitos y los conjuntos finitos parcialmente ordenados son esencialmente los mismos objetos matemáticos, considerados desde diferentes puntos de vista. Sin embargo, este tema quedó aparcado durante unos años, volviendo a recobrar interés en 1966, apareciendo otros dos artículos que daban resultados fuertes de teoría de homotopía de los espacios topológicos finitos. Uno de estos trabajos mencionados fue elaborado por R. E. Stong [5], quien utilizó la combinatoria de espacios topológicos finitos para explicar sus tipos de homotopía. Además, profundiza el estudio de Alexandroff acerca de este tipo de espacios y su correspondencia con los preórdenes. El segundo artículo fue escrito por C. McCord [7]. Este trabajo daba un enfoque diferente al de R. E. Stong, presentando la relación que existe entre los espacios topológicos finitos y los poliedros compactos. A cada espacio topológico T_0 finito X se le asocia un complejo simplicial finito $\mathcal{K}(X)$ cuya realización geométrica tiene el mismo tipo de homotopía débil que X. A su vez, a cada complejo simplicial finito K se le asocia un espacio topológico finito T_0, denotado por $\mathcal{X}(K)$, homotópicamente equivalente a la realización geométrica de K. De esta forma, McCord prueba que el tipo de homotopía débil de los espacios topológicos finitos coincide con el de los poliedros compactos. Con este conocimiento, Stong y McCord mostraron de forma implícita que la interacción de los espacios topológicos finitos entre su combinatoria y la topología, se pueden utilizar para estudiar los invariantes homotópicos de los poliedros compactos, una clase muy amplia y estudiada de los espacios topológicos.

A pesar de estos dos artículos de gran relevancia, los espacios topológicos finitos volvieron a quedar olvidados durante largo tiempo. En este período, los complejos simpliciales siguieron siendo estudiados, pero descuidando la relación con la topología de los posets. Aparece posteriormente una conjetura que se basaba en la afirmación de que existen espacios débilmente equivalentes a espacios finitos con diferentes tipos de homotopía. Esta distinción entre tipos de homotopía débil y homotopía se pierde cuando nos fijamos en los poliedros asociados debido al teorema de Whitehead.

Recientemente, el estudio de los espacios topológicos finitos ha vuelto a surgir debido en gran parte a sus aplicaciones en cuanto al procesamiento digital de imágenes. Este es uno de los principales motivos por los que cada vez más los espacios topológicos finitos y su análisis están siendo de gran relevancia en la actualidad, pues son útiles en la tecnología informática.

Aunque sea este uno de los objetivos primordiales sobre su estudio, también las aplicaciones matemáticas de los espacios topológicos finitos son de gran interés. Es en este ámbito principalmente en donde nos centramos a lo largo de esta memoria.

En 2003, P. May publicó online una serie de artículos informales acerca de los espacios topológicos finitos (véase http://www.math.uchicago.edu/∼may/MISCMaster.html) en el que estableció también una serie de conjeturas de gran importancia que surgieron sobre este tema. Sintetizó las ideas más relevantes sobre este tipo de espacios. Por otro lado, P. May observó que las ideas de Stong sobre el punto de vista combinatorio de los espacios topológicos finitos y el estudio de McCord podían unirse para resolver problemas de Topología Algebraica utilizando espacios topológicos finitos.

En esta memoria, además de los espacios topológicos finitos en sí, también estudiaremos las propiedades de las funciones continuas entre estos espacios, propiedades de conexión, axiomas de separación, relaciones con otros conjuntos, etc de manera detallada. Ésta consta de tres capítulos, siendo el primero un capítulo introductorio para tener una base de conocimientos para los siguientes. Los dos últimos son los capítulos más amplios, en cuanto a contenidos, sobre espacios topológicos finitos.

Más concretamente, en el primer capítulo nos centraremos en un recordatorio de conceptos básicos de Topología General y de Teoría de Homotopía que hemos aprendido en el Grado en Matemáticas. Además de ésto, aparecerán conceptos nuevos (espacios de funciones, la ley exponencial, etc) y un estudio de equivalencias débiles con resultados de gran relevancia (Teorema de McCord y el Teorema de Whitehead) que serán imprescindibles para los siguientes capítulos.

El segundo capítulo se basará principalmente en el estudio de los espacios topológicos finitos y sus propiedades más importantes. Veremos su asociación con los conjuntos finitos parcialmente ordenados y su representación gráfica basada en diagramas de Hasse. Finalmente, estudiaremos la continuidad, homotopía y conexidad de este tipo de espacios topológicos, así como la teoría de Stong.

Concluimos esta memoria en el último capítulo, que comenzará exponiendo brevemente una serie de generalidades sobre complejos simpliciales finitos. Esto será imprescindible para presentar finalmente la Teoría de McCord.

1

Generalidades sobre espacios topológicos y Teoría de Homotopía

El fin de este capítulo es hacer esta memoria los más autocontenida posible y servirá de apoyo fundamental en el estudio de los espacios topológicos finitos y su teoría de homotopía. Recordaremos conceptos básicos de Topología General y de Teoría de Homotopía que hemos aprendido en el Grado en Matemáticas, así como diferentes resultados sin exponer las pruebas de ello. Además, presentaremos otros, también sin demostración, que no han sido vistos, como son los espacios de funciones y la ley exponencial. Incluiremos una sección final, también novedosa, sobre equivalencias débiles que culminará con el Teorema de McCord y el Teorema de Whitehead. Ésta será de especial relevancia para el último capítulo de esta memoria.

1.1. Espacios topológicos. Espacios de funciones

Supondremos que el lector está familiarizado con las nociones más relevantes sobre espacios topológicos, como entornos, continuidad, conexidad, conexidad por caminos, compacidad, etc. No obstante, a modo introductorio recordaremos las nociones que utilizaremos en capítulos posteriores de la memoria.

Un *espacio topológico* consiste en un conjunto X junto con una colección distinguida de subconjuntos, llamados *abiertos*, satisfaciendo las siguientes propiedades:

i) El subconjunto vacío y el conjunto total son abiertos.
ii) La unión arbitraria de abiertos es abierto.
iii) La intersección finita de abiertos es abierto.

Tal colección distinguida se denomina *topología* sobre X. Denotaremos por X, si no hay lugar a confusión, al espacio topológico, sin necesidad de explicitar la topología subyacente.

A menudo, no es necesario trabajar con todos los abiertos de un espacio topológico sino con unos abiertos representativos, en el sentido que generan a todos los demás. Por ello, se trabaja con las denominadas *bases de abiertos*. Una base de abiertos β de un espacio topológico X consiste en una colección de abiertos (que denominaremos *abiertos básicos*) de tal modo que todo abierto se puede poner como una determinada unión de abiertos básicos.

La noción formal de puntos próximos a uno dado en un espacio topológico X se denomina *entorno*. Dado un punto $x \in X$, un entorno de x no es más que un subconjunto $U \subseteq X$ tal que admite un abierto A verificando que $x \in A \subseteq U$. Al igual que con las bases de abiertos, no es necesario trabajar con todos los entornos de un punto dado, sino con una colección de entornos representativos. Dado un punto x de un espacio topológico X, una *base de entornos* de x consiste en una colección $\beta(x)$ de entornos de x, satisfaciendo que para todo entorno U de x, podemos encontrar $B \in \beta(x)$ tal que $B \subseteq U$.

Un concepto que utilizaremos a lo largo de la memoria es la de *clausura* de un subconjunto A de X. Esta se define como el conjunto de todos los puntos de X cuya intersección con el subconjunto A de X es distinta de vacío.

Entre las propiedades más importantes estudiadas en espacios topológicos se encuentran las relacionadas con la separación. Recordemos que un espacio topológico X es de *Hausdorff*, o bien T_2, si para todo par de puntos distintos existen entornos respectivos que son disjuntos. Una propiedad más débil es la de ser T_1, en la cual se exige que para todo par de puntos distintos x, y existen entornos respectivos U, V tales que $x \notin V$ e $y \notin U$. Es sencillo comprobar que un espacio topológico es T_1 si y sólo si sus puntos son cerrados (es decir, con complementario abierto).

En nuestro estudio de los espacios topológicos finitos cobra especial relevancia los espacios T_0. Diremos que un espacio topológico X es T_0, si para todo par de puntos distintos x, y, o bien existe un entorno de x que no contiene a y, o bien existe un entorno de y que no contiene a x.

Evidentemente, se tiene la siguiente cadena de implicaciones:

$$T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$$

Nota 1.1.1 *Hacemos notar que en las definiciones de T_0, T_1 y T_2 se puede hacer uso de bases de entornos en lugar de considerar todos los entornos del punto correspondiente.*

El modo de relacionar espacios topológicos es a través de aplicaciones continuas. Intuitivamente, una aplicación entre espacios topológicos es continua si puntos próximos del espacio codominio provienen de puntos próximos del espacio dominio. Formalmente, dada $f : X \to Y$ una aplicación entre espacios topológicos, diremos que f es continua en un punto $x \in X$, si para todo entorno U de $f(x)$ existe un entorno V de x tal que $f(V) \subseteq U$. Además, se dice que f es continua si es continua en todos los puntos de X.

Proposición 1.1.1 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Entonces f es continua si y sólo si $f^{-1}(A)$ es abierto en X para todo abierto A de Y.*

Nota 1.1.2 *Observamos que si fijamos una base β de abiertos en Y es inmediato comprobar también que f es continua si y sólo si $f^{-1}(B)$ es abierto en X, para todo B abierto básico.*

Hay ocasiones en las que es necesario saber si una función definida a trozos es continua. El siguiente resultado es muy útil para este fin.

Proposición 1.1.2 (Continuidad) *Sea X un espacio topológico y sean A, B cerrados en X, tal que $X = A \cup B$. Consideramos $f : A \longrightarrow Y$, $g : B \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas y $f_{|A\cup B} = g_{|A\cap B}$ ($f(x) = g(x)$, para todo $x \in A \cap B$). Si definimos $h : X \longrightarrow Y$ como*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

entonces h es continua.

La topología como disciplina matemática estudia las propiedades cualitativas intrínsecas de los espacios topológicos que son independientes de su posición, tamaño o forma. Técnicamente hablando, la topología estudia todas aquellas propiedades de los espacios topológicos que son invariantes por homeomorfismos. Un *homeomorfismo* es una aplicación continua $f : X \to Y$, que es biyectiva y cuya aplicación inversa también es continua. Se trata de una deformación que es continua en las dos direcciones.

Definición 1.1.1 *Dados dos espacios topológicos X e Y. Diremos que X e Y son homeomorfos si existe un homemorfismo entre ellos. Se usará la notación $X \cong Y$ para expresar que son espacios homeomorfos.*

A continuación, estudiaremos los denominados *espacios de funciones*, que serán una herramienta importante en nuestra memoria. Dados dos espacios topológicos X e Y, consideraremos el conjunto de todas las aplicaciones continuas de X en Y, el cual se denotará como:

$$Y^X = \{f : X \longrightarrow Y : \text{f es continua}\}$$

En la siguiente definición veremos que este conjunto se puede dotar de estructura de espacio topológico.

Definición 1.1.2 *Si X e Y son espacios topológicos, se define en Y^X la* topología compacto-abierta*, que es aquella cuyos abiertos son uniones arbitrarias de intersecciones finitas de subconjuntos de la forma*

$$\omega(K, U) = \{f \in Y^X : f(K) \subseteq U\}$$

donde K es compacto en X y U un abierto en Y. A los abiertos $\omega(K, U)$ los denominamos abiertos subbásicos.

Existe una relación en los espacios de funciones denominada *ley exponencial* mediante la cual se establece una conexión con los espacios producto. Para ello, es importante conocer la aplicación *evaluación*, que se define como:

$$e : X \times Y^X \longrightarrow Y,\ (x, f) \longmapsto f(x)$$

Además, hay que considerar la noción de espacio *localmente compacto*. Diremos que un espacio topológico es *localmente compacto* si todo punto admite una base de entornos compactos. Estamos en condiciones de enunciar la *ley exponencial*, cuya demostración omitimos. Para detalles de dicha prueba, referimos al lector a [2].

Teorema 1.1.1 (Ley exponencial) *Sean X e Y espacios topológicos con X localmente compacto. Sea también $f : X \times Z \to Y$ una aplicación con Z un espacio topológico arbitrario. Entonces:*

$$f : X \times Z \to Y \text{ es continua} \iff F : Z \to Y^X \text{ es continua}$$

donde F es la aplicación definida como $F(z)(x) := f(x, y)$. A la aplicación F se le denomina aplicación adjunta de f.

Nota 1.1.3 *En la mayoría de los enunciados del teorema de la ley exponencial se le exige además a X que sea un espacio de Hausdorff. En realidad, con la definición de localmente compacto que hemos adoptado en esta memoria, la condición de Hausdorff no es necesaria. En este sentido, es sencillo seguir todos los pasos de la demostración de este teorema (por ejemplo, la dada en el libro de R. Munkres [2]) sin requerir ninguna propiedad adicional de separación a X.*

1.2. Teoría de homotopía básica

Comenzamos con la definición de aplicaciones homótopas. Como es habitual, denotaremos por I al intervalo unidad cerrado $[0, 1]$ con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

Definición 1.2.1 *Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas y $A \subseteq X$. Diremos que f es homótopa a g relativamente a A (denotado como $f \simeq g$ rel. A) si existe una aplicación continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ y $H(a, t) = f(a) = g(a)$, para todos $x \in X$, $a \in A$ y $t \in I$. A H se le denomina* homotopía *de f a g relativa a A y se usará la notación $H : f \simeq g$ rel. A.*

Cuando $A = \varnothing$ se obtiene la noción de homotopía no relativa. En este caso, hablaremos simplemente de *homotopía* y se considera la notación $f \simeq g$, o bien $H : f \simeq g$ si queremos especificar una homotopía H.

Si fijamos dos espacios topológicos X, Y y $A \subseteq X$, es fácil comprobar que la homotopía relativa a A es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las aplicaciones continuas de X a Y. Además, el siguiente resultado nos indica que la homotopía relativa es compatible con la composición:

Proposición 1.2.1 *Sean $f, f' : X \longrightarrow Y$ continuas y $A \subseteq X$ tales que $f \simeq f'$ rel. A.*

i) Si $g : Y \longrightarrow Z$ es continua entonces $g \circ f \simeq g \circ f'$ rel. A.
ii) Si $h : Z \to X$ es continua y $B \subseteq Z$ verifica $h(B) \subseteq A$ entonces $f \circ h \simeq f' \circ h$ rel. B.

En Teoría de Homotopía se considera una noción más débil que la de homeomorfismo, que es la de *equivalencia de homotopía*. Diremos que una aplicación continua $f : X \to Y$ es equivalencia de homotopía si existe otra aplicación continua $g : Y \to X$ (denominada *inverso homotópico* de f) tal que $gof \simeq 1_X$ y $fog \simeq 1_Y$. Obsérvese que, por definición, g también es equivalencia de homotopía (cuyo inverso homotópico es f).

No es difícil comprobar que la composición de equivalencias de homotopía es equivalencia de homotopía. Por otro lado, se deduce directamente que todo homeomorfismo es equivalencia de homotopía. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, la aplicación constante $f : \mathbb{R} \to \{*\}$ es una equivalencia de homotopía que obviamente no es homeomorfismo.

Definición 1.2.2 *Dados dos espacios topológicos X e Y, diremos que son homótopicamente equivalentes (o que tienen el mismo tipo de homotopía) si existe una equivalencia de homotopía entre ellos. Se usará la notación $X \simeq Y$ para expresar que son espacios homotópicamente equivalentes.*

Es directo comprobar que la conexidad (resp. conexidad por caminos) es una propiedad que se conserva por equivalencia de homotopía. Este tipo de propiedades se denominan *propiedades homotópicas.*

Un tipo particular de espacio topológico es aquel que es homotópicamente equivalente a un espacio unipuntual. Esta clase de espacios se denominan *contráctiles.* Por una aplicación *nulhomótopa* $f : X \to Y$ nos referiremos a una aplicación continua que es homótopa a una aplicación constante. Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.2.2 *Sea X un espacio topológico. Entonces X es contráctil si y sólo si la aplicación identidad $1_X : X \to X$ es nulhomótopa.*

Es común también considerar subespacios homotópicamente equivalentes al espacio topológico ambiente. Esto queda concretado con las nociones de retracto por deformación y retracto por deformación fuerte.

Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y denotemos por $i : A \hookrightarrow X$ a la inclusión canónica. Diremos que A es un retracto de X si existe una aplicación continua $r : X \to A$ (denominada retracción) tal que $r \circ i = 1_A$. Si además $i \circ r \simeq 1_X$ entonces diremos que A es *retracto por deformación* de X. En el caso particular más restrictivo $i \circ r \simeq 1_X$ rel. A, se tiene la noción de *retracto por deformación fuerte*. Notemos que si A es un retracto por deformación (fuerte) de X, entonces la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es una equivalencia de homotopía.

1.3. Equivalencias débiles.

Esta sección está dedicada a las denominadas equivalencias débiles. La noción de equivalencia débil es menos restrictiva que la de equivalencia de homotopía. Hemos decidido incorporar un estudio de este tipo de aplicaciones ya que será de especial importancia en el último capítulo de esta memoria a la hora de relacionar los espacios topológicos finitos con los complejos simpliciales finitos mediante la Teoría de McCord.

Con el fin de presentar la definición de equivalencia débil, empezaremos por dar una breve exposición de los denominados *grupos superiores de homotopía*, pero antes haremos un recordatorio particular sobre las componentes conexas por caminos de un espacio topológico.

Dado X un espacio topológico, diremos que dos puntos $x, y \in X$ están *conectados*$(x \sim y)$ si existe un camino $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Esta relación es de equivalencia en X y, por consiguiente, podemos considerar el conjunto cociente $\pi_0(X) := X/_\sim$. Este conjunto no es más que el formado por las componentes conexas por caminos de X. En este sentido, la clase de equivalencia $[x]$ de un punto x es la componente conexa por caminos de X que contiene a x.

Por otro lado, dada una aplicación $f : X \to Y$ continua, se define la aplicación de conjuntos $\pi_0(f) := \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ por $\pi_0(f)([x]) = [f(x)]$. Es inmediato comprobar que $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$ y $\pi_0(1) = 1$. Además, dadas $f, g : X \to Y$ aplicaciones continuas con una homotopía $F : f \simeq g$, el camino $\alpha(t) := F(x, t)$ une los puntos $f(x)$ con $g(x)$. Esto demuestra que $\pi_0(f) = \pi_0(g)$. Como consecuencia, si tenemos el caso $f \circ g \simeq 1$, obtenemos $\pi_0(f) \circ \pi_0(g) = \pi_0(f \circ g) = \pi_0(1) = 1$. Por tanto:

Proposición 1.3.1 *Si $f : X \to Y$ es una equivalencia de homotopía entonces $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ es una biyección.*

A continuación, describiremos los grupos superiores de homotopía de un espacio topológico X con un punto base $x_0 \in X$. Estos grupos son una generalización directa del grupo fundamental visto en el Grado de Matemáticas. Para cada número natural $n \geq 1$, se considerará el n-cubo como el producto de n copias de I: $I^n = I \times I \times ...^{(n} \times I$. Su frontera viene dada por la siguiente expresión:

$$\partial I^n = \{(t_1, t_2, ..., t_n) \in I^n : t_i \in \{0, 1\}, \text{ para algún i} \in \{1, ..., n\}\}$$

Dado X un espacio topológico con un punto distinguido x_0, diremos que el par (X, x_0) es un *espacio topológico punteado* con punto base x_0.

Definición 1.3.1 *Sea (X, x_0) un espacio topológico punteado. Un* lazo n-dimensional *(o bien n-lazo) en X basado en x_0 consiste en una aplicación continua*

$$\alpha : I^n \to X$$

tal que $\alpha(\partial I^n) = \{x_0\}$.

Denotaremos por $\Omega^n(X, x_0)$ al conjunto de todos los n-lazos en X basados en x_0.

Existe una operación natural entre n-lazos basados en x_0:

$$(\alpha * \beta)(t_1, t_2, ..., t_n) := \begin{cases} \alpha(t_1, t_2, ..., t_{n-1}, 2t_n), & 0 \leq t_n \leq 1/2 \\ \beta(t_1, t_2, ..., t_{n-1}, 2t_n - 1), & 1/2 \leq t_n \leq 1 \end{cases}$$

para $\alpha, \beta \in \Omega^n(X, x_0)$.

Por otro lado, el n-lazo inverso de un n-lazo α viene dado por

$$\overline{\alpha}(t_1, t_2, ..., t_n) := \alpha(t_1, t_2, ..., t_{n-1}, 1 - t_n)$$

Finalmente, la aplicación constante en x_0, $\varepsilon_{x_0} : I^n \to X$, es un n-lazo basado en x_0.

Definición 1.3.2 *Sean $\alpha, \beta \in \Omega^n(X, x_0)$. Diremos que α y β son* equivalentes*, y lo denotaremos por $\alpha \sim \beta$, si $\alpha \simeq \beta$ rel. ∂I^n.*

La equivalencia de n-lazos es una relación de equivalencia en $\Omega^n(X, x_0)$. Denotaremos por $[\alpha]$ a la clase de equivalencia de $\alpha \in \Omega^n(X, x_0)$.

El siguiente resultado, así como su demostración, es totalmente análogo al caso 1-dimensional para la construcción del grupo fundamental.

Proposición 1.3.2 *Sea (X, x_0) un espacio topológico punteado. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

i) Si $\alpha \sim \alpha'$ y $\beta \sim \beta'$ entonces $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$ para todos $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \Omega^n(X, x_0)$.
ii) $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$ para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^n(X, x_0)$.

iii) $\varepsilon_{x_0} * \alpha \sim \alpha$ *y* $\alpha * \varepsilon_{x_0} \sim \alpha$ *para todo* $\alpha \in \Omega^n(X, x_0)$.
iv) $\alpha * \overline{\alpha} \sim \varepsilon_{x_0}$ *y* $\overline{\alpha} * \alpha \sim \varepsilon_{x_0}$ *para todo* $\alpha \in \Omega^n(X, x_0)$.

Teniendo en cuenta esta proposición, tenemos que el conjunto cociente

$$\pi_n(X, x_0) := \Omega^n(X, x_0)/_{\sim}$$

tiene estructura de grupo con la operación $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta]$, donde el elemento neutro es $1 = [\epsilon_{x_0}]$ y el elemento inverso viene dado por $[\alpha]^{-1} := [\overline{\alpha}]$ para cada $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$. Este grupo se denomina *n-grupo de homotopía* de X basado en x_0.

Nota 1.3.1 *Hacemos notar que $\pi_1(X, x_0)$ no es más que el grupo fundamental de X basado en x_0, ya estudiado en el grado. Como sabemos, el grupo fundamental puede no ser abeliano, sin embargo, se prueba que todos los grupos $\pi_n(X, x_0)$ son abelianos para $n \geq 2$ (véase por ejemplo en [1]).*

Dada una aplicación continua $f : X \to Y$ y un punto $x_0 \in X$ se tiene la aplicación

$$\begin{gathered} \pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0)) \\ \pi_n(f)([\alpha]) = [f \circ \alpha] \end{gathered}$$

la cual es sencillo comprobar que se trata de un homomorfismo de grupos. Una comprobación directa demuestra que $\pi_n(g \circ f) = \pi_n(g) \circ \pi_n(f)$ y $\pi_n(1) = 1$. Por tanto, si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo se tiene que $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo de grupos. Como en el caso del grupo fundamental, esta propiedad se puede mejorar para equivalencias de homotopía. En efecto, si φ es un camino en X con $\varphi(0) = x_0$ y $\varphi(1) = x_1$ entonces, mediante una construcción análoga al caso 1-dimensional con el grupo fundamental pero algo más general, se puede construir un isomorfismo de grupos $T(\varphi) : \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(X, x_1)$ (para la construcción de este isomorfismo, véase la demostración 7.2.3 del libro [8]).

Siguiendo el paralelismo con el estudio del grupo fundamental se demuestra también que dadas $f, g : X \to X$ aplicaciones continuas con una homotopía $F : f \simeq g$ y dado un punto $x_0 \in X$, podemos definir el camino $\varphi(t) := F(x_0, t)$ de modo que induce el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X, x) \arrow[r, "\pi_n(f)"] \arrow[dr, "\pi_n(g)"'] & \pi_n(X, f(x_0)) \arrow[d, "T(\varphi)", "\cong"'] \\ & \pi_n(X, g(x_0)) \end{tikzcd}$$

Se deduce el siguiente resultado importante:

Proposición 1.3.3 *Sea $f : X \to Y$ una equivalencia de homotopía. Si $x_0 \in X$ y $n \geq 1$ entonces $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo de grupos.*

Como corolario inmediato obtenemos que si X es un espacio contráctil entonces $\pi_n(X, x) \cong 0$ para todo $n \geq 1$ y $x \in X$.

Nota 1.3.2 *El isomorfismo $T(\varphi) : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_1)$ tiene propiedades más ricas que las de su homólogo en el caso 1-dimensional. No es complicado comprobar que se verifican las siguientes propiedades:*

i) Si $\varphi \simeq \varphi'$ rel. $\{0, 1\}$ entonces $T(\varphi) = T(\varphi')$.
ii) Si $\varphi, \psi \in X^I$ verifican que $\varphi(1) = \psi(0)$ entonces

$$T(\varphi * \psi) = T(\psi) \circ T(\varphi)$$

iii) $T(\varepsilon_x) = 1$ para todo $x \in X$.
iv) Si $f : X \to Y$ es continua entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, x_0) \arrow[r, "\pi_n(f)"] \arrow[d, "T(\varphi)"] & \pi_n(Y, f(x_0)) \arrow[d, "T(f\circ\varphi)"] \\
\pi_n(X, x_1) \arrow[r, "\pi_n(f)"'] & \pi_n(Y, f(x_1))
\end{tikzcd}$$

donde $\varphi(0) = x_0$ y $\varphi(1) = x_1$.

Esto nos permite, por ejemplo, definir una acción del grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_n(X, x_0)$, si bien esto no lo vamos a desarrollar ya que se excede de los objetivos de la memoria. Una vez más, recomendamos [1] para ver esto con más detalle.

A continuación, daremos la definición central de esta sección, que es la de *equivalencia débil de homotopía* o simplemente *equivalencia débil*. Como ya hemos comentado, esta noción será crucial en la Teoría de McCord que veremos en el último capítulo.

Definición 1.3.3 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Se dirá que f es* equivalencia débil *si se verifica las siguientes condiciones:*

i) $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ es biyectiva.
ii) $\pi_n(f) : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ es isomorfismo de grupos para todos $x \in X$, $n \geq 1$.

Nota 1.3.3 *En el caso particular de que X e Y sean conexos por caminos (es decir, $\pi_0(X) = \{*\} = \pi_0(Y)$), teniendo en cuenta la propiedad iv) de la nota 1.3.2, es sencillo comprobar que f es equivalencia débil si y sólo si $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ es isomorfismo de grupos para todo $n \geq 1$, siendo $x_0 \in X$ un punto prefijado.*

Nota 1.3.4 *Toda equivalencia débil $f : X \to Y$ induce isomorfismos $H_n(f) : H_n(X;G) \to H_n(Y;G)$ entre los denominados grupos de homología para todo $n \geq 0$ y todo grupo abeliano de coeficientes G (véase proposición 4.21 en [1]). Los grupos de homología son otros invariantes homotópicos de los espacios topológicos que históricamente surgieron antes de los grupos de homotopía. Teniendo en cuenta el comentario anterior se tiene así que toda equivalencia débil codifica tanto la información homotópica como la homológica de los espacios topológicos.*

Teniendo en cuenta las proposiciones 1.3.1 y 1.3.3, es claro que toda equivalencia de homotopía es equivalencia débil. Sin embargo, no toda equivalencia débil es equivalencia de homotopía. El siguiente espacio topológico tiene todos sus grupos de homotopía triviales, y sin embargo, no es contráctil. En otras palabras, $f : X \to \{*\}$ es una equivalencia débil pero no es de homotopía. Para más detalle sobre estas afirmaciones, véase el libro de C. R. F. Maunder [8].

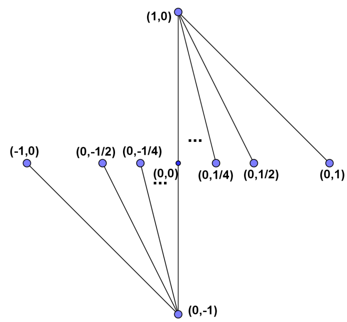


Figura 1.1. Contraejemplo de espacio topológico finito para comprobar que una equivalencia débil no implica ser equivalencia de homotopía.

Es inmediato comprobar que la propiedad de que dadas dos aplicaciones $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ si dos de las aplicaciones $\varphi, \psi, \psi \circ \varphi$ son biyectivas, entonces también lo es la tercera aplicación. Teniendo en cuenta esta propiedad básica entre aplicaciones, el triángulo conmutativo resultante de dos aplicaciones homótopas (ver diagrama justo antes de la proposición 1.3.3) y la definición de equivalencia débil, se tiene las siguientes propiedades sobre equivalencias débiles:

Proposición 1.3.4 *i) Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones continuas. Si dos de las aplicaciones $f, g, g \circ f$ son equivalencias débiles entonces también lo es la tercera.*

ii) Sean $f, g : X \to Y$ aplicaciones continuas con $f \simeq g$. Entonces f es equivalencia débil si y sólo si g es equivalencia débil.

El teorema de McCord 1.3.1 juega un papel crucial en la teoría homotópica de los espacios topológicos finitos. Este resultado nos dice básicamente que si una aplicación continua es localmente una equivalencia débil entonces es una equivalencia débil. La demostración original por McCord se puede encontrar en [5]. Una demostración alternativa para recubrimientos finitos se puede obtener también en [1].

Diremos que un recubrimieto abierto $\mathcal{U}$ (en un espacio topológico X) es de *tipo básico* si para todo par de abiertos $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ y todo punto $x \in U_1 \bigcap U_2$, existe $U_3 \in \mathcal{U}$ tal que

$$x \in U_3 \subseteq U_1 \bigcap U_2$$

Teorema 1.3.1 *(McCord) Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de Y de tipo básico. Si para todo $U \in \mathcal{U}$ la restricción*

$$f_{|f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$$

es una equivalencia débil, entonces $f : X \to Y$ es equivalencia débil.

Expondremos finalmente el Teorema de Whitehead, por lo que introduciremos un tipo especial de espacios topológicos denominados CW-complejos. No es nuestra intención desarrollar la teoría de este tipo de espacios topológicos, sino simplemente presentar el mencionado teorema.

Para la definición de CW-complejos empezaremos por establecer cúando un espacio topológico se obtiene de otro adjuntándole una colección de n-celdas. Usaremos la siguiente notación donde $\| - \|$ representa la norma euclídea usual:

$$\begin{array}{rl} D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \leq 1\} & \text{(la } n\text{-bola cerrada)} \\ B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| < 1\} & \text{(la } n\text{-bola abierta)} \\ S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| = 1\} & \text{(la } (n-1)\text{-esfera)} \end{array}$$

Sean X^* un espacio de Hausdorff y $X \subseteq X^*$ un subespacio suyo. Diremos que X^* *se obtiene de X adjuntándole una colección de n-celdas* si se verifican las siguientes condiciones:

1. $X^* \setminus X$ es unión disjunta de subconjuntos abiertos (denominados n-celdas) $e^n_\lambda \cong B^n$, para todo $\lambda \in \Lambda$.
2. Para cada $\lambda \in \Lambda$ existe una aplicación continua
$$f_\lambda : D^n \to \overline{e^n_\lambda}$$
tal que $f_{\lambda|B^n} : B^n \to e^n_\lambda$ y $f_\lambda(S^{n-1}) \subseteq X$.
3. X^* tiene la *topología débil*, es decir, que $A \subseteq X^*$ es cerrado (resp. abierto) si y solo si:
   i) $A \bigcap X$ es cerrado (resp. abierto) en X y
   ii) $f^{-1}_\lambda(A)$ es cerrado(resp. abierto) en D^n, para todo $\lambda \in \Lambda$.

Por ejemplo, S^2 se obtiene de $*$ adjuntando una 2-celda.

$$f : D^2 \to * \subseteq S^2 f(x) = *$$

Así $S^2 = * \cup e^2_\lambda$.

Definición 1.3.4 *Una estructura de CW-complejo en un espacio X de Hausdorff consiste en una sucesión creciente de subespacios cerrados*

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq ... \subseteq X$$

tal que:

i) X^0 es un espacio discreto.
ii) Para todo $n > 0$, X^n se obtiene de X^{n-1} por adjuncción de una colección de n-celdas.
iii) $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$
iv) El espacio X y cada uno de los subespacios X^n tiene la topología débil, es decir, $A \subseteq X$ es cerrado si y sólo si para todo q-celdas, e^q, $A \bigcap \overline{e}^q$ es cerrado en $\overline{e}^q$.

Para cada $n \geq 0$, X^n se llama *n-esqueleto* de X. Los puntos de X^0, se denominan *0-celdas* de X. Por otro lado, un CW-complejo se dice que es *finito* si el número de celdas es finito. En caso contrario, se dice que X es infinito. Si existe $n \geq 0$ tal que $X = X^n$ (es decir, no tiene celdas de dimensión mayor que n) se dice que X tiene *dimensión finita*. El menor n para el que esto ocurre se llama *dimensión de X*. En caso contrario, se dice que X tiene dimensión infinita. Lógicamente si un CW-complejo es finito, entonces tiene dimensión finita, pero el recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ tiene estructura de CW-complejo de dimensión 1, donde el conjunto de las 0-celdas es $\mathbb{Z}$ y cada intervalo $(k, k+1)$ es una 1-celda.

Obsérvese que un mismo espacio topológico puede admitir diferentes estructuras de CW-complejo, así que, como es habitual, cuando consideremos un CW-complejo X, supondremos que existe un estructura celular fijada.

Algunos ejemplos de CW-complejos se encuentran en:

i) Las superficies compactas (toro, Botella de Klein, esfera, plano proyectivo,...) tienen estructura de CW-complejo finito de dimensión 2.
ii) Los grafos tienen estructura de CW-complejo de dimensión 1.
iii) La n-esfera S^n, el n-espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$ y el n-espacio euclídeo son CW-complejos de dimensión n.

Concluimos con el enunciado del Teorema de Whitehead, cuya demostración se puede encontrar en el libro de E. Spanier [3] o en el de C. R. F. Maunder [8].

Teorema 1.3.2 *(Whitehead) Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre CW-complejos. Entonces f es equivalencia débil si y sólo si f es equivalencia de homotopía.*

2

Espacios topológicos finitos

Este capítulo está centrado en el estudio de los espacios topológicos finitos y sus propiedades más importantes. Veremos la equivalencia entre los espacios topológicos finitos que son T_0 con los conjuntos finitos parcialmente ordenados (posets finitos), los cuales se pueden representar mediante diagramas de Hasse. Otras propiedades que serán estudiadas son la continuidad y conexidad, así como la teoría de homotopía de los espacios topológicos finitos.

2.1. Espacios finitos y primeras propiedades

Tal como da a entender su nomenclatura, un *espacio topológico finito* es aquel espacio topológico con un número finito de puntos. Un ejemplo típico sería el espacio topológico representado en el siguiente diagrama, donde el conjunto subyacente es $X = \{a, b, c, d\}$ y la topología es $\tau = \{\varnothing, X, \{c\}, \{d\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$:

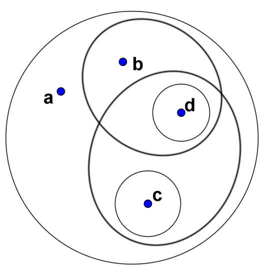


Figura 2.1. Ejemplo típico de espacio topológico finito

Este tipo de espacios topológicos en principio podrían no tener ningún tipo de interés por su simpleza. No obstante, veremos que estos espacios son más complejos de lo que uno podría llegar a pensar puesto que están relacionados con otros objetos matemáticos de gran relevancia.

Dado un espacio topológico finito X (con una topología τ), se define para cada punto $x \in X$ el *abierto minimal* U_x como la intersección de todos los abiertos que contienen a x, es decir,

$$U_x = \bigcap_{A \in \tau, x \in A} A$$

Obviamente se trata de un abierto de X (de hecho, la intersección arbitraria de abiertos es abierta en un espacio topológico finito). La propiedad fundamental de U_x es que dado cualquier abierto U que contenga a x, necesariamente se tendrá que $U_x \subseteq U$.

Una propiedad interesante de los abiertos minimales viene expresada en el siguiente resultado. Recordemos que un punto x está en la clausura (o adherencia) de un subconjunto A en un espacio topológico X, si se tiene que $U \cap A \neq \varnothing$, para todo entorno U de x. En general, denotaremos a la clausura de A por $\overline{A}$. Mantendremos esta notación a lo largo de toda la memoria.

Proposición 2.1.1 *Sea X un espacio topológico finito. Entonces*

$$x \in U_y \Longleftrightarrow y \in \overline{\{x\}}.$$

Demostración. Supongamos que $x \in U_y$ y sea V un entorno cualquiera de y. Entonces por la minimalidad de U_y se tiene que $x \in U_y \subseteq V$. Por lo tanto, V contiene a x. Recíprocamente si $y \in \overline{\{x\}}$, en particular $U_y \cap \{x\} \neq \varnothing$, es decir, $x \in U_y$.

□

No es difícil comprobar que el conjunto de los abiertos minimales forma una base de abiertos β para la topología de X. De hecho, todo abierto $U \in \tau$ es la unión de los abiertos minimales U_x con $x \in U$. Esta base la denominaremos *base minimal* de X. Notemos que dada cualquier otra base en X, esta debe contener a la base minimal. En efecto, si un abierto minimal U_x es unión de abiertos, entonces al menos uno de ellos debe contener a x y, por consiguiente, coincidir con U_x. Esta propiedad de las bases minimales demuestra que son únicas. Notemos también que para cada $x \in X$, $\beta(x) = \{U_x\}$ constituye una base de entornos de x, la cual es también minimal respecto de la inclusión.

Ejemplo 2.1.1 *Sea $X = \{a, b, c, d\}$ un conjunto con topología*

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b, c, d\}\}$$

Los abiertos minimales que contienen a cada elemento del conjunto son $U_a = \{a\}$, $U_b = \{b, c, d\}$, $U_c = \{c\}$, $U_d = \{b, c, d\}$. Por tanto, la base minimal de X es $\beta = \{\{a\}, \{c\}, \{b, c, d\}\}$.

Para la siguiente propiedad usaremos la notación U_x^X para expresar el entorno minimal de x en el espacio topológico X con el fin de ser un poco más explícito y evitar posibles confusiones.

Proposición 2.1.2 *Sea $Y \subseteq X$ con X un espacio topológico finito. Entonces para $y \in Y$ se tiene*

$$U_y^Y = U_y^X \cap Y$$

Como consecuencia, si β es la base minimal de X entonces $\beta_y = \{U \cap Y : U \in \beta\}$ es la base minimal de Y.

Demostración. Basta probar la igualdad $U_y^Y = U_y^X \cap Y$. Por un lado, como $U_y^X \cap Y$ es un abierto en Y que contiene a y, por minimalidad se tiene que $U_y^Y \subseteq U_y^X \cap Y$. Recíprocamente supongamos que $z \in U_y^X \cap Y$ y veamos que $z \in B$ para cualquier abierto B en Y tal que $y \in B$. En efecto, para un abierto B, el cual se puede expresar como $B = A \cap Y$ con A abierto en X, tenemos que

$$U_y^X \subseteq A$$

por la propiedad de minimalidad de U_y^X. Concluimos que $z \in U_y^Y \cap Y \subseteq A \cap Y = B$.

$\square$

Nota 2.1.1 *Un* espacio de Alexandroff *ó* A-espacio *es un espacio topológico (no necesariamente finito) con la propiedad de que la intersección arbitraria de abiertos es abierto. Trivialmente, todo espacio finito es un espacio de Alexandroff. Sin embargo, el recíproco no es cierto en general ($\mathbb{R}$ con la topología indiscreta proporciona un contraejemplo sencillo).*

Aunque nuestro estudio estará centrado en los espacios topológicos finitos, cabe destacar que todas estas propiedades vistas, así como la gran mayoría de las que veremos en secciones y capítulos posteriores, son igualmente válidas para los espacios de Alexandroff.

2.2. Conjuntos parcialmente ordenados

En esta segunda sección veremos que los espacios topológicos finitos con la propiedad adicional de ser T_0 se pueden describir exactamente como conjuntos finitos parcialmente ordenados, por lo que podremos dar una representación gráfica diferente mediante el *diagrama de Hasse* del conjunto parcialmente ordenado asociado. Asimismo, veremos que esta relación se puede extender con aplicaciones continuas y aplicaciones que conservan el orden. Esto nos permitirá estudiar nuevas propiedades de los espacios topológicos finitos a través de esta nueva perspectiva.

Recordemos que un *preorden* en un conjunto X es una relación binaria $\leq$ en X que es reflexiva y transitiva, es decir:

i) $x \leq x$ para todo $x \in X$.
ii) Si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

En este caso se dirá que $(X, \leq)$ es un *conjunto preordenado*. Si además la relación $\leq$ es antisimétrica:

iii) Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$

se dirá que $\leq$ es un *orden parcial* y que $(X, \leq)$ es un conjunto *parcialmente ordenado*. Para abreviar, a los conjunto parcialmente ordenados también los denominaremos *posets*. Esta denominación es influencia del inglés, cuya expresión sería *partially ordered sets*.

No todo conjunto preordenado es un poset. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ con el preorden siguiente:

$$(x, y) \leq (x', y') \Longleftrightarrow x + y \leq x' + y'$$

Claramente no se cumple la propiedad antisimétrica, pues $(3, 3) \leq (2, 4)$ y $(2, 4) \leq (3, 3)$. Pero $(3, 3) \neq (2, 4)$.

A continuación, veremos cómo asociar un conjunto preordenado a un espacio topológico finito.

Definición 2.2.1 *Sea X un espacio topológico finito con topología τ. Se define en X el preorden $\leq_\tau$ dado por:*

$$x \leq_\tau y \Longleftrightarrow x \in U_y \text{ (equivalentemente } U_x \subseteq U_y\text{)}$$

Es inmediato comprobar que, efectivamente, $(X, \leq_\tau)$ es un conjunto preordenado. Sin embargo, no tiene por qué ser un poset, pues podría suceder que $U_x = U_y$ para puntos distintos $x, y \in X$, como se ve en el siguiente contraejemplo:

Ejemplo 2.2.1 *Sea el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$. Claramente $U_a = U_b = \{a, b\}$, es decir, $a \leq_\tau b$ y $b \leq_\tau a$.*

A continuación, veremos la condición necesaria y suficiente en el espacio topológico finito X para que el preorden asociado $\leq_\tau$ sea un orden parcial.

Proposición 2.2.1 *Sea X un espacio topológico finito con topología τ. Son equivalentes:*

i) (X, τ) es un espacio topológico T_0.
ii) $(X, \leq_\tau)$ es un poset (es decir, $x = y$ si y sólo si $U_x = U_y$).

Demostración. Supongamos que $\leq$ no es antisimétrico, es decir, que existen puntos distintos $x, y \in X$ tales que $x \leq y$ e $y \leq x$. Teniendo en cuenta que $\beta(x) = \{U_x\}$ y $\beta(y) = \{U_y\}$ son bases de entornos de x e y respectivamente, y que $U_x = U_y$, se deduce inmediatamente que (X, τ) no es un espacio topológico

T_0.
Recíprocamente si (X, τ) no es T_0, existen puntos distintos $x, y \in X$ donde falla la condición de T_0. En particular, al ser $\beta(x) = \{U_x\}$ y $\beta(y) = \{U_y\}$ bases de entornos de x e y se tiene que $x \in U_y$ e $y \in U_x$; en otro lenguaje, $x \leq y$ e $y \leq x$ siendo $x \neq y$. Esto demuestra que $\leq$ no es antisimétrico.

□

Acabamos de ver que a cada espacio topológico finito se le puede asociar un conjunto finito preordenado, de tal modo que T_0 se corresponde con orden parcial. A continuación veremos que a cada conjunto finito preordenado se le puede asociar un espacio topológico finito con la misma correspondencia entre T_0 y preorden.

Proposición 2.2.2 *Sea $(X, \leq)$ un conjunto finito preordenado. Entonces $\leq$ determina la topología $\tau_{\leq}$ en X cuyos abiertos son los subconjuntos $U \subseteq X$ con la siguiente propiedad:*

$$x \in U,\ \ y \leq x \Rightarrow y \in U$$

En dicha topología, el subconjunto de la forma

$$U_x = \{y \in X : y \leq x\}$$

es el abierto minimal de x, con lo cual, la colección de todos estos abiertos forman la base de abiertos minimal de $(\tau, \leq)$. Además, $(X, \tau_{\leq})$ es T_0 si y sólo si $(X, \leq)$ es un poset.

Demostración. Una simple comprobación demuestra que $\tau_{\leq}$ es una topología en X donde cada U_x como el enunciado de la proposición, es un abierto. Además, dado U un abierto cualquiera con $x \in U$, es inmediato comprobar, por definición, que $U_x \subseteq U$. Esto demuestra que U_x es el abierto minimal de x. Para ver que $(X, \tau_{\leq})$ es T_0 si y sólo si $(X, \leq)$ es un poset, basta hacer un razonamiento similar al hecho de la proposición 2.2.1 anterior.

□

A continuación, veremos un resultado acerca de subespacios. Obsérvese que si X es un espacio topológico finito y $A \subseteq X$ entonces A con su topología relativa τ_A tiene asociado un conjunto preordenado $(A, \leq_{\tau_A})$. Por otro lado, (X, τ) tiene asociado su correspondiente conjunto preordenado.

Proposición 2.2.3 *Sean X un espacio topológico finito y $A \subseteq X$. Si $a, a' \in A$ entonces*

$$a \leq_{\tau_A} a' \Longleftrightarrow a \leq_{\tau_X} a'$$

Demostración. Nótese que, para $a, a' \in A$, la expresión $a \leq_{\tau_A} a'$ es equivalente a decir que $a \in U^A_{a'} = U^X_{a'} \cap A$ (véase proposición 2.1.2), pero a su vez, esto es equivalente a la expresión $a \in U^X_{a'}$, es decir, $a \leq_{\tau_X} a'$.

□

Nota 2.2.1 *Dados $(X, \leq)$ un conjunto preordenado y A un subconjunto de X, obviamente A con la relación $\leq_A$ restringida de $\leq$ es un conjunto preordenado. Es sencillo comprobar que A con la topología inducida con la relación $\leq_A$ es subespacio topológico de $(X, \tau_{\leq})$. La demostración de este hecho es igual de sencilla que las vistas en las proposiciones anteriores y, por ello, se omiten.*

El siguiente teorema resume todas las propiedades presentadas anteriormente. Básicamente nos dice que los espacios topológicos finitos y los conjuntos preordenados finitos son la misma estructura matemática. En esta equivalencia, los espacios topológicos finitos T_0 se corresponden con los posets.

Es fácil comprobar su demostración a partir de las nociones y resultados que se han probado anteriormente, por lo cual, también es omitida.

Teorema 2.2.1 *Sea X un conjunto finito. Entonces la correspondencia $\tau \mapsto \leq_\tau$ establece una biyección entre las topologías de X y los preórdenes de X. Además, en dicha biyección, las topologías T_0 se corresponden biunívocamente con los órdenes parciales.*

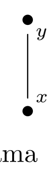
Los posets o conjuntos parcialmente ordenados se pueden representar gráficamente a partir de los denominados *diagramas de Hasse*. Para poder explicar con propiedad dichos diagramas, necesitaremos la siguiente definición.

Definición 2.2.2 *Sea X un poset y sean $x, y \in X$. Diremos que y* cubre *a x (o bien x es* cubierto *por y) si se dan las siguientes condiciones:*

i) $x < y$ *(e.d., $x \leq y$ y $x \neq y$).*
ii) No existe $z \in X$ tal que $x < z < y$.

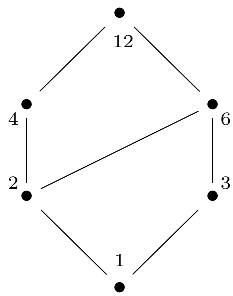
Usaremos la notación $x \prec y$ para expresar que y cubre a x.

El diagrama de Hasse de un poset X es el grafo dirigido cuyos vértices son los puntos de X y cuyas aristas son los pares ordenados $(x, y) \in X \times X$ tales que $x \prec y$. En la representación gráfica de un diagrama de Hasse no escribiremos una flecha desde x hasta y, sino un segmento vertical con y como extremo superior y x como extremo inferior. En otras palabras, si $x \prec y$, lo representaremos en el diagrama de Hasse como:



Veamos un ejemplo de diagrama de Hasse asociado a un determinado poset.

Ejemplo 2.2.2 *Sea $X = \{12, 6, 4, 3, 2, 1\}$ el poset de los divisores naturales de 12 con la relación $x \leq y$ si y sólo si x divide a y. Entonces el diagrama de Hasse asociado es el siguiente:*

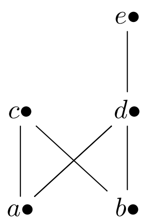


Por el teorema 2.2.1, X es un espacio topológico finito. Recordemos que los abiertos minimales genéricos de la topología asociada al orden parcial son de la forma

$$U_x = \{y \in X : y \leq x\}$$

Así tenemos los abiertos minimales siguientes: $U_{12} = X$, $U_4 = \{1,2,4\}$, $U_6 = \{1,2,3,6\}$, $U_2 = \{1,2\}$, $U_3 = \{1,3\}$ *y* $U_1 = \{1\}$. *Teniendo en cuenta que estos determinan una base de abiertos, tenemos que el espacio topológico asociado es* $(X, \tau_{\leq})$, *siendo* $\tau_{\leq}$ *la topología formada por los abiertos* $\varnothing$, X, $\{1\}, \{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,3,6\}$, $\{1,2,3,4\}$ *y* $\{1,2,3,4,6\}$.

Ejemplo 2.2.3 *Considérese el poset finito representado en el siguiente diagrama de Hasse:*

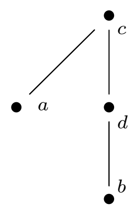


La base de abiertos para la topología asociada viene determinada por los siguientes abiertos minimales: $U_a = \{a\}$, $U_b = \{b\}$, $U_c = \{a,b,c\}$ *y* $U_d = \{a,b,d\}$, $U_e = \{a,b,d,e\}$. *Por lo tanto, el espacio topológico* T_0 *asociado es* $(X, \tau_{\leq})$, *siendo* $X = \{a,b,c,d,e\}$ *y la topología* $\tau_{\leq}$ *formada por los abiertos* $\varnothing$, X, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,b,c,d\}$ *y* $\{a,b,d,e\}$.

Ejemplo 2.2.4 *Veamos ahora el diagrama de Hasse asociado a un espacio topológico finito* T_0. *Consideremos en el conjunto* $X = \{a,b,c,d\}$ *la topología*

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,d\}, \{a,b,d\}\}$$

Teniendo en cuenta que los abiertos minimales son $U_a = \{a\}$, $U_b = \{b\}$, $U_c = X$ *y* $U_d = \{b,d\}$, *el diagrama de Hasse asociado al correspondiente poset* $(X, \leq_{\tau})$ *es el siguiente:*

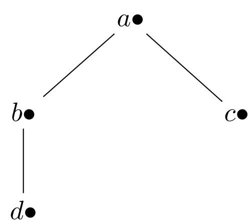


Exponemos un último ejemplo:

Ejemplo 2.2.5 *Sea el espacio topológico* T_0, (X, τ) *con* $X = \{a, b, c, d\}$ *y topología*

$$\tau = \{\varnothing, X, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}\}$$

Ya que los abiertos minimales son $U_a = X$, $U_b = \{b, d\}$, $U_c = \{c\}$ *y* $U_d = \{d\}$, *el diagrama de Hasse asociado al correspondiente poset* $(X, \leq_\tau)$ *es el siguiente:*



2.3. Continuidad y conexidad en espacios topológicos finitos

Como el título de esta sección indica, analizaremos a continuación la continuidad y conexidad en espacios topológicos finitos.

Según lo ya visto al principio de este capítulo, podemos considerar los espacios topológicos finitos como conjuntos finitos preordenados y recíprocamente según el proceso explicado en el teorema 2.2.1. Por esta razón, a partir de ahora no haremos distinción entre espacios topológicos finitos (resp. T_0) y conjuntos finitos preordenados (resp. posets finitos).
Nuestro objetivo ahora es buscar la relación existente entre las aplicaciones continuas y las que son compatibles con el preorden.

Definición 2.3.1 *Una aplicación* $f : X \longrightarrow Y$ *entre conjuntos preordenados se dice que* conserva el orden *si verifica la propiedad*

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

para todo $x, y \in X$

El resultado principal para aplicaciones es el siguiente

Proposición 2.3.1 *Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos finitos es continua si y sólo si conserva el orden.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que f es continua y sean $x, y \in X$ tales que $x \leq y$ (es decir, $x \in U_y$). Al ser f continua tenemos que $f^{-1}(U_{f(y)})$ es abierto y como $y \in f^{-1}(U_{f(y)})$ se tiene, por minimalidad, que $U_y \subseteq f^{-1}(U_{f(y)})$. Esto demuestra que $x \in f^{-1}(U_{f(y)})$ y, por tanto, $f(x) \in U_{f(y)}$. Pero por definición, esto significa que $f(x) \leq f(y)$.

Recíprocamente, supongamos ahora que f conserva el orden. Como la colección de todos los abiertos minimales en Y forma una base de abiertos, basta ver que $f^{-1}(U_z)$ es abierto en X para cualquier $z \in Y$. A su vez, para ver que $f^{-1}(U_z)$ es abierto, es suficiente comprobar que $U_y \subseteq f^{-1}(U_z)$ para cada $y \in f^{-1}(U_z)$. Sean pues $z \in Y$ e $y \in f^{-1}(U_z)$; si $x \in U_y$, entonces $x \leq y$ y, por hipótesis, $f(x) \leq f(y)$. Como $f(y) \in U_z$ y $f(x) \leq f(y)$ concluimos que $f(x) \in U_z$, es decir $x \in f^{-1}(U_z)$

□

Nos disponemos ahora a analizar la conexidad en los espacios topológicos finitos. Diremos que en un conjunto preordenado X, dos elementos $x, y \in X$ son *comparables* si $x \leq y$, o bien $y \leq x$

Lema 2.3.1 *Sean $x, y \in X$ con X espacio topológico finito. Si x e y son comparables entonces existe un camino entre ellos.*

Demostración. Supongamos que $x \leq y$. Definimos la aplicación $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$ como

$$\alpha(t) = \begin{cases} x, & 0 \leq t < 1 \\ y, & t = 1 \end{cases}$$

Sólo queda por comprobar que α es continua. En efecto, si U es un abierto en X distinguiremos dos casos:

i) $y \in U$; en este caso, como $x \in U_y$ (recordemos que $x \leq y$) y, por minimalidad, $U_y \subseteq U$, necesariamente $x \in U$. Por consiguiente, $\alpha^{-1}(U) = [0, 1]$.
ii) $y \notin U$; en este caso, las posibilidades para x son que $x \in U$, con lo que $\alpha^{-1}(U) = [0, 1)$, o bien, que $x \notin U$, con lo que $\alpha^{-1}(U) = \varnothing$.

Para $y \leq x$ se razona de forma análoga.

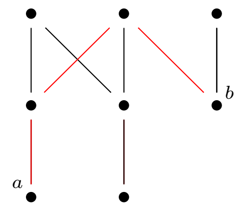
□

Veamos una noción a priori más refinada de conexidad por caminos.

Definición 2.3.2 *Sea X un espacio topológico finito. Una* cerca *en X consiste en una sucesión finita de puntos de X, $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que x_i y x_{i+1} son comparables (e.d. $x_i \leq x_{i+1}$, o bien, $x_{i+1} \leq x_i$) para cada $i = 1, 2, ..., n - 1$.*

Diremos que X *es* conexo por orden *si para todo par de puntos* $x, y \in X$ *existe una cerca* $x_1, x_2, ..., x_n$ *tal que* $x_1 = x$ *y* $x_n = y$.

Ejemplo 2.3.1 *En el siguiente poset finito representado por un diagrama de Hasse, podemos ver en rojo una cerca que conecta el punto* a *con el punto* b. *Claramente esto se puede hacer para cualquier par de puntos, por lo que se trata de un espacio topológico finito conexo por orden:*



El resultado que viene a continuación nos dice que entre espacios topológicos finitos, la conexidad, conexidad por caminos y conexidad por orden son en realidad nociones equivalentes.

Proposición 2.3.2 *Sea* X *un espacio topológico finito. Entonces son equivalentes:*

i) X *es conexo.*
ii) X *es conexo por orden.*
iii) X *es conexo por caminos.*

Demostración. Según el lema 2.3.1 anterior, es claro que toda cerca determina un camino en X. De este modo, si X es conexo por orden, entonces también es conexo por caminos. Por otro lado, es bien conocido que todo espacio conexo por caminos es conexo.
Supongamos ahora que X es conexo. Para un punto fijado $x_0 \in X$ definimos el siguiente subconjunto de X:

$$A = \{x \in X : \text{ existe una cerca de } x_0 \ a \ x\}$$

Obviamente $A \neq \varnothing$, pues $x_0 \in A$. Por otro lado, A es abierto en X. Efectivamente, si $x \in A$ entonces $U_x \subseteq A$; nótese que si $y \in U_x$ (e.d. $y \leq x$) y $x_0 = y_1, y_2, ..., y_n = x$ es una cerca que une x_0 con x, entonces $x_0 = y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1} = y$ es una cerca que une x_0 con y. Esto demuestra que A es abierto en X.
Un razonamiento similar demuestra que si $x \in X \setminus A$ entonces $U_x \subseteq X \setminus A$, es decir, A es cerrado en X. Ya que X es conexo, necesariamente se tiene que $X = A$. En otras palabras, X es conexo por orden.

□

Corolario 2.3.1 *Sea X un espacio topológico finito y sean $x, y \in X$. Entonces son equivalentes:*

i) Existe un camino en X que conecta x con y.
ii) Existe una cerca en X que conecta x con y.

Demostración. Como hemos comentado anteriormente, toda cerca es un camino. Por otro lado, dado un camino cualquiera $\alpha : I \to X$ se tiene que $\alpha(I)$ es conexo por caminos, y por la proposición 2.3.2 anterior es conexo por orden.

□

A continuación, estudiaremos la homotopía entre espacios topológicos finitos. Recordemos del capítulo uno (ver sección 1) que dados X e Y espacios topológicos arbitrarios, podemos considerar el espacio de funciones

$$Y^X = \{f : X \longrightarrow Y : \text{f es continua}\}$$

dotado de la topología compacto-abierta. Para el caso que nos ocupa, es evidente que si X e Y son espacios topológicos finitos entonces Y^X también lo es.

Definición 2.3.3 *Dados X e Y espacios topológicos finitos se define el* preorden puntual *en Y^X como el siguiente:*

$$f \leq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x), \text{ para todo } x \in X$$

Proposición 2.3.3 *Si X e Y son espacios topológicos finitos entonces el preorden puntual en Y^X se corresponde exactamente con la topología compacto-abierta.*

Demostración. Sea $\omega(K, U)$ un abierto subbásico de la topología compacto-abierta de Y^X (ver definición 1.1.2). Si vemos que $\omega(K, U)$ es abierto en $\tau_{\leq}$ siendo $\leq$ el preorden puntual, entonces habremos visto que la topología compacto-abierta está contenida en $\tau_{\leq}$. Sea entonces $f \in \omega(K, U)$ y comprobemos que se tiene el contenido:

$$U_f = \{g \in Y^X : g \leq f\} \subseteq \omega(K, U)$$

En efecto, si $g \leq f$ entonces $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$ y, en particular, se tiene $g(x) \leq f(x) \in U$ para todo $x \in K$. Esto implica que $g(x) \in U$ para todo $x \in K$, es decir, $g \in \omega(K, U)$.

Recíprocamente sea $f \in Y^X$ y veamos que el abierto minimal básico $U_f = \{g \in Y^X : g \leq f\}$ es un abierto de la topología compacto-abierta. Pero esto se deduce de la siguiente igualdad, fácilmente comprobable por doble contenido:

$$U_f = \bigcup_{x \in X} \omega(\{x\}, U_{f(x)})$$

Corolario 2.3.2 *Sean X e Y espacios topológicos finitos. Si Y es T_0 entonces Y^X también es T_0.*

Demostración. Dados $f, g \in Y^X$ tales que $f \leq g$ y $g \leq f$, debemos ver que $f = g$. Pero como $f(x) \leq g(x)$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$, e Y es T_0, se deduce que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

$\square$

Si X es un espacio topológico finito e Y es cualquier espacio topológico, sabemos por la ley exponencial (ver teorema 1.1.1) que existe una biyección natural entre el conjunto de las homotopías $H : X \times I \longrightarrow Y$ y el conjunto de los caminos $\alpha : I \longrightarrow Y^X$. Por otro lado, recordemos del capítulo uno, que dadas dos aplicaciones continuas $f, g : X \longrightarrow Y$ escribiremos $f \simeq g$ si son homótopas. Además, si son homótopas relativamente a un subespacio $A \subseteq X$, escribiremos $f \simeq g$ rel. A.

Proposición 2.3.4 *Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas entre espacios topológicos finitos. Entonces $f \simeq g$ si y sólo si existe una cerca en Y^X*

$$f = f_1, f_2, ..., f_n = g$$

Además, si $A \subseteq X$ entonces $f \simeq g$ rel. A si y sólo si existe una cerca en Y^X $f = f_1, f_2, ..., f_n = g$, tal que $f_{i|A} = f_{|A}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

Demostración. Según lo anteriormente comentado, la existencia de una homotopía $H : f \simeq g$ es equivalente a un camino $\alpha : I \to Y^X$ tal que $\alpha(0) = f$ y $\alpha(1) = g$. Pero esto es, por el corolario 2.3.1, equivalente a la existencia de una cerca en Y^X que conecta f con g.

La segunda parte de la demostración es análoga, pero teniendo en cuenta que el camino α se puede considerar $\alpha : I \longrightarrow M$ siendo

$$M := \{g \in Y^X : g_{|A} = f_{|A}\} \subseteq Y^X$$

Entonces se aplica el mismo corolario 2.3.1 para el espacio finito M.

$\square$

El siguiente resultado es una aplicación directa de la proposición 2.3.4 anterior.

Corolario 2.3.3 *Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas entre espacios topológicos finitos. Si $f \leq g$ entonces $f \simeq g$ (es más, $f \simeq g$ rel. A siendo $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$).*

Corolario 2.3.4 *Si X es un espacio topológico finito con un elemento máximo o mínimo, entonces X es contráctil.*

Demostración. Supongamos que X tiene máximo $x_0 \in X$. Si $C_{x_0} : X \longrightarrow X$ denota la aplicación constante en x_0, entonces $1_X \leq C_{x_0}$, es decir, $1_X \simeq C_{x_0}$. Por la proposición 1.2.2, X es contráctil. Si X tiene minimo se procede de forma análoga.

Nota 2.3.1 *Diremos que un espacio topológico X es* localmente contráctil *si todo punto $x \in X$ admite una base de entornos contráctiles. Notemos que todo espacio topologico finito X es localmente contráctil. En efecto, por un lado sabemos que para cada punto $x \in X$, $\beta(x) = \{U_x\}$ es una base de entornos de x siendo U_x el abierto minimal de x. Por otro, $U_x = \{y \in X : y \leq x\}$ tiene al punto x como máximo, por lo que por el corolario 2.3.4 anterior U_x es un espacio contráctil.*

2.4. Tipo de homotopía: La teoría de Stong.

En esta última sección estudiaremos el tipo de homotopía de los espacios topológicos finitos. En primer lugar, comprobaremos que todo espacio topológico finito es del mismo tipo de homotopía de un espacio topológico finito T_0 (equivalentemente, un poset finito). Por tanto, desde el punto de vista homotópico, siempre podremos suponer que los espacios topológicos finitos son de este tipo. A continuación, haremos uso de las ideas de Stong para clasificar los espacios topológicos finitos por su tipo de homotopía. En concreto, introduciremos la noción de punto eliminable (lineal o colineal) y veremos que la eliminación de tales puntos no afecta al tipo de homotopía del espacio. Mediante este proceso, llegaremos a que todo espacio topológico finito es homotópicamente equivalente a un espacio finito sin puntos eliminables, el cual denominaremos núcleo. Finalmente, daremos el teorema de clasificación del tipo de homotopía de los espacios topológicos finitos.

Comenzamos definiendo el cociente de Kolmogorov. Dado X un espacio topológico finito, podemos definir la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \iff U_x = U_y \text{ (equivalentemente } x \leq y \text{ e } y \leq x)$$

Denotaremos al correspondiente espacio cociente por $X_0 := X/_\sim$ y a la proyección canónica por $p : X \longrightarrow X_0$. Este espacio cociente se denomina *cociente de Kolgomorov.* Obviamente X_0 vuelve a ser un espacio topológico finito (con su topología cociente). Por tanto, en virtud del teorema 2.2.1, tiene estructura de conjunto preordenado. El siguiente lema nos caracteriza perfectamente el preorden de X_0. Como es usual, denotaremos por $[x]$ a la clase de equivalencia de $x \in X$. Así, $p : X \to X_0$ tendrá la expresión $p(x) = [x]$.

Lema 2.4.1 *Sea X un espacio topológico finito y $p : X \longrightarrow X_0$ su correspondiente proyección en el cociente de Kolmogorov. Entonces*

$$[x] \leq [y] \iff x \leq y$$

Demostración. En un paso previo de la demostración, veamos que para cada $x \in X$ se tiene la igualdad
$$p(U_x) = U_{p(x)}$$
Por un lado, tenemos que $p^{-1}(p(U_x)) = U_x$ y, en particular, $p(U_x)$ es abierto en X_0. Nótese que, dado cualquier $y \in p^{-1}(p(U_x))$, va a existir un elemento $z \in U_x$ tal que $p(y) = p(z)$, es decir, $U_y = U_z$. Así, $y \in U_y = U_z \subseteq U_x$. Al ser $p(U_x)$ un abierto que contiene a $p(x)$ tenemos, por minimalidad, que $U_{p(x)} \subseteq p(U_x)$. Por otro lado, ya que $p^{-1}(U_{p(x)})$ es un abierto que contiene a x, por el mismo argumento de minimalidad, tenemos que $U_x \subseteq p^{-1}(U_{p(x)})$. Esto prueba que $p(U_x) \subseteq U_{p(x)}$ y, por tanto, la igualdad $p(U_x) = U_{p(x)}$.
Al ser p continua, conserva el preorden, por lo que si $x \leq y$, trivialmente tenemos que $p(x) \leq p(y)$. Recíprocamente, si $p(x) \leq p(y)$, por definición $U_{p(x)} \subseteq U_{p(y)}$ y según el razonamiento anterior $p(U_x) \subseteq p(U_y)$. Se sigue que

$$U_x = p^{-1}(p(U_x)) \subseteq p^{-1}(p(U_y)) = U_y$$

Pero esto significa que $x \leq y$.

□

Teorema 2.4.1 *Sea X un espacio topológico finito. Entonces X_0 es un espacio topológico finito T_0. Además, la proyección $p : X \xrightarrow{\simeq} X_0$ es una equivalencia de homotopía.*

Demostración. Sean $[x], [y] \in X_0$ tales que $[x] \leq [y]$ y $[y] \leq [x]$. Por el lema 2.4.1 tenemos que $x \leq y$ e $y \leq x$. Por tanto, $x \sim y$, es decir, $[x] = [y]$. Esto demuestra que X_0 es T_0.

Veamos ahora que p es equivalencia de homotopía. Si para cada clase de equivalencia elegimos un representante, claramente podemos definir una aplicación $i : X_0 \longrightarrow X$ tal que $p \circ i = 1_{X_0}$. Por propiedades básicas de cocientes, para comprobar la continuidad de i tenemos que ver que la composición $i \circ p : X \longrightarrow X$ es continua, esto es, que conserva el orden. Para ello, supongamos que $x \leq y$ y sean $i(p(x)) = x'$ e $i(p(y)) = y'$ los representantes distinguidos de $p(x)$ y $p(y)$ respectivamente. Como $p(x') = p(x) \leq p(y) = p(y')$ entonces, por el lema 2.4.1 anterior, se tiene que $x' \leq y'$, es decir, $(i \circ p)(x) \leq (i \circ p)(y)$. Esto demuestra la continuidad de $i : X_0 \longrightarrow X$.
Finalmente, veamos que $i \circ p \leq 1_X$, hecho que probaría, según el corolario 2.3.3, que $i \circ p \simeq 1_X$. Efectivamente, sean $x \in X$ y $x' = i(p(x))$ el representante distinguido de $p(x)$. Claramente, como $p(x) = p(x')$ tenemos que $x \sim x'$ y, en particular, $x' \leq x$; es decir, $(i \circ p)(x) \leq x$.

□

Nota 2.4.1 *En general, dadas $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ aplicaciones continuas (entre espacios topológicos arbitrarios) tales que $f \circ g = 1_X$, es inmediato que f es un homeomorfismo sobre su imagen:*

$$f : X \xrightarrow{\cong} f(X)$$

Por tanto, a la aplicación $f : X \longrightarrow Y$ *se le puede considerar como una inclusión. En la demostración del teorema 2.4.1 anterior, vimos que* $p \circ i = 1_{X_0}$*, por lo que en este caso,* $i : X_0 \longrightarrow X$ *se puede considerar una inclusión, es decir,* X_0 *es un subespacio topológico de* X *haciendo la identificación* $X_0 \equiv i(X_0)$*. Por otro lado, como las aplicaciones* $i \circ p$, 1_X *coinciden en* X_0 *y tenemos que* $i \circ p \leq 1_X$*, entonces por la proposición 2.3.4 concluimos que* $i \circ p \simeq 1_X$ *rel.* X_0 *y, por tanto,* X_0 *es un retracto por deformación fuerte de* X*.*

Nota 2.4.2 *Si* $f : X \longrightarrow Y$ *es una aplicación continua entre espacios topológicos finitos entonces, puesto que* f *conserva el preorden es inmediato comprobar que se induce una aplicación continua entre los cocientes de Kolmogorov,* $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$*, haciendo conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_X"', "\simeq"] & Y \arrow[d, "\simeq"', "p_Y"] \\ X_0 \arrow[r, dotted, "f_0"'] & Y_0 \end{tikzcd}$$

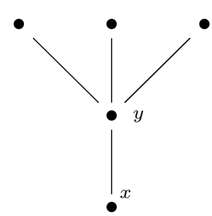
Además, esta construcción conserva las composiciones y las identidades. Esto es:

i) *Si* $f : X \longrightarrow Y$ *y* $g : Y \longrightarrow X$ *son aplicaciones continuas entre espacios topológicos finitos entonces* $(g \circ f)_0 = g_0 \circ f_0$*.*
ii) $(1_X)_0 = 1_{X_0}$*.*

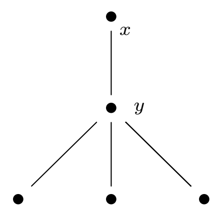
A continuación, nos adentraremos en las ideas de Stong. Para ello, empezaremos definiendo unos puntos distinguidos muy especiales en los espacios topológicos finitos. Al eliminar dichos puntos, el subespacio resultante seguirá teniendo el mismo tipo de homotopía.
En la siguiente definición consideraremos la noción ya vista en la definición 2.2.2 para la representación de diagramas de Hasse.

Definición 2.4.1 *Sea* X *un espacio topológico finito.*

i) *Diremos que* $x \in X$ *es un* punto lineal *si* x *está cubierto por un único elemento* $y \in X$



ii) Diremos que $x \in X$ es un punto colineal *si x cubre a un único elemento $y \in X$*



Finalmente se dirá que $x \in X$ es un punto eliminable *si es lineal o colineal.*

Nota 2.4.3 *Es sencillo comprobar que dado $x \in X$ se tiene:*

i) x es un punto lineal si y sólo si $\hat{F}_x := F_x \setminus \{x\}$ tiene un mínimo siendo $F_x = \{y \in X : y \geq x\}$.
ii) x es un punto colineal si y sólo si $\hat{U}_x = U_x \setminus \{x\}$ tiene un máximo siendo $U_x = \{y \in X : y \leq x\}$.

La característica básica de los puntos eliminables viene dada por la siguiente proposición. Recordemos del teorema 2.4.1 que siempre podemos considerar espacios topológicos finitos T_0, salvo tipo de homotopía.

Proposición 2.4.1 *Sea X un espacio topológico finito T_0. Si $x \in X$ es un punto eliminable entonces $X \setminus \{x\}$ es un retracto por deformación fuerte de X.*

Demostración. Supongamos que x es colineal y denotemos por $i : X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ a la inclusión canónica. Al ser x colineal se tiene que existe un único $y \in X$ tal que $x \prec y$. Definimos la aplicación $r : X \longrightarrow X \setminus \{x\}$ como

$$r(z) = \begin{cases} z, & z \neq x \\ y, & z = x \end{cases}$$

Para comprobar que r es continua, tenemos que ver que conserva el orden. Sean $z, z' \in X$ tales que $z \leq z'$. Eliminando el caso trivial $z = z'$ distinguimos los siguientes tres:

i) Si $z \neq x$ y $z' \neq x$, entonces $r(z) = z < z' = r(z')$;
ii) Si $z = x$ y $z' \neq x$, entonces $r(z) = y < x = z < z' = r(z')$;
iii) Si $z \neq x$ y $z' = x$, entonces en este caso, como $z < x$ y $x \prec y$, necesariamente, por ser x colineal, tenemos que $z \leq y$. Es decir, $r(z) = z \leq y = r(z')$.

Además, por construcción se tiene que $i \circ r \leq 1_X$ por lo que, teniendo en cuenta el corolario 2.3.3, $i \circ r \simeq 1_X$ rel. $X \setminus \{x\}$.
Si el punto x es lineal se razona análogamente.

□

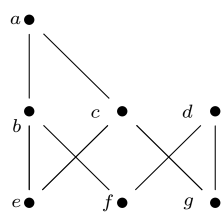
Considerando espacios topológicos finitos, al ir suprimiendo puntos eliminables llegará un momento que no se puedan eliminar más. Este tipo de espacios reciben un nombre especial.

Definición 2.4.2 *Un espacio topológico finito T_0 se dice que es* minimal *si no tiene puntos eliminables. Un* núcleo *de un espacio topológico finito X es un subespacio minimal que es un retracto por deformación fuerte de X.*

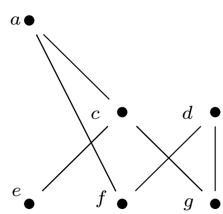
Nota 2.4.4 *Obsérvese que todo espacio topológico finito (no necesariamente T_0) tiene núcleo. Si el espacio es T_0 se van suprimiendo uno a uno todos los puntos eliminables hasta alcanzar un núcleo. Por otro lado, si X no es T_0, sabemos que el cociente de Kolmogorov es un subespacio topológico T_0, que es retracto por deformación fuerte de X; entonces vamos suprimiendo puntos eliminables de X_0 hasta obtener un núcleo.*

A continuación, veamos un ejemplo de cómo obtener un núcleo. Para hacerlo más sencillo, partiremos de un espacio topológico finito T_0 representado por un diagrama de Hasse.

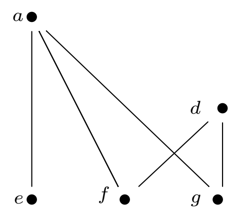
Ejemplo 2.4.1 *Sea X el espacio topológico finito T_0 con diagrama de Hasse siguiente:*



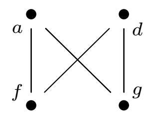
Vamos a ir suprimiendo uno a uno los puntos eliminables para hallar su núcleo. Como vemos, b es un punto lineal, pues está cubierto por a. Por tanto, si eliminamos en primer lugar a b, obtenemos el subespacio topológico representado por el siguiente diagrama de Hasse:



A continuación eliminaremos c, pues es un punto lineal cubierto por a. Así, el diagrama de Hasse quedará:



Finalmente eliminamos e ya que es un punto lineal (cubierto por a), por lo que quedará:



Debido a que ya no quedan más puntos eliminables, este último espacio topológico es minimal, por lo que por la proposición 2.4.1, se trata de un núcleo del espacio original X.

Para finalizar este capítulo, veremos que el núcleo es único salvo homeomorfismo. Además, determina con exactitud el tipo de homotopía del espacio topológico finito original. Para ver esto, necesitamos un lema previo. Recordemos que dado un poset X, un elemento $x \in X$ es un *elemento maximal* si

$$y \geq x \Rightarrow y = x$$

Dualmente, $x \in X$ es un *elemento minimal* si verifica la propiedad

$$y \leq x \Rightarrow y = x$$

Lema 2.4.2 *Sea X un espacio topológico finito minimal y sea $f : X \longrightarrow X$ una aplicación continua. Si $f \simeq 1_X$ entonces $f = 1_X$.*

Demostración. Como $f \simeq 1_X$, existe una cerca

$$f = f_1, f_2, ..., f_n = 1_X$$

Por consiguiente, para demostrar este lema, podemos suponer sin pérdida de generalidad que f y 1_X son comparables. Supongamos entonces que $f \leq 1_X$ (el caso $f \geq 1_X$ es análogo) y vamos a suponer también, por reducción al absurdo, que $f \neq 1_X$. Entonces podemos considerar un punto $y \in Y$ tal que $f(y) < y$ y el siguiente subconjunto no vacío de X:

$$A = \{x \in X : f(x) < x\}$$

Si tomamos un elemento minimal $x_0 \in A$ tenemos claramente que $z < x_0$ implica $f(z) = z$. Veamos que $y_0 := f(x_0)$ es un punto colineal en X, lo cual sería una contradicción al ser X minimal. En efecto, si $z \in \hat{U}_{x_0}$ entonces $z < x_0$, por lo que $z = f(z) \leq f(x_0) = y_0$. Este razonamiento demuestra que $y_0 = max\ \widehat{U}_{x_0}$, es decir, y_0 es punto colineal (ver nota 2.4.3).

□

Proposición 2.4.2 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos minimales. Entonces f es equivalencia de homotopía si y sólo si f es homeomorfismo.*

Demostración. Supongamos que $g : Y \longrightarrow X$ es un inverso homotópico de f. Como $g \circ f \simeq 1_X$, por el lema anterior se tiene que $g \circ f = 1_X$. Análogamente, $f \circ g \simeq 1_Y$ implica $f \circ g = 1_Y$.

□

Concluimos con el teorema de clasificación de Stong.

Teorema 2.4.2 *El núcleo de un espacio topológico finito es único salvo homeomorfismo. Además, dados X e Y espacios topológicos finitos, estos son homotópicamente equivalentes si y sólo si sus respectivos núcleos son homeomorfos.*

Demostración. Sean X_c e Y_c respectivos núcleos de X e Y y sean $i_X : X_c \overset{\simeq}{\hookrightarrow} X$ e $i_Y : Y_c \overset{\simeq}{\hookrightarrow} Y$ las inclusiones canónicas con inversos homotópicos r_X y r_Y. Si existiera $f : X \overset{\simeq}{\to} Y$ una equivalencia de homotopía, entonces se induciría $\widetilde{f} := r_Y \circ f \circ i_X : X_c \overset{\simeq}{\to} Y_c$ una equivalencia de homotopía entre los núcleos, la cual, en virtud de la proposición 2.4.2 anterior, es un homeomorfismo.
Recíprocamente si $h : X_c \overset{\cong}{\to} Y_c$ es un homeomorfismo, y por tanto, equivalencia de homotopía, entonces $\widetilde{h} := i_Y \circ h \circ r_X : X \overset{\simeq}{\to} Y$ es equivalencia de homotopía.
La unicidad del núcleo salvo homeomorfismo se deduce inmediatamente del razonamiento anterior.

□

El siguiente corolario es inmediato.

Corolario 2.4.1 *Un espacio topológico finito es contráctil si y sólo si su núcleo está formado por un único punto. Además, todo espacio topológico finito contráctil tiene un subespacio unipuntual que es un retracto por deformación fuerte suyo.*

3

Complejos simpliciales y Teoría de McCord

En este último capítulo de la memoria veremos que a todo espacio topológico finito T_0 se le asocia un complejo simplicial finito cuyos grupos de homotopía coinciden con el del espacio de partida. Similarmente, a cada complejo simplicial finito se le asocia un espacio topológico finito T_0 con idéntica propiedad sobre sus grupos de homotopía. Esta relación entre los espacios topológicos finitos y los complejos simpliciales finitos fue descubierta por McCord.
Antes de exponer esta teoría, necesitaremos estudiar los complejos simpliciales. Es por ello que comenzamos con una sección preliminar sobre estos objetos matemáticos.

3.1. Generalidades sobre complejos simpliciales

Comenzamos estudiando las propiedades más relevantes sobre los complejos simpliciales abstractos. No seremos demasiado exhaustivos con las demostraciones en esta sección puesto que estos objetos ya han sido estudiados en el grado desde el punto de vista geométrico. En este sentido, nos centraremos a modo expositivo en todas aquellas definiciones y resultados que nos harán falta. Para demostraciones detalladas de todas las afirmaciones sobre complejos simpliciales, recomendamos al lector el libro de C. R. F. Maunder [8], o bien, el de E. H. Spanier [3].

Definición 3.1.1 *Un* complejo simplicial K *consiste en un par* (V_K, S_K) *donde* V_K *es un conjunto cuyos elementos denominaremos* vértices *y* S_K *es un conjunto formado por subconjuntos finitos no vacíos de* V_K *que denominaremos* símplices*, tales que:*

i) $\{v\} \in S_K$*, para todo* $v \in V_K$*.*
ii) Si $\sigma \in S_K$ *y* $\varnothing \neq \tau \subseteq \sigma$ *entonces* $\tau \in S_K$*.*

Por abuso de notación escribiremos $v \in K$ y $\sigma \in K$ si $v \in V_K$ y $\sigma \in S_k$. Dado $\sigma \in K$ un símplice, si $\varnothing \neq \tau \subseteq \sigma$ diremos que τ es una *cara* de σ. Si además $\tau \subsetneq \sigma$, se dirá que τ es *cara propia* de σ. Por otro lado, si $\sigma \in K$ está formado por $n+1$ vértices, diremos que σ tiene dimensión n, o bien, que σ es un n-*símplice*. Si una cara es n-símplice la denominaremos n-*cara*.

Los 0-símplices de un complejo simplicial se corresponden biyectivamente con los vértices. Por otro lado, todo símplice σ está determinado por sus 0-caras. Así, todo complejo simplicial K se puede identificar con el conjunto de sus símplices. Se define la dimensión de un complejo simplicial K como

$$dim(K) = sup\{dim(\sigma) : \sigma \in K\}$$

es decir, la dimensión del complejo simplicial es el supremo del conjunto de las dimensiones de sus símplices. De este modo, si K tiene símplices de dimensiones arbitrariamente grandes se tiene que $dim(K) = \infty$. Por otro lado, si $K = \varnothing$ estableceremos por convenio que $dim(K) = -1$. Un complejo simplicial K puede ser *finito*, es decir, con un número finito de símplices. Es sencillo comprobar que, en este caso, $dim(K) < \infty$.

A la hora de representar gráficamente a un complejo simplicial K consideraremos que los 0-símplices son puntos, los 1-símplices son segmentos rectilíneos que unen 0-símplices, los 2-símplices como triángulos rellenos cuyos lados son 1-símplices, los 3-símplices son tetraedros macizos cuyas caras son 2-símplices, etcétera.

Ejemplo 3.1.1 *A modo ilustrativo, presentamos el siguiente ejemplo de complejo simplicial:*

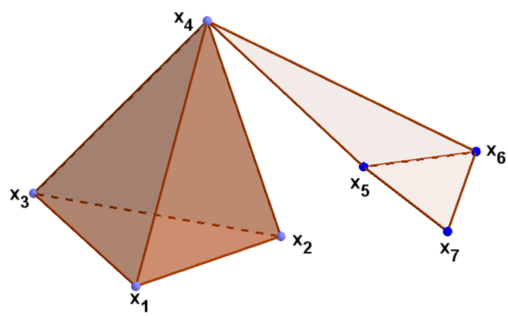


Figura 3.1. Ejemplo de un complejo simplicial

Un *subcomplejo* de un complejo simplicial K consiste en un complejo simplicial L tal que $V_L \subseteq V_K$ y $S_L \subseteq S_K$. Escribiremos $L \subseteq K$ para indicar que L es un subcomplejo de K. Por otro lado, diremos que L es un *subcomplejo pleno*, si para cualquier $\sigma = \{v_0, v_1, ..., v_n\} \in K$ si $v_i \in L$ para un $i = 0, 1, ..., n$ entonces

$\sigma \in L$.
Dado K un complejo simplicial, el *p-esqueleto* del complejo simplicial K es el subcomplejo $K^p \subseteq K$ formado por todos los símplices de K de dimensión menor o igual que p.

Sea $\sigma = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$ un n-símplice. El *símplice cerrado* $\overline{\sigma}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales convexas formales

$$t_0 v_0 + t_1 v_1 + ... + t_n v_n$$

donde $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$ y $t_i \geq 0$. Existe una biyección natural $\varphi : \overline{\sigma} \longrightarrow \Delta_n$ entre $\overline{\sigma}$ y el *n-símplice estándar geométrico* $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ donde

$$\Delta_n = \{(t_0, t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0\}$$

Dicha biyección está definida como $\varphi(t_0 v_0 + ... + t_n v_n) := (t_0, t_1, ..., t_n)$. Obsérvese que esta biyección nos permite dotar de estructura de espacio topológico a $\overline{\sigma}$ de tal forma que φ sea un homeomorfismo. Además, $\overline{\sigma}$ es espacio métrico y compacto con la distancia

$$d(\sum_{i=0}^{n} t_i v_i, \sum_{i=1}^{n} t'_i v_i) := (\sum_{i=0}^{n} (t_i - t'_i)^2)^{1/2}$$

Definición 3.1.2 *Sea K un complejo simplicial. Se define la* realización geométrica *de K, denotado por $|K|$, como el espacio topológico cuyo conjunto subyacente está formado por todas las combinaciones convexas formales de vértices de K, es decir, combinaciones de la forma*

$$\sum_{v \in K} t_v v$$

tales que

i) $\sum_{v \in K} t_v = 1, t_v \geq 0$ *para todo* $v \in K$.
ii) $\{v \in K : t_v > 0\}$ *es un símplice de* K

y con la topología débil respecto de la colección de todos los símplices cerrados de K, $\{\overline{\sigma}\}_{\sigma \in k}$. Es decir, dado $A \subseteq |K|$, A es abierto (resp. cerrado) en $|K|$ si y sólo si $A \cap \overline{\sigma}$ es abierto (resp. cerrado) en $\overline{\sigma}$, para todo $\sigma \in K$.

Obsérvese que de la condición ii) de la definición 3.1.2 se deduce que las sumas $\sum_{v \in K} t_v v$ y $\sum_{v \in K} t_v = 1$ son finitas. Por otro lado, por definición de la topología débil, $\overline{\sigma}$ es un subespacio cerrado de $|K|$ para todo $\sigma \in K$. Además, dado cualquier subcomplejo $L \subseteq K$ se tiene que $|L|$ es un subespacio cerrado de $|K|$.

Nota 3.1.1 *La realización geométrica de un complejo simplicial también se denomina* poliedro. *Por otro lado, se dice que un espacio topológico X es* triangulable *si existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo $|K| \xrightarrow{\cong} X$; en este caso, K se denomina triangulación de X. La clase de los espacios topológicos triangulables (o, abusando del lenguaje, poliedros) es muy amplia y abarca más ejemplos de los que uno podría llegar a pensar. En este sentido, J. H .C. Whitehead probó en [9] que toda n-variedad diferenciable es triangulable. Además, toda n-variedad topológica ($n \leq 3$) también es triangulable [10].*

Nota 3.1.2 *En $|K|$ podemos considerar otra topología, la inducida por la siguiente métrica:*

$$d(\sum_{v\in K} t_v v, \sum_{v\in K} t'_v v) := (\sum_{v\in K} (t_v - t'_v)^2)^{1/2}$$

Es sencillo comprobar que si K es finito entonces la topología débil coincide con esta topología métrica. Además, en este caso, $|K|$ es compacto (véase Cap. 2, corolario 20 en [3]) y existe un n suficientemente grande tal que $|K| \subseteq \mathbb{R}^n$.

El siguiente resultado es de gran importancia. Para una demostración detallada, véase la proposición 7.3.2 en [8]. La noción de CW-complejo se había introducido en el capítulo 1 de esta memoria.

Proposición 3.1.1 *Sea K un complejo simplicial. Entonces $|K|$ tiene estructura de CW-complejo.*

Existen unas aplicaciones entre complejos simpliciales que respetan la estructura simplicial. Las introducimos en la siguiente definición:

Definición 3.1.3 *Sean K y L complejos simpliciales. Una* aplicación simplicial*, $\varphi : K \to L$ consiste en una aplicación entre vértices respectivos*

$$\varphi : V_K \to V_L$$

tal que $\varphi(\sigma) \in L$, para todo $\sigma \in K$. En otras palabras, si $\sigma = \{v_0, v_1, ..., v_n\} \in K$ entonces $\varphi(\sigma) = \{\varphi(v_0), \varphi(v_1), ..., \varphi(v_n)\} \in L$.

Obsérvese que la aplicación entre vértices $\varphi : V_K \to V_L$ no tiene por qué ser inyectiva, es decir, puede haber vértices que se colapsen por φ. En otras palabras, puede suceder que $dim(\varphi(\sigma)) < dim(\sigma)$ para algún $\sigma \in K$. Como ejemplo básico, si L es un subcomplejo de K, claramente la inclusión de los vértices de L en los de K induce una aplicación simplicial $i : L \hookrightarrow K$. En particular, $1_K : K \longrightarrow K$, inducida por la identidad en los vértices de K es una aplicación simplicial. Por otro lado, es evidente que la composición de aplicaciones simpliciales (éstas vienen dadas por la composición de las respectivas aplicaciones entre vértices) es aplicación simplicial.

La noción de realización geométrica se puede extender a las aplicaciones simpliciales, como puede verse a continuación:

Proposición 3.1.2 *Sea $\varphi : K \longrightarrow L$ una aplicación simplicial. Entonces se induce una aplicación continua*

$$|\varphi| : |K| \to |L|$$

definida como $|\varphi|(\sum_{v\in k} t_v v) := \sum_{v\in k} t_v \varphi(v)$. Esta aplicación continua se denomina realización geométrica de *φ.*

A partir de la misma definición se comprueba que dadas $\varphi : K \to L$ y $\psi : L \to M$ aplicaciones simpliciales, se tiene $|\psi \circ \varphi| = |\psi| \circ |\varphi|$. Por otro lado, para cada complejo simplicial K se da la igualdad $|1_K| = 1_{|K|}$.

La noción análoga de homotopía en el contexto simplicial viene dada por la contigüidad. Se dice que dos aplicaciones simpliciales, $\varphi, \psi : K \longrightarrow L$, son *contiguas* (denotado por $\varphi \sim_c \psi$) si $\varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma) \in L$, para todo $\sigma \in K$. Esta relación, aún siendo reflexiva y simétrica, no es transitiva, por lo que se extiende a una relación de equivalencia estableciendo que φ y ψ están en la misma *clase de contigüidad* (denotado $\varphi \sim \psi$) si existe una sucesión finita de aplicaciones simpliciales $\gamma_i : K \longrightarrow L$ con

$$\varphi = \gamma_1 \sim_c \gamma_2 \sim_c ... \sim_c \gamma_{n-1} \sim_c \gamma_n = \psi$$

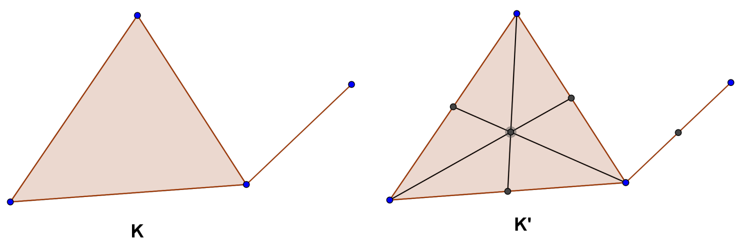
Dadas φ, ψ aplicaciones simpliciales contiguas, se tiene que sus realizaciones geométricas son homótopas: $|\varphi| \simeq |\psi|$ (véase Cap. 3 sec. 5, lema 2 en [3]). Por consiguiente, y más generalmente, si $\varphi \sim \psi$ entonces $|\varphi| \simeq |\psi|$. Este hecho nos demuestra, por ejemplo, que todo cono simplicial induce un espacio topológico contráctil. Por un *cono simplicial* nos referimos a un complejo simplicial K de tal modo que existe un vértice distinguido $v_0 \in K$ (denominado *cúspide*) con $\sigma \cup \{v_0\} \in K$, para todo $\sigma \in K$. Es claro que la aplicación simplicial $\varphi : K \longrightarrow K$ definida por la constante en el vértice v_0 es contigua a la identidad $1_K : K \longrightarrow K$. Pero entonces $C_{v_0} = |\varphi| \simeq |1_K| = 1_{|K|}$; en otras palabras, $|K|$ es contráctil.

Una construción muy importante en la teoría simplicial es la dada por las subdivisiones baricéntricas. Dicha construcción nos permite pasar de aplicaciones continuas a aplicaciones simpliciales. No desarrollaremos esta propiedad en cuestión, simplemente nos limitaremos a definir la noción de subdivisión baricéntrica y exponer que su realización geométrica coincide, salvo homeomorfismo, con la realización geométrica del complejo simplicial original.

Definición 3.1.4 *Sea K un complejo simplicial. La* subdivisión baricéntrica *de K, denotado por K', es el complejo simplicial cuyos vértices son los símplices de K y cuyos símplices son cadenas de símplices de K, es decir, conjuntos de símplices de la forma $\{\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_n\}$ satisfaciendo*

$$\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq ... \subsetneq \sigma_n$$

Intuitivamente hablando, si consideramos para cada símplice σ de K su centro de masas (el de un punto sería el propio punto, el de un segmento sería el punto medio, el de un triángulo macizo sería su baricentro geométrico, etcétera), entonces la subdivisión baricéntrica de K estaría constituida por todos los símplices formados por los subconjuntos finitos de estos centros de masas. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo gráfico



Formalmente, dado K un complejo simplicial, el *baricentro* de un símplice $\sigma = \{v_0, v_1, ..., v_n\} \in K$ es el punto $b(\sigma) \in |K|$ definido como

$$b(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} \frac{v_i}{n+1} \in |K|$$

Concluimos esta sección con la siguiente proposición.

Proposición 3.1.3 *Si K es un complejo simplicial entonces la aplicación*

$$S_K : |K'| \longrightarrow |K|$$

definida en los vértices como $S_K(\sigma) := b(\sigma)$ y extendida por linealidad a $|K'|$ es un homeomorfismo.

Para la demostración de esta proposición, véase el teorema 9, pág. 123 del libro [3].

3.2. Teoría de McCord

En esta última parte de la memoria estudiaremos la relación existente entre los espacios topológicos finitos T_0 y los poliedros compactos. Veremos que a cada espacio topológico finito T_0 se le asocia un poliedro compacto cuyos grupos de homotopía coinciden y, recíprocamente, a todo poliedro compacto se le asocia un espacio topológico finito T_0 con la misma propiedad.

Definición 3.2.1 *Sea X un espacio topológico finito T_0 (poset finito). El* complejo simplicial asociado a X*, denotado por $\mathcal{K}(X)$, es aquel complejo simplicial cuyos vértices son los puntos de X y cuyos símplices son las cadenas no vacías de X, esto es, subconjuntos $\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ donde $x_0 < x_1 < ... < x_n$.*

Esta definición se puede extender a aplicaciones continuas. En efecto, dada $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos finitos T_0, se induce una aplicación simplicial

$$\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$$

definida en los vértices como $\mathcal{K}(f)(x) := f(x)$, para todo $x \in X$. Así, dado $\{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{K}(X)$ tenemos que

$$\mathcal{K}(f)(\{x_0, x_1, ..., x_n\}) = \{f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)\} \in \mathcal{K}(Y)$$

Obsérvese que puede haber vértices que se colapsen. Las propiedades más importantes que verifica esta construcción son la conservación de las composiciones y de las identidades:

i) Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son aplicaciones continuas entre espacios topológicos finitos T_0, entonces $\mathcal{K}(g \circ f) = \mathcal{K}(g) \circ \mathcal{K}(f)$.
ii) Si X es un espacio topológico finito T_0, entonces $\mathcal{K}(1_X) = 1_{\mathcal{K}(X)}$.

Un ejemplo distinguido resulta cuando consideramos subespacios topológicos. Si $A \subseteq X$ entonces $\mathcal{K}(A)$ es un subcomplejo de $\mathcal{K}(X)$. Además, si $i : A \hookrightarrow X$ denota la inclusión canónica entonces $\mathcal{K}(i) : \mathcal{K}(A) \hookrightarrow \mathcal{K}(X)$ coincide con la inclusión del subcomplejo.

Por definición de realización geométrica de un complejo simplicial, todo punto $\alpha \in |\mathcal{K}(X)|$ es una *combinación lineal convexa* que se puede expresar de forma única como $\alpha = t_1x_1 + ... + t_rx_r$, donde $t_i > 0$ y $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, siendo $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Definimos el *soporte de* α al siguiente símplice de $\mathcal{K}(X)$:

$$sop(\alpha) := \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in \mathcal{K}(X)$$

Estamos en condiciones de definir la $\mathcal{K}$-aplicación de McCord.

Definición 3.2.2 *Sea X un espacio topológico finito T_0. Se define la $\mathcal{K}$-* aplicación de McCord *asociada a X como la aplicación*

$$\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \to X$$

definida como $\mu_X(\alpha) := min\ sop(\alpha)$.

El resultado principal del capítulo viene dado en el siguiente teorema:

Teorema 3.2.1 *La $\mathcal{K}$-aplicación de McCord $\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \xrightarrow{\sim} X$ es una equivalencia débil para X cualquier espacio topológico finito T_0.*

Demostración. En primer lugar, consideramos para $x \in X$ el abierto minimal U_x. Como sabemos, $\{U_x\}_{x\in X}$ es una base de abiertos en X; además, cada U_x es contráctil (véase la nota 2.3.1). Por tanto, si probamos que para $x \in X$, $\mu_X^{-1}(U_x)$ es un abierto contráctil, habremos visto que:

i) μ_X es continua;
ii) $\mu_X|_{\mu_X^{-1}(U_x)} : \mu_X^{-1}(U_x) \to U_x$ es equivalencia débil,

y, en consecuencia, por el teorema 1.3.1, μ_X sería equivalencia débil.
Si $x \in X$, consideramos $L := \mathcal{K}(X \setminus U_x) \subseteq \mathcal{K}(X)$ el subcomplejo pleno (podría ser vacío) generado por todos los vértices que no están en U_x. Afirmamos que $\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$. En efecto, por un lado, si $\alpha \in \mu_X^{-1}(U_x)$ entonces $\min sop(\alpha) \in U_x$, lo que nos dice que α contiene un vértice de U_x y, por tanto, $\alpha \notin |L|$. Por otro lado, si $\alpha \notin |L|$ necesariamente existe $y \in sop(\alpha)$ tal que $y \in U_x$ (e.d. $y \leq x$). Se sigue que $\mu_X(\alpha) = \min sop(\alpha) \leq y \leq x$, es decir, $\mu_X(\alpha) \in U_x$. Ya que $\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$ y $|L|$ es un cerrado en $|\mathcal{K}(X)|$ (véase el comentario justo después de la definición 3.1.2), concluimos que $\mu_X^{-1}(U_x)$ es abierto para cada $x \in X$. Esto demuestra la continuidad de μ_X.

Para la segunda parte de la demostración, veamos en primer lugar que $|\mathcal{K}(U_x)|$ es contráctil. Efectivamente, dado $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{K}(U_x)$, claramente tenemos que $\sigma \cup \{x\} \in \mathcal{K}(U_x)$. Es decir, $\mathcal{K}(U_x)$ es un cono simplicial con x como cúspide y, en consecuencia, $|\mathcal{K}(U_x)|$ es contráctil.
Para finalizar la demostración veremos a continuación que $|\mathcal{K}(U_x)|$ es un retracto por deformación fuerte de $\mu_X^{-1}(U_x) = \mathcal{K}(X) \setminus |L|$. Para ello, denotamos por $i : |\mathcal{K}(U_x)| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$ a la inclusión canónica y definimos

$$r : |\mathcal{K}(X)| \setminus |L| \to |\mathcal{K}(U_x)|$$

de la siguiente forma: dado $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$, se puede reescribir como $\alpha = t\beta + (1-t)\gamma$, para cierto $\beta \in |\mathcal{K}(U_x)|$, $\gamma \in |L|$ y $0 < t < 1$. Consideramos entonces $r(\alpha) := \beta$. Nótese que r es una aplicación continua teniendo en cuenta que los complejos simpliciales involucrados son finitos y, por tanto, sus realizaciones geométricas tienen la topología métrica (ver nota 3.1.2). Por otro lado, sea

$$H : (|\mathcal{K}(X)\ | \setminus |L|) \times I \longrightarrow |\mathcal{K}(X)\ | \setminus |L|$$

la homotopía definida como $H(\alpha, s) := (1-s)\alpha + sr(\alpha)$. Por el mismo argumento que el esgrimido para r, es inmediato que H es continua. Además, una simple comprobación demuestra que $H : 1 \simeq i \circ r$ rel. $|\mathcal{K}(U_x)|$.

□

La $\mathcal{K}$-aplicación de McCord se puede extender a aplicaciones. En este sentido, dada $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos finitos T_0, existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} |\mathcal{K}(X)| \arrow[r, "|\mathcal{K}(f)|"] \arrow[d, "\mu_X"', "\sim"] & |\mathcal{K}(Y)| \arrow[d, "\mu_Y", "\sim"'] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

puesto que $f(\mu_X(\alpha)) = f(\min sop(\alpha) = \min f(sop(\alpha)) = \min\ (sop(|\mathcal{K}(f)|(\alpha)) = \mu_Y(|\mathcal{K}(f)|(\alpha))$.
Como consecuencia importante se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos finitos T_0. Entonces f es equivalencia débil si y sólo si $|\mathcal{K}(f)| : |\mathcal{K}(X)| \to |\mathcal{K}(Y)|$ es equivalencia de homotopía.*

Demostración. Si f es equivalencia de homotopía, teniendo en cuenta el cuadrado conmutativo anterior y la parte i) de la proposición 1.3.4, se sigue que $|\mathcal{K}(f)| : |\mathcal{K}(X) \longrightarrow |\mathcal{K}(Y)|$ es también equivalencia débil. Ahora bien, siendo $|\mathcal{K}(X)|$, $|\mathcal{K}(Y)|$ CW-complejos (ver proposición 3.1.1), se concluye por el teorema 1.3.2, que $|\mathcal{K}(f)|$ es una equivalencia de homotopía.
Recíprocamente si $|\mathcal{K}(f)|$ es equivalencia de homotopía, entonces es equivalencia débil por el teorema 1.3.2. De nuevo, haciendo uso del cuadrado conmutativo anterior y la parte i) de la proposición 1.3.4, concluimos que f es equivalencia débil.

□

Desarrollamos a continuación la segunda parte de la teoría de McCord. Para ello, asociaremos un espacio topológico finito T_0 a cada complejo simplicial finito.

Definición 3.2.3 *Sea K un complejo simplicial finito. Se define $\mathcal{X}(K)$ como el poset (espacio topológico finito T_0) cuyos elementos son los símplices de K con el orden $\leq$ dado por la inclusíon entre símplices, es decir, $\sigma \leq \tau$ si, por definición, $\sigma \subseteq \tau$.*

Nuevamente, esta definición se puede extender a aplicaciones simpliciales. En este sentido, si $\varphi : \mathcal{K} \longrightarrow L$ es una aplicación simplicial entre complejos simpliciales finitos, entonces se induce una aplicación continua

$$\mathcal{X}(\varphi) : \mathcal{X}(K) \to \mathcal{X}(L)$$

definida como $\mathcal{X}(\varphi)(\sigma) := \varphi(\sigma)$. Análogamente al caso anterior, esta construcción conserva también las composiciones y las identidades: $\mathcal{X}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{X}(\psi) \circ \mathcal{X}(\varphi)$ y $\mathcal{X}(1_X) = 1_{\mathcal{X}(K)}$.

Hacemos notar que, dado K un complejo simplicial finito, se tiene directamente que $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ coincide con K' la subdivisión baricéntrica de K. Por otro lado, recordemos la existencia de un homeomorfismo $S_K : |K'| \longrightarrow |K|$. Tenemos la definición siguiente:

Definición 3.2.4 *Sea K un complejo simplicial finito. Se define la $\mathcal{X}$-*aplicación de McCord

$$\mu_K : |K| \to \mathcal{X}(K)$$

como la composición $|K| \xrightarrow{S_K^{-1}} |K'| = |\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))| \xrightarrow{\mu_{\mathcal{X}(K)}} \mathcal{X}(K)$

Obviamente, como claramente todo homeomorfismo es equivalencia débil, y por otro lado, la composición de equivalencias débiles es equivalencia débil (ver proposición 1.3.4) se tiene que $\mu_K : |K| \to \mathcal{X}(K)$ es también una equivalencia débil. Además, por razonamientos análogos a los realizados para la $\mathcal{K}$-aplicación de McCord, podemos demostrar para cada aplicación simplicial $\varphi : K \longrightarrow L$, la existencia de un cuadrado homotópicamente conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
|K| \arrow[r, "|\varphi|"] \arrow[d, "\mu_K"', "\sim"] & |L| \arrow[d, "\mu_L", "\sim"'] \\
\mathcal{X}(K) \arrow[r, "\mathcal{X}(\varphi)"'] & \mathcal{X}(L)
\end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta la proposición 1.3.4 y un razonamiento totalmente análogo al realizado en la demostración de la proposición 3.2.1, obtenemos la demostración de la siguiente proposición que, por tanto, se omite.

Proposición 3.2.2 *Sea $\varphi : K \to L$ una aplicación simplicial entre complejos simpliciales finitos. Entonces $|\varphi| : |K| \longrightarrow |L|$ es equivalencia de homotopía si y sólo si $\mathcal{X}(\varphi) : \mathcal{X}(K) \longrightarrow \mathcal{X}(L)$ es equivalencia débil.*

Bibliografía

[1] A. Hatcher. *Algebraic Topology. Cambridge University Press.* First edition, 2001.

[2] J. Munkres. *Topología.* Prentice Hall, Second edition, 2000.

[3] E. Spanier. *Algebraic topology (corrected reprint of the 1996 original).* Springer, 1981.

[4] J.M. Calcines; F.J. Díaz Díaz. *Curso de topología general.*Visión Net, 2005.

[5] M. McCord. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces.* Duke Math. J.,33:465?474, 1966.

[6] J. Barmak. *A. algebraic topology of finite topological spaces and aplications.* Notes in Mathematics, 2032. Springer, Heidelberg 2011.

[7] R. E. Stong. *Finite topological spaces.*Trans. Amer. Math. Soc. 123 1996 325-340.

[8] C. R. F. Maunder. *Algebraic topology.* Cambridge University. Press, Cambridge- New York, 1980.

[9] J. H. C. Whitehead. *On C^1-complexes.* Ann. of Math. 2, 41 (1940),809-824.

[10] S. Buoncristiano. *Fragments of geometric topology from the sixties.*Geom. &-Top.Monographs,6, (2003).

[11] P. Alexandroff. *Diskrete Raüme.* Mat. Sb. (N.S) 2 (1937) 501-518.

Lista de Figuras

1.1. Contraejemplo de espacio topológico finito para comprobar que una equivalencia débil no implica ser equivalencia de homotopía. . 10

2.1. Ejemplo típico de espacio topológico finito 13

3.1. Ejemplo de un complejo simplicial 34

Finite topological spaces

Tania Gutiérrez Gutiérrez
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100773903@ull.edu.es

Abstract

In this memory we mostly focus on the study of finite topological spaces and their more relevant properties. We analyze the biunivocal correspondence between these spaces and finite preordered sets, proving that both objects can be considered the same. In addition, we also study continuity, connectedness and the homotopy type of finite topological spaces. Finally, we analyze the relation between T_0 finite topological spaces and compact polyhedra from weak equivalences.

1. Introduction

In 1937, P. Alexandroff published an article in which he proved that finite topological spaces and finite partially ordered sets are essentially the same objects.
Later on, two more papers about finite topological spaces appeared in 1966. One of them was by R .E. Stong, who used the combinatory of finite topological spaces to explain their homotopy types. The second was written by C. McCord, who presented the relation between T_0 finite topological spaces and compact polyhedra.
Finite topological spaces remained forgotten for a long time. Nevertheless, in the last years, the study of these topological spaces has been reactivated thanks to their applications in image digital processing.

2. Chapter 1: Generallity about topologycal spaces and Homotopy Theory

If $\pi_0(X)$ denotes the set of path components of X and $\pi_n(X,x)$ the nth-homotopy group of X based on $x \in X$ then a map $f: X \to Y$ is a *weak equivalence* if the following conditions are verified:

i) $\pi_0(f): \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ is bijective.

ii) $\pi_n(f): \pi_n(X,x) \to \pi_n(Y, f(x))$ is an isomorphism of groups for all $x \in X$, $n \geq 1$.

This definition is the key point to establish McCord and Whitehead theorems:

Theorem 2.1 *(McCord)*
Let $f: X \to Y$ be a continuous map and let $\mathscr{U}$ be a basis like open cover of Y. If for every $U \in \mathscr{U}$ the restriction

$$f_{|f^{-1}(U)}: f^{-1}(U) \to U$$

is a weak equivalence, then $f: X \to Y$ is a weak equivalence.

Theorem 2.2 *(Whitehead)*
Let $f: X \to Y$ be a continuous map between CW-complexes. Then f is a weak equivalence if and only if f is a homotopy equivalence.

3. Chapter 2: Finite topological spaces.

A finite topological space is defined as any space having a finite number of points. There is a correspondence with finite preordered sets:

Theorem 3.1 *Let X be a finite set. There is a bijection between the topologies of X and the preorders of X. In addition, in this bijection, the T_0 topologies correspond biunivocally with the partial orders.*

We can always suppose that finite topological spaces satisfy T_0 axiom up to homotopy type. Indeed, if X_0 denotes the *Kolmogorov quotient* of X then:

Theorem 3.2 *Let X be a finite topological space. Then X_0 is a T_0 finite topological space. In addition, the projection $p: X \xrightarrow{\simeq} X_0$ is a homotopy equivalence.*

The core of a finite topological space can be obtained from a certain process of point elimination, which preserves the same homotopy type of the original space.

Theorem 3.3 *The core of a finite topological space is unique up to homeomorphisms. In addition, given X and Y finite topological spaces, these are homotopically equivalent if and only if their respective cores are homeomorphic.*

4. Chapter 3: Simplicial complexes and McCord Theory

The geometric realization of a simplicial complex K, denoted by $|K|$, is the topological space whose underlying set is formed by all convex combinations formulas of vertices of K, that is, combinations of the form

$$\sum_{v \in K} t_v v$$

such that

i) $\sum_{v \in K} t_v = 1$, $t_v \geq 0$ for all $v \in K$.

ii) $\{v \in K : t_v > 0\}$ is a simplex of K

and equipped with the weak topology with respect to the collection of all closed simplices of K, $\{\overline{\sigma}\}_{\sigma \in k}$.

Definition 4.1 *Let X be a T_0 finite topological space. The $\mathscr{K}$-McCord map associated to X is the map*

$$\mu_X : |\mathscr{K}(X)| \to X$$

defined as $\mu_X(\alpha) := \min sop(\alpha)$ where $sop(\alpha)$ denotes the support of α.

The following result is dued to McCord:

Theorem 4.1 *The $\mathscr{K}$- McCord map $\mu_X : |\mathscr{K}(X)| \xrightarrow{\sim} X$ is a weak equivalence for X any T_0 finite topological space.*

A consequence of the previous theorem is given by the following proposition:

Proposition 4.1 *Let $f: X \to Y$ be a continuous map between T_0 finite topolgical spaces. Then f is a weak equivalence if and only if $|\mathscr{K}(f)| : |\mathscr{K}(X)| \to |\mathscr{K}(Y)|$ is a homotopy equivalence.*

Let K be any finite simplicial complex. Then, $\mathscr{X}(K)$ is defined as the finite poset (finite T_0 space) having as elements the simplices of K with the order $\leq$ given by the inclusion between simplices; that is, $\sigma \leq \tau$ if and only if $\sigma \subseteq \tau$.

Definition 4.2 *Let K be a finite simplicial complex. The $\mathscr{X}$* - McCord map

$$\mu_K : |K| \to \mathscr{X}(K)$$

is the composition $|K| \xrightarrow{S_K^{-1}} |K'| = |\mathscr{K}(\mathscr{X}(K))| \xrightarrow{\mu_{\mathscr{X}(K)}} \mathscr{X}(K)$, where K' denotes the barycentric subdivision of K and S_K the corresponding homeomorphism.

We finish with the last result by McCord.

Proposition 4.2 *Let $\varphi: K \to L$ be a simplicial map between finite simplicial complexes. Then $|\varphi| : |K| \longrightarrow |L|$ is a homotopy equivalence if and only if $\mathscr{X}(\varphi) : \mathscr{X}(K) \longrightarrow \mathscr{X}(L)$ is a weak equivalence.*

References

[1] A. Hatcher. *Algebraic Topology. Cambridge University Press.* First edition, 2001.

[2] E. Spanier *Algebraic topology (corrected reprint of the 1996 original).* Springer, 1981.

[3] J. Barmak. *A. algebraic topology of finite topological spaces and applications.*Notes in Mathematics, 2032. Springer, Heidelberg 2011.

[4] C. R. F. Maunder. *Algebraic topology.* Cambridge University. Press, Cambridge- New York, 1980.