Universidad de La Laguna

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS | FACULTAD DE CIENCIAS

Melanie Hernández Alonso

Elementos de Euclides

Libros V-VI

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2017

Dirigido por

José M.Méndez Pérez

José M.Méndez Pérez
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo de Fin de Grado se analizan en detalle los libros V y VI de los Elementos. Uno de los aspectos más importantes del libro V de Euclides es la meticulosidad y rigor de sus definiciones, algunas de ellas muy abstractas. Trata de razones de magnitudes y de proporciones, con el objetivo de superar el desconcierto que experimentaron los pitagóricos al descubrir que existen segmentos inconmensurables.

En el libro VI se aplica la teoría desarrollada anteriormente al estudio de la semejanza de figuras rectilíneas, particularmente, los triángulos. Destacamos el teorema de la bisectriz y la generalización del teorema de Pitágoras.

Palabras clave: *Magnitudes – razones – proporciones – equimúltiplos – teorema de la bisectriz – semejanza de figuras rectilíneas – criterios de semejanza de triángulos – teorema de Pitágoras.*

Abstract

In this Project, Books V and VI of the Elements are analysed in detail. One of the most important aspects of Book V is the meticulosity and rigor of its 18 definitions, some of them extremely abstract. It concerns the ratio of magnitudes and proportions with the aim to explain the existence of incommensurable segments discovered by Pythagoras.

In book VI the theory developed early is applied to study the similarity of rectilinear figures, particularly, triangles. We underline the bisectrix theorem and the generalization of the Pythagoras theorem.

Keywords: *magnitudes – ratios – proportions – equimultiples – bisectrix theorem – similar rectilinear figures – criteria for similarity of triangles – Pythagoras theorem.*

Contenido

Introducción

El objetivo de este trabajo es el estudio pormenorizado de los Libros V y VI de los *Elementos* de Euclides. Consta de tres capítulos. En el primero se hace una pequeña biografía del personaje -en realidad se sabe muy poco de él- y de sus obras.

El capítulo 2 está dedicado al Libro V, considerado como uno de los más importantes y elaborados de la obra euclidiana, estando constituido por 18 definiciones y 25 proposiciones. Llama la atención el rigor y la precisión del conjunto de definiciones, algunas muy abstractas y escuetas, que se convierten en el hilo conductor de este capítulo. Basta señalar que las Definiciones 2.5 y 2.7, en opinión de muchos expertos, constituyen una introducción de los números reales, perfectamente equiparable a las teorías más modernas.

Comenzamos analizando una a una las dieciocho definiciones, recurriendo -si es preciso- a ejemplos que las aclaren. Después, de las veinticinco proposiciones, seleccionamos y demostramos diecisiete. Concluimos este capítulo relacionando la teoría de Euclides con los números reales.

El capítulo 3 se centra en el Libro VI, conformado por tres definiciones y 33 proposiciones. En él se aplica la teoría de las proporciones del Libro V a la geometría plana. Tras comentar las definiciones, se escogen quince proposiciones y se demuestran. Se establecen los resultados fundamentales de la semejanza de triángulos, que son extendidos en algunos casos a figuras rectilíneas más generales, como los polígonos. También se presenta la construcción de la tercera, la cuarta y la media proporcional, relacionando esta última con la solución geométrica de las ecuaciones de segundo grado. Por destacar algunos resultados, citemos el hoy conocido como el teorema de la bisectriz y la generalización del teorema de Pitágoras.

Finalizando el capítulo se exponen algunos resultados por su interés educativo y formativo, y apropiados para ser discutidos en el aula: los criterios de semejanza de triángulos, una interesante aplicación del teorema de la bisectriz y la generalización del teorema de Pitágoras.

Se conserva en todo lo posible el espíritu y la esencia de las pruebas de Euclides, pero recurriendo a veces a notaciones y a una formulación más actual.

1

Euclides: el personaje y su obra.

1.1. Introducción

La palabra "geometría" procede de los vocablos griegos $\gamma\tilde{\eta}$ (tierra) y $\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\nu$ (medida), pues fue la disciplina que se encargó de medir las tierras y fijar las dimensiones de los campos. El historiador griego Herodoto (alrededor del siglo V a.C.) señala a los egipcios como los creadores de la geometría. Sin embargo, otras civilizaciones antiguas (como los babilonios o los chinos) también poseían un respetable conocimiento de la geometría.

Nadie discute el origen empírico de las matemáticas. Incluso en Grecia, los orígenes de las matemáticas están muy apegadas a la realidad cotidiana: el comercio, el reparto de las herencias, la agrimensura, ... No obstante, fue en Grecia, en un contexto cultural y social propicio, donde las matemáticas experimentaron un profundo cambio. Fueron los griegos quienes consiguieron obtener conclusiones geométricas a través de demostraciones lógicas, probando deductivamente las fórmulas y resultados, rechazando los métodos de ensayo y error, y transformando la antigua geometría empírica en una geometría axiomática o matemática.

Se debe al historiador Proclo (412-485 d.C.), en su obra *Sumario de Eudemo*, un breve relato del desarrollo de la geometría griega desde los tiempos primitivos hasta Euclides. Además, dicha obra contiene unas cuantas páginas del Libro I de los *Elementos* y comentarios sobre su autor [6], [8].

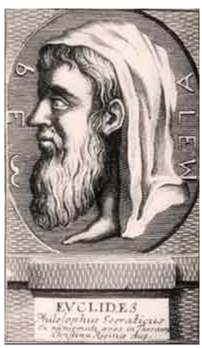
No se sabe mucho de Euclides. Se asume que fue un matemático alejandrino, que escribió una docena de obras, pero cuya fama se debe a sus *Elementos*, libro que recopila y ordena sistemáticamente los conocimientos matemáticos griegos anteriores a él, en una sucesión lógica de proposiciones, fundamentadas en axiomas y postulados, junto a una serie de definiciones realizadas previamente. El método axiomático utilizado por Euclides es, sin ninguna duda, el origen de las "matemáticas puras", "puras" en un doble sentido. Por una parte, el método es "puro", ya que no se precisan experimentos físicos para ver si los enunciados son correctos o no; únicamente es necesario el razonamiento de las demostraciones. Por otra parte, los *Elementos* de Euclides son "puros" porque no incluyen ninguna aplicación práctica, pese a que esta obra tiene un gran número de aplicaciones en física e ingeniería.

El éxito de Euclides fue instantáneo y extraordinario, superando y provocando la desaparición de todos los *Elementos* anteriores. Su impacto e influencia sobre el desarrollo de las matemáticas ha sido enorme, convirtiéndose en el libro de texto más antiguo y más exitoso de todos los tiempos. La Geometría de Euclides es después de la Biblia, el libro que ha tenido más traducciones y ediciones. También sigue al libro sagrado por su impacto e influencia culturales. De él aseguraba Sr. Thomas Heath: "Este maravilloso libro, con todas sus imperfecciones, que de verdad son pocas si se tiene en cuenta la fecha en que apareció, es y será sin duda el texto más grande de matemáticas de todos los tiempo ..." [9].

En este trabajo estudiaremos los Libros V y VI, exponiendo al comienzo de cada capítulo las definiciones del correspondiente libro, para luego hacer una selección de las proposiciones euclídeas que se van a demostrar de forma que esta memoria sea autocontenida. Cada capítulo finaliza con la exposición de algunos resultados que nos han llamado la atención o de los que se pueden extraer consecuencias útiles en la labor de un profesor de matemáticas.

1.2. El personaje y su contexto histórico

Como mencionamos anteriormente, muy poco se sabe de la vida y personalidad de Euclides, matemático alejandrino que en su obra de los *Elementos* condujo a la matemática griega a un proceso de consolidación teórica no experimentado seguramente hasta entonces por ninguna otra rama del saber científico.



Los pocos datos que se tienen de su vida se deben a los historiadores Eudemo de

Rodas (370-300 a.C.) considerado el primer historiador de las Ciencias, y Proclo (412-485 d.C.), en su comentario al Libro I de los *Elementos*, así como al matemático Pappus de Alejandría (290-350 d.C.) en su obra *Colección matemática* [8], [9].

Tratando de encajar esta escasa información, los historiadores de las matemáticas admiten que Euclides vivió entre los años 325 y 265 a.C., aproximadamente. En efecto, la influencia de la filosofía de Platón en la obra de Euclides es notable. Lo más probable es que Euclides naciera en Atenas y frecuentara la Academia de Platón, siendo más joven que los discípulos directos del filósofo. Luego, es bastante posterior a Platón, que falleció en el año 347 a.C, y anterior a otros dos grandes matemáticos griegos: a Apolonio y, sin duda, a Arquímedes. Apolonio vivió en la ciudad de Alejandría desde mediados del sigo III a.C., mientras que Arquímedes, que cita en uno de sus trabajos el Libro I de los *Elementos*, vivió en torno a los años 287 y 212 a.C.; por tanto, parece plausible aceptar que Euclides alcanzara su etapa de madurez en el año 300 a.C. De Proclo se desprende que Euclides creó escuela en Alejandría, ciudad de Egipto, alrededor de esa fecha, trabajando en lo que habría sido la sección de Matemáticas de la Biblioteca y el Museo.

Para más confusión, con lo poco que se sabía de Euclides, durante la antigüedad e incluso hasta el siglo XVI, el autor de los *Elementos* fue confundido con Euclides de Megara (450-380 a.C.) -que vivió un siglo antes que él- discípulo de Sócrates y fundador de la escuela megárica. Esta confusión hizo que varias ediciones de los *Elementos* llevaran el nombre del Euclides megárico. El primero en deshacer este entuerto distinguiendo a los dos Euclides fue Frederico Commandino (Italia, 1509-1575), en su traducción al latín de los *Elementos* en el año 1972.

Queda aclarado, por todo lo expuesto anteriormente, que el conocimiento de la vida de Euclides es escaso y muy difuso. En realidad el personaje se vio superado y oscurecido por la grandiosidad de su obra, hasta tal punto que el escritor inglés Edward M. Foster (1879-1970), en un libro "*Alejandría: historia y guía*", refiriéndose a Euclides, escribió: "nada sabemos de él. A decir verdad, hoy lo consideramos como una rama del saber más que como un hombre" [9].

1.3. Obras

Euclides escribió por lo menos una docena de obras, todas ellas eclipsadas por el enorme impacto que produjo su obra cumbre: los *Elementos.* También nos ha llegado completa los *Datos*, serie de 94 proposiciones que tratan sobre magnitudes, formas y posiciones de las figuras geométricas, relacionada estrechamente con los primeros cuatro Libros de los *Elementos.*
A continuación enumeramos las obras atribuidas a Euclides, además de los *Ele-*

mentos, [8].

(i) Algunos historiadores amplían los *Elementos* a quince libros. En la actualidad hay un consenso que afirma que esta autoría es falsa. El Libro XIV se debe a Hipsicles y se data en el siglo II a.C., mientras que el Libro XV quizás sea obra de Isidoro de Mileto, en el siglo VI d.C.
(ii) De carácter geométrico, además de los ya citados *Datos*, se le atribuyen: *Divisiones de las figuras, Cónicas* (cuatro libros), *Lugares sobre superficies* (dos libros),*Porismas* (tres libros) y *Paralogismos.*
(iii) De astronomía, titulado *Fenómenos.*
(iv) De música: *Sectio canonis* e *Introductio Harmonica.*
(v) De óptica: *Óptica* y *Catóptrica.*
(vi) De mecánica: *Sobre el ligero y lo pesado* y *Sobre la palanca.*

Algunas de estas obras han desaparecido o sólo se conocen fragmentos, de forma incompleta o mediante referencias. Otras se conservan gracias a la traducción a otros idiomas, especialmente al árabe.

1.4. Los Elementos

Lo relevante de los *Elementos* es que todo acerbo de conocimiento matemático generado por los griegos aparece por primera vez presentado como un sistema formal axiomático deductivo. Por tal entenderemos a modo genérico un conjunto de proposiciones ordenadas de tal modo que, partiendo de algunas de ellas, llamadas axiomas -que se aceptan como autoevidentes, no demostrables- se deduce mediante ciertas reglas otra serie de proposiciones, no autoevidentes y sujetas a demostración denominadas teoremas.

Podemos considerar asimismo que con Euclides se produce la delimitación de la matemática como disciplina independiente de la filosofía, dando comienzo la separación entre el conocimiento matemático y la especulación metafísica.
Los *Elementos* tal como han llegado a nosotros se dividen en un conjunto de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes y unas 465 proposiciones distribuidas en 13 libros. El primero comienza con las proposiciones básicas del sistema: definiciones, postulados y nociones comunes, seguidos de un tratamiento de geometría plana, principalmente triángulos y paralelas, y termina con una demostración del teorema de Pitágoras y su recíproco. El Libro II se centra en la generalización del Teorema de Pitágoras, con tratamientos relativos a las transformaciones geométricas. El Libro III está íntegramente dedicado a la geometría del círculo, y el IV a los polígonos regulares.
Los Libros V y VI se ocupan de la teoría de las proporciones, el primero en sus aplicaciones a magnitudes conmensurables e inconmensurables, el segundo en sus aplicaciones a la geometría plana. A partir de Libro VII comienzan los

tratamientos de aritmética; incluye definiciones de importancia, como las de unidad, número par e impar, y se centra mayoritariamente al estudio de algunas propiedades de los números primos. El Libro VIII se dedica al estudio de las cantidades en progresión geométrica, o proporción continua. El IX complementa el estudio de las proporciones geométricas, y demuestra que existen infinitos números primos, explorando algunas relaciones entre números primos, pares e impares. Por otro lado, el Libro X está dedicado a los números irracionales. A diferencia de los demás libros, se compone de tres grupos de definiciones y tres proposiciones, seguramente a causa de lo intrincado de la temática. El Libro XI retorna al tratamiento de las relaciones entre puntos, rectas y planos en el espacio, dentro de la geometría de los sólidos. El XII demuestra los teoremas sobre el área y el volumen del prisma, la pirámide, el cilindro, el cono y la esfera. Finalmente, el Libro XIII se dedica a los sólidos regulares, demostrando que son solamente cinco.

Como se adelantó en la Introducción, en esta memoria nos centraremos en el estudio de los Libros V y VI.

Por la descripción realizada anteriormente, los *Elementos* están estructurados en definiciones, postulados, axiomas o nociones comunes y proposiciones. Las definiciones son frases precisas con las que se introducen los conceptos matemáticos y se da nombre a los diversos entes geométricos que intervienen en las proposiciones. Los postulados son una relación elemental entre ciertas cantidades geométricas. Son cinco y están enunciadas al principio del Libro I [1].

Postulado 1.4.1 *Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta.*

Postulado 1.4.2 *Un segmento rectilíneo puede ser siempre alargado.*

Postulado 1.4.3 *Hay una sola circunferencia con un centro y un radio dados.*

Postulado 1.4.4 *Todos los ángulos rectos son iguales.*

Postulado 1.4.5 *Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores, la suma de los cuales sea menor que dos ángulos rectos, las dos rectas, suficientemente alargadas se cortarán en el mismo lado.*[1]

Las nociones comunes o axiomas son afirmaciones indemostrables cuya verdad es incondicionada, por cuanto poseen un carácter autoevidente que las hace verdaderas más allá de la experiencia. Se encuentran descritas también al principio del Libro I [1], y son cinco:

[1] Este postulado, el más celebre enunciado que hay en toda la obra de Euclides, fue cuestionado prácticamente desde que apareció. J. Playfair lo enunció de forma más escueta en el siglo XVIII: "Por un punto exterior a una recta no se puede trazar más que una paralela a ésta". Es la versión más conocida y popular.

Noción común 1.4.1 *Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.*

Noción común 1.4.2 *Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales también.*

Noción común 1.4.3 *Si a cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales también.*

Noción común 1.4.4 *Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.*

Noción común 1.4.5 *El todo es mayor que la parte.*

A partir de aquí, cualquier resultado o teorema debe ser demostrado únicamente con la ayuda de la lógica y del razonamiento. En este punto, conviene resaltar la solidez que aportó a la obra euclídea la lógica aristotélica.

2

LIBRO V

2.1. Introducción

El Libro V está considerado como uno de los más importantes y trascendentales de los *Elementos*. Lo conforman dieciocho definiciones y veinticinco proposiciones, con lo que se construye una laboriosa teoría sobre la razón o cociente de magnitudes y proporciones. Es verdad que Euclides no da ninguna definición de magnitud, pero considera como tales las longitudes, áreas y volúmenes.
Llama poderosamente la atención el conjunto de definiciones, muchas de ellas de un elevado grado de abstracción. Su oportunidad, meticulosidad, precisión y brillantez las convierte en el eje conductor de este capítulo. Basta señalar que las Definiciones 5 y 7, en opinión de muchos expertos, constituyen una introducción al conjunto de los números reales, perfectamente equiparable a las teorías más modernas.

En el segundo párrafo se hace un detallado análisis del conjunto de definiciones de este libro, aclarándolas -si es necesario- con ejemplos. En el tercer apartado se demuestran las proposiciones seleccionadas, a fin de que este trabajo sea autocontenido, respetando al máximo la esencia de las pruebas dadas por Euclides, pero con una notación y terminología más actuales. Finalmente, en la cuarta sección se comenta brevemente la conexión entre esta teoría de Euclides y la construcción de los números reales. Con este maravilloso libro, Euclides da respuesta al problema planteado en la escuela pitagórica por la existencia de segmentos inconmensurables.

2.2. Definiciones

Las definiciones adquieren una gran importancia en este libro, son fundamentales. Hay que admirar la maestría de Euclides en la formulación de la mayoría de ellas. Como hemos anticipado, se tratan de 18 definiciones, que pasamos a enunciar y comentar a continuación.

Definición 2.1 *Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.*

Esta primera definición básicamente hace referencia al submúltiplo o divisor. Así, 3 es parte de 9, porque 3 mide exactamente a $9, (3 \cdot 3 = 9)$; sin embargo, 4 no mide a 9, ya que no existe ningún entero n tal que $4 \cdot n = 9$.
En general, si a y b son dos magnitudes homogéneas, $a < b$, decimos que a mide a b, si existe un entero n tal que $n \cdot a = b$.

Definición 2.2 *Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.*

Es el concepto de múltiplo. Considerando el ejemplo anterior, 9 es múltiplo de 3, pero no de 4.

Definición 2.3 *Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.*

Esta definición introduce la idea de razón de dos magnitudes. Euclides no utiliza ninguna notación para las razones, pero como es habitual -dando un salto en el tiempo- usaremos a/b para referirnos a la razón de la magnitud a respecto de la magnitud b.

Definición 2.4 *Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.*

Esta definición recoge uno de los principios básicos de la teoría y se puede relacionar con el *Axioma de Arquímedes*. En efecto, dadas dos magnitudes a y b, por muy pequeña que sea a y grande b, sumando a consigo mismo un número finito de veces se logra superar a la magnitud mayor b. Es decir, existe un entero n de modo que $n \cdot a > b$.
Se excluye claramente en esta definición una relación entre una magnitud finita y otra infinita. Algunos especialistas ven en esta definición la exclusión de las magnitudes infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. Si con esto último queremos hablar de un infinitésimo, es obvio que producto por cualquier entero sería cero y no superior a ninguna otra magnitud.

Definición 2.5 *Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplo de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.*

Es una de las definiciones clave de este libro. Con la terminología actual, sean cuatro magnitudes a, b, c, d. Si existen enteros m y n tales que se tiene a la vez:

$$\begin{array}{ccc} ma > nb & \text{y} & mc > nd \\ ma = nb & \text{y} & mc = nd \\ ma < nb & \text{y} & mc < nd \end{array}$$

entonces a guarda la misma razón con b que c con d, esto es,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

En principio, en la definición no se excluye las magnitudes inconmensurables. Por ejemplo, si se quiere comprobar si las magnitudes de tamaños $\sqrt{3}, 1, \sqrt{15}, \sqrt{5}$ están o no en la misma razón, comprobaríamos que:

$$\begin{array}{ccc} m\sqrt{3} > n1 & \text{y} & m\sqrt{15} > n\sqrt{5} \\ m\sqrt{3} = n1 & \text{y} & m\sqrt{15} = n\sqrt{5} \\ m\sqrt{3} < n1 & \text{y} & m\sqrt{15} < n\sqrt{5} \end{array}$$

Luego, $\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$.

Nota: 2.1 *Conviene subrayar que la forma lógica en que se aplica esta definición no es como se acaba de enunciar, sino como un conjunto de condiciones:*

$$\begin{array}{ccc} ma > nb & \Rightarrow & mc > nd \\ ma = nb & \Rightarrow & mc = nd \\ ma < nb & \Rightarrow & mc < nd \end{array}$$

Estas dos maneras de entender la anterior definición no son lógicamente equivalentes. Profundizar en esta cuestión se sale del marco de este trabajo. Basta con decir que, al asumirse implícitamente que el conjunto de magnitudes al que se aplica -son tamaños de magnitudes, o sea, números reales- es totalmente ordenado, sí son equivalentes. [2]

Definición 2.6 *Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.*

Introduce el concepto de proporcionalidad. Dados cuatro magnitudes a, b, c, d sea $\frac{a}{b}$ la razón de las dos primeras y $\frac{c}{d}$ la razón de las dos restantes. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dichas magnitudes se dirán proporcionales. Clásicamente se denotaba $a : b :: c : d$. Euclides, que no usaba ninguna notación, diría "como a es a b, así c es a d".

Definición 2.7 *Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.*

Esta definición es muy interesante, y establece un orden entre las razones de magnitudes. Sean las magnitudes a, b, c, d. Supongamos que existen enteros m y n (que nos dan la equimultiplicidad) de modo que;

$$ma > nb \text{ pero } mc < nd.$$

Se infiere que

$$\frac{a}{b} > \frac{n}{m} > \frac{c}{d},$$

es decir,

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

Existe la fracción $\frac{n}{m}$ que separa las dos razones.

Para ver un ejemplo numérico, tómese $a = 8, b = 7, c = 10, d = 9$, obsérvese que,

$$63a = 63 \cdot 8 = 504 > 497 = 71 \cdot 7 = 71b,$$

pero

$$63c = 63 \cdot 10 = 630 < 639 = 71 \cdot 9 = 71d.$$

Por tanto, $\frac{8}{7} > \frac{10}{9}$.

Definición 2.8 *Una proporción entre tres términos es la menor posible.*

Esta definición nos dice que una proporción consta de tres o cuatro términos. Por ejemplo, en la denominada proporción continua,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

un término se cuenta dos veces.

Definición 2.9 *Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que (guarda) con la segunda.*

Sean tres magnitudes a, b, c proporcionales, es decir, cumpliendo

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \tag{2.1}$$

Entonces, en palabras de Euclides, la razón $\frac{a}{c}$ es la duplicada de la razón $\frac{a}{b}$. Se interpreta así,

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b},$$

a la vista de (2.1). En realidad, $\frac{a}{c}$ es el cuadrado de $\frac{a}{b}$, que es como debe entenderse cuando se dice "una razón duplicada ...".

Definición 2.10 *Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual fuere la proporción.*

Si tenemos cuatro magnitudes a, b, c, d que cumplen las proporciones

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{y} \quad \frac{b}{c} = \frac{c}{d}, \tag{2.2}$$

entonces la razón $\frac{a}{d}$ guarda una razón triplicada con $\frac{a}{b}$.
Ciertamente, podemos escribir

$$\frac{a}{d} = \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b},$$

en virtud de (2.2). Ahora la razón triplicada de $\frac{a}{b}$ es el cubo. Y así sucesivamente: cuadruplicada, quintuplicada, ...

Definición 2.11 *Se llaman magnitudes correspondientes las antecedentes en relación con las antecedentes y las consecuentes con las consecuentes.*

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entre cuatro magnitudes, a y c (antecedentes) y b, d (consecuentes) se dice que son correspondientes.

Definición 2.12 *Una razón por alternancia consiste en tomar el antecedente en relación con el antecedente y el consecuente en relación con el consecuente.*

Se trata de una de las ocho formas de escribir una proporción.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Definición 2.13 *Una razón por inversión consiste en tomar el consecuente como antecedente en relación con el antecedente como consecuente.*

Indica que en lugar de la razón $\frac{a}{b}$ se considera la $\frac{b}{a}$.

Definición 2.14 *La composición de una razón consiste en tomar el antecedente junto con el consecuente como una sola (magnitud) en relación con el propio consecuente.*

Aquí la palabra composición equivale a suma. La razón $\frac{a}{b}$ se convierte en la suma $\frac{a+b}{b}$. Se tiene de la proporción,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Definición 2.15 *La separación de una razón consiste en tomar el exceso por el que el antecedente excede al consecuente en relación con el propio consecuente.*

La razón $\frac{a}{b}$ se transforma en la resta $\frac{a-b}{b}$. En lo que respecta a una proporción, sigue

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Definición 2.16 *La conversión de una razón consiste en tomar el antecedente en relación con el exceso por el que el antecedente excede al consecuente.*

Significa que la razón $\frac{a}{b}$ se convierte en $\frac{a}{a-b}$.
Para una proporción se infiere

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}.$$

Definición 2.17 *Una razón por igualdad se da cuando, habiendo varias magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última -entre las primeras magnitudes-, así -entre las segundas magnitudes- la primera es a la última; o, dicho de otro modo, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios.*

Sean las magnitudes $a, b, c, d, ...j, k$ y otras iguales en número $a', b', c', d', ...j', k'$. Supongamos que son proporcionales al tomarlas por pares entre los dos grupos de magnitudes, es decir,

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}, ..., \frac{j}{k} = \frac{j'}{k'}$$

Igualando el producto de los primeros miembros con el de las segundas, sigue que

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdots \frac{j}{k} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{b'}{c'} \cdot \frac{c'}{d'} \cdots \frac{j'}{k'}$$

Simplificando queda

$$\frac{a}{k} = \frac{a'}{k'},$$

lo que en aquella época se expresaba diciendo "la primera magnitud es a la última, en el primer grupo, así la primera es a la última, en el segundo grupo". Esta afirmación es establecida en la Proposición 2.17.

Definición 2.18 *Una proporción perturbada se da cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como el antecedente es al consecuente -entre las primeras magnitudes-, así -entre las segundas magnitudes- el antecedente es al consecuente, y como el consecuente es a alguna otra (magnitud) -entre las primeras magnitudes-, así -entre las segundas magnitudes- alguna otra (magnitud) es al antecedente.*

Las ternas de magnitudes a, b, c y a', b', c' guardan una proporción perturbada cuando se cumple que

$$\frac{a}{b} = \frac{b'}{c'} \quad \text{y} \quad \frac{b}{c} = \frac{a'}{b'}.$$

De aquí se obtiene la proporción perturbada Proposición V.23,

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}.$$

Las ternas $16, 4, 8$ y $6, 12, 3$ originan una proporción perturbada, ya que

$$\frac{16}{4} = \frac{12}{3} \text{ y } \frac{4}{8} = \frac{6}{12}.$$

La proporción perturbadas es

$$\frac{16}{8} = \frac{6}{3},$$

que resulta de multiplicar miembro a miembro las anteriores proporciones.

2.3. Proposiciones

De las 25 proposiciones que figuran en este libro, demostraremos 17. Lo haremos respetando los enunciados de los teoremas y la manera de probarlos, tal como hizo Euclides -pero claro está- con otro lenguaje y una notación más actualizada.

Proposición 2.1 (V.1) *Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas.*

Demostración.
Sean las magnitudes $AB, \Gamma\Delta$ equimúltiplos de las E, Z, respectivamente,

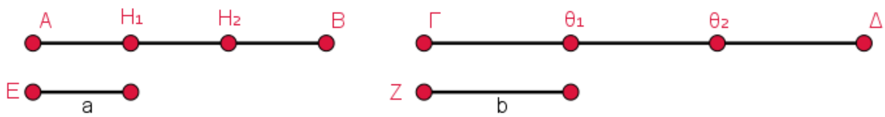


Figura 2.1. Representación gráfica V.1

Cuantas veces sea AB múltiplo de E, tantas veces lo serán $AB + \Gamma\Delta$ de $E + Z$, pues son equimúltiplos. Por hipótesis, en AB hay tantas magnitudes iguales a E como en $\Gamma\Delta$ iguales a Z. Llevemos E a AB, en este caso tres veces marcadas por H_1, H_2, de modo que

$$A \cdot H_1 = H_1 \cdot H_2 = H_2 \cdot B = Z$$

Procedamos igual para $\Gamma\Delta$ con los puntos Θ_1, Θ_2

$$\Gamma \cdot \Theta_1 = \Theta_1 \cdot \Theta_2 = \Theta_2 \cdot \Delta = E$$

Es decir, cuantas magnitudes hay en AB iguales a E, las mismas habrá en AB y $\Gamma\Delta$ iguales a E y Z. En conclusión, tantas veces como AB sea múltiplo de E, lo será también $AB + \Gamma\Delta$ de $E + Z$.

Q.E.D.

Nota: 2.2 *En terminología actual, lo que se ha probado es que* $AB + \Gamma\Delta = 3a + 3b = 3(a + b) = 3(E + Z)$*. En general, Euclides establece la propiedad distributiva*

$$ma + mb + mc + \ldots = m(a + b + c + \ldots)$$

Enunciamos sin probar la siguiente proposición.

Proposición 2.2 (V.2) *Si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta.*

Nota: 2.3 *Se ha establecido que*

$AB+BH+\varDelta E+BH = 3a+2a+3b+2b = 3(a+b)+2(a+b) = 5(a+b) = 5(\varGamma+Z)$.

En general, siendo m y n enteros, se tiene

$$ma + na + mb + nb = m(a + b) + n(a + b) = (m + n)(a + b).$$

Proposición 2.3 (V.3) *Si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad cada una de las dos (magnitudes) tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda, y la otra de la cuarta.*

Demostración.
Sean las magnitudes A, medida por B, y $\varGamma$, medida por $\varDelta$.

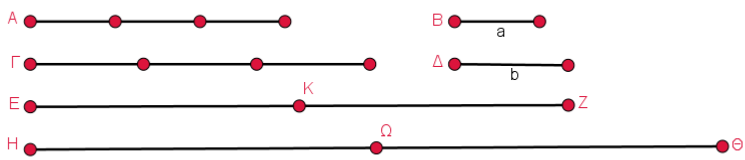


Figura 2.2. Representación gráfica V.3

Asumimos que A y $\varGamma$ son equimúltiplos de B y $\varDelta$, respectivamente. Construyamos ahora el segmento EZ de modo que sea el mismo múltiplo de A que $H\varTheta$ de $\varGamma$. Veamos que EZ es el mismo múltiplo de B que $H\varTheta$ de $\varDelta$.

En efecto, obsérvese que EZ contiene el mismo número de veces la magnitud de A que $H\varTheta$ la magnitud $\varGamma$. Pero, a su vez, cada una de esas partes en EZ es el mismo múltiplo de B que cada una de las partes $H\varTheta$ de $\varDelta$. Por tanto, EZ contiene el mismo número de veces B que $H\varTheta$ la magnitud $\varDelta$.

Q.E.D.

Nota: 2.4 *Algebraicamente se ha verificado que*

$$EZ = mA = m(nB) = (mn)B$$
$$H\varTheta = m\varGamma = m(n\varDelta) = (mn)\varDelta$$

Es decir, cualesquiera que sean los enteros m y n,

$$m \cdot na = mn \cdot a \quad y \quad m \cdot nb = mn \cdot b.$$

Proposición 2.4 (V.4) *Si una primera (magnitud) guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente, tomados en el orden correspondiente.*

Demostración.

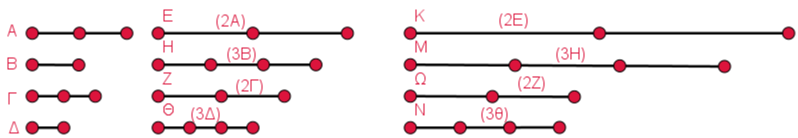


Figura 2.3. Representación gráfica V.4

Por hipótesis, $\dfrac{A}{B} = \dfrac{\Gamma}{\Delta}$. Tenemos que ver que $\dfrac{E}{H} = \dfrac{Z}{\Theta}$.
En efecto, para ciertos enteros m y n se tiene, respectivamente,

$$\begin{aligned} E &= mA, \quad Z = m\Gamma \\ K &= nE, \quad \Omega = mZ \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.3 se concluye que K es el mismo múltiplo de A que Ω de Γ, esto es,

$$K = nmA, \quad \Omega = nm\Gamma \tag{2.3}$$

Análogamente, para determinados enteros p y q, $H = pB$, $\Theta = p\Delta$, $M = qH$ y $N = q\Theta$, por lo cual

$$M = qpB, \quad N = pq\Delta \tag{2.4}$$

Por otra parte por hipótesis, con s y r enteros, en virtud de la Definición 2.5,

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} rA > sB \Rightarrow r\Gamma > s\Delta \\ rA = sB \Rightarrow r\Gamma = s\Delta \\ rA < sB \Rightarrow r\Gamma < s\Delta \end{cases} \tag{2.5}$$

De (2.3), (2.4) y (2.5) sigue que

$$\begin{cases} K > M \Rightarrow \Omega > N \\ K = M \Rightarrow \Omega = N \\ K < M \Rightarrow \Omega < N \end{cases}$$

Tenemos cuatro magnitudes E, H, Z, Θ; equimúltiples K y Ω de E y Z; y equimúltiples cualesquiera M y N de H y Θ. En consecuencia, por la Definición 2.5,

$$\frac{E}{H} = \frac{Z}{\Theta}$$

Q.E.D.

Nota: 2.5 *En este caso concreto, se ha establecido*

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} \Rightarrow \frac{2A}{3B} = \frac{2\Gamma}{3\Delta}$$

En general, algebraicamente se ha deducido,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd},$$

para ciertas magnitudes proporcionales a, b, c, d, *y cualesquiera enteros* m *y* n.

Enunciamos sin probar las siguientes proposiciones.

Proposición 2.5 (V.7) *Las (magnitudes) iguales guardan la misma razón con una misma (magnitud) y la misma (magnitud) guarda la misma razón con las (magnitudes) iguales.*

Proposición 2.6 (V.8) *De magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma (magnitud) una razón mayor que la menor, y la misma (magnitud) guarda con la menor una razón mayor que con la mayor.*

Nota: 2.6 *Sean tres magnitudes* a, b, c *con* $a > b$.
Lo que establece este aserto es que

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad y \quad \frac{c}{a} < \frac{c}{b}.$$

Proposición 2.7 (V.9) *Las (magnitudes) que guardan con una misma (magnitud) la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma (magnitud) guarda la misma razón, son iguales.*

Nota: 2.7 *En términos numéricos esta proposición nos dice que, siendo* a, b, c *magnitudes no nulas,*

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \Rightarrow a = b$$

$$\frac{c}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow a = b$$

Proposición 2.8 (V.10) *De las (magnitudes) que guardan razón con una misma (magnitud), la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma (magnitud) guarda una razón mayor, es menor.*

Demostración.
Dadas tres magnitudes A, B y Γ, supongamos que

$$\frac{A}{\Gamma} > \frac{B}{\Gamma} \tag{2.6}$$

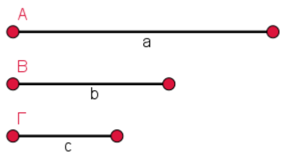


Figura 2.4. Representación gráfica V.8

Veamos que $A > B$. Por reducción al absurdo, si fuera falso, sería $A = B$ o $A < B$.
En primer lugar, si fuera $A = B$, por la Proposición 2.5 se obtendría

$$\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Gamma},$$

lo que contradice la hipótesis (2.7). En cambio, si asumimos que $A < B$, en virtud de la Proposición 2.6 se infiere,

$$\frac{A}{\Gamma} < \frac{B}{\Gamma},$$

lo que también es un absurdo. Así pues, $A > B$.
Admitamos ahora que $\frac{\Gamma}{B} > \frac{\Gamma}{A}$. No puede ser $B = A$ a tenor de la Proposición 2.5, ni $B > A$, por la Proposición 2.6. Por tanto, $B < A$.

Q.E.D.

Proposición 2.9 (V.11) *Las razones que son iguales a una misma razón son también iguales entre sí.*

Demostración.
Sean las magnitudes $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ y supongamos que

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} \text{ y } \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{E}{Z} \tag{2.7}$$

Demostraremos que $\frac{A}{B} = \frac{E}{Z}$.

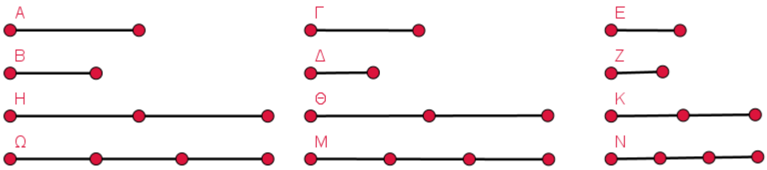


Figura 2.5. Representación gráfica V.9

Consideremos los equimúltiplos H, Θ, K de A, Γ, E; y los equimúltiplos Ω, M, N de B, Δ, Z. Entonces, por la Definición 2.5, de la hipótesis (2.8) sigue que

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} H > \Omega \Rightarrow \Theta > M \\ H = \Omega \Rightarrow \Theta = M \\ H < \Omega \Rightarrow \Theta < M \end{cases}$$

y

$$\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{E}{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \Theta > M \Rightarrow K > N \\ \Theta = M \Rightarrow K = N \\ \Theta < M \Rightarrow K < N \end{cases}$$

Ordenando las conclusiones de este conjunto de implicaciones se deduce que,

$$\begin{cases} H > \Omega \Rightarrow K > N \\ H = \Omega \Rightarrow K = N \\ H < \Omega \Rightarrow K < N \end{cases}$$

De aquí se infiere, a la vista de la citada Definición 2.5 y al ser H y K equimúltiplos de A y E, y Ω y N otros equimúltiplos de B y Z, que

$$\frac{A}{B} = \frac{E}{Z}$$

Q.E.D.

Nota: 2.8 *Esta proposición es una constatación de la coherencia de la Definición 2.5, ya que se prueba que la igualdad de razones no depende de la representación que se use de una determinada razón.*

Proposición 2.10 (V.12) *Si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes.*

Demostración.
Sean las magnitudes $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ tales que

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{E}{Z}$$

Demostraremos que

$$\frac{A}{B} = \frac{A + \Gamma + E}{B + \Delta + Z} \tag{2.8}$$

Consideremos los equimúltiplos H, Θ, K de A, Γ, E y otros equimúltiplos cualesquiera Ω, M, N de B, Δ, Z.

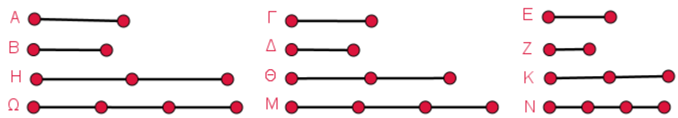


Figura 2.6. Representación gráfica V.10

Por hipótesis, en virtud de la Definición 2.5,

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} H > \Omega \Rightarrow \Theta > M \\ H = \Omega \Rightarrow \Theta = M \\ H < \Omega \Rightarrow \Theta < M \end{cases}$$

$$\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{E}{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \Theta > M \Rightarrow K > N \\ \Theta = M \Rightarrow K = N \\ \Theta < M \Rightarrow K < N \end{cases}$$

De las anteriores implicaciones se deduce primeramente

$$H > \Omega \Rightarrow \Theta > M \Rightarrow K > N,$$

de donde

$$H + \Theta + K > \Omega + M + N.$$

Por otra parte,

$$H = \Omega \Rightarrow \Theta = M \Rightarrow K = N,$$

de donde

$$H + \Theta + K = \Omega + M + N.$$

Finalmente,

$$H < \Omega \Rightarrow \Theta < M \Rightarrow K < N,$$

de donde

$$H + \Theta + K < \Omega + M + N.$$

Por tanto, resumiendo, se tiene

$$\begin{aligned} H > \Omega &\Rightarrow H + \Theta + K > \Omega + M + N \\ H = \Omega &\Rightarrow H + \Theta + K = \Omega + M + N \\ H < \Omega &\Rightarrow H + \Theta + K < \Omega + M + N, \end{aligned}$$

Ahora bien, por la Proposición 2.1, $H + \Theta + K$ es el mismo equimúltiplo de $A + \Gamma + E$ que H de A, mientras que $\Omega + M + N$ es otro equimúltiplo de $B + \Delta + Z$, el mismo que Ω de B. Así pues, apelando de nuevo a la Definición 2.5, de todo lo anterior se infiere (2.9).

Q.E.D.

Nota: 2.9 *Este aserto recoge un resultado clásico del álgebra elemental: en una proporción, la suma de antecedentes es a la suma de consecuentes como cualquiera de las razones que forman la proporción. Si a, b, c, d, e, f son magnitudes dadas, se tiene*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a + c + e}{b + d + f} = \frac{a}{b}$$

Proposición 2.11 (V.14) *Si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si es menor, menor.*

Demostración.
Sean las magnitudes proporcionales A, B, Γ, Δ, esto es,

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}. \tag{2.9}$$

(i) Supongamos que $A > \Gamma$. Veremos que $B > \Delta$. En efecto, por la Proposición 2.6, como $A > \Gamma$ y B es la otra magnitud,

$$\frac{A}{B} > \frac{\Gamma}{B}$$

De aquí, a la vista de la hipótesis (2.10), se deduce que

$$\frac{\Gamma}{\Delta} > \frac{\Gamma}{B}.$$

Y por la Proposición 2.8, se tiene que $\Delta < B$ o lo que es lo mismo, $B > \Delta$.

(ii) Asumimos ahora que $A = \Gamma$. Entonces, en virtud de la Proposición 2.5, magnitudes iguales guardan la misma razón con cualquier otra magnitud, en particular con B,

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{B}$$

es decir, por (2.10), se ha llegado a que

$$\frac{\mathit{\Gamma}}{\mathit{\Delta}} = \frac{\mathit{\Gamma}}{B}.$$

Finalmente, de la Proposición 2.7, se concluye que $B = \mathit{\Delta}$.

(iii) Por último, admitamos que $A < \mathit{\Gamma}$. Estableceremos que $B < \mathit{\Delta}$. Ciertamente, si $A < \mathit{\Gamma}$, entonces $\mathit{\Gamma} > A$ y, en relación con una tercera magnitud B, por la Proposición 2.6, sigue que

$$\frac{\mathit{\Gamma}}{B} > \frac{A}{B} = \frac{\mathit{\Gamma}}{\mathit{\Delta}}$$

a tenor de (2.10). Luego,

$$\frac{\mathit{\Gamma}}{B} > \frac{\mathit{\Gamma}}{\mathit{\Delta}}.$$

De nuevo, en virtud de la Proposición 2.8, se infiere que $B < \mathit{\Delta}$.

Q.E.D.

Las siguientes proposiciones son fáciles de establecer.

Proposición 2.12 (V.15) *Las partes guardan la misma razón entre sí que sus mismos múltiplos, tomados en el orden correspondiente.*

Nota: 2.10 *Con terminología actual, se ha probado que*

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb},$$

para todo entero m y cualesquiera magnitudes a y b positivas.

Proposición 2.13 (V.16) *Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.*

Nota: 2.11 *Se ha establecido que*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

que es otra forma de escribir una proporción.

Proposición 2.14 (V.17) *Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por separación serán proporcionales.*

Demostración.
Con terminología actual, sean a, b, c, d cuatro magnitudes proporcionales ($a > b$ y $c > d$), esto es,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \tag{2.10}$$

Demostraremos que $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$. Para ello, tomemos ma, mb, mc y md equimúltiplos de a, b, c, d, por una parte, y nb, nd otros equimúltiplos de b y d, siendo m, n enteros. Por la Proposición 2.2, resulta que $(m+n)b$ y $(m+n)d$ también son equimúltiplos de b y d. Puesto que se cumple (2.15), en virtud de la Definición 2.5,

$$\begin{cases} ma > (m+n)b \Rightarrow mc > (m+n)d \\ ma = (m+n)b \Rightarrow mc = (m+n)d \\ ma < (m+n)b \Rightarrow mc < (m+n)d \end{cases}$$

Reescribimos lo anterior de otra forma

$$\begin{cases} m(a-b) > nb \Rightarrow m(c-d) > nd \\ m(a-b) = nb \Rightarrow m(c-d) = nd \\ m(a-b) < nb \Rightarrow m(c-d) < nd \end{cases}$$

Así pues, por lo referido a la Definición 2.5,

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

Q.E.D.

Únicamente enunciamos las proposiciones siguientes.

Proposición 2.15 (V.18) *Si unas magnitudes son proporcionales por separación, también por composición serán proporcionales.*

Nota: 2.12 *Hemos demostrado que*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d},$$

esto es, en cualquier proporción, la suma del antecedente y el correspondiente consecuente es a dicho consecuente, como antecedente más consecuente de la otra razón es a su consecuente.

Proposición 2.16 (V.20) *Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual, y si es menor, menor.*

Nota: 2.13 *Si las magnitudes a, b, c, d, e, f verifican*

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{e} \quad y \quad \frac{b}{c} = \frac{e}{f},$$

entonces el anterior teorema afirma que

$$
\begin{aligned}
a > c &\Rightarrow d > f \\
a = c &\Rightarrow d = f \\
a < c &\Rightarrow d < f
\end{aligned}
$$

Proposición 2.17 (V.22) *Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón.*

Nota: 2.14 *Sean las magnitudes a, b, c, d, e, f. Acabamos de probar que,*

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{e} \quad , \frac{b}{c} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{d}{f}$$

Basta multiplicar miembro a miembro las dos proporciones para obtener

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{d}{e} \cdot \frac{e}{f},$$

esto es,

$$\frac{a}{c} = \frac{d}{f}.$$

Este resultado se generaliza fácilmente a dos conjuntos con el mismo número de magnitudes que sean proporcionales dos a dos. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_p$ y $b_1, b_2, \ldots, b_p$ (p entero). Se tiene

$$\frac{a_j}{a_{j+1}} = \frac{b_j}{b_{j+1}} \quad , j = 1, 2, \ldots, p-1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_p} = \frac{b_1}{b_p}.$$

2.4. Comentarios al Libro V

Las matemáticas comienzan en Grecia con Tales de Mileto (siglo VI a.C.). Se le considera el primer científico, porque buscó explicaciones racionales a los fenómenos de la naturaleza e inventó la demostración matemática.

La legendaria escuela de Pitágoras es una mezcla entre la filosofía, religión y matemática. Para los pitagóricos el número es la esencia de todas las cosas. Desde estos inicios uno de los problemas que atraían la atención de los matemáticos griegos fue la semejanza de figuras rectilíneas, en concreto, de los polígonos. Ello les llevaba a comparar los lados de una y de otra figura, esto es, a estudiar la razón de dos segmentos.
Dadas dos magnitudes homogéneas a y b, recordemos que se dice que estas magnitudes son conmensurables si tienen una parte alícuota común, es decir, si existe una magnitud c de la misma naturaleza que a y b tal que

$$a = mc, \quad b = nc,$$

para ciertos enteros m y n. De aquí se infiere

$$\frac{a}{b} = \frac{mc}{nc} = \frac{m}{n}.$$

Así pues, si las magnitudes a y b son conmensurables, su razón (o cociente) se puede expresar mediante una fracción de números enteros, lo que hoy conocemos como un número racional. Pero los propios pitagóricos descubrieron que existen parejas de segmentos que son inconmensurables, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado en relación con su lado, o la diagonal de un pentágono regular respecto de su lado. Este hecho supuso un auténtico descalabro para los pitagóricos ya que, al no ser capaces de hallar una explicación, produjo un derrumbamiento de sus teorías matemáticas.

Muchos especialistas en historia de las matemáticas consideran que el Libro V constituye básicamente una introducción de los números reales. En efecto, el objetivo central del Libro V es elaborar una teoría sobre razones o cocientes de magnitudes, sin importar si son o no conmensurables.

Euclides logra con este libro alcanzar una de las cimas del pensamiento matemático. A decir de los expertos, el contenido del Libro V no fue entendido ni asimilado hasta bien avanzado el siglo XIX. La habilidad y maestría de Euclides al realizar las definiciones, muchas de ellas con un elevado grado de abstracción, le permitirán construir esta teoría sobre las razones. Así, la Definición 2.5 nos dice que si tenemos cuatro magnitudes a, b, c y d, y enteros m y n, tales que:

$$\begin{aligned} ma > nb &\Rightarrow mc > nd \\ ma = nb &\Rightarrow mc = nd \\ ma < nb &\Rightarrow mc < nd \end{aligned}$$

entonces estas magnitudes son proporcionales: como a es a b, así c es a d, con nuestra terminología,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Nótese que las primeras partes de las anteriores implicaciones se pueden escribir,

$$\frac{a}{b} > \frac{n}{m}, \quad \frac{a}{b} = \frac{n}{m}, \quad \frac{a}{b} < \frac{n}{m}.$$

Por tanto, la razón $\frac{a}{b}$ de un par de magnitudes homogéneas a y b produce la siguiente partición en el conjunto de las fracciones positivas [5],

$$\left[\frac{a}{b}\right]_- = \left\{\frac{n}{m} : \frac{a}{b} > \frac{n}{m}\right\}$$
$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left\{\frac{n}{m} : \frac{a}{b} = \frac{n}{m}\right\}$$
$$\left[\frac{a}{b}\right]_+ = \left\{\frac{n}{m} : \frac{a}{b} < \frac{n}{m}\right\}$$

En el primer caso son aproximaciones por defecto y en el tercer caso por exceso de la razón $\frac{a}{b}$. Si a y b son inconmensurables, obviamente el conjunto $\left[\frac{a}{b}\right]$ es vacío.

De la Definición 2.5 sobre la igualdad de razones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

se traduce en que $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ producen la misma partición en el conjunto de las fracciones:

$$\left[\frac{a}{b}\right]_- = \left[\frac{c}{d}\right]_-$$
$$\left[\frac{a}{b}\right]_+ = \left[\frac{c}{d}\right]_+$$
$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{c}{d}\right]$$

En esta última igualdad, los conjuntos son no vacío si las magnitudes son conmensurables y vacíos si son inconmensurables.

Por último resaltamos que en la Proposición 2.9 se prueba,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad y \quad \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f},$$

lo que es una muestra de la coherencia de la citada Definición 2.6: la igualdad de razones no depende de la representación que se utilice de una razón.

Resulta asombroso constatar el parecido entre esta teoría de Euclides y la de las cortaduras de Dedekind para definir rigurosamente los números reales, asombro que se transforma en admiración cuando se tiene en cuenta que han debido pasar más de dos milenios para llegar a este punto: construir rigurosamente el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Cuesta afirmar que "la primera definición rigurosa de los números reales, tan rigurosa, si no más que cualquiera de las modernas, se contiene en las admirables Definiciones 2.5 y 2.7 del Libro V, . . . Durante siglos, su precisión tan escueta, la hizo ininteligible" [5].

De esta forma tan elaborada y brillante, Euclides de respuesta a los problemas planteados a los pitagóricos por su descubrimiento de la existencia de segmentos inconmensurables.

Nota: 2.15 *Muchos autores adjudican esta teoría de las razones y proporciones a Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.), uno de los más eminentes matemáticos de la Grecia Clásica. Otros lo ponen en duda, pues no hay pruebas irrefutables que avalen tal autoría. En cualquier caso, nadie discute la grandeza de Euclides al plasmar esta teoría, sea suya propia o sugerida por otros, en este gran libro.*

3

LIBRO VI

3.1. Introducción

El Libro VI consta de tres definiciones y 33 proposiciones. En él se aplica la teoría de las proporciones del Libro V a la geometría plana. Se establecen los resultados fundamentales de la semejanza de triángulos, los populares criterios de semejanza. Estos resultados son extendidos, en algunos casos, a figuras rectilíneas más generales, como son los polígonos. También se presenta la construcción de la tercera, la cuarta y la media proporcional, relacionando esta última con la solución geométrica de las ecuaciones de segundo grado. Destacamos la demostración del hoy conocido como teorema de la bisectriz y la generalización del teorema de Pitágoras.

En la siguiente sección se introducen y se argumentan las tres definiciones.

En la tercera sección, que será el núcleo del capítulo, se seleccionan las proposiciones que se van a demostrar, quince en total. Se conserva en todo lo posible el espíritu de las pruebas de Euclides, pero introduciendo algunos aspectos de la terminología actual.
Finalmente, en la cuarta sección se eligen algunos resultados por su interés educativo y formativo: los criterios de semejanza de triángulos, el teorema de la bisectriz y la generalización del teorema de Pitágoras.

3.2. Definiciones

La primera definición se refiere a la semejanza de figuras rectilíneas.

Definición 3.1 *Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales.*

Esta definición es la clásica de semejanza entre figuras rectilíneas y es muy clara.

Definición 3.2 *Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el (segmento) mayor es al menor.*

Si conseguimos en el segmento AB determinar un punto C de modo que

Figura 3.1. Representación gráfica VI.2

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{CB}$, diremos que el punto C corta el segmento AB en extrema y media razón. La determinación de este punto entraña resolver una ecuación de segundo grado. En efecto, si $AB = m$ y $AC = x$, por definición se cumple que

$$\frac{m}{x} = \frac{x}{m-x}$$

esto es, $x^2 + mx - m^2 = 0$, cuya solución es

$$AC = x = \frac{(\sqrt{5}-1)m}{2}, \quad CB = \frac{(3-\sqrt{5})m}{2}, \quad AB = m.$$

Para un segmento de longitud 2, se tendría que $AC = \sqrt{5} - 1$ y $CB = 3 - \sqrt{5}$

Definición 3.3 *En toda figura, la altura es la perpendicular trazada desde el vértice hasta la base.*

Esta definición parece hecha pensando en un triángulo, aunque también es válida para cuadriláteros. Más discutible se nos antoja cuando se aplica a un polígono en general. [1]

3.3. Proposiciones

De las 33 proposiciones que integran este libro, elegiremos para su estudio las relativas a los criterios de semejanza entre triángulos y las que conducen a la verificación de una generalización del teorema de Pitágoras. Sólo en alguna de ellas respetaremos fielmente la prueba de Euclides, para mostrar su sistema metódico y el lenguaje usado.

[1] En muchos otros textos y versiones de los *Elementos* se incluyen dos definiciones más, si bien la mayoría de los historiadores de las matemáticas consideren que son incorporaciones posteriores a Euclides. Como estas definiciones no las utiliza en este libro, obviaremos considerarlas.

Proposición 3.1 (VI. 1) *Los triángulos y los paralelograamos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.*

Demostración.
Sean $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{A\Gamma\Delta}$ triángulos y $E\Gamma, \Gamma Z$ paralelogramos que tienen la misma altura.

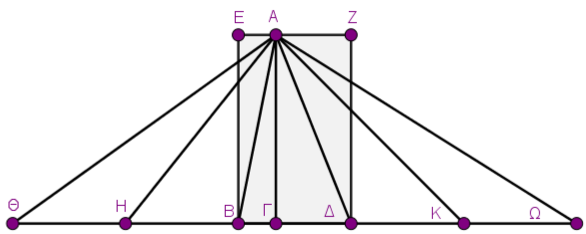


Figura 3.2. Representación gráfica VI.1

Digo que como la base $B\Gamma$ es a la base $\Gamma\Delta$, así el triángulo $\widehat{AB\Gamma}$ es al triángulo $\widehat{A\Gamma\Delta}$, y el paralelogramo $E\Gamma$ al paralelogramo ΓZ.
Pues, prolongando $B\Delta$ por ambos lados, trácense tantos segmentos de recta $BH, H\Theta, \ldots$ iguales a la base $B\Gamma$ como se quiera, y tantos segmentos $\Delta K, K\Omega, \ldots$ como se quiera iguales a la base $\Gamma\Delta$. Únanse todos los puntos de separación con el vértice A.
Puesto que $\Gamma B = BH = H\Theta$, los triángulos $\widehat{A\Theta H}, \widehat{AHB}$ y $\widehat{AB\Gamma}$ tienen la misma base [I.38]. Por tanto, cuantas veces la base $\Theta\Gamma$ sea múltiplo de la base $B\Gamma$, tantas veces el triángulo $\widehat{A\Theta\Gamma}$ será múltiplo del triángulo $\widehat{AB\Gamma}$.
Por el mismo razonamiento, cuantas veces la base $\Omega\Gamma$ sea múltiplo de la base $\Gamma\Delta$, tantas veces el triángulo $\widehat{A\Omega\Gamma}$ es también múltiplo del triángulo $\widehat{A\Gamma\Delta}$.
Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\Theta\Gamma > \Gamma\Omega &\Rightarrow \mathcal{A}(\widehat{A\Theta\Gamma}) > \mathcal{A}(\widehat{A\Gamma\Omega}) \\
\Theta\Gamma = \Gamma\Omega &\Rightarrow \mathcal{A}(\widehat{A\Theta\Gamma}) = \mathcal{A}(\widehat{A\Gamma\Omega}) \\
\Theta\Gamma < \Gamma\Omega &\Rightarrow \mathcal{A}(\widehat{A\Theta\Gamma}) < \mathcal{A}(\widehat{A\Gamma\Omega})
\end{aligned}$$

En virtud de las anteriores consideraciones y de la Definición 2.5, se deduce que como la base $B\Gamma$ es a la base $\Gamma\Delta$, así el triángulo $\widehat{AB\Gamma}$ es al triángulo $\widehat{A\Gamma\Delta}$. En cuanto a los paralelogramos, sigue inmediatamente de [I.41]

$$\mathcal{A}(E\Gamma) = 2 \cdot \mathcal{A}(\widehat{AB\Gamma}), \quad \mathcal{A}(Z\Gamma) = 2 \cdot \mathcal{A}(\widehat{A\Gamma\Delta})$$

y del hecho de que las partes guardan la misma razón que sus múltiplos Proposición 2.15.

Q.E.D.

Nota: 3.1 *La demostración de Euclides no utiliza la conocida fórmula que nos da el área de un triángulo (ni en la segunda parte, la del paralelogramo)*

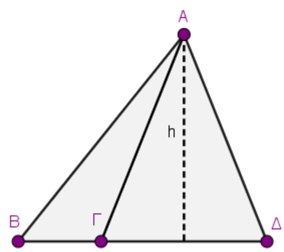


Figura 3.3. Representación gráfica VI.1

Procediendo así es trivial, por cuanto

$$\frac{\mathcal{A}(\widehat{AB\Gamma})}{\mathcal{A}(\widehat{A\Gamma\Delta})} = \frac{\dfrac{(B\Gamma)\cdot h}{2}}{\dfrac{(\Gamma\Delta)\cdot h}{2}} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$$

En el siguiente aserto destacamos las partes de una demostración de Euclides.

Proposición 3.2 (VI, 2) *Proposición o enunciado (prótasis). Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo.*

Demostración.

Exposición (ékthesis)

Tracése $\mathit{\Delta} E$ paralelo a uno de los lados del triángulo $\widehat{AB\mathit{\Gamma}}$, digamos a $B\mathit{\Gamma}$.

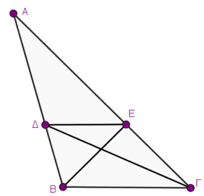


Figura 3.4. Representación gráfica VI.2

Determinación(diorismós)

Digo que como $B\mathit{\Delta}$ es a $\mathit{\Delta} A$, así $\mathit{\Gamma} E$ a EA.

Construcción (kataskeue)

Pues trácense BE y $\mathit{\Gamma\Delta}$.

Demostración (apódeixis)

Entonces, como están sobre la misma base, $\mathit{\Delta} E$, y entre las mismas paralelas $\mathit{\Delta} E$ y $B\mathit{\Gamma}$ [I.38]

$$\mathcal{A}(\widehat{B\mathit{\Delta} E}) = \mathcal{A}(\widehat{\mathit{\Gamma\Delta} E})$$

Pero magnitudes iguales guardan la misma razón con una misma magnitud, por la Proposición 2.5:

$$\frac{\mathcal{A}(\widehat{B\mathit{\Delta} E})}{\mathcal{A}(\widehat{A\mathit{\Delta} E})} = \frac{\mathcal{A}(\widehat{\mathit{\Gamma\Delta} E})}{\mathcal{A}(\widehat{A\mathit{\Delta} E})} \tag{3.1}$$

Los triángulos $\mathcal{A}(\widehat{B\mathit{\Delta} E})$ y $\mathcal{A}(\widehat{A\mathit{\Delta} E})$ tienen la misma altura, a saber, la perpendicular desde E hasta AB. Luego, por la Proposición 3.1,

$$\frac{\mathcal{A}(\widehat{B\mathit{\Delta} E})}{\mathcal{A}(\widehat{A\mathit{\Delta} E})} = \frac{B\mathit{\Delta}}{\mathit{\Delta} A} \tag{3.2}$$

Por la misma razón,

$$\frac{\mathcal{A}(\widehat{\mathit{\Gamma\Delta} E})}{\mathcal{A}(\widehat{A\mathit{\Delta} E})} = \frac{\mathit{\Gamma} E}{EA} \tag{3.3}$$

Ahora bien, de (3.1), (3.2) y (3.3) se concluye que

$$\frac{B\Delta}{\Delta A} = \frac{\Gamma E}{EA} \tag{3.4}$$

Por otra parte, córtense proporcionalmente los lados AB y $A\Gamma$ del triángulo $\widehat{AB\Gamma}$ de modo que se cumpla (3.4), y trácese ΔE.
Digo que ΔE es paralelo a $B\Gamma$.
Siguiendo con la misma construcción, se verifican (3.3) y (3.4). Como ahora la hipótesis es (3.4), se infiere (3.1) y, por consiguiente, en virtud de la Proposición 2.7

$$\mathcal{A}(\widehat{B\Delta E}) = \mathcal{A}(\widehat{\Gamma\Delta E})$$

Es decir, el triángulo $\widehat{B\Delta E}$ es igual que $\widehat{\Gamma\Delta E}$, y yacen sobre la misma base ΔE, por lo que también están entre las mismas paralelas [I.39]; luego, ΔE es paralelo a $B\Gamma$.
Conclusión (syumpérasma)
Por consiguiente, si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los otros lados de dicho triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de corte será paralela al lado que resta del triángulo.

Q.E.D.

Proposición 3.3 (VI. 3) *Si se divide en dos partes iguales un ángulo de un triángulo, y la recta que corta el ángulo corta también la base, los segmentos de la base guardarán la misma razón que los restantes lados del triángulo; y, si los segmentos de la base guardan la misma razón que los lados restantes del triángulo, la recta trazada desde el vértice hasta la sección dividirá en dos partes iguales el ángulo del triángulo.*

Demostración.

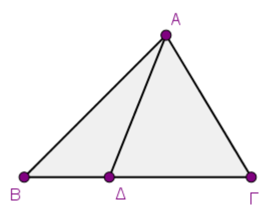


Figura 3.5. Representación gráfica VI.3

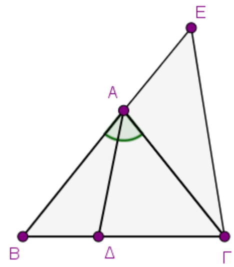


Figura 3.6. Representación gráfica VI.3

Tracemos la bisectriz $A\Delta$ al ángulo $\widehat{A}$ del triángulo $\widehat{AB\Gamma}$. Seguidamente, por el punto Γ dibujamos la paralela a $A\Delta$. Puesto que $A\Gamma$ corta las rectas paralelas $A\Delta$ y ΓE, tenemos que (por ángulos alternos interiores [I.29]),

$$\widehat{\Gamma A\Delta} = \widehat{A\Gamma E} \tag{3.5}$$

Por ser $A\Delta$ la bisectriz

$$\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma A\Delta} \tag{3.6}$$

De (3.5) y (3.6) se deduce que

$$\widehat{BA\Delta} = \widehat{A\Gamma E} \tag{3.7}$$

Asimismo, el ángulo externo $\widehat{BA\Delta}$ es igual al interno $\widehat{AE\Gamma}$ [I.29], esto es,

$$\widehat{BA\Delta} = \widehat{AE\Gamma} \tag{3.8}$$

Concluimos de (3.7) y (3.8) que $\widehat{A\Gamma E} = \widehat{AE\Gamma}$, por lo que, $\widehat{A\Gamma E}$ es isósceles, y $AE = A\Gamma$.
Aplicando la Proposición 3.2 al triángulo $\widehat{B\Gamma E}$, donde $A\Delta$ es paralela a ΓE, se tiene

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{BA}{AE} = \frac{BA}{A\Gamma},$$

es decir,

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{BA}{A\Gamma}.$$

El recíproco se prueba análogamente.

Q.E.D.

Nota: 3.2 *El anterior aserto es el conocido teorema de la bisectriz: la bisectriz del ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados que definen el ángulo considerado.*

No probaremos la siguiente proposición.

Proposición 3.4 (VI. 4) *En los triángulos equiángulos, los lados que corresponden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondientes.*

Proposición 3.5 (VI. 5) *Si dos triángulos tienen los lados proporcionales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.*

Demostración.

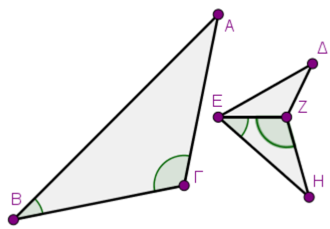


Figura 3.7. Representación gráfica VI.5

Supongamos que los triángulos $\widehat{AB\varGamma}$ y $\widehat{\varDelta EZ}$ tienen los lados proporcionales, es decir,

$$\frac{AB}{\varDelta E} = \frac{B\varGamma}{EZ} = \frac{A\varGamma}{\varDelta Z} \tag{3.9}$$

Construyamos sobre el segmento EZ, en los puntos E y Z, ángulos respectivamente iguales a los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{\varGamma}$. Por tanto, $\widehat{A} = \widehat{H}$ y los triángulos $\widehat{AB\varGamma}$ y $\widehat{EHZ}$ son equiángulos. Por la Proposición 3.4 los lados que limitan los ángulos iguales son proporcionales; luego,

$$\frac{AB}{B\varGamma} = \frac{EH}{EZ}$$

Teniendo en cuenta (3.12) $\dfrac{AB}{B\varGamma} = \dfrac{\varDelta E}{EZ}$, por lo cual

$$\frac{\varDelta E}{EZ} = \frac{EH}{EZ} \Rightarrow \varDelta E = EH$$

Por la misma razón, $\Delta Z = HZ$. Resumiendo, resulta que los triángulos $\widehat{\Delta EZ}$ y $\widehat{EHZ}$ tienen los lados ΔE y EZ, que forman el ángulo $\widehat{\Delta EZ}$, respectivamente iguales a EH y EZ (EZ es común), que forman el ángulo $\widehat{HEZ}$; y la base ΔZ del primer triángulo es igual a la base HZ del segundo. En virtud de [I.8] se concluye que $\widehat{\Delta EZ} = \widehat{HEZ}$ y que los triángulos $\widehat{\Delta EZ}$ y $\widehat{HEZ}$ son iguales. Por consiguiente, los restantes ángulos, los que subtienden los lados iguales también son iguales, es decir, $\widehat{\Delta ZE} = \widehat{HZE}$ y $\widehat{E\Delta Z} = \widehat{EHZ}$.
Ahora bien,

$$\widehat{AB\Gamma} = \widehat{HEZ} \text{ y } \widehat{HEZ} = \widehat{\Delta EZ} \Rightarrow \widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$$

$$\widehat{A\Gamma B} = \widehat{HZE} \text{ y } \widehat{HZE} = \widehat{\Delta ZE} \Rightarrow \widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta ZE}$$

Y, a fortiorí, $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$. Así pues, los triángulos $\widehat{AB\Gamma}$ y $\widehat{\Delta EZ}$ son equiángulos.

Q.E.D.

Proposición 3.6 (VI. 6) *Si dos triángulos tienen un ángulo (del uno) igual a un ángulo (del otro) y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.*

Proposición 3.7 (VI. 7) *Si dos triángulos tienen un ángulo de uno igual a un ángulo de otro y tienen proporcionales los lados que comprenden los otros ángulos, y tienen los restantes ángulos parejamente menores o no menores que un recto, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos que comprenden los lados proporcionales.*

Demostración.

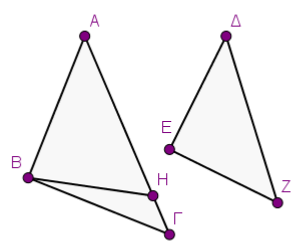


Figura 3.8. Representación gráfica VI.7

Dados los triángulos $\widehat{AB\Gamma}$ y $\widehat{\Delta EZ}$ supongamos que $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$ y que

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ} \tag{3.10}$$

Asumamos también que los restantes ángulos

$$\widehat{\Gamma} < 1R, \quad \widehat{Z} < 1R$$

Veamos que los triángulos $\widehat{AB\Gamma}$ y $\widehat{\Delta EZ}$ son equiángulos siendo $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$, y los restantes iguales, esto es, $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$.
Supongamos, por reducción al absurdo, que $\widehat{AB\Gamma} \neq \widehat{\Delta EZ}$.
Entonces $\widehat{AB\Gamma} > \widehat{\Delta EZ}$ o $\widehat{AB\Gamma} < \widehat{\Delta EZ}$. Asumamos el primer caso, es decir, que $\widehat{AB\Gamma} > \widehat{\Delta EZ}$. Igual se procedería en la segunda situación.
Constrúyase en el extremo B del segmento AB el ángulo $\widehat{ABH} = \widehat{\Delta EZ}$. Como $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, por hipótesis, entonces el ángulo restante del primer triángulo es igual al restante del segundo, a saber, $\widehat{AHB} = \widehat{\Delta ZE}$. En definitiva, los triángulos $\widehat{ABH}$ y $\widehat{\Delta EZ}$ son equiángulos y, consecuentemente, sus lados son proporcionales. En particular,

$$\frac{AB}{BH} = \frac{\Delta E}{EZ}$$

Teniendo en cuenta (3.14)

$$\frac{AB}{BH} = \frac{AB}{B\Gamma} \Rightarrow BH = B\Gamma$$

Esto conlleva que $\widehat{\Gamma} = \widehat{BH\Gamma}$, teniendo en cuenta [I.5] ya que $\widehat{BH\Gamma}$ es un triángulo isósceles. Entonces, por hipótesis,

$$\widehat{BH\Gamma} < 1R,$$

lo que implicaría que su ángulo adyacente

$$\widehat{BHA} > 1R,$$

Ahora bien, $\widehat{BHA} = \widehat{Z} < 1R$, lo que constituye una contradicción. Por tanto, $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ y, en consecuencia, los triángulos dados son equiángulos.

Q.E.D

Proposición 3.8 (VI. 8) *Si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al (triángulo) entero entre sí.*

Demostración.

Sea el triángulo rectángulo $\widehat{AB\Gamma}$ y tracemos la altura $A\Delta$ correspondiente al

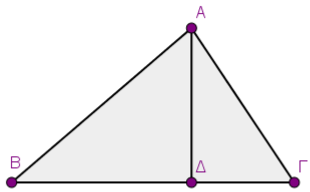


Figura 3.9. Representación gráfica VI.8

ángulo recto $\widehat{A}$.
Comparemos primeramente los triángulos $\widehat{AB\Gamma}$ y $\widehat{AB\Delta}$: tienen un ángulo en común, el $\widehat{AB\Delta}$ y otros dos iguales por ser rectos $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B\Delta A}$. Por tanto, los restantes son también iguales, $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{BA\Delta}$ y los triángulos indicados son equiángulos. En virtud de la Proposición 3.4 son semejantes.
Análogamente, los triángulos $\widehat{A\Delta\Gamma}$ y $\widehat{AB\Gamma}$ tienen un ángulo común, el $\widehat{A\Gamma\Delta}$, y otros dos iguales por ser rectos, $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{BA\Gamma}$. Luego, $\widehat{A\Delta\Gamma}$ y $\widehat{AB\Gamma}$ son semejantes, ya que $\widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{AB\Gamma}$.
Por último, si analizamos los triángulos $\widehat{AB\Delta}$ y $\widehat{A\Gamma\Delta}$, se observa que $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Delta\Gamma}$ por ser rectos y vimos antes que $\widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{AB\Gamma}$. Luego, son igualmente equiángulos y, en consecuencia, semejantes.

Q.E.D.

Nota: 3.3 *Este resultado se conoce como "teorema de la altura", y dice que en un triángulo rectángulo la altura correspondiente a la hipotenusa es la media proporcional de los segmentos que la altura determina sobre ella.*

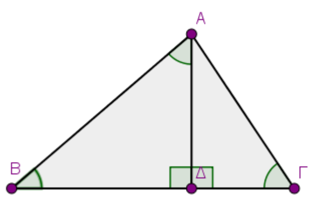


Figura 3.10. Representación gráfica VI.8

Hemos visto que $\widehat{AB\Delta} \sim \widehat{A\Gamma\Delta}$. *Por tanto,*

$$\frac{B\Delta}{A\Delta} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}, \text{ es decir, } B\Delta \cdot \Delta\Gamma = (A\Delta)^2$$

En los Elementos este aserto figura como un porisma a la Proposición 3.8.

Proposición 3.9 (VI. 11) *Dadas dos rectas, hallar una tercera proporcional.*

Demostración.

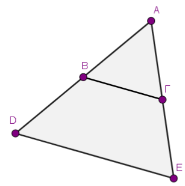


Figura 3.11. Representación gráfica VI.9

Para calcular la tercera proporcional de dos segmentos AB y $A\Gamma$, dibujamos formando cualquier ángulo y los prolongamos. Entonces, a continuación de AB, podemos un segmento $BD = A\Gamma$. Unimos B con Γ, y por D trazamos la paralela DE a $B\Gamma$. Por la Proposición 3.2

$$\frac{AB}{BD} = \frac{A\Gamma}{\Gamma E}$$

Pero $BD = A\Gamma$, por lo que:

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma E}$$

Así hemos construido la tercera proporcional ΓE de los segmentos dados AB y $A\Gamma$

Q.E.D

Proposición 3.10 (VI. 12) *Dadas tres rectas, hallar una cuarta proporcional.*

Proposición 3.11 (VI. 13) *Dadas dos rectas, hallar una media proporcional.*

Nota: 3.4 *Este teorema equivale a calcular raíces cuadradas. Por ejemplo, para calcular $\sqrt{21}$ procederíamos así,*

$$(\Delta B)^2 = 3 \cdot 7 = 21$$

Nota: 3.5 *Cuadrar un rectángulo es siempre posible. ¿Cuál es el cuadrado de área equivalente al rectángulo de lados AB y $B\Gamma$? La respuesta es el cuadrado de lado la media proporcional de los lados del rectángulo.*

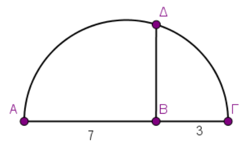


Figura 3.12. Representación gráfica VI.11

$$(l)^2 = (\Delta B)^2 = AB \cdot B\Gamma.$$

Proposición 3.12 (VI. 15) *En los triángulos iguales que tienen un ángulo (de uno) igual a una ángulo (del otro), los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados. Y aquellos triángulos que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro) cuyos lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, son iguales.*

Demostración.

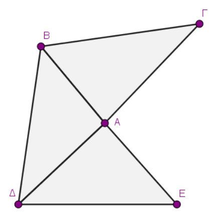


Figura 3.13. Representación gráfica VI.12

Tenemos dos triángulos $\widehat{AB\Gamma}$ y $\widehat{A\Delta E}$ se cumplen las siguientes hipótesis:

(i) $\mathcal{A}(\widehat{AB\Gamma}) = \mathcal{A}(\widehat{A\Delta E})$

(ii) $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Delta AE}$

Veamos que los lados de los ángulos iguales están inversamente relacionados. Coloquemos los triángulos de modo que ΓA está en línea recta con $A\Delta$. Entonces EA está también en línea recta con AB [I.14].
Ahora unimos B con Δ mediante el segmento $B\Delta$. A la vista de (i)

$$\frac{\mathcal{A}(\widehat{AB\Gamma})}{\mathcal{A}(\widehat{BA\Delta})} = \frac{\mathcal{A}(\widehat{A\Delta E})}{\mathcal{A}(\widehat{BA\Delta})} \tag{3.11}$$

Por otra parte, los triángulos que tienen la misma altura están en la misma relación que sus bases, en virtud de la Proposición 3.1. Por tanto,

$$\frac{\mathcal{A}(\widehat{AB\Gamma})}{\mathcal{A}(\widehat{BA\Delta})} = \frac{\Gamma A}{A\Delta}$$

$$\frac{\mathcal{A}(\widehat{A\Delta E})}{\mathcal{A}(\widehat{BA\Delta})} = \frac{AE}{AB}$$

Teniendo en cuenta estos resultados en (3.15), se obtiene

$$\frac{\Gamma A}{A\Delta} = \frac{EA}{AB}$$

lo que muestra que los lados de los ángulos iguales están inversamente relacionados. Observese que

$$\frac{\Gamma A}{A\Delta} = \frac{1}{\frac{AB}{EA}}$$

Fácilmente se establece el recíproco.

Proposición 3.13 (VI. 19) *Los triángulos semejantes guardan entre sí la razón duplicada de sus lados correspondientes.*

Porisma: Si tres segmentos son proporcionales ($\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{EZ}{BH}$) como la primera es a la tercera, así la figura construida sobre la primera es a la figura construida de manera semejante sobre la segunda.

Demostración.

Sigue de la primera parte de (3.20).

Nota: 3.6 *Sean* $\widehat{ABC} \sim \widehat{A'B'C'}$. *Ello equivale a que* $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'}$ *y* $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

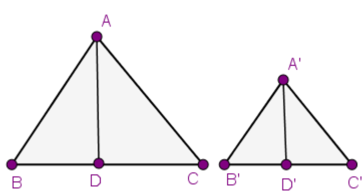


Figura 3.14. Representación gráfica del Porisma VI.13

Nótese que los triángulos $\widehat{ABD} \sim \widehat{A'B'D'}$, *que resultan de trazar sus respectivas* *alturas $h = AD$ y $h' = A'D'$ son semejantes (tienen $\widehat{B} = \widehat{B'}$, por hipótesis, y $\widehat{ADB} = \widehat{A'D'B'}$ por ser rectos); luego,*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{h}{h'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Si S denota el área de $\widehat{ABC}$ y S' la de $\widehat{A'B'C'}$, se tiene

$$\frac{S}{S'} = \frac{(\frac{BC \cdot h}{2})}{(\frac{B'C' \cdot h'}{2})} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{h}{h'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{BC}{B'C'}$$

En el anterior porisma de habla de "figuras" cuando realmente sólo se ha verificado para triángulos. Para "figuras rectilíneas" en general, es decir, para polígonos se enuncia el siguiente resultado, que no se probará (basta tener presente que un polígono se descompone en triángulos y aplicar la proposición anterior).

Proposición 3.14 (VI. 20) *Los polígonos semejantes se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos a los (polígonos) enteros y un polígono guarda con el otro una razón duplicada de la que guarda el lado correspondiente con el lado correspondiente.*

Ahora el porisma asociado a la Proposición 3.13 tiene sentido para figuras rectilíneas más generales: cuadriláteros, pentágonos,...

Proposición 3.15 (VI. 31) *Generalización del teorema de Pitágoras*
En los triángulos rectángulos, la figura (construida) a partir del lado que subtiene el ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.

Demostración.

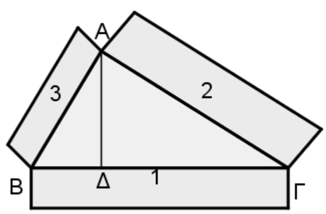


Figura 3.15. Representación gráfica VI.15

En el triángulo rectángulo $\widehat{AB\Gamma}$ construimos sobre la hipotenusa $B\Gamma$ la figura 1 y sobre los catetos $A\Gamma$ y AB las figuras 2 y 3, respectivamente, semejantes entre sí. Tracemos la altura $A\Delta$ correspondiente a la hipotenusa. Por la Proposición 3.8

$$\widehat{AB\Delta} \sim \widehat{A\Gamma\Delta} \sim \widehat{AB\Gamma}$$

De $\widehat{AB\Delta} \sim \widehat{AB\Gamma}$ se tiene que

$$\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{AB}{B\Delta} \tag{3.12}$$

Tenemos tres segmentos $B\Gamma$, AB y $B\Delta$ que satisfacen la proporcionalidad (3.21). Entonces, por el porisma de las Proposiciones 3.11 y 3.14,

$$\frac{\mathcal{A}(1)}{\mathcal{A}(2)} = \frac{B\Gamma}{B\Delta} \tag{3.13}$$

Análogamente, del hecho de que $\widehat{A\Gamma\Delta} \sim \widehat{AB\Gamma}$, se infiere

$$\frac{\mathcal{A}(1)}{\mathcal{A}(3)} = \frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma} \tag{3.14}$$

Por propiedades de las razones, se deduce de (3.22) y de (3.23) que

$$\frac{B\Gamma}{B\Delta + \Delta\Gamma} = \frac{\mathcal{A}(1)}{\mathcal{A}(2) + \mathcal{A}(3)}$$

Pero $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma$, lo que entraña que

$$\mathcal{A}(1) = \mathcal{A}(2) + \mathcal{A}(3)$$

Q.E.D.

3.4. Propuestas para llevar al aula

3.4.1. Criterios semejanza de triángulos

Todos los criterios de semejanza de triángulos que conoce cualquier alumno de bachillerato están explicados en este libro de Euclides:

Criterio 3.4.1.1 *Criterio ángulo-ángulo (Criterio AA).*
Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.

Si tienen dos ángulos iguales, los restantes también son iguales. Por tanto, los triángulos equiángulos y el criterio está en la Proposición 3.4.

Criterio 3.4.1.2 *Criterio lado-ángulo-lado (Criterio LAL).*
Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales e iguales los ángulos comprendidos entre ellos.

Es la Proposición 3.6.

Criterio 3.4.1.3 *Criterio lado-lado-lado (Criterio LLL).*
Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados respectivamente proporcionales.

Véase en la Proposición 3.5.

Criterio 3.4.1.4 *Criterio ángulo-lado-lado (Criterio ALL).*
Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados de los otros ángulos son proporcionales.

Se remite a la Proposición 3.7.

3.4.2. Una aplicación del teorema de la bisectriz (Proposición 3.3)

Los alumnos de enseñanza secundaria conocen las razones trigonométricas de los ángulos $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$sen\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

¿Es posible conocer los de otros ángulos, por ejemplo; $24°, 36°, 3°, \ldots$ de una forma elemental? En la [IV.10] Euclides construye un triángulo isósceles con la siguiente propiedad: los ángulos iguales (de la base) son el doble del restante. En nuestro lenguaje, este triángulo tiene los ángulos iguales de $72°$ y el tercero mide $36°$. Supongamos que los lados iguales miden 1 unidad de longitud.

Estos triángulos tienen una curiosa propiedad: si se traza la bisectriz a uno de los ángulos iguales, se obtienen dos triángulos isósceles, el triángulo $\widehat{ABD}$ con dos ángulos iguales de $72°$, y el $\widehat{BCD}$ con dos ángulos iguales de $36°$. Si ponemos $AD = x$, entonces $DC = 1 - x$. Y, por ser isósceles, $BD = 1 - x$, $AB = 1 - x$. Si aplicamos el teorema de la bisectriz (Proposición 3.3) se llega a que

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

esto es,

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1}$$

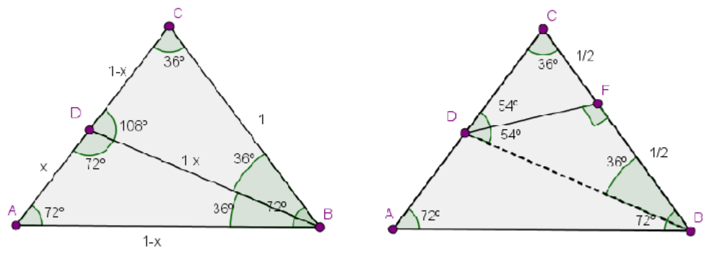


Figura 3.16. Representación gráfica 3.4.2

expresión que origina la ecuación de segundo grado $x^2-3x+1=0$, cuya solución válida es

$$AD = x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Entonces $DC = 1 - x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Si trazamos la bisectriz del ángulo de 108°, resulta que los triángulos $\widehat{CDE}$ y $\widehat{BDE}$ son rectángulos, ya que

$$\widehat{DEC} = \widehat{DEB} = 180° - (36° + 54°) = 90°$$

Además, como $\widehat{BCD}$ es isósceles, DE es la altura de la base y $BE = EC = \dfrac{1}{2}$. Entonces,

$$DE = \sqrt{(DC^2)-(CE^2)} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{2}}$$

Por tanto, en el triángulo rectángulo $\widehat{CDE}$,

$$sen54° = \frac{CE}{CD} = \frac{1/2}{(\sqrt{5}-1)/2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$cos54° = \frac{DE}{CD} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$sen36° = \frac{DE}{CD} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$cos36° = sen54° = \tfrac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Utilizando las fórmulas del ángulo mitad, se pueden obtener

$$sen18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad cos18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$sen27^\circ = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{4}, \quad cos27^\circ = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{4}$$

$$sen9^\circ = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}, \quad cos9^\circ = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

Puesto que $54^\circ - 30^\circ = 24^\circ$, a partir del seno y coseno de la diferencia de ángulos conocidos, podemos calcular las razones trigonométricas del 24° y, por los del ángulo mitad, de 12°, 6° y 3°. También los de 21°, 33°, 39° y 42°, ya que $21^\circ = 36^\circ - 15^\circ$, $33^\circ = 36^\circ - 3^\circ$, $39^\circ = 54^\circ - 15^\circ$ y $42^\circ = 60^\circ - 18^\circ$.

3.4.3. Generalización del teorema de Pitágoras

La Proposición 3.15 constituye una generalización del teorema de Pitágoras. En su enunciado Euclides es ambiguo, pues dice que la "figura" construida sobre la hipotenusa es igual a las "figuras semejantes" construidas "de manera semejante" sobre los catetos. En realidad se refiere a figuras rectilíneas, más en concreto, polígonos cualesquiera. Sin embargo, la ambigüedad que muestra está justificada. En efecto, si construimos sobre los lados de un triángulo rectángulo semicírculo de diámetros dichos lados, se tiene

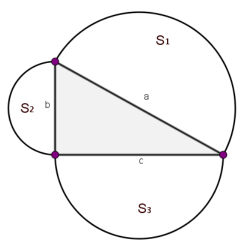


Figura 3.17. Representación gráfica 3.4.3

$$S_1 = \pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi a^2}{4}$$
$$S_2 = \frac{\pi b^2}{4}$$
$$S_3 = \frac{\pi c^2}{4}$$

Entonces, teniendo en cuenta que $a^2 = b^2 + c^2$, se deduce que

$$S_2 + S_3 = \frac{\pi}{4}(b^2 + c^2) = \frac{\pi a^2}{4} = S_1.$$

En este caso vale el teorema de Pitágoras y es obvio que las semicircunferencias no son figuras rectilíneas.
Si construimos semielipses de ejes $2a, 2b; 2a', 2b', 2a'', 2b''$, cumpliendo

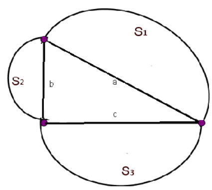


Figura 3.18. Representación gráfica 3.4.3

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''} = k,$$

se tiene

$$S = \frac{\pi ab}{2} = \frac{\pi k a^2}{2}$$
$$S' = \frac{\pi a' b'}{2} = \frac{\pi k a'^2}{2}$$
$$S' = \frac{\pi a'' b''}{2} = \frac{\pi k a''^2}{2}$$

Téngase en cuenta, por Pitágoras, que $(2a)^2 = (2a')^2 + (2a'')^2$, esto es, $a^2 = a'^2 + a''^2$.

Entonces, $S' + S'' = \frac{\pi k}{2}(a'^2 + a''^2) = \frac{\pi k}{2} a^2 = S$, y también se cumple para estas figuras no rectilíneas.

NOTA: No hubiera estado mal, es más, parecería bastante instructivo que en enseñanza secundaria, nos hubiesen al menos advertido de que el teorema de Pitágoras era válido, no sólo cuando se construían cuadrados, sino también por ejemplo, rectángulos semejantes, hexágonos semejantes,... No conocemos ningún teorema para figuras más generales.

Bibliografía

[1] EUCLIDES. *Elementos*, Libros I-IV,Editorial Gredos, Madrid, 1991.

[2] EUCLIDES. *Elementos,* Libros V-IX, Editorial Gredos, Madrid, 1991.

[3] THOMAS HEATH. *A History of Greek Mathematics.* volume I, From Thales to Euclid, Dover, N.Y., 1981

[4] M. KLINE. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días,* Alianza Editorial, Madrid, 2012

[5] A. MARTINÓN. *La teoría de las proporciones en los Elementos de Euclides.*

[6] A. MILLÁN GASCA, EUCLIDES. *La fuerza del razonamiento matemático.* Colección la matemática en sus personajes, Madrid, 2004

[7] J. R. NEWMAN. *El mundo de las matemáticas,* Sigma, Ediciones GRijalbo, Barcelona, 1976

[8] J. PLA I CARRERAS. *Euclides, la geometría. Las matemáticas presumen de figuras.* Grandes ideas de la ciencia, RBA, Madrid, 2012

[9] J. REY PASTOR Y J. BABINI. *Historia de las matemáticas.* Gedisa Editorial, Barcelona, 1984

[10] THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE. Página web de la Universidad de Saint Andrews (Escocia - R.U.) http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/

The Euclid Elements Books V-VI

Melanie Hernández Alonso
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
`alu0100768176@ull.edu.es`

Abstract

In this Project, Books V and VI of the Elements are analysed in detail. One of the most important aspects of Book V is the meticulosity and rigor of its 18 definitions, some of them extremely abstract. It concerns the ratio of magnitudes and proportions with the aim to explain the existence of incommensurable segments discovered by Pythagoras. In book VI the theory developed early is applied to study the similarity of rectilinear figures, particularly, triangles. We underline the bisectrix theorem and the generalization of the Pythagoras theorem.

1. Introduction

The objective of this work is the detailed study of books V and VI of Euclid's *Elements*. It consists of three chapters. The first is actually a small biography of the character - very little is known of him - and his works.
Chapter 2 is devoted to the book V, considered one of the most important and the most elaborate of the Euclidean, being constituted by 18 definitions and 25 propositions. It focuses on the rigor and precision of the set of definitions, some very abstract. The definitions V.5 and V.7, in the opinion of many experts, constitute an introduction of real numbers, perfectly comparable to the most modern theories. We begin by analyzing the eighteen definitions one by one, using - if necessary - examples to clarify them. Then, of the twenty-five propositions, we select and show seventeen. We conclude this chapter by relating Euclid's theory to real numbers.
Chapter 3 focuses on Book VI, consisting of three definitions and 33 propositions. It applies the theory of the proportions of Book V to flat geometry. After commenting on the definitions, fifteen propositions are chosen and demonstrated. It establishes the fundamental results of the similarity of triangles, which are extended in some cases to more general rectilinear figures, such as polygons. We also present the construction of the third, fourth and proportional mean, relating the latter to the geometric solution of the second degree equations. We mention the bisector's theorem and the generalization of the Pythagorean theorem.
Finishing the chapter exposing some results for their educational and formative interest, and appropriate to be discussed in the classroom: the criteria of similarity of triangles, an interesting application of the theorem of the bisector and the generalization of the theorem of Pythagoras.
The spirit and essence of Euclid's proofs are preserved as much as possible, but sometimes resorting to notations and a more current formulation.

2. The personality and his work

Euclid of Alexandria (Egypt) is most famous mathematician of antiquity, the autor *Elements*. But little is knowing of his life, except he laught in Alexandria around 300 B.C. He probably received his mathematical training in Athens (Greece) from the pupils of Plato. The *Elements* are a compilation of the mathematical knowledge of the that period. Euclid organizes all the material and its exposition, introducing new demostrations. But he makes also some outstanding personal contributions. In opinion of the specialists in History of Mathematics. The axiomatic method used by Euclid is, without a doubt, the origin of the "pure mathematics". Euclid wrote at least a dozen works, but the most important are the *Elements*. His work of data consists of 94 propositions explaining magnitudes, sizes, shapes and positions of the geometric figures.
The relevant elements is that all mathematical knowledge generated by the Greeks appears for the first time presented as a formal axiomatic deductive system.

3. Book V

Definition 4: Magnitudes are said to have a ratio to one anothee which can, when multiplied, exceed one another.
Definition 5: Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever are taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order.
Definition 7: When, of the euimultiples, the multiple of the first magnitude exceeds the multiple of the second, but the multiple of the third does not exceed the multiple of the fourth, then the first is said to have a greater ratio to the second than the third has to the fourth.
This definition is very interesting, and establishes an order between the magnitude ratios. The magnitudes a, b, c, d. Suppose there are integers m and n (which give us equimultiplicity) so that;

$$ma > nb \text{ but } mc < nd.$$

So what

$$\frac{a}{b} > \frac{n}{m} > \frac{c}{d},$$

i.e.,

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d},$$

There exists the fraction $\frac{n}{m}$ that separates the two ratios.

4. Book VI

Proposition 3: If an angle of a triangle is bisected by a straight line cutting the base, then the segments of the base have the same ratio as the remaining sides of the triangle; and, if segments of the base have the same ratio as the remaining sides of the triangle, then the straight line joining the vertex to the point of section bisects the angle of the triangle.
This proposition is known as the bisector's theorem: the bisector of the angle of a triangle divides the opposite side into segments proportional to the sides that define the angle considered
Proposition 31: In right-angled triangles the figure on the side opposite the right angle equals the sum of the similar and similarly described figures on the sides containing the right angle.

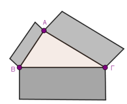


Figure 1: *Generalized Pythagoras theorem*

References

[1] EUCLIDES. *Elementos*, Libros I-IV,Editorial Gredos, Madrid, 1991.
[2] EUCLIDES. *Elementos,* Libros V-IX, Editorial Gredos, Madrid, 1991.