



Universidad
de La Laguna

Técnicas de Optimización Combinatoria para la gestión de plaquetas en el ICHH

*Techniques of Combinatorial Optimization for the management of
blood platelets at the ICHH*

José Daniel Pascual Triana

Trabajo de Fin de Grado

Optimización Combinatoria

Facultad de Ciencias, Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

La Laguna, 17 de julio de 2015

Dr. D. **Juan José Salazar González**, con N.I.F. 43.356.435-D Catedrático Titular de Universidad adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna

C E R T I F I C A

Que la presente memoria titulada:

“Técnicas de Optimización Combinatoria para la gestión de plaquetas en el ICHH.”

ha sido realizada bajo su dirección por D. **José Daniel Pascual Triana**, con N.I.F. 54.112.807-V.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 17 de julio de 2015

Agradecimientos

A mi familia y amigos,
por toda la ayuda y el apoyo que me han prestado a lo largo de mi vida.
A D. Juan José Salazar González
tutor de este trabajo, por la ayuda que prestó en su desarrollo.

Resumen

Uno de los grandes problemas para las instituciones médicas es la gestión de los productos perecederos para evitar pérdidas por caducidad. En concreto, el Instituto Canario de Hemodonación y Hemoterapia (ICHH) tiene que lidiar con una variedad de derivados sanguíneos, entre los que se encuentran las plaquetas. En este trabajo se explica inicialmente cómo funciona el Instituto y las pruebas que deben hacer con el fin de obtener las plaquetas, para pasar a comentar los tipos de planificación y su relación con la Investigación Operativa.

En este contexto, el presente documento aborda dos problemas, minimizar el desperdicio y minimizar los costos totales, que están enfocados a la gestión de las plaquetas en dicha institución. Se propondrán modelos para resolverlos, así como varias modificaciones de cada uno de forma que se asemejen paulatinamente a la situación real.

La complejidad de la modelización se incrementa por el hecho de que las demandas en este ámbito no son fijas o conocidas, por lo que se deben adaptar los modelos de forma que ello no influya negativamente. Una vez adaptados los modelos, se desarrollan simulaciones con datos ficticios para descubrir cómo se comportan. Al final se trabaja con datos reales de demanda del ICHH, tratando de discernir las distribuciones estadísticas que puedan seguir los datos para simular los modelos en circunstancias reales y poder sacar conclusiones sobre el funcionamiento de los modelos propuestos.

Palabras clave: Gestión de inventario, productos perecederos, plaquetas, demandas no determinísticas

Abstract

One of the main problems for medical institutions is the management of perishable goods to avoid losses by expiration. As an example, the Canarian Institute of Blood Donation and Hemotherapy (ICHH) has to deal with a variety of blood products, including blood platelets. In this paper the activities developed by this Institute are first described, including the series of necessary tests in order to obtain the blood platelets. Afterwards, we discuss planning strategies and its relationship with Operational Research.

In this context, this paper addresses two problems, how to minimize waste and minimizing total costs, focusing on the management of blood platelets by the institution. Furthermore, models are proposed to cope with these challenges, including a fine-tuning process with various modifications so as to gradually resemble the real situation.

The complexity of the modeling is increased by the fact that the demands in this area are not fixed or known, so these models must be adapted in order to not generate negative consequences. Once the models are polished, simulations are developed with dummy data to discover how they behave. Finally, real demand data from the ICCH is used, trying to discern the statistical distributions that may follow the data, in order to simulate the models in real circumstances and to draw conclusions on the operation of the proposed models.

Keywords: *Inventory management, perishable goods, blood platelets, non-deterministic demands*

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Recolección y tipificación de la sangre	1
1.2. Derivados sanguíneos	2
1.3. Planificación	4
1.4. Breve introducción a los modelos de Optimización Combinatoria	5
1.5. Objetivos del Trabajo de Fin de Grado	6
2. Modelo 1: desperdicio mínimo	8
2.1. Constantes	8
2.2. Variables	8
2.3. Preliminares	8
2.4. Función Objetivo	9
2.5. Implementación del modelo	9
2.6. Resultados	10
2.7. Variaciones del Problema	11
2.7.1. Tamaño diario de producción limitado	11
2.7.2. Tamaño de almacenamiento limitado	12
2.7.3. Separación por grupos sanguíneos	12
2.7.4. Días sin producción	13
2.7.5. Demandas no fijadas de antemano	13
3. Modelo 2: costo total mínimo	15
3.1. Constantes	15
3.2. Variables	15
3.3. Preliminares	16
3.4. Función Objetivo	16
3.5. Implementación del modelo	17
3.6. Resultados	17
3.7. Variaciones del Problema	20
3.7.1. Tamaño diario de producción limitado	20
3.7.2. Tamaño de almacenamiento limitado	20
3.7.3. Separación por grupos sanguíneos	20
3.7.4. Días sin producción	21

3.7.5.	Abastecimiento de múltiples hospitales	21
3.7.6.	Deterioro diario del material	23
3.7.7.	Demandas no fijadas de antemano	23
4.	Modelo 3: Obtención del nivel de inventario óptimo analíticamente	25
5.	Aplicación del modelo 2 a la generación de plaquetas en el ICHH	32
6.	Conclusiones	37
7.	Anexos	40

Capítulo 1

Introducción

En el sistema de salud hay una constante necesidad de multitud de productos: medicamentos, material sanitario, maquinaria, etc. Los bancos de sangre, como indica su nombre, se encargan de una rama de esos productos: la sangre humana. Este bien no dura mucho tiempo, pues tras una cierta cantidad de días caduca y pierde todo su valor. Además, cuando no se dispone de este material en el momento que es requerido, las consecuencias pueden ser graves, ya sea por la complicación en la intervención quirúrgica para la que no hay producto o simplemente el retraso y sus consecuentes gastos en el caso de que la persona deba mantenerse hospitalizada hasta que haya material suficiente.

La obtención de la sangre y sus derivados sigue un proceso. Primero, ésta debe ser adquirida en una unidad móvil de recolección de sangre o en alguno de los puntos fijos que se dedican a ese fin, según la cantidad de sangre que sea necesaria para los diferentes hospitales de la zona. Posteriormente, es sometida a varias pruebas de tipificación y es separada en sus componentes, de los que hablaremos más tarde. Hecho esto, ya puede ser trasladada a los bancos de sangre de los distintos hospitales donde pasará a estar disponible para cumplir la demanda de los pacientes.

1.1. Recolección y tipificación de la sangre

En cuanto a los lugares dedicados a la donación de sangre, en Canarias, el Instituto Canario de Hemodonación y Hemoterapia (ICHH) cuenta tanto con localizaciones fijas repartidas por las islas (17 en total) como con un servicio de hemodonación itinerante, que consiste en un camión que se coloca en cierta zona (que puede variar) y recoge la sangre en la calle [1]. Si bien hay un listado de localizaciones frecuentes para la donación itinerante de sangre, éste no es exhaustivo, dado que a veces se realizan campañas especiales en zonas de gran afluencia, como las distintas facultades, que no están recogidas.

En lo que respecta a las donaciones, suelen realizarse por distintos medios: con gente que voluntariamente se ha comprometido a donar en torno a una fecha (programadas), las personas que se acercan a las localizaciones que comentábamos para donar sin estar “inscritos” (no programadas), los conjuntos de donantes que acuden por las llamadas de urgencia por necesidad de sangre (ya sea por algún familiar intervenido o por comunicados

de prensa donde se piden donaciones urgentes, por ejemplo) [5]. A esto hay que añadir las visitas en fechas estipuladas de las unidades móviles a institutos, universidades y polígonos industriales, entre otros. Además, no todos los que quieren donar pueden hacerlo, ya que ciertas circunstancias pueden impedirlo: hay que pesar más de 50 kg, no haber consumido alcohol muy recientemente, estar en buen estado de salud (por ejemplo, no estar tomando antibióticos), no haber sufrido hepatitis B o C, tener más de 18 años, no usar insulina en el caso de tener diabetes, no haber donado en los últimos 2 meses, no haber sido sometido a intervenciones quirúrgicas recientes y no haber residido en el Reino Unido durante más de 1 año entre 1980 y 1996 o haber recibido transfusiones de sangre de ese país [2].

La sangre generalmente se recolecta en bolsas de 450 cc, ya que por ley no se puede extraer más de un 13 % del volumen total de sangre de una persona y esa sería la cantidad máxima para una que pese unos 50 kg [2]. En lo que respecta a su tipificación, cabe notar que la sangre de distintas personas no siempre es similar, así que hay ocho grupos sanguíneos principales: AB⁻, AB⁺, A⁻, A⁺, B⁻, B⁺, 0⁻ y 0⁺. Esta distinción se debe a las diferencias en cuanto a los antígenos presentes en la sangre (división en A, B, AB y 0), así como la presencia de unas ciertas proteínas en la membrana celular de los glóbulos rojos o hematíes (el Rh, que puede ser negativo si no están presentes o positivo en caso contrario). Además, estos grupos sanguíneos no están equidistribuidos, es decir, que el porcentaje de personas con cada grupo no es similar. En la siguiente tabla podemos observar cómo es esta distribución en Canarias según los datos del ICHH de 2011 [1].

Tipo de sangre	0 ⁻	0 ⁺	A ⁻	A ⁺	B ⁻	B ⁺	AB ⁻	AB ⁺
Porcentaje del total	6.8 %	38.3 %	6.0 %	34.0 %	1.5 %	8.5 %	0.7 %	4.2 %

Cuadro 1.1: Porcentaje de personas con cada grupo sanguíneo

En general, los bancos de sangre mantienen un stock de algunos de estos grupos sanguíneos, si no de todos ellos, para poder satisfacer la demanda diaria y tratando de evitar la caducidad en la medida de lo posible. Además, no se suele conocer el grupo sanguíneo del donante hasta que se hace la tipificación, por lo que alcanzar a abastecer a los hospitales de las cantidades necesarias de cada grupo sanguíneo es complicado.

1.2. Derivados sanguíneos

Se comentarán ahora los derivados sanguíneos que se obtienen a partir del recurso donado. La sangre que se saca directamente del donante es denominada sangre entera. Al separar esta sangre podemos conseguir varios componentes: glóbulos rojos (también llamados eritrocitos o hematíes), plasma sanguíneo, plaquetas, crioprecipitados, etc [1,2,5, 7]. De hecho, sólo en un muy bajo porcentaje de las transfusiones efectuadas en los hospitales se hace uso de sangre entera, frente a estas subdivisiones de ella. Se hablará a continuación brevemente de cada uno de sus componentes:

- **Concentrado de hematíes:** este producto se obtiene mediante el centrifugado inicial de la sangre entera o por la precipitación de las células rojas del plasma. Se usa fundamentalmente en pacientes con síntomas asociados a la falta de capacidad de transporte de oxígeno, así como para transfusiones y para recobrar el volumen de sangre tras alguna hemorragia. Tiene una duración máxima de 42 días refrigerada. Sin embargo, también puede ser congelada, en cuyo caso dura incluso varios años, pese a que al descongelarla vuelve a ser perecedera y dura entre un día y dos semanas. Para poder congelarla evitando los efectos nocivos que conlleva, se incorpora glicerol a las células, por lo que además deben pasar por un proceso de limpieza tras descongelarlas y previo a utilizarlas. Esta práctica gasta tiempo y dinero (cuadruplica el coste por unidad de las que no han sido congeladas), aunque se ha observado que las células que han sido congeladas pueden transportar más oxígeno que las que no, por lo que depende del hospital decidir si se quiere hacer uso de ellas.
- **Plasma sanguíneo:** este producto se refiere a la fracción líquida y acelular de la sangre. Al separar la sangre mediante centrifugación o sedimentación obtenemos este recurso de la porción clara y anticoagulada de la sangre. Contiene, entre otras sustancias, las proteínas asociadas a la coagulación. Debe ser obtenido pronto, a lo sumo en 5 días desde que se toma la sangre. Este recurso puede ser utilizado como inmunoglobulina para tratar enfermedades inmunológicas, tratar insuficiencias respiratorias, contribuir a la coagulación en casos de hemorragia como la hemofilia, y ayudar con los procesos de curación relativos a cirugías y heridas graves. Es el componente más duradero (con diferencia) y suele mantenerse congelado (pudiendo aguantar hasta 2 años). Debido a que tarda al menos 20 minutos en descongelarse y esto podría ser fatal en caso de emergencia, también se mantiene una cierta cantidad de plasma sanguíneo descongelado (aunque refrigerado igualmente) y dura 5 días. El plasma que se ha congelado en menos de 8 horas desde la obtención de la sangre entera recibe, además, el nombre de plasma fresco congelado.
- **Plaquetas:** estas células, más pequeñas que los glóbulos rojos, intervienen en la coagulación de las heridas y contribuyen a reparar los vasos sanguíneos dañados. Por lo tanto, se usan en pacientes con hemorragias y problemas de sangrado, así como para el tratamiento del cáncer. Podemos distinguir dos tipos:
 - **Plaquetas aleatorias:** previamente separadas de una unidad de sangre entera, se encuentran en forma de concentrado con una pequeña porción del plasma original.
 - **Plaquetas de aféresis:** Estas plaquetas se han obtenido mediante otro proceso diferente, la aféresis, que consiste en conectar por vía venosa al paciente a una máquina que separa las células de la sangre, selecciona y almacena las que se deseen recolectar para devolver las demás al torrente sanguíneo junto con el plasma.

Ambos tipos de plaquetas tienen una duración muy reducida (5-7 días) y sirven para lo mismo, pero hay razones para diferenciarlas. Las plaquetas de aféresis son

mejores que las aleatorias, ya que la transfusión de una unidad de plaquetas de aféresis equivale a 6 unidades del otro tipo, además de que, al provenir del mismo donante, son más seguras de usar (no pueden causar rechazo, por ejemplo). Sin embargo, pese a ser mejores, también son más caras de producir, por lo que corresponde al hospital en cuestión decidir si se decanta por usar sólo uno de los tipos o usar ambos y en qué proporción.

- Crioprecipitados (crios): son preparados que se obtienen al licuar el plasma fresco congelado entre 1°C y 6°C y recogiendo el precipitado, ahora insoluble, que se vuelve a congelar. Se pueden utilizar para tratar la hemofilia o la hipofibrinogenemia y detener sangrados. Al igual que el plasma, duran 1-2 años congelados, aunque una vez descongelados tienen una duración máxima de 4 horas.

En la siguiente tabla se ha recopilado las duraciones de los distintos productos a modo de resumen [1,5,7].

Productos	Duración refrigerados	Duración congelados	Duración descongelados
Hematíes	42 días	Varios años	1-14 días
Plasma Sanguíneo	5 días	2 años	5 días
Plaquetas	5-7 días	-	-
Crioprecipitados	-	1-2 años	4 horas

Cuadro 1.2: Duración de los derivados sanguíneos según su conservación

1.3. Planificación

En este tipo de problemas de inventario suele llevarse a cabo una estrategia de planificación temporal de más a menos: empezamos por decidir la producción necesaria estimada para el año siguiente y vamos bajando a meses, semanas y días para corregir y cubrir las demandas según su fluctuación [5].

- Planificación anual: En esta primera etapa se estima, según los datos de años anteriores, cuál va a ser la demanda a un año vista. Hecho esto también se debe programar la recolecta de sangre para adecuarse a esa demanda y poder cubrirla, teniendo en cuenta que algunos donantes podrían ver sus fechas pospuestas (por enfermedad, haber donado ya recientemente, haber consumido alcohol recientemente, etc.) y que algunas unidades podrían ser defectuosas o pasar a serlo por errores internos.
- Planificación mensual: Ahora se pretende anticiparse un mes a la demanda, y hay que asegurarse de que los días en los que abran las estaciones de donación se cubran las cuotas necesarias para no tener déficit. En esta etapa se considera como cuota mínima la demanda anual, dividida entre los días laborales, y se aumenta en el caso de que la estimación necesaria para ese día fuera mayor. En el caso de que se prevea que la cuota no va a ser satisfecha, se pasa a llamar a donantes potenciales o se envía una unidad de donación móvil a una zona de especial afluencia.

- **Planificación semanal:** En este caso se revisan los niveles de inventario de los distintos productos (sangre de cada grupo sanguíneo, plaquetas, hematíes, plasma y crios), para ajustar la cantidad que tendremos que producir de cada uno y cubrir la estimación de demanda de toda la semana, planificando colectas de sangre adicionales en caso necesario.
- **Planificación diaria:** En este último nivel de planificación se debe estudiar con detenimiento el inventario y las fechas de caducidad de cada inventario, haciendo un recuento cada día de lo que queda en el almacén, actuando en consecuencia con las unidades a producir (produciendo menos si hay bastante producto de caducidad cercana, o de más si por algún contratiempo se puede anticipar que no se cubriría la demanda).

Además, dentro de la planificación, en general se da prioridad de uso a la unidad de producto más antigua que no haya caducado, siguiendo la regla FIFO (First In, First Out, es decir, lo primero que entra al inventario es lo primero en salir)[11]. En casos concretos pueden usarse los derivados sanguíneos más recientes si lo requiere la intervención, pero esto incrementaría la probabilidad de que caduque parte de lo almacenado.

Hay situaciones especiales en las que deben tomar medidas importantes, en concreto cuando hay escasez o en períodos vacacionales. [1,6] Se dice que hay escasez de un producto cuando el nivel de inventario de éste no sobrepasa el quíntuple de la demanda media, y si a su vez la cantidad almacenada no sobrepasa el doble dicha demanda media, estaremos ante una escasez crítica y habrá que recolectar sangre y producir sus derivados con urgencia. Por otra parte, en períodos vacacionales el número de donaciones baja considerablemente, ya que cierran las universidades, los institutos y demás lugares de gran importancia para la recolección de sangre, además de que la gente se puede ir de viaje. Si a esto le añadimos que son épocas con repunte en el número de accidentes y el hecho de que en las Islas Canarias la población se incrementa por el turismo, también la demanda de sangre aumenta en estos períodos, lo cual hace una combinación nefasta de acontecimientos. Es por ello que en dichas fechas se debe hacer especial énfasis en las campañas de recogida de sangre, aumentándolas en la medida de lo posible y, en casos desesperados, haciendo llamamientos a la ciudadanía mediante los medios de comunicación.

1.4. Breve introducción a los modelos de Optimización Combinatoria

La optimización combinatoria es una rama de la optimización matemática cuyo objetivo es maximizar o minimizar una función de coste mientras se cumple una serie de restricciones. Para poder resolver estos problemas es necesario modelarlos. Uno de los primeros pasos es decidir qué variables queremos tomar y lo que representa cada una, así como los valores que pueden tomar (enteros o reales, en general, dando programaciones entera y no entera, respectivamente). Si tenemos constantes, ya sean costos, índices, número de variables, etcétera, también habrá que definirlos y decidir cómo deben ser. Una vez tengamos estos datos, habrá que crear un modelo que contenga nuestra función objetivo y las restricciones

de nuestros datos, a ser posible de programación lineal, para que pueda ser resuelto más fácilmente. Cabe notar que con estas restricciones nuestro problema podría ser visto como un poliedro y sus soluciones vendrían a ser los vértices de éste, por lo que, además, tenemos un conjunto finito de soluciones posibles de entre las cuales buscaremos la que optimice nuestra función objetivo [3].

Algunas de las ramas de las Matemáticas que confluyen en la Optimización Combinatoria podrían ser la Matemática Discreta, la Teoría de Algoritmos y la Programación Lineal (entera o no entera). A un problema cuya finalidad es hallar el valor óptimo de una función objetivo con restricciones lineales se le denomina problema de programación lineal. Si además se exige que las variables sean enteras, entonces se dice que es de programación lineal entera. Algunos de estos problemas lineales pueden ser resueltos en un tiempo “razonable” (esto es, en tiempo polinomial), aunque para otros esto no es posible (tiempo exponencial o potencial), y a veces han de ser resueltos mediante procedimientos heurísticos (proporcionándonos una solución aproximada en vez de la óptima, pero permitiéndonos resolver el problema mucho más rápido).

Esta rama de las matemáticas tiene inmensas aplicaciones a problemas de la vida diaria en temas como la industria, la logística, la administración, las ciencias, etc, aunque no hace falta irse tan lejos. Cómo llenar una mochila o maleta para un viaje podría ser uno de los ejemplos cotidianos que, usando esta rama matemática, podrían ser resueltos de manera muy efectiva y rápida. Sin embargo, también podemos encontrar problemas muy complicados que usando la Optimización Combinatoria pasan a ser mucho más factibles, como los problemas de rutas de vehículos, el problema del viajante de comercio (“Travelling Salesman Problem”, o TSP), el diseño de redes de comunicación y distribución, problemas de localización óptima de edificios, los problemas de inventario y planificación, los problemas de asignación (un caso de particular relevancia sería el de las tripulaciones en líneas aéreas), etc. Las posibles aplicaciones de estos modelos son infinitas, ya que muchos pueden ser extrapolables a otras situaciones o empresas, y con cada problema se puede intentar construir un modelo que, tal vez, mejore a ya los existentes.

1.5. Objetivos del Trabajo de Fin de Grado

El objetivo general de este trabajo es optimizar la gestión de plaquetas en el Instituto Canario de Hemodonación y Hemoterapia (ICHH)

Los objetivos específicos que se derivan del general son los siguientes:

1. Modelar y resolver el problema de desperdicio mínimo de producto asociado a la gestión de inventarios de derivados sanguíneos y enfocado a las plaquetas.
2. Generar algunas modificaciones útiles del modelo de desperdicio mínimo que ayuden a acercar el problema teórico a la situación real.
3. Modelar y resolver el problema de costo total mínimo asociado a la gestión de inventarios de derivados sanguíneos y enfocado a las plaquetas.

4. Generar algunas modificaciones útiles del modelo de costo total mínimo que ayuden a acercar el problema teórico a la situación real.
5. Utilizar estos modelos para afrontar el problema real de la gestión de plaquetas en el ICHH.

Capítulo 2

Modelo 1: desperdicio mínimo

Pasemos pues a hablar del primer modelo. Supongamos que tenemos un conjunto de n días seguidos. Las unidades que se producen un día caducan tras m días, luego a partir de ese momento se desearían. Supongamos que conocemos la demanda del producto de cada día, es decir, d_i es conocida, $i = 1, \dots, n$. Nuestro objetivo será planificar las cantidades a producir cada día de forma que se cubra toda la demanda y se desperdicie lo mínimo posible [4].

2.1. Constantes

n = número de días en el horizonte a estudiar.

m = número de días que tarda en caducar cada unidad de producto.

d_i = demanda del día i -ésimo, $i = 1, \dots, n$.

2.2. Variables

x_i = cantidad a producir en el día i , $i = 1, \dots, n$.

$y_{i,j}$ = cantidad de producto procesado en el día i y que se consume en el día $i+j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

2.3. Preliminares

Como sabemos, queremos minimizar el desperdicio de material. Con las variables que hemos tomado, hay que tener varias restricciones en cuenta:

- En el día i se produce, como mínimo, tanto como lo que se consume de esa tanda en los días subsiguientes (la suma de los $y_{i,j}$ con i fijo), es decir,

$$x_i \geq \sum_{j=1}^m y_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Lo que se consume en el día i es igual a la demanda del producto, esto es,

$$\sum_{j=1}^m y_{i-j,j} = d_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

- A su vez, lo que se desperdicia de cada tanda es $x_i - \sum_{j=1}^m y_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$.
- Sólo podemos producir y consumir unidades enteras y positivas de producto (no podemos producir/usar medio paquete).

2.4. Función Objetivo

Con los datos explicados anteriormente, el modelo se reduce a lo siguiente:

Min $\sum_{i=1}^n (x_i - \sum_{j=1}^m y_{i,j})$ subject to:

$$x_i \geq \sum_{j=1}^m y_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^m y_{i-j,j} = d_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

x_i entero y positivo, $i = 1, \dots, n$.

$y_{i,j}$ entero y positivo, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

2.5. Implementación del modelo

Una vez creado el modelo de desperdicio mínimo, podemos pasar a su implementación para comprobar los resultados. Como este modelo debe estar enfocado al personal del centro de salud en cuestión, conviene que sea en un programa cuyo funcionamiento sea conocido por la mayoría, en vez de un programa más específico. Así pues, hemos escogido el Microsoft Excel en lugar de otras aplicaciones como el Gusek o el Xpress Optimizer que, si bien también servirían para resolver el modelo, necesitan un conocimiento específico. Si el modelo fuera más complicado, tal vez el Solver del Excel no podría manejarlo, pero en nuestro caso es suficiente.

En un principio hemos tomado unos tamaños del problema reducidos, con $n = 7$ y $m = 7$. Esto significa que sólo tenemos que planificar para 7 días y que los productos también tardan 7 días en caducar. Reservamos unas celdas para las variables, tanto las x_i como las $y_{i,j}$, y las inicializamos a 0. Seguidamente añadimos otras celdas con las unidades que habrían sobrado de la semana anterior (también en formato $y_{i,j}$). Si esto lo hemos puesto en columnas, podemos a su vez colocar los valores de los d_i , que supusimos que eran conocidos, en otra columna cercana, a la izquierda. Vamos a necesitar colocar fórmulas en otras casillas para poder escribir las restricciones, de forma que nos devuelvan los valores de los $\sum_{j=1}^m y_{i-j,j}$ (columna anexa a la que contiene los d_i) y los $x_i - \sum_{j=1}^m y_{i,j}$ (a la derecha de la columna de los x_i) que tenemos en cada momento. De la misma manera, ponemos en una casilla que nos devuelva el valor de $\sum_{i=1}^n (x_i - \sum_{j=1}^m y_{i,j})$, nuestra función objetivo. Al final, tendremos una hoja como la de la figura 2.1.

Una vez diseñadas las casillas, podemos pasar a especificar el modelo. Una vez activado el Solver (en las opciones del Excel), nos aparecerá su pestaña en el apartado de Datos del

programa, donde ponemos cuál es la casilla objetivo, que queremos minimizarla variando las casillas dedicadas a los x_i y los $y_{i,j}$, con las restricciones que ya habíamos comentado (que las casillas de $\sum_{j=1}^m y_{i-j,j}$ coincidan con las de los d_i y que las de los $x_i - \sum_{j=1}^m y_{i,j}$ sean mayores o iguales a 0, así como que los valores de los x_i y los $y_{i,j}$ sean enteros positivos). Como método de resolución tomamos el Simplex LP, ya que con el GRG Nonlinear, que es el Solver por defecto, no podemos resolverlo. Una vez hacemos click en resolver, el programa nos devuelve la solución óptima que ha encontrado.

The image shows an Excel spreadsheet with a Solver dialog box open. The spreadsheet data is as follows:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	
37																					
38										yi1	yi2	yi3	yi4	yi5	yi6	yi7	xi				
39																					
40																	0				
41																	0				
42																	0				
43																	0				
44																	0				
45																	0				
46																	0				
47																	0				
48																	0				
49																	0				
50																	0				
51																	0				
52																	0				
53																	0				
54																	0				
55																	0				
56																	0				
57																	0				
58																	0				
59																	0				
60																	0				
61																	0				
62																	0				
63																	0				
64																	0				
65																	0				
66																	0				
67																	0				
68																	0				
69																	0				
70																	0				
71																	0				
72																	0				
73																	0				
74																	0				
75																	0				
76																	0				
77																	0				
78																	0				
79																	0				
80																	0				
81																	0				
82																	0				
83																	0				
84																	0				
85																	0				
86																	0				
87																	0				
88																	0				
89																	0				
90																	0				
91																	0				
92																	0				
93																	0				
94																	0				
95																	0				
96																	0				
97																	0				
98																	0				
99																	0				
100																	0				
101																	0				
102																	0				
103																	0				
104																	0				
105																	0				
106																	0				

The Solver Parameters dialog box is open, showing the following settings:

- Establecer objetivo: \$Q\$61
- Para: Máx Min Valor de: 0
- Cambiando las celdas de variables: \$Q\$47:\$Q\$53;\$J\$47:\$P\$53
- Sujeto a las restricciones:
 - \$H\$47:\$H\$54 = \$G\$47:\$G\$54
 - \$J\$47:\$Q\$53 = entero
 - \$J\$47:\$Q\$53 >= 0
 - \$T\$47:\$T\$53 >= 0
- Convertir variables sin restricciones en no negativas
- Método de resolución: Simplex LP

Figura 2.1: Modelo 1 implementado en el Solver de Excel

2.6. Resultados

Para nuestro primer modelo con los valores $n = m = 7$ el Solver del Microsoft Excel nos devuelve que la solución óptima es producir el primer día lo que se va a consumir los

siguientes seis días; esto es, $y_{1,i} = d_{i+1}$, $i = 1, \dots, 6$ e $y_{i,j} = 0$, $i \neq 1$. En parte, esto se debe a que, al tener una cantidad pequeña de restricciones, es lógico que la solución pueda ser similar a una trivial. En general, para $n = m$ la solución óptima es

$$y_{1,i} = d_{i+1}, i = 1, \dots, (n - 1) \text{ e } y_{i,j} = 0, i \neq 1.$$

También sería importante notar que en este modelo no se permite consumir lo que se produce en un mismo día, en cuyo caso, si extendiéramos la definición de la $y_{i,j}$ para aceptar que j pueda tomar el valor 0, la solución óptima sería $y_{i,0} = d_i$.

Por otra parte, si cambiásemos el valor de n la solución sería similar, pero con un cambio. Si por ejemplo, tomásemos $n = 9$ seguiríamos obteniendo que $y_{1,i} = d_{i+1}$, $i = 1, \dots, 7$, pero ahora también $y_{2,7} = d_9$, siendo las demás $y_{i,j} = 0$. En general, para $n > m$ obtendremos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} y_{1,j} &= d_{j+1}, j = 1, \dots, m. \\ y_{i,m} &= d_{m+i+1}, i = 2, \dots, (n - m). \\ y_{i,j} &= 0, i = 2, \dots, n, j = 1, \dots, (m - 1). \\ y_{i,m} &= 0, i = (m - n + 1), \dots, n. \end{aligned}$$

Por último, en el caso $n < m$ la situación es similar al primer supuesto, pues la solución óptima sería la misma:

$$y_{1,i} = d_{i+1}, i = 1, \dots, (n - 1) \text{ e } y_{i,j} = 0, i \neq 1.$$

2.7. Variaciones del Problema

En este apartado presentaremos algunas variantes del problema inicial que podrían ser relevantes en nuestro estudio.

2.7.1. Tamaño diario de producción limitado

En esta situación supondremos que sólo podemos procesar una cierta cantidad de sangre cada día, ya sea por cuestiones de tiempo, de personal, del número de máquinas, etc. Este límite puede ser fijo (denotémoslo por L) o variar dependiendo del día (en cuyo caso lo denotamos por L_i), y sería conocido. A la hora de implementar esta restricción adicional, podemos hacerlo de la forma siguiente:

- Si el límite es fijo: añadir en el Solver las restricciones

$$x_i \leq L, i = 1, \dots, n.$$

- Si el límite es variable: añadir en el Excel una nueva columna donde pondremos los límites de cada día L_i . Por simplicidad se puede colocar esta columna al lado de la columna de los x_i . Hecho esto, sólo tendremos que añadir en el Solver de Excel las restricciones que nos comparen sus valores, es decir,

$$x_i \leq L_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

En este caso sí alcanzaremos una solución óptima (a menos que por demandas muy altas tengamos un problema no factible), y dicha solución no tiene por qué ser necesariamente trivial.

2.7.2. Tamaño de almacenamiento limitado

En esta situación suponemos que sólo podemos almacenar una cantidad Q de sangre al día. Esta cantidad puede ser fija o bien dependiendo del día (en cuyo caso hablaríamos de Q_i , $i = 1, \dots, n$). La cantidad almacenada será la cantidad de producto que hayamos producido hasta la fecha y que no haya sido usada ni haya caducado. En nuestro supuesto de $n = m = 7$, por ejemplo, esto implicaría que las unidades en el almacén serían las que hubieran sobrado de la semana anterior a la que estudiamos, más las producidas en los días anteriores al actual, y habría que restarle lo que se haya consumido.

En general, si definimos q_i = cantidad de producto almacenado el día i , $i = 1, \dots, n$, tendremos que

$$q_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=(-j+1)}^0 y_{i,j} + \sum_{k=1}^i x_k - \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^m y_{k-j,j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Una vez sabemos que esa es la cantidad almacenada cada día, sólo hay que añadir la restricción

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=(-j+1)}^0 y_{i,j} + \sum_{k=1}^i x_k - \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^m y_{k-j,j} \leq Q, \quad i = 1, \dots, n.$$

A la hora de implementarlo en Excel, tendremos que añadir una columna extra cuyas celdas contengan los valores de la fórmula implementada de q_i , $i = 1, \dots, n$. Esta columna podría colocarse junto a la de los x_i , por ejemplo. Una vez hecho esto, resta añadir la restricción de que en esas casillas se cumpla que $q_i \leq Q$ $i = 1, \dots, n$.

2.7.3. Separación por grupos sanguíneos

En este caso suponemos que debemos hacer el estudio por separado para cada grupo sanguíneo. Supondremos que las demandas de cada uno de ellos a lo largo del período no tengan por qué ser las mismas. Hay 8 grupos diferentes: AB⁻, AB⁺, A⁻, A⁺, B⁻, B⁺, 0⁻ y 0⁺. Podemos asignarle a cada tipo de sangre un número del 1 al 8 y de esta forma ya no hablaríamos de d_i , x_i e $y_{i,j}$ sino de

$d_{i,k}$ = demanda del día i -ésimo de sangre del grupo k , $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, 8$.

$x_{i,k}$ = cantidad a producir en el día i de sangre del grupo k , $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, 8$.

$y_{i,j,k}$ = cantidad de producto procesado en el día i y que se consume en el día $i + j$ de sangre del grupo k , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, 8$.

La gestión óptima en este caso sería la que se obtiene al resolver el modelo inicial para cada uno de los tipos de sangre, pero teniendo en cuenta estos cambios en las constantes y variables. Es decir, la solución implicaría optimizar para $k = 1, \dots, 8$ el modelo:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^n (x_{i,k} - \sum_{j=1}^m y_{i,j,k}) \text{ subject to:}$$

$$x_{i,k} \geq \sum_{j=1}^m y_{i,j,k}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^m y_{i-j,j,k} = d_{i,k}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$x_{i,k} \text{ entero y positivo, } i = 1, \dots, n.$$

$$y_{i,j,k} \text{ entero y positivo, } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

A la hora de implementarlo en Excel sería igual que el modelo básico, pero con 8 tablas diferentes para luego unir los resultados de esas iteraciones.

2.7.4. Días sin producción

En esta situación supondremos que hay días en los que no se puede producir, ya sea porque se haya estropeado la maquinaria o porque directamente esté cerrado el centro de producción (por ejemplo, por ser fin de semana). Esto puede ocurrir con los bancos de sangre, por lo que esta modificación tiene cierta relevancia.

La manera de actuar es sencilla, pues es suficiente con indicar que $x_i = 0$, para los días i en los que no se pueda producir, con $i = 1, \dots, n$. Otra forma sería quitar esas x_i del conjunto de variables e incluirlas en el de constantes, con valor fijo nulo.

2.7.5. Demandas no fijadas de antemano

Ahora se estudiará cómo variaría el modelo en el caso de que no tengamos unos valores fijos de d_i . No todas las semanas vamos a necesitar la misma cantidad de recursos, ya que no siempre se da la misma necesidad de transfusiones, trasplantes, operaciones, etc. En este caso en general no podremos darle una cantidad predeterminada de demanda al programa, ya que no se sabe a ciencia cierta.

Una de las formas de actuar en esta situación sería fijarnos en las demandas anteriores, mirando hacia atrás todo lo que fuera necesario para detectar algún patrón en la demanda, esto es, si se comporta como una distribución conocida (derivados de una normal, una beta, una gamma, etc). Supongamos, entonces, que las demandas sigan una distribución normal “truncada” (esto es, que sólo toma valores mayores o iguales a 0 y que no pasa de un cierto valor) de media μ y desviación típica σ . Nótese que esto es justificable, ya que no podemos tener una demanda negativa y sólo se puede atender a una cierta cantidad de pacientes al día.

Podríamos tomar un número de unidades a producir de forma que la gran mayoría de las veces tengamos suficiente producto (con un p-valor asociado muy pequeño). Si tomásemos ese valor para nuestro modelo, no haría falta cambiar nada más que los valores de los d_i . Sin embargo, incluso así seguiría existiendo la posibilidad de que algún día no pudiéramos hacer frente a la demanda. Además, muchos días se estaría produciendo de más, de forma que el desperdicio de material sería ingente, lo cual no está a la par con la voluntad de minimizar las unidades de producto desechadas. La única forma de estar seguros de que siempre se cubra la demanda sería teniendo todos los días la producción equivalente a la cantidad máxima de consumo, que no es viable para nuestro modelo porque nos daría un desperdicio máximo.

Por otro lado, también podríamos producir todos los días la media del consumo y una cantidad k_i que nos permita tener un repositorio de cantidad fija y que tenga prioridad a la hora de ser usado (de esta forma, siempre se usa antes lo del almacén y se repone con lo que sobre de lo producido en el día). Cabe notar que lo que sobre de un día se unirá al depósito, de forma que se pueda usar otros días con más demanda. De esta forma se desperdiciaría mucho menos, pero la probabilidad de rotura, esto es, de no poder cubrir la demanda, se incrementaría notablemente.

En consecuencia, en este modelo no se puede tener la certeza de una solución óptima sino una aproximación a ella, ya que el desconocimiento de las demandas diarias conlleva un cierto grado de incertidumbre. Por consiguiente, se podrá haber tomado una buena estimación, así como una relativamente mala, dependiendo de esa demanda desconocida.

Observación: También se podría contemplar la posibilidad de tener distintas distribuciones según el día de la semana o incluso según los días del mes, y se podría estudiar de una manera similar (ajustando los valores de n y tomando medias μ_i y desviaciones típicas σ_i , con $i = 1, \dots, n$ para los parámetros de las distribuciones).

Capítulo 3

Modelo 2: costo total mínimo

Describamos ahora el segundo modelo, que inicialmente será muy parecido al primero. Al igual que antes, suponemos que tenemos un conjunto de n días seguidos. Las unidades que se producen un día caducan tras m días, momento a partir del cual caducarían. También suponemos que la demanda del producto para cada día es conocida y denotémosla por d_i , $i = 1, \dots, n$. El coste de producir cada unidad de producto es conocido y lo denotaremos por p . A su vez f simbolizará el coste fijo de poner las máquinas productoras a funcionar un día, el cual también es conocido. Por último, h será el coste de mantener cada unidad de producto en el inventario durante 1 día. Nuestro objetivo será planificar las cantidades a producir cada día de forma que se cubra toda la demanda con un costo total mínimo.

3.1. Constantes

n = número de días en el horizonte a estudiar.

m = número de días que tarda en caducar cada unidad de producto.

d_i = demanda del día i -ésimo, $i = 1, \dots, n$.

p = coste de producir cada unidad de producto.

f = coste de poner a funcionar las máquinas procesadoras del producto.

h = coste de mantener cada unidad de producto en el almacén por día.

3.2. Variables

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{si producimos el día } i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n.$$

x_i = cantidad a producir en el día i , $i = 1, \dots, n$.

$y_{i,j}$ = cantidad de producto procesado en el día i y que se consume en el día $i+j$, $i = 1, \dots, n$,
 $j = 1, \dots, m$.

3.3. Preliminares

- Como habíamos expresado, queremos minimizar el coste total del inventario, es decir, la suma de los costes de funcionamiento, producción y mantenimiento. Con nuestras variables hay que tener en cuenta las mismas restricciones que en el modelo inicial de minimización de desperdicios, es decir:

$$x_i \geq \sum_{j=1}^m y_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^m y_{i-j,j} = d_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Además, añadiremos otra restricción adicional, que sólo habrá producción si escogemos ese día:

$$x_i \leq M \cdot w_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n \text{ y } M \text{ suficientemente grande}$$

- A su vez, dado que la cantidad $y_{i,j}$ permanece j días en el almacén, el costo total de la gestión del inventario es

$$h \cdot \sum_{j=1}^m j \cdot \sum_{i=(1-j)}^n y_{i,j} + p \cdot \sum_{i=1}^n x_i + f \cdot \sum_{i=1}^n w_i,$$

(costo de mantenimiento + costo de producción + costo de funcionamiento).

- Igual que antes, sólo podremos producir y consumir unidades enteras y positivas de producto (no podemos producir media bolsa).

3.4. Función Objetivo

Con los datos explicados anteriormente, el modelo se reduce a lo siguiente:

$$\text{Min } h \cdot \sum_{j=1}^m j \cdot \sum_{i=(1-j)}^n y_{i,j} + p \cdot \sum_{i=1}^n x_i + f \cdot \sum_{i=1}^n w_i \text{ subject to:}$$

$$x_i \geq \sum_{j=1}^m y_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^m y_{i-j,j} = d_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$x_i \leq M \cdot w_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$w_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$x_i \text{ entero y positivo, } i = 1, \dots, n.$$

$$y_{i,j} \text{ entero y positivo, } i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

3.5. Implementación del modelo

Habiendo definido el modelo, podemos pasar a su implementación para comprobar los resultados. Al igual que con el modelo de desperdicio mínimo, lo aplicaremos usando el Excel, que sigue siendo suficiente para resolver nuestro tamaño de problema, como antes, con $n = 7$ y $m = 7$. La base será la misma que en el problema anterior con algunos añadidos, por lo que podemos usar las celdas que ya habíamos definido en el archivo Excel: las x_i al igual que las $y_{i,j}$, inicializadas a 0, el inventario también en formato $y_{i,j}$ sobre dichas celdas, la columna de las demandas d_i . Además, de las celdas con fórmulas también tomaremos las que contenían los valores de $\sum_{j=1}^m y_{i-j,j}$ y $x_i - \sum_{j=1}^m y_{i,j}$ de cada momento. A esas celdas hay que sumarle varias más, adecuadas para las nuevas variables y fórmulas. Podemos colocar una columna para los w_i al lado de la que contenía los x_i y a su vez otra anexa que contenga los valores de $M \cdot w_i$, $i = 1, \dots, n$ (en nuestro caso tomamos $M = 1000$ porque inicialmente no trabajábamos con cifras muy elevadas, pero puede ampliarse). Otro añadido sería una fila adicional debajo de los $y_{i,j}$ que contenga la fórmula $j \cdot \sum_{i=(1-j)}^n y_{i,j}$ para $j = 1, \dots, m$.

Hecho esto, falta cambiar la celda objetivo para que contenga la fórmula $h \cdot \sum_{j=1}^m j \cdot \sum_{i=(1-j)}^n y_{i,j} + p \cdot \sum_{i=1}^n x_i + f \cdot \sum_{i=1}^n w_i$. Así ya será posible escribir el modelo en el solver, especificándole cuál es la casilla objetivo, que buscamos minimizarla, cuáles son las celdas de variables y cómo son las restricciones de las casillas, de la misma forma que en el otro modelo. Una vez hacemos click en resolver el programa, obtenemos la solución óptima que ha encontrado. La hoja de cálculo queda como vemos en la figura 3.1.

3.6. Resultados

Para nuestro segundo modelo se usarán, como antes, los valores $n = m = 7$. Sin embargo, en este caso tenemos varias constantes adicionales: p , f y h . Dependiendo de los valores que presenten, se pueden observar distintos comportamientos en las soluciones. En cualquier caso, al tomar la demanda como determinística, todas las soluciones óptimas tienen algo en común: el desperdicio es mínimo, esto es, nulo a menos que haya habido demasiadas sobras de la semana anterior (en cuyo caso el modelo podría ser no factible salvo que se cambie el “=” de la restricción de las demandas por un “ \leq ”). Así pues, las soluciones de coste mínimo del segundo modelo tienen el mismo desperdicio que las del primero y serán soluciones óptimas de éste. Sin embargo, a la inversa no tiene por qué ocurrir lo mismo. Sabiendo que el desperdicio es nulo se tiene también que $\sum_{i=1}^n x_i$ será constante (e igual a la demanda de la semana menos el excedente de inventario de la anterior), y por lo tanto se podría eliminar uno de los costos, el de producción, independientemente del valor de p . Queda, por tanto, observar cómo se comporta el modelo respecto a los valores de las otras dos constantes. Está claro que a medida que crezca f con respecto de h , la mejor solución será aquella en la que se produzca material en cada vez menos días, llegando en nuestro caso particular a la solución degenerada de producir todo en un sólo día. A su vez, si f decrece respecto a h , la tendencia suele ser producir en un número de días cada vez mayor, para evitar el costo de almacenamiento, llegando al caso degenerado de producir siempre

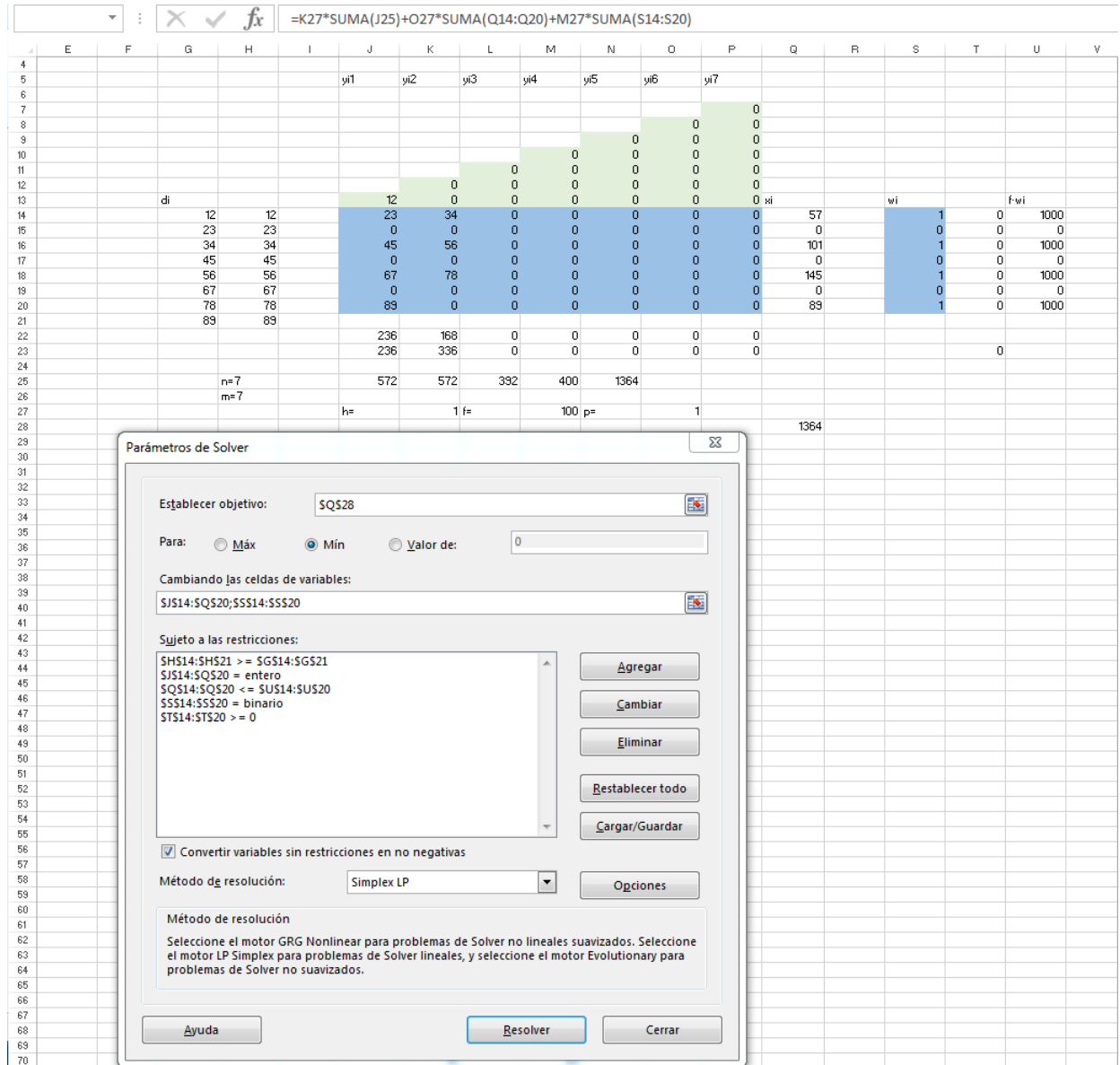


Figura 3.1: Modelo 2 implementado en el Solver de Excel

la cantidad que será demandada al día siguiente.

Para poder comprobar las relaciones entre los costos generados por f y h se han sustituido distintos valores en el modelo para todas las constantes. Como ya se comentó previamente, el valor de p no cambia la naturaleza de la solución, ya que el costo de producir unas unidades fijas no influirá en cuándo haya que hacerlo. También se observó que los costos finales dependerán en gran medida de las demandas de cada uno de los días, ya que en cuanto al almacenaje no es lo mismo cubrir más demanda al principio (donde casi no estará nunca almacenado el producto) que al final (donde puede llevar almacenado un tiempo). Debido a esto, se realizaron pruebas en las que el modelo analizaba tres casos ficticios: uno de demanda creciente (con 12 unidades de demanda el primer día, 23 el segundo y seguimos sumando 11 cada día a la demanda), otro decreciente ($d_1 = 89$, $d_2 = 78$ y seguimos restando 11 cada día a la demanda) y un tercero con demanda aleatoria (para ello se tomaron los valores devueltos por 7 simulaciones de una Poisson de $\lambda = 20$ y se asignaron como demandas). Para ver el comportamiento en términos relativos de f y h lo que se hizo en cada caso fue dejar fijas las demandas y el f , al que se le dio el valor 100, y variar la h . Comenzando con $h = 0,1$, se fue aumentando ese valor en 0,1 hasta llegar a $h = 10$. Para cada valor de h en cada estudio se ejecutó el modelo para obtener la solución óptima, anotando los valores de los costos de funcionamiento y mantenimiento. Hecho esto, sólo falta representar esos costes en una gráfica para ver cómo evolucionaban al variar h (ver la primera gráfica de las figuras 7.1-7.3 en el Anexo).

Al estudiar las gráficas se puede ver que, cuando la demanda es creciente, el valor de h a partir del cual se produce todos los días se alcanza mucho antes que con demandas aleatorias, y en éste a su vez que el de demandas decrecientes. Además, el costo de mantenimiento aumenta a una velocidad lineal cuando el de funcionamiento se mantiene constante, bajando sólo cuando este segundo aumenta (esto es, cuando decidimos producir un día más). Esto motivó que se crease una segunda tabla para cada caso, la que relaciona los costes de funcionamiento y la suma de las duraciones en el inventario de todos los productos de la semana. Al graficarlas, los resultados los podemos ver en la segunda gráfica de las figuras 7.1-7.3 del Anexo.

Como se puede ver, la razón por la que el costo aumentaba linealmente, se debía a que el tiempo total que pasaban todas las unidades de producto en el inventario se mantenía constante hasta que se decidía producir un día adicional, momento en el cual aumentaba el costo de funcionamiento y disminuía el tiempo total almacenado. De entre los dos primeros casos, con demanda creciente y decreciente respectivamente, se puede observar que la situación degenerada inicial (producir un solo día) proporciona una solución de mayor coste en este primero, dado que hay mucho producto que tendrá que esperar bastante tiempo para salir del inventario; sin embargo, en la otra solución degenerada (producir todos los días) el tiempo total en inventario es exactamente el mismo, pues se produce siempre para el día siguiente (todo está sólo 1 día en el almacén) y la demanda total que habíamos tomado es la misma.

3.7. Variaciones del Problema

En este apartado se presentarán algunas modificaciones del modelo principal de inventario con costo mínimo.

3.7.1. Tamaño diario de producción limitado

Al igual que en la variación de mismo nombre para el modelo de desperdicio mínimo, en esta situación suponemos que la cantidad de producto que se puede procesar al día tiene un tope, sea fijo o variable según el día (denotada por L o L_i , con $i = 1, \dots, n$, respectivamente). La forma de actuar será la misma que en el otro modelo, añadiendo en el Solver las restricciones siguientes dependiendo del caso.

- Si el límite es fijo: $x_i \leq L$, $i = 1, \dots, n$.
- Si el límite es variable: añadir en el Excel una nueva columna para los límites de cada día, L_i , $i = 1, \dots, n$, cercana a la columna de los x_i y añadir en el Solver de Excel las restricciones que comparen sus valores, es decir,

$$x_i \leq L_i, i = 1, \dots, n.$$

3.7.2. Tamaño de almacenamiento limitado

En esta situación, al igual que en el otro modelo, también suponemos que en el almacén sólo se puede almacenar una cierta cantidad de sangre en cada momento, sea fija o variable (denotada por Q o Q_i , $i = 1, \dots, n$, respectivamente). Si como en aquel modelo definimos q_i = cantidad de producto almacenado el día i , $i = 1, \dots, n$, obtendremos que:

$$q_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=(-j+1)}^0 y_{i,j} + \sum_{k=1}^i x_k - \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^m y_{k-j,j}, i = 1, \dots, n.$$

Como en aquel caso es suficiente con añadir:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=(-j+1)}^0 y_{i,j} + \sum_{k=1}^i x_k - \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^m y_{k-j,j} \leq Q, i = 1, \dots, n,$$

en el caso de que el límite sea fijo o bien cambiando esa Q por una Q_i cuando el tope sea variable.

Se implementa en Excel igual que en el apartado del mismo nombre del otro problema, añadiendo una columna extra cercana a la de los x_i cuyas celdas contengan los valores de la fórmula implementada de q_i , $i = 1, \dots, n$, añadiendo en el Solver la restricción de que en esas casillas se cumpla que $q_i \leq Q$ $i = 1, \dots, n$.

3.7.3. Separación por grupos sanguíneos

En esta ocasión también suponemos la diferenciación entre los 8 grupos sanguíneos a la hora de generar el producto. Para resolverlo es suficiente con añadir otro subíndice k , con $k = 1, \dots, 8$, a las variables y demandas, es decir, que en vez de trabajar con las d_i , w_i , x_i e $y_{i,j}$ definidas antes, usaremos:

$d_{i,k}$ = demanda del día i de derivados sanguíneos del grupo k -ésimo, $i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, 8$.
 $x_{i,k}$ = cantidad a producir en el día i de sangre del grupo k -ésimo, $i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, 8$.
 $y_{i,j,k}$ = cantidad de producto procesado en el día i y que se consume en el día $i + j$ de sangre del grupo k -ésimo, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, 8$.
 $w_{i,k} = \begin{cases} 1, & \text{si producimos el día } i \text{ del grupo sanguíneo } k - \text{ésimo} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, 8$.

Se supondrá, por tanto, que los costos de funcionamiento, producción y mantenimiento serán los mismo independientemente del grupo sanguíneo. La gestión de costo mínimo en este caso vendría dada al resolver el siguiente modelo, obtenido del inicial pero modificado con las nuevas variables y constantes y para los distintos valores de k :

$$\text{Min } h \cdot \sum_{j=1}^m j \cdot \sum_{i=(1-j)}^n y_{i,j,k} + p \cdot \sum_{i=1}^n x_{i,k} + f \cdot \sum_{i=1}^n w_{i,k} \text{ subject to:}$$

$$x_{i,k} \geq \sum_{j=1}^m y_{i-j,j,k}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^m y_{i-j,j,k} = d_{i,k}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$x_{i,k} \leq M \cdot w_{i,k}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$w_{i,k} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$x_{i,k} \text{ entero y positivo, } i = 1, \dots, n.$$

$$y_{i,j,k} \text{ entero y positivo, } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

Igual que con la modificación del primer modelo, para implementarlo en Excel sería con 8 tablas del modelo principal, resolviendo para cada una de ellas y sumando los resultados.

3.7.4. Días sin producción

En esta ocasión, al igual que en el apartado del mismo nombre del modelo de desperdicio mínimo, también supondremos que hay días en los que no se puede producir, como en el caso de que el banco de sangre esté cerrado.

La manera de actuar es la misma, pues sólo variarían algunas x_i , esto es, fijando $x_i = 0$, para los días i en los que no se pueda producir, con $i = 1, \dots, n$, o bien quitando esas x_i del conjunto de variables e incluyéndolas en el de constantes con valor fijo igual a 0.

3.7.5. Abastecimiento de múltiples hospitales

Esta modificación nos permitirá planificar a la vez la producción para varios hospitales desde un mismo centro de producción. Supongamos, para ello, que tenemos un conjunto V de hospitales a los que abastecer de producto, $v = 1, \dots, V$. Esto es lo que ocurre en el caso del ICHH, donde se generan los derivados sanguíneos y luego se reparten entre los centros donde sean necesarios, por lo que goza de cierta relevancia. También podría ocurrir que lo que tengamos que repartir entre los hospitales sea la materia prima (la sangre entera, ya tipificada) y que la separación en componentes se realice en cada uno de los hospitales. A su vez, podríamos estudiar cómo variaría el modelo dependiendo de si todos los días hay que visitar todos los hospitales o si podemos no visitar alguno ciertos días. Por lo tanto, obtenemos cuatro posibilidades para el modelo, con distintas implementaciones.

	Viaje completo todos los días	Podemos no visitar algún hospital
Se envían los derivados	Modelo 1	Modelo 3
Se envía la sangre entera	Modelo 2	Modelo 4

Cuadro 3.1: Posibles implementaciones

- Modelo 1:

Tal y como expresa la tabla, en esta ocasión siempre se envían los derivados a todos los hospitales. De la misma forma que en el caso de la modificación anterior, la forma más fácil de resolverlo es usando las variables y demandas que teníamos pero con un subíndice adicional. Así, las variables y demandas que usaremos serán:

$d_{i,v}$ = demanda del día i de derivados sanguíneos del hospital v -ésimo, $i = 1, \dots, n$, $v = 1, \dots, V$.

$x_{i,v}$ = cantidad de producto a enviar en el día i al hospital v -ésimo, $i = 1, \dots, n$, $v = 1, \dots, V$.

$y_{i,j,v}$ = cantidad de producto procesado en el día i y que se consume en el día $i + j$ de sangre en el hospital v -ésimo, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $v = 1, \dots, V$.

$$w_{i,v} = \begin{cases} 1, & \text{si producimos el día } i \text{ del grupo sanguíneo } v - \text{ésimo} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, i = 1, \dots, n, v = 1, \dots, V.$$

Como se visitan todos los hospitales siempre, en este caso el costo de desplazamiento podemos omitirlo, ya que será fijo (no influirá en la solución óptima). El modelo quedaría como el de la modificación de separación por grupos sanguíneos, pero cambiando la k por una v , $v = 1, \dots, V$.

- Modelo 2:

Como sabemos, en este caso suponemos que enviamos a cada hospital la sangre entera todos los días para que ellos después la separen en sus derivados. Como cada hospital puede tener equipamiento diferente, los costos de funcionamiento, producción y mantenimiento no tienen por qué ser los mismos entre los distintos centros. Debido a esto, además de las variables y constantes comentadas en el Modelo 1, trabajaremos también con las constantes siguientes:

p_v = coste de producir cada unidad de producto en el hospital v -ésimo, $v = 1, \dots, V$.

f_v = coste de poner a funcionar las máquinas procesadoras del producto en el hospital v -ésimo, $v = 1, \dots, V$.

h_v = coste de mantener cada unidad de producto en el almacén por día en el hospital v -ésimo, $v = 1, \dots, V$.

Supondremos que de cada unidad de sangre entera se saca una unidad del derivado que estudiamos, ya que en caso contrario sería suficiente con multiplicar/dividir las demandas apropiadamente. Además, de la misma forma que en el Modelo 1, los costos de transporte se pueden obviar en la solución óptima, pues serán constantes y no variarán el costo mínimo. El modelo resultante de esta modificación sería muy similar al Modelo 1, sólo cambiando las constantes p , f y h por sus variantes antes citadas.

- Modelos 3 y 4:

Como se explicó anteriormente, en estas situaciones les enviamos a los hospitales siempre los derivados de la sangre ya separados o la sangre entera para que la procesen ellos, respectivamente, aunque a veces podemos decidir no enviar producto a alguno de los hospitales. Debido a esto, habrá que tener en cuenta los costos de enviar producto desde el almacén principal a los que haya en los hospitales. Si bien el problema no se complica demasiado en el caso de que a cada hospital vaya un camión diferente o haya que pasar por el almacén principal entre dos visitas a hospitales, si permitimos visitar varios hospitales en un mismo viaje (o todos los del día a la vez, que sería lo ideal si no tenemos en cuenta la capacidad del vehículo), el tamaño del problema aumenta considerablemente. Estos apartados serían una mezcla de problema mixto de inventario con TSP, lo cual es muy interesante y podría ser objeto de una futura investigación en sí mismo ya que no se tratará aquí ([10] podría ser una referencia).

3.7.6. Deterioro diario del material

Cuando se trabaja con sangre entera refrigerada, ésta va perdiendo parte de su utilidad progresivamente debido a su degradación. A causa de ello conviene escribir una modificación que tenga en cuenta este efecto [9]. Definamos como nueva constante:

α = Porcentaje del producto que se degrada al día.

Como cada día se pierde esa fracción del material, habrá que producir más desde un principio para cubrir satisfactoriamente las demandas. Si el producto fuera a ser almacenado un día, por ejemplo, lo que quedaría al final y que todavía nos sea útil es $(1 - \alpha)$ veces la cantidad producida, por lo que habrá que aumentar la cantidad inicial en $\frac{1}{1-\alpha}$ veces para cubrir la demanda. En general, si el producto fuera a estar s semanas almacenado, habría que producir inicialmente $(\frac{1}{1-\alpha})^s$ veces la cantidad a consumir.

El modelo quedaría así:

$$\text{Min } h \cdot \sum_{j=1}^m j \cdot \sum_{i=(1-j)}^n y_{i,j} + p \cdot \sum_{i=1}^n x_i + f \cdot \sum_{i=1}^n w_i \text{ subject to:}$$

$$x_i \geq \sum_{j=1}^m y_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^m (1 - \alpha)^j \cdot y_{i-j,j} = d_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$x_i \leq M \cdot w_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$w_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$x_i \text{ entero y positivo, } i = 1, \dots, n.$$

$$y_{i,j} \text{ entero y positivo, } i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

3.7.7. Demandas no fijadas de antemano

Al contrario de como se ha ido trabajando en las demás modificaciones del modelo de costo mínimo, en este apartado se intentará trabajar con demandas cuyo valor exacto no conocemos de antemano, aunque pueda hacerse una aproximación. Como ya comentamos en la modificación de mismo nombre del modelo de desperdicio mínimo, en la realidad, no en

todas las semanas son necesarios los mismos recursos, por lo que la demanda puede variar. Como la mayoría de esas necesidades de derivados sanguíneos provienen de imprevistos, la cantidad a producir no es en absoluto fija y predeterminada, de ahí la gran importancia que cobra este apartado.

Uno de los métodos más utilizados para estimar la demanda no determinística, que ya comentamos anteriormente, es el de fijarnos en las demandas de períodos anteriores para observar si siguen el patrón de alguna distribución conocida. Si conseguimos reconocerla (o reconocerlas, si por ejemplo en distintos días de la semana son diferentes), hay varias formas posibles de actuación.

Una primera forma sería usando el modelo de costo mínimo que habíamos planteado y tomando como demandas iniciales para los distintos días las que hayamos estimado mediante las aproximaciones a las distribuciones. En una primera instancia fijaremos esas supuestas demandas futuras y usaremos el modelo en el Excel. Cabe comentar que en este modelo de costo mínimo podemos tomar además la posibilidad de obtener sangre por otros medios, ya sea mandándola a pedir a otro hospital u otro banco de sangre, lo cual se conoce como “outsourcing”. Debido a nuestra insularidad esta posibilidad no es muy viable en Canarias a menos que sea de un hospital de la propia isla, por lo que el costo de obtener una unidad por outsourcing sería muy elevado. Otra forma sería intentar posponer alguna intervención no urgente para esperar a tener stock, aunque no es recomendable por el malestar que pueda acarrear. Sin embargo, de estas formas podría tomarse que las demandas siempre estarían cubiertas.

Para el problema semanal tomaríamos $n = 7$, colocaríamos las demandas predichas y ejecutaríamos el modelo. Una vez hecho esto ya tendríamos las cantidades de producto que hay que generar cada día de la semana, aunque la demanda real seguirá siendo desconocida. Una vez fijadas las producciones diarias, a medida que llegasen los días veríamos las demandas reales. Si sobran unidades de un día se pasarían a las asignadas para otro día posterior (esto es, a un $y_{i,j}$ de mayor j), si faltan se podrían tomar de las que hayan sobrado anteriormente o de las asignadas al día siguiente, por ejemplo, que se corregirían al volver a repartirlas. En el problema semanal lo más que podemos hacer es usar las unidades a producir que hemos fijado y reubicarlas para los días venideros en los $y_{i,j}$ apropiados, haciendo uso de la estrategia FIFO (lo primero en producirse es lo primero en gastarse). Por ello, es mejor realizar también el problema diario, donde se intentaría corregir, en la medida de lo posible, el modelo con las demandas que se vayan conociendo diariamente. En cada jornada una demanda pasará a ser conocida, aparecerá una nueva desconocida (la de una semana después) y desaparecerá la de hace una semana, ya que dejará de ser útil (pues los materiales asociados a esa demanda caducarían). Se actuaría en consecuencia dependiendo de los niveles de inventario que haya, ejecutando otra vez para los nuevos datos diariamente.

Para poder efectuar el problema diario, lo más práctico es crear un macro en Excel que nos permita mover las filas a medida que avancen los días, para no tener que hacerlo manualmente y evitar el error humano.

Capítulo 4

Modelo 3: Obtención del nivel de inventario óptimo analíticamente

Ahora se expondrá otra manera de obtener las cantidades óptimas a producir cada día usando el costo total medio, no mediante Excel, sino tratando el problema como un sistema de nivel de inventario teórico [8]. Si bien no se hallará el valor exacto óptimo en este trabajo, se podrá mostrar una aproximación viable que pueda ser de utilidad.

Para empezar, supongamos que las demandas se distribuyan conforme a una cierta distribución que consideraremos continua por cuestiones de simplicidad (sabemos que en nuestro caso las cantidades serían enteras, pero podríamos aproximar la distribución discreta por una continua sin aumentar demasiado el margen de error). Sea $f(x)$ la función de densidad de dicha distribución que sólo toma valores no nulos en el semieje real positivo (ya que no podemos tener demandas negativas). De la misma manera, sea $F(x)$ su función de distribución. Inicialmente tomaremos un solo día en cuenta y que no hay producto almacenado ni costo de fabricación y poco a poco seguiremos avanzando. Teniendo en cuenta esto, usando algunas de las constantes definidas en el modelo de costo mínimo (en concreto, p y h) y siendo q el costo unitario de outsourcing, la función de costos asociada a producir hasta tener x_1 unidades de producto y que al día siguiente se consumieran D_1 sería la siguiente:

$$C(x_1, \alpha_1) = p \cdot x_1 + q \cdot \max\{0, D_1 - x_1\} + h \cdot \max\{0, x_1 - D_1\}.$$

Esto es, Costo total = Costo de producción + Costo de rotura + costo de mantenimiento de un día. Otra forma de expresar esa función sería la siguiente:

$$C(x_1, \alpha_1) = \begin{cases} p \cdot x_1 + q \cdot (D_1 - x_1), & x_1 \leq D_1 \\ p \cdot x_1 + h \cdot (x_1 - D_1), & x_1 > D_1 \end{cases}.$$

El costo medio de producir hasta la cantidad x_1 sería, por lo tanto:

$$CM(x_1) = \int_0^\infty C(x_1, \alpha_1) \cdot f(\alpha_1) \cdot d\alpha_1 = p \cdot x_1 + \int_{x_1}^\infty q \cdot (\alpha_1 - x_1) \cdot f(\alpha_1) \cdot d\alpha_1 + \int_0^{x_1} h \cdot (x_1 - \alpha_1) \cdot f(\alpha_1) \cdot d\alpha_1.$$

Para hallar el mínimo de esa función de costo medio tendremos que derivar. Para ello, recordemos un resultado de análisis matemático. Si tenemos una integral paramétrica de límites variables

$$G(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} g(\lambda, x) dx,$$

entonces su derivada respecto a λ_i viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} G(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} g(\lambda, x) dx + g(\lambda, b(\lambda)) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_i} b(\lambda) - g(\lambda, a(\lambda)) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_i} a(\lambda).$$

Aplicando esa regla y usando cálculo infinitesimal obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} CM(x_1) &= p + \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} [q \cdot (\alpha_1 - x_1) \cdot f(\alpha_1)] \cdot d\alpha_1 + 0 - 0 + \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} [h \cdot (x_1 - \alpha_1) \cdot f(\alpha_1)] \cdot d\alpha_1 + \\ 0 - 0 &= p - q \cdot \int_{x_1}^{\infty} f(\alpha_1) \cdot d\alpha_1 + h \int_0^{x_1} f(\alpha_1) \cdot d\alpha_1 = p - q \cdot (1 - F(x_1)) + h \cdot F(x_1). \end{aligned}$$

Igualando a 0 la derivada y despejando:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} CM(x_1) = p - q + (q + h) \cdot F(x_1) = 0 \Rightarrow (q + h) \cdot F(x_1^*) = q - p.$$

Además, la derivada segunda sería

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} CM(x_1^*) = (q + h) \cdot f(x_1^*) \geq 0.$$

Por lo tanto, la cantidad óptima a producir ese día será aquella que cumpla la igualdad $F(x_1^*) = \frac{q-p}{q+h}$.

Ahora bien, pongamos que tuviésemos una cantidad de producto almacenado I . Como lo que habría que producir sería la cantidad que nos lleve al nivel de inventario x_1^* , en este caso sólo tendremos que la función de costo estará desplazada I unidades hacia la izquierda, luego la cantidad óptima a producir para minimizar el costo total medio sería $x_1^* - I$ en el caso de que el producto almacenado no supere el nivel de inventario óptimo, es decir, cuando $I \leq x_1^*$. En caso contrario, cuando $I > x_1^*$ lo óptimo sería no producir, pues haciéndolo el costo sólo aumentaría.

Observado lo anterior podríamos pensar en lo que pasaría de añadir un costo de funcionamiento (el f definido en el modelo de costo total mínimo), ya que lo habíamos incluido en el estudio. Como hablábamos de un solo período, el cambio que nos va a proporcionar es que aumentará el costo en f unidades si producimos y no ocurrirá nada en caso contrario. Para hacernos una idea, sería de esta forma:

$$C_2(x_1) = \begin{cases} C(x_1) - c \cdot I + f, & \text{si se produce} \\ C(I) - c \cdot I, & \text{si no se produce} \end{cases}.$$

Denotemos por x''_1 a la cantidad de producto tal que $C(x''_1) = f + C(x_1^*)$. Con esto definido, podemos observar que la nueva cantidad óptima a producir vendría en función de la relación entre x''_1 e I :

- Si $x_1 \leq I$, entonces $C(x_1) \geq f + C(I)$, para todo $x_1 \geq I$, luego la mejor opción sería no producir.
- Si $x_1 > I$, entonces $C(x_1^*) < f + C(I)$, luego seguiremos produciendo hasta llegar a la cantidad óptima x_1^* , esto es, $x_1^* - I$ unidades.

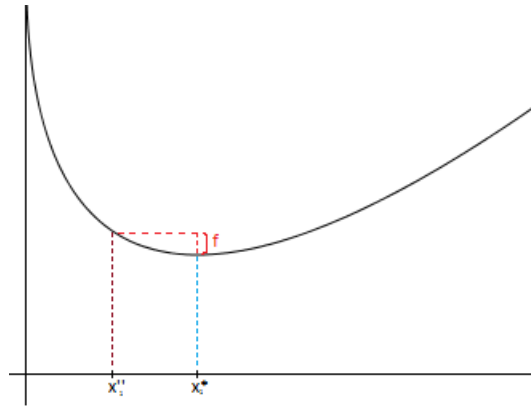


Figura 4.1: Gráfica de la función de costo medio

Con esto acabaríamos el modelo teórico para un solo período. Sin embargo, como habíamos visto con anterioridad en nuestro modelo actuamos con 7 períodos. ¿Se podrá extrapolar esta forma de actuar a más de un período? Probemos con el caso de 2 días.

Supongamos que el día 1 la demanda siga una distribución con función de densidad $f_1(x)$ que sólo toma valores no nulos en el semieje real positivo cuya función de distribución sea $F_1(x)$. De la misma manera, supongamos que la demanda del segundo día siga una distribución con función de densidad $f_2(x)$ tomando valores no nulos en el semieje real positivo y cuya función de distribución sea $F_2(x)$ (no tiene por qué ser la misma que el primer día). Volveremos a usar las constantes p , h y q del modelo de inventario de costo total mínimo y el costo asociado a producir x_1 unidades el primer día y x_2 el segundo cuando haya demandas D_1 y D_2 , para los días siguientes respectivamente, sería:

$$C(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = p \cdot (x_1 + x_2) + q \cdot [\max\{0, D_1 - x_1\} + \max\{0, D_2 - x_2 - \max\{0, x_1 - D_1\}\}] + h \cdot [\max\{0, x_1 - D_1\} + \max\{0, x_2 - D_2 + \max\{0, x_1 - D_1\}\}].$$

Nótese que las variables x_1 , x_2 , D_1 y D_2 se supondrán independientes. De la misma manera que antes, expresaremos esta función de costos por casos:

$$C(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = p \cdot (x_1 + x_2) + \begin{cases} q \cdot [(D_1 - x_1) + (D_2 - x_2)] + h \cdot 0, & x_1 \leq D_1, x_2 \leq D_2 \\ q \cdot (D_1 - x_1) + h \cdot (x_2 - D_2), & x_1 \leq D_1, x_2 > D_2 \\ q \cdot (D_2 - x_2 - x_1 + D_1) + h \cdot (x_1 - D_1), & x_1 > D_1, x_2 + (x_1 - D_1) \leq D_2 \\ q \cdot 0 + h \cdot [(x_1 - D_1) + (x_2 - D_2 + x_1 - D_1)], & x_1 > D_1, x_2 + (x_1 - D_1) > D_2 \end{cases}$$

El costo medio asociado a producir las cantidades x_1 y x_2 sería la integral doble siguiente en términos de las demandas diarias:

$$CM(x_1, x_2) = p \cdot (x_1 + x_2) + \int_{x_1}^{\infty} \int_{x_2}^{\infty} q \cdot [(\alpha_1 - x_1) + (\alpha_2 - x_2)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 d\alpha_1 + \int_{x_1}^{\infty} \int_0^{x_2} [q \cdot (\alpha_1 - x_1) + h \cdot (x_2 - \alpha_2)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 d\alpha_1 + \int_0^{x_1} \int_{x_2 + x_1 - \alpha_1}^{\infty} [q \cdot (\alpha_2 - x_2) + (h - q) \cdot (x_1 - \alpha_1)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 d\alpha_1 + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2 + x_1 - \alpha_1} h \cdot [2 \cdot (x_1 - \alpha_1) + (x_2 - \alpha_2)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 d\alpha_1.$$

Para hallar las cantidades óptimas de x_1 y x_2 a las que habría que llegar con la producción tendremos que derivar $p \cdot (x_1 + x_2)$ así como todas las integrales respecto de x_1 y x_2 . Si denotamos por S_i a la integral i -ésima, tendríamos que

$$\frac{\partial}{\partial x_1} CM(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} (p \cdot (x_1 + x_2)) + \frac{\partial}{\partial x_1} S_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} S_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} S_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} S_4 \text{ y que } \frac{\partial}{\partial x_2} CM(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} (p \cdot (x_1 + x_2)) + \frac{\partial}{\partial x_2} S_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} S_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} S_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} S_4.$$

Comencemos por las derivadas respecto de x_1 .

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (p \cdot (x_1 + x_2)) = p.$$

Para las integrales tendremos que usar dos veces la regla que habíamos visto para integrales paramétricas entre límites variables:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} S_1 &= \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} (\int_{x_2}^{\infty} q \cdot [(\alpha_1 - x_1) + (\alpha_2 - x_2)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2) d\alpha_1 + 0 - \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \cdot q \cdot \int_{x_2}^{\infty} (\alpha_2 - x_2) \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 = \int_{x_1}^{\infty} [\int_{x_2}^{\infty} (-q) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 + 0 - 0] d\alpha_1 - q \cdot f_1(x_1) \cdot \int_{x_2}^{\infty} (\alpha_2 - x_2) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 = -q \cdot (1 - F_1(x_1)) \cdot (1 - F_2(x_2)) + q \cdot f_1(x_1) \cdot \int_{x_2}^{\infty} (x_2 - \alpha_2) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} S_2 &= \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} (\int_0^{x_2} [q \cdot (\alpha_1 - x_1) + h \cdot (x_2 - \alpha_2)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2) d\alpha_1 + 0 - \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \cdot \int_0^{x_2} h \cdot (x_2 - \alpha_2) \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 = \int_{x_1}^{\infty} [\int_0^{x_2} (-q) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 + 0 - 0] d\alpha_1 - h \cdot f_1(x_1) \cdot \int_0^{x_2} (x_2 - \alpha_2) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 = -q \cdot (1 - F_1(x_1)) \cdot F_2(x_2) - h \cdot f_1(x_1) \cdot \int_0^{x_2} (x_2 - \alpha_2) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} S_3 &= \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (\int_{x_2 + x_1 - \alpha_1}^{\infty} [q \cdot (\alpha_2 - x_2) + (h - q) \cdot (x_1 - \alpha_1)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2) d\alpha_1 + \int_{x_2}^{\infty} q \cdot (\alpha_2 - x_2) \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 - 0 = \int_0^{x_1} [\int_{x_2 + x_1 - \alpha_1}^{\infty} (h - q) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 + 0 - \frac{\partial(x_1 + x_2 - \alpha_1)}{\partial x_1} [q \cdot (x_1 - \alpha_1) + (h - q) \cdot (x_1 - \alpha_1)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_1 + x_2 - \alpha_1)] d\alpha_1 + q \cdot f_1(x_1) \cdot \int_{x_2}^{\infty} (\alpha_2 - x_2) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 = (h - q) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot (1 - F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1)) d\alpha_1 - h \cdot \int_0^{x_1} (x_1 - \alpha_1) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_1 + x_2 - \alpha_1) d\alpha_1 - q \cdot f_1(x_1) \cdot \int_{x_2}^{\infty} (x_2 - \alpha_2) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} S_4 &= \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} [\int_0^{x_2 + x_1 - \alpha_1} h \cdot [2 \cdot (x_1 - \alpha_1) + (x_2 - \alpha_2)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2] d\alpha_1 + \int_0^{x_2} h \cdot (x_2 - \alpha_2) \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 - 0 = \int_0^{x_1} [\int_0^{x_2 + x_1 - \alpha_1} 2 \cdot h \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 + \frac{\partial(x_2 + x_1 - \alpha_1)}{\partial x_1} \cdot h \cdot [2 \cdot (x_1 - \alpha_1) + (\alpha_1 - x_1)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) - 0] d\alpha_1 + h \cdot f_1(x_1) \cdot \int_0^{x_2} h \cdot (x_2 - \alpha_2) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 = 2 \cdot h \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 + h \cdot \int_0^{x_1} (x_1 - \alpha_1) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 + h \cdot f_1(x_1) \cdot \int_0^{x_2} (x_2 - \end{aligned}$$

$$\alpha_2) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2.$$

Sumando estos resultados (identificaré con colores los términos que se anulen mutuamente para facilitar la lectura):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} CM(x_1, x_2) &= p + \frac{\partial}{\partial x_1} S_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} S_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} S_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} S_4 = p - q \cdot (1 - F_1(x_1)) \cdot (1 - F_2(x_2)) + q \cdot f_1(x_1) \cdot \int_{x_2}^{\infty} \\ & (x_2 - \alpha_2) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 - q \cdot (1 - F_1(x_1)) \cdot F_2(x_2) - h \cdot f_1(x_1) \cdot \int_0^{x_2} (x_2 - \alpha_2) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 + (h - q) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot (1 - \\ & F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1)) d\alpha_1 - h \cdot \int_0^{x_1} (x_1 - \alpha_1) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_1 + x_2 - \alpha_1) d\alpha_1 - q \cdot f_1(x_1) \cdot \int_{x_2}^{\infty} (x_2 - \\ & \alpha_2) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 + 2 \cdot h \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 + h \cdot \int_0^{x_1} (x_1 - \alpha_1) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2 + x_1 - \\ & \alpha_1) d\alpha_1 + h \cdot f_1(x_1) \cdot \int_0^{x_2} (x_2 - \alpha_2) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 = p - q \cdot (1 - F_1(x_1)) + (h - q) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot d\alpha_1 + (q - \\ & h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 + 2 \cdot h \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 = p - q + q \cdot F_1(x_1) + \\ & (h - q) \cdot F_1(x_1) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 = p - q + h \cdot F_1(x_1) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) F_2(x_2 + \\ & x_1 - \alpha_1) d\alpha_1. \end{aligned}$$

Igualando a cero para ver el valor que hace mínimo respecto de x_1 al costo medio tendremos que será el x_1^* tal que

$$h \cdot F_1(x_1^*) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1^*} f_1(\alpha_1) F_2(x_2 + x_1^* - \alpha_1) d\alpha_1 = q - p.$$

Habiendo llegado a ese resultado, podemos pasar a hacer lo mismo con x_2 .

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (p \cdot (x_1 + x_2)) = p.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} S_1 &= \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_2} (\int_{x_2}^{\infty} q \cdot [(\alpha_1 - x_1) + (\alpha_2 - x_2)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2) d\alpha_1 + 0 - 0 = \int_{x_1}^{\infty} [\int_{x_2}^{\infty} (-q) \cdot f_1(\alpha_1) \\ & \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 + 0 - \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \cdot q \cdot (\alpha_1 - x_1) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2) d\alpha_2] d\alpha_1 = -q \cdot (1 - F_1(x_1)) \cdot (1 - F_2(x_2)) + \\ & q \cdot f_2(x_2) \cdot \int_{x_1}^{\infty} (x_1 - \alpha_1) \cdot f_1(\alpha_1) d\alpha_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} S_2 &= \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_2} (\int_0^{x_2} [q \cdot (\alpha_1 - x_1) + h \cdot (x_2 - \alpha_2)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2) d\alpha_1 + 0 - 0 = \int_{x_1}^{\infty} [\int_0^{x_2} h \cdot f_1(\alpha_1) \cdot \\ & f_2(\alpha_2) d\alpha_2 + q \cdot (\alpha_1 - x_1) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2) - 0] d\alpha_1 = h \cdot (1 - F_1(x_1)) \cdot F_2(x_2) - q \cdot f_2(x_2) \cdot \int_{x_1}^{\infty} (x_1 - \\ & \alpha_1) \cdot f_1(\alpha_1) d\alpha_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} S_3 &= \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} (\int_{x_2+x_1-\alpha_1}^{\infty} [q \cdot (\alpha_2 - x_2) + (h - q) \cdot (x_1 - \alpha_1)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2) d\alpha_1 + 0 - \\ & 0 = \int_0^{x_1} [\int_{x_2+x_1-\alpha_1}^{\infty} (-q) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 + 0 - \frac{\partial(x_1+x_2-\alpha_1)}{\partial x_2} [q \cdot (x_1 - \alpha_1) + (h - q) \cdot (x_1 - \\ & \alpha_1)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_1 + x_2 - \alpha_1)] d\alpha_1 = -q \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot (1 - F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1)) d\alpha_1 - h \cdot \int_0^{x_1} (x_1 - \\ & \alpha_1) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_1 + x_2 - \alpha_1) d\alpha_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} S_4 &= \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} [\int_0^{x_2+x_1-\alpha_1} h \cdot [2 \cdot (x_1 - \alpha_1) + (x_2 - \alpha_2)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2] d\alpha_1 + 0 - 0 = \int_0^{x_1} [\int_0^{x_2+x_1-\alpha_1} \\ & h \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) d\alpha_2 + \frac{\partial(x_2+x_1-\alpha_1)}{\partial x_2} \cdot h \cdot [2 \cdot (x_1 - \alpha_1) + (\alpha_1 - x_1)] \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) - \\ & 0] d\alpha_1 = h \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 + h \cdot \int_0^{x_1} (x_1 - \alpha_1) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1. \end{aligned}$$

Sumando los distintos términos (de nuevo identificando por colores):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} CM(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}(p \cdot (x_1 + x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} S_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} S_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} S_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} S_4) = p - q \cdot (1 - F_1(x_1)) \cdot (1 - \\ &F_2(x_2)) + q \cdot f_2(x_2) \cdot \int_{x_1}^{\infty} (x_1 - \alpha_1) \cdot f_1(\alpha_1) d\alpha_1 + h \cdot (1 - F_1(x_1)) \cdot F_2(x_2) - q \cdot f_2(x_2) \cdot \int_{x_1}^{\infty} (x_1 - \alpha_1) \cdot f_1(\alpha_1) \\ &d\alpha_1 - q \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot (1 - F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1)) d\alpha_1 - h \cdot \int_0^{x_1} (x_1 - \alpha_1) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_1 + x_2 - \alpha_1) d\alpha_1 \\ &+ h \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 + h \cdot \int_0^{x_1} (x_1 - \alpha_1) \cdot f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 = p - \\ &q \cdot (1 - F_1(x_1)) \cdot (1 - F_2(x_2)) + h \cdot (1 - F_1(x_1)) \cdot F_2(x_2) - q \cdot F_1(x_1) + q \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2 + x_1 - \\ &\alpha_1) d\alpha_1 + h \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 = p - q(1 - F_1(x_1)) + (q + h) \cdot F_2(x_2) \cdot (1 - F_1(x_1)) - \\ &q \cdot F_1(x_1) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 = p - q + (q + h) \cdot F_2(x_2) \cdot (1 - F_1(x_1)) + \\ &(q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1. \end{aligned}$$

Igualando a cero para ver el valor que minimiza el costo medio respecto de x_2 tendremos que será el x_2^* tal que

$$(q + h) \cdot F_2(x_2^*) \cdot (1 - F_1(x_1)) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2^* + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 = q - p.$$

Cabe notar que este último resultado recordaría mucho al obtenido cuando sólo hay una etapa, pues si en vez de $F_2(x_2^* + x_1 - \alpha_1)$ fuera $F_2(x_2^*)$ el resultado sería idéntico (excepto en que nuestra variable ahora se llama x_2).

Restaría comprobar que esos valores nos proporcionen un mínimo de la función, así que derivaremos de nuevo para obtener el Hessiano.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} CM(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}(p - q + h \cdot F_1(x_1) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1) = h \cdot f_1(x_1) + \\ &(q + h) \cdot [\int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} (\int_0^{x_2 + x_1 - \alpha_1} f_2(\alpha_2)) d\alpha_1 + f_1(x_1) \cdot F_2(x_2)] = h \cdot f_1(x_1) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot \\ &f_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 + (q + h) \cdot f_1(x_1) \cdot F_2(x_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} CM(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}(p - q + h \cdot F_1(x_1) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1) = (q + \\ &h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} (F_2(x_2 + x_1 - \alpha_1)) d\alpha_1 = (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} CM(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}(p - q + (q + h) \cdot F_2(x_2) \cdot (1 - F_1(x_1)) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2 + \\ &x_1 - \alpha_1) d\alpha_1) = -(q + h) \cdot f_1(x_1) \cdot F_2(x_2) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 + (q + \\ &h) \cdot f_1(x_1) \cdot F_2(x_2) = (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} CM(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}(p - q + (q + h) \cdot F_2(x_2) \cdot (1 - F_1(x_1)) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot F_2(x_2 + x_1 - \\ &\alpha_1) d\alpha_1) = (q + h) \cdot f_2(x_2) \cdot (1 - F_1(x_1)) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1. \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} h \cdot f_1(x_1) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2 + x_1 - \alpha_1) d\alpha_1 + (q + h) \cdot f_1(x_1) \cdot F_2(x_2) &\geq 0 \text{ y} \\ |Hessiano(CM(x_1, x_2))| &= (q + h) \cdot f_2(x_2) \cdot (1 - F_1(x_1)) \cdot [h \cdot f_1(x_1) + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2 + \end{aligned}$$

$$x_1 - \alpha_1)d\alpha_1 + (q + h) \cdot f_1(x_1) \cdot F_2(x_2)] + (q + h) \cdot \int_0^{x_1} f_1(\alpha_1) \cdot f_2(x_2 + x_1 - \alpha_1)d\alpha_1 \cdot [h \cdot f_1(x_1) + (q + h) \cdot f_1(x_1) \cdot F_2(x_2)] \geq 0,$$

se puede afirmar que el Hessiano es una matriz definida positiva y, por tanto, (x_1^*, x_2^*) es un mínimo.

Para los casos de $I > 0$ y $f > 0$ las modificaciones necesarias se construyen de forma similar al caso de 1 etapa, por lo que no se tratarán.

Por otra parte, aunque esto no confirme que se pueda hacer lo mismo para los casos de más etapas, se deja como conjetura (bastante probable) y, en el caso de resolverlo para 7 etapas, se podría tomar en nuestro modelo de costos tomando los valores de los x_i^* , $i = 1, \dots, 7$ como nuestras producciones de cada día de la semana.

Capítulo 5

Aplicación del modelo 2 a la generación de plaquetas en el ICHH

Explicados los modelos matemáticos para la búsqueda del inventario óptimo sería el momento de contrastar los resultados con demandas reales. Por ello, me puse en contacto con el ICHH para ver si podían proporcionarme algunos datos. Decidí enfocarlo a las plaquetas por varias razones. Por un lado, son el producto de menor vida útil (7 días) de entre los que podría estudiar, lo cual hace que su manejo y producción deba ser más cuidadoso que los demás (no tendría mucho sentido, por ejemplo, aplicar el estudio al plasma que dura 1 año, ya que la caducidad sería casi inexistente). Por otro lado, es también uno de los derivados sanguíneos de los que hay menos documentos en cuanto a gestión, por lo que podría ser un tema relativamente innovador.

Tomando los modelos de desperdicio mínimo y de costo total mínimo bases, habrá que añadir unas cuantas condiciones:

- Tamaño de almacenamiento limitado.
- Demandas no determinísticas.

Para hacer el problema más completo se podrían añadir también las otras modificaciones comentadas, pero en ese caso tal vez el Excel no sería la mejor opción sino implementarlo en otros programas como el Gusek, pese a que no sería tan manejable para el personal del ICHH. Estas modificaciones que hemos escogido, sin embargo, tendrán que estar obligatoriamente presentes, debido a que en circunstancias reales el almacén suele estar bastante limitado y las demandas no se conocen (son las que más afectarían a los resultados).

Los datos que me fueron proporcionados eran las demandas totales de plaquetas de casi todos los días de los años 2013 y 2014, en concreto 690 días. Se tendrá que intentar buscar la distribución que sigan o alguna forma de poder aproximarla. Para empezar se puede tomar el total de los datos que proporcionados y representarlo en una gráfica (Ver figura 7.4 del Anexo). Como se puede observar, la gráfica de las demandas muestra que la distribución no se asemeja a una normal ni a las otras que tengan forma de campana de Gauss, ya que presenta no una, sino dos “montañas”. Casi se podría decir que estamos ante una distribución bimodal, lo cual no es muy alentador cuando estas demandas más usuales

```

> t.test(Datos11[2:105,6],Datos11[2:79,21])

Welch Two Sample t-test

data: Datos11[2:105, 6] and Datos11[2:79, 21]
t = 26.547, df = 166.79, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 26.16093 30.36471
sample estimates:
mean of x mean of y
34.634615  6.371795
> bartlett.test(list(Datos11[2:79,6],Datos11[2:79,21]))

Bartlett test of homogeneity of variances

data: list(Datos11[2:79, 6], Datos11[2:79, 21])
Bartlett's K-squared = 27.37, df = 1, p-value = 1.68e-07
> fligner.test(list(Datos11[2:79,6],Datos11[2:79,21]))

Fligner-Killeen test of homogeneity of variances

data: list(Datos11[2:79, 6], Datos11[2:79, 21])
Fligner-Killeen:med chi-squared = 12.208, df = 1, p-value = 0.0004758

```

Figura 5.1: Resultados al comparar las demandas de lunes y sábados

están tan lejos unas de otras. Por lo tanto, se tendrá que buscar alguna otra forma de discernir la distribución.

Para ello, inicialmente se hará una distinción por días de la semana, ya que podemos pensar que dependiendo de eso puedan variar en gran medida los datos. En las figuras 7.5-7.11 se puede ver cómo son las demandas de cada día, de lunes a domingo. De esta forma se puede diferenciar claramente y a simple vista las distribuciones de los fines de semana respecto a las de lunes a viernes, que son relativamente similares. Sin embargo, si se quisiera hacer matemáticamente también se podría, a mano o usando programas como el R. Si se efectúa el test t de Welch se pueden comparar las medias de dos poblaciones, mientras que con los tests de Barlett (mejor cuando se parecen a una normal) o de Fligner de homogeneidad de varianzas (no paramétrico y mucho mejor cuando no se asemejan a distribuciones normales) se puede comparar ese otro parámetro. Comparando lunes y sábado, por ejemplo, obtendríamos la figura 5.1.

De estos tests se confirma la conclusión de que, usando el nivel de confianza usual de $1 - \alpha = 0,95$, hay diferencias entre los días de la semana. Además, con los datos divididos por días reflejados en las figuras 7.5-7.11, estos se van asemejando más a campanas de Gauss y van presentando cierta simetría, lo cual podría indicar que pueden seguir una distribución conocida. Se está trabajando con demandas discretas y éstas dependerán de si las personas necesitan sangre o no (con una cierta probabilidad para cada caso), por lo que tal vez podrían seguir distribuciones derivadas de la Bernoulli. En concreto se probará con la binomial y la binomial negativa. Adicionalmente también se harán pruebas con la distribución normal, que pese a ser continua tiende a estar bastante presente en la vida cotidiana y podría ser la razón de que los datos parezcan campanas de Gauss, así como de Poisson, ya que también es muy usual en procesos de la vida real y ha sido identificada

como la distribución de las demandas sanguíneas en otras ocasiones ([11]).

Para comprobar la normalidad de los datos se usará el test de Shapiro; para las distribuciones de Poisson, las binomiales y las binomiales negativas usaremos el test de la χ^2 . Los resultados se encuentran en las figuras 7.12-7.18 del Anexo. Como podemos observar, usando un nivel de confianza del 95 %:

- Los lunes no se puede negar la suposición de que se comporten como una normal, al contrario que con las otras distribuciones.
- Los miércoles no se puede refutar la hipótesis de que se comporten como una binomial negativa, aunque sí con las demás.
- Los domingos no es posible negar el supuesto de que se comporten como una binomial negativa (de hecho, es muy probable que lo sea), cosa que no ocurre con las demás distribuciones.
- Los demás días no se comportan como ninguna de las distribuciones estudiadas con nuestro rango de aceptación.

Con la finalidad de intentar ajustar un poco mejor los días que no han cuadrado en ninguna categoría hice una última distinción. Como ya se había comentado anteriormente en este trabajo, los períodos vacacionales influyen bastante en las demandas, por lo que tal vez eliminando ese “ruido” consigamos ajustar mejor los datos a alguna distribución. Quitando del conjunto de datos aquellas fechas vacacionales de mayor duración (julio y agosto por vacaciones de verano, Navidades y Semana Santa), repetimos el estudio anterior para ver cómo cambia la situación (ver figuras 7.19-7.25) :

- Los lunes no se puede negar la suposición de que se comporten como una normal aunque es incluso mucho más probable que sea una binomial negativa.
- Los miércoles no se puede refutar la hipótesis de que se comporten como una binomial negativa (casi podría afirmarse directamente), aunque sí con las demás.
- Los jueves tampoco se puede negar que sigan una binomial negativa, aunque no sigue ninguna otra.
- Los domingos no es posible negar el supuesto de que se comporten como una binomial negativa (de hecho, es muy probable que lo sea), cosa que no ocurre con las demás distribuciones.
- Los demás días no se comportan como ninguna de las distribuciones estudiadas con nuestro rango de aceptación.

Convendría comentar que los domingos son los únicos días de la semana donde haciendo esta distinción ha bajado la similitud con las distribuciones, pero en parte tiene sentido. Siendo parte del fin de semana, son días de vacaciones igualmente, por lo que al haber restado el número de datos indiscriminadamente se pierde significancia. Pese a esto, en general se ha observado que en más de la mitad de los días podríamos aceptar distribuciones binomiales

negativas y en los otros casos no hemos podido identificar cómo se comportan los datos. Con esto en mente ya se podría pasar a probar el modelo, suponiendo para los datos cuya distribución es desconocida que las probabilidades de que la demanda diaria tome cada valor sean las observadas (es decir, como si fueran fijas y conocidas y coincidieran con las de nuestros datos).

Cabe notar que se escogió el Modelo 2 (el de costo total mínimo) dado que su solución óptima es un caso particular de la del Modelo 1 (el de desperdicio mínimo), por lo que nuestra solución serviría para los dos. Esto no sería recíproco de haber escogido el Modelo 1. Por otro lado, el Modelo 3 es teóricamente óptimo de por sí y no permite las modificaciones de capacidad fácilmente de forma eficiente (estaríamos restándole importancia a la solución óptima, ya que la cantidad a producir puede ser mucho mayor que el inventario máximo), por lo que sólo haremos el modelo de costo mínimo.

Respecto a los valores de los costos unitarios, en el ICHH sólo tienen uno en cuenta y engloba los tres que estudiamos (funcionamiento, producción y mantenimiento), por lo que no podemos sacar valores reales y tomaremos unos ficticios: $p = 1$, $h = 0,1$ y $f = 100$.

A la hora de programarlo en Excel se hizo de la siguiente manera. En primer lugar se adaptó el Excel base del Modelo 2 para que contuviera las restricciones de capacidad, completando la tabla y el Solver. Hubo que ajustar la función objetivo añadiendo como sumandos el costo de outsourcing y las cantidades que sobrarían (y caducarían). Este último sumando es fácil de reducir luego de la función de costos y ayuda a que el Solver prefiera no desperdiciar producto. Por otro lado, se usó el programa R para generar números aleatorios de las distribuciones, los suficientes para 365 días de demandas tanto reales como predichas (una columna para cada tipo). Además, se generó otra tabla con un modelo parecido al de la primera para tomar en cuenta que, al final de cada día, al haber producido la cantidad decidida para esa jornada y habiendo estipulado las de los subsiguientes (que vienen de ejecutar el modelo en la primera tabla), ya conocemos la demanda real respectiva y por tanto hay que ajustar el inventario para cubrir la demanda y colocar las sobras en el almacén. Estos resultados se devuelven a la tabla inicial para, avanzando las demandas, las producciones y los almacenes un día, efectuar el mismo proceso de nuevo (y así sucesivamente).

De esta manera se simuló lo que ocurriría con el inventario si se siguiera el modelo a lo largo de un año, con un inventario inicial de 60 unidades. Los resultados fueron los siguientes:

- Sobraron unas pocas unidades 7 días (siempre menos de 6 menos excepto una vez que fueron 11).
- Faltaron unidades 27 días (casi siempre menos de 5, pero 3 veces pasaron de 15).

La razón fue que, tras una racha de menor producción que demanda, el inventario inicial se fue reduciendo y luego rara vez se reponía el “colchón” (ya que el Solver busca la cantidad óptima para cubrir la demanda, sin tener en cuenta que suele convenir tener algo almacenado para imprevistos), Sólo se reponía en el almacén cuando sobraban unidades de algún día y volvían a salir poco después. Sin embargo, esta situación se podría solventar si estipulamos que, cuando tras usar el Solver nos quede poco producto en el inventario, produzcamos unas unidades fijas adicionales a las que nos diría el Solver al día siguiente. De esta manera bajaría significativamente el número de roturas (faltas de producto), aunque

probablemente sobraría en más ocasiones. Dado que en los bancos de sangre es mejor que sobre un poco a que falte, esta solución es razonable y se ajustaría bastante al valor óptimo (de hecho, en el ICHH consideran que habría que mantener en stock varias veces la demanda diaria media, por lo que sería justificable).

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se ha conseguido dar solución a dos de los problemas de inventario perecedero que se pueden presentar en un banco de sangre, enfocado al ICHH: minimizar el desperdicio de derivados sanguíneos y minimizar el costo total de gestión del inventario, ambos cubriendo la demanda y aplicados al caso de las plaquetas. En un principio se presentaron modelos básicos con las necesidades a cubrir en cada problema, de forma que obtuviera el mejor resultado posible, para posteriormente presentar algunas modificaciones adicionales que nos ayudaran a adecuar los modelos a otras situaciones, e ir adaptándolos a la realidad.

Para el primer modelo se escogieron como modificaciones el tamaño de producción limitado, tamaño de almacenamiento limitado, distinción entre grupos sanguíneos, la fijación de días en los que no se produzca y, por último, que las demandas no sean determinísticas. Para cada una se expresó qué debía cambiar en el modelo para resolver la nueva situación y estas modificaciones son compatibles unas con otras, por lo que uniéndolas todas al final se obtiene un problema casi real. Con respecto a esta última modificación, la más complicada, se vio que para asegurar que se cubra la demanda todos los días, el modelo no es eficiente por sí mismo (pues la forma de asegurarlo implica producir siempre la demanda máxima, sobrando mucho producto, lo cual va en contra del objetivo final). Por ello se propuso otra forma de solventarlo: mantener un repositorio/almacén con una buena cantidad de producto que se vaya renovando siguiendo la estrategia FIFO.

Respecto al segundo modelo, se comprobó que la solución óptima del problema base también pertenecía al conjunto de soluciones óptimas del primer modelo. Además de las ya citadas anteriormente, también se realizaron las modificaciones de deterioro diario (que podría servir para el modelo anterior también) y la de abastecimiento de múltiples hospitales, explicando las particularidades de cada una y cómo resolverlas. Al tener más modificaciones que en el anterior, este problema tiene en cuenta muchos más factores y es incluso más cercano a la realidad. En lo que respecta al modelo de demanda no determinística se buscó resolver el problema añadiendo la posibilidad de outsourcing (aunque se intentará evitar que ocurra) y resolviendo tanto el problema semanal como el diario para un mejor ajuste, lo cual, ayudado por un macro que se diseñó con ese propósito, nos permite acercar el problema de forma satisfactoria a la realidad.

Para resolver el segundo problema también se probó con otro enfoque totalmente distinto, mediante la Teoría de Inventarios, para encontrar el nivel de inventario óptimo a producir para minimizar el costo medio total con demandas no determinísticas. En un principio se estudió un caso base de una sola etapa sin costo de funcionamiento ni almacén previo y poco a poco se fueron añadiendo dichos elementos, para pasar al modelo de 2 etapas. Esas soluciones óptimas teóricas podrían después pasarse como valores fijos de los x_i al Modelo 2 de Excel para obtener otro resultado posible.

Posteriormente se pasó a aplicar el Modelo 2 a un problema real, ya que al resolverlo se obtiene también la solución del primero y a su vez el tercero ya proporcionaría una buena solución de por sí. Recibiendo algunos datos reales por parte del ICHH, se pasó a identificar la distribución de las demandas, logrando cuadrar las referentes a lunes, miércoles, jueves y domingos como binomiales negativas. Usando estos resultados y unos costos ficticios ante la imposibilidad de tomar los reales (desconocidos), se procedió a modificar el Modelo 2 apropiadamente y a construir y utilizar un macro con el que poder realizar una simulación de 1 año. Adicionalmente se identificó alguna mejora del macro para obtener mejores resultados, la cual concordaría con algunas políticas de inventario llevadas a cabo en el ICHH.

En definitiva, se ha logrado hacer propuestas para resolver los problemas planteados, aportando modelos que permitan optimizar el inventario de plaquetas en el ICHH. No obstante, de haber tenido una mayor cantidad de datos de las demandas reales de plaquetas o de los costos asociados, o incluso los costos totales del inventario anual del ICHH, hubiera podido comparar cuánto se podría llegar a ahorrar con mis modelos.

Por otro lado, este trabajo también sugiere varias líneas de estudio que abren las posibilidades a futuras investigaciones, como son un problema mixto entre costo mínimo de inventario con el coste asociado en el problema del viajante (“Travelling Salesman Problem”, o “TSP”) a enviar esos productos a sus clientes (hospitales) o una modificación del Modelo 3 que incluya más de 2 etapas (de hecho, incluso podría intentar probarse para n períodos).

Bibliografía

- [1] ICHH, <http://www3.gobiernodecanarias.org/sanidad/ichh/>
- [2] Cruz Roja Española, <http://www.donarsangre.org/puedo-donar-si/>
- [3] OCOM, <http://www-2.dc.uba.ar/materias/ocom/>
- [4] Salazar JJ. *A mathematical programming technique to perishable inventory management*. 2015.
- [5] Ballou RH. *Logística : Administración de la cadena de suministro*. 5^a ed. México : Pearson educación. 2004.
- [6] Douglas I. - hollan,sr, wagstaff,w, leikola,j, lothe,f. J R *Management of blood-transfusion services*. Soc Health 111(2):79-.1991.
- [7] Forcé H. *Supply chain management of blood products: A literature review*. 259. 2011.
- [8] Hillier FS. *Introducción a la investigación de operaciones*. 5^a ed. en inglés (3^a ed. en español), reimp.. ed. Méxicoetc : McGraw-Hill.1994.
- [9] Perlman Y and Levner I. *Perishable inventory management in healthcare*. Journal of Service Science and Management 07(01):11. 2014.
- [10] Salehipour A and Sepehri MM. *Exact and heuristic solutions to minimize total waiting time in the blood products distribution problem*. 2012.
- [11] Van Dijk N, Haijema R, Van DW, Sibinga CS. *Blood platelet production: A novel approach for practical optimization*. Trans 49(3):411-20. 2009.

Capítulo 7

Anexos

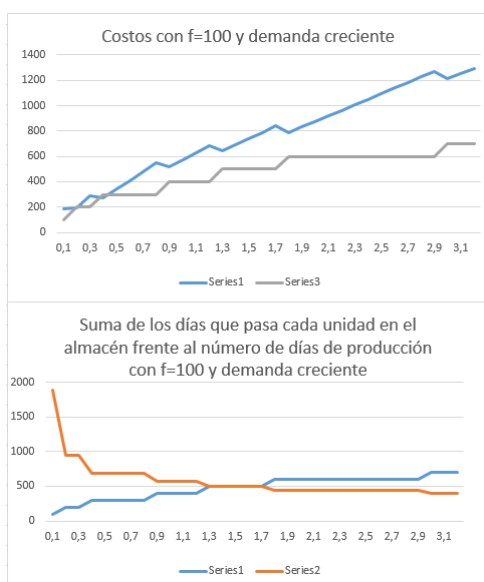


Figura 7.1: Estudio variando h con demanda creciente

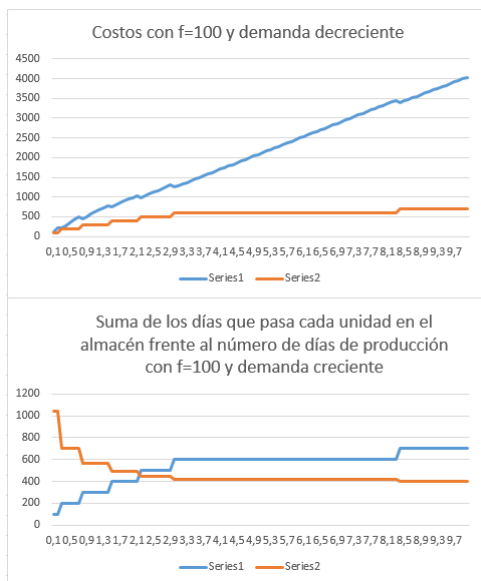


Figura 7.2: Estudio variando h con demanda decreciente

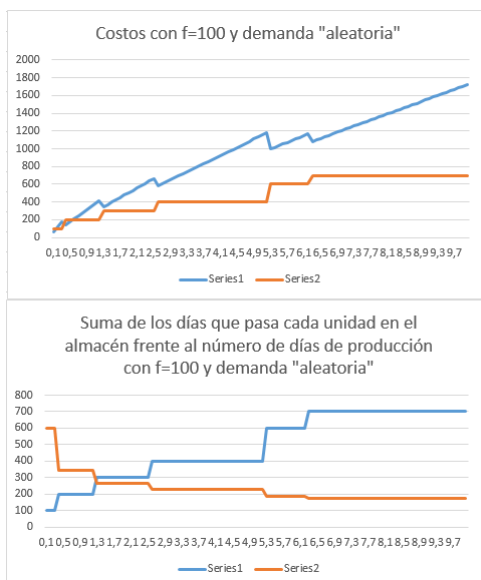


Figura 7.3: Estudio variando h con demanda "aleatoria"

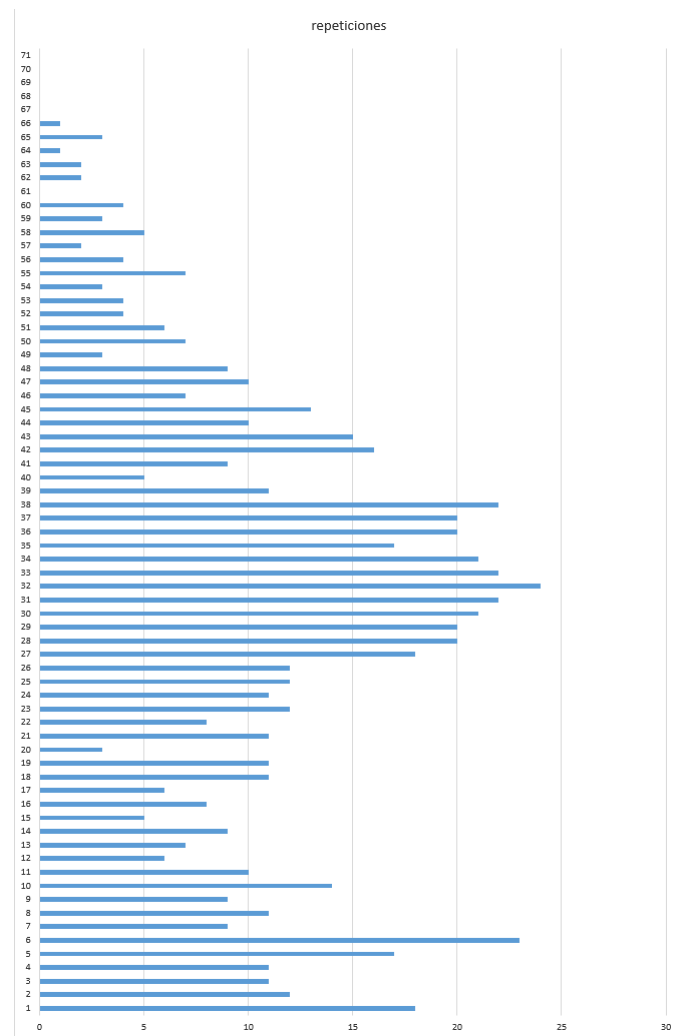


Figura 7.4: Número de días de cada total de demanda

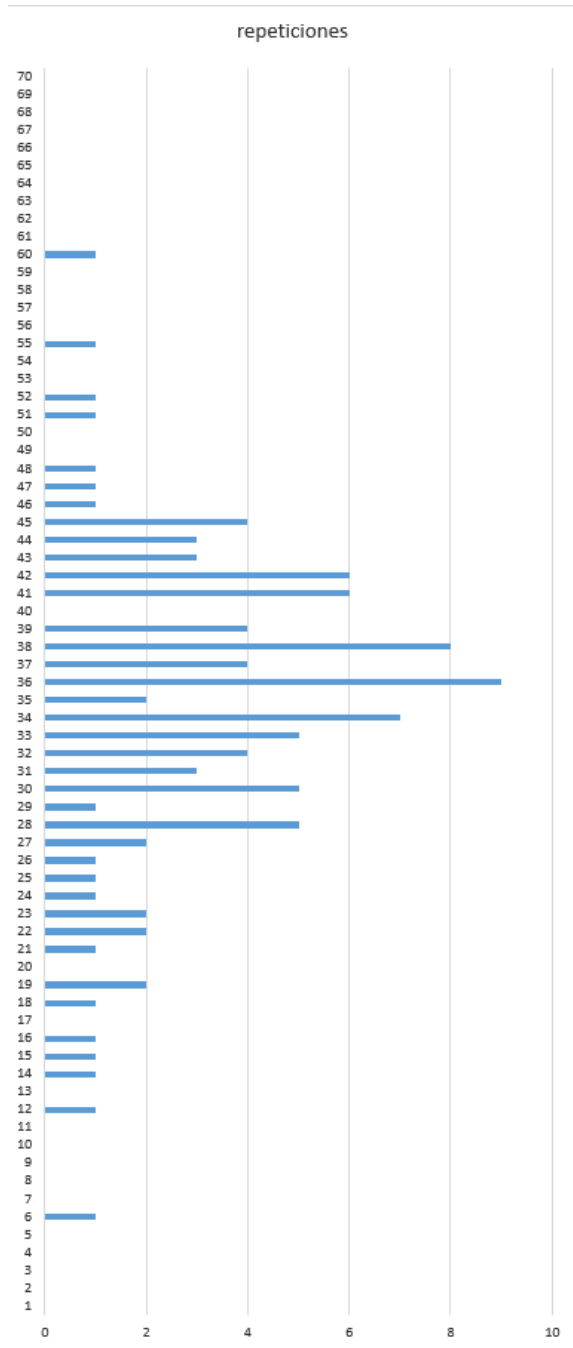


Figura 7.5: Número de lunes de cada total de demanda

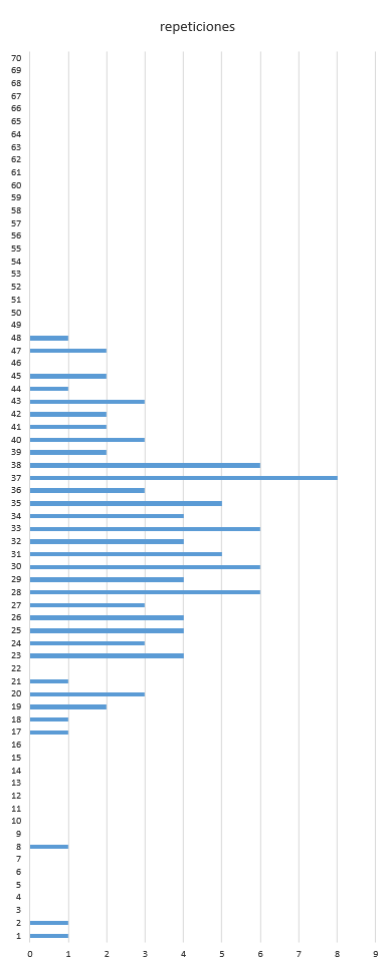


Figura 7.6: Número de martres de cada total de demanda

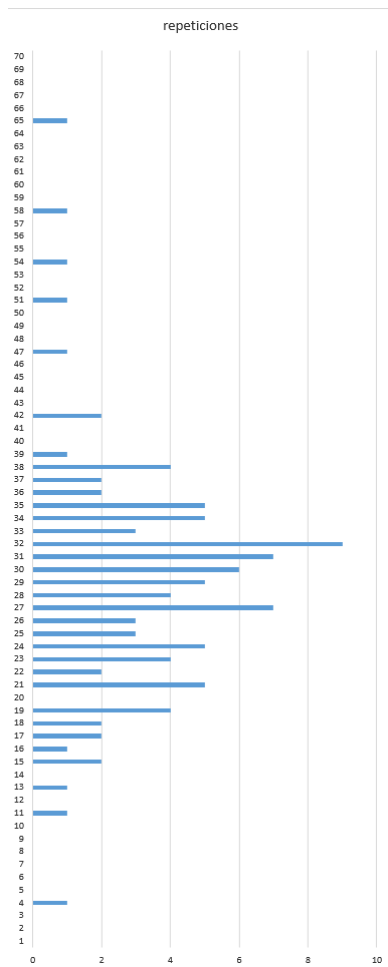


Figura 7.7: Número de miércoles de cada total de demanda

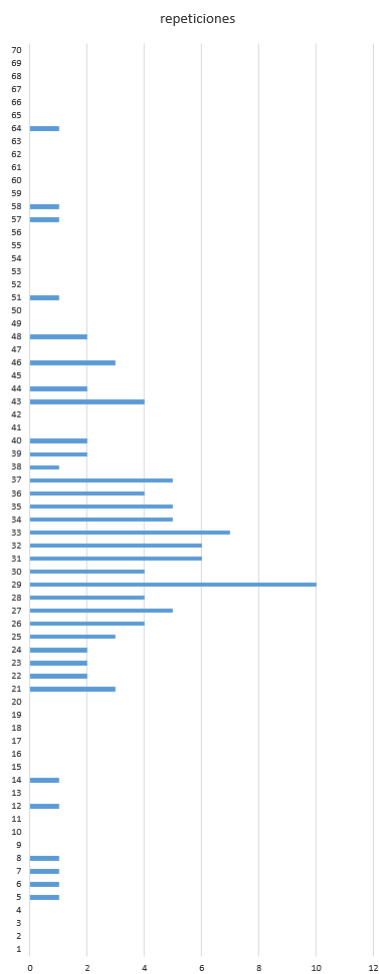


Figura 7.8: Número de juegos de cada total de demanda

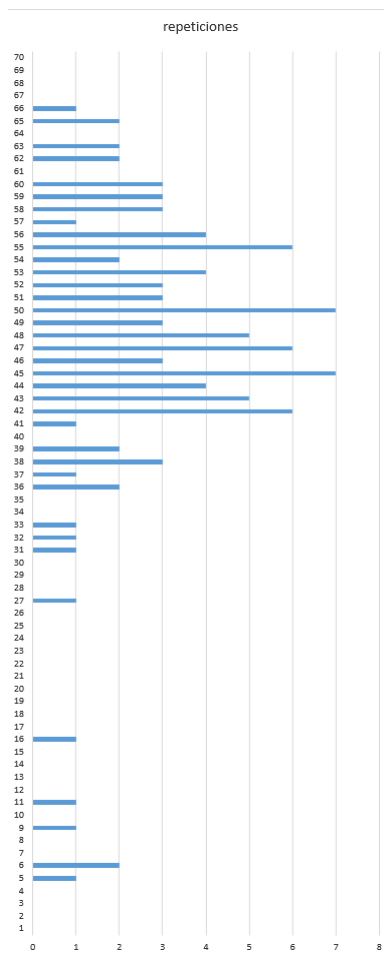


Figura 7.9: Número de viernes de cada total de demanda

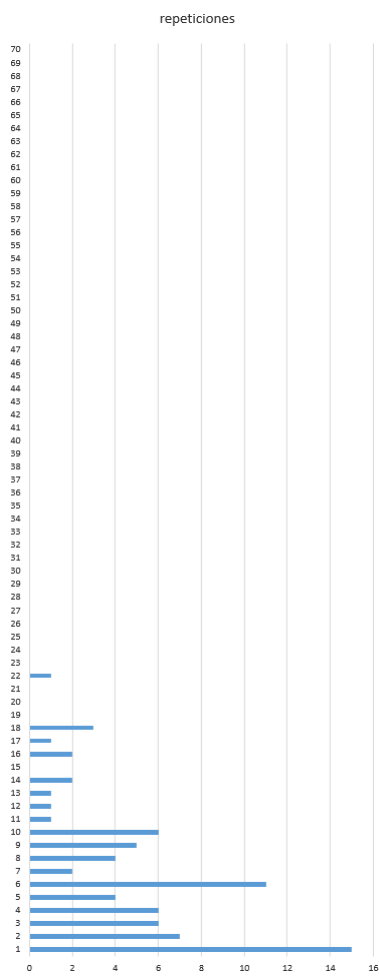


Figura 7.10: Número de sábados de cada total de demanda

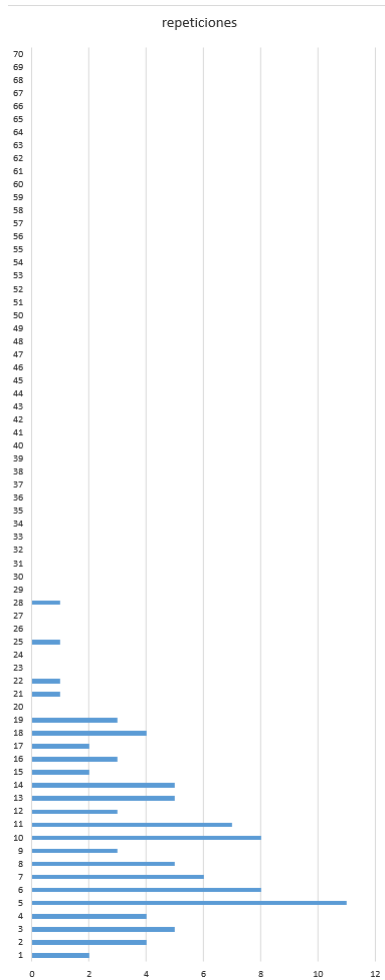


Figura 7.11: Número de domingos de cada total de demanda


```

> shapiro.test(Datos[,5])$p.value
[1] 0.09163401
> gf1<-goodfit(Datos[,5],type= "poisson",method= "MinChisq")
> summary(gf1)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 78517.47 59      0
> gf2<-goodfit(Datos[,5],type= "binomial",method= "MinChisq")
> summary(gf2)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 2.601877e+12 59      0
> gf3<-goodfit(Datos[,5],type= "nbinomial",method= "MinChisq")
> summary(gf3)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df      P(> X^2)
Pearson 86.91079 58 0.008311409

```

Figura 7.12: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los lunes

```

> shapiro.test(Datos[,8])$p.value
[1] 0.001591905
> gf4<-goodfit(Datos[,8],type= "poisson",method= "MinChisq")
> summary(gf4)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 716841.1 47      0
> gf5<-goodfit(Datos[,8],type= "binomial",method= "MinChisq")
> summary(gf5)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 831216686319 47      0
> gf6<-goodfit(Datos[,8],type= "nbinomial",method= "MinChisq")
> summary(gf6)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df      P(> X^2)
Pearson 116.391 46 5.039353e-08

```

Figura 7.13: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los martes

```

> shapiro.test(Datos[,11])$p.value
[1] 0.0002406792
> gf7<-goodfit(Datos[,11],type= "poisson",method= "MinChisq")
> summary(gf7)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 2761056 64      0
> gf8<-goodfit(Datos[,11],type= "binomial",method= "MinChisq")
> summary(gf8)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 1.187581e+15 64      0
> gf9<-goodfit(Datos[,11],type= "nbinomial",method= "MinChisq")
> summary(gf9)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 70.60747 63 0.2385163

```

Figura 7.14: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los miércoles

```

> shapiro.test(Datos[,14])$p.value
[1] 0.0007238152
> gf10<-goodfit(Datos[,14],type= "poisson",method= "MinChisq")
> summary(gf10)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 809203.7 63      0
> gf11<-goodfit(Datos[,14],type= "binomial",method= "MinChisq")
> summary(gf11)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 1.089087e+14 63      0
> gf12<-goodfit(Datos[,14],type= "nbinomial",method= "MinChisq")
> summary(gf12)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 87.4401 62 0.01836822

```

Figura 7.15: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los jueves

```

> shapiro.test(Datos[,17])$p.value
[1] 2.153706e-08
> gf13<-goodfit(Datos[,17],type= "poisson",method= "MinChisq")
> summary(gf13)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 3954074 65      0
> gf14<-goodfit(Datos[,17],type= "binomial",method= "MinChisq")
> summary(gf14)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 4.668381e+14 65      0
> gf15<-goodfit(Datos[,17],type= "nbinomial",method= "MinChisq")
> summary(gf15)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df      P(> X^2)
Pearson 187.6732 64 4.433189e-14

```

Figura 7.16: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los viernes

```

> shapiro.test(Datos[,20])$p.value
[1] 5.133663e-06
> gf16<-goodfit(Datos[,20],type= "poisson",method= "MinChisq")
> summary(gf16)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 1627.53 21      0
> gf17<-goodfit(Datos[,20],type= "binomial",method= "MinChisq")
> summary(gf17)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 379534 21      0
> gf18<-goodfit(Datos[,20],type= "nbinomial",method= "MinChisq")
> summary(gf18)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df      P(> X^2)
Pearson 38.50472 20 0.007678498

```

Figura 7.17: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los sábados

```

> shapiro.test(Datos[,23])$p.value
[1] 0.001412093
> gf19<-goodfit(Datos[,23],type= "poisson",method= "MinChisq")
> summary(gf19)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df      P(> X^2)
Pearson 1246.891 27 8.948434e-246
> gf20<-goodfit(Datos[,23],type= "binomial",method= "MinChisq")
> summary(gf20)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 2454029 27      0
> gf21<-goodfit(Datos[,23],type= "nbinomial",method= "MinChisq")
> summary(gf21)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 17.25933 26 0.9010394

```

Figura 7.18: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los domingos

```

> shapiro.test(Datos[5:83,4])$p.value
[1] 0.4804789
> gf1<-goodfit(Datos[5:83,4],type="poisson",method="MinChisq")
> summary(gf1)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 1972.705 59      0
> gf2<-goodfit(Datos[5:83,4],type="binomial",method="MinChisq")
> summary(gf2)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution
:

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 9288343163 59      0
> gf3<-goodfit(Datos[5:83,4],type="nbinomial",method="MinChisq")
> summary(gf3)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 45.13001 58 0.8913473

```

Figura 7.19: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los lunes no festivos

```

> shapiro.test(Datos[5:84,7])$p.value
[1] 0.001385503
> gf4<-goodfit(Datos[5:84,7],type="poisson",method="MinChisq")
> summary(gf4)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 728480.6 47      0
> gf5<-goodfit(Datos[5:84,7],type="binomial",method="MinChisq")
> summary(gf5)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 1.046831e+12 47      0
> gf6<-goodfit(Datos[5:84,7],type="nbinomial",method="MinChisq")
> summary(gf6)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df      P(> X^2)
Pearson 111.9422 46 2.022231e-07

```

Figura 7.20: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los martes no festivos

```

> shapiro.test(Datos[5:83,10])$p.value
[1] 0.0006326374
> gf7<-goodfit(Datos[5:83,10],type="poisson",method="MinChisq")
> summary(gf7)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df      P(> X^2)
Pearson 425.8886 57 7.044901e-58
> gf8<-goodfit(Datos[5:83,10],type="binomial",method="MinChisq")
> summary(gf8)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 148254369 57      0
> gf9<-goodfit(Datos[5:83,10],type="nbinomial",method="MinChisq")
> summary(gf9)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df      P(> X^2)
Pearson 39.578 56 0.9526843

```

Figura 7.21: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los miércoles no festivos

```

> shapiro.test(Datos[5:83,13])$p.value
[1] 0.0007807499
> gf10<-goodfit(Datos[5:83,13],type="poisson",method="MinChisq")
> summary(gf10)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 68233.85 63      0
> gf11<-goodfit(Datos[5:83,13],type="binomial",method="MinChisq")
> summary(gf11)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 4.974885e+12 63      0
> gf12<-goodfit(Datos[5:83,13],type="nbinomial",method="MinChisq")
> summary(gf12)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 64.82739 62 0.3783422

```

Figura 7.22: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los jueves no festivos

```

> shapiro.test(Datos[5:84,16])$p.value
[1] 1.69234e-06
> gf13<-goodfit(Datos[5:84,16],type="poisson",method="MinChisq")
> summary(gf13)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 4059494 65      0
> gf14<-goodfit(Datos[5:84,16],type="binomial",method="MinChisq")
> summary(gf14)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 5.237143e+14 65      0
> gf15<-goodfit(Datos[5:84,16],type="nbinomial",method="MinChisq")
> summary(gf15)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 156.0798 64 1.171337e-09

```

Figura 7.23: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los viernes no festivos

```
> shapiro.test(Datos[5:64,19])$p.value
[1] 4.218339e-06
> gf16<-goodfit(Datos[5:64,19],type="poisson",method="MinChisq")
> summary(gf16)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 1609.12 21      0
> gf17<-goodfit(Datos[5:64,19],type="binomial",method="MinChisq")
> summary(gf17)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 388909.7 21      0
> gf18<-goodfit(Datos[5:64,19],type="nbinomial",method="MinChisq")
> summary(gf18)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 34.32919 20 0.02398223
```

Figura 7.24: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los sábados no festivos

```

> shapiro.test(Datos[5:76,22])$p.value
[1] 0.01127234
> gf19<-goodfit(Datos[5:76,22],type="poisson",method="MinChisq")
> summary(gf19)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution

      X^2 df      P(> X^2)
Pearson 308.5596 24 3.157056e-51
> gf20<-goodfit(Datos[5:76,22],type="binomial",method="MinChisq")
> summary(gf20)
      Goodness-of-fit test for binomial distribution

      X^2 df P(> X^2)
Pearson 211901.2 24      0
> gf21<-goodfit(Datos[5:76,22],type="nbinomial",method="MinChisq")
> summary(gf21)
      Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

      X^2 df  P(> X^2)
Pearson 20.40534 23 0.6173529

```

Figura 7.25: Tests de normalidad, Poisson, binomial y binomial negativa de los domingos no festivos