Universidad de La Laguna

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS | FACULTAD DE CIENCIAS

Nadia Chinea Chinea

El problema del subespacio invariante

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2017

Dirigido por

Teresa de Jesús Bermúdez de León

Teresa de Jesús Bermúdez de León
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Gracias a mi tutora, Teresa de Jesús Bermúdez de León por su dedicación, tiempo y esfuerzo en la realización de este trabajo.
A mi familia por el apoyo incondicional y sus palabras de ánimo. En especial, a mi hermana Lucía.
A mis amigos y compañeros por la ayuda y los buenos momentos.

Resumen · Abstract

Resumen

Dentro de la teoría de operadores, el concepto de subespacio invariante es fundamental. Dado un operador lineal y continuo T definido en un espacio X, se dice que M es un subespacio T-invariante si $T(M) \subseteq M$.
En este trabajo proporcionaremos las herramientas necesarias para comprender el problema del subespacio invariante, ya resuelto en espacios de Banach (de forma negativa) y aún abierto en espacio de Hilbert enunciado de la siguiente manera: ¿Todo operador lineal y continuo definido en un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita tiene un subespacio invariante no trivial?
A lo largo de esta memoria estudiaremos aspectos básicos sobre espacios de Banach y de Hilbert. Seguido de algunas propiedades necesarias de los operadores entre dichos espacios. A continuación, se estudiará el problema del subespacio invariante. Posteriormente, se proporcionarán algunos ejemplos en espacios finitos e infinitos dimensionales en base a la teoría previa. Y finalmente, se resumirá el progreso de este de manera cronológica.

Palabras clave: *Espacio de Banach – Espacio de Hilbert – Espacios separables – Operadores acotados – Subespacio invariante – Subconjunto invariante – Espectro – Operador compacto – Operador de rango finito – Vector cíclico.*

Abstract

In operator theory, the concept of invariant subspace is very important. Let T be a linear operator on X. A subset M of X is called T-invariant if $T(M) \subseteq M$.
The aim of this work is to provide the necessary tools to understand the problem of the invariant subspaces, already solved for Banach spaces (in a negative way) but not for Hilbert spaces, which is stated as follows:
Does every bounded linear operator T on an infinite-dimensional separable Hilbert space, has a non-trivial closed invariant subspace?
Throughout this work we will study basic aspects of Banach and Hilbert spaces. In addition, we will study some necessary properties of the operators between these spaces. Then, we will study the invariant subspace problem. Subsequently, some examples will be provided in finite and infinite dimensional spaces based on the previous theory. We conclude with the progress of the problem solutions will be summarized chronologically.

Keywords: *Banach space – Hilbert space – Separable Space – Bounded operator – Invariant subspace – Invariant subset – Spectrum – Compact operator – Finite-rank operator – Cyclic Vectors.*

Índice general

Introducción

La primera referencia conocida del problema del subespacio invariante es de John von Neumann en 1935, en un trabajo no publicado.
Pero, ¿qué dice el problema del subespacio invariante? Dado un operador lineal y continuo T definido en un espacio X, se dice que un subespacio M de X es T-invariante si $T(M) \subseteq M$.
El problema plantea la posibilidad de que todo operador lineal y continuo tiene un subespacio no trivial que cumpla ser invariante, es decir un subespacio invariante distinto del vacío y del total.
El problema del subespacio invariante está planteado también para subconjuntos, de la siguiente manera: Dado un operador lineal y continuo T definido en un espacio X, ¿existe siempre un subconjunto cerrado M de X tal que $T(M) \subseteq M$?
Sin embargo, en este trabajo nos centraremos en el problema del subespacio invariante.
Durante los últimos 90 años con el fin de resolver el problema del subespacio invariante, se han dado grandes avances dentro de la teoría de operadores.
El primer ejemplo negativo a este problema fue dado en la década de los 80, generando una gran controversia dentro de la comunidad matemática, debido al enfrentamiento entre dos de los autores que se atribuían el mérito de haber resuelto el problema en espacio de Banach (P. Enflo, C. Read). Dichos autores dan ejemplos de operadores lineales continuos definidos en espacios de Banach tal que los únicos subespacios invariantes son los triviales.
El problema del subespacio invariante es un problema general en teoría de operadores. Otro problema relacionado es: fijado un operador concreto definido en un espacio de Banach, encontrar todos los subespacios invariantes que tiene dicho operador. Este problema, puede resultar muy duro, incluso con ejemplos aparentemente sencillos.
Actualmente, el problema sigue abierto enunciado de la siguiente forma: Sea T un operador lineal y acotado definido en un espacio de Hilbert separable infinito

dimensional. ¿T tiene un subespacio invariante cerrado no trivial?

El trabajo está estructurado en cinco capítulos. Los dos primeros capítulos son introductorios de las herramientas necesarias para el desarrollo del resto de capítulos. En el primer capítulo sobre espacios de Banach y de Hilbert y en el segundo, se presentan algunas nociones básicas sobre operadores lineales y continuos, centrándonos en exponer algunas propiedades espectrales.
En el capítulo 3, se estudia el problema del subespacio invariante tanto en espacios finito dimensionales como en espacios infinito dimensionales. En particular, se introduce la noción de vector cíclico y su relación con el problema.
El capítulo 5, está dedicado a presentar algunos ejemplos tanto en espacios finito dimensionales como infinito dimensionales. Finalmente, en el último capítulo se comentará la historia del problema, toda la polémica que lo rodea y el estado actual.

La primera parte de esta memoria, en concreto los dos primeros capítulos, está basado principalmente en el libro [1]. Por otro lado, el capítulo 3 se fundamenta en la tesis [2]. El capítulo 4, es una recopilación de varias páginas de internet. Y finalmente, el último capítulo se ha obtenido principalmente a partir de las referencias [5] y [6].

1

Espacios de Banach y Hilbert

En este apartado nos centraremos en el estudio de algunos resultados y definiciones necesarios de espacios de Banach y Hilbert.

1.1. Espacios de Banach

Definición 1.1.1 *Se llama espacio métrico a todo par* (X, d)*, donde* X *es un conjunto arbitrario no vacío y* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una aplicación, llamada* distancia o métrica*, tal que, para cualesquiera* $x, y, z \in X$*, se verifica:*

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Ejemplo 1.1.1 *Sea* p *un número primo fijo. Se define el valor* p*-ádico de* $x \in \mathbb{Q}$ *como:*

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-v_p(x)} & si\ x \neq 0 \\ \\ 0 & si\ x = 0, \end{cases}$$

donde $x = p^{-v_p(x)}\dfrac{a}{b}$ *verificando que* p *no divide ni* a*, ni* b*. De este modo se define la métrica* $d(x, y) = |x-y|_p$*. Trivialmente,* $(\mathbb{Q}, d)$ *cumple las tres primeras propiedades. Para probar la cuarta propiedad, tenemos que ver que :*

$$|x - y|_p \leq |x - z|_p + |z - y|_p,$$

para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$*.*
Probaremos que $v_p(x + y) \geq min\{v_p(x), v_p(y)\}$*. Para eso, supongamos que* x

e y son no nulos (si alguno de ellos lo fuera, se da la igualdad trivialmente). Entonces, podemos escribir:

$$x = p^r \frac{a}{b} \quad e \quad y = p^s \frac{c}{d},$$

con $r, s, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y siendo a, b, c, d no divisibles por p.
Suponemos sin perdida de generalidad que $s \geq r$, esto es, $t = s - r \geq 0$. Entonces

$$x + y = p^r \left(\frac{a}{b} + p^t \frac{c}{d} \right) = p^r \left(\frac{ad + p^t bc}{bd} \right).$$

De donde se deduce que $v_p(x+y) \geq \text{mín}\{v_p(x), v_p(y)\}$. Es claro que:

$$-v_p(x+y) \leq -\text{mín}\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

Luego,

$$p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-\text{mín}\{v_p(x), v_p(y)\}}.$$

Entonces,

$$|x+y|_p \leq p^{-v_p(x)} = |x|_p \qquad o \qquad |x+y|_p \leq p^{-v_p(y)} = |y|_p.$$

Por lo tanto:

$$|x+y|_p \leq \text{máx}\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta lo que acabamos de probar nos fijamos en que:

$$|x-y|_p = |(x-z)+(z-y)|_p \leq \text{máx}\{|x-z|_p, |z-y|_p\} \leq |x-z|_p + |z-y|_p.$$

$\square$

Definición 1.1.2 *Sea (X, d) espacio métrico. Se dice que:*

- *Un subconjunto M de X es denso si su clausura es igual al total, es decir $\overline{M} = X$.*
- *X es separable si posee algún subconjunto numerable que sea denso en X.*

Ejemplo 1.1.2 *Es claro que $\mathbb{R}$ es separable ya que $\mathbb{Q}$ es numerable y $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*

Se define

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tal que } x_n \in \mathbb{C} \text{ y } (x_n) \text{ es una sucesión acotada }\}$$

y la distancia infinito como

$$d_\infty(x, y) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Ejemplo 1.1.3 *El espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ con la distancia infinito no es separable. Supongamos que existe un subconjunto numerable M tal que $\overline{M} = \ell^\infty(\mathbb{N})$. Como M es numerable, podemos definir M como*

$$M := \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}.$$

Cada elemento de M es una sucesión, es decir

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_1(1), x_1(2), ...) \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \\ x_2 &= (x_2(1), x_2(2), ...) \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \\ &\;\;... \\ x_k &= (x_k(1), x_k(2), ...) \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \\ &\;\;... \end{aligned}$$

Definimos $x := (x(1), x(2), x(3), ...)$ de la siguiente forma:

$$x(k) := \begin{cases} x_k(k) + 1 & si \quad |x_k(k)| \leq 1 \\ \\ 0 & si \quad |x_k(k)| > 1. \end{cases}$$

Por tanto, es claro que $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ y se verifica que:

$$d_\infty(x_k, x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_k(n) - x(n)| \geq |x_k(k) - x(k)| = \begin{cases} 1 & si \quad |x_k(k)| \leq 1 \\ \\ |x_k(k)| & si \quad |x_k(k)| > 1. \end{cases}$$

Con lo que $d_\infty(x_k, x) \geq 1$ y por tanto $x \notin \overline{M}$. Luego, $\overline{M} \neq \ell^\infty(\mathbb{N})$.

□

A continuación, se comentan la definición de sucesión de Cauchy y la de completitud en espacios métricos.

Definición 1.1.3 *Sea (X, d) espacio métrico. Se dice que*

a) una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy cuando

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n, m > n_0.$$

b) es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un elemento del espacio.

Es claro que toda sucesión convergente es de Cauchy. En general, el recíproco no es cierto.

Se definen los espacios

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tal que } x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

para $1 \leq p < \infty$ con

$$d_p(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p.$$

Los espacios métricos $(\ell^p(\mathbb{N}), d_p)$ son completos.

□

Definición 1.1.4 *Un espacio normado es un par* $(X, \|\cdot\|)$ *formado por un espacio vectorial* X *y una aplicación* $\|\cdot\| :\longrightarrow \mathbb{R}$*, llamada norma que verifica las siguientes propiedades para todo* x*,* $y \in X$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$ *(siendo* $\mathbb{K}$ *el cuerpo donde* X *es espacio vectorial).*

(i) $\|x\| \geq 0$
(ii) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
(iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición 1.1.5 *Sea* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio vectorial normado, en el que se define la métrica* $d(x,y) := \|x-y\|$*. Si* (X,d) *es un espacio métrico completo, se dice que* X *es un espacio de Banach.*

Ejemplo 1.1.4 *El espacio* $C[a,b]$ *de las funciones continuas reales definidas en [a,b], con la norma*

$$\|f\| := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

no es un espacio de Banach.
Consideramos la sucesión de funciones continuas

$$f_n : [a,b] \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$$

definida por

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & si\ x \in [a, \frac{a+b}{2} - \frac{1}{n}] \\ \frac{n}{2}x - n\frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} & si\ x \in [\frac{a+b}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1 & si\ x \in [\frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}, b]. \end{cases}$$

Fijemos $\varepsilon > 0$ *y sea* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$.
Supongamos que $m > n \geq n_0$, *entonces* $\frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon^2$.

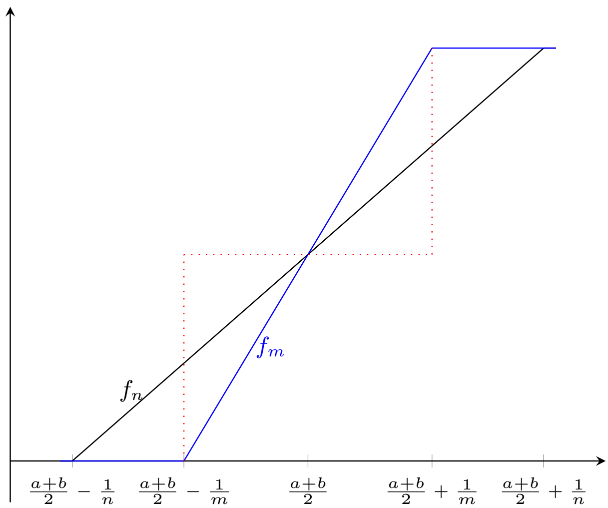

Figura 1.1. Representación de las funciones f_n y f_m, con $m > n$.

Es claro que:

$$
\begin{aligned}
\|f_m - f_n\|^2 &= \int_{\frac{a+b}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \\
&= \int_{\frac{a+b}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{a+b}{2}-\frac{1}{m}} |f_n(x) - 0|^2 dx + \int_{\frac{a+b}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{a+b}{2}} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \\
&+ \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{1}{m}} |f_m(x) - f_n(x)|^2 dx + \int_{\frac{a+b}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{1}{n}} |1 - f_n(x)|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{m} - \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} + \frac{1}{m}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{m} - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{n} - \frac{a+b}{2} - \frac{1}{m}\right) \\
&\leq \frac{1}{n} < \epsilon^2 \Rightarrow d(f_m, f_n) < \epsilon
\end{aligned}
$$

Luego, (f_n) *es una sucesión de Cauchy en* $(C[a,b], ||\cdot||)$.

Suponemos que (f_n) *converge a* $f \in C[a,b]$ *con la norma* $||\cdot||$.

Vamos a suponer que esta función es distinta de 0 *en un* $x_0 \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right)$. *Como se trata de una función continua*

$$\exists\ \delta > 0 \text{ tal que } x_0 + \delta < \frac{a+b}{2} \quad y \quad |f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}, \ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Teniendo en cuenta que existe n_0 *tal que* $\forall n > n_0$ *se tiene que* $f_n(x) = 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. *Se tendrá que:*

$$||f_n - f||^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f_n(x) - f(x)|^2 dx$$

$$= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|^2 dx > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{|f(x_0)|^2}{4} dx$$

$$= \frac{|f(x_0)|^2 2\delta}{4} = \frac{|f(x_0)|^2 \delta}{2}.$$

Pero esto es absurdo pues supusimos que $||f_n(x) - f(x)|| \longrightarrow 0$. *Por lo tanto, se cumple que* $f(x) = 0$, $\forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right)$.

Análogamente, se prueba que $f(x) = 1$ *para todo* $x \in (\frac{a+b}{2}, b]$. *Lo que nos conduce a una contradicción con la continuidad de* f *en el punto* $\frac{a+b}{2}$.

□

1.2. Espacios de Hilbert

A continuación desarrollaremos algunos resultados básicos acerca de los espacios de Hilbert, que no son mas que un tipo de espacios de Banach con propiedades especiales.

Definición 1.2.1 *Se llamará espacio pre-Hilbert, o espacio producto interior, a un espacio vectorial* X *en el que se define una aplicación* $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow E$ *que cumple las propiedades siguientes para todo* x, y, $z \in X$ *y* $\alpha \in E$.

(a) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

(b) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

(c) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$*;*

(d) $\langle x, x\rangle \geq 0$*;*

(e) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$*.*

En particular, un espacio X *pre-Hilbert es normado con la norma definida por*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Cuando X *con esta norma es un espacio completo se dice que* X *es un espacio de Hilbert.*

A continuación, presentamos resultados que nos permiten definir el producto interior.

Proposición 1.2.1 (Identidad del paralelogramo) *Si* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio pre-Hilbert, la norma asociada verifica*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

Proposición 1.2.2 (Identidad de polarización) *Sea* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio pre-Hilbert cualquiera:*

a) *Si* X *es real, entonces*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[||x+y||^2 - ||x-y||^2\right].$$

b) *Si* X *es complejo, se tiene que*

$$Re\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[||x+y||^2 - ||x-y||^2\right]$$

$$Im\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[||x+iy||^2 - ||x-iy||^2\right].$$

Proposición 1.2.3 *Sea* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado que verifica la ley del paralelogramo. Entonces, existe un producto interior* $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \longrightarrow E$ *con* $E = \mathbb{R}$ *o* $E = \mathbb{C}$ *tal que* $||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$*.*

Ejemplo 1.2.1 *Los espacios* $\ell^p(\mathbb{N})$ *con* $p \neq 2$ *no es un espacio de Hilbert. Esto es así puesto que si elegimos*

$$x = (1, 1, 0, 0, 0, \ldots), \quad y = (-1, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

entonces $||x||_p = ||y||_p = 2^{\frac{1}{p}}$ *y* $||x+y||_p = ||(0, 2, 0, \ldots)||_p = ||(2, 0, \ldots)||_p = ||x-y||_p = 2$.
Pero entonces,

$$||x+y||_p^2 + ||x-y||_p^2 = 8 \neq 2\cdot(||x||_p^2 + ||y||_p^2) = 2\cdot(2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}}) = 4\cdot 2^{\frac{2}{p}}$$

Por lo tanto, no cumple la ley del paralelogramo. □

2

Introducción a la teoría de operadores

En este capítulo estudiaremos un ingrediente fundamental de este trabajo *los operadores lineales y continuos* entre espacios de Banach o de Hilbert. Presentaremos ejemplos y primeros resultados sobre dichos operadores. Además se mostrarán algunos resultados sobre la teoría espectral.

2.1. Operadores acotados

Definición 2.1.1 *Dados dos espacios normados* $(X, ||\cdot||_1)$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ *y* $A : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal, se dirá que* A *es acotado si existe* $k > 0$ *tal que*

$$\|Ax\|_2 \leq k\|x\|_1$$

para todo $x \in X$.

Sea $A : X \longrightarrow Y$ *operador lineal y acotado, se llamará norma de* A *a:*

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_1 \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}.$$

Lema 2.1.1 *Equivalentemente se puede expresar la norma de un operador lineal y acotado* A *como:*

(a) $||A|| = \text{ínf}\, K$*, donde* $K := \{k \in \mathbb{R} : ||Ax||_2 \leq k||x||_1, \forall x \in X\}$.

(b) $||A|| = \sup\limits_{||x||_1 \leq 1} ||Ax||_2$.

(c) $||A|| = \sup\limits_{||x||_1 = 1} ||Ax||_2$.

En general, dado un operador lineal y acotado no suele ser sencillo calcular su norma. A continuación, se presenta un ejemplo de un operador lineal acotado con norma 1.

Ejemplo 2.1.1 *Dado el operador* $A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ *con* $Ax(t) = t^2x(0)$. *Es claro que* A *es un operador lineal. Vamos a ver que está acotado.*
Sea $x \in C[0,1]$ *tal que* $||x|| \leq 1$. *Entonces:*

$$||Ax|| = \max_{t\in[0,1]} |Ax(t)| = \max_{t\in[0,1]} |t^2x(0)| \leq |x(0)| \leq ||x(t)||.$$

De hecho, la norma del operador A *es 1, dado que existe una función* $x \in C[0,1]$ *con* $||x|| = 1$ *tal que* $||Ax|| = 1$. *Para ello, tomamos la función constante* $x(t) = 1$. *Entonces*

$$Ax(t) = t^2x(0) \Rightarrow ||Ax(t)|| = \max_{t\in[0,1]} |t^2| = 1.$$

□

Se denota

$$L(X,Y) := \{A : X \longrightarrow Y \text{ tal que } A \text{ lineal y acotado}\}.$$

El espacio $L(X,Y)$ es un espacio vectorial normado con la norma definida anteriormente. Además, se tiene que si Y es un espacio de Banach, entonces $L(X,Y)$ es un espacio de Banach. En el caso de que Y sea el cuerpo $\mathbb{K}$ donde X es un espacio normado, lo denotamos por $X^* = L(X,\mathbb{K})$. Por otra parte, si el espacio $Y = X$ lo denotaremos simplemente por $L(X)$.
A continuación daremos dos ejemplos de operadores lineales no acotados.

Ejemplo 2.1.2 *Sea*

$$X := \{p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ tal que } p \textit{ es un polinomio}\}$$

con la norma

$$||p|| = \max_{t\in[0,1]} |p(t)|.$$

Definimos el operador $T : X \longrightarrow X$ *como* $Tp(t) = p'(t)$. *Es claro que* T *es un operador lineal por ser la derivada lineal.*
Sea la función $p_n(t) = t^n$, *vemos que* $||p_n(t)|| = 1$, $||Tp_n(t)|| = n$ *para* $n \in \mathbb{N}$. *Por lo tanto, el operador no está acotado.* □

Ejemplo 2.1.3 *Sea* $X = \mathbb{C}^\infty[(0,1)]$ *el espacio de todas las funciones que tienen derivadas continuas de cualquier orden.*
Definimos el operador lineal $T : X \longrightarrow X$ *como* $Tf = f'$. *Elegimos ahora una función* $f(x) = e^{\lambda x}$ *para cualquier* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Vemos que satisface* $Tf(x) = \lambda f(x)$ *pero*

$$\frac{||Tf(x)||}{||f(x)||} = |\lambda|$$

con λ *arbitrario, por lo tanto no está acotado.* □

2.2. Teoría espectral

La teoría espectral proporciona una herramienta para entender y manejar los operadores lineales. En el presente apartado se definirán conceptos básicos sobre esta teoría. Además, veremos que el espectro de un operador lineal solo está formado por autovalores cuando el espacio es finito dimensional. En cambio, no ocurrirá lo mismo en espacios de dimensión infinita.

2.2.1. Espectro y resolvente

Definición 2.2.1 *Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, si existe $R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1}$ como operador acotado en un subconjunto denso de X, se llamará punto regular al valor λ y a $R_\lambda(A)$ se le denomina operador resolvente.*
Definimos el conjunto resolvente como:

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \text{ operador acotado en un subconjunto denso de } X \right\}.$$

Definición 2.2.2 *El conjunto de puntos no regulares de A, llamados puntos espectrales, se le conoce como espectro de A y se denota por:*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Los puntos del espectro se clasificarán en tres tipos:

- *Espectro puntual de A, $\sigma_p(A)$: conjunto de puntos $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que el núcleo de $T - \lambda I$ es no trivial. Denotamos por*

$$N(T - \lambda I) := \{x \in X \quad : \quad (T - \lambda I)x = 0\}.$$

- *Espectro continuo de A, $\sigma_c(A)$: conjunto de puntos $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que el rango de $A-\lambda I$, $R(A-\lambda I)$ es denso en X y existe $(A-\lambda I)^{-1}$ pero no está acotado.*
- *Espectro residual de A, $\sigma_r(A)$: conjunto de puntos $\lambda \in \mathbb{C}$, tales que existe $(A - \lambda I)^{-1}$ definido en un conjunto no denso de X.*

Se podrá decir entonces que:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

A los $\lambda \in \sigma_p(A)$ se les denomina *autovalores* y a todo $x \in X \setminus \{0\}$ tales que $(A - \lambda)x = 0$ se denomina *autovectores asociados al autovalor* λ .
Se puede afirmar que en un espacio de dimensión finita el operador T es inyectivo si y solo si es sobre. Esto implica que $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.
En cambio, cuando se trata de un espacio infinito dimensional solo se puede asegurar que $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$. De hecho, $\sigma_p(T)$ podría ser vacío.

Proposición 2.2.1 *Los autovectores asociados a autovalores distintos de un operador lineal en un espacio normado son linealmente independientes.*

Demostración. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ autovectores correspondientes a los autovalores distintos $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Supongamos que $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ son linealmente dependientes.
Sea x_m el primer autovector en ser combinación lineal de los anteriores, esto es $x_m = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{m-1} x_{m-1}$ con $\{x_1, ..., x_{m-1}\}$ linealmente independientes. Entonces:

$$\begin{aligned}0 &= (A - \lambda_m I)x_m = (A - \lambda_m)(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{m-1} x_{m-1}) \\ &= \alpha_1 (A - \lambda_m) x_1 + ... + \alpha_{m-1}(A - \lambda_m) x_{m-1} \\ &= \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_m) x_1 + ... + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) x_{m-1}.\end{aligned}$$

Como $\{x_1, x_2, ..., x_{m-1}\}$ son linealmente independientes, entonces

$$\alpha_j(\lambda_j - \lambda_m) = 0, \forall j = 1, ..., m-1 \Rightarrow \alpha_j = 0, \forall j = 1, ..., m-1.$$

Luego, $x_m = 0$, y por tanto hemos llegado a un absurdo. Concluimos que todos los autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes. □

2.2.2. Propiedades espectrales de los operadores lineales acotados.

Supondremos ahora que X es un espacio de Banach complejo no vacío y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal y acotado.

Lema 2.2.1 *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Si $||T|| < 1$, entonces existe $(I - T)^{-1} \in L(X)$ y además viene dado por $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ que converge en la norma definida en $L(X)$.*

Demostración. Sabemos que si la serie numérica $\sum_{j=0}^{\infty} ||T||^j$ es convergente, entonces la serie $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ es convergente en $L(X)$.

Como $\sum_{j=0}^{\infty} ||T||^j$ es una serie geométrica con razón $r := ||T|| < 1$, tendremos que $\sum_{j=0}^{\infty} ||T||^j$ es convergente y por tanto $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ converge en $L(X)$.

Sea $S := \sum_{j=0}^{\infty} T^j \in L(X)$ y $S_n := \sum_{j=0}^{n} T^j$. Veamos que S es el operador inverso de $I - T$.
Se tiene que

$$(I-T)S_n = S_n(I-T) = (I-T) + (T-T^2) + ... + (T^n - T^{n+1}) = I - T^{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.
Usando que $||T|| < 1$ se tiene que $T^{n+1} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Por lo tanto

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j = (I-T)^{-1}.$$

$\square$

En el siguiente resultado veremos que el conjunto resolvente de un operador lineal acotado es un conjunto abierto. Concretamente, dado $\lambda_0 \in \rho(T)$, se tiene que una bola centrada en λ_0 y radio r, que denotamos $B(\lambda_0, r)$, verifica $B(\lambda_0, r) \subset \rho(T)$ con

$$r < \frac{1}{||(T-\lambda_0 I)^{-1}||}.$$

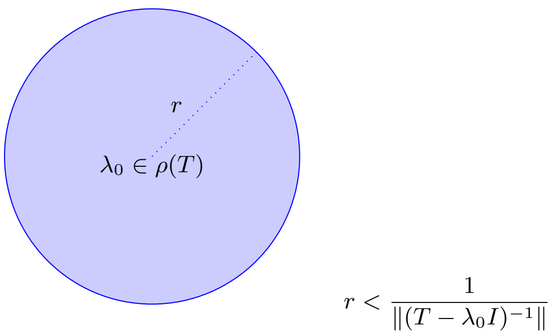

Figura 2.1. El conjunto resolvente es un conjunto abierto.

Teorema 2.1. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Si $\lambda_0 \in \rho(T)$, el operador resolvente R_λ viene dado por*

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1}(T)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\lambda - \lambda_0| < ||(T - \lambda_0 I)^{-1}||^{-1}.$$

En particular, se tiene que $\rho(T)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$, y por tanto $\sigma(T)$ es cerrado.

Demostración. Sea $\lambda_0 \in \rho(T)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda \neq \lambda_0$. Entonces

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)I = (T - \lambda_0 I)[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}].$$

Llamemos $S := (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}$.

Aplicando el lema 2.2.1 se tiene que

$$\begin{aligned}(I - S)^{-1} &= \sum_{j=0}^{\infty} S^j = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j (T - \lambda_0 I)^{-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j(T) \qquad (2.1)\end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $||(\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}|| < 1$, es decir

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||(T - \lambda_0 I)^{-1}||}.$$

Por (2.1), $T - \lambda I = (T - \lambda_0 I)(I - S)$ y para $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||(T - \lambda_0 I)^{-1}||}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}(T - \lambda I)^{-1} = (T - \lambda_0 I)^{-1}(I - S)^{-1} &= R_{\lambda_0}(T) \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j(T) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1}.\end{aligned}$$

□

Corolario 2.2.1 *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces el operador resolvente $R_\lambda(T) \in L(X)$ para $\lambda \in \rho(T)$ verifica que $f(R_\lambda(T)x)$ es una función holomorfa en $\rho(T)$ para todo $x \in X$ y todo $f \in X^*$.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $f \in X^*$. Se define $h : \rho(T) \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$h(\lambda) := f((T - \lambda I)^{-1}x) = f(R_\lambda(T)x).$$

Veamos que h es holomorfa en $\rho(T)$.
Esto es así por el teorema 2.1, puesto que existe una sucesión $(C_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$h(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j(\lambda - \lambda_0)^j$$

donde $C_j = f(R_{\lambda_0}(T)^{j+1}x)$ en un entorno λ_0, es decir, en la bola

$$|\lambda - \lambda_0| < ||(T - \lambda_0 I)^{-1}||^{-1}.$$

□

Teorema 2.2. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces el espectro de T, $\sigma(T)$, es distinto de vacío.*

Demostración. Es claro que, si $T = 0$ entonces $\sigma(T) = \{0\} \neq \emptyset$. Supongamos que $T \neq 0$ y que $\sigma(T) = \emptyset$ (por lo que $\rho(T) = \mathbb{C}$). Por el corolario 2.2.1 la función $h(\lambda) := f(R_\lambda x)$ es holomorfa en $\rho(T) = \mathbb{C}$ para todo $x \in X$ y todo $f \in X^*$.
Veremos que h está acotada en $\mathbb{C}$. Es evidente que para $|\lambda| \leq ||T||$, h está acotada, ya que en particular h es continua y por tanto en un conjunto cerrado y acotado está acotada. Si $|\lambda| > ||T||$, entonces $1 > \left|\left|\dfrac{T}{\lambda}\right|\right|$. Aplicando el lema 2.2.1 tenemos que

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1} = \lambda^{-1}\left(\frac{T}{\lambda} - I\right)^{-1} = -\lambda^{-1}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{-1}{\lambda}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$
$$= \frac{-1}{\lambda}\sum_{n\geq 0}\frac{T^n}{\lambda^n}.$$

Entonces

$$|f(R_\lambda(T)| = |h(\lambda)| \leq ||f|| \cdot ||R_\lambda(T)|| \cdot ||x|| \leq ||f|| \cdot ||x|| \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n\geq 0}\frac{||T||^n}{|\lambda|^n}$$
$$= ||f|| \cdot ||x|| \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1 - \dfrac{1}{|\lambda|}||T||} = \frac{||f|| \cdot ||x||}{|\lambda| - ||T||}.$$

Por lo tanto, para $|\lambda| > ||T||$, la función $h(\lambda)$ está acotada. Aplicando el teorema de Liouville, se deduce que $h(\lambda)$ es constante, es decir, independiente de $\lambda \in \rho(T)$, para cada $x \in X$ y todo $f \in X^*$.
Esto es absurdo por lo que se concluye que $\sigma(T) \neq \emptyset$. □

Como consecuencia de los resultados anteriores surge el siguiente teorema, donde se obtiene que el espectro de un operador lineal y continuo está incluido en la bola cerrada de centro 0 y de radio $||T||$, $\overline{B(0, ||T||)}$

Teorema 2.3. *Sea X un espacio de Banach complejo. El espectro de $T \in Ł(X)$, $\sigma(T)$, es un conjunto compacto no vacío contenido en la bola $\overline{B(0, \|T\|)}$.*

Demostración. Por el lema 2.2.1 se sabe que la serie

$$R_\lambda(T) = \frac{-1}{\lambda} \sum \frac{1}{\lambda^n} T^n$$

converge para $\lambda > ||T||$. Con lo que se tiene que $\rho(T) \subset \overline{B(0, ||T||)}^c$.
Por tanto, el espectro está acotado y por el teorema 2.1 se tiene que $\sigma(T)$ es un conjunto cerrado. Esto es, $\sigma(T)$ es cerrado y acotado, luego es compacto en $\mathbb{C}$ y además $\sigma(T) \subset \overline{B(0, ||T||)}$.

□

Definición 2.2.3 *Dado $T \in L(X)$, el radio del menor disco centrado en el origen que contiene al espectro de T se denomina radio espectral de T y se denota:*

$$r_\sigma(T) := \sup \{|\lambda| \ \textit{tal que} \ \lambda \in \sigma(T)\}.$$

En general, el radio espectral de un operador acotado no tiene porqué coincidir con la norma del operador.

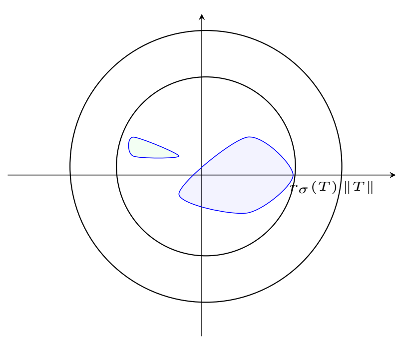

Figura 2.2. Ejemplo de espectro de operador lineal y continuo.

3

El problema del subespacio invariante

Como ya se comentaba en la introdución, el problema del subespacio invariante se puede enunciar de la siguiente manera: ¿Todo operador T lineal y continuo tiene un subespacio cerrado no trivial M que verifique $TM \subset M$?
En este capítulo se presenta la solución para espacios de Banach finito dimensionales con dimensión mayor que 2. Además, se introducen los vectores cíclicos, que serán una herramienta fundamental en la teoría. Posteriormente, se estudiarán algunos resultados positivos. Por ejemplo, los operadores en espacios no separables y los operadores de rango finito, tienen subespacios invariantes no triviales.

3.1. Espacios de dimensión finita

En esta sección veremos que la existencia de autovalores nos permitirán dar subespacios invariantes.

Definición 3.1.1 *Sea X un espacio vectorial y $T \in L(X)$. Se llamará subespacio invariante o T-invariante a un subespacio S de X, si para todo vector $s \in S$ se cumple que $T(s) \in S$. Es decir, S es un subespacio invariante si $T(S) \subseteq S$.*

Se conoce como subespacios invariantes triviales a los subespacios $\{0\}$ y X.
En este apartado nos centraremos en los espacios de dimensión mayor o igual a 2, pues los espacios de dimensión 0 o 1 no tienen subespacios distintos a los triviales.
Por lo tanto, denotaremos por X a un espacio normado de dimensión mayor o igual a 2 y por T a un operador en $L(X)$.
Sea $p(\lambda) = a_n\lambda^n + ... + a_1\lambda + a_0$ con $a_n \neq 0$, se define

$$p(T) := a_0 I + a_1 T + ... + a_n T^n.$$

Denotamos
$$\mathcal{P} := \{p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad : \quad p \text{ es un polinomio}\}.$$

Es claro, que si $T \in L(X)$ y $p \in \mathcal{P}$, entonces $p(T) \in L(X)$.

Definición 3.1.2 *Sea $T \in L(X)$. Se define la órbita de T en $x \in X$ como:*

$$Orb\,(T, x) := \{T^n x : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por lo tanto, si $y \in \langle Orb\,(T, x)\rangle$, entonces

$$y = a_0 x + a_1 T x + ... + a_n T^n x$$

para cierto $n \in \mathbb{N}$ y $(a_i)_{i=0}^n \subset \mathbb{C}$.
Sea X un espacio de dimensión n. Por la definición de órbita sabemos que:

$$a_0 x + a_1 T x + ... + a_n T^n x = 0,$$

ya que el espacio es de dimensión n y tenemos $n + 1$ vectores.
Sea
$$p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n.$$

Por el Teorema fundamental del álgebra, el polinomio p se puede descomponer como producto de polinomios en $\mathbb{R}$ de grado 1 o 2 que dividen a $p(z)$, de grado 1 en $\mathbb{C}$.
Por ello, podemos definir m polinomios q_i, $1 \leq i \leq n$ de grado 1 o 2 con $m \leq n$ tales que

$$p(T)x = q_m(T)q_{m-1}(T)...q_1(T)x = 0. \tag{3.1}$$

Proposición 3.1.1 *Todo operador $T \in L(X)$ de X tiene un subespacio invariante M con dimensión 1 o 2. Si X es un espacio vectorial complejo, entonces M puede ser elegido de dimensión 1.*

Demostración. Sea $x \in X \setminus \{0\}$ arbitrario. Sea q el polinomio de menor grado tal que $q(T)x = 0$. Supongamos que

$$q(T)x = q_j(T)q_{j-1}(T)...q_1(T)x = 0$$

y definamos
$$u := q_{j-1}(T)q_{j-2}...q_1(T)x,$$

con $u \neq 0$.

- Supongamos que q_j con j el menor índice, tiene grado 1, es decir $q_j(T) = aT + b$ para $a \neq 0$. Por lo tanto, $q_j(T)u = (aT + b)u = 0$. Entonces
$$(aT + b)u = aTu + bu = 0 \Rightarrow aTu = -bu \Rightarrow Tu = -a^{-1}bu.$$
Por lo tanto, el espacio generado por $\{u\}$, $M := \langle\{u\}\rangle$, es un subespacio T-invariante y tiene dimensión 1, pues $u \neq 0$.
- Ahora supongamos que q_j tiene grado 2, es decir $q_j(T) := aT^2 + bT + cI$ con $a \neq 0$. Entonces,
$$q_j(T)u = (aT^2 + bT + cI)u = 0 \Rightarrow aT^2u + bTu + cu = 0 \Rightarrow T^2u$$
$$= -a^{-1}bTu - a^{-1}cu.$$
El conjunto generado por $\langle\{u, Tu\}\rangle$, es un subespacio T-invariante de dimensión 1 o 2.

□

Teorema 3.1. *Sea X un espacio de Banach de dimensión n y $T \in L(X)$. Entonces, T tendrá espacios invariantes no triviales si y solo si la dimensión del espacio es mayor o igual a 3, o si la dimensión es igual a 2 y T tiene un autovalor.*

Demostración. Vemos las distintas posibilidades:

- Como se vio en la proposición anterior, todo operador en X tiene subespacios T-invariantes de orden 1 o 2, y si $n \geq 3$ entonces los subespacios triviales no coinciden en dimensión con estos subespacios. Por lo tanto, además de los triviales, tendrá mas subespacios T-invariantes.
- Si $n = 2$, el único subespacio no trivial de X es de dimensión 1. Es decir, que el subespacio T-invariante generado por el autovector x, $\langle\{x\}\rangle$ tendrá asociado un autovalor λ. Además, si un espacio es T-invariante y de dimensión 1, vemos que cualquier vector x no nulo es un autovector para T, pues todos los vectores del subespacio serán linealmente dependientes de x.
- Es evidente que para $n = 0$ y $n = 1$ no hay subespacios invariantes distintos de los triviales.

□

3.2. Vectores cíclicos

En este apartado veremos algunos resultados a tener en cuenta sobre vectores cíclicos.
Consideraremos X espacio de Banach real o complejo y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal y acotado en X.

Definición 3.2.1 *Sea X espacio de Banach. Dado $x \in X \setminus \{0\}$ se dice que x es un vector cíclico del operador T, o simplemente T-cíclico, si el subespacio generado por $Orb\,(T,x)$ es denso en X, es decir,*

$$\overline{\langle\{Orb(T,x)\}\rangle} = \overline{\langle\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}\rangle} = X.$$

Es claro que

$$\langle Orb(T,x)\rangle = \{p(T)x \quad : \quad p \in \mathcal{P}\}\,.$$

En el siguiente resultado se da una caracterización de la extensión de subespacios invariantes no triviales a través de los vectores T-cíclicos.

Proposición 3.2.1 *Sea $T \in L(X)$. T solo tiene subespacios invariantes triviales si y sólo si todo vector no nulo es un vector cíclico de T.*

Demostración.
"$\Rightarrow$"
Sea $x \in X$ y $x \neq 0$, definimos $M := \overline{\langle\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}\rangle}$ subespacio cerrado e invariante por definición.
Como los únicos subespacios invariantes son los triviales entonces $M = \{0\}$ o $M = X$. Como $x \neq 0$, entonces $M \neq \{0\}$. Por lo tanto, $M = X$, es decir, $\overline{\langle Orb(T,x)\rangle} = X$. Luego, x es un vector cíclico.

"$\Leftarrow$"
Usando el contrarrecíproco. Supongamos que T tiene subespacios invariantes no triviales, es decir, que existe $M \subset X$, subespacio invariante cerrado de T tal que $M \neq \{0\}$ y $M \neq X$. Si $M \neq \{0\}$, entonces existe $x \neq 0$ tal que $x \in M \subset X$. Como M es un subespacio invariante $T^n x \in M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es, $\{T^n x \,:\, n \in \mathbb{N}\} \subset M$. Entonces $\overline{\langle\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}\rangle} \subset M$. Por lo tanto, existe $x \in X\backslash\{0\}$ tal que $\overline{\langle Orb(T,x)\rangle} \neq X$.
Se concluye que x no es un vector cíclico. □

Proposición 3.2.2 *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Entonces $x \in X$ es T-cíclico si y solo si, dado un abierto U en X distinto de vacío, existe algún $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(T)x \in U$.*

Demostración.
"$\Rightarrow$"
Supongamos que $x \in X$ es T-cíclico, es decir $\overline{\langle Orb(T,x)\rangle} = X$. Sea U un conjunto abierto no vacío en X. Si elegimos un vector $y \in U$, como y es un vector interior de U, existe $\epsilon > 0$ tal que $B\,(y,\epsilon) \subset U \subset X = \overline{\langle Orb(T,x)\rangle} = \overline{\{p(T)x : p \in \mathcal{P}\}}$, por lo que debe existir un $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(T)x \in U$.

"$\Leftarrow$"
Sea $x \in X$. Vamos a demostrar que si x no es T-cíclico entonces existe un abierto

no vacío U de X tal que para todo $p \in \mathcal{P}$ se tiene que $p(T)x \notin U$.
Suponemos que x es un vector no T-cíclico, entonces $\overline{\langle Orb(T,x)\rangle} \neq X$. Definimos $U := X \backslash \overline{\langle Orb(T,x)\rangle}$. Es claro que U es un abierto no vacío.
Por lo tanto, no existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(T)x \in U$. □

Proposición 3.2.3 *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Dado $x_0 \in X$ un vector T-cíclico se tiene que $x \in X\backslash\{0\}$ es T-cíclico si y solo si $x_0 \in \overline{\langle Orb(T,x)\rangle}$.*

Demostración.
"⇒"
Sea x_0 un vector T-cíclico. Si $x \in X \setminus \{0\}$ es T-cíclico, entonces $X = \overline{\langle Orb(T,x)\rangle}$.
Luego, $x_0 \in \overline{\langle Orb(T,x)\rangle}$.

"⇐"
Supongamos que $x_0 \in \overline{\langle Orb(T,x)\rangle}$ y además sabemos que $x_0 \in \overline{\langle Orb(T,x_0)\rangle}$.
Como x_0 es T-cíclico,

$$\overline{\langle Orb(T,x_0)\rangle} = X \subset \overline{\langle Orb(T,x)\rangle}.$$

Como x es un vector en X, es evidente que $\overline{\langle Orb(T,x)\rangle} \subset X$.
Por lo tanto, $X = \overline{\langle Orb(T,x)\rangle}$, entonces x es un vector T-cíclico. □

Proposición 3.2.4 *Todo vector $x \in X$ unitario, $\|x\| = 1$, es T-cíclico si y solo si los únicos subespacios invariantes de T son los triviales.*

Demostración. Sea $x \in X \setminus \{0\}$. Vemos que $\overline{\langle Orb(T,x)\rangle} = \overline{\langle Orb(T, \frac{x}{\|x\|})\rangle}$.
Por la proposición 3.2.1 la demostración del teorema resulta evidente. □

Como resultado de las proposiciones anteriores llegamos al siguiente corolario.

Corolario 3.2.1 *Sea x_0 un vector cíclico de T. Entonces, el operador T solo tiene subespacios invariantes triviales si y solo si para $x \in X$ de norma 1, y $\epsilon > 0$ existe $q \in \mathcal{P}$ tal que*

$$\|q(T)x - x_0\| < \varepsilon.$$

Demostración. Por la proposición 3.2.1 se sabe que todo vector x no nulo es cíclico, es decir $\overline{\langle Orb(T,x)\rangle} = X$ si y solo si T solo tiene subespacios invariantes triviales.
Por la proposición 3.2.4 se deduce que todo vector $x \in X\backslash\{0\}$ con $\|x\| = 1$ es T-cíclico.
Aplicando la proposición 3.2.2 se puede afirmar que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, p(T)x \in B(x_0, \varepsilon)$ tal que

$$\|p(T)x - x_0\| < \varepsilon.$$

□

3.3. Resultados positivos

En este apartado nos centraremos en los espacios de Banach separables infinito dimensionales salvo que se indique lo contrario. Que nos servirán como base teórica para el capítulo dedicado a los ejemplos.

Proposición 3.3.1 *Sea $T \in L(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces el núcleo de $T - \lambda I$, $N(T - \lambda I)$ y el rango de $T - \lambda I$, $R(T - \lambda I)$, son subespacios invariantes, no necesariamente cerrados.*

Demostración. Veamos que $N(T - \lambda I)$ es un subespacio:

- Sea x, $y \in N(T - \lambda I) \Rightarrow (T - \lambda I)x = (T - \lambda I)y = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}(T - \lambda I)(x + y) = 0 &\Rightarrow (T - \lambda I)x + (T - \lambda I)y = 0\\ &\Rightarrow (x + y) \in N(T - \lambda I).\end{aligned}$$

- Sea $x \in N(T - \lambda I)$, es decir, $(T - \lambda I)x = 0$. Entonces, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$\alpha x \in N(T - \lambda I).$$

Ahora, lo vemos para el rango de $T - \lambda I$.

- Sea x, $y \in R(T - \lambda I)$, es decir existen x', $y' \in X$ tal que $(T - \lambda I)x' = x$ y $(T - \lambda I)y' = y$. Entonces,

$$x + y = (T - \lambda I)x' + (T - \lambda I)y' = (T - \lambda I)(x' + y')$$

  esto es, $x + y \in R(T - \lambda I)$.
- Sea $x \in R(T - \lambda I)$, es decir existe $x' \in (T - \lambda I)$ tal que $(T - \lambda I)x' = x$. Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que $\alpha x = \alpha(T - \lambda I)x' \in R(T - \lambda I)$.

Veamos ahora que el núcleo y el rango del operador $T - \lambda I$ es invariante.

- Sea $x \in N(T - \lambda I)$. Entonces

$$(T - \lambda I)Tx = T(T - \lambda I)x = 0.$$

  Luego, $Tx \in N(T - \lambda I)$.
- Sea $x \in R(T - \lambda I)$. Entonces existe $x' \in X$ tal que

$$Tx = T(T - \lambda I)x' = (T - \lambda I)Tx' \Rightarrow Tx \in R(T - \lambda I).$$

Por lo tanto, el rango y el núcleo son subespacios invariantes.

Teorema 3.2. *Sea $T \in L(X)$ y $T \neq \mu I$, para $\mu \in \mathbb{C}$. Si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $N(T - \lambda I)$ o $R(T - \lambda I)$, son subespacios invariantes no triviales. Aunque podrían ser no cerrados.*

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(T)$. Definimos casos:

- Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, entonces existe un vector x distinto de cero tal que $(T-\lambda I)x=0$. Luego, $N(T-\lambda I) \neq \{0\}$ como $T \neq \mu I$, entonces $N(T-\lambda I) \neq X$. Por tanto, $N(T-\lambda I)$ es un subespacio invariante cerrado no trivial.
- Si $\lambda \in \sigma_c(T)$, entonces $\overline{R(T-\lambda I)} \neq X$. Luego, $\overline{R(T-\lambda I)}$ es un subespacio invariante cerrado no trivial.
- Si $\lambda \in \sigma_r(T)$, entonces $\overline{R(T-\lambda I)} = X$ y $R(T-\lambda I)$ es un subespacio invariante no cerrado.

Teorema 3.3. *Si $T \in L(X)$ con X espacio de Banach no separable, entonces T tiene subespacios invariantes distintos de los triviales.*

Demostración. Sea $x \in X \backslash \{0\}$. Como $\langle \overline{Orb(T,x)} \rangle$ es separable y X no lo es tenemos que $X \neq \langle \overline{Orb(T,x)} \rangle$, es decir, x no es un vector T-cíclico. Por la proposición 3.2.1, T tiene subespacios invariantes no triviales. □

A continuación, daremos una breve noción sobre los operadores de rango finito.

Definición 3.3.1 *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Se dice que T es un operador de rango finito si $dim(R(T)) < \infty$.*

Proposición 3.3.2 *Sea X un espacio de Banach infinito dimensional y $T \in L(X)$. Si T es un operador de rango finito no nulo entonces tiene subespacios invariantes distintos de los triviales.*

Demostración. Notamos que, como el $R(T)$ es finito y $dimX = \infty$, entonces $R(X) \neq X$ es un subespacio T-invariante cerrado no trivial. □

Definición 3.3.2 *Sea X un espacio de Banach. Se dice que un operador lineal $T : X \longrightarrow X$ es compacto si $T(S)$ es relativamente compacto para todo subconjunto acotado de X.*

Note 3.4. Se dice que un conjunto S es relativamente compacto en un espacio normado X si toda sucesión de elementos de S tiene una subsucesión que converge en X.

Proposición 3.3.3 *Todo operador acotado y de rango finito en un espacio de Banach es compacto.*

Demostración. Todo operador acotado lleva conjuntos acotados en conjuntos acotados. Recordamos que un subconjunto en un espacio finito dimensional es acotado si y solo si es relativamente compacto.
Por lo tanto, los operadores acotados de rango finito llevan conjuntos acotados a conjuntos relativamente compactos.
Luego, queda probado que los operadores acotados de rango finito son compactos.

4

Ejemplos

En este capítulo presentaremos algunos ejemplos de subespacios invariantes en diferentes espacios finitos e infinitos dimensionales. Para ello, usaremos los resultados anteriores.

4.1. Ejemplos en espacios finitos dimensionales

A continuación se dará un ejemplo de operador que no tiene autovalores reales en un espacio de dimensión 2.

Ejemplo 4.1.1 *Sea T_θ el operador definido por $T_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, que rota cada vector de $\mathbb{R}^2$ θ-radianes. Es decir, $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tenemos que*

$$T_\theta x = (x_1 \cos\theta - x_2 \operatorname{sen}\theta, x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta)$$

que se puede expresar de forma matricial como

$$T_\theta x = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Usando la norma Euclídea,

$$\|T_\theta x\| = \sqrt{(x_1 \cos\theta - x_2 \operatorname{sen}\theta)^2 + (x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta)^2} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} = \|x\|$$

por ser $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Para calcular los autovalores de T_θ, hallamos el determinante de $T_\theta - \lambda I$:

$$det(T_\theta - \lambda I) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \operatorname{sen}^2\theta$$

$$= \cos^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2.$$

Entonces $\lambda = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm \sqrt{-\operatorname{sen}^2\theta}$.
Necesariamente $\operatorname{sen}\theta = 0$. *Esto ocurre para* $\theta_1 = 0 + 2k\pi$ *o* $\theta_2 = \pi + 2k\pi$ *con* $k \in \mathbb{Z}$. *Luego, el autovalor de* T_{θ_1} *será* $\lambda_1 = 1$ *y para* T_{θ_2} *será* $\lambda_2 = -1$. *Hemos visto que para* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\theta_1, \theta_2\}$ *el operador no tiene autovalores en* $\mathbb{R}$.

□

En el siguiente ejemplo consideraremos conjuntos invariantes en vez de subespacios invariantes.

Ejemplo 4.1.2 *Sea* f *una función definida por*

$$\begin{aligned} f : \Pi &\longrightarrow \Pi \\ z &\longmapsto z^2 \end{aligned}$$

donde $\Pi = \partial\mathbb{D}$.
Exponemos varios ejemplos, de subconjuntos invariantes de f.

$$A_{-1} = \{-1, 1\}$$

$$A_1 = \{1\}$$

$$A_i = \{-1, i, 1\}$$

Sea $z_0 = e^{it}$ *con* $0 < t < 2\pi$. *Entonces el conjunto* $A_{z_0} := \{e^{2^n ti} : n \in \mathbb{N}\}$ *es invariante.*

□

Ejemplo 4.1.3 *(Matriz en un espacio finito dimensional)*
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ *se define el operador lineal* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$(x, y, z) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ x + z \\ x + y \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de $A - \lambda I$.

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2(2 - \lambda).$$

Es decir, tenemos dos autovalores $\lambda_1 = 2$ *con orden de multiplicidad* $o(\lambda_1) = 1$ *y* $\lambda_2 = -1$ *con* $o(\lambda_2) = 2$.
Hallamos los autovectores.

- *Para $\lambda_1 = 2$*

$$(A-2I)\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

Tenemos un autovector $\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *que genera un subespacio* $W_1 = \langle\{\overrightarrow{w_1}\}\rangle$ *invariante no trivial.*

- *Para $\lambda_2 = -1$*

$$(A+I)\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

De donde se obtiene un subespacio invariante distinto de los triviales, $W_2 = \langle\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}\rangle$, *donde* $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *y* $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

□

Ejemplo 4.1.4 *Consideramos el operador T definido en el espacio de las matrices 2×2 de la siguiente forma $T : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2}$ definida por*

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2a + 19b - 33c + 21d & -3a + 16b - 24c + 15d \\ -2a + 9b - 13c + 9d & -a + 4b - 6c + 5d \end{bmatrix}$$

Para encontrar los autovalores de T debemos construir una representación de la matriz de T, M.

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 19 & -33 & 21 \\ -3 & 16 & -24 & 15 \\ -2 & 9 & -13 & 9 \\ -1 & 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Hallamos su determinante

$$det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 19 & -33 & 21 \\ -3 & 16-\lambda & -24 & 15 \\ -2 & 9 & -13-\lambda & 9 \\ -1 & 4 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \dots$$

$$= \lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2)$$

Tenemos dos autovalores $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = 2$*, ambos con multiplicidad* 2*. Entonces:*

- <u>*Para* $\lambda_1 = 1$</u>

$$(T-I)\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -1 & 19 & -33 & 21 \\ -3 & 17 & -24 & 15 \\ -2 & 9 & -12 & 9 \\ -1 & 4 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$$

Nos queda el autovector $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Es decir, tenemos un subespacio* T*-invariante*

$$V_1 = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

con $dimV_1 = 1$*.*

- <u>*Para* $\lambda_2 = 2$</u>

$$(T-2I)\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -4 & 19 & -33 & 21 \\ -3 & 14 & -24 & 15 \\ -2 & 9 & -15 & 9 \\ -1 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 - 6x_3 + 9x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$$

Entonces tenemos el autovector $\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Por lo tanto, nos queda un subespacio invariante*

$$V_2 = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

con $dimV_2 = 2$*.*

$\square$

Ejemplo 4.1.5 *Sea* V *el espacio vectorial real de las funciones generadas por* $\langle \{1, t, e^t, te^t, t^2e^t\} \rangle$*. Se considera el operador* $T : V \longrightarrow V$ *definido por* $T(f(t)) = f'(t)$*.*

Nos fijamos en que: $T(1) = 0$*,* $T(t) = 1$*,* $T(e^t) = e^t$*,* $T(te^t) = te^t + e^t$*,* $T(t^2e^t) = 2te^t + t^2e^t$*. Obtenemos la siguiente representación matricial de* T

$$[T]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con respecto de la base $\alpha = \{1, t, e^t, te^t, t^2e^t\}$ *Para hallar sus autovalores calculamos el determinante de* $T - \lambda I$*.*

$$det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)^3.$$

Entonces tenemos dos autovalores, $\lambda_1 = 0$ *de multiplicidad* $o(\lambda_1) = 2$ *y* $\lambda_2 = 1$ *de multiplicidad* $o(\lambda_2) = 3$*. Calculamos los autovectores asociados a los autovalores.*

- *Para* $\lambda_1 = 0$

$$(T - 0I)\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

Entonces tenemos el autovector $\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *que genera un subespacio T-invariante* $W_1 = \langle\{\overrightarrow{w_1}\}\rangle$*.*

- *Para* $\lambda_2 = 1$

$$(T - 1I)\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ 2x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

Entonces tenemos el autovector $\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *que genera un subespacio*

T-invariante $W_2 = \langle\{\overrightarrow{w_2}\}\rangle$.

$\square$

4.2. Ejemplos en espacios infinitos dimensionales

En esta sección se estudiarán diferentes operadores en espacios de dimensión infinita (espacios de Banach, Hilbert o simplemente normados).

Ejemplo 4.2.1 *Sea* R *el operador definido por* $R : \ell^p(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^p(\mathbb{N})$ *con* $R(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$, *siendo* $p \geq 1$.
Es claro que es lineal. Veamos que está acotado. Es claro que

$$\|x\|_p = \|Rx\|_p = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x \in \ell^p(\mathbb{N})$. *Entonces*

$$||R|| = \sup_{||x||_p \leq 1} ||Rx||_p = \sup_{||x||_p \leq 1} ||x||_p = 1.$$

Por lo tanto, el operador R *está acotado por 1.*
Vemos que

$$N(R) = \{0\}$$

y

$$R(R) = \{(x_n) \in \ell^p\,(\mathbb{N}) \;\; \text{tal que } x_0 = 0\}$$

$$= \{(0, x_1, x_2, \ldots) \text{ tal que } (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^p(\mathbb{N})\}.$$

Por la proposición 3.3.1 se tiene que $R(R)$ *es un subespacio invariante y además en este ejemplo es no trivial, ya que* $R(R) \neq \ell^p(\mathbb{N})$.

Veamos otros subespacios invariantes.
Sea

$$M_k := \langle\{e_n \text{ con } n \geq k\}\rangle \quad \text{con} \quad e_n := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

donde el valor 1 *está en el lugar* n.
Por ejemplo

$$M_1 := \langle\{e_n\ ;\ n \geq 1\}\rangle = \langle\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}\rangle =$$

$$= \{(0, x_0, x_1, \ldots) \text{ tal que } (x_0, x_1, \ldots) \in \ell^p(\mathbb{N})\} = R(R)$$

$$M_2 := \langle\{e_n\ ;\ n \geq 2\}\rangle = \langle\{e_2, e_3, e_4, \ldots\}\rangle =$$

$$= \{(0, 0, x_0, x_1, x_2, \ldots) \text{ tal que } (x_0, x_1, \ldots) \in \ell^p(\mathbb{N})\} = R(R^2).$$

Por tanto

$M_k = \{(0, 0, ..., x_0, x_1) : (x_0, x_1, \ldots) \in \ell^p\,(\mathbb{N})$ *y* x_0 *se encuentra en el lugar* $k{+}1\}$.

Entonces M_k *es un subespacio invariante cerrado no trivial del operador* R*, para todo valor* $k \geq 1$. □

Ejemplo 4.2.2 *Sea* L *un operador lineal definido por* $L : \ell^p(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^p(\mathbb{N})$ *con* $L(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$*, siendo* $p \geq 1$.
Veamos que está acotado

$$||Lx||_p = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$||Lx||_p \leq ||x||_p = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Entonces

$$||L|| = \sup_{||x||_p \leq 1} ||Lx||_p \leq \sup_{||x||_p \leq 1} ||x||_p = 1.$$

Por lo tanto, el operador L *está acotado por 1. Queremos hallar algunos de los subespacios invariantes. Calculamos el núcleo y el rango.*

$$N(L) = \{x = (x_n) \in \ell^p(\mathbb{N}) \quad : \quad Lx = 0\} = \langle\{e_0\}\rangle$$

y

$$R(L) = \{(x_1, x_2, \ldots) \quad : \quad (x_0, x_1, \ldots) \in \ell^p(\mathbb{N})\} = \ell^p(\mathbb{N})$$

Por la proposición 3.3.1 se tiene que $N(L)$ *es un subespacio invariante que en este ejemplo es no trivial.*
A continuación, intentamos encontrar otros subespacios invariantes además de este.
Sea

$$M_k := \langle\{e_n \text{ con } n \leq k\}\rangle.$$

Por ejemplo,

$$M_0 := \langle \{e_0\} \rangle,$$

es un subespacio invariante cerrado no trivial, ya que $Le_0 = 0$.
Además,

$$M_1 := \langle \{e_0, e_1\} \rangle$$

también es un subespacio invariante cerrado no trivial ya que $L(\alpha e_0 + \beta e_1) = \beta L e_1 = \beta e_0$ *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

□

Ejemplo 4.2.3 *Sea* $K : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ *el operador definido como*

$$K(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, 0, x_2, 0, x_4, 0, \ldots).$$

Trivialmente es lineal. Para ver que está acotado hallamos su norma

$$||K|| = \sup_{||x||_2 \leq 1} ||Kx||_2 = \sup_{||x||_2 \leq 1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |x_{2n}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$$

ya que $\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$.
Por otro lado, podemos encontrar un vector $e_0 = (1, 0, \ldots)$ *de norma 1, tal que* $Ke_0 = (0, 1, 0, \ldots)$ *y su norma es* 1. *Por ello,* $||K|| = 1$.
Hallamos el núcleo y el rango,

$$\begin{aligned} N(K) &= \{x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) \ : \ Kx = 0\} \\ &= \{x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) \ : \ x_{2n} = 0 \textit{ para todo } n \geq 0\} \neq \{0\} \\ &\neq \ell^2(\mathbb{N}), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} R(K) &= \left\{ x = (0, x_0, 0, x_2, 0, x_4, 0, \ldots) \ : \ (x_0, x_2, x_4, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\} \\ &= \langle \{e_1, e_3, e_5, \ldots\} \rangle = \langle \{e_{2n+1} \ : \ n \geq 0\} \rangle \neq \{0\} \\ &\neq \ell^2(\mathbb{N}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $N(K)$ *y* $R(K)$ *son subespacios invariantes no triviales.*
Vamos a buscar otros subespacios invariantes no triviales.
Sea

$$M_k := \langle \{e_n \textit{ con } n \geq k\} \rangle.$$

Veamos un caso particular. Para $k = 1$,

$$M_1 = \langle \{e_1, e_2, \ldots\} \rangle = \{(0, x_0, x_1, \ldots) : (x_0, x_1, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{N})\}$$

es un subespacio no trivial.
Veamos que M_1 *es invariante. Sea* $x \in M_1$. *Entonces*

$$K(0, x_0, x_1, \ldots) = (0, 0, 0, x_2, 0, x_4, \ldots) \in M_1.$$

Es fácil ver que además, K *es nilpotente pues* $K^2 x = (0, 0, 0, \ldots)$ *para todo* $x \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Para todo $x \in M_k$, *se tiene que* $x = \displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} x_{n-k-1} e_n$.

Luego $Rx = (0, \ldots, 0, x_0, x_1, \ldots) = \displaystyle\sum_{n=k+2}^{\infty} x_{n-k-2} e_n \in M_k$. □

Ejemplo 4.2.4 *Sea* $C^\infty [a, b]$ *el espacio de las funciones reales infinitamente diferenciables definidas en* $[a, b]$, *es decir*

$$C^\infty [a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f \textit{ infinitamente diferenciable } \}.$$

Consideremos el operador $T : C^\infty [a, b] \longrightarrow C^\infty [a, b]$ *definido como* $Tf(t) = f''(t)$.
Como la derivada es lineal también lo es el operador. Veamos que no está acotado. Sea $f_n(t) := t^n$ *Entonces,*

$$||f_n(t)|| = \max_{t \in [a,b]} |f_n(t)| = (\max \{|a|, |b|\})^n.$$

Además,

$$Tf_n(t) = n(n-1)t^{n-2}.$$

Por lo tanto,

$$||Tf_n(t)|| = \max_{t \in [a,b]} n(n-1)|t|^{n-2} = n(n-1) \left(\max_{t \in [a,b]} \{|a|, |b|\} \right)^{n-2}.$$

Luego, T *no está acotado.*
Queremos hallar algún subespacio invariante de T, *para ello vemos que:*
Dado $w \in \mathbb{R}$, *entonces* $-w^2$ *es un autovalor de* T. *Nos fijamos en que* $\sin wx$ *es un autovector asociado a* $-w^2$. *Esto es,*

$$T \sin wx = \frac{d^2(\sin wx)}{d^2 x} = \frac{d}{dx} (w \cos wx) = -w^2 \sin wx.$$

Luego, para $w \in \mathbb{R}$

$$M_w := \langle \sin wx \rangle,$$

es un subespacio invariante cerrado claramente no trivial. □

Ejemplo 4.2.5 *Sea $C\,[0,1]$ el espacio de las funciones reales continuas definidas en el conjunto $[0,1]$.*
Definimos el operador lineal $T : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ como $Tf(t) = tf(t)$.
Veamos que el operador T está acotado. Sea $f \in C[0,1]$ tal que $||f|| \leq 1$. Entonces

$$Tf(t) = tf(t) \Rightarrow ||Tf|| = \max_{t\in[0,1]} |tf(t)| \leq 1.$$

Por lo tanto, T es un operador acotado.
Hallamos algunos subespacios invariantes. Vemos que:

$$N(T) := \{f(t) \in C[0,1] \quad : \quad tf(t) = 0 \text{ para todo } t \in [0,1]\} = \{0\}$$

y

$$R(T) = \{g(t) \quad : \quad \exists f(t) \in C[0,1], Tf(t) = tf(t) = g(t)\} \neq C[0,1]$$

Buscamos otras opciones. Sea

$$M_0 := \{f \in C[0,1] \quad : \quad f(0) = 0\} \neq R(T).$$

Por lo tanto, M_0 será un subespacio invariante de T. Intentamos extender esta idea. Sea $t_0 \in [0,1]$, definimos

$$M_{t_0} := \{f \in C[0,1] \quad : \quad f(t_0) = 0\}.$$

Veamos que no es trivial. Para cualquier $t_0 \in [0,1)$ se puede definir una función

$$g_{t_0}(t) := \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq t_0, \\ \\ \frac{t-t_0}{1-t_0} & t_0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

tal que $g_{t_0} \in M_{t_0}$. Por lo tanto $M_{t_0} \neq \{0\}$. Por otra parte, sabemos que $f(t) \equiv 1$, $f \notin M_{t_0}$. Luego $M_{t_0} \neq C[0,1]$.
En el caso, $t_0 = 1$, definimos $g_1(t) = 1 - t \in M_1$. Por tanto, $M_1 \neq \{0\}$. De igual forma que antes se tiene que $M_1 \neq C[0,1]$. Hemos probado que se trata de un subespacio invariante distinto de los triviales.

$\square$

5

Historia y controversia

El problema del subespacio invariante lleva abierto casi 90 años y sigue generando debates dentro de la comunidad matemática. Son muchos los que han intentado resolverlo, por lo que en este apartado hacemos una pequeña cronología de su historia, pasando por el conflicto de la década de los 80 donde dos matemáticos se atribuyeron el mérito de la solución para ciertos espacios de Banach. Terminando por la decepción en 2013, momento en el que se creyó haber obtenido una solución del problema en espacios de Hilbert.

5.1. Historia del problema

Se desconoce quien fue el primero en plantear el problema del subespacio invariante. Aunque en la década de 1930 es donde primero surge (de forma conocida) como resultado de un trabajo no publicado atribuido a John von Neumann en el que demostraba que todo operador compacto en espacios de Hilbert tenía un subespacio invariante no trivial.

Figura 5.1. John von Neumann (1903-1957).

Debemos mencionar también que en 1948, Beurling caracterizó los subespacios invariantes del operador traslación definido en un espacio de Hilbert, resultado que motivó el estudio de los subespacios invariantes de operadores.

Más tarde, Aronszajn afirmó que John von Neumann le había hecho saber que había probado dicho resultado, y en 1950 presentó otra demostración. En una conversación entre John von Neumann y el matemático Aronszajn descubrieron que habían obtenido el mismo resultado, pero su demostración solo podía aplicarse a espacios de Hilbert, no a espacios de Banach. Hicieron falta cuatro años para que Aronszajn, junto con Smith, probasen el teorema para espacios de Banach. Esto hizo que Smith se plantease que si dado un operador $T \in L(X)$, siempre que T^2 fuese compacto, entonces T tendría un subespacio invariante. Esto motivó la definición de operador polinomialmente compacto.

Definición 5.1.1 *Sea X un espacio de Banach. Un operador $T : X \longrightarrow X$ es polinomialmente compacto si existe $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ tal que $p(T)$ es un operador compacto.*

La generalización del teorema de von Neumann se resistió por más de una década después del artículo de Aronszajn y Smith, y no por falta de interés. En 1996, Robinson y su alumno Bernstein usaron técnicas diferentes a las usuales para probar el siguiente teorema.

Teorema 5.1 (Bernstein and Robinson). *En espacios de Hilbert, todo operador polinomialmente compacto tiene un subespacio invariante no trivial.*

Dichas técnicas fueron desarrolladas por Robinson y la prueba anterior fue la primera aplicación de esta nueva teoría. Poco después, Halmos tradujo el resultado al análisis estándar. Posteriormente Arveson y Feldman obtuvieron una generalización de ese resultado en espacios de Banach.

La comunidad matemática se llevó una gran sorpresa cuando en 1973, un joven matemático ruso, Victor Lomonosov, introdujo una elegante prueba que generalizaba los resultados anteriores para espacios de Banach. Para entender el teorema necesitaremos la siguiente definición.

Definición 5.1.2 *Dado $T \in L(X)$, se llama subespacio hiperinvariante de T a un subespacio M de X que es A-invariante con A un operador cualquiera que conmuta con T.*

El teorema expuesto a continuación nos da unos operadores K, A y T que conmutan entre ellos tales que K es distinto de cero y compacto, A no es escalar, lo que implica que T tenga un subespacio invariante distinto a los triviales.

Teorema 5.2 (Lomonosov). *Sea X espacio de Banach y $T \in L(X)$ un operador distinto de αI para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Si K es un operador compacto distinto del* *operador nulo que conmuta con T, entonces T tiene subespacios hiperinvariantes no triviales.*

La nueva técnica de Lomonosov está basada en el teorema del punto fijo de Schauder.

Teorema 5.3 (Teorema del punto fijo de Schauder). *Sea E un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio normado X. Si $f : E \longrightarrow X$ es una aplicación compacta tal que $f(E) \subseteq E$, entonces existe $x \in E$ tal que $f(x) = x$.*

Unos años después, en 1977, Hilden dio una prueba mas elegante del teorema anterior.

Durante algún tiempo se creyó que el teorema de Lomonosov resolvía el problema del subespacio invariante al menos en espacios de Hilbert. En 1980 Hadwin, Nordgren, Radjavi y Rosenthal dieron un ejemplo de un operador T tal que si $ST = TS$, con S operador continuo no escalar, S no es un operador compacto distinto del operador nulo.

5.2. Controversia

Poco después de que Lomonosov presentase su teorema, hubo un descubrimiento monumental en el estudio del subespacio invariante. En 1976, durante la reunión anual de la Sociedad Matemática Americana, el matemático sueco Per Enflo anunció la existencia del primer ejemplo de un operador en un espacio de Banach que solo tenía los subespacios invariantes triviales. Desde 1975 había estado circulando una versión preliminar de su construcción, la cuál había sido expuesta en un seminario. En 1976 solo dio una idea general de la prueba y no fue hasta 1980 que publicó un resumen en el instituto Mittag-Leffler. En 1981, lo envió a la revista Acta Matemática, una de las revistas con mas prestigio en el mundo de las matemáticas.

Figura 5.2. Per Enflo (1944).

Desafortunadamente, el artículo permaneció en revisión durante cinco años debido a la gran complejidad de la construcción y a pequeñas erratas menores, que convirtieron el estudio en una pesadilla para los evaluadores. Finalmente, su trabajo [3] fue publicado en 1987 y comprende alrededor de 100 páginas. Habiendo tardado 11 años, entre el descubrimiento y su publicación.

Para tener una idea de la complejidad del estudio reproducimos a continuación lo que escribieron en 1982 Radjavi y Rosenthal:
Radjavi y Rosenthal: *Hemos escuchado muchos rumores del proceso de revisión: fulanito pasó dos meses trabajando muy duro en el manuscrito, encontró errores menores corregibles, recorrió un tercio del camino y luego abandonó agotado.*

Ya publicado el trabajo, la reseña de A.M. Davie para MathReviews menciona:
Davie: *La finalización exitosa de la tarea de Enflo es un logro notable; sin embargo, la última parte de su artículo es tan impenetrable que está destinada a ser admirada en vez de ser leída.*

Enflo gozaba de una gran reputación como matemático anterior a este estudio, ya que en 1973 había resuelto tres de los grandes problemas que estaban abiertos en aquella época.
Durante el proceso de publicación del Teorema de Enflo, el matemático británico C. J. Read siguió las ideas de Enflo para construir su propio contraejemplo, que fue revisado en muy poco tiempo, y publicado en 1984 en el Boletín de la Sociedad Matemática Londinense [4].

Figura 5.3. C. J. Read (1958-2015).

Un año después, Read construyó su primer contraejemplo en espacios ℓ^1 y, que posteriormente Davie simplificó. Con la intención de tener precedencia sobre la solución del problema, Read no citó a Enflo en su trabajo, lo que fue considerado dentro de la comunidad matemática como un acto poco ético. Lo

que se agravó aun más, debido a la propia contrucción del contraejemplo de Read, el cual parecía estar basado en las ideas de Enflo. Beauzamy presentó una simplificación del problema de Enflo, aunque él sí admitió haber usado las ideas de Enflo y criticó la actuación de Read con las siguientes palabras:
Beauzamy: *Hacer tal precisión es inusual, y no sería de interés, si C. Read no hubiera tratado, varias veces, de manera poco elegante y sin éxito, de reclamar prioridad por la solución del problema. Este comportamiento podría ser condenado con palabras más fuertes, pero recordamos que en este momento estamos escribiendo para la posteridad.*

También el propio Read se justificó diciendo lo siguiente:
Read [4]: *Este es el único contraejemplo que el autor sabe que es válido. P. Enflo ha producido dos versiones preliminares que aparentemente contienen ejemplos de operadores sin un subespacio invariante, (los cuales fueron) obtenidos por métodos muy diferentes a los nuestros. Sin embargo, estos preliminares han existido desde 1976 y 1981, y ninguno ha sido publicado todavía.*

Finalmente, Yadav reproduce un diálogo que sostuvo con Enflo en [5]:
Yadav : *¿Cómo es que Read no reconoce tu trabajo en su artículo?*
Enflo: ¿Qué puedo decir, solo que el asistió a mis seminarios antes de publicar su artículo?

Dejando la discusión entre la comunidad matemática, no hay duda de que la ideas de Enflo estaban detrás del primer contraejemplo y por ello recibió todo el crédito.

Por otra parte, Read también continuó descubriendo contraejemplos con propiedades adicionales. En 1988, construyó un operador acotado en $\ell^1(\mathbb{N})$ que no tiene conjuntos cerrados invariantes salvo los triviales. Además de aportar un resultado más fuerte, da lugar a una nueva situación: Supongamos que el problema del subespacio invariante se resuelve algún día de manera negativa (como ya lo hizo Enflo en los espacios de Banach), automáticamente se enunciaría la pregunta, ¿cada operador $T \in L(H)$ tiene un conjunto cerrado invariante no trivial?

También, en 1997 mostró que su ejemplo se podía modificar para tener la propiedad de ser quasinilpotente, esto es, que su espectro es el conjunto $\{0\}$

5.3. Últimos avances en el problema

A principios del año 2013 la comunidad matemática celebraba lo que pensó que sería la solución final del problema del subespacio invariante para espacios de Hilbert. El 10 de diciembre de 2012, la matemática española Eva A.Gallardo Gutiérrez (Universidad Complutense, Madrid) y el americano Carl C. Cowen

(Universidad de Indiana-Purdue, Indianapolis, EEUU) presentaron la solución del problema en el Congreso Bianual de la Real Sociedad Matemática Española que se celebró en Santiago de Compostela del 21 al 25 de Enero de 2013. Este hallazgo fue publicado no solo por los medios de divulgación de la investigación matemática, sino también fue noticia en periódicos de todo el mundo debido a la importancia del problema.

Figura 5.4. Eva A.Gallardo Gutiérrez y Carl C. Cowen.

Por desgracia, el 5 de febrero de ese mismo año, los autores comunicaron que, aunque los resultados del manuscrito sometido a revisión eran correctos, la omisión de la justificación de una de las afirmaciones hacía que no se pudiera considerar como solución del problema del subespacio invariante, por lo que este sigue abierto para espacios de Hilbert.

Bibliografía

[1] A. Vera, P. Alegría, *Un curso de Análisis Funcional. Teoría y problemas,* AVL, 1997.

[2] J. A. Noel, *The invariant subspace problem,* Thesis (Ph. D.) - Thompson Rivers University, 2011.

[3] P. Enflo, *On the invariant subspace problem for Banach spaces,* Acta Math., **158** (1987), núm. 3-4, 213-313.

[4] C. J. Read, *A solution to the invariant subspace problem,* Bull. London Math. Soc. **16** (1984), núm. 4, 337-401.

[5] B. S. Yadav, *The present state and heritages of the invariant subspace problem,* Milan J. Math., **73** (2005), 289-316.

[6] M. López, *El problema del subespacio invariante,* Miscelánea Matemática, **58** (2014), 111-124.

Índice de figuras

The Invariant Subspace Problem

Nadia Chinea Chinea
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100780390@ull.edu.es

Abstract

In operator theory, the concept of invariant subspace is very important. Let T be a linear operator on X. A subset M of X is called T-invariant if $T(M) \subseteq M$.
The aim of this work is to provide the necessary tools to understand the problem of the invariant subspaces, already solved for Banach spaces (in a negative way) but not for Hilbert spaces, which is stated as follows:
Does every bounded linear operator T on an infinite-dimensional separable Hilbert space, has a non-trivial closed invariant subspace?
Throughout this work we will study basic aspects of Banach and Hilbert spaces. In addition, we will study some necessary properties of the operators between these spaces. Then, we will study the invariant subspace problem. Subsequently, some examples will be provided in finite and infinite dimensional spaces based on the previous theory. We conclude with the progress of the problem solutions will be summarized chronologically.

1. Introduction

The invariant subspace problem was posed by John von Neumann in 1935, in an unpublished work. The problem, in a general form, stated as followr: If T is a bouned liner operator on a Banach space X, does it follow that T has a non-trivial closed invariant subspace?
The problem which is so simple to state, turns out to be very complicated. However, as is the case with most of the long open problems, it has been solved partially.
It is also proposed for subsets but in this work we will focus on subspaces.
Some authors have found examples of Banach spaces and operators T such that T have only the trivial closed invariant subspaces, in the 80's. That caused a great controversy within the mathematical community, because the confrontation between two of the authors.
The work is structured in five chapters. The first and second chapters are an introduction of the necessary tools for the development of the remaining chapters. The first chapter, about Banach and Hilbert spaces, and the second one about linear and continuous operators, focusing on some spectral properties.
In chapter 3, we present some known solutions. Subsequently, based on the theory presented throughout this memory, we provide a brief discussion on some examples. Finally, we talk about the history of various attempts to solve the problem

2. Outline of the first Chapter

We will focus on the study of properties in Banach and Hilbert spaces, giving some examples that clarify the theory.

3. Outline of the second chapter

We give a brief, but hopefully informative, introduction to bounded linear operator. After presenting these results, we must cover important backgroung on spectral theory. In particular, we obtain that the spectrum of a bounded linear operator on a complex Banach space is a non empty compact subset of $\mathbb{C}$.

4. Outline of the third chapter

The invariante subspace say that, if T is a bouned linear operator on Banach space X, does it follow that T has a non-trivial closed invariant subspace?
In this chapter, we give solutions to the invariant subspace problem for Banach space which are either finite-dimensional or non separable.

Theorem 4.1 *Let X be an n-dimensional Banach space and $T \in L(X)$. Then T has a non-trivial invariant subspace if and only if either $n \geq 3$, or $n = 2$ and T has an eigenvalue.*

Theorem 4.2 *Let X be non-separable Banach space. If $T \in L(X)$, then T has non-trivial invariant subspaces.*

Given $T \in L(X)$, a nonzero vector $x \in X$ is called cyclic (or T-cyclic) if the set $\{T^n x \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ is dense in X.
In the following results we give characterizations of the existence of non trivial invariant subspace of a bounded linear operator.

Proposition 4.1 *Given $T \in L(X)$. T has only the trivial invariant subspaces if and only if every non-zero vector of X is a cyclic vector for T.*

Proposition 4.2 *Let X be a Banach space and $T \in L(X)$. Then $x \in X$ es T-cyclic if and only if for every non-empty open set U of X there is some $p(T)x \in U$.*

Definition 4.1 *Let X be a Banach space and $T \in L(X)$. T is said to be finite-rank operator if $dim(R(T)) < \infty$.*

Proposition 4.3 *Let X be an infinite-dimensional Banach space and $T \in L(X)$. If T is a nonzero finite-rank operator, then has non-trivial invariant subespaces.*

5. Outline of the fourth chapter

This chapter gives some examples of bounded linear operators that indeed possess non-trivial invariant subspace (for Banach, Hilbert and normed vector spaces).

6. Outline of the fifth chapter

During the 1930s John von Neumman proved that compact operators have non-trivial invariant subspace, but did not publish it. The proof was discovered by N. Aronszajn and K.T. Smith in 1954. Many authors have made a lot efforts to give positive partially answer to the problem. That is, to study particular classes of operators (like compact, polynomially compact, ...), that have nontrivial invariant subspaces.
In 1975 Per Enflo discovered the first example of an operator on a Banach space having only the trivial invariant subspace, but his full solution not appear in print until 1987. At the same time, C. J. Read following the ideas of Enflo, also constructed a counterexample on the Banach space, but he did not cite Enflo's work.
The problem has chequered history interwoven with hopes and disappointments, but, yet somehow its solutions remains open in a Hilbert space context.

References

[1] A. Vera, P. Alegría, *Un curso de Análisis Funcional. Teoría y problemas,* AVL, 1997.

[2] J. A. Noel, *The invariant subspace problem,* Thesis (Ph. D.) - Thompson Rivers University, 2011.

[3] P. Enflo, *On the invariant subspace problem for Banach spaces,* Acta Math., **158** (1987), núm. 3-4, 213-313.

[4] C. J. Read, *A solution to the invariant subspace problem,* Bull. London Math. Soc. **16** (1984), núm. 4, 337-401.

[5] B. S. Yadav, *The present state and heritages of the invariant subspace problem,* Milan J. Math., **73** (2005), 289-316.

[6] M. López, *El problema del subespacio invariante,* Miscelánea Matemática, **58** (2014), 111-124.