Universidad de La Laguna

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS | FACULTAD DE CIENCIAS

María Rodríguez García

Resolución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables

Método de Frobenius

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, septiembre de 2017

Dirigido por
José Manuel Méndez Pérez

José Manuel Méndez Pérez
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

En este Trabajo Fin de Grado se estudia la resolución de cierta clase de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes variables mediante desarrollos en series de potencias. En primer lugar se considera el caso en que los coeficientes son funciones analíticas. Una vez que se ha establecido el teorema de existencia, se aplica a la ecuación diferencial de Legendre, cuyas soluciones acotadas en el intervalo $(-1, 1)$ *son los conocidos polinomios de Legendre.*
En segundo lugar se tratan las ecuaciones con puntos singulares regulares. El teorema de Frobenius asegura la existencia de soluciones y nos indica, además, cómo calcularlas. Se ilustra la teoría con el estudio de la ecuación diferencial de Bessel.
Se analizan las principales propiedades tanto de los polinomios de Legendre como de las funciones de Bessel, así como su papel en la resolución de ciertos problemas de la física-matemática.

Palabras clave: *Ecuaciones diferenciales analíticas – Puntos singulares – Función generatriz – Fórmula de Rodrigues – Polinomios de Legendre – Desarrollos en serie de Legendre – Funciones de Bessel – Desarrollos en serie de Fourier-Bessel – Problema de Dirichlet.*

Abstract

The main purpose of this project is to solve certain class of linear differential equations of second order with non constant coefficients through the use of power series. Firstly, we consider the case in which these coefficients are real analytical functions. Once the existence theorem is proved, we apply this theory to the Legendre differential equations, whose bounded solutions in the interval $(-1, 1)$ *are the well-known Legendre polynomials.*
In the second place, we study the equations that possess regular singular points. Frobenius theorem assures the existence of solutions in this case, as well as provides a method to calculate them. We illustrate this theory solving the Bessel differential equation.
The most interesting properties of the Legendre polynomials and the Bessel functions are established, by emphasizing their importance in tackling some problems of the physical mathematics.

Keywords: *Analytical differential equations – Singular points – Generating function – Rodrigues' formula – Legendre polynomials – Legendre series – Bessel functions – Fourier-Bessel series – Dirichlet problem.*

Contenido

Introducción

En un curso elemental de ecuaciones diferenciales se demuestra que resolver una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes se reduce a un problema algebraico: hallar las raíces de un polinomio de grado n. La situación se complica mucho cuando los coeficientes de estas ecuaciones son variables, si bien hay dos casos en los que esta cuestión está perfectamente estudiada y resuelta, y que constituyen el objetivo de este Trabajo Fin de Grado.

El primer caso se estudia en el Capítulo 1, cuando los coeficientes de la ecuación son funciones analíticas reales, esto es, funciones infinitamente derivables que poseen desarrollos en serie que convergen en determinado entorno de un punto. Se establece, para las ecuaciones de segundo orden, el correspondiente teorema de existencia, que garantiza que las soluciones también son analíticas en el mismo entorno. Se ilustra la teoría con la resolución de la ecuación diferencial de Legendre que, cuando el parámetro que comparece en el mismo es un número entero, admite como soluciones los polinomios de Legendre. Se muestran otras formas de introducir estos polinomios (fórmula de Rodrigues, función generatriz,...) y se detallan sus propiedades más importantes, entre las que destaca que los polinomios de Legendre forman un sistema ortogonal en el intervalo $(-1, 1)$, lo que facilita la introducción de los desarrollos en serie de Legendre. Se verifica el correspondiente teorema de convergencia y se emplea en la resolución de cierto problema de Dirichlet en una esfera.

El otro caso es el objetivo del Capítulo 2, en el que se aborda la determinación de la solución general de las ecuaciones diferenciales de segundo orden que poseen puntos singulares que sean regulares. Se demuestra el teorema de Frobenius, que nos dice la forma y cómo se hallan tales soluciones, además de establecer rigurosamente la validez del proceso. Como modelo se considera la ecuación diferencial de Bessel, cuya solución general se expresa mediante una combinación lineal de las funciones $J_\nu(x)$ e $Y_\nu(x)$ de Bessel de primera y segunda clase, respectivamente, y de orden ν. Estas soluciones reciben el nombre de funciones cilíndricas. Se analizan sus propiedades más relevantes: relaciones de recurrencia, ceros, ortogonalidad,... Finalizamos con el estudio de las series de Fourier-Bessel y su utilización en un problema de valores en la frontera en coordenadas cilíndricas.

Este tema se impartía en la antigua Licenciatura en Matemáticas, pero ha desaparecido de los programas del nuevo Grado. A pesar de que es un tema muy clásico, tiene su interés. Por una parte, permite una introducción diferente de las funciones especiales. Por otra, para su estudio es preciso recurrir a muchos de los conocimientos adquiridos a lo largo de la titulación.

1

Capítulo 1

1.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es ver si existe un método general para resolver la ecuación diferencial lineal con coeficientes variables

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

donde $y = y(x)$ y los coeficientes $a_j(x)$ son funciones complejas $(j = 1, 2, ..., n)$ definidas en el mismo intervalo real I. Un caso particularmente interesante se presenta cuando estos coeficientes son funciones analíticas reales. Se demuestra entonces que la ecuación posee soluciones que también son analíticas, si bien la demostración sólo se realiza en el caso $n = 2$.

Un prototipo de ecuación de esta clase lo constituye la ecuación diferencial de Legendre. De sus soluciones estamos interesados en los polinomios de Legendre, cuyo análisis se convertirá en el eje central de este capítulo. Se utilizarán otras formas de introducir los polinomios de Legendre: por la fórmula de Rodrigues, a partir de la función generatriz y como soluciones de cierta ecuación en diferencias finitas, mostrando que todas ellas son equivalentes. Después se considerarán sus principales propiedades, haciendo especial énfasis en que los polinomios de Legendre forman un sistema ortogonal. Esta propiedad permitirá definir los desarrollos en serie de Legendre, cuya convergencia se verificará rigurosamente bajo ciertas hipótesis.

Se concluye el capítulo resolviendo un problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace y en el que surgen de forma natural los polinomios de Legendre.

1.2. Ecuaciones diferenciales con coeficientes analíticos

Definición 1.1. *Se dice que una función g definida en un intervalo I abierto que contenga un punto x_0 es analítica en x_0 si g puede desarrollarse en una serie de* *potencias de* x_0 *cuyo radio de convergencia sea positivo, es decir, si* g *admite la representación*

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \quad ,$$

donde los c_k *son constantes y la serie converge para* $|x - x_0| < r_0, r_0 > 0$.

Sea la ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes variables

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = b(x)$$

y consideramos $a_0(x) \neq 0$. Dividiendo entre a_0, podemos obtener una ecuación de la misma forma pero en la cual a_0 queda reemplazada por la constante 1. Así, obtenemos la ecuación

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = b(x)$$

Llamando $L(y)$ al primer miembro de la ecuación anterior, nos queda

$$L(y) = b(x)$$

Si los coeficientes $a_1, ..., a_n$ de $L(y)$ son análiticos en x_0 resulta que la solución también lo será.

Teorema 1.2 (Teorema de existencia para el caso en que la ecuación tiene coeficientes analíticos). *Sea* x_0 *un número real, y supongamos que los coeficientes* $a_1(x), ..., a_n(x)$ *que aparecen en la ecuación*

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y$$

tienen desarrollos en series de potencias convergentes en cierto entorno

$$|x - x_0| < r_0, \qquad r_0 > 0.$$

Si $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *son* n *constantes cualesquiera, entonces existe una solución* ϕ *del problema*

$$L(y) = 0, \;\; y(x_0) = \alpha_1, ..., \;\; y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n,$$

la cual admite un desarrollo en serie de potencias de la siguiente forma

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \quad ,$$

que también converge para $|x - x_0| < r_0$. *Los coeficientes* c_k *vienen dados por*

$$k! c_k = \alpha_{k+1}, \qquad k = 0, 1, ..., n - 1,$$

y entonces para $k \geq n$, c_k *puede calcularse en términos de* $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ *sustituyendo la serie* $\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ *en la ecuación* $L(y) = 0$.

Demostración. Sólo haremos la demostración cuando $n = 2$ y $x_0 = 0$, ya que para este caso aparecen todas las ideas esenciales. Veamos primero unos resultados sobre series de potencias que aplicaremos luego en la demostración.

1. Si tenemos dos series de potencias
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \ \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \qquad (x_0 = 0)$$
y sabemos que
$$|c_k| \leq C_k, \quad C_k \geq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$$
y que la serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$
converge para $|x| < r$, $r > 0$, entonces la serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$
también converge para $|x| < r$.
2. Las series potenciales son uniforme y absolutamente convergentes en el interior de su intervalo de convergencia. Por tanto, las funciones que representan son infinitamente derivables y sus derivadas se obtienen derivando término a término las series correspondientes.
3. Si una serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$$
es convergente para $|x| < r_0$, entonces para todo x con $|x| = r < r_0$, existe una M constante, $M > 0$, tal que
$$\left|\alpha_k x^k\right| = |\alpha_k| \, |x|^k = |\alpha_k| \, r^k \leq M, \quad k = 0, 1, 2, ...$$
Para demostrar esto, vemos que si la serie es convergente para $|x| = r$, sus términos deben tender a cero,
$$\left|\alpha_k x^k\right| = |\alpha_k| \, r^k \longrightarrow 0 \ \ , \ \ k \longrightarrow \infty.$$
En particular existe un entero $N > 0$ tal que
$$|\alpha_k| \, r^k \leq 1, \qquad (k > N).$$
Si ahora tomamos $M = \text{máx}\left\{|\alpha_0|, |\alpha_1| \, r, ..., |\alpha_N| \, r^N, 1\right\}$, se verifica que $r^k \, |\alpha_k| \leq M$ para todo $k = 0, 1, 2, ...$

Consideramos ahora la ecuación

$$L(y) = y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad , \tag{1.1}$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones analíticas cuyos desarrollos en series de potencias son

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \quad , \quad b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k \tag{1.2}$$

convergentes en $|x| < r_0$, $r_0 > 0$.
Queremos determinar una solución ϕ de (1.1) que satisfaga las condiciones iniciales

$$\phi(0) = q_1, \;\; \phi'(0) = q_2,$$

con q_1 y q_2 dos constantes cualesquiera, y que sea de la forma

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Vamos a calcular ahora los valores c_k, con $k \geq 2$, ya que los dos primeros coeficientes vienen determinados por los datos iniciales

$$c_0 = q_1 \quad , \quad c_1 = q_2.$$

Derivando,

$$\phi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k$$

$$\phi''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k$$

Seguidamente multiplicamos por $a(x)$ y $b(x)$, y sustituyendo en (1.1), obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k-j}(j+1)c_{j+1}\right) x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} \beta_{k-j}c_j\right) x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)(k+1)c_{k+2} + \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k-j}(j+1)c_{j+1} + \sum_{j=0}^{k} \beta_{k-j}c_j\right) x^k = 0$$

Así, c_k debe satisfacer la siguiente relación

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} = -\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k-j}(j+1)c_{j+1} + \beta_{k-j}c_j \quad , \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{1.3}$$

Ahora debemos demostrar que si las c_k, $k \geq 2$, están definidas de esta forma, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ es convergente para $|x| < r_0$. Para ello usaremos los resultados vistos al inicio de la demostración. Las series dadas en (1.2) son convergentes para $|x| = r$, $0 < r < r_0$, por lo que debe existir una constante $M > 0$ tal que

$$\left|\alpha_j x^j\right| = |\alpha_j| \, r^j \leq M \quad , \quad \left|\beta_j x^j\right| = |\beta_j| \, r^j \leq M \quad , \quad j = 0, 1, 2, ...$$

Usando esto en (1.3) vemos que

$$(k+2)(k+1) \, |c_{k+2}| \leq \frac{M}{r^k} \sum_{j=0}^{k} \left[(j+1) \, |c_{j+1}| + |c_j|\right] r^j \leq$$

$$\leq \frac{M}{r^k} \sum_{j=0}^{k} \left[(j+1) \, |c_{j+1}| + |c_j|\right] r^j + M \, |c_{k+1}| \, r \tag{1.4}$$

Definimos ahora unos nuevos coeficientes

$$C_0 = |c_0| \quad , \quad C_1 = |c_1| \tag{1.5}$$

y C_k, con $k \geq 2$, mediante

$$(k+2)(k+1) C_{k+2} = \frac{M}{r^k} \sum_{j=0}^{k} \left[(j+1) C_{j+1} + C_j\right] r^j + M C_{k+1} r \quad , \tag{1.6}$$

donde $k = 0, 1, 2, ...$ Verificaremos por inducción que

$$|c_k| \leq C_k \quad , \quad C_k \geq 0 \quad , \quad k = 0, 1, 2, ...$$

O lo que es lo mismo,

$$C_k - |c_k| \geq 0$$

Podemos escribir

$$(k+2)(k+1)(C_{k+2} - |c_{k+2}|) \geq \frac{M}{r^k} \sum_{j=0}^{k} [(j+1)(C_{j+1} - |c_{j+1}|) + (C_j - |c_j|)] r^j +$$

$$+ M(C_{k+1} - |c_{k+1}|) r$$

Ya sabemos que $|c_0| \leq C_0$ y $|c_1| \leq C_1$. Si $k = 0$, sigue que

$$2(C_2 - |c_2|) \geq \frac{M}{r^0} [(C_1 - |c_1|) + (C_0 - |c_0|)] r^0 + M(C_1 - |c_1|) r = 0$$

por (1.5), por lo que $C_2 - |c_2| \geq 0$ y, en consecuencia $|c_2| \leq C_2$.
Supongamos que sea cierto para k, esto es,

$$|c_{k+2}| \leq C_{k+2}$$

Para $k+1$ tenemos:

$$(k+3)(k+2)(C_{k+3}-|c_{k+3}|) \geq \frac{M}{r^{k+1}} \sum_{j=0}^{k+1} [(j+1)(C_{j+1}-|c_{j+1}|)+(C_j-|c_j|)]r^j +$$

$$+M(C_{k+2}-|c_{k+2}|)r \quad ,$$

cuyo segundo miembro es mayor o igual que cero, por las hipótesis de inducción. Por tanto, $C_{k+3}-|c_{k+3}| \geq 0$, es decir,

$$|c_{k+3}| \leq C_{k+3} \quad .$$

Así hemos verificado en cualquier caso que

$$|c_k| \leq C_k \quad , \quad C_k \geq 0 \quad , \quad k=0,1,2,...$$

Para ver que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

converge, por las consideraciones preliminares bastaría ver para qué valores de x la serie de términos positivos

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$

converge.
Entonces, a partir de (1.6) tenemos

$$(k+1)kC_{k+1} = \frac{M}{r^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} [(j+1)C_{j+1}+C_j]r^j + MC_k r \tag{1.7}$$

$$k(k-1)C_k = \frac{M}{r^{k-2}} \sum_{j=0}^{k-2} [(j+1)C_{j+1}+C_j]r^j + MC_{k-1} r \tag{1.8}$$

para valores grandes de k.
A partir de estas expresiones, multiplicando (1.7) por r y despejando en (1.8) nos queda

$$r(k+1)kC_{k+1} = \frac{M}{r^{k-2}} \sum_{j=0}^{k-2} [(j+1)C_{j+1}+C_j]r^j + M(kC_k+C_{k-1})r + MC_k r^2 =$$

$$= k(k-1)C_k - MC_{k-1}r + MkC_kr + MC_{k-1}r + MC_kr^2 =$$
$$= [k(k-1) + Mkr + Mr^2]C_k$$

Finalmente, por la prueba del cociente,

$$\left|\frac{C_{k+1}x^{k+1}}{C_kx^k}\right| = \frac{k(k-1) + Mkr + Mr^2}{r(k+1)k}|x| \longrightarrow \frac{|x|}{r}$$

cuando $k \to \infty$ y, por tanto, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} C_kx^k$ converge para $|x| < r$. Esto implica que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$ también converge para $|x| < r$ y, dado que escogimos r como cualquier número con $0 < r < r_0$, queda demostrado que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$ converge para $|x| < r_0$.

1.3. Polinomios de Legendre

1.3.1. Distintas formas de introducir los polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre se pueden definir de distintas maneras.

(a) <u>Como soluciones de una ecuación diferencial</u>

Nos planteamos el siguiente problema de valores en la frontera: hallar las soluciones de la ecuación diferencial

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0 \quad , \quad -1 < x < 1 \quad , \tag{1.9}$$

de manera que permanezcan acotadas en $x = -1$ y $x = 1$, esto es, en los extremos del intervalo. Aquí λ denota un parámetro e $y = y(x)$. La ecuación se puede escribir, para $x \in (-1, 1)$, en la forma

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2}y = 0 \quad .$$

Fácilmente se comprueba que

$$a(x) = \frac{-2x}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} -2x^{2k+1}$$

$$b(x) = \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(\lambda+1)x^{2k} \quad ,$$

convergiendo ambas series en $(-1,1)$. Así los coeficientes $a(x)$ y $b(x)$ son funciones analíticas en el entorno del origen $|x|<1$ y, por tanto, se puede aplicar el Teorema 1.2. Este teorema nos garantiza que existen soluciones de (1.9) del tipo

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \quad , \tag{1.10}$$

que también converge en $|x|<1$.
A fin de determinar los coeficientes c_k, sustituimos (1.10) y sus derivadas en (1.9) y obtenemos

$$\lambda(\lambda+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k-2\sum_{k=0}^{\infty}kc_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)c_kx^k=0$$

Una vez unificados los exponentes de las potencias, llegamos a que

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2}+(\lambda+k+1)(\lambda-k)c_k]x^k=0$$

Por el principio de identificación de series potenciales, se obtiene la relación de recurrencia

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}+(\lambda+k+1)(\lambda-k)c_k=0 \quad , \tag{1.11}$$

que permitirá expresar los coeficientes de índice par en términos de c_0, y los de índice impar en función de c_1. En efecto,

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\tfrac{(\lambda+1)\lambda}{2}c_0\\
c_3 &= -\tfrac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3\cdot 2}c_1\\
c_4 &= \tfrac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4\cdot 3\cdot 2}c_0\\
c_5 &= \tfrac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}c_1
\end{aligned}$$

Y, por un proceso inductivo, en general se tiene

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= (-1)^n\tfrac{(\lambda+2n-1)\cdots(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n+2)}{(2n)!}c_0\\
c_{2n+1} &= (-1)^n\tfrac{(\lambda+2n)\cdots(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)\cdots(\lambda-2n+1)}{(2n+1)!}c_1
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.10) se deduce que las soluciones de (1.9) son de la forma

$$\varphi(x)=c_0\varphi_1(x)+c_1\varphi_2(x) \quad ,$$

donde

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2!}x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}x^4 - ...$$

$$... + (-1)^n \frac{(\lambda+2n-1)\cdots(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n+2)}{(2n)!}x^{2n} + ... \tag{1.12}$$

y

$$\varphi_2(x) = x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^5 - ...$$

$$... + (-1)^n \frac{(\lambda+2n)\cdots(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)\cdots(\lambda-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1} + ... \tag{1.13}$$

Obsérvese que $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_1'(0) = 0$ y $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2'(0) = 1$, por lo que $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ forman un sistema fundamental. Por otra parte, $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ representan en general funciones, no polinomios, emparentadas con las funciones de Legendre. Los desarrollos en serie (1.12) y (1.13) no convergen en $x = \pm 1$, en general.
Sólo cuando $\lambda = n$, $n \in \mathbb{N}$, los anteriores desarrollos en serie se truncan y se convierten en sumas finitas; en otras palabras, surgen los polinomios de Legendre, que sí cumplen las condiciones de frontera: siempre están acotados tanto en $x = -1$ como en $x = 1$. Los primeros polinomios de Legendre son, para $\lambda = 2n$:

$$P_0^*(x) = 1 \quad , \quad P_2^*(x) = 1 - 3x^2 \quad , \quad P_4^*(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4 ...$$

Para $\lambda = 2n - 1$:

$$P_1^*(x) = x \quad , \quad P_3^*(x) = x - \frac{5}{3}x^3 \quad , \quad P_5^*(x) = x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5 ...$$

(b) Mediante la fórmula de Rodrigues

Definimos los polinimos $P_n(x)$ como

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad , \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.14}$$

para valores arbitrarios reales o complejos de x. Los polinomios son:

$$P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x \quad , \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad , \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad , \quad ...$$

los cuales se diferencian de los obtenidos en (a) en un factor multiplicativo. Por ejemplo

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}P_2^*(x) \quad , \quad P_3(x) = -\frac{3}{2}P_3^*(x) \quad , \quad ...$$

Veamos que, efectivamente, los polinomios en la forma definida por (1.14) son solución de la ecuación diferencial de Legendre cuando $\lambda = n \in \mathbb{N}$

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0 \tag{1.15}$$

Si hacemos $u = \frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n$ y derivamos respecto de x, tenemos

$$u' = \frac{n}{2^n n!}2x(x^2-1)^{n-1} = \frac{2xn}{2^n n!}(x^2-1)^n \frac{1}{(x^2-1)} \implies$$

$$\implies (x^2-1)u' = \frac{2xn}{2^n n!}(x^2-1)^n = 2xnu$$

Por tanto, u cumple la ecuación diferencial

$$(x^2-1)u' - 2xnu = 0 \tag{1.16}$$

Si derivamos en (1.16) $n+1$ veces con respecto a x y aplicamos la regla de Leibniz para la derivada de un producto, resulta

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x^2-1)u'\right] - 2n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[xu\right] = 0$$

O lo que es lo mismo

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(x^2-1)^{(n+1-k)}(u')^{(k)} - 2n\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{(n+1-k)}u^{(k)} = 0$$

Entonces,

$$(x^2-1)u^{(n+2)} + (n+1)2xu^{(n+1)} + \frac{(n+1)n}{2}2u^{(n)} - 2n\left[xu^{(n+1)} + (n+1)u^{(n)}\right] = 0 \iff$$

$$\iff (x^2-1)u^{(n+2)} + 2xu^{(n+1)} - n(n+1)u^{(n)} = 0$$

Sustituyendo u por su valor en la expresión anterior, llegamos a que

$$(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n\right]\right) + 2x\frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n\right]\right) -$$

$$-n(n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n\right] = 0$$

Y, finalmente, a la vista de la fórmula de Rodrigues,

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad ,$$

tal y como queríamos ver.
La fórmula de Rodrigues permite dar una expresión unificada de todos los polinomios de Legendre. Ciertamente, por la fórmula del binomio de Newton sabemos que

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}$$

Derivando ahora n-veces, de acuerdo con (1.14) se obtiene

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \quad ,$$

donde el símbolo $[\alpha]$ denota la parte entera del número real α, es decir, el mayor entero que es menor o igual que α. Los primeros términos de este polinomio vienen dados así

$$P_n(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} + \ldots\right] \tag{1.17}$$

Observación 1.3. No existe contradicción entre los polinomios obtenidos en (b), que denotamos por $P_n(x)$, porque así aperecen en la literatura, y los derivados antes en (a), que representábamos por $P_n^*(x)$, ya que al ser la ecuación diferencial homogénea el producto de una solución por cualquier constante sigue siendo solución.

(c) <u>A partir de la función generatriz</u>

Sólo daremos unas ideas de la prueba de que

$$\omega(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1/2}$$

es la función generatriz de los polinomios de Legendre, es decir,

$$\omega(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{1.18}$$

Nos basaremos en el conocido desarrollo en serie de la binomial

$$(1+u)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}u^{n}\quad ,|u|<1.$$

Para todo $x\in[-1,1]$ es posible elegir t suficientemente pequeño para que $\left|t^2-2xt\right|<1$. Entonces se tiene

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(t^2-2xt)^n=$$

$$=1+\frac{1}{2}t(2x-t)+\frac{1}{2^2}\frac{3}{2}t^2(2x-t)^2+...+$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n n!}t^n(2x-t)^n+...=$$

$$=1+\frac{1}{2}(2xt-t^2)+\frac{3}{2^2\cdot2}t^2(4x^2-4xt+t^2)+...+$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n n!}t^n\left[(2x)^n-n(2x)^{n-1}t-...\right]+...$$

Ordenando por potencias de t se tiene que el coeficiente de t^0 es 1, que es $P_0(x)$; el coeficiente de t es $\frac{1}{2}(2x)=x$, que coincide con $P_1(x)$; el coeficiente de t^2 es $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2.2}(4x^2)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, que coincide con $P_2(x)$; el coeficiente de t^3 es $\frac{1\cdot3}{2^2 2!}(-4x)-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3 3!}(-2x)^3=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}x^3=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$, que coincide con $P_3(x)$; y, en general, el coeficiente de t^n es

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n n!}(2x)^n-\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-5)}{2^{n-2}(n-2)!}\frac{(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+...=$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}+...\right]\quad ,$$

que coincide con la expresión que define el polinomio de Legendre de grado n dado por la fórmula de Rodrigues en (1.17).

1.3.2. Relaciones de recurrencia

Si derivamos la función generatriz $\omega(x,t)$ con respecto de t obtenemos la ecuación

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{d}{dt}[(1-2xt+t^2)^{-1/2}]=-\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-3/2}(2t-2x)=(x-t)(1-2xt+t^2)^{-1}\omega\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (1-2xt+t^2)\frac{d\omega}{dt} = (x-t)\omega \Longrightarrow (1-2xt+t^2)\frac{d\omega}{dt} + (t-x)\omega = 0$$

Habíamos visto que $\omega(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$, por lo que podemos poner

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + (t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$$

Y operando tenemos que

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - 2xn\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^n +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n - x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$$

Si igualamos los coeficientes de t^n a cero nos queda

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad , \quad n = 1,2,... \tag{1.19}$$

El interés de esta fórmula de recurrencia es que relaciona tres polinomios de Legendre con índices consecutivos. Luego, con esta expresión, se podrían calcular los polinomios de Legendre empezando con $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.
De manera similar, si ahora derivamos $\omega(x,t)$ con respecto a x

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{d}{dx}[(1-2xt+t^2)^{-1/2}] = -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-3/2}(-2t) =$$

$$= t(1-2xt+t^2)^{-1}\omega \Longrightarrow (1-2xt+t^2)\frac{d\omega}{dx} - t\omega = 0$$

Sustituyendo $\omega(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$, se tiene

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = 0$$

Operando nos queda:

$$\sum_{n=-1}^{\infty} P_{n+1}'(x)t^{n+1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)'t^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}'(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = 0$$

Igualando los coeficientes de t^{n+1} a cero obtenemos

$$P_{n+1}'(x) - 2xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) - P_n(x) = 0 \quad , \quad n = 1,2,... \tag{1.20}$$

Ahora, derivando en (1.19) y restándole (1.20) multiplicada por n tenemos

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)xP'_n + nP'_{n-1}(x) -$$

$$-[nP'_{n+1}(x) - 2xnP'_n(x) + nP'_{n-1}(x) - nP_n(x)] = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x) \quad , \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.21}$$

Análogamente, si ahora le restamos (1.20) multiplicada por $(n+1)$, sigue

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)xP'_n + nP'_{n-1}(x) -$$

$$-[(n+1)P'_{n+1}(x) - 2x(n+1)P'_n(x) + (n+1)P'_{n-1}(x) - (n+1)P_n(x)] = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x) \quad , \quad n = 1, 2, ... \tag{1.22}$$

que son dos relaciones de recurrencia para la derivada. Sumando ambas expresiones, nos queda

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \quad , \quad n = 1, 2, ... \tag{1.23}$$

Finalmente, si reemplazamos n por $n-1$ en (1.21) tenemos

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) = nP_{n-1}(x)$$

y al restarla con (1.22) multiplicada por x

$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x) \quad , \quad n = 1, 2, ... \tag{1.24}$$

Esta última ecuación nos indica que la derivada de un polinomio de Legendre se puede expresar también en términos de polinomios de Legendre.
Si ahora derivamos (1.24) respecto de x y usamos (1.22) para eliminar el término $P'_{n-1}(x)$, llegamos a la fórmula:

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) - nP'_{n-1}(x) + nP_n(x) + nxP'_n(x) -$$

$$-[nxP'_n(x) - nP'_{n-1}(x) - n^2P_n(x)] = 0$$

En definitiva,

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

y obtenemos la ecuación diferencial de Legendre.

Observación 1.4. Este resultado es importante porque nos dice que las soluciones de la ecuación en diferencias finitas (1.19), que es lo que al fin de cuentas constituye una relación de recurrencia, satisfacen también la ecuación diferencial de Legendre (1.15). Además, resulta otra vía de introducir esta clase de polinomios.

1.3.3. Ortogonalidad

En este párrafo estudiaremos la relación de ortogonalidad de los polinomios de Legendre en el intervalo $[-1, 1]$. Recordemos que estos polinomios verifican la ecuación diferencial

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

o lo que es lo mismo,

$$\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' + n(n+1)P_n(x) = 0$$

Para probar esta propiedad, tomamos dos polinomios $P_n(x)$ y $P_m(x)$ tales que

$$\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' + n(n+1)P_n(x) = 0 \tag{1.25}$$

y

$$\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' + m(m+1)P_m(x) = 0 \tag{1.26}$$

Multiplicando (1.25) por $P_m(x)$, (1.26) por $P_n(x)$ y restando ambas obtenemos

$$\left[(1-x^2)(P_m'(x)P_n(x) - P_n'(x)P_m(x))\right]' = [n(n+1) - m(m+1)]P_m(x)P_n(x)$$

Integrando en ambos miembros entre -1 y 1, tenemos que

$$\int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)(P_m'(x)P_n(x) - P_n'(x)P_m(x))\right]' dx =$$

$$= [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx$$

y como la integral del primer miembro es cero,

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$$

Si $m \neq n$ entonces $n(n+1) - m(m+1) = (n-m)(n+m+1) \neq 0$ y de aquí tenemos que

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad , \quad si\ m \neq n \tag{1.27}$$

lo que nos dice que los polinomios de Legendre son ortogonales con función peso $\rho(x) = 1$ en el intervalo $[-1, 1]$.
También necesitaremos saber cuál es el valor de la integral (1.27) cuando $m = n$, es decir, el valor de la integral

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x) \quad , \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Para ello, usaremos la relación de recurrencia (1.19), que ya hemos visto, y sustituyendo n por $n-1$, queda

$$nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0$$

Multiplicando este resultado por $(2n+1)P_n(x)$ obtenemos

$$n(2n+1)P_n^2(x) - (2n-1)(2n+1)xP_n(x)P_{n-1}(x) + (n-1)(2n+1)P_n(x)P_{n-2}(x) = 0$$

Ahora, multiplicamos (1.19) por $(2n-1)P_{n-1}(x)$

$$(n+1)(2n-1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) - (2n+1)(2n-1)xP_{n-1}(x)P_n(x) + n(2n-1)P_{n-1}^2(x) = 0$$

y restando ambas expresiones sigue

$$n(2n+1)P_n^2(x) + (n-1)(2n+1)P_n(x)P_{n-2}(x) -$$

$$-(n+1)(2n-1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) - n(2n-1)P_{n-1}^2(x) = 0$$

Finalmente, integrando esta relación sobre el intervalo $[-1, 1]$ y teniendo en cuenta que $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$ cuando $m \neq n$, tenemos que

$$n(2n+1)\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx + (n-1)(2n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_{n-2}(x)dx -$$

$$-(n+1)(2n-1)\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)dx - n(2n-1)\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx \quad , \quad n = 2, 3, ...$$

Repitiendo este proceso, llegamos a que

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{3}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx$$

y, como sabemos que $P_1(x) = x$, entonces

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

Por tanto,

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \left(\frac{3}{2n+1}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{2n+1} \quad , \quad para\ n = 0, 1, 2, ...$$

ya que nos vale también para $n = 0$ y $n = 1$.
Concluimos que

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & , si\ n = m \\ \\ 0 & , si\ n \neq m \end{cases} \tag{1.28}$$

A partir de aquí, vemos fácilmente que las funciones

$$\varphi_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(x) \quad , \quad n = 0, 1, 2, ...$$

forman un sistema ortonormal en el intervalo $[-1, 1]$.

1.4. Desarrollos en serie de Fourier-Legendre

En muchos problemas de matemáticas aplicadas se necesita desarrollar una función real conocida $f(x)$, definida en el intervalo $(-1, 1)$, en una serie del tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad , \quad -1 < x < 1 \tag{1.29}$$

Por su analogía con el más familiar y famoso desarrollo en serie de Fourier, en el que se utiliza el sistema ortogonal de funciones trigonométricas seno y coseno, la expresión (1.29) se denominará desarrollo en serie de Fourier-Legendre o, simplemente, desarrollo en serie de Legendre. Su objetivo es desarrollar cierta clase de funciones en series de polinomios de Legendre, es decir, tomar como sistema ortogonal de referencia el constituido por dichos polinomios.
Los coeficientes c_n se pueden determinar usando la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre. Para ello, multiplicamos (1.29) por $P_m(x)$, integramos sobre el intervalo $(-1, 1)$ y tenemos en cuenta (1.28). Operando formalmente se tiene

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)\right) P_m(x)dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2m+1} c_m \quad ,$$

de donde

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx \quad , \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.30}$$

Inmediatamente surgen las siguientes preguntas: ¿Qué funciones admiten un desarrollo de este tipo? ¿Una vez calculados los coeficientes c_n de acuerdo con (1.30), la serie (1.29) "devuelve" $f(x)$, esto es, converge a $f(x)$?
Nuestro objetivo es aclarar estas cuestiones, de forma muy particular, en lo que sigue. Comenzamos enunciando un lema [4, pág. 54], que guarda cierto parecido con el de Riemann-Lebesgue en la teoría de las series de Fourier.

Lema 1.5. *Sea una función real $\varphi(x)$ continua en $(-1,1)$ tal que $\varphi \in L^2(-1,1)$, esto es,*

$$\int_{-1}^{1} \varphi^2(x) dx \quad < \quad \infty$$

Entonces

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n + \frac{1}{2}} \int_{-1}^{1} \varphi(x) P_n(x) dx = 0 \ .$$

Ya estamos en condiciones de establecer el siguiente

Teorema 1.6. *Supongamos que $f \in C^1([-1,1])$, es decir, f es derivable con derivada continua en el intervalo $[-1,1]$. Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$, con coeficientes c_n calculados como en (1.30), converge a $f(x)$, $-1 < x < 1$.*

Demostración. Obsérvese primeramente que, por las condiciones asumidas sobre $f(x)$, se garantiza de sobra la existencia de la integral del segundo miembro de (1.30), por lo cual los coeficientes c_n pueden ser calculados.
Considérese ahora la sucesión de sumas parciales de la serie (1.29) y definamos $S_m(x)$ como la suma de los primeros $m+1$ términos de la serie de Legendre. Teniendo en cuenta (1.30) podemos escribir

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n(x) = \sum_{n=0}^{m} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) \int_{-1}^{1} f(y) P_n(y) dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} f(y) K_m(x,y) dy \quad , \tag{1.31}$$

donde

$$K_m(x,y) = \sum_{n=0}^{m} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) P_m(y) \tag{1.32}$$

Es posible hallar una expresión más compacta de $K_m(x,y)$. Para ello multiplicamos la relación de recurrencia (1.19) por $P_n(y)$, obteniéndose

$$(n+1) P_{n+1}(x) P_n(y) - (2n+1) x P_n(x) P_n(y) + n P_{n-1}(x) P_n(y) = 0$$

A continuación a la expresión anterior le restamos la misma con x e y intercambiados, resultando

$$(n+1)[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)] - (2n+1)(x-y)P_n(x)P_n(y) +$$
$$+ n[P_{n-1}(x)P_n(y) - P_{n-1}(y)P_n(x)] = 0$$

o lo que es lo mismo

$$(n+1)[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)] - n[P_{n-1}(y)P_n(x) - P_{n-1}(x)P_n(y)] =$$
$$= (2n+1)(x-y)P_n(x)P_n(y)$$

Sumando desde n igual a 1 hasta m y teniendo presente que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$, se deduce

$$(x-y)\sum_{n=1}^{m}(2n+1)P_n(x)P_n(y) = (m+1)[P_{m+1}(x)P_m(y) - P_{m+1}(y)P_m(x)] - (x-y) \quad ,$$

lo que entraña, si $x \neq y$, que

$$K_m(x,y) = \frac{m+1}{2}\frac{P_{m+1}(x)P_m(y) - P_{m+1}(y)P_m(x)}{x-y} \tag{1.33}$$

Si integramos en (1.32) respecto de y y usamos (1.28), puesto que como $P_0(y) = 1$,

$$\int_{-1}^{1} P_m(y)dy = \int_{-1}^{1} P_0(y)P_m(y)dy = \begin{cases} 0 \ , & m \neq 0 \\ 2 \ , & m = 0 \end{cases}$$

se concluye que

$$\int_{-1}^{1} K_m(x,y)dy = 1 \tag{1.34}$$

Sea x un punto arbitrariamente fijado en $(-1,1)$. Entonces, de (1.31) y (1.34) se infiere que

$$S_m(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} K_m(x,y)[f(y) - f(x)]dy =$$

$$= \frac{m+1}{2}P_m(x)\int_{-1}^{1} P_{m+1}(y)\varphi(x,y)dy - \frac{m+1}{2}P_{m+1}(x)\int_{-1}^{1} P_m(y)\varphi(x,y)dy \tag{1.35}$$

Aquí $\varphi(x,y)$ es la función $\varphi : [-1,1] \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} & , y \neq x \\ f'(x) & , y = x \end{cases}$$

Por las hipótesis realizadas sobre la función $f(x)$, esta función $\varphi(x,y)$ es continua en $[-1,1] \times [-1,1]$ y, por tanto, acotada. En consecuencia, considerada como función de y, satisface las condiciones del Lema 1.5 y se sigue inmediatamente

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt{(m+1)+\frac{1}{2}} \int_{-1}^{1} P_{m+1}(y)\varphi(x,y)dy =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sqrt{m+\frac{1}{2}} \int_{-1}^{1} P_m(y)\varphi(x,y)dy = 0 \tag{1.36}$$

Por otra parte, si tenemos en mente el desarrollo asintótico de los polinomios de Legendre para grandes valores de n [4, pág. 53]

$$P_n(cos\theta) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi n sen\theta}} sen\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right] \quad , \tag{1.37}$$

$n \to \infty$, $\delta \le \theta \le \pi - \delta$, se tiene que

$$\frac{m+1}{2\sqrt{m+\frac{3}{2}}} P_m(x) = O(1) \quad , \quad \frac{m+1}{2\sqrt{m+\frac{1}{2}}} P_{m+1}(x) = O(1) \quad ,$$

es decir, estas expresiones están acotadas cuando $m \to \infty$.
Todas las anteriores consideraciones implican que el último miembro de (1.35) se anula cuando $m \to \infty$, pues ambos sumando son productos de términos que permanecen acotados por expresiones que convergen a cero. Así pues, también se tiene que $\lim_{m\to\infty}[S_m(x) - f(x)] = 0$ y, en definitiva, se ha establecido que

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = f(x) \quad ,$$

con lo que queda demostrada la convergencia de la serie (1.29).

1.5. Aplicaciones

Los polinomios de Legendre y el desarrollo en serie de Legendre aparecen en numerosos problemas de la física-matemática, especialmente cuando se utilizan coordenadas esféricas.
Recordemos que una función $u = u(x,y,z)$ se dice que es armónica en cierto dominio $\varOmega \subset \mathbb{R}^3$ si $u \in C^2(\varOmega)$ y satisface la ecuación de Laplace

$$\varDelta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Sabemos que en coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = rsen\theta cos\varphi \\ y = rsen\theta sen\varphi \\ z = \quad rcos\theta \end{cases}$$

donde $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, la ecuación de Laplace se reescribe según

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad , \tag{1.38}$$

donde $u = u(r, \theta, \varphi)$. En el supuesto de que el problema que se aborda tenga simetría esférica, u no depende de φ y la ecuación (1.38) se simplifica, quedando

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0 \tag{1.39}$$

Si hacemos el cambio de variable $x = cos\theta$ y mantenemos r, (1.39) adopta la forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0 \quad , \tag{1.40}$$

donde $u = u(r, x)$. Por eso, nos planteamos a continuación resolver el problema de Dirichlet: encontrar la función $u = u(r, x)$ tal que

(i) $u(r, x)$ es armónico en el dominio $r < a$, es decir, verifica la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + L\right)u(r, x) = 0 \quad , \tag{1.41}$$

siendo L el operador

$$L = \frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}$$

(ii) $u(r, x)$ es continua en el dominio cerrado $r \leq a$, $-1 \leq x \leq 1$.

(iii) $u(r, x)$ satisface la condición de frontera

$$u(a, x) = f(x) \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \quad ,$$

donde $f(x)$ es continua en $[-1, 1]$.

Busquemos una solución por el método de separación de variables, para lo cual ponemos $u(r, x) = R(r)X(x)$. Sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales (1.41), se obtiene

$$X(x)\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right] + R(r)LX(x) = 0 \quad ,$$

que puede ser escrita en la forma

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right] = -\frac{LX(x)}{X(x)} \quad ,$$

lo cual es sólo posible si ambos miembros son iguales a una constante, sea λ. Así se origina el par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$LX(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$\left(r^2R'(r)\right)' - \lambda R(r) = 0$$

Lo primero es la ecuación diferencial de Legendre

$$(1-x^2)X''(x) - 2xX'(x) + \lambda X(x) = 0 \quad , \quad -1 < x < 1$$

Puesto que, por (ii), las soluciones deben ser acotadas, ello ocurre si $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, ...$ Entonces las soluciones son polinomios de Legendre de grado n, esto es,

$$X_n(x) = P_n(x)$$

La segunda ecuación es de Euler

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) - n(n+1)R(r) = 0 \quad ,$$

cuya solución general es

$$R(r) = C_1r^n + C_2r^{-n} \quad ,$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias. La acotación exigida, en particular para $r = 0$, entraña que $C_2 = 0$, y queda

$$R_n(r) = C_1r^n$$

La solución, por el principio de superposición de soluciones elementales, viene dado por

$$u(r,x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(x)$$

De la condición de frontera sigue

$$u(a,x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n P_n(x) = f(x)$$

Por el Teorema 1.6 se deduce que

$$c_n a^n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} P_n(y)f(y)dy$$

La solución deseada viene suministrada por

$$u(r,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(x)\left(\int_{-1}^{1} P_n(y)f(y)dy\right)$$

2

Capítulo 2

2.1. Introducción

En este capítulo se estudian las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables y que poseen puntos singulares regulares.

En la segunda sección se clasifican y explica qué son los puntos singulares, centrándonos en los regulares, que originan un marco de estudio análogo - aunque mucho más difícil- que el visto en el capítulo precedente. En el tercer apartado se tratan las ecuaciones de Euler, que son las más sencillas que poseen un punto singular regular.

El resultado fundamental de este capítulo, el teorema de Frobenius, se enuncia y demuestra en el párrafo cuarto. Este teorema da una respuesta tan positiva como la desarrollada en el primer capítulo, ya que garantiza que una ecuación de este tipo tiene siempre soluciones y, además, señala cómo hallarlas, si bien los problemas que se abordan ahora son mucho más complicados.

En la sección quinta se aplican estos resultados teóricos a la resolución de la ecuación diferencial de Bessel de índice ν distinguiendo -primero- si dicho parámetro es entero o no, y hallando -después- su solución general en una única expresión. Así surgen las funciones de Bessel $J_\nu(x)$ e $Y_\nu(x)$ de primera y segunda clase, respectivamente, y de orden ν. Fijamos nuestra atención especialmente en las de primera especie, presentando sus principales propiedades: relaciones de recurrencia, ceros,...

En la última sección se comprueba que la familia de funciones de Bessel $(J_\nu(\lambda_n a))_{n\in\mathbb{N}}$, donde λ_n denota el n-ésimo cero positivo de la ecuación $J_\nu(ax) = 0$, $a > 0$, constituyen un sistema ortogonal en el intervalo $(-a, a)$ con función peso $\rho(x) = x$. Esta propiedad nos permitirá considerar los desarrollos en serie de Fourier-Bessel. Concluye el capítulo con una aplicación de estas series en la resolución de un problema planteado mediante ecuaciones en derivadas parciales cuando se usan coordenadas cilíndricas.

2.2. Puntos singulares

Consideramos nuevamente la ecuación

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{2.1}$$

cuyos coeficientes son analíticos en un entorno de cierto x_0. Diremos que x_0 es un punto singular si $a_0(x_0) = 0$. Además si la ecuación (2.1) se puede escribir de la forma:

$$(x - x_0)^n y^{(n)} + b_1(x)(x - x_0)^{n-1} y^{(n-1)} + ... + b_{n-1}(x)(x - x_0)y' + b_n(x)y = 0$$

siendo $b_1, b_2, ..., b_n$ funciones analíticas en un entorno de x_0, se dirá que x_0 es un punto singular regular de (2.1). En los demás casos se llamará punto singular irregular.
En particular, si las funciones $b_k(x)$ se pueden expresar como

$$b_k(x) = (x - x_0)^k \beta_k(x) \quad , \quad k = 1, 2, ..., n$$

con β_k analíticos en un entorno de x_0, la ecuación anterior se transforma en

$$y^{(n)} + \beta_1(x)y^{(n-1)} + ... + \beta_{n-1}(x)y' + \beta_n(x)y = 0$$

ecuación con coeficientes analíticos ya estudiados en en Capítulo 1. Es decir, la ecuación (2.1) es una generalización de la ecuación de coeficientes analíticos analizada en el capítulo anterior.

2.3. Ecuación de Euler

La ecuación de Euler es la más sencilla de las ecuaciones no consideradas en el Capítulo 1 que presenta un punto singular regular. Además, es un buen ejemplo antes de abordar el caso más general. Nos limitaremos al estudio del caso $n = 2$.
La ecuación de Euler de segundo orden es

$$L(y) = (x - x_0)^2 y'' + a(x - x_0)y' + by = 0$$

con a y b constantes. Se ve directamente que x_0 es un punto singular regular. Haciendo el cambio $x = x - x_0$ podemos convertir la ecuación anterior en otra similar con un punto singular en el origen. Por ello, estudiaremos la ecuación de Euler de la siguiente manera

$$L(y) = x^2 y'' + axy' + by = 0 \tag{2.2}$$

donde a y b son constantes. Buscamos soluciones de (2.2) de la forma

$$y = x^r$$

y supongamos $x > 0$. Entonces

$$y' = rx^{r-1} \quad , \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

y sustituyendo en (2.2), se tiene

$$L(x^r) = [r(r-1) + ar + b]x^r$$

Llamamos ecuación indicial al polinomio:

$$p(r) = r(r-1) + ar + b \tag{2.3}$$

Por tanto, el resultado anterior lo podemos escribir como

$$L(x^r) = p(r)x^r \tag{2.4}$$

Ahora diferenciaremos dos casos, según las raíces de (2.3) sean distintas o iguales: Si el polinomio indicial (2.3) tiene dos raíces distintas, $r_1 \neq r_2$, se obtienen inmediatamente dos soluciones linealmente independientes

$$\varphi_1(x) = x^{r_1} \quad , \quad \varphi_2(x) = x^{r_2}$$

En cambio, si $r_1 = r_2$, esto es, si r_1 es una raíz doble, tendremos que proceder de otra forma. En este caso $p(r_1) = 0$ y $p'(r_1) = 0$. Entonces, si derivamos en (2.4) respecto de r, sigue que

$$\frac{\partial}{\partial r}[L(x^r)] = \frac{\partial}{\partial r}[p(r)x^r]$$

$$L\left[\frac{\partial}{\partial r}(x^r)\right] = p'(r)x^r + p(r)x^r lnx$$

$$L(x^r lnx) = p'(r)x^r + p(r)x^r lnx$$

y haciendo $r = r_1$, tenemos que

$$L(x^{r_1} lnx) = 0$$

Por tanto, tomaremos como soluciones las funciones

$$\varphi_1(x) = x^{r_1} \quad , \quad \varphi_2(x) = x^{r_1} lnx$$

que son linealmente independientes.
Por otra parte, para el caso $x < 0$, buscaremos soluciones de (2.2) de la forma

$$y = (-x)^r$$

Resumiendo, hemos establecido lo siguiente:

Proposición 2.1. *La ecuación de Euler de segundo orden*

$$x^2y'' + axy' + by = 0,$$

donde a y b son constantes, admite la siguiente familia de soluciones fundamentales en cualquier intervalo que no contenga a $x = 0$:

(i) Si $r_1 \neq r_2$:

$$\varphi_1(x) = |x|^{r_1} \quad , \quad \varphi_2(x) = |x|^{r_2}$$

(ii) Si $r_1 = r_2$:

$$\varphi_1(x) = |x|^{r_1} \quad , \quad \varphi_2(x) = |x|^{r_1}\, ln\, |x|$$

Observación 2.2. Estos resultados se pueden extender fácilmente a la ecuación de Euler de orden n:

$$L(y) = x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \quad (2.5)$$

donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son constantes.

Observación 2.3. Las ecuaciones tipo Euler se reducen fácilmente a otras lineales con coeficientes constantes sin más que cambiar de variable independiente mediante

$$x = e^t \quad (\Longleftrightarrow \ t = lnx)$$

2.4. Ecuaciones lineales de segundo orden con puntos singulares regulares. Caso general

En lugar de la ecuación

$$(x - x_0)^2 y'' + a(x)(x - x_0)y' + b(x)y = 0,$$

que supondremos admite un punto singular regular en $x = x_0$, consideraremos la ecuación

$$x^2 y'' + a(x)xy' + b(x)y = 0 \quad (2.6)$$

con un punto singular en el origen. Por tanto, $a(x)$ y $b(x)$ poseen desarrollos en serie de potencias

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \quad , \quad b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$$

convergentes en $|x| < r_0$, $r_0 > 0$. Si buscamos soluciones de (2.6) de la forma

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r} = c_0 x^r + c_1 x^{r+1} + ... + c_k x^{r+k} + ... \quad (2.7)$$

donde r y c_k están a determinar, $x > 0$ y suponemos $c_0 \neq 0$*. Derivando tenemos

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)c_k x^{k+r-1} = c_0 r x^{r-1} + c_1(r+1)x^r +$$

$$+c_2(r+2)x^{r+1} + ... + c_k(r+k)x^{k+r-1} + ... \tag{2.8}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r-2} = c_0 r(r-1)x^{r-2} + c_1(r+1)r x^{r-1} +$$

$$+c_2(r+2)(r+1)x^r + ... + c_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2} + ... \tag{2.9}$$

Sustituyendo en (2.6) y teniendo en cuenta los desarrollos en serie de $a(x)$ y $b(x)$, resulta

$$c_0 r(r-1)x^r + c_1(r+1)r x^{r+1} + c_2(r+2)(r+1)x^{r+2} + ...$$

$$... + (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ...)(c_0 r x^r + c_1(r+1)x^{r+1} + c_2(r+2)x^{r+2} + ...) +$$

$$+(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + ...)(c_0 x^r + c_1 x^{r+1} + c_2 x^{r+2} + ...) = 0$$

Si igualamos a cero las distintas potencias de x obetenemos la siguiente tabla

Potencia	Coeficiente igualado a cero
x^r	$[r(r-1) + \alpha_0 r + \beta_0]c_0 = 0$
x^{r+1}	$[(r+1)r + \alpha_0(r+1) + \beta_0]c_1 + (r\alpha_1 + \beta_1)c_0 = 0$
x^{r+2}	$[(r+2)(r+1) + \alpha_0(r+2) + \beta_0]c_2 + [(r+1)\alpha_1 + \beta_1]c_1 + (r\alpha_2 + \beta_2)c_0 = 0$
$\vdots$	$\vdots$
x^{r+k}	$p(r+k)c_k + d_k = 0$
$\vdots$	$\vdots$

donde

$$p(r) = r(r-1) + \alpha_0 r + \beta_0 = r(r-1) + a(0)r + b(0) = 0 \tag{2.10}$$

* Si el primer $c_k \neq 0$ fuese c_j quedaría

$$y(x) = x^{r+j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{j+k} x^k = x^{\bar{r}} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k x^k \quad , \quad con\ \bar{c}_0 = c_j \neq 0$$

es la ecuación indicial, y

$$d_k = \sum_{j=0}^{k-1} [(j+r)\alpha_{k-j} + \beta_{k-j}]c_j \tag{2.11}$$

La tabla anterior y (2.11) nos permiten determinar $c_1, c_2, c_3, ...$ en función de c_0 y r. A las soluciones de ese sistema las denotamos $C_1(r), C_2(r), C_3(r), ...$ y a las d_k correspondientes, $D_1(r), D_2(r), D_3(r), ...$ Así tenemos, por ejemplo,

$$D_1(r) = (r\alpha_1 + \beta_1)c_0 \quad , \quad C_1(r) = -\frac{D_1(r)}{p(r+1)}$$

Y en general,

$$D_k(r) = \sum_{j=0}^{k-1} [(j+r)\alpha_{k-j} + \beta_{k-j}]C_j(r) \tag{2.12}$$

$$C_k(r) = -\frac{D_k(r)}{p(r+k)} \quad , \quad k = 1, 2, ... \tag{2.13}$$

Obsérvese que los coeficientes C_k determinados de esta forma son funciones racionales de r, ya que son cocientes de polinomios, y sólo dejan de estar definidas cuando $p(r+k) = 0$, para algún $k = 1, 2, ...$ Pero esto únicamente es posible en dos puntos ya que (2.10) es un polinomio de segundo grado.
Definamos

$$Y(x,r) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r)x^k = c_0 x^r + x^r \sum_{k=1}^{\infty} C_k(r)x^k \tag{2.14}$$

Si la serie (2.14) converge en $0 < x < r_0$, y por (2.14), (2.12) y (2.13) tenemos:

$$L[Y(x,r)] = c_0 p(r) x^r \tag{2.15}$$

Por tanto, si la expresión $y(x)$ dada por (2.7) es una solución de (2.6), entonces r debe ser una raíz de la ecuación indicial $p(r)$ y los coeficientes c_k vienen dados por (2.13) como funciones de c_0 y r. Recíprocamente, si r es una raíz de $p(r)$ y los $C_k(r)$ se pueden determinar, esto es, $p(r+k) \neq 0$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces la función $y(x) = Y(x,r)$ dada por (2.14) es una solución de (2.6) independientemente de cual sea el valor de c_0 que se elija y siempre que tal serie sea convergente.
Llamamos r_1 y r_2 a las dos raíces de (2.10), de modo que $Re(r_1) \geq Re(r_2)$. Es obvio que $p(r_1 + k) \neq 0$, $k = 1, 2, ...$ y, por tanto, se pueden determinar todos los coeficientes $C_k(r_1)$, $k = 1, 2, ...$ Podemos tomar $c_0 = C_0(r_1) = 1$ y obtener así una primera solución de (2.6)

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_1) x^k \quad , \quad C_0(r_1) = 1 \tag{2.16}$$

Para la otra raíz r_2, $r_2 \neq r_1$, supongamos también que $p(r_2 + k) \neq 0$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$. Análogamente podemos fijar $c_0 = C_0(r_2) = 1$ y obtenemos todas las restantes $C_k(r_2)$, llegando así a una segunda solución

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_2) x^k \quad , \quad C_0(r_2) = 1 \tag{2.17}$$

de (2.6). Nótese que

$$p(r_2 + k) \neq 0 \iff r_1 \neq r_2 + k \iff r_1 - r_2 \neq k \quad , \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

Hasta aquí hemos supuesto que $x > 0$. Todo el proceso sigue siendo válido para $x < 0$, ya que bastaría con sustituir x^r por $(-x)^r$. En muchos casos, dependiendo del valor de r, vale incluso si $x = 0$. Entonces, ya podemos enunciar el siguiente

Teorema 2.4 (Teorema de Frobenius). *Dada la ecuación*

$$x^2 y'' + a(x) x y' + b(x) y = 0 \quad ,$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ tienen desarrollos en series de potencias convergentes en $|x| < r_0$, $r_0 > 0$, si r_1, r_2 ($Re(r_1) \geq Re(r_2)$) denotan las raíces del polinomio indicial

$$p(r) = r(r-1) + a(0) r + b(0),$$

se tiene:

(i) Si $r_1 \neq r_2$, $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}^+$:

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,1} x^k \qquad (c_{0,1} = 1, c_{k,1} = C_k(r_1))$$

e

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,2} x^k \qquad (c_{0,2} = 1, c_{k,2} = C_k(r_2))$$

son dos soluciones linealmente independientes de dicha ecuación en $0 < |x| < r_0$, donde las series convergen para $|x| < r_0$.

(ii) Si $r_1 = r_2$, es decir, raíz doble de la ecuación indicial, un conjunto fundamental de soluciones sería

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r_1) x^k \qquad (C_0(r_1) = 1)$$

$$y_2(x) = |x|^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c'_k(r_1) x^k + y_1(x)(ln\,|x|),$$

en $0 < |x| < r_0$.

(iii) Si $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}^+$*:*

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_{k,1} x^k \qquad (\bar{c}_{0,1} \neq 0)$$

e

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_{k,2} x^k + c y_1(x)(ln\,|x|) \quad (\bar{c}_{0,2} \neq 0 \wedge c = C_m(r_2), m = r_1 - r_2)$$

constituyen un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial dada definidas en $0 < |x| < r_0$*. Las series convergen en* $|x| < r_0$*.*

Los coeficientes $c_{k,1}, c_{k,2}, c_k, \bar{c}_{k,1}$ *y* $\bar{c}_{k,2}$*, así como* c*, se pueden calcular sustituyendo directamente las expresiones que definen las soluciones en la ecuación dada al principio.*

Demostración. Fijémonos en el caso (i). Ya han sido encontradas un par de soluciones (2.16) y (2.17) de la ecuación (2.6). Sólo falta probar su convergencia. Como la estructura de las dos soluciones es la misma, nos limitaremos a probar la convergencia de la serie presente en (2.16). Esta serie es de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(r) x^k \tag{2.18}$$

cuyos coeficientes, de acuerdo con (2.12) y (2.13), se calculan recurrentemente a partir de

$$\begin{cases} C_0(r) &= 1 \\ p(r+k)C_k(r) &= -\sum_{j=0}^{k-1}[(j+r)\alpha_{k-j} + \beta_{k-j}]C_j(r) \end{cases} \quad , \tag{2.19}$$

para $k = 1, 2, 3, \ldots$. Puesto que las dos raíces indiciales son distintas y $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}^+$, podemos escribir

$$p(r) = (r - r_1)(r - r_2) \implies p(r_1 + k) = k(k + r_1 - r_2),$$

en consecuencia,

$$|p(r_1 + k)| \geq k(k - |r_1 - r_2|) \quad , \tag{2.20}$$

y determinar un entero N tal que

$$N - 1 \leq |r_1 - r_2| < N$$

Por otra parte, sea ρ cualquier número tal que $0 < \rho < r_0$. Como las series de potencias $a(x)$ y $b(x)$ convergen en $|x| < r_0$, en particular son convergentes cuando $|x| = \rho$. Luego, según el punto (3) de la demostración del Teorema 1.2, existe una $M > 0$ de modo que

$$|\alpha_j|\,\rho^j \leq M \quad , \quad |\beta_j|\,\rho^j \leq M \qquad (j = 0, 1, 2, ...)$$

Llevando esto a (2.19) y haciendo $r = r_1$, tenemos

$$|p(r_1 + k)|\,|C_k(r_1)| \leq \sum_{j=0}^{k-1} [(j + |r_1|)M\rho^{j-k} + M\rho^{j-k}]\,|C_j(r_1)|$$

Esto es, por (2.20),

$$k(k - |r_1 - r_2|)\,|C_k(r_1)| \leq M \sum_{j=0}^{k-1} (j + 1 + |r_1|)\rho^{j-k}\,|C_j(r_1)| \tag{2.21}$$

Ahora introducimos una sucesión de números reales no negativos $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, ...$, como sigue

$$\gamma_0 = C_0(r_1) = 1 \quad , \quad \gamma_k = |C_k(r_1)| \qquad (k = 1, 2, ..., N - 1)$$

y

$$k(k - |r_1 - r_2|)\gamma_k = M \sum_{j=0}^{k-1} (j + 1 + |r_1|)\rho^{j-k}\gamma_j \quad (k = N, N + 1, ...) \tag{2.22}$$

Con estos coeficientes construimos la serie potencial

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k \tag{2.23}$$

Esta serie tiene todos sus coeficientes $\gamma_k \geq 0$. Además,

$$\gamma_k \geq |C_k(r_1)| \quad , \quad k = 1, 2, ..., N - 1$$

Sigue de (2.21) y (2.22)

$$k(k - |r_1 - r_2|)(\gamma_N - |C_N(r_1)|) \geq M \sum_{j=0}^{N-1} (j + 1 + |r_1|)\rho^{j-k}(\gamma_j - |C_j(r_1)|) = 0 \implies$$

$$\implies \gamma_N - |C_N(r_1)| \geq 0 \implies \gamma_N \geq |C_N(r_1)|$$

Y, mediante un proceso inductivo, para $k > N$ se tiene

$$k(k - |r_1 - r_2|)(\gamma_k - |C_k(r_1)|) \geq M \sum_{j=0}^{k-1} (j + 1 + |r_1|)\rho^{j-k}(\gamma_j - |C_j(r_1)|) \geq 0 \implies$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma_k - |C_k(r_1)| \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_k \geq |C_k(r_1)| \quad , \quad k \geq N$$

Siempre se cumple que $\gamma_k \geq |C_k(r_1)|$. Además, la serie (2.18) está mayorada por la serie (2.23)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |C_k(r_1)| \, |x|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \, |x|^k \tag{2.24}$$

Veamos dónde converge esta última. De (2.22) con $k+1$ en lugar de k, tenemos

$$(k+1)(k+1-|r_1-r_2|)\gamma_{k+1} = M \sum_{j=0}^{k} (j+1+|r_1|)\rho^{j-k-1}\gamma_j =$$

$$= M(k+1+|r_1|)\rho^{-1}\gamma_k + M\rho^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} (j+1+|r_1|)\rho^{j-k}\gamma_j$$

y, por (2.22), esta última expresión vale

$$M(k+1+|r_1|)\rho^{-1}\gamma_k + \rho^{-1}k(k-|r_1-r_2|)\gamma_k =$$

$$= \rho^{-1}[k(k-|r_1-r_2|) + M(k+1+|r_1|)]\gamma_k$$

Entonces,

$$\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} = \frac{k(k-|r_1-r_2|) + M(k+1+|r_1|)}{\rho(k+1)(k+1-|r_1-r_2|)}$$

siempre que $k \geq N$. Teniendo en cuenta el resultado anterior, el criterio del cociente nos da que

$$\left| \frac{\gamma_{k+1} x^{k+1}}{\gamma_k x^k} \right| = \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} |x| = \frac{k(k-|r_1-r_2|) + M(k+1+|r_1|)}{\rho(k+1)(k+1-|r_1-r_2|)} |x| \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \frac{|x|}{\rho} \quad , \quad k \longrightarrow \infty.$$

Así pues, la serie (2.23) converge si $\frac{|x|}{\rho} < 1 \Leftrightarrow |x| < \rho, \forall \rho, 0 < \rho < r_0$.
En definitiva, la serie (2.23) converge si $|x| < r_0$. A la vista de (2.24), la serie (2.18) también convergerá para x tales que $|x| < r_0$, al menos.
Sin más que sustituir r_1 por r_2 en todo el proceso anterior, probamos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_2) x^k$$

también converge en $|x| < r_0$.

2.4.1. Casos excepcionales

El primer caso excepcional que estudiaremos se presenta cuando $r_1 = r_2$, es decir, raíz indicial doble. En este caso, el método anterior sólo nos da una solución

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_1) x^k$$

Para obtener la segunda solución, partimos de (2.15)

$$L[Y(x,r)] = c_0 p(r) x^r \quad , \quad x > 0$$

Derivando respecto de r

$$\frac{\partial}{\partial r} L[Y(x,r)] = c_0 (p'(r) x^r + p(r) x^r ln x)$$

$$L\left[\frac{\partial}{\partial r} Y(x,r)\right] = c_0 (p'(r) + p(r) ln x) x^r$$

Haciendo $r = r_1$, $c_0 = 1$ y teniendo en cuenta que $p(r_1) = 0$ y $p'(r_1) = 0$, se llega a que

$$L\left[\frac{\partial}{\partial r} Y(x,r_1)\right] = 0$$

En otras palabras,

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r} Y(x,r_1)$$

es la otra solución. Si derivamos respecto de r en (2.14) y hacemos $r = r_1$, obtenemos otra expresión de $y_2(x), x > 0$

$$\frac{\partial}{\partial r} Y(x,r) = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k'(r_1) x^k + x^{r_1} (ln x) \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_1) x^k =$$

$$= x^{r_1} \sum_{k=1}^{\infty} C_k'(r_1) x^k + y_1(x) ln x \ ,$$

ya que $C_0(r) = 1 \Rightarrow C_0'(r_1) = 0$. Así pues, en $0 < |x| < r_0$, la segunda solución es

$$y_2(x) = |x|^{r_1} \sum_{k=1}^{\infty} C_k'(r_1) x^k + y_1(x) ln\,|x|\,.$$

El segundo caso excepcional se presenta cuando la diferencia de raíces indiciales es un entero positivo, es decir, $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}^+$, y sea $r_1 - r_2 = m \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$r_1 = r_2 + m$$

La primera solución, la correspondiente a r_1 ($Re(r_1) \geq Re(r_2)$), se calcula como antes

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_1) x^k$$

Pero al calcular los coeficientes $C_k(r_2)$ para la segunda solución mediante (2.12)-(2.13), fijado C_0 nos encontramos con que se pueden determinar

$$C_1(r_2), C_2(r_2), ..., C_{m-1}(r_2),$$

pero se presentan dificultades al hallar

$$C_m(r_2) = -\frac{D_m(r_2)}{p(r_2+m)} \tag{2.25}$$

ya que $p(r_2+m) = p(r_1) = 0$ y la expresión (2.25) no tiene sentido, a menos que $D_m(r_2) = 0$.
Obsérvese que

$$p(r) = (r - r_1)(r - r_2) \quad \Longrightarrow \quad p(r+m) = (r - r_2)(r + m - r_2)$$

Si $D_m(r)$ tiene el factor $r - r_2$, se puede simplificar en

$$C_m(r) = -\frac{D_m(r)}{p(r+m)}$$

dicho factor, y así $C_m(r_2)$ es finito, al igual que

$$C_{m+1}(r_2), C_{m+2}(r_2), ...$$

Tendríamos así la solución

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_2) x^k \quad , \quad C_0(r_2) = 1$$

Ahora habría que ver que pasa si $D_m(r)$ no tuviese el factor $r - r_2$.
Una forma de conseguir que siempre sea $D_m(r_2) = 0$ es eligiendo

$$C_0(r) = r - r_2$$

En efecto, $D_k(r)$ es un polinomio homogéneo de grado uno en $C_0(r), C_1(r), ..., C_{k-1}(r)$ y, por consiguiente, tiene en común el factor $r - r_2$. De este modo podríamos determinar todos los coeficientes $C_m(r_2)$ y escribir

$$\varphi(x, r) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r) x^k \quad , \quad C_0(r) = r - r_2 \tag{2.26}$$

Entonces ahora (2.15) será

$$L[\varphi(x,r)] = (r - r_2)p(r)x^r \tag{2.27}$$

Si hacemos $r = r_2$ tenemos $L[\varphi(x,r)] = 0$, por lo que formalmente

$$y = \varphi(x, r_2) \tag{2.28}$$

es una solución de (2.6). Pero

$$C_0(r_2) = C_1(r_2) = \ldots = C_{m-1}(r_2) = 0, \tag{2.29}$$

por lo que la serie presente en (2.27)-(2.28) comienza con la m-ésima potencia de x.
Además, una vez calculado $C_m(r_2)$, donde simplificamos el factor $r - r_2$ y hacemos $r = r_2$, es decir,

$$C_m(r_2) = -\frac{\sum_{j=0}^{m-1}[(j + r_2)\alpha_{m-j} + \beta_{m-j}]C_j^*(r_2)}{r_1 - r_2}$$

vemos que

$$C_{m+l}(r_2) = C_l(r_1)C_m(r_2) \tag{2.30}$$

Teniendo en cuenta (2.29) y (2.30) en (2.26)-(2.28), resulta la solución

$$y = \varphi(x, r_2) = x^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_2)x^k = x^{r_2}\sum_{k=m}^{\infty} C_k(r_2)x^k =$$

$$= x^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty} C_{m+k}(r_2)x^{m+k} = x^{r_2+m}\sum_{k=0}^{\infty} C_m(r_2)C_k(r_1)x^k =$$

$$= C_m(r_2)x^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_1)x^k = C_m(r_2)y_1(x) \tag{2.31}$$

En otras palabras, la solución (2.26)-(2.28) es un múltiplo constante de la solución ya obtenida $y_1(x)$. No nos sirve, por lo que tenemos que buscar otra manera para hallar una segunda solución. Si derivamos en (2.27) respecto de r nos queda

$$\frac{\partial}{\partial r}L[\varphi(x,r)] = L\left[\frac{\partial}{\partial r}\varphi(x,r)\right] =$$

$$= p(r)x^r + (r - r_2)[p'(r) + x^r lnx]x^r$$

Y haciendo $r = r_2$

$$L\left[\frac{\partial}{\partial r}\varphi(x, r_2)\right] = 0$$

Así que $\frac{\partial}{\partial r}\varphi(x, r_2)$ es una segunda solución de (2.6) que adopta la forma

$$y_2(x) = \frac{\partial \varphi(x, r_2)}{\partial r} = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} C'_k(r_2) x^k + (lnx) x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_2) x^k,$$

donde $C_0(r) = r - r_2$ y, por tanto, $C'_0(r_2) = 1$. Por (2.31), la solución se puede expresar mejor como sigue

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} C'_k(r_2) x^k + c y_1(x)(lnx),$$

siendo $y_1(x)$ la primera solución, que ya calculamos por el procedimiento habitual, y $c = C_m(r_2)$ con $m = r_1 - r_2$.
Habitualmente se busca una segunda solución de la forma

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_{k,2} x^k + c y_1(x)(lnx)$$

y se calculan los coeficientes $\bar{c}_{k,2}$ y la constante c sustituyendo directamente en la ecuación (2.6).

En todo lo que procede hemos supuesto que $x > 0$. El razonamiento es igualmente válido para $x < 0$.

2.5. Funciones de Bessel

Un ejemplo ilustrativo de la teoría desarrollada en el párrafo anterior lo proporciona la determinación de las soluciones de la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \quad , \tag{2.32}$$

donde $y = y(x)$, $x \neq 0$ y el orden ν es un parámetro que supondremos real. Esta ecuación se puede escribir de la forma

$$L[y(x)] = x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \tag{2.33}$$

Nótese que esta ecuación posee un punto singular en el origen, que es regular ya que los coeficientes $a(x) = 1$ y $b(x) = x^2 - \nu^2$ son analíticos en $x = 0$, con desarrollos en serie válidos en todo $\mathbb{R}$. De acuerdo con el teorema de Frobenius, la ecuación (2.32) admitirá soluciones que son analíticas también en $0 < |x| < X$, para todo $X \in \mathbb{R}$, $X > 0$.

2.5.1. Resolución de la ecuación diferencial de Bessel mediante desarrollos en serie

El polinomio indicial, en este caso, es

$$p(r) = r(r-1) + a(0)r + b(0) = r(r-1) + r - \nu^2 = r^2 - \nu^2 \quad , \tag{2.34}$$

cuyas raíces son $r_1 = \nu$ y $r_2 = -\nu$. Primeramente buscaremos la solución correspondiente a $r_1 = \nu$ y suponemos $x > 0$. El citado teorema de Frobenius nos garantiza que existe una solución de la forma

$$y_1(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\nu} \quad ,$$

con $c_0 \neq 0$. Derivando, sustituyendo en (2.33) y agrupando los coeficientes de las potencias de igual grado, queda

$$(\nu^2 - \nu + \nu - \nu^2)c_0 x^\nu + \left[(\nu+1)^2 - \nu^2\right] c_1 x^{\nu+1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \left[(k+\nu)^2 - \nu^2\right] c_k + c_{k-2} \right\} x^{\nu+k} = 0 \quad ,$$

esto es,

$$0 \cdot c_0 + \left[(\nu+1)^2 - \nu^2\right] c_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \left[(k+\nu)^2 - \nu^2\right] c_k + c_{k-2} \right\} x^k = 0$$

De aquí se infiere que c_0 puede tomar cualquier valor y que

$$\left[(\nu+1)^2 - \nu^2\right] c_1 = (2\nu+1)c_1 = 0$$

Si $\nu \neq -\frac{1}{2}$, entonces $c_1 = 0$. En general,

$$\left[(k+\nu)^2 - \nu^2\right] c_k + c_{k-2} = 0 \tag{2.35}$$

De esta relación de recurrencia se deduce que todos los coeficientes de índice impar son nulos: $c_1 = c_3 = c_5 = ... = 0$. En cambio, para los pares, se obtiene fácilmente a partir de (2.35) que

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2(\nu+1)} \quad , \quad c_4 = \frac{c_0}{2^4 2!(\nu+1)(\nu+2)} \quad , \quad \ldots$$

En general,

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{2^m m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}$$

Esta primera solución queda así

$$y_1(x) = c_0 x^\nu + c_0 x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)}$$

En la literatura matemática, aprovechando la indeterminación de c_0, se suele tomar

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \quad ,$$

donde $\Gamma(z)$ denota la función Gamma. De este modo se ha llegado a

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad ,$$

función conocida como función de Bessel de primera clase y orden ν, que se representará por

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \tag{2.36}$$

Aplicando el criterio del cociente, la razón en valor absoluto entre dos términos consecutivos para $|x| \leq X$ ($X > 0$ arbitrariamente grande) es

$$\frac{|x|^2}{4(k+1)\,|k+1+\nu|} \leq \frac{X^2}{4(k+1)\,|k+1+\nu|} \longrightarrow 0$$

cuando $k \to \infty$. Por tanto, la serie (2.36) converge uniforme y absolutamente en $0 < |x| \leq X$, para todo $X > 0$, y, cuando $\nu \geq 0$, en $|x| \leq X$. Este resultado es coherente con lo que se esperaba del teorema de Frobenius.
Para la segunda raíz característica se obtiene análogamente la solución

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} \tag{2.37}$$

Cuando ν no es un número entero, como veremos a continuación, las funciones de Bessel $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes, ya que en el origen se comportan

$$J_\nu(x) \cong \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(1+\nu)} \quad , \quad J_{-\nu}(x) \cong \frac{(x/2)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \tag{2.38}$$

y así, para $\nu \neq 0$, una se hace cero y otra tiende a infinito, mientras que para $\nu = 0$ coinciden obviamente. En esta situación la solución general de la ecuación (2.32) es

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \quad , \tag{2.39}$$

donde C_1 y C_2 representan constantes arbitrarias cada vez que comparezcan.

Observación 2.5. Se gana mucho cuando se trabaja en el plano complejo, en cuyo caso la función de Bessel $J_\nu(z)$ es una función analítica de la variable z en todo el plano complejo cortado a lo largo del semieje $(-\infty, 0]$, mientras que resulta ser una función entera de su orden ν. En este trabajo estudiaremos sólo el caso real.

Ahora consideremos el caso en el que ν es un número entero. Primero veamos qué soluciones nos aparecen cuando $\nu = 0$. El polinomio indicial (2.34) se reduce a $p(r) = r^2 = 0$, que posee la raíz doble $r = 0$. Directamente sólo es posible obtener una solución $y = \varphi_1(x)$, a saber, la función de Bessel de primera clase y orden cero

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad , \tag{2.40}$$

que se obtiene de (2.36) o (2.37) poniendo $\nu = 0$. La segunda solución $y = \varphi_2(x)$ viene dada por [3]

$$y_0(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k}\right) \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + J_0(x) ln x \quad , \quad x > 0.$$

Sin embargo, en la literatura matemática [4] se suele tomar como segunda solución la siguiente combinación lineal de $J_0(x)$ e $y_0(x)$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma - ln\frac{x}{2}\right) J_0(x) + y_0(x)\right] \quad ,$$

siendo $\gamma = 0'5772...$ la constante de Euler-Mascheroni. Así,

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma + ln\frac{x}{2}\right) J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k}\right) \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right] \quad ,$$

que se denomina función de Bessel de segunda clase y orden cero. Obsérvese que $J_0(0) = 1$ mientras que $Y_0(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$. Consecuentemente, $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ son linealmente independientes y la solución general de (2.33) cuando $\nu = 0$ es

$$y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x) \quad , \quad x > 0 \quad .$$

El caso en el que ν sea un entero no nulo, $\nu = n \neq 0$, la ecuación de Bessel es

$$L[y(x)] = x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{2.41}$$

y las raíces características son $r_1 = n$ y $r_2 = -n$. Pero no es lícito tomar como segunda solución $y = \varphi_2(x) = J_{-n}(x)$ (n entero, $n > 0$), ya que por definición

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

Como quiera que $\frac{1}{\Gamma(-n+k+1)} = 0$, $k = 0, 1, ...n-1$ [4, pág. 3], el primer sumatorio se anula y resta, efectuando el cambio de índice $p = k - n$,

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+n}}{(p+n)!p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} = (-1)^n J_n(x) \quad ,$$

esto es,

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

Por consiguiente, $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ no son linealmente independientes, y tenemos que hallar una segunda solución que forme con $J_n(x)$ un sistema fundamental para la ecuación (2.41). Dicha solución viene dada por [3]

$$y_n(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j-1)!}{j!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} - \frac{1}{2}\frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{m}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n+m}\right)\right] \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} +$$

$$+J_n(x)lnx$$

Sin embargo, como ocurría en el caso $\nu = 0$, en la literatura [4] es más habitual hallar esta segunda solución en la forma

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\left[(\gamma - ln2)\, J_n(x) + y_n(x)\right]$$

que sigue siendo solución de (2.41), al ser esta ecuación lineal y venir $Y_n(x)$ expresada como una combinación lineal de soluciones de la misma. Haciendo cuentas, $Y_n(x)$ adopta la forma

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j-1)!}{j!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j-n} -$$

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left[\Psi(m+1) + \Psi(m+n+1)\right] \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \quad , \quad x > 0, \quad (2.42)$$

que se conoce como función de Bessel de segunda clase y orden entero n. Aquí $\Psi(z)$ representa la función derivada logarítmica de $\Gamma(z)$.
Fácilmente se ve que

$$Y_0(x) \cong \frac{2}{\pi} ln \frac{x}{2} \quad , \quad x \longrightarrow 0^+$$

$$Y_n(x) \cong -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \quad , \quad x \longrightarrow 0^+ \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \quad ,$$

lo que demuestra que $Y_n(x) \to -\infty$, si $x \to 0^+$, mientras que $J_0(0) = 1$ y $J_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Por lo tanto hemos construido dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel (2.41). Su solución general es

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \quad , \quad x > 0 \quad ,$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

Recapitulando lo tratado anteriormente, la solución de la ecuación de Bessel (2.33) es

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \quad , \quad \nu \notin \mathbb{Z}$$

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \quad , \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

Se puede dar una única fórmula para la solución general, si se introduce la segunda solución mediante

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{sen\pi\nu} \quad , \tag{2.43}$$

donde $\nu \notin \mathbb{Z}$, y se sobreentiende que

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x) \tag{2.44}$$

cuando $\nu \in \mathbb{Z}$. A la función $Y_\nu(x)$ se la denomina, como en el caso $\nu = n \in \mathbb{Z}$, función de Bessel de segunda clase y orden ν.
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\nu \geq 0$. Es obvio que (2.43) satisface la ecuación (2.33), pues $Y_\nu(x)$ es una combinación lineal de las soluciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ de dicha ecuación. Que $J_\nu(x)$ e $Y_\nu(x)$ son linealmente independientes se deduce de los comportamientos de estas funciones cuando $x \to 0^+$: mientras que $J_\nu(x) = 1$, si $\nu = 0$, o $J_\nu(x) = 0$, si $\nu > 0$, $Y_\nu(x)$ se hace infinita por la presencia del factor $\frac{(x/2)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}$ en $J_{-\nu}(x)$. Por tanto, la solución general de la ecuación de Bessel (2.33) es

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x) \quad .$$

Observación 2.6. A las funciones que son soluciones de la ecuación diferencial (2.33), es decir, a las funciones de la forma $C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$ se las conoce como funciones cilíndricas y se representan así

$$Z_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$

Como veremos en la última sección, estas funciones aparecen en la resolución de distintos problemas planteados mediante ecuaciones en derivadas parciales al utilizar coordenadas cilíndricas.

2.5.2. Otras propiedades

Hemos visto que la serie que define la función $J_\nu(x)$ se puede derivar las veces que se quiera. Luego, multiplicándola por x^ν, se deduce

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2\nu + 2k)}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} x^{2\nu+2k-1} \frac{1}{2^{\nu+2k}} =$$

$$= x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma[k + (\nu - 1) + 1]} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k} \qquad ,$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x) \tag{2.45}$$

Análogamente se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \tag{2.46}$$

Si se efectuán las derivadas en los primeros miembros de (2.45) y (2.46) se infiere de la primera que

$$J'_\nu(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x)$$

y de la segunda

$$J'_\nu(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) \tag{2.47}$$

Si entre estas dos ecuaciones eliminamos $J'_\nu(x)$ resulta la relación

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \quad , \tag{2.48}$$

mientras que si eliminamos $J_\nu(x)$ se tiene

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$$

Para $\nu = n$ entero positivo, (2.48) se convierte en una relación de recurrencia

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

que permite expresar cualquier función de Bessel $J_n(x)$, $n \geq 2$, en términos de $J_0(x)$ y $J_1(x)$.

Observación 2.7. La función de Bessel $Y_\nu(x)$ de segunda clase y orden ν verifica todas las relaciones anteriores, como es fácil mostrar.

Finalmente, comentaremos algunas propiedades de los ceros de las funciones de Bessel $J_\nu(x)$. A partir de este momento consideramos $x > 0$, a veces $x \geq 0$, cuando $J_\nu(x)$ tiene sentido en $x = 0$; y también supondremos $\nu \geq 0$.
En estas condiciones, la función $J_\nu(x)$ posee infinitos ceros reales simples, excepto quizás el cero. Si denotamos por $j_{\nu,n}$ el n-ésimo cero de esta función (cuando no haya confusión, indicaremos sencillamente j_n) se cumple

(a) $0 < j_{\nu,1} < j_{\nu,2} < ... < j_{\nu,n} < ...$
(b) $j_{\nu,n} \longrightarrow +\infty$, cuando $n \longrightarrow \infty$.
(c) $j_{\nu,n+1} - j_{\nu,n} \neq j_{\nu,n} - j_{\nu,n-1}$, $n = 2, 3, ...$, pero $j_{\nu,n+1} - j_{\nu,n} \longrightarrow \pi$, si $n \longrightarrow \infty$. Es decir, los ceros de $J_\nu(x)$ no son equidistantes, como sucede con las funciones trigonométricas *senx* y *cosx*, cuyos ceros guardan siempre la distancia π. Sin embargo, a medida que aumenta n, la distancia entre dos ceros consecutivos de la función de Bessel $J_\nu(x)$ se aproximan a π.
(d) Los ceros de las funciones de Bessel $J_\nu(x)$ y $J_{\nu+1}(x)$ se intercalan, de modo que entre dos ceros consecutivos de $J_\nu(x)$ se encuentra sólo un cero de $J_{\nu+1}(x)$; y, recíprocamente, entre dos ceros consecutivos de $J_{\nu+1}(x)$ hay un único cero de $J_\nu(x)$. Estas dos funciones sólo pueden tener quizás un cero común en $x = 0$. Este resultado es válido también para $J_\nu(x)$ y $J_{\nu+m}(x)$, $m = 1, 2, 3, ...$

2.6. Series de Fourier-Bessel. Aplicaciones

Comenzamos esta sección deduciendo la integral del producto de dos funciones de Bessel del mismo orden. Para ello, utilizando (2.45) y (2.46), se tienen sin dificultad

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[x u J_{\nu+1}(xu) J_\nu(yu) - y u J_\nu(xu) J_{\nu+1}(yu) \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} \left[x(u^{\nu+1} J_{\nu+1}(xu))(u^{-\nu} J_\nu(yu)) - y(u^{-\nu} J_\nu(xu))(u^{\nu+1} J_{\nu+1}(yu)) \right] =$$

$$= u(x^2 - y^2) J_\nu(xu) J_\nu(yu)$$

Integrando y teniendo en cuenta que $\lim_{u\to 0} uJ_\nu(xu)J_\nu(yu) = 0$, se infiere que

$$\int_0^a uJ_\nu(xu)J_\nu(yu)du = \frac{axJ_{\nu+1}(ax)J_\nu(ay) - ayJ_\nu(ax)J_{\nu+1}(ay)}{x^2 - y^2} \quad , \tag{2.49}$$

siendo $a > 0$ cualquiera.
Vamos a establecer que la familia de funciones $\{J_\nu(\lambda_n x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ constituye un sistema ortogonal en el intervalo $(0, a)$ con función peso x, siendo $\lambda_n (= \lambda_{\nu,n})$ el n-ésimo cero de la ecuación

$$J_\nu(\lambda a) = 0 \tag{2.50}$$

En este caso, (2.49) adopta la forma

$$\int_0^a xJ_\nu(\lambda_m x)J_\nu(\lambda_n x)dx = \frac{a\lambda_m J_{\nu+1}(\lambda_m a)J_\nu(\lambda_n a) - a\lambda_n J_\nu(\lambda_m a)J_{\nu+1}(\lambda_n a)}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} \ ,$$

$m \neq n$, que vale cero en virtud de (2.50). Por otra parte, si $m \to n$ el segundo miembro de la anterior expresión es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{m\to n} \frac{a\lambda_m J_{\nu+1}(\lambda_m a)J_\nu(\lambda_n a) - a\lambda_n J_\nu(\lambda_m a)J_{\nu+1}(\lambda_n a)}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} =$$

$$= \lim_{m\to n} \frac{aJ_{\nu+1}(\lambda_m a)J_\nu(\lambda_n a) - a^2\lambda_m J'_{\nu+1}(\lambda_m a)J_\nu(\lambda_n a) - a^2\lambda_n J'_\nu(\lambda_m a)J_{\nu+1}(\lambda_n a)}{2\lambda_m} =$$

$$= -\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}(\lambda_n a)J'_\nu(\lambda_n a) = \frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(\lambda_n a)]^2 \quad ,$$

ya que $J_\nu(\lambda_n a) = 0$, y $J'_\nu(\lambda_n a) = -J_{\nu+1}(\lambda_n a)$ a tenor de (2.47). Resumiendo, se ha establecido la relación de ortogonalidad

$$\int_0^a xJ_\nu(\lambda_m x)J_\nu(\lambda_n x)dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(\lambda_n a)]^2 & , m = n \end{cases} \tag{2.51}$$

donde $\lambda_n = \lambda_{\nu,n}$ denota el cero n-ésimo de la ecuación (2.50). Nótese que $a\lambda_n = j_n$, siendo $j_{\nu,n} = j_n$ el n-ésimo cero de la ecuación $J_\nu(x) = 0$, que se trató en la subsección 2.5.2.
A continuación nos planteamos estudiar el desarrollo en serie de una función $f(x)$, $0 < x < a$, en términos de este sistema ortogonal de funciones. Esto es, bajo qué condiciones es válido el desarrollo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu(\lambda_n x) \quad , \tag{2.52}$$

donde $J_\nu(x)$ es la función de Bessel de primera clase y orden ν, y

$$0 < \lambda_{\nu,1} < \lambda_{\nu,2} < ... < \lambda_{\nu,n} < ...$$

son las raíces positivas de la ecuación (2.50). Si suponemos que este desarrollo es posible, multiplicamos ambos miembros de (2.52) por $xJ_\nu(\lambda_n x)$ y admitimos que se puede integrar la serie término a término, se deduce

$$\int_0^a xf(x)J_\nu(\lambda_n x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_0^a xJ_\nu(\lambda_m x)J_\nu(\lambda_n x)dx = c_n \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(\lambda_n a) \quad ,$$

sin más que aplicar la relación de ortogonalidad (2.51). De aquí se obtiene

$$c_n = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(\lambda_n a)} \int_0^a xJ_\nu(\lambda_n x)f(x)dx \tag{2.53}$$

Adviértase que (2.53) tiene sentido, pues los ceros de $J_\nu(x)$ y $J_{\nu+1}(x)$ se intercalan y no pueden coincidir, por lo cual $J_{\nu+1}(\lambda_n a) \neq 0$, de acuerdo con las consideraciones efectuadas en el párrafo 2.5.2. A la serie (2.52), cuyos coeficientes vienen dados por (2.53), se la denomina serie de Fourier-Bessel por su semejanza con las series de Fourier que, como se sabe, involucran las funciones trigonométricas.
El siguiente aserto, cuya demostración omitimos [4, pág. 129], nos da condiciones suficientes para la validez del desarrollo en serie (2.52).

Teorema 2.8. *Sea $f(x)$ una función continua a trozos en el intervalo $(0,a)$ y supongamos que es de variación acotada en cualquien subintervalo $[y,u]$ de $(0,a)$. Entonces, si*

$$\int_0^a \sqrt{x}\,|f(x)|\,dx \quad < \quad \infty \quad ,$$

el desarrollo en serie de Fourier-Bessel (2.52) converge a $f(x)$ en cualquier punto de continuidad $x \in [y,u]$, y a

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

en los de discontinuidad.

Finalmente consideramos algunas aplicaciones de este desarrollo en serie. Sabemos que la ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad ,$$

donde $u = u(x,y,z)$, se escribe en coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r cos\varphi & , \quad 0 \leq r < \infty \\ y = r sen\varphi & , \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \\ z = \quad z & , -\infty < z < \infty \end{cases}$$

de la forma

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad ,$$

siendo $u = u(r, \varphi, z)$. Si el problema abordado presentase simetría cilíndrica, es decir, si u no depende de φ, el laplaciano queda así

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Por último, a fin de ilustrar la teoría, nos planteamos resolver la ecuación de Laplace satisfaciendo ciertas condiciones de frontera y en una situación de simetría cilíndrica

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad 0 < r < a, 0 < z < l$$

$$\begin{aligned} u(a,z) &= 0 \quad , \quad 0 \le z \le l \\ u(r,0) &= \varphi_1(r) \quad , \quad r \le a \\ u(r,l) &= \varphi_2(r) \quad , \end{aligned}$$

donde $\varphi_1(r)$ y $\varphi_2(r)$ son funciones conocidas, no idénticamente nulas.
Por el método de separación de variables, buscaremos soluciones de la forma

$$u(r,z) = R(r)Z(z)$$

Sustituyendo en la ecuación, queda

$$Z(z)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rR'(r)) + R(r)Z''(z) = 0 \quad ,$$

es decir,

$$\frac{\frac{1}{r}(rR'(r))'}{R(r)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \mu \quad ,$$

μ constante. Tenemos así el par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \mu r^2 R(r) = 0 \tag{2.54}$$

$$Z''(z) + \mu Z(z) = 0 \tag{2.55}$$

Distinguimos tres casos:

(i) Si $\mu = \lambda^2 > 0$. La solución general de la primera ecuación es

$$R(r) = C_1 I_0(\lambda r) + C_2 K_0(\lambda r) \quad ,$$

donde $I_0(x)$ es la función modificada de Bessel de orden cero y $K_0(x)$ la función de Macdonald, que no son objeto de estudio en este trabajo. Por razones físicas, la solución $u(r,z)$ debe ser acotada en el interior del cilíndro $r \leq a$, en particular, en su eje $r = 0$. Pero $K_0(x)$ se hace infinito cuando $x \to 0^+$ ([4, pág. 111]), por lo que C_2 tiene que ser cero. Por otra parte, de la condición $u(a,z) = 0$ se deduce que $R(a) = 0$, por lo que

$$C_1 I_0(\lambda a) = 0 \quad .$$

Como quiera que $I_0(x) > 0$, $x > 0$, será también $C_1 = 0$, de modo que $R(r) \equiv 0$ y tendremos la solución trivial $u(r,z) \equiv 0$, lo cual es imposible porque φ_1 y φ_2 no son nulas.

(ii) Si $\mu = 0$, la ecuación (2.54) se reduce a la ecuación de Euler

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = 0 \quad ,$$

cuya solución general es

$$R(r) = C_1 + C_2 lnr$$

Entonces $C_2 = 0$ para que $R(r)$ esté acotada en $r = 0$. Por otra parte, de $R(a) = 0$ sigue que $C_1 = 0$ también. Nuevamente $R(r) \equiv 0$ y la solución a nuestro problema es la trivial $u(r,z) \equiv 0$, lo cual es un absurdo.

(iii) Así que tiene que ser $\mu = -\lambda^2 < 0$. La ecuación (2.54) es ahora la ecuación de Bessel

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \lambda^2 r^2 R(r) = 0$$
$$R(0) \ acotada \quad , \quad R(a) = 0 \quad ,$$

de orden cero, cuya solución general es

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) \quad ,$$

de acuerdo con el párrafo 2.5.1. Como $Y_0(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$, ha de ser $C_2 = 0$. Imponiendo la condición $R(a) = 0$, queda

$$C_1 J_0(\lambda a) = 0 \quad ,$$

ecuación que se satisface si $C_1 \neq 0$, pues $J_0(\lambda a) = 0$ posee infinitos ceros positivos, sean $\lambda_{0,n} = \lambda_n$, en virtud de los comentarios efectuados en la subsección 2.5.2. Por tanto, salvo en una constante multiplicativa,

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r) \quad .$$

La segunda ecuación (2.55)

$$Z''(z) - \lambda_n^2 Z(z) = 0$$

admite la solución general

$$Z(z) = C_1 ch\lambda_n z + C_2 sh\lambda_n z$$

Por tanto, aplicando el principio de superposición, la solución buscada tendrá la forma

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n ch\lambda_n z + b_n sh\lambda_n z) J_0(\lambda_n r) \quad , \tag{2.56}$$

donde los coeficientes indeterminados a_n y b_n se calculan a partir de las condiciones de frontera. De $u(r, 0) = \varphi_1(r)$ resulta

$$\varphi_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \quad ,$$

que es el desarrollo en serie de Fourier-Bessel de la función $\varphi_1(r)$. Por tanto, los coeficientes a_n vienen dados por

$$a_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_n a)} \int_0^a r J_0(\lambda_n r) \varphi_1(r) dr \quad , \tag{2.57}$$

a tenor de la relación de ortogonalidad (2.51). Análogamente, de la condición $u(r, l) = \varphi_2(r)$ sigue

$$\varphi_2(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n ch\lambda_n l + b_n sh\lambda_n l) J_0(\lambda_n r) \quad ,$$

de donde

$$a_n ch\lambda_n l + b_n sh\lambda_n l = \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_n a)} \int_0^a r J_0(\lambda_n r) \varphi_2(r) dr \quad ,$$

es decir,

$$b_n = \frac{2}{a^2 (sh\lambda_n l) J_1^2(\lambda_n a)} \int_0^a r J_0(\lambda_n r) [\varphi_2(r) - (ch\lambda_n l) \varphi_1(r)] dr \tag{2.58}$$

Sustituyendo (2.57) y (2.58) en (2.56) se obtiene la solución

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{sh[\lambda_n (l - z)]}{sh(\lambda_n l)} + b_n \frac{sh(\lambda_n z)}{sh(\lambda_n l)} \right\} J_0(\lambda_n r) \quad ,$$

donde los coeficientes a_n y b_n se determinan por las fórmulas (2.57) y (2.58), respectivamente.

Bibliografía

[1] T.M. Apostol, *Análisis matemático* , Reverté, Barcelona, 1960.

[2] W.E. Boyce y R.C. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Limusa, México, 1996.

[3] E.A. Coddington, *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*, CECSA, México, 1976.

[4] N.N. Lebedev, *Special functions and their applications*, Dover, N.Y., 1972.

[5] R.K. Nagle y E.B. Saff, *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, E.U.A., 1992.

[6] I.N. Sneddon, *Funciones especiales aplicadas a la física y a la química*, Dossat, Madrid, 1960.

[7] G.N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.

Resolution of linear differential equations of second order with non constant coefficients. Frobenius method

María Rodríguez García

Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100699043@ull.edu.es

Abstract

The main purpose of this project is to solve certain class of linear differential equations of second order with non constant coefficients through the use of power series. Firstly, we consider the case in which these coefficients are real analytical functions. Once the existence theorem is proved, we apply this theory to the Legendre differential equations, whose bounded solutions in the interval $(-1,1)$ are the well-known Legendre polynomials.
In the second place, we study the equations that possess regular singular points. Frobenius theorem assures the existence of solutions in this case, as well as provides a method to calculate them. We illustrate this theory solving the Bessel differential equation.
The most interesting properties of the Legendre polynomials and the Bessel functions are established, by emphasizing their importance in tackling some problems of the physical mathematics.

1. Introduction

In a elementary class of differential equations we show that solve one linear differential equation of n order with constant coefficients is reduced to a algebraic problem: find the roots of a polynomial of degree n. The situation becomes more complicated when the coefficients of this equations are non constant, although there are two cases where this question is studied and solved, what is the purpose of this project.
We study the first case in Chapter 1, when the coefficients of the equation are real analytic functions. The other case is the objective of Chapter 2, where we study the general solution of the differential equations of second order that possess regular singular points.
This lesson was taught in the former Mathematical Degree , but it has disappeared from the new one. Despite the fact that it is a classic subject, it is interesting. On the one hand, it allows a different introduction to special functions. On the other hand, for its study we need knowledge acquired in the degree.

2. Chapter 1

Theorem 1.2. "If the coefficients $a_1(x),\dots,a_n(x)$ of the linear differential equation

$$L(y)\equiv y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y$$

are analytic at $x=x_0$, i.e., they have series expansions in powers of $x-x_0$ valid for $|x-x_0|<r_0,\ r_0>0$, then there is a unique solution $y(x)$ of $L(y)=0$, which is also analytic at $x=x_0$, satisfying the initial conditions

$$y(x_0)=\alpha_1,\quad y'(x_0)=\alpha_2,\quad \dots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_n.$$

This solution has a power series expansion valid for $|x-x_0|<r_0$ as well."
Legendre polynomials are the solutions of the differential equation $(n=0,1,2,\dots)$

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0\ ,\quad -1<x<1$$

Rodrigues' formula

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\ ,\quad n=0,1,2,\dots$$

Generating function

$$\omega(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

Orthogonality properties

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}\frac{2}{2n+1} & ,\ si\ n=m\\ 0 & ,\ si\ n\neq m\end{cases}$$

Legendre series

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)\ ,\quad -1<x<1\ ,$$

with

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx\ ,\quad n=0,1,2,\dots$$

3. Chapter 2

Theorem 2.4. (Frobenius theorem) "Given the equation

$$x^2y''+a(x)xy'+b(x)y=0\ ,$$

in which $a(x)$ and $b(x)$ have a power series expansions valid for $|x|<r_0,\ r_0>0$, if r_1,r_2 $(Re(r_1)\geq Re(r_2))$ indicate the roots of the indicial equation

$$p(r)=r(r-1)+a(0)r+b(0)$$

we have:

(i) If $r_1\neq r_2,\ r_1-r_2\notin\mathbb{Z}^+$:

$$y_1(x)=|x|^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_{k,1}x^k$$

and

$$y_2(x)=|x|^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty}c_{k,2}x^k$$

are two linearly independent solutions of the equation in $0<|x|<r_0$.

(ii) If $r_1=r_2$ ..."

Bessel differential equation

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

Cylinder functions

$$Z_\nu(x)=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x)$$

Orthogonal properties

$$\int_0^a xJ_\nu(\lambda_m x)J_\nu(\lambda_n x)dx=\begin{cases}0 & ,\ m\neq n\\ \frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(\lambda_n a)]^2 & ,\ m=n\end{cases}$$

where $0<\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n<\dots$ are the positive roots of the equation $J_\nu(ax)=0,\ a>0$.
Fourier-Bessel series

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nJ_\nu(\lambda_n x)\ ,$$

with

$$c_n=\frac{2}{a^2J_{\nu+1}^2(\lambda_n a)}\int_0^a xJ_\nu(\lambda_n x)f(x)dx$$

Aplications of the theory: resolution of the Laplace equation

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\ ,\quad 0<r<a,0<z<l$$

$$\begin{aligned} u(a,z)&=0 &,\quad 0\leq z\leq l\\ u(r,0)&=\varphi_1(r) &,\quad r\leq a\\ u(r,l)&=\varphi_2(r) &,\end{aligned}$$

where $\varphi_1(r)$ and $\varphi_2(r)$ are known functions, not identically zero.

References

[1] E.A. CODDINGTON, *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*, CECSA, México, 1976.

[2] N.N. LEBEDEV, *Special functions and their applications*, Dover, N.Y., 1972.