Universidad de La Laguna

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS | FACULTAD DE CIENCIAS

Sara Gabriela Batista Cruz

Euclides: Libros VII - VIII - IX

Euclid: Books VII - VIII - IX

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2018

Dirigido por

José Manuel Méndez Pérez

José Manuel Méndez Pérez
Departamento de
Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado se estudia la «tercera parte» de los Elementos de Euclides, es decir, los libros VII, VIII y IX, que conforman la llamada «geometría aritmética». En ellos encontramos 23 definiciones (todas en el libro VII), que comentamos brevemente, y 102 proposiciones, a saber: 39 en el libro VII, de las que demostramos ocho; 27 en el VIII, de las que demostramos diez, y 36 en el IX, de las que sólo demostramos tres. Entre las proposiciones elegidas para comentar se cuentan las referentes al denominado «algoritmo de Euclides», al máximo común divisor y al mínimo común múltiplo, a la suma de las progresiones geométricas y a los números perfectos.

Palabras clave: *Euclides – geometría aritmética – algoritmo euclídeo – máximo común divisor – mínimo común múltiplo – progresiones geométricas – números perfectos.*

Abstract

In this Final Degree Project we study the «third part» of Euclid's Elements, that is, books VII, VIII and IX, which make up the so-called «arithmetic geometry». In these books we find 23 definitions (all in book VII), which we will briefly comment, and 102 propositions, namely: 39 in book VII, of which we will prove eight; 27 in the VIII, of which we will demonstrate ten, and 36 in the IX, of which we will only demonstrate three. Among the propositions we have chosen to comment are those referring to the so-called «Euclidean algorithm», to the greatest common divisor and to the least common multiple, to the sum of the geometric progressions and to the perfect numbers.

Keywords: *Euclid – arithmetic geometry – Euclidean algorithm – greatest common divisor – least common multiple – sum of the geometric progressions – perfect numbers.*

Contenido

Introducción

El objetivo de este trabajo es el estudio de los libros VII-IX de los *Elementos* de Euclides, los cuales conforman la llamada «geometría aritmética» y constan de 23 definiciones y 102 proposiciones. Está dividido en cuatro capítulos: el primero es de introducción y los otros tres están dedicados a cada uno de los tres libros objeto de nuestro estudio.

En el capítulo primero realizamos una introducción a la vida y, sobre todo, a la obra de Euclides. En el segundo, dedicado al libro VII, recogemos todas las definiciones porque muestran una gran cohesión deductiva interna y se utilizan en los dos siguientes (sobre todo, las de números pares e impares, primos y proporcionales), empezando por la fundamental diferenciación euclídea entre unidad y número. Hemos seleccionado para demostrar ocho proposiciones que consideramos de gran utilidad a lo largo de los libros VII, VIII y IX, a saber: a) las tres primeras (2.3.1, 2.3.2 y 2.3.3), que presentan el algoritmo euclídeo para la determinación de números primos y el hallazgo de la «medida común máxima» -esto es, el máximo común divisor- entre dos o tres números no primos entre sí; b) la 16, la 17 y la 19 (2.3.9, 2.3.10 y 2.3.12), que establecen propiedades fundamentales de los números y sientan las bases de la proporción numérica; y c) la 33 y la 34 (2.3.19 y 2.3.20), en las cuales se halla el mínimo común múltiplo de dos o más números. Pero, además de las anteriores, citamos también las proposiciones 11-15, la 18 (mínimamente comentada con una nota), las 20-22, la 27, la 29 y la 31, a fin de que el texto sea autocontenido.

El capítulo tercero se centra en el libro VIII, donde Euclides aborda el estudio de las proporciones continuas con razón constante (progresiones geométricas) y sus propiedades. De sus 27 proposiciones demostramos diez (3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8, 3.2.9, 3.2.11 y 3.2.12), aunque recogemos también la 3.2.4 y la 3.2.10. Por último, en el capítulo cuarto se comenta el libro IX, que trata de los números cuadrados y cubos, de los proporcionales, de los primos y de los pares e impares. De sus 36 proposiciones demostraremos sólo tres: la 20

(4.2.2), la 35 (4.2.3) y la 36 (4.2.4), las cuales establecen que existen infinitos números primos, la fórmula de la suma de una progresión geométrica y los llamados números perfectos, respectivamente, aunque también enunciamos la 13 (4.2.1).

La idea central de este trabajo es ponerse en el lugar de los estudiantes y estudiosos de esta obra a lo largo de tantos siglos, y afrontarla y comprenderla tal como está escrita. En los *Elementos* no figura ninguna fórmula, no se emplea ningún símbolo para las operaciones ni para expresar una igualdad, no hay siquiera un solo ejemplo numérico en todo el texto. Únicamente con la palabra y apoyándose en algunas figuras, Euclides construye esta monumental obra. Pero Euclides dispone de una poderosa herramienta: el idioma griego. El griego era una lengua muy rica y flexible y atesoraba ya -siglos antes de Euclides- una brillante tradición literaria. Baste recordar a Homero o a Hesíodo. Con este idioma era posible expresar ideas tan abstractas como son los conceptos propios de la Filosofía y de las Matemáticas. Precisamente, es manifiesta la influencia platónica y pitagórica en los *Elementos*, así como la de la lógica aristotélica.

Hemos procurado ser fieles a la literalidad de las pruebas de Euclides, pero con palabras solamente este Trabajo sobrepasaría los límites autorizados, por lo que también hemos acudido a fórmulas y notaciones actuales. Así, cuando el lector vea $C = A \times B$, Euclides leería «A, al multiplicaar a B, hace el número C». O cuando se escriba $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, lo expresaría «como A es a B, así C es a D».

1

Bío-bibliografía de Euclides de Alejandría

1.1. Vida y obra

Es muy poco lo que sabemos de la vida de Euclides de Alejandría. De hecho, según Luis Vega [1, p. 9], sólo hay dos referencias dignas de crédito, que nos lo sitúan como coetáneo de Tolemeo I Sóter (367[faraón en 304]-283 a.C.) y (oscuro, según este autor) profesor en Alejandría, respectivamente. Y es posible, como quiere el propio Vega [1, p. 8], que esta falta de noticias sobre su vida se deba a la fama que adquirió su obra desde el mismo momento de su aparición, en torno al año 300 a.C. Esta fama hizo que el nombre de Euclides equivaliera a geometría[1].

La primera referencia sobre la vida de Euclides procede de Proclo (412-485), un filósofo neoplatónico que, entre otras muchas cosas, escribió unos *Comentarios al libro I de los Elementos de Euclides*, donde leemos: «vivió en tiempos del primer Tolemeo, pues Arquímedes, que vino inmediatamente después, menciona a Euclides» [1, p. 9].[2]

1 Vega [1, p. 8] cita al respecto unas palabras del escritor inglés E.M. Forster, quien dice de Euclides: «Nada sabemos de él: a decir verdad, hoy lo consideramos como una rama del saber más que como un hombre». Este desconocimiento sobre su persona hizo que, a finales de la Edad Media y en el Renacimiento, se le confundiera con el filósofo Euclides de Mégara (450-380), más de un siglo más viejo que Euclides de Alejandría, hasta que dos de sus editores renacentistas más conocidos, el italiano Federico Commandino (1509-1575) y el alemán Cristóbal Clavio (1538-1612), disiparon esta confusión en los años setenta del siglo XVI, como veremos al final de esta introducción

2 El profesor Vega [1, p. 9] precisa que, aunque esta alusión a Euclides no es de Arquímedes, sino probablemente fruto de una interpolación posterior, la afirmación es cierta porque Ateneo de Náucratis, retórico y gramático griego, «un autor bastante próximo» (en comparación con Proclo, que vivió más de siete siglos después que Euclides), también sitúa a Euclides en la época de Tolemeo I. A esto tenemos que

La segunda referencia sobre la enseñanza de Euclides en Alejandría se debe a Papo de Alejandría (290-350), el último de los grandes matemáticos griegos y del que tampoco se sabe gran cosa, quién escribió, entre otros, unos *Comentarios a los Elementos de Euclides*, la *Gran sintaxis matemática* (el *Almagesto* de los árabes) y la *Colección matemática*, en la que, precisamente, nos habla de los discípulos de Euclides en Alejandría en torno al año 250 a.C. [1, p. 11].

En suma, hoy suele decirse que nació hacia el año 325 a.C. y murió en torno al 265 a.C. y que vivió toda o la mayor parte de su vida en Alejandría, donde trabajó en el Museo y fue el fundador de una escuela matemática. Otras noticias sobre su vida, como que nació en Atenas o que estudió en la Academia ateniense, no pasan de ser conjeturas más o menos probables.

En cuanto a sus obras, hay constancia de que Euclides escribió al menos una decena, de las que han pervivido dos: los *Elementos* (Στοιχεῖα) y los *Datos*(Δεδομένα). Los *Datos* parecen ser un complemento de los primeros seis libros de los *Elementos*, pues emplean el análisis geométrico para resolver problemas [1, p. 14]. Papo, en su mencionada *Colección matemática*, comenta otras dos obras de Euclides: *Fenómenos* (sobre astronomía teórica) y *Óptica* (sobre la propagación rectilínea de la luz por oposición a la catóptrica [reflexión de la luz] y la dióptrica [refracción de la luz]). Y, poco después, Teón de Alejandría (aproximadamente 335-405), el padre de Hipatia, la primera mujer matemática de quien se tiene conocimiento seguro, refundió tanto los *Elementos* como la *Óptica*, convirtiéndose así en el primer editor de Euclides.

Otras obras de Euclides, citadas por Papo o por Proclo, que menciona Vega [1, p. 15 - 17], son: *Sobre divisiones de figuras*, *Porismas* o *Conclusiones*, *Sobre cónicas* (citado también por Apolonio de Perga), *Sobre superficies*, *Elementos de música* y *Sobre paralogismos.*

1.2. Los *Elementos*

La obra cumbre de Euclides, su *opus magnum*, son los *Elementos*, los cuales, según Proclo [1, p. 17], «contienen una guía incontestable y perfecta de la exposición científica misma en materia de geometría». Tal y como la conocemos hoy, en las ediciones de Johan Ludvig Heiberg y Heinrich Menge ([3], [4]), ahora revisada por Evangelos Stamatis (1969-1973, *Euclidis Elementa*, Leipzig: Teubner), texto a partir del cual se ha hecho la traducción española de M. L. Puertas (precedida de una extensa introducción de Luis Vega), en tres volúmenes, para la editorial Gredos (y que es la que empleamos en nuestro trabajo), los *Elementos* están constituidos por 13 libros, en los que hallamos un total de 132 definiciones

decir que Ateneo no es del siglo II a. C., como escribe el profesor Vega, sino de los siglos II-III después de Cristo y, por tanto, no tan próximo, ya que lo separan de Euclides más de 500 años.

(en griego ὅροι, literalmente 'términos') y 465 proposiciones (gr. προτάσεις), de las que 93 son problemas y 372 teoremas, además de 5 postulados (gr. αἰτήματα) y 5 nociones comunes (gr. κοιναί ἔννοιαι)[3], correspondientes a nuestros axiomas y que están todos en el primer libro.

Como se sabe, entre los siglos IX y XI, los árabes tradujeron muchas obras griegas de ciencia y filosofía. Respecto a Euclides, a los 13 libros originarios les añadieron dos más: el XIV y el XV. Pero hoy se sabe que no son de Euclides: el XIV es obra de Hipsicles de Alejandría, un matemático importante que vivió en el siglo II a.C., mientras que parece que el XV fue escrito, en el siglo VI, por un autor ya bizantino[4].

1.3. Descripción de esta obra

En general, podemos dividir los trece libros de los *Elementos* en cinco grandes apartados:

1. Los cuatro primeros libros presentan una teoría de la geometría plana. Destaca aquí lo que Vega [1, p. 48-62] llama el «pórtico axiomático»: las 23 definiciones, seguidas de los 5 postulados y rematadas por las 5 nociones comunes con que se abre el libro I. Entre las definiciones, están las de *punto*, *línea*, *recta*, *superficie*, *círculo* y *paralelas*. Entre los postulados, el primero es el de trazar una línea recta de cualquier punto a cualquier otro y el tercero es el de describir un círculo con cualquier centro y distancia[5]. Y, por último, en las nociones comunes encontramos enunciados como «Las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí», «Si cosas iguales se añaden a cosas iguales, los totales son iguales», que parecen axiomas generales e indiscutibles, aunque no todos constituyen principios indiscutidos[6]. El libro I contiene, además del citado pórtico axiomático, 48 proposiciones (14 problemas y 34 teoremas), en las que trata, entre otras cosas, de las paralelas;

[3] Hay diversidad de subdivisiones: así, mientras Vega [1, p. 18] o Collete [7, p. 106] hablan sólo de 5 nociones comunes, Rey Pastor y Babini [19, p. 82] mencionan 8.

[4] Para Luis Javier Hernández Paricio, catedrático de Geometría y Topología de la Universidad de La Rioja (`https://www.unirioja.es/cu/luhernan/Divul/CI/CIHernandez.pdf`), es el famoso Isidoro de Mileto, mientras que, para Rey Pastor y Babini [19, p. 73], se trata de un discípulo suyo, que Vega [1, p. 18] concreta como Damascio, el último escolarca de la Academia de Atenas, cosa que no hemos visto consignada en ningún otro sitio.

[5] Sin embargo, Vega [1, p. 53] niega que Euclides pretenda fijar con estos postulados las propiedades del espacio que hoy calificaríamos de «euclidiano».

[6] Por ejemplo, el último: «El todo es mayor que la parte» [1, p. 61]. De aquí que Vega [1, p. 63] distinga, en este pórtico axiomático, entre nociones que Euclides ha tomado del legado tradicional, otras que ha reelaborado él mismo y las descubiertas por Euclides.

la penúltima proposición es una versión elemental del celebrado «teorema de Pitágoras». El libro II consta de 14 proposiciones (2 problemas y 14 teoremas) dirigidos a ilustrar el método de aplicación de áreas, que se ha llamado también «álgebra geométrica» de los griegos, denominación que Vega [1, p. 69] encuentra «bastante ambigua y harto problemática». El libro III parte de 11 definiciones y contiene 37 proposiciones (5 problemas y 32 teoremas), que presentan la geometría del círculo. Y el libro IV parte de 7 definiciones y consta de 16 proposiciones, todas las cuales son problemas, en que se estudian inscripciones y circunscripciones de figuras regulares rectilíneas y círculos. Estos cuatro primeros libros han sido objeto, en esta Facultad, del TFG de Candelaria Noemi Gorrín Hernández [9], trabajo que hemos consultado.
2. Los dos libros siguientes constituyen una teoría (que Vega [1, p. 73] llama *generalizada*, en vez de *general*) de la proporción[7], que se refiere a las magnitudes como términos de la relación de proporcionalidad. El libro V consta de 18 definiciones y 25 proposiciones, todas ellas teoremas, que, para Melanie Hernández Alonso [12], que se ocupó de este apartado en su TFG, suponen una introducción a los números reales y su objetivo es elaborar una teoría sobre razones o cocientes de magnitudes, sin importar si son o no conmensurables. Para Vega [1, p. 78-79], este libro constituye una presentación sistemática de ideas y resultados de la época en que se escribieron los *Elementos* y manifiesta notable cohesión interna y gran poder de sistematización[8]. El libro VI contiene 4 definiciones y 33 proposiciones (8 problemas y 25 teoremas) y constituye una aplicación de la teoría de la proporción a la geometría plana, pero, según Vega [1, p. 81], carece de cohesión interna.
3. Los libros VII-IX conforman la llamada «geometría aritmética» (es de lo que nos ocuparemos nosotros en este trabajo y, por tanto, le dedicaremos mayor espacio en esta introducción). En conjunto comprenden 23 definiciones, todas ellas en el libro VII, y 102 proposiciones a lo largo de los tres libros[9]. El libro VII se abre con una primera definición muy importante: «La unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una». Según Vega [1, p. 82], «Jámblico (*Introducción a la aritmética de Nicómaco* 11, 5) dice que ésta es la definición de unidad de los [pitagóricos] modernos; [...] tiene visos de ser una definición dirigida a separar la unidad de la multiplicidad y de la divisibilidad. Su sentido resulta algo menos impreciso a contraluz de [...] la definición segunda, ‘un número es una pluralidad com-

---

[7] Consideramos interesante un apunte de Vega [1, p. 77] sobre la proporción (gr. ἀναλογία): «Conviene caer en la cuenta de que una proporción no es una igualdad entre dos objetos, una relación binaria o una identidad de razones, sino más bien una relación cuaternaria».

[8] Una cuestión interesante, calificada de «punto oscuro» por Vega [1, p. 79-80], es la relación entre las magnitudes del libro V y los números del VII.

[9] En esta parte destacan la ausencia de postulados y el hecho de que no se reconozca ningún problema como tal [1, p. 81].

puesta de unidades'». Asimismo destaca Vega [1, p. 83] que «en el contexto de los *Elementos*, la unidad no es un número [...]; de hecho, Euclides da pruebas separadas para las unidades y para los números, aunque no siempre sea coherente con esta distinción»[10]. Las definiciones 6-10 tratan de los números pares e impares y las 11-12 se centran en los números primos relativos. En la definición 20 se habla de «números proporcionales», pero sin transferirles las propiedades de la proporción que había establecido en el libro V [1, p. 85-86]. Sin embargo, el libro VII muestra una muy estimable cohesión deductiva interna. Y las proposiciones 1-3 presentan el algoritmo euclídeo para la determinación de números primos y el hallazgo de la «medida común máxima» (m.c.d.) entre dos o tres números no primos entre sí. En las proposiciones 4-20 del libro VII se sientan las bases de la proporción numérica; en las 21-32 se estudian los primos relativos; y en 33-39 el mínimo común múltiplo. El libro VIII se ocupa de series de números en proporción geométrica. Y el IX trata de varias cosas, entre las que destacan la resolución de un número en sus factores primos (IX, 4) y la cantidad infinita de números primos (IX, 20). Las proposiciones 21-34 versan sobre las relaciones entre números pares e impares (según Vega [1, p. 88], se transcribiría aquí un manual pitagórico anterior). Y el libro se cierra con la última proposición, que contiene la fórmula para obtener los llamados «números perfectos», los cuales, según la definición 22 del libro VII, son aquellos «números iguales a la suma de sus factores».

4. El libro X es singular: se conoce como «la cruz de los matemáticos» porque Simon Stevin, un matemático renacentista, sólo veía en él dificultades sin provecho. Vega [1, p. 89] opina que el apodo no le viene mal porque el libro X representa una «encrucijada» dentro de los *Elementos*. Consta de 16 definiciones, repartidas en tres grupos, y 115 proposiciones, todas ellas teoremas, que estudian tipos y criterios de conmensurabilidad e inconmensurabilidad y clasifican las rectas irracionales. Así, las primeras definiciones establecen que «se dicen conmensurables las magnitudes que son medidas por la misma medida, e inconmensurables las que no tienen ninguna medida común» (X, 1); «las líneas rectas son conmensurables en cuadrado cuando los cuadrados <levantados> sobre ellas son medidos por una misma área» (X, 2); «con estos supuestos se prueba que hay una cantidad ilimitada de líneas rectas que son conmensurables e inconmensurables respectivamente, unas sólo en longitud y otras en cuadrado también, con una línea recta designada. Llámense entonces racional la línea recta designada y racionales las líneas que son conmensurables con ella, bien en longitud y en cuadrado, bien

[10] Y sigue un poco más adelante: «Así pues, el primer supuesto de la aritmética euclídea viene a ser que hay una cantidad indefinida de unidades y que sus colecciones finitas constituyen números. A esto se añade otro rasgo característico de la concepción aritmética de los *Elementos*: los números no se producen, se encuentran».

en cuadrado sólo, pero irracionales las inconmensurables con ella» (X, 3). Vega [1, p. 92-95] indica que el libro X recoge investigaciones recientes en la época de Euclides y logra muchos resultados dignos de mención, entre los que señala: la primera proposición es la base del método de exhausción[11] (que tan importante sería para el cálculo infinitesimal), que aquí aparece en el contexto antifairético (o de «sustracción recíproca», del gr. ἀνθυφαιρεῖν) de las proposiciones 3 y 4; la proposición segunda se hace eco del criterio antifairético de inconmensurabilidad; las proposiciones tercera y cuarta determinan la obtención de la medida común máxima de dos o tres magnitudes conmensurables; etc. Además, la proposición 111 cataloga hasta 13 géneros de líneas irracionales. No obstante, también apunta Vega [1, p. 95] que su estructura deductiva ofrece una cohesión interna deficiente, por lo que se ha dicho que es un «desastre pedagógico».
5. Por último, los libros XI-XIII tratan de la geometría del espacio. Este apartado consta de 28 definiciones, todas en el libro XI, y 75 proposiciones (63 teoremas y 12 problemas). Vega [1, p. 96] destaca que ciertas definiciones, como la de la esfera (14), introducen el movimiento: «cuando, permaneciendo fijo el diámetro de un semicírculo, se hace girar el semicírculo y se lo vuelve de nuevo a la misma posición de la que había partido su puesta en movimiento, la figura así comprendida es una esfera». Hay que destacar que, en su geometría sólida o del espacio, Euclides reduce las cuestiones tridimensionales a las bidimensionales ya resueltas en los libros previos, aunque «esta estrategia reductiva supone relaciones -no tratadas antes en los *Elementos*- entre planos y puntos, planos y líneas, planos y planos, relaciones que en última instancia quedan todas sin explicar. En el libro XII se emplea el método de exhausción. Y el XIII, que es el más destacado, es célebre por el estudio y construcción dentro de la esfera de los cinco poliedros regulares conocidos como «cuerpos platónicos»: pirámide o tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro y dodecaedro. De este último libro de los *Elementos* afirma Vega [1, p. 99] que tiene una estructura deductiva interna sumamente cuidada, cosa que no sucede con los dos libros anteriores.

El profesor Vega acaba su exposición del contenido de los *Elementos* con una conclusión sobre su constitución. Y empieza encontrando [1, p. 99] un «contraste entre la fachada 'axiomática' del libro I y la composición no poco heterogénea e irregular del tratado en su conjunto». Y basa esta impresión tanto en la variedad de teorías tratadas como en el diverso empleo del método deductivo en los

[11] Aunque respetamos el término y la ortografía que emplea Vega, lo cierto es que está más extendido el uso de «método exhaustivo» o la ortografía sin -s-: «método de exhaución»: así es como aparece, por ejemplo, en el título de un artículo de Ana García Ovejero y Ana María Delgado Marante, que hemos consultado para nuestro trabajo: «Euclides: Los *Elementos*. Teoría de las paralelas. Método de exhaución» [8].

distintos libros. Así, distinguiendo entre la cohesión deductiva interna (dentro de cada libro) y la externa (de cada libro con los demás de su campo) y entre la coherencia teórica de cada libro y su disposición didáctica, establece [1, p. 101], en lo que respecta al apartado que nos toca (libros VII-IX), que el libro VII presenta mayor cohesión interna y externa que el libro IX, el cual, además, presenta una coherencia teórica menor. De este modo, el libro VII (como el I, el V y el XIII) puede reconstruirse mejor que otros. Y concluye [1, p. 102]: «Ante esos altibajos, no es difícil sacar la impresión de que los *Elementos*, por regla general, cumplen mejor con el propósito de constituir una introducción eficaz y progresiva a las teorías y métodos de la matemática elemental - la geometría, más en particular-, que con las exigencias de lo que habría de ser una reconstrucción deductiva cabal de todo un cuerpo, complejo y articulado, de conocimientos».

Precisamente a esta cuestión dedica Vega [1, p. 102-123] su amplia valoración sobre la significación axiomática de los *Elementos*, cuyo lenguaje matemático -afirma [1, p. 102]- es desde hace tiempo una lengua muerta: «Los *Elementos* sobreviven gracias a la fama en calidad de arquetipo del método axiomático; sobreviven gracias a la pedagogía como la ilustración cabal de una axiomática determinada [...] 'material', 'ingenua', 'informal'» [1, p. 103]. En este sentido, según el profesor Vega [1, p. 103-104], suele confundirse la geometría y el método real empleado por Euclides con el programa clásico de axiomatización nacido en el siglo XVII: «Las confusiones y los malentendidos surgen cuando esta retroproyección va más allá de sus fines iniciales, didácticos o analíticos, y pasa a convertirse en una especie de guía o clave interpretativa del sentido de los *Elementos*». Y, así, pasa revista a tres hipótesis sobre la contribución de Euclides a la cuestión axiomática: a) la hipótesis mínima y, sobre todo, la máxima, de la que acaba renegando con un «no creo que los *Elementos* constituyan una muestra cabal del método axiomático» [1, p. 110]; b) la hipótesis tradicional, presente ya en Proclo, el primero que comparó el «pórtico axiomático» del libro I de los *Elementos* con el programa metodológico de los *Segundos Analíticos* de Aristóteles, considerando la obra de Euclides una materialización práctica de la teoría demostrativa de Aristóteles. Al respecto, Vega [1, p. 113-117] compara los términos empleados por ambos autores y llega a la conclusión de que los *Elementos* de Euclides no son una mera aplicación de los *Analíticos* de Aristóteles, sino que van mucho más allá ; y c) la hipótesis que, partiendo de la comparación con Aristóteles, intenta hallar la clave de la sistematización de Euclides. Aquí Vega [1, p. 121] indica que el «punto de vista axiomático» hace que Aristóteles distinga entre principios indemostrables y proposiciones demostrables, que se obtienen a partir de aquellos, de manera que a partir de principios comunes se pueden deducir tesis específicas de un campo de conocimiento. En cambio, Euclides se habría propuesto elucidar y organizar ciertos campos matemáticos básicos para convertirlos en cuerpos autónomos y concluyentes de conocimientos: «Así pues, no cabe negar un talante axiomatiforme a los *Elementos* de Euclides. [...] Lo cierto en cualquier caso es que la idea de demostración propuesta por los

Analíticos se extiende en los *Elementos* a todo un cuerpo de conocimientos». Y, así, concluye Vega [1, p. 122] que puede verse en Euclides una primicia de la demostración axiomática clásica.

1.4. Los *Elementos* en la tradición matemática griega

En conexión con lo que acabamos de exponer, podemos decir, en referencia a la tradición de los *Elementos*[12] , que los de Euclides coronan una tradición de tratados elementales hoy desaparecidos [1, p. 20]. Todos ellos fueron muy inferiores al de Euclides debido a que sus exposiciones eran mucho menos didácticas y porque carecían del método axiomático o de sistematización deductiva con que se presentan teoremas y pruebas, método que, desde Euclides, caracteriza a las ciencias. En palabras de Vega [1, p. 29]: «Por lo que hoy sabemos, el de Euclides es el primer tratado que distingue expresamente un conjunto determinado de primeros principios, con un alcance general en esta área de conocimiento, y el único que los subdistingue en definiciones [hóroi], postulados [aitémata] y nociones comunes [koinaì énnoiai]».

En relación con la citada evolución que va desde la tradicional resolución analítica de problemas hasta la innovadora sistematización sintética de teoremas, Proclo [1, p. 35-37] señala una pauta general de prueba de las proposiciones de los *Elementos*, la cual comprende los seis pasos siguientes:

1. Enunciado: proposición de que se construya un objeto, si se trata de un problema, o de que se formule una afirmación, si se trata de un teorema.
2. Exposición: presentación de lo que se va a hacer.
3. Determinación o delimitación: especificación del objeto de la prueba.
4. Preparación: disposición de las relaciones a partir de lo dado para obtener el resultado propuesto.
5. Demostración: es el paso fundamental, pues consiste en derivar consecuencias de los conocimientos previos.
6. Conclusión: afirmación de que se ha resuelto la determinación o delimitación, en el caso de un problema, o reiteración de que se cumple el enunciado, en el caso de un teorema.

De estos seis pasos, además de la demostración, no pueden faltar nunca ni el primero (enunciado) ni el último (conclusión).

[12] El término *elementos* (gr. singular στοιχεῖον, plural στοιχεῖα) se empleaba con varias acepciones: a) compilaciones de conocimientos básicos; b) proposiciones básicas sobre las que montar deducciones; y, en sentido restringido, c) principios básicos de cualquier disciplina sobre los que se teje un cuerpo sistemático de conocimientos. En esta última acepción concibe Proclo los *Elementos* de Euclides.

1.5. La institucionalización de los *Elementos*

Se comprueba en varios hechos. En primer lugar, los *Elementos* se identificaron muy pronto con la geometría (y, en definitiva, con la matemática griega). De este modo, su autoridad se hizo indiscutible, sus afirmaciones eran verdades incuestionables. Y en torno a ellos fue creciendo la geometría en forma de sucesivas adiciones que la iban completando. Además, su método axiomático y su claridad expositiva constituyeron modelos que debían seguirse, pues la geometría se había convertido en la disciplina matemática por excelencia. Ello no implicó, sin embargo, que los *Elementos* se fosilizaran: no sólo se fueron completando mediante sucesivas adiciones, sino que se siguieron discutiendo algunos puntos particulares: Apolonio de Perga probó alguna de las nociones comunes, supuestamente indemostrables; Herón corrige algunas demostraciones; Papo explicita axiomas suplementarios; Teón, del que volveremos a hablar más adelante por haber sido el principal editor de los *Elementos*, añade alguna demostración propia; etc.

Así, en definitiva, por su significación metodológica y didáctica los *Elementos* gozaron de una autoridad indiscutible desde su aparición y se «escolarizaron» hasta transformarse en el manual de geometría por antonomasia desde la Antigüedad clásica hasta el siglo XIX. Y Vega [1, p. 46-47] afirma que, a partir del siglo XVII, «Euclides se convierte en el epónimo no tanto de una disciplina matemática como de un método de axiomatización», de lo que ya hemos hablado suficientemente. Sin embargo, no queremos dejar de mencionar la importante distinción lingüística y conceptual que hace Vega [1, p. 47] entre «*axiomatización* euclídea», que es la trama deductiva de los *Elementos*, y la «axiomatización *euclidiana*», que es el método axiomático desarrollado a partir del siglo XVII.

1.6. Transmisión de los *Elementos*

Acabaremos nuestra introducción con unas palabras sobre la transmisión y las versiones del texto de los *Elementos*, siguiendo la exposición de Vega [1, p. 123-184]. Ante todo, hay que decir que los *Elementos* fueron recibidos no como un texto sagrado, sino como un patrimonio vivo, dispuesto a mejorar y añadir lo que hiciera falta, por lo que ya en el siglo III d.C. empezaron las interpolaciones. La transmisión de los *Elementos* siguió la pauta de los textos científicos más importantes del legado griego, a saber: versiones griegas; traducciones al árabe a partir del siglo IX; traducciones latinas de las versiones árabes en el siglo XII; ediciones impresas en latín a partir del siglo XV; impresión de la *editio princeps* en griego en el XVI; versiones en las distintas lenguas europeas; y edición crítica a finales del siglo XIX. Vega [1, p. 125-151] resume esta historia de la transmisión en cuatro fases: griega, árabe, latina y en lenguas vernáculas o europeas. En cuanto a la fase griega, es importantísimo mencionar, en el siglo

IV, la edición del matemático Teón de Alejandría, de la que se conservan siete manuscritos principales, copiados entre los siglos X y XII, a partir de los cuales, como hemos dicho, Johan Ludvig Heiber y Heinrich Menge elaboraron los cuatro primeros volúmenes de su edición crítica entre 1883 y 1886, los cuales fueron revisados, entre 1969 y 1973, por Evangelos Stamatis. Sobre esta edición se hizo la traducción española que manejamos. En la fase árabe, los *Elementos* dieron lugar a traducciones, compendios, recensiones, enmiendas y comentarios (estos últimos tanto sobre el pórtico axiomático del libro I como sobre la teoría de la proporción del libro V y las magnitudes irracionales del libro X), a partir de dos versiones principales, una de las cuales fue la más traducida al latín. La fase latina se extiende desde la recepción en Roma hasta el Renacimiento. Pero, aunque el período más importante sea el medieval porque los *Elementos* se estudiaron en el *Quadrivium* a partir de traducciones del árabe realizadas en el siglo XII, entre las que destacan las versiones atribuidas a Adelardo de Bath (científico y traductor inglés, nacido en 1080 y muerto en 1150), lo cierto es que es, en las ediciones impresas del latín renacentista de finales del siglo XV y del XVI, donde empiezan a aparecer traducciones latinas, como la de Bartolomeo Zamberti, impresa en 1505, fiables y más ajustadas al texto griego (que tardará todavía casi cincuenta años en imprimirse), pero, sobre todo, la de Federico Commandino y la comentada de Cristóbal Clavio, ya citadas. A mediados del XVII aparece, por último, la traducción latina de André Tacquet, muy famosa también. En cuanto a las versiones de Euclides en lenguas europeas, destacan las de Niccolò Tartaglia en italiano, la de Pierre Forcadel en francés y la de Henry Billingsley en inglés, todas ellas del siglo XVI, mientras que hay que esperar al siglo XVIII para que apareciera una traducción alemana completa, la de Johann Friedrich Lorenz. En España, la primera traducción completa de los *Elementos* es la ya citada de M. L. Puertas (1991), que manejamos en este trabajo, aunque ya en 1576 se publicó la de Rodrigo Zamorano, quien tradujo los seis primeros libros y a la que Vega [1, p. 155] califica de «excelente». Luego, hasta el siglo XX, Vega cita hasta otras 15 versiones o resúmenes de los *Elementos*, en general de poca calidad. Y, en el siglo XX, sólo habían aparecido otras tres, dos de los años cincuenta y la tercera de los setenta, pero parciales. Actualmente también puede consultarse una traducción completa online en `http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm`.

2

Libro VII

2.1. Introducción

El libro VII contiene 23 definiciones, que son todas las correspondientes a la «geometría aritmética» de los *Elementos* y 39 proposiciones. Pero, antes de pasar a comentarlas, reproduciremos los 5 postulados y las 5 nociones comunes o axiomas[13] que se encuentran entre las 23 definiciones y las 48 proposiciones del libro I [1]. Son los siguientes:

Postulados

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
3. Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.
4. Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
5. Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Nociones comunes

1. Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.
2. Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.
3. Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
4. **Y si se añaden cosas iguales a cosas desiguales los totales son desiguales.**

[13] Aunque algunos autores hablan de ocho o nueve nociones comunes o axiomas, Heiberg [3, p. 10-11] considera espurios y no traduce al latín los números 4-6 y 9, que nosotros reproducimos en rojo en el cuerpo del texto.

5. **Y los dobles de una misma cosa son iguales entre sí.**
6. **Y las mitades de una misma cosa son iguales entre sí.**
7. Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
8. Y el todo es mayor que la parte.
9. **Dos rectas no encierran un espacio**

2.2. Definiciones del libro VII

A continuación enunciamos las 23 definiciones contenidas en este libro seguidas de comentarios sobre ellas.

Definición 2.2.1 *Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una.*

Definición 2.2.2 *Un número es una pluralidad compuesta de unidades.*

Las dos primeras definiciones introducen los conceptos de *unidad* y de *número*, mostrando que los griegos diferenciaban la unidad del resto de los números. Según Navarro Loidi [16], «Esta diferenciación era habitual en la Grecia clásica. Para los pitagóricos la unidad era la frontera entre los números y las partes, y para Aristóteles era una cantidad indivisible. En general para los griegos el uno era diferente a los demás números». Y esto es así porque para los griegos la sucesión de números empezaba en el 1, ya que no habían descubierto el 0, descubrimiento que se produjo en la India y difundieron los árabes: en Europa llegó en 1202 con el *Liber abaci* de Leonardo de Pisa (Lombardo Radice [14]). Los griegos, que desarrollaron la geometría, pero no la aritmética ni el álgebra, trabajaban con un sistema de puntos que no les permitía representar el 0. Como recogen M. L. Puertas [2] y Heath [6], Aristóteles definía la unidad como «un punto sin posición». La segunda definición muestra que los números como tales empiezan propiamente con el 2, ya que, por ejemplo, el número 2 es dos veces la unidad.

Definición 2.2.3 *Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor.*

Definición 2.2.4 *Pero partes cuando no lo mide.*

Definición 2.2.5 *Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor.*

Las definiciones 2.2.3, 2.2.4 y 2.2.5 también se pueden comentar juntas, ya que la «única» diferencia entre la 2.2.3 y la 2.2.4 es el singular de «parte» frente al plural de «partes». Sin embargo, esta diferencia aparentemente pequeña es muy significativa, pues por «parte» en la definición 2.2.3 se entiende «divisor»,

mientras que «partes» de la definición 2.2.4 implica que el número menor es «no divisor» del mayor, pues queda un resto, el cual forma parte de las partes. Así, por ejemplo, el número 4 es «parte» del número 8, ya que 4 divide a 8, pues $8 = 4{\cdot}2$; sin embargo, 6 no es «parte», sino «partes» de 8, por cuanto 6 no divide a 8. Nótese que m.c.d. $(6, 8) = 2$, mientras que m.c.d. $(4, 8) = 4$. Análogamente, 3 es «parte» de 6, ya que 3 divide a 6; pero 3 es «partes» de 7, puesto que 3 no divide a 7, sino que $7 = 3 \cdot 2 + 1$.
En otras palabras, definimos un número a como «parte» de b, cuando $b = n \cdot a$, siendo n un número perteneciente a la sucesión de números considerada por Euclides. Y definimos a como «partes» de b, cuando $b = n \cdot a + r$, donde r es un entero positivo menor que a, en terminología actual. En este sentido, podríamos interpretar estas definiciones como la de las fracciones propias, esto es, aquellas que tienen el numerador menor que el denominador, lo que daría lugar a las fracciones irreducibles. Un caso particular sería el que a y b fueran primos entre sí, es decir, m.c.d. $(a, b) = 1$.

Por otra parte, la definición 2.2.5 es una extensión de la definición 2.2.3, formulando su relación recíproca.

Definición 2.2.6 *Un número par es el que se divide en dos partes iguales.*

Definición 2.2.7 *Un número impar es el que no se divide en dos partes iguales, o difiere de un número par en una unidad.*

Estas dos definiciones son bastante claras. Un número es par, si y sólo si lo podemos escribir de la siguiente manera: número par $= n + n = 2 \cdot n$ (dos partes iguales de n), perteneciendo n a la sucesión de números considerados. Y decimos que un número es impar si se puede escribir como número impar $= 2 \cdot n + 1$ (o sea, que difiere de un número par en una unidad). En relación a esto último, en la definición 2.2.7 se ofrece una fórmula alternativa, ya que también se define a los números impares en relación a los pares.

Definición 2.2.8 *Un número parmente par es el medido por un número par según un número par.*

Definición 2.2.9 *Y parmente impar es el medido por un número par según un número impar.*

Definición 2.2.10 ***Y parmente impar es el medido por un número par según un número impar[14].***

[14] Según M. L. Puertas [2, nota 72], «Heiberg considera esta definición interpolada por alguien que ha confundido la clasificación de Euclides con otra clasificación más bien pitagórica».

Definición 2.2.11 *Un número imparmente impar es el medido por un número impar según un número impar.*

Las definiciones 2.2.8, 2.2.9, 2.2.10 y 2.2.11«ahora están en desuso» (Navarro Loidi [16]). Hemos dicho en nota al pie que Heiberg consideró interpolada la definición 2.2.10, de manera que, normalmente, se prescinde de la definición que hemos reproducido aquí en color rojo, siguiendo a M. L. Puertas [2, p. 115] y se da como 2.2.10 la definición que hemos reproducido como 2.2.11 y así sucesivamente. Por su parte, Heath [6] prescinde de «nuestra» definición 2.2.10: para él la 2.2.10 es la que aquí numeramos como 2.2.11. En suma, yendo a la definición 2.2.8, un número parmente par es aquel todas cuyas mitades son pares hasta llegar a la unidad. En lenguaje matemático: Sea $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, m número par, m número parmente par $\Leftrightarrow \frac{m}{2} = 2 \cdot n \Leftrightarrow m = 4 \cdot n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Y, ahora, yendo a la definición 2.2.9, bajo las condiciones anteriores, definimos m como número parmente impar $\Leftrightarrow \frac{m}{2} = 2 \cdot n + 1 \Leftrightarrow m = 4 \cdot n + 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A continuación veremos un ejemplo en el que aplicamos las definiciones 2.2.8 y 2.2.9, respectivamente: a) 16 es un número parmente par, ya que podemos escribirlo de la siguiente manera: $16 = 8 + 8 = (4 + 4) + (4 + 4) = (2 + 2 + 2 + 2) + (2 + 2 + 2 + 2)$, esto es, $16 = 8 \cdot 2 = 4 \cdot 4 = 2 \cdot 8$. Véase que 16 es medido por los números pares 8, 4 y 2 el número par de veces 2, 4 y 8, respectivamente; y b) 18 es un número parmente impar, ya que podemos escribirlo como $18 = 9 + 9$, siendo su mitad, 9, un número impar. O, expresado de manera más exacta y menos pedestre, 18 $= 2 \cdot 9 = 6 \cdot 3$, por lo que 18 es medido por los números pares 2 y 6, según los números impares 9 y 3, respectivamente.
La traductora de Euclides al español [2, nota 71] reconoce que no ha hecho la traducción literal del texto griego al castellano porque sería muy engorrosa, sino que se ha conformado con la versión de Francisco Vera [21]. La definición 2.2.10 es la que se considera interpolada y problemática (vid. sus contradicciones con las proposiciones 33 y 34 del libro IX, señaladas por M. L. Puertas [2, nota 73], y por Heath [6, p. 282 - 284], por lo que se excluye. Por último, la definición 2.2.11, que corresponde a la 10 de casi todos los autores, al haberse excluido la 10, establece lo siguiente: Sea $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, m número impar, m número imparmente impar $\Leftrightarrow \frac{m}{2n+1} = 2 \cdot p + 1 \Leftrightarrow m = (2 \cdot n + 1) \cdot (2 \cdot p + 1)$, $\forall n, p \in \mathbb{N}$[15].

Definición 2.2.12 *Un número primo es el medido por la sola unidad.*

Esta definición quiere decir que, además de por sí mismo, el único número por el que se puede dividir un número primo es la unidad. Heath [6, p. 284 - 285] comenta que Nicómaco, Teón y Jámblico añadieron a «primo» el calificativo de «no compuesto» o «incompuesto» (cf. definiciones 2.2.14 y 2.2.15), mientras que,

[15] Heath [6] señala que Teón de Esmirna dice que «número imparmente impar» es una de las denominaciones de los números primos. Otras denominaciones son *eutimétricos* o *rectilíneos* porque sólo se pueden representar en una dimensión: no pueden ser «planos» porque no tienen anchura.

para Aristóteles, un número primo no era medido por ningún otro número, ya que no consideraba un número a la unidad. Según la distinción griega entre *unidad* y *número*, un número primo no está compuesto por números, sino por unidades: es un conjunto de unidades. Por su parte, Nicómaco, para quien el primer número es el 3 (no el 2, como para Aristóteles o Euclides), precisaba que los números primos son un subconjunto no de los números, sino sólo de los números impares

Definición 2.2.13 *Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común.*

Según Heath [6], Teón de Esmirna insistió en la separación entre los números primos de la definición anterior, a los que llamó «primos absolutamente», y los de esta definición, que son, simplemente, «números primos entre sí». Resumiéndolo en otras palabras: Sean $a, b \in \mathbb{N}$, a y b son primos entre sí $\Leftrightarrow$ m.c.d. $(a,\ b)$ $= 1$. Así, por ejemplo, Nicómaco pone el caso de 9 y 25, que son en sí mismos «segundos» y «compuestos», son primos entre sí, ya que «they have an unit alone as a common measure and no part is called by the same name in both, but the third in one is not in the other, nor is the fifth in the other found in the first» [6, p. 286].

Definición 2.2.14 *Número compuesto es el medido por algún número.*

Según Heath [6, p. 286], también en esta definición sigue Euclides a Teón de Esmirna, según el cual los números compuestos son aquellos divisibles por cualquier otro menor: entre los números compuestos están también los llamados planos y los sólidos, que veremos en las definiciones 2.2.17 y 2.2.18, respectivamente. Teón los ejemplifica con el 6, que puede escribirse como $6 = 2 \cdot 3$.

Definición 2.2.15 *Números compuestos entre sí son los medidos por algún número como medida común.*

Sean a, $b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, decimos que a y b son números compuestos entre sí $\Leftrightarrow$ m.c.d. $(a,\ b) = n$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Por ejemplo, 8 y 6 son números compuestos entre sí, ya que m.c.d.$(8,\ 6) = 2$. Nótese que esta definición excluye a los números primos entre sí, ya que el máximo común divisor de dos números primos entre sí es 1.

Definición 2.2.16 *Se dice que un número multiplica a un número cuando el multiplicado se añade (a sí mismo) tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número.*

Esta es una definición primaria y bastante intuitiva de la multiplicación de dos números, escribiéndola como una suma: así, por ejemplo, 2 multiplicado por 3 es lo mismo que sumar 2 tres veces, i.e., $2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2$.

Definición 2.2.17 *Cuando dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número), el resultado se llama (número) plano y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí.*

Aquí se ve claramente la concepción geométrica que tenían los griegos de los números: *números lineales* son los números primos, representados por una sucesión de puntos sin «anchura», mientras que *números planos* son los resultantes de la multiplicación de dos números naturales distintos del 1 y del 0, pues los griegos veían el resultado de tal multiplicación como un paralelogramo, cuyos lados son las líneas correspondientes a cada uno de esos dos números: por ejemplo, el 6 es un número plano porque podemos concebirlo como un paralelogramo con dos lados que miden 2 y otros dos que miden 3.

Definición 2.2.18 *Cuando tres números, al multiplicarse entre sí, hacen algún número, el resultado es un (número) sólido y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí.*

Esta definición es una extensión de la anterior, en la que no sólo se tiene en cuenta la longitud y la anchura, sino también la altura, de manera que los griegos representaban los *números sólidos* como *cuerpos*. Así, por ejemplo, $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$, siendo, por tanto, un número sólido. Cabe destacar que de los tres números que han de multiplicarse entre sí ninguno de ellos será ni 1 ni 0.

Definición 2.2.19 *Un número cuadrado es el multiplicado por sí mismo o el comprendido por dos números iguales.*

Esta definición supone un caso concreto de la definición 2.2.17, de manera que, por ejemplo, $4 = 2 \cdot 2$ es un número cuadrado. Con otras palabras, podemos definir un número cuadrado, es decir, aquel cuya representación geométrica era vista como un cuadrado, de la siguiente forma: sea $m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, decimos que m es un número cuadrado $\Leftrightarrow m = n \cdot n = n^2$, siendo $n < m,\ \ n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

Definición 2.2.20 *Y un (número) cubo el multiplicado dos veces por sí mismo o el comprendido por tres números iguales.*

A su vez, esta definición es una particularización de la definición 2.2.18, cuya denominación se debe a que los griegos veían estos números como cubos geométricos. Podemos reescribirla como sigue: sea $m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, decimos que m es un número cubo $\Leftrightarrow m = n \cdot n \cdot n = n^3$, siendo $n < m,\ \ n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
Por ejemplo, $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ es un número cubo.

Definición 2.2.21 *Unos números son proporcionales cuando el primer es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto.*

Esta definición la podemos simplificar de la siguiente manera: sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $a > b$ y $c > d$, decimos que a y b son proporcionales a c y $d \Leftrightarrow a = x \cdot b$ y $c = x \cdot d,\ \ x \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
Por ejemplo, 8 y 4 son proporcionales a 6 y 3, ya que $8 = 2 \cdot 4$ y $6 = 2 \cdot 3$.

Definición 2.2.22 *Números planos y sólidos semejantes son los que tienen los lados proporcionales.*

Partiendo de la definición anterior, 32 y 18, por ejemplo, son números planos semejantes, ya que $32 = 8 \cdot 4$ y $18 = 6 \cdot 3$, y hemos visto en el ejemplo anterior que 8 y 4 son proporcionales a 6 y 3, es decir, que los lados son proporcionales.

Definición 2.2.23 *Número perfecto es el que es igual a sus propias partes.*

Tomando como ejemplo el número 28, vemos que es un número perfecto porque sus partes (los divisores propiamente dichos) 1, 2, 4, 7 y 14 suman 28. En definitiva, un número perfecto es aquel cuya suma de sus divisores vuelve a dar ese número. Los cuatro números perfectos más pequeños son el 6, 28, 496 y 8128. En la proposición 4.2.4, Euclides nos ofrece una construcción de los números perfectos pares.

2.3. Proposiciones del libro VII

A continuación enunciaremos algunas de las proposiciones del libro VII, de las cuales sólo demostraremos ocho y comentaremos, sin demostración, algunas más, que son un caso ampliado de las anteriores o que hemos necesitado para las que demostramos. Hemos seleccionado para demostrar las proposiciones 2.3.1, 2.3.2 y 2.3.3 porque enuncian el algoritmo de Euclides, que es muy importante, las proposiciones 2.3.9, 2.3.10 y 2.3.12, las cuales establecen propiedades fundamentales de los números, de gran utilidad a lo largo de los libros VII, VIII y IX, y por último las proposiciones 2.3.19 y 2.3.20, en las cuales se halla el mínimo común múltiplo de dos o más números.

Como ocurre con los demás libros de su obra, Euclides da por supuestos muchos resultados que son obvios, pero que merecerían una explicación o demostración. Esto es una crítica que se le hace, mas en ningún caso empaña la grandiosidad de los *Elementos*, máxime teniendo en cuenta que fueron escritos hace unos 2.300 años. Así, en lo que respecta a medir una cantidad, admite tácitamente que si a mide a b y b mide a c, entonces a mide a c; si a mide a b y a mide a c, entonces a mide a $b+c$; si a mide a b y a mide a c, entonces a mide a su diferencia, $b-c$ (si $b > c$) o $c-b$ (si $b < c$); ...

Proposición 2.3.1 *(VII - 1) Dados dos números desiguales y restándose sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí.*

Según la definición 2.2.13, «Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común»: esto se cumple en esta primera proposición. Esquemáticamente tenemos:

Sean AB, CD dos números y admitamos que AB sea el mayor. Por hipótesis CD, al medir BF, deja del número AB el resto FA, el cual es menor que CD; seguidamente, FA, al medir a DG, deja el resto GC, menor evidentemente que FA; a continuación, GC mide a FH y llegamos ya a que queda la unidad HA.

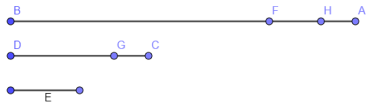

Figura 2.1. Representación gráfica VII - 1

Entonces, AB y CD son números primos entre sí. En efecto, si AB, CD no fueran primos entre sí, por reducción al absurdo, algún número E (ello quiere decir que E no es 1) mediría a ambos. Luego, como E mide a DC y éste mide a BF, se deduce que E también mide a BF. Pero, además, E mide al total BA, por lo que medirá al resto FA. Ahora bien, como FA mide a DG, se sigue que E mide asimismo a DG; y, puesto que mide también a total DC, se infiere que mide al resto GC. En resumen, de una parte se tiene que E mide a GC y como quiera que GC mide a FH, entonces E también mide a FH; de otra parte, recuérdese que E medía al total FA. Por consiguiente, E también medirá al resto HA, que era la unidad. Esto es un absurdo, según la definición euclídea de unidad. En suma, ningún número medirá a los números AB, CD; en otras palabras, AB y CD son primos entre sí. *Q.E.D.*[16]

Nota.- Esta proposición es un caso particular (el de dos números primos entre sí) del algoritmo de Euclides para hallar el m.c.d. de dos números no primos entre sí, que veremos en el siguiente aserto. A continuación ejemplificamos el algoritmo descrito en esta primera proposición con los números 31 y 85, que son primos entre sí (cf. `https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookVII/propVII1.html`), como se ve en

$$
\begin{gathered}
85 - 2 \cdot 31 = 23 \\
31 - 23 = 8 \\
23 - 2 \cdot 8 = 7 \\
8 - 7 = 1
\end{gathered}
$$

En lugar del verbo griego equivalente a nuestro *medir*, hoy se emplea *dividir* y, además, se usa la notación a/b para abreviar la expresión «a divide a b». Según esta proposición, la unidad es el resultado del algoritmo de Euclides, proceso de sustracción recíproca al que el matemático griego llamó «antenaresis»: empezando con dos números distintos entre sí y uno mayor que el otro, se resta el menor del mayor en cada iteración. Si estos dos números iniciales son a_1 (AB

[16] Euclides siempre finaliza sus demostraciones, si se trata de un resultado teórico, con la misma frase «ὅπερ ἔδει δεῖξαι», que se podría traducir al latín como «Quod erat demonstrandum», abreviadamente Q.E.D., y al español por «Como queríamos demostrar». Cuando se trataba de una construcción concluía con la expresión «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι», que en traducción latina es «Quod erat faciendum» (Q.E.F.) y en español «Como queríamos hacer».

en la figura) y a_2 (CD en la figura), siendo a_1 mayor que a_2, se va restando sucesivamente a_2 de a_1 hasta llegar a un resto a_3 (AF en la figura) menor que a_2. Esto se puede representar algebraicamente como sigue

$$a_1 - m_1 \cdot a_2 = a_3,$$

donde m_1 es el número de veces que a_2 se ha restado de a_1. El siguiente paso consiste en restar a_3 de a_2 dejando el resto a_4 (CG en la figura)

$$a_2 - m_2 \cdot a_3 = a_4$$

Estas operaciones se detienen cuando el resto sea igual a 1.

$$a_{n-1} - m_{n-1} \cdot a_n = 1$$

En la demostración de Euclides, $a_n = a_5 =$ AH. La conclusión es que a_1 y a_2 son primos entre sí.

Proposición 2.3.2 *(VII - 2) Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.*

Dados dos números AB, CD no primos entre sí, queremos hallar su medida común máxima, es decir, su máximo común divisor.

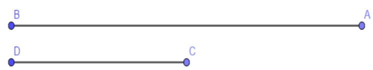

Figura 2.2. Representación gráfica VII - 2.1

1. Supongamos, como en la primera figura, que CD mide a AB. Como CD se mide a sí mismo, es obvio que CD es medida común de AB y CD. Y como ningún número mayor que CD puede medir a CD, se concluye que CD es la medida común máxima.

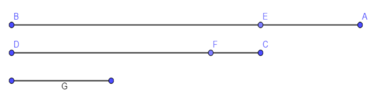

Figura 2.3. Representación gráfica VII - 2.2

2. En segundo lugar, asúmase que CD no mide a AB, como se ve en la figura precedente. Entonces, restamos el menor de estos dos números del mayor

y reiteramos el proceso mientras se obtenga un número que mida al previo a él. Téngase en cuenta que este número no puede ser la unidad, pues en tal caso AB y CD -en virtud de la proposición 2.3.1- serían primos entre sí, lo que contradice la hipótesis.

Por tanto, supongamos que CD mide a BE, dejando en BA un resto EA, que necesariamente será menor que CD. Y supongamos igualmente que EA mide a DF en DC, quedando como resto el número FC, menor lógicamente que EA[17]. Admitamos que este proceso reiterativo finaliza aquí y que CF mide a EA. Con una notación más actual como CF/EA y EA/DF, entonces CF/DF.

De aquí que, teniendo presente que CF/CF, se infiere que

$$CF/(DF + CF) \Leftrightarrow CF/DC \tag{2.1}$$

Razonando análogamente, como CF/DC y DC/EB, se sigue que CF/EB. Por otra parte, CF/EA, lo que implica que

$$CF/(EA + EB) \Leftrightarrow CF/AB \tag{2.2}$$

En resumen, de (2.1) y (2.2) se deduce que CF es una medida común de AB y CD. Afirmamos que CF es la mayor de estas medidas comunes. Si no, procediendo por reducción al absurdo, existiría un número, sea G, mayor que CF y que es medida común de AB, CD. Entonces, G/CD y ya hemos visto que CD/BE, por lo que -por la propiedad transitiva de la divisibilidad- G/BE. Pero también G/AB, así que G/(AB - BE), esto es, G/AE. Y como, a su vez, AE/DF, se tiene que G/DF, lo cual entraña que G/(CD -DF), esto es, G/FC. Con palabras, G (el mayor) divide a FC (el menor), lo que resulta absurdo. Por consiguiente, CF es la medida común máxima de AB, CD. *Q.E.D.*

Porisma o corolario: De todo lo anterior se sigue que dado un número que mida a otros dos, este número también medirá a su medida común máxima. *Q.E.D.*

Nota.- Esta proposición presenta lo que actualmente se conoce como el «algoritmo de Euclides» para hallar el m.c.d. de dos números no primos entre sí. Así, podemos reescribir nuestra proposición de la siguiente manera.

Sean a y b, tal que $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y supongamos $a > b$, decimos que $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $d > 1$ es el máximo común divisor de a y b (y lo escribimos como $d =$ m.c.d. (a, b)), si d/a, d/b y para cualquier otro $c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ de manera que c/a y c/b, entonces c/d.

[17] En la traducción de M. L. Puertas [2, p. 122] están mal dibujados los segmentos $Z\Gamma$ y EA, ya que tienen la misma medida, 6 mm, cuando está claro que EA tiene que ser mayor que $Z\Gamma$. También está mal dibujada la línea H, ya que en el texto de Heath [6, p. 298] mide lo mismo que el segmento EA. Todo esto se aprecia claramente en Heath, quien opera con tres segmentos en los que aparecen las letras latinas correspondientes a las griegas (por su posición en el alfabeto) y sin errores.

El algoritmo de Euclides se presenta como sigue: Para calcular el m.c.d. $(a,\, b)$, en las condiciones asumidas en la proposición, definimos $q_i,\, r_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\forall i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ recursivamente mediante las ecuaciones:
$a = bq_1 \ + r_1 \ \ (0 < r_1 < b)$
$b = r_1 q_2 \ + r_2 \ \ (0 < r_2 < r_1)$
$r_1 \ = r_2 q_3 \ + r_3 \ \ (0 < r_3 < r_2)$
....
$r_{k-3} \ = r_{k-2} q_{k-1} \ + r_{k-1} \ \ (0 < r_{k-1} < r_{k-2})$
$r_{k-2} \ = r_{k-1} q_k \ \ \ (r_k = 0)$
Y de la proposición 2.3.1, se sigue que: $m.c.d.(a, b) = m.c.d.(b, r_1) = m.c.d.(r_1, r_2) = ... = m.c.d.(r_{k-2}, r_{k-1}) = \ r_{k-1}$.

Euclides vuelve a usar la antenaresis en esta segunda proposición, ahora para hallar el máximo común divisor de dos números que no son primos entre sí. Si Euclides hubiera considerado que la unidad también era un número, no habría separado estas dos primeras proposiciones. Esta proposición 2.3.2 y su corolario se utilizan en las dos proposiciones siguientes.

Proposición 2.3.3 *(VII - 3) Dados tres números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.*

Sean A, B, C tres números no primos entre sí, de los que queremos hallar la medida común máxima. Siguiendo la proposición 2.3.2, que acabamos de ver, supongamos que D es la medida común máxima de A, B. Entonces D puede medir o no medir a C, con lo que se dan dos casos distintos, que esquematizamos a continuación.

a) En el primer caso, si D mide a C, como también mide a A, B, entonces D es una medida común de A, B, C. Y, además, es la medida común máxima,

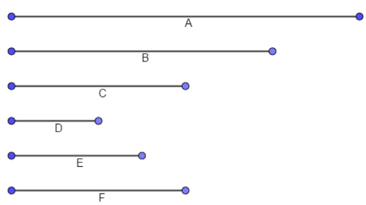

Figura 2.4. Representación gráfica VII - 3a

pues si D no fuera la medida común máxima, lo sería un número mayor que D y que midiera a los números A, B, C: supongamos que este número sea E. Entonces E, como mide a A, B, C, medirá también a A, B, según el porisma o corolario de la proposición anterior. Ahora bien, como la medida común máxima de A, B es D, entonces E tendría que medir también a D, lo cual es absurdo, ya que E es mayor que D. En conclusión, no podrá medir a los números A, B, C ningún número que sea mayor que D, con lo que D será la medida común máxima de A, B, C.

b) El segundo caso se da cuando D no mide a C. Entonces, C y D no son primos entre sí.

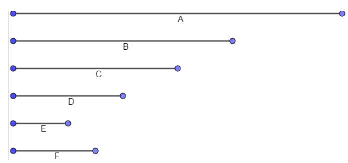

Figura 2.5. Representación gráfica VII - 3b

En efecto, por hipótesis, A, B y C no son primos entre sí, lo cual significa que serán medidos por algún número. Evidentemente, el número que mida a los tres dados, también mide a A, B y, en consecuencia, a D -que es la medida común máxima de A, B-, a tenor del porisma de la proposición 2.3.2. Pero dicho número mide asimismo a C; por tanto, existe un número que mide a C, D. De donde se deduce que C, D no son primos entre sí. Invocando de nuevo la proposición 2.3.2, sea E[18] la medida común máxima de C, D. Como E mide a D, medirá a A, B por el citado porisma; y también mide a C. Así pues, E mide a A, B, C, y es una medida común a esta terna de números.

Afirmamos que E es la máxima posible. Si no lo fuera, sería porque existe un número, que denotaremos por F, que es mayor que E y que mide a A, B, C. Ahora bien, si F mide a A, B, C, este número F deberá medir también a A, B y, por el referido porisma, F mide a la medida común máxima de A, B, a saber, a D. Pero F mide además a C, de modo que F mide a los números C, D y, en definitiva, a su medida común máxima, que es E. Lo que constituye un absurdo,

[18] Para este segundo caso sirve el cuadro de Heath [6, p. 300], en que los segmentos van de mayor a menor, excepto el quinto, denominado E, de manera que D, que es el cuarto segmento, es mayor que F, que es el sexto. En cambio, no sirve el cuadro de M. L. Puertas [2, p. 124], que era válido sólo para el primer caso, en que los tres primeros segmentos son progresivamente más pequeños y los tres últimos progresivamente mayores, siendo iguales el tercero y el sexto.

ya que F es mayor que E. Concluimos de esta manera que ningún número mayor que E puede medir a A, B, C, con lo que resulta que E es la medida común máxima de A, B, C. *Q.E.D.*

Nota.- Esta proposición es un caso ampliado de la anterior. En la proposición 2.3.19 de este mismo libro VII se extiende el «algoritmo euclídeo» al cálculo de la medida común máxima de tantos números como se quiera [2, p. 125 en nota al pie].

Proposición 2.3.4 *(VII - 11) Si como un todo es a un todo, así es un número restado a un (número) restado, también el resto será al resto como el todo al todo.*

Nota.- Lo que afirma este aserto es que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(a > c,\ b > d)$ entonces $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$

Proposición 2.3.5 *(VII - 12) Si unos números, tantos como se quiera, fueren proporcionales, entonces como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes serán a todos los consecuentes.*

Nota.- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ...$, entonces $a + c + e + ...$ es a $b + d + f + ...$ como cualquiera de las razones, es decir,

$$\frac{a + c + e + ...}{b + d + f + ...} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ...$$

Proposición 2.3.6 *(VII - 13) Si cuatro números son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.*

Nota.-Aquí se prueba una de las ocho formas equivalentes de escribir una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Cuando se escribe en la forma antecedente es antedecente como consecuente es a consecuente, esto es, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, Euclides se refiere a esta ultima proporción diciendo que está escrita por alternancia [2, Def. V-12].

Proposición 2.3.7 *(VII - 14) Si hay unos números, tantos como se quiera, y otros iguales a ellos en cantidad que, tomados de dos en dos, guardan la misma razón, también, por igualdad, guardarán la misma razón.*

Nota.-Por igualdad significa que si $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ y $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$ [2, Def. V-17]. Aquí se establece para números.

Proposición 2.3.8 *(VII - 15) Si una unidad mide a un número cualquiera, y otro número mide el mismo número de veces a otro número cualquiera, por alternancia, la unidad medirá también al tercer número el mismo número de veces que el segundo al cuarto.*

Nota.- De acuerdo con Heath [11] y en notación actual, si $\frac{1}{m} = \frac{a}{ma}$, siendo m y a números cualesquiera, en esta proposición se verifica que, por alternancia,

$$\frac{1}{a} = \frac{m}{ma}$$

Para entender el enunciado los números son, por orden, $1, m, a, ma$.

Proposición 2.3.9 *(VII - 16) Si dos números, al multiplicarse entre sí, hacen ciertos (números), los (números) resultantes serán iguales entre sí.*

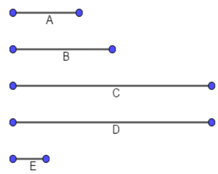

Figura 2.6. Representación gráfica VII - 16

Tomemos dos números A y B, de manera que, si multiplicamos A por B, obtenemos el número C y, si multiplicamos B por A, obtenemos el número D. Queremos ver que C y D son iguales.

Ahora bien, ya que A multiplicado por B ha dado el número C, tenemos que B medirá a este número C tantas veces como unidades haya en A. Llamemos E a la unidad. Vemos que la unidad E mide al número A según sus unidades, es decir, la mide las mismas veces que B mide a C (i.e., $\frac{E}{A} = \frac{B}{C}$). Luego, por la proposición 2.3.8, E medirá a B las mismas veces que A mida a C (i.e., $\frac{E}{B} = \frac{A}{C}$). De manera análoga, dado que B multiplicado por A da D, entonces también tenemos que A medirá a D según las unidades contenidas en B. Como quiera que E mide igualmente a B según sus unidades, sigue que E también mide a B las mismas veces que A mide a D (i.e., $\frac{E}{B} = \frac{A}{D}$). Puesto que $\frac{E}{B} = \frac{A}{C}$ y $\frac{E}{B} = \frac{A}{D}$ hemos obtenido, en resumidas cuentas, que A mide las mismas veces a C que a D. Así concluimos que, efectivamente, los números C y D son iguales. *Q.E.D.*

Nota.- Esta proposición establece la propiedad conmutativa de la multiplicación: $ab = ba$.

Proposición 2.3.10 *(VII - 17) Si un número, al multiplicar a dos números, hace ciertos (números), los (números) resultantes guardarán la misma razón que los multiplicados.*

Dados los números A, B y C, obtengamos el número D de la multiplicación de A por B y el número E de la multiplicación de A por C.

Queremos ver que B es a C como D a E.

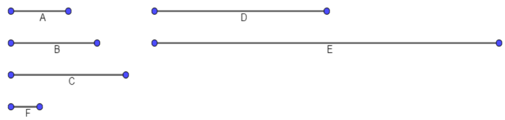

Figura 2.7. Representación gráfica VII - 17

Como D es el número $D = A \times B$, entonces B medirá a C según las unidades contenidas en A. Denotemos F como la unidad. La unidad F mide a A según las unidades contenidas en este número, es decir, F mide a A las mismas veces que B mide a D. Y, por la definición 2.2.21, F es a A como B es a D (i.e., $\frac{F}{A} = \frac{B}{D}$). Y, por la misma razón, C es a E como F es a A (i.e., $\frac{C}{E} = \frac{F}{A}$). Entonces, por la transitividad como B es a D, así es C a E (i.e., $\frac{B}{D} = \frac{C}{E}$). Finalmente por la proposición 2.3.6, como B es a C, así será D a E. *Q.E.D.*

Nota.- En otras palabras, $b : c = ab : ac$. Esta proposición se utiliza mucho en los libros VII-IX.

Proposición 2.3.11 *(VII - 18) Si dos números, al multiplicar a un número cualquiera, hacen ciertos (números), los resultantes guardarán la misma razón que los multiplicados.*

Nota.-Esta proposición es una conmutación de la proposición anterior. Mientras que la proposición 2.3.10 demostraba que $b : c = ab : ac$, esta establece que $b : c = ba : ca$. Y debido a la proposición 2.3.9, que establece la propiedad conmutativa de la multiplicación, el orden no es relevante.

Proposición 2.3.12 *(VII - 19) Si cuatro números son proporcionales, el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero; y si el producto del primero y el cuarto es igual al producto del segundo y del tercero, los cuatro números serán proporcionales.*

Figura 2.8. Representación gráfica VII - 19

Dados cuatro números A, B, C y D proporcionales en el sentido de que A es a B como C a D (i.e., $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$), llamemos E al número $E = A \times D$, y llamemos F al número $F = B \times C$.

Queremos ver que E y F son iguales.

Denotemos ahora por G al número $G = A \times C$. Ahora bien, como A, al multiplicarse por D, ha dado el número E y, al multiplicarse por C, el número G, entonces A multiplicado por C y D ha dado los números G y E, respectivamente. Entonces, por la proposición 2.3.10, C es a D como G es a E, i.e., $\frac{C}{D} = \frac{G}{E}$. Pero, a su vez, y por hipótesis, $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. De aquí se sigue que, $\frac{G}{E} = \frac{A}{B}$.

Por otra parte, como A, al multiplicar a C, había dado G y B, al multiplicar a este mismo C, había dado F, entonces A y B, al multiplicar a C, habían dado G, F, respectivamente. Así, por la proposición 2.3.11, $\frac{G}{F} = \frac{A}{B}$. Combinando ambos resultados se obtiene que G es a F lo mismo que G a E, i.e., $\frac{G}{F} = \frac{G}{E}$. Por consiguiente, G tiene la misma razón respecto de E que respecto de F, de donde, V[19] - Proposición 9, resulta que E y F son iguales.

Supongamos ahora que E es igual a F: entonces C es a D como A es a B.

En efecto, como E es igual a F, entonces, según V[20]- Proposición 7, resulta que G es a F lo mismo que a E. Pero, según la proposición 2.3.10, $\frac{G}{E} = \frac{A\times C}{A\times D} = \frac{C}{D}$ y, según la proposición 2.3.11, $\frac{G}{F} = \frac{A\times C}{B\times C} = \frac{A}{B}$. Por tanto vemos que $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$, es decir, C es a D lo mismo que A a B. *Q.E.D.*

Nota.- De manera actual, $a : b = c : d$ si, y sólo si, $ad = bc$.

Proposición 2.3.13 *(VII - 20) Los números menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos miden a los que guardan la misma razón el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor.*

Nota.- Si m y n son los menores números que guardan la misma razón que otros números a y b, es decir, $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, entonces m mide a a el mismo número de veces que n a b.

Proposición 2.3.14 *(VII - 21) Los números primos entre sí son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.*

Proposición 2.3.15 *(VII - 22) Los números menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos son primos entre sí.*

Nota.- En terminología más actual, diríamos que estas dos últimas proposiciones caracterizan a las fracciones irreducibles.

Proposición 2.3.16 *(VII - 27) Si dos números son primos entre sí y al multiplicarse cada uno a sí mismo hacen algún otro (número), sus productos serán*

19 En traducción de M. L. Puertas [2, p. 34], la proposición 9 del libro V de Euclides dice que: «*Las (magnitudes) que guardan con una misma (magnitud) la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma (magnitud) guarda la misma razón, son iguales*».

20 Según M. L. Puertas [2, p. 30], la proposición 7 del libro V reza así: «*Las (magnitudes) iguales guardan la misma razón con una misma (magnitud) y la misma (magnitud) guarda la misma razón con las (magnitudes) iguales*».

primos entre sí, y si los números iniciales, al multiplicar a los productos, hacen ciertos números, también ellos serán primos entre sí.

Nota.- Se establece que si a y b son primos entre sí, también lo son sus cuadrados a^2 y b^2, sus cubos a^3 y b^3, y así sucesivamente.

Proposición 2.3.17 *(VII - 29) Todo número primo es primo con respecto a todo (número) al que no mide.*

Proposición 2.3.18 *(VII - 31) Todo número compuesto es medido por algún número primo.*

Nota.- Este aserto recoge el principio de factorización de un número entero positivo utilizando números primos.

Proposición 2.3.19 *(VII - 33) Dados tantos números como se quiera, hallar los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.*

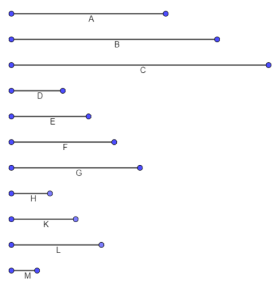

Figura 2.9. Representación gráfica VII - 33

Dados los números A, B y C, queremos hallar los números menores de los que guardan la misma razón que ellos. Ahora bien, pueden darse dos casos:
a) que A, B y C sean primos entre sí; o
b) que no lo sean.
a) Por la proposición 2.3.14 tenemos que si, en efecto, son primos entre sí, entonces estos números serán los menores de los que guardan la misma razón que ellos.
b)Contemplemos, ahora, el segundo caso, es decir, que A, B y C no sean primos entre sí. Denotemos por D a la medida común máxima de A, B y C, de acuerdo con la proposición 2.3.3. Tenemos así que D mide a A, B y C tantas unidades como haya en ciertos números E, F y G, respectivamente, esto es, $A = E \times D$, $B = F \times D$, $C = G \times D$. Luego, por la proposición 2.3.9, los números E,F,G miden a los números A, B, C el mismo número unidades de D. En consecuencia,

en virtud de la definición 2.2.21, los números E, F, G guardan la misma razón que A, B y C. Veamos, además, que estos son los menores.

En efecto, si E, F y G no fueran los números menores de los que guardan la misma razón que A, B y C, entonces existirían unos números menores que E, F y G, los cuales guardan la misma razón que A, B y C. Denotemos estos números como H, K y L. Tenemos, entonces, que H medirá a A las mismas veces que K y L medirán a B y a C, respectivamente. Hagamos ahora que haya tantas unidades en M como veces mide H a A. Por lo tanto, K y L medirán a B y C según las unidades de M. A su vez, por la proposición 2.3.9 tenemos que M medirá también a A según las unidades de H. Y, asimismo, M medirá a B y a C según las unidades de K y de L, respectivamente, de manera que M medirá a A, B y C.

Ahora bien, por lo visto anteriormente, como H mide a A según las unidades de M, entonces por la definición 2.2.16 tenemos que H, al multiplicar a M, ha producido el número $A = H \times M$. Pero recordemos que $A = E \times D$. Vemos, entonces, que $H \times M = E \times D$. Y por la proposición 2.3.12, E será a H como M sea a D, esto es, $\frac{E}{H} = \frac{M}{D}$. Ahora bien, como hemos supuesto que E es mayor que H, entonces también M será mayor que D y, a su vez, medirá a A, B y C. Pero esto es absurdo, ya que habíamos tomado D como medida común máxima de A, B y C.

Por consiguiente, no existe ningún número menor que E, F y G que guarde la misma razón que A, B y C.

Hemos visto, por tanto, que E, F y G son los números menores de los que guardan la misma razón que A, B y C. *Q.E.D.*

Proposición 2.3.20 *(VII - 34) Dados dos números, hallar el menor número al que miden.*

Dados dos números A y B, queremos hallar el número menor al que miden. Se pueden presentar dos casos:
a) que A y B sean primos entre sí; o
b) que A y B no sean primos entre sí.

a) Consideremos el primer caso, es decir, que A y B son primos entre sí. Sea, entonces, C el número que se obtiene de multiplicar A por B. Así pues, por la proposición 2.3.9, al multiplicar B por A, obtendremos este mismo número C. Por lo tanto, A y B medirán a C.

Veamos que C es el menor número al que miden A y B. De lo contrario, por reducción al absurdo, existiría otro número. Sea D menor que C y medido también por A y B. Entonces, para ciertos números E y F se tiene que $D = A \times E$ y $D = B \times F$, es decir, A mide tantas veces a D como unidades hay en E, mientras que B mide a D tantas veces como unidades nos indique F. En consecuencia, $A \times E = B \times F$. Recurriendo a la proposición 2.3.12, se deduce que $\frac{A}{B} = \frac{F}{E}$. Ahora bien, por hipótesis, A y B son primos entre sí y, en virtud de la proposición

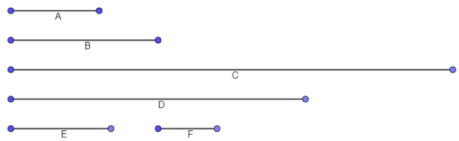

Figura 2.10. Representación gráfica VII - 34

2.3.14, los números primos entre sí son los menores de los que guardan la misma razón con ellos. Además, a tenor de la proposición 2.3.13, los números menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos, los miden igual número de veces. En consecuencia, B mide a E cuantas veces A mide a F.

Por otra parte, $C = A \times B$ y $D = A \times E$, por lo que -en base a la proposición 2.3.10- se deduce que $\frac{C}{D} = \frac{B}{E}$ y, por alternancia $\frac{C}{B} = \frac{D}{E}$. De aquí, como B mide a E, sigue que C mide igualmente a D, el mayor número al menor, lo cual es imposible.

Concluimos así, para este caso, que A y B no medirán a ningún número menor que C. Por consiguiente, C será el número menor medido por los números A y B.

b) Contemplemos, ahora, el segundo caso, es decir, que A y B no sean primos entre sí. Tomemos, entonces, haciendo uso de la proposición 2.3.19, dos números F y E, que serán los menores de los que guardan la misma razón que A y B, i.e.,

$$\frac{F}{E} = \frac{A}{B} \tag{2.3}$$

Así, por la proposición 2.3.12, el producto de A y E será igual al de B y F, y a este producto lo denotamos por $C = A \times E = B \times F$.

C es el menor número al que miden A y B. De lo contrario, A y B medirían a otro número D, menor que C.

Razonando como en el caso anterior, existirán números G y H de modo que $D = A \times G$ y $D = B \times H$. De la igualdad de estos productos $A \times G = B \times H$ se infiere -aplicando la proposición 2.3.12- que

$$\frac{H}{G} = \frac{A}{B} \tag{2.4}$$

De (2.3) y (2.4) se deduce que $H \times G = F \times E$. Recordemos que F y E eran los menores de los números que guardan con ellos la misma razón, por lo cual -en línea con la proposición 2.3.13- E mide a G cuantas veces F mide a H.

Por otra parte, $C = A \times E$ y $D = A \times G$ entrañan, recurriendo a la proposición 2.3.10, que $\frac{C}{D} = \frac{E}{G}$ y, por alternancia, $\frac{C}{E} = \frac{D}{G}$. Y puesto que hemos demostrado que E mide a G, sigue del último resultado que C mide también a D, al mayor número al menor, lo que lleva a un absurdo.

Concluimos este segundo caso diciendo que A y B no medirán a ningún número menor que C, es decir, que C es el menor número medido por A y B. *Q.E.D.*

Nota.- Esta proposición indica cómo hallar el mínimo común múltiplo de dos números.

Así en el primer caso, el m.c.m.(A,B) $=$ C $=A \times B$; por ejemplo el m.c.m.(3,7) $=$ 3×7 $=$ 21. En el segundo caso, el m.c.m.(A,B) $=$ C $=$ $A \times E$ $=$ $B \times F$, donde los números E y F se calculan de acuerdo con las proposiciones 2.3.13, 2.3.14 y 2.3.15.

En terminología actual, diríamos que simplificamos la fracción $\frac{A}{B}$ hasta convertirla en otra equivalente e irreducible: $\frac{A}{B}$ $=$ $\frac{F}{E}$, con m.c.d.(E,F) $= 1$. Así, para calcular el m.c.m(12,18), como $\frac{12}{18}$ $=$ $\frac{2}{3}$, serán $A = 12, B = 18, F = 2$ y $E = 3$, por lo que

$$\text{m.c.m.}(12{,}18) = C = 12 \times 3 = 18 \times 2 = 36$$

Aunque no claramente, pero sí de una forma implícita, este teorema da una relación entre dos números y su máximo común divisor y mínimo común múltiplo. En efecto, la mejor forma de reducir la fracción $\frac{A}{B}$ es dividiendo numerador y denominador por su máximo común divisor (medida común máxima), siendo F y E los respectivos cocientes. En otras palabras, $A = F \times m.c.d.(A,B)$ y $B = E \times m.c.d.(A,B)$.

Teniendo presente estos resultados en $C = A \times E$ $=$ $B \times F$, se tiene que

$$\text{m.c.m.}(A{,}B) = C = \tfrac{A \times B}{m.c.d.(A,B)} \ ,$$

o bien, la conocida fórmula $m.c.d.(A,B) \times m.c.m.(A,B) = A \times B$. En nuestro caso,

$$\text{m.c.m.}(12{,}18) = \frac{12 \times 18}{6} = 36 \ .$$

3

Libro VIII

3.1. Introducción

El libro VIII consta de 27 proposiciones en las que Euclides aborda el estudio de las proporciones continuas con razón constante (progresiones geométricas) y de sus propiedades. Estas proporciones se usan abundantemente en este libro y en el siguiente, como veremos en las proposiciones que demostraremos del libro IX (remitimos sobre todo a la proposición 4.2.3).

3.2. Proposiciones del libro VIII

De las 27 proposiciones de este libro enunciaremos dos (3.2.4 y 3.2.10) y nos detendremos a demostrar diez. Las tres primeras (3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3) son progresiones geométricas cuyos extremos son números primos entre sí, mientras que la proposición 3.2.6 muestra una progresión geométrica de números primos. En cambio, la proposición 3.2.7 enuncia que, en una progresión geométrica, si el primer término mide al último, también medirá al segundo. La proposición 3.2.5 trata de números planos en progresión geométrica y la 3.2.8 es una extensión del aserto 3.2.5 con números cuadrados. La 3.2.9 establece la proporcionalidad entre dos números cuadrados y sus lados. La 3.2.11 enuncia que si entre dos números planos cae uno que es media entre ambos, esos números son semejantes. Y, por último, en la 3.2.12 se demuestra que si tres números son proporcionales y el primero es cuadrado, el tercero también lo será.

Proposición 3.2.1 *(VIII - 1) Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales y sus extremos son números primos entre sí, son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.*

Sean tantos números continuamente proporcionales como queramos y sus extremos primos entre sí. Tomemos, por ejemplo, A, B, C y D, donde A y D son

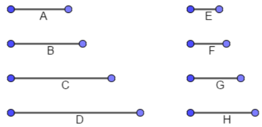

Figura 3.1. Representación gráfica VIII - 1

primos entre sí. Veamos que son los menores que guardan la misma razón que ellos.

Si no fuera así, habría otros números E, F, G y H, menores que A,B,C y D, que mantendrían entre si la misma razón que los anteriores, esto es, $\frac{A}{B} = \frac{E}{F}$, $\frac{B}{C} = \frac{F}{G}$, $\frac{C}{D} = \frac{G}{H}$. De aquí, invocando la proposición 2.3.7, se tiene que $\frac{A}{D} = \frac{E}{H}$. Como A,D son primos entre sí, por la proposición 2.3.14, serán los menores de los números que guardan la misma razón que ellos. Entonces, por la proposición 2.3.13, A mide a E (cuantas veces D mide a H), es decir, el número mayor al menor, lo cual es un absurdo. Concluimos así que A, B, C y D son los números menores de todos aquellos que guardan su misma razón. *Q.E.D.*

Nota.- Lo que denominamos actualmente *progresión geométrica* es para Euclides una serie de «números que son continuamente proporcionales», o bien que «están en proporción continua».

Esta proposición viene a demostrar, en otras palabras, que si $a, b, c, ..., n$ son una serie de números en progresión geométrica y si a y n son primos entre sí, entonces dicha serie es la menor posible en la que los números guardan entre sí esa misma razón.

Esta proposición se emplea en la siguiente y es opuesta a lo que se expresa en la proposición 3.2.3.

Proposición 3.2.2 *(VIII - 2) Hallar tantos números como uno proponga continuamente proporcionales, los menores en una razón dada.*

Sea la razón de A respecto de B la misma razón dada que en sus números menores.

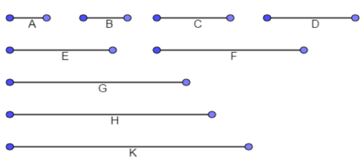

Figura 3.2. Representación gráfica VIII - 2

Queremos hallar tantos números continuamente proporcionales como se propongan, siendo dichos números los menores en la razón de A respecto de B.

Considérese los números C $= A^2 = A \times A$, D $= A \times B$ y E $= B^2 = B \times B$. Y, a partir de aquí, propónganse los cuatro siguientes:

$$F = A^3 \ , G = A^2B \ , H = AB^2 \ , K = B^3$$

Como $A \times A =$ C y $A \times B =$ D, por la proposición 2.3.10, se tiene que

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \tag{3.1}$$

Análogamente, $A \times B =$ D y $B \times B =$ E entrañan, a tenor de la proposición 2.3.11, que

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{E} \tag{3.2}$$

Y de (3.1) y (3.2) se infiere que $\frac{C}{D} = \frac{D}{E}$.

Por otra parte, $A \times C =$ F y $A \times D =$ G lo que implica, vía la proposición 2.3.10, que

$$\frac{F}{G} = \frac{C}{D} \tag{3.3}$$

Análogamente de $A \times D =$ G y $A \times E =$ H sigue que

$$\frac{D}{E} = \frac{G}{H} \tag{3.4}$$

Y, en virtud de la proposición 2.3.11, de $A \times E =$ H y $B \times E =$ K se deriva que

$$\frac{A}{B} = \frac{H}{K} \tag{3.5}$$

Ahora, de (3.1) y (3.3) sigue que

$$\frac{A}{B} = \frac{F}{G} \ , \tag{3.6}$$

mientras que de (3.2) y (3.4) se obtiene

$$\frac{A}{B} = \frac{G}{H} \tag{3.7}$$

Obsérvese que de (3.1) y (3.2) se infiere que $\frac{C}{D} = \frac{D}{E} = \frac{A}{B}$, es decir, los términos de la sucesión $C = A^2$, $D = A \times B$, E $= B^2$ en proporción continua mantienen entre sí la razón $\frac{A}{B}$. Y, con cuatro términos se deduce de (3.5), (3.6), (3.7) que los números $F = A^3$, $G = A^2B$, $H = AB^2$, K $= B^3$ también guardan dicha razón, es decir, $\frac{F}{G} = \frac{G}{H} = \frac{H}{K} = \frac{A}{B}$.

Veamos además, que estos números son también los menores.

Nótese que, por la proposición 2.3.15, A y B tienen que ser primos entre sí, y, en vista de la proposición 2.3.16 y por su construcción, C, E y F, K son primos entre sí. Entonces los extremos de las sucesiones en proporción continua C, D, E -de una parte- y F, G, H, K -de otra- son primos entre sí y, por la proposición 3.2.1, concluimos que C, D, E y F, G, H, K son los números menores de los que guardan la misma razón que A y B. *Q.E.D.*

Porisma (corolario): Es evidente que si tenemos tres números continuamente proporcionales, los cuales son los números menores de los que guardan la misma razón con ellos, entonces sus extremos serán cuadrados y, en el caso de ser cuatro números, sus extremos serán cubos.

Nota.- En otras palabras, esta proposición busca hallar los términos menores de una progresión geométrica que guarden entre sí una razón dada.

Por la proposición 2.3.19, reducimos la razón dada a los dos términos menores, a los que denominamos $a : b$. Entonces, a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, ... a^2b^{n-2}, ab^{n-1}, b^n es la serie propuesta de números si se toman $(n + 1)$ términos.

Proposición 3.2.3 *(VIII - 3) Si tantos números como se quiera continuamente proporcionales son los menores de los que guardan la misma razón entre ellos, sus extremos son números primos entre sí.*

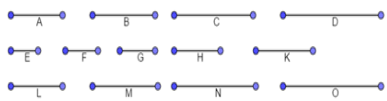

Figura 3.3. Representación gráfica VIII - 3

Sea cualquier cantidad de números A, B, C y D continuamente proporcionales y los menores que guardan la misma razón: $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D}$. Veamos que A y D, es decir, sus extremos, son primos entre sí.

En efecto, por la proposición 2.3.19, tomemos los números E y F, que serán los menores en la razón de los dados A, B, C y D. Por la proposición 3.2.2 considérese otros tres números G, H y K, y así sucesivamente se va incorporando cada vez un número más a la sucesión hasta alcanzar la misma cantidad de términos que la sucesión dada que, en este caso, consta de cuatro términos. Por la construcción efectuada en la proposición 3.2.2 se tendrá -por una parte- que G $= E^2$, H $= E \times F$, K $= F^2$, y -de otra parte- L $= E^3$, M $= E^2F$, N $= EF^2$, O $= F^3$. Ahora bien, por la proposición 2.3.15, E y F deben ser primos entre sí y, consecuentemente, en virtud de la proposición 2.3.16, G, K y L, O son primos entre sí. Por hipótesis, A, B, C, D son los menores números que guardan la misma razón entre sí. Pero hemos obtenido que L, M, N y O también son los menores que guardan la misma razón con A, B, C, D, en virtud de la proposición 3.2.1, ya que L, O son primos entre sí. Por consiguiente, los números A, B, C, D serán iguales, repectivamente, a L, M, N, O. En particular, L = A y O = D, lo que implica -al ser L y O primos entre sí- que A y D serán igualemente primos entre sí. *Q.E.D.*

Nota.- Esta proposición es la opuesta a la proposición 3.2.1 y establece que, en una serie de números continuamente proporcionales con razón constante, los extremos son primos entre sí.

Proposición 3.2.4 *(VIII - 4) Dadas tantas razones como se quiera en sus menores números, hallar los números continuamente proporcionales en las razones dadas.*

Nota.- En este aserto, dadas las razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ...$, se halla una sucesión $m, n, p, q, ...$ de números continuamente proporcionales los menores posibles de modo que $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, $\frac{n}{p} = \frac{c}{d}$, $\frac{p}{q} = \frac{e}{f}$, ...

Proposición 3.2.5 *(VIII - 5) Los números planos guardan entre sí la razón compuesta de (las razones de) sus lados.*

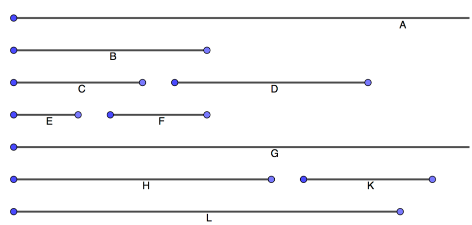

Figura 3.4. Representación gráfica VIII - 5

Sean A (de lados C y D) y B (de lados E y F) números planos. Recurriendo a la proposición 3.2.4, sean G, H, K los menores números continuamente proporcionales en las razones $\frac{C}{E}$ y $\frac{D}{F}$, es decir,

$$\frac{C}{E} = \frac{G}{H} \tag{3.8}$$

y

$$\frac{D}{F} = \frac{H}{K} \tag{3.9}$$

Consideremos el número L $= D \times E$ que se origina al multiplicar D por E; comparando con el primer número plano, a saber, A $= D \times C$, sigue de la proposición 2.3.10 que $\frac{C}{E} = \frac{A}{L}$. De aquí y (3.8) se obtiene

$$\frac{G}{H} = \frac{A}{L} \tag{3.10}$$

Por la proposición 2.3.9, L $= E \times D$ y, siendo el segundo número plano B $= E \times F$, a tenor de la citada proposición 2.3.10, se infiere que $\frac{D}{F} = \frac{L}{B}$. De este resultado y (3.9) sigue que

$$\frac{H}{K} = \frac{L}{B} \tag{3.11}$$

Pero la razón compuesta de (3.10) y (3.11) es $\frac{G}{K} = \frac{A}{B}$. Luego, por (3.8) y (3.9),

$$\tfrac{A}{B} = \tfrac{G}{H} \times \tfrac{H}{K} = \tfrac{C}{E} \times \tfrac{D}{F} \qquad Q.E.D.$$

Proposición 3.2.6 *(VIII - 6) Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales y el primero no mide al segundo, tampoco ningún otro medirá a ninguno.*

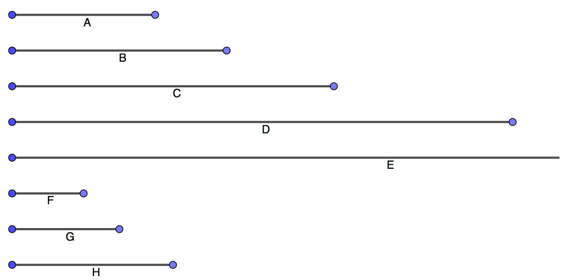

Figura 3.5. Representación gráfica VIII - 6

Sean A, B, C, D números en proporción continua y supongamos que A (el primero) no mide a B (el segundo). Establezcamos que ningún otro medirá a ningún otro de los números.

En efecto, si fuera posible, admitamos -por ejemplo- que A mide a C. A los tres números A, B, C le asociamos los menores números F, G, H que tienen la misma razón que ellos, i.e., $\frac{A}{B} = \frac{F}{G}$, $\frac{B}{C} = \frac{G}{H}$, por lo que $\frac{A}{C} = \frac{F}{H}$ (proposición 2.3.7). Como $\frac{A}{B} = \frac{F}{G}$ y A no mide a B, entonces -según la definición 2.2.21-, F no mide a G. Obsérvese que F no es la unidad, pues ésta mediría a cualquier número. Así que F y H, extremos de la sucesión F, G, H, son primos entre sí, a la vista de la proposición 3.2.3. Luego, F no mide a H y, como $\frac{A}{C} = \frac{F}{H}$, A tampoco mide a C. Y así se puede proceder con igual resultado en todos los casos. *Q.E.D.*

Proposición 3.2.7 *(VIII - 7) Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales y el primero mide al último, también medirá al segundo.*

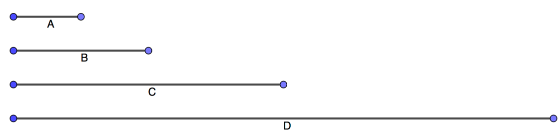

Figura 3.6. Representación gráfica VIII - 7

Sean A, B, C, D cualquier cantidad de números en proporción continua, y supongamos que A (el primero) mide a D (el último). Probemos que A también mide a B (el segundo).

Ciertamente, procediendo por reducción al absurdo, si A no midiera a B, recurriendo a la proposición precedente, A no mide a ningún otro número. Pero A mide a D. Por tanto, A tiene que medir a B. *Q.E.D.*

Proposición 3.2.8 *(VIII - 11) Entre dos números cuadrados hay un número (que es) media proporcional y el número cuadrado guarda con el número cuadrado una razón duplicada de la que el lado guarda con el lado.*

Sean A (de lado C) y B (de lado D) números cuadrados. Veamos que existe entre A y B un número que es su media proporcional y que los números cuadrados guardan entre sí una razón duplicada de la que conservan sus lados.

Consideremos el número E = $C \times D$ generado al multiplicar C por D. Como A = $C \times C$ y B = $D \times D$, de las proposiciones 2.3.10 y 2.3.11 se obtiene, respectivamente, que

$$\frac{C}{D} = \frac{A}{E} \tag{3.12}$$

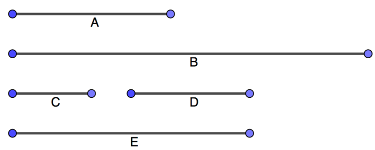

Figura 3.7. Representación gráfica VIII - 11 y VII - 14

y

$$\frac{C}{D} = \frac{E}{B} \tag{3.13}$$

Se implica de aquí que $\frac{A}{E} = \frac{E}{B}$. Luego, el número E es la media proporcional de A y B.

Finalmente, por igualdad, se deriva de (3.12) y (3.13) que $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \times \frac{C}{D}$, esto es, la razón que guardan los dos números cuadrados dados coincide con la razón duplicada de sus lados. *Q.E.D.*

Proposición 3.2.9 *(VIII - 14) Si un (número) cuadrado mide a un (número) cuadrado, también el lado medirá al lado; y, si el lado mide al lado, el (número) cuadrado medirá también al (número) cuadrado.*

Sean A (de lado C) y B (de lado D) números cuadrados. Supongamos, primeramente, que A mide a B, y demostramos, entonces, que C mide a D. En efecto, considérese el número E $= C \times D$. Tenemos así la serie

$$A = C \times C, \tag{3.14}$$

$$E = C \times D, \tag{3.15}$$

$B = D \times D$ cuyos términos son continuamente proporcionales en razón $\frac{C}{D}$, en virtud de la proposición 3.2.8. Luego, por la proposición 3.2.7, y como quiera que estamos imponiendo que A mide a B, sigue que A también mide a E. Aplicando la proposición 2.3.10 a (3.14) y a (3.15), se concluye que $\frac{C}{D} = \frac{A}{E}$. De donde, como A mide a E, por la definición 2.2.21, C mide a D. Recíprocamente, asumamos ahora que el lado C mide al lado D. Por la construcción anterior, A, E, B son continuamente proporcionales con razón $\frac{C}{D}$. En consecuencia, $\frac{C}{D} = \frac{A}{E}$. Como C mide a D, por la defináción 2.2.21, A mide igualmente a E. Como también $\frac{E}{B} = \frac{C}{D}$, análogamente se prueba que E mide a B. Por tanto, A mide a B. *Q.E.D.*

Una generalización de la proposición 3.2.8 viene recogida en el siguiente teorema

Proposición 3.2.10 *(VIII - 18) Entre dos números planos semejantes hay un número (que es) media proporcional; y el (número) plano guarda con el (número) plano una razón duplicada de la que el lado correspondiente guarda con el lado correspondiente.*

Proposición 3.2.11 *(VIII - 20) Si entre dos números cae un número (que es) media proporcional, los números serán números planos semejantes.*

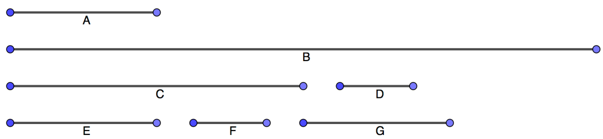

Figura 3.8. Representación gráfica VIII - 20

Sea C la media proporcional de dos números A y B, esto es

$$\frac{A}{C} = \frac{C}{B} \tag{3.16}$$

Veamos que A y B son números planos semejantes. Por la proposición 2.3.19, sean D y E los menores números que guardan la misma razón que A y C, esto es,

$$\frac{D}{E} = \frac{A}{C} \tag{3.17}$$

Entonces por la proposición 2.3.13, D mide a A tantas veces como E mide a C. Asumamos que las veces que D mide a A viene dada por las unidades que hay en cierto número F, i.e.,

$$A = F \times D; \tag{3.18}$$

en otras palabras A es un número plano de lados F y D. De (3.16) y (3.17) sigue que $\frac{D}{E} = \frac{C}{B}$; y, razonando análogamente, D mide a C cuantas veces E mide a B. Así pues, para cierto número G, se tiene que

$$B = G \times E, \tag{3.19}$$

por lo que B es otro número plano de lados G y E. Además

$$C = F \times E \tag{3.20}$$

Por la proposición 2.3.10, de (3.19) y (3.20) se llega a que $\frac{F}{G} = \frac{C}{B}$. Como, además, teníamos que $\frac{D}{E} = \frac{C}{B}$, se infiere que $\frac{D}{E} = \frac{F}{G}$ y, por la proposición 2.3.6, $\frac{D}{F} = \frac{E}{G}$. Así que los lados son proporcionales; luego, los números planos A y B son semejantes. *Q.E.D.*

Proposición 3.2.12 *(VIII - 22) Si tres números son continuamente proporcionales y el primero es cuadrado, el tercero será también cuadrado.*

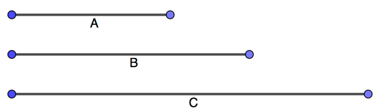

Figura 3.9. Representación gráfica VIII - 22

Sean A, B, C tres números en proporción continua. Supongamos que A es un número cuadrado. Puesto que B es la media proporcional de A y C, por la proposición 3.2.11, A y C son números planos semejantes. Pero A es un cuadrado y, por la definición 2.2.22, C también es un cuadrado. *Q.E.D.*

4

Libro IX

4.1. Introducción

El libro IX, según el profesor Vega [1, p. 88], «es ya una especie de miscelánea aritmética». Sin embargo, a nuestro juicio, las materias de que trata no son tan variadas, pudiendo reducirse a cuatro: a) números cuadrados y cubos (proposiciones 1-10, aunque la 7 trata de números compuestos y sólidos); b) números proporcionales (proposiciones 11-13, 17-19 y 35, que tratan de progresiones geométricas); c) números primos (proposiciones 14-16, 20, 31 y 36); y d) números pares e impares (proposiciones 21-30 y 32-34), si bien entre las tres últimas categorías suelen establecerse relaciones. El primero y el último de los cuatro apartados que hemos establecido son los que resultan más fáciles de entender para un profano por ser más inmediatamente evidentes que el segundo y el tercero. Por otra parte, quizá la proposición más conocida de este libro -al margen, por supuesto, de la referente a la existencia de infinitos números primos, que cita el matemático inglés G.H. Hardy[10] cuando quiere ilustrar su opinión del carácter estético de las matemáticas- sea la última, que contiene la fórmula para obtener los llamados «números perfectos» y que comentaremos por extenso en su momento.

4.2. Proposiciones del libro IX

El libro IX consta de 36 proposiciones, de las cuales enunciaremos solamente cuatro y demostraremos tres. En este sentido, hemos elegido para demostrar las proposiciones 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4, las cuales establecen que existen infinitos números primos, la fórmula de la suma de una progresión geométrica y los llamados números perfectos, respectivamente. Y enunciamos, sin prueba, la siguiente

Proposición 4.2.1 *(IX - 13) Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales y el siguiente a la unidad es primo, el mayor no será medido por ningún otro fuera de los que se encuentran entre los números proporcionales.*

Proposición 4.2.2 *(IX - 20) Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos.*

Tomemos A, B y C como la cantidad propuesta de números primos.

Queremos ver que hay más números primos que A, B y C.

Tomemos ahora el número menor que es medido por los números A, B y C, y denotemos este número por ED.

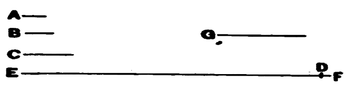

Figura 4.1. Representación gráfica IX - 20 [6, p. 412]

Sumémosle a continuación la unidad, denotada por DF, a dicho número ED y denotemos la suma resultante por el número EF[21].

Nos encontramos, entonces, ante dos posibles casos: que EF sea un número primo o que no lo sea.

a) Supongamos, en primer lugar, que EF es un número primo. En tal caso, hemos hallado un número primo más, con lo que tendríamos, en total, los números primos A, B, C y EF, que son más que los que teníamos inicialmente (cuatro frente a tres).
b) Consideremos, en segundo lugar, que EF no es un número primo. Entonces, por la proposición 2.3.18 sabemos que existirá algún número primo que mida a EF. Llamemos G a ese número primo que mide a EF.

[21] Tenemos que señalar que, como hemos comprobado en varias otras ocasiones, la traducción de M. L. Puertas [2, p. 226-227] presenta un error, ya que allí leemos: «Pues tómese el número menor medido por A, B, Γ y sea ΔE y añádase a ΔE la unidad EZ. Entonces, EZ o es primo o no. (...) Pero ahora no sea primo EZ...». Evidentemente, aquí hay un error porque confunde EZ, que es la unidad, con ΔZ, que es el resultado de sumarle la unidad, EZ, al número ΔE, que era el menor que se había supuesto que medía a A, B, Γ. Creemos que no hay que insistir en este error evidente por dos razones: a) la primera, porque para Euclides la unidad no es un número; y b) la segunda, porque no puede suponerse que la unidad sea un número primo o no. Pero sí creemos imprescindible que la traducción de cualquier obra científica clásica sea revisada por un especialista en la materia, en este caso concreto por un matemático.

Figura 4.2. Representación gráfica IX - 20.a

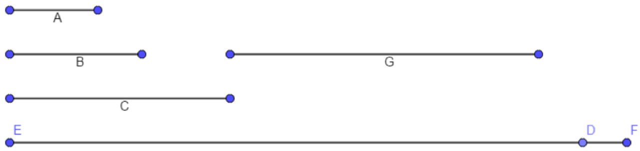

Figura 4.3. Representación gráfica IX - 20.b

Queremos ver ahora que G no es igual a ninguno de los números dados al comienzo, es decir, A, B y C. Y para demostrar que no lo es, empezaremos suponiendo lo contrario, es decir, que es igual a alguno de ellos. En efecto, si G fuera igual a A, B o C, como sabemos que A, B y C miden a ED, también G mediría a ED. Pero, como estamos suponiendo que G mide a EF, G medirá a la diferencia de EF y ED, es decir, G, que es un número, mediría también a DF, la unidad restante, lo que es absurdo. Por consiguiente, G no será igual a ninguno de los números dados, es decir, A, B y C. Y como, además, hemos supuesto que G es un número primo, entonces nuevamente tenemos más números primos que la cantidad propuesta inicialmente, pues ahora tenemos cuatro y al principio sólo teníamos tres. *Q.E.D.*

Nota.- Esta proposición establece que la cantidad de números primos es infinito. La prueba es la misma algebraica que se da en nuestros libros de texto. Sean los números primos $a, b, d, ...k$. Multiplíquense dichos números y añádasele al resultado la unidad. Entonces $a \cdot b \cdot c \cdot ... \cdot k + 1$ será o no será un número primo.

1. Si $a \cdot b \cdot c \cdot ... \cdot k + 1$ es un número primo, ya hemos añadido otro número primo a los dados previamente.
2. Si $a \cdot b \cdot c \cdot ... \cdot k + 1$ no es un número primo, por la proposición 2.3.18 deberá ser medido por algún número primo, al que denotaremos por p. Ahora bien, p no puede ser igual a ninguno de los números primos anteriormente dados, es decir, $a, b, c, ...k$, pues, si fuera igual a uno de ellos, «mediría» o dividiría a $a \cdot b \cdot c \cdot ... \cdot k$. Y, por tanto, como divide a $a \cdot b \cdot c \cdot ... \cdot k + 1$, dividiría a la diferencia entre ambos, que es la unidad, lo cual es absurdo. Con lo que también hemos obtenido un nuevo número primo: en este caso p. Y así *ad infinitum*.

Proposición 4.2.3 *(IX - 35) Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales, y se quitan del segundo y del último (números) iguales al primero, entonces, como el exceso del segundo es al primero, así el exceso del último será a todos los anteriores a él.*

Tomemos tantos números como queramos A, BC, D y EF continuamente proporcionales, donde A es el menor de estos números.

Restemos ahora de los números BC y EF los números BG y FH, que son ambos iguales a A. Pongamos GC= BC - A = BC - BG y EH= EF - A = EF - FH.

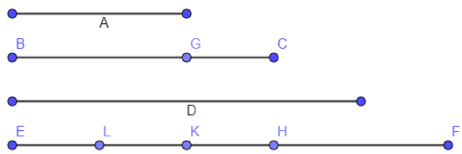

Figura 4.4. Representación gráfica IX - 35

Queremos ver que GC es a A como EH es a A, BC, D, es decir, $\frac{GC}{A} = \frac{EH}{A+BC+D}$.

Ahora bien, hagamos FK = BC y que

$$FL = D \tag{4.1}$$

Por tanto, KH =FK - FH = BC - BG = GC, esto es, son iguales los restos

$$KH = GC \tag{4.2}$$

Por otra parte, por hipótesis, $\frac{A}{BC} = \frac{BC}{D} = \frac{D}{EF}$ que, por la proposición 2.3.6, adopta la forma $\frac{EF}{D} = \frac{D}{BC} = \frac{BC}{A}$, y que, por (4.1) y al ser A= FH, se puede reescribir como $\frac{EF}{FL} = \frac{FL}{FK} = \frac{FK}{FH}$. Sigue de la proposición 2.3.4, que $\frac{EF-FL}{FL} = \frac{FL-FK}{FK} = \frac{FK-FH}{FH}$, es decir, $\frac{EL}{FL} = \frac{LK}{FK} = \frac{KH}{FH}$. Finalmente, al tenor de la proposición 2.3.5, se infiere que $\frac{EL+LK+KH}{FL+FK+FH} = \frac{KH}{FH}$, esto es, a la vista de (4.2) y de la notación utilizada,

$$\frac{GC}{A} = \frac{EH}{A+BC+D}$$

Q.E.D.

Nota.- Según Heath [6, p. 421], esta proposición quizá sea la más interesante de los tres libros dedicados a la aritmética, pues ofrece un método muy elegante para sumar cualquier serie de términos de una proporción geométrica.

Sean $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...\ a_n,\ a_{n+1}$ una serie de términos en progresión geométrica. Entonces, la proposición 4.2.3 prueba que:

$$(a_{n+1}\ - a_n) : (a_1 +\ a_2 +\ a_3\ + ... +\ a_n) = (a_2 -\ a_1) :\ a_1$$

De donde

$$a_1 +\ a_2 +\ a_3\ + ... +\ a_n = \frac{(a_{n+1} -\ a_1)a_1}{a_2 - a_1},$$

que nos da la fórmula para calcular la suma S_n de los n primeros términos de una progresión geométrica. Por último, se puede escribir

$$S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{\frac{a_2}{a_1} - 1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{r - 1},$$

donde r es la razón de dicha progresión. En particular, para la progresión $a,\ ar,\ ar^2,\ ...\ ,\ ar^{n-1}$, con lo que, al final, se obtiene la conocida fórmula

$$S_n\ =\ \frac{a(r^n\ - 1)}{r\ - 1}$$

Proposición 4.2.4 *(IX - 36) Si tantos números como se quiera a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada hasta que su (suma) total resulte un número primo, y el total multiplicado por el último produce algún número, el producto será (un número) perfecto.*

En primer lugar, tomemos tantos números como queramos, por ejemplo, A, B, C, D, partiendo de la unidad y en proporción duplicada hasta que el total de su suma nos dé un número primo. Si representamos la unidad por U (nuestro uno ; U= 1), se tiene que

$$A = 2U,\quad B = 2A = 4U,\quad C = 2B = 8U,\quad D = 2C = 16U \tag{4.3}$$

Denotemos su suma por E = U + A + B + C + D, que es primo

Para empezar tomemos la misma cantidad de números que A, B, C y D, y representémoslos por E, HK, L y M, que tomaremos en proporción duplicada, es decir,

$$HK = 2E,\quad L = 2HK\quad y\quad M = 2L \tag{4.4}$$

Estos dos conjuntos de números son, pues, proporcionales, por lo que $\frac{A}{B}\ =\ \frac{E}{HK}$, $\frac{B}{C}\ =\ \frac{HK}{L}$, $\frac{C}{D}\ =\ \frac{L}{M}$; así pues, por la proposicíon 2.3.7, se deriva que $\frac{A}{D}\ =\ \frac{E}{M}$ o, lo que es equivalente,

$$A \times M = E \times D, \tag{4.5}$$

en virtud de la proposición 2.3.12.

Introduzcamos el número

$$FG = E \times D \tag{4.6}$$

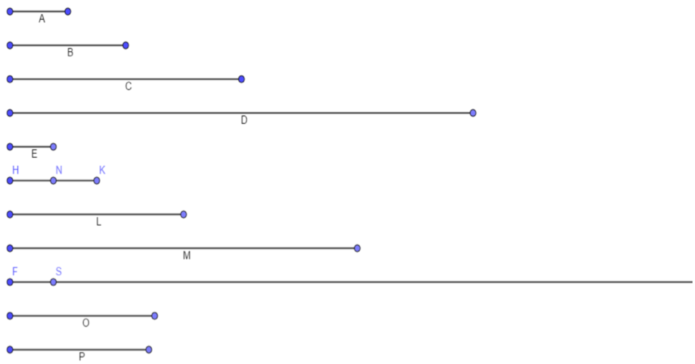

Figura 4.5. Representación gráfica IX - 36

Por (4.5) y (4.6), $FG = A \times M = 2M$, ya que A es una díada. A continuación añadimos FG a la sucesión E, HK, L, M en proporción duplicada, resultando la secuencia E, HK, L, M, FG también continuamente proporcionales en proporción duplicada. Ahora, restemos al segundo número de esta sucesión, HK, y al último, FG, respectivamente los números HN y FS, siendo HN = FS = E. Utilizando la proposición 4.2.3, $\frac{HK-HN}{E} = \frac{FG-FS}{E+HK+L+M}$, es decir,

$$\frac{NK}{E} = \frac{SG}{E+HK+L+M} \tag{4.7}$$

Pero, por elección, HN= E y, de la primera de (4.4), HK = HN + NK = HN + HN = 2E, de donde sigue que NK= E; ello entraña, de (4.7), que SG= E + HK + L + M.

Recordemos, por otro lado, que FS= E = U + A + B + C + D, por lo que el total FG= FS + SG = E + SG, que origina otra expresión para FG dada por (4.6)

$$FG = U + A + B + C + D + E + HK + L + M \tag{4.8}$$

Resulta fácil ver que FG es medido por cada uno de estos sumandos. En efecto, de (4.8) y teniendo presente (4.4), FG se puede escribir indistintamente como FG= 16E = 8HK = 4L = 2M, lo cual implica que E, HK, L y M miden a FG. De las mismas expresiones y a la vista de (4.3), se deduce que A= 2 , B= 4, C= 8 y D= 16 también miden a FG. Pero FG no es medido por ningún otro número que no sean los anteriores. De lo contrario, por reducción al absurdo, existiría un número O -distinto de A, B, C, D, E, HK, L y M- que mediría a FG. Sea P el número tal que FG= $O \times P$. Teniendo en cuenta (4.6), $O \times P = E \times D$, esto es,

$$\frac{O}{D} = \frac{E}{P} \tag{4.9}$$

Dado que A, B, C y D son, por hipótesis, continuamente proporcionales a partir de la unidad y A=2 y primo (el segundo después de la unidad), por la proposición 4.2.1 sólo pueden medir a D los números A, B y C. Por la elección de O, es obvio que O no puede medir a D y, por la definición 2.2.21 y (4.9), E tampoco puede medir a P. Como quiera que E es primo, de la proposición 2.3.17 se infiere que E y P son primos entre sí. Entonces, de (4.9) y haciendo uso de las proposiciones 2.3.14, sigue que E medirá a O el mismo número de veces que P a D.

Ahora bien, acabamos de verificar que D solamente puede ser medido por A,B y C, por lo cual P tiene que coincidir con uno de estos números. Sea, para fijar ideas, P=B. Tomemos la secuencia E, HK, L con el mismo número de términos que en B, C, D, que sabemos que guardan la misma razón. La proposición 2.3.7 nos asegura que $\frac{E}{L} = \frac{B}{D}$, lo que equivale a que $B \times L = D \times E$ en línea con la proposición 2.3.12. De aquí y por (4.9) se llega a que $P \times O = B \times L$ y, por el mismo aserto, a que $\frac{P}{B} = \frac{L}{O}$; luego, como P=B, se obtiene que L=O, lo cual es un absurdo, porque habíamos supuesto que O era diferente a todos los números dados. En definitiva, los únicos divisores de FG son A, B, C, D, E, HK, L, M y la unidad y, por (4.8), FG es la suma de todos ellos. Concluimos así que FG, definido por (4.6), es un número perfecto. *Q.E.D.*

Nota.- En 1747, el matemático, físico y filósofo suizo Leonhard Euler demostró que todo número par perfecto sigue la fórmula $2^{n-1}\ (2^n - 1)$, con $2^n - 1$ primo [29]. Hoy se sabe que no existen números perfectos impares menores de 10^{300}, pero todavía no se sabe si existen números perfectos impares mayores que esa cantidad [30].

En realidad, Euclides [6, p. 424] ha demostrado que si se suman los términos de la sucesión $1,\ 2,\ 2^2\ ,\ldots,\ 2^{n-1}$ hasta que se origine un número primo y se multiplica dicha suma por el último término, el producto será un número «perfecto», es decir, igual a la suma de todos los factores.

Por nuestra parte, añadiremos lo siguiente: un número entero se dice *perfecto* si es *amigo* de sí mismo, es decir, si es igual a la suma de sus divisores propios. Así, poniendo en notación moderna la última proposición del libro IX de Euclides, nuestra 4.2.4, tenemos que

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}\ primo \Rightarrow 2^{n-1} \cdot S_n \quad perfecto,$$

lo cual es equivalente a

$$2^n - 1\ primo \Rightarrow 2^{n-1}(2^n - 1)\ \ perfecto.$$

Así, $n = 2 \Rightarrow 2^2 - 1 = 3\ primo \Rightarrow 2^{2-1}(2^2 - 1) = 6\ \ es\ perfecto.$

$$n = 4 \Rightarrow 2^4 - 1 = 15\ no\ primo \Rightarrow 2^{4-1}(2^4 - 1) = 120\ \ no\ es\ perfecto.$$

Atendiendo a la historia [30], Nicómaco de Gerasa (filósofo y matemático griego neopitagórico del siglo II d.C. y autor de una *Introducción a la aritmética*) conoció los 4 primeros números perfectos:

$$\begin{aligned}
6 &= 1 + 2 + 3 \\
28 &= 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \\
496 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 \\
8128 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064
\end{aligned}$$

Los números primos generados por la fórmula $2^n - 1$ se denominan *números primos de Mersenne* [30] por haber sido descubiertos por Marin Mersenne (1588-1648), un sacerdote, filósofo y matemático francés, autor de *Cogitata Physico-Mathematica*, que estableció correctamente los ocho primeros números perfectos: n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19 y 31.

Bibliografía

[1] EUCLIDES (1991): *Elementos (Libros I-IV), tr. esp. y notas de M. L. Puertas Castaños, Madrid: Gredos.*

[2] EUCLIDES (1994): *Elementos (Libros V-IX), tr. esp. y notas de M. L. Puertas Castaños, Madrid: Gredos.*

[3] EUCLIDIS (1883): *Elementa. Uol. I Libros I-IV continens, ed. Heiberg, Lipsiae: Teubneri (http://www.wilbourhall.org/pdfs/MBP/euclidisoperaomn01eucluoft.pdf).*

[4] EUCLIDIS (1884): *Elementa. Uol. II Libros V-IX continens, edidit I. L. Heiberg, Lipsiae: Teubneri (https://archive.org/details/euclidisoperaomn02eucluoft).*

[5] EUCLID (1908): *The Thirteen Books of Euclid's Elements. Introduction and Books I and II, translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Thomas Litte Heath, Vol. I, Cambridge: Cambridge University Press (https://archive.org/details/bub_gb_UhgPAAAAIAAJ).*

[6] EUCLID (1908): *The Thirteen Books of Euclid's Elements. Books III-IX, translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Thomas Litte Heath, Vol. II, Cambridge: Cambridge University Press (https://archive.org/details/thirteenbookseu00heibgoog).*

[7] COLLETTE, JEAN-PAUL (1985): *Historia de las matemáticas, Madrid: Siglo XXI Editores, Vol. I.*

[8] GARCÍA OVEJERO, ANA Y ANA MARÍA DELGADO MARANTE (1992): «*Euclides: Los Elementos. Teoría de las paralelas. Método de exhaución*», *en Historia de la Geometría Griega, I: 273-308.*

[9] GORRÍN HERNÁNDEZ, CANDELARIA NOEMI (2016): *Los Elementos de Euclides. Libros I-IV, TFG presentado en la sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULL.*

[10] Hardy, Godfrey Harold (2000): *Apología de un matemático, Madrid: Nivola.*

[11] Heath, Thomas Litte (1981[1921]): *A History of Greek Mathematics. From Thales to Euclid, v. I, New York: Dover (https://archive.org/details/cu31924008704219).*

[12] Hernández Alonso, Melanie (2017): *Elementos de Euclides. Libros V-VI, TFG presentado en la sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULL.*

[13] Kline, Morris (2012[1972]): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, Madrid: Alianza Editorial, 114-118.*

[14] Lombardo Radice, Lucio (1983): *La matemática de Pitágoras a Newton, Barcelona: Laia.*

[15] Michel, Paul Henri, Jean Itard y Charles Mugler (1985[1971]): *«Las ciencias en el mundo grecorromano. La ciencia helénica. Las Matemáticas», en René Taton (dir.): La ciencia antigua y medieval, Barcelona: Destino, Vol I, pp. 248-265.*

[16] Navarro Loidi, Juan (2002-2003): *«Los Elementos de Euclides», en Un paseo por la geometría, pp. 51-82.*

[17] Newman, James Roy (1976): *Sigma. El mundo de las matemáticas, Vol. I, Barcelona: Grijalbo.*

[18] Pla i Carrera, Josep (2012): *Euclides, la geometría. Las Matemáticas presumen de figura, Madrid: RBA.*

[19] Rey Pastor, Julio y José Babini (1984): *Historia de la Matemática, Vol. I, Barcelona: Gedisa.*

[20] Vega Reñón, Luis (1990): *La Trama de la Demostración, Madrid: Alianza Editorial.*

[21] Vera, Francisco (1970): *Científicos griegos, recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas de Francisco Vera, Madrid: Aguilar, 2 tomos (los Elementos de Geometría, de Euclides, están el tomo I, pp. 702-980).*

Webgrafía

[22] *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk* (*The MacTutor History of Mathematics Archive. Página web de la Universidad de Saint Andrews, Escocia, Reino Unido).*

[23] *http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm* (*traducción, en varias lenguas modernas, de los Elementos de Euclides).*

[24] *http://www.rac.es/ficheros/doc/00182.pdf* (*Vida de los trece libros de Euclides, discurso de Manuel López Pellicer, pronunciado el 10 de abril de 2003 en la Sesión conmemorativa de la Fundación del Instituto de España).*

[25] *http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&task=view&id=3339&Itemid=33&showall=1* (*Euclides de Alejandría, escrito por Luis Vega Reñón para la Real Sociedad Matemática española).*

[26] *https://www.unirioja.es/cu/luhernan/Divul/CI/CIHernandez.pdf* (*«Sobre los principios fundamentales de la Geometría», Lección Inaugural del curso 2000-2001 impartida por el catedrático Luis Javier Hernández Paricio en la Universidad de La Rioja).*

[27] *http://invata-mate.info/matematicieni/spaniola/historyDetail.htm?id=Euclid&menuH=wiki* (*Euclides en Wikipedia)*

[28] *https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html* (*Euclid´s Elements, Clark University, Worcester, Estados Unidos)*

[29] *https://es.scribd.com/doc/49156954/HISTORIA-DE-LOS-NUMEROS-PRIMOS-1* (*Historia de los números primos)*

[30] *https://es.wikipedia.org/wiki/Numero_perfecto* (*Número perfecto, Wikipedia)*

Euclid: Books VII - VIII - IX

Sara Gabriela Batista Cruz

Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100604870@ull.edu.es

Abstract

In this Final Degree Project we study the "third part"of Euclid's Elements, that is, Books VII, VIII and IX, which make up the so-called "arithmetic geometry". In these books we find 23 definitions (all in Book VII), which we will briefly comment, and 102 propositions, namely: 39 in Book VII, of which we will prove eight; 27 in the Book VIII, of which we will demonstrate ten, and 36 in the Book IX, of which we will only demonstrate three. Among the propositions we have chosen to comment are those referring to the so-called "Euclidean algorithm", the greatest common divisor and the least common multiple, the sum of the geometric progressions and the perfect numbers.

1. Introduction

This work focuses on the study of Books VII-IX, the so-called arithmetic part of Euclid's *Elements*. It is divided into four chapters: the first is a brief sketch of Euclid and his work is presented. In the second, dedicated to Book VII, the 23 definitions of arithmetic geometry are collected and analyzed one by one because these definitions are an example of internal deductive cohesion and they are used in many propositions of the three books that make up this section of the *Elements*: so it happens, for example, in the eight that were demonstrated, where we find the Euclidean algorithm, the greatest common divisor, the least common multiple, etc. The third chapter analyzes Book VIII, which consists of 27 propositions that, in general, deal with different properties of geometric progressions in relation to the prime, squares, planes numbers, etc.: we enunciated two and demonstrated ten of them. The fourth chapter focuses on Book IX, which deals with square and cubes numbers, proportional numbers, prime numbers, and even and odd numbers: It contains 36 propositions, of which one is enunciated and three well known are demonstrated: the existence of infinite prime numbers, the formula of the sum of a geometric progression and the formula of perfect numbers.

2. Life and work of Euclid

Euclid of Alexandria (325-265 BC) is the most famous mathematician of Greco-Roman Antiquity for his treatise on geometry, the *Elements*. Through Pappus and Proclus, two Greek mathematicians and philosophers who lived in Alexandria in the fourth and fifth centuries AD respectively, we barely know that Euclid taught at and founded a school at Alexandria in the time of Ptolemy I Soter (323-285 BC). In the Middle Ages he was confused with the Greek philosopher Eucleides of Megara, a contemporary of Plato. Euclid wrote several works, but the most important are the *Elements*, in which he took into account previous mathematical works, but the whole organization of the material and its exposition were his own. In addition, Euclid introduced new demonstrations and made also outstanding personal contributions, but the most important thing is that Greek mathematical knowledge appears as a formal axiomatic deductive system.

3. Book VII

The book VII is a self-consistent treatise that deals with the foundations of arithmetic.
Definition 1: A unit is that by virtue of which each of the things that exist is called one.
Definition 2: A number is a multitude composed of units.
These first two definitions introduce the concepts of *unity* and *number*, showing that the Greeks differentiated the unit from the rest of the numbers, which begin with 2. It is interesting to note that, for Aristotle, unity was an indivisible quantity that he defined as "a point without a position".
Definition 15: Numbers relatively composite are those which are measured by some number as a common measure. Let $a, b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, we say that a and b are relatively composite numbers $\Leftrightarrow$ m.c.d. $(a,\ b) = n,\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. For example, 8 and 6 are composite numbers, since g.c.d. (8, 6) = 2. Note that this definition excludes prime numbers, since the greatest common divisor of two prime numbers is 1.

4. Book VIII

Proposition 4: Given as many ratios as we please in least numbers, to find numbers in continued proportion which are the least in the given ratios. In this statement, given the reasons $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ...$, we find a sequence $m, n, p, q, ...$, of continuously proportional numbers as small as possible so that $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}, \frac{n}{p} = \frac{c}{d}, \frac{p}{q} = \frac{e}{f}, ...$
Proposition 7: If there are as many numbers as we please in continued proportion, and the first measures the last, then it also measures the second. Let A, B, C, D be a series of numbers in continuous proportion, and suppose that A (the first) measures D (the last). Let's prove that A also measures B (the second). Certainly, proceeding by the method of reduction to the absurd, if A did not measure B, resorting to the proposition 6, A would not measure any other number. But A measures D. Therefore, A has to measure B. *Q.E.D.*

5. Book IX

Proposition 35: If as many numbers as we please are in continued proportion, and there is subtracted from the second and the last numbers equal to the first, then the excess of the second is to the first as the excess of the last is to the sum of all those before it.
According to Heath [2, p. 421], this proposition is perhaps the most interesting of the three books devoted to arithmetic, since it offers a very elegant method for adding up any series of terms of a geometric proportion:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

References

[1] Euclides (1994): *Elementos (Libros V-IX), tr. esp. y notas de M. L. Puertas Casta Madrid: Gredos.*

[2] Euclid (1908): *The Thirteen Books of Euclid?s Elements. Introduction and Books I and II, translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Thomas Litte Heath, Vol. I, Cambridge: Cambridge University Press*

[3] *https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/*