

Borja Almeida Rodríguez

Una introducción a la relatividad especial

An introduction to the special relativity

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2018

DIRIGIDO POR

Domingo China Miranda

Domingo China Miranda

Departamento de Matemáticas, Es-
tadística e Investigación Operativa

Universidad de La Laguna

38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Para empezar, me gustaría dar las gracias de manera especial a mi tutor Domingo China Miranda por su dedicación y paciencia para realizar este trabajo de fin de grado sobre geometría y relatividad especial, el cual, aunque he tenido momentos de dificultad, me ha resultado un tema muy interesante y motivante para estudiar.

En segundo lugar, dar las gracias a mi familia y en especial a mi padre por haber estado siempre ahí apoyándome desde que empecé a estudiar esta carrera, con momentos muy buenos y otros de cierta dificultad, pero que al final me han servido para entender que las matemáticas son una de mis pasiones, crecer como persona y luchar siempre por alcanzar mis objetivos.

Por último, quedarme con una de las cosas más importantes, la gran calidad humana de compañeros, amigos, profesores junto con recuerdos que no olvidaré. Gracias a todos!!

Resumen · Abstract

Resumen

En esta memoria damos una introducción matemática a la relatividad especial. La formulación matemática está hecha en el contexto de la geometría afín. En el primer capítulo, presentamos algunas definiciones y propiedades en espacios afines y espacios de Minkowski. Después, en el segundo capítulo, recordamos algunos resultados sobre mecánica clásica y electromagnetismo. Introducimos los postulados de la relatividad especial, y terminamos estudiando las transformaciones de Lorentz. Utilizándolas junto con el espacio de Minkowski, obtenemos algunos efectos relativistas.

Palabras clave: *Espacios afines – Métrica de Minkowski – Experimento de Michelson-Morley – Relatividad especial – Transformación de Lorentz – Espacio de Minkowski.*

Abstract

In this memory we give a geometrical introduction to the special relativity. The mathematical formulation is done in the context of affine geometry. In the first chapter, we introduce some definitions and properties of affine and Minkowski spaces. Then, in the second chapter, we remember some results about classical mechanics and electromagnetism. We introduce the postulates of the special relativity, and we finish studying the Lorentz transformations. Using them together with the Minkowski space, we obtain some relativistic effects.

Keywords: *Affine spaces – Minkowski metric – Michelson-Morley experiment – Special relativity – Lorentz transformation – the Minkowski space.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Geometría afín y de Minkowski	1
1.1. Espacios afines	1
1.2. Espacio vectorial de Minkowski	5
2. Sistemas de referencia en la física clásica	9
2.1. Mecánica de Newton y sistemas de referencia	9
2.2. Elctromagnetismo. Experimento de Michelson-Morley.....	14
3. Relatividad Especial.	17
3.1. Los postulados de la relatividad especial.	17
3.2. La transformación de Lorentz.	19
3.3. Espacio de Minkowski.....	34
3.4. Interpretación de algunos problemas en el espacio de Minkowski.	39
3.4.1. Dilatación del tiempo.	39
3.4.2. Contracción de las longitudes.....	41
3.4.3. La paradoja de los gemelos.....	41
4. Conclusiones y valoraciones.	45
Bibliografía	47
Lista de Figuras	49
Poster	51

Introducción

La relatividad especial viene motivada por la necesidad de compatibilizar dos teorías de la física clásica: la mecánica newtoniana (ó mecánica clásica) y el electromagnetismo.

La mecánica clásica se enuncia de idéntica manera considerando observadores que se mueven unos respecto de otros con movimiento rectilíneo uniforme (Principio de relatividad de Galileo) en lugar de observadores inmóviles. De esta manera, las ecuaciones de la mecánica son invariantes por transformaciones de Galileo.

Sin embargo, este principio de relatividad no se cumple en el electromagnetismo, puesto que es necesario fijar un observador inmóvil. Las ecuaciones del electromagnetismo (ó ecuaciones de Maxwell-Lorentz) no son invariantes por transformaciones de Galileo. Además, con el experimento de Michelson-Morley se manifiesta que la velocidad c de la luz es la misma en todo sistema inercial y no verifica la ley de adición de velocidades establecida en la mecánica de Newton. Con el fin de compatibilizar ambas teorías, Albert Einstein introduce la relatividad especial en 1905.

Objetivos y plan de trabajo.

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es realizar una introducción a la Relatividad especial.

Este plan de trabajo se divide en tres etapas. En la primera hemos recordado algunos conceptos y resultados sobre la geometría afín y los espacios vectoriales de Minkowski, que son fundamentales en el desarrollo de la memoria. En la segunda, nos adentramos en la mecánica de Newton y recordamos el papel de los sistemas inerciales en la mecánica clásica y en el electromagnetismo. Para finalizar, introducimos los postulados de la relatividad especial, a partir de los cuales se estudiarán las transformaciones de Lorentz, el espacio de Minkowski y

algunos efectos relativistas aplicando los conceptos geométricos introducidos.

Contenido y discusión de resultados.

La memoria está estructurada en esta introducción, tres capítulos en los cuales desarrollamos los contenidos y las conclusiones obtenidas.

En el primer capítulo explicamos qué es un espacio afín, cuyas propiedades veremos en la sección 1.1. Continuaremos repasando algunos conceptos ya estudiados durante la carrera, como es el caso de subespacio afín o espacio vectorial euclídeo. Posteriormente veremos qué es una aplicación afín y sus propiedades junto con dos resultados importantes que utilizaremos posteriormente: las proposiciones 1.1 y 1.2. Terminaremos introduciendo el espacio de Minkowski y probando algunas de sus propiedades.

En el segundo capítulo nos introducimos en la mecánica de Newton, recordando conceptos, propiedades y resultados, como la ley de adición de velocidades, la transformación de Galileo o el principio de relatividad de Galileo. A continuación recordamos las leyes del electromagnetismo, y comprobamos que la ecuación de onda electromagnética

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0,$$

en la que ϕ representa un campo eléctrico o magnético, no permanece invariante mediante una transformación de Galileo. En otras palabras, no verifica el principio de relatividad de Galileo. Finalmente, recordamos el experimento de Michelson-Morley, de que se deduce que la velocidad de la luz es la misma en todo sistema inercial. Ésta fue una drástica conclusión para los investigadores de la época y además marcará el comienzo del tercer capítulo.

En este último capítulo introducimos los principios de la relatividad especial: el principio de relatividad y el principio de invariancia de la velocidad de la luz. Con ellos se consigue compatibilizar por fin la mecánica clásica y el electromagnetismo. Por otro lado, se asocia a cada par de sistemas inerciales S, S' una aplicación biyectiva $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ denominada transformación de Lorentz, y nuestro principal objetivo consiste en demostrar que f es una afinidad, esto es, el teorema 3.11. Posteriormente, obtenemos las ecuaciones de una transformación de Lorentz tomando sistemas inerciales adecuados. Viene dada por las ecuaciones 3.6, y la transformación inversa, por las ecuaciones 3.7. Con la transformación de Lorentz estudiamos algunos efectos relativistas: contracción de las longitudes, dilatación del tiempo y simultaneidad de los sucesos.

Terminamos introduciendo el espacio de Minkowski (espacio-tiempo ó espacio de sucesos) donde formalizamos geoméricamente la relatividad especial. Aquí hacemos una interpretación geométrica de algunos fenómenos físicos: dilatación del tiempo, contracción de las longitudes y la paradoja de los gemelos.

Geometría afín y de Minkowski

En este capítulo repasaremos algunos conceptos y resultados sobre geometría afín y de Minkowski que utilizaremos posteriormente.

1.1. Espacios afines

Dado un conjunto $E \neq \emptyset$, a cuyos elementos llamamos puntos, y un espacio vectorial real V de dimensión n , decimos que E es un espacio afín sobre V (con dirección V) si existe una aplicación

$$\begin{aligned} \theta: E \times E &\longrightarrow V \\ (A, B) &\longrightarrow \theta(A, B) = \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. Para cada punto $A \in E$ y cada vector $\vec{v} \in V$, existe un único punto $B \in E$ tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
2. Dados A, B, C puntos de E ,

$$\theta(A, B) + \theta(B, C) = \theta(A, C)$$

Si lo escribimos en forma vectorial, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, lo que se conoce como Relación de Chasles.

Si $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, diremos que \vec{v} es el vector con origen en A y extremo en B . La dimensión del espacio afín E se define como la dimensión del espacio vectorial asociado V . Una definición equivalente viene dada mediante una aplicación

$$\begin{aligned} \varphi: E \times V &\longrightarrow E \\ (A, \vec{v}) &\longrightarrow \varphi(A, \vec{v}) = A + \vec{v} \end{aligned}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. Dados $A, B \in E$, existe un único vector $\vec{v} \in V$ tal que $B = A + \vec{v}$.
2. Si $A \in E, \vec{v}, \vec{w} \in V, (A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w})$

Si $B = A + \vec{v}$, se dice que B es el trasladado por \vec{v} del punto A . Si fijamos $P \in E$, por la propiedad 1, dado cualquier $X \in E$ existe un único $\vec{v} \in V$ tal que $X = P + \vec{v}$. Así podemos escribir $E = P + V$, donde $V = \{\overrightarrow{PX} / X \in E\}$.

Para utilizar coordenadas en un espacio afín debemos introducir los sistemas de referencia. Dado un espacio afín E de dimensión n sobre un espacio vectorial V , un **sistema de referencia cartesiano** es un par formado por un punto $O \in E$ llamado origen de la referencia y una base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ del espacio vectorial V . Se representa por $R = \{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$.

Fijado un sistema de referencia R , llamamos **coordenadas de un punto** $X \in E$ a las coordenadas del vector \overrightarrow{OX} respecto de la base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, es decir, $X \in E$ tiene coordenadas (x_1, \dots, x_n) respecto de R , si $\overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$.

El origen de coordenadas de cualquier sistema de referencia siempre tiene coordenadas $(0, \dots, 0)$ ya que $\overrightarrow{OO} = \vec{0}$. Dado un subconjunto F , se dice que F es un **subespacio afín** de E si existe un subespacio vectorial U de V tal que F es un espacio afín sobre U con la aplicación $\theta: E \times E \rightarrow V$ restringida a $F \times F$. Es equivalente a decir que $F = A + U$, con $A \in F$ y U subespacio vectorial de V . Si E es un espacio afín de dimensión n , una recta es subespacio afín de dimensión 1; un plano es un subespacio afín de dimensión 2, y un hiperplano es un subespacio afín de dimensión $n - 1$.

Sea E un espacio afín sobre $V, R = \{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una referencia de E y $F = P + U$ un subespacio afín de dimensión k con vectores directores $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$, es decir, $U = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \rangle$. Supongamos que P tiene coordenadas (p_1, \dots, p_n) y $\vec{u}_i = \sum_{j=1}^n u_{ji} \vec{e}_j, i = 1, \dots, k$. Entonces $X = (x_1, \dots, x_n) \in F, \overrightarrow{PX} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{u}_i$, con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \dots, k$. Tomando coordenadas respecto de la base R :

$$(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n) = \lambda_1(u_{11}, \dots, u_{n1}) + \dots + \lambda_k(u_{1k}, \dots, u_{nk})$$

que podemos reescribir como

$$\begin{cases} x_1 - p_1 = \lambda_1 u_{11} + \dots + \lambda_k u_{1k} \\ \vdots \\ x_n - p_n = \lambda_1 u_{n1} + \dots + \lambda_k u_{nk} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = p_1 + \lambda_1 u_{11} + \dots + \lambda_k u_{1k} \\ \vdots \\ x_n = p_n + \lambda_1 u_{n1} + \dots + \lambda_k u_{nk} \end{cases}$$

siendo $\lambda_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \dots, k$. A este sistema se le denomina **ecuaciones paramétricas** del subespacio afín F respecto de R . Las **ecuaciones implícitas** de un subespacio afín se obtienen eliminando los parámetros de las ecuaciones anteriores. Así obtenemos $n - k$ ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + a_{10} = 0 \\ \vdots \\ a_{n-k1}x_1 + \dots + a_{n-kn}x_n + a_{n-k0} = 0 \end{cases}$$

Para estudiar longitudes, ángulos y ortogonalidad en un espacio afín debemos introducir los espacios vectoriales euclídeos. Sea V un espacio vectorial real. Un producto escalar sobre V es una aplicación

$$\begin{aligned} \cdot : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
3. $(\lambda \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Un **espacio vectorial euclídeo** es un par (V, \cdot) formado por un espacio vectorial V y un producto escalar “ \cdot ”. La norma de un vector $\vec{v} \in V$ está definida como $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \geq 0$. Cumple las siguientes propiedades:

1. $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
2. $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$
3. Desigualdad de Schwarz: $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
4. Desigualdad triangular: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Un **espacio afín euclídeo** es un espacio afín E cuyo espacio vectorial asociado es un espacio vectorial euclídeo (V, \cdot) . Si E es un espacio afín euclídeo, se define la distancia entre dos puntos $X, Y \in E$ como la norma del vector que determinan: $d(X, Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XY}}$.

Un sistema cartesiano $R = \{O; \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}\}$ se dice rectangular si $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es una base ortonormal.

Empezaremos recordando el concepto de aplicación lineal entre espacios vectoriales antes de introducir las aplicaciones afines.

Dados dos espacios vectoriales V y W , una aplicación $f: V \longrightarrow W$ se dice que es una **aplicación lineal o un homomorfismo entre espacios vectoriales** si verifica:

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}), \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Se dice que f es un **isomorfismo** si f es biyectiva. Si f es un isomorfismo entre espacios vectoriales reales, entonces $f^{-1}: W \longrightarrow V$ también es un isomorfismo. Un **endomorfismo** es una aplicación lineal $f: V \longrightarrow V$. Un **automorfismo** es un endomorfismo biyectivo.

Sean dos espacios afines E_1, E_2 con espacios vectoriales asociados V_1, V_2 . Una

aplicación $f: E_1 \rightarrow E_2$ se dice que es una **aplicación afín** si existe una aplicación lineal $\vec{f}: V_1 \rightarrow V_2$ tal que para todo $X \in E_1, \vec{v} \in V_1$ se tiene: $f(X + \vec{v}) = f(X) + \vec{f}(\vec{v})$. Si existe $P \in E_1$ para el cual se cumple esta condición, se cumplirá para todo $X \in E_1$. Se puede probar que una aplicación $f: E_1 \rightarrow E_2$ es afín si y sólo si existe una aplicación lineal $\vec{f}: V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\forall X, Y \in E_1, \vec{f}(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{f(X)f(Y)}$.

Ahora citaremos algunos resultados que usaremos más adelante. Sea $f: E_1 \rightarrow E_2$ una aplicación afín con aplicación lineal asociada $\vec{f}: V_1 \rightarrow V_2$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. f es inyectiva $\iff \vec{f}$ es inyectiva.
2. f es sobreyectiva $\iff \vec{f}$ es sobreyectiva.
3. f es biyectiva $\iff \vec{f}$ es biyectiva.

Si $f: E_1 \rightarrow E_2$ y $g: E_2 \rightarrow E_3$ son aplicaciones afines con aplicaciones lineales asociadas $\vec{f}: V_1 \rightarrow V_2$ y $\vec{g}: V_2 \rightarrow V_3$ entonces $g \circ f: E_1 \rightarrow E_3$ es afín y además $\vec{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$. Dados dos espacios afines E_1, E_2 sobre V_1, V_2 se tiene:

Proposición 1.1. Sean $\vec{f}, \vec{g}: E_1 \rightarrow E_2$ dos aplicaciones afines que coinciden en un punto P , esto es, $f(P) = g(P)$ y $\vec{f} = \vec{g}$. Entonces $f = g$.

Proposición 1.2. Sea $l: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicación lineal, $P \in E_1$ y $Q \in E_2$. Entonces, existe una única aplicación afín $f: E_1 \rightarrow E_2$ tal que $f(P) = Q$ y $\vec{f} = l$.

Para terminar, recordaremos las ecuaciones cartesianas de una aplicación afín. Sean E_1, E_2 espacios afines de dimensiones n y m con direcciones respectivas V_1, V_2 . Sean $R_1 = \{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ y $R_2 = \{O'; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ bases de E_1 y E_2 respectivamente. Supongamos que $f: E_1 \rightarrow E_2$ es una aplicación afín con aplicación lineal asociada $\vec{f}: V_1 \rightarrow V_2$. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz asociada a \vec{f} respecto de las bases $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de V_1 y $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ de V_2 . Así, $\vec{f}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{u}_i, j = 1, \dots, n$. Ahora si $X \in E_1$ tiene coordenadas (x_1, \dots, x_n) y denotamos por (y_1, \dots, y_m) y (b_1, \dots, b_m) a las coordenadas de $f(X)$ y $f(O)$ respecto de la referencia $\{O'; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ se sigue que

$$\begin{cases} y_1 = b_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = b_2 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = b_m + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

que son las ecuaciones cartesianas de la aplicación afín respecto de las referencias fijadas. En forma matricial se escribirá así:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1.2. Espacio vectorial de Minkowski

Sea \mathbb{R}^4 con su estructura canónica de espacio vectorial real, con base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$. Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$, $\vec{v} = \sum_{i=1}^4 v_i \vec{e}_i$ y (v_1, v_2, v_3, v_4) serán las coordenadas de \vec{v} respecto de dicha base. En \mathbb{R}^4 definimos la aplicación

$$g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow g(\vec{u}, \vec{v})$$

de la siguiente manera: si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ entonces $g(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 - c^2 u_4 v_4$, $c \in \mathbb{R}$. Verifica las siguientes propiedades:

1. Es simétrica, con lo cual $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^4$.
2. Es lineal en cada uno de sus argumentos por separado, es decir, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene
 - $g(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{w}) = \lambda g(\vec{u}, \vec{w}) + \mu g(\vec{v}, \vec{w})$.
 - $g(\vec{u}, \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda g(\vec{u}, \vec{v}) + \mu g(\vec{u}, \vec{w})$
3. Es no degenerada: si $g(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ entonces $\vec{u} = \vec{0}$.

A g se le denomina **métrica de Minkowski**, y al par (\mathbb{R}^4, g) **espacio vectorial de Minkowski** (de dimensión 4). Respecto de la base canónica, la matriz asociada a g viene dada por $G = (g_{ij})$, $i, j = 1, \dots, 4$ con $g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$. G será la matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}$$

Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^4$ se dicen **ortogonales** si $g(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Sea $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$.

1. \vec{u} es **temporal** si $g(\vec{u}, \vec{u}) < 0$. Si $u_4 > 0$, \vec{u} es **temporal positivo**.
2. \vec{u} es **espacial** si $g(\vec{u}, \vec{u}) > 0$.
3. \vec{u} es **nulo** si $g(\vec{u}, \vec{u}) = 0$, $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Pasaremos a probar ahora algunas propiedades en el espacio vectorial de Minkowski.

Propiedades:

1. Un vector nulo es ortogonal a sí mismo.
2. Si \vec{u}, \vec{v} son vectores nulos, $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$ son vectores ortogonales tales que cumplen una y sólo una de las siguientes propiedades:
 - $g(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = g(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}) = 0$
 - $g(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = -g(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$
3. Dos vectores nulos ortogonales son proporcionales.
4. Cualquier vector ortogonal a un vector temporal \vec{u} es espacial o $\vec{0}$.
5. Cualquier vector ortogonal a un vector nulo \vec{u} es proporcional al vector \vec{u} o es un vector espacial.
6. Si \vec{u}, \vec{v} son vectores temporales positivos entonces $\vec{u} + \vec{v}$ es también temporal positivo. Además, $g(\vec{u}, \vec{v}) < 0$. De la misma forma, si \vec{u}, \vec{v} son temporales negativos, $\vec{u} + \vec{v}$ es temporal negativo.

Demostración.

- 1) Se sigue de la definición de vector nulo.
- 2) Tenemos que \vec{u}, \vec{v} son vectores nulos. Entonces:
 - $g(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}) = g(\vec{u}, \vec{u}) - g(\vec{v}, \vec{v}) = 0$
 - $g(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = 2g(\vec{u}, \vec{v})$
 - $g(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}) = -2g(\vec{u}, \vec{v})$
 Así $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son ortogonales y $g(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = -g(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ ó ambos son vectores nulos.
- 3) Sean dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Consideremos los vectores $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Entonces podemos escribir $\vec{u} = (\bar{u}, u_4), \vec{v} = (\bar{v}, v_4)$.

Como \vec{u}, \vec{v} son vectores nulos, podemos escribir:

$$g(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \implies \bar{u} \cdot \bar{u} - c^2 u_4^2 = 0 \implies \bar{u} \cdot \bar{u} = c^2 u_4^2,$$

De la misma forma, $g(\vec{v}, \vec{v}) = 0$. Si además \vec{u}, \vec{v} son ortogonales

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \implies \bar{u} \cdot \bar{v} = c^2 u_4 v_4.$$

Por la desigualdad de Schwarz en \mathbb{R}^3 , aunque en este caso se da la igualdad, se concluye que \vec{u} y \vec{v} son proporcionales, esto es, $u_i = \lambda v_i, i = 1, 2, 3$. Veamos que $u_4 = \lambda v_4$. En efecto, $c^2 u_4 v_4 = \bar{u} \cdot \bar{v} = \lambda(\bar{v} \cdot \bar{v}) = \lambda c^2 v_4^2$, por lo cual $u_4 = \lambda v_4$. En resumen, $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

- 4) Sea \vec{u} un vector temporal y \vec{v} un vector ortogonal a \vec{u} . Entonces $g(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 - c^2 u_4 v_4 = 0$. Como \vec{u} es temporal, $u_4 \neq 0$. Se sigue

$$\frac{(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2}{(c^2 u_4)^2} \leq \frac{\bar{u}^2 \cdot \bar{v}^2}{(c^2 u_4)^2},$$

donde $\bar{u} = (\bar{u}, u_4)$ y $\bar{v} = (\bar{v}, v_4)$. Como \vec{u} es temporal, $\bar{u} \cdot \bar{u} < c^2 u_4^2$.

Así $(v_4)^2 \leq \frac{\bar{u}^2 \cdot \bar{v}^2}{(c^2 u_4)^2} < \frac{\bar{v}^2}{c^2}$. Si $\bar{u} \cdot \bar{v} \neq 0$, $\bar{v}^2 > c^2 v_4^2$, por lo que \vec{v} es espacial.

Si $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$, $v_4 = 0$ y \vec{v} es espacial o igual al vector nulo.

- 5) Sea \vec{u} un vector nulo y \vec{v} un vector ortogonal a \vec{u} . Ponemos $\vec{u} = (\bar{u}, u_4)$ y $\vec{v} = (\bar{v}, v_4)$. Entonces

$$g(\vec{u}, \vec{u}) = \bar{u} \cdot \bar{u} - c^2 u_4^2 = 0$$

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v} - c^2 u_4 v_4 = 0$$

Como \vec{u} es nulo, $u_4 \neq 0$ y así podemos poner $v_4 = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{c^2 u_4}$. Usando ahora la desigualdad de Schwarz,

$$v_4^2 = \frac{(\bar{u} \cdot \bar{v})^2}{(c^2 u_4)^2} \leq \frac{\bar{u}^2 \cdot \bar{v}^2}{(c^2 u_4)^2} = \frac{\bar{v}^2}{c^2},$$

es decir, $c^2 v_4^2 \leq \bar{v}^2$. Así:

Si $\bar{v}^2 - c^2 v_4^2 > 0$, \vec{v} es espacial.

Si $\bar{v}^2 - c^2 v_4^2 = 0$, \vec{v} es un vector nulo y por lo tanto es proporcional a \vec{u} .

- 6) Sean \vec{u}, \vec{v} vectores temporales con $u_4 v_4 > 0$. Así, si $\vec{u} = (\bar{u}, u_4)$ y $\vec{v} = (\bar{v}, v_4)$, se sigue que $\bar{u}^2 < u_4^2 c^2$ y $\bar{v}^2 < v_4^2 c^2$. Entonces

$$g(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = g(\vec{u}, \vec{u}) + g(\vec{v}, \vec{v}) + 2g(\vec{u}, \vec{v}) = \bar{u}^2 - c^2 u_4^2 + \bar{v}^2 - c^2 v_4^2 + 2(\bar{u}\bar{v} - c^2 u_4 v_4)$$

Ahora, como $\bar{u}^2 - c^2 u_4^2 < 0$ y $\bar{v}^2 - c^2 v_4^2 < 0$ se sigue que $g(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) < 2(\bar{u}\bar{v} - c^2 u_4 v_4)$. Por otro lado, $\bar{u} \cdot \bar{v} \leq |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| = \sqrt{\bar{u}^2 \bar{v}^2} < \sqrt{u_4^2 v_4^2 c^4} = u_4 v_4 c^2$. Así $g(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) < 0$. En consecuencia, $\vec{u} + \vec{v}$ es temporal y $u_4 + v_4$ tiene el mismo signo que u_4 y v_4 . Finalmente, $g(\vec{u}, \vec{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v} - c^2 u_4 v_4$ y como $|\bar{u}||\bar{v}| < c^2 u_4 v_4$ se tiene que $g(\vec{u}, \vec{v}) < \bar{u} \cdot \bar{v} - |\bar{u}||\bar{v}| \leq 0$, y así $g(\vec{u}, \vec{v}) < 0$.

Antes de continuar, recordemos que en \mathbb{R}^4 con un producto escalar (definido positivo) se tienen las siguientes desigualdades:

1. **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:** $(\bar{u} \cdot \bar{v})^2 \leq (\bar{u} \cdot \bar{u})(\bar{v} \cdot \bar{v})$
2. **Desigualdad triangular:** $\sqrt{(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v})} \leq \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}} + \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$

Se verifican en cualquier espacio vectorial euclídeo. Para ver cómo quedan en un espacio de Minkowski, consideraremos primero el espacio de Minkowski de dimensión 2, es decir, (\mathbb{R}^2, g) , donde g es el producto escalar definido como sigue: si $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2)$, entonces $g(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 w_1 - c^2 v_2 w_2$. Entonces se tiene

Lema 1.3. *En el espacio de Minkowski bidimensional, se cumple que:*

$$g(\vec{v}, \vec{w})^2 \geq g(\vec{v}, \vec{v})g(\vec{w}, \vec{w}), \forall \vec{v}, \vec{w}.$$

Demostración. De la definición de g , se trata de probar

$$(v_1 w_1 - c^2 v_2 w_2)^2 \geq ((v_1)^2 - c^2 (v_2)^2)(w_1^2 - c^2 (w_2)^2)$$

Desarrollando la desigualdad anterior:

$$(v_1w_1)^2 + c^4(v_2w_2)^2 - 2c^2v_1w_1v_2w_2 \geq (v_1w_1)^2 + c^4(v_2w_2)^2 - c^2((v_1w_2)^2 + (v_2w_1)^2),$$

llegamos a que $-2v_1w_1v_2w_2c^2 \geq -c^2(v_1w_2)^2 - c^2(v_2w_1)^2$, que equivale a decir que $v_1^2w_2^2 + v_2^2w_1^2 - 2v_1w_1v_2w_2 \geq 0$, esto es, $(v_1w_2 - v_2w_1)^2 \geq 0$, siempre cierto.

Ahora probaremos que esta misma desigualdad se da en el espacio de Minkowski (\mathbb{R}^4, g) cuando uno de los vectores es temporal.

Proposición 1.4. Desigualdad inversa de Schwarz.

En el espacio de Minkowski (\mathbb{R}^4, g) , sea \vec{v} un vector temporal y \vec{w} un vector cualquiera. Entonces $g(\vec{v}, \vec{w})^2 \geq g(\vec{v}, \vec{v})g(\vec{w}, \vec{w})$.

Demostración. Consideremos el subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 generado por \vec{v} y \vec{w} , esto es, $H = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Si $\vec{v} = \lambda\vec{w}$, la desigualdad se convierte en una igualdad. Ahora suponemos que \vec{v} y \vec{w} no son proporcionales, es decir, $\vec{v} \neq \lambda\vec{w}$. Entonces el espacio H es un subespacio de dimensión 2 en el que consideramos el producto escalar de Minkowski y de \mathbb{R}^4 . Así, (H, g) es un espacio de Minkowski de dimensión 2, y usando el lema anterior se obtiene la desigualdad.

Proposición 1.5. Desigualdad triangular inversa.

En el espacio de Minkowski (\mathbb{R}^4, g) , si \vec{v}, \vec{w} son dos vectores temporales positivos entonces

$$\frac{1}{i} \sqrt{g(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w})} \geq \frac{1}{i} \sqrt{g(\vec{v}, \vec{v})} + \frac{1}{i} \sqrt{g(\vec{w}, \vec{w})}$$

Demostración. Por la propiedad 6, $\vec{v} + \vec{w}$ es un vector temporal positivo. Así $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$, $g(\vec{w}, \vec{w}) < 0$ y $g(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}) < 0$ por lo cual tienen raíces imaginarias. Dividiendo por i , sus raíces son números reales. Elevando al cuadrado los dos miembros de la desigualdad, queda de la forma:

$$-g(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}) \geq -g(\vec{v}, \vec{v}) - g(\vec{w}, \vec{w}) - 2\sqrt{g(\vec{v}, \vec{v})g(\vec{w}, \vec{w})}$$

Tenemos que probar que $g(\vec{v}, \vec{v}) + g(\vec{w}, \vec{w}) + 2\sqrt{g(\vec{v}, \vec{v})g(\vec{w}, \vec{w})} \geq g(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w})$. Ahora, como $g(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}) = g(\vec{v}, \vec{v}) + g(\vec{w}, \vec{w}) + 2g(\vec{v}, \vec{w})$, la desigualdad que queremos probar es $g(\vec{v}, \vec{w}) \leq \sqrt{g(\vec{v}, \vec{v})g(\vec{w}, \vec{w})}$. Al ser $g(\vec{v}, \vec{w}) < 0$, los dos miembros de la desigualdad son negativos, y elevando ahora al cuadrado se quiere probar que

$$g(\vec{v}, \vec{w})^2 \geq g(\vec{v}, \vec{v})g(\vec{w}, \vec{w}),$$

la desigualdad de Schwarz probada antes.

Sistemas de referencia en la física clásica

2.1. Mecánica de Newton y sistemas de referencia

En su teoría, Newton suponía que todos los cuerpos físicos estaban en el espacio \mathbb{R}^3 y existía un punto inmóvil, que se podía considerar como el origen de un sistema de referencia canónico en \mathbb{R}^3 . También suponía que teníamos un reloj preciso que marcaba el tiempo de forma absoluta. De este modo, todos los sucesos que ocurrían en el espacio se podían referir al tiempo marcado por aquel reloj, que marcaba el “tiempo oficial”.

Definición 2.1. *El espacio-tiempo de Newton (o espacio de sucesos) es el producto $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Un suceso se representa mediante un punto $(P, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, donde P indica dónde ha ocurrido el suceso y t , el momento en el que ha ocurrido.*

Para describir los sucesos, se fija un sistema de referencia en \mathbb{R}^3 .

Definición 2.2. *Un observador consiste en un punto $O \in \mathbb{R}^3$ y un sistema de referencia (por lo general, cartesiano) de ejes XYZ con origen en O . Un suceso visto por él está determinado por cuatro coordenadas (x, y, z, t) , donde (x, y, z) indica el punto donde ha ocurrido el suceso y t , el instante en el que ocurre.*

Si una partícula P se mueve, su posición en cada instante t viene determinada por el punto $P(t) \in \mathbb{R}^3$. Describirá una curva en \mathbb{R}^3 parametrizada por t : $\vec{P}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Suponiendo que $\vec{P}(t)$ es una curva diferenciable de clase suficiente (con derivadas suficientes), se define la **velocidad** de P en el instante t como el vector $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{P}(t)}{dt}$ y la **aceleración** de P en el instante t como $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$.

Definición 2.3. *Una partícula P se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme si el vector velocidad $\vec{v}(t)$ es constante, es decir, $\vec{v}(t) = \vec{v} = cte, \forall t$.*

Fijado un observador O con sistema de referencia asociado XYZ , supongamos que A y B son dos partículas materiales que se mueven (respecto de O). Sean $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$ y $\vec{r}_B = \vec{r}_B(t)$ los vectores que determinan las posiciones de A y B en cada instante de tiempo. Podemos definir entonces $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, y de aquí, $\vec{r}_{BA} = -\vec{r}_{AB}$.

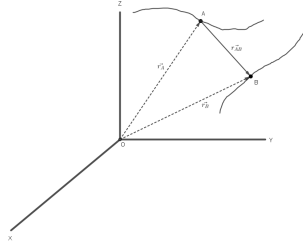


Figura 2.1. Partículas materiales en movimiento respecto a un observador.

Las velocidades de A y B respecto del observador O serán $\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$, $\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt}$. La velocidad de B respecto de A será:

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt}.$$

Análogamente, la velocidad de A respecto de B será:

$$\vec{v}_{AB} = -\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} - \frac{d\vec{r}_B}{dt}$$

Queda comprobado que $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$, esto es, la velocidad de B respecto de A es igual y opuesta a la velocidad de A respecto de B . Además, $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$. Derivando esta expresión obtenemos la aceleración de B con respecto de A :

$$\vec{a}_{BA} = \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} - \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_B - \vec{a}_A \Rightarrow \vec{a}_{AB} = -\vec{a}_{BA}.$$

A continuación vamos a obtener la transformación de Galileo.

Consideremos dos observadores O, O' que se mueven uno respecto al otro con movimiento rectilíneo uniforme. Supongamos que O' se mueve respecto de O con velocidad constante \vec{v} . Además, O y O' utilizan ejes $XYZ, X'Y'Z'$ tales que los ejes OX, OX' están en la línea del movimiento de O' respecto de O y los ejes OY y OZ son paralelos a $O'Y'$ y $O'Z'$. También suponemos que para $t = 0$ los orígenes O y O' coinciden.

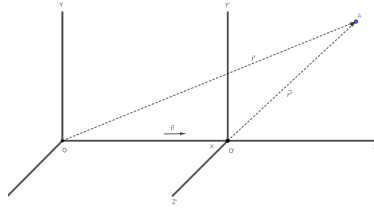


Figura 2.2. Dos observadores que se mueven uno respecto al otro con movimiento rectilíneo uniforme.

Como \vec{v} es la velocidad de O' respecto de O en el tiempo t se tendrá que $\overrightarrow{OO'} = \vec{v}t$, $\vec{v} = v\vec{e}_1 = (v, 0, 0)$. Supondremos que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ son los vectores básicos en la dirección de los ejes coordenados. Sea una partícula A . Denotamos $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{r}' = \overrightarrow{O'A}$. Entonces

$$\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow \vec{v}t + \vec{r}' = \vec{r} \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t.$$

Usando coordenadas $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}' = (x', y', z')$, $\vec{v} = (v, 0, 0)$, se sigue que $(x', y', z') = (x, y, z) - t(v, 0, 0)$.

Suponiendo además que ambos observadores utilizan el mismo tiempo, añadimos la ecuación $t' = t$ a las ecuaciones anteriores. Al conjunto formado por estas cuatro ecuaciones se le denomina **transformación de Galileo**,

$$\begin{cases} x' = x - tv \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

que nos permite relacionar las coordenadas de la partícula A respecto a O y O' en cada instante de tiempo. Ahora vamos a comparar las velocidades de A respecto a O y O' . La velocidad \vec{u} de la partícula A respecto de O será

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz}{dt}\vec{e}_3,$$

y la velocidad \vec{u}' de la partícula A respecto de O' ,

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy'}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz'}{dt}\vec{e}_3$$

Usando la transformación anterior, como $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$ se sigue que $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$, o lo que es lo mismo, $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$. Esta relación se conoce como **ley de adición de**

velocidades.

Si calculamos ahora las aceleraciones, denotando por \vec{a} y \vec{a}' las aceleraciones de A respecto de O y O' respectivamente y teniendo en cuenta que $\vec{v} = cte$ se sigue que $\vec{a} = \vec{a}'$. Esto quiere decir que la aceleración de una partícula es la misma para todos los observadores en movimiento rectilíneo uniforme.

A continuación obtendremos la expresión general de una transformación de Galileo. Elegimos dos sistemas de referencia que se mueven uno respecto al otro con movimiento rectilíneo uniforme, tales que para $t = 0$ el primero tiene su origen en O y base ortonormal en la dirección de los ejes $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y el segundo con origen en O' , con $OO' = -\vec{a}$ (para $t = 0$) y base ortonormal $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$. Supongamos que $\vec{e}_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} \vec{e}'_i$, $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}'_i$, $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}'_i$, siendo \vec{v} la velocidad de O' respecto de O ($\vec{v} = cte$). Entonces tenemos:

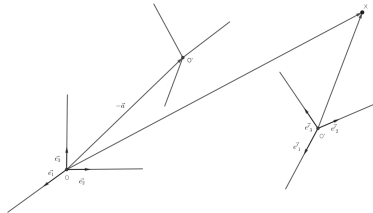


Figura 2.3. Dos sistemas de referencia que se mueven uno respecto al otro con movimiento rectilíneo uniforme.

$\vec{OX} = -\vec{a} + \vec{OO'} + \vec{O'X} = -\vec{a} + t\vec{v} + \vec{O'X}$, es decir, $\vec{O'X} = \vec{OX} + \vec{a} - t\vec{v}$. Usando coordenadas:

$$\begin{aligned} x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 + z'\vec{e}'_3 &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 + \sum a_i \vec{e}'_i - t \sum v_i \vec{e}'_i \\ &= x \left(\sum_{i=1}^3 a_{i1} \vec{e}'_i \right) + y \left(\sum_{i=1}^3 a_{i2} \vec{e}'_i \right) + z \left(\sum_{i=1}^3 a_{i3} \vec{e}'_i \right) + \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}'_i - \sum_{i=1}^3 t v_i \vec{e}'_i \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Si ponemos $X^t = (x, y, z)$, $X'^t = (x', y', z')$, $v^t = (v_1, v_2, v_3)$. $a^t = (a_1, a_2, a_3)$ y $A = (a_{ij})$ la expresión anterior se expresará como $X = AX - tv + a$, la expresión

general de una transformación de Galileo. Añadiendo la ecuación $t' = t + t_0$ relacionamos los tiempos.

Sean ahora dos observadores O , O' que se mueven uno respecto del otro con movimiento rectilíneo uniforme, y sea P una partícula. Como ya indicamos, la aceleración de P respecto de O' es la misma que la aceleración de P respecto de O . Cuando el observador O ve que la partícula P se mueve, de acuerdo a la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, atribuirá el movimiento a la acción de una fuerza $\vec{F} = m \frac{d^2\vec{P}(t)}{dt^2} = m a_{\vec{P}O}$. El observador O' atribuirá el movimiento a la acción de la misma fuerza, al ser $a_{\vec{P}O'} = a_{\vec{P}O}$.

De esta manera, los conceptos de aceleración y fuerza coinciden para observadores inmóviles o que se mueven uno respecto de otro con movimiento rectilíneo uniforme. Lo mismo sucede con la **ley de Gravitación Universal de Newton**, que la podemos enunciar así:

La interacción gravitacional entre dos cuerpos puede expresarse por una fuerza de atracción central proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa.

$$F = \gamma \frac{mm'}{r^2}$$

En forma vectorial, esta ley se expresa así: $\vec{F}_{ij} = \frac{km_i m_j (\vec{P}_i - \vec{P}_j)}{\|\vec{P}_i - \vec{P}_j\|^3}$, donde \vec{P}_i y

\vec{P}_j son los vectores de posición de los cuerpos P_i y P_j con masas m_i , m_j y \vec{F}_{ij} es la fuerza de atracción de P_i sobre P_j .

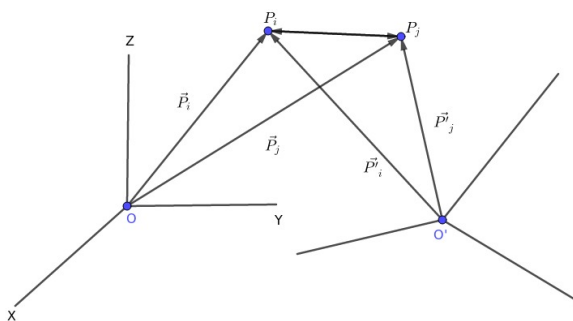


Figura 2.4. Interacción gravitacional entre dos cuerpos.

Esta ley no depende del observador. El primer miembro de la expresión anterior no cambia si utilizamos el sistema de origen en O' (se trata de una

fuerza) y el segundo tampoco, porque si referimos las posiciones a O' resulta $\vec{P}_i - \vec{P}_j = (\vec{P}_i - O\vec{O}') - (\vec{P}_j - O\vec{O}') = \vec{P}_i - \vec{P}_j$.

Lo mismo ocurre con la ley de choque de partículas y con el principio de la mecánica de fluidos. De hecho, toda la mecánica clásica se enuncia de idéntica manera si en vez de considerar observadores inmóviles consideramos observadores que se mueven con respecto de otros con movimiento rectilíneo uniforme. Así, podemos afirmar que existe una clase privilegiada de observadores, que se mueven unos respecto de otros con movimiento rectilíneo uniforme, para los cuales las leyes de la mecánica se expresan de la misma forma (principio de relatividad de Galileo). Se les conoce como **observadores inerciales**, y a los sistemas de referencia que eligen, **sistemas de referencia inerciales**. Sin embargo, las consideraciones anteriores no se aplican al electromagnetismo.

2.2. Elctromagnetismo. Experimento de Michelson-Morley.

Las leyes del electromagnetismo (**ecuaciones de Maxwell-Lorentz**) cambian si en vez de referirnos a un observador inmóvil nos referimos a cualquier observador que se mueva con movimiento rectilíneo uniforme. En el espacio libre sin cargas, las leyes del electromagnetismo se reducen a

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

donde $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t)$ y $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)$ representan los campos eléctrico y magnético respectivamente. De estas leyes se deduce que las componentes de los campos eléctrico y magnético satisfacen la ecuación de onda. Veamos, por ejemplo, que las componentes del campo eléctrico cumplen la ecuación de onda. Si a la tercera ecuación de la expresión anterior le volvemos a aplicar el rotacional:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Ahora, $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$, donde Δ es el operador laplaciano. Se sigue:

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{rot}(\vec{B})}{\partial t}$$

Como $\text{div} \vec{E} = 0$ y $\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ se sigue que $-\Delta E = \frac{-1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$. Así, si $\vec{E} = \sum_{i=1}^3 E_i \vec{e}_i$, se obtiene que las funciones E_i verifican la ecuación $\Delta E_i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}$.

Ahora $\Delta E_i = \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2}$, y así las E_i cumplen la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}$$

De forma análoga se prueba que las componentes B_i del campo magnético satisfacen la ecuación de onda. Para terminar, comprobaremos que la ecuación de onda no permanece invariante por una transformación de Galileo. Supongamos que tenemos un sistema de referencia inmóvil S con coordenadas (x, y, z) y tiempo t y consideramos la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0,$$

donde ϕ representa un campo eléctrico o magnético. Como vimos anteriormente, esta ecuación se obtiene directamente de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz. Supongamos que existe otro sistema de referencia S' que se mueve respecto de S con movimiento rectilíneo uniforme, y que el cambio de coordenadas viene dado por una transformación de Galileo de la forma

$$\begin{cases} x' = x - tv \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Expresemos ϕ en función de las coordenadas x', y', z', t' ($\phi = \phi(x, y, z, t) = \phi(x(x', y', z', t'), y(x', y', z', t'), z(x', y', z', t'), t(x', y', z', t'))$) y expresemos ahora la ecuación de ondas en las coordenadas (x', y', z', t') para comprobar si se mantiene invariante. Usando la regla de la cadena tendremos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'}$$

es decir, $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'}$. Derivando nuevamente se obtiene que $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2}$. Procediendo de igual forma, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2}$ y $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2}$. Calcularemos ahora $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \cdot (-v) + \frac{\partial \phi}{\partial t'} = -v \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial t'}$$

Derivando nuevamente

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-v \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -v \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t' \partial t'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} \right) +$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t' \partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t' \partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t' \partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t' \partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} + v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2}.$$

Sustituyendo ahora en la ecuación de onda se sigue:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} + v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} \right) = 0,$$

esto es,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} = \frac{1}{c^2} \left(v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} \right),$$

que no coincide con la fórmula original al aparecer el

término $\frac{1}{c^2} \left(v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} \right)$.

Ambas ecuaciones sólo coinciden cuando $v = 0$. Esto quiere decir que la expresión de la ecuación de ondas sólo se conserva para observadores inmóviles.

En la teoría del electromagnetismo se había llegado a la conclusión de que la luz era una onda, por lo cual debía propagarse a través de un medio. A finales del siglo XIX se suponía que el espacio vacío estaba lleno de "éter", una especie de ente invisible e inmóvil a través del cual se propagaban las ondas electromagnéticas. Se consideraba como un sistema inercial absoluto donde la velocidad de la luz es $c = 2,997925 \cdot 10^8$ metros por segundo. Si este éter existía, se podrían diseñar experimentos para manifestar cualquier movimiento respecto de él. Se idearon una serie de experimentos para estudiar cómo afectaría el movimiento de la Tierra, a través del éter, a la velocidad de la luz medida desde la propia Tierra. Si se moviera a través del éter con velocidad v , la velocidad de la luz respecto de ella dependería de su dirección de propagación. Debía valer $v' = c - v$ si un rayo luminoso se propaga en la dirección del movimiento de la Tierra; $v' = c + v$ si se propaga en la dirección opuesta, y $v' = \sqrt{c^2 - v^2}$ para un rayo perpendicular al movimiento de la Tierra.

Sin embargo, en 1887 destacó un importante experimento realizado por Albert Abraham Michelson y Edward Morley. Construyeron un interferómetro formado por un semiespejo que dividía la luz en dos haces que viajaban perpendicularmente y se recogían en un punto común. Midieron la velocidad de la luz en dos direcciones perpendiculares entre sí y con diferente velocidad relativa al éter. Se concluyó que la velocidad de la luz es la misma en todas las direcciones. Además, este resultado es contrario a la ley de adición de velocidades deducida de la transformación de Galileo.

Relatividad Especial.

3.1. Los postulados de la relatividad especial.

Partiendo de las suposiciones de Newton, vamos a estudiar la posición de los cuerpos escogiendo un sistema de referencia en \mathbb{R}^3 formado por un origen(observador) y tres ejes rectangulares. También hemos elegido una unidad de distancia para obtener las coordenadas de cualquier punto.

Por otro lado, necesitamos un reloj que marque la hora uniformemente. Para decir que un observador inmóvil respecto de ti ha visto una partícula, es importante que todos los observadores inmóviles tengan sus relojes sincronizados al tuyo. Explicaremos bien este concepto exponiendo un primer método.

Supongamos que en dos puntos A y B inmóviles respecto al mismo observador hemos colocado dos relojes, que los denotaremos por R_A y R_B . Desde A se emite un rayo de luz hacia B en el instante t_0 del reloj de A , llega a B en el instante t_0' del reloj de B y, reflejado por un espejo, regresa hacia A en el instante t_1 de su reloj.

Definición 3.1. Decimos que R_A y R_B están *sincronizados* si se cumple la relación $t'_0 - t_0 = t_1 - t'_0$.

Ahora explicaremos otros dos métodos de sincronización de relojes.

Un método consiste en poner nuestros relojes en posición y sincronizarlos mediante señales. Todas ellas necesitan un tiempo finito para recorrer una distancia, y la más adecuada es aquella que depende del menor número de factores posible. Se escogen las ondas electromagnéticas porque no necesitan un medio para transmitirse, se conoce su velocidad de propagación ($3 \cdot 10^7 km/s$) y es igual para todo observador inercial, lo más importante para un método universal de sincronización. Supongamos ahora que existe un observador y una fuente de luz junto a cada reloj, y llamamos L a la distancia entre los relojes(observadores). A prenderá su fuente de luz cuando su reloj marca $t = 0$, y cuando B reciba la señal pondrá el suyo en $t = L/c$. Si B prende su fuente de luz en el instante

t , A recibirá la señal en el instante $t + L/c$. El otro método consiste en poner una fuente de luz en el punto medio de la recta que une A y B y decir a cada observador que ponga su reloj en $t = 0$ cuando reciban la señal de encendido de la luz. Desde el punto medio de la recta, tardará lo mismo en llegar a ambos observadores.

Proposición 3.2. *Los métodos anteriores son equivalentes, es decir, $t'_0 - t_0 = t_1 - t'_0 \Leftrightarrow t'_0 = t_0 + \frac{L}{c}$.*

Demostración. Veremos primero la implicación hacia la derecha. Como el rayo de luz tarda el mismo tiempo en ir hacia B y regresar, $t_1 = t_0 + \frac{L}{c} + \frac{L}{c} \Rightarrow t_1 = t_0 + \frac{2L}{c}$. Sustituyendo en la definición:

$$t'_0 - t_0 = t_1 - t'_0 \Rightarrow t'_0 - t_0 = t_0 + \frac{2L}{c} - t'_0 \rightarrow 2t'_0 = 2\left(t_0 + \frac{L}{c}\right) \Rightarrow t'_0 = t_0 + \frac{L}{c}.$$

Veamos ahora la implicación contraria.

$$\begin{cases} t'_0 = t_0 + L/c \\ t_1 = t_0 + 2L/c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t'_0 = t_0 + L/c \\ t_1 = t'_0 + L/c \end{cases}$$

De aquí se concluye que $t'_0 - t_0 = t_1 - t'_0$, la definición de relojes sincronizados. Es evidente que el último método expuesto es equivalente a los otros dos.

Definición 3.3. *Llamaremos **sistema de referencia** al conjunto de tres ejes perpendiculares del espacio con un origen común sobre cada uno de los cuales hemos elegido una orientación. Además, suponemos que hemos elegido una unidad de distancia y que en cada punto A del espacio inmóvil respecto a estos ejes hay un reloj R_A , de manera que los relojes R_A y R_B correspondientes a dos puntos inmóviles A, B respecto a estos ejes están sincronizados.*

De igual forma que en la mecánica de Newton, el espacio-tiempo o espacio de sucesos es $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Fijado un sistema de referencia, podemos asociar a cada evento las coordenadas (x_1, x_2, x_3) del punto donde ha ocurrido (respecto a los ejes del sistema) y el tiempo t , que indica cuándo ha ocurrido. Si S y S' son dos sistemas de referencia distintos, puede suceder que S' se mueva respecto a S , es decir, cualquier partícula A inmóvil respecto a los ejes de S' describirá una curva $\vec{A}(t) = (A_1(t), A_2(t), A_3(t))$ respecto a los observadores de S .

Definición 3.4. *Sean S, S' dos sistemas de referencia. Se dice que S' está en movimiento rectilíneo uniforme respecto a S si existe un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que para todo punto A inmóvil respecto de S' , A está en cada instante t en el punto $\vec{A}(t) = (A_1(t), A_2(t), A_3(t))$ de modo que $\frac{dA_i(t)}{dt} = v_i, \forall t, i = 1, 2, 3$.*

Definición 3.5. *S y S' son sistemas equivalentes si están inmóviles uno respecto al otro empleando la misma unidad de distancia y escala de tiempo, o cumplen las siguientes propiedades:*

- *Cada uno de ellos se mueve respecto al otro con movimiento rectilíneo uniforme, con velocidad no nula.*
- *Dos eventos ocurridos en un punto inmóvil respecto a S son vistos desde S' en el mismo orden temporal en que los ha visto un observador de S . Ocurre lo mismo si cambiamos los papeles de S y S' .*
- *Observamos desde S' dos eventos ocurridos en un punto inmóvil respecto de S separados por un intervalo de tiempo de longitud 1. Al moverse S respecto a S' , ambos eventos son vistos desde S' en dos puntos distintos del espacio y medimos la distancia entre ellos. Ocurre lo mismo cambiando los papeles de S y S' .*

Ahora daremos una definición detallada de los principios de la relatividad especial.

1. **Principio de relatividad:** Existe una clase privilegiada de sistemas de referencia o sistemas inerciales y una constante $c > 0$ con las dimensiones de una velocidad, que cumplen las siguientes propiedades:
 - Si S es un sistema inercial, también lo es todo sistema S' inmóvil respecto a S que se obtenga a partir de él por un desplazamiento de ejes y un cambio de origen de tiempo. Un desplazamiento es una transformación biyectiva de \mathbb{R}^3 que transforma rectas en rectas y conserva las distancias.
 - Si S es un sistema inercial y P un punto móvil que viaja respecto a S con movimiento rectilíneo uniforme de velocidad \vec{v} , con $|\vec{v}| < c$, existe un sistema inercial S' con origen P .
 - Dos sistemas inerciales S y S' son siempre equivalentes.
 - Los observadores que viajan en cualquier sistema inercial pueden enunciar las leyes físicas de la misma forma.
2. **Principio de invariancia de la velocidad de la luz:**
 - Si un observador inmóvil respecto a un sistema inercial S contempla la propagación en el vacío de un rayo instantáneo de luz, emitido por cualquier foco luminoso, éste se propaga con movimiento rectilíneo uniforme respecto a S .
 - Independientemente del sistema inercial, el módulo del vector velocidad de un rayo de luz es constante e igual a c .

3.2. La transformación de Lorentz.

Sean S, S' dos sistemas de referencia inerciales. Un suceso visto desde S quedará determinado por coordenadas (x_1, x_2, x_3, t) , donde (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas del punto del espacio donde ocurre el suceso y t el tiempo cuando ocurre. El mismo suceso, visto desde S' , quedará determinado por coordenadas (x'_1, x'_2, x'_3, t') . Así se obtiene una aplicación $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que asigna a las coordenadas (x_1, x_2, x_3, t) de un suceso contemplado desde S las coordenadas

(x'_1, x'_2, x'_3, t') del mismo suceso contemplado desde S' . Esa aplicación f se denomina **transformación de Lorentz** asociada a los sistemas inerciales S y S' . En lo que sigue probaremos que f es una afinidad. Según convenga, consideraremos sobre \mathbb{R}^4 la estructura de espacio vectorial o de espacio afín (donde hemos fijado coordenadas).

Recordemos que un vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$ se denomina temporal si $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 < c^2 u_4^2$. Denotamos por C el conjunto de vectores temporales de \mathbb{R}^4 definido de la siguiente forma:

$$C = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4 : u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - c^2 u_4^2 < 0\}$$

Decir que \vec{u} es temporal equivale a decir que $\vec{u} \in C$. C está formada por dos componentes conexas,

$$C^+ = \{\vec{u} \in C / u_4 > 0\}, C^- = \{\vec{u} \in C / u_4 < 0\}$$

Los vectores de C^+ se denominan **vectores temporales positivos**. Sean ahora S y S' dos sistemas inerciales y $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación de Lorentz asociada a ellos. Supongamos que r es una recta de \mathbb{R}^4 con vector director temporal $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$. Como $u_4 \neq 0$, podemos hacer la siguiente operación:

$$\frac{1}{u_4} \vec{u} = \left(\frac{u_1}{u_4}, \frac{u_2}{u_4}, \frac{u_3}{u_4}, 1 \right) = \vec{v},$$

y \vec{v} sigue siendo vector director temporal de r . Entonces r se puede parametrizar usando coordenadas (x_1, x_2, x_3, t) de S , por:

$$\begin{cases} x_i(t) = b_i + tv_i, i = 1, 2, 3 \\ t = t \end{cases}$$

donde $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, 1)$ satisface $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < c^2$. Para un observador de S , la recta r de \mathbb{R}^4 representa el movimiento de una partícula $P(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ en el espacio ordinario que se mueve con velocidad $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ tal que $\|\vec{v}\| < c$, es decir, su velocidad es inferior a la velocidad de la luz. Entonces se tiene

Lema 3.6. *Si r es una recta de \mathbb{R}^4 con vector director temporal, $f(r)$ es una recta de \mathbb{R}^4 que también tiene vector director temporal.*

Demostración. La recta r se puede parametrizar en la forma:

$$\begin{cases} x_i(t) = b_i + tv_i, i = 1, 2, 3 \\ t = t \end{cases}$$

con $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < c^2$. Esta recta representa el movimiento de un punto $\vec{P}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ que viaja con velocidad $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ tal que $\|\vec{v}\| < c$. Por el principio de relatividad, existirá un sistema S'' inercial con P como origen que se mueve respecto a S' con movimiento rectilíneo uniforme. Un observador de S' representará el movimiento de P por una recta de \mathbb{R}^4 que es $f(r)$.

Definición 3.7. Diremos que un plano de \mathbb{R}^4 (respectivamente, un hiperplano) es admisible si es de la forma $P + H$, donde H es un subespacio vectorial de dimensión 2 (respectivamente de dimensión 3) que admite una base formada por vectores de C^+ .

Lema 3.8. Si Π es un plano admisible de \mathbb{R}^4 , $f(\Pi)$ es un plano admisible.

Demostración. Sea Π un plano admisible. Entonces $\Pi = P + U$, donde $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$, siendo \vec{u}_1, \vec{u}_2 vectores temporales positivos. Ahora consideremos las rectas $P + \langle \vec{u}_1 \rangle$, $P + \langle \vec{u}_2 \rangle$. Por el lema anterior, se transforman por f en dos rectas r_1, r_2 tales que $r_1 \cap r_2 = f(P)$. Sea W el plano que contiene a r_1 y r_2 . Por el lema anterior, los vectores directores de estas rectas también serán temporales.

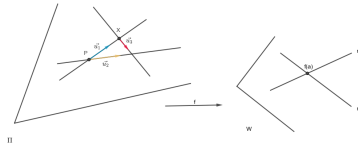


Figura 3.1. La imagen por f de un plano admisible Π es un plano admisible.

Queremos ver ahora que $f(\Pi) = W$. Tomamos $x \in \Pi$ tal que $x \notin P + \langle \vec{u}_1 \rangle$ y $x \notin P + \langle \vec{u}_2 \rangle$. Sea β una recta contenida en Π que pasa por x y tiene como vector director \vec{u}_3 , \vec{u}_3 temporal tal que $\vec{u}_3 \notin \langle \vec{u}_1 \rangle$ y $\vec{u}_3 \notin \langle \vec{u}_2 \rangle$, cortando a las rectas anteriores. Entonces $f(\beta) \subset W$, lo que quiere decir que $f(x) \in W$ y por lo tanto $f(\Pi) \subset W$. Como f es biyectiva, aplicando el mismo razonamiento a la aplicación inversa se tiene que $f(\Pi) = W$, ya que $W \subset f(\Pi)$.

Lema 3.9. f transforma hiperplanos admisibles en hiperplanos admisibles.

Demostración. Sea $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ y H un hiperplano admisible. Entonces $H = P + U$, donde $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$, siendo $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ vectores temporales positivos. Consideramos los planos $\Pi_1 = P + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ y $\Pi_2 = P + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_3 \rangle$. Por el lema anterior, $f(\Pi_1)$ y $f(\Pi_2)$ serán planos admisibles en \mathbb{R}^4 . Los planos Π_1 y Π_2 se cortan en una recta que la denotaremos por r .

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = r, r = P + \langle \vec{u}_1 \rangle \implies f(\Pi_1) \cap f(\Pi_2) = f(r)$$

$f(\Pi_1)$ y $f(\Pi_2)$ se cortan a lo largo de una recta. Sea W el hiperplano que contiene a $f(\Pi_1)$ y $f(\Pi_2)$. Veamos que $f(H) \subset W$. Sea $x \in H$ tal que $x \notin \Pi_1$ y $x \notin \Pi_2$. Sea s una recta admisible que corta a Π_1 y Π_2 en dos puntos b y c respectivamente, con lo cual $f(s)$ es una recta que corta a $f(\Pi_1)$ en $f(b)$ y a $f(\Pi_2)$ en $f(c)$. Como $f(b)$ y $f(c) \in W$, $f(s) \subset W$, con lo que $f(x) \in W$ y se concluye que $f(H) \subset W$. Argumentando ahora sobre f^{-1} se sigue que $f(H) = W$.

Sean ahora cuatro vectores linealmente independientes $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \in C^+$, $P \in \mathbb{R}^4$ y $r_i, i = 1, 2, 3, 4$, cuatro rectas que pasan por P y tienen como vectores directores a \vec{v}_i , es decir, $r_i = P + \langle \vec{v}_i \rangle, i = 1, 2, 3, 4$

Lema 3.10. *La aplicación $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ transforma las cuatro rectas r_i anteriores en cuatro rectas r'_i que pasan por $f(P)$ y tienen vectores directores temporales positivos linealmente independientes, que denotamos por \vec{u}_i .*

Demostración. Por el lema 3.6, $f(r_i) = r'_i$ es una recta que pasa por $f(P)$ y tiene vector director temporal \vec{u}_i . Ahora supondremos que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ no son independientes. Supongamos, por ejemplo, que $\vec{u}_1 = \sum_{i=2}^4 \lambda_i \vec{u}_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3, 4$.

Entonces $f(r_1) = r'_1 = f(P) + \langle \vec{u}_1 \rangle$ estará en el subespacio afín H que contiene a r_2, r_3, r_4 definido como $H = f(P) + \langle \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4 \rangle$. Además, $\dim H < 4$. Ahora, $f^{-1}(H)$ contiene a $f^{-1}(r'_i) = r_i$ y así $f^{-1}(H) = \mathbb{R}^4$, llegando a una contradicción al ser f biyectiva, concluyendo que los vectores $\{\vec{u}_i\}$ son independientes.

Teorema 3.11. *La aplicación $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es una afinidad.*

Demostración. Tomaremos 4 vectores temporales positivos linealmente independientes $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \in C^+$. Sean $r_i, i = 1, \dots, 4$ cuatro ejes (rectas) que pasan por un origen P cuyos vectores directores son $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ respectivamente. No serán perpendiculares por la propiedad 4 del espacio de Minkowski. Sean r'_1, r'_2, r'_3, r'_4 las imágenes por f de las rectas r_1, r_2, r_3, r_4 respectivamente. Por el lema 3.10, las rectas r'_i son linealmente independientes. Sea $Q = P + \sum_{i=1}^4 \vec{v}_i$. Existe entonces una única afinidad $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que transforma los ejes r_i en $r'_i, i = 1, \dots, 4$, el origen P en $f(P)$ y Q en $f(Q)$.

En efecto, dicha afinidad se define como sigue:

Tenemos

- $r_i = P + \langle \vec{v}_i \rangle, i = 1, 2, 3, 4$
- $r'_i = f(P) + \langle \vec{u}_i \rangle, i = 1, 2, 3, 4$
- $Q = P + \sum_{i=1}^4 \vec{v}_i$

$f(Q)$ será de la forma $f(Q) = f(P) + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \vec{u}_i, \lambda_i \in \mathbb{R}$. Entonces $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es

la única aplicación definida por $g(P) = f(P)$ y $\vec{g}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal $\vec{g}(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{u}_i, i = 1, \dots, 4$.

En efecto, por definición $g(P) = f(P)$. Ahora, si $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$,

- $g(P + \vec{v}) = g(P) + \vec{g}(\vec{v}) = f(P) + \vec{g}(\vec{v})$
- $g(Q) = g\left(P + \sum_{i=1}^4 \vec{v}_i\right) = f(P) + \vec{g}\left(\sum_{i=1}^4 \vec{v}_i\right) = f(P) + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \vec{u}_i = f(Q)$

Si $X \in r_i, X = P + \lambda \vec{v}_i$. Entonces

$$g(X) = g(P + \lambda \vec{v}_i) = g(P) + \vec{g}(\lambda \vec{v}_i) = f(P) + \lambda \lambda_i \vec{u}_i \in f(P) + \langle \vec{u}_i \rangle = r'_i \Rightarrow g(r_i) = r'_i.$$

Para probar que f es una afinidad basta con ver que $g^{-1} \circ f$ es la aplicación identidad, y así $f = g$.

Sea $\varphi = g^{-1} \circ f$. Entonces φ cumple las siguientes propiedades:

1. φ es biyectiva.
2. φ transforma rectas de vector director temporal en rectas, y planos e hiperplanos admisibles en planos e hiperplanos.
3. φ deja fijos los puntos P y Q y las rectas r_1, r_2, r_3, r_4 .

Veamos que una aplicación con estas propiedades será la identidad. Para empezar, φ debe transformar rectas paralelas de vector director temporal en rectas paralelas. Dadas dos de estas rectas α_1, α_2 , estarán contenidas en un plano admisible. Así, $\varphi(\alpha_1)$ y $\varphi(\alpha_2)$ serán rectas coplanarias. Como φ es biyectiva no se cortarían. Así son paralelas.

Como los ejes quedan fijos por φ , toda recta paralela a los ejes se transforma por φ en otra recta paralela a los ejes. De aquí, planos e hiperplanos paralelos a los planos e hiperplanos determinados por los ejes, los cuales son admisibles, se transforman en planos e hiperplanos paralelos a ellos por φ . La recta que une P y

Q tiene como vector director a $\vec{w} = \sum_{i=1}^4 \vec{v}_i \in C^+$. Por la propiedad 2, la imagen

de esta recta es una recta que contiene a P y Q al quedar fijos por φ , quedando esta recta fija por φ . Esto quiere decir que $\varphi(P + \lambda \vec{w}) = P + \mu \vec{w}$. Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\rightarrow \sigma(\lambda) = \mu \end{aligned}$$

obtenida por el procedimiento anterior. Veremos ahora que un punto de la forma $P + \lambda \vec{v}_i, i = 1, \dots, 4$ se transforma por φ en $P + \sigma(\lambda) \vec{v}_i$, es decir, $\varphi(P + \lambda \vec{v}_i) = P + \sigma(\lambda) \vec{v}_i$. Tomamos $i=1$. Para λ fijo, el punto $P + \lambda \vec{v}_1$ es la intersección del eje $P + \langle \vec{v}_1 \rangle$ con el hiperplano $P + \lambda \vec{w} + \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$. El eje $P + \langle \vec{v}_1 \rangle$

queda fijo por φ y el hiperplano se transformará en un hiperplano paralelo que contiene al punto $P + \sigma(\lambda)\vec{w}$, es decir, el hiperplano $P + \sigma(\lambda)\vec{w} + \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$. Así, la imagen por φ de $P + \lambda\vec{v}_1$ será $P + \sigma(\lambda)\vec{v}_1$.

De igual forma se prueba que $\varphi(P + \lambda\vec{v}_i) = P + \sigma(\lambda)\vec{v}_i$, $i = 2, 3, 4$. Ahora probaremos que un punto X cualquiera de la forma $X = P + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \vec{v}_i$ se transforma

por φ en $P + \sum_{i=1}^4 \sigma(\lambda_i)\vec{v}_i$. X es el punto de intersección de los cuatro hiperplanos

H_i dados por $H_i = P + \lambda_i \vec{v}_i + \langle \vec{v}_1, \dots, \hat{\vec{v}}_i, \dots, \vec{v}_4 \rangle$, para $i = 1, 2, 3, 4$. $\hat{\vec{v}}_i$ indica que \vec{v}_i no es vector director del hiperplano.

Veamos en qué se transforma cada uno de esos hiperplanos. Tomando $H_1 = P + \lambda_1 \vec{v}_1 + \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$, se transformará por φ en el hiperplano $\varphi(H_1) = P + \sigma(\lambda_1)\vec{v}_1 + \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$. Procediendo de igual forma, $\varphi(H_i) = P + \sigma(\lambda_i)\vec{v}_i + \langle \vec{v}_1, \dots, \hat{\vec{v}}_i, \dots, \vec{v}_4 \rangle$. La imagen por φ de X será el punto de corte de los cuatro hiperplanos, $P + \sum_{i=1}^4 \sigma(\lambda_i)\vec{v}_i$.

Para demostrar que φ es la identidad, basta probar que $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la identidad. Probaremos que σ es un automorfismo del cuerpo \mathbb{R} , una aplicación biyectiva tal que

1. $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$
2. $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$

Como el único automorfismo de \mathbb{R} es la identidad, se deduce que σ será la identidad. Veamos que σ es un automorfismo. La aplicación φ deja fijo el punto $Q' = P + \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. En efecto Q' es el punto de intersección del plano $Q + \langle \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$ con el plano $P + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$, los cuales quedan fijos por φ . Demostraremos que φ es un automorfismo sin salirnos del plano $P + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$. Aquí los ejes $P + \langle \vec{v}_1 \rangle$, $P + \langle \vec{v}_2 \rangle$ quedan fijos por φ , la recta $\overline{PQ'}$ queda fija por φ y σ está relacionado con φ por $\varphi(P + \lambda\vec{v}_1) = P + \lambda\vec{v}_1$.

Como estamos en el plano $P + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ tomamos la recta $P + \langle \vec{v}_1 \rangle$ como eje x y a la recta $P + \langle \vec{v}_2 \rangle$ como eje y. El punto P será el origen ($P = (0, 0)$), Q' será el punto $(1, 1)$ y $\varphi(x, 0) = \varphi(P + x\vec{v}_1) = P + \sigma(x)\vec{v}_1$.

Para probar que $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$, construiremos geoméricamente el punto $(a + b, 0)$ a partir de $(a, 0)$ y $(b, 0)$.

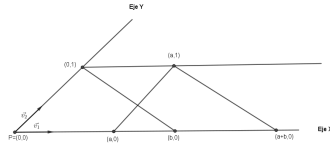


Figura 3.2. Construcción geométrica del punto $(a + b, 0)$ a partir de $(a, 0)$ y $(b, 0)$.

La figura muestra que $(a + b, 0)$ es la intersección del eje PX y la recta que pasa por $(a, 1)$ paralela a la recta que $(0, 1)$ y $(b, 0)$. En efecto, la ecuación implícita de esta recta será $x + by - (a + b) = 0$. Corta al eje PX en el punto $(a + b, 0)$.

Calculamos ahora las imágenes por φ de las rectas y puntos de la figura. Los ejes y los puntos $(0, 0)$ y $(0, 1)$ quedan fijos por φ y las rectas con vectores directores temporales se transforman en rectas. Sin embargo, las rectas con vector director $(b, -1)$ no son temporales. Si b es suficientemente pequeño ($|b| < \epsilon$) entonces $(b, -1) \Rightarrow (0, -1)$ y las rectas serían temporales. Si hallamos las imágenes de los puntos y las rectas de la figura anterior tendremos

$$\begin{aligned}
 (\sigma(b), 0) - (0, 1) &= (\sigma(b), -1) \\
 (\sigma(a + b), 0) - (\sigma(a), -1) &= (\sigma(a + b) - \sigma(a), -1)
 \end{aligned}$$

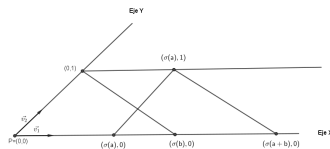


Figura 3.3. $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$

Como ambas direcciones tienen que ser paralelas,

$$\sigma(b) = \sigma(a + b) - \sigma(a) \Rightarrow \sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$$

Ahora probaremos que $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$. La figura muestra geoméricamente cómo se obtiene el punto $(ab, 0)$ a partir de $(a, 0)$ y $(b, 0)$.

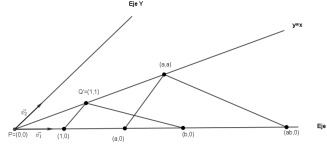


Figura 3.4. Construcción geométrica del punto $(ab, 0)$ a partir de $(a, 0)$ y $(b, 0)$.

El punto $(ab, 0)$ es la intersección del eje PX con la recta que pasa por (a, a) paralela a la recta que une Q' con $(b, 0)$, cuya ecuación implícita será $x + (b - 1)y - ab = 0$. Corta al eje PX en $(ab, 0)$.

Calculamos ahora las imágenes por φ de los puntos y rectas de la figura anterior. Los ejes y los puntos P' , Q' y $(1, 0)$ quedan fijos por φ , y las rectas con vectores directores temporales se transforman en rectas. Sin embargo, las rectas con vector director $(b - 1, -1)$ no son temporales. Tomando b próximo a 1, sí serán temporales (y sus imágenes serán rectas). Calculando las imágenes de las rectas y los puntos tendremos:

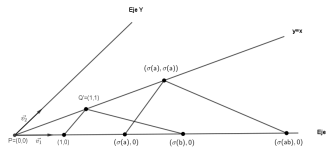


Figura 3.5. $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$

$$(\sigma(b), 0) - (1, 1) = (\sigma(b) - 1, -1)$$

$$(\sigma(ab), 0) - (\sigma(a), \sigma(a)) = (\sigma(ab) - \sigma(a), -\sigma(a))$$

Como φ transforma rectas temporales paralelas en rectas paralelas, los vectores anteriores tienen que ser proporcionales. Así, esta se puede hacer ya que $\sigma(a) \neq 0$. Si $\sigma(a) = 0$, nos quedará que $X = P$, con lo cual φ no sería biyectiva. Por otro lado, como ambos vectores deben ser paralelos,

$$\frac{\sigma(ab) - \sigma(a)}{\sigma(a)} = \sigma(b) - 1 \Rightarrow \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$$

En resumen, se sigue que σ es un automorfismo de f , por lo cual $\sigma = Id_{\mathbb{R}}$. Así queda probado que φ es la identidad en \mathbb{R}^4 , esto es, $f = g$.

Ahora nos proponemos encontrar la forma explícita de una transformación de Lorentz. Supongamos que viene determinada por el cambio de un sistema inercial S a otro S' donde los ejes y los orígenes de tiempo han sido elegidos de la siguiente manera: el eje X de S tiene la dirección del vector velocidad del movimiento uniforme de S' visto desde S . Esto significa que cualquier punto de S' situado sobre el eje X en un instante de tiempo, estará siempre. Los ejes X y X' siempre coinciden. Además, elegimos los orígenes de tiempo y los orígenes de S y S' de modo que cuando $t = t' = 0$, el origen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ de S coincide con el origen $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$ de S' . Como $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es una afinidad, será de la forma:

$$\begin{cases} x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j + a_{i4}t + k_i, i = 1, 2, 3 \\ t' = \sum_{j=1}^3 a_{4j}x_j + a_{44}t + k_4 \end{cases}$$

Como $O = O'$ para $t = t' = 0$, $k_i = 0, i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Al coincidir el eje X de ecuaciones $x_2 = x_3 = 0$ con el eje X' , entonces $x'_2 = x'_3 = 0$. Por lo tanto, $a_{21} = a_{24} = 0$ y $a_{31} = a_{34} = 0$. Como los tiempos siguen el mismo sentido, $a_{44} > 0$. Tomando $v = -a_{14}/a_{44}$ por notación, f será entonces de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - va_{44}t \\ x'_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\ t' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}t \end{cases} \quad (3.1)$$

Ahora imponemos el **principio de invariancia de la velocidad de la luz**. Supongamos que en el instante $t = 0$ de S se emite un rayo luminoso desde el origen en todas las direcciones, que llegará en el instante t en los puntos (x_1, x_2, x_3) que verifican $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = ct$, con lo cual $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2t^2$. Como para $t = 0$ coincidían los orígenes de S y S' y $t' = 0$, para un observador de S' el rayo luminoso habrá salido desde el origen en el instante inicial, llegando en el instante t a los puntos (x'_1, x'_2, x'_3) tales que $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = c^2t'^2$.

Así, el suceso que nos describe la posición del rayo de luz en cada instante de tiempo para un observador de S tendrá coordenadas (x_1, x_2, x_3, t) tales que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (3.2)$$

Para un observador de S' el mismo suceso tendrá coordenadas (x'_1, x'_2, x'_3, t') tales que

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (3.3)$$

Así, la aplicación f aplicará los puntos (x_1, x_2, x_3, t) que cumplen la ecuación 3.2 en puntos (x'_1, x'_2, x'_3, t') que cumplen la ecuación 3.3. Sea ahora $Q(x_1, x_2, x_3, t)$ la expresión que se obtiene de $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2$ sustituyendo x'_1, x'_2, x'_3, t' en función de x_1, x_2, x_3, t por las fórmulas 3.1. Q será una forma cuadrática en (x_1, x_2, x_3, t) . Entonces, si (x_1, x_2, x_3, t) verifica la ecuación 3.2 se tiene también que $Q(x_1, x_2, x_3, t) = 0$, y recíprocamente. Así, el cono de \mathbb{R}^4 debe ser también la cuádrica $Q(x_1, x_2, x_3, t) = 0$, con lo cual habrá de existir una constante $\rho \neq 0$ tal que $Q(x_1, x_2, x_3, t) = \rho(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2)$.

A continuación estudiamos la transformación inducida por f sobre el plano de \mathbb{R}^4 de ecuaciones $x_2 = x_3 = 0$. Como $f: (x_1, 0, 0, t) \rightarrow (x'_1, 0, 0, t')$, estudiaremos la transformación de dos variables

$$\begin{cases} x' = a_{11}x - va_{44}t \\ t' = a_{41}x + a_{44}t \end{cases} \quad (3.4)$$

donde por comodidad cambiamos x_1, x'_1 por x, x' . También se deduce que

$$Q(x, 0, 0, t) = (a_{11}x_1 - va_{44}t)^2 - c^2(a_{41}x_1 + a_{44}t)^2 = \rho(x^2 - c^2 t^2)$$

Igualando los coeficientes de ambos miembros en la igualdad anterior:

- Términos en x^2 : $a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 = \rho$
- Términos en t^2 : $a_{44}^2(v^2 - c^2) = -\rho c^2$
- Términos en xt : $a_{44}(a_{11}v + a_{41}c^2) = 0$

De la tercera ecuación se obtiene que $a_{41} = -a_{11}v/c^2$. Sustituyendo después en la primera, obtenemos que $\rho = a_{11}^2(1 - v^2/c^2)$. Para terminar, de la segunda ecuación se obtiene que $\rho = a_{44}^2(1 - v^2/c^2) \neq 0$, ya que como hemos visto, f es una transformación afín biyectiva. Se concluye que $a_{11}^2 = a_{44}^2$. Cambiando, si fuese necesario, la referencia S' por otra con los mismos ejes pero con orientación contraria al eje X' , podemos conseguir $a_{11} > 0$. En este caso, $a_{11} = a_{44}$. En resumen, la transformación 3.4 se escribirá:

$$\begin{cases} x' = a_{44}x - a_{44}vt \\ t' = -\frac{va_{44}}{c^2}x + a_{44}t \end{cases} \quad (3.5)$$

Ahora, el determinante de la transformación valdrá $a_{44}^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$, y es no nulo ya que $a_{44} > 0$ y $|v| < c$. Entonces, la transformación inversa de la dada por 3.5 será:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a_{44}(1 - \frac{v^2}{c^2})}x' + \frac{v}{a_{44}(1 - \frac{v^2}{c^2})}t' \\ t = \frac{v}{a_{44}(c^2 - v^2)}x' + \frac{1}{a_{44}(1 - \frac{v^2}{c^2})}t' \end{cases}$$

Consideramos ahora dos sucesos ocurridos en el origen de S , y separados por un intervalo de tiempo de longitud 1. Supongamos que el primero se ha producido en $t = 0$ y el segundo, en $t = 1$. El primero es visto desde S' en el origen de coordenadas y el segundo, en el punto $(-a_{44}v, 0, 0)$, valiendo la distancia entre ambos puntos $a_{44}|v|$.

Intercambiando los papeles de S y S' , la distancia, que calcularemos utilizando la transformación anterior, será $\frac{|v|}{a_{44}(1 - \frac{v^2}{c^2})}$. Como el valor obtenido debe ser el mismo,

$$a_{44}|v| = \frac{|v|}{a_{44}(1 - \frac{v^2}{c^2})} \Rightarrow a_{44}^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

De esta igualdad se deduce también que $a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Además, $\rho = 1$. Deno-

tando por $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ y llevando a f los valores obtenidos, tendremos:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{\alpha}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - \frac{v}{\alpha}t \\ x'_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\ t' = -\frac{v}{c^2\alpha}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + \frac{1}{\alpha}t \end{cases}$$

Además tenemos que $(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 - c^2t'^2 = Q(x_1, x_2, x_3, t) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - c^2t^2$. Sustituyendo los x'_i y t' usando la transformación anterior e igualando los términos en x_2x_1 y x_2t , obtenemos las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}a_{12} + \frac{v}{\alpha}a_{42} &= 0 \\ -a_{12}\frac{v}{\alpha} - c^2\frac{a_{42}}{\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

De la primera igualdad se obtiene que $a_{12} = -a_{42}v$. Sustituyendo en la segunda, $a_{42}(v^2 - c^2) = 0$. Como $v^2 < c^2$, $a_{42} = a_{12} = 0$.

Aplicando el mismo razonamiento con los términos x_1x_3 y x_3t , se obtiene que

$$\begin{aligned} a_{13} + a_{43}v &= 0 \\ \frac{-2v}{\alpha}a_{13} - \frac{2c^2}{\alpha}a_{43} &= 0 \end{aligned}$$

De la primera igualdad se obtiene que $a_{13} = -a_{43}v$, y sustituyendo en la segunda, $a_{13} = a_{43} = 0$. En resumen:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{\alpha}x_1 - \frac{v}{\alpha}t \\ x'_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\ t' = -\frac{v}{c^2\alpha}x_1 + \frac{1}{\alpha}t \end{cases}$$

De la forma explícita de la transformación anterior,

$$\begin{aligned} x_1'^2 - c^2t'^2 &= \left(\frac{1}{\alpha}x_1 - \frac{v}{\alpha}t\right)^2 - c^2\left(\frac{-v}{c^2\alpha}x_1 + \frac{1}{\alpha}t\right)^2 = \\ &= \frac{1}{\alpha^2}x_1^2 + \frac{v^2}{\alpha^2}t^2 - \frac{2v}{\alpha^2}x_1t - c^2\left(\frac{1}{\alpha^2}t^2 + \frac{v^2}{c^4\alpha^2}x_1^2 - \frac{2v}{c^2\alpha^2}x_1t\right) = x_1^2 - c^2t^2 \end{aligned}$$

cumpliéndose así que $x_2'^2 + x_3'^2 = x_2^2 + x_3^2$, por lo cual la transformación

$$\begin{cases} x'_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

conserva las distancias. En el plano x_2, x_3 de los ejes de S hacemos el cambio de ejes dado por la transformación anterior. Si volvemos a llamar S a la referencia así obtenida, el paso de S a S' vendrá dado por

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{\alpha}x_1 - \frac{v}{\alpha}t \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \\ t' = -\frac{v}{c^2\alpha}x_1 + \frac{1}{\alpha}t \end{cases} \quad (3.6)$$

y la transformación inversa, que pasa de S' a S , es la siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\alpha}x'_1 + \frac{v}{\alpha}t' \\ x_2 = x'_2 \\ x_3 = x'_3 \\ t = \frac{v}{c^2\alpha}x'_1 + \frac{1}{\alpha}t' \end{cases} \quad (3.7)$$

Así queda probado el siguiente teorema:

Teorema 3.12. *Sean S, S' dos sistemas inerciales. Podemos hacer cambios ortogonales de ejes S y S' , es decir, cambios que conservan distancias y ángulos y un cambio de origen de tiempos en ellos de manera que el cambio de coordenadas en los nuevos sistemas viene dado por la transformación anterior.*

Ahora daremos una interpretación física de v . En el origen de S' de ecuaciones ($x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$), la relación entre t y t' será $t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. El origen de S'

será visto desde S en el punto $x_1 = \frac{v}{\alpha}t' = vt, x_2 = x_3 = 0$. Como $\vec{r}(t) = (vt, 0, 0)$

y $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (v, 0, 0)$, concluimos que el origen de S' se mueve respecto de S con velocidad $\vec{v} = (v, 0, 0)$.

A continuación usaremos la expresión en coordenadas de las transformaciones de Lorentz para obtener los efectos relativistas que habíamos comentado al introducir los postulados de la relatividad especial.

1. Contracción de las longitudes.

Sean S, S' dos sistemas inerciales en las condiciones anteriores, y consideramos una barra situada en el eje X de S , de extremos los puntos $A = (A_1, 0, 0)$ y $B = (B_1, 0, 0)$ y cuya longitud es de 1 metro. Esta barra está inmóvil respecto de S . Como S' se mueve respecto de S , los observadores de S' ven la barra en movimiento. Vamos a calcular su longitud respecto de S' . Para ello calculamos las coordenadas de A y B respecto de S' . Sustituyendo A en la transformación de Lorentz:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{A_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x'_2 = 0 \\ x'_3 = 0 \\ t' = \frac{\frac{-v}{c^2}A_1 + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Despejando t en la última ecuación tenemos que:

$$t' = \frac{\frac{-v}{c^2}A_1 + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow t = t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v}{c^2}A_1$$

Sustituyendo ahora en la primera: $x'_1 = A_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - vt'$. Así, el extremo A de la barra tendrá coordenadas $A = (A_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - vt', 0, 0)$ respecto de S' en el instante t' . De la misma forma, el extremo B es visto desde S' en el punto $B = (B_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - vt', 0, 0)$. Así la barra tiene longitud

$$(B_1 - A_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

respecto de los observadores de S' . Se concluye entonces que las longitudes de objetos en movimiento se contraen.

2. Dilatación del tiempo.

Supongamos ahora dos sucesos que se producen en un mismo punto $A = (A_1, A_2, A_3)$ inmóvil respecto de S en instantes de tiempo distintos t_0 y t_1 . Así, el intervalo de tiempo transcurrido entre ambos sucesos, para los observadores de S , es $t_1 - t_0$.

Usando la cuarta ecuación de la transformación de Lorentz, para un observador de S' los sucesos serán vistos en los instantes t'_0 y t'_1 dados por

$$t'_i = \frac{\frac{-v}{c^2}A_i + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, i = 0, 1$$

Así:

$$t'_1 - t'_0 = \frac{t_1 - t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow t'_1 - t'_0 = \frac{t_1 - t_0}{\alpha} > t_1 - t_0,$$

concluyendo que el tiempo se dilata por el movimiento.

3. Simultaneidad de los sucesos.

Supongamos ahora que se producen dos eventos en puntos distintos de S en el mismo instante de tiempo t , denotados por $A = (A^1, A^2, A^3)$ y $B = (B^1, B^2, B^3)$. Esto quiere decir que A y B son simultáneos para un observador de S . Serán vistos por un observador de S' en los instantes dados por:

$$t'_1 = \frac{\frac{-v}{c^2}A^1 + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, t'_2 = \frac{\frac{-v}{c^2}B^1 + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Los eventos sólo serán simultáneos si $t'_1 = t'_2$, es decir:

$$t'_1 = t'_2 \Rightarrow \frac{-v}{c^2}A^1 + t = \frac{-v}{c^2}B^1 + t \Rightarrow A^1 = B^1.$$

Si $A^1 \neq B^1$, los eventos dejan de ser simultáneos para un observador de S' .

Nosotros hemos obtenido las ecuaciones de la transformación de Lorentz eligiendo los ejes de S y S' convenientemente. Veremos a continuación cómo es la expresión vectorial de estas ecuaciones. Denotando por $\vec{r} = (x, y, z)$, por $\vec{r}' = (x', y', z')$ y $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, la transformación de Lorentz se puede escribir como sigue:

$$\begin{cases} x' = x + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)x - \frac{v}{\alpha}t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{-v}{c^2\alpha}x_1 + \frac{1}{\alpha}t \end{cases}$$

De las tres primeras ecuaciones se deduce que

$$(x', y', z') = (x, y, z) + \left(\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)x - \frac{v}{\alpha}t, 0, 0 \right). \text{ Ahora bien,}$$

$$\left(\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)x - \frac{v}{\alpha}t, 0, 0 \right) = \left(\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)x - \frac{v}{\alpha}t \right) \vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)x\vec{e}_1 - \frac{v}{\alpha}t\vec{e}_1,$$

con $\vec{e}_1 = (1, 0, 0) = \frac{\vec{v}}{v}$, siendo \vec{v} el vector velocidad de S' respecto a S . Por otra parte, $x = \vec{r} \cdot \vec{e}_1 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v}$, donde el punto “ \cdot ” indica el producto escalar euclídeo en \mathbb{R}^3 . En resumen, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} - \frac{t}{\alpha} \vec{v}, \\ t' &= \frac{-1}{c^2 \alpha} \vec{r} \cdot \vec{v} + \frac{t}{\alpha} \end{aligned}$$

Por tanto, la transformación de Lorentz, en forma vectorial, se puede escribir así:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} - \frac{t}{\alpha} \right\} \vec{v} \\ t' = \frac{-1}{c^2 \alpha} \vec{r} \cdot \vec{v} + \frac{t}{\alpha} \end{cases}$$

y la transformación inversa (cambiando \vec{v} por $-\vec{v}$):

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \cdot \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v^2} - \frac{t'}{\alpha} \right\} \vec{v} \\ t = \frac{1}{c^2 \alpha} \vec{r}' \cdot \vec{v} + \frac{t'}{\alpha} \end{cases}$$

Como cualquier cambio ortogonal de ejes respeta el producto escalar de \mathbb{R}^3 , la transformación de Lorentz será válida independientemente de los posiciones de los ejes de S y S' siempre que los orígenes coincidan en los orígenes de tiempo, al igual que las transformaciones inversas.

A continuación vamos a obtener la ley de composición de velocidades. Sea P un punto material que se mueve respecto a un sistema inercial S . Llamaremos $\vec{r}(t)$ al vector posición de P respecto a S en el instante t .

Sea S' otro sistema inercial que se mueve respecto de S con movimiento rectilíneo uniforme con velocidad \vec{v} , y denotaremos por $\vec{r}'(t')$ al vector posición de P respecto a S' en el instante t' . La velocidad \vec{u} de P respecto a S en el instante t será $\vec{u} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$, y la velocidad \vec{u}' de P respecto a S' en el instante t' , $\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'(t')}{dt'}$.

Vamos a obtener ahora la relación entre \vec{u} y \vec{u}' :

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\vec{r}' + \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v^2} + \frac{t'}{\alpha} \right\} \vec{v} \right)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\vec{u} = \frac{d}{dt'} \left(\vec{r}' + \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v^2} + \frac{t'}{\alpha} \right\} \vec{v} \right) \frac{dt'}{dt} = \left(\vec{u}' + \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} + \frac{1}{\alpha} \right\} \vec{v} \right) \frac{dt'}{dt},$$

donde $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Utilizando la segunda igualdad de la transformación inversa de Lorentz, calculamos $\frac{dt'}{dt}$.

$$t = \frac{1}{c^2 \alpha} \vec{r}' \cdot \vec{v} + \frac{t'}{\alpha} \Rightarrow \frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c^2 \alpha} \vec{r}' \cdot \vec{v} + \frac{t'}{\alpha} \right) \Rightarrow \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} + 1 \right)$$

De aquí, $\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} + 1 \right)}$. Entonces, nos queda

$$\vec{u} = \frac{1}{1 + \vec{u}' \cdot \frac{\vec{v}}{c^2}} \left[\alpha \vec{u}' + (1 - \alpha) \cdot \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} + \vec{v} \right] = \frac{1}{1 + \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2}} \left[\left(\frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} + 1 \right) \vec{v} + \alpha \left(\vec{u}' - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \right],$$

que es la ley relativista de composición de velocidades. Si v/c tiende a cero, entonces $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 1$, y nos queda entonces que $\vec{u} \cong \vec{u}' + \vec{v}$, la ley clásica de adición de velocidades.

3.3. Espacio de Minkowski

En esta sección introduciremos el **espacio de Minkowski** de dimensión 4, el modelo matemático de espacio-tiempo en donde formalizar la relatividad especial.

Sea f una transformación de Lorentz que transforma el origen en sí mismo. Todas ellas conservan la forma cuadrática $Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(x_1, x_2, x_3, t) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2$.

Si X e Y son dos puntos de \mathbb{R}^4 , podemos identificarlos con sus respectivos vectores de posición \vec{X} e \vec{Y} , con $\vec{X} \equiv \overrightarrow{OX}$ e $\vec{Y} \equiv \overrightarrow{OY}$. Definiremos en \mathbb{R}^4 el siguiente producto escalar g . Si $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $g(\vec{X}, \vec{Y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - c^2 x_4 y_4$.

A este producto escalar se le denomina métrica de Minkowski. Supongamos ahora que $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es una transformación de Lorentz con aplicación lineal asociada F , es decir, $f(X) = f(\vec{X}) = F(\vec{X}) + \vec{a}$. Observar que si f transforma el origen en sí mismo, entonces $\vec{a} = \vec{0}$ y $f(X) \equiv F(\vec{X})$.

Proposición 3.13. *Las transformaciones de Lorentz que transforman el origen en sí mismo conservan el producto escalar anterior, es decir, si X e Y son puntos de \mathbb{R}^4 , entonces $g(X, Y) = g(\vec{X}, \vec{Y}) = g(F(\vec{X}), F(\vec{Y})) = g(f(X), f(Y))$.*

Demostración. f será de la forma $f = h' \circ \bar{f} \circ h$, donde $\bar{f}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ sigue las fórmulas de una transformación de Lorentz dadas por las ecuaciones 3.6.

Además, $h, h': \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $(\vec{x}, t) \Rightarrow h(\vec{x}, t)$ y $(\vec{x}, t) \Rightarrow h'(\vec{x}, t)$. Estas aplicaciones son de la forma $h(\vec{x}, t) = (H(\vec{x}), t)$, $h'(\vec{x}, t) = (H'(\vec{x}), t)$, donde H y H' son isometrías en \mathbb{R}^3 .

Ahora h y h' conservan g . Si $\vec{X} = (\vec{x}, t)$ e $\vec{Y} = (\vec{y}, t')$ y además $''''$ es el producto escalar en \mathbb{R}^3 :

$$g(h(\vec{x}), h(\vec{y})) = g\left((H(\vec{x}), t), (H(\vec{y}), t')\right) = H(\vec{x}) \cdot H(\vec{y}) - c^2 tt' = \vec{x} \cdot \vec{y} - c^2 tt' = g(\vec{X}, \vec{Y})$$

De forma análoga se prueba que h' conserva g . Sabemos que \bar{f} conserva la forma cuadrática Q , es decir, si $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, t)$,

$$g(\vec{X}, \vec{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = Q(\vec{X}) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2 = g(\bar{f}(\vec{X}), \bar{f}(\vec{X}))$$

Así, f conserva $g(\vec{X}, \vec{X}), g(\vec{Y}, \vec{Y})$ y $g(\vec{X} + \vec{Y}, \vec{X} + \vec{Y})$. Ahora

$$\begin{aligned} g(\vec{X} + \vec{Y}, \vec{X} + \vec{Y}) &= g(\vec{X}, \vec{X}) + 2g(\vec{X}, \vec{Y}) + g(\vec{Y}, \vec{Y}) \Rightarrow \\ g(\vec{X}, \vec{Y}) &= \frac{1}{2} \left(g(\vec{X} + \vec{Y}, \vec{X} + \vec{Y}) - g(\vec{X}, \vec{X}) - g(\vec{Y}, \vec{Y}) \right) \Rightarrow \\ g(\vec{X}, \vec{Y}) &= g\left(\bar{f}(\vec{x}), \bar{f}(\vec{y})\right) \end{aligned}$$

Proposición 3.14. *Sea f una transformación de Lorentz que transforma el origen en sí mismo. Entonces $f(C^+) = C^+$.*

Demostración. De la proposición anterior se deduce que $f(C) = C$. Como f es lineal, también es continua, y transformará la componente conexa C^+ de C en una componente conexa. Para ver que $f(C^+) = C^+$, calcularemos la imagen por f del vector $(0, 0, 0, 1)$ de C^+ . Tenemos que, por el teorema 3.12, $f = h' \circ F \circ h$, donde F viene dada por las fórmulas dadas por 3.6 y $h, h': \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $(\vec{x}, t) \Rightarrow h(\vec{x}, t) = H(\vec{x}, t)$ y $(\vec{x}, t) \Rightarrow h'(\vec{x}, t) = H(\vec{x}, t)$, donde H es una isometría de \mathbb{R}^3 con la métrica euclídea usual. Entonces,

$$f(0, 0, 0, 1) = h' \circ F \circ h(0, 0, 0, 1) = h' \circ F(0, 0, 0, 1),$$

ya que $h(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$. Si calculamos $F(0, 0, 0, 1)$ sustituyendo en las fórmulas dadas por 3.6:

$$h' \circ F(0, 0, 0, 1) = h' \left(\frac{-v}{\alpha}, 0, 0, \frac{1}{\alpha} \right) = \left(\frac{-v}{\alpha}, 0, 0, \frac{1}{\alpha} \right) \in C^+$$

Por lo tanto, $f(0, 0, 0, 1) \in C^+$.

Sean ahora dos sistemas inerciales S y S' . Sea $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación de Lorentz asociada. Si (x_1, x_2, x_3, t) son las coordenadas de un suceso visto desde S , desde S' tendrá coordenadas (x'_1, x'_2, x'_3, t') .

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ X = (x_1, x_2, x_3, t) &\longrightarrow f(X) = Y = (x'_1, x'_2, x'_3, t') \end{aligned}$$

En \mathbb{R}^4 estamos considerando la referencia canónica $R = \{O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}\}$. Como f es una afinidad, será de la forma

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \vec{X} &\longrightarrow f(\vec{X}) = F(\vec{X}) + \vec{a} \end{aligned}$$

Aquí, la aplicación F (aplicación lineal asociada a la afinidad) es un isomorfismo. Ahora consideramos en \mathbb{R}^4 la referencia $\{f^{-1}(O); \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$, $\vec{u}_i = F^{-1}(\vec{e}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Si $Y = f(X)$ tiene coordenadas (y_1, y_2, y_3, y_4) respecto de la referencia canónica de \mathbb{R}^4 , X también tiene coordenadas (y_1, y_2, y_3, y_4) respecto de la nueva referencia. En efecto,

$$\begin{cases} f(\vec{X}) = \sum_{i=1}^4 y_i \vec{e}_i \\ f(\vec{X}) = F(\vec{X}) + \vec{a} \end{cases}$$

Igualando, nos queda que $F(\vec{X}) + \vec{a} = \sum_{i=1}^4 y_i \vec{e}_i$, con lo cual $F(\vec{X}) = \sum_{i=1}^4 y_i \vec{e}_i - \vec{a}$.

Como F es un isomorfismo,

$$\vec{X} = F^{-1}\left(\sum_{i=1}^4 y_i \vec{e}_i - \vec{a}\right) = \left(\sum_{i=1}^4 y_i F^{-1}(\vec{e}_i) - F^{-1}(\vec{a})\right) \Rightarrow \vec{X} = \sum_{i=1}^4 y_i \vec{u}_i - F^{-1}(\vec{a})$$

Ahora,

$$\begin{aligned} f(F^{-1}(-\vec{a})) &= F(F^{-1}(-\vec{a})) + \vec{a} = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0} \\ F^{-1}(-\vec{a}) &= f^{-1}(0), \end{aligned}$$

por lo cual $x = \sum_{i=1}^4 y_i \vec{u}_i + f^{-1}(0)$. Así \vec{x} tiene coordenadas (y_1, y_2, y_3, y_4) respecto de la referencia $\{f^{-1}(0); \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$. Queda demostrado que los dos puntos de vista siguientes son completamente equivalentes.

1. Los observadores de S y S' utilizan los ejes canónicos de \mathbb{R}^4 . Sin embargo, un suceso representado por un observador de S con el punto $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es representado por un observador de S' con el punto $f(X) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.
2. Los observadores de S y S' representan un mismo suceso con el mismo punto de \mathbb{R}^4 . El observador de S utiliza los ejes canónicos de \mathbb{R}^4 y asigna a X las coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) . En cambio, el observador de S' utiliza los ejes de \mathbb{R}^4 con origen $f^{-1}(0)$ y vectores directores \vec{u}_i , asignando a X las coordenadas (y_1, y_2, y_3, y_4) .

A partir de ahora, nos quedaremos con el segundo punto de vista del resultado anterior. Utilizando la métrica de Minkowski definida en \mathbb{R}^4 se tiene que

- $g(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1, i = 1, 2, 3$
- $g(\vec{e}_4, \vec{e}_4) = -c^2, \vec{e}_4 \in C^+$

$$\blacksquare g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0, i \neq j$$

Si suponemos que f es una transformación de Lorentz que transforma el origen en el origen, como g es invariante por f , y f transforma C^+ en C^+ se deduce que la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ definida anteriormente también cumple que

$$\begin{aligned} \blacksquare g(\vec{u}_i, \vec{u}_i) &= 1, i = 1, 2, 3 \\ \blacksquare g(\vec{u}_4, \vec{u}_4) &= -c^2, \vec{u}_4 \in C^+ \\ \blacksquare g(\vec{u}_i, \vec{u}_j) &= 0, i \neq j \end{aligned}$$

Definición 3.15. Llamaremos **base orto-c-normal (ortonormal positiva)** de \mathbb{R}^4 a toda base que cumple las relaciones anteriores.

Una referencia orto-c-normal está determinada por un origen y una base orto-c-normal. Así, elegir un sistema inercial será equivalente a elegir una referencia orto-c-normal positiva de \mathbb{R}^4 .

Definición 3.16. El espacio \mathbb{R}^4 con el producto escalar g y la elección de la componente conexas C^+ de C se denomina **espacio-tiempo de Minkowski**, o simplemente, **espacio de Minkowski**.

Así, el espacio de Minkowski es el espacio afín \mathbb{R}^4 cuyo espacio vectorial asociado es el espacio vectorial de Minkowski (\mathbb{R}^4, g) . Todos los fenómenos de la relatividad especial no son más que problemas geométricos del espacio de Minkowski. Con el fin de estudiar algunos de estos problemas, introduciremos el concepto de **tiempo propio**.

Dados P_1, P_2 puntos del espacio de Minkowski (\mathbb{R}^4, g) se dice que P_1 es **anterior** a P_2 si $\overrightarrow{P_1 P_2} \in C^+$. En general, P_1 no será anterior a P_2 o viceversa. Cuando P_1 es anterior a P_2 , P_1 y P_2 representarán sucesos tales que contemplados desde cualquier sistema inercial, P_1 tiene lugar antes que P_2 .

Supongamos ahora que hemos elegido un sistema inercial S , que equivale a elegir una referencia orto-c-normal positiva $\{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ en el espacio de Minkowski (\mathbb{R}^4, g) . Sea r una recta de \mathbb{R}^4 que se podrá parametrizar por

$$\begin{cases} x_i = b_i + tv_i, i = 1, 2, 3 \\ t = t \end{cases}$$

con $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < c^2$. Para un observador de S , r representa el movimiento de una partícula P que se mueve (respecto de él) con movimiento rectilíneo uniforme de velocidad $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Así, por el principio de relatividad, existe un sistema inercial S' con origen en P . Sean P_1, P_2 dos puntos de r . Como r tiene vector director temporal, P_1 será anterior a P_2 o viceversa.

Supongamos que P_1 es anterior a P_2 . Para el observador de S , estos puntos representan el origen de S' en dos instantes de tiempo t'_1 y t'_2 , con $t'_1 < t'_2$. Así, un observador de S' representará P_1 y P_2 con las coordenadas $(0, 0, 0, t'_1)$

y $(0, 0, 0, t'_2)$. Calculando la distancia entre ambos puntos en el espacio de Minkowski, se tiene:

$$d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{g(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_2})} = \sqrt{-c^2(t'_2 - t'_1)^2} = ic(t'_2 - t'_1)$$

Así, el intervalo de tiempo $t'_2 - t'_1$ en el sistema de referencia de S' (con origen en P) es $d(P_1, P_2)/ic$.

Como la distancia en el espacio de Minkowski es un concepto intrínseco, cualquier observador (independientemente del sistema inercial que elija) que calcule $d(P_1, P_2)/ic$ obtendrá el intervalo de tiempo $t'_2 - t'_1$ en el sistema de referencia por el cual P está inmóvil. Este tiempo se denomina **tiempo propio de P** .

Supongamos ahora una partícula P que, desde un punto A , viaja con movimiento rectilíneo uniforme respecto a un sistema inercial S , describiendo un segmento \overline{AB} en el espacio ordinario. Cuando llega a B cambia de dirección, describiendo otro segmento \overline{BC} . Sean t_A, t_B, t_C los instantes en que P pasa por A, B, C , y sean P_A, P_B, P_C los puntos de \mathbb{R}^4 que, para los observadores de S , tienen coordenadas $(A_1, A_2, A_3, t_A), (B_1, B_2, B_3, t_B), (C_1, C_2, C_3, t_C)$. Representarán el movimiento de P por una línea quebrada de \mathbb{R}^4 , y los vectores $\overrightarrow{P_AP_B}, \overrightarrow{P_BP_C} \in C^+$.

Supongamos ahora que viaja un observador con la partícula P . Mientras viaja entre A y B podrá creer que viaja en un sistema inercial donde él está parado y todo lo demás se mueve. Según su reloj, transcurrirá un tiempo de $d(P_A, P_B)/ic$. Al cambiar bruscamente de dirección notará que su sistema inercial dejará de serlo, pero lo volverá a creer mientras viaja entre B y C , en un tiempo de $d(P_B, P_C)/ic$. Según su reloj, el tiempo (que no es inercial) no sufre saltos durante el viaje y vale $\frac{1}{ic} \left(d(P_A, P_B) + d(P_B, P_C) \right)$.

Consideremos ahora una partícula P que viaja respecto a S describiendo una curva diferenciable con velocidad instantánea \vec{v} tal que $\|\vec{v}\| < c$. Un observador de S representará el movimiento de la partícula con una curva γ de \mathbb{R}^4 con vector tangente temporal positivo en cada punto. Sean P_A, P_B dos puntos de esta curva. Para saber cuál será el intervalo de tiempo medido por un observador que viaja con la partícula P entre P_A y P_B , tomaremos P_1, P_2, \dots, P_{n-1} puntos sobre la curva situados entre P_A y P_B y consideramos la línea poligonal de \mathbb{R}^4 formada por los segmentos $\overrightarrow{P_AP_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_{n-1}P_B}$ que corresponderá al movimiento de una partícula P' próxima a P . Para un observador que viaja con P' , el tiempo entre los sucesos P_A y P_B será

$$\frac{1}{ic} \left(d(P_A, P_1) + d(P_1, P_2) + \dots + d(P_{n-1}, P_B) \right)$$

Postulamos que a trayectorias próximas les corresponden tiempos propios próximos. Tenemos así:

Definición 3.17. *Si una partícula P viaja describiendo una curva γ en el espacio de Minkowski, diferenciable a trozos y con vector tangente temporal positivo en cada punto, el tiempo propio de la partícula entre dos sucesos P_A y P_B es igual a la longitud de γ entre P_A y P_B , multiplicada por $1/c$.*

3.4. Interpretación de algunos problemas en el espacio de Minkowski.

A continuación, interpretaremos en el espacio de Minkowski algunos problemas geométricos que introducimos mediante la transformación de Lorentz.

3.4.1. Dilatación del tiempo.

Sean S, S' dos sistemas inerciales tales que los ejes X, X' coinciden y los instantes iniciales también coinciden en los orígenes. Supongamos ahora un suceso en el origen de coordenadas en el instante $t = 0$ y otro suceso en el mismo origen en el instante t_0 visto por un observador de S . Queremos ver el intervalo de tiempo para S' entre los sucesos anteriores.

Sea

$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (0, 0, 0, 0) \longrightarrow (0, 0, 0, 0)$$

En S utilizamos la referencia $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$, y en S' , la referencia $\{f^{-1}(O); \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$, $\vec{u}_i = f^{-1}(\vec{e}_i)$.

$$\vec{u}_4 = f^{-1}(\vec{e}_4) = f^{-1}(0, 0, 0, 1) = \left(\frac{v}{\alpha}, 0, 0, \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\vec{u}_1 = f^{-1}(\vec{e}_1) = f^{-1}(1, 0, 0, 0) = \left(\frac{1}{\alpha}, 0, 0, \frac{v}{c^2\alpha}\right)$$

El eje t' será la recta que pasa por $(0, 0, 0, 0)$ con dirección $\left(\frac{v}{\alpha}, 0, 0, \frac{1}{\alpha}\right)$, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} x = \frac{\lambda v}{\alpha} \\ t = \frac{\lambda}{\alpha} \end{cases}$$

Despejando el parámetro λ , se obtiene la recta $x = vt$, que representa el movimiento del origen de S' respecto de S .

Procediendo de igual forma con la recta que pasa por $(0, 0, 0, 0)$ cuya dirección es $\left(\frac{1}{\alpha}, 0, 0, \frac{v}{c^2\alpha}\right)$, obtenemos el eje x' de ecuación $t = \frac{v}{c^2}x$. Así, las rectas anteriores son perpendiculares. El primer suceso tiene coordenadas $(0, 0)$ y el

segundo, respecto de S , en $P(0, t_0)$. Sea P' la intersección del eje t' con la recta $t' = \text{constante}$ que pasa por P . Todas ellas son paralelas al eje x , de la forma $t' = \frac{v}{c^2}x + \text{constante}$. Si imponemos que pase por P , obtenemos la recta $t' = \frac{v}{c^2}x + t_0$. P' tendrá en S las coordenadas siguientes:

$$\begin{cases} x = vt \\ t = \frac{v}{c^2}x + t_0 \end{cases}$$

Llevando la primera ecuación a la segunda, se obtienen las coordenadas del punto P' , que son $P' = \left(\frac{vt_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \frac{t_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$.

El vector $\overrightarrow{OP'}$ tendrá de coordenadas $\overrightarrow{OP'} = \left(\frac{vt_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \frac{t_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$.

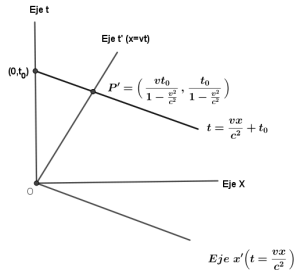


Figura 3.6. Dilatación del tiempo.

El tiempo t'_0 que buscamos respecto de S' es el tiempo propio de la partícula entre $(0, 0)$ y P' , que será la distancia entre estos dos puntos dividida por ic .

$$\|\overrightarrow{OP'}\| = \sqrt{g(\overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OP'})} = \sqrt{\frac{t_0^2(v^2 - c^2)}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^2}} = \frac{cit_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dividiendo el resultado anterior entre ic , nos queda que $t'_0 = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > t_0$, con lo cual, si estamos en S' , el intervalo de tiempo de S es más corto que nuestro intervalo de tiempo t'_0 .

3.4.2. Contracción de las longitudes.

Sea un sistema inercial S en el que colocamos una barra rígida de longitud l sobre el eje x . Sea otro sistema inercial S' que se mueve respecto a S con velocidad v , produciéndose el movimiento en la dirección de los ejes x y x' de ambos sistemas. Para $t = t' = 0$ los orígenes coinciden, y los extremos de la barra en reposo son $x = 0$ y $x = l$.

Los observadores de S' representarán el movimiento del origen de S' con la recta $x = vt$ del espacio de Minkowski, que será el eje t' para los observadores de S' .

El eje x' será la recta $t = \frac{vx}{c^2}$, que corta a las rectas $x = 0, x = l$ en los puntos $(0, 0)$ y $(l, \frac{vl}{c^2})$.

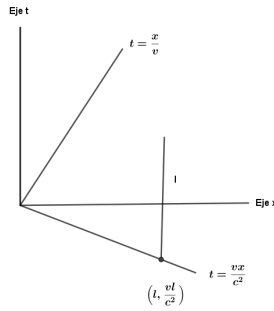


Figura 3.7. Contracción de las longitudes.

La distancia de la barra medida por los observadores de S' será la distancia entre los puntos anteriores. Usando la métrica de Minkowski:

$$d = \sqrt{l^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l$$

Así queda demostrado que las longitudes de objetos en movimiento se contraen.

3.4.3. La paradoja de los gemelos.

Sean José y Antonio dos hermanos gemelos. Supongamos que José está situado en un sistema inercial S y Antonio coge un coche y viaja con movimiento

rectilíneo uniforme respecto a José en la dirección del eje X de S , regresando posteriormente. Veremos que, cuando se reencuentran, Antonio es más joven que José y, por lo tanto, dejan de ser gemelos.

José representará los sucesos en el espacio de Minkowski de coordenadas (x,t) . Al estar parado en el origen de S , su movimiento estará representado por el eje de las t . Veamos como se representa el movimiento de Antonio.

Al salir desde el origen y viajar durante a años, llegará a un punto $B = (av, a)$. La recta que une ambos puntos tiene por ecuación

$$r \equiv (av, a) + \lambda(v, 1) \Rightarrow \begin{cases} x = av + \lambda v \\ t = a + \lambda \end{cases}$$

Despejando el parámetro y sustituyendo, obtenemos que $x = tv$. Posteriormente, retornará a la misma velocidad al eje de las t , a un punto $C = (0, 2a)$. La nueva recta tendrá por ecuación

$$r \equiv (av, a) + \lambda(-v, 1) \Rightarrow \begin{cases} x = av - \lambda v \\ t = a + \lambda \end{cases}$$

Procediendo de forma análoga, obtenemos que $t = \frac{-x}{v} + 2a$.

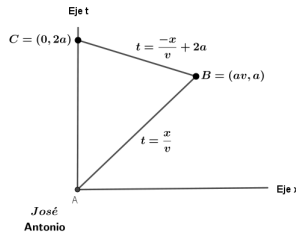


Figura 3.8. Paradoja de los gemelos.

El tiempo propio de José será $\frac{1}{ic}d(A, C) = \frac{2a}{ic}$, y el de Antonio, $\frac{1}{ic}(d(A, B) + d(B, C))$. Calculando las distancias en el espacio de Minkowski,

$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = a\sqrt{v^2 - c^2} = d(B, C)$, y mediante la desigualdad triangular, se tiene que

$$\frac{1}{ic} \left(d(A, B) + d(B, C) \right) \leq \frac{1}{ic} d(A, C) \Rightarrow \frac{2a\sqrt{v^2 - c^2}}{ic} \leq \frac{2a}{ic}$$

Como B no está sobre la recta AC , no se cumple la igualdad. Así, se concluye que Antonio es más joven que José.

Conclusiones y valoraciones.

Realizando el presente Trabajo de Fin de Grado, me he iniciado en el estudio de la Relatividad Especial, una teoría que cambia nuestra concepción de espacio y tiempo. Gracias a ella, sabemos que éstos son dos conceptos íntimamente relacionados, y no conceptos absolutos como se suponía en la mecánica newtoniana. Es imprescindible la aportación de Albert Einstein, quien con su teoría consigue compatibilizar dos teorías enfrentadas: la física clásica y el electromagnetismo.

En el desarrollo de esta memoria he utilizado conceptos de geometría afín ya estudiados durante el primer año de carrera, aunque he tenido que profundizar sobre ellos. También me he iniciado en los espacios de Minkowski y el estudio de sus propiedades.

Por otro lado, he tenido que profundizar en la física clásica, adentrándome en la mecánica de Newton y el electromagnetismo. Esto me ha permitido entender mejor todo lo que antecede a la relatividad especial y también explicar algunos problemas geométricos de manera precisa y concreta.

Todo esto me ha servido para adquirir nuevos conocimientos importantes para mi formación, y particularmente en cuanto a un tema realmente interesante para su estudio. Además, pese a que en ciertos momentos he tenido dificultades, he adquirido las competencias básicas y específicas que aparecen en la guía docente de la asignatura.

Bibliografía

- [1] M.ALONSO, E.J.FINN. *Física Vol.I Mecánica. Fondo Educativo Interamericano. 1986.*
- [2] JUAN DE BURGOS. *Curso de Álgebra y Geometría. Alhambra Universidad. 1990.*
- [3] JOAN GIRBAU. *Geometria diferencial i relativitat. Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona. 1993.*
- [4] BERT JANSSEN. *Teoría de la relatividad general. Universidad de Granada. 22 de Septiembre de 2013.*
- [5] L.D.LANDAU, E.M.LITSHITZ. *Curso de Física Teórica, Teoría Clásica de los Campos. Volumen 2. Reverté. 1987.*
- [6] D.MARTIN. *Mainfold theory. An introduction for Mathematical Physicists. Ellis Horwood. 1991.*
- [7] L.MERINO, E.SANTOS. *Álgebra lineal con métodos elementales. Thomson (2006)*
- [8] ROBERT RESNICK. *Introducción a la teoría especial de la relatividad. Editorial Limusa. México.1981.*

Lista de Figuras

2.1.	Partículas materiales en movimiento respecto a un observador. . . .	10
2.2.	Dos observadores que se mueven uno respecto al otro con movimiento rectilíneo uniforme.	11
2.3.	Dos sistemas de referencia que se mueven uno respecto al otro con movimiento rectilíneo uniforme.	12
2.4.	Interacción gravitacional entre dos cuerpos.	13
3.1.	La imagen por f de un plano admisible Π es un plano admisible. .	21
3.2.	Construcción geométrica del punto $(a + b, 0)$ a partir de $(a, 0)$ y $(b, 0)$	25
3.3.	$\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$	25
3.4.	Construcción geométrica del punto $(ab, 0)$ a partir de $(a, 0)$ y $(b, 0)$	26
3.5.	$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$	26
3.6.	Dilatación del tiempo.	40
3.7.	Contracción de las longitudes.	41
3.8.	Paradoja de los gemelos.	42

Una introducción a la relatividad especial

1. Introduction

The Special Relativity Theory established by Albert Einstein in 1905, is very important because it marks a change in our conception of space and time. Moreover, it solves the conflict between the Newtonian mechanics and the Maxwell's theory of electromagnetism.

In this memory we give a geometrical introduction to the special relativity. The mathematical formulation is done in the context of affine geometry. In the first chapter, we introduce some definitions and properties of affine and Minkowski spaces. Then, in the second chapter, we remember some results about classical mechanics and electromagnetism. We introduce the postulates of the special relativity, and we finish studying the Lorentz transformations. Using them together with the Minkowski space, we obtain some relativistic effects.

2. Mathematical tools

- Affine geometry.
 - Affine spaces.
 - Affine maps.
- Minkowski vectorial spaces.
- Minkowski metric.

3. Results obtained

- The wave equation

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0,$$

which is satisfied by the electric and magnetic fields, does not remain invariant through by Galileo transformations.

- The most important result of the memory: the Lorentz transformations are affine maps.

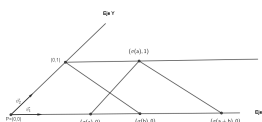


Figure 1: $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$

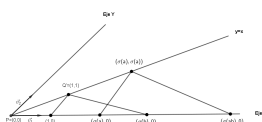


Figure 2: $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$

- Expression in coordinates of a Lorentz transformation:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{\alpha} x_1 - \frac{v}{\alpha} t \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \\ t' = -\frac{v}{c^2 \alpha} x_1 + \frac{1}{\alpha} t \end{cases}$$

- Law of composition of velocities.
- The Minkowski space. We describe the Minkowski space as a space of points. If X and Y are two points of \mathbb{R}^4 , we can

identify them with their position vectors \vec{X} and \vec{Y} , with $\vec{X} \equiv \vec{OX}$ e $\vec{Y} \equiv \vec{OY}$. We define the following scalar product in \mathbb{R}^4 . If $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ and $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$,

$$g(\vec{X}, \vec{Y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - c^2 x_4 y_4$$

g is called Minkowski metric and (\mathbb{R}^4, g) , Minkowski space of dimension 4. In such space we deduce some relativistic effects:

- Dilatation of the time.
- Contraction of the lengths.
- The paradox of the twins.

References

- M. ALONSO, E.J. FINN. *Física Vol.I Mecánica. Fondo Educativo Interamericano. 1986.*
- JUAN DE BURGOS. *Curso de Álgebra y Geometría. Alhambra Universidad. 1990.*
- JOAN GIRBAU. *Geometria diferencial i relativitat. Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona. 1993.*
- BERT JANSSEN. *Teoría de la relatividad general. Universidad de Granada. 22 de Septiembre de 2013.*
- L.D. LANDAU, E.M. LITSHITZ. *Curso de Física Teórica, Teoría Clásica de los Campos. Volumen 2. Reverté. 1987.*
- D. MARTIN. *Mainfold theory. An introduction for Mathematical Physicists. Ellis Horwood. 1991.*
- L. MERINO, E. SANTOS. *Álgebra lineal con métodos elementales. Thomson (2006)*
- ROBERT RESNICK. *Introducción a la teoría especial de la relatividad. Editorial Limusa. México. 1981.*