Universidad de La Laguna
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas

El teorema de Hahn-Banach

Memoria que presenta la alumna

Remedios Marina Díaz Gil

bajo la dirección de

Mª. Isabel Marrero Rodríguez

para optar al título de

Graduada en Matemáticas

La Laguna, julio 2015

Universidad de La Laguna
Departamento de Análisis Matemático

Mª. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ, profesora titular de Análisis Matemático adscrita al Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna,

HAGO CONSTAR:

Que la presente Memoria, titulada *El teorema de Hahn-Banach*, ha sido desarrollada bajo mi dirección por la alumna Dª. **Remedios Marina Díaz Gil** (DNI 42412082J) y constituye su Trabajo de Fin de Grado para optar al título de Graduada en Matemáticas por la Universidad de La Laguna.

La Laguna, a 15 de julio de 2015.

Fdo.: Mª. Isabel Marrero Rodríguez

Agradecimientos

Agradecer a mi tutora María Isabel Marrero Rodríguez por dedicarme semanalmente parte de su tiempo a lo largo del curso 2014/2015 para poder realizar este trabajo. Además de apoyarme y ayudarme en todo momento.

Abstract

The theorem that we nowadays call «of Hahn-Banach» is located at the base of the duality theory and therefore constitutes a cornerstone of linear functional analysis. The impact of this important result reaches other areas of mathematics, such as approximation theory, optimization, complex analysis, partial differential equations or ergodic theory –and even other disciplines, including finance, thermodynamics or fluid mechanics.

In the mathematical literature, it is common to find three variants of the Hahn-Banach theorem, two of them corresponding to the analytical version (dominated extension theorem in linear spaces and continuous extension theorem in normed spaces), and the third one to the geometric version (the separation theorem, both in linear and normed spaces), but many other versions have been formulated in several environments: topological vector spaces, vector lattices, modules, Boolean algebras, groups, semigroups, and so on.

The objective of this work is to state and prove rigorously the three more common versions of the theorem and discuss some variants, special cases, consequences and applications of these results.

Prólogo

Recogemos en este prólogo los antecedentes, objetivos y plan de trabajo desarrollado en la memoria.

El teorema que hoy en día llamamos «de Hahn-Banach» se encuentra en la base de la teoría de la dualidad y constituye, por tanto, una pieza clave del análisis funcional lineal. No obstante, el impacto de este importante resultado se extiende a otras áreas de las matemáticas, tales como la teoría de la aproximación, la optimización, el análisis complejo, las ecuaciones en derivadas parciales o la teoría ergódica; e, incluso, a otras disciplinas, entre las que cabe citar las finanzas, la termodinámica o la mecánica de fluidos.

En la literatura matemática es habitual encontrar tres variantes del teorema de Hahn-Banach, correspondiendo dos de ellas a la forma analítica (teoremas de extensión mayorada en espacios vectoriales y de extensión equinórmica o continua en espacios normados), y la tercera a la forma geométrica (teorema de separación en espacios vectoriales y en espacios normados), pero se han formulado muchas otras versiones en diversos ambientes: espacios vectoriales topológicos, retículos vectoriales, módulos, álgebras de Boole, grupos, semigrupos, etc..

El objetivo de este trabajo es enunciar y demostrar rigurosamente las tres versiones más comunes del teorema y discutir algunas variantes, casos particulares, consecuencias y aplicaciones de estos resultados.

Concretamente, el capítulo 1 está dedicado a las formas analíticas del teorema de Hahn-Banach. En él se recogen el teorema de extensión mayorada (Teorema 1.3.2) y el teorema de extensión equinórmica o continua (Teorema 1.4.1), junto con sendas aplicaciones de éste a la teoría de operadores (Corolario 1.4.10) y a la existencia de subespacios complementarios (Corolario 1.4.12). A lo largo del capítulo, otros corolarios de los resultados principales, al margen de su interés intrínseco, sirven como motivación para los teoremas de separación que se estudian en el capítulo siguiente.

El capítulo 2 se focaliza en la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach. Tras unos preliminares en los que se abunda en la relación entre hiperplanos y funcionales lineales (Proposiciones 2.2.2 y 2.2.4), se aborda el teorema general de separación de conjuntos convexos por hiperplanos en espacios vectoriales (Teorema 2.4.2), estudiando con este motivo la definición y propiedades del funcional de Minkowski (Proposición 2.4.4). Tras obtener algunas consecuencias importantes para el caso particular en que el espacio vectorial está provisto de una norma (Corolarios 2.5.2, 2.5.3 y 2.5.4), el capítulo concluye con la constatación de que en espacios de dimensión finita no es necesaria ninguna hipótesis restrictiva para llevar a cabo la separación (Corolario 2.6.1).

El capítulo 3 está dedicado a mostrar cómo el teorema de Hahn-Banach permite profundizar en el estudio de la dualidad en espacios normados. Tras identificar el dual de un subespacio (Corolario 3.2.1), se transcribe este resultado en términos de mejor aproximación en el espacio dual (Corolario 3.2.3) y se da una útil caracterización dual de la clausura de un subespacio (Corolario 3.2.5). Cierran el capítulo la introducción y primeras propiedades de las topologías débil y débil*, incluyendo el importante teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Teorema 3.3.23).

El último capítulo 4 resume las conclusiones y la prospectiva del trabajo.

La memoria se complementa con el preceptivo póster como apéndice y concluye con un índice analítico y la relación de la bibliografía consultada. Para su redacción hemos seguido estrechamente las referencias [1] y, sobre todo, [5], complementándolas con [3, 6, 7].

Índice general

CAPÍTULO 1

Versión analítica

1.1. Introducción

En este capítulo se enuncian y demuestran rigurosamente las dos versiones analíticas más comunes del teorema de Hahn-Banach. Nos referimos al teorema de extensión mayorada, que se corresponde con el Teorema 1.3.2, y al teorema de extensión equinórmica o continua, que se recoge como Teorema 1.4.1. Ambos hacen referencia a la extensión de un funcional lineal definido sobre un subespacio de un espacio vectorial (en el segundo caso, normado) a un funcional lineal definido sobre todo el espacio. También se discutirán otros resultados que constituyen variantes, casos particulares, consecuencias y aplicaciones de dichos teoremas. Algunos de ellos se interpretarán en términos de separación de conjuntos por funcionales lineales y, en parte, motivarán la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach, que será objeto de estudio en el próximo capítulo.

1.2. Preliminares

En lo que sigue, $\mathbb{K}$ denotará un cuerpo de escalares ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

Definición 1.2.1. *Un espacio vectorial X sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ se dice que es un espacio vectorial normado si a cada $x \in X$ hay asociado un número real no negativo $\|x\|$, llamado la norma de x, tal que:*

(i) $\|x\| = 0$ *implica* $x = 0$*;*

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ $(\alpha \in \mathbb{K},\ x \in X)$*;*

(iii) *(desigualdad triangular)* $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(x, y \in X)$.

Definición 1.2.2. *Un funcional lineal en un espacio vectorial es una aplicación lineal de dicho espacio en el cuerpo $\mathbb{K}$ sobre el que está construido.*

Definición 1.2.3. *El dual de un espacio normado X es el espacio vectorial X^* cuyos elementos son los funcionales lineales continuos sobre X.*

Con la suma y la multiplicación por escalares definidas punto a punto, X^* es un espacio vectorial. La aplicación

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\} \quad (f \in X^*)$$

define una norma sobre X^*.

El teorema de Hahn-Banach asegura la existencia de un número suficiente de funcionales lineales continuos en espacios normados no triviales y contribuye al desarrollo de una teoría de la dualidad satisfactoria.

1.3. Extensión mayorada

Recordemos la siguiente definición.

Definición 1.3.1. *Una seminorma en un espacio vectorial X sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es una función $\nu : X \to \mathbb{R}$, cumpliendo:*

(i) $\nu(\lambda x) = |\lambda|\, \nu(x)$ $(\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$;

(ii) *(desigualdad triangular)* $\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y)$ $(x, y \in X)$.

Teorema 1.3.2 (Hahn 1927, Banach 1929)**.** *Sea X un espacio vectorial, provisto de una función $\nu : X \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes condiciones:*

$$\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad (x, y \in X); \tag{1.1}$$

$$\nu(rx) = r\nu(x) \quad (r \in \mathbb{R}_+,\ x \in X). \tag{1.2}$$

Sean M un subespacio vectorial de X y g un funcional lineal en M, satisfaciendo:

$$\Re g(m) \leq \nu(m) \quad (m \in M). \tag{1.3}$$

Entonces existe un funcional lineal f en X que extiende a g, es decir, $f(m) = g(m)$ $(m \in M)$, y sigue satisfaciendo que

$$\Re f(x) \leq \nu(x) \quad (x \in X).$$

Si v es una seminorma se tiene, de hecho,

$$\left|f(x)\right| \leq v(x) \quad (x \in X).$$

DEMOSTRACIÓN. Distinguiremos tres casos.

Caso real: primera extensión. Consideramos en primer lugar el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y extendemos el funcional g al subespacio obtenido al sumar una recta a M.

Sea $x \in X \setminus M$, y pongamos

$$Y = M \oplus \operatorname{span}\{x\} = M \oplus \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Para definir un funcional lineal h en Y que extienda a g y siga dominado por v, escribimos:

$$h(m + \lambda x) = g(m) + \lambda\alpha \quad (m \in M,\ \lambda \in \mathbb{R}),$$

siendo α, es decir, el valor de $h(x)$, una constante a determinar, de forma que se tenga

$$g(m) + \lambda\alpha \leq v(m + \lambda x) \quad (m \in M,\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

Fijemos $m \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda > 0$, dividimos por λ la expresión

$$g(m) + \lambda\alpha \leq v(m + \lambda x)$$

y usamos la linealidad de g, junto con la segunda propiedad de v, (1.2), para obtener:

$$g\left(\frac{m}{\lambda}\right) + \alpha = \frac{1}{\lambda}[g(m) + \lambda\alpha] \leq \frac{1}{\lambda} v(m + \lambda x) = v\left(\frac{m}{\lambda} + x\right).$$

Considerando $u = m/\lambda$, que es un vector de M tan arbitrario como m, deducimos que α debe cumplir:

$$g(u) + \alpha \leq v(u + x) \quad (u \in M),$$

de donde

$$\alpha \leq v(u + x) - g(u) \quad (u \in M). \tag{1.4}$$

Si $\lambda < 0$, dividimos por $-\lambda$ la expresión

$$g(m) + \lambda\alpha \leq v(m + \lambda x)$$

para obtener:

$$-\frac{1}{\lambda}[g(m)+\lambda\alpha] \leq -\frac{1}{\lambda}\nu(m+\lambda x).$$

La linealidad de g y la propiedad (1.2) conducen a

$$g\left(-\frac{m}{\lambda}\right)-\alpha \leq \nu\left(-\frac{m}{\lambda}-x\right).$$

Considerando ahora $w=-m/\lambda$, que es un vector de M tan arbitrario como m, obtenemos la otra condición que debe cumplir α:

$$g(w)-\alpha \leq \nu(w-x) \quad (w \in M),$$

de donde

$$\alpha \geq g(w)-\nu(w-x) \quad (w \in M). \tag{1.5}$$

Nótese finalmente que cuando $\lambda = 0$, la desigualdad

$$g(m)+\lambda\alpha \leq \nu(m+\lambda x)$$

no aporta ninguna información sobre α, pues se reduce a la condición

$$g(m) \leq \nu(m) \quad (m \in M),$$

que es la hipótesis (1.3).

Debemos entonces encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ que verifique simultáneamente (1.4) y (1.5), es decir,

$$g(w)-\nu(w-x) \leq \alpha \leq \nu(u+x)-g(u) \quad (w,u \in M).$$

Para cualesquiera $w,u \in M$ tenemos, usando (1.3) y la desigualdad triangular (1.1) que verifica ν:

$$g(u)+g(w)=g(u+w) \leq \nu(u+w) \leq \nu(u+x)+\nu(w-x);$$

equivalentemente:

$$g(w)-\nu(w-x) \leq \nu(u+x)-g(u) \quad (w,u \in M),$$

obteniéndose así:

$$\sup\left\{g(w)-\nu(w-x) : w \in M\right\} \leq \text{ínf}\left\{\nu(u+x)-g(u) : u \in M\right\}.$$

De esta manera, podemos tomar como α cualquier número real comprendido entre el supremo y el ínfimo anteriores, ambos inclusive. Si la última desigualdad es una igualdad, sólo cabe una elección posible de α.

Caso real: extensión definitiva. Para finalizar la demostración en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, iteramos la extensión realizada en la primera etapa, aumentando en cada paso una dimensión al subespacio obtenido en la etapa anterior, hasta llegar a X. Como el número de etapas puede ser infinito, formalizamos esta inducción trasfinita usando el Lema de Zorn. Recordemos que un conjunto inductivo es un conjunto ordenado en el que todo subconjunto totalmente ordenado admite un mayorante, y que el Lema de Zorn afirma que todo conjunto inductivo tiene al menos un elemento maximal (cf. [1, Lema I.1] y las referencias que allí se citan).

El conjunto F al que le aplicaremos el Lema de Zorn va a estar formado por todos los pares de la forma (Y,h), siendo Y un subespacio de X que contiene a M y h un funcional lineal sobre Y que extiende a g y está dominado por ν. Si $M = X$ no hay nada que probar, por lo que podemos suponer que $M \subsetneq X$, y en tal caso la primera parte de la demostración asegura que F no es vacío. Definimos un orden en F a partir de la siguiente condición: $(Y,h) \le (Z,k)$ cuando $Y \subseteq Z$ y el funcional k extiende al funcional h. No es difícil verificar que «$\le$» es efectivamente una relación de orden en F. Comprobaremos que, con esta relación de orden, F es un conjunto inductivo.

Sea $F_0 = \{(Y_j,h_j) : j \in J\}$ un subconjunto totalmente ordenado de F; debemos ver que F_0 admite un mayorante. Para ello, tomamos $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$ y observamos que, como F_0 está totalmente ordenado, Y es un subespacio vectorial de X, que contiene a Y_j para todo $j \in J$ y, por tanto, también contiene a M. Ahora definimos un funcional h sobre Y como sigue. Dado $y \in Y$, elegimos $j \in J$ de forma que $y \in Y_j$, y escribimos $h(y) = h_j(y)$. Al estar F_0 totalmente ordenado, el valor de $h(y)$ no depende del índice $j \in J$ que usemos para definirlo, y h es un funcional lineal sobre Y, que está dominado por ν y extiende a h_j para todo $j \in J$, por lo que también extiende a g. De esta manera $(Y,h) \in F$ y $(Y_j,h_j) \le (Y,h)$ para todo $j \in J$, probando que (Y,h) es el mayorante de F_0 que necesitábamos.

El Lema de Zorn nos proporciona ahora un elemento maximal de F, digamos (Z,f), y sólo nos queda comprobar que $Z = X$, pues entonces f será el funcional lineal en X cuya existencia asegura el teorema. Pero, en efecto, si $Z \subsetneq X$, podríamos aplicar la primera etapa de la demostración para obtener un par estrictamente mayor que (Z,f), contradiciendo la maximalidad de este elemento.

Fin de la demostración: caso complejo y mayoración por seminormas. Para completar la demostración del teorema debemos considerar el caso complejo y verificar que si ν es una seminorma, se tiene $|f(x)| \le \nu(x)$ $(x \in X)$.

Resolveremos el caso complejo reduciéndolo al caso real. A tal fin, observamos que todo espacio vectorial complejo Z proporciona un espacio vectorial real, que denotamos por $Z_{\mathbb{R}}$, sin más que restringir a $\mathbb{R} \times Z$ el producto por escalares definido en $\mathbb{C} \times Z$. Para cada funcional lineal φ en Z, tenemos que $\Re\varphi$ es un funcional lineal en $Z_{\mathbb{R}}$. Además, φ queda unívocamente determinado por su parte real, pues $\Im\varphi(z) = -\Re\varphi(iz)$ para todo $z \in Z$. Recíprocamente, si u es un funcional lineal en $Z_{\mathbb{R}}$, definiendo $\varphi(z) = u(z) - iu(iz)$ para todo $z \in Z$ obtenemos un funcional lineal φ en Z tal que $\Re\varphi = u$. En otras palabras, los funcionales lineales en $Z_{\mathbb{R}}$ son las partes reales de los funcionales lineales en Z.

Ahora podemos resolver el caso complejo. Sea X un espacio vectorial complejo y consideremos el correspondiente espacio vectorial real $X_{\mathbb{R}}$. Análogamente, si M es un subespacio vectorial de X consideramos $M_{\mathbb{R}}$, que es un subespacio de $X_{\mathbb{R}}$. Supongamos que g es un funcional lineal en M que verifica $\Re g \leq v$. Denotando $u = \Re g$, encontramos que u es un funcional lineal en $M_{\mathbb{R}}$ verificando $u \leq v$. Como tenemos resuelta la extensión en el caso real, existirá un funcional lineal U en $X_{\mathbb{R}}$ que extiende a u y sigue dominado por v; de manera que U es la parte real de un funcional lineal en X, al que denotamos f. Tenemos así que $\Re f(x) = U(x) \leq v(x)$ para todo $x \in X$. Además, f extiende a g, pues para cada $m \in M$ se cumple $\Re f(m) = U(m) = u(m) = \Re g(m)$, y ya que tanto g como la restricción de f a M están unívocamente determinados por su parte real, se concluye que $f(m) = g(m)$ para todo $m \in M$.

Por último, vamos a probar que si v es una seminorma se tiene $\left|f(x)\right| \leq v(x)$ $(x \in X)$. Si v es una seminorma y sabemos que $\Re f \leq v$, fijado $x \in X$ ponemos $\left|f(x)\right| = \lambda f(x)$ con $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| = 1$, obteniendo:

$$\left|f(x)\right| = \lambda f(x) = f(\lambda x) = \Re f(\lambda x) \leq v(\lambda x) = |\lambda|\, v(x) = v(x).$$

Para la tercera de las igualdades hemos usado que $f(\lambda x) \in \mathbb{R}$, y para la penúltima, que v es una seminorma. □

1.4. Extensión continua

1.4.1. Extensión equinórmica

Teorema 1.4.1 (Extensión equinórmica)**.** *Sean X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$. Entonces existe $f \in X^*$ tal que f extiende a g y $\left\|f\right\| = \left\|g\right\|$.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis tenemos que

$$\left|g(m)\right| \leq \left\|g\right\| \|m\| \quad (m \in M).$$

Tomamos

$$v(x) = \|g\| \|x\| \quad (x \in X).$$

Entonces v es una seminorma en X, y si aplicamos el Teorema 1.3.2, obtenemos un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ que satisface

$$|f(x)| \leq \|g\| \|x\| \quad (x \in X).$$

En particular, $f \in X^*$ y $\|f\| \leq \|g\|$. Como la norma de un funcional no puede disminuir al extenderlo, necesariamente $\|f\| = \|g\|$. □

El hecho de que un funcional lineal continuo en un subespacio M de un espacio normado X se extienda a un funcional lineal continuo en todo el espacio X es importante, pues nos garantiza, por ejemplo, la abundancia de funciones lineales continuos no nulos en cualquier espacio normado $X \neq \{0\}$, ya que siempre podemos tomar como M un subespacio de dimensión finita de X, en el que disponemos de abundantes funcionales lineales continuos. Al hacer una extensión, en general la norma del funcional aumenta, pero el Teorema 1.4.1 nos dice que podemos hacer la extensión sin que aumente.

Corolario 1.4.2. *Dados un subespacio cerrado M de un espacio normado X y un punto $x_0 \in X \setminus M$, existe $f \in X^*$ tal que $f(M) = \{0\}$ mientras que $f(x_0) = \|x_0\| \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$M_0 = M \oplus \operatorname{span}\{x_0\} = M \oplus \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

La aplicación

$$\begin{array}{rccc} f: & M_0 = M \oplus \operatorname{span}\{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & y = x + \lambda x_0 & \longmapsto & f(y) = \lambda \|x_0\| \end{array}$$

es un funcional lineal y continuo sobre M_0 que satisface las condiciones requeridas.

Se tiene que el funcional f es lineal. En efecto, si $\alpha \in \mathbb{K}$ y si $y = x + \lambda x_0 \in M_0$, con $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in M$, se verifica:

$$\alpha y = \alpha x + \alpha \lambda x_0,$$

por lo que

$$f(\alpha y) = \alpha \lambda \|x_0\| = \alpha f(y).$$

Si, además, consideramos $z = t + \mu x_0 \in M_0$, con $\mu \in \mathbb{K}$ y $t \in M$, se verifica:

$$y + z = (x + t) + (\lambda + \mu) x_0,$$

por lo que

$$f(y+z) = (\lambda + \mu) \|x_0\| = \lambda \|x_0\| + \mu \|x_0\| = f(y) + f(z).$$

Finalmente, el funcional f es continuo. Para comprobarlo, recordemos que, siendo lineal, f es continuo si, y sólo si, f es acotado, lo que ocurre si, y sólo si,

$$\sup\left\{\frac{|f(y)|}{\|y\|} : y \in M_0 \setminus \{0\}\right\} < \infty.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\frac{|f(y)|}{\|y\|} : y \in M_0 \setminus \{0\}\right\} &= \sup\left\{\frac{|\lambda|\,\|x_0\|}{\|x+\lambda x_0\|} : x \in M,\ \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{\|x_0\|}{\left\|\frac{x}{\lambda}+x_0\right\|} : x \in M,\ \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\right\} \\
&= \|x_0\| \sup\left\{\frac{1}{\|x_0-x\|} : x \in M\right\} \\
&= \frac{\|x_0\|}{\text{ínf}\{\|x-x_0\| : x \in M\}} \\
&= \frac{\|x_0\|}{d(x_0,M)},
\end{aligned}$$

con $d(x_0,M) > 0$. Además, claramente

$$f(M) = \left\{f(x) : x \in M\right\} = \{0\},$$

mientras que

$$f(x_0) = \|x_0\| \neq 0.$$

Ahora, basta aplicar el teorema de extensión equinórmica (Teorema 1.4.1). □

Observación 1.4.3. *En el Corolario 1.4.2 se tiene que $x_0 \notin M$ y $f(x_0) \notin f(M)$. Esta situación se resume diciendo que el funcional f separa el punto x_0 del subespacio M.*

Observación 1.4.4. *Una consecuencia interesante del Corolario 1.4.2 es que cualquier espacio normado no trivial tiene dual no trivial.*

Corolario 1.4.5. *Dados un espacio normado X y puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar este corolario es equivalente demostrar que si $x \in X \setminus \{0\}$, entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq 0$. Pues si asumimos este último resultado como cierto, para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tendrá $x - y \neq 0$, por lo que existirá $f \in X^*$ tal que $f(x-y) \neq 0$, es decir, $f(x) - f(y) \neq 0$, o bien $f(x) \neq f(y)$.

Comprobemos entonces el enunciado equivalente. Sea $x \in X \setminus \{0\}$, de manera que $x_0 = \|x\|^{-1} x$ satisface $\|x_0\| = 1$. Por el Corolario 1.4.2, existe $f \in X^*$ tal que

$$\frac{1}{\|x\|} f(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = f(x_0) = \|x_0\| = 1.$$

Se concluye que $f(x) = \|x\| \neq 0$. □

Observación 1.4.6. *El Corolario 1.4.5 se resume diciendo que el funcional f separa x de y, o también que X^* separa los puntos de X.*

Corolario 1.4.7. *Para cualquier punto x_0 de un espacio normado X, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = \|x_0\|$. En particular, si U es la bola unidad abierta (respectivamente, B es la bola unidad cerrada) de X y $x_0 \in X \setminus U$ (respectivamente, $x_0 \in X \setminus B$), existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = \|x_0\| \geq 1$ (respectivamente, $f(x_0) = \|x_0\| > 1$).*

Demostración. Fijado $x_0 \in X$, consideramos $M = \operatorname{span}\{x_0\} = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{K}\}$ y definimos un funcional lineal continuo f sobre M mediante

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \lambda x_0 & \longmapsto & \lambda \|x_0\|. \end{array}$$

Es un funcional lineal, ya que

$$\begin{aligned} f\left[\alpha(\lambda x_0) + \beta(\mu x_0)\right] &= f\left[(\alpha\lambda + \beta\mu)x_0\right] \\ &= (\alpha\lambda + \beta\mu)\|x_0\| \\ &= \alpha\lambda\|x_0\| + \beta\mu\|x_0\| \\ &= \alpha f(\lambda x_0) + \beta f(\mu x_0) \quad (\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{K}). \end{aligned}$$

Además es un funcional continuo, con

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|} : \lambda \neq 0\right\} = \sup\left\{\frac{|\lambda|\,\|x_0\|}{|\lambda|\,\|x_0\|} : \lambda \neq 0\right\} = 1.$$

Por último, es claro que $f(x_0) = \|x_0\|$. Ahora basta aplicar el Teorema 1.4.1.

Cuando $x_0 \in X \setminus U$ (respectivamente, $x_0 \in X \setminus B$), resulta obvio que $f(x_0) = \|x_0\| \geq 1$ (respectivamente, $f(x_0) = \|x_0\| > 1$). □

Observación 1.4.8. *Como consecuencia del Corolario 1.4.7 obtenemos, de nuevo, un resultado de separación: si $x_0 \notin U$ (respectivamente, $x_0 \notin B$), entonces $f(x_0) \notin f(U)$ (respectivamente, $f(x_0) \notin f(B)$).*

El Corolario 1.4.7 permite obtener la siguiente expresión dual de la norma de un vector.

Corolario 1.4.9. *Sea X un espacio normado. Para todo $x \in X$ se tiene*

$$\|x\| = \sup\left\{\left|f(x)\right| : f \in X^*,\ \left\|f\right\| \le 1\right\} = \max\left\{\left|f(x)\right| : f \in X^*,\ \left\|f\right\| \le 1\right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $x \in X$. Si $f \in X^*$ con $\|f\| \le 1$, entonces

$$\left|f(x)\right| \le \|f\|\|x\| \le \|x\|,$$

así que

$$\sup\left\{\left|f(x)\right| : f \in X^*,\ \left\|f\right\| \le 1\right\} \le \|x\|.$$

La conclusión deseada sigue del Corolario 1.4.7. □

1.4.2. Aplicaciones de la extensión equinórmica

A continuación recogemos otras dos consecuencias interesantes del Teorema 1.4.1.

La primera se deduce del hecho de que $X^* \neq \{0\}$ para cualquier espacio normado $X \neq \{0\}$ (Observación 1.4.4). Esto nos permite definir operadores lineales continuos no nulos de X en cualquier otro espacio normado $Y \neq \{0\}$ sin más que fijar $f_0 \in X^* \setminus \{0\}$, $y_0 \in Y \setminus \{0\}$, y poner $Tx = f_0(x)y_0$ para todo $x \in X$. Es claro que $T \in L(X,Y)$ e, incluso, que $\|T\| = \left\|f_0\right\| \left\|y_0\right\|$. Utilizaremos esta idea en la prueba del resultado siguiente.

Corolario 1.4.10. *Sean $X \neq \{0\}$ e Y espacios normados. Si el espacio de operadores $L(X,Y)$ es completo, entonces Y es completo.*

DEMOSTRACIÓN. Dada una sucesión de Cauchy $\left\{y_n\right\}$ en Y, fijamos $f \in X^* \setminus \{0\}$ y definimos

$$T_n x = f(x)y_n \quad (x \in X,\ n \in \mathbb{N}).$$

La sucesión $\{T_n\}$ también es de Cauchy en $L(X,Y)$, pues

$$\|T_n - T_m\| = \left\|f\right\| \left\|y_n - y_m\right\| \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Por ser $L(X,Y)$ completo, la sucesión $\{T_n\}$ convergerá en $L(X,Y)$ a un operador T. Como

$$\|T_n x - Tx\| \le \|T_n - T\| \|x\| \quad (x \in X,\ n \in \mathbb{N}),$$

deducimos que la sucesión $\{T_n x\} = \left\{f(x)y_n\right\}$ converge en Y para todo $x \in X$. Para completar la prueba basta elegir $x \in X$ tal que $f(x) = 1$. □

Nuestra segunda aplicación del Teorema 1.4.1 se refiere a la existencia de subespacios complementarios.

Definición 1.4.11. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado X. Se dice que M admite complementario, o que es un subespacio complementado, en X cuando existe otro subespacio cerrado V de X tal que $X = M \oplus V$, esto es, $X = M + V$ y $M \cap V = \{0\}$.*

Corolario 1.4.12. *Si M es un subespacio de dimensión finita de un espacio normado X, entonces M está complementado en X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$ una base de M. Las coordenadas de cada vector $m \in M$ dependen linealmente de m, es decir, existen funcionales lineales $g_1, g_2, \ldots, g_N$ sobre M, tales que

$$m = \sum_{k=1}^{N} g_k(m) u_k$$

es la única expresión de cada $m \in M$ como combinación lineal de los elementos de la base. Puesto que M es un espacio normado de dimensión finita, para $k = 1, 2, \ldots, N$ tenemos que $g_k \in M^*$ [6, Lema 1.20 y Teorema 1.21], y el Teorema 1.4.1 nos proporciona $f_k \in X^*$ que extiende a g_k. Como

$$f_j\left(x - \sum_{k=1}^{N} f_k(x) u_k\right) = f_j(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k(x) f_j(u_k) = f_j(x) - f_j(x) = 0 \quad (x \in X,\ j = 1, \ldots, N),$$

el subespacio cerrado $V = \bigcap_{k=1}^{N} \mathrm{Ker}(f_k)$ complementa a M. □

CAPÍTULO 2

Versión geométrica

2.1. Introducción

En este capítulo nos centraremos en la interpretación geométrica del teorema de Hahn-Banach, que consistirá en encontrar condiciones suficientes para separar dos subconjuntos de un espacio vectorial. Comenzaremos aclarando en qué consiste esta separación y qué tipo de resultados podemos esperar. Obtendremos un teorema general de separación de conjuntos convexos en espacios vectoriales. Por último, deduciremos consecuencias interesantes para espacios normados.

2.2. Espacios cociente, hiperplanos y funcionales lineales

Sean X un espacio vectorial cualquiera y M un subespacio de X. El espacio vectorial cociente X/M es el conjunto de todas las clases de equivalencia de X módulo M, es decir, la colección de todos los subconjuntos de X de la forma

$$x + M = \{x + m : m \in M\} \quad (x \in X).$$

La aplicación lineal $\pi : X \to X/M$ definida por $\pi(x) = x + M$ se denomina proyección canónica cociente.

Si X es un espacio normado cualquiera y M un subespacio cerrado de X, para cada una de las clases de equivalencia $x+M$ definimos

$$\|x+M\| = \text{ínf}\{\|x+m\| : m \in M\} = \text{ínf}\{\|x-m\| : m \in M\} = d(x,M) \quad (x \in X).$$

Se comprueba que de esta forma obtenemos una norma en X/M, a la que llamamos norma cociente. Conviene observar que de la condición $\|x+M\| = d(x,M) = 0$ se deduce que $x \in \overline{M} = M$ y, por tanto, $x+M=0$, razonamiento que exige que M sea cerrado en X. La omisión de este requisito proporcionaría una seminorma en X/M, pero no una norma.

Definición 2.2.1. *Un hiperplano en un espacio vectorial X es un subespacio propio maximal de X.*

Proposición 2.2.2. *Sea X un espacio vectorial.*

(i) Si H es un hiperplano y $v \in X \setminus H$ entonces $X = H \oplus \operatorname{span}\{v\}$.

(ii) La condición necesaria y suficiente para que H sea un hiperplano es que tenga codimensión 1 (por definición, la codimensión de H es la dimensión de X/H).

(iii) H es un hiperplano si, y sólo si, $H = \operatorname{Ker}(f)$ para cierto funcional lineal $f \neq 0$ sobre X. En tal caso, se dice que $\{f=0\}$ es la ecuación de H.

DEMOSTRACIÓN. Si H es un hiperplano en X y $v \in X \setminus H$, el subespacio generado por H y v contiene estrictamente a H, así que

$$X = \{h+\lambda v : h \in H,\ \lambda \in \mathbb{K}\}. \tag{2.1}$$

Ahora, si $h_1+\lambda_1 v = h_2+\lambda_2 v$ ($h_1,h_2 \in H$, $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{K}$), la igualdad $(\lambda_1-\lambda_2)v = h_2-h_1$ obliga a que $\lambda_1=\lambda_2$ y $h_1=h_2$. Esto prueba (i).

Sean H y v como en (i), y sea $\pi : X \to X/H$ la proyección canónica cociente. Escribiendo $x \in X$ en la forma $x = h+\lambda v$, con $h \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, encontramos que $\pi(x) = \lambda\pi(v)$, con $\pi(v) \neq 0$, de modo que $X/H = \operatorname{span}\{\pi(v)\}$. Recíprocamente, si H es un subespacio y $v \in X$ es tal que $\pi(v)$ genera X/H entonces se verifica (2.1), y cualquier otro subespacio M de X que contenga a H coincide con X o con H según que M contenga o no al vector v. Queda así probado (ii).

Por último, supongamos que $H = \operatorname{Ker}(f)$ para cierto funcional lineal $f \neq 0$ sobre X; como todo funcional no idénticamente nulo es suprayectivo, se tiene que $\dim X/\operatorname{Ker}(f) = \dim \mathbb{K} = 1$. Recíprocamente, si H es un hiperplano se ha de verificar (2.1) para algún $v \in X \setminus H$, y basta definir el funcional lineal f sobre X por $f(h+\lambda v) = \lambda$ para establecer (iii) y completar la prueba. □

Definición 2.2.3. *Sea X un espacio vectorial. El trasladado de un hiperplano se denomina hiperplano afín. Si $H = x_0 + H_0$, con $x_0 \in X$, es un hiperplano afín, si $\{f=0\}$ es la ecuación del hiperplano H_0, y si $f(x_0) = \alpha$, entonces $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, y se dice que H tiene ecuación $\{f=\alpha\}$.*

Proposición 2.2.4. *Sean X un espacio normado y H un hiperplano afín de ecuación $\{f = \alpha\}$.*

(i) Si H no es denso en X, entonces es cerrado en X.

(ii) El hiperplano H es cerrado en X si, y solamente si, el funcional lineal f es continuo.

DEMOSTRACIÓN. Si H es un hiperplano, para probar (i) basta tener en cuenta que la clausura de H es un subespacio de X que contiene a H y usar la maximalidad de H. El caso general en que H es un hiperplano afín sigue del hecho de que la topología de un espacio normado es invariante por traslaciones [6, Proposición 1.7].

Estableceremos ahora (ii). Si f es continua, entonces H (la antiimagen del cerrado $\{\alpha\}$ mediante f) es también cerrado. Recíprocamente, asumamos que H es cerrado. El complementario $X \setminus H$ de H es abierto y no vacío, pues $f \neq 0$. Sea $x_0 \in X \setminus H$ y supongamos, para fijar ideas, que $f(x_0) < \alpha$. Existe $r > 0$ tal que $U(x_0, r) \subseteq X \setminus H$, donde

$$U(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}.$$

Afirmamos que

$$f(x) < \alpha \quad (x \in U(x_0, r)). \tag{2.2}$$

En efecto, supongamos que $f(x_1) > \alpha$ para algún $x_1 \in U(x_0, r)$. El segmento

$$\{x_t = (1-t)x_0 + t x_1 : t \in [0,1]\}$$

está contenido en $U(x_0, r)$ y, siendo esta bola un subconjunto de $X \setminus H$, necesariamente $f(x_t) \neq \alpha$ $(t \in [0,1])$; pero $f(x_t) = \alpha$ para

$$t = \frac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)},$$

contradicción que prueba (2.2). De (2.2) resulta que

$$f(x_0 + rz) < \alpha \quad (z \in U(0,1)).$$

Por tanto, f es continuo, con

$$\|f\| \leq \frac{1}{r}\left[\alpha - f(x_0)\right].$$

□

2.3. Motivación

En general, el estudio de la dualidad pretende obtener información sobre un espacio a partir de su dual. Un ejemplo: dado un espacio normado X y puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$; decimos que el funcional f separa x de y, o también que X^* separa los puntos de X (Corolario 1.4.5 y Observación 1.4.6). Otro ejemplo: dado un subespacio cerrado M de X y un punto $x_0 \in X \setminus M$, existe $f \in X^*$ tal que $f(M) = \{0\}$ mientras que $f(x_0) \neq 0$; también en este caso decimos que el funcional f separa el punto x_0 del subespacio M (Corolario 1.4.2 y Observación 1.4.3).

Sea X un espacio vectorial real en el que no consideramos ninguna norma. Dados dos subconjuntos $A, B \subseteq X$, no vacíos y disjuntos, nos podemos preguntar si los funcionales lineales en X son capaces de separar o distinguir A de B, es decir, si podemos encontrar un funcional lineal f en X verificando que $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Concretamos mejor nuestra pregunta para el caso particular $X = \mathbb{R}^2$. En efecto, a poco que A y B sean conexos, la continuidad de f hace que los conjuntos $f(A)$ y $f(B)$ sean intervalos en $\mathbb{R}$, y sólo podrán ser disjuntos cuando se tenga $f(a) < f(b)$, o la desigualdad contraria $f(b) < f(a)$, para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$; desigualdad contraria que se convierte en la misma cambiando f por $-f$, esto es: $-f(a) < -f(b)$ $(a \in A,\ b \in B)$. Deducimos que

$$\sup f(A) \leq \operatorname{ínf} f(B). \tag{2.3}$$

Aunque esta desigualdad no garantiza que los intervalos $f(A)$ y $f(B)$ sean disjuntos, en principio consideramos un funcional lineal que verifique (2.3), exigiendo, para evitar trivialidades, que $f \neq 0$. Tomando γ de forma que $\sup f(A) \leq \gamma \leq \operatorname{ínf} f(B)$, la desigualdad (2.3) equivale a

$$f(a) \leq \gamma \leq \operatorname{ínf} f(b) \quad (a \in A,\ b \in B). \tag{2.4}$$

La interpretación geométrica es la siguiente: la recta (hiperplano, posiblemente afín) de ecuación $\{f = \gamma\}$ deja el conjunto A a un lado y el conjunto B al otro. Entenderemos que el funcional $f \neq 0$ separa los conjuntos A y B cuando se cumple que (2.3) o, equivalentemente, cuando existe $\gamma \in \mathbb{R}$ verificando (2.4). Buscamos entonces condiciones sobre los conjuntos A y B que nos permitan separarlos. Ejemplos muy sencillos muestran que debemos suponer que A y B sean convexos.

En cuanto al caso general, si A y B son dos subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio vectorial real X, nos planteamos si podemos separar A y B, esto es, si existe un funcional lineal $f \neq 0$ en X que satisface (2.3), o de forma equivalente, (2.4) para algún $\gamma \in \mathbb{R}$. Geométricamente, esta situación se interpreta como sigue: el hiperplano (afín) de ecuación $\{f = \gamma\}$ coloca el conjunto A a un lado y el conjunto B a otro.

Es importante discutir también el caso complejo. Si X es un espacio vectorial complejo, podemos considerar el espacio real subyacente $X_{\mathbb{R}}$ y contemplar A y B como subconjuntos convexos de $X_{\mathbb{R}}$. Si pudiésemos separarlos en $X_{\mathbb{R}}$, al ser los funcionales lineales en $X_{\mathbb{R}}$ las partes reales de los funcionales lineales en X, tendríamos un funcional lineal $f \neq 0$ en X verificando que

$\sup \Re f(A) \leq \inf \Re f(B)$, o de forma equivalente,

$$\Re f(a) \leq \gamma \leq \Re f(b) \quad (a \in A,\ b \in B)$$

para algún $\gamma \in \mathbb{R}$. Para la interpretación geométrica podemos pensar que el funcional $f : X \to \mathbb{C}$ nos proporciona una imagen de X en el plano, estando los conjuntos $f(A)$ y $f(B)$ a distinto lado de una recta vertical. Por tanto, en el caso complejo nuestro problema tiene sentido, quedando su discusión reducida al caso real.

Vamos a ver con un ejemplo que, sin embargo, no siempre podemos separar dos conjuntos convexos disjuntos. Consideremos el espacio vectorial real $X = c_{00}$ de las sucesiones reales de soporte finito, y sea A el subconjunto de X formado por las sucesiones en las que su último término no nulo es estrictamente positivo. A partir de la sucesión de vectores unidad $\{e_n\}$, el conjunto A es:

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R},\ \alpha_N > 0\ (N \in \mathbb{N}) \right\}.$$

El otro conjunto convexo es $B = \{0\}$. Comprobaremos que no es posible separar A y B; equivalentemente, que todo funcional lineal no nulo f en X toma en A valores estrictamente positivos y estrictamente negativos. Por ser $f \neq 0$, va a existir un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(e_n) \neq 0$ y, cambiando f por $-f$ en caso necesario, es posible suponer que $f(e_n) > 0$. Luego, eligiendo $\alpha > 0$ suficientemente grande, tenemos $f(e_{n+1}) - \alpha f(e_n) < 0$. Hemos encontrado así dos puntos de A, e_n y $-\alpha e_n + e_{n+1}$, en los que f toma valores de distinto signo.

El espacio vectorial X del contraejemplo anterior tiene dimensión infinita: veremos más adelante que en dimensión finita siempre podemos separar dos conjuntos convexos disjuntos (Corolario 2.6.1). Por otra parte, la versión analítica del teorema de Hahn-Banach nos va a dar una condición suficiente para separar dos subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio vectorial cualquiera, bajo una condición poco restrictiva sobre uno de ellos (Teorema 2.4.2).

2.4. Espacios vectoriales

2.4.1. Separación en espacios vectoriales

Para entender la hipótesis que nos va a permitir obtener un teorema de separación de conjuntos convexos, necesitamos introducir el siguiente concepto.

Definición 2.4.1. *Se dice que un subconjunto U de un espacio vectorial X es absorbente cuando para cada vector $x \in X$ existe $\rho > 0$ tal que $x \in \rho U$.*

Si U es absorbente entonces $0 \in U$, y U debe contener un punto en cada dirección del espacio: para cada $x \in X$ tenemos un $\rho > 0$ tal que $\rho^{-1}x \in U$. Si U es, además, un conjunto convexo, el segmento de extremos 0 y $\rho^{-1}x$ estará contenido en U, luego U contendrá un segmento no trivial en todas las direcciones del espacio X, cuya longitud dependerá de la dirección. Por tanto, podemos contemplar 0 como una especie de «punto interior» de U.

Cualquier entorno de cero en un espacio normado proporciona un ejemplo de conjunto absorbente, pero no son los únicos: el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de sendos discos cerrados de radio 1 con centros en los puntos $(-1,0)$ y $(0,1)$, junto con el segmento que une $(0,1)$ con $(0,-1)$, es un conjunto absorbente que no es entorno de cero.

Teorema 2.4.2 (Separación de convexos en espacios vectoriales)**.** *Sean X un espacio vectorial y A, B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de X. Supongamos que existe un punto $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente. Entonces existe un funcional lineal no nulo f en X que separa A y B, es decir,*

$$\sup \Re f(A) \leq \inf \Re f(B).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar el caso real, ya que en el caso complejo se recurre al espacio real subyacente.

Separar A y B es lo mismo que separar $A - B$ y $\{0\}$, donde $A - B$ es convexo y $0 \notin A - B$, ya que $A \cap B = \emptyset$. Por tanto, separar dos conjuntos convexos es lo mismo que separar un conjunto convexo de un punto. También haremos una traslación del problema: junto con el punto $a_0 \in A$ que por hipótesis hace que $A - a_0$ sea absorbente, fijamos un $b_0 \in B$ arbitrario y consideramos $U = (A - a_0) - (B - b_0)$. Se tiene que U es un subconjunto convexo de X, y también es absorbente ya que $A - a_0 \subseteq U$. Poniendo $x_0 = b_0 - a_0$, la condición $A \cap B = \emptyset$ nos indica que $x_0 \notin U$, y nuestro problema se reduce a separar U del punto x_0.

El Corolario 1.4.7 puede servir para entender mejor el razonamiento que sigue. En dicho corolario, la existencia de f se obtuvo de la versión analítica del teorema de Hahn-Banach usando la norma del espacio. Para resolver nuestro caso, mucho más general, nos damos cuenta de que la norma del espacio X está determinada por la bola unidad abierta U mediante la siguiente igualdad:

$$\|x\| = \inf\left\{\rho > 0 : x \in \rho U\right\} \quad (x \in X).$$

El segundo miembro de esta igualdad tiene sentido en cualquier espacio vectorial X siempre que U sea un conjunto absorbente, y define una aplicación de X en $\mathbb{R}$ que, en general, no será una norma en X, pero que puede ser utilizada como funcional mayorante para aplicar la versión analítica del teorema de Hahn-Banach.

Retomamos ya el hilo de la demostración. De acuerdo con lo anterior, y teniendo en cuenta que nuestro conjunto U es absorbente, definimos una función $\nu : X \to \mathbb{R}$, que recibe el nombre de funcional de Minkowski de U, de la siguiente manera:

$$\nu(x) = \text{ínf}\{\rho > 0 : x \in \rho U\} \quad (x \in X).$$

Es claro que $\nu(x) \leq 1$ para todo $x \in U$. Como $x_0 \notin U$ deducimos que $\nu(x_0) \geq 1$, ya que si fuese $\nu(x_0) < 1$ resultaría que $x_0 \in \rho U$ para algún ρ con $0 < \rho < 1$, y utilizando que U es convexo con $0 \in U$ obtendríamos que $x_0 \in \rho U \subseteq \rho U + (1-\rho)U = U$.

En la Proposición 2.4.4 comprobaremos que ν verifica las condiciones que nos permiten usarla como funcional mayorante en la versión analítica del teorema de Hahn-Banach: la homogeneidad positiva

$$\nu(rx) = r\nu(x) \quad (r \in \mathbb{R}_+,\ x \in X)$$

y la desigualdad triangular

$$\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad (x, y \in X).$$

Ahora, consideramos el subespacio span $\{x_0\}$ de X y el funcional lineal g definido en dicho subespacio por $g(\lambda x_0) = \lambda\nu(x_0)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Observamos que g está dominado por ν, pues para $\lambda > 0$ tenemos $g(\lambda x_0) = \nu(\lambda x_0)$, mientras que para $\lambda \leq 0$ es $g(\lambda x_0) \leq 0 \leq \nu(\lambda x_0)$. La versión analítica del teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.3.2) proporciona un funcional lineal f en X que extiende a g y sigue dominado por ν.

Comprobemos que f es el funcional que buscamos. Por una parte, $f(x_0) = \nu(x_0) \geq 1$, en particular $f \neq 0$, mientras que para cualquier $x \in U$ será $f(x) \leq \nu(x) \leq 1$. Luego, f separa el conjunto U del punto x_0. Finalmente, para todo $a \in A$ y todo $b \in B$, usando que $a - b + x_0 = (a - a_0) - (b - b_0) \in U$ obtenemos $f(a) - f(b) + f(x_0) \leq 1 \leq f(x_0)$, de donde $f(a) \leq f(b)$. Así pues, f separa los conjuntos A y B, como queríamos demostrar. □

2.4.2. Funcional de Minkowski

El funcional de Minkowski, introducido en la demostración del Teorema 2.4.2, desempeña un papel fundamental en el estudio de las topologías vectoriales localmente convexas. Aunque un tal estudio excede el alcance de este trabajo, la relevancia de ese papel justifica que dediquemos la presente sección a formalizar la definición y propiedades de dicho funcional.

Definición 2.4.3. *Sean X un espacio vectorial y $A \subseteq X$ un conjunto absorbente. Para todo $x \in X$ se define:*

$$\nu(x) = \nu_A(x) = \text{ínf}\{\alpha > 0 : x \in \alpha A\}.$$

Se dice que ν es el funcional de Minkowski de A.

Proposición 2.4.4. *En las condiciones de la Definición 2.4.3, se verifica:*

(i) $\nu(rx) = r\nu(x)$ $(r \in \mathbb{R}_+,\ x \in X)$.

(ii) *Si A es convexo, entonces* $\nu(x+y) \le \nu(x) + \nu(y)$ $(x, y \in X)$.

(iii) *Si A es convexo y equilibrado (esto es, si $\alpha A \subseteq A$ para todo escalar α con $|\alpha| \le 1$), entonces ν es una seminorma.*

(iv) *Si A es convexo y ponemos $B = \{x \in X : \nu(x) < 1\}$, $C = \{x \in X : \nu(x) \le 1\}$, entonces $B \subseteq A \subseteq C$ y $\nu_B = \nu = \nu_C$.*

Supongamos adicionalmente que el espacio X es normado.

(v) *Si A es abierto, entonces existe $M > 0$ tal que*

$$0 \le \nu(x) \le M\|x\| \quad (x \in X). \tag{2.5}$$

(vi) *Si A es convexo y abierto, entonces $A = \{x \in X : \nu(x) < 1\}$.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, la homogeneidad positiva

$$\nu(rx) = r\nu(x) \quad (r \in \mathbb{R}_+,\ x \in X)$$

se infiere de la definición de ν. En segundo lugar, la desigualdad triangular se deduce de la convexidad de A. Para probarla, dados $x, y \in X$ consideramos $\rho, \delta > 0$ tales que $x \in \rho A$, $y \in \delta A$. Obtenemos entonces:

$$x + y \in \rho A + \delta A = (\rho+\delta)\left(\frac{\rho}{\rho+\delta}A + \frac{\delta}{\rho+\delta}A\right) = (\rho+\delta)A,$$

donde para la última igualdad se tiene en cuenta que A es convexo. Consecuentemente $\nu(x+y) \le \rho + \delta$, y la arbitrariedad de ρ y δ nos permite tomar ínfimos y concluir que

$$\nu(x+y) \le \nu(x) + \nu(y) \quad (x, y \in X),$$

como queríamos.

Si A es equilibrado, para $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\nu(\lambda x) &= \operatorname{ínf}\left\{\alpha > 0 : x \in \frac{\alpha}{\lambda}A\right\} = \operatorname{ínf}\left\{\alpha > 0 : x \in \frac{\alpha\overline{\lambda}}{|\lambda|^2}A\right\} \\
&= \operatorname{ínf}\left\{\alpha > 0 : x \in \frac{\alpha}{|\lambda|}A\right\} = |\lambda| \operatorname{ínf}\{\beta > 0 : x \in \beta A\} \\
&= |\lambda|\nu(x) \quad (x \in X).
\end{aligned}$$

Hemos usado que cuando $|\mu| = 1$ se tiene $A = \mu(\mu^{-1})A \subseteq \mu A \subseteq A$, así que $A = \mu A$.

En cuanto a (iv), es obvio que $A \subseteq C$. Por otra parte, ya que A es absorbente, $0 \in A$. Si A es convexo, $x \in X$ con $\nu(x) < 1$, y elegimos $0 < \alpha < 1$ con $\alpha^{-1}x \in A$, entonces $x = \alpha\left(\alpha^{-1}x\right) + (1-\alpha)0 \in A$, de modo que $B \subseteq A$. Ahora, las inclusiones $B \subseteq A \subseteq C$ muestran que $\nu_C \leq \nu \leq \nu_B$. Para probar la igualdad, fijemos $x \in X$ y elijamos s, t tales que $\nu_C(x) < s < t$. Por (i) y (ii), C es convexo y $0 \in C$. Se desprende que $x/s \in C$, $\nu(x/s) \leq 1$, $\nu(x/t) \leq s/t < 1$; luego, $x/t \in B$, de donde $\nu_B(x) \leq t$. La arbitrariedad de $t > \nu_C(x)$ permite concluir que $\nu_B(x) \leq \nu_C(x)$.

En lo que resta de demostración, supondremos adicionalmente que X es un espacio normado y que A es abierto en X. Como $0 \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(0, r) \subseteq A$. Entonces $\nu(x) \leq r^{-1}\|x\|$ $(x \in X)$, y se satisface (2.5) con $M = r^{-1}$.

Para completar la prueba, asumamos que $x \in A$. Puesto que $(1+\varepsilon)x \in A$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, encontramos que

$$\nu(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.$$

Apelando a (iv) ya resulta (vi). □

2.5. Espacios normados

En esta sección vamos a obtener consecuencias y aplicaciones importantes del teorema general de separación de conjuntos convexos (Teorema 2.4.2) para el caso en el que disponemos de una norma en nuestro espacio vectorial X.

2.5.1. Separación en espacios normados

Si A es un subconjunto de X y a_0 es un punto interior de A, entonces $A - a_0$ es absorbente por ser entorno de cero. De esta manera, la hipótesis del teorema de separación queda asegurada suponiendo que uno de los conjuntos convexos que queremos separar tiene interior no vacío. Esta hipótesis es un poco más restrictiva de lo necesario, ya que, como hemos visto, un conjunto absorbente no tiene por qué ser entorno de cero, pero a cambio de imponer esta restricción obtenemos importantes mejoras en las conclusiones (Corolario 2.5.2).

Denotaremos por $\operatorname{int}(A)$ el interior del conjunto A y probaremos un resultado preliminar.

Lema 2.5.1. *Sean X un espacio normado y C un subconjunto convexo de X con $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset$. Entonces $C \subseteq \overline{\operatorname{int}(C)}$ y, consecuentemente, $\overline{C} = \overline{\operatorname{int}(C)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $z \in \operatorname{int}(C)$, y sea $x \in C \setminus \operatorname{int}(C)$; en particular, $\|z - x\| > 0$. Afirmamos que

$$V = \{\lambda z + (1-\lambda)x : 0 < \lambda \leq 1\} \subseteq \operatorname{int}(C). \tag{2.6}$$

Admitiendo esta inclusión como cierta, sean $0 < r \le \|z - x\|$ y

$$0 < \lambda < \frac{r}{\|z - x\|} \le 1.$$

Entonces

$$\|[\lambda z + (1-\lambda)x] - x\| = \lambda \|z - x\| < r,$$

probando que se tiene

$$\emptyset \ne U(x,r) \cap V \subseteq U(x,r) \cap \operatorname{int}(C)$$

y, en particular, que $x \in \overline{\operatorname{int}(C)}$. Como, trivialmente, $\operatorname{int}(C) \subseteq \overline{\operatorname{int}(C)}$, de la arbitrariedad de x se infiere que

$$C = [C \setminus \operatorname{int}(C)] \cup \operatorname{int}(C) \subseteq \overline{\operatorname{int}(C)}.$$

Así pues, $\overline{C} \subseteq \overline{\operatorname{int}(C)}$. La inclusión $\overline{\operatorname{int}(C)} \subseteq \overline{C}$ es obvia, y se concluye que $\overline{C} = \overline{\operatorname{int}(C)}$, como se pretendía.

Ahora sólo resta establecer (2.6). Ya que $z \in \operatorname{int}(C)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $U(z,\varepsilon) \subseteq C$. Fijado $0 < \lambda \le 1$, pongamos $y = \lambda z + (1-\lambda)x$; bastará demostrar que $U\left(y, \varepsilon\lambda\right) \subseteq C$. En efecto, sea $w \in U\left(y, \lambda\varepsilon\right)$ y consideremos

$$v = \frac{w - (1-\lambda)x}{\lambda}.$$

Se cumple:

$$\|v - z\| = \left\| \frac{w - (1-\lambda)x}{\lambda} - z \right\| = \frac{1}{\lambda} \|w - [\lambda z + (1-\lambda)x]\| = \frac{1}{\lambda} \left\| w - y \right\| < \frac{\lambda\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon,$$

así que $v \in C$. Puesto que $w = \lambda v + (1-\lambda)x$, con $v, x \in C$, y C es convexo, necesariamente $w \in C$, completando la prueba. □

Corolario 2.5.2 (Separación de convexos en espacios normados)**.** *Sean X un espacio normado y A, B subconjuntos convexos de X. Supongamos que $B \ne \emptyset$, $\operatorname{int}(A) \ne \emptyset$ e $\operatorname{int}(A) \cap B = \emptyset$. Entonces existen $f \in X^* \setminus \{0\}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\Re f(a) \le \gamma \le \Re f(b) \quad (a \in A,\ b \in B).$$

De hecho, se tiene

$$\Re f(a) < \gamma \quad (a \in \operatorname{int}(A)).$$

DEMOSTRACIÓN. Antes de proceder con la demostración propiamente dicha, vamos a comparar este resultado con el Teorema 2.4.2. Ahora tenemos una norma en X (lo cual no supone ninguna restricción) y, a cambio de fortalecer un poco la hipótesis sobre A exigiendo que $\operatorname{int}(A) \ne \emptyset$, debilitamos la hipótesis de que A y B sean disjuntos requiriendo sólo que $\operatorname{int}(A) \cap B = \emptyset$. La conclusión es que conseguimos separar A y B mediante un funcional lineal continuo y que separamos «estrictamente» $\operatorname{int}(A)$ y B, pues los conjuntos $f(\operatorname{int}(A))$ y $f(B)$ son disjuntos.

Para probar este corolario aplicaremos el teorema general de separación, junto con algunas observaciones sobre subconjuntos convexos de un espacio normado. Como habitualmente, bastará probar el caso real.

Es claro que para cualquier punto $a_0 \in \operatorname{int}(A)$, el conjunto $\operatorname{int}(A) - a_0$ es absorbente. Se tiene además que, en cualquier espacio normado, el interior de un conjunto convexo es también convexo [6, Teorema 1.13]. Por tanto, podemos aplicar el teorema de separación a los conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos $\operatorname{int}(A)$ y B, con lo que obtenemos un funcional lineal no nulo f en X y un $\gamma \in \mathbb{R}$, satisfaciendo

$$f(a) \leq \gamma \leq f(b) \quad (a \in \operatorname{int}(A),\ b \in B).$$

Necesitamos que la primera desigualdad sea estricta, pero esto es consecuencia del hecho de que, en cualquier espacio normado, todo funcional lineal no idénticamente nulo es abierto [3, Problema 10.24]. En efecto, se infiere de este hecho que $f(\operatorname{int}(A))$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ que no puede tener máximo, así que $f(a) < \gamma$ para todo $a \in \operatorname{int}(A)$.

Para ver que f es continuo, observamos que el hiperplano de ecuación $\{f = \gamma\}$ no es denso en X, porque no corta al abierto no vacío $\operatorname{int}(A)$; pero entonces es cerrado en X, probando la continuidad de f (Proposición 2.2.4).

Para completar la demostración hemos de ver que f separa también los conjuntos A y B, pues de momento sólo sabemos que f separa $\operatorname{int}(A)$ y B. La desigualdad $f(a) < \gamma$ $(a \in \operatorname{int}(A))$, junto con la continuidad de f, implica que $f(x) \leq \gamma$ $(x \in \overline{\operatorname{int}(A)})$. La prueba finalizará tan pronto se establezca que $A \subseteq \overline{\operatorname{int}(A)}$, y esto es precisamente lo que afirma el Lema 2.5.1. □

2.5.2. Funcionales y puntos de soporte

Vamos a interpretar geométricamente un interesante caso particular del Corolario 2.5.2. Sean X un espacio normado y A un subconjunto convexo de X con interior no vacío. Dado un punto x_0 en la frontera de A podemos aplicar el Corolario 2.5.2 tomando $B = \{x_0\}$, y obtenemos un funcional lineal continuo f en X que verifica:

$$\Re f(a) \leq \Re f(x_0) \quad (a \in A).$$

La interpretación geométrica de esta desigualdad es la siguiente: el hiperplano afín real de ecuación $\{\Re f = \Re f(x_0)\}$ pasa por el punto x_0 y deja el conjunto A a un lado. Dicho hiperplano «soporta» al conjunto A en el punto x_0. Como consecuencia decimos que f es un funcional de soporte del conjunto A, y también que x_0 es un punto de soporte de A. Hemos probado así el siguiente:

Corolario 2.5.3 (Abundancia de puntos de soporte)**.** *Si X es un espacio normado y A un subconjunto convexo de X con interior no vacío, entonces todo punto de la frontera de A es un punto de soporte de A.*

Un caso particular de este corolario es el siguiente: si A es la bola unidad (abierta o cerrada) de X y tomamos $x_0 \in X$ con $\|x_0\| = 1$, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1 = f(x_0)$ (cf. Corolario 1.4.7). Este f es un funcional de soporte de la bola unidad en el punto x_0.

2.5.3. Separación fuerte

En algunos casos es posible cuantificar la separación entre subconjuntos de un espacio normado X. Supongamos que dos subconjuntos convexos no vacíos A y B de X, no sólo son disjuntos, sino que están a distancia positiva, esto es:

$$d(A,B) = \text{ínf}\{\|a-b\| : a \in A,\ b \in B\} = \rho > 0.$$

Si U es la bola unidad abierta de X, podemos separar los conjuntos $A+\rho U$ y B, los cuales son convexos, no vacíos y disjuntos, con $A+\rho U$ abierto. Aplicando el Corolario 2.5.2 obtenemos un $f \in X^* \setminus \{0\}$ verificando que $\sup \Re f(A+\rho U) \le \text{ínf} \Re f(B)$. Esta desigualdad no se altera si la dividimos por $\|f\|$, así que podemos suponer que $\|f\| = 1$; pero entonces $\Re f(U) =]-1,1[$, con lo que $\sup \Re f(A+\rho U) = \sup \Re f(A) + \rho$. Poniendo $\gamma = \sup \Re f(A)$, hemos demostrado:

Corolario 2.5.4 (Separación fuerte de convexos en espacios normados)**.** *Sean A y B subconjuntos convexos no vacíos de un espacio normado X y supongamos que $d(A,B) = \rho > 0$. Entonces existen $f \in X^*$, con $\|f\| = 1$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\Re f(a) \le \gamma \le \gamma + \rho \le \Re f(b) \quad (a \in A,\ b \in B).$$

Observación 2.5.5. *La tesis del Corolario 2.5.4 se resume diciendo que el funcional f separa fuertemente los conjuntos A y B. Tenemos dos hiperplanos reales y afines, los de ecuaciones $\{\Re f = \gamma\}$ y $\{\Re f = \gamma + \rho\}$, tales que el conjunto A queda a un lado de ambos y B al otro. Además, la distancia entre estos hiperplanos es ρ, que es la máxima posible.*

Observación 2.5.6. *Un caso particular del Corolario 2.5.4 es el siguiente, que se recogerá en el Corolario 3.2.5 (donde se obtendrá por una vía alternativa): si como conjunto A elegimos un subespacio M del espacio normado X y tomamos $B = \{x_0\}$ con $d(x_0,M) > 0$, entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(M) = \{0\}$, $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = d(x_0,M)$. En el Corolario 3.2.5, la existencia de un tal funcional se inferirá del teorema de extensión mayorada de Hahn-Banach (Teorema 1.3.2);*

también se puede deducir del teorema de extensión equinórmica (Teorema 1.4.1), sin más que proceder como en la demostración del Corolario 1.4.2 pero definiendo $f(y) = \lambda d(x_0, M)$ *para todo* $y = x + \lambda x_0 \in M_0 = M \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$.

Observación 2.5.7. *Las condiciones paradigmáticas para aplicar el Corolario 2.5.4 se presentan cuando uno de los conjuntos convexos, digamos* A*, es compacto y el otro,* B*, es cerrado, con* $A \cap B = \emptyset$*. En efecto, la función continua* $x \mapsto d(x, B)$ *alcanza su valor mínimo en el compacto* A*, luego* $d(A, B) > 0$.

2.6. Espacios de dimensión finita

Concluimos el capítulo probando que en dimensión finita no es necesaria ninguna hipótesis restrictiva para separar conjuntos convexos disjuntos.

Esto se debe a la siguiente observación. Si U es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$, con $0 \in U$, y el subespacio engendrado por U es todo $\mathbb{R}^N$, entonces U tiene interior no vacío. En efecto, U contendrá una base $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$, y usando la convexidad de U, junto con el hecho de que $0 \in U$, se deduce que U debe contener al conjunto abierto

$$\left\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k u_k : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}_+, \sum_{k=1}^{N} \lambda_k < 1 \right\}.$$

La condición $0 \in U$ siempre se puede conseguir mediante una traslación en caso necesario. Lo que obtenemos es que un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$ con interior vacío tiene que estar contenido en un subespacio afín propio de $\mathbb{R}^N$.

Corolario 2.6.1 (Separación de convexos en espacios de dimensión finita)**.** *Sean* A *y* B *subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de* $\mathbb{R}^N$*. Entonces existe un funcional lineal en* $\mathbb{R}^N$ *que separa* A *y* B*. Más precisamente, existen* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$*, y también* $\gamma \in \mathbb{R}$*, tales que*

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k a_k \le \gamma \le \sum_{k=1}^{N} \alpha_k b_k$$

para cualesquiera $(a_1, a_2, \dots, a_N) \in A$ *y* $(b_1, b_2, \dots, b_N) \in B$.

DEMOSTRACIÓN. Reducimos el problema a separar un conjunto convexo de un punto que no le pertenezca. Concretamente, fijamos $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ y tomamos $U = (A - a_0) - (B - b_0)$, que es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$ tal que $0 \in U$. Nuestro problema consiste en separar U del punto $x_0 = b_0 - a_0$, que no está en U por ser A y B disjuntos.

Si U tiene interior no vacío, aplicamos, por ejemplo, el teorema de separación de conjuntos convexos en espacios normados (Corolario 2.5.2). Como comentamos anteriormente, si U tiene interior vacío entonces U está contenido en un subespacio propio de $\mathbb{R}^N$; en particular, existe un funcional lineal no nulo f en $\mathbb{R}^N$ tal que $U \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Cambiando f por $-f$ en caso necesario siempre tendremos $\Re f(x_0) \geq 0$, con lo cual

$$\Re f(u) \leq \Re f(x_0) \quad (u \in U).$$

Se concluye que

$$\Re f(a) \leq \Re f(b) \quad (a \in A,\ b \in B).$$

□

CAPÍTULO 3

Dualidad en espacios normados

3.1. Introducción

Dedicamos este capítulo a mostrar cómo el teorema de Hahn-Banach permite profundizar en el estudio de la dualidad en espacios normados.

3.2. Algunos resultados sobre aproximación

3.2.1. Dual de un subespacio

Sean X un espacio normado, X^* su dual, y M un subespacio de X. Para cada $f \in X^*$, sea $R(f)$ la restricción de f a M. Claramente, $R(f)$ es un funcional lineal continuo sobre M, con $\|R(f)\| \le \|f\|$. El teorema de extensión equinórmica (Teorema 1.4.1) asegura que $R(X^*) = M^*$, pues dado $g \in M^*$ proporciona $f \in X^*$ tal que $R(f) = g$.

El núcleo de la aplicación $R : X^* \to M^*$ se llama anulador de M, y se denota $M^\perp$:

$$M^\perp = \left\{ f \in X^* : f(M) = \{0\} \right\}.$$

Como R es continua, $M^\perp$ es cerrado. Definimos ahora otro operador $\Phi : X^*/M^\perp \to M^*$ poniendo

$$\Phi(f + M^\perp) = R(f) \quad (f + M^\perp \in X^*/M^\perp).$$

Esta aplicación es lineal, sobre e isométrica, lo que nos permite identificar totalmente M^* con $X^*/M^\perp$. En efecto, dados $f \in X^*$ y $h \in M^\perp$ tenemos:

$$\left\|\Phi(f + M^\perp)\right\| = \left\|R(f+h)\right\| \leq \left\|f+h\right\|.$$

Por definición de norma cociente, $\left\|\Phi(f+M^\perp)\right\| \leq \left\|f+M^\perp\right\|$.

Recíprocamente, dado $f \in X^*$, el funcional $R(f) \in M^*$ se extiende a todo el espacio X conservando la norma, es decir, existe $\widetilde{f} \in X^*$ (sin que se tenga necesariamente $\widetilde{f} = f$) tal que $R(\widetilde{f}) = R(f)$ y $\left\|\widetilde{f}\right\| = \left\|R(f)\right\|$. Es claro que $\widetilde{f} \in f + M^\perp$, por lo que concluimos:

$$\left\|f+M^\perp\right\| \leq \left\|\widetilde{f}\right\| = \left\|R(f)\right\| = \left\|\Phi(f+M^\perp)\right\| \leq \left\|f+M^\perp\right\|.$$

En definitiva, hemos obtenido:

Corolario 3.2.1 (Dual de un subespacio)**.** *Sean X un espacio normado con dual X^*, M un subespacio de X y $M^\perp$ su anulador. Para cada $f \in X^*$, denotemos por $R(f)$ la restricción de f a M. Entonces $M^\perp$ es un subespacio cerrado de X^*, y definiendo*

$$\Phi(f+M^\perp) = R(f) \quad (f + M^\perp \in X^*/M^\perp)$$

se obtiene un isomorfismo isométrico Φ de $X^*/M^\perp$ sobre M^*, de manera que

$$M^* \equiv X^*/M^\perp.$$

3.2.2. Mejor aproximación en un espacio dual

La demostración del Corolario 3.2.1 contiene un resultado muy útil en la teoría de la aproximación. Observemos que, dado $f \in X^*$, hemos encontrado $\widetilde{f} \in f + M^\perp$ tal que $\left\|\widetilde{f}\right\| = \left\|f+M^\perp\right\|$: en este caso, el ínfimo que define la norma cociente es en realidad un mínimo.

Si ahora ponemos $h = f - \widetilde{f} \in M^\perp$, es claro que

$$d(f,h) = \left\|f-h\right\| = \left\|\widetilde{f}\right\| = \left\|f+M^\perp\right\| = d(f, M^\perp),$$

es decir, la distancia de f a $M^\perp$ se alcanza en el punto $h \in M^\perp$; se dice en este caso que h es una mejor aproximación a f desde $M^\perp$.

Definición 3.2.2. *Sean (Y,d) un espacio métrico y Z un subconjunto no vacío de Y. Para cada $y \in Y$ se llama conjunto de mejores aproximaciones a y desde Z al conjunto (posiblemente vacío)*

$$P_Z(y) = \left\{z \in Z : d(y,z) = d(y,Z)\right\},$$

es decir, al conjunto de los puntos de Z que están a la mínima distancia de y. Cuando $P_Z(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in Y$ se dice que Z es un subconjunto proximinal en Y.

Nótese que todo subconjunto proximinal es necesariamente cerrado.

Mediante el teorema de Hahn-Banach hemos probado que, para todo subespacio M de un espacio normado X, $M^{\perp}$ es un subespacio proximinal de X^*. En efecto, para cada $f \in X^*$ hemos encontrado mejores aproximaciones a f desde $M^{\perp}$, a saber, los funcionales de la forma $h = f - \widetilde{f}$, donde $\widetilde{f}$ es cualquier extensión equinórmica (también llamada extensión de Hahn-Banach) de la restricción de f a M.

Recíprocamente, si $h \in P_{M^{\perp}}(f)$ entonces

$$\|f - h\| = d(f, M^{\perp}) = \|R(f)\|,$$

luego $\widetilde{f} = f - h$ es una extensión de Hahn-Banach de $R(f)$ que verifica $h = f - \widetilde{f}$.

Así, podemos decir que hacer extensiones de Hahn-Banach de funcionales lineales continuos sobre M equivale a obtener mejores aproximaciones a funcionales lineales continuos sobre X desde $M^{\perp}$. La mejor aproximación será única cuando dispongamos de una única extensión de Hahn-Banach, unicidad que se puede discutir explícitamente revisando la primera etapa en la demostración del Teorema 1.3.2.

El siguiente corolario recoge una formulación muy útil de estas relaciones:

Corolario 3.2.3 (Mejor aproximación en un espacio dual)**.** *Sean X un espacio normado con dual X^*, M un subespacio de X, y $M^{\perp}$ su anulador. Para cada $f \in X^*$, se verifica:*

$$\text{mín}\left\{\|f - h\| : h \in M^{\perp}\right\} = \sup\left\{|f(m)| : m \in M,\ \|m\| = 1\right\}.$$

Observación 3.2.4. *Aunque los resultados obtenidos parecen tener un alcance limitado, al ser aplicables solamente al caso particular del anulador de un subespacio de un espacio normado como subconjunto del espacio dual, en realidad resultan de gran utilidad práctica, pues muchos de los espacios de Banach que se manejan habitualmente son espacios duales.*

3.2.3. Caracterización dual de la clausura de un subespacio

A continuación mostraremos, vía el teorema de Hahn-Banach, cómo el anulador de un subespacio determina la clausura de éste.

Corolario 3.2.5 (Clausura de un subespacio)**.** *Sean X un espacio normado, M un subespacio de X y $x_0 \in X \setminus \overline{M}$, es decir, $d(x_0, M) > 0$. Entonces existe $f \in M^{\perp}$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = d(x_0, M)$. Como* *consecuencia, se tiene:*

$$\overline{M} = \bigcap_{f \in M^\perp} \mathrm{Ker}(f).$$

DEMOSTRACIÓN. Poniendo $\nu(x) = d(x, M)$ $(x \in X)$ obtenemos una seminorma ν en X, y definiendo $g(\lambda x_0) = \lambda \nu(x_0)$, un funcional lineal en $\mathrm{span}\{x_0\}$ verificando $|g| \le \nu$. El teorema de Hahn-Banach proporciona un funcional lineal f en X que extiende a g y continúa verificando $|f| \le \nu$. Comprobemos que f es el funcional buscado.

En efecto, por ser

$$|f(x)| \le \nu(x) = d(x, M) \le \|x\| \quad (x \in X)$$

tenemos que f es continuo, con $\|f\| \le 1$, y $f \in M^\perp$. Como f extiende a g, también tenemos $f(x_0) = d(x_0, M)$. Finalmente, para cualquier $m \in M$ podemos escribir:

$$d(x_0, M) = f(x_0) = f(x_0 - m) \le \|f\| \, \|x_0 - m\|,$$

y la arbitrariedad de m permite concluir que $\|f\| = 1$.

La igualdad final del enunciado es inmediata: $\overline{M} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ para todo $f \in M^\perp$; recíprocamente, dado $x_0 \notin \overline{M}$ hemos encontrado $f \in M^\perp$ tal que $x_0 \notin \mathrm{Ker}(f)$. □

Corolario 3.2.6 (Subespacio denso)**.** *Sea M un subespacio de un espacio normado X. Si definimos el preanulador de un subespacio $N \subseteq X^*$ mediante*

$$^\perp N = \{x \in X : f(x) = 0 \ (f \in N)\},$$

entonces $\overline{M} = {}^\perp(M^\perp)$. Además, se tiene que M es denso en X si, y sólo si, $M^\perp = \{0\}$.

3.2.4. Dual de un cociente

Es posible dar una caracterización del dual de un cociente que es la contrapartida de la del dual de un subespacio. Incluimos esta caracterización por completitud, pero omitimos su demostración ya que no utiliza el teorema de Hahn-Banach.

Proposición 3.2.7 (Dual de un cociente)**.** *Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado X. Consideremos el espacio normado cociente X/M y la proyección canónica cociente $\pi : X \to X/M$, definida por $\pi(x) = x + M$ $(x \in X)$. La aplicación*

$$\Psi(g) = g \circ \pi \quad \left(g \in (X/M)^*\right)$$

es un isomorfismo isométrico de $(X/M)^*$ sobre $M^\perp$; simbólicamente:

$$(X/M)^* \equiv M^\perp.$$

3.3. Topologías débil y débil*

La topología de un espacio de Banach tiene una gran cantidad de abiertos, lo cual es una ventaja por cuanto proporciona una gran cantidad de funciones continuas definidas sobre el espacio. Como contrapartida, posee, lógicamente, pocos compactos; de hecho, la bola unidad cerrada de un espacio de Banach de dimensión infinita nunca es compacta. Si dotamos a nuestro espacio de Banach de una topología más débil conseguiríamos más compactos, pero, en principio, perderíamos funciones continuas. El objetivo de esta sección es mostrar cómo podemos debilitar la topología de un espacio de Banach sin perder funcionales lineales continuos y cómo es posible dotar al espacio dual de una topología en la cual la bola unidad cerrada siempre es compacta, destacando el papel que el teorema de Hahn-Banach desempeña en todo el proceso.

3.3.1. Repaso sobre la topología menos fina que hace continuas a todas las aplicaciones de una familia

Sea X un conjunto y sea $\{Y_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $i \in I$ se da una aplicación $\varphi_i : X \to Y_i$.

Nos planteamos dos problemas en relación con esta familia.

Problema 1. Dotar a X de una topología que haga continuas a todas las aplicaciones $\{\varphi_i\}_{i\in I}$. Si es posible, construir la topología $\mathcal{T}$ menos fina, es decir, con el mínimo de abiertos, que hace continuas a todas las $\{\varphi_i\}_{i\in I}$.

Si X está dotado de la topología discreta, en la que todo subconjunto de X es abierto, entonces cada φ_i es continua; pero esta topología dista de ser la menos fina. Por otra parte, dado un abierto $\omega_i \subseteq Y_i$ se debe tener que $\varphi_i^{-1}(\omega_i) \in \mathcal{T}$. Cuando ω_i describe la familia de abiertos de Y_i y cuando i recorre I, los $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ constituyen una familia de subconjuntos de X que son necesariamente abiertos en la topología $\mathcal{T}$; designamos esta familia por $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. La topología $\mathcal{T}$ es la topología menos fina en la que los $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ son abiertos. Nos vemos conducidos así al

Problema 2. Construir la familia menos fina posible $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X que sea estable para intersecciones finitas y uniones arbitrarias, y tal que $U_\lambda \in \mathcal{F}$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

La siguiente construcción proporciona la respuesta al Problema 2. En primer lugar, se consideran las intersecciones finitas de los conjuntos $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, es decir, $\bigcap_{\lambda\in\Gamma} U_\lambda$, $\Gamma \subseteq \Lambda$, Γ finito. Se obtiene así una familia Φ de subconjuntos de X, estable para intersecciones finitas. Se considera después la familia $\mathcal{F}$ obtenida con uniones arbitrarias de elementos de Φ. La familia $\mathcal{F}$, que evidentemente es estable para uniones arbitrarias, también lo es para intersecciones finitas.

Recapitulando: los abiertos de la topología $\mathcal{T}$ se obtienen al considerar primero las intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$, con ω_i abierto de Y_i, y luego las uniones arbitrarias de estas intersecciones.

Una base de entornos de $x \in X$ para la topología $\mathcal{T}$ está constituida por los conjuntos de la forma $\bigcap_{\text{finita}} \varphi_i^{-1}(V_i)$, donde V_i es un entorno de $\varphi_i(x)$ en Y_i.

En lo que sigue se dotará a X de la topología $\mathcal{T}$, que recibe el nombre de topología inicial generada por la familia de aplicaciones $\{\varphi_i\}_{i\in I}$.

A continuación probamos algunas propiedades elementales de esta topología.

Proposición 3.3.1. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X. Entonces $x_n \to x$ si, y solamente si, $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ para todo $i \in I$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $x_n \to x$ entonces $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ para todo $i \in I$, ya que cada φ_i es continua.

Recíprocamente, sea U un entorno de x. Por lo anterior, siempre es factible suponer que U tiene la forma $U = \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(V_i)$ para algún $J \subseteq I$, J finito. Para todo $i \in J$ existe un entero N_i tal que $\varphi_i(x_n) \in V_i$ cuando $n \geq N_i$. Si $N = \text{máx}_{i\in J} N_i$, entonces $x_n \in U$ para cada $n \geq N$. □

La siguiente propiedad es conocida en la literatura como «propiedad universal de las topologías iniciales».

Proposición 3.3.2. *Sea Z un espacio topológico y sea ψ una aplicación de Z en X. Entonces ψ es continua si, y solamente si, $\varphi_i \circ \psi$ es continua de Z en Y_i, para cada $i \in I$.*

DEMOSTRACIÓN. Como la composición de aplicaciones continuas es continua, si ψ es continua también lo es $\varphi_i \circ \psi$ para cada $i \in I$. Inversamente, sea U un abierto de X; vamos a demostrar que $\psi^{-1}(U)$ es un abierto de Z. Se sabe que U es de la forma $U = \bigcup_{\text{arbitraria}} \bigcap_{\text{finita}} \varphi_i^{-1}(\omega_i)$, con ω_i abierto de Y_i. Por tanto,

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{\text{arbitraria}} \bigcap_{\text{finita}} \psi^{-1}\left[\varphi_i^{-1}(\omega_i)\right] = \bigcup_{\text{arbitraria}} \bigcap_{\text{finita}} \left(\varphi_i \circ \psi\right)^{-1}(\omega_i),$$

y esto es un abierto de Z debido a que cada aplicación $\varphi_i \circ \psi$ es continua. □

3.3.2. Definición y propiedades elementales de la topología débil $\sigma(X, X^*)$

Sea X un espacio de Banach real y sea $f \in X^*$. Escribimos $\langle f, x\rangle = f(x)$ $(x \in X)$ y denotamos por $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ a la aplicación dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$ $(x \in X)$. Cuando f recorre X^* obtenemos una familia $\{\varphi_f\}_{f\in X^*}$ de aplicaciones de X en $\mathbb{R}$.

Definición 3.3.3. *La topología débil $\sigma(X, X^*)$ de X es la topología menos fina sobre X que hace continuas a todas las aplicaciones $\{\varphi_f\}_{f\in X^*}$.*

Proposición 3.3.4. *La topología débil $\sigma(X, X^*)$ es Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x_1, x_2 \in X$, con $x_1 \neq x_2$. La idea es construir conjuntos O_1 y O_2, abiertos en la topología débil $\sigma(X, X^*)$, de forma que $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe un hiperplano cerrado que separa $\{x_1\}$ y $\{x_2\}$ en sentido estricto; es decir, existen $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle f, x_1 \rangle < \alpha < \langle f, x_2 \rangle .$$

Definimos

$$O_1 = \left\{ x \in X : \langle f, x \rangle < \alpha \right\} = \varphi_f^{-1}\left( ]-\infty, \alpha[\right),$$

$$O_2 = \left\{ x \in X : \langle f, x \rangle > \alpha \right\} = \varphi_f^{-1}\left( ]\alpha, \infty[\right).$$

Los conjuntos O_1 y O_2 son abiertos de $\sigma(X, X^*)$ que verifican $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. □

Proposición 3.3.5. *Se obtiene una base de entornos de $x_0 \in X$ para la topología $\sigma(X, X^*)$ al considerar todos los conjuntos de la forma*

$$V = \left\{ x \in X : \left| \langle f_i, x - x_0 \rangle \right| < \varepsilon \ (i \in I) \right\},$$

donde I es finito, $f_i \in X^*$ $(i \in I)$, y $\varepsilon > 0$.

DEMOSTRACIÓN. El conjunto

$$V = \bigcap_{i \in I} \varphi_{f_i}^{-1}\left( ]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[\right),$$

con $a_i = \langle f_i, x_0 \rangle$, es un abierto para la topología $\sigma(X, X^*)$ y contiene a x_0. Adicionalmente, sea U un entorno de x_0 en $\sigma(X, X^*)$. Existe un entorno W de x_0, $W \subseteq U$, de la forma $W = \bigcap_{i \in I} \varphi_{f_i}^{-1}(\omega_i)$, con I finito y ω_i entorno de $\langle f_i, x_0 \rangle = a_i$ en $\mathbb{R}$, para cada $i \in I$. Así pues, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[\subseteq \omega_i$ para cada $i \in I$. Por tanto, $x_0 \in V \subseteq W \subseteq U$. □

Dada una sucesión $\{x_n\}$ en X, se designa por $x_n \rightharpoonup x$ la convergencia de $\{x_n\}$ a x en la topología débil $\sigma(X, X^*)$. En ocasiones se insiste diciendo «$x_n \rightharpoonup x$ débilmente en X». Nos referiremos a la topología generada por la norma como topología fuerte. Así, se dirá que «$x_n \to x$ fuertemente en X» cuando $\|x_n - x\| \to 0$.

Proposición 3.3.6. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X.*

(i) Se verifica que $x_n \rightharpoonup x$ en $\sigma(X, X^*)$ si, y sólo si, $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ $(f \in X^*)$.

(ii) Si $x_n \to x$ fuertemente en X, entonces $x_n \rightharpoonup x$ débilmente.

(iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en X, entonces $\{\|x_n\|\}$ está acotada y $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en X y si $f_n \to f$ fuertemente en X^* (es decir, $\|f_n - f\|_{X^*} \to 0$), entonces $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

DEMOSTRACIÓN. El apartado (i) resulta de la Proposición 3.3.1 y la definición de la topología débil $\sigma(X, X^*)$.

El apartado (ii) se infiere de (i), ya que $\left|\langle f, x_n - x\rangle\right| \le \|f\| \, \|x_n - x\|$.

Por (i), si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en X entonces, para cada $f \in X^*$, la sucesión $\{\langle f, x_n\rangle\}$ converge a $\langle f, x\rangle$ y, en particular, está acotada. Sigue del teorema de Banach-Steinhaus [1, Corolario II.3] que la sucesión $\{\|x_n\|\}$ está acotada. Además, fijado $f \in X^*$ se tiene

$$\left|\langle f, x_n\rangle\right| \le \|f\| \, \|x_n\|,$$

y en el límite

$$\left|\langle f, x\rangle\right| \le \|f\| \liminf \|x_n\|.$$

Del Corolario 1.4.9 se concluye que

$$\|x\| = \sup\left\{\left|\langle f, x\rangle\right| : f \in X^*, \ \|f\| \le 1\right\} \le \liminf \|x_n\|,$$

lo cual establece (iii).

Para probar (iv), escribimos

$$\left|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle\right| \le \left|\langle f_n - f, x_n\rangle\right| + \left|\langle f, x_n - x\rangle\right| \le \|f_n - f\| \, \|x_n\| + \left|\langle f, x_n - x\rangle\right|$$

y aplicamos (i) y (iii). □

Proposición 3.3.7. *Cuando X es de dimensión finita, la topología débil $\sigma(X, X^*)$ y la topología usual coinciden. En particular, una sucesión $\{x_n\}$ converge débilmente si, y solamente si, converge fuertemente.*

DEMOSTRACIÓN. La topología débil siempre tiene menos abiertos que la topología fuerte. Inversamente, debemos comprobar que todo abierto fuerte es un abierto débil. Sea $x_0 \in X$ y sea U un entorno de x_0 en la topología fuerte; hemos de construir un entorno V de x_0 en la topología débil $\sigma(X, X^*)$ tal que $V \subseteq U$. Por la Proposición 3.3.5, se trata de encontrar un subconjunto finito $\{f_i\}_{i \in I}$ de X^* y un $\varepsilon > 0$ tales que

$$V = \left\{x \in X : \left|\langle f_i, x - x_0\rangle\right| < \varepsilon \ (i \in I)\right\} \subseteq U.$$

Supongamos que $U(x_0, r) \subseteq U$, y seleccionemos una base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de X con $\|e_i\| = 1$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces todo $x \in X$ admite una representación $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, donde las aplicaciones $x \mapsto \lambda_i$ definen n funcionales lineales continuos sobre X, que denotaremos f_i

$(i = 1, 2, \ldots, n)$. Sigue que

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle f_i, x - x_0 \right\rangle\right| < n\varepsilon$$

cuando $x \in V = \left\{x \in X : \left|\left\langle f_i, x - x_0 \right\rangle\right| < \varepsilon \ (i = 1, 2, \ldots, n)\right\}$. Sin más que elegir $\varepsilon = r/n$ ya se obtiene $V \subseteq U$. □

Observación 3.3.8. *Los abiertos (respectivamente, cerrados) de la topología débil $\sigma(X, X^*)$ son también abiertos (respectivamente, cerrados) en la topología fuerte. Si X es de dimensión infinita, la topología débil $\sigma(X, X^*)$ es estrictamente menos fina que la topología fuerte, es decir, existen abiertos (respectivamente, cerrados) en la topología fuerte que no son abiertos (respectivamente, cerrados) en la topología débil. Se ofrecen a continuación dos ejemplos.*

Ejemplo 3.3.9. *Si X es de dimensión infinita, la esfera unidad $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ nunca es cerrada en la topología débil $\sigma(X, X^*)$.*

RESOLUCIÓN. Demostraremos que

$$\overline{S}^{\sigma(X,X^*)} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\},$$

donde $\overline{S}^{\sigma(X,X^*)}$ denota la clausura de S en la topología $\sigma(X, X^*)$.

Sea $x_0 \in X$, con $\|x_0\| < 1$; comprobemos que $x_0 \in \overline{S}^{\sigma(X,X^*)}$. Para ello, dado un entorno V de x_0 en $\sigma(X, X^*)$, hemos de asegurar que $V \cap S \neq \emptyset$. Se puede suponer que V es de la forma

$$V = \left\{x \in X : \left|\left\langle f_i, x - x_0 \right\rangle\right| < \varepsilon \ (i = 1, 2, \ldots, n)\right\},$$

con $\varepsilon > 0$ y $f_1, f_2, \ldots, f_n \in X^*$.

Fijemos $y_0 \in X \setminus \{0\}$ satisfaciendo

$$\left\langle f_i, y_0 \right\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Un tal y_0 existe ya que, en caso contrario, la aplicación lineal $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\varphi(z) = \left(\left\langle f_1, z \right\rangle, \left\langle f_2, z \right\rangle, \ldots, \left\langle f_n, z \right\rangle\right)$$

sería inyectiva y, por tanto, un isomorfismo de X sobre $\varphi(X)$, obligando a que $\dim X \leq n$.

La función $g(t) = \left\|x_0 + t y_0\right\|$ es continua en $[0, +\infty[$, con $g(0) < 1$ y $\lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$; luego, existe $t_0 > 0$ tal que $\left\|x_0 + t_0 y_0\right\| = 1$, así que $x_0 + t_0 y_0 \in V \cap S$. Hemos probado que

$$S \subseteq \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \subseteq \overline{S}^{\sigma(X,X^*)}.$$

Sin más que tener en cuenta que $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ es cerrado en la topología $\sigma(X, X^*)$ (como se verá con el Teorema 3.3.13), se concluye que $\overline{S}^{\sigma(X,X^*)} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. □

Ejemplo 3.3.10. *Si X es de dimensión infinita, el conjunto $U = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ nunca es abierto en la topología débil $\sigma(X, X^*)$. De hecho, el interior de U en $\sigma(X, X^*)$ es vacío.*

RESOLUCIÓN. Supongamos, para obtener una contradicción, que existen $x_0 \in U$ y un entorno V de x_0 en $\sigma(X, X^*)$ tales que $V \subseteq U$. Como acabamos de probar, V contiene una recta que pasa por x_0; pero esto contradice el hecho de que $V \subseteq U$. □

3.3.3. Topología débil, conjuntos convexos y operadores lineales

Con ayuda del Lema 3.3.11 demostraremos (Proposición 3.3.12) que al debilitar la topología de un espacio de Banach mediante $\sigma(X, X^*)$ no se pierden funcionales lineales continuos.

Lema 3.3.11. *Sea E un espacio vectorial y sean $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ una colección de $n+1$ funcionales lineales sobre E, tales que $\varphi_i(v) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ implica $\varphi(v) = 0$. Entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ satisfaciendo $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos la aplicación $\Psi : E \to \mathbb{R}^{n+1}$ poniendo

$$\Psi(u) = \big(\varphi(u), \varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)\big).$$

Como φ se anula en la intersección de los núcleos de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, resulta que $a = (1, 0, \ldots, 0)$ no pertenece al rango $\Psi(E)$ de Ψ. Es entonces posible separar estrictamente $\{a\}$ y $\Psi(E)$ por un hiperplano en $\mathbb{R}^{n+1}$, es decir, existen $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda < \alpha < \lambda\varphi(u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(u) \quad (u \in E).$$

Puesto que todo funcional lineal no idénticamente nulo es sobre, necesariamente

$$\lambda\varphi(u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(u) = 0 \quad (u \in E),$$

así que $\lambda < 0$ (y, en particular, $\lambda \neq 0$). □

Proposición 3.3.12. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal y continua para la topología $\sigma(X, X^*)$. Entonces $f \in X^*$.*

DEMOSTRACIÓN. Como f es continua para $\sigma(X, X^*)$, existe un entorno V de cero en $\sigma(X, X^*)$ tal que

$$\big|f(x)\big| < 1 \quad (x \in V). \tag{3.1}$$

Podemos suponer que V es de la forma

$$V = \{x \in X : |\langle f_i, x\rangle| < \varepsilon \ (i = 1, 2, \ldots, n)\},$$

con $f_i \in X^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y $\varepsilon > 0$. Si $\langle f_i, x\rangle = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, entonces también $\langle f_i, \lambda x\rangle = 0$ $(\lambda > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n)$, de manera que $\lambda x \in V$ $(\lambda > 0)$. Sigue de (3.1) que

$$|f(x)| < \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0),$$

obligando a que $f(x) = 0$. Ahora, el Lema 3.3.11 proporciona $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tales que $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$. Puesto que $f_i \in X^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y X^* es un espacio vectorial, se concluye que $f \in X^*$, como se pretendía. □

Todo conjunto cerrado en la topología débil $\sigma(X, X^*)$ es cerrado en la topología fuerte, aunque sabemos que el recíproco es falso en dimensión infinita (Observación 3.3.8). Sin embargo, para los conjuntos convexos ambas nociones coinciden.

Teorema 3.3.13. *Sea C un subconjunto convexo de un espacio de Banach X. Entonces C es débilmente cerrado en $\sigma(X, X^*)$ si, y solamente si, es fuertemente cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Suponemos que C es fuertemente cerrado y vamos a demostrar que es débilmente cerrado o, equivalentemente, que $X \setminus C$ es abierto en la topología $\sigma(X, X^*)$.

Dado $x_0 \notin C$, el teorema de Hahn-Banach proporciona un hiperplano cerrado que separa estrictamente $\{x_0\}$ y C. Por tanto, existen $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle f, c\rangle \quad (c \in C).$$

Poniendo

$$V = \{x \in X : \langle f, x\rangle < \alpha\}$$

encontramos que $x_0 \in V$, $V \cap C = \emptyset$ (es decir, $V \subseteq X \setminus C$), y V es abierto en $\sigma(X, X^*)$. □

Teorema 3.3.14. *Sean X e Y dos espacios de Banach, y sea T un operador lineal y continuo de X en Y. Entonces T es continuo de X con la topología débil $\sigma(X, X^*)$ en Y con la topología débil $\sigma(Y, Y^*)$. También se verifica el recíproco.*

DEMOSTRACIÓN. Según la Proposición 3.3.2, basta probar que para toda $f \in Y^*$ la aplicación $x \mapsto \langle f, Tx\rangle$ es continua de X con la topología débil $\sigma(X, X^*)$ en $\mathbb{R}$. Pero la aplicación $x \mapsto \langle f, Tx\rangle$ es un funcional lineal y continuo sobre X, y por tanto también es continua al considerar sobre X la topología débil $\sigma(X, X^*)$.

Recíprocamente, supongamos que T es lineal y continuo de X en Y, cuando ambos espacios están provistos de sus respectivas topologías débiles. Entonces el grafo de T, $G(T)$, es cerrado en

$X \times Y$ para la topología $\sigma(X \times Y, (X \times Y)^*)$, y *a fortiori* $G(T)$ será cerrado en $X \times Y$ para la topología fuerte. El teorema del grafo cerrado [1, Teorema II.7] permite concluir que T es continuo de X en Y, cuando ambos espacios están provistos de sus topologías fuertes. $\square$

Observación 3.3.15. *Un razonamiento análogo al de la demostración del Teorema 3.3.14 prueba que si T es lineal y continuo de X con su topología fuerte en Y con su topología débil, entonces T es continuo de X en Y, provistos ambos de sus topologías fuertes.*

3.3.4. La topología débil* $\sigma(X^*, X)$

Sea X un espacio de Banach real, sea X^* su dual dotado de la norma de funcionales

$$\|f\| = \sup\{|\langle f, x\rangle| : x \in X,\ \|x\| \le 1\} \quad (f \in X^*),$$

y sea X^{**} su bidual, es decir, el dual de X^*, dotado de la norma

$$\|\xi\| = \sup\{|\langle \xi, f\rangle| : f \in X^*,\ \|f\| \le 1\} \quad (\xi \in X^{**}).$$

Se tiene una inyección canónica $J : X \to X^{**}$ definida de la siguiente manera. Para cada $x \in X$ fijo, la aplicación $f \mapsto \langle f, x\rangle$ de X^* en $\mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo sobre X^*, es decir, un elemento de X^{**}, llamado funcional evaluación en x. Ponemos

$$\langle Jx, f\rangle_{X^{**}, X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*, X} \quad (x \in X,\ f \in X^*).$$

Claramente, J es una isometría lineal, es decir, $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ para todo $x \in X$; en efecto, el Corolario 1.4.9 permite escribir:

$$\|Jx\| = \sup\{|\langle Jx, f\rangle| : f \in X^*,\ \|f\| \le 1\} = \sup\{|\langle f, x\rangle| : f \in X^*,\ \|f\| \le 1\} = \|x\|.$$

La inyección canónica J permite identificar X con un subespacio de X^{**}. Puede ocurrir que J no sea sobreyectiva; cuando lo es, se dice que X es reflexivo.

Sobre el espacio X^* están definidas dos topologías:

- la topología fuerte asociada a la norma de X^*, y
- la topología débil $\sigma(X^*, X^{**})$.

Ahora vamos a dotar a X^* de una tercera topología, la topología débil* $\sigma(X^*, X)$, de la siguiente manera. Para cada $x \in X$ consideramos la aplicación $\varphi_x : X^* \to \mathbb{R}$ definida por $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle$. Cuando x recorre X obtenemos una familia de aplicaciones $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ de X^* en $\mathbb{R}$.

Definición 3.3.16. *La topología débil*, denotada por* $\sigma(X^*, X)$*, es la topología menos fina sobre* X^* *que hace continuas a todas las aplicaciones* $\{\varphi_x\}_{x\in X}$.

En otras palabras, $\sigma(X^*, X)$ es la topología menos fina sobre X^* que hace continuos a todos los funcionales evaluación $\{Jx\}_{x\in X}$.

Como $X \subseteq X^{**}$, resulta que la topología $\sigma(X^*, X)$ es menos fina que la topología $\sigma(X^*, X^{**})$. O lo que es lo mismo, la topología $\sigma(X^*, X)$ posee menos abiertos (respectivamente, cerrados) que la topología $\sigma(X^*, X^{**})$, la cual, a su vez, posee menos abiertos (respectivamente, cerrados) que la topología fuerte.

Observación 3.3.17. *La razón de este interés por empobrecer las topologías radica en que si una topología posee menos abiertos entonces también posee más compactos, y los conjuntos compactos desempeñan un papel importante cuando se trata de establecer teoremas de existencia. Por ejemplo, la bola unidad de* X^* *tiene la notable propiedad de ser compacta para la topología débil** $\sigma(X^*, X)$*. Este resultado se conoce como teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Teorema 3.3.23).*

Proposición 3.3.18. *La topología débil** $\sigma(X^*, X)$ *es Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Sean f_1 y f_2 en X^*, con $f_1 \neq f_2$. Existe entonces un $x \in X$ tal que $\langle f_1, x\rangle \neq \langle f_2, x\rangle$. Supongamos que $\langle f_1, x\rangle < \langle f_2, x\rangle$, e introduzcamos $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f_1, x\rangle < \alpha < \langle f_2, x\rangle.$$

Poniendo

$$O_1 = \{f \in X^* : \langle f, x\rangle < \alpha\} = \varphi_x^{-1}(]-\infty, \alpha[),$$

$$O_2 = \{f \in X^* : \langle f, x\rangle > \alpha\} = \varphi_x^{-1}(]\alpha, +\infty[),$$

encontramos que O_1 y O_2 son abiertos en $\sigma(X^*, X)$ verificando $f_1 \in O_1$, $f_2 \in O_2$, y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. □

Proposición 3.3.19. *Se obtiene una base de entornos de un punto* $f_0 \in X^*$ *para la topología* $\sigma(X^*, X)$ *al considerar todos los conjuntos de la forma*

$$V = \{f \in X^* : |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon \ (i \in I)\},$$

donde I *es finito,* $x_i \in X$ $(i \in I)$*, y* $\varepsilon > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Es idéntica a la de la Proposición 3.3.5. □

Dada una sucesión $\{f_n\}$ en X^*, se designa con $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ la convergencia de $\{f_n\}$ a f en la topología débil* $\sigma(X^*, X)$. Para evitar confusiones, se precisa a menudo «$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(X^*, X)$», «$f_n \rightharpoonup f$ en $\sigma(X^*, X^{**})$», y «$f_n \to f$ fuertemente».

Proposición 3.3.20. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión en X^*.*

(i) Se verifica que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(X^*, X)$ si, y sólo si, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ $(x \in X)$.

(ii) Si $f_n \to f$ fuertemente, entonces $f_n \rightharpoonup f$ en $\sigma(X^*, X^{**})$.

(iii) Si $f_n \rightharpoonup f$ en $\sigma(X^*, X^{**})$, entonces $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(X^*, X)$.

(iv) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(X^*, X)$, entonces el conjunto $\{\|f_n\|\}$ está acotado y $\|f\| \le \liminf \|f_n\|$.

(v) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(X^*, X)$ y si $x_n \to x$ fuertemente en X, entonces $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

DEMOSTRACIÓN. Es similar a la de la Proposición 3.3.6. □

Observación 3.3.21. *Cuando X es de dimensión finita, las tres topologías: fuerte, débil $\sigma(X^*, X^{**})$, y débil* $\sigma(X^*, X)$, coinciden sobre X^*. En efecto, J es entonces sobreyectiva de X sobre X^{**}, pues* $\dim X = \dim X^* = \dim X^{**}$, *y, por tanto, $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$.*

Proposición 3.3.22. *Sea $\varphi : X^* \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal y continua para la topología $\sigma(X^*, X)$. Entonces existe $x \in X$ tal que*

$$\varphi(f) = \langle f, x\rangle = \varphi_x(f) \quad (f \in X^*).$$

DEMOSTRACIÓN. Es análoga a la de la Proposición 3.3.12. Como φ es continua respecto de $\sigma(X^*, X)$, para algún entorno V de cero en $\sigma(X^*, X)$ se tiene

$$\left|\varphi(f)\right| < 1 \quad (f \in V). \tag{3.2}$$

Podemos suponer que V es de la forma

$$V = \left\{f \in X^* : \left|\langle f, x_i\rangle\right| < \varepsilon \ (i = 1, 2, \ldots, n)\right\},$$

con $x_i \in X$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y $\varepsilon > 0$. Si $\langle f, x_i\rangle = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, entonces también $\langle \lambda f, x_i\rangle = 0$ $(\lambda > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n)$, de manera que $\lambda f \in V$ $(\lambda > 0)$. Sigue de (3.2) que

$$\left|\varphi(f)\right| < \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0),$$

obligando a que $\varphi(f) = 0$. Ahora, el Lema 3.3.11 proporciona $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tales que

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, x_i\rangle = \left\langle f, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\rangle \quad (f \in X^*),$$

como se pretendía. □

Concluimos enunciando el siguiente resultado central de la teoría de la dualidad, aunque omitimos su demostración por exceder el alcance del trabajo. Para comprender la importancia fundamental de la topología $\sigma(X^*, X)$ y del Teorema 3.3.23 debe recordarse el hecho de que la bola unidad cerrada de un espacio normado de dimensión infinita nunca es compacta en la topología fuerte [6, Teorema 1.22].

Teorema 3.3.23 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *La bola unidad cerrada de* X^**,*

$$B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \le 1\},$$

*es compacta en la topología débil** $\sigma(X^*, X)$.

DEMOSTRACIÓN. Véase, por ejemplo, [1, Teorema III.15]. □

CAPÍTULO 4

Conclusiones y prospectiva

4.1. Conclusiones

Junto con los teoremas de Banach-Steinhaus, la aplicación abierta y el grafo cerrado, el teorema de Hahn-Banach constituye uno de los cuatro pilares fundamentales del análisis funcional lineal. En síntesis, el teorema de Hahn-Banach permite asegurar la existencia, sobre un espacio vectorial o un espacio normado, de funcionales lineales que satisfagan cualquier propiedad «razonable», sin más que construir un subespacio adecuado, definir un funcional sobre ese subespacio verificando las condiciones requeridas y aplicar un teorema de extensión, ya sea el de extensión mayorada (frecuentemente con ayuda del funcional de Minkowski) o el de extensión continua. A lo largo de los capítulos 1 y 2 de la memoria hemos tenido ocasión de encontrar numerosos ejemplos de este procedimiento.

La riqueza del teorema de Hahh-Banach como generador de funcionales hace que dicho teorema se encuentre en la base de la teoría de la dualidad de espacios normados, la cual es a su vez importante porque muchas propiedades de un espacio normado tienen su reflejo e, incluso, se estudian mejor, en el espacio dual que en el primal. Una pequeña muestra de estas propiedades está constituida por los resultados sobre dualidad de subespacios y teoría de la aproximación recogidos al comienzo del capítulo 3.

Los funcionales lineales continuos en un espacio normado se usan para definir el espacio dual y las topologías débil y débil* tanto del propio espacio como de su dual. Es evidente que se necesitan suficientes funcionales para obtener un dual y unas topologías interesantes; por otra parte, en muchas aplicaciones prácticas la topología débil de un espacio normado es más adecuada que su topología fuerte, porque tiene más compactos, y los compactos dan lugar a varios teoremas de existencia en diversos campos de las matemáticas. El teorema de Hahn-Banach implica, por ejemplo, que el dual de un espacio normado no trivial es también no trivial, que la topología débil es Hausdorff, o que todo espacio normado es isométricamente isomorfo a un subespacio de su bidual (que es un espacio de Banach, lo cual, sin ir más lejos, proporciona una demostración inmediata del hecho de que todo espacio normado admite una compleción). El capítulo 3 de la memoria ilustra la forma en que dicho teorema, y particularmente sus versiones de separación, permiten obtener estas y otras propiedades del espacio dual y de las topologías débil y débil*.

El teorema de Hahn-Banach también encuentra aplicación en otros problemas del análisis aparentemente no relacionados con la generación de funcionales lineales, como pueden ser las consecuencias del teorema de extensión equinórmica descritas al final del capítulo 1.

4.2. Prospectiva

La presente memoria recoge solamente una parte muy pequeña del potencial del teorema de Hahn-Banach, de manera que el campo que se abre ante quien desee profundizar en su estudio es inmenso. Aquí nos hemos limitado a considerar los aspectos básicos de dicho teorema en espacios vectoriales y normados, pero la literatura contiene muchas otras formulaciones del mismo en diversos ambientes: espacios vectoriales topológicos, retículos vectoriales, módulos, álgebras de Boole, grupos, semigrupos, …. También se ha discutido la vinculación del teorema de Hahn-Banach con cuestiones relacionadas con los fundamentos de las matemáticas: axioma de elección, existencia de conjuntos no medibles Lebesgue, paradoja de Banach-Tarski, …. El impacto de este importante resultado alcanza a otras áreas de las matemáticas, tales como la ya mencionada teoría de la aproximación, la optimización, el análisis complejo, las ecuaciones en derivadas parciales o la teoría ergódica; e, incluso, a otras disciplinas, entre las que cabe citar las finanzas, la termodinámica o la mecánica de fluidos. Sin pretensiones de exhaustividad, para dar una idea de estas aplicaciones remitimos a [2, 4, 8] y a las referencias que allí se citan, aunque una mera búsqueda en internet ya arroja abundante bibliografía.

Apéndice: Póster

The Hahn-Banach theorem

Remedios Marina Díaz Gil
Universidad de La Laguna

Contact Information:
Facultad de Ciencias
Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna (Tenerife), Spain

Email: alu0100709322@ull.edu.es

Universidad de La Laguna

Abstract

The theorem that we nowadays call «of Hahn-Banach» is a cornerstone of linear functional analysis. In the mathematical literature three variants of the Hahn-Banach theorem are commonly encountered, two of them corresponding to the analytical version (dominated extension theorem in linear spaces and continuous extension theorem in normed spaces), and the third one to the geometric version (the separation theorem, both in linear and normed spaces). The objective of this work is to state and prove rigorously these three versions and discuss some variants, special cases, consequences, and applications of such results.

Introduction

The theorem nowadays called after Hans Hahn (1879-1934) and Stefan Banach (1892-1945) is located at the base of the duality theory and therefore constitutes a cornerstone of linear functional analysis. The impact of this important result reaches other areas of mathematics, such as approximation theory, optimization, complex analysis, partial differential equations or ergodic theory – and even other disciplines, including finance, thermodynamics or fluid mechanics.

In the mathematical literature, it is common to find three variants of the Hahn-Banach theorem, two of them corresponding to the analytical version (dominated extension theorem in linear spaces and continuous extension theorem in normed spaces), and the third one to the geometric version (the separation theorem, both in linear and normed spaces), but many other versions have been formulated in several environments: topological vector spaces, vector lattices, modules, Boolean algebras, groups, semigroups, and so on.

Figure 1: H. Hahn (1879-1934)

Figure 2: S. Banach (1892-1945)

Objectives and working plan

The objective of this work is to state and prove rigorously the three more common versions of the theorem and discuss some variants, special cases, consequences, and applications of these results.

Specifically, Chapter 1 is devoted to the analytical forms of the Hahn-Banach theorem. Here, the dominated extension theorem and the continuous extension theorem are gathered along with two applications of the latter, to operator theory and to the problem of existence of complementary subspaces.

Chapter 2 focuses on the geometric version of the Hahn-Banach theorem. It deals with the general separation theorem of convex sets by hyperplanes in vector spaces. After deriving some important consequences for normed spaces, the chapter concludes by observing that in finite-dimensional spaces no restrictive hypotheses are needed in order to achieve separation.

Chapter 3 shows how the Hahn-Banach theorem allows to delve into the study of duality in normed spaces. After characterizing the dual of a subspace, this result is transcribed in terms of best approximation in the dual space, and useful dual characterizations of the closure of a subspace and of dense subspaces are given. The chapter closes by introducing the weak and weak* topologies and recalling their first properties, including the celebrated Banach-Alaoglu-Bourbaki theorem.

1 Analytical version

1.1 The dominated extension theorem

Theorem 1.1 (Hahn 1927, Banach 1929). *Let X be a vector space equipped with a function $\nu : X \to \mathbb{R}$ satisfying:*

$$\nu(x+y) \le \nu(x) + \nu(y) \quad (x, y \in X);$$

$$\nu(rx) = r\nu(x) \quad (r \in \mathbb{R}_+,\ x \in X).$$

Let M be a vector subspace of X and g a linear functional in M such that:

$$\Re g(m) \le \nu(m) \quad (m \in M).$$

Then there exists a linear functional f in X which extends g, i.e., $f(m) = g(m)$ $(m \in M)$, and is still dominated by ν:

$$\Re f(x) \le \nu(x) \quad (x \in X).$$

In particular, if ν is a seminorm in X, then

$$|f(x)| \le \nu(x) \quad (x \in X).$$

1.2 The continuous extension theorem

Theorem 1.2. *Let X be a normed space, M a subespace of X and $g \in M^*$. Then there exists $f \in X^*$ such that f extends g and $\|f\| = \|g\|$.*

Corollary 1.3. *Given a normed space X and vectors $x, y \in X$ with $x \neq y$, there exists $f \in X^*$ such that $f(x) \neq f(y)$.*

Corollary 1.4. *For every x_0 in a normed space X, there exists $f \in X^*$ satisfying $\|f\| = 1$ and $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Corollary 1.5. *If X is a normed space, then*

$$\|x\| = \max\{|f(x)| : f \in X^*,\ \|f\| \le 1\} \quad (x \in X).$$

1.3 Further consequences of the continuous extension theorem

Corollary 1.6. *Let $X \neq \{0\}$ and Y be normed spaces. If the operator space $L(X,Y)$ is complete, then so is Y.*

Corollary 1.7. *Every finite-dimensional subspace of a normed space X is complemented in X.*

2 Geometric version

2.1 Separation in linear spaces

Theorem 2.1. *Let X be a linear space and let A, B be non-empty, disjoint convex subsets of X. Suppose that there exists $a_0 \in A$ such that $A - a_0$ is absorbing. Then some $f \in X^* \setminus \{0\}$ separates A from B, i.e.,*

$$\sup \Re f(A) \le \inf \Re f(B).$$

2.2 Separation in normed spaces

Definition 2.2. *A subset U of a linear space X is absorbing provided that to every $x \in X$ there corresponds $\rho > 0$ such that $x \in \rho U$.*

Corollary 2.3. *Let X be a normed space and let A, B be convex subsets of X. Assume that $B \neq \emptyset$, $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ and $\operatorname{int}(A) \cap B = \emptyset$. There exist $f \in X^* \setminus \{0\}$ and $\gamma \in \mathbb{R}$ satisfying*

$$\Re f(a) \le \gamma \le \Re f(b) \quad (a \in A,\ b \in B).$$

Actually, $\Re f(a) \le \gamma$ $(a \in \operatorname{int}(A))$.

Corollary 2.4. *Let A, B be nonempty, closed, convex subsets of a normed space X such that $d(A,B) = \rho > 0$. Then there exist $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, and $\gamma \in \mathbb{R}$ for which*

$$\Re f(a) \le \gamma \le \gamma + \rho \le \Re f(b) \quad (a \in A,\ b \in B).$$

2.3 Finite-dimensional spaces

Corollary 2.5. *Let A, B be nonempty, closed, convex subsets of $\mathbb{R}^N$. There exists a linear functional on $\mathbb{R}^N$ which separates A from B.*

3 Duality in normed spaces

3.1 Some approximation results

Corollary 3.1. *Let X be a normed space with dual X^*, let M be a subspace of X, and let*

$$M^\perp = \{f \in X^* : f(M) = \{0\}\}$$

be the annihilator of M. Then $M^* \equiv X^*/M^\perp$.

Corollary 3.2. *Let X be a normed space with dual X^*, and let M be a subspace of X. For every $f \in X^*$, there holds:*

$$\min\left\{\|f - h\| : h \in M^\perp\right\} = \sup\{|f(m)| : m \in M,\ \|m\| = 1\}.$$

Corollary 3.3. *If M is a subspace of a normed space X, then*

$$\overline{M} = \bigcap_{f \in M^\perp} \operatorname{Ker}(f).$$

Corollary 3.4. *A subspace M of a normed space X is dense in X if, and only if, $M^\perp = \{0\}$.*

3.2 Weak and weak* topologies

Throughout this section, X denotes a real Banach space.

3.2.1 The topology $\sigma(X, X^*)$

Definition 3.5. *The weak topology $\sigma(X, X^*)$ is the weakest topology on X that makes all functionals in X^* continuous.*

Proposition 3.6. *The topology $\sigma(X, X^*)$ is Hausdorff. A local basis at $x_0 \in X$ for the topology $\sigma(X, X^*)$ is given by all sets*

$$V = \{x \in X : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon\ (i \in I)\},$$

where I is finite, $f_i \in X^*$ $(i \in I)$, and $\varepsilon > 0$. The dual of $(X, \sigma(X, X^*))$ is X^*.

Theorem 3.7. *Let C be a convex subset of X. Then C is $\sigma(X, X^*)$-closed if, and only if, C is norm-closed.*

3.2.2 The topology $\sigma(X^*, X)$

Proposition 3.8. *Set $\langle f, x\rangle = f(x)$ $(x \in X,\ f \in X^*)$. The canonical injection $J : X \to X^{**}$, given by*

$$\langle Jx, f\rangle_{X^{**}, X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*, X} \quad (x \in X,\ f \in X^*),$$

is a linear isometry from X onto $J(X)$.

Definition 3.9. *The weak* topology $\sigma(X^*, X)$ is the weakest topology on X^* that makes all functionals $\{Jx\}_{x \in X}$ continuous.*

Proposition 3.10. *The weak* topology $\sigma(X^*, X)$ is Hausdorff. A local basis for $f_0 \in X^*$ in the topology $\sigma(X^*, X)$ is given by all sets*

$$V = \{f \in X^* : |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon\ (i \in I)\},$$

where I is finite, $x_i \in X$ $(i \in I)$, and $\varepsilon > 0$. The dual of $(X^*, \sigma(X^*, X))$ is $\{Jx\}_{x \in X}$.

Theorem 3.11. *(Banach-Alaoglu-Bourbaki). The closed unit ball of X^*,*

$$B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \le 1\},$$

is $\sigma(X^*, X)$-compact.

Conclusions

The Hahn-Banach theorem ensures the existence, on a linear space or a normed space, of linear functionals satisfying any «reasonable» property. This is accomplished just by building a suitable subspace, defining a linear functional which meets the required conditions on this subspace, and applying either the dominated extension theorem or the continuous extension one.

Prospective

This report reflects only a very small portion of the potential of the Hahn-Banach theorem. The literature contains formulations of this theorem in environments other than linear and normed spaces. The impact of the Hahn-Banach theorem reaches many areas within mathematics, such as the above-mentioned approximation theory, optimization, complex analysis, partial differential equations or ergodic theory (even some links of this important result with the foundations of mathematics have been explored), and also outside them, including finance, thermodynamics or fluid mechanics.

References

[1] H. Brezis: *Análisis Funcional*. Alianza Universidad Textos, 1984.

[2] I. Marrero: *Problemas de Análisis Real y Funcional*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna, 1991.

[3] R. Payá: *Apuntes de Análisis Funcional*. [Disponible en http://www.ugr.es/ rpaya/cursosanteriores.htm].

[4] W. Rudin: *Análisis Funcional*. Reverté, 1973.

[5] W. Rudin: *Análisis Real y Complejo* (3ª. ed.). McGraw-Hill, 1988.

Acknowledgements

This Final Degree Project in Mathematics has been done under the supervision of Dr. María Isabel Marrero Rodríguez during the academic year 2014/15. The pictures of H. Hahn and S. Banach displayed above have been taken from the MacTutor History of Mathematics archive [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/].

Índice alfabético

Bibliografía

[1] H. Brezis: *Análisis Funcional*. Alianza Universidad Textos, 1984.

[2] F.R. Deutsch, P.H. Maserick: Applications of the Hahn-Banach theorem in approximation theory. *SIAM Review* **9** (2006), no. 3, 516–530.

[3] I. Marrero: *Problemas de Análisis Real y Funcional*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna, 1991.

[4] L. Narici, E. Beckenstein: The Hahn-Banach theorem: the life and times. *Topology and its Applications* **77** (1977), 193–211.

[5] R. Payá: *Apuntes de Análisis Funcional*. [Disponible en http://www.ugr.es/~rpaya/cursosanteriores.htm].

[6] W. Rudin: *Análisis Funcional*. Reverté, 1973.

[7] W. Rudin: *Análisis Real y Complejo* (3ª. ed.). McGraw-Hill, 1988.

[8] M.A. Sofi: Some problems in functional analysis inspired by Hahn-Banach type theorems. *Annals of Functional Analysis* **5** (2014), no. 2, 1–29.