



Universidad
de La Laguna

Ceros de Polinomios Ortogonales de Sobolev

Zeros of Sobolev Orthogonal Polynomials

Arantxa Mendoza Álamo

Trabajo de Fin de Grado

Departamento de Análisis Matemático

Sección de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de La Laguna

La Laguna, 15 de julio de 2015

Dr. D. **Ramón Ángel Orive Rodríguez**, con N.I.F. 42.059.809-P Catedrático de Universidad de Matemática Aplicada, adscrito al Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna

C E R T I F I C A

Que la presente memoria titulada:

“Ceros de Polinomios Ortogonales de Sobolev.”

ha sido realizada bajo su dirección por D. **Arantxa María Mendoza Álamo**, con N.I.F. 44.734.514-C.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 15 de julio de 2015



Agradecimientos

A mi familia, especialmente a mi madre, por todo el apoyo recibido durante estos años de estudio.

A mis amigos, en especial, a Patricia por todo lo vivido juntas.

Y a Ramón, por su incondicional ayuda en la realización de este trabajo.

Resumen

La teoría de Polinomios Ortogonales, así como su amplio abanico de aplicaciones, es una de las áreas de la Matemática Aplicada con más conexiones con otros campos de la Matemática, la Física o la Ingeniería. Las propiedades algebraicas y asintóticas de los polinomios ortogonales, en especial en lo relativo al comportamiento de sus ceros, los convierten en una herramienta idónea para su aplicación en Interpolación y Aproximación, Integración Numérica y Métodos de resolución numérica de Ecuaciones Diferenciales (Colocación, Galerkin), además de su utilidad para el estudio de modelos en Física Cuántica (en conexión con la teoría de Matrices aleatorias).

El creciente campo de posibles aplicaciones ha hecho necesaria la progresiva ampliación del concepto clásico o estándar de ortogonalidad a versiones más complejas, como pueden ser la ortogonalidad variante (en la que la función peso varía con el grado del polinomio), la ortogonalidad múltiple (también denominada de Hermite-Padé, cuando las relaciones de ortogonalidad se reparten entre distintos intervalos) y la de Sobolev. Esta última es el objeto fundamental del presente trabajo. En él, tras hacer un breve repaso de la definición y principales propiedades de los polinomios ortogonales estándar en el eje real, con especial énfasis en las familias denominadas clásicas (Jacobi, Hermite, Laguerre), introducimos los polinomios ortogonales con respecto a productos interiores de tipo Sobolev, centrándonos especialmente en las importantes diferencias que presentan en lo relativo al comportamiento de sus ceros.

Palabras clave: Polinomios Ortogonales, Productos interiores de Sobolev, ceros.

Abstract

The theory of Orthogonal Polynomials, as well as its wide range of applications, is one of the branches of the Applied Mathematics with more links to other fields of Mathematics, Physics or Engineering, to only cite a few. The algebraic and asymptotic properties of the orthogonal polynomials, especially concerning the behavior of their zeros, make them suitable tools to be applied on Interpolation and Approximation, Numerical Integration, Numerical Methods for the resolution of Differential Equations (Collocation, Galerkin), along with their usefulness in the study of models in Quantum Physics (in connection with the modern theory of Random Matrices).

The increasing interest of possible applications has made convenient the extension of the standard or classical notion of orthogonality to more general versions, including the varying orthogonality (where the weight function varies with the degree of the polynomial), the multiple or Hermite-Padé orthogonality (where the orthogonality relations are shared by several intervals) and the Sobolev orthogonality. This last one is the main subject of the current work. In this sense, after making a brief overview on the main properties of standard orthogonal polynomials in the real axis, paying special attention to the so-called classical families (Jacobi, Hermite, Laguerre), orthogonal polynomials with respect to a Sobolev type inner product are introduced. We are especially concerned with the differences related to the zero behavior.

Keywords: *Orthogonal polynomials, Sobolev inner products, zeros.*

Índice general

1. Motivación y objetivos	1
2. Introducción	3
3. Polinomios ortogonales estándar	5
3.1. Definición y primeros ejemplos	5
3.2. Propiedades generales	7
3.3. Intervalos acotados	11
3.3.1. Polinomios de Chebyshev de 1 ^a especie	11
3.3.2. Polinomios de Chebyshev de 2 ^a especie	13
3.3.3. Polinomios de Legendre	13
3.4. Intervalos no acotados	14
3.4.1. Polinomios de Laguerre	14
3.4.2. Polinomios de Hermite	14
4. Polinomios ortogonalidad no estándar	16
4.1. Productos interiores de tipo Sobolev	16
4.2. Producto de Sobolev continuo	17
4.3. Producto de Sobolev discreto	20
5. Experimentación numérica	22
5.1. Producto de Sobolev continuo	22
5.2. Producto de Sobolev discreto	25
A. Observaciones computacionales	30
Bibliografía	31

Índice de figuras

3.1. Polinomios de Legendre.	7
3.2. Polinomios de Chebyshev.	8
3.3. Ceros de un polinomio de Chebyshev de grado once.	12
5.1. Polinomio de grado ocho, producto interior de tipo Althammer	22
5.2. Polinomio de grado cinco, producto interior de tipo Meijer.	24
5.3. Polinomio de grado seis, producto interior de tipo Meijer	24
5.4. Ceros y puntos críticos de polinomio de grado ocho.	25
5.5. Ceros de polinomio de grado cinco.	28

Capítulo 1

Motivación y objetivos

Los motivos para elegir este tema como materia para un Trabajo de Fin de Grado son diversos. En particular:

- La teoría de Polinomios Ortogonales y temas afines es un campo transversal, que conecta con numerosas asignaturas del Plan de Estudios del actual Grado en Matemáticas. Así, además de la más que evidente conexión con las dos asignaturas troncales de Métodos Numéricos, existe también una clara relación con las materias dedicadas al estudio de Ecuaciones Diferenciales (tanto ordinarias como en derivadas parciales), así como más en general con todas las asignaturas de Análisis, en particular Complejo y Funcional. No debemos olvidar tampoco la estrecha relación, por sus numerosas aplicaciones, con las asignaturas de Física y Modelización. Creemos que este carácter transversal e interdisciplinar lo convierte en un tema idóneo para la realización de un Trabajo de Fin de Grado.
- Al ser un trabajo de carácter teórico-práctico, nos permite asimismo formarnos en un amplio espectro de técnicas que conforman la realización y presentación de un trabajo sobre Matemáticas. Además de la correcta exposición de los resultados y presentación de las demostraciones, nos permite entrenarnos en aspectos computacionales (resultados numéricos, elaboración de gráficos), de gran importancia para ilustrar los teoremas o conjeturas formulados en el análisis teórico.
- Cabe destacar finalmente que el tema elegido nos ha permitido un acercamiento a esta materia, asequible para nuestros conocimientos y destrezas adquiridos en el Grado, posibilitando por añadidura la continuación de nuestra investigación en futuros trabajos de contenido más profundo. Creemos que esta componente de iniciación o introducción hacia posibles líneas futuras de investigación es una característica fundamental de cualquier Trabajo de Fin de Grado.

Con este propósito, el presente trabajo pretende servir de introducción a un tema de investigación de actualidad, con numerosos problemas abiertos aún por resolver, a la par que sintetizar e ilustrar de manera sencilla el método de trabajo característico del conjunto de la Matemática Aplicada y, en particular, del ámbito de la Teoría de Aproximación y

otros métodos numéricos: la interacción continua y el mútuo enriquecimiento entre los resultados teóricos (utilizando variadas técnicas de análisis real, complejo y funcional) y la experimentación numérica y gráfica.

Capítulo 2

Introducción

Es bien sabido que los polinomios ortogonales constituyen una herramienta fundamental con importantes aplicaciones en el estudio de importantes problemas de la Matemática y la Ingeniería.

Con el avance de la ciencia y la tecnología, la necesidad de ampliar el abanico de problemas tratados por esta teoría motivó la extensión del concepto de ortogonalidad estándar mediante la consideración de otras definiciones más generales de ortogonalidad, tales como, por ejemplo, la ortogonalidad respecto a medidas variantes (es decir, cuando la función peso varía con el grado del polinomio), la ortogonalidad múltiple (también conocida como ortogonalidad de Hermite-Padé), la ortogonalidad matricial (al considerar polinomios de valor matricial) y la ortogonalidad respecto a productos interiores con derivadas (también llamados productos interiores de Sobolev, en base a su relación con los denominados Espacios de Sobolev, bien conocidos en el ámbito del Análisis Funcional). En este trabajo centraremos nuestro estudio en este último tipo de ortogonalidad.

El estudio de los polinomios ortogonales de Sobolev ha constituido un campo de investigación muy activo en los últimos veinticinco años, como queda de manifiesto al observar la extensa bibliografía existente sobre el tema. Entre las razones que motivan este interés podemos citar:

1. Comparación con la teoría estándar de polinomios ortogonales, con respecto a la cual presenta importantes diferencias.
2. Aplicaciones a la Teoría Espectral de ecuaciones diferenciales ordinarias.
3. Aplicaciones al análisis de los métodos espectrales en el tratamiento numérico de problemas de contorno para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.
4. Búsqueda de algoritmos computacionales para Series de Fourier-Sobolev en términos de polinomios ortogonales de Sobolev, cuando las normas consideradas involucran a la función y a algunas de sus derivadas. En ocasiones, la aproximación de funciones mediante Series de Fourier-Sobolev mejoran los resultados de convergencia proporcionados por las usuales de Fourier en base a polinomios ortogonales estándar (ver, por ejemplo, [8]).

El pionero trabajo de D. C. Lewis (ver [3]), se considera como punto de partida de la teoría de polinomios ortogonales en espacios de Sobolev. En él se plantea por primera vez el problema de la aproximación por mínimos cuadrados de una función y, simultáneamente, de algunas de sus derivadas, a través de aproximantes polinómicos y de las derivadas de estos aproximantes. Aunque este autor no hace uso directamente de los polinomios ortogonales de Sobolev, este artículo constituye una importante motivación para estudios posteriores.

En 1962, Althammer (ver [10]) retoma el problema considerado por Lewis y analiza el primer ejemplo (extremadamente simple) de producto interior de Sobolev, mostrando un hecho clave que pone de manifiesto la diferencia crucial entre este tipo de ortogonalidad y la de tipo estándar: a saber, los ceros de los polinomios de Sobolev pueden estar fuera de la envolvente convexa de la unión de los soportes de las medidas. Este factor clave motiva el inicio del estudio de estos polinomios ortogonales, con mayor interés especialmente a partir de la década de los noventa, con los consiguientes avances computacionales. En los momentos iniciales del desarrollo de esta teoría, merece también especial mención el trabajo de E. A. Cohen (ver [2]) en 1975.

El interés del presente trabajo, de carácter marcadamente introductorio, se centra básicamente en el estudio de la localización de ceros de estos polinomios ortogonales no estándar.

Tras el ejemplo inicial de Althammer, pudo comprobarse fácilmente que en general los ceros de los polinomios de Sobolev pueden no sólo situarse en el eje real lejos de los soportes de las medidas, sino que incluso pueden ser imaginarios; de hecho, ejemplos posteriores debidos a Meijer (1994, ver [7]) prueban que existen familias de polinomios con casi todos sus ceros imaginarios (analizaremos con detalle estos ejemplos en el presente trabajo).

Otra propiedad muy importante en el caso estándar es la siguiente: la ortogonalidad de un sistema de polinomios respecto a una medida soportada sobre el eje real equivale a que dichos polinomios satisfagan una relación de recurrencia a tres términos (lo que se conoce en la literatura como Teorema de Favard, y será revisado más adelante con cierto detalle). Sin embargo, los polinomios ortogonales de Sobolev no verifican tal relación de recurrencia a tres términos. Esto se debe a que el denominado operador de multiplicación no es simétrico respecto al producto de Sobolev, a causa de la presencia de derivadas en el producto interior.

Los ceros de los polinomios ortogonales desempeñan un papel importante en teoría de interpolación, fórmulas de cuadratura y teoría espectral de algunos operadores. El propósito de este trabajo es presentar una exposición no exhaustiva y de marcado carácter práctico sobre el comportamiento diferenciado de los ceros de los polinomios ortogonales Sobolev.

Capítulo 3

Polinomios ortogonales estándar

En este capítulo introduciremos, en primer lugar, el concepto de Polinomios Ortogonales y, seguidamente, daremos una serie de propiedades que necesitaremos para trabajar adecuadamente con ellos. A continuación, estudiaremos una serie de ejemplos clásicos como son los Polinomios de Jacobi (en especial, los Polinomios de Legendre y los Polinomios de Chebychev de 1ª y 2ª especie), los Polinomios de Laguerre y los Polinomios de Hermite. Para más detalle, puede consultarse, por ejemplo, [5].

3.1. Definición y primeros ejemplos

Consideremos un intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supongamos que tenemos una función peso, $w(x)$, que debe cumplir las siguientes propiedades:

- a. $w(x) \geq 0$.
- b. $w(x) > 0$ casi por todo el intervalo $[a, b]$.
- c. $w(x)$ integrable en $[a, b]$, es decir, tiene que existir

$$\int_a^b w(x)dx < \infty.$$

Puede ser en sentido impropio, tanto de primera como de segunda especie.

Esta función peso nos va a permitir definir el producto interior (o escalar) del siguiente modo:

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx.$$

Definición 1. Decimos que un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definido en el espacio de polinomios \mathbb{P} con coeficientes reales, es estándar si verifica que para cualquier par $p, q \in \mathbb{P}$,

$$\langle tp(t), q(t) \rangle = \langle p(t), tq(t) \rangle.$$

Definición 2. La sucesión de polinomios $\{p_0, p_1, \dots\}$ es ortogonal en $[a, b]$ con respecto a la función peso w si:

1. grado $p_i = i, \forall i = 0, 1, 2, \dots$
2. $\langle p_n, p_m \rangle_w = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \neq 0, & \text{si } m = n. \end{cases}$

Definición 3. La sucesión de polinomios $\{p_0, p_1, \dots\}$ es ortogonal en $[a, b]$ con respecto a la función peso w si:

1. grado $p_i = i, \forall i = 0, 1, 2, \dots$
2. $\langle p_n, x^k \rangle_w = 0, k = 0, 1, \dots, n-1 \iff \langle p_n, q \rangle_w = 0$ con $\deg q < n$.

Observación 1. Las dos definiciones anteriores son equivalentes. Basta tener en cuenta que p_0, p_1, \dots, p_n es base de \mathbb{P}_n , para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.1.1. Veamos los siguientes casos:

- a. **Intervalo finito.** Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $[a, b] = [-1, 1]$. En este caso la familia de polinomios ortogonales representativa es la de los **POLINOMIOS DE JACOBI**. Para este tipo de polinomios la función peso depende de dos parámetros α y β :

$$w_{\alpha, \beta}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad x \in (-1, 1), \quad \alpha, \beta > -1.$$

Por tanto, esta función peso verifica las propiedades anteriores (es decir, $w(x) \geq 0$ e integrable). Dentro de esta familia, los casos más típicos son los llamados **POLINOMIOS DE GEGENBAUER**, en los que $\alpha = \beta$, es decir

$$w_\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha.$$

A continuación, nos centraremos en distintos valores de α :

- Si $\alpha = 0$. La función peso resultante es $w_0(x) = 1$. Entonces tenemos los llamados **POLINOMIOS DE LEGENDRE**, denotados por P_n . En la Figura (3.1) podemos observar la representación de varios polinomios de Legendre. Observamos que los ceros están en $(-1, 1)$.
- Si $\alpha = -\frac{1}{2}$. La función peso producida es $w_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Entonces tenemos los denominados **POLINOMIOS DE CHEBYSHEV DE PRIMERA ESPECIE** y se denotan por T_n . En la figura (3.2) podemos ver la representación de varios polinomios de Chebyshev.

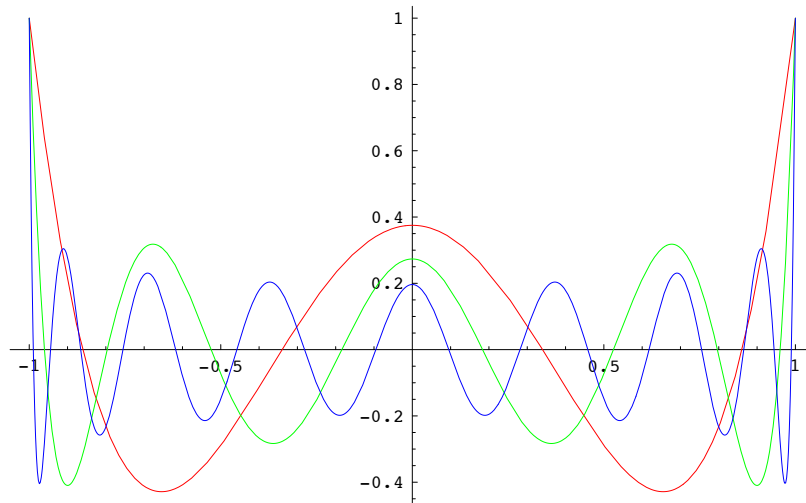


Figura 3.1: Polinomios de Legendre.

- Si $\alpha = \frac{1}{2}$. Se deduce que la función peso es $w_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{1-x^2}$, entonces tenemos los llamados *POLINOMIOS DE CHEBYSHEV DE SEGUNDA ESPECIE*, denotados por U_n .
- b. **Semieje real positivo.** En este caso el intervalo es $(0, \infty)$. La función peso típica es $w_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$. Los correspondientes polinomios ortogonales son los denominados *POLINOMIOS DE LAGUERRE* y se denotan por L_n^α .
- c. **Eje real,** $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. La función peso correspondiente es $w(x) = e^{-x^2}$, entonces tenemos los llamados *POLINOMIOS DE HERMITE*, los cuales se denotan por H_n .

3.2. Propiedades generales

Los polinomios ortogonales estándar satisfacen tres propiedades importantes que desarrollaremos en profundidad a continuación.

Sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a una cierta función peso w en $[a, b]$. Entonces:

1. (CEROS) Los ceros de los polinomios $p_n, n \in \mathbb{N}$, ortogonales respecto al producto escalar asociado a w , son todos simples y reales y pertenecen al intervalo (abierto) de ortogonalidad (a, b) .
2. (RELACIÓN DE RECURRENCIA A TRES TÉRMINOS) Los polinomios $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ ortogonales mónicos respecto a un producto escalar estándar, verifican la relación de recurrencia a tres términos

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)p_n(x) - \beta_n p_{n-1}(x),$$

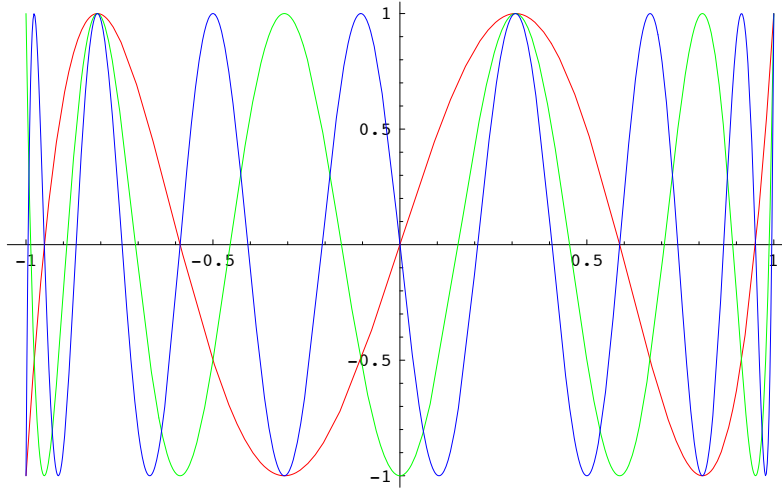


Figura 3.2: Polinomios de Chebyshev.

tomando $p_{-1} = 0$ y $p_0 = 1$ y siendo

$$\alpha_n = \frac{\langle xp_n(x), p_n(x) \rangle_w}{\|p_n(x)\|_w^2} \quad \text{y} \quad \beta_n = \frac{\|p_n(x)\|_w^2}{\|p_{n-1}(x)\|_w^2}.$$

3. (PROPIEDAD MINIMAL EN NORMA) Entre todos los polinomios mónicos de grado n :

$$q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

el que tiene norma $\|\cdot\|_w$ mínima es el polinomio ortogonal mónico de grado n . Es decir, si denotamos por \hat{p}_n al n -ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a w , se tiene que

$$\|\hat{p}_n\|_w = \min_{q(x)=x^n+\dots+a_0} \|q\|_w,$$

o lo que es lo mismo,

$$\int_a^b (\hat{p}_n(x))^2 w(x) dx \leq \int_a^b (q(x))^2 w(x) dx, \quad \forall q : q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0.$$

Observación 2.

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \Rightarrow \|f\|_w = \sqrt{\langle f, f \rangle_w},$$

pues todo producto interior induce una norma.

Demostración.

1. Sabemos que p_n es un polinomio de grado n y también sabemos que $\langle p_n, q \rangle_w = 0$ si $\deg q < n$. Veamos, en primer lugar, que las raíces que tiene p_n en (a, b) son de multiplicidad impar. Para ello, llamamos x_1, x_2, \dots, x_m ($m \leq n$) a las raíces de multiplicidad impar de p_n en (a, b) . Vamos a formar el polinomio

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m).$$

Ahora, calculamos la integral

$$\int_a^b \underbrace{p_n(x)}_{q(x)r(x)} q(x)w(x)dx,$$

donde $r(x)$ no cambia de signo en (a, b) , pues hemos excluido los ceros de orden impar (podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $r(x) \geq 0$). Entonces,

$$\int_a^b \underbrace{p_n(x)}_{q(x)r(x)} q(x)w(x)dx = \int_a^b \underbrace{(q(x))^2}_{\geq 0} \underbrace{r(x)}_{\geq 0} \underbrace{w(x)}_{> 0} dx > 0,$$

con lo cual tenemos que $\langle p_n, q_w \rangle_w > 0$. Por hipótesis teníamos que $\langle p_n, t \rangle = 0$ si $\deg t < n$. Entonces,

$$\left. \begin{array}{l} \deg q \geq n \\ \deg q \leq n \end{array} \right\} \Rightarrow \deg q = n.$$

Por tanto, p_n tiene todas sus raíces de orden impar y se encuentran en el intervalo (a, b) .

Finalmente, veamos que todas las raíces son simples. Supongamos que x_1 tiene multiplicidad mayor o igual que dos, entonces

$$p_n(x) = (x - x_1)^2 \underbrace{q(x)}_{\in \mathbb{P}_{n-2}}.$$

Luego,

$$0 = \langle p_n, q \rangle_w = \int_a^b \underbrace{p_n(x)}_{(x-x_1)^2 q(x)} q(x)w(x)dx > 0.$$

Por tanto, todas sus raíces son simples.

2. En efecto, al ser polinomios mónicos, tenemos que $p_{n+1}(x) - xp_n(x) \in \mathbb{P}_n$. Tomamos $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ como base de \mathbb{P}_n (pues son linealmente independientes). Entonces podemos expresar

$$p_{n+1}(x) - xp_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k p_k(x).$$

Multiplicando escalarmente por p_n , tenemos que:

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle p_{n+1} - xp_n, p_n \rangle_w}_{=0} &= \left\langle \sum_{k=0}^n a_k p_k, p_n \right\rangle_w \\ &= a_n \langle p_n, p_n \rangle_w = a_n \|p_n\|_w^2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$-\langle xp_n, p_n \rangle = a_n \|p_n\|_w^2 \Rightarrow a_n = -\alpha_n = \frac{-\langle xp_n, p_n \rangle_w}{\|p_n\|_w^2}.$$

Por otro lado, multiplicando por p_{n-1} :

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle p_{n+1} - xp_n, p_{n-1} \rangle_w}_{=0} &= \left\langle \sum_{k=0}^n a_k p_k, p_{n-1} \right\rangle_w \\ &= a_{n-1} \|p_{n-1}\|_w^2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} -\langle xp_n, p_{n-1} \rangle_w &= -\langle p_n, xp_{n-1} \rangle_w \\ &= -\langle p_n, p_n + q \rangle_w \\ &= -\langle p_n, p_n \rangle_w - \underbrace{\langle p_n, q \rangle_w}_{=0} \\ &= -\|p_n\|_w^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$-\|p_n\|_w^2 = a_{n-1} \|p_{n-1}\|_w^2 \Rightarrow a_{n-1} = -\beta_n = \frac{-\|p_n\|_w^2}{\|p_{n-1}\|_w^2}.$$

Falta ver que $a_0 = \dots = a_{n-2} = 0$. Supongamos que $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, entonces

$$\begin{aligned} \left\langle \underbrace{p_{n+1}(x) - xp_n(x)}_{a_0 p_0 + \dots + a_n p_n}, p_k(x) \right\rangle_w &= a_k \|p_k\|_w^2. \\ a_0 p_0 + \dots + a_n p_n &= \sum_{j=0}^n a_j p_j \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle p_{n+1}(x), p_k(x) \rangle_w}_{=0} - \langle xp_n(x), p_k(x) \rangle_w &= -\langle xp_n(x), p_k(x) \rangle_w \\ &= -\langle p_n(x), xp_k(x) \rangle_w = 0. \end{aligned}$$

Entonces,

$$a_k \|p_k\|_w^2 = 0 \Rightarrow a_k = 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-2\}.$$

3. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \hat{p}_n, \underbrace{\hat{p}_n - q}_{\in \mathbb{P}_{n-1}} \rangle_w = \langle \hat{p}_n, \hat{p}_n \rangle - \langle \hat{p}_n, q \rangle_w \\ &= \|\hat{p}_n\|_w^2 - \langle \hat{p}_n, q \rangle_w. \end{aligned}$$

Pero,

$$\|\hat{p}_n\|_w^2 = \langle \hat{p}_n, q \rangle_w \leq \|\hat{p}_n\|_w \|q\|_w \Rightarrow \|\hat{p}_n\|_w \leq \|q\|_w$$

$$\Rightarrow \|\hat{p}_n\|_w = \min_{q(x)=x^n+\dots+a_0} \|q\|_w.$$

Observación 3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $\langle \hat{p}_n, q \rangle_w \leq \|\hat{p}_n\|_w \|q\|_w$.

□

3.3. Intervalos acotados

3.3.1. Polinomios de Chebyshev de 1ª especie

Los polinomios de Chebyshev de 1ª especie son un caso particular de los POLINOMIOS DE JACOBI cuando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, estos polinomios son ortogonales con respecto a la función peso

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Como hemos mencionado anteriormente, estos polinomios se denotan por T_n y cumplen la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\langle T_n, T_m \rangle_w = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \pi, & \text{si } m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } m = n \geq 1. \end{cases}$$

Veamos que los polinomios de Chebyshev de 1ª verifican la siguiente expresión:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \cos(n\theta), \quad x = \cos\theta. \quad (3.1)$$

En efecto, es fácil ver que

$$\langle T_n, T_m \rangle_w = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \neq 0, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Como consecuencia de (3.1), es fácil comprobar que dichos polinomios verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (3.2)$$

con $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$.

Ahora, veamos algunas propiedades de los polinomios de Chebyshev de 1ª especie:

1. Ceros:

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad \text{con } k = 1, \dots, n.$$

Observación 4. Con esta notación los ceros están ordenados de derecha a izquierda, en orden decreciente, como se puede observar en la Figura (3.3).

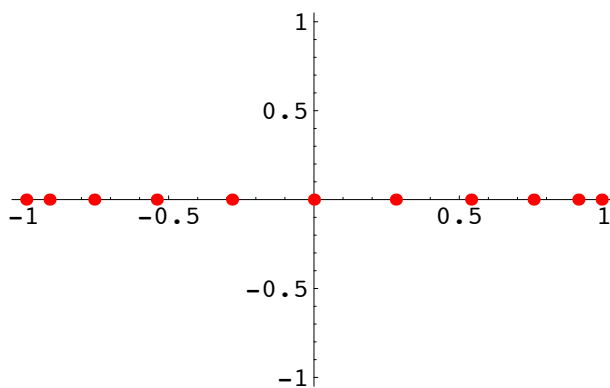


Figura 3.3: Ceros de un polinomio de Chebyshev de grado once.

2. $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.

3. El polinomio tiene $n + 1$ máximos (en valor absoluto).

$$y_{n,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

4. \hat{T}_n tiene también norma uniforme mínima

$$\|\hat{T}_n\|_{\infty,[-1,1]} = \min_{q(x)=x^n+\dots+a_0} \|q\|_{\infty,[-1,1]}.$$

Es decir,

$$\max_{x \in [-1,1]} |\hat{T}_n(x)| = \min_{q(x)=x^n+\dots+a_0} \left(\max_{x \in [-1,1]} |q(x)| \right).$$

Observación 5. Es decir, verifica la propiedad minimal tanto en norma $\|\cdot\|_w$ como en norma uniforme.

3.3.2. Polinomios de Chebyshev de 2ª especie

Estos polinomios, al igual que los de Chebyshev de 1ª especie, también son un caso particular de los POLINOMIOS DE JACOBI, en este caso $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Constituyen una familia de polinomios ortogonales con respecto a la función peso

$$w(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Estos polinomios se denotan por U_n y cumplen la siguiente relación de ortogonalidad

$$\langle U_n, U_m \rangle_w = \int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) \sqrt{1 - x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que

$$U_n(x) = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} = \frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\text{sen}\theta}, \quad x = \cos\theta.$$

Los polinomios de Chebyshev de 2ª especie verifican la siguiente relación de recurrencia

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),$$

con $U_0(x) = 1$ y $U_1(x) = 2x$.

Como vemos se trata de la misma relación de recurrencia que verifican los polinomios de Chebyshev de 1ª especie (3.2), pero con distintas condiciones iniciales.

Finalmente, los polinomios de Chebyshev de 2ª especie mónicos, \hat{U}_n , son minimales en norma $\|\cdot\|_1$ en $[-1, 1]$, es decir,

$$\begin{aligned} \|\hat{U}_n\|_1 &= \min_{q(x)=x^n+\dots} \|q(x)\|_1 \\ &= \min_{q(x)=x^n+\dots} \int_{-1}^1 |q(x)| dx. \end{aligned}$$

3.3.3. Polinomios de Legendre

Como en los dos casos anteriores, estos polinomios también son un caso particular de los POLINOMIOS DE JACOBI donde $\alpha = \beta = 0$ y se denotan por P_n . Por tanto, estos polinomios son ortogonales respecto a la función peso

$$w(x) = 1.$$

Su relación de ortogonalidad es la siguiente:

$$\langle P_n, P_m \rangle_w = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Verifican la siguiente relación de recurrencia tomando $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

También pueden generarse mediante la Fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

3.4. Intervalos no acotados

3.4.1. Polinomios de Laguerre

Como hemos mencionado anteriormente, estos polinomios se definen en el semieje real positivo, $(0, \infty)$. Se denotan por L_n^α y su función peso es

$$w(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha > -1.$$

La Fórmula de Rodrigues viene dada de la siguiente forma

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^{-x}].$$

Los polinomios de Laguerre satisfacen la siguiente relación de recurrencia, tomando $L_0(x) = 1$ y $L_1(x) = x - \alpha - 1$:

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) = (2n+1+\alpha-x)L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0.$$

Estos polinomios son solución de la ecuación diferencia de segundo orden

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0,$$

donde $y = L_n^\alpha$.

3.4.2. Polinomios de Hermite

En este caso el intervalo de soporte es toda la recta real $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, se denotan por H_n y su función peso es

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

La Fórmula de Rodrigues que satisfacen es

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}].$$

Verifican la siguiente relación de ortogonalidad

$$\langle H_n, H_m \rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Los polinomios de Hermite verifican la relación de recurrencia siguiente, para $H_0(x) = 1$ y $H_1(x) = 2x$:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

Estos polinomios son solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

donde $y = H_n$.

A continuación, mostramos una tabla resumen donde se recogen los polinomios ortogonales clásicos.

Intervalo	Función peso	Familia	Notación
$[-1, 1]$	$w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	Jacobi	$P_n^{\alpha,\beta}$
$[-1, 1]$	$\alpha = \beta = 0 : w(x) = 1$ $\alpha = \beta = -\frac{1}{2} : w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\alpha = \beta = \frac{1}{2} : w(x) = \sqrt{1-x^2}$	Legendre Chebyshev de 1ª especie Chebyshev de 2ª especie	P_n T_n U_n
$(0, \infty)$	$w(x) = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1$	Laguerre	L_n^α
$(-\infty, \infty)$	$w(x) = e^{-x^2}$	Hermite	H_n

Capítulo 4

Polinomios ortogonalidad no estándar

Como hemos mencionado anteriormente, debido al avance de la ciencia y la tecnología, las aplicaciones han hecho necesario considerar otras definiciones más generales de ortogonalidad. En este capítulo, estudiaremos en particular el producto interior de Sobolev, resaltando algunos resultados, en especial en lo relativo al comportamiento de sus ceros. Recordemos que habíamos definido el producto interior estándar en el Capítulo anterior de la siguiente manera:

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx.$$

4.1. Productos interiores de tipo Sobolev

En lo sucesivo, denominaremos de esta forma a aquellos productos interiores en los que aparecen derivadas. Así, por ejemplo,

$$\langle f, g \rangle_s = \sum_{j=0}^k \int_{a_j}^{b_j} f^{(j)}(x)g^{(j)}(x)w_j(x)dx,$$

siendo w_j una función peso en el intervalo (a_j, b_j) , para $j = 0, \dots, k$.

Éste es un caso particular de los llamados productos escalares de Sobolev. Es fácil comprobar que el producto interior de Sobolev es no estándar, ya que

$$\langle tp(t), q(t) \rangle_s \neq \langle p(t), tq(t) \rangle_s.$$

La demostración es inmediata utilizando su definición.

En este trabajo nos centraremos en el estudio de la ubicación de los ceros en dos casos sencillos y, a la vez interesantes:

a. CONTINUO:

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{a_0}^{b_0} f(x)g(x)w_0(x)dx + \int_{a_1}^{b_1} f'(x)g'(x)w_1(x)dx.$$

b. DISCRETO:

$$\langle f, g \rangle_s = \int_a^b f(x)g(x)w_0(x)dx + \lambda_1 f'(c)g'(c) + \lambda_2 f''(c)g''(c) + \dots + \lambda_m f^{(m)}(c)g^{(m)}(c),$$

donde $c \notin (a, b)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1} \geq 0$ y $\lambda_m > 0$.

En cualquiera de los dos casos los intervalos de integración no tienen ninguna restricción: pueden ser iguales, disjuntos o, incluso, solapados. También pueden ser acotados o no.

Para este Capítulo, pueden consultarse las referencias [1], [4], [6], [7], [9], [10], y [12].

El principal problema es que los correspondientes polinomios ortogonales no verifican, en general, la propiedad relativa a la ubicación de los ceros. Esto ya resultó evidente desde el temprano ejemplo propuesto por Althammer (ver [10]). En efecto, este autor consideró el ejemplo del producto interior

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx + \lambda \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)dx \quad (4.1)$$

y observó que para $\lambda = 10$ el polinomio ortogonal de grado dos tenía uno de sus ceros fuera del soporte $(-1, 1)$. De hecho, como veremos en el siguiente Capítulo, para grados mayores los ceros pueden ser incluso complejos.

4.2. Producto de Sobolev continuo

A pesar de lo que acabamos de comentar, tenemos el siguiente resultado que prueba que al menos un cero está en el soporte de w_0 .

Lema 1. $\forall n \geq 1$, p_n tiene al menos un cero de multiplicidad impar en (a_0, b_0) .

Demostración. Sabemos que $\langle p_n, 1 \rangle_s = 0$ es cierto. Por tanto,

$$\langle p_n, 1 \rangle_s = \int_{a_0}^{b_0} p_n(x) \underbrace{w_0(x)}_{>0} dx = 0.$$

Como $w_0(x) > 0$, entonces tiene que cambiar de signo $p_n(x)$ y, por tanto, tiene al menos un cero de orden impar. □

Poco más podemos asegurar, en general, con respecto a los ceros. En este sentido, los puntos críticos (ceros de la derivada del polinomio) pueden proporcionar información, como veremos un poco más adelante. Veamos primero un resultado sencillo:

Lema 2. Si $n \geq 2$, entonces p'_n tiene al menos un cero de orden impar (es decir, un cambio de signo) en la envolvente convexa $C_0((a_0, b_0) \cup (a_1, b_1))$.

Demostración. Por el Lema 1 sabemos que p_n se anula al menos una vez en el intervalo abierto (a_0, b_0) . Entonces, tenemos dos opciones:

- i. p_n se anula más de una vez: Entonces, por el Teorema de Rolle ya quedaría probado.
- ii. p_n se anula exactamente una vez: Supongamos que p_n tiene exactamente un cero de orden impar en el intervalo (a_0, b_0) , que denotaremos por x_0 . En este caso, volvemos a tener dos opciones:
 - a. El caso en que p_n sea una función creciente en x_0 . Esto quiere decir que $(x - x_0)p_n(x) > 0$ en $(a_0, b_0) \setminus \{0\}$.
 - b. El caso en que p_n sea una función decreciente en x_0 . Por tanto, esto quiere decir que $(x - x_0)p_n(x) < 0$ en $(a_0, b_0) \setminus \{0\}$.

Ahora, por ortogonalidad, sabemos que

$$0 = \langle x - x_0, p_n(x) \rangle_s,$$

y, entonces, desarrollando el producto interior de Sobolev tenemos

$$0 = \int_{a_0}^{b_0} (x - x_0)p_n(x)w_0(x)dx + \int_{a_1}^{b_1} p_n'(x)w_1(x)dx.$$

Luego, veamos qué ocurre en cada uno de los casos anteriores:

- a. $(x - x_0)p_n(x) > 0$ en $(a_0, b_0) \setminus \{0\}$, entonces

$$0 = \int_{a_0}^{b_0} \underbrace{(x - x_0)p_n(x)}_{>0} \underbrace{w_0(x)}_{>0} dx + \int_{a_1}^{b_1} p_n'(x)w_1(x)dx.$$

Por tanto,

$$\int_{a_1}^{b_1} p_n'(x)w_1(x)dx < 0.$$

Teníamos que $p_n'(x) > 0$ en un entorno del cero x_0 , entonces como la integral anterior es negativa quiere decir que $p_n'(x)$ tiene que cambiar de signo en la envolvente convexa $C_0((a_0, b_0) \cup (a_1, b_1))$.

- b. $(x - x_0)p_n(x) < 0$ en $(a_0, b_0) \setminus \{0\}$, entonces

$$0 = \int_{a_0}^{b_0} \underbrace{(x - x_0)p_n(x)}_{<0} \underbrace{w_0(x)}_{>0} dx + \int_{a_1}^{b_1} p_n'(x)w_1(x)dx.$$

En este caso,

$$\int_{a_1}^{b_1} p_n'(x)w_1(x)dx > 0.$$

Como teníamos que $p_n'(x) < 0$ en un entorno del cero x_0 , entonces, razonando del mismo modo que en el caso anterior, $p_n'(x)$ tiene que cambiar de signo en $C_0((a_0, b_0) \cup (a_1, b_1))$.

□

A continuación, vamos a formular un resultado que todavía no ha sido probado ya que es un tema abierto en la actualidad, pero que está soportado por numerosos ejemplos numéricos que estudiaremos en el próximo Capítulo.

Conjetura 1 (Díaz Mendoza-Orive). *Todos los ceros del polinomio p'_n , es decir, los puntos críticos de p_n , se encuentran en la envolvente convexa $C_0((a_0, b_0) \cup (a_1, b_1))$.*

Esta conjetura ha sido probada para el caso en que los intervalos son disjuntos $(a_0, b_0) \cap (a_1, b_1) = \emptyset$ (ver [6]).

Ahora, consideraremos algunas consecuencias de este resultado. Si esta conjetura fuera cierta (por ejemplo, se sabe que es cierto para el caso disjunto), obtendríamos información sobre la localización de los ceros (al menos cuando ambos intervalos están acotados). Esto es consecuencia del llamado Teorema de la Bisectriz, que es una generalización del Teorema de Rolle para polinomios en \mathbb{C} (véase [11, p. 200]).

Teorema 1 (Teorema de la Bisectriz). *Sea p un polinomio. Si a y b son puntos distintos tales que $p(a) = p(b)$, entonces existe un punto crítico ξ de p tal que*

$$|\xi - a| \leq |\xi - b|.$$

En otras palabras, el teorema nos dice que si dibujamos la bisectriz del segmento $[a, b]$, debe haber al menos un punto crítico de p a ambos lados de la línea o en la misma.

Vamos a estudiar las consecuencias de esta afirmación en los diferentes casos:

- Intervalos coincidentes.
- Intervalos disjuntos.
- Intervalos solapados.

Empezaremos estudiando el caso en el que los intervalos $[a_0, b_0]$ y $[a_1, b_1]$ son coincidentes. Como sabemos que al menos hay un cero en el soporte, lo suponemos muy próximo al extremo $a_0 = a_1$. Supongamos que, en efecto, los puntos críticos se encuentran en la envolvente convexa del soporte. Llamamos d a la distancia $[a_0, b_0]$. Entonces, trazando la bisectriz del segmento y, teniendo en cuenta el resultado anterior, nos damos cuenta de que el cero más alejado podría estar a una distancia d por la derecha del extremo $b_0 = b_1$ (ya que suponemos que no puede haber puntos críticos a la derecha de b_0). De igual modo, si consideramos el cero muy próximo al extremo $b_0 = b_1$, entonces el cero más alejado estaría a una distancia d por la izquierda del extremo $a_0 = a_1$. Por tanto, los ceros complejos se encuentran en la unión entre la circunferencia de centro a_0 y radio $2d$ y la circunferencia de centro b_0 e igual radio $2d$.

Ahora, estudiemos el caso en el que los intervalos son disjuntos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el intervalo $[a_0, b_0]$ está a la izquierda. Supongamos, también, que el cero se encuentra en el extremo más alejado del otro soporte ($[a_1, b_1]$), es decir, muy

próximo a a_0 . Llamamos d a la distancia entre a_0 y b_1 . Del mismo modo que en el caso anterior, trazamos la bisectriz del segmento. En este caso, el cero más alejado podría encontrarse a una distancia d por la derecha del extremo b_1 . Supongamos, ahora, que nuestro cero inicial se encuentra muy próximo al extremo b_0 , volviendo a trazar la bisectriz del segmento observamos que el cero más alejado por la izquierda puede estar a una distancia e del extremo a_0 , pero el cero más alejado por la derecha puede estar a una distancia $d - e$ del extremo b_1 . Llamamos e a la distancia entre a_0 y b_0 . De cualquier forma, como $e < d$, podemos asegurar que se encuentran en la circunferencia centrada en a_0 y radio $2d$, pero este conjunto de hecho se podría restringir un poco más ya que por el lado izquierdo se encontrarían en la circunferencia de centro b_0 y radio $2e$.

Por último, en el caso en el que los intervalos están solapados, las conclusiones son similares a las de los casos anteriores pero más difíciles de expresar con sencillez.

Como conclusión, si la conjetura es cierta, tendríamos probada la acotación de los ceros en el caso de soportes acotados (problema aún abierto en la actualidad).

4.3. Producto de Sobolev discreto

Definición 4. *Supongamos que tenemos un intervalo $[a, b]$ estrictamente contenido en \mathbb{R} y un punto $c \notin (a, b)$. Entonces se define el producto de Sobolev discreto de la siguiente manera*

$$\langle p, q \rangle_s = \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx + \sum_{j=0}^m \lambda_j p^{(j)}(c)q^{(j)}(c),$$

donde $\lambda_m > 0$ y $\lambda_j \geq 0, \forall j = 0, \dots, m - 1$ ($m \geq 1$).

Para este tipo de ortogonalidad, el siguiente resultado nos da información sobre la localización de los ceros.

Teorema 2. *p_n con $n > m + 1$ tiene al menos $n - (m + 1)$ ceros de orden impar (contando multiplicidades) en (a, b) .*

Demostración. Sea $q \in \mathbb{P}_{n-(m+1)-1}$. Entonces $q(x)(x - c)^{m+1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Por ortogonalidad, sabemos que

$$0 = \langle p_n(x), q(x)(x - c)^{m+1} \rangle_s$$

y por la definición de producto de Sobolev discreto, tenemos que

$$\langle p_n(x), q(x)(x - c)^{m+1} \rangle_s = \int_a^b p_n(x)q(x)(x - c)^{m+1}w(x)dx + 0. \quad (4.2)$$

Entonces,

$$\int_a^b p_n(x)q(x)(x - c)^{m+1}w(x)dx = 0, \quad \forall q \in \mathbb{P}_{n-(m+1)-1}. \quad (4.3)$$

Supongamos, ahora, que p_n se puede descomponer de la siguiente forma: $p_n = q \cdot r$ donde $q \in \mathbb{P}_{n-(m+1)-1}$ y r tiene signo constante en (a, b) . Con esto estamos afirmando que p_n

tiene a lo sumo $n - (m + 1) - 1$ ceros impares.

Sustituimos $p_n = q \cdot r$ en (4.2):

$$0 = \int_a^b q(x)r(x)q(x)(x-c)^{m+1}w(x)dx = \int_a^b \underbrace{(q(x))^2}_{>0} r(x)(x-c)^{m+1} \underbrace{w(x)}_{>0} dx,$$

lo cual es un absurdo pues como $r(x) \neq 0$ y $(x-c)^{m+1} \neq 0$, entonces la integral (4.3) sería $\neq 0$, Por tanto, $\deg q \geq n - (m + 1)$. Luego, hemos llegado a lo que queríamos demostrar, es decir, que p_n tiene al menos $n - (m + 1)$ ceros de orden impar. □

Observación 6. También se consideran productos interiores de tipo Sobolev discretos a aquellos en los que $m = 0$ (aunque no comparezcan derivadas). Es decir,

$$\langle p, q \rangle_s = \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx + \lambda p(c)q(c),$$

con $\lambda > 0$.

Capítulo 5

Experimentación numérica

En este capítulo nos centraremos en el estudio de diferentes ejemplos ilustrativos y numéricos que soportan los resultados y la conjetura enunciados en el capítulo anterior sobre la ubicación de los ceros de productos de Sobolev tanto continuos como discretos.

5.1. Producto de Sobolev continuo

A continuación, veremos algunos ejemplos clásicos como son el de Althammer (1962, ver [10]) mencionado anteriormente, o el de Meijer (1994, ver [7]). Además estos ejemplos soportan la anterior Conjetura 1.

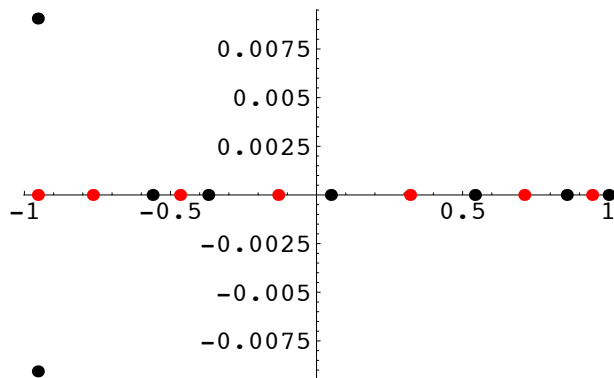


Figura 5.1: Polinomio de grado ocho, producto interior de tipo Althammer

Ejemplo 5.1.1 (Althammer). *La Figura (5.1) representa los ceros y los puntos críticos, representados en negro y rojo, respectivamente, de un polinomio de grado ocho. Se utiliza un producto interior tipo Althammer (4.1), tomando $\lambda = 10$. Puede verse que dos ceros son imaginarios conjugados y un cero real está fuera del soporte $[-1, 1]$. Sin embargo, podemos observar que los puntos críticos se encuentran en la envolvente convexa del*

soporte, $C_0((a_0, b_0) \cup (a_1, b_1)) = [-1, 1]$. Vemos, por tanto, que para grados mayores los ceros pueden ser incluso imaginarios, pero los puntos críticos se siguen encontrando en la envolvente convexa de la unión de los soportes.

Ejemplo 5.1.2 (Meijer). Consideramos el intervalo $[-1, 3]$ y el siguiente producto interior de Meijer:

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{-1}^3 f(x)g(x)dx + \lambda \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)dx + \int_1^3 f'(x)g'(x)dx. \quad (5.1)$$

Tomamos p_n tal que $\langle p_n, x^k \rangle_s = 0$ con $k = 0, \dots, n-1$, $p_0(x) = 1$ y $p_1(x) = x + a$. Debemos encontrar el valor de a :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle p_1, 1 \rangle_s = 0 &\implies \int_{-1}^3 p_1(x)dx + 0 + 0 = 0 \\ &\implies \int_{-1}^3 (x + a)dx = 4 + 4a = 0 \\ &\implies a = -1. \end{aligned}$$

Por tanto, $p_1(x) = x - 1$. Consideramos, ahora, $p_2(x) = x^2 + bx + c$. Encontrar los valores de b y c :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle p_2, 1 \rangle_s = 0 &\implies \int_{-1}^3 p_2(x)dx + 0 + 0 = 0 \\ &\implies \int_{-1}^3 (x^2 + bx + c)dx = \frac{28}{3} + 4b + 4c = 0. \\ \bullet \quad \langle p_2, x - 1 \rangle_s = 0 &\implies \int_{-1}^3 p_2(x - 1)dx + \lambda \int_{-1}^1 p_2'(x - 1)'dx + \int_1^3 p_2'(x - 1)'dx = 0 \\ &\implies \int_{-1}^3 (x^2 + bx + c)(x - 1)dx + \lambda \int_{-1}^1 (2x + b)dx + \int_1^3 (2x + b)dx \\ &= \frac{56}{3} + \frac{47}{6}b - \frac{1}{2}c + 2b\lambda = 0. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$b = -\frac{\frac{21}{2}}{\frac{25}{3} + 2\lambda} \quad y \quad c = -\frac{7}{3} + \frac{\frac{21}{2}}{\frac{25}{3} + 2\lambda}. \quad (5.2)$$

Supongamos que tomamos $\lambda = 10$, entonces tendríamos $b = -\frac{63}{170}$ y $c = -\frac{1001}{510}$. Por tanto, nuestro polinomio sería $p_2(x) = x^2 - \frac{63}{170}x - \frac{1001}{510}$. Las raíces de este polinomio son $x_1 \approx 1,59$ y $x_2 \approx -1,22$. Por tanto, observamos que $x_1 \in [-1, 3]$ pero $x_2 \notin [-1, 3]$. Sin embargo, el punto crítico se encuentra dentro del soporte, $p_2'(x) = 0 \implies x = \frac{63}{170} \in [-1, 3]$.

De hecho, en los productos interiores de tipo Meijer la mayoría de los ceros son imaginarios. Incluso, se dan casos en que para n impar hay un sólo cero real, como se muestra en

la Figura (5.2) y para n par, sólo dos reales, como veremos a continuación. Sin embargo, los puntos críticos siguen encontrándose en la envolvente convexa del soporte.

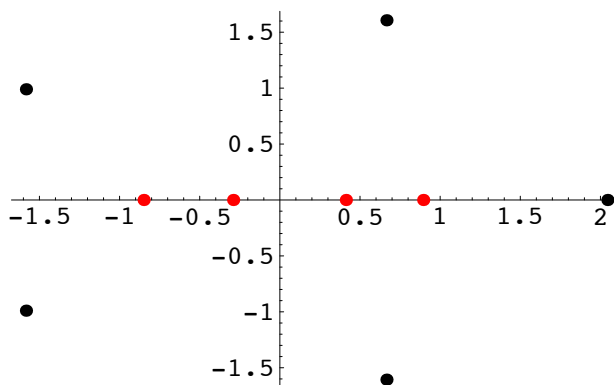


Figura 5.2: Polinomio de grado cinco, producto interior de tipo Meijer.

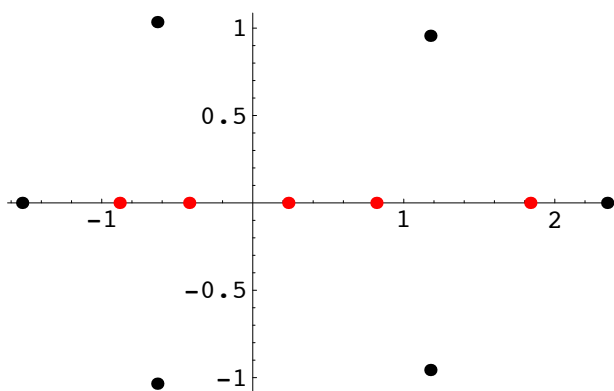


Figura 5.3: Polinomio de grado seis, producto interior de tipo Meijer

En este sentido, la Figura (5.3) representa los ceros y puntos críticos de un polinomio de grado seis. En este caso, se utiliza un producto interior de los considerados por Meijer (5.1) con $\lambda = 100000$. Podemos observar que solo dos ceros son reales y uno de ellos se sale fuera del soporte $[-1, 3]$. En esta figura también podemos ver que los puntos críticos se comportan bien, es decir, están localizados en la envolvente convexa del soporte $C_0((a_0, b_0) \cup (a_1, b_1))$.

Ejemplo 5.1.3. La Figura (5.4) representa los ceros y los puntos críticos de un polinomio de grado ocho mediante un producto interior del tipo

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{-2}^2 f(x)g(x)dx + 10000 \int_1^5 f'(x)g'(x)dx.$$

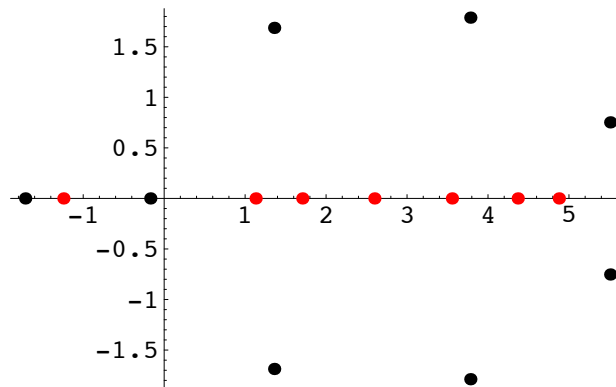


Figura 5.4: Ceros y puntos críticos de polinomio de grado ocho.

Este es un ejemplo en el que los soportes de w_0 y w_1 están solapados. En este caso, nos damos cuenta de que la mayoría de los ceros son imaginarios conjugados (en concreto, seis) y observamos también que están bastante alejados del eje real. Podemos ver que sólo dos ceros son reales. Del mismo modo que en los casos anteriores los puntos críticos se encuentran en la envolvente convexa $C_0((-2, 2) \cup (1, 5))$.

5.2. Producto de Sobolev discreto

Veamos algunos ejemplos de este tipo de producto interior discreto:

Ejemplo 5.2.1. Consideramos el siguiente producto interior de tipo Sobolev discreto

$$\langle p, q \rangle_s = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}dx + \lambda p(-1)q(-1).$$

Tomamos p_n tal que $\langle p_n, x^k \rangle_s = 0$ con $k = 0, \dots, n-1$, $p_0(x) = 1$ y $p_1(x) = x + a$. Encontrar el valor de a :

- $\langle p_1, 1 \rangle_s = 0 \implies a = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$.

Observación 7. Recordamos que la función gamma se define del siguiente modo:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx,$$

donde $\Gamma(p) = (p-1)!$ con $p = 1, 2, 3, \dots$

Por tanto, $p_1(x) = x + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$, entonces $x = -a$. Consideramos, ahora, $p_2(x) = x^2 + bx + c$. Entonces, tenemos que

$$p_2(x) = x^2 + \frac{-6\lambda - 4}{2 + 5\lambda}x + \frac{-11\lambda^2 - 10\lambda}{2 + 7\lambda + 5\lambda^2}. \quad (5.3)$$

Suponemos que tomamos $\lambda = 10$, entonces tenemos que

$$p_2(x) = x^2 - \frac{16}{13}x - \frac{300}{143}, \quad (5.4)$$

cuyas raíces son $x_1 \approx 2,18910$ y $x_2 \approx -0,9583$. Como vemos la raíz x_2 está fuera del soporte.

Por otro lado, si consideramos el polinomio de Laguerre estándar de orden 2, es decir,

$$L_2^{(0)}(x) = x^2 - 4x + 2,$$

cuyos ceros son $x_1 \approx 3,41$ y $x_2 \approx 0,58$, podemos observar como las soluciones de nuestro polinomio (5.4) han experimentado una atracción hacia el punto $c = -1$.

De igual modo, si tomamos $\lambda = 1000$, las raíces del polinomio (5.3) son $x_1 \approx 2,19$ y $x_2 \approx -0,99$. En este caso, también tenemos que un cero no está en el soporte y vemos que cada vez se va acercando más al punto $c = -1$. Por tanto, observamos que a medida que va aumentando el λ los ceros tiende a acercarse cada vez más al punto $c = -1$.

Todos los cálculos anteriores se llevan a cabo sobre un polinomio de grado dos, pero qué ocurriría si el polinomio fuera de grado superior. Realizando una serie de experimentos numéricos con el software Mathematica pudimos observar que el polinomio de grado 4, con el mismo producto interior, tiene las siguientes raíces reales:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,999949 & x_2 &= 0,893986 \\ x_3 &= 3,63125 & x_4 &= 8,47592 \end{aligned}$$

Observamos que la raíz $x_1 \rightarrow -1$. Por otra parte, tal y como afirma el Teorema 2, nuestro polinomio debe tener al menos $n - (m + 1)$ ceros en el soporte. Entonces, como $m = 1$ y $n = 4$, vemos que efectivamente el polinomio tiene exactamente 3 raíces en el soporte $(0, \infty)$.

Ejemplo 5.2.2. Consideramos el siguiente producto interior de Sobolev discreto

$$\langle p, q \rangle_s = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x} dx + \lambda p(-1)q(-1) + \mu p'(-1)q'(-1).$$

Tomamos p_n tal que $\langle p_n, x^k \rangle_s = 0$ con $k = 0, \dots, n-1$. Tomamos $p_0(x) = 1$ y $p_1(x) = x+a$. Veamos el valor de a :

- $\langle p_1, 1 \rangle_s = 0 \implies a = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}.$

Luego, $p_1(x) = x + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$. Entonces, la raíz es $x = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} = \begin{cases} \geq 0, & \text{si } 0 < \lambda \leq 1, \\ < 0, & \text{si } \lambda > 1. \end{cases}$

Consideramos $p_2(x) = x^2 + bx + c$, entonces tenemos que

$$b = \frac{a\lambda^2 + a\lambda - 2\lambda^2 - 2\lambda\mu - 8\lambda - 2\mu - \mu}{\lambda\mu + 5\lambda + \mu + 1}$$

$$c = \frac{a\lambda^2 - a\lambda - 2\lambda^2 - 3\lambda\mu - 9\lambda + 2}{\lambda\mu + 5\lambda + \mu + 1}$$

donde $a = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$. Si suponemos que $\lambda = \mu = 10$, entonces tenemos que $a = \frac{9}{11}$, $b = -\frac{18}{7}$ y $c = -\frac{246}{77}$. Luego, el polinomio que nos quedaría sería $p_2(x) = x^2 - \frac{18}{7}x - \frac{246}{77}$ cuyas raíces son $x_1 \approx 3,487$ y $x_2 \approx -0,916$.

Veamos qué sucede cuando $\lambda, \mu \rightarrow +\infty$. En primer lugar, tenemos que $a \rightarrow 1$. Supongamos que $\lambda, \mu \rightarrow +\infty$ de forma que $\frac{\lambda}{\mu} \rightarrow \theta \geq 0$. Entonces tenemos que $b \rightarrow (-\theta - 2)$ y $c \rightarrow (-\theta - 3)$.

Es fácil ver que el polinomio de Sobolev límite es

$$x^2 - (\theta + 2)x - (\theta + 3) = 0,$$

que tiene siempre una raíz positiva y otra negativa, esto es,

$$x_1 = \left(\frac{\theta}{2} + 1\right) + \sqrt{\left(\frac{\theta}{2} + 1\right) + (\theta + 3)}$$

y

$$x_2 = \left(\frac{\theta}{2} + 1\right) - \sqrt{\left(\frac{\theta}{2} + 1\right) + (\theta + 3)}.$$

Si tomamos, por ejemplo,

- $\theta = 0$, tenemos que $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$.
- $\theta = 1$, tenemos que $x_1 \approx 3,85$ y $x_2 \approx -0,85$.

En este caso, también observamos que el punto $c = -1$ actúa como un "atractor". Seguidamente, vamos a verlo numéricamente para $\lambda = \mu = 10$ y para diferentes grados:

Grado del polinomio	Ceros
3	$x_1 = -1,267$ $x_2 = -0,444$ $x_3 = 4,112$
4	$x_1 = -1,217$ $x_2 = -0,668$ $x_3 = 2,624$ $x_4 = 7,516$
5	$x_1 = -1,165$ $x_2 = -0,779$ $x_3 = 1,876$ $x_4 = 5,387$ $x_5 = 10,951$
6	$x_1 = -1,165$ $x_2 = -0,846$ $x_3 = 1,422$ $x_4 = 4,215$ $x_5 = 8,282$ $x_6 = 14,430$
8	$x_1 = -1,071$ $x_2 = -0,919$ $x_3 = 0,907$ $x_4 = 2,910$ $x_5 = 5,687$ $x_6 = 9,399$ $x_7 = 14,381$ $x_8 = 21,504$

Por tanto, vemos que el Teorema 2 se verifica ya que en cada uno de los casos anteriores tenemos $n - 2$ ceros en el soporte $(0, \infty)$ y dos ceros fuera del mismo, que convergen al punto $c = -1$ desde ambos lados. (En este caso, $m = 1$).

Esto podemos verlo de forma ilustrativa representando los ceros del polinomio de grado 5. En la Figura (5.5) se aprecia bastante bien como dos de sus ceros no pertenecen al soporte $(0, \infty)$ y están próximos a $c = -1$, con lo cual comprobamos que en el caso discreto el punto $x = c$ juega el papel de “atractor” de $(m + 1)$ ceros.

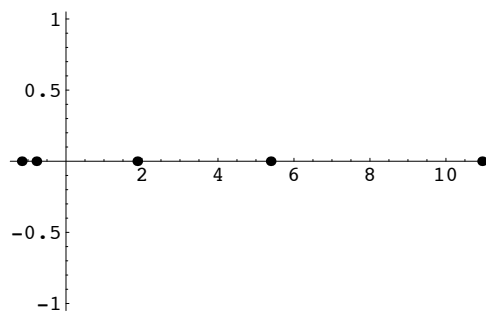


Figura 5.5: Ceros de polinomio de grado cinco.

Conclusiones

El objetivo fundamental de este trabajo ha sido estudiar las diferencias entre los productos interiores de tipo estándar y no estándar, en especial en lo referente al comportamiento de los ceros. En este sentido, hemos destacado dos diferencias fundamentales: en el primer caso, los ceros se sitúan dentro de la envolvente convexa del soporte de la medida, en tanto que en el segundo, pueden ser incluso imaginarios en su mayoría. Por otra parte, la relación de recurrencia a tres términos satisfecha por los polinomios ortogonales estándar tampoco se verifica para los no estándar.

Después de haber estudiado algunos ejemplos de productos de Sobolev continuos y discretos, es evidente que los resultados enunciados en el Capítulo 4 para este tipo de polinomios ortogonales están aún lejos de dar una respuesta definitiva al problema de la localización de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev. De hecho, este problema sigue hoy en día sin resolverse. No obstante, la conjetura formulada acerca de la localización de los puntos críticos parece sostenerse con firmeza.

Apéndice A

Observaciones computacionales

Los cálculos y gráficos de los ceros de polinomios ortogonales de Sobolev han sido realizados con el software *Mathematica* (Wolfram), utilizando el paquete “Least Squares” que permite generar la sucesión de polinomios ortogonales en base al proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

También es posible realizar estas computaciones mediante Matlab (ver el artículo de Gaustschi [4]).

Bibliografía

- [1] ALFARO, M., LÓPEZ, G., REZOLA, M.L., Some properties of zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials, *J. Comp. Appl. Math.*, 69 (1996), 171-179.
- [2] COHEN, E. A., Zero distribution and behaviour of orthogonal polynomials in Sobolev space $W^{1,2}[-1, 1]$, *SIAM J. Math. Anal.* 6 (1975), 105-116.
- [3] D. C. LEWIS, Polynomial least square approximations, *Amer. J. Math.*, 69 (1947), 273-278.
- [4] GAUTSCHI, W., Orthogonal polynomials: applications and computation, *Acta Numerica* 6 (1996), 45-119.
- [5] G. SZEGO, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 23, fourth edition, 1975.
- [6] G. LÓPEZ LAGOMASINO, H. PIJEIRA AND I. PÉREZ IZQUIERDO, Sobolev orthogonal polynomials in the complex plane, *J. Comp. Appl. Math.* 127 (2001), 219-230.
- [7] H. G. MEIJER, Sobolev Orthogonal Polynomials with a small number of real zeros, *J. Approx. Theory* 77 (1994), 305-313.
- [8] ISERLES, A., KOCH, P.E., NØRSETT, S.P., SANZ-SERNA, J.M., On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev Inner Products, *J. Approx. Theory* 65 (1991), 151-175.
- [9] I. C. PERÉZ IZQUIERDO Asintótica de polinomios extremales de Sobolev, Universidad La Habana, 2006.
- [10] P. ALTHAMMER, Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation, *J. Reine Angew. Math.* 211 (1962), 192-204.
- [11] T. SHEIL-SMALL, Complex Polynomials, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [12] W. GAUTSCHI AND A. B. J. KUIJLAARS, Zeros and critical points of Sobolev Orthogonal Polynomials, *J. Approx. Theory* 91 (1997), 117-137.