Curso 2005/06
HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES/13
I.S.B.N.: 84-7756-700-X

MARÍA DE PONTE AZCÁRATE

Realismo y entidades abstractas. Los problemas del conocimiento en matemáticas

Director
ANTONIO MANUEL LIZ GUTIÉRREZ

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS
Serie Tesis Doctorales

A mi padre,
Baltasar de Ponte Cullen

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis es el resultado de varios años de trabajo. Durante todo este tiempo he recibido el apoyo de muchas personas, sin las cuales no habría sido posible su realización. Sería imposible intentar agradecer o tan solo mencionarlas a todas, pero me gustaría al menos dejar constancia de mi gratitud hacia algunas de ellas.

Estos últimos años he tenido la suerte de contar con una beca f.p.u, lo que me permitió, a parte de vivir holgadamente mientras me dedicaba a trabajar en esta tesis, realizar diversas estancias en otros centros. En cada uno de los centros en los que estuve conté con el apoyo y el consejo de los supervisores con los que trabajé y cada uno de ellos aportaron elementos y perspectivas nuevas a mi trabajo. En la Universidad de Salamanca, el profesor Francisco Salto Alemany, en la New York University, el profesor Hartry Field y en el Institut Jean Nicod, el profesor Pascal Engel. Me gustaría agradecerle a los tres su amabilidad, su paciencia y su importante ayuda para hacerme sentir siempre en casa. Además, durante esas estancias, compartí mi tiempo (dentro y fuera de la universidad) con otros estudiantes de doctorado o post-doctorado con quienes mantengo aún una estrecha amistad. Algunos de ellos han leído partes de mi trabajo y han aportado valiosos comentarios. Me gustaría agradecer especialmente a

Astra Howard, Laurent Dejean, Neftalí Villanueva, Frederique de Vignemont y Christine vanGeen.

En la Universidad de La Laguna he formado parte de varios proyectos de investigación, todos ellos dirigidos por mi director de tesis, Manuel Liz. Agradezco que me invitaran a formar parte de ellos. Todos los miembros de los proyectos, de una manera u otra, han estado presentes durante el largo período de gestación de esta tesis, ofreciendo a partes iguales inspiración, apoyo y entretenimiento, pero sobre todo estimulando la reflexión a través de las reuniones periódicas que hacíamos.

Mis compañeros becarios, especialmente, Lucia Acosta Martín y David Pérez Chico (con quien apenas compartí tiempo de beca, pero si algunos proyectos y muchas conversaciones) siempre han estado ahí, compartiendo las penurias y las muchas alegrías de la vida pre-doctoral.

A Manuel Liz y a Margarita Vázquez no podría agradecerles toda su ayuda en unas pocas líneas. Siempre han estado ahí, animándome en los momentos difíciles y compartiendo los momentos buenos. Marga ha sido una especie de salvavidas en mis numerosos contratiempos burocráticos, pero además a ella le debo el poder entender los aspectos más técnicos de mi investigación y haber podido colaborar en la realización (junto a ella y a Tamara Ojeda) de un manual de lógica. Lo más importante sin embargo, es que gracias a ella la facultad es un lugar mucho más agradable y alegre para trabajar.

A Manolo tengo que agradecerle que desde el primer momento me animara a hacer esta tesis y que, de una manera a veces casi imperceptible, dejándome total libertad y sin imponer en ningún momento sus puntos de vista, haya guiado mis pasos y enriquecido mis reflexiones. Espero haberme contagiado algo de su entusiasmo por la filosofía y por cuestionar casi todos los aspectos de la realidad que nos rodea.

Mi familia siempre ha estado a mi lado, especialmente mi madre, quien ha soportado con una sonrisa e infinita paciencia mi desorden y quien siempre ha estado a mi lado, para lo bueno y para lo malo. Por último, mi pareja, Tarek, por muchísimas cosas, pero entre ellas, por preocuparse más de mí que yo misma y por hacerme reír siempre.

INTRODUCCIÓN

Definiciones Básicas

Ofrecer a priori definiciones de términos que resultarán clave en las discusiones no es tarea fácil. Entre otras cosas, porque la mayor parte de estos términos sufren importantes modificaciones según los autores y las corrientes filosóficas. Incluso en el ámbito de esta disertación, a medida que vayamos avanzando iremos incorporando nuevos matices y variaciones en la manera de entender muchos de ellos. Sin embargo, creo conveniente detenernos, aunque sea brevemente, en algunas nociones básicas por varios motivos. En principio porque, aunque posteriormente adquieran nuevos matices, conviene partir del establecimiento de algunas tesis cardinales sobre las que ir trabajando. Además, las nociones que vamos a definir (realismo, anti-realismo, platonismo y entidades abstractas y concretas) tienen una gran complejidad y arrastran una gran carga filosófica. Decir hoy en día, por ejemplo, que alguien es realista o que cierto objeto es abstracto, no es decir demasiado, a no ser que especifiquemos un poco más nuestros términos. Eso es lo que queremos hacer a continuación, no tanto ofrecer definiciones cerradas y definitivas, sino más bien posicionarnos en cierta medida dentro del complejo debate filosófico en torno al realismo y lo abstracto para poder, a partir de ahí, comenzar a desarrollar la discusión propiamente dicha.

El Platonismo y el anti-platonismo.

Por platonismo vamos a entender, básicamente, realismo aplicado a las entidades matemáticas. Esto implica que, de la misma manera que existen distintos tipos de realismos, también existen distintos tipos de platonismos. La forma tradicional que adopta el realismo (y por lo tanto el platonismo) es la que acepta sin restricciones las siguientes tres condiciones:

1. Las entidades de las que estamos hablando (las matemáticas en el caso del platonismo, las entidades éticas en el caso del realismo moral, etc.) existen
2. Es posible conocer dichas entidades y, de hecho, nuestra mejor teoría acerca de ellas es verdadera (al menos, aproximadamente verdadera)[1].
3. Tanto las entidades como la verdad de los enunciados con los que hablamos acerca de ellas son independientes del sujeto. Es decir, las entidades no son construcciones del sujeto, existen con independencia de nosotros, de manera que existirían aún si nosotros no lo hiciéramos y seguirán haciéndolo cuando nosotros no estemos. Aplicado al caso matemático, por ejemplo, esto equivale a afirmar que los sujetos descubrimos las propiedades de las entidades matemáticas y sus relaciones, no las inventamos. Las matemáticas, según el platonismo, son un descubrimiento humano, no una construcción. Por otro lado, la

[1] Los Realistas aceptan que una teoría ideal, que cumpla con todos los requisitos tanto teóricos como prácticos, puede ser falsa. Putnam (1980) critica duramente esta afirmación a través de su famoso argumento derivado de la teoría de modelos (véase el capítulo cinco para una exposición detallada del mismo). Sin embargo, aún aceptando la posibilidad de que una teoría ideal pueda ser falsa, los realistas "tradicionales" mantienen lo que podríamos denominar una "actitud optimista" respecto a nuestro conocimiento del mundo y, por lo tanto, respecto a la verdad de nuestros enunciados. A pesar de que el mundo, para ellos, es totalmente independiente de los sujetos, el ser humano está en una posición privilegiada –la mayor parte de las veces- para conocerlo.

independencia de la verdad trae consigo la posibilidad de que existan verdades que trasciendan la evidencia, es decir, enunciados que puedan ser verdaderos (o falsos) aún cuando no seamos capaces de probarlos (incluso en los casos en los que sepamos que es imposible encontrar una prueba para ellos).

Aparte de estas tres condiciones generales del realismo, en el caso del platonismo habría que añadir una cuarta condición:

4. Las entidades matemáticas son abstractas, queriendo decir con esto que están situadas fuera del espacio y del tiempo y que son incapaces de interactuar causalmente[2]

Con estas cuatro condiciones sobre la mesa podemos diferenciar entre dos tipos de realismos o platonismos: el ontológico y el semántico (también llamados "object-platonism" y "truth-platonism"). El platonismo ontológico afirma que las entidades matemáticas existen y son independientes de los sujetos. El platonismo semántico, que los enunciados de nuestras teorías matemáticas son siempre o bien verdaderos o bien falsos y que su verdad no depende de los sujetos; que es posible defender la verdad aún en casos en los que no podamos probarla. Por lo tanto, es posible ser platonista o realista sin tener porqué comprometernos con las cuatro condiciones. De hecho, es habitual encontrar filósofos que defienden un tipo de realismo pero no el otro (que sean realistas ontológicos pero no semánticos, o viceversa).

Centrándonos en el caso de la filosofía de las matemáticas, encontramos defensores de prácticamente todas las combinaciones posibles de estas tesis. Por un lado, encontramos los defensores de lo que yo denomino platonismo tradicional, esto es, defensores del platonismo tanto ontológico como semántico; entre ellos están Gödel (1944), Katz (1998), Resnik (1997), Shapiro (1997) y Maddy (1990). Esta última autora es lo que podríamos llamar una platonista tradicional *anómala* ya que no acepta la condición 4: el que las entidades matemáticas sean abstractas. Resnik y Shapiro, por su parte, defienden un platonismo de corte estructuralista, según el cual, las entidades matemáticas no son objetos, sino lugares ("posits") en una estructura (además, Resnik

[2] Véase en el apartado siguiente cómo esta definición de lo abstracto no está exenta de problemas. Aún así, sigue siendo la definición *estándar*, por eso hemos optado por incluirla en la definición también *estándar* de platonismo

es también es muy crítico con la definición de lo abstracto en contraposición con lo concreto).

Frente a estos platonistas tradicionales, encontramos otros como Azzouni (2004), Hellman (1989) y Chihara (1990), que defienden un tipo de platonismo semántico combinado con un anti-platonismo ontológico. Dummett (1973a, 1978a, 2000b) y el resto de los defensores del intuicionismo o del constructivismo son claros ejemplos del anti-platonismo tanto ontológico como semántico, aunque lo que niegan no es la existencia de las entidades matemáticas, sino su carácter independiente. Por último, resulta complicado encontrar defensores de la combinación del platonismo ontológico con el anti-platonismo semántico, pero Neil Tennant (1997) parece defender algo en esta línea.

Lo importante es tener en cuenta que, si bien estas cuatros condiciones o tesis son consideradas generalmente como definitorias o básicas del realismo o del platonismo, lo cierto es que no es necesario aceptar las cuatro para ser una realista (o una platonista). Hay muchos tipos de realismos, y no sólo por la manera de entender las entidades o la verdad, también hay diferencias de grado entre unos realistas y otros. Es posible distinguir entre lo que nosotros llamaremos realistas (o platonistas) moderados y realistas (o platonistas) radicales (o metafísicos, tal y como los denomina Putnam). Los realistas moderados defienden la existencia y la independencia de las entidades y de la realidad en general, pero también postulan que los sujetos juegan un papel activo en la configuración de esa realidad. Esto se traduce, generalmente, en la introducción de elementos epistémicos en la noción de verdad (aunque no necesariamente). Están, por decirlo en pocas palabras, a medio camino entre un tipo de constructivismo (y de anti-realismo semántico) y el platonismo tradicional, pero sin comprometerse enteramente con ninguno de ellos.

El realismo radical o metafísico, por su parte, no sólo afirma que las entidades existen y son independientes y que la verdad puede trascender a la evidencia, además defienden una visión del sujeto como un elemento pasivo en el proceso del conocimiento y de la asignación de valores de verdad. La realidad, para ellos, es fija y estable, y existe una relación única y también estable entre ella y los sujetos, de manera que la verdad pasa a ser una relación de correspondencia entre los términos y la realidad exterior, sin que los sujetos interfieran en el proceso. Los enunciados, según esta visión, reflejan el mundo como un espejo o como un mapa.

Aparte de toda esta amalgama de posibilidades dentro del realismo (o platonismo), como era de esperar, existe también una gran variedad de opciones anti-platonistas. Tradicionalmente, dentro de la filosofía de las matemáticas, se han distinguido dos grandes corrientes anti-platonistas: los formalistas (actualmente nominalistas) y los intuicionistas o constructivistas en general Los primeros cuestionan la esencia misma del platonismo ontológico: la existencia de las entidades matemáticas. Fuera de las matemáticas se les suele denominar irrealistas. Los segundos rechazan la independencia de esas entidades. Para ellos, las entidades matemáticas son construcciones de la mente humana y por lo tanto, la verdad de los enunciados matemáticos no puede trascender la evidencia. La verdad, para los constructivistas, debe ser reducida a la noción de prueba (verificación, en el ámbito no-matemático).

Nosotros, en este trabajo, tan sólo analizaremos el segundo tipo de anti-platonismo, el constructivismo. De hecho, una de nuestras hipótesis de partida será la existencia de las entidades matemáticas. En la segunda parte de la disertación intentaremos ver hasta qué punto es posible desarrollar una noción de verdad con ciertas similitudes con la verdad constructivista sin tener por ello que renunciar totalmente a la independencia de las entidades matemáticas, esto es, sin tener que afirmar que son construcciones humanas. En otras palabras, intentaremos desarrollar ese tipo de realismo moderado del que hablábamos antes y aplicarlo al caso de las matemáticas.

Entidades Abstractas –Entidades Concretas

Prácticamente todo el mundo, filósofos y no-filósofos, coincide en afirmar que los objetos matemáticos, de existir, son de naturaleza abstracta. Esa es sin lugar a dudas, según este punto de vista compartido, la característica definitoria de las matemáticas, a partir de la cual se derivan el resto de sus propiedades como ciencia (o forma de conocimiento): su objetividad, la naturaleza de su metodología, etc. Y esto es, por lo tanto, lo que la diferencia de la física o del resto de las ciencias “empíricas”. La física se ocupa de objetos concretos, mientras que las matemáticas hacen lo suyo con los abstractos. Lo más curioso de esta manera de entender las cosas, dejando a un lado por el momento los problemas epistémicos o de otro tipo que genera, es que la distinción sobre la que se sustenta no es ni mucho menos una distinción clara. Si bien es cierto que existe consenso a la hora de afirmar que las matemáticas se ocupan de los objetos abstractos, no ocurre lo mismo a la hora de definir *qué* entendemos o debemos entender exactamente por "objeto abstracto" y en qué consiste exactamente su diferencia con los denominados "objetos concretos".

Uno de los motivos por los que la gente normalmente dice no entender las matemáticas (o por lo que no les gustan) es porque es *muy abstracta*. Pero, ¿qué queremos decir con este tipo de frases? La respuesta más común a esto es que estudia *cosas* que no podemos ver o palpar, con las que no podemos interactuar, que están *fuera de este mundo*. Simplificando mucho, ésta es la manera coloquial de decir que los objetos matemáticos son "causalmente ineficaces" y que están situados fuera del ámbito del espacio y del tiempo. Ésta es, quizás, la concepción más generalizada de los objetos abstractos, pero, como veremos, no está ni mucho menos exenta de problemas.

Conviene tener en cuenta además, que esta falta de claridad no afecta únicamente a las matemáticas, la distinción entre objetos o entidades abstractas y concretas es considerada como fundamental tanto para la metafísica como para la epistemología y es una distinción presente en nuestra vida diaria. Así, aún siendo cierto que no contamos con una definición clara de lo que sean los objetos abstractos o de lo que los diferencia de los concretos, lo cierto es que la distinción está perfectamente recogida en nuestro lenguaje ordinario y juega un papel vital en nuestro día a día. Es fácil encontrar ejemplos de ambos tipos de entidades, ejemplos perfectamente asumidos por todos, aparentemente difíciles de cuestionar. Por ejemplo, casi todo el mundo asume que los números son abstractos, mientras que los peces o las piedras no lo son. La lista de ejemplos de entidades de ambos tipos puede ser alargada indefinidamente:

Abstracto	Concreto
Conjuntos	Perros
Conceptos	Electrones
El número 2	Estrellas
Universales	Particulares
Types	Tokens
El *Tractatus*	La copia de Baltasar del *Tractatus*

David Lewis, en su libro *The Plurality of Worlds* (1986: § I.7) ofrece uno de los pocos recuentos más o menos sistemáticos acerca de las distintas formas de clasificar los objetos que se pueden encontrar en la literatura filosófica[3], señalando cuatro posibles vías o "ways". La construcción de este tipo de listas constituye de hecho una de las maneras más comunes de definir lo que sean los objetos abstractos. Es lo que David Lewis denomina la vía del ejemplo ("Way of Example"). Son muchos los autores que, al tratar algún tema relacionado con los objetos abstractos, ofrecen, como única definición de los mismos, una pequeña lista de ejemplos paradigmáticos, con la esperanza de que a través de ellos quede claro qué es lo que distingue ambos tipos de objetos. Tal y como Lewis lo expresa,

> Concrete entities are things like donkeys and puddles and protons and stars, whereas abstract entities are things like numbers. (1986: 82)

No es difícil ver que este tipo de listas no constituyen una definición adecuada de la distinción abstracto-concreto.[4] La segunda manera de establecer la distinción es por

[3] Para ver otras maneras de definir o abordar la definición de los objetos abstractos ver Hale (1987), Linsky y Zalta (1995) y Zalta (1983).

[4] A no ser que consideremos la distinción como primitiva, esto es, imposible de ser explicada en base a ninguna otra propiedad. En este caso, poco más podríamos hacer aparte de elaborar este tipo de listas de ejemplos. Burges y Rosen (1997) elaboran un poco más sobre esta vía, clasificando los objetos según grados. Así, según ellos, los objetos matemáticos (números o conjuntos) se situarían en lo más alto de la lista de lo abstracto, seguidos por los objetos metafísicos (los universales o las propiedades), por los caracteres y por las entidades lingüísticas (semánticas, como las intensiones y los significados, y

medio del "way of Conflation", de acuerdo con el cual, la distinción entre abstracto-concreto se establece identificándola con alguna otra distinción metafísica ya conocida, como por ejemplo la distinción entre universales y particulares o entre conjuntos e individuos. De esta manera, en palabras de Lewis,

> The distinction between concrete and abstract entities is just the distinction between individuals and sets, or between particulars and universals, or perhaps even between particulars and everything else. (1986: 83)

En tercer lugar, es posible establecer la distinción de una manera negativa, señalando las propiedades que los objetos abstractos *no* poseen, en contraste con los concretos. Es el llamado "Way of Negation", según el cual,

> Abstract entities have no spatiotemporal location; they do not enter into causal interaction; they are never indiscernible one from another (1986: 83)

En esta vía encontramos algunos de los elementos que resultarán esenciales en el debate posterior acerca del realismo y de los problemas de acceso a estas entidades: su incapacidad para interactuar causalmente y su condición no-espacio-temporal[5]. Si existe una definición de objeto abstracto que podamos considerar estándar es precisamente ésta. El problema es que es posible encontrar numerosas entidades que resultan imposibles de clasificar bajo esta definición.

Una de estas entidades, mencionada habitualmente como ejemplo problemático, es el ajedrez[6]. Parece natural considerar al ajedrez como una entidad abstracta, pero lo

---

sintácticas, como los types). En el caso de las entidades concretas, en lo más alto de la lista encontramos a los objetos físicos observables (perros o mesas, aunque también mencionan los eventos físicos, situados en el tiempo), seguidos de los postulados por la ciencia (los electrones o los agujeros negros) y las entidades "mentales" (la mente y el espíritu)

[5] Cuando hablamos de que las entidades matemáticas están situadas fuera del espacio y del tiempo estamos afirmando, básicamente, que las leyes y las propiedades del ámbito espacial y temporal no pueden ser aplicadas satisfactoriamente en su caso. A partir de aquí se derivan muchas otras características normalmente atribuídas a estas entidades: no poder ser entidades físicas, no haber sido creadas (porque necesitaríamos un tiempo determinado en el que se crearon), no estar sujetas al cambio (regido también por leyes temporales), etc.

[6] Estoy siguiendo aquí la definición de "Abstract Object" realizada por G. Rosen (2001) en la *Stanford Encyiclopedia of Philosophy*, disponible en Internet (http://plato.stanford.edu/entries/abstract-objects).

cierto es que incumple estas condiciones: fue inventado en un lugar y en un tiempo determinado (aunque no sepamos exactamente cuándo o dónde) y por lo tanto, en cierto sentido, posee localización temporal y espacial. No sólo eso, el ajedrez ha ido evolucionando con el tiempo, ha sido modificado y estas modificaciones han sido *causadas* por los seres humanos. Ateniéndonos por lo tanto a la definición de entidad abstracta por la vía de la negación, el ajedrez no podría ser considerado abstracto, pero, obviamente, tampoco se trata de un objeto concreto, ¿dónde podríamos situarlo?[7]

Una posible solución sería afirmar que la forma en la que las entidades concretas están situadas en el espacio y en el tiempo difiere sustancialmente de la forma en la que entidades como el ajedrez lo hacen. Las entidades concretas ocupan una porción de espacio y de tiempo determinado, acotado. El ajedrez, por el contrario, ocupa (de ocupar) una masa informe de espacio y tiempo; al fin y al cabo, no tiene sentido preguntar dónde está situado *el ajedrez* (como tal, no un tablero concreto) o cuándo exactamente podemos encontrarlo. Pero de nuevo, no resulta muy complicado encontrar contraejemplos a esto. Por un lado, la física cuántica postula la existencia de partículas sin una localización específica, acerca de las cuales no tiene sentido preguntar por la región de espacio determinada que ocupan. Tal y como afirma Michael Resnik (1997: 102-111) se trata de objetos físicos que comparten muchos de los atributos de los objetos matemáticos (“appear to be as much mathematical as physical”). Resnik concluye, a partir de ejemplos como éste, que la distinción entre objeto matemático y objeto físico no es tan clara como generalmente se asume[8] y que basarla en criterios espacio-temporales no resulta concluyente o, en sus palabras, que este criterio ha quedado “obsoleto”.

Por otro lado, podemos encontrar otra posible objeción a este tipo de criterio espacio-temporal en el análisis de los conjuntos llamados *impuros*. Es decir, en conjuntos como {Patricia, Pablo}. Normalmente no preguntamos por la localización espacial o temporal de este tipo de conjuntos, pero ¿qué nos impide hacerlo?, ¿acaso no

[7] Otro caso claro es el *Tractatus*, situado en la lista que ofrecimos más arriba como entidad abstracta (en contraste con “la copia de Baltasar del *Tractatus*”). El *Tractatus* tuvo un origen, tanto espacial como temporal, fue escrito o pensado por alguien (Wittgenstein) en un lugar determinado y durante un periodo de tiempo determinado, de manera que antes de eso, simplemente, no existía.

[8] Lo cual no implica que tengamos que abandonar la distinción en sí, de la misma manera que los problemas que aquí estamos planteando a la distinción abstracto-concreto no implica que debamos abandonarla. Simplemente se pretende demostrar que se trata de distinciones complejas, que desde luego requieren más atención de la que generalmente reciben.

podemos afirmar que el conjunto de {Patricia, Pablo} está localizado donde lo estén sus miembros (Patricia y Pablo)?[9]

Gideon Rosen, en su definición de objetos abstractos para la *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (disponible en Internet), menciona otro problema relacionado con la supuesta incapacidad para interactuar causalmente de los objetos abstractos. Se trata de una limitación conceptual según la cual los objetos concretos interactúan causalmente sólo en tanto forman parte de ciertos eventos. Por ejemplo, una piedra causa la rotura de un cristal sólo en tanto participa en el evento de la piedra siendo lanzada contra el cristal y colisionando con él. Así, la piedra es la causa de la rotura del cristal, pero sólo indirectamente. De la misma manera, continúa Rosen, si Juan está pensando en el teorema de Pitágoras y alguien le pregunta "¿en qué estás pensando?", su respuesta será un evento (la pronunciación de la frase: "en el teorema de Pitágoras") causado, en cierta forma –aunque no del todo clara y ciertamente indirecta- por el teorema de Pitágoras. El teorema de Pitágoras mantiene cierta relación con el evento de la emisión de la frase de la misma manera que la roca mantiene cierta relación con el cristal y el evento de romperse. Hasta qué punto estas dos relaciones sean equivalentes, hasta qué punto podemos considerar que ambas entidades son *causas* de los eventos, no está claro. Y ése es precisamente el problema, que no está del todo claro hasta qué punto las entidades abstractas no pueden formar parte de procesos causales.

En cualquier caso, lo que sí parece estar claro es que el criterio espacio-temporal no resulta lo suficientemente preciso como para considerarlo definitivo. Lewis señala una última vía para establecer la distinción abstracto-concreto: la vía de la abstracción ("Way of Abstraction"). De acuerdo con esta vía, los objetos abstractos son el resultado de un proceso de abstracción sobre los concretos, por medio del cual se eliminan las características *superficiales* de los objetos, las características que los distinguen entre ellos, de manera que llegamos a un nuevo objeto o entidad, formado por las

[9] Esto, por supuesto, resulta problemático. Pero no parece haber ninguna contradicción en este tipo de interpretación de los conjuntos impuros. Hay que tener en cuenta que bajo esta lectura no se está afirmando que estos conjuntos no sean abstractos, lo que se está diciendo es que es posible atribuirles localización espacio-temporal. Para ver con algo más de detalle una posible interpretación de los conjuntos similar a esta (más radical incluso), ver el capítulo 2 de este trabajo, donde analizamos la propuesta de Penelope Maddy, según la cual los conjuntos son entidades concretas.

características comunes de los objetos concretos que estemos considerando. Éste nuevo objeto o entidad es de naturaleza abstracta. En palabras de Lewis,

> Abstract entities are abstractions from concrete entities. They result somehow from substracting specificity, so that an incomplete description of the original entity would be a complete description of the abstraction (1986: 84)

Ésta es, sin duda, la manera en la que históricamente se ha considerado a las entidades abstractas[10]. Si, por ejemplo, analizamos toda una serie de objetos azules, por medio de este proceso psicológico teóricamente podemos abstraer la característica común a todos ellos, desechando el resto de las propiedades que los diferencian y de esta manera llegar al concepto abstracto de lo *azul*. Por supuesto, de este proceso no tiene porqué derivarse que esa idea abstracta de lo *azul* se corresponda con una entidad abstracta (la entidad de lo *azul*), pero es una posible opción (muy utilizada). Según los partidarios de esta idea, la entidad abstracta de lo *azul* es el referente de la idea que surge a partir del proceso de abstracción sobre una serie de objetos azules.

Ésta era, simplificando mucho, la manera en la que Cantor entendía las entidades abstractas[11]. Hoy en día sin embargo, muy pocos filósofos defienden este punto de vista psicologista, precisamente porque confunde las entidades abstractas con las ideas o las representaciones de las entidades abstractas. La manera contemporánea de entender el proceso de abstracción y las entidades abstractas resultantes difiere sustancialmente del proceso psicológico utilizado en el siglo XIX. En las últimas décadas varios autores, liderados por Crispin Wright y Bob Hale, vienen trabajando sobre la idea de derivar la existencia de las entidades abstractas sobre la base de procesos de abstracción similares a los mencionados pero sin el componente psicológico. No vamos a entrar en detalles acerca de esta propuesta aquí, ya que la expondremos con detalle en el capítulo tres, donde veremos no sólo cómo defienden estos autores la existencia y nuestro acceso a

---

[10] De hecho, Burges y Rosen proponen denominarla también "Way of History" (1997: 17)

[11] Según Cantor, por medio de un proceso de abstracción, en el que ignoramos los elementos que diferencian los elementos de un conjunto de los de otro, la mente *crea*, por ejemplo, el número ordinal del conjunto. Para un recuento detallado de la propuesta de Cantor, y una defensa de su plausibilidad, ver Fine (1998)

las entidades abstractas, sino también algunas de las principales objeciones a su propuesta.

Sin embargo, del análisis de estas cuatro vías, pese a que no hayamos podido extraer una definición aceptable de las entidades abstractas o de la distinción con las concretas, podemos concluir que parece haber efectivamente ciertos rasgos diferenciables entre ambos tipos de entidades. Estos rasgos se vuelven muy problemáticos cuando hablamos de entidades *intermedias*, como las partículas cuánticas o el ajedrez, pero en casos paradigmáticos, como las entidades matemáticas *puras* o los objetos físicos observables, es innegable que existen diferencias sustanciales y muy relevantes tanto para la teoría del conocimiento como para nuestra concepción metafísica del mundo[12]. Afirmar que no contamos con una definición no es lo mismo que afirmar que la distinción no exista o no sea relevante. Lo que hemos intentado en este breve recuento es no sólo señalar una ambigüedad en los términos generalmente ignorada, sino también apuntar hacía la que será una de las conclusiones del trabajo, señalar que la diferencia que normalmente se establece entre las matemáticas y el resto de las ciencias, al igual que la diferencia entre las entidades matemáticas y las entidades postuladas por la física, aún siendo real, no es tan grande ni tan fácil de delimitar como habitualmente se supone.

Generalmente se asume sin más que existe toda una serie de características que definen a las entidades matemáticas y que son precisamente estas características las que hacen que los problemas epistemológicos resulten especialmente complicados en esta área. De aquí es común, como veremos en el primer capítulo, deducir que es necesario contar con algún tipo de facultad cognitiva especial para el caso matemático (o abstracto en general). Esto es, en mi opinión, un error. Si de verdad necesitásemos una facultad de conocimiento especial para objetos como los números o los conjuntos, en base su condición como abstractos, también la necesitaríamos para acceder a objetos postulados por la física y por lo tanto tradicionalmente considerados como concretos, como por ejemplo las partículas cuánticas (que comparten con las entidades

[12] Tal y como Dummett lo expresa:

> In fact there is nothing of the kind [distinction between concrete and abstract objects], but rather resembles a scale upon which objects of varying sorts occupy a range of positions (1991b: 239)

matemáticas características tan definitorias de lo abstracto como su falta de localización –determinada- espacial o temporal).

En cualquier caso, lo que aquí nos interesa resaltar es la incapacidad de estas cuatro vías para establecer de una manera determinante los elementos que diferencian los objetos abstractos de los concretos y, por ello, la ambigüedad de las definiciones estándar de las entidades abstractas. Esto no significa que la distinción, o la propia noción de entidad abstracta, deba ser abandonada, pero lo cierto es que, tal y como iremos viendo a medida que avance el trabajo, esta ambigüedad parece estar en el origen de muchos problemas y malentendidos a la hora de intentar dar respuesta al problema de la existencia de las entidades abstractas y de nuestro acceso a ellas.

De todas maneras, estas tesis serán defendidas con más rigor a medida que vayamos analizando las distintas alternativas disponibles en la literatura para solucionar el problema del conocimiento de las entidades abstractas y por lo tanto, para defender su existencia e independencia. Lo importante es, creo, tener siempre presente que, a pesar de que generalmente se hable de las entidades abstractas como si fuera asumible que existe una definición aceptable de ellas, lo cierto es que no la hay. Esta suposición de partida será la fuente de error de alguna de las propuestas que veremos a continuación. Si la distinción abstracto-concreto, tal y como hemos visto, no es tan evidente como parecía en un principio, entonces,

> [M]uch of contemporary philosophy of mathematics has been based upon a dubious and poorly defended presupposition. Nominalism and other anti-realists should not dismiss realism on the grounds that the epistemology of objects posited by physics will automatically be less problematic than that for mathematical objects. Nor should we realists assume that our epistemology must be radically different from ordinary scientific epistemology (Resnik, 1997: 110-11)

El dilema de Benacerraf-Field

El argumento más importante en contra del platonismo es de carácter epistémico y básicamente afirma que el platonismo no es capaz de ofrecer una explicación adecuada del conocimiento de las entidades matemáticas (abstractas). La formulación clásica de este argumento fue desarrollada en el artículo de Benacerraf "Mathematical Truth", publicado por primera vez en el año 1973. En él, Benacerraf argumenta que el platonismo es incapaz de hacer que sus tesis ontológicas sean coherentes con una teoría causal del conocimiento. Según Benacerraf, si partimos de las suposiciones ontológicas del platonismo y, especialmente, de su caracterización de las entidades matemáticas como no-espacio-temporales y causalmente inertes, resultará muy complicado (o más bien imposible) explicar cómo podemos acceder o tener conocimiento de esas entidades. Benacerraf consideraba, al menos en el momento en que expuso el dilema, que la mejor explicación del conocimiento era la teoría causal, de acuerdo con la cual un sujeto S conoce P si y sólo si existe algún tipo de relación causal entre S y P. Si asumimos entonces, con los platonistas, que las entidades matemáticas son incapaces de interactuar causalmente, resulta obvio que encontraremos verdaderas dificultades para justificar la existencia de una relación causal entre el sujeto y las entidades.

Muchos defensores del platonismo han respondido al dilema argumentando que la teoría causal del conocimiento es falsa y, por lo tanto, no representa un problema el que sus posturas estén en contradicción con ella[13]. Pero lo cierto es que no es necesario aceptar la teoría causal del conocimiento para defender la validez del problema epistémico. De hecho, Hartry Field, uno de los más notables defensores del nominalismo, ha desarrollado una formulación paralela del dilema de Benacerraf, en la cual éste puede ser interpretado en términos no ya de la teoría causal del conocimiento, sino de las condiciones para la fiabilidad de nuestras creencias ("in terms of the reliability of our beliefs"). La formulación de Field no depende de ninguna teoría del conocimiento en concreto, su punto de partida es una observación razonable acerca de la adscripción de conocimiento:

[13] Para ver un ejemplo de este tipo de respuesta acudir a J.J. Katz (1998:25), Wright (1983: capítulo 2) o Hale (1987: capítulo 4)

> We should view with suspicion any claim to know facts about a certain domain if we relieve it imposible to explain the reliability of our beliefs about that domain (1989: 232)

Para él, la cuestión básica es explicar cómo

> How it can have come about that mathematicians' belief status and utterances so well reflect the mathematical facts (1989:230)

Esto es, cómo podemos explicar que, si sustituimos '*p*' por un enunciado matemático, el siguiente esquema se cumple:

> (2) If mathematicians accept '*p*' then *p* (1989: 230)

De esta manera, el dilema adquiere mucha más generalidad y se muestra como un problema verdadero para el platonismo, sea cual fuere la teoría del conocimiento que creamos más apropiada. De ahí que, en adelante, lo denominemos "el dilema de Benacerraf-Field".

Pero comencemos con la formulación del dilema tal y como lo concibió Benacerraf, evitando, en la medida de lo posible, hacer referencia al requerimiento causal. Benacerraf hace mención además a la teoría semántica de Tarski, alegando básicamente que la teoría causal del conocimiento es incompatible con ella porque es incompatible con el platonismo[14]. Así, el artículo comienza estableciendo las dos razones que, de acuerdo con el autor, han motivado las distintas nociones de verdad matemática:

[14] Este requerimiento también resulta problemático, ya que Benacerraf parece estar identificando la aceptación de la semántica de Tarski con la aceptación del platonismo. En cualquier caso, no vamos a entrar a discutir este aspecto del dilema ya que lo que verdaderamente nos interesa es el problema epistemológico. Dentro de los aspectos semánticos que menciona Benacerraf sin embargo, sí que nos detendremos en el requerimiento de uniformidad semántica ya que, en nuestra opinión, constituye un requisito importante para cualquier intento de respuesta anti-platonista al dilema.

(1) the concern for having a homogeneous semantical theory in which semantics for the propositions of mathematics parallel the semantics for the rest of the language

(2) the concern that the account of mathematical truth mesh with a reasonable epistemology (1973: 403)

Es decir, la preocupación, por un lado, por obtener una teoría en la cual la semántica para las proposiciones matemáticas sea paralela a la semántica para el resto del lenguaje y, por otro lado, la preocupación por lograr desarrollar una epistemología razonable para el ámbito matemático, que no choque además con la noción de verdad (tarskiana). El problema, según Benacerraf, no es cumplir con uno de estos dos requerimientos, sino con ambos a la vez. De hecho, según él, prácticamente ninguna concepción de la verdad matemática logra hacerlo: o bien alcanzan la deseada uniformidad semántica (pero a costa de renunciar a una epistemología adecuada –el caso de los platonistas), o bien desarrollan una epistemología adecuada para las matemáticas, de manera que sea concebible explicar cómo hemos logrado conocer los valores de verdad de los enunciados (pero a costa de la uniformidad semántica con lo empírico – el caso de los anti-platonistas). En sus propias palabras:

> [A]lmost all accounts of the concept of mathematical truth can be identified with serving one or another at the expense of the other [...] accounts of truth that treat mathematical and nonmathematical discourse in relevantly similar ways do so at the cost of leaving it unintelligible how we can have any mathematical knowledge whatsoever; whereas those which attribute to mathematical propositions the kinds of truth conditions we can clearly know to obtain, do so at the expense of failing to connect these conditions with any analysis of the sentences which shows how the assigned conditions are conditions of their truth (1973: 403-4)

La verdad de los enunciados matemáticos, explicada en términos de la teoría de Tarski o a través de cualquier teoría que introduzca la noción de correspondencia, requiere la existencia de las entidades a las que los términos matemáticos hacen referencia. Pero debido a la naturaleza abstracta de las entidades matemáticas, es imposible obtener conocimiento de ellas. Por lo tanto, nos vemos avocados a elegir entre una explicación de la verdad matemática o una explicación del conocimiento. En otros términos, la tesis principal del artículo será que estos dos requerimientos, el semántico y el epistémico, si bien son “inocuos” por separado, tomados en consideración conjuntamente hacen inviable prácticamente todas las nociones acerca de la verdad matemática que han sido propuestas. Tal y como lo expresa Benacerraf,

> I will both defend them further and flesh out the argument that jointly they seem to rule out almost every account of mathematical truth that has been proposed (1973: 410)

Para Benacerraf, el único criterio epistemológico que nos permitiría no sólo explicar el conocimiento en matemáticas sino también mantener la uniformidad semántica es el criterio causal. La dificultad radica en averiguar cómo podemos justificar el conocimiento de entidades no-causales en base a criterios causales. Benacerraf concluye que no es posible explicar el conocimiento matemático por medio de la teoría causal de manera que sea consistente con la explicación de la verdad de los enunciados matemáticos y, por lo tanto, con el platonismo.

Field acepta esta conclusión de Benacerraf: no es posible ofrecer una explicación causal del conocimiento de los objetos platónicos. Pero no se limita a afirmar que no es posible explicar el conocimiento (la fiabilidad de las creencias de los matemáticos, según su formulación) apelando a una relación causal, el problema, tal y cómo lo plantea es más grave y general: tampoco es posible explicarlo en términos no-causales. Las explicaciones no causales atentan contra el requerimiento platonista de independencia de las entidades matemáticas. Tal y como lo expresa Field,

> The problem arises in part from the fact that mathematical entities as the platonist conceives them, do not causally interact with mathematicians, or indeed with anything else. This means that we cannot explain the mathematicians’ beliefs and utterances on the basis of the mathematical facts being causally involved in the production of those beliefs and utterances; or on the basis of the beliefs and

> utterances caussally producing the mathematical facts; or on the basis of some common cause producing both. Perhaps then some sort of *non-causal* explanation of the correlation is possible? Perhaps; but it is very hard to see what this supposed non-causal explanation would be. Recall that on the usual platonist picture, mathematical objetcs are supposed to be mind- and language-independent; they are supposed to bear no spatio-temporal relations to anything, etc. The problem is that the claims that the platonist makes about mathematical objects appear to rule out any reasonable strategy for explaining the systematic correlation in question (1989: 231)

Resumiendo entonces, podemos expresar el dilema epistémico, aunando las contribuciones de ambos autores, en los siguientes puntos:

1. Los seres humanos existimos en el espacio y en el tiempo
2. De acuerdo con el platonismo, las entidades matemáticas son abstractas y por lo tanto existen fuera del espacio y del tiempo y son incapaces de establecer relaciones causales. Además, dichas entidades existen con total independencia de los sujetos, de sus creencias, sus prácticas lingüísticas, sus esquemas conceptuales, etc.
3. Por lo tanto, no es posible adquirir conocimiento de las entidades matemáticas por medio de una relación causal. En otros términos, cualquier explicación causal de la fiabilidad del conocimiento de los matemáticos es incompatible con el platonismo
4. Cualquier explicación no-causal del conocimiento (y de la fiabilidad) es incompatible con la independencia de las entidades matemáticas (asumiendo 1)
5. Por lo tanto, no es posible explicar el conocimiento (y la fiabilidad) sin contradecir las premisas platonistas (ya que toda explicación del conocimiento tiene que ser o bien causal o bien no causal)
6. Pero los seres humanos tenemos conocimiento matemático
7. Luego el platonismo es incorrecto.

Los defensores del platonismo, por supuesto, han desarrollado numerosas propuestas para responder a este dilema. Hasta que punto lo consiguen será lo que intentaremos dilucidar en los próximos capítulos[15].

Hipótesis de partida

En este trabajo, aparte de las definiciones mencionadas de algunos términos claves, hemos optado por partir de determinadas hipótesis. Estás ideas de partida lógicamente condicionarán sustancialmente el resto de la tesis, las propuestas que analizaremos y, sobre todo, el enfoque general de la disertación. Algunas de ellas sin embargo serán puestas en duda a medida que avance el trabajo. De hecho, el planteamiento general es bastante simple: partimos de la existencia de las entidades abstractas y de su independencia de nosotros (sin cuestionar, en un primer momento, lo que queremos decir exactamente con esta expresión), a partir de aquí y tras constatar las dificultades (sobre todo epistémicas) de esta postura, intentaremos ir matizándola poco a poco, hasta llegar a un tipo de realismo mucho más moderado (sobre todo a nivel semántico). Brevemente, las principales hipótesis de partida de este trabajo son,

1. *Las entidades abstractas existen* (de la misma manera que lo hacen las no-abstractas o concretas). Decir esto simplemente, teniendo en cuenta las dificultades con la noción de lo abstracto, no es decir demasiado, pero sí es suficiente para dejar a un lado las posturas irrealistas o nominalistas. La existencia de las entidades de las que hablan las matemáticas no será puesta en duda (aunque en las conclusiones defenderemos que no es un requisito *necesario* o que, al menos, no tenemos porqué

[15] Conviene resaltar que este dilema no es verdaderamente un argumento decisivo contra el platonismo, no demuestra que las entidades no existan o que las premisas de los platonistas sean falsas. Lo que sí parece demostrar es que existe una dificultad (aparentemente insalvable) para *justificar* el platonismo, para justificar el conocimiento de esas entidades que postula. El mejor argumento, en nuestra opinión, a favor del platonismo (al menos a favor de la existencia de las entidades matemáticas) es el argumento de la indispensabilidad de Quine y Putnam (que veremos en el capítulo 2). El dilema de Benacerraf-Field no afecta a este argumento, tan sólo señala que si lo aceptamos (y añadimos el elemento abstracto) no es posible justificar nuestro conocimiento. Y esto es suficientemente *grave* como para intentar buscar soluciones alternativas o para rechazar el platonismo (negando el argumento de la indispensabilidad –nominalistas-, aceptándolo pero negando el resto de las premisas platonistas – constructivistas-, o finalmente, reinterpretando el argumento de la indispensabilidad –que será la opción por la que nos decantemos en las conclusiones).

interpretar la existencia tal y como lo hacen los platonistas tradicionales). Lo que será cuestionado, en la segunda parte del trabajo, es la independencia de las mismas respecto a los sujetos.

Dejamos por lo tanto a un lado las tesis nominalistas (o irrealistas en general). Los nominalistas, por regla general, fundamentan sus propuestas sobre la base de argumentos puramente ontológicos (esto es: las entidades matemáticas no existen) y a partir de ellos, desarrollan todo un sistema semántico y epistemológico. En nuestra opinión es mucho más prometedor analizar el realismo y sus problemas a través de la discusión de las características semánticas de los enunciados o de los procesos del conocimiento.

2. *La cuestión clave del debate acerca del realismo es*, según lo dicho en 1, *el grado de independencia de las entidades matemáticas* (o de otro tipo) *respecto a los sujetos.* Esto se traduce en el debate acerca de las condiciones de verdad de los enunciados y acerca de los niveles de relatividad conceptual que incluyamos en el análisis del conocimiento.

3. *Las entidades de las que hablan las matemáticas son objetos*[16]. Con esto estamos dejando a un lado los análisis estructuralistas de las matemáticas, en las que las entidades matemáticas son vistas como lugares dentro de una estructura. Esta limitación es originada principalmente por problemas de espacio y de simplicidad. El estructuralismo en matemáticas viene motivado, esencialmente, por los problemas de la indeterminación de las entidades a las que se refieren los enunciados. Éste es un problema central para la filosofía de las matemáticas pero hemos optado, por motivos como hemos dicho de espacio y simplicidad, por no entrar en ellos de manera sistemática. El problema principal que queremos estudiar aquí es el del conocimiento de las entidades matemáticas, entendidas como objetos que existen independientemente de nosotros; y la solución que proponemos estudiar pasa por el análisis de esa supuesta independencia (a través, principalmente, del análisis de las condiciones de verdad de los enunciados).

---

[16] En algunos casos esta premisa se pondrá en duda. Concretamente, Maddy (capítulo 2) afirma que los números son propiedades de los conjuntos. En otros casos, simplemente no se discute la naturaleza de las entidades matemáticas.

4. *El conocimiento matemático es posible*. El problema es explicar cómo se produce, no cuestionar que ocurra.

Estructura general del trabajo

El trabajo está dividido en dos grandes partes, de tres capítulos cada una de ellas (más las conclusiones y esta introducción). Esta división responde a una distinción entre dos maneras de enfrentarse a los problemas del realismo en matemáticas. No vamos a resumir aquí los contenidos de cada capítulo, simplemente, creo conveniente señalar los contenidos de cada parte y los criterios utilizados para la inclusión de cada capítulo en ellas. En la primera parte, partiendo como hemos dicho de la existencia y la independencia de los objetos matemáticos (es decir, partiendo de las premisas básicas del platonismo), exploraremos algunas de las respuestas ofrecidas al dilema de Benacerraf-Field. El enfoque de estas propuestas es eminentemente epistemológico y se centra casi exclusivamente en el caso matemático. Para ello, estudiaremos tres opciones posibles. La elección de estas tres opciones responde a dos criterios principalmente.

En el caso de la primera opción que analizaremos –el desarrollo de la facultad de la intuición matemática- su inclusión en este trabajo viene motivada por el decisivo papel que esta noción ha jugado (y juega) en el platonismo tradicional. La idea de que accedemos a las entidades matemáticas (y abstractas en general) por medio de la intuición, entendida como una facultad análoga a la percepción, constituye la respuesta tradicional al problema del conocimiento en matemáticas y, aunque concluiremos que está lejos de representar una solución viable a los problemas epistémicos del platonismo, lo cierto que sus distintas formulaciones ejercen una importante influencia (muchas veces no explícita) en nuestra manera de entender la relación con esas entidades. Además, en ellas encontramos el germen de a partir del cual se desarrollan otras propuestas.

En el caso de la segunda y la tercera opción que analizaremos en la primera parte, la opción naturalista y la neo-fregeana, el motivo por el cual han sido incluidas en el trabajo es la gran relevancia de muchas de sus premisas y conclusiones. El naturalismo será una constante en este trabajo, así como la premisa neo-fregeana de enfocar el problema del acceso no tanto como un problema epistémico, sino como un problema de la referencia de nuestros términos.

La segunda parte del trabajo parte, en cierta medida, de las conclusiones de la primera. Una vez vistas las inmensas dificultades del platonismo tradicional para explicar el acceso a las entidades abstractas, lo que intentaremos será buscar una vía alternativa para el realismo en las matemáticas a través de un enfoque diferente al meramente epistemológico. Para ello, expondremos y discutiremos algunas de las críticas más importantes desarrolladas contra el realismo desde el análisis semántico a través de los trabajos de Dummett y de Putnam. Esto nos conduce inevitablemente a ampliar un poco el área de estudio, ya que estas críticas (y las soluciones a las mismas) no se limitan al ámbito matemático sino que por el contrario tienen un alcance global. Así, gran parte de la discusión de los tres últimos capítulos estará centrada en la búsqueda de una noción de verdad apropiada, que permita mantener ciertas dosis de realismo (concretamente, que no rechace la independencia de los objetos, aunque pueda matizarla) y que a su vez permita el desarrollo de una semántica uniforme entre los dos ámbitos: el matemático y el empírico[17] (tal y como exige el dilema de Benacerraf-Field).

Finalmente, tras la presentación de las tesis de Crispin Wright y de la noción de los conceptos dependientes de la respuesta (“response-dependence concepts”), en las conclusiones intentaremos aglutinar las principales ideas desarrolladas durante todo el trabajo y, además, presentar un esbozo de la que nosotros consideramos es la postura más prometedora para el realismo en matemáticas.

[17] Que aquí, y durante todo el trabajo, hablemos de dos ámbitos no significa, por supuesto que sólo existan esos dos ámbitos. Al lado de lo empírico y de lo matemático, podríamos también hablar del ámbito de lo ético, de lo religioso, de lo estético, etc. El que mencionemos sólo esos dos se debe a que, en este contexto, únicamente los estudiaremos a ellos, no entraremos en consideraciones acerca del resto de las áreas (aunque algunas de las conclusiones de este trabajo podrían ser perfectamente aplicables al resto o a alguno de los otros ámbitos de conocimiento).

PARTE I

An object may exist, and yet be nowhere: and I assert, that this is not only possible, but that the greatest part of beings do and must exist after this manner

David Hume

1

LA INTUICIÓN MATEMÁTICA

1.1. Introducción

En esta primera parte del trabajo, nuestro objetivo principal es discutir hasta qué punto es posible dar respuesta al dilema de Benacerraf-Field desde el platonismo. Para ello, vamos a analizar tres propuestas diferentes; cada una de ellas representa una manera de entender el platonismo en matemáticas y por lo tanto una manera diferente de entender el conocimiento matemático. Sin embargo, todas tienen en común el que intentan dar una respuesta "directa" al dilema, esto es, todas intentan ofrecer una respuesta en términos epistemológicos, por medio de una explicación de los procesos de conocimiento en matemáticas.[1]

[1] En realidad, a medida que vayamos analizando las distintas posturas se irá haciendo patente, espero, que la naturaleza de las respuestas que ofrecen es más de tipo metafísico que epistemológico (lo cual, en mi opinión, constituye un serio inconveniente). La tercera propuesta que analizaremos, la desarrollada por los llamados neo-fregeanos, es quizás la que más se aleja de esta caracterización, intentando dar respuesta al dilema a través del análisis semántico.

El objetivo es por lo tanto ver hasta qué punto estas propuestas logran dar solución al problema que el dilema plantea y, por lo tanto, hasta qué punto es posible defender una postura platonista que no sea inconsistente con la posibilidad de explicar y justificar nuestro conocimiento de las entidades matemáticas. Es conveniente enfatizar que, aún cuando las posturas que aquí vamos a estudiar pueden ser clasificadas como platonistas (en el sentido del término dado en la introducción), cada una de ellas aportará elementos nuevos o eliminará alguna de las premisas que establecimos en la definición (desarrollada en la introducción).

La solución más *directa* al dilema de Benacerraf-Field supone el desarrollo y la defensa de la facultad de la intuición. Esta es la postura adoptada, de una manera u otra, por lo que aquí denominaremos "platonismo tradicional" y, brevemente, acepta la imposibilidad de explicar y justificar el conocimiento matemático en términos causales o en clave naturalista. En vez de este tipo de explicación, los platonistas tradicionales defienden la posibilidad (y la necesidad) de desarrollar otro tipo de explicación no causal; defienden el acceso a los objetos matemáticos a través de un tipo de facultad cognitiva especial, generalmente denominada "intuición matemática".

Los defensores del platonismo tradicional aceptan no sólo que las matemáticas versan sobre objetos abstractos que existen con total independencia de nosotros, de manera que la labor de los matemáticos es la de descubrir las propiedades de dichos objetos y las relaciones entre ellos, sino que además, aceptan las características que generalmente se les atribuye a estos objetos: estar situados fuera del espacio y del tiempo y por lo tanto ser incapaces de establecer relaciones causales (entre ellos o con los sujetos).

A raíz de lo dicho en la introducción, una primera objeción a este tipo de programa surge de inmediato: la suposición (generalmente no justificada apropiadamente) de que las matemáticas estudian objetos abstractos y la aceptación de la definición tradicional de los mismos (fuera del espacio y del tiempo) que, como vimos, no está ni mucho menos clara. Sin una distinción clara entre objetos abstractos y objetos concretos gran parte del proyecto de la noción de intuición perdería su sentido ya que, de ser posible, parecería mucho más apropiado explicar el conocimiento de las matemáticas en términos naturalistas, de acuerdo con los estándares establecidos por la ciencia. Por el momento, dejaremos esta crítica a un lado ya que el hecho de que no contemos con una definición apropiada de los objetos abstractos o de que ciertos objetos generalmente considerados como concretos (o al menos estudiados por la ciencia empírica, como las partículas cuánticas) compartan ciertas características con los abstractos no elimina el hecho de que los objetos matemáticos –abstractos- presenten ciertas peculiaridades que hacen ciertamente difícil comprender nuestro acceso a ellos (ya dijimos en la introducción que aún sin una caracterización clara de la distinción, resulta evidente que existen elementos que diferencian ambos ámbitos).

El motivo por el que traigo esto a colación al inicio de este capítulo es que, aunque por el momento las obvias deficiencias de la definición de los objetos abstractos no resulten relevantes para el platonismo tradicional, a medida que avance el trabajo veremos como el cuestionamiento del estatus de estos objetos puede resultar esencial, permitiéndonos optar por soluciones nuevas y, probablemente, más plausibles a los problemas epistémicos planteados por el dilema de Benacerraf-Field.

En cualquier caso, sean cuales sean las deficiencias de sus suposiciones básicas y a pesar además de que en principio la idea de una facultad como la intuición no resulte muy "atrayente", lo cierto es que esta opción es posiblemente la que cuente con un mayor número de defensores (en muchos casos defensores no explícitos, pero aún así defensores) y es la que, sin lugar a dudas, cuenta con una mayor aceptación entre la comunidad matemática (aunque sólo sea porque respeta las matemáticas clásicas, en especial ciertos axiomas de la teoría de conjuntos)[2].

Por intuición matemática se suele entender, a grandes rasgos, una facultad racional por medio de la cual tenemos acceso directo a las entidades abstractas y que generalmente se define como análoga a la percepción. La intuición es, de acuerdo con esto, una fuente de conocimiento no inferencial, directo, que además no se apoya en elementos adicionales tales como la memoria o el testimonio. Por medio de la intuición,

[2] Esta afirmación requiere un matiz. En la mayor parte de los casos, los matemáticos no es que apoyen la idea de la intuición matemática como facultad de conocimiento ni la definición tradicional de los objetos abstractos, simplemente este tipo de cuestiones no son consideradas. Al fin y al cabo, los problemas epistémicos u ontológicos son problemas filosóficos, no matemáticos. Los matemáticos proponen sus teorías (que desarrollan a partir de otras teorías y que, a su vez, les permiten desarrollar otras, que resulten además coherentes con las aplicaciones en la ciencia) sin prestar especial atención a los fundamentos filosóficos de las mismas (a no ser cuando estos fundamentos ponen en cuestión ciertos axiomas o principios básicos, como ocurrió a principios de siglo a raíz de la discusión sobre los fundamentos de las matemáticas).

supuestamente, podemos *ver* las entidades matemáticas, de ahí que también se suela denominar (especialmente por parte de sus detractores) “ojo de la mente” o “mind-eye”.

En cualquier caso, se trata de una noción muy controvertida. Mientras gran parte de la comunidad filosófica, sobre todo a partir de Quine y de sus propuestas de naturalización, la rechaza rotundamente por considerarla “misteriosa” e incluso “mística”, no deja de ser sorprendente que en la comunidad matemática se recurra a ella constantemente. Es absolutamente normal, por ejemplo, encontrar en manuales de matemáticas expresiones como la siguiente:

> La noción de conjunto es primitiva, es decir, es una *idea intuitiva* que todos poseemos, pero que al intentarla expresar se suelen utilizar otros términos similares al de ‘conjunto’ y que a su vez exigirían una definición. Por ello, no daremos una definición de conjunto (Jiménez Guerra, 1991: 1)

La noción de intuición, o de una “idea intuitiva”, no sólo es aceptada por la mayor parte de los matemáticos, sino que además es generalmente considerada como obvia. En muy pocos casos se da algún tipo de justificación para su uso a la hora de introducir conceptos o justificar la verdad de ciertos enunciados. Pero ¿cómo es esto posible? ¿De verdad creen los matemáticos, y los filósofos que la defienden, que conocemos la verdad de las proposiciones matemáticas gracias a un “ojo de la mente”, una suerte de “luz de la razón”, que nos permite *ver* o captar directamente la realidad matemática?

En mi opinión, la gran mayoría de los matemáticos no cree en la existencia de un “ojo de la mente”. De hecho, ni siquiera pienso que crean en una realidad matemática externa e independiente a la que accedemos por medio de alguna facultad puramente racional. Tal y como indican Davis y Hersh,

> The typical working mathematician is a [realist] on weekdays and a formalist on Sundays[3] (1981: 321)

Cuando los matemáticos están *haciendo* matemáticas, por lo general asumen que están trabajando sobre una realidad objetiva e independiente, cuyas propiedades están intentando determinar. Sin embargo, cuando la discusión filosófica aparece de alguna manera en su horizonte, la mayor parte de los matemáticos suele confesar que, en su trabajo, *hacen como si* la realidad matemática existiera, aunque *en realidad* no creen que lo haga. Por supuesto, el problema radica en que ese tipo de dualidad, que a los matemáticos por lo general no les causa ningún problema, es capaz de quitar el sueño a muchos filósofos.

Esta divergencia de intereses se traduce en una divergencia en los métodos y en los objetivos de ambas disciplinas, pero también en su utilización de ciertos términos. El término "intuición" es un claro ejemplo. El uso que los matemáticos generalmente le dan al término no es el que los platonistas andan buscando. En realidad, como veremos, la intuición, tal y como es usada por los matemáticos, no tiene mucho "peso filosófico"; de la misma manera, la intuición, entendida como una facultad análoga a la percepción que asegura el acceso a los objetos abstractos, tampoco es de gran utilidad para la práctica diaria de los matemáticos (en cualquier caso, los platonistas tampoco, en su mayoría, se conforman con la definición, más bien esotérica, de la intuición que he ofrecido).

Parece conveniente, entonces, intentar aclarar (hasta donde esto sea posible) lo que se entiende por intuición, los diferentes sentidos que se le da al término y determinar qué requisitos tendrá que cumplir para satisfacer las necesidades de los platonistas. Tras esto, pasaremos a analizar muy brevemente la definición propuesta por Ernesto Sosa de la intuición, aunque no nos detendremos en su análisis ya que, tal y como yo la interpreto, la idea de intuición de Sosa no ofrece una respuesta al problema

[3] Esto es un claro reflejo de lo dicho en la nota 2, los matemáticos en general no se ocupan de los problemas filosóficos y adoptan el platonismo simplemente porque es la postura –al menos a priori- más conveniente para la práctica matemática, pero esto no implica por supuesto que no sean conscientes de los problemas que esta adopción conlleva, de ahí que cuando no están *haciendo* matemáticas, en muchos casos renuncien a los supuestos platonistas. No deja de ser curioso por otro lado, que la situación "típica" atribuida a muchos filósofos (generalmente como crítica a los filósofos idealistas) sea justamente la contraria: ser idealistas durante los días de trabajo y realistas los domingos.

epistémico[4]. Seguidamente analizaremos una postura a priori más atractiva y, desde luego, más discutida en el ámbito matemático: la desarrollada por Gödel, el filósofo-matemático que más “notoriamente” ha defendido la idea del conocimiento matemático por medio de la intuición (digo notoriamente porque sus ideas han motivado numerosos debates, aunque, como veremos, los pasajes en los que las expone no son ni mucho menos claros y casi siempre, más que admiración, provocan rechazo en sus lectores). Finalmente, analizaremos las ideas de C. Parsons, probablemente el filósofo contemporáneo que mejor y más rigurosamente ha elaborado la idea de la intuición aplicada a las matemáticas (y a los objetos abstractos en general).

1.2. La Intuición en las matemáticas

El término ‘intuición’ es uno de los más recurridos en filosofía, de una u otra forma en cada época ha habido siempre algún filósofo que lo utilice para solucionar los problemas epistemológicos u ontológicos. La intuición está presente desde Platón, con la conexión de nuestras almas con el mundo de las formas, pasando por la intuición del *cogito* de Descartes, hasta la facultad de la intuición de Kant o de Husserl. Más que tratarse de algo positivo, esta variedad de usos provoca que baste un breve repaso a la historia de la filosofía para coincidir con Frege cuando, de una manera más bien cáustica, afirmara

> [W]e are all too ready to invoke inner intuition, whenever we cannot produce any other ground of knowledge (1884: 19)

La intuición parece a veces ser una especie de comodín, especialmente en la filosofía de las matemáticas. Pero este fenómeno no es ni mucho menos exclusivo de los filósofos, basta ojear cualquier tratado matemático para que, casi con total seguridad, nos encontremos con el término intuición. Además, igual que en el caso de la filosofía,

[4] La noción de intuición defendida por Sosa es lo que se suele denominar “intuición racional o cartesiana”, queriendo decir con esto que no se basa en una analogía con la percepción, sino con el cogito de Descartes

en matemáticas también parece que la noción adquiere distintos significados según el contexto y el autor que la esté usando.

Un posible significado, quizás el más conocido, es el de una suerte de "iluminación" a la hora de resolver un problema que respondería a las famosas expresiones "¡ah, ha!" o "¡Eureka!". Este sentido del término tiene su expresión clásica en el artículo de Henri Poincaré "L'invention Mathématique" (en Poincaré, 1908) donde el autor analiza el papel que la intuición juega en el proceso creativo de los matemáticos. Esta misma línea de análisis es la seguida por J. Hadamard en su libro *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* (1954). En él, Hadamard describe el proceso de descubrimiento matemático como una sucesión de fases: una primera aproximación consciente al problema, un periodo de gestación (principalmente llevada a cabo en el subconsciente), el momento crucial de la iluminación (donde la intuición juega su papel fundamental) y finalmente la verificación rigurosa de los resultados.[5]

Otro significado que se le da al término es el de un "presentimiento". Los matemáticos en general son capaces de anticipar cuáles son los problemas más importantes que debemos resolver y los resultados que se deberían obtener. Esto es, se entiende la 'intuición' como el presentimiento de las líneas de investigación que son preferibles y de los resultados que podemos esperar de ellas.

Por otro lado, existe otro significado del término según el cual, por ejemplo, ciertas proposiciones resultan más "intuitivas" que otras. Este significado resulta especialmente claro en el caso de la geometría, donde por ejemplo es normal afirmar que las tesis de la geometría Euclideana resultan más 'intuitivas' que las de la no-euclidiana[6]. Este significado es el utilizado en la cita reproducida antes, en la que se afirmaba que "la noción de conjunto es primitiva, es una idea intuitiva que todos poseemos…". Así mismo, se suele afirmar que los axiomas básicos de la aritmética

[5] Este último paso es importante, las intuiciones matemáticas (en los diversos usos que se le da al término en matemáticas) requieren verificación para convertirse en conocimiento. En este sentido, conviene resaltar que para los matemáticos la intuición es una especie de "preludio" al conocimiento. Por sí misma no justifica una creencia y mucho menos el conocimiento. La intuición juega un importante papel en la resolución de los problemas y puede jugar un papel como parte del proceso de justificación de una proposición pero por sí misma no conduce al conocimiento de nuevos axiomas. Es este matiz, como veremos, el que hará que esta noción matemática de intuición no sea la que los platonistas necesitan para solucionar el dilema epistemológico.

[6] Para un análisis de la intuición geométrica y física en la práctica diaria de las matemáticas y del papel de los denominados "monstruos" (hasta qué punto, como algunos apuntan, estos "monstruos" deslegitiman el uso de la intuición) , véase Feferman (00)

(como por ejemplo los axiomas de Peano) o ciertos principios de la teoría de conjuntos son intuitivos, queriendo decir con esto que son "obvios".

Este último uso dado por los matemáticos es el más interesante, en mi opinión, para la filosofía. La epistemología de lo obvio no es, o no debe ser, un tema marginal en la filosofía. Gran parte de nuestro conocimiento se basa en conocimiento no-inferencial, conocimiento obvio. Un ejemplo claro del uso de este tipo de intuición como captación de lo obvio en la filosofía es el dialogo del *Menón* de Platón. En él Sócrates, por medio de una serie de preguntas, consigue que un esclavo (Menón), sin formación matemática previa, llegue "por sí solo" a una ley básica de la geometría (concretamente, Sócrates le conduce a ver que si tenemos un cuadrado, α, y a partir de su diagonal dibujamos otro cuadrado, β, el área de β será en doble del área de α)[7].

Generalmente, cuando algo nos resulta obvio solemos decir que es de 'sentido común' aceptar su verdad. Las proposiciones intuitivas son proposiciones que respetan el sentido común. Conocer la verdad de estas proposiciones no requiere ningún tipo de conocimiento ni creencia previa. Se podría decir que para saber si una proposición intuitiva (u obvia) es verdadera basta con entenderla. En palabras de Gödel, ciertas proposiciones básicas de la aritmética, proposiciones intuitivas, "force themselves upon us". ¿Es concebible dudar de la verdad de, por ejemplo, la proposición "1+1=2"?, ¿y de la proposición "todo triángulo tiene tres lados"?

El problema está en que, aun aceptando esto, es posible que este significado de la intuición no sea "suficiente" para los objetivos de los platonistas. El sentido común (como forma de intuición) resulta más informativo en el mundo empírico que en el matemático. Tal y como afirma Penelope Maddy (1997: 185-8), existe una divergencia clara en el alcance de la noción de "sentido común" en las ciencias empíricas y en las matemáticas. Si bien es cierto que tanto las ciencias empíricas como las matemáticas comienzan con el sentido común (en nuestras prácticas ordinarias de contar, medir, etc.), en el caso de la ciencia empírica, el sentido común ratifica una ontología de objetos físicos observables ("middle sized physical objects"), nos dice algo acerca de

[7] Véase Giaquinto (1998) para una defensa de la consideración, en determinadas circunstancias, de lo obvio como un estado de creencia aceptable incluso cuando el sujeto es incapaz de justificar su creencia. Para ello, Giaquinto, por medio de la teoría de los conceptos de Peacocke, argumenta que ese estado de creencia puede resultar de la activación de disposiciones fiables para la formación de creencias (generadas por la posesión de determinados conceptos).

estos objetos (nos dice, por ejemplo, que son estables, o que seguirán existiendo aún cuando no los observemos). Sin embargo, en el caso de las matemáticas el sentido común no parece ratificar ninguna ontología.

El sentido común nos dice muchas cosas acerca de las matemáticas, nos dice que 1+1=2, que un cuadrado tiene cuatro lados o que una persona que mida dos metros es más alta que otra que mida uno. Pero el sentido común no nos dice si *existe* el número dos.[8] El sentido común no ofrece una respuesta satisfactoria a la pregunta ¿existe el número 2? De la misma manera que resulta cuando menos extravagante dudar de la existencia de los objetos físicos observables, resulta sospechoso que alguien no confiese tener o haber tenido dudas acerca de la existencia de los objetos matemáticos. Estas dudas se agravan además cuando intentamos conocer algo más acerca de la naturaleza de esos objetos: ¿existen fuera o dentro del espacio? ¿y del tiempo? ¿son independientes de nosotros?

Los platonistas necesitarán algo más que la intuición como sentido común para defender sus tesis acerca de la existencia de los objetos abstractos. Necesitan una noción que les garantice un acceso a esos objetos, una vía de conocimiento. Una noción que les garantice la existencia de dichos objetos. El hecho de que ciertos axiomas resulten obvios no garantiza la existencia de los objetos o de las entidades acerca de los que habla[9] ni por lo tanto que nuestra creencia en esos axiomas sea generada por un proceso en el que directamente captamos o aprehendemos los objetos matemáticos.

Por último, alguien podría pensar que la intuición como iluminación en el sentido dado por Poincaré y Hadamard podría servir los objetivos de los platonistas,

[8] Si lo hiciera, no habría razón para que los matemáticos se declarasen, por regla general, formalistas que actúan como platonistas. De hecho, yo iría un paso más allá que Maddy y afirmaría que el sentido común en realidad nos empuja a pensar que los objetos abstractos no existen. El sentido común se basa en lo que podemos percibir, en lo que vemos y sentimos a nuestro alrededor, por eso nos resulta tan chocante la idea de una realidad plagada de objetos acausales, atemporales y sin localización espacial.

[9] Esta afirmación puede resultar problemática. Alguien podría argumentar que si un axioma resulta obvio y por lo tanto es verdadero esto garantizaría la existencia de los objetos de los que habla. Si adoptamos, por ejemplo, una noción de verdad como correspondencia no sería posible afirmar que un enunciado o un axioma es verdadero si no se corresponde con una "realidad", si los objetos no existen. Mi respuesta a esto es que cuando decimos que un axioma o enunciado resulta obvio aceptamos la posibilidad de que su verdad no sea "literal" sino "ficcional". Por ejemplo, el enunciado "los unicornios tienen un cuerno" puede ser considerada verdadera, de hecho una vez conocemos el significado del término "unicornio" resulta obvia, aunque los unicornios no existan. Volveremos sobre esta diferencia más tarde, especialmente en las conclusiones, donde intentaré argumentar que la existencia de los objetos matemáticos no es un requerimiento necesario para garantizar la objetividad (o al menos cierto grado de objetividad) de la verdad matemática.

pero hay razones para pensar lo contrario. Por un lado, ni Poincaré ni Hadamard (al menos tal y como yo los entiendo) quisieron atribuirle implicaciones ontológicas al término. Cuando ellos hablaban de "iluminación" se referían a la resolución de un problema, no a la captación de un objeto matemático o a la repentina visualización de una realidad abstracta independiente. Por otro lado, aun cuando pudiéramos interpretarla de esta manera, como acceso a la realidad matemática, no sería de gran ayuda ya que tendríamos que explicar en qué consiste esa iluminación y cómo se establece ese "contacto". Decir que accedemos a los objetos matemáticos por iluminación es al fin y al cabo equivalente a afirmar que accedemos a ellos por medio del "ojo de la mente". En ambos casos se trata simplemente de una metáfora que tendrá que ser concretada para ser plausible. Veremos a continuación las inmensas dificultades para ofrecer una definición más o menos sustantiva y convincente del conocimiento de los objetos matemáticos por medio de la intuición; estas mismas limitaciones son aplicables a la idea del conocimiento por "iluminación".

Por lo tanto, creo que podemos concluir que ninguno de los significados atribuidos por los matemáticos al término intuición resulta suficiente o relevante para los platonistas. Para los matemáticos, la intuición es una facultad para resolver problemas, desempeña un papel meramente heurístico. Los platonistas necesitan una noción de intuición como *acceso* a la realidad matemática, una noción que ratifique su ontología.

Esta distinción entre los dos tipos de intuición es expresada por Charles Parsons (1980) como la distinción entre "intuition that" (intuir que-) e "intuition of" (intuición de-). Intuición proposicional e intuición de objetos. Una cosa es, afirma Parsons, intuir que cierta proposición es verdadera y otra muy distinta tener intuición de determinados objetos, intuir (la existencia de) los objetos matemáticos (por ejemplo). La intuición tal y como la entienden los matemáticos es equivalente a la "intuition-that", una facultad de sentido común, que en algunas personas está más desarrollada que en otras y que por lo tanto les permite resolver los problemas matemáticos de una manera más rápida. Por supuesto, ambos tipos de intuición están íntimamente relacionados, la "intuition-of" no sirve de nada si no está acompañada por la "intuition-that", pero es posible tener "intuición that" sin "intuition of"[10].

Grandes matemáticos, como por ejemplo Ramanujan[11], son famosos por su gran capacidad de "intuición", pero esto debe entenderse como la facultad para comprender los dilemas que plantea un problema matemático y las vías para solucionarlo, por su gran capacidad para el "pensamiento creativo" (otro posible sinónimo del término intuición). En ningún caso debe entenderse la capacidad especial de Ramanujan y de otros grandes matemáticos como una especie de "conexión" entre ellos y la realidad matemática. Por supuesto, alguien podría argumentar que es precisamente la existencia de algún tipo de conexión especial entre el matemático y la realidad matemática la que provoca que éste posea esa gran capacidad para resolver los problemas y para determinar cuando una proposición es verdadera o falsa. Es decir, se podría argumentar que es gracias a la posesión de una facultad de intuición entendida como conocimiento de los objetos matemáticos que podemos conocer la verdad de las proposiciones matemáticas. Pero, de nuevo, este argumento no nos conduce a ninguna parte mientras no expliquemos cómo se produce esa conexión y en qué consiste. Es precisamente en este paso donde radica el dilema.

Puede que Ramanujan poseyera una capacidad excepcional para captar los objetos matemáticos, que poseyera una "intuition-of" muy desarrollada, pero esto es, al menos por el momento, mera especulación.[12] Lo que esta claro es que poseía una intuición proposicional, una capacidad de sentido común muy desarrollada, pero ambas facultades son, en principio, independientes. El objetivo del platonista debe ser,

[10] De la misma manera, una de las principales afirmaciones que pretendo defender a lo largo de este trabajo, que desarrollaré especialmente en las conclusiones, será que es posible (y suficiente) contar con una noción de verdad matemática (y por lo tanto con cierto criterio de objetividad matemática) sin tener por ello que comprometernos con una ontología determinada. Lo indispensable de las matemáticas, argumentaré, no es la existencia de ciertos objetos con una naturaleza determinada, sino más bien la objetividad del conocimiento y de la verdad matemática. La distinción de Parsons apunta algo similar: es posible contar con una intuición proposicional (de la verdad de las proposiciones matemáticas) sin tener por ello que defender la intuición de los objetos de los que se habla. En las conclusiones no haré uso de la noción de intuición que, como veremos, considero incapaz de explicar el conocimiento matemático.

[11] Matemático Indio (1887-1920) de formación auto-didacta, conocido especialmente por sus trabajos con el matemático inglés G.H. Hardy.

[12] Un nominalista (o un formalista) podría aceptar por ejemplo la tesis de que Ramanujan poseía una intuición muy desarrollada para resolver los problemas matemáticos y analizar la verdad o la falsedad de los enunciados pero ya que, según los nominalistas, no existe una realidad matemática independiente y las teorías matemáticas no son más que ficciones que nos ayudan a entender y a explicar el mundo, esta "intuición-that" no necesita apoyarse para nada en la "intuición-of". De hecho, según ellos no existen los objetos matemáticos, así que simplemente no puede existir una intuición de ellos.

precisamente, argumentar que además de la intuición proposicional existe ese otro tipo de intuición análoga a la percepción y para ello tendrá que elaborar sus tesis más allá de la simple metáfora. Hasta qué punto esto es posible es lo que intentaremos elucidar en lo que resta de este capítulo. En capítulos posteriores, especialmente en la segunda parte de este trabajo y en las conclusiones, tras haber argumentado que los diversos intentos de justificar el conocimiento de los objetos matemáticos (por medio de la "intuition of" o por otros medios) están condenados al fracaso analizaremos hasta qué punto todos estos esfuerzos son necesarios (o convenientes), es decir, buscaremos vías alternativas de asegurar la verdad de los enunciados matemáticos sin tener que aceptar *tout court* las premisas ontológicas del platonismo.

1.3. Un ejemplo de intuición como noción epistémica general en filosofía: E. Sosa

Ernesto Sosa es uno de los filósofos que con mayor fuerza ha defendido en los últimos años el uso de la intuición en la filosofía. Para él, de hecho, la filosofía analítica se basa en la intuición: "analytic philosophy is intuition-driven" (manuscrito). En una serie de varios artículos ha desarrollado y defendido una idea de intuición como independiente de la creencia pero fundamental para el conocimiento filosófico en general. A pesar de ser uno de los filósofos que mejor a articulado la noción de intuición, en mi opinión sigue sin dar respuesta al dilema presentado por Benacerraf-Field ya que sigue sin explicar en qué se basa o cómo se produce el conocimiento de los objetos abstractos. Los análisis de Sosa constituyen, en mi opinión, un ejemplo de rigurosidad a la hora de definir una facultad epistémica, pero desgraciadamente (para los platonistas) no se trata de la facultad que necesitamos para solucionar el problema epistémico en matemáticas (aunque el propio Sosa intenta aplicarla a la aritmética).

La intuición, tal y como la define Sosa, corresponde a la que hemos denominado "intuition-that" y que, como hemos visto, no sirve para los propósitos de los platonistas. Se trata simplemente de intuición como sentido común, con un papel (importante pero irrelevante para el problema del conocimiento del platonismo) metodológico, heurístico.

Sosa define lo que él mismo denomina “intuición proposicional” (“intuition-that”, en la terminología de Parsons) como una facultad cognitiva esencial que cumple las siguientes características (2005):

1. Es un estado consciente
2. Tiene contenido proposicional
3. Es distinta de la creencia. Es posible poseer una intuición de que p sin creer que p (esto ocurre en el caso de las paradojas)[13]
4. Su contenido puede ser falso, puede haber intuiciones falsas
5. No es derivable meramente de la enculturación, ni de la percepción, ni de la introspección, el testimonio o el razonamiento inferencial
6. Puede servir como base para la creencia, ayudando así a aportar justificación epistémica para la creencia.

Esta es, obviamente, una definición muy general pero en ella se expresan los elementos básicos comunes a todas las definiciones de intuición (al menos, a todas las que vamos a tratar aquí). A partir de estas características básicas, Sosa analiza dos modelos de intuición posibles: el modelo perceptual y la intuición como introspección. Teniendo en cuenta las premisas básicas del platonismo, según las cuales los objetos matemáticos existen con total independencia de nosotros (es decir, *fuera* de nuestra mente o de la de ningún matemático) parece claro que el modelo de intuición que podría satisfacer sus necesidades es el perceptual. La intuición como introspección, que Sosa relaciona con el *cogito* de Descartes, podría en todo caso servir como justificación para ciertas teorías constructivistas de las matemáticas, según las cuales los objetos matemáticos son construcciones mentales.[14]

El caso de la intuición como percepción sin embargo requiere serias restricciones para ser viable. En primer lugar, según Sosa, la analogía entre percepción e intuición no

[13] Una paradoja se produce cuando dos proposiciones igualmente intuitivas resultan contradictorias. En estos casos, aun sabiendo que una debe ser falsa y por lo tanto sin creer en la verdad de ambas proposiciones, seguimos sintiéndonos “atraídos” hacia las dos. De hecho, aun cuando hayamos probado la falsedad de una proposición intuitiva, no perderá su “poder de atracción”. Una proposición puede resultar intuitivamente verdadera aún cuando sabemos que es falsa.

[14] Concretamente Brouwer, uno de los fundadores del constructivismo en matemáticas, hace uso de la intuición como vía de conocimiento de los objetos matemáticos, aunque lo hace basándose en la idea de intuición Kantiana. Véase el capítulo 4 para una exposición de las tesis de Brouwer.

es del todo clara ya que en el caso de la percepción contamos con la "experiencia sensorial" que actúa como intermediaria entre el objeto percibido y el sujeto. En el caso de la intuición, sin embargo, no contamos con ese elemento intermedio, no existe una "experiencia intuitiva". Sosa pone como ejemplo el paso entre:

"el hecho de que 1+1=2"

y

"la creencia de que 1+1=2".

No existe una experiencia intermedia entre el hecho y la creencia (aunque esto no implica que la intuición choque o se pueda identificar con la creencia, como ya dijimos). Teniendo en cuenta esto, Sosa llega a una nueva definición de la intuición en las siguientes líneas:

> S intuits that p if and only if S's attraction to assent to <p> is explained by four things in concert: (a) that <p> is simple enough, (b) that S understands it well enough, (c) that <p> is either a modally strong proposition (necessarily true or necessarily false) or else a self-presenting proposition (attributing to S some current state of consciousness), and (d) that <p> is true.(2005: 16)

Este análisis es válido para las proposiciones matemáticas ya que su verdad o falsedad es necesaria y los axiomas básicos, en los que juega un papel predominante la intuición, son suficientemente simples. Sosa plantea la intuición, en estos casos, como resultado meramente de la comprensión de las proposiciones (siempre que éstas sean verdaderas). En este sentido, la intuición de proposiciones verdaderas como "1+1=2" se asemeja mucho a la intuición de proposiciones como "*cogito ergo sum*" o "yo existo". Basta entenderlas para poder afirmar su verdad. Son directamente cognoscibles.

Como ya dijimos, en mi opinión Sosa no da una respuesta satisfactoria al dilema (tampoco creo que ese fuera su objetivo, por lo que esto no representa ninguna crítica a su postura). En mi opinión, las tesis de Sosa son apropiadas como un análisis de la intuición en el sentido matemático, pero no en el sentido que necesitan los platonistas. Cuando Sosa afirma, por ejemplo, que la proposición "1+1=2" nos resulta verdadera por el mero hecho de entenderla (y de ser lo suficientemente simple y además, verdadera) está justificando la noción de intuición como sentido común analizada anteriormente. Es cierto que la verdad de “1+1=2” resulta obvia, pero eso no implica que esto se deba a que podemos, de alguna manera, aprehender directamente el objeto “1” o el objeto “+”. No explica qué es lo que hace a esta proposición verdadera. Seguimos, en definitiva, sin contar con una explicación de la relación entre los objetos matemáticos y el sujeto.

En cualquier caso, la formulación y el análisis de la noción de intuición llevado a cabo por Sosa es, en mi opinión, uno de los más claros e interesantes ofrecidos. Por supuesto, no es la única posibilidad ya que, aunque la opinión de que este tipo de enfoques no son los adecuados para resolver los problemas epistémicos del platonismo es bastante generalizada, varios filósofos han intentado seguir esta línea argumental. No voy a entrar en los detalles de todas las propuestas de este tipo, creo que los argumentos que ofrezco a lo largo de este capítulo en relación a las que probablemente sean las más relevantes, al menos en el caso del conocimiento matemático (la propuesta de Gödel y la de Parsons), resultan suficientes para entender los motivos por los que no considero adecuado ni deseable apelar a una facultad como la intuición.

Sin embargo, me gustaría señalar, antes de entrar a analizar las propuestas de Gödel y Parsons, que tampoco considero (como parecen hacerlo la mayor parte de los comentadores) correcto simplemente rechazar la posibilidad de la intuición alegando que representa una noción misteriosa e incluso mágica. Ni Sosa ni ninguno de los defensores de esta solución creen en soluciones mágicas, todos ofrecen argumentos con los que podemos estar o no de acuerdo, pero que en cualquier caso son ejemplos de rigurosidad filosófica.

Jerrold J. Katz, otro gran defensor de la facultad de la intuición, expresa muy bien esta idea cuando en su libro *Realistic Rationalism* argumenta en contra de la confusión (por parte de anti-realistas radicales, en sus propias palabras) entre “misterio” y “misticismo”. De acuerdo con esto, afirma

> No one would deny that there is a mystery about how we can have knowledge of abstract objects. But such extreme antirealists make far too much of that particular philosophical mystery. Philosophy is full of such mysteries. [...] But the obscurity of the rational mechanism is no grounds for dismissing the claim that pure reason does what, from the common-sense standpoint, it appears to do (1998: 33)

Es cierto, el que el conocimiento de los objetos abstractos resulte misterioso no lo convierte en un problema místico. Y la apelación a “mecanismos racionales” como la facultad de la intuición para solucionarlo no conlleva ningún compromiso con el misticismo. Pero esto, por supuesto, no exime a sus defensores de tener que justificar el recurso a la intuición apropiadamente. La intuición matemática puede no ser una facultad mística o mágica pero, por el momento, sigue sin contar con una justificación adecuada y sigue sin producir los resultados esperados. Sin esa justificación, seguirá siendo una especie de comodín al que apelar cuando no logramos dar con una explicación más adecuada.

1.4. Kurt Gödel

Recapitulando lo dicho hasta el momento, parece claro que los platonistas que quieran apelar a la facultad de la intuición necesitan desarrollar una noción de intuición que juegue un papel análogo al de la percepción en el mundo empírico, que sirva como *puente* entre nosotros y los objetos. La intuición proposicional (intuition-that) o la intuición tal y como comúnmente se emplea en matemáticas no es suficiente para explicar el conocimiento de los objetos matemáticos (abstractos).

Y eso es precisamente lo que propone que hagamos Gödel, establecer una analogía entre la realidad física y la matemática y entre nuestra manera de acceder a ambas: de la misma manera que podemos conocer los objetos físicos por medio de la percepción, conocemos los objetos matemáticos por medio de la intuición. La intuición, tal y como la entiende Gödel, es básicamente una facultad cognitiva similar a la percepción y que cumple una función análoga a ésta en el caso de las matemáticas.

Kurt Gödel es uno de los matemáticos más importantes de la historia y a pesar de que sus tesis han tenido una gran influencia en la filosofía del siglo veinte y de que él mismo mostró siempre un gran interés por las cuestiones filosóficas, apenas publicó artículos dedicados a estos temas (en gran parte debido a sus propias exigencias de rigurosidad en los mismos). De todos sus escritos filosóficos, los más conocidos, y los que nos interesan en este trabajo, son los dedicados a la defensa del platonismo en las matemáticas y de la noción de “intuición matemática” como forma de conocimiento de la realidad matemática. En cualquier caso, sus escasas incursiones en la filosofía han sido muy influyentes y han provocado una gran cantidad de debate y de discusión, no sólo en el ámbito (más o menos reducido) de la filosofía de las matemáticas, sino también en áreas como en la filosofía de la mente o del lenguaje.

Gödel defiende una forma “fuerte” o “robusta” de platonismo y para ello establece una analogía entre el ámbito de lo físico y de lo matemático en todos los niveles. Así, Gödel define el platonismo como la postura según la cual:

> [M]athematical objects and facts (or at least something in them) exist independently of our mental acts and decisions [....] the objects and theorems of mathematics are as objective and independent of our free choice and our creative act as is the physical world (1951: 312, n.17)

Por medio de la analogía entre los objetos matemáticos y los físicos Gödel justifica su creencia en la existencia y en la independencia de la realidad matemática. Los objetos matemáticos no son ni mucho menos construcciones humanas, son objetos independientes de nosotros, de la misma manera que los objetos físicos son independientes de nuestras experiencias sensoriales. Siguiendo con esta analogía, explica por lo tanto la legitimidad de la suposición de los objetos matemáticos:

> It seems to me that the assumption of such objects [classes and concepts] is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence. They are in the same sense necessary to obtain a satisfactory system of mathematics as physical bodies are necessary for a satisfactory system of our sense perception (1944: 456)

La suposición de los objetos matemáticos es necesaria para el desarrollo de un sistema matemático satisfactorio de la misma manera en que la suposición de los *cuerpos* físicos es necesaria para el desarrollo de un sistema satisfactorio de nuestro sentido perceptual.[15]

Pero las tesis de Gödel que aquí más nos interesan, que además son las que más debate han provocado, en gran parte debido a la oscuridad de los fragmentos en los que Gödel habla del tema, son las que hacen referencia al concepto de intuición matemática. En la misma línea que hemos estado comentando de establecer analogías entre el mundo físico y el empírico, Gödel desarrolla una noción del conocimiento matemático por medio de una facultad denominada por él intuición y que, según su descripción, actúa de manera similar a la percepción en el conocimiento del mundo físico. A las dificultades intrínsecas derivadas de la ambigüedad ya mencionada del término 'intuición' se añaden en el caso de la formulación de Gödel las derivadas del carácter enigmático de sus escritos y a la escasez de los mismos. Hay que tener en cuenta además que Gödel no toma en cuenta la distinción entre la intuición proposicional y la intuición de objetos, por lo que usa el término indistintamente en ambos casos. Esto, lógicamente, puede dar lugar a malas interpretaciones.

Por ello, intentaremos dilucidar el significado que Gödel le daba al término a través de sus propios escritos. Si una cosa está clara en ellos es la importancia que Gödel le otorga a la intuición y la fuerza con la que afirma su existencia. Así Gödel llega a afirmar,

> The existence, as a psychological fact, of an intuition covering the axioms of classical mathematics can hardly be doubted, not even by adherents of the Brouwerian school (1953: 338, n.12)

En cualquier caso, de los textos de esta época temprana no podemos inferir si Gödel está hablando de intuición proposicional o de intuición de determinados objetos.

[15] La necesidad de suponer la existencia de los objetos matemáticos para el desarrollo de un sistema satisfactorio de matemáticas es precisamente uno de los aspectos que cuestiono en las conclusiones. En mi opinión, la existencia de determinados objetos es no sólo no necesaria sino que además no garantiza la objetividad del conocimiento matemático. Otros autores, por supuesto, han desarrollado argumentos similares (aunque no siempre con la misma motivación y mucho menos con los mismos resultados). Los más radicales de estos argumentos son los esgrimidos por los nominalistas, quienes niegan la existencia de una realidad matemática. El *locus clasicum* del nominalismo en matemáticas es el artículo escrito conjuntamente por Goodman y Quine (1947). Más reciente, es especialmente notorio es el rechazo de Hartry Field de la existencia de los objetos matemáticos llevada a cabo en Field (1980) y (1989).

En realidad, apenas es posible inferir ninguna característica esencial de la intuición tal y como la entendía Gödel ya que apenas da descripciones más allá del uso de la analogía con el mundo empírico (por otro lado tampoco se explica en qué consiste exactamente esta analogía). Quizás la descripción más aproximada de lo que entiende por intuición la da en "What is Cantor's continuum problem?". Concretamente en el que probablemente es el fragmento más citado (y no siempre alabado) de Gödel,

> But, despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves on us as being true. I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e., in mathematical intuition, than in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them [...]
>
> It should be noted that mathematical intuition need not be conceived of as a faculty giving an inmediate knowledge of the objects concerned. Rather it seems that, as in the case of physical experience, we form our ideas also of those objects on the basis of something else which is inmediately given. Only this something else here is not, or not primarily, the sensations. That something else besides the sensations actually is inmediately given follows (independently of mathematics) from the fact that even our ideas referring to physical objects contains constituents qualitatively different from the sensations or mere combinations of sensations, i.e., the idea of object itself [....] Evidently, the 'given' underlying mathematics is closely related to the abstract elements contained in our empirical ideas. (1947: 483-4)

Los detractores del platonismo y de la existencia de la facultad de la intuición (entendida como intuición de objetos) en matemáticas generalmente citan este fragmento de Gödel y seguidamente pasan a dar una interpretación del mismo que, en mi opinión, en muchos casos roza la caricatura. Es habitual atribuir a Gödel la defensa de un sexto sentido, una facultad de carácter casi místico que nos permite estar en contacto directo con una realidad matemática que cumple todos los atributos del mundo de las ideas de Platón. Sin embargo, a pesar de que es cierto que Gödel no da muchas pistas acerca de lo que sea la 'intuición' y en muchos aspectos su supuesta definición no pasa de ser una simple metáfora, creo que es conveniente analizar este fragmento con cierto detenimiento. Al fin y al cabo, su "extraña metáfora" ha dado pie a varios desarrollos posteriores de la idea de intuición.

En primer lugar, como hemos mencionado y tal y como señalan Parsons y Shapiro[16], no está del todo claro si Gödel está hablando de la intuición entendida en el sentido proposicional o en el sentido del acceso a los objetos. Gödel habla en el texto por un lado de axiomas obvios, cuya verdad nos es *impuesta*, para cuya explicación bastaría con defender simplemente la intuición proposicional. Pero por otro lado, el texto comienza afirmando que tenemos algo semejante a la percepción también de los objetos de la teoría de conjuntos, es decir, comienza estableciendo la existencia de la intuición como aprehensión de objetos. El problema es precisamente cómo justificar este paso entre la intuición proposicional y la intuición de objetos abstractos. El paso entre la captación de la verdad de los axiomas (que según él "force themselves on us as true") y la existencia de una facultad que nos permite captar o acceder a los objetos de las matemáticas (Gödel habla, concretamente de los objetos de la teoría de conjuntos). Gödel parece justificar la existencia de este segundo tipo de intuición en base a la existencia del primero, pero obviamente esta explicación no resulta satisfactoria. Es obvio que la intuición de objetos (de cierto tipo) no tiene utilidad a no ser que esté de alguna manera al servicio del conocimiento proposicional acerca de esos objetos, pero el que esto sea obvio no justifica ni explica el paso de un tipo de conocimiento al otro[17].

Siguiendo en la línea de la analogía con la percepción, la interpretación más lógica de la idea de Gödel implicaría la existencia de una suerte de conexión, algún tipo de *contacto* entre los objetos matemáticos y la mente de los sujetos[18]. Pero esta conclusión no es muy esperanzadora como explicación factible del conocimiento matemático. Si la aceptamos volveríamos a encontrarnos de frente con el dilema de Benacerraf, ¿cómo es posible este contacto entre nosotros, seres espacio-temporales y los objetos matemáticos, incapaces de mantener relaciones causales?

---

[16] Parsons (1980) (1995) y Shapiro (2000: 206-207)

[17] Ver notas 9, 10 y 12.

[18] Tradicionalmente se entiende que el contacto entre los sujetos y los objetos físicos es de naturaleza causal, sin embargo esto no tiene porqué ser así. Sea como sea, lo que aquí nos interesa es la exigencia de que el conocimiento matemático se realice a través del contacto (causal o no) entre los objetos y el sujeto y que este contacto sea similar en ambos casos: el matemático y el empírico.

La analogía, entendida de esta manera tan literal, con la percepción, más que ayudar parece empeorar las cosas porque hace depender nuestro conocimiento de los objetos de nuestra aprehensión o de nuestro contacto con los mismos. Pero el acceso a los objetos requiere que, al menos, estemos situados en el 'mismo nivel', es decir, que o bien ambos (sujeto y objeto) estén situados en el espacio y en el tiempo o bien que ninguno de los dos lo esté. Parece claro que nosotros estamos situados en el espacio y en el tiempo y el platonismo (al menos en sus formulaciones tradicionales) presupone que los objetos matemáticos son abstractos (no espacio-temporales). Por lo tanto, afirmar que existe una conexión análoga a la percepción en matemáticas es inconsistente con el platonismo.

La intuición, para que cumpliera su papel cognitivo, tendría que ser capaz de trasladar la información, por decirlo de alguna manera, de un ámbito a otro. Cómo explicar esto, sin recurrir a la magia, es lo que no está claro. Pero es necesario hacer un inciso. Gödel no planteaba la cuestión en estos términos, básicamente porque no aceptaba la premisa de que nosotros estemos situados en el espacio y el tiempo. Si asumimos el punto de vista cartesiano según el cual la mente está separada del cuerpo y es inmaterial, el acceso a los objetos abstractos deja de ser tan problemático (lo cual no significa por supuesto que quede solucionado), al fin y al cabo estarían en el mismo nivel ontológico. El problema claro, estaría ahora en defender el carácter abstracto de la mente, su naturaleza no-física. Dicho en términos coloquiales, "el remedio es peor que la enfermedad".

Debido a estas dificultades obvias, que han llevado a los detractores del platonismo a rechazar fácilmente las ideas de Gödel, muchos de los defensores han intentado, de una forma u otra, encontrar una interpretación más "caritativa" de sus tesis. Pocos han logrado articular una defensa coherente de sus ideas. La línea de defensa habitual es considerar las afirmaciones de Gödel como una "metáfora". Según esto, no debemos leerlas literalmente y por lo tanto no debemos entender la analogía entre la percepción y la intuición de una manera literal, como algo real y fiable. Se trata simplemente, afirman, de una metáfora.

Pero esto no resulta de mucha ayuda, tal y como afirma un defensor del platonismo tradicional como Katz (1998: 15-6). La interpretación metafórica elimina los problemas de coherencia que hemos mencionado, pero no nos ofrece nada más, no representa por sí misma ninguna explicación del proceso de captación de los objetos matemáticos. No nos explica el significado real que puedan tener los términos metafóricos de “percepción” o “intuición”.

En el segundo párrafo del texto citado, Gödel da algunas indicaciones acerca de lo que sea la intuición. Estas indicaciones no resuelven ni mucho menos el problema principal, ni siquiera ayudan a aclarar los términos, pero revelan parte de lo que podría tener en mente y son de gran importancia en el debate acerca de la intuición.

Gödel afirma que, efectivamente, algo es *dado* a la mente a través de la intuición pero que ésta no debe ser concebida como una facultad que da conocimiento *inmediato* de los objetos en cuestión. De la misma manera que en la percepción no captamos los objetos en sí, sino una representación de ellos, la experiencia perceptual o los datos de los sentidos (“sense data”), en las matemáticas lo que nos llega a la mente no son los objetos en sí, sino un intermediario similar al de la percepción, los “datos de la intuición” (“intuition data”).

Cabe señalar que esto choca con la definición de la intuición ofrecida por Sosa (que vimos en el apartado anterior). Para Sosa uno de los problemas que presenta la intuición entendida como análoga a la percepción es precisamente el que, según él, en la intuición no contamos con ese elemento intermedio. Para Sosa la intuición implica un acceso directo, a diferencia de la percepción.[19]

En cualquier caso, si algo resulta claro de los escritos de Gödel es que la noción de intuición tendrá que ser definida con mucho más detalle para constituir una opción viable para los platonistas. Es necesario explicar con más detalle en qué consiste esta misteriosa facultad y establecer mejor los términos de esta supuesta analogía con la percepción. Es precisamente esta vaguedad en los términos y la aparente incapacidad de los platonistas para ofrecer una definición más concreta lo que hace que se despierten las alarmas de los escépticos. Si la intuición es una facultad que todos poseemos, de la misma manera que poseemos la percepción, ¿cómo es que cuesta tanto definirla?,

[19] En cualquier caso, Sosa no habla de intuición de objetos, tal y como vimos. Sosa lo que afirma es que del “hecho de que 1+1=2” a la “creencia en que 1+1=2” no existe un paso intermedio.

¿cómo podemos saber si poseemos o no una facultad de intuición tal y como Gödel pensaba?

Estas son preguntas difíciles de responder. Por eso la opción de la intuición ha sido abandonada por muchos defensores del platonismo. Entre los defensores del platonismo contemporáneo creemos conveniente destacar a dos filósofos que intentan revitalizar la idea del conocimiento matemático por medio de la analogía con el conocimiento empírico: Charles Parsons, que elabora toda una teoría de la intuición partiendo de las ideas de Gödel y Penélope Maddy, quien "le da la vuelta a la tortilla" y renuncia a la noción de objeto matemático como objeto abstracto. Analizaremos la propuesta de Parsons a continuación y las de Maddy[20] en el capítulo siguiente, cuando exploremos la posibilidad de una solución en términos naturalistas al dilema.

1.5. Nuevos desarrollos: Charles Parsons

Charles Parsons es quizás el filósofo contemporáneo que más tiempo y dedicación ha prestado al desarrollo de una facultad de la intuición que nos permita dar respuesta al dilema de Benacerraf-Field. Para ello, ha llevado a cabo un análisis minucioso de la misma, cosa que echábamos en falta en la propuesta de Gödel. El resultado de este análisis inevitablemente, debido a la dificultad tanto del problema como de la noción de intuición en sí misma, tiene un alcance muy limitado; demasiado, en mi opinión, para explicar el conocimiento de las entidades abstractas. Por motivos de simplicidad, centraremos nuestra atención en la posible aplicación de la intuición al conocimiento de los números[21].

Parsons parte de la distinción, ya expuesta, entre "intuition-that" e "intuition-of", es decir, entre la intuición proposicional (intuición del valor de verdad de ciertas proposiciones) y la intuición como captación o conocimiento de determinados objetos

[20] Sería cuestionable, y de hecho ha sido cuestionado en ocasiones, la caracterización de Maddy como "platonista" ya que su manera de entender la naturaleza de los objetos matemáticos dista mucho de la forma tradicional. Yo he optado en este trabajo por incluirla entre el grupo de los platonistas, aunque siempre teniendo en cuenta que se trata de un tipo de platonismo *anómalo*. En cualquier caso, en el capítulo siguiente quedarán, espero, más claras los motivos por los que la considero una platonista.

[21] Esta limitación no acarrea problemas porque nuestras críticas se centran en la noción misma, no en sus posibles aplicaciones.

(abstractos). A partir de esta distinción, Parsons analiza el uso que se ha dado al concepto a lo largo de la historia. La intuición proposicional, tal y como él la define, es un tema clave en la filosofía racionalista en general y en la filosofía de Descartes en particular. Según Parsons, la noción de una “idea clara y distinta” de Descartes es un claro ejemplo de “intuition-that”[22]. La “intuition-of” por su parte juega un papel primordial en los planteamientos de filósofos como Kant y Husserl.

Aparte de esta distinción Parsons establece otra no menos importante entre lo que él denomina “objetos abstractos puros” y “objetos cuasi-concretos”. Los objetos “cuasi-concretos” son objetos abstractos que dependen en gran medida de determinado tipo de objetos concretos. En palabras de Parsons, son “minimally abstract, since they are types of tokens which are concrete” (1980:109). Es decir, son objetos, como por ejemplo las expresiones lingüísticas, que aún siendo considerados como tipos o “types” (abstractos) fácilmente diferenciables de los “tokens” (concretos), dependen de alguna manera de la existencia y la ocurrencia de estos últimos. Por el contrario, los “objetos abstractos puros”, como por ejemplo los conjuntos o los números, no dependen de sus ocurrencias en tanto que “tokens” (la naturaleza de los números por ejemplo, en tanto que “objetos abstractos puros” no depende de la existencia o de la naturaleza de los numerales – entendidos éstos como instanciaciones concretas, como “tokens”).

Esta nueva concepción de la intuición matemática trae consigo la imposibilidad de intuir lo que hemos denominado “objetos abstractos puros”, es decir, Parsons niega que podamos tener intuición de los números naturales o de los conjuntos en sí mismos. El campo de actuación de la intuición matemática queda reducido a los “objetos cuasi-concretos”. De esta manera Parsons evita muchos de los problemas de la intuición matemática tal y como la desarrollaba Gödel, por medio de la analogía con la percepción. Pero su estrategia tiene un precio ciertamente alto: el alcance de la noción queda notablemente reducido, hasta el punto en que difícilmente puede explicar el conocimiento matemático.

Un motivo importante para adoptar esta restricción y una crítica por tanto a la noción de intuición matemática como captación de los objetos matemáticos es el

[22] En la misma línea la noción de intuición defendida por Sosa representa también, tal y como yo la he interpretado, un ejemplo de intuición proposicional. De hecho, Sosa se autodefine como un heredero de la tradición cartesiana y establece el *cogito* cartesiano como el ejemplo más claro de intuición filosófica.

problema de la incompletud de los objetos matemáticos[23]. Este problema está estrictamente relacionado con otro importante artículo de Benacerraf titulado "What numbers could not be"[24], aunque en realidad se trata de un problema antiguo.

Brevemente, el problema radica en que las propiedades esenciales de los objetos matemáticos y de las relaciones entre ellos, aspectos ambos básicos para el conocimiento matemático, son establecidas por las relaciones básicas del sistema o la estructura en la que estos objetos están inmersos. Las propiedades básicas de, por ejemplo, el número 2 no pueden ser aprehendidas independientemente de la estructura general de los números naturales (concretamente, las propiedades básicas del número 2 vienen dadas por los axiomas de Peano, axiomas básicos de la estructura general de los números naturales y que los define atendiendo a las relaciones entre ellos).

Pero si esto es así, en palabras de Parsons,

> how can mathematical intuition place objects 'before our minds' when these objects are not identifiable individually at all? (1980: 100)

Esta línea de pensamiento es la que, obviamente, impulsa las tesis estructuralistas. Ya dijimos en la introducción que no vamos a entrar en detalles acerca de este complejo problema y sus posibles soluciones, pero es importante tenerlo en cuenta ya que constituye una de las motivaciones básicas del programa de Parsons y juega un papel esencial en el desarrollo posterior de sus tesis (de corte marcadamente estructuralista). La motivación principal para la adopción de una postura de corte estructuralista es también la principal razón por la que Parsons restringe el uso de la intuición en matemáticas: el problema de la incompletud de los objetos matemáticos.

---

[23] Este es un problema muy importante para el realismo en matemáticas y a pesar de que no vamos a analizarlo con el detalle necesario durante este trabajo, nos encontraremos con él en varias ocasiones, especialmente en la segunda parte, cuando expongamos las críticas de Putnam al realismo a partir de la teoría de modelos.

[24] En este artículo Benacerraf parte de la posibilidad de reducir los números naturales a distintos conjuntos, dependiendo de si adoptamos la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel o la teoría de von Neumann y argumenta que es imposible decidir entre estas dos posibles reducciones (isomórficas entre sí). Véase el apartado dedicado a Maddy para una formulación más detallada del problema (concretamente, el apartado 2.3.6)

Para poder entender correctamente lo que Parsons tiene en mente cuando habla de "intuition-of" (que como vimos es el tipo de intuición necesaria para solucionar el problema epistemológico en matemáticas) vamos a seguir el ejemplo que Parsons utiliza, ya que sus tesis dependen en gran medida de la relevancia del mismo. Parsons propone que centremos nuestra atención únicamente en los aspectos sintácticos de un lenguaje imaginario formado por un único símbolo primitivo, '|', y cuyas expresiones (bien formadas) son cadenas arbitrarias compuestas únicamente de estos símbolos: |, ||, |||,… De esta manera, si interpretamos '|' como 0 y la operación de añadir nuevas barras a una cadena dada como la operación de sucesión, nos encontramos con que esta cadena de barras es isomórfica con el conjunto de los números naturales. Así, afirma Parsons, contamos con una interpretación "geométrica" de la aritmética, con la obvia ventaja de dejar el concepto de número (tanto cardinal como ordinal) a un lado. Dicho con otras palabras, el lenguaje básico propuesto por Parsons es un posible modelo para la aritmética.

Resulta evidente que la percepción ordinaria de una cadena de barras es una percepción de una sucesión de inscripciones concretas: de "tokens". Pero generalmente pensamos en dichos símbolos (las barras) como "Types", no estamos pensando en una barra en concreto sino en las barras en general (en distintos contextos, posiciones, etc). Este es un fenómeno absolutamente común, recogido por el lenguaje ordinario. Normalmente, por ejemplo, decimos que *oímos* o *vemos* palabras o frases y con esto queremos decir palabras o frases entendidas como "types" (no queremos, en estos casos, decir que oímos una ocurrencia de la palabra en particular, un "token", sino que oímos palabras como "types"). Pero, continúa Parsons,

> Perception of a string of stroke-tokens is not by itself an 'intuition' of a stroke-string type. One has to approach it with the concept of a type, first of all to have the capacity to recognize other tokens as of the same type or not. Something more than the mere capacity is involved, which might be described as seeing something as the type (1980:103)

Según esto, la intuición de un objeto es, para Parsons, lo que sucede cuando percibimos algo y, estando equipados con el concepto apropiado de un "type", lo *vemos* como un “type” determinado. Pero este proceso está presente no sólo en matemáticas o en lingüística, sino también en procesos de percepción ordinaria. De acuerdo con la descripción ofrecida, cuando percibimos un objeto cualquiera (concreto) y lo reconocemos como “este” o “aquel” objeto determinado, es decir, cuando podemos reconocerlo si lo volvemos a percibir en otra ocasión, aunque haya sufrido pequeñas modificaciones o esté situado en un contexto diferente, cuando podemos establecer relaciones de identidad entre los objetos (pertenecientes a un mismo “type”). Entonces, de acuerdo con esta interpretación, estamos intuyendo el objeto, estamos intuyendo el “type” (no sólo el objeto entendido como “token”).

En muchos casos, afirma Parsons, esta identificación de los “types” se lleva a cabo de una manera espontánea, sin aparente reflexión previa por parte del sujeto. Un caso claro, según él, es nuestra capacidad para entender el propio lenguaje ordinario. Somos capaces de identificar los “types” sin tener que reflexionar sobre ello,

> typically, the hearer of an utterance has a more explicit conception of *what was uttered* (e.g. what words) than he has of an objective identification of the *event* of the utterance. I believe that the same is true of some other kinds of universals, such as sense qualities and shapes. Indeed, in all the cases it seems not to violate ordinary language to talk of perception of the universal *as an object*, where an instance of it is present. This is not just an overblown way of talking of perceiving an instance as an instance....because the identification of the universal can be firmer and more explicit than the identification of the object that is an instance of it (1980:104. Cursiva del autor)

Resulta obvio por lo tanto que, de acuerdo con Parsons, la intuición matemática no debe ser considerada como una facultad epistémica aislada, propiedad exclusiva de las matemáticas. Muy al contrario, la intuición matemática debe ser entendida como un modo de conocimiento general, estrechamente relacionada con los conceptos por medio de los cuales describimos la percepción y nuestro conocimiento del mundo físico. Según esto, es no sólo posible sino además normal ejercitar la ‘facultad’ de la intuición matemática aún cuando no estamos conscientemente trabajando en matemáticas.

Es importante no confundir la intuición con un mero proceso de "generalización" a partir de percepciones "actuales". No alcanzamos la intuición de un "type" simplemente abstrayendo de un "token" particular, de una ocurrencia actual (no solamente posible) del objeto. Entre otras cosas, entender la intuición de esta forma limitaría de tal manera la noción que apenas tendría valor explicativo. La intuición de un objeto no tiene ningún sentido si no está al servicio del conocimiento proposicional acerca de dichos objetos. El verdadero objetivo, recordemos, es explicar cómo podemos conocer los objetos matemáticos de manera que estemos justificados para determinar la verdad o la falsedad de las proposiciones acerca de ellos. El objetivo es explicar el acceso epistémico a los objetos matemáticos de manera que podamos mantener los principios básicos de la semántica clásica. La cuestión es entonces ver hasta qué punto la noción de intuición matemática desarrollada por Parsons es capaz de garantizar el conocimiento de verdades de carácter general acerca de los objetos de la intuición y si dentro de estos objetos podemos incluir de alguna manera los objetos de las matemáticas.

Volvamos al ejemplo ofrecido por Parsons. Según él, contamos con un sencillo lenguaje que resulta isomórfico con el conjunto de los números naturales. Si añadimos lo dicho acerca de la intuición obtenemos conocimiento de cadenas análogas a los axiomas elementales de Peano (PA), según los cuales:

(PA1) 0 es un número natural ($N0$)

(PA2) Todo número natural, a, tiene un sucesor (que también es un número natural), denotado por a' ($\forall x\ (Nx \rightarrow Nx')$)

(PA3) No hay ningún número natural cuyo sucesor sea 0 ($\sim\exists x\ (Nx \wedge Nx' = 0)$)

(PA4) Si dos números naturales son distintos, entonces sus sucesores también lo son ($\forall x\ \forall y\ (Nx \wedge Ny \wedge x \neq y \rightarrow x' \neq y')$)

De esta forma, podemos re-interpretar PA en el sencillo lenguaje propuesto por Parsons[25]:

[25] En este punto, extraigo esta re-interpretación de PA de B. Hale y C. Wright (2002: 106)

(PA1') | es una cadena de barras ("| is a stroke string")

(PA2') Toda cadena de barras tiene un sucesor que también es una cadena de barras ("Every stroke string has a sucesor which is also a stroke string")

(PA3') | no es el sucesor de ninguna otra cadena de barra ("| is not the sucessor of any other stroke string")

(PA4') Distintas cadenas de barras tienen distintos sucesores ("Different strokes strings have different sucessors")

El reto es ahora ver cómo, utilizando la noción de intuición defendida por Parsons, podemos obtener conocimiento de verdades de carácter general acerca de los objetos de la intuición, como (PA1'-PA4'). En matemáticas, y en el conocimiento científico en general, necesitamos poder formular verdades de carácter general, verdades que podamos aplicar de manera directa a un mismo "tipo" de proposiciones u objetos. El problema es que la noción de intuición de Parsons depende de alguna manera en los "tokens", en las instanciaciones concretas (no generales) de los objetos.

Basta analizar por ejemplo PA2', según la cual cada cadena de barras puede ser extendida siempre con una barra más y por lo tanto representa, en palabras de Parsons "the weakest expresión of the idea that our 'language' is potentially infinite" (1980:105). Está claro que no podemos explicar la intuición de PA2' basándonos únicamente en la percepción de "tokens" actuales (ya que necesitaríamos probar la existencia de infinitos "tokens" actuales, es decir, de infinitos objetos concretos). Parsons introduce por ello la noción de *imaginación*,

> But if we imagine any string of strokes, it is immediately apparent that a new stroke can be added. One might imagine the string as a *Gestalt*, present all at once [...] Alternatively, one can think of the string as constructed step by step, so that the essential element is now succession in time... (1980: 106)

Si queremos que la intuición alcance los niveles de generalidad requeridos por el conocimiento matemático (entre otros) debemos introducir la noción de imaginación, teniendo además en cuenta que lo importante es imaginar una cadena de barras *arbitraria*. Imaginar una cadena de barras concreta no es suficiente para obtener generalidad, sería como basarnos en la percepción actual. Pero afirmar que debemos imaginar una cadena de barras arbitraria es ciertamente problemático; es necesario especificar un poco más lo que queremos decir por eso. Concretamente, según Parsons, debemos escoger entre dos maneras posibles de 'imaginar',

> There seems to be a choice between imagining *vaguely*, that is imagining a string of strokes without imagining its internal structure clearly enough so that one is imagining a string of n strokes for some particular n, or taking as paradigm a string (which now might be perceived rather than imagined) of a particular number of strokes, in which case one must be able to see the irrelevance of this internal structure, so that in fact it plays the same role as the vague imagining (1980: 106)

Tal y como Hale y Wright afirman (2002:107), no está claro cómo imaginando *vagamente* que una cadena puede ser ampliada por una barra | más nos puede brindar el conocimiento de que *cualquier* cadena puede ser extendida en una barra | más. En vez de esto, imaginar vagamente nos conduce a ver que *alguna* cadena ("some string or other") puede ser extendida. Pero esto no es suficiente, necesitamos que el conocimiento sea general, saber que *cualquier* cadena puede ser extendida en una | más.

La opción de tomar una cadena como paradigma considerando irrelevante su estructura interna me parece una opción más prometedora, aunque no libre de problemas. ¿Cómo sabemos o decidimos que la estructura interna es irrelevante? De nuevo, nos encontramos con el problema de la incompletud de los objetos matemáticos.

Por otro lado, el hecho de que podamos imaginar que una cadena puede ser siempre aumentada con una barra más no implica que esto sea "físicamente posible". El tipo de posibilidad que necesitamos es el de "posibilidad matemática", queriendo decir con esto que no estamos haciendo referencia a las capacidades del organismo humano. Parsons, al hablar de infinito potencial no se está refiriendo a una capacidad real, de nuestra mente, de ‘construir’ cadenas cada vez más largas. Pero, ¿a qué se refiere Parsons exactamente?, ¿qué tipo de modalidad está implícita en su noción de imaginación? Aquí, de nuevo nos encontramos con varias posibilidades. En última instancia, podemos reformular la cuestión y preguntar por las condiciones para la existencia de los “types”. Partiendo de la definición de “types” a partir de “tokens”, ¿qué necesitamos para establecer la existencia de los primeros? ¿Cuáles son las condiciones para que la imaginación nos conduzca a ellos, más allá de la mera percepción?

1. La respuesta más restrictiva sería decir que un “type” (de una cadena) existe sí y sólo sí hay *actualmente* un “token” de ese “type”. De esta forma, para poder afirmar que existen infinitos “types” o que podemos imaginar una cadena que se puede extender indefinidamente, necesitaríamos probar que existen infinitos “tokens”, que existen infinitas barras en el universo (no que puedan existir, sino que existen de hecho). Obviamente, esta respuesta resulta demasiado restrictiva.

2. En el otro extremo, podríamos afirmar que la existencia de los “types” es completamente independiente de sus instanciaciones, ya sean estas actuales o posibles. Es decir, que podemos acceder a los “types” (abstractos) y probar su existencia con total independencia de los “tokens”, o de los objetos abstractos. Esta es la afirmación del platonismo tradicional, y ya hemos visto los problemas a los que se enfrenta. Es precisamente para evitar esta respuesta por lo que Parsons ha desarrollado todo su programa

3. Por último, la respuesta más moderada consiste en afirmar que un “type” existe sí y sólo sí *podría* haber un “token” de ese “type”. Puede que existan “tokens”, objetos concretos, que no se hayan instanciado pero que podrían hacerlo. Esta es la respuesta que más se ajusta a las tesis de Parsons y a la adopción del concepto del “infinito potencial”. La imaginación, de acuerdo con esta tercera respuesta, cumple precisamente el rol epistemológico de suplantar en cierta manera a la percepción cuando se trata de “tokens” no instanciados, y de esta manera ofrecer la generalidad requerida en matemáticas.

A pesar de que esta tercera opción sea la más adecuada para los propósitos de Parsons, deja a su vez muchas cuestiones sin resolver. Wright y Hale, por ejemplo, señalan que aún aceptando que la imaginación pudiera servir de *puente* y que por medio de ella podamos por ejemplo concebir que cualquier cadena puede ser extendida siempre con una barra más, ¿qué determina lo que sería imaginable si nuestra capacidad de imaginación fuera extendida? La noción de imaginación es una noción demasiado vaga, o al menos así me lo parece, para llevar el peso del conocimiento matemático. Tal y como la concebimos es demasiado limitada, pero resulta difícil ver cómo podríamos liberalizarla sin presuponer para ello determinados "types".

Aparte de estos problemas acerca de la noción de imaginación, existen otras objeciones, más fundamentales, que hacen referencia a la analogía entre PA' y PA. Recordemos que la intuición de Parsons no es de utilidad para conocer los números (y por lo tanto PA), ya que se trata de objetos abstractos puros, que no dependen de ninguna manera de sus instanciaciones[26]. Por eso, la intuición queda limitada a la explicación del conocimiento de objetos cuasi-concretos, como las barras del ejemplo. La pregunta obvia es hasta qué punto el conocimiento de el sistema de cadenas de barras PA', puede brindarnos conocimiento de PA; hasta qué punto, garantizar la verdad de los enunciados de PA' es prueba suficiente de la verdad de los enunciados de PA.

Incluso si aceptamos que PA' constituye un modelo de la aritmética, desde un punto de vista matemático, las cadenas de barras son unos objetos un tanto especiales. El modelo PA' está formado por objetos "cuasi-concretos" y por lo tanto, dependen (aunque sea de una manera muy laxa) de sus instanciaciones concretas, que en este caso además son objetos concretos (|) de naturaleza espacial. Los objetos de los axiomas de Peano, por el contrario, constituyen una colección de objetos abstractos puros –los números naturales-, completamente independientes de los objetos concretos, por lo que es parte de su naturaleza el que los enunciados acerca de ellos puedan ser aplicados a cualquier cosa en la que podamos pensar, incluidos los objetos no espaciales. El

[26] Resnik (1997) por ejemplo, pone en duda la propuesta de Parsons, argumentando no entender porqué la relación entre types y tokens debe ser más fácil de entender (y de justificar) que la relación entre números y símbolos escritos (numerales). Pero olvida, en mi opinión, una de las distinciones de partida de Parsons: los types (como las barras del ejemplo) guardan cierta relación de dependencia con sus instanciaciones, son objetos cuasi-concretos; los números, por el contrario, no guardan este tipo de relación con los símbolos escritos. Por supuesto, esta distinción puede ser puesta en duda y a partir de ahí argumentar que efectivamente las dificultades son las mismas en ambos casos.

problema consiste en explicar cómo, si los cuatro axiomas principales pueden ser derivados de sus análogos acerca de cadenas de barras, pueden seguir gozando de ese carácter universal y por lo tanto ser aplicables a cualquier cosa pensable.

En suma, la dificultad está en que, incluso aceptando que pudiéramos explicar la verdad de PA' a través del conocimiento de las cadenas de barras entendidas como "types", no queda claro en qué podría ayudarnos esto a la hora de conocer la verdad de PA y el conocimiento de los objetos matemáticos, como los números. La propuesta de Parsons, asumiendo que fuera válida, explicaría el conocimiento de los objetos "cuasi-concretos", pero no la de los objetos "abstractos puros".

El propio Parsons acepta y reconoce estos problemas. De hecho, tras reconocer el carácter "especial" de los objetos de la intuición tal y como él los presenta, él mismo establece límites a su propuesta, aceptando que a lo más que podemos aspirar (si todo lo dicho fuera correcto) es a una "posición moderada":

> Perhaps our concept of matemátical intuition will not carry us beyond elementary syntax and maybe traditional geometry. Are we prepared to say, for example, that the *natural numbers* are objects of intuition? [...] intuition gives objects which form a model of arithmetic, and this model is as good as any, both for the foundations of arithmetic and for applications. But it may not be right to say that *the* natural numbers are objects of intuition, since intuition does not give a unique sequence to be "the" natural numbers, and the concept of number does not rule out as the 'intended model' objects that are not objects of intuition. (1980: 111. Cursiva del autor)

Lo cierto, en cualquier caso, es que intentar explicar el conocimiento matemático por medio de la intuición, en cualquiera de sus formas, no es en mi opinión una línea muy prometedora. En principio, la noción misma, aún tras los esfuerzos de Parsons, requeriría una definición mucho más sistemática para poder ser de utilidad explicativa. Al menos en lo que se refiere a la intuición construida sobre la base de la analogía con la percepción que es, como hemos dicho, la única que podría resolver el problema epistemológico para los platonistas. Bien es cierto que Parsons no pretende en ningún momento fundamentar el conocimiento de la aritmética, y mucho menos del resto de las matemáticas, sobre la base únicamente de la intuición. Aún si lo dicho aquí fuera cierto y la intuición resultara una facultad útil a la hora de explicar el acceso a los objetos abstractos, aún tendríamos que explicar muchas cosas, sobre todo cómo derivar el resto de los axiomas matemáticos a partir de los más básicos (justificar la inducción matemática, por ejemplo). Parsons plantea un sistema en clave estructuralista para dar explicación a algunos de estos problemas. No vamos a entrar en ellos aquí, nuestro interés se centra únicamente en ese *primer* momento, en el acceso a los objetos matemáticos, a partir del cual, en teoría, se derivaría el resto.

En cualquier caso, antes de concluir este capítulo y pasar a discutir otras posibles alternativas al dilema de Benacerraf-Field desde la óptica platonista, me gustaría hacer algunos comentarios breves pero importantes. En primer lugar, alguien podría opinar que la falta de concreción en la definición de la intuición no tiene porqué ser un problema, al fin y al cabo en el ámbito empírico funcionamos relativamente bien con una noción de percepción igualmente imprecisa. Sin embargo, a pesar de ser cierto que no tenemos una explicación convincente de cómo funciona la percepción, sí que tenemos muchos más elementos que nos permiten, por un lado, garantizar que efectivamente existe algún tipo de contacto entre nosotros y los objetos y, por otro, que los objetos físicos existen. Y tenemos la certeza (bueno, al menos, un grado alto de certeza) de que esos objetos existen *precisamente* porque somos capaces de percibirlos; porque nos afectan de alguna manera (los vemos, los olemos, etc). Este argumento no es concluyente contra los escépticos, pero es al menos indudable que tiene mucha fuerza.

En el caso de la intuición no ocurre nada similar. Ya dijimos que el sentido común no ratifica una ontología en matemáticas, pero sí en el mundo de los objetos físicos observables. Yo ahora mismo soy plenamente conciente de que estoy viendo un ordenador delante de mí, pocos filósofos (si estuvieran en mi habitación) dudarían de esto y aquellos con inclinaciones escépticas difícilmente dudarán de que estoy teniendo una experiencia sensorial de un ordenador delante de mí. De nuevo, no ocurre lo mismo con la intuición, donde ni siquiera somos capaces de decir *cuando* estamos intuyendo algo o *qué* es lo que estamos intuyendo (hablo de intuición de objetos, no proposicional). Por supuesto, nada de esto demuestra que no exista la intuición, pero sí indica, al menos, que la analogía con la percepción es problemática desde sus fundamentos mismos.

En segundo lugar, tal y como argumentaremos en las conclusiones, el problema del platonismo tradicional no está en la noción de intuición en sí misma, el problema está en sus suposiciones acerca de los objetos matemáticos. En sus suposiciones acerca de su naturaleza abstracta y lo que a partir de ahí podemos (y debemos) derivar y en sus suposiciones acerca de los compromisos ontológicos que tenemos que adoptar para justificar la verdad de los enunciados y las teorías matemáticas. Pero para justificar estas afirmaciones es necesario considerar otras alternativas y analizar los problemas que tienen que afrontar. Por ello, como dijimos, será en las conclusiones en donde presentaremos nuestros argumentos para defender estas ideas.

2

SOLUCIONES AL DILEMA DESDE LA ÓPTICA NATURALISTA

“Entia non sunt multiplicanda prater necesítatem”

Guillermo de Occam

2.1. Introducción

El mundo de lo abstracto, como hemos podido ir comprobando, está lleno de sombras, de misterios sin resolver, o lo que es peor, de misterios aparentemente imposibles de descifrar. Cuando intentamos comprender lo abstracto es casi inevitable preguntarnos si lo que leemos o escribimos tiene “realmente” algún sentido. ¿Necesitamos de verdad establecer la existencia de los objetos abstractos para explicar y comprender el mundo en el que vivimos? Al fin y al cabo estamos, al menos aparentemente, rodeados de entes físicos, concretos, “palpables” ¿por qué habría de existir, más allá de estos entes familiares y perceptibles, una realidad plagada de misteriosos entes?

La respuesta más fácil e inmediata es que, simplemente, sin ciertas entidades abstractas no sería posible entender ni explicar el mundo ordinario que nos rodea[1]. No es la respuesta más "romántica", pero sí la más convincente. Al menos en el caso de las matemáticas. De hecho, ésta es una posible formulación (obviamente no técnica y más bien simplista) de la "tesis de la indispensabilidad" de las matemáticas, desarrollada por Quine y por Putnam en una serie de artículos que ambos autores publicaron (por separado) en la segunda mitad del siglo pasado[2].

La tesis de la indispensabilidad de las matemáticas es probablemente el argumento más convincente a favor de la existencia de las entidades matemáticas y por lo tanto del platonismo. Cualquier intento de negar la existencia de las entidades matemáticas tiene que presentar, para ser mínimamente plausible, un argumento convincente en contra de la indispensabilidad de dichas entidades. Autores de corte nominalista, como por ejemplo Hartry Field (1980, 1989), dedican una gran parte de su trabajo a intentar demostrar que dicha tesis es falsa. Field centra sus esfuerzos en demostrar que los números no son necesarios para la ciencia, concretamente para la física (según él, se trata de meras ficciones, que hacen que nuestras teorías sean notablemente más sencillas pero cuya existencia no es necesaria). No vamos a entrar aquí en si consigue o no sus objetivos, pero el hecho de que gran parte de su obra (al igual que la de otros nominalistas) esté dedicada a desmontar esta tesis es indicativo de la importancia de la misma (y de la dificultad para negarla).

Defender la existencia de las entidades matemáticas porque sean indispensables para la ciencia (considerada como nuestra mejor teoría acerca del mundo) puede parecerle a alguien "tramposo". Al fin y al cabo, se trata de una justificación "externa" y le otorga el papel de "arbitro ontológico" a la ciencia. Además, no explica nuestro conocimiento de dichas entidades ni da detalle alguno (más allá del que aporta la ciencia) acerca de su naturaleza. Pero como hemos dicho, la formulación que aquí hemos dado de la tesis de la indispensabilidad es muy esquemática y simplista. La tesis

[1] Podríamos aquí preguntar cómo es posible que entidades tan diferentes y alejadas de lo físico como son las entidades abstractas o matemáticas puedan ser, no sólo útiles, sino necesarias para explicar el mundo de lo físico. No vamos a entrar aquí en el complejo problema de la aplicación de las matemáticas al mundo empírico. Simplemente quiero señalar que, al menos a primera vista, parece mucho más sencillo responder a esto desde la óptica naturalista (concretamente, por medio de la adopción del holismo quineano), puesto que no traza una línea clara divisoria entre las matemáticas y el resto de las ciencias.

[2] Véase especialmente, Putnam (1971) y (1975) y Quine (1948) y (1951)

de la indispensabilidad se encuentra en el eje de las teorías naturalistas acerca de las matemáticas y por eso, para poder comprender a estas últimas, debemos analizar con algo más de detalle en que consiste y cómo debemos entenderla.

Antes de comenzar sin embargo, quisiera hacer una aclaración. La tesis de la indispensabilidad, obviamente, no es propiedad exclusiva del platonismo, es posible acomodarla a una postura no-platonista[3]. En esta primera parte del trabajo, en la que analizamos los problemas epistémicos del platonismo, la introducción de las tesis naturalistas en general (no sólo de la tesis de la indispensabilidad) tiene como objetivo ver hasta que punto pueden ser de utilidad para resolver el dilema epistémico (pero siempre tomando como punto de partida las premisas platonistas).

En la segunda parte del trabajo, especialmente en las conclusiones, introduciremos de nuevo ciertas ideas naturalistas para el análisis del conocimiento matemático (y de la semántica) pero esta vez las tesis naturalistas estarán totalmente desligadas de la carga metafísica que supone el platonismo. De esta manera, estudiaremos de nuevo la posible utilidad del punto de vista naturalista para un tipo de realismo "liberado" de los "absolutismos" que impone el platonismo tal y como aquí lo estamos entendiendo.[4]

De esta manera, dentro del marco de esta primera parte, vamos a dedicar el primer apartado de este capítulo a la tesis de la indispensabilidad, tal y como fue planteada por Quine y por Putnam. Sin embargo, pronto veremos que dicha tesis no es suficiente para sustentar una teoría platonista ni para resolver el dilema epistémico ya que, de hecho, ni siquiera entra a considerarlo. Su introducción en esta primera parte del trabajo viene justificada por el importante (esencial) papel que juega en las tesis platonistas de corte naturalista. Concretamente, en las tesis desarrolladas por Penelope Maddy, a quien dedicaremos gran parte de este capítulo. Maddy defiende lo que ella misma denomina "set-theoretic realism". Una postura realista, centrada en la teoría de conjuntos, que pretende combinar lo *mejor* de las tesis de Gödel con lo *mejor* de las tesis de Quine. Es decir, en pocas palabras, una teoría que presta especial importancia al papel de la

[3] Un ejemplo claro de esto es el trabajo de G. Hellman (1989) quien, a pesar de aceptar los principios de la tesis de la indispensabilidad –y a pesar de defender el realismo semántico-, no acepta sus conclusiones y defiende por el contrario un tipo de constructivismo modal.

[4] Concretamente, liberado de la dicotomía abstracto-concreto y de la concepción de la realidad-matemática y no matemática- como una totalidad fija de objetos con la cual mantenemos una relación de correspondencia única y también fija.

percepción pero que adopta un punto de vista radicalmente naturalista (rechazando la necesidad de recurrir a la idea gödeliana de intuición) llegando a afirmar que ciertos objetos matemáticos, supuestamente abstractos, no lo son (los conjuntos, según ella, deben ser considerados objetos "reales", similares a los objetos físicos ordinarios, y, por lo tanto, captados por medio de la percepción)[5].

Las tesis de Maddy, aunque no han acabado de convencer a la mayor parte de los filósofos de las matemáticas (ni a mí) sobresalen por su gran originalidad. Sus argumentos revisten gran importancia dentro del contexto de este trabajo ya que es una de las filósofas que más directamente se ha enfrentado a los problemas planteados por el dilema de Benacerraf-Field.

Pero antes de entrar en los detalles de su propuesta, conviene dar una definición general del término naturalismo. Por naturalismo, no sólo en el ámbito de las matemáticas sino de una manera general, vamos a entender en este trabajo la unión de dos tesis básicas[6]:

1. Todo lo que existe está compuesto de entidades naturales, es decir, de las entidades postuladas por la ciencia. Además, las propiedades de dichas entidades naturales determinan todas las propiedades de las cosas, incluidas las personas. Las entidades matemáticas (y en general el ámbito de lo abstracto, incluido lo

---

[5] Maddy no es la única en defender una concepción de los conjuntos como objetos "ordinarios" (sujetos a las leyes y a las propiedades del espacio y del tiempo). En nuestro país, Lorenzo Peña (1985) ha desarrollado su propuesta "ontofántica", según la cual, todo ente es un conjunto (el conjunto de sus miembros) y los conjuntos comparten todos los atributos de los entes ordinarios: son espaciales, temporales y poseen causas y efectos. La principal razón por la que hemos centrado la atención en la propuesta de Maddy es que esta autora plantea sus tesis como una respuesta sistemática a las limitaciones del conocimiento en las matemáticas, problema central de este trabajo, mientras que Peña centra su interés principalmente en los aspectos ontológicos y lógicos.

[6] Esta definición, como todas las definiciones de términos filosóficos, no es unívoca. Ciertas definiciones, por ejemplo, incluyen el requerimiento del "monismo". Así, tenemos la ofrecida por Arthur Danto en la *Encyclopedia of Philosophy,* según la cual Naturalismo es

> A species of philosophical monism according to which whatever exists or happens is natural in the sense of being susceptible to explanation through methods, which, although paradigmatically exemplified in the natural sciences, are continuous from domain to domain of objects and events.

Siguiendo este tipo de definiciones en las que se introduce el requisito de "monismo" J. Katz (1990: 235-240) argumenta que no podemos incluir en la lista de defensores del naturalismo a autores –aparentemente tan naturalistas- como Quine o Aristóteles debido a su defensa de los objetos abstractos. En todo caso, deberíamos considerarlos como "pseudo-naturalistas". Nosotros no vamos a adoptar un punto de vista tan restringido del naturalismo en este trabajo y por lo tanto, según nuestra definición, tanto Quine como Aristóteles no son sólo filósofos naturalistas, sino que además son probablemente los dos filósofos que mejor ejemplifican esta postura.

posible), en caso de existir, estarán constituidas *sólo* por los elementos abstractos que la ciencia permita o postule.

2. Los métodos de justificación y de explicación en matemáticas son continuos, en algún sentido a determinar, con los de la ciencia.

La primera tesis es de carácter metafísico (u ontológico) mientras que la segunda es de carácter metodológico o epistemológico[7]. Tal y como lo expresan Linsky y Zalta, por naturalismo debemos entender,

> [T]he realist ontology that recognizes only those objects required by the explanations of the natural sciences. (1995: 525)

Quine es, por supuesto, uno de los grandes defensores del naturalismo en la filosofía contemporánea. En *Theories and Things* lo define como la conjunción de dos tesis: "The abandonment of first philosophy" y "the recognition that it is within science itself…that reality is to be identified and described" (1981:72)[8]. Para Quine, la filosofía y la ciencia forman partes ambas de una misma red ("web") y las matemáticas son aceptadas por él sólo en tanto sean necesarias para lograr los objetivos de esta red de conocimiento (ciencia/filosofía). Si aceptamos la ciencia como nuestra mejor teoría acerca del mundo, afirma Quine, tenemos necesariamente que aceptar la existencia de los objetos sobre los que esa teoría cuantifica.

2.2. Tesis de la indispensabilidad

La llamada tesis de la indispensabilidad fue formulada, como hemos dicho, por Quine y por Putnam y, a pesar de existir ciertas discrepancias en sus formulaciones, generalmente se denomina "Quine-Putnam's indispensability thesis". Nosotros, en este breve recuento de la tesis, vamos a seguir la costumbre general y obviaremos las

---

[7] Nos basamos aquí en la definición del término *Naturalism* ofrecida en, R. Audi (ed) *The Cambridge Dictionary of Philosophy* (1999:596) (2ª edición)

[8] Ver también Quine (1969), especialmente "Epistemology Naturalized" (69-91)

diferencias entre las formulaciones de ambos autores que en cualquier caso no revierten mayor importancia para nuestra línea argumental[9].

La tesis de la indispensabilidad parte, como es de suponer, de la aplicación de las tesis naturalistas y constituye el mejor argumento a favor del realismo, al menos, en relación a las matemáticas aplicadas. Muy brevemente, podemos desglosar la tesis en dos premisas y una conclusión:

> P1. Tenemos que comprometernos ontológicamente con todas la entidades que sean indispensables para el desarrollo (y la justificación) de nuestras mejores teorías científicas y únicamente con ellas.
>
> P2. Las entidades matemáticas son indispensables para el desarrollo de nuestras mejores teorías científicas
>
> C. Tenemos que comprometernos ontológicamente con las entidades matemáticas.

De acuerdo con Quine, las cuestiones ontológicas deben ser solucionadas a través de métodos científicos:

> Our acceptance of an ontology is, I think, similar in principle to our acceptance of a scientific theory, say a system of physics: we adopt, at least insofar as we are reasonable, the simplest conceptual scheme into which the disordered fragments of raw experience can be fitted and arranged. Our ontology is determined once we have fixed upon the over-all conceptual scheme which is to accomodate science in the broadest sense; and the considerations which determine a reasonable construction of any part of that conceptual scheme, for example, the biological or the physical part, are not different in kind from the considerations which determine a reasonable construction of the whole (1948: 16-17)

[9] Hablaremos aquí de los argumentos de Putnam en relación a la indispensabilidad, desarrollados principalmente en los años sesenta y setenta. Putnam, como señalaremos en la conclusión, ha cambiado sustancialmente su visión de esta tesis en los últimos años, llegando a afirmar que no es necesario comprometernos con una ontología determinada en matemáticas, ya que lo que resulta indispensable para la ciencia es la objetividad de la verdad matemática y ésta no tiene porqué requerir la existencia de unos objetos (y mucho menos de la naturaleza abstracta de dichos objetos).

Para Quine, establecemos los criterios ontológicos de una teoría preguntándonos por *lo que hay* ("what there is"), no analizando nombres o predicados. Es lo que él denomina criterio de compromiso ontológico ("criterion of ontological commitment"). El conocimiento, y con él nuestros métodos de justificación y confirmación, es holista (el famoso holismo de la confirmación de Quine). Los mismos criterios utilizados en la ciencia (empírica) para establecer la verdad de sus enunciados y la existencia de los objetos de los que habla son los que se utilizan en las matemáticas.

Las matemáticas y la ciencia (empírica) forman para Quine un todo indivisible, forman ambas partes de la red de creencias que conforman nuestro conocimiento del mundo ("web of beliefs"). Por eso, de la misma manera que los enunciados de las ciencias (empíricas) pueden ser refutados, también lo pueden ser los de las matemáticas o la lógica (aunque, debido a su carácter básico y general, se debe -siempre que sea posible- evitar modificar los principios de la lógica o de la matemática. Ambos se encuentran en el *centro* de la red y al modificarlos tendríamos también que cambiar muchos otros enunciados de la red).

De acuerdo con estos principios, al adoptar la mejor teoría científica del mundo, nos comprometemos con una ontología que incluye a los objetos matemáticos como parte esencial de esa teoría. Es decir, para Quine, la aceptación de la explicación científica del mundo conlleva irremediablemente la adopción del realismo (platonismo) en matemáticas. Al aceptar una teoría como nuestra mejor explicación del mundo tenemos también que aceptar la existencia de los objetos sobre los que dicha teoría cuantifica. Así, la tesis de la indispensabilidad no sólo afirma que las formalizaciones matemáticas son necesarias para la ciencia; al usar dichas formulaciones y la metodología de las matemáticas estamos presuponiendo también la existencia de los objetos matemáticos y la verdad de los principios matemáticos. Putnam expresa esta idea (de una manera muy poética), afirmando que adoptar una postura ficcionalista respecto a los objetos matemáticos es como,

> It is like trying to maintain that God does not exist and angels do not exist while maintaining at the very same time that it is an objective fact that God has put an angel in charge of each star and the angels in charge of each a pair of binary stars were always created at the same time! If talk of numbers and 'associations'

> between masses, etc. and numbers is 'theology' (in the pejorative sense) then the Law of Universal Gravitation is likewise theology. (1975: 74-5)

En su artículo (también editado en forma de libro) "Philosophy of logic" desarrolla estas ideas con más de detalle,

> I have been developing an argument for realism along roughly the following lines: quantification over mathematical entities is indispensable for science, both formal and physical; therefore we should accept such quantification; but this commits us to accepting the existence of the mathematical entities in question. This type of argument stems, of course, from Quine, who has for years stressed both the indispensability of quantification over mathematical entities and the intellectual dishonesty of denying the existence of what one daily presupposes (1971: 347)

Conviene señalar que, debido a que para ambos autores (en los escritos referidos) la ciencia y las matemáticas forman un todo indivisible, los objetos matemáticos están en el mismo nivel que los objetos teóricos que postula la ciencia (empírica), ya que nuestra mejor teoría científica del mundo cuantifica sobre ambos. Concretamente, Quine afirma que la lógica y la teoría de conjuntos (y con ella, todos los objetos matemáticos que pudieran ser reducidos a conjuntos) forman un continuo con la ciencia: sus objetos están a la par y ambas están sujetas a confirmación empírica.

Otro aspecto relevante de la tesis de la indispensabilidad es que todas las creencias matemáticas tienen carácter inferencial. No hay creencias no-inferenciales, creencias cuya verdad resulte "evidente" (esto, obviamente, es otra consecuencia del holismo de la confirmación de Quine y establece una diferencia clara con las tesis de los defensores de la noción de "intuición"). Una consecuencia directa de esto es la creencia en el carácter a posteriori del conocimiento matemático: ya que las matemáticas son equiparadas e integradas en el todo de la ciencia y los objetos matemáticos comparten naturaleza con los objetos teóricos postulados por la ciencia, el conocimiento matemático tiene que ser del mismo tipo que el científico, esto es, a posteriori.

Resumiendo, la tesis de la indispensabilidad de Quine y Putnam está básicamente constituida a por tres ideas básicas.

> 1.Indispensability: Referring to mathematical objects and invoking mathematical principles is indispensable to the practice of natural science
>
> 2. Confirmation Holism: The observational evidence for a scientific theory bears upon the theoretical apparatus as a whole rather than upon individual component hypotheses
>
> 3. Naturalism: Natural science is our ultimate arbiter of truth and existence (Resnik, 1997: 45)

Frente a estas tres tesis, que a su vez conforman la tesis de la indispensabilidad: indispensabilidad, holismo de la confirmación y naturalismo, caben varias posibilidades. Por supuesto la primera posibilidad sería aceptar la tesis de la indispensabilidad y por lo tanto el platonismo acerca de las matemáticas (al menos acerca de las matemáticas aplicadas). Veremos a continuación que esto implicaría tener que enfrentarnos a serias objeciones (aparte del problema epistémico).

Si por el contrario quisiéramos rechazar el argumento de Quine y Putnam tendríamos básicamente dos posibilidades. La primera es cuestionar la primera premisa y argumentar por lo tanto que las matemáticas no son indispensables para la ciencia. Esta es la línea de acción adoptada por gran parte de los filósofos nominalistas, notoriamente por Hartry Field, quien ha intentado demostrar que es posible hacer ciencia sin necesidad de presuponer la existencia de los números y por lo tanto sin suponer la verdad de los enunciados matemáticos. No entraremos aquí a analizar esta posibilidad ya que, por el momento, estamos intentando buscar una solución a los problemas epistémicos *desde* el platonismo (y obviamente, Field, que defiende el ficcionalismo, no es un platonista).

Sin embargo, dentro de las filas platonistas hay también muchos detractores de la tesis de la indispensabilidad, o al menos, muchos filósofos piensan que se trata de una tesis con un alcance muy limitado, que en ningún caso justifica un realismo con respecto a *todos* los objetos matemáticos (ni siquiera a gran parte de ellos)[10].

En primer lugar hay que tener en cuenta que la tesis de la indispensabilidad no puede en ningún caso sostener las propuestas platonistas por sí sola. Ni Quine ni Putnam ofrecen, en sus respectivas formulaciones de la indispensabilidad, una teoría o una explicación de nuestro conocimiento de esos objetos que, según ellos, la ciencia dictamina *tienen que* existir. Incluso si admitiéramos que efectivamente hay motivos suficientes para defender la existencia de los objetos matemáticos, ¿cómo los conocemos? ¿cómo tenemos acceso a ellos? Nos encontramos una vez más con el misterio del conocimiento de los objetos abstractos.

La tesis de la indispensabilidad se basa en la *necesidad* de las matemáticas en sus aplicaciones a la ciencia. Esto trae consigo varios problemas. Por un lado, no se da ninguna explicación de cómo es posible dicha aplicación: si aceptamos la definición platonista de objeto matemático como objeto abstracto: ¿cómo se explica su aplicación en el mundo de la ciencia empírica? Es más, ¿cómo se explica que objetos incapaces de relaciones causales sean no sólo aplicables, sino necesarios, para entender y explicar el mundo empírico, caracterizado precisamente por su carácter causal? Estos son temas sobre los que la tesis de la indispensabilidad permanece callada y, en mi opinión, sin darles una respuesta apropiada el alcance explicativo de la tesis se vería ciertamente reducido.

Ya dijimos en la introducción, al hablar de la distinción entre objetos abstractos y objetos concretos, que no todo el mundo acepta la definición estándar, según la cual los objetos matemáticos son abstractos en tanto están situados fuera del espacio y del tiempo y se diferencian claramente de los objetos postulados por la ciencia. De hecho Quine, en consonancia con su defensa del holismo, considera que los objetos de los que hablan los matemáticos no se diferencian sustancialmente de los objetos postulados por la ciencia teórica (como los electrones o las partículas cuánticas).

[10] Ver las conclusiones para una lectura alternativa de la tesis de la indispensabilidad según la cual lo indispensable es la objetividad del conocimiento matemático y no la existencia de determinados objetos. La indispensabilidad de las matemáticas nos conduce a tener que aceptar esta objetividad pero no implica un compromiso necesario con una ontología determinada. Este punto de vista es deseable para lo que yo denomino *realismo moderado* y obviamente requiere una nueva formulación de la verdad y los criterios de objetividad en matemáticas y el rechazo –o al menos la re-interpretación- del compromiso ontológico de Quine.

Algunos autores, notablemente como veremos Penelope Maddy, han intentado dar respuesta al problema de la aplicabilidad haciendo también uso de las nociones naturalistas para negar la definición platonista de los objetos matemáticos y afirmar que se trata (al menos algunos de ellos) de objetos concretos y por lo tanto capaces de establecer relaciones causales con nosotros y con los demás objetos (matemáticos o no). Otros autores afirman que los objetos matemáticos (abstractos) juegan un papel de *representación*, no interactúan con los objetos físicos, pero son capaces de *representar* sus propiedades y sus relaciones de una manera fiable. Pero ésta no parece una opción demasiado viable, principalmente porque no es capaz de explicar todas las aplicaciones de las matemáticas en las ciencias empíricas[11].

Lo que verdaderamente necesitamos, y no tenemos, es una explicación de la *relevancia* de las matemáticas para la ciencia, no basta con afirmar que los enunciados matemáticos son verdaderos o que *representan* correctamente los fenómenos físicos. Utilizando un ejemplo muy gráfico de Mark Balaguer[12], si dispongo de una teoría acerca de Marte que haga un uso indispensable de hechos acerca de Charles Manson, no puedo dar cuenta de esto simplemente afirmando que mis tesis acerca de Charles Manson son verdaderas. Necesito explicar qué relación hay entre Marte y Charles Manson. De la misma manera, necesito explicar qué relación hay entre los objetos matemáticos y el mundo empírico.

Este problema de la aplicación de las matemáticas en el mundo empírico, es uno de los grandes dilemas a los que tienen que enfrentarse todas las posturas, no sólo la platonista. De hecho, generalmente se asume que es un problema específico de las posturas no-realistas: si los objetos matemáticos no existen, si todo el lenguaje matemático resulta ser una ficción, ¿cómo es que encaja tan bien en el mundo empírico? ¿a qué se debe su utilidad? De la misma manera, si los objetos matemáticos son construcciones mentales, ¿cómo es que explican tan bien el mundo externo?[13] En mi opinión sin embargo, como hemos visto, los platonistas se enfrentan igualmente a serias dificultades para dar una respuesta satisfactoria al problema. Especialmente acuciante

[11] Véase Balaguer (1998: 111-112)
[12] Ibíd. (110-111)
[13] En mi opinión, las posturas constructivistas tienen menos problemas que las demás para explicar este fenómeno pero, en cualquier caso, lo analizaremos en la segunda parte de este trabajo. Por el momento simplemente quiero constatar que se trata de un problema serio que afecta a todas las posturas, con la notable excepción quizás de Maddy, cuyas tesis veremos a continuación.

resulta para aquellos que, como Quine y Putnam, justifican su platonismo por medio de la tesis de la indispensabilidad y por lo tanto en base a el carácter necesario de la aplicabilidad de las matemáticas a la ciencia empírica.

Otro problema asociado al anterior y desarrollado por Maddy (1997: 153-156) es la aparente divergencia entre los criterios epistemológicos aplicados a la ciencia empírica y a las matemáticas. De acuerdo con Quine, la ciencia no sólo ejerce el papel de "árbitro ontológico" respecto a las matemáticas sino que los objetos matemáticos deben ser equiparados a los de la ciencia teórica. Pero las suposiciones respecto a la existencia de objetos matemáticos en la ciencia (y la suposición pareja acerca de la estructura de la realidad física) no están a la par, epistemológicamente hablando, con las suposiciones acerca de la existencia de los objetos físicos ordinarios. En palabras de Maddy

> The standards for their introduction [of mathematical objects] are weaker, and their role in succesful theory lacks confirmatory force; they are at once favoured and trivialized. The problem is that this epistemic disanalogy undermines the ground-work of the original Quinean argument (1997: 156)

Para Quine, el tipo de evidencia para la existencia de los átomos es la misma que la disponible para la existencia de los objetos físicos ordinarios (como las mesas, los perros o los árboles). De esta manera, concluye que simplemente este tipo de evidencia es lo que la evidencia *es*, por lo que la evidencia para los objetos matemáticos tiene que ser, para Quine, este mismo (y único) tipo de evidencia. Esto choca frontalmente con las diferencias epistemológicas entre ambos ámbitos. En el ámbito empírico, para establecer la existencia (y determinar la naturaleza) de un objeto exigimos el cumplimiento de una serie de criterios, necesitamos una comprobación empírica de su existencia (por medio de observación directa o a través de experimentos de diversa índole en el caso de los objetos no-observables). Este tipo de criterios no se requieren en el caso de la introducción de objetos matemáticos. Los objetos matemáticos no están sujetos al mismo tipo de verificación experimental que los físicos[14].

[14] Véase Maddy (1996: 60-70), donde analiza el problema de la aplicación del continuo matemático a la física. Según ella, en la mayor parte de los casos, cuando los científicos utilizan teorías matemáticas

Podríamos objetar que Putnam –al menos en sus escritos de los años 70- cuenta con una respuesta convincente a esta crítica. Según él:

> In Mathematics […] there is an interplay of postulation, quasi-empirical testing, and conceptual revolution leading to the formation of contextually a priori paradigms. Mathematics is not an experimental science [….] yet the adoption of the axiom of choice as a new paradigm was an experiment even if the experiment was not performed by men in white coats in a laboratory. (1979: xi)

Estas afirmaciones sin embargo no resuelven el problema, en todo caso lo "suavizan". El propio Putnam acepta que las matemáticas no son una ciencia experimental, como mucho se trata de una ciencia que utiliza métodos de justificación "cuasi-empíricos" (no empíricos). Como él mismo afirma "Mathematics is much more a priori than physics". La diferencia y el problema se mantienen aún si aceptáramos esta definición: los criterios epistémicos empleados para la introducción de objetos matemáticos ("cuasi-empíricos" o no) son diferentes a los criterios empleados para la introducción de los objetos físicos (incluidos los teoréticos, como los agujeros negros o los electrones).

Por otro lado hay en la literatura otras dos objeciones que conviene señalar. La primera es que la tesis de indispensabilidad no tiene en cuenta, y por tanto no explica, el carácter *obvio* de las matemáticas elementales. Lo que en el apartado anterior denominábamos "conocimiento no-inferencial" y a lo que Gödel se refería cuando afirmaba que los principios básicos de la aritmética "force themselves upon us". Para Quine y Putnam, todo el conocimiento matemático es conocimiento inferencial (igual que el conocimiento científico en general). El conocimiento es holista, las matemáticas

---

(como la del continuo) las utilizan como "modelos" o "idealizaciones", no como verdades literales. Por lo tanto, aunque la teoría científica sea confirmada, eso no hará que las afirmaciones matemáticas utilizadas sean verdaderas *literalmente*. Estas "idealizaciones" no tienen que ser verificadas empíricamente para ser usadas. Los científicos trabajan habitualmente, por ejemplo, con la noción del espacio-tiempo continuo (según la teoría de la relatividad general), sin embargo, en la pág 66, Maddy afirma

> [I]t isn't clear that the literal continuity of space-time has been subjected to the kind of experimental verification scientists require of theoretical entities; it isn't even clear that the existence of continuum-many space-time points could be so tested.

Esta falta de confirmación empírica además no va a hacer que ni los matemáticos ni los científicos abandonen sus respectivas teorías (acerca del continuo o acerca de cualquier otra cosa). La afirmación de Quine choca, por ello, con las prácticas tanto de los matemáticos como de los científicos.

forman parte de una red, de un entramado donde todos los enunciados están interrelacionados.

La segunda objeción, íntimamente relacionada con la primera, es que la tesis de la indispensabilidad sólo da cuenta de una parte reducida de las matemáticas: las aplicadas; dejando fuera a las llamadas "matemáticas puras". Gran parte del conocimiento matemático no tiene aplicación directa en la ciencia empírica. Áreas de conocimiento enteras tales como el álgebra abstracta, no tienen cabida en la tesis de la indispensabilidad. Pero de hecho estas partes de la matemática tienen *significado*, a pesar de no poder ser aplicadas, sus enunciados tienen sentido, ¿cómo podemos dar cuenta de este hecho? Además, es posible que partes que en principio no son aplicables a la ciencia lo sean en un futuro, ¿adquirirían entonces estatus ontológico los objetos de los que habla?, ¿adquirirían significado los enunciados? Obviamente esto no tiene mucho sentido.

La tesis de la indispensabilidad choca en muchos aspectos con las prácticas habituales de los científicos y de los matemáticos, que no esperan la confirmación de los primeros para desarrollar sus teorías o para considerar sus objetos "existentes".[15]

Aparte de estas dificultades, más o menos técnicas, es posible argumentar que la tesis de la indispensabilidad le otorga un papel a la ciencia "desmesurado". Personalmente, a pesar de compartir los principios básicos del naturalismo y coincidir con estos autores en que sería deseable encontrar una explicación de los objetos matemáticos en clave naturalista, no puedo evitar sentirme incómoda con la afirmación de que la ciencia es (o ha de considerarse como) el "arbitro ontológico" tanto de los objetos ordinarios como de los abstractos. "Sólo existe aquello que sea postulado por la ciencia", ¿no estamos con esto otorgándole un carácter infalible a la ciencia (y a los científicos) que en ningún caso parece poseer? Es cierto que la ciencia representa nuestra mejor explicación del mundo, pero eso no excluye otras formas de conocimiento y, en ningún caso, la hace infalible.

Por último, como ya hemos mencionado, queda aún una posible objeción a la tesis de la indispensabilidad (señalada, entre otros, por el propio Putnam en sus escritos de

[15] El caso de la lógica merece una atención especial ya que representa un contraejemplo bastante claro al holismo de la confirmación de Quine. Con excepción de la "lógica cuántica", ninguna evidencia empírica ha sido nunca utilizada para sugerir modificaciones o para buscar lógicas alternativas.

los últimos años) que desarrollaremos en las conclusiones. Según esta última objeción, muy brevemente, lo que la tesis de la indispensabilidad exige es la objetividad de las matemáticas, pero no hay razón para tener que aceptar una ontología determinada en las matemáticas. La ciencia, tal y como yo lo veo, no exige para su realización que aceptemos la existencia de los objetos matemáticos, de la misma manera que exige la existencia de los objetos físicos. Por supuesto, argumentar a favor de esta postura no es sencillo básicamente por dos razones. Por un lado, tenemos que explicar como obtener la objetividad de la verdad matemática sin que los objetos de los que los enunciados matemáticos hablan existan. Esto resulta más difícil aún si lo que pretendemos es obtener una verdad *literal* y no meramente una verdad *ficticia*. Por otro lado, tendremos que modificar el famoso compromiso ontológico de Quine, según el cual la aceptación de la verdad de un cuantificador existencial implica necesariamente el compromiso ontológico con los objetos sobre los que se cuantifica.

Para solucionar ambos problemas es posible seguir dos líneas argumentales (más o menos paralelas y compatibles, pero independientes entre sí). O bien diferenciar entre el compromiso existencial y el ontológico, aceptando el primero pero no el segundo en el caso de las matemáticas, de manera que los objetos matemáticos puedan ser considerados, usando la terminología de Azzouni (2004), "ultrathin" (su existencia, aunque *débil*, garantiza la verdad literal de los enunciados matemáticos, pero no conlleva la adopción de los compromisos ontológicos que hacen del platonismo una posición insostenible). O bien podemos argumentar, siguiendo a Putnam (2001), que es posible diferenciar distintos *usos* del término *existir*, en contra de la interpretación unívoca del término que utilizaba Quine.

En cualquier caso, a pesar de todo lo dicho, la tesis de la indispensabilidad sigue siendo uno de los principales argumentos (o el principal) a favor del platonismo. Aunque los problemas son abundantes, es muy difícil refutarla convincentemente. Para ello tendríamos, no sólo que demostrar que tal y como está expuesta es errónea (eso, creo, lo hemos logrado) además, tendríamos que demostrar que las intuiciones sobre las que se erige son erróneas: que los objetos matemáticos (especialmente los números) no son efectivamente necesarios para la ciencia y que la verdad de los enunciados no implica la existencia de los objetos sobre los que habla. Así, aunque en mi opinión la tesis de la indispensabilidad no representa un argumento definitivo a favor del platonismo y de la existencia de los objetos matemáticos, es innegable que es una tesis muy difícil de rechazar. La propuesta que presentaré en las conclusiones no es más que un intento de desarrollar posibles alternativas ante las limitaciones del platonismo, pero lo cierto es que tal y como está no deja de ser más que una posible (pero prometedora) línea de investigación, que tendrá que salvar aún muchas objeciones para lograr desbancar a la interpretación clásica de la indispensabilidad como el argumento más poderoso a favor de la existencia (necesaria) de los objetos matemáticos.

2.3. Penelope Maddy

La propuesta desarrollada por Maddy en su libro *Realism in Mathematics* (1990) y en diversos artículos durante la década de los 90 es sin duda una de las más originales de los últimos años. Quizás por eso mismo existe una cierta tendencia a rechazarla sin analizarla con detalle. Ella misma ha cambiado sustancialmente sus puntos de vista en los últimos años, especialmente a raíz de la aparición de *Naturalism in Mathematics* (1997). Es en su primera época sin embargo en la que desarrolla las tesis por las que ha conseguido un sitio de honor entre los filósofos de las matemáticas. En ellas nos centraremos porque además, en ese primer trabajo, Maddy intenta dar una respuesta directa al dilema de Benacerraf.

El aspecto de su postura que más llama la atención es, sin duda, su afirmación de que ciertos objetos matemáticos son concretos. Los conjuntos, para ella, no son entidades abstractas, tal y como el platonismo tradicional nos ha hecho creer. Por el contrario se trata de entidades concretas, situadas en el espacio y en el tiempo y capaces de entablar relaciones de carácter causal. Al ser concretos además, Maddy argumenta que conocemos estos objetos matemáticos no a través de una misteriosa facultad análoga a la percepción, sino directamente a través de la percepción. Somos capaces de *percibir* los conjuntos.

Pero para entender correctamente los motivos que le llevaron a desarrollar su teoría y para poder a su vez comprender sus ideas básicas, es necesario, creo, situar a Maddy en el contexto en el que surgieron sus tesis. Podemos leer la propuesta de Maddy a raíz de una de las objeciones a la tesis de la indispensabilidad: su incapacidad para explicar el conocimiento no inferencial. A partir de ahí, lo que intenta es, sin renunciar a la indispensabilidad y sobre todo al naturalismo, explicar el conocimiento de los axiomas básicos de las matemáticas. En otras palabras, Maddy propone un punto de vista que podríamos calificar de intermedio entre las tesis de Gödel y las de Quine. De ambos autores coge lo que ella considera positivo e intenta evitar sus limitaciones. De esta manera llega a lo que denomina "*Compromise Platonism*".

2.3.1 Platonismo de Compromiso

Maddy reconoce en numerosas ocasiones su gran deuda con las tesis de Gödel. De él extrajo, según ella misma afirma, la concepción de las matemáticas en analogía con las ciencias empíricas. De él extrajo también la justificación del conocimiento matemático como "Two tiered", es decir, compuesta por dos *momentos* claramente diferenciables: uno que conforma la base intuitiva y otro de carácter exclusivamente teórico. En palabras de Maddy:

> The most primite truths are intuitively given, obvious; the more theoretical hypotheses are justified extrinsically, by their consequences, by their ability to systematize and explain lower-level theory, and so on (1990: 107)

La gran diferencia entre Gödel y Maddy radica en la manera de entender el primero de estos *momentos*. Ambos autores coinciden en que los principios elementales de las matemáticas (por ejemplo, los principios básicos de la aritmética, los axiomas de Peano o los axiomas básicos de la teoría de conjuntos), los que componen la parte "intuitiva" del conocimiento, resultan "evidentes". Gödel expresa esta idea afirmando que los principios básicos (de la aritmética) "force themselves upon us"; Maddy por su parte ahonda en esta idea al afirmar que la base del conocimiento matemático es el sentido común ("common sense"). La diferencia, como hemos dicho, estriba en la explicación que dan a este fenómeno: Gödel justifica este primer momento por medio de la facultad de la intuición, Maddy, como veremos, defiende que todo parte de nuestras creencias perceptuales[16].

En cualquier caso, para ambos autores, de este primer *momento* del conocimiento resulta una amplia base de principios que conforman las verdades "primitivas" sobre las que se asienta el conocimiento matemático general. A partir de esta base desarrollamos el resto de los axiomas y de los principios por medio de un trabajo puramente formal o teórico. Obviamente, este segundo *momento* es también muy difícil de explicar y justificar, la propia Maddy ha dedicado gran parte de su trabajo a desarrollar una explicación de nuestros métodos de introducción y de evaluación de nuevos axiomas[17]. En cualquier caso, en este trabajo nuestro interés se centra en explicar el acceso a los objetos matemáticos y, por lo tanto, nos concentraremos en el primero de estos *momentos*.

La gran crítica que Maddy le hace al programa de Gödel es su falta de "rigor científico", la falta de fundamentos científicos para su problemática (pero central) noción de intuición. Ya vimos en el apartado anterior que Maddy no está ni mucho menos sola en esta crítica, casi todos los comentadores de Gödel admiten que su noción de "intuición matemática" no ha podido ser desarrollada con el rigor necesario, por lo que sigue siendo una facultad *misteriosa*. A pesar de esto, Maddy considera que la propuesta de Gödel tiene grandes atractivos que no deben ser pasados por alto. Entre las virtudes que ve en la postura de Gödel y que por lo tanto aspira a conservar cabe destacar que:

1. Es compatible con la semántica de Tarski para el discurso de la teoría de conjuntos
2. Se acomoda plenamente al punto de vista pre-filosófico de la mayor parte de los matemáticos
3. Evita el misterio de cómo es posible combinar las premisas matemáticas con las físicas de manera que podamos extraer consecuencias susceptibles de ser testadas por la ciencia (física)

---

[16] La intuición, como veremos, también juega un papel importante en la propuesta de Maddy, pero parte de los datos recibidos a través de la percepción. No es en ningún caso la facultad que defiende Gödel.
[17] Véase Maddy (1997) y (1988)

4. No requiere ningún tipo de reforma en la teoría de conjuntos (que es la que interesa a Maddy por considerarla, como veremos, fundamento del resto de las matemáticas)

Maddy acepta la idea de la analogía entre ciencias empíricas y matemáticas y la lleva hasta sus últimas consecuencias. No tenemos que desarrollar una facultad de conocimiento análoga a la percepción en el caso de las matemáticas: la percepción misma hará el trabajo. Por supuesto, para esto, es necesario modificar la naturaleza de los objetos matemáticos. Concretamente, Maddy renuncia al carácter abstracto de los mismos (al menos de algunos de ellos). De esta manera, consigue evitar el aura de misterio que rodea a la intuición y aporta (si de verdad su teoría se sostuviera) una explicación en clave naturalista de nuestro conocimiento matemático. En otras palabras, ofrecería una solución directa al dilema epistémico planteado por Benacerraf[18].

Por otro lado, Maddy adopta varios elementos (y rechaza otros tantos) de la teoría de Quine y, concretamente, de las tesis de la indispensabilidad de Quine y Putnam. La principal afinidad con las tesis de Quine es el empeño de Maddy de desarrollar una teoría que respete los principios naturalistas. Maddy adopta la metodología naturalista y esto le lleva a aceptar la tesis de la indispensabilidad: los objetos matemáticos son necesarios para el desarrollo de nuestra mejor explicación científica del mundo y, debido a esto, su existencia queda demostrada. Sin embargo, rechaza algunos elementos esenciales, especialmente los relacionados con el holismo de la confirmación, tanto de esta tesis como de la teoría de Quine en general.

Maddy considera que uno de los puntos flacos de la tesis de la indispensabilidad es la imposibilidad de explicar lo que antes denominábamos el primer *momento*, es decir, la imposibilidad de dar cuenta del carácter obvio o intuitivo de gran parte de las verdades sobre las que se asienta el conocimiento matemático (las llamadas “primitive truths”). Para Quine y Putnam, como vimos, el conocimiento forma una inmensa red en la que todas las creencias están conectadas (el famoso “holismo de la confirmación”) y las matemáticas no están exentas de esta regla: no existen las creencias no inferenciales

[18] Debido a su rechazo del carácter abstracto de los conjuntos, muchos autores consideran que la postura de Maddy no encaja en el platonismo. Ciertamente, no encaja en el platonismo tradicional, pero nosotros seguiremos denominándola platonista, aunque teniendo siempre en mente que se trata de un platonismo *anómalo*

(u obvias). Esto, según Maddy, choca frontalmente con la práctica diaria de los matemáticos y con nuestras propias intuiciones y por lo tanto lo rechaza.

Una segunda consecuencia del holismo de la confirmación de Quine que Maddy rechaza es la concepción de las matemáticas como parte de la ciencia. Para Maddy las matemáticas son una ciencia "aparte" y por lo tanto, posee sus propios métodos de justificación (distintos de los métodos de justificación del resto de las ciencias). Este punto, como veremos, es criticado por algunos comentadores ya que otorga a los matemáticos la capacidad de legislar sobre sus propios resultados, sin tener que dar cuenta (al menos no necesariamente) al resto de las ciencias.

Resumiendo, Maddy adopta la metodología naturalista (y con ello la tesis de la indispensabilidad) pero rechaza carácter holista del conocimiento que Quine defiende. Sumando estos aspectos a los comentarios referentes a la propuesta de Gödel, llegamos al llamado "compromise Platonism" que en pocas palabras,

> From Quine/Putnam, it takes the indispensability arguments as supports for the (approximate) truth of classical mathematics. From Gödel, it takes the two-tiered analysis of mathematical justification. But to provide a complete picture, compromise platonism owes a replacement for Gödel's intuition; in deference to naturalism, this replacement must be scientifically feasible. (1990: 178)

La propuesta de Maddy por lo tanto, se asienta sobre los siguientes elementos (algunos de ellos ya los hemos ido viendo, otros los desarrollaremos a continuación):

1. Realismo del sentido común ("common sense realism"*)*. Maddy acepta la existencia de los objetos ordinarios y concretamente parte del denominado "realismo directo" ("direct realism"*)*
2. Naturalismo. No sólo en tanto acepta el principio de la indispensabilidad sino como metodología general. Maddy busca desarrollar una teoría del conocimiento de los principios básicos de las matemáticas en clave naturalista
3. Rechazo de la caracterización de objeto matemático del platonismo tradicional. Maddy afirma que ciertos objetos matemáticos (concretamente los conjuntos)

son de naturaleza “concreta”, es decir, están situados en el espacio y en el tiempo y son capaces de establecer y participar en relaciones causales.

4. Con todos estos elementos llegamos al denominado “set theoretic realism”, en el que se otorga un papel fundacional a la teoría de conjuntos y se estudian sus elementos como objetos concretos, susceptibles de ser percibidos.
5. Los números son, para Maddy, propiedades de los conjuntos; de la misma manera que, por ejemplo, la longitud es una propiedad de los objetos físicos.

2.3.2. Realismo del sentido común

La forma más *básica* de realismo es la que nos dicta el sentido común, según el cual los objetos con los que nos encontramos todos los días existen. La cama donde dormimos todas las noches existe, de la misma manera que existen los perros, los árboles o el café del desayuno. Si extendemos un poco más el alcance del sentido común podemos llegar a conclusiones un poco más arriesgadas, y por lo tanto más interesantes, podemos concluir que somos capaces (en general) de percibir los objetos que nos rodean y que la información que recibimos a través de nuestros órganos sensoriales se corresponde con la realidad.

Esta segunda afirmación nos aproxima a las tesis del llamado “realismo directo”, del que Maddy parte. Según este tipo de realismo, somos capaces de percibir directamente los objetos de nuestro entorno y no solamente ideas o representaciones de los mismos. No percibimos los datos de los sentidos (“sense data”), percibimos la realidad y los objetos que la componen. Así, en este preciso instante yo estoy percibiendo que hay un ordenador portátil delante de mí, no estoy percibiendo una representación del portátil que hay delante de mí. De la misma manera, estoy percibiendo sus propiedades (pequeño, gris, no muy ligero, etc.), no las propiedades de la representación de mi portátil.

En este trabajo no voy a entrar en los detalles de este tipo de realismo y sus diferencias con el llamado realismo representacionalista. En realidad, las teorías de Maddy podrían ser formuladas a partir de este último, pero en cierta medida sus tesis resultarían más problemáticas. Hay que tener en cuenta que lo que Maddy está buscando es una noción fuerte de la percepción, ya que sobre ella va a levantar toda su propuesta. Su objetivo es justificar nuestra creencia en las verdades más básicas de las matemáticas a través de la percepción y para ello, es conveniente contar con una percepción no sólo fuerte, sino también fiable. De esta manera, tiene que ser una noción lo suficientemente poderosa y flexible como para poder integrar la percepción de los conjuntos (elementos básicos de las matemáticas, como veremos) y para eliminar la posibilidad de la ilusión (y del escepticismo).

Ya hemos dicho que los principios elementales de las matemáticas resultan obvios o evidentes y por lo tanto necesitamos asegurar que la percepción no nos va a conducir a errores o ilusiones. Necesitamos una noción de percepción según la cual lo que percibimos (realmente) existe: "what is perceived in this sense is really there" (1990: 50) y por lo tanto nuestras creencias perceptuales nos pueden conducir a verdades.

Esta es precisamente una de las ventajas del realismo directo frente al representacionalista: ofrecernos una noción de la percepción lo suficientemente fuerte como para despejar las dudas escépticas y rechazar la posibilidad de ilusión. Al percibir directamente un objeto (y no su representación), podemos estar seguros de que ese objeto existe y de que (al menos la mayor parte de) nuestras creencias perceptuales acerca de él son correctas[19].

Para adquirir creencias perceptuales acerca de un objeto físico (por ejemplo, un árbol) es necesario que se den las siguientes condiciones:

> For Steve to perceive a tree before him is for there to be a tree before him, for him to gain perceptual beliefs, in particular that there is a tree before him, and for the tree before him to play an appropriate causal role in the generation of these perceptual beliefs (1990: 51)

Es decir, para que Steve perciba que hay un árbol delante de él tiene que haber efectivamente un árbol delante de él pero, además, Steve tiene que adquirir creencias perceptuales y el árbol por su parte debe ejercer un papel causal en la generación de

[19] Por supuesto, esto no elimina la posibilidad de error en las percepciones, pero si reduce considerablemente la veracidad de los argumentos escépticos.

dichas creencias. Para Maddy además, estas creencias perceptuales son no-inferenciales (cada creencia está generalmente compuesta de muchas otras, pero no se extraen unas de otras; cada creencia perceptual es en este sentido, "directa") y no necesariamente conceptuales o lingüísticas (no percibimos una representación o una idea del objeto, sino el objeto mismo, de esta manera nuestra creencia perceptual puede ser previa a la conceptualización). [20]

Maddy desarrolla toda una teoría en clave neurofisiológica acerca de cómo se produce exactamente la percepción basándose en los trabajos de autores como Piaget, Hebb o Pitcher. Los detalles de dicho proceso no son relevantes para nosotros. A riesgo de simplificar excesivamente, Maddy extrae de estas teorías la idea de "detectores de objetos" neuronales, detectores que los humanos desarrollamos a partir de la experiencia sensorial (tras un proceso de aprendizaje) y que nos permiten percibir los objetos físicos como entes independientes y estables. Así, estos detectores son los responsables de nuestros conceptos acerca de los objetos: la percepción directa de un objeto causa una reacción determinada en la retina, pero el concepto de objeto físico en sí es desarrollado a través de los llamados "detectores de objetos" (que vienen a ser asociaciones celulares a nivel neuronal).[21]

2.3.3. Papel fundamental de la teoría de conjuntos

A lo largo de nuestra discusión hemos señalado en varias ocasiones que Maddy aplica su teoría de la percepción a determinados objetos matemáticos: los conjuntos. De hecho denomina su postura como "set theoretic realism". Resulta obvio que le otorga un papel primordial a la teoría de conjuntos. De hecho, como veremos, para ella los números son propiedades de los conjuntos.

---

[20] Una creencia perceptual puede influir en otra, pero no inferencialmente. El componente no lingüístico de las creencias perceptuales puede resultar chocante, pero se irá clarificando, espero, cuando veamos el papel que juega la intuición. En cualquier caso, encontramos referencias sobre este aspecto también en Armstrong, (1973) capítulos 2 y 3

[21] Estos detectores se desarrollan por medio de un proceso de aprendizaje, en el que la niña va adquiriendo los conceptos de los objetos gracias a la repetida interacción con los mismos.

Maddy analiza en profundidad, en *Naturalism in Mathematics*, el papel (fundamental) que la teoría de conjuntos juega en nuestro conocimiento matemático[22]:

> The force of set theoretic foundations is to bring (surrogates for) all mathematical objects and (instantiations of) all mathematical structures into one arena –the universe of sets- which allows the relations and interactions between them to be clearly displayed and investigated

Además, según Maddy, la teoría de conjuntos funciona como tribunal último para cuestiones de existencia matemática y de prueba,

> [I]f you want to know if there is a mathematical object of a certain sort, you ask (ultimately) if there is a set theoretic surrogate of that sort; if you want to know if a given statement is provable or disprovable, you mean (ultimately), from the axioms of the theory of sets (1997: 26)

Por lo tanto, si conseguimos demostrar que los conjuntos existen y desarrollamos una teoría de nuestro conocimiento de ellos (a través de la percepción), podremos extraer a partir de ahí la existencia y el conocimiento del resto de los objetos matemáticos (esto formaría parte del segundo *momento*, el teórico[23]). De hecho, Maddy "asume" la existencia de los conjuntos ya que para ella se trata de objetos pertenecientes al mundo ordinario o empírico y, por el realismo del sentido común, estamos legitimados a aceptar su existencia. Además, Maddy hace uso de la tesis de la indispensabilidad de Quine y Putnam para demostrar que las entidades matemáticas, en concreto los conjuntos, existen. Para ser exactos, Maddy reformula dicha tesis, tal y como hemos dicho, de manera que son las propias matemáticas las que determinan lo que sea o no indispensable (y por lo tanto, lo que exista o no). Su objetivo (y el nuestro, en esta parte del trabajo) es, asumiendo que existen, explicar nuestro acceso a ellos.

---

[22] En este libro Maddy ha modificado muchos aspectos de su propuesta inicial, que es la que analizamos aquí, pero el papel fundamental de la teoría de conjuntos es común en toda su obra.

[23] Por este motivo, porque estamos interesados en el primer momento y no en el segundo, no entraremos a valorar hasta qué punto sería posible, aún asumiendo que efectivamente podemos percibir los conjuntos, derivar a partir de ahí el resto del conocimiento matemático.

2.3.4. Los conjuntos como objetos concretos

Hemos dicho que Maddy toma como punto de partida el realismo del sentido común, que versa sobre los objetos ordinarios, pero en realidad su intención es *traer* el conocimiento matemático al ámbito del sentido común,

> I intend to reject the traditional platonist's characterization of mathematical objects: I will bring them into the world we know and into contact with our familiar cognitive apparatus. (1990: 48)

Nuestro conocimiento de los conjuntos no proviene de las formas ideales platónicas, ni de alguna misteriosa facultad epistémica; muy al contrario, se deriva de ciertos eventos físicos, de procesos y cambios en nuestro sistema nervioso que resultan en un proceso de percepción. De la misma manera que, según Maddy, contamos con "detectores de objetos" neuronales a través de los cuales somos capaces de obtener el concepto de un objetos físico (independiente y estable), tenemos también un "detector de conjuntos" neuronal que nos permite obtener el concepto de un conjunto (independiente y estable)[24]. Maddy ilustra su tesis con un ejemplo muy gráfico,

> Steve needs two eggs for a certain receipe. The egg carton he takes from the refrigerator feels ominously light. He opens the carton and sees, to his relief, three eggs there. My claim is that Steve *has perceived a set of three eggs***.** By the account of perception just canvassed, this requires that there be a set of three eggs in the carton, that Steve acquire perceptual beliefs about it, and that the set of eggs participate in the generation of these perceptual beliefs in the same way that my hand participates in the generation of my belief that there is a hand before me when I look at it in good light (1990: 58. Cursiva mía)

[24] Esta capacidad para formar el concepto de conjunto, a través del desarrollo del detector de conjuntos, es adquirida a través de un proceso de aprendizaje. Maddy dedica bastante espacio a analizar este proceso y lo hace siguiendo las pautas dictadas por las teorías de Piaget y de Hebb

Maddy está afirmando, en pocas palabras, que podemos percibir *conjuntos* de objetos físicos de la misma manera que podemos percibir los objetos físicos.

> In the case of sets, just as in the case of physical objects, it is the presence of a complex neural development that bridges the gap between what is causally interacted with and what is perceived. (1990: 66)

Es decir, podemos adquirir creencias perceptuales acerca de conjuntos de objetos y, tal y como muestra el ejemplo, las creencias numéricas son una parte esencial de las creencias perceptuales acerca de los conjuntos (ya vimos que una creencia perceptual puede estar formada por varias creencias, aunque todas ellas son no-inferenciales). Las creencias numéricas, afirma Maddy, pueden influir en las perceptuales y viceversa (por ejemplo, el que haya suficientes huevos para hacer la receta puede hacer que los huevos *parezcan* más grandes).

Por lo tanto, las creencias numéricas, al formar parte de las creencias acerca de los conjuntos, son también perceptuales y, lo que es más, para Maddy, las creencias numéricas son creencias acerca de un conjunto. Siguiendo su ejemplo, Maddy afirma que Steve adquiere varias creencias perceptuales: que hay un conjunto de huevos delante de él, que ese conjunto tiene tres elementos y que a su vez tiene varios miembros con dos elementos (subconjuntos). Estas creencias forman parte de una colección de creencias peceptuales adquiridas por Steve en ese momento particular: creencias acerca del color o el tamaño de los huevos, de su colocación en el cartón, de su textura, etc.

Una primera objeción posible a esta propuesta consiste simplemente en negar que los conjuntos existan. Obviamente, Maddy está presuponiendo la existencia de los conjuntos (primer requisito para la formación de creencias perceptuales) pero ¿en base a qué tenemos que creer que esto sea así? Maddy hace uso aquí de la tesis de la indispensabilidad de Quine y Putnam. Los conjuntos son necesarios para la mejor explicación del mundo que poseemos, para aplicar las matemáticas a la ciencia empírica y, por lo tanto, podemos (y debemos) aceptar que existen. Además, tal y como vimos en el apartado anterior, para Maddy (como para la mayoría de los matemáticos) nuestra mejor teoría acerca de la ontología de las matemáticas asegura que (al menos algunas) las entidades matemáticas son conjuntos.

Una segunda objeción posible consiste en defender, siguiendo a los platonistas tradicionales, que los conjuntos son objetos abstractos y por lo tanto no tienen localización ni en el espacio ni en el tiempo. Esta objeción cuestiona uno de los aspectos más problemáticos de la propuesta de Maddy: para ella, un conjunto está localizado (en el espacio y en el tiempo) donde lo estén los elementos que lo componen. El conjunto de tres huevos está localizado donde estén localizados los tres huevos que lo componen (en el cartón, dentro de la nevera, o en las manos de Steve, depende de la localización temporal). Esto implica que un conjunto *desaparecerá* cuando lo hagan sus miembros y *surgirá* cuando sus miembros aparezcan (y se agrupen en ese determinado conjunto).

Siguiendo esta línea argumentativa, un conjunto de orden superior, como el conjunto compuesto por el conjunto de tres huevos y el conjunto de las dos manos de Steve (para seguir con su ejemplo) estará igualmente situado donde (y cuando) lo estén sus miembros (donde lo estén el conjunto de tres huevos y el conjunto de las dos manos de Steve). De esta manera, sería posible establecer la localización de cualquier conjunto, por complejo que sea.

Aún así, alguien podría objetar: “de acuerdo, pero no siempre, cuando abrimos un cartón de huevos, vemos que hay tres o dos o cinco huevos, a veces simplemente vemos un número indeterminado de huevos en el cartón. Puede que sólo necesitemos un huevo y por lo tanto, desde el momento en que haya más de uno, no estamos interesados en saber cuantos hay. En este caso, no percibimos ningún conjunto. Pero, ¿cómo es posible que ante una misma realidad (cartón de huevos) a veces percibamos un conjunto (con determinadas propiedades numéricas) y otras veces no?”

Simplemente, responde Maddy, porque de la misma manera que hay veces en que nuestro “detector de conjuntos” está activado, hay también otras en que no lo está. El conjunto de huevos en sí sólo es responsable de una estimulación causal de nuestra retina, pero para obtener creencias perceptuales, como hemos ido viendo, tienen que darse además otras condiciones.

Así, si vamos buscando un número determinado de huevos, por ejemplo, nuestro detector se activará y agrupará los huevos asignándoles propiedades numéricas. Sin embargo, si simplemente buscamos un huevo (o no buscamos nada y nos encontramos con el cartón abierto), nuestro detector no se activará (ya que no habrá sido adecuadamente estimulado). Esto es algo que no debería resultar extraño, al fin y al cabo nuestra supervivencia depende de la capacidad selectiva de nuestro aparato cognitivo. Si captáramos conscientemente todos los elementos de nuestro alrededor, con todas sus propiedades, probablemente no seríamos capaces de hacer cosas tan sencillas como caminar (y mucho menos conducir). Nuestro cerebro selecciona, entre toda la información que recibe, aquella que nos resulta útil.

2.3.5. El papel de la intuición

La teoría esbozada hasta aquí, en caso de ser viable, respondería a ciertas dudas y, especialmente, representa una respuesta al dilema de Benacerraf ya que ofrece una explicación de nuestro acceso a los objetos matemáticos (al menos a ciertos objetos matemáticos, pero si aceptamos el papel fundacional de la teoría de conjuntos, esto podría ser suficiente). Sin embargo, deja muchas cuestiones importantes sin resolver. En particular, para defender una postura realista acerca de los conjuntos, como la que Maddy quiere defender, no es suficiente con una explicación de nuestro acceso a los elementos más básicos, es necesario también explicar el conocimiento de al menos alguno de axiomas más básicos de la teoría de conjuntos.

Es necesario poder dar cuenta del carácter obvio de los axiomas básicos de la teoría de conjuntos o, en palabras de Maddy, es necesario explicar:

> What is the relation, for example, between our knowledge of particular facts about particular sets of physical objects, and our knowledge of the simplest set theoretic axioms. How, for example, do we come to know that any two objects can be colleted into a set with exactly those two members, or that the members of any two sets can be combined into a set that is their union? (1990: 67)

Una vez más, Maddy acude a la analogía con los objetos físicos para responder a esta cuestión. Cuando adquirimos el concepto de un objeto, por ejemplo de una esfera (p.ej. una pelota) también adquirimos ciertas creencias básicas –intuitivas- acerca de ella: que rueda, que no tiene esquinas, que seguirá existiendo cuando no la veamos, etc. Estas creencias intuitivas vienen dadas por la propia estructura neuronal que nos proporciona el concepto del objeto.

Análogamente, en el caso de los conjuntos, al mismo tiempo que una niña adquiere el concepto de conjunto (tras un proceso de aprendizaje), también adquiere ciertas propiedades básicas asociadas a él; adquiere un tipo de creencias de carácter intuitivo acerca de dicho conjunto. Por ejemplo, la niña adquiere la creencia intuitiva de que un conjunto tiene propiedades numéricas, que puede dividirse en subconjuntos, etc. El propio desarrollo neuronal responsable de la adquisición del concepto de un conjunto particular propicia un desarrollo de orden superior que da lugar al concepto general de conjunto, en el que se incluyen estas creencias intuitivas. Estas creencias intuitivas son la base de los axiomas básicos de la teoría de conjuntos.

A pesar del carácter básico de estas creencias intuitivas, es importante señalar que no son infalibles desde un punto de vista epistemológico. Podemos cometer errores en nuestras creencias intuitivas acerca de los conjuntos. Una de las fuentes potenciales de error ocurre durante la transición desde la creencia intuitiva –pre-lingüística- hasta la formulación verbal de la misma. Sin embargo es posible que la creencia intuitiva misma sea incorrecta[25]. La percepción “directa” de los objetos (o de los conjuntos) no garantiza que nuestras percepciones (y por lo tanto los conceptos que formamos a partir de ellas) sean verdaderas (o correctas).

Pero si esto es así, y las creencias intuitivas son falibles, ¿cuál es su estatus epistemológico? Para que una creencia intuitiva cuente como conocimiento deberá ser adecuadamente justificada. Según Maddy, es posible que la persona que tiene una creencia intuitiva no sea capaz de justificarla pero eso no es un requisito fundamental, basta con que exista una justificación externa para nuestras creencias intuitivas (es decir, Maddy adopta un punto de vista “externalista” con respecto a la justificación”).

[25] Al ser de carácter no-lingüístico, no podemos decir que sea verdadera o falsa.

Es suficiente, para considerar una creencia intuitiva (o perceptual) verdadera, con que los procesos por medio de los cuales ha sido generada sean fiables ("reliables").

2.3.6. Los números

Ya hemos dicho que las creencias numéricas son, según Maddy, creencias perceptuales que forman parte de nuestras creencias acerca de los conjuntos. Pero ¿acerca de qué son estas creencias?, ¿acaso son creencias acerca de los objetos que componen los conjuntos?, ¿acerca de conceptos, al estilo de Frege? Ahora mismo estoy percibiendo (asumiendo que la teoría de Maddy expuesta hasta ahora fuese verdadera) el conjunto de los cinco dedos que forman mi mano. Por lo tanto estoy teniendo una creencia numérica, esto es, que el conjunto de los dedos de mi mano está formado por cinco elementos, ¿pero cuál es exactamente el *objeto* de esta creencia?

La primera respuesta que viene a la mente es que es una creencia precisamente acerca de mis cinco dedos. Pero, como señala Maddy, Frege demostró que esto no es posible. Una creencia numérica no puede versar sobre algo físico (mis dedos) ya que esto puede ser a su vez dividido en sus unidades componentes de distintas maneras (mis dedos, tomados como materia física, pueden ser considerado como cinco elementos, pero en realidad están formados por un número *x* de moléculas, de átomos, etc.)

Frege llega a la conclusión de que el contenido de una creencia numérica es la extensión de un concepto. Los números son, para Frege, objetos. Como es bien sabido, la teoría de Frege colapsa estrepitosamente debido a paradojas del estilo de la de Russell. En el capítulo siguiente expondremos con más detalle esta postura y la posibilidad de evitar las paradojas.

Otra posibilidad, la que habitualmente se adopta en la teoría de conjuntos contemporánea (precisamente para evitar las paradojas a las que nos conduce la teoría de Frege) es identificar, por ejemplo, el número cinco (el contenido de la creencia numérica acerca del conjunto de mis cinco dedos) no con la colección (no existente) de todos los conjuntos con cinco miembros (tal y como Frege propone) sino con un ejemplo concreto (conveniente) de un conjunto con cinco miembros. De esta manera, generalmente se definen los números naturales por medio de la sucesión de ordinales de Zermelo, esto es, se identifica la sucesión 1, 2, 3,… con la sucesión: ∅, {∅}, {∅,{∅}}, {∅,{∅}, {∅, {∅}}},…ϖ

El problema es que esta definición no es la única posible. Podemos igualmente definir la sucesión de los números naturales por medio de los numerales de von Neumann de acuerdo con los cuales, la sucesión 1,2,3… equivale a la sucesión: ∅, {∅}, {{∅}}, {{{∅}}},…ϖ. Esto da lugar a problemas ontológicos acerca de los números, tal y como es puesto en evidencia por Paul Benacerraf en su artículo "What Numbers could not be" (1965).

El problema, en pocas palabras, es que las condiciones de identidad de los objetos matemáticos no están claras: si identificamos los números con los conjuntos debemos poder hacerlo con un conjunto determinado, pero esto no es posible porque, como hemos visto, hay varios candidatos y no hay forma de elegir el más adecuado de ellos. Ambas ϖ-secuencias son isomórficas pero son objetos distintos.

Parece obvio que, para defender la identificación de los números con los conjuntos, tenemos que decidirnos entre una de estas posibles identificaciones (ya que además atribuyen propiedades distintas a los números) y debemos hacerlo, lógicamente, basándonos en argumentos. Pero no existen tales argumentos. Por lo tanto, concluye Benacerraf, los números no pueden ser conjuntos[26].

Pero entonces, ¿qué son los números?, ¿Cuál es el contenido de nuestras creencias perceptuales? Para contestar a esta difícil pregunta Maddy ahonda de nuevo en la analogía con los objetos físicos y concluye que los números son *propiedades* de los conjuntos, de la misma manera que, por ejemplo, la masa es una propiedad de un objeto físico[27]. De esta manera,

[26] Este dilema ha dado lugar a una inmensa literatura, tanto a favor como en contra de sus conclusiones. Benacerraf, por su parte, concluye que los números no sólo no son conjuntos, sino que además no pueden ser objetos. Los números son, para él, elementos de una estructura, sin entidad propia fuera de ella.

[27]Esta solución trae consigo su propio dilema ontológico: el estatus de dichas propiedades. En este contexto, el problema es común a los dos ámbitos, el físico y el matemático.

> Set theory is the study of sets and their properties, of which number is one, just as physics is the study of physical objects and their properties, of which length (for example) is one (1990: 87)

La elección entre los ordinales de von Neumann o los de Zermelo deja de ser un problema ontológico y pasa a ser equivalente a la elección entre “two different rulers that both measure in metters”. Las equivalencias entre los números como propiedades de conjuntos y las propiedades físicas resultan evidentes: en ambos casos es posible cuantificarlas y comparar diversos conjuntos u objetos en base a sus propiedades. La única diferencia que Maddy señala es que no es posible *medir* los conjuntos utilizando diferentes escalas ya que no podemos elegir arbitrariamente la unidad de medición; los elementos de los conjuntos están previamente individualizados. De todas formas, coincido con Maddy en que esta diferencia no es lo suficientemente significativa como para desmontar la analogía.

Otra ventaja de esta lectura es que encaja perfectamente con la epistemología naturalista desarrollada por Maddy. Ya señalamos que al percibir un conjunto percibimos también sus propiedades (de la misma manera que al percibir un objeto físico percibimos también sus propiedades). Lo único que Maddy añade en este punto es que, de hecho, los números *son* esas propiedades de los conjuntos.[28]

2.3.7.Objeciones

La propuesta de Maddy tiene grandes ventajas Una de sus mayores virtudes es que ofrece una explicación de nuestro acceso a, al menos, ciertos objetos matemáticos y, por ende, de ser satisfactoria, esta explicación encajaría a la perfección con nuestra teoría de la percepción y del conocimiento en general. Desgraciadamente para los platonistas sin embargo, su teoría tiene numerosos “puntos flacos”, algunos de ellos lo suficientemente serios como para poner en duda la viabilidad del proyecto. No veo como Maddy podría sortear las serias objeciones que han sido planteadas a su propuesta

[28] Maddy desarrolla una teoría similar para los números reales (como detectores de la propiedad de la continuidad) y para las funciones.

y, por lo tanto, no creo que sus tesis representen una alternativa válida para el platonismo[29].

Para los objetivos de nuestro trabajo sin embargo es importante señalar que aún si la interpretación de Maddy de la intuición, y la consiguiente explicación de nuestro conocimiento de los axiomas básicos de la teoría de conjuntos fuera falsa. Es más, aún si la definición de Maddy de los números como propiedades de conjuntos resultara falsa. Aún así, Maddy habría conseguido resolver el problema epistémico planteado por el dilema de Benacerraf. Por supuesto, el hecho de resolver este dilema no haría a la propuesta aceptable (si únicamente la parte de la percepción fuera válida no habríamos avanzado demasiado) pero al menos habría logrado eliminar la sensación de oscuridad y misterio que generalmente envuelve a la cuestión del acceso a los objetos matemáticos.

Voy a prestar más atención a las objeciones que se centran en este primer momento, el de la percepción, ya que es lo que realmente nos interesa (ver hasta qué punto representa una respuesta al dilema de Benacerraf). Son además las objeciones más tajantes, ya que atacan a la base misma de la teoría de Maddy.

Conviene señalar sin embargo, aunque sea brevemente, tres dificultades ajenas a la captación de los conjuntos o a la definición de los mismos. La primera hace referencia a los criterios de justificación de una teoría matemática y viene dada por el rechazo del holismo de la confirmación de Quine. Para Quine, la justificación de una teoría matemática viene dada por su utilidad para la ciencia empírica. Maddy rechaza este aspecto de la teoría de la indispensabilidad; para ella, las razones (de índole pragmáticas) para la aceptación o el rechazo de una teoría matemática provienen de las matemáticas mismas. Maddy otorga a los matemáticos el *poder* de legislar sobre sí mismos y sobre la validez de sus teorías. La tesis de Quine, según Maddy, contradice no sólo la práctica habitual de los matemáticos, que como dijimos al exponer las objeciones a la indispensabilidad, no esperan ningún tipo de confirmación por parte de la ciencia empírica para validar su ontología. Además, Maddy argumenta que esto choca también con la práctica de los científicos en general, que generalmente

[29] De hecho, ella misma ha modificado sustancialmente su postura en los últimos años debido, en gran medida, a la imposibilidad de sortear algunas de las críticas.

presuponen los objetos que les *brindan* los matemáticos sin exigir una evidencia de su existencia[30].

Para algunos comentadores, como por ejemplo Neil Tennant (2004), este argumento de Maddy choca frontalmente con la práctica real de los matemáticos. La comunidad matemática no representa un *corpus* unitario u homogéneo y en muchos de los casos sus investigaciones están guiadas (y justificadas) por causas ajenas a las matemáticas (a veces incluso por consideraciones de índole filosófico, pero en la mayor parte de los casos por consideraciones provenientes de la ciencia empírica).

La segunda objeción general tiene que ver con su definición de los números como propiedades de los conjuntos. A pesar de que con esta definición Maddy evita el problema de Benacerraf acerca de las reducciones arbitrarias de los números a conjuntos, esta definición niega la concepción generalizada y nuestra intuición lógica según la cual los números son objetos. De hecho, niega algo más que eso. En cierta medida podríamos decir que niega la evidencia de la estructura gramatical de los enunciados numéricos, en los que los términos que designan números funcionan como términos singulares y, por lo tanto, dan pie a pensar que se refieren a objetos[31].

La tercera objeción general hace referencia a la dificultad para integrar la racionalidad de los argumentos acerca de los axiomas más teóricos de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Básicamente, la objeción afirma que los conjuntos, tal y como los entiende Maddy, no cumplen con los axiomas de Zermelo-Fraenkel y, por lo tanto, no pueden considerarse conjuntos (en todo caso, serían clases o agregados ya que, precisamente lo que distingue a los conjuntos de las clases es que los primeros satisfacen los axiomas de Zermelo-Fraenkel). Quizás el ejemplo más claro de esta limitación de la propuesta de Maddy es la insatisfacción para explicar el conjunto vacío, $\varnothing$, ya que parece obvio que no somos capaces de percibirlo[32]. Por lo tanto, si no

[30] Maddy (1997) ilustra esta idea contrastando los criterios de los físicos para aceptar la existencia de los átomos (para lo cual fue necesario una rigurosa verificación empírica) con la manera en la que aceptan por ejemplo la continuidad del espacio y del tiempo (para la cual no existe verificación empírica). Véase nota 14.

[31] Aparte del hecho de que si aceptamos que los números son propiedades de los conjuntos nos encontraríamos con un nuevo problema: el estatus ontológico de las propiedades.

[32] Precisamente por este motivo, Lorenzo Peña habla de teoría de “cúmulos” y no de “conjuntos” (1991). Los cúmulos (al igual que los conjuntos de Maddy) no cumplen las exigencias de la teoría de ZF pero Peña no ve ningún inconveniente en ello. Es más, no comparte el entusiasmo generalizado por la teoría de ZF entre los filósofos y los matemáticos, llegando a afirmar que,

podemos tener conocimiento del conjunto vacío, no se explica cómo podríamos tener conocimiento de las sucesiones básicas de la teoría de ZF[33].

Pero pasemos a ver los problemas que afectan a su explicación de nuestro acceso a los conjuntos y a su definición de los mismos. Los problemas vienen, como era de esperar, de la atribución de propiedades físicas a los conjuntos. Por un lado, aún si aceptásemos que los conjuntos están situados donde lo estén los objetos físicos que lo componen, esto no implica necesariamente que los conjuntos *en sí* posean propiedades físicas (no implica que los conjuntos sean entidades físicas). De hecho, como veremos a continuación, afirmar esto sería reducir a los conjuntos a meros "agregados de los objetos físicos" al estilo de Mill lo cual no es, ni mucho menos, la intención de Maddy.

La única propiedad que distingue a los conjuntos de objetos físicos de los agregados de sus miembros son precisamente las propiedades de los conjuntos. Pero estas propiedades difícilmente pueden ser físicas ellas mismas. Tal y como afirma Michael Resnik (1997:94-5), si los conjuntos son físicos entonces deben ser distinguibles por sus propiedades físicas. Pero los conjuntos ocupan el mismo espacio que los objetos físicos que los componen y participan de los mismos eventos que ellos, por lo que nuestra manera habitual de distinguir los objetos físicos no es aplicable en su caso.

Pero entonces, ¿cuál es la diferencia entre el conjunto de los lápices sobre mi mesa y el conjunto del conjunto de los lápices sobre mi mesa? Maddy argumenta que la diferencia estriba en que tienen diferentes miembros. "Tener diferentes miembros" es

---

> La teoría estándar sólo parece justificarse con una concepción de los conjuntos como la llamada iterativa. Pero ésta es un híbrido, o un engendro bastardo: un equilibrio inestable entre la concepción constructivista, articulada en la teoría ramificada de tipos, y la meramente enumerativa, finitista. Lejos de constituir esa concepción iterativa un enfoque filosófico "intuitivo", previo a la axiomatización de ZF, paréceme a mí un apaño artificial, *ex post facto*, forjado *ad hoc* para aureolar a ZF con los oropeles de una supuesta motivación independiente del mero constituir una manera taimada de obviar las paradojas (1991:208. n. 4)

Por otro lado, Peña tampoco tiene problemas para acomodar a la clase nula (al conjunto vacío) ya que, dentro de su sistema ontofántico, no existen las clases nulas:

> sólo hay una clase a la que nada pertenece salvo infinitesimalmente (o sea: en la más débil medida), la cual tiene presencia por doquier, pero sólo en medida infinitesimal, puesto que su grado de realidad es infinitesimal no más (1985: 279)

[33] Balaguer (1994) menciona también la incapacidad de los conjuntos de Maddy de satisfacer el axioma del infintito y Carsons (1996) por su parte, objeta que aún si pudiéramos percibir los conjuntos, no percibiríamos una de sus propiedades esenciales: su capacidad de pertenecer a otros conjuntos (lo que invalidaría cualquier concepción iterativa de los conjuntos). Para un recuento y un análisis más detallado de estas y otras objeciones, ver Levine (2005)

efectivamente una propiedad de los conjuntos por la que podemos diferenciarlos, pero es solo una propiedad física en tanto asumamos de entrada, con Maddy, que esos conjuntos son objetos físicos. No podemos apelar a esta propiedad para diferenciar a los conjuntos como objetos físicos porque para ello tenemos que asumir previamente eso mismo: que los conjuntos son objetos físicos.

Por otro lado, Resnik desarrolla una analogía que en mi opinión es muy pertinente para ilustrar un posible problema con la idea de *percibir* conjuntos. De la misma manera que leyendo señales impresas de un ordenador los científicos pueden sacar conclusiones acerca de los electrones o los genes, sin que podamos percibir los objetos en sí, aceptar que adquirimos creencias acerca de los conjuntos por medio de la percepción no significa necesariamente que percibamos los conjuntos. El que adquiramos creencias por medio de la percepción acerca de que, por ejemplo, es posible separar un conjunto de tres lápices en varios subconjuntos o que está formado por tres elementos, no significa que estemos percibiendo el *conjunto* de tres lápices[34].

Esto nos conduce a la segunda consideración que quería hacer. Tal y como mencionamos antes, si identificamos un conjunto con un objeto físico, localizado donde (y cuando) lo estén sus miembros ¿cómo lo diferenciamos de un agregado de un objeto físico? Si Maddy reduce los conjuntos a objetos concretos ordinarios no veo que diferencia hay entre su propuesta y la propuesta de Mill (1843). Y el problema radica en que la propuesta de Mill claramente errónea. La propia Maddy admite la teoría Milleana es incorrecta. Pero ¿qué otra cosa, sin incluir nada abstracto, podrían ser los conjuntos si no son agregados?

Tal y como mencionamos anteriormente, Maddy acepta la crítica de Frege a la teoría de Mill. Los conjuntos no pueden ser agregados de la materia física porque los conjuntos tienen un número determinado de elementos y la materia física no (los objetos físicos pueden ser divididos en varios elementos de muy diversas maneras, pueden ser divididos, por ejemplo, en moléculas, átomos, etc.).

[34] Maddy se apoya en las teorías psicológicas de la percepción para desarrollar sus tesis pero, hasta la fecha, no existe una explicación científica de la percepción de los conjuntos. Por lo tanto Maddy, como mucho, aporta una posible vía de explicación científica de este fenómeno, una vía que no ha sido ni mucho menos corroborada científicamente.

Además, como ya dijimos, si reducimos los conjuntos a objetos físicos difícilmente podremos diferenciar un conjunto del conjunto de ese conjunto. No hay ninguna propiedad física que los distinga (la distinción en base a sus miembros es sólo física en tanto aceptemos previamente la definición de conjunto como objeto físico, por lo que es circular). Y si no podemos establecer esta distinción, tampoco podremos dar cuenta del sistema de jerarquías de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

Por todo esto, aparentemente la única forma de diferenciar los conjuntos de los agregados es aceptando que los conjuntos tienen ciertas características *abstractas*. No tenemos por qué aceptar la definición de abstracto tradicional, esto es, implicando una existencia fuera del espacio y del tiempo. Simplemente nos vemos obligados a defender que tiene que haber algo *no-físico* que distingue a los conjuntos de los agregados (y a unos conjuntos de otros). Maddy se mueve en este punto en un terreno ciertamente resbaladizo ya que tiene que encontrar la manera de afirmar que los conjuntos, si bien no son abstractos en el sentido tradicional y están localizados en el espacio y el tiempo, sí que tienen que poseer propiedades abstractas entendidas de una manera no-tradicional (que, por supuesto, es necesario explicar).

Podemos leer a Maddy en este sentido e interpretar que ese elemento abstracto de los conjuntos que los diferencia de los agregados no es más que su propia estructura interna (sus propiedades numéricas). Sin embargo, y en este punto estoy siguiendo a Mark Balaguer (1998: 33-34), poco importa nuestra interpretación de *qué* sea o en qué consista ese carácter abstracto. El problema real es si es verdaderamente posible captar ese elemento abstracto –sea el que sea- por medio de una facultad como la percepción. Si los conjuntos están compuestos, tal y como admite Maddy, de la misma materia que los agregados (es decir, que los elementos físicos que lo componen) entonces la estimulación que causan en la retina tiene que ser la misma en los dos casos. ¿Cuál es la diferencia entonces?, si esto es así, ¿cómo es posible percibir ese elemento no-físico que distingue a los conjuntos?

Maddy ofrece dos tipos de respuestas y ninguna de ellas resulta, en mi opinión enteramente convincente. La primera es que este caso es similar al famoso truco del dibujo en el que, según como se mire, es posible ver una mujer joven o una anciana. Para Maddy en ambos casos, el hecho de que veamos una cosa u otra (mujer joven o vieja; conjunto o agregado) depende del "detector neuronal" que resulte estimulado. Pero los dos casos no son ni mucho menos equivalentes: en el caso de los conjuntos estamos hablando de dos tipos de objetos diferentes (conjuntos y agregados), en el otro caso hablamos de un mismo objeto visto desde dos puntos de vista. Además, el recurso a los "detectores" no explica la adquisición del elemento no-físico distintivo de los conjuntos.

La segunda respuesta de Maddy es igualmente insatisfactoria. Argumenta que es posible tener creencias perceptuales de un conjunto aunque solamente percibamos la información de los agregados, de la misma manera que es posible tener creencias perceptuales de un objeto aunque sólo percibamos una parte del mismo[35]. Pero de nuevo la analogía no resulta válida. En el caso del objeto, si veo por ejemplo sólo la parte frontal de un armario, esa es una parte del objeto y por ello puedo percibir el objeto completo a partir de ella. Pero los agregados no son parte de los conjuntos en este mismo sentido; los conjuntos tienen algo más aparte de lo que poseen los agregados. Son dos objetos diferentes, aunque las propiedades de uno estén integradas en el otro.

Por lo tanto, la noción de conjunto de Maddy necesita refinarse para resultar satisfactoria. El problema es que no veo la manera de refinarla sin renunciar a la idea de que los conocemos por medio de la percepción. Si renunciamos a esto, renunciaríamos a la solución de Maddy al dilema de Benacerraf-Field. Pero si mantenemos la percepción como medio de acceso tendremos que renunciar a todo elemento abstracto de los conjuntos y por lo tanto, reducir los conjuntos a agregados de los objetos físicos. Y esto último es claramente erróneo. Si no consigue salir de este aparente callejón sin salida, la propuesta de Maddy se quedará sin sus fundamentos y perderá su atractivo.

---

[35] Peña también utiliza argumentos similares a los de Maddy. Para él, cuando percibimos un miembro estamos también percibiendo los conjuntos a los que pertenece (y los conjuntos a los que pertenece dicho conjunto, etc.). De una manera contundente, Peña afirma,

> Quien rechace el principio de que, percibiéndose el miembro, se percibe al conjunto (no forzosamente en la misma medida, claro), nunca se atreverá a decir que haya visto algo. ¿Ha visto alguien el museo del Prado? Como es éste un cuerpo, y un cuerpo es el conjunto de sus partes, si el ver una parte no basta para, en alguna medida por lo menos, ver el todo, entonces, para ver el museo del Prado hay que ver cada átomo, y cada molécula del mismo, e incluso cada electrón y cada protón, etc. Aparte ya de los cuerpos ¿no se dice corrientemente que se ha visto la maldad –al ver un acto malvado-, la rectitud –al ver un comportamiento recto-, la miseria –al ver, p. ej., un barrio miserable-, etc.? (1985: 280)

En cualquier caso, y a pesar de que obviamente en mi opinión la propuesta tal y como está planteada no representa una alternativa viable para los platonistas, creo que en general se le debería prestar más atención de lo que habitualmente se hace. Aunque la idea de los conjuntos como entidades concretas resulta en un primer momento chocante y finalmente de hecho plantee serias dudas, no deja de poseer cierta plausibilidad intuitiva y es innegable que una epistemología en clave naturalista de la teoría de conjuntos sería muy deseable (básicamente porque podríamos encajarla de una manera sencilla en nuestra teoría del conocimiento general y evitaríamos cualquier referencia a entidades misteriosas como la intuición gödeliana). Esto es, en mi opinión, aún si de hecho concluimos que la propuesta de Maddy no representa una explicación plausible y satisfactoria del conocimiento matemático, esto no tiene porqué llevarnos a concluir que no es posible llevar a cabo una naturalización de las matemáticas, de manera que sea factible defender una postura realista que sea coherente con las tesis empiristas.

3

LA OPCIÓN NEO-FREGEANA

> The last time I saw Frege, as we were waiting at the station for my train, I said to him 'don't you ever find any difficulty in your theory that numbers are objects?' He replied 'Sometimes it seems to be a difficulty –but then again I don't see it'
>
> (Wittgenstein, reported by Peter Geach)

3.1. Introducción

En todas las áreas del conocimiento existen problemas epistémicos, y en ninguna de ellas se trata de problemas sencillos de resolver, pero en el caso de las matemáticas, la caracterización de sus entidades como objetos abstractos y la dificultad para determinar la naturaleza de éstos hace que las cuestiones epistémicas puedan poner en duda la existencia misma de estos objetos. Al fin y al cabo, ya dijimos que en el caso de los objetos empíricos, el sentido común ratifica su existencia (al menos la de los observables), mientras que en el caso de los objetos abstractos tan solo hace que ciertos axiomas básicos resulten más intuitivos que otros, sin tener por ello que concluir que los objetos abstractos existan.

Los problemas epistémicos en matemáticas se originan, no tanto en los problemas a la hora de comprender nuestros mecanismos cognitivos, sino en la propia naturaleza misteriosa de los objetos por conocer. Esto hace que, en mi opinión, si partimos de las suposiciones del platonismo acerca de los objetos abstractos, más que una respuesta epistemológica, lo que el dilema de Benacerraf-Field requiere es una respuesta de tipo metafísico: una explicación de la *naturaleza* de las entidades matemáticas y de la *naturaleza* de nuestro conocimiento. El conocimiento de los objetos abstractos resulta tan difícil de comprender, en gran medida, por la ambigüedad de las suposiciones ontológicas sobre las que se asienta.[1]

Por eso, más que preguntar por cómo obtener conocimiento, los neo-fregeanos señalan que la pregunta clave –previa y más importante- es cómo podemos tan siquiera *pensar* en los objetos abstractos; cómo podemos *referirnos* a ellos. Tal y como yo los interpreto, los neo-Fregeanos son conscientes de la imposibilidad de responder al dilema de Benacerraf-Field partiendo de suposiciones metafísicas (tal y como hacen tanto los defensores de la intuición como, aunque en menor medida, Maddy). Así, centran su atención en un proceso menos ambiguo, sobre el que es más sencillo argumentar y que es posible justificar: la teoría de la referencia.

Por ello, más que intentar desarrollar una facultad cognitiva especial para el caso de lo abstracto o intentar aplicar una explicación en términos naturalistas del conocimiento al caso matemático, lo que los neo-fregeanos hacen es intentar justificar la posibilidad de referirnos a los objetos abstractos –de *pensar* sobre ellos- a través del análisis de una serie de identidades que ellos denominan “principios de abstracción”.

El programa de los neo-fregeanos, tal y como su nombre indica, toma como punto de partida las propuestas de Frege e intenta demostrar que es posible evitar asumir la famosa interpretación de Frege según la cual los números son extensiones de conceptos, la cual, como es sabido, conduce inevitablemente a la paradoja de Russell y por lo tanto provoca el colapso de la propuesta. Tras la aparición de esta paradoja, las ideas de Frege en el ámbito de las matemáticas –su famoso logicismo- quedaron prácticamente reducidas al análisis histórico de los debates acerca de los fundamentos de las matemáticas. En 1983, Crispin Wright publicó *Frege’s Conception of Numbers as Objects*, en el que propuso una novedosa interpretación de las tesis de Frege y defendió

[1] En el último capítulo del trabajo, las conclusiones, me detendré algo más en este punto y argumentaré, básicamente, que no es posible desarrollar el tipo de explicación que el platonismo requiere, es decir, que no es posible justificar satisfactoriamente las suposiciones metafísicas sobre las que se asienta y mucho menos por lo tanto justificar ninguna facultad de conocimiento sobre ellas. De hecho, defenderé que las preguntas metafísicas, en sí mismas, no tienen sentido y, quizás más importante aún, no aportan demasiado al debate, en el sentido de que no garantizan la objetividad del conocimiento matemático (que es lo verdaderamente indispensable).

su vigencia y la posibilidad de evitar las paradojas por las que fueron abandonadas. A partir de este trabajo y tras años de fructífero debate, hoy en día existe un número importante de filósofos dedicados al desarrollo de estas ideas. Entre estos autores, casi todos ellos ligados de alguna manera al grupo de trabajo de la Universidad de Saint Andrews, cabe destacar las aportaciones realizadas por Bob Hale, George Boolos o Steward Shapiro.

En mi opinión, la desconfianza de los neo-fregeanos hacia el tipo de suposiciones metafísicas sobre las que los otros modelos platonistas se basan está más que justificada y por lo tanto su intento de explicar el acceso a los objetos matemáticos con independencia (al menos hasta cierto punto) de determinadas suposiciones acerca de la naturaleza de los objetos o de nuestras facultades cognitivas, es más factible que los intentos por parte de lo que hemos venido llamando el platonismo tradicional. Sin embargo, su propuesta, a partir de ahí, presenta varias limitaciones, en mi opinión, lo suficientemente importantes como para no resultar viable. Mencionaremos varias de ellas a lo largo de este capítulo pero quizás la conclusión sobre la que me gustaría hacer un mayor hincapié (por su relevancia para las conclusiones generales de este trabajo) es el hecho de que toda la propuesta se basa sobre una suposición que, en última instancia, puede ser puesta en duda: el carácter necesario de la existencia de los objetos matemáticos. Pero para comprender esto, es necesario ofrecer al menos una exposición general de la propuesta[2].

3.2. Objetos abstractos

A estas alturas de trabajo por lo tanto, si algo debe estar claro, es que los problemas no solo del conocimiento sino los problemas en general que afectan al ámbito abstracto resultan especialmente “intratables”. Simplemente enfrentarnos con la idea de la existencia de los objetos abstractos generalmente hace que nos invada una

[2] En realidad, más que una propuesta deberíamos hablar de varias. El movimiento de los neo-fregeanos vive actualmente un momento de gran esplendor, con un gran número de autores trabajando en sus tesis – tanto para defenderlas como para atacarlas- y por lo tanto nuevos desarrollos salen a la luz continuamente. Además, se trata de un proyecto sumamente complejo, con muchas ramificaciones y numerosas maneras de plantearlo. Nosotros, para esta exposición, centraremos nuestra atención en las propuestas de Hale y Wright, y en el papel que estas juegan en relación a los problemas del conocimiento.

cierta sensación de *vértigo*. Pero, ¿por qué ocurre esto?, ¿por qué se ven forzados los defensores del platonismo a defender nociones como la de “intuición”? De acuerdo con Bob Hale y Crispin Wright (2002) el problema epistémico resulta especialmente acuciante en el caso de los objetos abstractos debido esencialmente a la propia definición (estándar) de objeto abstracto y, como una consecuencia directa de esta definición, a la manera de aproximarnos al conocimiento de estos objetos.

Hale y Wright, por supuesto son conscientes de que definir lo que sea un objeto abstracto no es tarea fácil. Generalmente, como vimos en la introducción, trabajamos con una noción de lo “abstracto” altamente metafórica (“fuera del espacio y del tiempo”) y, lo que es peor, esencialmente negativa. Lo abstracto es lo no-concreto, lo que está fuera de este mundo (¿?), lo que no percibimos por medio de los sentidos, etc. Esta es la definición estándar de los objetos abstractos, la definición “by way of negation”, tal y como la denomina Lewis. El problema es que es posible trabajar con una noción metafórica siempre y cuando seamos conscientes que lo es, pero es esencial contar con una definición “positiva” de lo que sean los objetos abstractos, no basta decir lo que *no* son.

Hale y Wright proponen entender los objetos abstractos de otra manera, siguiendo la estela de Frege, por supuesto. Su intención es ofrecer una definición de los objetos abstractos (y de esta manera establecer sus diferencias con los objetos concretos) por medio de principios de abstracción. Esto es, defienden lo que en la introducción, siguiendo a Lewis, denominamos definición “by way of abstraction”.

La abstracción es un proceso empleado desde tiempo atrás por la filosofía de la mente y de la psicología. Normalmente, por abstracción, entendemos el proceso (mental) por medio del cual se forman nuevas ideas o conceptos a través de la consideración de varios objetos o ideas, omitiendo las características que los diferencian y manteniendo sólo las que todos tienen en común (de esta manera llegamos, por ejemplo, al concepto de lo “azul”, que es lo que tienen en común elementos como el cielo, el mar, los ojos de mi hermana, etc.). Así, simplificando, un objeto es abstracto si es el referente de una idea abstracta (una idea formada por un proceso de abstracción).

Hale y Wright se hacen eco de esta interpretación pero la modifican sustancialmente, usando la teoría de Frege, para aplicarla a las matemáticas. Cuando

Frege quería argumentar que ciertas entidades (por ejemplo los números) son objetos, analizaba la forma de las expresiones que mencionan a dichas entidades. Así, en *Die Grundlagen der Arithmetik* señalaba que muchos de los términos singulares que hacen referencia a objetos abstractos están formados por medio de "expresiones funcionales". Normalmente no hablamos de "el número" o "la dirección" sino de "el número de páginas", "la dirección de una línea", etc. De esta manera, se cumple que, siendo f(a) un término singular formado por una expresión funcional (que refiere a un objeto abstracto):

$$\forall a \forall b\ (f(a) = f(b) \leftrightarrow aRb)$$

(siendo *R* una relación de equivalencia entre las entidades denotadas por a y b). Esta es la forma general de los denominados "Principios de Abstracción". Uno de estos principios, el "Principio de Hume", jugará, como veremos, un papel fundamental en la propuesta de los neo-fregeanos ya que consiste, básicamente, en la aplicación de los principios de abstracción al caso de los números. De esta manera, podemos aplicar la ecuación anterior y concluir que, por ejemplo,

> "la dirección de la línea a" = "la dirección de la línea b" syss la línea a y la línea b son paralelas (a // b)

Las direcciones de dos líneas son iguales si y sólo si dichas líneas son paralelas. En consecuencia, entender el concepto (abstracto) de dirección es entender que "la dirección de a" y la "dirección de b" hacen referencia a una misma entidad si y sólo si las líneas a y b son paralelas. En cualquier caso, desarrollaremos este punto con algo más de detalle a continuación.

La manera tradicional de entender los objetos abstractos, esencialmente negativa, conduce a una determinada concepción del conocimiento de los mismos, a la idea de que para conocer cualquier objeto es necesario establecer algún tipo de *contacto* previo con ellos, contar con una interacción previa de algún tipo, una forma de acceso más o menos directa. Esta idea nos conduce casi instantáneamente a pensar en algún tipo de interacción física con los objetos, lo que no resulta, obviamente, muy conveniente en el caso de los objetos abstractos. Pero, ¿es necesario plantear el conocimiento -todo el conocimiento- en estos términos? Si bien parece claro que necesitamos tener algún tipo de interacción con los objetos, es discutible (un error, de acuerdo con Hale y Wright) que esta interacción tenga que ser un requisito previo para el conocimiento, como un fenómeno independiente y necesario para el mismo.

El problema del conocimiento de los objetos abstractos tiene, de acuerdo con estos autores, una naturaleza aún si cabe más *básica* de lo que normalmente se supone. Teniendo en cuenta los dos factores mencionados y sumándolos a las dificultades epistémicas habituales, el problema es cómo podemos tan siquiera pensar en los objetos abstractos, cómo podemos dirigir nuestra atención y nuestro pensamiento hacia objetos con un carácter tan *misterioso*, con los cuales se hace difícil concebir ningún tipo de *contacto*. En palabras de Hale y Wright,

> [T]he fundamental problem is not how, given that mathematical statements are about abstract objects, we could know them to be true, but how they could intelligibly be about such objects in the first place (2002:114-5)

El problema del conocimiento es, antes que nada, un problema de referencia. Es necesario contar con una teoría de la referencia para poder posteriormente entender nuestro conocimiento. De hecho, para Hale y Wright, esto será suficiente: basta con contar con una explicación de la referencia a los objetos abstractos para entender el conocimiento de los mismos y, en última instancia, justificar su existencia. Después de todo, una vez hemos comprobado la verdad de los enunciados en los que aparecen los términos numéricos y por lo tanto (por medio del principio del contexto de Frege) hemos demostrado que los términos tienen referencia: ¿qué más dudas puede haber respecto a su existencia?, y una vez sabemos que hacemos referencia a los objetos, ¿qué otra explicación necesitamos para nuestro conocimiento?

3.3. Principios básicos

La filosofía de las matemáticas de Frege se sustenta sobre dos principios o ideas básicas:

1. Platonismo: las entidades matemáticas existen, son independientes de nosotros y además, para Frege, son objetos: constituyen el referente de términos singulares, el contenido de los denominados "sortal concepts".
2. Logicismo: las verdades de la aritmética son analíticas; es posible probar sus principios básicos a partir de las leyes lógicas y de ciertas definiciones. Concretamente a partir de ciertos principios básicos denominados "principios de abstracción". Este elemento, sumado al primero, lleva a Frege a afirmar que las entidades matemáticas no sólo son objetos sino además "objetos lógicos".

Como es de sobra conocido, el programa de Frege de fundamentar las matemáticas sobre la lógica fracasó estrepitosamente con la aparición de la llamada "paradoja de Russell". Con esta paradoja, Russell demostró que el axioma V[3] sobre el que Frege fundamentaba todo su sistema y por medio del cual introducía la noción de la "extensión de un concepto" resultaba inconsistente[4]. A pesar de esto, los neo-fregeanos creen firmemente que es posible reconstruir las tesis de Frege evitando al mismo tiempo las inconsistencias de su sistema.

Frege, al igual que los neo-fregeanos, justificaba su propuesta sobre la base de dos principios. Dedicaremos la mayor parte de este capítulo a analizarlos para ver hasta que punto es posible justificar la existencia de las entidades matemáticas, y nuestro conocimiento de ellas, a partir de ellos. A modo de introducción, estos dos principios son:

1. El principio del contexto ("context principle"): sólo en el contexto de una proposición es posible asignarle significado a los términos que en ella aparezcan. De esta manera, es necesario determinar el sentido de una

[3] Concretamente, el axioma V establece que: $(F)\ (G)\ [\tilde{x}:Fx = \tilde{x}:Gx \leftrightarrow (x)\ (Fx \leftrightarrow Gx)]$ (introduciendo de esta manera la extensión de los conceptos).
[4]Véase Boolos (1987) y (1997b; para una exposición breve pero clara) de las inconsistencias en los intentos de Frege de ofrecer una fundamentación a la aritmética.

proposición, establecer sus valores de verdad, para poder determinar la referencia de los términos. Además, este principio encierra otro elemento que será de vital importancia para los intereses de los neo-fregeanos: la tesis de la prioridad de la sintaxis sobre la ontología ("priority thesis"). Gracias a esta tesis, una vez hayamos determinado que un término refiere (por medio del análisis de las condiciones de verdad de la proposición en la que aparezca) habremos también resuelto las cuestiones ontológicas respecto al referente (habremos establecido que existe un referente). Es más, según Wright, la tesis de la prioridad explica no sólo el platonismo de Frege sino el hecho de que Frege fuese un platonista no-gödeliano, que no necesitase introducir ninguna facultad de conocimiento como la intuición.

2. Razonamos por medio de los llamados "principios de abstracción". Por medio de estos principios, en el caso de las matemáticas, adquirimos conocimiento de los objetos matemáticos (a los cuales nos referimos por medio de los términos numéricos o de otro tipo). Dichos principios, y en particular el denominado "Hume's Principle"[5] (en adelante, HP), funcionan como definiciones implícitas del concepto de número (cardinal). Nuestro conocimiento de los objetos matemáticos proviene de principios, como el HP, que son analíticos o "verdaderos en base solamente a su significado", o más específicamente, de nuestra habilidad de derivar verdades matemáticas de esos principios analíticos.

Frege discute el problema del acceso, entendiéndolo como el problema de la referencia, a los objetos abstractos- matemáticos- en el *Grundlagen* (§60 en adelante), concretamente, en el punto §62, Frege explícitamente pregunta:

> How, then is a number to be given to us, if we can have no idea or intuition of it? (1884: §62)

[5] Este nombre fue puesto por Boolos. Wright en su libro *Frege's Conception of Numbers as Objects* lo denomina $N^{=}$. Boolos escogió ese nombre por referencias que hace Frege en su *Grundlagden*. Dummett ha criticado esta elección de Boolos ya que, en su opinión, la mención de Hume por parte de Frege es del todo incorrecta (Frege apenas había leído a Hume). Boolos, tras estas críticas optó por denominar el principio simplemente HP. En cualquier caso, acertadamente o no, el principio ha mantenido este nombre por lo que nosotros seguiremos aquí esta costumbre, aunque por comodidad pasaremos a denominarlo en lo que sigue como HP

La respuesta a esta pregunta viene dada por el principio del contexto, según el cual para determinar la referencia de un término debemos determinar el sentido de la proposición en la que aparece. De acuerdo con las tesis platonistas, los números son objetos (independientes) por lo que los términos numéricos son términos singulares. Bastará, afirman los neo-fregeanos, con establecer la verdad de las proposiciones en las que estos términos numéricos aparecen para garantizar que tienen referencia y por lo tanto que los números (como objetos) existen.

En otras palabras, necesitamos demostrar que el concepto (“sortal”) de número (cardinal) tiene instanciaciones en el mundo. Para Frege, número cardinal es una propiedad de los conceptos, en concreto de los denominados “sortal concepts” y los números son esencialmente cosas que pertenecen a esos conceptos (instanciaciones de los conceptos). Este matiz es importante ya que es un elemento esencial en el platonismo (aritmético) de Frege la creencia de que el número es un concepto “sortal” genuino, instanciado en la realidad por un dominio único e infinito de objetos. Hale y Wright definen (siguiendo a Frege) un concepto abstracto “sortal” como

> [A] concept under which fall abstract objects of a certain type, the identity or distinctness of which is constituted by the obtaining of that equivalence relation among entities in its field (2002: 118)

Por lo tanto, lo que necesitamos en el caso de los términos numéricos es establecer el sentido de los enunciados de identidad que conectan los términos con los números. Una vez que podamos asumir que uno de estos enunciados de identidad es verdadero, y aceptando que los términos numéricos son términos singulares, tendremos que aceptar que poseen referencia (por el “context principle”). De ahí podemos concluir, según los neo-freganos, que, ya que los términos numéricos tienen referencia, los números deben existir (y además ser objetos, ya que son el referente de términos singulares).

El proyecto neo-fregeano no se detiene aquí. Según ellos, es posible derivar (con la ayuda de ciertos principios de la lógica de segundo orden) los principios básicos de la aritmética (en concreto los axiomas de Dedekin-Peano) a partir de un enunciado de identidad en concreto (que pasaremos a analizar en breve). De acuerdo con esto, el conocimiento de dichos principios básicos de la aritmética – y por lo tanto el conocimiento de los objetos que los satisfacen, esto es, el conocimiento del concepto de número (cardinal)- puede ser explicado (a priori como veremos) estableciendo las condiciones de verdad de los enunciados de identidad entre los término singulares y sus instanciaciones.

3.4. Interpretación del Principio de Hume (HP)

Como casi todo lo demás, los neo-fregeanos extraen HP de las tesis de Frege pero le otorgan un alcance mucho mayor. Frege postula el principio y propone analizar el valor de verdad de los enunciados de identidad a través del mismo. De una manera informal, el "principio de Hume" afirma:

> (HP) El número de los Fs = el número de los Gs sí y sólo sí hay una correspondencia uno-uno entre los Fs y los Gs

Formalmente:

(HP) $\forall F \forall G\ (nx{:}Fx = nx{:}Gx \leftrightarrow F\ 1\text{-}1\ G)$

Donde "F 1-1 G" es una abreviación de una fórmula de segundo orden[6] según la cual existe una correspondencia uno-uno entre los objetos que caen bajo el concepto F y los objetos que caen bajo el concepto G.

HP es una instancia de los denominados "principios de abstracción" básicos para nuestro razonamiento con los objetos abstractos. Dichos principios generales pueden ser expresados como,

(AP) $\forall P \forall Q\ (\phi P = \phi Q \equiv Q \spadesuit P)$

[6] Dicha formula de "equinumerosidad" puede ser formulada como: $\exists R \forall x\ (Fx \rightarrow \exists y\ (Gy \wedge \forall z\ (Rxz \leftrightarrow z{=}y\ )) \wedge (Gx \rightarrow \exists y\ (Fy \wedge \forall z\ (Rzy \rightarrow z{=}y)))$

Siendo ♠ una relación de equivalencia entre las entidades del tipo P y las entidades del tipo Q y ϕ una función desde las entidades de esos tipos a los objetos.

Ya vimos que estos principios de abstracción no son exclusivos de las matemáticas ni de las expresiones que refieren a números, en general, son aplicados a todos los objetos abstractos[7]. Otra instancia de estos "principios de abstracción" que tanto Frege como Hale y Wright utilizan como ejemplo paralelo al HP ya que, debido a que es un enunciado de identidad en cierta manera más "sencillo", puede servir de ayuda a la hora de exponer sus tesis (de hecho, resulta de gran ayuda, probablemente por el carácter "visual" de la identidad), es el principio de abstracción que hace referencia al concepto de *dirección* (que denominaremos DE). De esta manera, de acuerdo con la equivalencia de la dirección,

> (DE) La dirección de la línea a = la dirección de la línea b sí y sólo sí las líneas a y b son paralelas

Frege consideraba que HP no era suficiente para fundamentar todo su sistema sobre él. Concretamente Frege consideraba que el llamado "Caesar Problem" representaba un obstáculo insalvable y por ello, introdujo la noción de la extensión de los conceptos (y el axioma V) lo cual hizo que su sistema se tornara inconsistente. Los neo-fregeanos, sin embargo, opinan que sí es posible derivar los principios básicos de la

[7] Esto no es del todo cierto, hay muchos ejemplos de entidades abstractas que no respetan los principios de abstracción (a pesar de que nos referimos a ellas por términos singulares formados por medio de expresiones funcionales). Por ejemplo, el "ajedrez" o, lo que es más problemático, los "conjuntos". En mi opinión éste es un claro contraejemplo a la teoría de Frege y de los neo-fregeanos aunque no afecta directamente a su programa si éste se circunscribe únicamente a los números. Los conjuntos (puros) son considerados tradicionalmente como ejemplos paradigmáticos de objetos abstractos y, en la mayor parte de los casos, especialmente importantes para las matemáticas. Cuando aplicamos el principio de abstracción a los conjuntos obtenemos:

> El conjunto de los Fs = el conjunto de los Gs syss para todo x, x es F syss x es G

Pero este principio es inconsistente (por la paradoja de Russell). Normalmente, de hecho, los conjuntos no son introducidos por medio de principios de abstracción, pero aún si encontráramos una manera de hacerlo libre de contradicciones no está claro que se mantuviera la prioridad epistémica en este caso (no está claro que pudiéramos conocer el concepto de conjunto a través del conocimiento de la relación de equivalencia de la parte derecha del bicondicional).

Dummett, en "Abstract Objects" (1973a:471-511), desarrolla objeciones similares a la anterior a la definición de Frege de objeto abstracto por medio de los principios de abstracción (Dummett utiliza el ejemplo del "ajedrez", como objeto abstracto no sujeto a dichos principios) aritmética sobre HP ya que, para ellos, el "Caesar Problem" no sólo no resulta un problema insalvable sino que tiene una solución relativamente sencilla[8].

Nosotros asumiremos que en efecto es posible solucionar este problema ya que en realidad no afecta directamente a lo que nos interesa: hasta qué punto pueden los neo-fregeanos explicar el conocimiento de las entidades abstractas (y justificar su existencia). Por el momento, basta resaltar que los neo-fregeanos consideran posible, contra Frege, derivar la aritmética a partir de HP (más la lógica de segundo orden). Esta es sin lugar a dudas la aportación más importante de los neo-fregeanos al programa de Frege.

De acuerdo con Hale y Wright es posible, a partir de HP y de un sistema de lógica de segundo orden, probar los axiomas de Dedekind-Peano (incluido el axioma que afirma que cada número natural tiene un sucesor y por lo tanto que la secuencia de los números naturales es infinita). Este resultado es generalmente llamado "Frege's Theorem".[9]

Según esto, asumiendo que HP es verdadero y que la expresión "el número de los Fs" funciona como un término singular, podemos afirmar que posee una referencia y que además es un objeto: un número. De la misma manera, en el caso de las direcciones, tomando la identidad como verdadera también podemos inferir que el término "la dirección de a" posee una referencia determinada, es decir que las direcciones (como objetos abstractos) existen.

---

[8] Brevemente, el problema establece que resulta imposible, basándonos únicamente en HP demostrar la falsedad de una identidad como "el número 4 = Julio César". De acuerdo con la definición dada de los "sortal concept", la noción de identidad de un "sortal concept" debe especificar: los criterios de identidad y distinción entre los elementos que caen bajo ese concepto y los criterios de identidad y distinción entre los elementos que caen bajo el concepto y las cosas de otro tipo (los elementos que no son instancias de ese concepto). El problema de "Julio César" representa un serio contratiempo a esto último. El problema de "Julio César" es la afirmación de que el criterio de identidad numérica establece los criterios de verdad para enunciados cuyos términos sean del mismo tipo ('Nx:....x...'), pero no nos permite establecer los valores de verdad de enunciados en los que sólo uno de los términos es de esa forma, por ejemplo: 'Nx: $x \neq x$ = Julius Caesar' (donde Nx:$x\neq x$ es la definición que Frege da de 0).
De acuerdo con Wright el problema se resuelve prácticamente por sí sólo, ya que la noción fregeana del HP (que Frege denomina $N^{=}$) establece implícitamente la falsedad del enunciado: Caesar = 0. Esto se debe a que $N^{=}$ establece que los números son 'cosas' identificables y distinguibles entre ellas mediante hechos relacionados con la correlación 1-1 entre conceptos. Y las cuestiones acerca de la identidad personal (en este caso) se solucionan de una manera distinta (aunque no este claro de que manera). Es decir, los números se diferencian del resto de los conceptos por el criterio de identidad que siguen ($1\text{-}1_R$). Para más referencia, ver Wright (1983; especialmente, 107-117), Hale y Wright (2001: 335-399) y Heck (1997).

[9] El nombre fue puesto por George Boolos. No vamos a entrar en los detalles de dicha prueba, simplemente asumiremos que es posible llevar a cabo esta derivación.

Si entendemos HP como una identidad es fácil –aunque problemático- ver como Hale y Wright derivan a partir de él la existencia de los números. Antes de nada hay que tener en cuenta que para estos autores la existencia de las entidades matemáticas es una cuestión de necesidad conceptual: de existir, su existencia es conceptualmente necesaria[10]. Esto les permite, tal y como veremos, derivar la existencia de los números de HP ya que al fin y al cabo, HP no deja de ser una re-conceptualización del concepto de número (en el concepto de equinumerosidad, y viceversa).

Así, a partir de HP (tal y como está formulado más arriba) y sustituyendo "Gs" por "Fs", obtenemos:

(1) El número de los Fs es idéntico (=) al número de los Fs syss hay una correspondencia uno-uno entre los Fs y los Fs (Es decir, syss hay exactamente tantos Fs como Fs).

(2) Hay exactamente tantos Fs como Fs (luego, por HP)

(3) El número de Fs es idéntico al número de Fs (luego, por el principio del contexto)

(4) El número de Fs existe

Es decir, a partir de HP podemos derivar:

(HP') El número de Fs *existe* syss hay exactamente tantos Fs como Fs

Parece evidente que debemos considerar a la parte derecha del bicondicional (2) como lógicamente verdadera (y por lo tanto necesaria) de manera que, según lo visto, "el número de Fs *existe*" quedaría establecido por medio de principios lógicos y por medio de HP, un principio puramente conceptual. HP' es por lo tanto una verdad lógica y por consiguiente, necesaria. El principio de Hume es una verdad analítica que

[10] Hartry Field centra gran parte de sus críticas precisamente en esta idea y compara la propuesta de los neo-fregeanos para demostrar la existencia de los números con el Primer Argumento Ontológico de San Anselmo para demostrar la existencia de Dios (criticado a su vez por Kant). Para Field, la existencia de las entidades matemáticas es conceptualmente contingente. Véase, Field (1993) y Hale y Wright (1992) para una respuesta a esta crítica.

establece la existencia de los números y además muestra que dicha existencia es conceptualmente necesaria[11].

Los neo-fregeanos afirman que identidades como HP o DE son analíticas y funcionan como *definiciones implícitas* de los conceptos de "número" o de "dirección". La identidad implica que las instancias de ambos lados de la misma tienen el mismo valor de verdad. Pero ya que la manera adecuada de leer estas identidades es como una explicación (definición implícita) su efecto es que debemos considerar los enunciados de identidad numérica (o de identidad entre direcciones) como teniendo las mismas condiciones de verdad que los enunciados de equinumerosidad (o paralelismo).

3.5. Definiciones implícitas

Si aceptáramos los argumentos de los neo-fregeanos y admitiéramos que HP representa una justificación para afirmar que la expresión "el número de" funciona sintácticamente como un término singular y, teniendo en cuenta que HP es una identidad verdadera y suponiendo que aceptásemos el principio del contexto, tendríamos que afirmar también que además se trata de un término singular que tiene efectivamente un referente (que además debe ser un objeto). Pero, incluso coincidiendo hasta este punto con los neo-fregeanos, aún queda por responder cómo es posible determinar, por medio de HP, el valor semántico de "el número de". Cómo saber el significado, el valor semántico, de ese término singular. Aún si aceptamos que la expresión "el número de" funciona sintácticamente como un término singular, ¿cómo determinamos su valor semántico?

Si lo que estamos persiguiendo es una explicación del platonismo y de nuestro conocimiento de los objetos abstractos no es suficiente afirmar que "el número de" o "la dirección de" funcionan sintácticamente como términos singulares o que hacen referencia a un objeto; ni siquiera basta con determinar que efectivamente su referente

[11] HP es una verdad analítica y necesaria pero esto no implica que sea una verdad lógica. HP implica la existencia de demasiadas cosas como para ser considerada una verdad lógica. De hecho, por este mismo motivo, como apunto en las objeciones, ni siquiera creo que sea correcto afirmar que se trata de un enunciado analítico

existe. El objeto al que esos términos singulares hacen referencia tiene que ser además de naturaleza abstracta[12]. Es muy posible interpretar las identidades (HP y DE) a través de lo que Wright denomina “ontological reductionism”. Es decir, aceptar que el término “dirección de”, por ejemplo, denota pero afirmar que su referente no es otro que dos líneas siendo paralelas, en otras palabras, es posible caer en la tentación de reducir los objetos abstractos a los concretos estableciendo así que cuando utilizamos el término “el número de” o “la dirección de” nos estamos refiriendo en realidad a la relación (concreta) de equinumerosidad o a la relación (también concreta) de paralelismo. Esto justificaría además el valor de verdad de las identidades: en ambos lados de las mismas estamos hablando de los mismos objetos, solo que usando nombres distintos (número/equinumerosidad, dirección/paralelismo).

Analizaremos un poco más adelante porqué los neo-fregeanos consideran esta interpretación errónea y las líneas para evitarla. Antes, es necesario analizar con un poco más de profundidad la noción de definición implícita y su relación con la noción de analiticidad y de conocimiento a priori. Los neo-fregeanos intentan explicar el valor semántico de los términos que aparecen en las identidades afirmando que éstas funcionan como definiciones implícitas de los términos que aparecen en ellas. De esta manera, evitarán el mencionado reduccionismo ontológico y podrán determinar el significado concreto de los términos singulares.

Una definición implícita es, a grandes rasgos, una definición en la que el significado de un término es dado por la utilización de enunciados que lo contienen imponiendo ciertos requerimientos a estos enunciados, por ejemplo, el que sean verdaderos. De esta manera, si estipulamos que el enunciado “#f” es verdadero, conocemos el significado de “#” y sabemos que su estructura sintáctica es correcta, podemos determinar el significado de “f”: le podemos asignar un significado tal que “#f” sea verdadero.

La intención de Hale y Wright es defender además que esta manera de interpretar HP como una definición implícita juega un papel fundamental en la explicación del conocimiento a priori en matemáticas y en lógica. Así, denominan “tradicional connection” a la idea de que

---

[12] Dejando a un lado en este contexto las tesis de Maddy

> [A]t least some important kinds of non-inferential a priori knowledge are founded in implicit definition. (2002)[13]

Este punto es importante, ya que si efectivamente se pudiera establecer esa conexión entre el conocimiento a priori y HP (como ejemplo paradigmático de definición implícita), el problema del conocimiento de los objetos abstractos perdería gran parte de su misterio. Si efectivamente HP funciona como una definición implícita y la llamada "tradicional connection" pudiera ser comprobada, una vez hayamos establecido que los conceptos guardan una relación de correspondencia uno-uno no tiene porqué haber ningún otro problema acerca de nuestro conocimiento de ciertos tipos de verdades acerca de los números. En palabras de Hale y Wright,

> A statement of numerical identity -in the fundamental case, a statement of the kind: The number of Fs=the number of Gs -is true, if true, in virtue of the very same state of affairs which ensures the truth of the matching statement of one-one correspondence among concepts, and may be known a priori if the latter may be so known [...]
>
> [S]o long as we can assertain that lines are parallel, or that concepts are one-one correspondent, there need be no *further* problem about our knowledge of certain basic kinds of truths about directions and numbers, for all their abstractness. For provided that the concepts of *direction* and *number* can be implicitly defined by Fregean abstraction, we can know statements of direction and numerical identity to be true just by knowing the truth of the appropriate statements of parallelism among lines and one-one correspondence among concepts. We can do so for the unremarkable reason that the truth conditions of the former are fixed by

[13]No queda claro en cualquier caso, o al menos esa es mi opinión, cómo se establece exactamente esta relación entre una definición implícita y el conocimiento a priori. Los argumentos a favor de la "tradicional connection" son quizás de los más débiles de todo el programa. De hecho los propios Hale y Wright son concientes de esta limitación y en la lista de 18 problemas para el neo-fregeanismo que elaboran en el apéndice final de su libro conjunto *The Reason's Proper Study* (2001), la cuestión acerca de la "tradicional connection" y acerca de la naturaleza misma de las definiciones implícitas es el primer problema de la lista.

> stipulation to coincide with those of the latter (2002: 118-9. Cursiva de los autores)[14]

Hay que tener en cuenta que, al tratarse de identidades (equivalencias lógicas), tanto HP como DE implican que el valor de verdad del lado izquierdo de cada una de ellas es el mismo que el del lado derecho. En otras palabras, al tratarse de una equivalencia lógica ambas partes deben hacer referencia a los mismos elementos. Esta es, sin duda, la parte más controvertida del programa neo-fregeano. Para ellos, como veremos, los principios de abstracción representan básicamente "reconceptualizaciones". Tal y como el propio Frege afirma,

> The Judgement 'line a is parallel to line b', or, using symbols, 'a // b' can be taken as an identity. If we do this, we obtain the concept of direction, and say: 'the direction of the line a is identical with the direction of line b'. Thus we replace the symbol // by the more generic symbol =, through removing what is specific in the content of the former and dividing it between a and b. We carve up the content in a way different from the original way, and this yields us a new concept (1893: 64)

Es decir, el reto de los neo-fregeanos es explicar satisfactoriamente en qué sentido (o de que manera) ambos lados del bicondicional (en sus diferentes instanciaciones) tienen el mismo contenido. Si afirmamos que existe una relación de identidad lógica entre, por ejemplo, la dirección de dos líneas y el hecho de que sean paralelas, estamos afirmando que ambas tienen el mismo contenido. Por lo tanto, el concepto de dirección (y la referencia al objeto abstracto) debe estar implícito de alguna manera en la noción de paralelismo. Cuando hablamos de dos líneas paralelas estamos, aunque sea una manera implícita, utilizando también el concepto de dirección. Pero esta afirmación, tal y como está planteada, no sólo puede ser problemática sino que además resulta altamente contra-intuitiva. Podemos por ejemplo imaginar una situación en la que alguien estableciera que dos líneas son paralelas sin poseer el concepto de dirección.

[14] Notar que en el primer párrafo de esta extensa cita es fácil caer en la "tentación" de lo que antes denominábamos "ontological reductionism". Lo que diferenciará las tesis de los neo-fregeanos de este reduccionismo es que ellos otorgan independencia semántica a el concepto de número (o dirección).

Podemos incluso imaginar una sociedad que supiera establecer cuando dos líneas son paralelas pero que no hubiese desarrollado el concepto de dirección, ¿tendríamos en este caso que afirmar que los hablantes de esta sociedad, cuando afirman que dos líneas son paralelas, están haciendo referencia al concepto de dirección aunque ellos no lo sepan?, ¿cómo pueden referirse a algo que no conocen?

Ante esto, Crispin Wright argumenta que no es lo mismo afirmar que un término tiene implicaciones existenciales que afirmar que hace referencia a algo. Podemos hablar de paralelismo y no conocer el concepto de dirección. Lo que ocurre en este caso, según Wright, es que aunque no estamos haciendo referencia al concepto de dirección, al hablar de paralelismo estamos, aún sin saberlo, adquiriendo un compromiso ontológico con el concepto de dirección.[15] La noción de "paralelismo" trae consigo la existencia del concepto de "dirección", pero eso no implica que los hablantes que utilizan el término "paralelismo" se refieran al término "dirección". Según Wright, ocurre algo similar cuando utilizamos términos como "abuela" o "tía". Cuando decimos que alguien es nuestra "tía" estamos implícitamente afirmando la existencia de algún hermano o hermana (una tía tiene que ser necesariamente la hermana de alguno de los padres), pero eso no significa que cuando usamos la palabra "tía" estemos haciendo también referencia a su hermano o hermana (a uno de nuestros padres).

3.6. Algunos Problemas

Por supuesto, las cosas nunca resultan tan sencillas. Las tesis de los neo-fregeanos se enfrentan a una serie de problemas en muchos casos decisivos. Algunos de ellos, como el llamado "Caesar Problem", afectan a la estructura misma del HP, otros a la noción de definición implícita o a su conexión con el conocimiento a priori. Analizaré los que considero son los problemas más graves del neo-fregeanismo, pero me centraré principalmente en el que considero es el más serio de todos, al menos para los intereses de los platonistas. Esto es, el problema de asegurar la existencia de los números: ¿hasta

[15] Lo mismo ocurre por supuesto en el caso de los números. Si hablamos de dos cantidades siendo equinumerosas estamos estableciendo necesariamente (sabiéndolo o sin saberlo) un compromiso ontológico con los números.

qué punto HP implica necesariamente (tal y como lo requerirían los platonistas) la existencia de los objetos matemáticos? En otras palabras, ¿hasta qué punto es necesario interpretar HP como una identidad verdadera *literal*?, ¿acaso no sería posible interpretarla, por ejemplo, como una identidad verdadera pero *ficcional*?

Esta última opción choca frontalmente con los intereses de los platonistas pero, me propongo argumentar, resulta mucho más consistente con la idea de HP como un principio analítico (tal y como Wright lo considera). ¿No es contradictorio afirmar que una identidad es analítica y que, a su vez, implica la existencia de varios objetos? ¿No está el principio de Hume demasiado "inflado" ontológicamente hablando para ser considerado como una identidad analítica?

Antes de comenzar a desglosar las posibles objeciones al neo-fregeanismo es necesario decir que ellos mismos (Hale y Wright) son conscientes de muchos de ellas. De hecho, dedican un apéndice de su libro *The Reason's Proper Study* a enumerar 18 posibles dificultades de la propuesta y explicar brevemente las posibles líneas para solucionarlas. El neo-fregeanismo, más que una tesis definida, debe considerarse como un proyecto, una línea de investigación abierta y en constante evolución. Por eso, más que enumerar nosotros también todos los problemas que encontramos, vamos a centrarnos en los más importantes y especialmente en aquellos que cuestionan la viabilidad misma del proyecto, la capacidad de los neo-fregeanos para asegurar las tesis de los platonistas y su definición del Principio de Hume.

3.6.1 ¿Es el Principio de Hume Analítico?

La cuestión de la analiticidad es muy amplia y compleja; aquí no vamos a entrar en el debate acerca de la naturaleza y la posibilidad misma del conocimiento a partir de enunciados analíticos, pero es necesario considerar aunque sea brevemente hasta qué punto es esto posible y hasta que punto el HP representa un ejemplo de analiticidad. Este punto es importante ya que una de las principales tesis de los neo-fregeanos es que, debido a que HP es un principio analítico y a partir de él podemos derivar, usando únicamente reglas lógicas, los principios básicos de la aritmética, las matemáticas (o al menos una gran parte de ellas) son también analíticas[16].

Hemos dicho que HP es una definición implícita del concepto de número. De acuerdo con la interpretación de las definiciones implícitas, si asumimos que "#f" es verdadera y conocemos el significado de #, podemos conocer el significado de "f": aquel que haga a la frase "#f" verdadera.

Pero si es suficiente conocer el significado de # (y la estructura sintáctica de la frase) para establecer a priori la verdad de "#f", entonces el significado de "f" no puede añadir nada "substancial" al valor semántico de la frase; no puede modificar el valor de verdad de "#f". El significado de "f" debe ser, en este sentido, *conservativo*.

El problema radica en que de hecho, en el caso de HP, "el número de", desde una lectura realista, sí añade contenido substancial a la frase. "El número de" implica un compromiso ontológico no presente, al menos en principio, en la relación de equinumerosidad.

Dicho de otra manera, ambos lados de la identidad difieren en los requerimientos ontológicos para establecer su verdad. Así, si analizamos por separado los dos lados del bicondicional:

a) el número de Fs = el número de Gs

b) existe una relación uno-uno entre los Fs y los Gs

observamos que a) requiere la existencia de los números para poder ser considerada una "verdad literal", mientras que b) no. Esto, por supuesto, pone en duda también la consideración de la identidad como una "equivalencia lógica"[17].

Ya mencionamos antes la respuesta de Wright frente a esto: aunque los hablantes no se refieran a los números en b) de hecho su existencia está implícita en el concepto

[16] Teniendo en cuenta que HP no representa una verdad lógica podríamos cuestionar, y de hecho ha sido cuestionado, hasta qué punto es correcto denominar al proyecto de Hale y Wright como "logicismo". Tal y como lo expresa Boolos (1997a:302): "No logic, no logicism".

[17] ¿Cómo es posible establecer una equivalencia lógica entre enunciados con implicaciones existenciales distintas? Por otro lado, otra cuestión relacionada con ésta e igualmente importante es ¿cómo es posible derivar la existencia de un tipo de objetos (abstractos, como los números) a partir de una relación de equivalencia con términos que denotan objetos de un tipo totalmente distintos?, ¿cómo puede derivarse lógicamente la existencia de un tipo de entidad a partir de la existencia de otra entidad de un tipo totalmente distinto?

de equinumerosidad. Esta respuesta no es suficiente, en mi opinión, para resolver este problema. Aún si aceptáramos la distinción de Wright entre las implicaciones existenciales de un término y la referencia de los enunciados (lo cual no está muy claro, sobre todo porque Wright justifica la existencia de los números precisamente por medio de la referencia), aun así, los requisitos para establecer la verdad de los enunciados en cada lado del bicondicional no son los mismos. Es posible que b) conlleve implícitamente la existencia de los números, pero, al menos en principio, esta implicación no juega ningún papel a la hora de determinar su valor de verdad.

Esto es especialmente importante ya que permitiría explicar el conocimiento de objetos abstractos (como las direcciones) a través del conocimiento de relaciones concretas. Tal y como afirma Wright,

> Knowledge about directions, admittedly abstract objects, is posible because statements about directions are made true or false by concrete state of affairs; it is in the properties and relations instantiated among lines that the truth or falsity of statements concerning direction consists. The answer however does not work by showing how knowledge “about” that kind of abstract object is really no such thing. [...] the explanation cannot work that way[...] since their understanding of talk of directions was bestowed independently of knowledge of the relevant equivalences (1983: 87)

Asumiendo entonces que todo lo dicho hasta ahora fuese correcto, el dilema de Benacerraf-Field quedaría resuelto de una manera relativamente sencilla. Basta con que conozcamos los valores de verdad de la relación uno-uno entre conceptos, o de la noción de paralelismo, para conocer los valores de verdad de la identidad entre los conceptos de número o de dirección, lo cual sería suficiente además para demostrar la existencia de los números y de las direcciones. Basta conocer a priori la verdad de HP para que tengamos conocimiento del concepto de número.

Sin embargo, es difícil no sentir cierta perplejidad ante la cita anterior de Wright. En ella establece que nuestro conocimiento de las direcciones es posible gracias a nuestro conocimiento del paralelismo ya que esto último determina la verdad o falsedad de los enunciados acerca de las direcciones. Pero también afirma que la semántica de los enunciados acerca de las direcciones debe ser tomada “at face value”; nuestra comprensión del discurso acerca de las direcciones es independiente de nuestra comprensión de la equivalencia (y por lo tanto de nuestra comprensión de los hechos concretos, de la relación de paralelismo entre las líneas). ¿No son estás dos afirmaciones contradictorias? Wright concluye,

> [T]he point of reduction of direction-sentences to line-sentences is not to demonstrate the causally umproblematic carácter of our knowledge of the former, but to remind us of –or bring to our attention- the existential presuppositions of the abstract tacitly present in familiar empirical statements whose knowability one would naturally have supposed to be uncompromised by any reasonable causal constraints upon knowing (1983: 89)

Harty Field ofrece una posible interpretación a esta aparente contradicción que, en mi opinión, es la única que se ajusta a los textos citados y al espíritu general del programa neo-fregeano. De acuerdo con esta interpretación:

> (L) Directions are entirely aceptable entities distinct from, but with every bit as much reality as, physical lines; nevertheless, their existente (and their properties) follow logically from the existente (and properties) of lines (1989: 165)

Como hemos dicho, para asegurar el platonismo y evitar tener que introducir una facultad análoga a la intuición, la existencia de las direcciones (o de los números) tiene que seguirse *necesariamente* de la existencia de las líneas físicas siendo paralelas (o de la relación de equinumerosidad en el caso de los números). Pero ¿cómo es posible garantizar esto? Necesitamos postular que las direcciones se siguen *lógicamente* del paralelismo entre líneas, pero ¿cómo es posible derivar lógicamente la existencia (necesaria) de un tipo de objetos a partir de otro tipo completamente distinto?

La cuestión es que aún si asumiéramos que la respuesta de Wright es válida y de alguna manera rechazáramos esta interpretación de Field, esta objeción da pie a otra, mucho más *perjudicial*. En realidad, no sólo se está afirmando que en ambos lados los compromisos existenciales sean distintos. Se está cuestionando algo más básico, se está cuestionando la introducción misma de un compromiso existencial. La existencia de los números es un requisito fundamental para considerar a HP una verdad literal pero ¿quién nos asegura que HP sea, de hecho, una verdad literal?

Es posible construir la identidad, y con ella "el número de", en términos nominalistas y esto no cambiaría el valor semántico del conjunto, salvo en lo que se refiere a la "literalidad" de la verdad. Podríamos interpretar "el número de" como un término singular sintácticamente hablando pero que funcionase semánticamente como un término ficcional (como Hamlet o Spiderman). La pregunta es, ¿qué nos impide realizar esta lectura nominalista? En mi opinión, el Principio de Hume (considerado como una definición implícita) no es suficiente para garantizar los compromisos existenciales requeridos por los platonistas. El Principio de Hume no es capaz de asegurar la existencia de los números.

Esta objeción tiene dos ramificaciones. Por un lado, si aceptamos que HP establece la existencia de los números, parece complicado considerarlo (tal y como los neofregeanos hacen) un principio analítico. Por otro lado, el hecho de que HP sea una definición implícita (analítica) no garantiza su capacidad para demostrar la existencia de los números.

La primera "ramificación", la que cuestiona el carácter analítico del Principio de Hume, es similar a las dudas formuladas por George Boolos en su artículo "Is Hume's Principle Analytic?". Tradicionalmente un enunciado, para ser analítico, tiene que cumplir las siguientes características, expuestas por Boolos:

> First, they are true; secondly and roughly speaking, they lack content, i.e., they make no significant or substantive claims or commitments about the way the world is; in particular, they do not entail the existence either of particular objects or of more than one object. (1997a: 303)

Es decir, para que un enunciado sea analítico no sólo basta con que sea verdadero, también tiene que haber ausencia de contenido. Pero, de nuevo, parece evidente que el Principio de Hume tiene demasiado contenido como para ser analítico. Al fin y al cabo, HP introduce o implica la existencia de nuevos objetos (los números) de manera que incumple una propiedad fundamental de la analiticidad.

Boolos sugiere que existe una clara analogía entre el principio de Hume y enunciados del tipo "El rey actual de Francia es de la realeza" ("The present king of France is royal"), que obviamente no es analítico pero que además seguiría sin ser analítico aunque hubiese un rey de Francia actual, ya que en cualquier caso no sería analítico que lo hubiese. Esta analogía se asienta sobre el hecho de que

> We have no analytic guarantee that for every value of "F", there is an object that the open definite singular description "the number belonging to F"denotes (1997a: 306)

No existe ninguna garantía analítica de que exista un objeto que sea la referencia de la descripción definida singular "el número de". Es más, los neo-fregeanos no sólo necesitan asegurar –analíticamente- la existencia de un objeto al que el término "el número de" denote; ese objeto tiene que ser además único: para cada concepto F debe existir un objeto único que lo satisfaga. Cada término singular (o descripción definida) debe hacer referencia a un y sólo a un objeto. "El número de Fs" tiene que denotar un número concreto y único (que es el objeto que satisface al concepto del número de Fs), no puede haber varios números que satisfagan una misma descripción.

Pero esto, como decíamos, introduce una nueva dificultad para los neo-fregeanos. ¿Cómo es posible garantizar –por métodos analíticos- que efectivamente existe un solo objeto al que el término "el número de" hace referencia? En palabras de Boolos,

> If numbers belonging to concepts F and G are supposed to be identical if and only if F and G are equinumerous, then how do we know that, for every concept, there is such a thing as a number belonging to that concept? (1997a: 307)

De acuerdo con HP dos números (que son objetos) son idénticos sí y sólo sí los conceptos de los que son números son equinumerosos, pero ¿qué garantía tenemos de que cada concepto *tenga* un número?, ¿y si efectivamente lo tiene, qué garantía tenemos de que sea único? En mi opinión, es imposible garantizar analíticamente la existencia de un objeto que satisfaga al concepto F (o que sea el referente de la expresión "el número de Fs") y mucho menos demostrar analíticamente que ese objeto sea único. Por ello, coincido con Boolos cuando concluye que,

> I don't see reason at all to believe that it is analytic that for every F, there is such a (unique) object x (1997a:308)

El problema no es meramente terminológico ni parece tener fácil solución. La naturaleza analítica de los principios de abstracción, y de HP en particular, conforma la base misma de la propuesta neo-fregeana. El problema es que su condición analítica es en sí misma un impedimento para establecer la existencia de los números u otros objetos abstractos (como las direcciones); la introducción de nuevos objetos le aporta demasiado contenido para ser analítico.

Sin embargo, y esto nos conduce a la segunda "ramificación" de esta objeción, podemos modificar HP de manera que su analiticidad no resulte problemática. El problema, claro, es que eliminaríamos las implicaciones existenciales del principio y con ello su interés para la defensa del platonismo (seguiría teniendo interés, ya que a partir de él podemos derivar lógicamente los principios básicos de la aritmética, como los axiomas de Peano, pero desde luego, para los platonistas, su valor sería muy inferior). En lo que sigue quisiera argumentar que el Principio de Hume es analíticamente válido sólo si lo consideramos como el consecuente de la implicación:

Si existen los números, entonces (HP).

Pero esto, por razones obvias, no es de mucha utilidad para los platonistas[18].

---

[18] Aunque yo creo que en cierta medida es así como Frege se enfrentaba a estos principios. Frege presuponía la existencia de los objetos matemáticos, su intención era definir su naturaleza y la de las

3.6.2. El principio de Hume y la existencia de los números

Los neo-fregeanos podrían responder a las objeciones anteriores recurriendo a las definiciones implícitas. Podrían argumentar que las definiciones implícitas conllevan un compromiso existencial porque, tal y como establece el principio del contexto, para que la identidad sea verdadera[19] los términos (singulares) que la forman tienen que tener referencia.

Hartry Field, en la línea de lo visto hasta ahora, ha desarrollado un argumento, en mi opinión muy poderoso, en contra de esta idea. Ya vimos al principio de este apartado que uno de los elementos básicos de la propuesta de los neo-fregeanos es, además del principio del contexto, la tesis de la prioridad de la sintaxis (sobre la ontología). Gracias a esta tesis los neo-fregeanos pueden derivar, siguiendo a Frege, la existencia de los números a partir de identidades como el principio de Hume.

Field propone distinguir entre una tesis de la prioridad "fuerte" y otra "débil". De acuerdo con la tesis débil de la prioridad de la sintaxis, los términos numéricos funcionan sintácticamente como términos singulares y por lo tanto también funcionan semánticamente como tales. Esto asegura la imposibilidad de reducir los términos numéricos a términos acerca de la correspondencia uno-uno (términos de la equinumerosidad). De esta manera, se mantiene la independencia semántica de los términos numéricos y se evita el reduccionismo ontológico (reducir los números a relaciones de equinumerosidad).

Siguiendo la exposición de Field, esta tesis de la prioridad sintáctica débil es suficientemente potente como para garantizar los compromisos existenciales de enunciados del tipo:

(1) "3+4=7"

---

matemáticas, pero siempre partiendo de posturas platonistas (no llegando a ellas). Los neo-fregeanos parecen haber obviado este punto de la propuesta de Frege, lo cual les lleva a equívocos.

[19] Para que la identidad sea una verdad "literal"

(2) “El número de libros en esta habitación es mayor o igual que 3”

Pero no elimina completamente la posibilidad de negar esta implicación existencial. En diversos momentos a lo largo de este trabajo hemos señalado que para defender una postura platonista no es suficiente justificar la existencia de los objetos matemáticos; es preciso además demostrar la *necesidad* de dicha existencia, eliminar toda duda posible. Los neo-fregeanos no son una excepción, para defender sus tesis platonistas, para defender convincentemente la existencia de los objetos matemáticos, tienen que desarrollar un argumento que demuestre que, únicamente por medio del principio de Hume y del principio del contexto, es posible inferir que los términos numéricos refieren y que los números (como objetos) existen. Si los números no existieran necesariamente además, ¿cómo sabríamos que existen? Tendríamos que introducir alguna facultad de conocimiento como la intuición gödeliana, y eso es precisamente lo que los neo-fregeanos quieren evitar. Wright afirma que es posible conseguir esto por medio de la tesis de la prioridad de la sintaxis,

> Frege’s proposal, I suggest, is that the fact that our arithmetical language has those features is sufficient to set up natural numbers as a sortal concept, whose instances, if it has any, will thus be objects, furnishings of the world every bit as objective as mountains, rivers and trees. And, once again, that the concept does indeed have instances is settled by the truth of the appropriate arithmetical statements.
>
> But how can such considerations be enough to settle the matter? [...]What if there really are no such genuine objects? And how, to reiterate the empiricist worry, can we possibly satisfy ourselves that there are such objects if there can be no empirical confrontation with them? Well, it is evident that Frege’s position requires that such doubts be vacuous; there is to be no possibility of such a mistake (1983: 13-4)

Lo que hace falta es una manera de afirmar que es *necesariamente* verdadero que los números existen, que toda cuestión acerca de la no-existencia de los números resulta vacía, carente de sentido. Y, tal y como muestra Field, la tesis débil de la prioridad de la sintaxis no es capaz de proporcionar esto.

Alguien podría aceptar, en vista de lo dicho, que (2) es verdadera y por lo tanto que el término "3" (al ser un término singular) lleva consigo un compromiso existencial, pero podría igualmente seguir a Field y afirmar que es posible reformular (2) de manera que "3" dejara de funcionar como un término singular (y pasase a ser parte de un cuantificador numérico) y por lo tanto no conllevara ningún compromiso conceptual. De esta manera, es posible reformular (2):

(2') "Hay al menos 3 libros en la habitación"

Por supuesto, la nominalista que defienda una reformulación de este tipo tendrá que aportar razones por las que debamos preferir (2') sobre (2) y demostrar además que es posible llevar a cabo reformulaciones similares en el resto de los casos relevantes. Pero esto no es lo que a nosotros nos interesa aquí. Lo relevante es señalar que la definición implícita más el principio del contexto no garantiza la existencia (necesaria) de los números o, dicho en otras palabras, no imposibilita la aparición de respuestas nominalistas. Si lo que queremos es justificar nuestro conocimiento de las entidades matemáticas y además establecer que dicho conocimiento es a priori necesitamos demostrar que la existencia de esas entidades es necesaria, tenemos que *probar*, por medio de una definición implícita, que esos objetos existen.

En mi opinión, Field está en lo cierto al afirmar que no es posible, sólo con la tesis débil de la prioridad, establecer, como Wright hace en su libro *Frege's Conception of Numbers as Objects* que

> It is a preconception inbuilt into the syntax of our arithmetical language that "4" is not only a singular term, but one which in fact denotes (1983)

Las exigencias impuestas por los neo-fregeanos a nuestro conocimiento a través del HP son ciertamente fuertes. De acuerdo con ellos, si conocemos (a priori) el valor de verdad de enunciados acerca de la correspondencia uno-uno, conocemos (a priori) el valor de verdad de los enunciados acerca de los números. Esto implica que la equivalencia debe asegurar la existencia de los números necesariamente – “beyond any doubt”.

Pero hemos argumentado que es posible interpretar HP como una verdad no literal, interpretando los términos numéricos en clave ficcionalista (y por lo tanto rechazando el compromiso existencial –implícito o explícito-). Además, hemos reforzado esta idea por medio de la crítica a la supuesta analiticidad del principio (si efectivamente implicara la existencia de los números, difícilmente podría ser considerado analítico). Por otro lado, hemos demostrado, siguiendo a Field, que la tesis débil de la prioridad no asegura que todas las dudas acerca de la existencia de los números carezcan de sentido.

Obviamente, frente a esto último, la solución radica en desarrollar una tesis *fuerte* de la prioridad. Pero de nuevo, esto no es tan sencillo. ¿qué criterios se podrían introducir para *endurecer* la tesis de la prioridad y asegurar que los términos numéricos no sólo funcionen siempre como términos singulares sino además como términos singulares que denotan?

3.7. Conclusión

El Principio de Hume no es suficiente, en mi opinión, ni para justificar una postura platonista ni para fundamentar nuestro conocimiento de los objetos matemáticos. Y el problema es que es muy difícil pensar en vías para aumentar su alcance explicativo sin renunciar a (su ya de por sí dudosa) analiticidad. En mi opinión, el Principio de Hume retoma su condición analítica y ejerce correctamente su papel como fundamento para la derivación de los principios de la aritmética[20] sólo si lo

[20] En cualquier caso, siguiendo a Heck (manuscrito), es posible cuestionar la validez de esta derivación. Aun si asumimos que, efectivamente, es posible derivar a partir de HP y las definiciones Fregeanas los principios de Peano (PA); es igualmente cierto que podemos derivar HP a partir de PA y determinadas definiciones. En otras palabras, cabe cuestionar la supuesta prioridad conceptual del HP sobre PA, el motivo por el que HP es supuestamente más “fundamental” que PA o que otras características de los números.

consideramos como el consecuente de un condicional, cuyo antecedente sea la suposición de que los números existen. Es decir:

(HP*) Si los números existen, entonces [$\forall F \forall G$ (nx:Fx =nx:Gx $\leftrightarrow$ F 1-1 G)][21]

Pero por supuesto, este es un principio mucho menos interesante[22]. Los defensores del platonismo tendrían que desarrollar una teoría para demostrar la verdad del antecedente y nuestro conocimiento: precisamente lo que los neo-fregeanos pretendían obtener por medio de HP.[23]

En cualquier caso, ya hemos dicho que la propuesta de Hale y Wright no pretende ser una solución "definitiva" a los problemas epistemológicos. Se trata más bien de un proyecto en fase de gestación. Los problemas están sobre la mesa y ellos son los primeros en admitirlos.

Aunque precisamente son las objeciones que he expuesto aquí las que menos aceptan. De hecho Hale y Wright mantienen una larga y fructífera discusión con Field en una serie de artículos acerca de algunos de los temas aquí tratados, de la misma manera que lo hicieron con Boolos. No creo que hayan conseguido dar una respuesta satisfactoria a las objeciones, ni a las de Field y Boolos ni a las que yo planteo, pero eso no significa que no puedan hacerlo en un futuro. Los problemas que he presentado son, creo, suficientemente importantes como para hacer que su propuesta fracase pero no creo que sean absolutamente "definitivos".

Su propuesta tiene la gran virtud de ser muy flexible y de basarse en principios firmes (los de la teoría de Frege), no acuden a ninguna facultad "misteriosa" de conocimiento, ni renuncian a nuestras intuiciones básicas acerca de los objetos matemáticos (no renuncian ni a su carácter abstracto ni a su condición de objetos). Ese

[21] Field propone una lectura similar del principio, y no es el único. Neil Tennant (1987), por ejemplo, propone una interpretación en clave constructivista de HP

[22] Aunque no carente de interés ya que a partir de él podemos derivar, usando la lógica de segundo orden, los principios básicos de la aritmética.

[23] En el capítulo dedicado a las conclusiones, como ya he dicho, intentaré esbozar una postura según la cual el compromiso ontológico no es estrictamente necesario para los platonistas o, mejor, no resulta especialmente relevante ya que es posible desarrollar una noción de verdad *literal* sin comprometernos con la existencia de los objetos abstractos. Las conclusiones pues son similares, el problema es que, dentro de la filosofía del lenguaje de Frege y de su visión de la verdad parece que si eliminamos el compromiso ontológico estaremos inevitablemente *condenándonos* a una noción de verdad *ficcional*.

es en mi opinión su gran atractivo y por ello merece la pena estudiarla a fondo e intentar buscar vías para salvar las dificultades. La discusión sigue abierta y de hecho, en los últimos años, más viva que nunca.

PARTE II

We have to work within some conceptual scheme or other; we can switch schemes but we cannot stand apart from all of them. It is meaningless, while working within a theory, to question the reality of its objects or the truth of its laws, unless in so doing we are thinking of abandoning the theory and adopting another.

W.V. Quine

4

MICHAEL DUMMETT: LOS PROBLEMAS SEMANTICOS DEL REALISMO

4.1. Introducción: El Realismo Semántico

Durante la primera parte del trabajo hemos intentado demostrar que los problemas epistémicos del platonismo resultan prácticamente imposibles de solucionar asumiendo las premisas básicas de lo que hemos venido denominando platonismo tradicional. De hecho, también hemos observado cómo no basta llevar a cabo ciertas modificaciones en las hipótesis de partida del platonismo (como las planteadas por Maddy o por los Neo-Fregeanos) para encontrar una respuesta al dilema. En esta segunda parte del trabajo vamos a intentar encarar el problema desde una óptica diferente, analizando las características inherentes no sólo del platonismo, sino de un tipo de realismo que también podríamos denominar "tradicional" pero al que autores como Putnam han bautizado como "realismo metafísico".

Durante la introducción (y en algunos apartados de la primera parte) pusimos en tela de juicio la dicotomía, generalmente asumida por el platonismo tradicional, entre objetos abstractos y objetos concretos. Esta falta de precisión a la hora de definir los objetos resultará decisiva, como veremos, para nuestra propuesta final a favor del desarrollo de un tipo de realismo "moderado" (en el ámbito de las matemáticas, pero también con aplicaciones en el resto de las áreas), un tipo de realismo en el que las suposiciones de tipo metafísico se reduzcan al mínimo. La mejor manera de argumentar en favor de este tipo de realismo es a través del análisis semántico de los enunciados del área en cuestión (en nuestro caso, de los enunciados matemáticos)[1].

El análisis semántico cuenta con numerosas ventajas. Una de las más importantes es su carácter general. Recordemos que, según el dilema de Benacerraf-Field, de la misma manera que los platonistas se enfrentan al problema de justificar el conocimiento de los objetos abstractos, los anti-realistas tienen a su vez que enfrentarse al problema de la uniformidad semántica. Es decir, si debido a las limitaciones epistémicas, decidimos adoptar una postura anti-realista en las matemáticas, eliminando los objetos abstractos o al menos definiéndolos como construcciones mentales de los sujetos, el valor de verdad de nuestros enunciados sufrirá inevitables modificaciones (pasará por ejemplo de ser una verdad literal a ser una verdad ficticia o se verá sustituida por la noción de prueba). El problema es como explicar entonces, por un lado, la aplicabilidad de las matemáticas al mundo empírico y, por otro lado, como trabajar con dos nociones de verdad substancialmente distintas. Por eso, es importante que nuestras conclusiones semánticas en un ámbito sean aplicables al resto (o al menos, que desarrollemos alguna manera de hacerlas coherentes entre sí).

Además, el proceso es *reversible*. De la misma manera en que las reflexiones acerca de los problemas epistémicos o del valor de verdad de los enunciados matemáticos tienen importantes consecuencias en el resto de los ámbitos, las reflexiones acerca de estos otros ámbitos tienen también importantes conclusiones para las matemáticas. Un ejemplo claro de esto son los argumentos contra el realismo metafísico desarrollados por Putnam, que veremos en el capítulo cinco. Lo importante para nosotros en cualquier caso es que la reflexión acerca del carácter semántico de los

[1] No podría ser de otra manera. ¿Cómo podríamos argumentar a favor de la supresión de la mayor parte de los supuestos metafísicos por medio de hipótesis y argumentos metafísicos? Por este motivo, los problemas analizados en la introducción acerca de la naturaleza de los objetos abstractos, aunque efectivamente son un indicativo de que algo falla, por decirlo de alguna manera, en las hipótesis de partida del platonismo tradicional, no pueden constituir en sí mismos un argumento definitivo para el abandono de dichas hipótesis y con ellas del abandono del platonismo tradicional.

enunciados nos conducirá a conclusiones de carácter general acerca del realismo que, en mi opinión, cuando son aplicadas al ámbito de las matemáticas pueden resultar importantes para el problema epistémico. De hecho, en el capítulo final adelantaremos una posible vía de solución a este problema a través de la asimilación de las conclusiones extraídas del análisis semántico.

Antes de comenzar a desglosar el contenido de estas propuestas de carácter semántico sin embargo, conviene hacer ciertas aclaraciones aunque sea brevemente.

En primer lugar, los problemas semánticos (que a continuación detallaremos) no son independientes de los epistémicos. De hecho, en mi opinión, son la “otra cara de una misma moneda”. Representan otra manera de formular las mismas limitaciones del realismo: su incapacidad para explicar y justificar la conexión entre nuestras representaciones mentales y el mundo (supuestamente independiente).

En segundo lugar, las alternativas anti-realistas sobre las que vamos a trabajar no niegan la existencia de los objetos (ni la de los matemáticos ni la de los no-matemáticos). Esto es, no son “irrealistas”. De hecho, el anti-realismo, o al menos el anti-realismo que aquí nos interesa, puede ser considerado como un tipo de realismo moderado, como un realismo constructivista. No niega la existencia de los objetos matemáticos (ni mucho menos de los no-matemáticos), niega algunas de sus supuestas características. Concretamente, aunque hay grandes variaciones entre los autores, niega (o al menos cuestiona) la independencia de dichos objetos (y por lo tanto, el que los enunciados en los que aparezcan respeten el principio de bivalencia cuando su verdad no pueda ser probada).

En tercer lugar, al centrarse en el análisis del lenguaje y no de unos objetos en concreto, sus tesis tienen un carácter más general, no restringido al caso de las matemáticas. De nuevo, hay grandes diferencias entre los autores en el grado de *globalidad* que confieren a sus propuestas, pero en general todas ellas tienen que responder al segundo tipo de problema que planteaba el dilema de Benacerraf: encontrar una semántica uniforme para todo el lenguaje[2]. Es decir, si aceptamos que en el ámbito

---

[2] Generalmente se atribuye a Dummett la defensa de un tipo de anti-realismo global, esto se deriva de sus intentos de generalizar la noción de prueba matemática al ámbito de lo empírico (por medio de la noción de verificación). En cualquier caso, hasta qué punto Dummett defiende o no un anti-realismo global no está, en mi opinión, del todo claro. Véase, por ejemplo, Green (2001), en donde la autora defiende que

matemático la verdad no puede trascender nuestra evidencia (por medio del análisis semántico de los enunciados matemáticos) y por lo tanto adoptamos una teoría del significado según la cual la verdad debe ser sustituida (en su papel central dentro de la teoría del significado) por la noción de prueba, nos vemos obligados a desarrollar una teoría similar para el caso de los enunciados no-matemáticos (o si son distintas, justificar su consistencia).

En cuarto lugar, por todo lo dicho, en las propuestas de carácter semántico pierde peso la distinción entre objeto abstracto/objeto concreto que tanta importancia había tenido en la primera parte de este trabajo. Esto representa, en mi opinión, una ventaja obvia ya que, tal y como vimos en la introducción, esta distinción no es ni mucho menos clara. Pero también conlleva la limitación antes mencionada de tener que desarrollar una teoría del significado "global" (o compatibilizar las distintas teorías para los distintos ámbitos). En cualquier caso, obviamente, el problema acerca de la naturaleza de los objetos (de uno u otro ámbito) no desaparece, pero queda relegado a un segundo plano.

Tal y como afirma insistentemente Dummett, la metafísica queda totalmente subordinada a la teoría del significado. Es esta última la que determinará la existencia o no de los objetos y su naturaleza intrínseca[3]. Una vez hayamos determinado las características del significado de nuestros enunciados, las cuestiones metafísicas nos resultarán simplemente obvias ("will force themselves upon us", en palabras de Dummett).

Desde este punto de vista, sólo resolveremos los problemas de índole metafísica a través del estudio de las condiciones de verdad de los enunciados en los que se expresan (y por lo tanto, del significado de estos enunciados). La manera en la que resolvamos nuestra noción de verdad o la manera en que determinemos hasta qué punto es objetivo nuestro conocimiento (y cómo podemos llegar a conseguir dicha objetividad) determinará nuestra postura metafísica, nuestra visión del mundo y nuestra relación con

---

Dummett (en contra de lo que se suele afirmar) no aboga por una defensa del anti-realismo con respecto al pasado.

[3] Algunos autores, notablemente Michael Devitt (1984), encuentran este aspecto problemático e insisten en la importancia de las cuestiones metafísicas. Trataremos esta cuestión con más detenimiento a lo largo de la exposición.

él (si los objetos -matemáticos o de otra índole- existen con independencia de nosotros o por el contrario son construcciones mentales).

Muy brevemente, los grandes retos semánticos del realismo son cinco. Los dos primeros han sido formulados y desarrollados principalmente por Michael Dummett y los tres últimos por Hilary Putnam. Todos ellos hacen referencia al problema de la representación, al problema de nuestro acceso y conocimiento del mundo externo. Es decir, todos intentan dar respuesta a la pregunta acerca de las conexiones existentes entre nuestras creencias y los estados de hecho o los objetos de un mundo independiente de nosotros (que supuestamente son representados por dichas creencias).

1. *El problema de la manifestabilidad* ("Manifestation challenge"). Toma como punto central el uso que hacemos de las palabras y las frases. A partir de esto, el problema es fácil de derivar, basta con cuestionar qué aspecto concreto de nuestro uso lingüístico ofrece la evidencia necesaria para establecer la relación (necesaria para los realistas) entre el lenguaje (las palabras y los enunciados) y el mundo, compuesto por estados de cosas independientes de nosotros. De acuerdo con este problema, no hay nada en nuestro comportamiento lingüístico que proporcione dicha evidencia. Nuestro conocimiento debe manifestarse de alguna manera en nuestro comportamiento, pero no es posible encontrar pruebas en dicho comportamiento de la existencia de una conexión creencias/mundo-independiente.
2. *El problema del aprendizaje del lenguaje* ("Language acquisition challenge"). Si dicha conexión existiera, y dado que no es manifestada en comportamiento, el aprendizaje del lenguaje sería imposible (al menos de explicar). ¿Cómo sería posible aprender un lenguaje, y con él la relación entre las palabras y el mundo -independiente-, si ni siquiera los hablantes competentes del lenguaje saben determinar dónde se produce esta relación, esto es, no son capaces de manifestarlo en comportamiento?
3. *El problema de los cerebros en cubetas* ("Brains in a vat challenge"*).* La suposición de un mundo formado por estados de cosas totalmente independientes de nosotros puede arrastrarnos hacia posturas radicalmente escépticas. El realismo implica que podríamos estar todos engañados (respecto a

nuestras creencias acerca del mundo exterior) y si lo estuviéramos, no podríamos creer que lo estamos, no podríamos formar la creencia de que somos, por ejemplo, cerebros en cubetas (y que todo lo que consideramos real no es más que un engaño).

4. *El problema de la relatividad conceptual* ("Conceptual relativity challenge"). No tiene sentido preguntarnos por la existencia o la naturaleza del mundo independientemente de nuestra manera de aproximarnos a él. Conceptos como "objeto" o "propiedad" cambian de sentido a medida que nos movemos de un esquema conceptual a otro. De esto se deriva la posibilidad de que haya dos teorías acerca del mundo que sean descriptivamente equivalentes pero lógicamente incompatibles desde el punto de vista realista.

5. *El problema de los modelos* ("model-theoretic challenge"). Existen demasiadas maneras en las que nuestros términos pueden ser asignados a elementos del mundo. Los realistas tendrían que aceptar que términos perfectamente definidos como "perro" son indeterminados, o bien argumentar que una teoría ideal que supere todos los exámenes concebibles pueda ser falsa, es decir, que su asignación de términos a objetos del mundo no sea la "correcta" o la que se pretendía. Pero esto último, según el problema de los modelos, no es posible, ya que siempre será verdadera en uno de los múltiples modelos posibles. Lo que no es posible es, como pretenden los realistas, diferenciar cuál de esos modelos, de esas relaciones entre los términos y el mundo, es el correcto (en última instancia, por lo tanto, el argumento ataca la idea realista de que exista o pueda existir una única descripción válida del mundo)

4.1.1. Caracterización general del Realismo

Antes de intentar comprender estas dificultades y las alternativas propuestas en la literatura, creo que resultaría conveniente ofrecer una caracterización clara y exhaustiva de lo que entendemos por realismo. Debido a que el realismo semántico se basa en enunciados y no en objetos y debido a que, tal y como se afirma en el dilema de

Benacerraf-Field, cualquier defensor del anti-realismo en el ámbito de las matemáticas tendrá que aportar una explicación de la continuidad entre la semántica aplicada al caso matemático y al no matemático, la definición de realismo que vamos a ofrecer no se limita al caso de las matemáticas o de los objetos abstractos. Por el contrario, el objetivo de esta parte del trabajo (uno de ellos) es ofrecer una visión general de lo que sea el realismo y sus oponentes.

Para ello, estableceremos una serie de principios o de tesis básicas definitorias de las posturas realistas. La enumeración no pretende ser exhaustiva, cada una de las tesis puede ser (y de hecho es) entendida de muy distintas maneras según los autores o según el área de conocimiento del que se esté hablando. Además, muchas de estas tesis (notablemente las 7, 8 y 9), convenientemente reformuladas, son admitidas por ciertas posturas generalmente denominadas anti-realistas[4]. En cualquier caso, todas ellas reflejan aspectos esenciales del realismo y prácticamente todas han sido objeto de crítica por algún filósofo anti-realista (o irrealista).[5]

Tesis básicas del realismo

1. *Externalismo o referencialismo*[6]

> Existe el mundo "exterior", formado por cosas (y estados de cosas). Nuestros enunciados (declarativos) hacen referencia a ese mundo externo, a cosas que existen con independencia de nosotros

[4] Los realistas suelen hacer especial hincapié, como veremos, en términos como la verdad o la referencia para expresar sus tesis. El problema es que estos términos son también utilizados por los anti-realistas para formular las suyas. Esto puede resultar a veces confuso y por eso es importante saber el sentido que unos y otros les dan a sus términos. De otra manera, podría parecer, en algunas ocasiones, que comparten plenamente muchas de las tesis básicas que definen sus posturas. Al fin y al cabo, hay que tener en cuenta que el anti-realismo consiste básicamente en la reformulación de nociones básicas como la verdad o la referencia. Por eso, un mismo principio puede llegar a expresar cosas completamente diferentes bajo una u otra perspectiva.

[5] Para la elaboración de esta lista he seguido básicamente la ofrecida por Neil Tennant (1997: 27-42). Pero también he incorporado elementos de las definiciones ofrecidas por otros autores (principalmente por Dummett, pero también por Wright y por Putnam) y elementos propios.

[6] Este último término es el que utiliza Dummett. Wright (1988) lo denomina *modesty*.

2. Independencia

Esas cosas que forman el mundo exterior son de la manera que son con total independencia de nosotros y de nuestras creencias acerca de ellas. De esta manera, la verdad de nuestros enunciados es igualmente independiente de nosotros.

3. *Descubrimiento*

Cuando conocemos la verdad de los enunciados acerca de la realidad externa, estamos descubriendo cosas acerca del mundo, en ningún caso estamos creando o construyendo nada.

4. *Bivalencia o carácter determinado de la verdad sobre la realidad externa*

El mundo externo, las cosas que existen con independencia nuestra, hacen que nuestros enunciados acerca de ellas sean definitivamente verdaderos o definitivamente falsos; con independencia de que nosotros efectivamente conozcamos (o podamos conocer) su valor de verdad.

5. Desconocimiento potencial

El hecho de que la verdad acerca del mundo externo sea independiente de nosotros puede tener como consecuencia que no seamos capaces de conocerla. Nuestro conocimiento es limitado, pero la verdad o falsedad de los enunciados está siempre determinada por algún estado de cosas. Es posible interpretar esta tesis de dos maneras.

5.a. La verdad puede trascender al conocimiento

No toda la verdad tiene que ser cognoscible. Es decir, el conocimiento de las condiciones de verdad puede no ser posible, incluso si idealizáramos nuestras capacidades cognitivas o las condiciones de dicho conocimiento.

5.b. Posibilidad de error radical

No todo lo que es supuestamente cognoscible tiene que ser verdadero. Incluso si consideramos una teoría ideal, basada en toda la evidencia posible para los seres humanos y como resultado de los mejores métodos de verificación posibles, esta teoría podría ser falsa.

6. *Inaccesibilidad potencial*

Es posible que la realidad esté constituida de tal manera que sea imposible conocerla completamente. La realidad, parte de ella, puede ser inaccesible para nuestro aparato cognitivo

7. Accesibilidad Epistémica.

Aún así, podemos estar seguros de que muchos de nuestros enunciados acerca de la realidad son ciertos (aunque tal vez no todos, ni absolutamente seguros, por 5.a y 5.b). Es decir, tenemos razones suficientes para pensar que nuestras creencias acerca del mundo están justificadas

8. Intersubjetividad y carácter comunicable de nuestro conocimiento

Nuestro conocimiento puede ser compartido y adquirido de manera intersubjetiva.

9. El conocimiento del significado es conocimiento de las condiciones de verdad

Cuando conocemos el significado de un enunciado (y por lo tanto somos capaces de comunicarlo) lo hacemos porque conocemos las condiciones bajo las cuales dicho enunciado es verdadero. Aún más, una teoría del significado debe basarse en el análisis de las condiciones de verdad (ser “truth-conditional”)

10. “El ojo de Dios”[7]

Hay un punto de vista, generalmente considerado imaginario, desde el que un ser ideal (una especie de extensión del ser humano) puede tener acceso a todas las cosas y a todos los hechos del mundo (puede conocer, esto es, el mundo “tal y como es”). Desde este punto de vista por lo tanto, es posible establecer la verdad o falsedad de todos los enunciados posibles acerca del mundo.

[7] Este es el término utilizado por Putnam, Tennant (1997) llama a esta tesis “*Archimedeanism*”y Nagel (1986) “view from nowhere”

Como hemos dicho, con estas 10 tesis o principios básicos no pretendemos ofrecer una definición exhaustiva del realismo, pero sí ofrecer una visión sustantiva y general de los puntos que, de manera general, la mayor parte de las posturas realistas consideran esenciales. Es importante recalcar que no todos los tipos de realismos tienen porqué aceptar *todas* las tesis, de la misma manera que alguna de ellas puede ser adoptada por los anti-realistas (previa reformulación de los términos clave). Además, y aunque no vamos a entrar aquí en detalles, existen algunos problemas en esta caracterización (problemas que por otro lado reflejan algunas dificultades intrínsecas del realismo en sí).

De estas dificultades, la más acuciante es, en mi opinión, la cuestión acerca de la consistencia lógica entre ellas. No es siempre posible armonizar unas tesis con otras, existe una tensión obvia, podría incluso afirmarse que inconsistencia, entre alguna de ellas. Veremos más adelante que Dummett argumenta precisamente, a través del problema de la manifestación, que la concepción del significado como verdad y de la verdad como bivalente (tesis 9 y 4 respectivamente) es incompatible con la suposición de que nuestro conocimiento del significado de los enunciados es comunicable (tesis 8).

En esta segunda parte del trabajo intentaremos analizar las virtudes y los problemas de estas tesis realistas, desde el punto de vista semántico y a través de los trabajos de tres autores principalmente: Dummett, Putnam y Wright.

4.2. Michael Dummett

Michael Dummett, probablemente el autor que con mayor énfasis y seriedad haya defendido las tesis del anti-realismo semántico, es un autor especialmente prolífico y complejo. La línea principal de su argumentación se ha mantenido estable a lo largo de los años, pero sus tesis han ido sufriendo ligeras aunque importantes transformaciones, especialmente en lo que se refiere a su definición del concepto de verdad y de verificación.

La propuesta anti-realista de Dummett está profundamente marcada por tres filósofos, o tres corrientes filosóficas: Frege, el segundo Wittgenstein y el intuicionismo matemático de Brouwer. A medida que avancemos en nuestra exposición se irá haciendo patente (espero) la influencia de estos autores en su pensamiento.

4.2.1. Realismo vs. Anti-realismo

Siguiendo con la definición del realismo ofrecida anteriormente, estructurada en 10 tesis principales, Dummett considera que las verdaderamente definitorias y por lo tanto problemáticas son las siguientes[8]:

1. (tesis 9) Teoría del significado basada en las condiciones de verdad ("truth conditional theory of meaning"). Una teoría del significado adecuada para el discurso declarativo debe regirse por las condiciones de verdad. Además, de esto se sigue que nuestro conocimiento del significado de un enunciado implica conocimiento de las condiciones bajo las que dicho enunciado es verdadero. Comprender un enunciado es captar sus condiciones de verdad.

2. (tesis 1) Referencialismo ("referentialism"). Para cada enunciado verdadero, debe haber algo por lo cual es verdadero. Existe un mundo exterior (e independiente) al cual hacemos referencia con nuestros enunciados y el cual determina el valor de verdad de los mismos[9]

3. (tesis 5a) Trascendencia del conocimiento ("knowledge transcendent"). Admisión de la posibilidad de que existan verdades que trasciendan nuestra capacidad de verificación ("verification-transcendent truths"). No todas las verdades son cognoscibles

4. (tesis 4) Principio de bivalencia para enunciados no-decidibles ("principle of bivalente for non-effectively decidable statements"). Cada enunciado es (determinadamente) verdadero o falso, con independencia de nuestra capacidad para llegar a saber si es verdadero o falso.

[8] En este punto me guío principalmente de la clasificación hecha por Wright (1993: 435).
[9] Dummett incluye la condición de independencia en esta tesis. La realidad, tal y como la conciben los realistas, es externa e independiente.

De acuerdo con esto, Dummett afirma que el debate entre realistas y anti-realistas es esencialmente un debate acerca de las condiciones de verdad de los enunciados, y no un debate acerca de la existencia o no de ciertas entidades. En sus propias palabras,

> Realism I characterize as the belief that statements of the disputed class possess an objective truth-value, independently of our means of knowing it: they are true or false in virtue of a reality existing independently of us. The anti-realist opposes to this the view that statements of the disputed class are to be understood only by reference to the sort of thing which we count as evidence for a statement of that class (1963: 146)

Esto es, los realistas mantienen que el significado de los enunciados de la clase en disputa[10] no está determinado por el tipo de evidencia que poseamos o que podamos poseer para establecer su verdad (o falsedad). Muy al contrario, el significado consiste en la manera en que su verdad o su falsedad queda determinada por un estado de cosas independiente de nosotros, ajeno a nuestra evidencia o a nuestro conocimiento. Es importante señalar que Dummett es bastante radical en este punto ya que para él, afirmar que un enunciado posee un valor de verdad objetivo e independiente de nuestro conocimiento implica no sólo que es independiente de nuestra capacidad *actual* para probarlo, sino que un enunciado puede ser verdadero incluso si es imposible siquiera que pudiéramos encontrar una prueba de ello[11].

Los anti-realistas por el contrario, sostienen que el significado de dichos enunciados viene determinado por el tipo de evidencia que tengamos (o podamos tener) para establecer su verdad (o falsedad). Esto es, según los anti-realistas, los enunciados (de la clase en disputa) de ser verdaderos, lo son en base a algo que nosotros podemos conocer y que consideramos como evidencia suficiente para ellos. Así,

[10] Por enunciados de la clase en disputa Dummett entiende los enunciados que estemos analizando, así, puede estar haciendo referencia a enunciados de un ámbito determinado (enunciados matemáticos, por ejemplo) o a enunciados con unas características determinadas (como por ejemplo, enunciados declarativos cuya verdad no sea decidible). Lo importante es recalcar que Dummett estudia el realismo en relación a cierta clase de enunciados, no a cierta clase de entidades.

[11] Esto queda claro en la interpretación que hace Dummett de las tesis intuicionistas. Para Dummett, no es necesario poseer una prueba de la verdad de un enunciado para afirmar que es verdadero, basta que exista la posibilidad de encontrar una prueba del mismo.

> The dispute thus concerns the notion of truth appropriate for statements of the disputed class; and this means that it is a dispute concerning the kind of meaning which these statements have (Dummett, 1963: 146)

En ciertas ocasiones, sin embargo, Dummett pone todo el énfasis de la definición del realismo sobre el principio de bivalencia, según el cual, todo enunciado es o bien verdadero o bien falso. Es importante señalar dos aspectos de esta identificación ya que Dummett ha variado sustancialmente sus puntos de vista a lo largo de los años. Un primer aspecto a señalar es la diferencia entre el principio de bivalencia y el principio lógico del tercio excluso, que establece la validez del esquema “A v ~A”. Es sobre el principio semántico de la bivalencia sobre el que se establece la distinción entre realistas y anti-realistas y no sobre el principio lógico del tercio excluso. El principio del tercio excluso puede ser validado de diversas formas, algunas de ellas, como por ejemplo por medio de la adopción de una semántica supervaluada, sin ninguna implicación realista[12].

El segundo aspecto a señalar es que, si bien es cierto que podemos considerar la aceptación sin restricciones del principio de bivalencia como suficiente para el realismo, ya que implica la aceptación de que todos los enunciados, incluidos los no-decidibles, son verdaderos o falsos independientemente de nuestra capacidad para probarlos, con lo que parece que adoptaríamos una noción de verdad como trascendente a la evidencia, también es cierto que es posible ser realista sin aceptarlo irrestrictamente.

En otras palabras, es posible rechazar el principio de bivalencia por razones totalmente independientes al realismo, como por ejemplo el problema de la vaguedad. El caso de la vaguedad es muy ilustrativo, ya que comúnmente se considera que provoca el que los enunciados pierdan su valor de verdad (al menos, que dejen de poseer un valor de verdad – o de falsedad – determinado), pero en estos casos, el

[12] En sus primeros escritos, especialmente en su artículo “Truth” (1959), Dummett no contempla esta diferencia e iguala el rechazo del principio de bivalencia con el rechazo del principio del tercio excluso. Sin embargo, en escritos siguientes rectifica esta opinión, estableciendo la diferencia entre ambos (en el apéndice publicado en *Truth and Other Enigmas* del artículo “Truth”, por ejemplo, Dummett corrige precisamente este error en la versión original).

rechazo de la bivalencia no tiene porqué ser necesariamente un indicativo de anti-realismo. Así la bivalencia, de ser considerada como piedra de toque del realismo, podría serlo sólo para los discursos no-vagos.

Por lo tanto, en la formulación más reciente de Dummett, aparte de la aceptación sin condiciones del principio de bivalencia, es necesario, para ser realistas, aceptar una teoría semántica en la que prevalezca la manera clásica de definir y establecer la verdad de los enunciados. Por todo lo dicho, esta segunda formulación del realismo de Dummett resulta mucho más atractiva que la primera, excesivamente simplista. Por ello, optaremos por evitar la definición del realismo como aceptación irrestricta del principio de bivalencia y nos ceñiremos a la segunda definición (bivalencia más semántica clásica o verdad trascendente a la evidencia).

Resumiendo, los tres componentes principales de la caracterización de Dummett del debate entre realistas y anti-realistas son[13]:

1. Este tipo de disputas deben ser entendidas como disputas en relación a una clase de enunciados, no a una clase de entidades u objetos
2. Concretamente se trata de disputas acerca de la naturaleza de la noción de verdad que puede ser aplicada a los enunciados en cuestión[14]
3. De hecho, lo que se discute es si es posible argumentar que los enunciados del tipo en cuestión (del tipo que estemos analizando) son capaces de ser verdaderos aún trascendiendo potencialmente la evidencia.

A medida que vayamos avanzando en nuestra exposición, iremos desglosando un poco más los puntos dos y tres, pero antes, aunque sea brevemente, señalaré las razones de Dummett para centrar el debate en los enunciados y no sobre las entidades. En general, Dummett ofrece dos motivos, aparte de los mencionados, para adoptar la vía semántica antes que la ontológica. El primero de ellos es que en ciertas áreas de discurso sencillamente no contamos con objetos de los que hablar, como ocurre en el caso del discurso acerca del pasado o del futuro. El segundo motivo es que incluso en

[13] Bob Hale (1997: 283).
[14] Este punto es importante ya que suele dar pie a confusiones. Dummett no intenta sustituir, como muchas veces se afirma, la noción de verdad por alguna otra. Lo que pretende es ofrecer una caracterización adecuada de la misma y de su papel en la teoría del significado. La verificación sustituye a la verdad realista, pero la noción de verdad se mantiene presente como herramienta necesaria para las derivaciones lógicas.

casos, como el matemático, en los que sí hay objetos acerca de los que discutir, la cuestión esencial no es tanto si estos objetos efectivamente existen o no sino la objetividad de los enunciados acerca de ellos. Dummett acepta el llamado"Kreisel's Dictum*"* según el cual, "la cuestión no es la existencia de los objetos matemáticos sino la objetividad de la verdad matemática" ("The point is not the existence of mathematical objects, but the objectivity of mathematical truth")[15]

Este enfoque tiene una ventaja fundamental frente al ontológico, y es, en mi opinión, el motivo fundamental por el que Dummett adopta esta línea de pensamiento[16]: la supuesta neutralidad de las discusiones de carácter semántico[17]. Si centramos el debate acerca del realismo en la existencia (o no) de determinadas entidades estamos en cierta medida limitando el discurso precisamente a esas entidades. Esto quedó claro, creo, en la primera parte de este trabajo, ya que gran parte del problema radicaba en la propia definición de objeto matemático y las diferentes propuestas venían dadas por esa misma definición de partida, lo que hace que las conclusiones no sean aplicables al resto de los objetos.

Por supuesto, Dummett no defiende la *absoluta* neutralidad del discurso semántico frente a las cuestiones metafísicas, pero sí enfatiza sobre su capacidad para

---

[15] Este "dictum" tiene una historia curiosa. Dummett lo atribuye a Kreisel en el prefacio de *Truth and Other Enigmas*, quien según Dummett lo planteó en una reseña acerca de Wittgenstein. Pero lo cierto es que nadie –que yo sepa- ha conseguido localizarlo en ninguno de los escritos de Kreisel (ni siquiera en la reseña que Kreisel efectivamente publicó acerca del libro de Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*,en *British Journal for the Philosophy of Science*, Vol IX, No. 34 (1958)). Putnam, por ejemplo, lo menciona recientemente en sus "Hermes Lecures" (2001) y en la nota bibliográfica simplemente dice "But I no longer remember where!". Por ello, se ha pasado a denominar simplemente "el Dictum generalmente atribuido a Kreisel"

[16] En realidad, la opción semántica ya había sido adoptada por Frege en su reducción de las matemáticas a la lógica. Éste es de hecho uno de los puntos en los que la influencia de Frege es más clara en Dummett. Como vimos en el capítulo tres, para Frege, adoptar el enfoque semántico para resolver las cuestiones ontológicas acerca de la existencia de unos objetos determinados implica la aceptación del principio del contexto, según el cual el significado de una palabra solo puede ser analizado en el contexto de un enunciado y, por lo tanto, la cuestión acerca de la referencia de dichas palabras –a objetos- sólo puede ser resuelta a través del análisis de las condiciones de verdad del enunciado en el que aparece.

[17] La búsqueda de una semántica "neutral" con respecto a las cuestiones metafísicas será una constante en esta segunda parte de este trabajo. Crispin Wright, como veremos, toma como punto inicial de su propuesta la búsqueda de una noción de verdad apta tanto para los realistas como para los anti-realistas y por lo tanto "libre" de cualquier connotación metafísicas de carácter realista. Putnam, por su parte, también intentará desarrollar un tipo de realismo moderado, a través de la teoría semántica, que evite lo que él denomina las "fantasías metafísicas" subyacentes al realismo tradicional. Sin embargo, el que estos dos autores se tomen tantas molestias en demostrar la posibilidad de una semántica neutra claramente indica que no es tan fácil como parece suponer Dummett, quien simplemente da por sentada su neutralidad. De hecho, varios autores se han hecho eco de este problema en la formulación de Dummett. Véase, por ejemplo, Joseph Margolis (1994) o Michael Devitt (1984)

trascender los problemas metafísicos específicos de cada área del discurso. La semántica, tal y como vimos en el dilema de Benacerraf-Field, ha de ser uniforme entre todos los ámbitos. Así, donde Benacerraf ve un obstáculo para los anti-realistas, Dummett ve su principal virtud. Es sólo a partir del análisis semántico que podremos desarrollar un tipo de anti-realismo más o menos global tal y como pretende Dummett.

Además, las características semánticas de un discurso determinado son algo que, en términos coloquiales, podemos *palpar*. Las discusiones acerca de la existencia o no de determinados objetos problemáticos (como los matemáticos) acaban generalmente reduciéndose a una discusión acerca de la forma lógica de ciertos enunciados o acerca de sus valores de verdad. El caso de la discusión entre platonistas y nominalistas en las matemáticas es especialmente claro ya que obviamente no se trata de un debate acerca de la existencia de objetos que podamos percibir o que podamos conocer por medio de la ostensión. Esto hace que resulte difícil pensar en alguna manera de enfrentar el problema desde un punto de vista neutro, sin prejuicios, salvo a través del análisis de la forma lógica o de las condiciones de verdad de los enunciados acerca de ellos. Es decir, más que preguntar directamente, ¿existe el número 4? Parece más prometedor preguntar ¿existen enunciados cuyas condiciones de verdad estén determinadas por la referencia a los números?[18]

De nuevo, Dummett es bastante radical en este punto. Para él, no sólo se trata de una cuestión de prioridad de lo semántico sobre lo ontológico. Las cuestiones metafísicas no añaden nada sustantivo más allá del análisis semántico de los enunciados. Por eso, en sus propias palabras, la "labor más apremiante de la filosofía analítica contemporánea" es la elaboración de una teoría del significado. Una vez hayamos cumplido con este objetivo, quedarán resueltas el resto de las grandes cuestiones que tradicionalmente se ha planteado la filosofía. Concretamente, la teoría del significado determinará la elección del sistema lógico y dará respuesta a las cuestiones metafísicas acerca de la existencia o no de los objetos externos más o menos

[18] Más que "más prometedor", intentaremos argumentar que de hecho, la pregunta "¿existe el número 4?" simplemente no tiene sentido. Viene a ser lo que Carnap (1950) denominaba una "pseudo-cuestión". En la primera parte de este trabajo no discutimos la existencia de los objetos matemáticos salvo en el caso de los neo-fregeanos. En las demás opciones partíamos de la hipótesis de que existían y a partir de ahí, cuestionábamos la posibilidad de conocimiento. En el caso de los neo-fregeanos sin embargo el problema de la existencia de los objetos matemáticos entraba de lleno en la discusión, a través precisamente del análisis semántico de los principios de abstracción.

problemáticos, tales como los objetos matemáticos, los universales o los situados en el pasado o en el futuro. Para Dummett cualquier postura metafísica no es más que

> [A] picture which has in itself no substance otherwise than as a representation of the given conception of meaning (2000a: 383)

Esta imagen metafísica no añade nada más allá de una mera metáfora, según la cual, por ejemplo veremos a los matemáticos como astrónomos (descubriendo objetos) o como artistas (creándolos). Una metáfora que en cualquier caso nos resultará obvia a raíz del desarrollo de una teoría del significado adecuada. Por ello, la única forma de resolver las disputas metafísicas y decidirnos por la lógica apropiada es a través del desarrollo de la teoría del significado:

> We have first to decide on the correct model of meaning [...] and then one or other picture of the metaphysical character of the mathematical reality will force itself on us (1973b: 229)

Esta es una de las afirmaciones más tajantes de la filosofía de Dummett y por lo tanto una de las más cuestionables. Una cosa es otorgar prioridad al análisis semántico (metodológicamente hablando) y otra afirmar que la ontología no tiene nada que añadir al mismo. Ya vimos en el capítulo tres, cuando analizamos las tesis de los neo-fregeanos, que el análisis semántico, tal y como ellos lo planteaban, del principio de abstracción de Hume no era suficiente para determinar la existencia de los objetos abstractos. Por supuesto, se puede argumentar que el error estaba en el análisis en sí, o en la elección de los enunciados, pero lo cierto es que finalmente necesitábamos, o al menos esa es mi opinión, ciertas suposiciones metafísicas previas para establecer la existencia de los números.

Autores como Michael Devitt critican duramente este punto de la teoría de Dummett. De acuerdo con Devitt (1984: 259-91), las tesis ontológicas sí tienen peso, es más, sobre ellas recae el peso del debate entre realistas y anti-realistas. Para él, en este punto Dummett peca de un exceso de positivismo y esto se vuelve especialmente problemático cuando intentamos trasladarlo del caso matemático al físico, donde argumentar a favor de la existencia (e independencia) de los objetos más allá de lo que nos indique el análisis semántico parece ciertamente posible. En pocas palabras, Devitt concluye que nuestras creencias realistas son demasiado fuertes e importantes como para abandonarlas por “especulaciones semánticas”, tal y como él las define.

En cualquier caso, iremos viendo hasta qué punto Dummett consigue fundamentar sus tesis anti-realistas adecuadamente sobre la base de una teoría del significado (y hasta qué punto esta teoría está libre de supuestos ontológicos).

4.2.2. La influencia del intuicionismo

Ya dijimos que Dummett está fuertemente influido por tres líneas de pensamiento: la teoría del significado de Frege, la concepción del significado como uso del segundo Wittgenstein y los principios de la lógica intuicionista. Dummett consigue seleccionar y coordinar aspectos de estas tres corrientes por otro lado tan dispares, de manera que están presentes, de una u otra forma, a lo largo de toda su obra.

Comenzaremos viendo los aspectos relevantes que Dummett extrae de los intuicionistas. A partir de ahí, desarrollaremos el resto de sus argumentos a favor del anti-realismo semántico, donde es patente la influencia tanto de Frege como de Wittgenstein. Hay que tener en cuenta que Dummett, aunque adopta algunos de los principios básicos del intuicionismo, no coincide ni mucho menos con todas sus tesis. En concreto, no comparte el trasfondo filosófico del intuicionismo tradicional, desarrollado por L. Brouwer. De hecho, Dummett propone la adopción de la lógica intuicionista en base al análisis del significado de las conectivas lógicas en términos wittgenstenianos. Esto es, para Dummett, si interpretamos el significado como uso y lo aplicamos a las conectivas lógicas, no tendremos más remedio que rechazar la lógica clásica y adoptar la intuicionista. Esto se debe principalmente a dos problemas, que veremos con más detalle en el apartado siguiente: el llamado “problema de la manifestación” y el “problema del aprendizaje del lenguaje”. Básicamente, ambos problemas conducen (inevitablemente, según Dummett) a la conclusión de que la lógica clásica debe ser sustituida por la intuicionista y la noción de verdad (entendida en términos realistas) no puede ser el eje central de la teoría del significado para el lenguaje en general.

4.2.2.1. Características principales del intuicionismo

El intuicionismo es un tipo de constructivismo. Su característica principal es la concepción de los objetos matemáticos como construcciones mentales, con el consecuente desarrollo de los métodos constructivos de razonamiento y el rechazo de los modos no-constructivos de inferencia. Para los intuicionistas, sólo es posible afirmar que una entidad matemática existe si podemos construir una prueba de la misma. El intuicionismo se caracteriza además, frente a otros movimientos que presentan alternativas a la lógica y a la matemática clásica, por surgir a raíz de problemas puramente matemáticos, no filosóficos y, por lo tanto, por haber sido inicialmente desarrollado por matemáticos y para matemáticos. Así, aunque tras sus principios básicos encontramos todo un sistema de pensamiento filosófico, en un primer momento el intuicionismo fue exclusivamente un movimiento matemático. Sólo en una segunda fase pasó a ser también un movimiento lógico y, más tarde aún, a estudiarse sus repercusiones en filosofía.

El intuicionismo fue inicialmente desarrollado por el matemático holandés L. E. J. Brouwer[19] en las primeras décadas del siglo veinte. Durante estos años, como es bien sabido, tuvo lugar un intenso debate acerca de la naturaleza y los fundamentos de las matemáticas, debate provocado principalmente por los avances de la teoría de conjuntos de Cantor y el desarrollo de la lógica por parte de Frege y Russell. A raíz de estas discusiones surgieron tres posturas fundamentales que aglutinaron a la mayor parte de la comunidad matemática y filosófica: el logicismo, representado principalmente por Frege y Russell, el formalismo, representado principalmente por Hilbert, y el intuicionismo, representado por Brouwer[20]. Estos tres puntos de vista se

[19] Para una introducción a la vida y la obra de Brouwer ver van Stigt W.P. (1990).
[20] Sobra decir que no pretendo ofrecer aquí una descripción de estos tres puntos de vista. Simplemente pretendo dar una visión muy general y simplificada del contexto en el que surgió el intuicionismo, no me interesa ofrecer definiciones de las otras posturas o de los problemas a los que se enfrentaban. Por

diferenciaban en numerosos aspectos: en sus opiniones acerca de la existencia y la naturaleza de los objetos matemáticos, en los criterios de aceptabilidad de los enunciados matemáticos mismos y en la relación entre las matemáticas y la lógica.

El intuicionismo se diferencia del logicismo en su concepción tanto de la naturaleza de los objetos matemáticos como en la relación entre las matemáticas y la lógica. Para los intuicionistas o constructivistas, los objetos matemáticos son creaciones de la mente humana y por lo tanto dependientes de la misma. Los logicistas por el contrario defienden la existencia independiente de los mismos. La principal afirmación de los logicistas es que las matemáticas pueden, y deben, ser reducidas a la lógica, las matemáticas para ellos, son una rama de la lógica. Los intuicionistas por su parte separan claramente la lógica de las matemáticas y le otorgan prioridad a esta última.

Por su parte, los formalistas coinciden con los logicistas en su concepción de la relación entre la lógica y las matemáticas pero difieren tanto con los logicistas como con los intuicionistas en su tratamiento de la verdad matemática y la naturaleza de los enunciados matemáticos. Para los formalistas, los objetos matemáticos no existen y por lo tanto los enunciados matemáticos están "vacíos" de contenido (más allá de su coherencia lógica). Para ellos, las verdades matemáticas se reducen a verdades acerca de un sistema formal. Los intuicionistas, al igual que los logicistas, rechazan tajantemente este punto, los objetos matemáticos existen (sólo que, para ellos, son construcciones de la mente, sin independencia).

Los intuicionistas se diferencian además de los otros dos puntos de vista en un aspecto esencial: en su afirmación de que es necesario revisar las matemáticas clásicas y sustituirlas por otro modelo de razonamiento (constructivista). Las tres posturas estaban de acuerdo en la necesidad de resolver ciertos problemas básicos de las matemáticas, problemas de base, pero mientras los logicistas y los formalistas entendieron que los problemas de las matemáticas provenían de la ausencia de una justificación adecuada para las mismas, los intuicionistas vieron en ellos una señal inequívoca de la necesidad de revisar ciertos principios. El problema, para los intuicionistas, radicaba en la matemática misma y no en sus fundamentos; las matemáticas no necesitaban fundamentación, sino reforma. Tomaron de esta manera la

supuesto la mayor parte de las afirmaciones que haré al respecto son discutibles, pero creo que esencialmente recogen las propuestas básicas de las tres posturas y sus diferencias más esenciales.

afirmación de que las matemáticas necesitaban claramente una justificación, no como un reto para desarrollar dicha justificación, sino como una señal de que algo iba mal en las matemáticas clásicas.

Y precisamente, para ellos, el error radica en la concepción clásica de las matemáticas como una ciencia (en cierta medida análoga a la natural) que estudia una realidad externa e independiente, que descubre las propiedades de los objetos que la habitan y las leyes que determinan las relaciones entre ellos. Para los intuicionistas, este punto de partida es completamente erróneo, no existe tal realidad más allá de nuestra mente y por lo tanto, tal y como afirma Brouwer, "outside human thought there are no mathematical truths" (van Dalen (ed),1981:6)[21].

Como hemos dicho, el intuicionismo es una corriente fundamentalmente matemática, pero Brouwer basaba todo su pensamiento sobre una serie de principios filosóficos. Antes de enumerarlos hay que tener en cuenta que precisamente debido a algunos de estos principios, las ideas de Brouwer fueron rechazadas por muchos matemáticos y filósofos (entre ellos algunos constructivistas como Kronecker). Muchas de las tesis filosóficas de Brouwer tienen un marcado carácter idealista, llegando a rozar el misticismo en algunos de sus textos. Además, otro aspecto que resulta cuando menos llamativo es la oposición clara entre algunos de estos principios adoptados por Brouwer y los defendidos por Dummett. Concretamente, resulta obvia la diferencia en el tratamiento que ambos autores dan al lenguaje.

Por eso, vamos a desglosar brevemente las principales tesis de la filosofía de las matemáticas de Brouwer (deteniéndonos tras esto en algunos aspectos de la lógica intuicionista) para pasar inmediatamente a analizar los motivos que ofrece Dummett para adoptar los principios de la matemática y de la lógica intuicionista[22].

[21] Para ver con más detalle las diferencias entre estas tres posturas a través de los textos originales de sus principales protagonistas, es recomendable acudir a Heijenoort, J. (1967), donde están recopilados algunos de los principales textos acerca del problema de los fundamentos de las matemáticas. Véase también, Mancusi, P. (ed) (1998).

[22] Dummett casi nunca discute las obvias contradicciones existentes entre su teoría del significado –en clave wittgensteniana- y las tesis de Brouwer. Esto a veces resulta bastante confuso. Resulta obvio que los anti-realistas semánticos, como Dummett, que quieran adoptar algunos de los principios de la lógica o de las matemáticas intuicionistas, rechazarán gran parte de la metafísica subyacente a las tesis de Brouwer. Pero, si hacen esto, tendrán que ofrecer argumentos alternativos que sustenten su decisión, tal y como hace Dummett.

1. Brouwer está fuertemente influido por el pensamiento kantiano, especialmente por sus tesis acerca del carácter *a priori* de los principios de la aritmética y de su conocimiento por medio de la intuición. Así, Brouwer consideraba que la intuición fundamental sobre la que se basa toda la matemática es la separación intelectual del tiempo en momentos cualitativamente diferenciables. Es lo que él denominaba "the intuition of the bare two-ity", que transforma a la ingenua conciencia humana en una mente racional y le ofrece los conceptos y las herramientas fundamentales del pensamiento matemático: consiste en aislar y conectar los distintos momentos en el tiempo[23]. Debido a que además afirmaba que es posible repetir este proceso indefinidamente, llegamos a través de él al concepto de una progresión infinita, entendida como el proceso de construir un elemento tras otro en el tiempo indefinidamente, creando de esta manera la sucesión matemática ("mathematical two-ity"), los números ordinales y el continuo. La secuencia infinita de los números naturales es interpretada por lo tanto como un infinito potencial, fruto de una actividad (construir un nuevo elemento) que se prolonga indefinidamente en el tiempo y que por lo tanto no es posible finalizar.

2. Los matemáticos trabajan con construcciones mentales que son inmediatamente *captadas* por la mente (por la intuición). Los objetos matemáticos, tales como números, funciones, triángulos, conjuntos, etc., son para ellos creaciones (libres), construcciones de la mente humana. El matemático es un sujeto activo y creativo. Las matemáticas no consisten en la manipulación formal de símbolos; las matemáticas son esencialmente una actividad "no-lingüística" ("a languageless activity"), la introducción del lenguaje es un fenómeno secundario que tiene como finalidad ayudarnos a superar nuestras limitaciones y poder comunicar nuestras construcciones

[23]La noción de intuición que maneja Brouwer por lo tanto no es la usual, no se asemeja a ninguna de las nociones que vimos en el capítulo anterior. Para Brouwer,

> The basic intuition of Mathematics (and of every intelectual activity) as the substratum, divested of all quality, of any perception of change, a unity of continuity and discreteness, a possibility of thinking together several entities (Brouwer, 1907: 8)

La intuición para Brouwer es, por lo tanto, el "sustrato", la forma abstracta de toda percepción de cambio que todo ser humano puede reconocer y usar en su pensamiento. Lo que resulta de esta percepción de cambio es la capacidad de discernir cuando dos cosas son diferentes (resultando en la intuición de la dualidad mencionada ("two-ity")).

matemáticas a los otros. El pensamiento es independiente y previo al lenguaje. Brouwer adopta una actitud claramente mentalista y solipsista, según la cual no es posible justificar la matemática sin prestar atención a la estructura del pensamiento matemático en tanto actividad mental. Investigar acerca de las matemáticas es indagar acerca de los procesos mentales que la generan.

3. Las matemáticas son una creación libre del sujeto individual. No se trata de reconstruir mentalmente o de captar la verdad acerca de objetos matemáticos que existen independientemente de nosotros. No hay una realidad matemática externa a la que el matemático deba ceñirse. Este postulado es básico para la interpretación del continuo y del infinito –y de los enunciados acerca de entidades no-finitas- especialmente tras la introducción de la llamada "free-choice sequence" o "secuencia de libre elección". A la hora de justificar la matemática no es correcto partir de los conjuntos infinitos considerados como entidades matemáticas, es decir, partir del infinito actual. El único infinito posible es el potencial, fruto de la sucesión de construcciones por parte del sujeto

4. No tiene sentido hablar de la verdad o falsedad de un enunciado matemático sin tener en cuenta nuestro conocimiento acerca de ese enunciado. Un enunciado es verdadero si poseemos una prueba de él[24]. Un enunciado es falso si podemos probar que la afirmación de que el enunciado puede ser probado implica una contradicción. Probar un enunciado matemático es lo mismo que mostrar el método de construcción de la entidad de la que habla el enunciado. En el caso de enunciados no-decidibles (en la terminología de Dummett) no podemos por lo tanto afirmar que sean bien verdaderos o bien falsos. Una consecuencia inmediata de esto (que tendrá una importancia capital en la filosofía de Dummett) es el rechazo de la aplicación sin restricciones del principio del tercio excluso (A V ~A).

Como ya he dicho, el intuicionismo comenzó siendo una teoría matemática (en la que destaca principalmente sus desarrollos en el campo de la aritmética) pasando más tarde, gracias al trabajo de Heyting, a constituir una alternativa a la lógica clásica. Se

[24] Dummett, suaviza un poco este requerimiento, para él basta con que podamos probar que el enunciado puede ser probado.

podría afirmar que la lógica intuicionista es lógica clásica sin la ley del tercio excluso (A V ~A) pero manteniendo la ley de contradicción (~A→ (A→B))[25].

4.2.2.2. Lógica intuicionista

El rechazo de la aplicación irrestricta del principio del tercio excluso (PTE, en adelante), es probablemente la principal crítica al razonamiento matemático clásico. Debido a que para Brouwer, como hemos dicho, la lógica presupone las matemáticas y únicamente describe las transiciones generalmente aceptadas entre proposiciones, el rechazo de ciertos principios lógicos, como el PTE, es justificado en base a aspectos específicos de la actividad de la construcción matemática. Así, Brouwer afirma,

> Suppose that, in mathematical language, trying to deal with an intuitionist mathematical operation, the figure of an application of one of the principles of classical logic is, for once, blindly formulated. Does this figure of language then accompany an actual languageless mathematical procedure in the actual mathematical system concerned?
> (van Dalen (ed)1981: 5)

A partir entonces de reflexiones sobre las operaciones de construcción de entidades matemáticas, Brouwer concluye que el PTE, para este ámbito específico de construcciones matemáticas, no es válido. Brouwer y los intuicionistas no rechazan el PTE *completamente*, simplemente afirman que en ciertos casos no puede ser aplicado (rechazan su aplicación irrestricta). Dummett formula este aspecto en términos de enunciados cuya verdad o falsedad no puede ser probada: el PTE no es válido en el caso de los enunciados no-decidibles.

[25] Para más referencia acerca del intuicionismo ver: Van Dalen (ed) (1981) (textos originales de Brouwer); Van Dalen, D (1999) y (2002), Salto Alemany, F. y Méndez Rodriguez, J. M. (2001). (para un análisis detallado de los principios de la lógica intuicionista) y Troelstra, A.S y van Dalen, D. (1988) (para una exposición exhaustiva de los principios de la lógica y la matemática constructivista). Ver también Palau, G (2002) (para una introducción sencilla a los fundamentos filosóficos de la lógica intuicionista)

Con este rechazo, se está afirmando que no es cierto que dado un enunciado cualquiera sólo existan dos posibilidades: demostrarlo o rechazarlo[26]. Hay muchos ejemplos de enunciados no-decidibles en matemáticas, un ejemplo clásico es la conjetura de Goldbach, otro es intentar dar respuesta a: ¿existen dos números irracionales, a y b, tal que a^b sea racional? La respuesta clásica a esta pregunta no es válida intuicionísticamente hablando, y nos permitirá observar la diferencia entre una prueba clásica y otra constructiva. Tomemos como ejemplo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, los matemáticos clásicos razonan de la siguiente manera:

1. O bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional o $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional
2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional (suposición)
3. tenemos una solución al problema estableciendo que a= $\sqrt{2}$ y b= $\sqrt{2}$ (por 2)
4. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional (suposición)
5. $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ será racional (=2)
6. luego tenemos una solución siendo a= $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y b= $\sqrt{2}$.
7. Por lo tanto, o bien a = $\sqrt{2}$ o a = $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y b = $\sqrt{2}$.

Esta línea de razonamiento no es válida constructivamente hablando, ya que la premisa de partida (1) no es válida: no tenemos ninguna justificación o prueba para afirmar que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es o bien racional o bien irracional. No hay ninguna construcción que determine cual de las alternativas es correcta. Este es un caso claro en el que PTE no es válido. Una consecuencia inmediata de esto es la imposibilidad de derivar, como hace el matemático clásico, la verdad de A de la prueba de la falsedad de ~A.

Obviamente el rechazo del PTE está estrechamente relacionado con la noción de verdad utilizada por los intuicionistas, que además será uno de los elementos más importantes para la filosofía posterior de Dummett. Un enunciado es intuicionísticamente válido sí y sólo sí existe una prueba de ello. Un posible problema

[26] Lo cual no significa que los intuicionistas introduzcan un tercer valor de verdad. Los intuicionistas aceptan el carácter bivalente de la lógica, pero afirman que en ciertas ocasiones un enunciado puede no ser ni verdadero ni falso.

es que no existe un acuerdo claro acerca de lo que significa "existe una prueba". En general, los intuicionistas clásicos (notablemente Heyting) lo entendían como la existencia de una prueba actual, descubierta por los seres humanos. Dummett, sin embargo, flexibiliza estas exigencias y afirma que es suficiente con saber que es posible desarrollar dicha prueba (aunque no sepamos cómo)[27].

En cualquier caso, bajo ambas interpretaciones, esta noción de verdad como prueba tiene como resultado el que muchos principios de la lógica clásica no sean válidos en la lógica intuicionista. Aparte del ya mencionado PTE, los intuicionistas tampoco aceptan la eliminación de la doble negación (EDN), que permite a los lógicos clásicos derivar A de ~~A[28]. De nuevo, los intuicionistas no afirman que EDN sea *incorrecto* (en el sentido de que pueda haber casos en los que la premisa sea verdadera y la conclusión falsa). Lo que afirman es que hay casos en los que no hay manera de refutar que A (de manera que ~~A está justificado) pero en los que esto no es suficiente para poder afirmar que A. Es decir, ~~A puede ser afirmado en situaciones en las que la afirmación de A no está justificada.[29]

---

[27] Este aspecto será importante para su futura aplicación de la noción de prueba al mundo empírico por medio de la noción de verificación.

[28] Otra diferencia importante entre la lógica clásica y la intuicionista es su interpretación de los cuantificadores, especialmente del existencial. De acuerdo con Dummett,

> [T]he crucial assumption of classical logic is that the interpretation of the quantifiers remains the same, whether their domain be finite or infinite, denumerable or non-denumerable (2000a: 22)

Los intuicionistas responden a esto afirmando que la matemática clásica asimila erróneamente las estructuras infinitas a las finitas. El problema es que las estructuras finitas pueden ser finalizadas, tienen un resultado acabado, pero las estructuras infinitas, tal y como las entienden los intuicionistas, son sólo estructuras potenciales, que sólo podemos conocer a través del proceso de construcción, nunca como un resultado acabado. Bajo la suposición de que la aplicación de un predicado determinado F a cada elemento de una estructura infinita tiene un valor de verdad determinado, los matemáticos clásicos deducen que tanto el cuantificador universal (al que se llega formando el producto lógico de los valores de todas sus instancias) como el existencial (la suma lógica de los valores de sus instancias) tienen un valor de verdad determinado. Los intuicionistas argumentan que ninguna entidad matemática –incluidos los valores de verdad- puede ser el resultado de un proceso infinito, por la sencilla razón de que los procesos infinitos no pueden tener un resultado final.

[29] Igual que en el caso de PTE, esto sucede en el caso de enunciados no-decidibles. En el caso de enunciados cuya verdad podamos probar sin embargo, ambos principios serán válidos.

4.2.2.3. La interpretación del intuicionismo de Dummett

A pesar de que Dummett afirme que es necesario adoptar la lógica intuicionista, los motivos que le llevan a ello son muy distintos a los de Brouwer. De hecho, el trasfondo filosófico de ambos autores no sólo es diferente, sino en muchos casos contradictorios. Brouwer, como vimos, basa sus ideas matemáticas en unas nociones metafísicas muy poco convincentes (por decirlo suavemente). Su concepción de los seres humanos y del lenguaje es marcadamente idealista, cayendo en el solipsismo y en muchos casos en el misticismo.

Dummett, por el contrario, fundamenta su adopción de la lógica intuicionista sobre la base del análisis de la teoría del significado. Esta interpretación de la lógica intuicionista por medio de una teoría del significado en clave wittgensteniana (según la cual el significado está determinado por el uso) implica el rechazo de gran parte de la retórica intuicionista, pero en última instancia Dummett conserva muchas de las principales características del intuicionismo clásico (conserva por ejemplo las modificaciones lógicas expuestas aquí).

A través de este análisis, como veremos a continuación, Dummett llega a la conclusión de que la noción de verdad clásica no es sostenible, imponiéndose la necesidad de sustituirla en su papel central dentro de la teoría del significado por una noción de prueba similar a la desarrollada por los intuicionistas. Esto es, una noción según la cual un enunciado sólo puede ser considerado verdadero si podemos probarlo (o probar que existe una prueba) y según la cual el PTE no es válido para los enunciados no-decidibles y, en consecuencia, el principio de bivalencia tampoco. Así, la teoría del significado nos conducirá, no sólo a abandonar la lógica clásica en favor de la intuicionista, sino a rechazar el realismo.

Al inicio de su artículo “The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic” Dummett plantea la pregunta por la justificación de una lógica en detrimento de otra en los siguientes términos:

> What plausible rationale can there be for repudiating, within mathematical reasoning, the canons of classical logic in favour of those of intuitionistic logic?

Y su respuesta a la pregunta es muy clara:

> Any justification for adopting one logic rather that another as the logic for mathematics must turn on questions of meaning (1973b: 215)

La teoría del significado pues es la base sobre la que decidir tanto el sistema metafísico adecuado (realismo/ anti-realismo) como la lógica adecuada.

4.2.3. La teoría del significado de Dummett

Debido precisamente al papel central que Dummett le otorga a la teoría del significado, gran parte de sus publicaciones están dedicadas al análisis y desarrollo de la misma. Nosotros no vamos a discutir todos los elementos de su propuesta, simplemente los que sean relevantes para su crítica al realismo, poniendo especial énfasis en los intentos de trasladar las conclusiones a las que llega en el ámbito de la lógica (sustitución de la verdad por la prueba, tal y como proponen los intuicionistas) al ámbito de lo empírico (por medio del desarrollo de la noción de verificación como elemento central de la teoría del significado). Para ello, primero expondremos los dos grandes problemas que Dummett encuentra en las teorías del significado de corte realista: el problema de la manifestación y el de la adquisición del lenguaje. A partir de ellos, discutiremos la alternativa que Dummett propone.

4.2.3.1 Problema del aprendizaje del lenguaje

En la caracterización general que ofrecimos del realismo, la tesis 9 establece que conocer el significado de un enunciado es conocer sus condiciones de verdad. La noción central de la teoría del significado realista es la verdad (entendida como independiente de nuestro conocimiento). El significado de un enunciado (declarativo) son sus condiciones de verdad. Además, para Dummett, entender un enunciado es conocer su significado. Así que para los realistas, tal y como los define Dummett, entender un enunciado equivale a conocer sus condiciones de verdad.

A partir de estas premisas, el problema del aprendizaje o de la adquisición del lenguaje es relativamente sencillo. La pregunta básica es: ¿cómo es posible conseguir comprender algún fragmento del lenguaje, es decir, conseguir entender lo que hace que ciertos enunciados sean verdaderos (o falsos), si esas condiciones de verdad trascienden nuestra evidencia, si puede que no sea posible conocerlas?

Aprender a usar un lenguaje implica aprender a aceptar ciertos enunciados como verdaderos bajo determinadas circunstancias y a rechazarlos como falsos bajo otras. Este aprendizaje, necesariamente, requiere que podamos reconocer y distinguir tales circunstancias. ¿Cómo es posible, si esto es así, aprender o adquirir la noción de unas condiciones de verdad trascendentes a la evidencia, como las que los realistas defienden? ¿Cómo podemos aceptar o rechazar un enunciado, cómo podemos establecer que es verdadero o falso, si las circunstancias bajo las que lo evaluamos son imposibles de conocer? En palabras de Hale, el reto es,

> [T]o explain how we come to assign to statements truth-conditions involving states of affairs which, by their very nature, *can have played no part* in the process by which the meaning of those statements are learned or communicated (1997: 275)

El argumento que Dummett extrae de este problema es claro. Sostiene que el proceso por medio del cual captamos o aprendemos el significado de un enunciado (de la clase en disputa, tal y como diría Dummett) es tal que no es posible derivar a partir de él ninguna noción de lo que sería para ese enunciado ser verdadero o falso con independencia del tipo de cosas que hemos aprendido a considerar como determinantes para su verdad o falsedad[30]. En el caso de los enunciados decidibles, por supuesto, no habría ningún problema. El problema, de nuevo, surge con los enunciados no-decibles, ya que, tal y como indica Dummett, no es posible aplicar en estos casos el conocimiento aprendido acerca de la verdad de los enunciados (y las condiciones que lo determinan),

> An undecidable sentence is simply one whose sense is such that, though in certain effectively recognizable situations we acknowledge it as true, in others we acknowledge it as false, and in yet others no decision is possible, we possess no effective means for bringing about a situation of one or other of the first two kinds [...]
>
> The truth of such a sentence can consist only in the ocurrence of the sort of situation in which we have learned to recognize it as true, and its falsity in the ocurrence of the sort of situation in which we have learned to recognize it as false: since we have no guarantee either that a situation of one or the other kind will occur, or that we can bring about such a situation at will, only a misleading picture of what we learned when we learned to use sentences of that form can give us the impression that we possess a notion of truth for that sentence relative to which it is determinately either true or false (1973a: 466-9)

Por lo tanto, el problema radica en la "distancia" establecida por el realismo entre lo que hace a un enunciado verdadero y nuestra capacidad para reconocerlo,

> Because a realist theory forces so large a gap between what makes a statement true and that on the basis of which we are able to recognize it as true, the theory has difficulty in explaining how we derive our grasp of the alter from a knowledge of the former (1981: 71)

---

[30] Dummett está obviamente aceptando la idea de los "truth-makers". Es decir, para él, para que un enunciado sea verdadero tiene que haber algo que lo haga verdadero, esto quedará patente en su introducción del denominado "principio C" (apartado 4.2.4.1)

4.2.3.2. Problema de la Manifestabilidad del lenguaje

El significado de un enunciado, para Dummett, está exhaustivamente determinado por su uso. Esto hace que no pueda ser, ni contener como ingrediente, algo que no sea manifestable en el uso que hagamos de él; es decir, algo que permanezca solamente en la mente de la persona que conozca el significado de ese enunciado. El significado de un enunciado debe ser completamente manifestado (de alguna manera) en el uso que hagamos de él, en la conducta lingüística del hablante.

Dummett ofrece tres argumentos para defender este principio. El primero de ellos sostiene que el significado de un enunciado ha de ser comunicable y para ser comunicable, el significado tiene que ser observable. Si admitimos que existen partes del significado de un enunciado que no son observables, es decir, que no son manifestables en el uso que hagamos de ese enunciado, entonces tenemos que admitir que esos aspectos del significado son imposibles de comunicar (no podemos comunicar el significado de un enunciado a otra persona si ésta no puede, de alguna manera, observar lo que queremos decir con ello). Estos elementos no manifestables serían por lo tanto irrelevantes para el significado de un enunciado cuando estemos utilizándolo como instrumento de comunicación y por lo tanto serían irrelevantes también para el lenguaje en general si lo entendemos, como parece lógico hacerlo, como un fenómeno social por medio del cual la gente se comunica e intercambia ideas, emociones, sentimientos, etc.[31]

El segundo argumento en favor de la idea del significado como uso se refiere a la manera en la que aprendemos el lenguaje (cualquier lenguaje, ya sea el materno, otro idioma o el lenguaje matemático, aunque Dummett, en la mayor parte de sus artículos, se centra o toma como ejemplo este último). Ya dijimos que la adquisición del lenguaje presenta problemas a la noción de verdad realista, ahora vemos que también es un proceso que depende de la manifestabilidad del significado. Aprender un lenguaje es aprender a usarlo de determinada manera; aprender el uso que se le da a sus enunciados. Siguiendo con el ejemplo del lenguaje matemático empleado por Dummett, cuando nos

[31] De la misma manera, también serían irrelevantes para las matemáticas, entendidas como una empresa social en la que mucha gente trabaja y coopera para obtener nuevos resultados.

enfrentamos a él por primera vez lo que debemos aprender es cómo se usan sus enunciados: las operaciones por las que se establecen, cuándo y cómo se llevan a cabo estas operaciones, cómo extraer resultados aplicables en otros ámbitos (es decir, el papel que esos enunciados juegan en el entramado general de la teoría), cómo probarlos, etc.

Todas estas operaciones son los elementos que componen el uso de los enunciados del lenguaje y una vez que sepamos llevarlas a cabo, habremos comprendido el significado de dichos enunciados y del lenguaje matemático en general. De hecho, la única manera de conocer el significado de los enunciados es aprendiendo estos elementos del uso, ya que es lo único que podemos aprender o que nos pueden enseñar: los elementos comunicables, observables del significado y por lo tanto son los únicos que pueden ser transmitidos. Sólo por medio de nuestra habilidad para usar un lenguaje podrán los demás discernir si conocemos o no el significado de sus enunciados, si comprendemos o no el lenguaje en cuestión. El conocimiento del lenguaje consiste por lo tanto en nuestra capacidad para usarlo correctamente. El conocimiento del significado es una "habilidad práctica", en palabras de Dummett.

Estas consideraciones nos conducen directamente al tercer argumento esgrimido por Dummett, basado en consideraciones acerca del conocimiento del significado de un enunciado. Entender un enunciado, ya lo hemos dicho, es conocer su significado. Por lo tanto, para Dummett, una teoría del significado equivale a una *teoría de la comprensión* ("theory of understanding"): lo que una teoría del significado debe hacer es describir qué es lo que alguien conoce cuando conoce el lenguaje, es decir, cuando conoce los significados de los enunciados y de las expresiones del lenguaje. Debe explicar en qué consiste el conocimiento del lenguaje. Pero ¿a qué tipo de conocimiento se refiere Dummett? Por un lado, se trata de un conocimiento que se caracteriza por ser una habilidad, un conocimiento eminentemente práctico y por otro, por incluir tanto aspectos verbalizables como aspectos *implícitos*.

Cuando una persona afirma conocer un lenguaje lo que está afirmando es que sabe *cómo* usar ese lenguaje, afirma poseer una habilidad práctica (sabe hablarlo, leerlo...). Dummett hace suya en este punto la distinción formulada por Aristóteles, y posteriormente retomada por Ryle, entre "knowing how" y "knowing that": el conocimiento de cómo (práctico) y el conocimiento de que (teórico). Aún así, Dummett no está con esto desestimando la importancia del conocimiento proposicional. Lo que una teoría del significado debe intentar desarrollar es, según él, una representación teórica de una habilidad práctica. La teoría del significado debe representar la habilidad práctica de los hablantes, que consiste en la capacidad de captar un conjunto de proposiciones.

Por otro lado, el conocimiento de esas proposiciones debe consistir en última instancia en conocimiento implícito. En ciertas ocasiones, argumenta Dummett, el conocimiento del significado puede tomar la forma de conocimiento explícito o "verbalizable". Este tipo de conocimiento consiste básicamente en la habilidad práctica de formular las reglas del uso de las expresiones, por ejemplo, la capacidad de establecer cuándo dos expresiones son sinónimas.

Pero no todo el conocimiento puede ser explícito ya que eso implicaría una regresión al infinito. Cuando el conocimiento del significado es explícito, se presupone necesariamente que conocemos de antemano el lenguaje en el cual es verbalizado, que conocemos de antemano los significados de ese lenguaje, pero este mismo lenguaje por medio del cual lo hacemos explícito tendría a su vez que ser verbalizable en otro lenguaje, y así sucesivamente. Por lo tanto, concluye Dummett, para evitar esta regresión al infinito, el conocimiento del significado de las expresiones del lenguaje ha de ser conocimiento implícito.

La introducción de la noción del conocimiento implícito no le quita protagonismo a la idea del significado como uso en los planteamientos de Dummett. Muy al contrario Dummett afirma que este conocimiento, aún siendo implícito, debe manifestarse de algún modo en la conducta. Debe ser posible detectar, por ejemplo, cuándo un hablante posee o no este conocimiento implícito del significado. Según la definición de Dummett, el conocimiento implícito es:

> Knowledge which shows itself partly by manifestation of the practical ability, and partly by readiness to acknowledge as correct a formulation of that which is known when it's presented (1978b: 96)

Con la introducción de la noción de conocimiento implícito, Dummett intenta mantener una postura intermedia entre dos extremos[32]. Por un lado, evita las posibles acusaciones de conductismo introduciendo la idea de un aspecto *interno* del conocimiento que es cognoscible por los hablantes como lo que guía su práctica lingüística. Por otro lado, evita las posibles acusaciones de psicologismo, causadas precisamente por este último movimiento, al exigir que el conocimiento implícito deba manifestarse en la conducta de los hablantes; de esta manera, nada queda "escondido" a la vista. Es importante insistir en el hecho de que Dummett no pretende en ningún momento plantear con la introducción de este elemento implícito ninguna "hipótesis psicológica", de hecho Dummett afirma que:

> If a Martian could learn to speak a human language, or a robot be devised to behave in just the ways that are essential to a language-speaker, an implicit knowledge of the correct theory of meaning for the language could be attributed to the Martian or the robot with as much right as to a human speaker, even though their internal mechanisms were entirely different (1976: 37)

4.2.4. Manifestabilidad y Realismo: la noción de Verdad

Una vez aclaradas las ideas básicas de la teoría del significado de Dummett en relación a la manifestabilidad del mismo, podemos pasar a analizar el problema que esto representa para los realistas. El problema de la manifestabilidad es probablemente el más importante de los dos mencionados, aunque ambos están estrechamente relacionados y los dos representan argumentos en contra de la posibilidad de una noción de verdad que trascienda nuestra capacidad para conocerla. El problema para los realistas en este caso surge cuando intentamos armonizar su teoría del significado, y de la comprensión de los significados, con el significado entendido como uso que defiende Dummett.

[32] McDowell (1987:95)

Si partimos por lo tanto de la aceptación de las tesis realistas (el principio de bivalencia y la verdad como trascendente a la evidencia) y de la teoría del significado como uso de Dummett, llegaremos a la conclusión de que ambos supuestos se contradicen:

1. El conocimiento del significado de un enunciado es conocimiento implícito (por definición)
2. El elemento central del significado es la noción de verdad: conocer el significado de un enunciado es conocer sus condiciones de verdad (por definición)
3. El conocimiento de las condiciones de verdad es conocimiento implícito (de 1 y 2)
4. El conocimiento implícito de las condiciones de verdad de un enunciado debe ser completamente manifestable en la conducta lingüística del hablante (por definición)
5. Los enunciados decidibles son aquellos en los que podemos determinar su valor de verdad por medio de un mecanismo de decisión (su verdad o falsedad es demostrable) (por definición)
6. En estos casos, todo el que conozca estos mecanismos de decisión puede manifestarlos en conducta lingüística. Es decir, el conocimiento (implícito) de las condiciones de verdad de estos enunciados puede ser manifestado en conducta (por 4 y 5)
7. Los enunciados no-decidibles son aquellos para los que no poseemos mecanismos para decidir su valor de verdad. Es decir, son aquellos enunciados cuyo valor de verdad trasciende nuestro conocimiento; su verdad no es demostrable (por definición)
8. No podemos manifestar en conducta lingüística el conocimiento de los valores de verdad de un enunciado no-decidible, ni podemos manifestar los mecanismos de decisión para esos enunciados; ya que trascienden la evidencia (no los conocemos) (por 3, 4 y 7)

9. Por lo tanto, en el caso de los enunciados no-decidibles no podemos asignar a nadie conocimiento implícito de los valores de verdad (si lo poseyera, tendría que poder manifestarlo plenamente en su conducta)[33] (por 4).

10. Por lo tanto las teorías del significado que toman como elemento central la noción de verdad son inconsistentes en un lenguaje que incluya enunciados no-decidibles. (por 3 y 9).

Es decir, la noción del significado como uso contradice a la noción del significado realista, cuyo elemento central es una noción de verdad que trasciende nuestra capacidad para probarla o refutarla. Los realistas son incapaces de explicar, según Dummett, ni la manera en que aprendemos el lenguaje ni la manera en que comunicamos nuestro conocimiento del mismo. La condición del lenguaje como instrumento de comunicación es inconsistente por lo tanto con la noción realista de la verdad y por lo tanto, con su teoría del significado. Tal y como afirma Dummett,

> If to know the meaning of a mathematical statement is to grasp its use; if we learn the meaning by learning the use, and our kowledge of its meaning is a knowledge which we must be capable of manifesting by the use we make of it: the notion of truth, considered as a feature which each mathematical statement either determinately possesses or determinately lacks, independently of our means of recognising its truth-value, cannot be the central notion for a theory of the meanings of mathematical statements (1973b: 225)

La interpretación del significado como uso es, de acuerdo con todo lo dicho, necesaria para explicar el papel del lenguaje como instrumento de comunicación. Sin

[33] Así, podríamos concluir que no hay manera de diferenciar, basándonos en la conducta lingüística, entre alguien que conoce las condiciones de verdad de un enunciado (y por lo tanto su significado) y alguien que no las conoce. De ahí la contradicción, expresada en el punto 10. Alguien podría argumentar que puede haber casos en los que efectivamente no fuera posible hacer esta distinción. Por ejemplo, podría darse el caso en el que un autómata humanoide mantuviera una conversación con un humano, ambos hablan aparentemente un perfecto español y por lo tanto tendríamos que asumir que ambos comprenden lo que están diciendo, que conocen el significado y las condiciones de verdad de los enunciados que están utilizando. Pero, en este ejemplo, el autómata no posee ese conocimiento, simplemente está siguiendo unas pautas establecidas por su programador para poder mantener conversaciones. En cualquier caso, dejaremos a un lado la posibilidad de este tipo de casos u otros similares (como el famoso ejemplo de la habitación china, de Searle) y asumiremos que todos entendemos el lenguaje que utilizamos y que esta comprensión es un requisito para hablar un lenguaje y, por lo tanto, para comunicarnos.

ella, no podríamos entender como es posible trasmitir el conocimiento del lenguaje y, en última instancia, sería imposible explicar cómo podemos siquiera aprenderlo. Por lo tanto, es la consideración de la verdad realista como noción central de la teoría del significado la que debe ser modificada.

Las teorías del significado, al menos las que normalmente utilizamos, se levantan sobre un elemento central, a partir del cual explicamos lo que sea el significado de los enunciados. Así, generalmente se define el significado usando expresiones del tipo: "el significado de un enunciado está determinado por sus condiciones de verdad" o "el significado de un enunciado es su método de verificación". La definición del significado como uso no excluye la posibilidad de contar con un elemento central. El "uso" no puede ser considerado como tal, porque no se trata de un hecho concreto y singular; al afirmar que el significado es el uso estamos simplemente restringiendo el tipo de cosas que pueden determinar el significado. Lo que buscamos es un elemento central a partir del cual derivar una teoría sistemática del uso de los enunciados; una teoría que explique la práctica del lenguaje. Buscamos, en definitiva, una noción distinta de la verdad que sustituya a la realista en su papel de elemento central de la teoría del significado[34].

4.2.4.1. Características generales de la noción de verdad

El primer elemento importante de la noción de verdad de Dummett es que debe ser una noción "sustantiva" de la verdad, con lo cual está eliminando a las teorías de la redundancia o desentrecomilladoras como posibles candidatas. Para Dummett, la imposibilidad de este tipo de verdad para sustentar sobre ella la teoría del significado es "so evident as to leave hardly any room for supporting arguments" (1978a:xxi) .

Las teorías desentrecomilladoras sostienen que la noción de verdad queda totalmente definida por medio del esquema

[34] Dummett establece los principales puntos o elementos de su teoría de la verdad en distintos artículos, pero quizás donde más claramente quedan reflejados es en Dummett (1973b), (1976: 46- 92) y (1973a: 466-9)

(ED) S es verdadero si y sólo si p

Donde S es un enunciado declarativo y p es el estado de cosas que lo hacen verdadero. Frege defendió este tipo de equivalencias cuando afirmaba que "it is true that I smell the scent of violets" tenía el mismo significado que "I smell the scent of violets" (1884: 354). Pero, de acuerdo con Dummett, tenemos que conocer previamente el significado de "I smell the scent of violets" para que la equivalencia sea útil para explicar el significado del término "true".[35]

Y esto es sólo posible si partimos de una noción sustantiva, una noción según la cual, para que un enunciado sea verdadero tiene que haber algo que lo haga verdadero. Esto es,

> Principle C: If a statement is true, there must be something in virtue of which it is true (1976: 52)

El Principio C defiende la existencia de los denominados "truth-makers", algo que muchos realistas también defienden. Por supuesto, el sentido en que interpretemos el principio variará de unos a otros. Con este principio, Dummett está básicamente afirmando que, para que un enunciado sea verdadero, debe haber algo por medio de lo que podamos justificar su verdad (obviamente, bajo esta interpretación, el principio no sería aceptado por los realistas).

El segundo elemento de la teoría de la verdad de Dummett expresa el requerimiento de que la verdad pueda ser conocida.

> Principle K: a statement cannot be true unless it is in principle posible that it be known to be true (1976: 61)

Este principio, tal y como está expresado, es muy ambiguo. Su aplicación depende de cómo interpretemos la expresión "in principle posible". Un realista podría

[35] Dummett discute el rechazo a la teoría de la redundancia (o desentrecomilladora) principalmente en: (1973a: 458), (1978a: xx-xxi, 4-9)

aceptar este principio sin problemas siempre que la interpretara de una manera muy laxa. Podría por ejemplo, afirmar que, en el caso de los enunciados no-decidibles, aunque en principio es imposible para nosotros, o para seres con capacidades cognitivas similares a las nuestras, conocer su valor de verdad, sí que sería (en principio) posible conocerlo para un ser ideal, cuyas capacidades cognitivas trascendieran y fueran diferentes a las nuestras. Sería posible en definitiva argumentar que el valor de verdad de un enunciado no-decidible puede ser conocido por Dios, y a partir de ahí afirmar que ese enunciado es por lo tanto definitivamente o bien verdadero o bien falso (la tesis del "ojo de Dios", duramente criticada por Putnam)[36].

Por supuesto, Dummett no pretende llevar a cabo esta lectura del principio. El problema es que no está del todo claro en mi opinión el nivel de generosidad con el que lo interpreta[37]. Dummett admite que es suficiente para considerar un enunciado verdadero que exista la posibilidad de una prueba del mismo (posibilidad de verificación del enunciado). No es necesario que conozcamos la prueba actual. Pero, a su vez, no admite la posibilidad (como harán tanto Putnam como Wright) de idealizaciones sobre las capacidades cognitivas de los sujetos. Para Dummett, la diferencia en este punto entre las interpretaciones realistas y las anti-realistas radica en la admisión de idealizaciones,

> He [the realist] will not hold that, whenever a statement is true, it must be posible, even in principle, for *us* to know that it is true, that is, for beings with our particular restricted observational and intellectual faculties and spatio-temporal viewpoint; it may be possible only for beings with greater powers or a different perspective or scale. But even the most throughgoing realist must grant that we could hardly be said to grasp what it is for a statement to be true if we had no conception whatever of how it might be known to be true; there would, in such a

[36] Además, los realistas tendrían que defender que siempre hay algo que hace a un enunciado bien verdadero o bien falso y que es posible conocerlo desde ese punto de vista ideal. Dummett (o Putnam) no tiene porqué comprometerse con esto, porque no acepta la aplicación irrestricta del principio de bivalencia, para él no todos los enunciados tienen valores de verdad determinados.

[37] Este es uno de los problemas centrales de esta segunda parte del trabajo. Una posible manera de interpretar los esfuerzos de Wright y de Putnam, es a través de la lectura de este principio, en un intento por relajar al máximo las limitaciones del conocimiento sin caer en una interpretación realista y sin que la idea de que sea posible conocer algo por alguien pierda todo su sentido.

> case, be no substance to our conception of its truth-condition. Moreover, he would further grant that it would be useless to specify in a purely trivial manner the additional powers which a hypothetical being would have to have of he were to be capable of observing directly the truth or falsity of statements of some given class (1976: 61-2)

Como ya dijimos, en el ámbito de las matemáticas Dummett defiende la adopción de la lógica intuicionista en detrimento de la clásica y, con ella, de la noción de prueba. Un enunciado matemático es verdadero sí y sólo sí podemos probarlo o podemos probar que una prueba es posible. Si observamos los argumentos utilizados por Dummett para llegar a esta conclusión (de la manifestación y el aprendizaje), veremos que no hay en ellos ninguna mención a la naturaleza de los enunciados matemáticos. La decisión de adoptar una lógica u otra (o un sistema matemático u otro) no depende, según los argumentos de Dummett, de la naturaleza de los enunciados matemáticos ni de los objetos matemáticos. Los argumentos hacen referencia únicamente a consideraciones generales acerca de la teoría del significado, fácilmente aplicables en otros ámbitos.

Esta es precisamente la ventaja de reducir los debates metafísicos a debates acerca del significado de la que hablábamos al principio de este apartado: nos permite generalizar las conclusiones obtenidas en un ámbito determinado de discurso a otros. De acuerdo con esto, de la misma manera que en el ámbito matemático, por medio de la adopción del intuicionismo, Dummett proponía sustituir la noción de verdad por la de prueba; en el ámbito de lo empírico debemos hacer lo mismo y sustituir la noción de verdad, como elemento central de la teoría del significado, por la de verificación.

> [M]athematical statements, which we recognise as true by means of a proof (or, in simple cases, a computation), this meant replacing the notion of truth by that of proof: evidently the appropriate generalization of this, for statements of an arbitrary kind, would be the replacement of the notion of truth, as the central notion of the theory of meaning, by that of verification; to know the meaning of a statement is, on such a view, to be capable of recognising whatever counts as

> verifying the statement, i.e as conclusively establishing it as true (1973b: 227)

De nuevo, esta formulación resulta ambigua, ya que es posible interpretar la verificación de varias formas. Antes de nada, conviene observar que Dummett ha cambiado sus puntos de vista a lo largo de los años y mientras en sus primeros escritos habla de "sustituir" la noción de verdad por la de verificación, en los últimos habla más bien de "reformular" la noción de verdad en términos de verificación.

Por otro lado, Dummett no pretende defender una noción de verificación consistente en la mera ocurrencia de experiencias sensoriales, ni pretende defender la noción positivista de la verificación. En el caso de las matemáticas, determinamos que un enunciado es verdadero por medio de un proceso de razonamiento deductivo (que termina en ese enunciado como conclusión). En el caso empírico, análogamente, un enunciado será verificado a través de un proceso de razonamiento, aunque normalmente no puramente deductivo, como en el caso matemático, ya que las premisas de los argumentos tendrán, por lo general, carácter observacional.

En otras palabras, para Dummett, la verdad debe ser vista como una construcción a partir de la idea primitiva de la asertabilidad correcta o justificada. El problema de la noción de verdad realista, capaz de trascender nuestro conocimiento, es que representa una distorsión de la noción de verdad que adquirimos cuando aprendemos un lenguaje (la noción que empleamos en la comunicación, en el uso del lenguaje). La verdad realista no puede ser construida a partir de la asertabilidad justificada.

En cualquier caso, la noción de verificación Dummettiana trae consigo muchos problemas y adolece de serias limitaciones (que iremos constatando en los capítulos siguientes). Creo conveniente señalar sin embargo, que la aceptación de los argumentos en contra del realismo de Dummett, en concreto del argumento de la manifestabilidad, no conduce necesariamente al rechazo del realismo o a la adopción de una noción en términos verificacionistas de la verdad. Así, por esto mismo, las críticas a la noción de verdad como verificación no representan (en sí mismas) críticas al argumento de la manifestabilidad. El argumento de la manifestabilidad no conduce al verificacionismo (ni al conductismo, como algunos comentadores han sugerido). No hay que confundir, como afirma Wright (1993), los aspectos negativos de la propuesta (los argumentos en contra del realismo) con la elaboración positiva de una respuesta a los mismos (por medio de la elaboración de una teoría de la comprensión del lenguaje y de la verdad). El verificacionismo es sólo una de estas posibles salidas, una respuesta al argumento. Existen muchas otras explicaciones alternativas de nuestra comprensión del lenguaje que concuerdan con el argumento de la manifestabilidad[38].

El argumento de la manifestabilidad no debe por consiguiente asociarse a ninguna propuesta positiva acerca de la comprensión del lenguaje, sino que más bien debe considerarse como un límite, una condición que dichas propuestas deben cumplir. En realidad, muchos autores (realistas o no) parecen dispuestos a acomodar el argumento (o algo parecido). Sólo los defensores a ultranza de cierto tipo de mentalismo (como Chomsky o Fodor) parecen totalmente dispuestos a rechazarlo. Esto hace en realidad que el argumento de la manifestabilidad, más que un *argumento* en contra del realismo, deba ser considerado, en mi opinión, como una suerte de *reto*. La manifestabilidad no demuestra que no pueda haber propuestas que la acomoden dentro del realismo, no nos obliga a aceptar una teoría de la comprensión del lenguaje en clave verificacionista o anti-realista en general.

Como ya hemos dicho, los principales problemas de la propuesta de Dummett se derivan precisamente de la respuesta que desarrolla para estos argumentos, concretamente, de su teoría de la verdad (además de su defensa de la lógica intuicionista frente a la clásica). La generalización que Dummett lleva a cabo, desde el ámbito de las matemáticas (con la noción de prueba) al empírico (con la noción de verificación) plantea muchas dificultades. Quizás la más evidente es el hecho de que en matemáticas las pruebas son conclusivas pero en el caso empírico no. Dummett establece que un enunciado puede ser considerado verdadero si es posible, desde nuestro estado de información actual, verificar que lo es. El problema es que en el caso empírico los estados de información varían sustancialmente de un momento a otro (y de

[38] Por ejemplo, Byrne (2005) propone las siguientes:
1. La habilidad para reconocer evidencias no concluyentes acerca de la verdad o la falsedad de los enunciados puede ser constitutivo de nuestra comprensión de los mismos (Strawson, 1977)
2.Una versión del “Conceptual role semantics” puede caracterizar la comprensión de los hablantes de las frases en términos de habilidades manifestables para diferenciar inferencias correctas de incorrectas (Peacocke, 1992)
3.Una versión heterogénea de la comprensión de acuerdo con la cual se trata de una serie de disposiciones complejas –todas ellas manifestables (Horwich, 1998)

un sujeto a otro) por lo que la verdad dejaría de ser una noción estable. En los capítulos siguientes, veremos como éste es uno de los motivos por los que Putnam y Wright intentan desarrollar nociones alternativas de verdad “no-realista”[39], nociones que aún respetando las limitaciones epistémicas (establecidas en el principio K mencionado anteriormente), permitan diferenciar entre asertabilidad justificada, que admite grados de asertabilidad y variaciones según cambie la información disponible, y verdad, que es una noción absoluta y estable a través del tiempo y de las modificaciones de la información.

[39] Digo “no-realista” y no “anti-realista” porque ninguno de los dos autores se consideran anti-realistas. Sus nociones de verdad pretenden hacer precisamente lo que mencionábamos antes: cumplir con el *reto* del argumento de la manifestabilidad (y los otros retos semánticos del realismo) sin tener por ello que renunciar al realismo (aunque sea a un tipo de realismo moderado).

5

HILARY PUTNAM. REALISMO SIN ABSOLUTISMOS

5.1 Introducción

Si se consulta cualquier trabajo dedicado al análisis de la obra de Hilary Putnam casi con total seguridad se encontrará alguna referencia a los constantes cambios de opinión que el autor ha llevado a cabo a lo largo de las últimas décadas. Sin embargo, si bien es cierto que ha modificado muchas de sus posturas, retractándose en varias ocasiones de opiniones anteriores, lo que hace particularmente difícil intentar exponer sus puntos de vista de una manera fiable en unas cuantas páginas, yo considero que esto, lejos de ser un problema, es más bien una virtud (o el reflejo de una virtud). No sólo porque manifieste una actitud de sinceridad filosófica, sino porque según yo los interpreto, los cambios de opinión de Putnam, no son ni mucho menos aleatorios, sino que están inmersos en un proyecto filosófico que se mantiene intacto durante toda su obra: el desenmascaramiento de una serie de dicotomías, de ideas absolutas y obsoletas, que subyacen a gran parte del pensamiento occidental durante los últimos tres siglos.

Según Putnam, estas dicotomías son las responsables, entre otras cosas, del engañoso callejón sin salida en el que parece haber entrado el debate acerca del realismo, un debate que, aparentemente, sólo puede ser resuelto adoptando una de las dos únicas opciones posibles: el realismo metafísico y el relativismo. El desenmascaramiento y el rechazo de esta serie de dicotomías permitirá, según Putnam, buscar vías alternativas, intermedias entre las dos mencionadas y liberadas por lo tanto del peso filosófico, de las "fantasías metafísicas" que de una manera u otra contaminan las opciones tradicionales.

Este proyecto, tremendamente ambicioso, se ha hecho mucho más explícito en los últimos años pero, en mi opinión, subyace a toda su obra. Las modificaciones introducidas en muchas de sus propuestas pueden (y deben, creo) ser vistas como intentos para alcanzar una imagen general del problema y de su solución. En este trabajo, partiremos del análisis que Putnam hace de los problemas durante los años 70 y 80 y de las soluciones que entonces propuso. A partir de ellos, y a medida que vayan surgiendo, iremos introduciendo los cambios que el propio autor ha realizado en esos planteamientos. En algunas ocasiones, como veremos, se trata de modificaciones en el "espíritu" de las propuestas y de los problemas, un cambio de enfoque sobre un mismo tema. Otras veces sin embargo, este nuevo "espíritu" le lleva a reinterpretar completamente algunas de sus posiciones previas. Esto último resulta especialmente claro en el caso de su noción de verdad y de su programa semántico en general, que pasará de ser esencialmente verificacionista (entendiendo la verdad como aceptabilidad racional bajo condiciones epistémicas ideales) a adoptar matices claramente "realistas", llegando a introducir aspectos trascendentes en su formulación.

De manera general, yo no creo, por ejemplo, que haya habido un cambio *sustancial* entre el Putnam del realismo interno y el Putnam del realismo pragmático. Obviamente, muchas cosas han variado entre uno y otro (especialmente en lo referente a la noción de verdad, como acabamos de decir) pero el objetivo de ambas propuestas sigue siendo, en mi opinión, el mismo: la búsqueda de una vía intermedia entre dos posturas enfrentadas y radicales, el realismo metafísico y el relativismo. La diferencia entre las dos soluciones de Putnam radica principalmente en su manera de enfrentar esta dicotomía, que en un principio interpretaba como una dicotomía principalmente acerca de la manera en la que los términos refieren y que en los últimos años interpreta como un problema acerca de la manera en la que percibimos el mundo exterior, del proceso de representación: de nuestra concepción de la mente y el mundo y de la relación entre ellos.

Otro aspecto destacable de la filosofía de Putnam es la amplitud de temas que abarca. Por supuesto, no pretendemos dar cuenta de todos ellos en este trabajo, nuestra única intención es estudiar la propuesta de Putnam en relación al problema del realismo, centrándonos en el carácter global de su propuesta y en la alternativa que propone tanto al platonismo en el ámbito matemático como a lo que él mismo denomina "realismo metafísico" en general. Debido a que el interés de esta parte del trabajo es encontrar una alternativa al platonismo que respete la uniformidad semántica entre los ámbitos matemáticos y no-matemáticos, pondremos especial énfasis en la propuesta de Putnam para una noción de verdad y en la viabilidad de la misma.

5.2. La búsqueda de una tercera vía: el realismo sin mayúsculas

Uno de los elementos claves de la filosofía de Putnam es por lo tanto su rechazo explícito a una serie de dicotomías que, según él, invaden la manera de entender el mundo por parte de la filosofía occidental desde hace más de tres siglos. Iremos poco a poco viendo cuales son esas dicotomías que Putnam quiere rechazar pero todas ellas conducen o son fruto de su postura en relación al problema del realismo. Para Putnam, uno de los grandes errores que habitualmente se cometen al discutir el problema del realismo (en cualquier área del conocimiento) es la suposición de que tenemos que elegir forzosamente entre dos posturas antagónicas: realismo metafísico y relativismo (o platonismo y nominalismo, en el caso matemático).

Ésta es, probablemente, la dicotomía más importante de todas, ya que de una manera u otra engloba a las demás. Dummett, por ejemplo, claramente acepta esta manera de plantear el discurso, reconociendo únicamente la posibilidad de adoptar una postura realista o una anti-realista (ya sea constructivista, como en su caso, o nominalista)[1]. En mi opinión, Benacerraf, al plantear su dilema, también presupone implícitamente que sólo hay dos posibles posturas que adoptar: o bien aceptamos el platonismo y nos enfrentamos al problema del acceso, o bien adoptamos una postura anti-realista (de cualquier tipo) y nos enfrentamos al problema de desarrollar una semántica convincente alternativa a la platónica y que mantenga la uniformidad semántica entre las distintas áreas del discurso.

El interés que las ideas de Putnam tienen para este trabajo es precisamente el de intentar encontrar una vía intermedia que evite los problemas planteados por Benacerraf y por Field (o al menos que permita ser algo más optimistas). Ya hemos visto como las propuestas de uno y otro extremo encuentran serios problemas para su desarrollo[2], intentaremos en este capítulo y en el siguiente ver hasta que punto es posible desarrollar una postura intermedia y en qué manera nos puede ayudar a resolver los problemas a los que se enfrentan las teorías tradicionales.

5.2.1. La dicotomía en la filosofía de las matemáticas: platonismo vs anti-platonismo

Antes de comenzar a exponer las tesis defendidas Putnam acerca del realismo interno, sin embargo, me gustaría hacer una pequeña aclaración con respecto a su postura en el ámbito de la filosofía de las matemáticas y, concretamente, a su postura frente al platonismo. Putnam ha publicado un gran número de importantes artículos acerca de la filosofía de las matemáticas, pero la mayor parte de ellos fueron escritos en los primeros años de su carrera, antes incluso de la elaboración de su "realismo interno" y de la publicación de sus críticas al realismo metafísico. De alguno de estos artículos,

[1] No deja de ser curioso que tradicionalmente se admitan diversos tipos de anti-realismos mientras que se considere el realismo como una postura más o menos homogénea, con grandes diferencias en la manera de entender la realidad, pero con fuertes puntos comunes que unifican las posturas. Esta manera de ver las cosas, sin embargo, ha cambiado mucho en los últimos tiempos, gracias en parte al trabajo de autores como Putnam, que han dedicado grandes esfuerzos en reivindicar la posibilidad de rechazar ciertos principios del realismo tradicional sin por ello caer en el anti-realismo.

[2] Como siempre, recordar que en este trabajo estamos solamente analizando las propuestas que asumen la existencia de los objetos matemáticos (y por supuesto de los no-matemáticos), con lo que dejamos a un lado el nominalismo o el irrealismo en todas sus formas, y que parten de la hipótesis de que las matemáticas estudian objetos (sea lo que sea lo que entendamos por objetos), por lo que dejamos a un margen las propuestas estructuralistas.

principalmente de “Philosophy of Logic”, ya hablamos en la primera parte de este trabajo, al comentar la denominada tesis de la indispensabilidad de Quine y Putnam. No vamos por lo tanto a hablar de dicha tesis en este capítulo (al menos, no sistemáticamente).

Uno de los rasgos que más llama la atención al leer los artículos de Putnam acerca de la filosofía de las matemáticas de estos primeros años es la gran diferencia de puntos de vista con respecto al platonismo entre unos y otros. En 1967, en un artículo titulado “The thesis that Mathematics is logic”, Putnam argumenta en contra de la idea de que la hipótesis del continuo tenga un valor de verdad determinado que supere nuestra capacidad para probarlo, argumentando que esta idea se basa en la suposición, más que dudosa, de que existe una totalidad determinada de todos los subconjuntos posibles de un conjunto determinado dado.

Sin embargo, ese mismo año publica otro artículo, “Mathematics without foundations”, en el que ridiculiza abiertamente la oposición al platonismo y la defensa del verificacionismo (o de cualquier otra postura, como la defendida por él mismo, que admita grados de indeterminación en el concepto de conjunto). Así, Putnam afirma que efectivamente, el argumento verificacionista se considera en ocasiones como una prueba de la indeterminación del concepto de conjunto, ya que demuestra que la hipótesis del continuo no tiene valor de verdad determinado y la hipótesis del continuo requiere del concepto de conjunto, por lo que la única explicación posible para este fallo en la asignación de valores de verdad es admitir cierto grado de indeterminación en la noción de conjunto. Pero tras esto (que básicamente equivale a lo que él mismo afirmaba en el otro artículo referido), entre paréntesis, escribe,

> [I]t would be an interesting exercise to find *all* the faults in this particular bit of reasoning. It is horrible, isn’t it? (1967b: 52 Cursiva del autor)

Pasados unos años, en 1980, Putnam publica “Models and Reality”, en el que expone muchas de las tesis básicas del denominado realismo interno partiendo de nuevo del análisis de la noción de conjunto y de la imposibilidad de determinar completamente su sentido (el llamado “model-theoretic argument” que veremos con cierto detalle más adelante). De esta manera, regresa en cierta medida a la postura defendida en el primero de los artículos mencionados, con algunas variaciones y aportando más detalles al argumento. Nosotros vamos a centrarnos principalmente en este artículo de 1980 y en artículos publicados posteriormente por Putnam ya que, en mi opinión, son los que mejor se integran en su propuesta general en relación al realismo.

En el ámbito de las matemáticas, al igual que en el resto de las áreas del conocimiento, uno de los principales objetivos de Putnam es mostrar que no es necesario elegir entre dos posturas únicas y antagónicas; mostrar que es posible desarrollar un tipo de postura intermedia, acorde con el sentido común, que incluya nuestro papel como sujetos activos y el inevitable rol que juegan los esquemas conceptuales, pero que no reduzca la realidad a una construcción de nuestras mentes. Aplicado a las matemáticas por lo tanto, esto implica que no tenemos que limitarnos a escoger entre el platonismo, con toda la carga metafísica que encierra y los problemas epistemológicos que arrastra, y las diversas versiones del anti-realismo, con su rechazo o bien a la existencia misma de los objetos matemáticos (nominalismo) o a la independencia de la realidad abstracta (constructivismo).

El platonismo, al igual que el realismo metafísico, resulta insostenible debido principalmente a su aceptación de ciertas fantasías metafísicas (la fantasía de una realidad matemática única y fija y de una relación con ella también única y fija) y a la necesidad de postular, al menos en su formulación clásica, facultades de conocimiento misteriosas (como la intuición matemática). En relación a la posibilidad de justificar y explicar la existencia y las características de esta realidad externa (y nuestro conocimiento de ella, en última instancia), ya sea matemática o no, por medio de la intuición, Putnam afirma

> To rely on intuitions when the question is “whether the electromagnetic field is real” (whatever that is supposed to mean) or “whether there are absolute space-time points” (whathever that is supposed to mean) or ”whether there really are sets” (whatever that is

> supposed to mean) is to rely on what we don't understand with respect to questions we don't understand (1990: 40)[3]

Tanto el constructivismo como el nominalismo tienen, al igual que el relativismo o el escepticismo radical en el resto de las áreas, el grave problema de la pérdida de la realidad, con todo lo que esto supone para las teorías semánticas (y con lo que esto supone para nuestra concepción del mundo y de nuestra manera de interactuar con él). Como podemos observar, Putnam no establece grandes distinciones entre las diferentes áreas, los problemas son, en esencia, los mismos para los defensores del realismo metafísico, sin importar demasiado el área de conocimiento del que hablemos. Esto concuerda perfectamente con su defensa de la indispensabilidad de las matemáticas, que vimos en el capítulo 2, en la que defendía la continuidad entre las matemáticas y el resto de las ciencias. La relación entre las matemáticas y el resto de las ciencias empíricas es demasiado estrecha como para poder mantener coherentemente una postura anti-realista en relación a los conjuntos y a las funciones y otra realista en relación a los electrones (o viceversa). Concuerda además con su rechazo a la distinción tajante entre objetos abstractos y objetos concretos y con su insistencia en considerar a los objetos matemáticos de manera análoga a los objetos teóricos postulados por la ciencia. Todo esto es además perfectamente consistente con el llamado "quasi-empirismo", una postura que Putnam defiende en varias ocasiones como la más prometedora en el ámbito de las matemáticas[4].

---

[3] Tal y como veremos, Putnam, siguiendo la estela de Carnap, considera la pregunta por la existencia de los conjuntos o de los números como una "pseudo-cuestión". Estas preguntas no tienen sentido, afirma, fuera del contexto conceptual en el que las realicemos: primero tendríamos que definir nuestra concepción de "objeto" (de "número" o "conjunto") y de "existencia"; sólo a partir de esas definiciones previas es posible plantearlas. Por eso Putnam, en el texto citado, habla de preguntas "que no entendemos"

[4] Básicamente, la idea es combinar una ontología realista con una epistemología empirista. La práctica matemática, según el quasi-empirismo, es hipotético-deductiva y sus hipótesis pueden ser confirmadas por los cánones del razonamiento inductivo. Las entidades matemáticas deben ser consideradas a la par que las entidades teoréticas de la física. Podemos, según Putnam, aceptar la conjetura de Goldbach o el último teorema de Fermat porque los hemos testado exhaustivamente y han sobrevivido a los tests. Además, la verdad incorpora elementos pragmáticos (además de la correspondencia): el hecho de que una teoría sobreviva en la maraña de las hipótesis y otras teorías es un signo de su verdad. Esto deja abierta la posibilidad de que varias teorías correspondan perfectamente con los hechos y que sin embargo sólo una de ellas resulte verdadera.

Resumiendo entonces, Putnam nos insta a rechazar la necesidad de elegir entre el platonismo y el nominalismo (o constructivismo) en la filosofía de las matemáticas, de la misma manera que, en general, nos insta a rechazar la elección entre el realismo metafísico y el relativismo. En palabras de Putnam,

> We do not have to chose between Platonism – the view that mathematics is about objects of which we have a priori knowledge- and Nominalism- the view that mathematics is not about real objects, that most of it is just make believe (1979: xi)

5.2.2. El Realismo Metafísico

Putnam denomina "realismo metafísico"[5] (en adelante, RM) a un determinado tipo de realismo que, desafortunadamente en su opinión, ha predominado en el pensamiento occidental en los últimos tiempos. Se trata de una postura bastante radical, que no sólo postula la existencia de la realidad exterior y su completa independencia con respecto a los sujetos, sino que además adjudica ciertas características inherentes a dicha realidad y a nuestra relación con ella. El RM, tal y como fue definido por Putnam en *Realism, Truth and History*, comporta tres tesis básicas[6]:

1. RM1: El mundo consiste en una totalidad fija de objetos independientes ("the world consists of some fixed totality of mind-independent objects")
2. RM2: Hay exactamente una descripción verdadera y completa de "la manera en que el mundo es" ("there is exactly one true and complete description of 'the way the world is'")
3. RM3: La verdad entraña algún tipo de relación de correspondencia entre las palabras o el pensamiento y las cosas externas y los conjuntos de

[5] Putnam también denomina a esta postura "externalismo", "realismo trascendental" o "Realismo con mayúsculas".
[6] Sigo en este punto la exposición de Hartry Field en "Realism and Relativism", (1982)

cosas externas ("truth involves some sort of correspondence relation between words or thought signs and external things and set of things")

La conjunción de estas tres tesis sólo es posible, según Putnam, si asumimos una serie de "fantasías metafísicas": lo que él denomina el punto de vista "del ojo de Dios" ("God's-eye point of view") o, en términos de Nagel (1986), el punto de vista desde "ninguna parte" ("View from nowhere"), una serie de dicotomías (entre realidad y apariencia, hecho y valor, etc.) y la concepción de la mente como un objeto. El RM, tal y como se puede observar, no es una tesis exclusivamente acerca de la determinación del valor de verdad de nuestros enunciados. La definición del RM de Putnam va en este sentido más allá que la definición ofrecida por Dummett, quien centraba su atención exclusivamente en los aspectos semánticos (concretamente en la posibilidad de valores de verdad trascendentes a nuestra evidencia). Esta "riqueza" en la definición sin embargo ha suscitado numerosas críticas por parte de algunos filósofos, que alegan que Putnam está "exigiendo demasiado" a los realistas metafísicos.

Hartry Field (1982), por ejemplo, argumenta que las tres tesis son independientes entre sí, y que no es necesario mantener las tres para ser un realista. Concretamente, Field afirma que de RM1 no se sigue RM2, que por lo tanto no tiene porqué ser aceptada por los defensores del realismo. ¿Por qué tendrían los realistas que aceptar que haya una *única* descripción del mundo? Y en cualquier caso, ¿qué quiere decir exactamente que haya una sola descripción completa del mundo? De la misma manera, tampoco es necesario aceptar RM3.[7]

La cuestión no se reduce a un mero problema de definición. Si de verdad las dos últimas tesis no son necesarias para el RM, muchas de las críticas de Putnam perderían su sentido ya que, como veremos, la mayor parte de ellas van dirigidas a la univocidad de la descripción del mundo y a la noción de verdad como correspondencia. Esto es precisamente lo que argumenta Michael Devitt (1984: 220-234), para quien el RM, tal y como lo entiende Putnam, es un híbrido entre una tesis ontológica (el realismo, expresada por RM1) y una doctrina semántica (la verdad como correspondencia,

[7] Field argumenta por lo tanto que la tesis fundamental, y en realidad la única definitoria del realismo metafísico, es la MR1, que postula la existencia de un mundo único e independiente. En cuanto a su propuesta de aplicar una teoría deflacionista de la verdad, ver más adelante las críticas de Putnam a esta posibilidad.

expresada en RM3)[8]. Según Devitt, ferviente defensor del realismo, los ataques esgrimidos por Putnam contra el RM no atañen a la tesis ontológica, la verdaderamente esencial. Son ataques dirigidos contra las tesis RM2 (por medio del argumento de la relatividad conceptual o las descripciones equivalentes) y contra RM3 (por medio del argumento basado en la teoría de modelos).[9]

Sin embargo, en mi opinión, estas críticas no son pertinentes. Podría ser cierto (contra Dummett) que para ser realista basta con defender la existencia y la independencia de la realidad (única); pero en cualquier caso, no es suficiente para ser un "realista metafísico". Putnam, tal y como yo lo leo, no está criticando al realismo, de hecho él mismo pretende defender cierto realismo, está atacando al conjunto de las suposiciones y "fantasías metafísicas" que han dominado en la mayor parte de las corrientes que se denominan realistas. Está intentando destronar una visión particular acerca del mundo y nuestra relación con él, una visión que engloba las tres tesis mencionadas y que, según él, ha dominado el debate filosófico desde el siglo diecisiete[10].

Tal y como afirma Putnam, estas tres tesis no tienen contenido propio fuera del contexto general en el que se enmarcan, que determina entre otras cosas la propia manera de entender los términos "objeto" o "independencia". Pero tampoco tienen contenido por sí solas, es imposible pensar en una única descripción completa del mundo si no presuponemos que éste está compuesto por una totalidad única y determinada de objetos; y, a su vez, necesitamos la existencia de una relación (única) de correspondencia para poder justificarlo.[11]

> Metaphysical realisms one, two and three do not have content standing on their own, one by one; each leans on the others and on a variety of further assumptions and notions (Putnam 1990: 31)

[8] Yo añadiría además una tesis epistemológica, expresada en RM2
[9] Discutiremos ambos argumentos a continuación
[10] Es lo que en "Sense, nonsense and the senses, and inquiry into the powers of the human mind" denomina "*cartesianism cum materialism*"
[11] La dependencia no es simétrica. Es cierto que resulta muy difícil concebir RM2 sin RM3, o RM3 sin RM2 y RM1 por ejemplo, pero es perfectamente posible concebir RM1 sin RM2 o RM3. Esto es, creo, lo que están argumentando Field y Devitt: RM1 sí tiene sentido por sí sola. El problema, tal y como yo lo veo, es que esto no tiene mucha importancia. Un tipo de realismo que defienda únicamente RM1 es perfectamente posible, pero simplemente Putnam no está hablando de ese tipo de postura.

Por último, probablemente la mejor manera de entender las críticas al realismo metafísico es verlas como críticas contra cierto tipo de fisicalismo, tal y como lo interpreta Drew Khlentzos (2004). Un tipo de fisicalismo, por otro lado, similar al realismo científico que él mismo defendió en los primeros años de su carrera. El propio Putnam afirma en varias ocasiones que, hoy por hoy, la única manera, más o menos coherente, de defender un tipo de realismo metafísico es a través de la defensa del fisicalismo[12]. De hecho, las críticas de Putnam se dirigen no sólo hacía esa concepción "metafísicamente fantasiosa" del mundo, sino hacia unas determinadas semántica y epistemología de corte naturalista. Putnam sostiene que actualmente la manera más extendida de RM es la defensa de una "semántica naturalista", según la cual nuestra mente, nuestros "tokens" mentales, están relacionados "fisicalísticamente" a los objetos a los que se refieren del mundo exterior. El elemento principal de este punto de vista es, por supuesto, la teoría causal de la referencia, en la que *x* hace referencia a *y* sí y sólo sí *x* está conectado a *y* por medio de una "cadena causal".[13]

Putnam critica en numerosas ocasiones las posturas fisicalistas que sostienen que todos los objetos, propiedades y relaciones del mundo pueden ser reducidos (o al menos supervienen) a elementos del mundo natural, estudiados por la ciencia y sujetos a sus leyes. Frente a esto, Putnam argumenta que hay propiedades, como las éticas o las semánticas, que no pueden ser reducidas ni explicadas enteramente en base a elementos físicos y que, aún así, juegan un papel esencial en nuestra comprensión del mundo y de nuestra racionalidad.

[12] En el caso de las matemáticas, en mi opinión, el RM puede ser identificado con el platonismo (tradicional). Por eso, según mi interpretación, en el ámbito empírico la mejor manera de interpretar el RM es como un tipo de fisicalismo, mientras que en el ámbito matemático el RM equivale a lo que hemos denominado platonismo.

[13] En este sentido, ver las críticas de Putnam a la propuesta fisicalista de la referencia de Hartry Field (1972) con la que además comienza la exposición de su artículo "Realism and Reason", donde por primera vez presenta las tesis del Realismo Interno(1978b: 7-17)

5.2.3. El Realismo Interno

Frente al realismo metafísico, Putnam desarrolla un tipo de postura que, sin caer en el constructivismo de Dummett o el relativismo de Rorty, no está comprometida con las tres tesis mencionadas del RM. Una postura que, sin dejar de ser realista (sin rechazar la existencia del mundo y su independencia) rechace las "fantasias" que subyacen al RM, que rompa las dicotomías tradicionales y ofrezca una explicación convincente de nuestro papel como sujetos activos inmersos en una compleja red de esquemas conceptuales (que ofrezca, en última instancia una explicación convincente de nuestro conocimiento de la realidad exterior – del problema de la representación-, de la manera en que nuestras palabras refieren a esa realidad y de la manera en que nuestros enunciados adquieren sus valores de verdad). El único modo de aproximarnos a la solución del problema del realismo es aceptar que hay más alternativas aparte de las tradicionales, el realismo metafísico y el relativismo (o el idealismo), cuando, finalmente,

> [W]e appreciate how each of these views is equally unsatisfactory, each is made in the mirror image of the other, and each depends on the idea that the other is the only alternative (Putnam 1994b: 457)

Sin bien el rechazo al RM y su definición se ha mantenido más o menos constante a lo largo de su carrera, la alternativa que ofrece Putnam ha ido variando significativamente a lo largo de los años. Putnam desarrolló el llamado realismo interno (en adelante, RI) durante la década de los setenta y desde entonces sus opiniones han sufrido numerosas transformaciones hasta llegar al "realismo del sentido común" (en adelante, RSC) actual[14]. Para poder entender mejor el motivo de estas transformaciones y las tesis básicas del RSC, creo que es conveniente definir brevemente las principales ideas del RI tal y como fue postulado por Putnam, entre otras publicaciones, en su libro *Reason, Truth and History*. A medida que analicemos con más detalle los argumentos

[14] También denominado "realismo pragmático" o "realismo humanista"

que le condujeron al mismo iremos introduciendo las modificaciones y los nuevos matices aportados por Putnam.

El RI, tal y como fue postulado por Putnam, tiene como elemento fundamental el rechazo a la dicotomía entre realidad y apariencia, esto es, entre la manera en que el mundo *es* y la manera en que el mundo *parece ser*. La pregunta por lo que existe está irremediablemente ligada a la pregunta por cómo lo concebimos y lo que podemos decir acerca de él (del mundo). En otras palabras, el realismo no es incompatible con la relatividad conceptual.

El RI puede ser además visto como una manera de entender la verdad[15]. Según esta concepción, un enunciado es verdadero sí (y sólo sí) puede ser justificado bajo "condiciones epistémicas ideales", es decir, si

> A competent speaker fully acquainted with the use of the words would be fully rationaly warranted in using those words to make the assertion in question, provided she or he were in a sufficiently good epistemic position (Putnam 1994b: 242)

Veremos más adelante que la definición de verdad en la que aparece el elemento "ideal" ha dado lugar a numerosos malentendidos y, de hecho, Putnam mismo la rechaza en sus últimos escritos. En cualquier caso, la idea era conectar el realismo con un tipo de "verificacionismo moderado" (del que Putnam ha llegado a decir sentirse "avergonzado"), con la afirmación de que la verdad no puede trascender totalmente a la evidencia.

Putnam, sin embargo, no ha rechazado otra de las ideas claves del RI, a saber, la idea de que nociones como "existir" u "objeto" no son independientes de nuestro uso del lenguaje ni de los diversos esquemas conceptuales desde los que nos aproximamos al mundo. El mundo, para Putnam, no está organizado en sí mismo en "objetos", "propiedades", etc. Somos nosotros los que dividimos al mundo de acuerdo con estos

---

[15] Putnam insiste en varias ocasiones en que el RI no pretende ser una teoría acerca de la naturaleza de la verdad, sino "a picture of what truth comes to" (Reply to Simon Blakburn, en Clark y Hale (eds) (1994:242))

conceptos y según la manera en que usemos el lenguaje. El mundo existe con independencia de nosotros, pero somos nosotros los que lo definimos.

Es importante enfatizar, sin embargo, que Putnam no pretende con estas afirmaciones defender un tipo de postura constructivista (al estilo de la propuesta por Dummett). Una cosa es, dirá Putnam, afirmar que lo real puede ser tal y como nos parece que es, tal y como lo concebimos, y otra muy distinta que esto sea así, que aparente ser de esta o de otra forma, porque nosotros lo hemos "creado" (construido) de esa manera[16]. En palabras de Putnam

> [E]lements of what we call "language" or "mind" *penetrate so deeply into what we call "reality" that the very project of representing ourselves as being mappers of something "language-independent" is fatally compromised from the very start* [....] Realism [RM] is an impossible attemp to view the world from nowhere. In this situation it is a temptation to say, "So we make the world" or "our language makes up the world", or "our culture makes up the world"; but this is just another form of the same mistake. If we succumb**,** once again we view the world –the only world we know- as a product......*But the world isn't a product. It's just the world* (1990: 28. Cursiva del autor)

5.3. Argumentos contra el Realismo Metafísico

Para no alejarnos demasiado de los intereses de nuestro trabajo centraremos nuestra atención únicamente en dos de los argumentos esgrimidos por Putnam en contra

[16] Sin embargo, es cierto que en algunos pasajes Putnam parece estar proponiendo un cierto tipo de constructivismo. Al menos, resulta difícil encontrar otra interpretación a frases como

> Objects do not exist independently of conceptual schemes [...] we cut up the world into objects when we introduce one or another scheme of description [...] 'Objects' themselves are as much made as discovered, as much products of our conceptual invention as of the 'objective' factor in experience (1981: 52-54)

Putnam, ante las acusaciones de constructivismo, responde que esta lectura de sus tesis viene dada por la aceptación de lo que Davidson denomina "dualism of scheme and content" o, en términos de Dewey "dualism of subject and object". Estos dualismos son parte esencial del conjunto de dicotomías que debemos rechazar, parte de las fantasías metafísicas que conducen a reducir las opciones filosóficas a elegir entre realismo metafísico y relativismo.

del RM: el argumento de la relatividad conceptual y el argumento basado en la teoría de modelos. Esto significa que dejaremos a un lado el que quizás sea el argumento más conocido de todos: el argumento de los cerebros en cubetas. Muy brevemente, lo que este argumento muestra es que el RM es incapaz de refutar la posibilidad de que todo lo que nos rodea, incluidos nosotros mismos (al menos nuestro cuerpo), no sea más que un producto de la imaginación de nuestro cerebro; que el mundo no exista más allá de nuestra mente. En otras palabras, el RM, según Putnam, es incapaz de responder a la posibilidad del escepticismo radical.

La alternativa de Putnam a este problema pasa, de nuevo, por la adopción de un realismo moderado (RI), en el cual la dicotomía entre apariencia y realidad desaparece: lo que existe es lo que nos parece que lo hace (y posee las características que aparentemente posee). En cualquier caso, como digo, no entraremos en detalles, la solución de Putnam para los distintos argumentos es, esencialmente, la misma, y es el análisis de esta propuesta lo que nos interesa.

5.3.1. Relatividad Conceptual

La relatividad conceptual está estrechamente ligada al argumento basado en la teoría de los modelos, que veremos a continuación, aceptar su existencia es el primer paso para solucionar el problema de la indeterminación de la referencia y de nuestra relación con el mundo externo. La relatividad conceptual es un elemento fundamental del RI, tanto que Putnam llega a afirmar

> Internal Realism is, at botton, just the insistence that realism is not incompatible with conceptual relativity (1987: 17)

El argumento de la relatividad conceptual (en adelante, ARC) supone un ataque directo contra la tesis del RM según la cual existe una única teoría verdadera y completa del mundo (MR2, en la definición ofrecida al inicio de este capítulo).

ARC postula, muy brevemente, la existencia de descripciones verdaderas equivalentes acerca del mundo; descripciones que resultan inconsistentes, desde el punto de vista del RM. De esta manera, frente al empeño del RM de lograr una descripción única del mundo, el RI afirma que existe una pluralidad de descripciones posibles (todas ellas verdaderas en relación al contexto, o al esquema conceptual, en el que se enmarcan pero incompatibles entre sí, *fuera* de esos esquemas conceptuales). Una consecuencia de esto, como veremos, es que las nociones con las que describimos la realidad (nociones como "objeto" o "existir") dependen de la teoría, de la descripción que estemos empleando ("theory-dependent").

Para ilustrar este fenómeno, Putnam utiliza diversos ejemplos, algunos de ellos extraídos de la física. El más sencillo de todos sin embargo es el siguiente: Supongamos que existe un mundo con tres individuos: X, Y, Z, ¿cuántos objetos hay en este mundo? La respuesta que inmediatamente nos viene a la mente es 3, ¿acaso no acabamos de decir que el mundo está compuesto por 3 individuos? Pero es probable que si se lo preguntásemos a alguien que creyera que por cada par de individuos existe un objeto que es su suma, es decir, a alguien que creyera en la existencia de las sumas mereológicas no nulas (un lógico polaco, tal y como lo denomina Putnam) la respuesta sería 7. Esto es, el mundo tendría siete objetos: X, Y, Z, X+Y, X+Z, Y+Z, X+Y+Z.

¿Cómo decidir entre estas dos posibilidades?, ambas son verdaderas *bajo una interpretación* determinada de la palabra "objeto". En la primera opción ("world à la Carnap") el término objeto es identificado directamente con los individuos, de manera que "objeto" o "individuo" (o "particular") vienen a significar lo mismo. En la segunda opción sin embargo (el mismo mundo, pero "à la polish logician"), se interpreta que los individuos son una reconstrucción lógica a partir de los objetos metereológicos (de manera que X, por ejemplo, es sólo lo que tienen en común X+Y, X+Z y X+Y+Z).

La moraleja, una de ellas, de este ejemplo es que la pregunta ¿cuántos objetos hay en el mundo? no tiene sentido fuera de un esquema conceptual determinado, es, en términos de Carnap, una "pseudo-question". Las dos respuestas ofrecidas (3 o 7 objetos) resultan incompatibles sólo si son consideradas independientemente de los respectivos esquemas conceptuales que las generan. Pero si analizamos su pertenencia a dichos esquemas veremos que el problema no es que sean incompatibles, el problema es que al hablar de objetos, simplemente, no están hablando de lo mismo.

Putnam presenta otro ejemplo para ilustrar lo dicho, acerca del estatus ontológico de un punto en un plano euclidiano. La pregunta en este caso sería, ¿existen realmente los puntos en un plano – esto es, como partes del plano- o son por el contrario meros límites (de infinitas esferas concéntricas)? La respuesta de Putnam es tajante,

> God himself, if he consented to answer the question “Do points really exist of are they mere limits?” would say “I don’t know”; not because His omniscience is limited, but because there is a limit to how far questions make sense.(1990: 97)

Los defensores del RM tradicionalmente responden por medio de lo que Putnam denomina la metáfora del “cookie cutter”. De acuerdo con esta metáfora existe un mundo *único* que nosotros podemos dividir o estructurar de distintas maneras. Pero esta respuesta, según Putnam no responde adecuadamente al problema, ya que igualmente podríamos preguntar ¿Cuáles son las partes de ese mundo único? Frente a lo cual el RM no tendría una respuesta neutral; de nuevo, sólo podría ofrecer respuestas parciales, dependientes del esquema conceptual.

Esto supone un problema para el RM porque no sólo tendría que admitir la posibilidad de numerosas descripciones posibles de la realidad, tendría que admitir que todas ellas son verdaderas (en relación a un esquema conceptual), que no hay una descripción de la realidad *neutral*. Conceptos considerados primitivos como “objeto” o “existencia” tienen, según el ARC, numerosos usos y no un significado único y absoluto como requieren los realistas metafísicos.

Afirmar que estos conceptos tienen múltiples usos –defender el pluralismo- no es lo mismo que defender que todos los usos son correctos o que el significado de nuestros términos y el valor de verdad de nuestros enunciados estén determinados culturalmente.

Admitir la relatividad conceptual no es lo mismo, afirma Putnam, que aceptar el relativismo (de la misma manera que no es aceptar el irrealismo, al estilo de Goodman). Preguntar por el número de objetos del mundo es un sinsentido, pero, preguntar eso mismo partiendo de una interpretación determinada de los términos no sólo tiene sentido, también tiene una respuesta concreta y verdadera (3 en el caso de que partamos de la interpretación de Carnap y 7 si partimos de la interpretación del lógico polaco). El que sea posible describir una misma situación (un mismo mundo, en nuestro caso) utilizando vocabularios distintos no significa que no haya nada que describir (irrealismo) o que la realidad no juegue ningún papel a la hora de determinar estas descripciones (relativismo cultural). El que nuestra respuesta a este tipo de preguntas tenga que ser *convencional* no significa que neguemos con eso la existencia de los objetos o de la realidad; no significa que la propia existencia de la realidad sea convencional. En palabras de Putnam,

> I'm not asking us to abandon *any* part of the commonsense standar, or the commonsense practice (for such I take it to be) of regarding it as no real question at all whether the table is "identical with the region it occupies in space-time or with the mereological sum of time-slices of molecules that it contains" what I'm asking us to "abandon" is the idea that such a question must have a non-conventional answer (Clark y Hale (eds) 1994: 251. Cursiva del autor)

Carnap y el lógico polaco, por seguir con el ejemplo de Putnam, ofrecen respuestas incompatibles a la pregunta si ésta es formulada desde un punto *neutro*, sin predeterminar una interpretación de los términos. Sin embargo, si antes de hacer la pregunta especificáramos el esquema conceptual desde el que hablamos, si les dijéramos por ejemplo: "asumiendo que por objeto entendemos "objetos mereológicos", ¿cuántos objetos hay en el mundo?". Ambos responderían lo mismo: 7.

> Rather that conclude with Goodman that either there is no world at all or else we live in more than one world, or to conclude with Davidson that the phenomenon of equivalent descriptions, which we have recognized in science since the end of the nineteenth century, somehow involves a logical contradiction, we should simply give up the idea that the sentences we have been discussing preserve

> something called their "meaning" when we go from one such version into another such version (1992: 119)

El ARC es aplicable también, por supuesto al caso de las matemáticas. De hecho Putnam argumenta en repetidas ocasiones que la pregunta "¿existen los conjuntos?", o preguntas similares simplemente carecen de sentido, de la misma manera que carece de sentido la pregunta por el número de objetos del mundo. De nuevo, y también en el caso de las matemáticas, necesitamos especificar previamente el esquema conceptual desde el que estamos realizando la cuestión, pues esto determinará el significado de "existir" o de "conjunto". En cualquier caso, en el capítulo dedicado a las conclusiones expondremos una posible forma de entender la aplicación de estas ideas al ámbito de las matemáticas.

5.3.2 Argumento basado en la teoría de modelos

El principal objetivo del argumento basado en la teoría de los modelos (comúnmente denominado "model-theoretic argument"; ATM en adelante) es mostrar que el realismo metafísico es incapaz de explicar el fenómeno de la referencia de nuestros términos o, tal y como Putnam lo interpreta en sus últimos escritos, es inconsistente con una teoría representacionalista de la mente. El problema es que, incluso si asumimos que existe una totalidad única y fija de objetos, propiedades y relaciones que conforman la realidad externa, no hay nada en nuestro uso del lenguaje y, en particular, en nuestro uso de términos como "conjunto" o "∈", que determine su extensión (no de forma que, por ejemplo, la hipótesis del continuo adquiera un valor de verdad determinado). Esto es, no hay nada en la práctica del lenguaje que determine que

a) el cuantificador "todos los conjuntos" se aplique a *todos los conjuntos*

b) el predicado "∈" sea aplicable al par <a, b> si y sólo si a es miembro de b

El argumento parte del análisis de la denominada “paradoja de Skolem” en la filosofía de las matemáticas y a partir de ahí, demuestra que la referencia a términos como “conjunto” es indeterminada (lo cual, por seguir con el ejemplo anterior, representa un claro problema a la hora de determinar el valor de verdad de enunciados como la hipótesis del continuo). Sin embargo, Putnam argumenta que es posible (en realidad inevitable) extender el argumento a los objetos postulados por la ciencia y, en última instancia, a la totalidad de los objetos que conforman el mundo.

Para ello, Putnam parte de la definición del RM que ofrecimos anteriormente, según la cual el mundo está constituido por una totalidad de objetos independientes (del lenguaje o de la mente) y existe una única descripción completa del mismo (o al menos, la posibilidad de desarrollar dicha descripción). Esta última condición viene a expresar la creencia en la existencia de una relación única de referencia entre nuestras palabras y el mundo (que también es único y estable); esta relación, de acuerdo con el RM está determinada por la manera misma en que entendemos y utilizamos nuestro lenguaje. Además implica también la existencia de una única relación de correspondencia, que determina el valor de verdad que asignamos a nuestros enunciados. La verdad, para los defensores del RM es (radicalmente) no-epistémica y por lo tanto incluso una teoría ideal (que cumpla todos los requisitos, tanto teóricos como operacionales) podría perfectamente ser falsa.

A partir de esta definición, Putnam establece otras dos suposiciones:

1. Que existe una teoría que contiene todos (y únicamente) los enunciados que aceptaríamos en un límite ideal de racionalidad (“ideal limit of racional inquiry”). Llamaremos a esta teoría T_1.
2. Que hemos conseguido formalizar el lenguaje de T_1 en un lenguaje de primer orden, L_1

En esta formalización se define como “relación de referencia” a la función que asigna extensiones a las constantes individuales, a las funciones y a los predicados del lenguaje. De acuerdo con la denominada “paradoja de Skolem” en la filosofía de las matemáticas, toda teoría consistente posee un gran número de interpretaciones posibles (incluso interpretaciones no isomórficas). Así, la totalidad de las verdades acerca de los objetos matemáticos expresables en el lenguaje de las matemáticas no puede determinar a qué objetos estamos haciendo referencia. Según esto, existen distintas relaciones de referencia que pueden hacer a T_1 verdadera (asumiendo que T_1 sea una teoría consistente que postule la existencia de más de un objeto). Incluso asumiendo la existencia de una teoría ideal como T_1, dicha teoría es incapaz de establecer una relación de referencia única (es incapaz de establecer, tal y como Putnam lo expresa, “the intended reference relation”). En palabras de Putnam,

> The argument that Skolem gave, and that shows that “the intuitive notion of set” (if there is such a thing) is not captured by any formal system, shows that even a *formalization of total science* [...] or even a *formalization of all our beliefs* [...] could not rule out denumerable interpretations and *a fortiori*, such a formalization could not rule out *unintended* interpretations of this notion (1980: 423. Cursiva del autor)

Esto demuestra que las “constricciones teóricas”, tanto si provienen de la teoría de conjuntos como de la totalidad de la ciencia, no son suficientes para establecer la interpretación de “conjunto” de la manera requerida (“in the intended way”).[17] El problema es que si intentamos encontrar alguna otra cosa que lo determine (en forma de constricciones operacionales por ejemplo) veremos que tampoco es posible. Ni siquiera nuestra comprensión del lenguaje, el uso total del lenguaje (en el que se expresa la formalización de la totalidad de nuestras creencias) es capaz de fijar una interpretación única del concepto intuitivo de conjunto.

Pero Putnam no limita su análisis a la noción de conjunto ni al ámbito de la filosofía de las matemáticas; Putnam afirma que es posible extender esta tesis a todo el lenguaje, no sólo al lenguaje de las teorías científicas, sino también al lenguaje ordinario. Volviendo a la teoría ideal T_1, y asumiendo que es consistente (y está formulada en lógica de primer orden) podemos concluir, a partir del teorema de la completud de la lógica de primer orden, que T_1 tiene (al menos) un modelo, M. Dicho

[17] Demuestra, en otras palabras, que la noción intuitiva de conjunto no puede ser “captada” por medio de la axiomatización. De la misma manera, Putnam afirma que la noción de verdad tampoco puede ser establecida por un conjunto de axiomas.

modelo satisface todas las constricciones teóricas y operacionales (ya que T_1 los satisface[18]) y por lo tanto puede ser considerado como el modelo estándar ("the intended model") ya que, ¿qué otro requerimiento podríamos imponer para considerar un modelo como el adecuado? Pero si M_1 es el modelo estándar o adecuado de T_1, T_1 tiene que ser verdadera (ya que ser verdadera es ser verdadera en el modelo adecuado) y por lo tanto, la afirmación del realismo metafísico de que T_1 puede ser falsa es errónea. No tiene sentido sostener que una teoría que posea todas las propiedades epistémicas ideales sea falsa. Al menos no, si la teoría es consistente y esta formalizada en un lenguaje de primer orden, ya que en este caso tendría al menos un modelo *proyectable* sobre la realidad, de forma que la haría verdadera.[19]

Si invertimos este razonamiento, y aplicamos las tesis de la relatividad conceptual, llegamos a la conclusión de que, si la realidad es concebida como totalmente independiente de nuestras descripciones (tal y como hace el RM), entonces tenemos que admitir la posibilidad de que todas nuestras creencias pudieran ser falsas. Esto es, el RM no tiene forma de evitar la posibilidad del escepticismo radical.[20]

Resumiendo, el ATM plantea dos problemas al realismo metafísico:

1. El RM requiere que exista una única relación de referencia (correspondencia) entre los elementos del lenguaje y los elementos del mundo (independiente) que satisfaga todas las constricciones teóricas y operacionales. El ATM no niega que dicha relación exista, lo que niega es que sea *única*. Es imposible determinar una única relación entre el lenguaje y el mundo como la correcta, lo cual, obviamente, nos conduce a que la referencia es indeterminada. Ningún criterio que fije los valores de verdad de los enunciados puede fijar a su vez la referencia[21].

---

[18] T_1 los satisface porque es una teoría ideal, que cumple con todos los requisitos planteados en el límite de la racionalidad.

[19] Algunos autores han intentado eludir las consecuencias del argumento basado en la teoría de los modelos negando que las teorías científicas sean formalizables como teorías de primer orden y, de esta manera, han propuesto una formalización de segundo orden, que evitaría el argumento ya que la semántica estándar para él no reconoce nada similar a una "interpretación" si las variables de predicado no actúan sobre todas las subclases del dominio. En este sentido ver Field (pendiente de publicación).

[20] Esta es, precisamente, la conclusión a la que Putnam llega por medio del argumento de los cerebros en las cubetas. Es imposible asegurar, desde las premisas del RM, que el mundo y los demás seres que nos rodean existan realmente y no se reduzcan a "imaginaciones" de nuestro cerebro.

[21] Putnam, para llegar a esta conclusión, utiliza además del argumento de los modelos, los argumentos de Quine al respecto. Según Quine (1960 y 1969) las constricciones teóricas y operacionales determinan qué

2. Esto es cierto incluso si asumimos que pueda existir una sola teoría ideal (una descripción única del mundo). Cualquier teoría ideal, similar a T_1, cuenta con una relación de correspondencia con el mundo, con un modelo en el cual todas las constricciones teóricas y operacionales sean satisfechas. Por lo tanto, la idea defendida por los realistas metafísicos de que una teoría ideal pueda ser falsa es incoherente

Lo que Putnam realmente persigue, aparte de criticar el RM, es encontrar una manera de resolver el problema de la indeterminación de la referencia. En concreto, una explicación convincente de porqué cuando usamos, por ejemplo, la palabra "conjunto" de la manera en que comúnmente la usamos, estamos refiriéndonos a (únicamente) a los conjuntos. En "Models and Reality", Putnam afirma "if use doesn't fix the interpretation, then nothing does", pero esto no resuelve el problema ya que, como hemos visto, el uso del lenguaje no fija una única interpretación del mismo, no establece una relación de referencia determinada.

La respuesta más directa y común del RM es apelar a una "teoría causal de la referencia" (en adelante TCR), formulada principalmente por el propio Putnam y por Kripke[22]. Esta teoría evita el problema de la indeterminación de la referencia porque afirma que existe un elemento capaz de establecer la relación "correcta" entre una palabra y su referente: la causalidad. Por otro lado, si esto fuera posible, también demostraría la falsedad del segundo resultado del argumento de los modelos: puesto que no tenemos garantías de que la relación de satisfacción (la relación que establece la verdad de un enunciado en un modelo M) coincida con la relación causal que determina la referencia, no hay garantía de que T_1 sea verdadera.

---

enunciados son verdaderos pero no pueden determinar la referencia de sus términos (no pueden determinar ni que refieran a algo ni, en caso de que lo hagan, a qué concretamente). Putnam desarrolla este argumento sobre todo en (1981), en cuyo apéndice introduce la formalización de un método por el cual siempre es posible introducir variaciones (permutaciones) en la interpretación de los términos del lenguaje en general sin que varíe con ello el valor de verdad de los enunciados.

[22] Algunos autores, como Devitt o Lewis, responden al argumento de Putnam afirmando que hay, al menos, una condición teórica que T_1 no cumple: una relación de referencia adecuada (generalmente defendida en términos causales, pero no necesariamente). Así, esta relación de referencia adecuada para L_1 establece que los términos de T_1 mantienen esta relación de referencia, R, con sus referentes, de manera que:
(RRA) El término τ hace referencia al objeto x syss $R\tau x$
Véase Khlentzos (2004:232-239) para una discusión de este argumento y de la respuesta de Putnam a él.

Putnam rechaza esta posibilidad, afirmando que no representa una salida al problema, simplemente añade más teoría al mismo, es sólo “just more theory”. Brevemente, si la TCR explica la referencia, debe ser compatible con T1 y por lo tanto puede ser añadida a la misma. La TCR resulta ser parte de la teoría misma y por lo tanto tendrá los mismos problemas (el argumento de los modelos puede ser igualmente aplicado a T_1 + TCR). La TCR es, para Putnam, parte del problema, no una solución al mismo.[23]

A pesar de esto, el RM o el platonismo tienen a su alcance otra salida obvia, aunque claramente insatisfactoria, al dilema; postular algún tipo de facultad misteriosa de conocimiento que nos permita tener un acceso directo a los objetos (matemáticos o de otro tipo). Si las constricciones físicas o teóricas no son capaces de fijar la referencia de nuestros términos y si el recurso a la causalidad tampoco surte el efecto deseado alguna otra cosa tendrá que hacerlo. Pero, tal y como lo expresa Manuel Liz, “más allá de la física está la metafísica” (2003: 80).

Fuera de la teoría causal, el único recurso que le queda al RM es apelar a algún tipo de conexión “misteriosa” entre las palabras y sus referentes. La manera más habitual es postular algún tipo de facultad mental, como la intuición, que nos permita determinar cual es el referente de nuestros términos, lo que Putnam denomina “teorías mágicas de la referencia” (“magical theories of reference”). Esta solución sin embargo, difícilmente puede convencer a alguien como Putnam, cuyo principal empeño es el rechazo de las fantasías metafísicas que inundan nuestro pensamiento[24]. Además, el argumento de la relatividad conceptual, tal y como vimos, se encarga precisamente de mostrar el error que supone defender ese tipo de facultades que, invariablemente, requieren que el sujeto se aísle de alguna manera del contexto en el que se sitúa, de los esquemas conceptuales de los que parte (es decir, que adopte el punto de vista del “Ojo de Dios”).[25]

---

[23] Este es uno de los aspectos más problemáticos del argumento de Putnam. Para una formulación más detallada del argumento de “just more theory” y las críticas al mismo, ver, Putnam (1978b:126), (1983a:17), (1990:85), Igor Douven (1999), Hale y Wright (1997)

[24] David Lewis, en su influyente artículo “Putnam’s Paradox” (1984), argumenta, adecuadamente en mi opinión, que el argumento de “just more theory” que Putnam únicamente aplica a la teoría causal de la referencia puede ser perfectamente aplicado también para el resto de las soluciones no-causales que intenten determinar la referencia por medio de algún tipo de elemento independiente del sujeto

[25] Esto, sobra decirlo, es una clara crítica al tipo de platonismo que defiende el acceso a los objetos matemáticos por medio de la intuición matemática (en cualquiera de sus formulaciones).

Si el RM tiene a su alcance varias soluciones más o menos obvias (aunque insatisfactorias), en cierta medida, la solución es aparentemente igual de sencilla para los relativistas. Basta afirmar que el término "perro" hace referencia a los perros, y no a los plátanos, porque así es como yo concibo la situación: es mi intención que "perro" refiera a perro (y no a plátano). La realidad no tiene prácticamente ningún papel que jugar y los sujetos determinan totalmente los modelos (los construyen). Es fácil ver que esta respuesta es igualmente insatisfactoria. Aceptarla implicaría rechazar completamente el papel del mundo (y de los demás sujetos, en realidad). La referencia se convertiría en un fenómeno meramente subjetivo.[26]

El verdadero problema y el principal reto es intentar responder a los desafíos planteados por el ATM desde un realismo moderado: una postura que respete la existencia independiente de la realidad pero que no acepte la formulación de estas facultades misteriosas del conocimiento y que no caiga, en el conjunto de fantasías metafísicas que la acompañan. Tal y como él mismo lo expresa,

> A world that interprets our words for us, a world in which there are, as it were, "noetic rays" streching from the outside into our heads (remember, I still thought of the mind as a thing, and, hence, saw no recourse but just to identify it with the brain), is a magical world, a fantasy world. I could not see how the fantasy even made sense, but at that point I also did not see how reference was possible unless the fantasy made sense. Hence my feeling that I was confronted by a genuine antinomy. My earlier formulations of internal realism were an unsatisfactory attempt to resolve that antinomy (1994b: 461)

La única salida posible para Putnam, en el momento en el que escribió "Models and Reality", era la adopción de una semántica no-realista, en términos verificacionistas. Tanto en esta publicación como en "Realism and Reason", Putnam abogaba por la adopción de este tipo de semántica, que más tarde modificaría y ampliaría en *Realism, Truth and History*, donde expuso su propuesta para una teoría de la verdad en términos de aceptabilidad racional bajo condiciones epistémicas ideales y

[26] Putnam argumenta convincentemente contra esta posibilidad por medio del argumento de los cerebros en las cubetas, desarrollado principalmente en Putnam (1981)

donde daría forma al realismo interno[27]. Al contrario que Dummett, quien como vimos defiende también una semántica verificacionista (aunque con diferentes e importantes matices), Putnam otorgaba un papel importante a la realidad a la hora de determinar cuales eran esas "condiciones epistémicas ideales", siendo ella la que establecía si efectivamente nos encontramos en esas condiciones ideales o solamente nos lo parecía a nosotros (Putnam, con el RI, rechazaba la separación entre apariencia y realidad). La noción de condiciones epistémicas ideales es, en este sentido, una noción que involucra al mundo ("world involving notion"). Esto es importante porque de otra manera el problema de la referencia seguiría estando presente: de la misma manera que hay un problema a la hora de explicar cómo podemos referirnos a las cosas del mundo externo, habría un problema en cómo puedo tener acceso (referencial o no) a las "condiciones epistémicas ideales".

Para el Putnam de "Models and Reality" lo importante era encontrar una manera de relacionar el uso que le damos al lenguaje con la referencia. La solución al dilema pasa por afirmar que "perro" hace referencia a los perros y no a las zanahorias porque no es nuestra intención que la palabra "perro" haga referencia a las zanahorias, nuestro *uso* de la palabra "perro" no conduce a hacer referencia a zanahorias. Así se explica de una manera sencilla el motivo por el que un modelo en el que "perro" haga referencia a zanahoria no es el modelo estándar, el modelo deseado. Esto es posible porque, en la semántica no-realista, los modelos no son vistos como "entes" externos, independientes de toda descripción o de toda teoría. Los modelos, tal y como Putnam propone interpretarlos, dependen de la descripción que demos de ellos. Podemos reconocer un modelo inadecuado a través de la descripción por la que es dado. Para los defensores del RM, el metalenguaje en el que se expresan los modelos es desconocido, pero para el RI lo entendemos perfectamente, porque está determinado por nuestra descripción del mismo,

> Even though the model referred to satisfies the theory, etc., it is "unintended"; we recognize that it is unintended *from the description*

[27] En las dos publicaciones anteriores, Putnam no entra en detalles ni acerca de la noción de verdad ni acerca del realismo interno. Esto crea confusión ya que en "Realism and Reason" habla ya del RI, solo que, como ha aclarado más tarde, estaba con esto haciendo referencia a un tipo de realismo científico y no a lo que más tarde sería su postura.

> *through which it is given* [...] Models are not lost noumenal waifs looking for someone to name them; they are constructions within our theory itself, and they have names from birth (1980: 444)

Como iremos viendo a medida que avancemos, Putnam en la actualidad rechaza explícitamente la opción de adoptar una semántica verificacionista. El motivo por el que al escribir "Models and Reality" no veía otra salida aparte del anti-realismo o la defensa de facultades misteriosas del conocimiento, el motivo por el cual no creía posible la formulación de un tipo de realismo moderado, es que, en aquel entonces, aún estaba inmerso en la visión moderna de la realidad, según la cual debía haber un elemento intermedio ("interface") entre los sujetos y el mundo. Esta visión insta a considerar a la mente como un *objeto* que necesita de intermediarios, de representaciones, para entrar en contacto con los otros objetos que pueblan la realidad externa (es lo que Putnam denomina "cartesian cum materialist philosophy of perception"). Sólo renunciando a esta visión del mundo podremos resolver el dilema de la referencia y de la representación; es más, según Putnam, una vez hayamos rechazado esta visión el dilema dejará de ser tal,

> No conception that retains anything like the tradicional notion of sense data can provide a way out; such a conception must always, in the end, leave us confronted by what looks like an insoluble problem (1994b: 463)

Antes de pasar a analizar la noción de verdad propuesta por Putnam, me gustaría hacer un pequeño inciso para mencionar la influencia del ATM sobre el análisis de los problemas del platonismo. Los resultados del ATM, el análisis que de ellos hace Putnam y su generalización desde el ámbito de las matemáticas al resto de las áreas de conocimiento, resulta en mi opinión tremendamente interesante desde el punto de vista del problema del conocimiento de los objetos matemáticos[28]. Tal y como vimos en la

[28] Hartry Field, por ejemplo, ha prestado gran atención a la influencia del ATM para el conocimiento de las matemáticas, especialmente para el análisis de la objetividad de las matemáticas. Ver, "Mathematical Undecidables, Metaphysical Realism and Equivalent Descriptions" (pendiente publicación), (1998a) y (1998b).

primera parte del trabajo, resulta muy difícil encontrar una manera de explicar el acceso a los objetos matemáticos sin postular misteriosas facultades mentales y sin renunciar a posiciones realistas. Éste es precisamente el dilema que trata de resolver Putnam en relación al realismo metafísico: los problemas y las soluciones parecen ser las mismas tanto en el caso matemático como en el empírico[29].

El problema del acceso, por lo tanto, no sólo no es exclusivo de las matemáticas, lo cual es bastante obvio, sino que su dificultad no depende de la naturaleza intrínseca de los objetos (matemáticos). La dificultad y la posible solución dependen de nuestra concepción general de la realidad y de nuestra relación con ella. El problema del acceso a las entidades matemáticas y con él, el problema de la referencia a dichos objetos, no resulta más problemático, bajo este enfoque, que el problema aplicado a las entidades postuladas por la ciencia empírica.

Esto le resta importancia, obviamente, a la distinción entre objetos abstractos y concretos pero también cuestionaría el planteamiento del dilema por parte de Benacerraf: el problema no es cómo entidades abstractas pueden mantener relaciones causales (o de otro tipo) con nosotros; el problema es cómo podemos determinar una *única* relación con ellas. Cómo podemos determinar cuál de las relaciones de referencia posibles de cada palabra (en realidad cada término tiene infinitas posibilidades de referencia o infinitas posibles interpretaciones) es la adecuada y, por lo tanto, cómo podemos establecer la objetividad de la misma. El problema del conocimiento pasaría a ser un problema de objetividad (objetividad de nuestra referencia y objetividad por tanto de la verdad matemática). Dedicaremos parte de las conclusiones al desarrollo y la defensa de esta última idea, inspirada como vemos (al menos en parte) por el ATM.

De hecho, la solución al problema que Putnam ofrece en “Models and Reality” es perfectamente aplicable al caso de las matemáticas. Él mismo reconoce que le debe a Dummett la idea de adoptar la semántica verificacionista para resolverlo y Dummett, como vimos, parte del análisis de las tesis intuicionistas para desarrollarla. Bajo la semántica verificacionista por lo tanto, el problema de la referencia dejaría de ser tal (o al menos, dejaría de aparecer como un problema absolutamente intractable) ya que

[29] De hecho, cuando Putnam habla de Realismo metafísico no limita su atención a los objetos empíricos o los postulados por la ciencia. Según mi interpretación, el platonismo no es más que una manifestación del realismo metafísico en matemáticas. Una rama, podríamos decir del realismo metafísico.

tanto los objetos como los modelos dependen de nuestras descripciones. No existen como entidades aisladas, esperando ser descubiertas, son, en cierta medida "construcciones"[30] (un problema, ciertamente, es determinar de *quién* son esas construcciones).

Con esto, claro está, no estoy queriendo afirmar que ésta sea la solución correcta al problema. Ya vimos que la explicación de Dummett no resultaba satisfactoria y el propio Putnam ha renunciado también a ella (a su versión, menos idealista, de la misma). Simplemente quería resaltar que, al igual que Dummett y los defensores del enfoque semántico del realismo en general, Putnam no considera que el problema del realismo o del acceso sea exclusivo (o significativamente diferente) de las matemáticas. Por eso mismo, las soluciones a ese problema deben darse desde la óptica general del debate en torno al realismo.

5.4. La verdad como aceptabilidad racional bajo condiciones epistémicas ideales

Ya vimos que por medio del argumento basado en la teoría de los modelos Putnam argumenta que la idea de que una teoría epistémicamente ideal, que cumpla con todas las constricciones teóricas y operacionales que pudieran exigirse, pueda ser falsa es inconsistente. Pero esto es lo mismo que afirmar que la idea de una noción de verdad que trascienda o vaya más allá de la justificación bajo condiciones epistémicas ideales es también inconsistente. No hay nada más allá, aparte de los requisitos exigidos para que una situación (o una teoría) se considere epistémicamente ideal, que pueda determinar el valor de verdad de un enunciado. Y si hay algo más allá, es imposible de conocer, formaría parte de esas fantasías metafísicas de las que Putnam habla y que son el sello de identidad del RM.

[30] En realidad, Putnam nunca dice que los modelos, y mucho menos la realidad externa, sean construcciones. De hecho, se defiende constantemente de las acusaciones de idealismo y critica a Dummett por caer en él. Putnam cree en una realidad independiente, pero una realidad definida por nosotros (tal y como vimos en el apartado anterior, al analizar el argumento de la relatividad conceptual).

Por otro lado, también vimos que no tiene sentido afirmar que lo que fija la referencia de nuestros términos, y por lo tanto el valor de verdad de nuestros enunciados, es únicamente la intención de los hablantes. No tiene sentido, argumenta Putnam, eliminar al mundo para resolver el problema de la referencia o de la verdad. Aceptar la posibilidad de varias interpretaciones de nuestros términos, o de descripciones equivalentes del mundo, no implica rechazar la existencia del mundo ni la estabilidad o la convergencia de la verdad. El relativismo comete el error de hacer depender la verdad y la referencia enteramente del sujeto; el idealismo al estilo de Dummett comete el error de olvidar el papel del mundo en la verificación de los enunciados.

Putnam intenta mantener un difícil equilibrio entre estas dos posturas antagónicas –RM y relativismo o idealismo- y para ello desarrolla una noción de verdad que reconozca nuestro papel en el proceso de conocimiento, que reconozca que nuestros términos dependen de la descripción que demos del mundo (y esto a su vez, depende del esquema conceptual del que partamos) y que admita la posibilidad de distintas interpretaciones. Todo esto, sin reducir la verdad a mera verificación, como hace Dummett: la verdad, para el Putnam del RI, no equivale a la mera verificación, sino a la verificación bajo condiciones epistémicas ideales (es imposible que algo que sea justificado en estas condiciones sea falso ya que no parece que pueda haber nada más allá de estas condiciones que determine el valor de verdad). Tal y como Putnam ve la situación,

> The metaphysical realist insists that a mysterious relation of “correspondence” is what makes reference and truth possible; the internal realist, by contrast, is willing to think of reference as internal to “texts” (or theories), *provided* we recognize that there are better and worse “texts” [...] The notion of a “right” answer to a question has two constraints: 1) *rightness is not subjective* [....] 2) *rightness goes beyond justification* (1990: 114. Cursiva del autor)

El fenómeno de la relatividad conceptual por lo tanto, como era de esperar, afecta de lleno a la noción de verdad, de la misma manera que afecta a la noción de referencia.

> If objects are […] theory-dependent, then the whole idea of truth's being defined or explained in terms of a "correspondence" between items in a languaje and items in a fixed theory-independent reality has to be given up (1990: 41)

La verdad no debe entenderse como una relación única de correspondencia entre nuestras mentes y el mundo[31]. La verdad, como la referencia, depende del esquema conceptual del que partamos, de la descripción del mundo en la que se enmarque el enunciado a evaluar. Pero de nuevo, Putnam pone mucho énfasis en diferenciar su propuesta del idealismo dummettiano (o del relativismo). Por eso afirma reiteradamente que la verdad, tal y como el RI la entiende, no es un asunto subjetivo y que además no debe equipararse con la verificación (o la mera justificación).

La verdad, para el Putnam del RI, equivale a "aceptabilidad racional bajo circunstancias epistémicas ideales". El problema, claro está, es que no resulta sencillo interpretar qué quiere decir exactamente Putnam por esto. La mayor dificultad está en entender el sentido que Putnam le da al término "ideal", ¿qué entiende Putnam por condiciones epistémicas *ideales*? Lo primero que a muchos críticos se les ocurrió es que Putnam estaba apelando a algún tipo de momento utópico al estilo de Peirce: un momento límite en el que estamos en posesión de todo el conocimiento científico. Obviamente esto dio lugar a un aluvión de críticas contra esta idea, ¿qué sentido tiene postular una noción de verdad inalcanzable? Porque, obviamente, si entendemos el término *ideal* en este sentido, nadie podría estar nunca en él.[32]

[31]En contra de lo que muchos intérpretes han querido entender (ver, por ejemplo la discusión entre Putnam y Blackburn en Clark y Hale (eds) 1994), cuando Putnam rechaza la posibilidad de la verdad como correspondencia no está rechazando el aspecto "trivial" de esta relación, es decir, no rechaza el que para que un enunciado sea verdadero tiene que corresponderse de alguna manera con la realidad. Lo que rechaza es una manera concreta de entender esta relación de correspondencia, la manera del RM, que la interpreta como una relación única y fija, independiente del sujeto.

[32] Manuel Liz (2003: 84), expone una crítica a esta interpretación desarrollada originalmente por Sosa (1991: 7) en los siguientes términos:

Una posible respuesta a estas críticas es que esas condiciones ideales son un "ideal", algo con lo que podemos trabajar, aunque sea inalcanzable. Putnam parece apuntar a algo parecido en algunas ocasiones, cuando establece la analogía con las idealizaciones que utilizamos en física constantemente. En física, nos dice Putnam, hablamos de las propiedades de planos que ejercen una fuerza de fricción igual a 0, aunque es imposible encontrar un plano que cumpla esta característica en la naturaleza. Se trata de un caso ideal, de un plano ideal, que no podremos conocer pero acerca del cual podemos teorizar, podemos establecer la verdad y la falsedad de enunciados acerca de él y nos es de gran utilidad a la hora de estudiar las propiedades de los planos *reales*.

Sin embargo, aunque ésta no puede ser "toda la verdad" acerca de la noción de verdad de Putnam (valga la redundancia) sí hay algo de cierto en esta manera de interpretarlo. Putnam, al hablar de condiciones ideales de conocimiento, no se está refiriendo a ningún momento utópico, se trata más bien de una noción *limitante*: una ficción similar a la de los planos sin fuerza de fricción. No existe un momento ideal en el que podamos justificar *todos* los enunciados, porque contemos con *todo* el conocimiento (¡eso será incurrir en las fantasías metafísicas que tanto critica!). Unas condiciones se consideran ideales respecto a unos enunciados, pero no respecto a otros, o respecto a un contexto y no respecto a otro.

La postura de Putnam es fácilmente diferenciable de la de Peirce en al menos dos aspectos clave. En primer lugar, si identificamos la verdad con aceptabilidad racional bajo circunstancias epistémicas ideales, una de las primeras cosas que nos viene a la mente es preguntar ¿aceptable para quién?, ¿en quién recae la "responsabilidad" de aceptar o rechazar racionalmente un enunciado "P"? De acuerdo con la versión ofrecida por Peirce, "P" debe ser aceptada por *todos* los investigadores que se encuentren en el límite ideal de investigación, es decir, por todos aquellos que dispongan de toda la información relevante para determinar la verdad o la falsedad de "P".

Supongamos también que (1) nadie está en condiciones epistémicas ideales. Afirmar (1) es equivalente a afirmar que (1) es verdad. Pero, según la primera suposición que hemos hecho, (1) sería verdad si y sólo si en condiciones epistémicas ideales fuera aceptable que nadie está en condiciones epistémicas ideales, lo cual es absurdo. Parece que la única forma de salvar el planteamiento de Putnam consiste en negar la verdad de (1). Alguien debe poder estar en condiciones epistémicas ideales. Las condiciones epistémicas ideales no pueden ser tan ideales. De alguna forma, deben ser reales

La propuesta de Putnam es mucho menos ambiciosa, y por ello mucho más plausible. Cualquier sujeto con las capacidades cognitivas adecuadas que tenga a su disposición la información disponible en unas circunstancias suficientemente buenas, es considerado apto para aceptar o rechazar "P". No es necesario postular un límite ideal de investigación, ni una comunidad de investigadores igualmente ideales.

Esto nos lleva directamente a la segunda diferencia. Para Peirce, la verdad debe ser cognoscible por unos sujetos en cierta medida "ideales", unos sujetos capaces de situarse en ese límite ideal de conocimiento, capaces de poseer y evaluar *toda* la información relevante para aceptar o no "P". Pero esto, al fin y al cabo, es equivalente a otorgar al sujeto unas capacidades cognitivas superiores a las humanas. En otras palabras, nos acerca demasiado al punto de vista del "Ojo de Dios". Recordemos la distinción que establecía Dummett entre realismo y anti-realismo,

> The fundamental difference between the anti-realist and the realist lies in this: the anti-realist interprets 'capable of being known' to mean 'capable of being known by us' whereas the realist interprets it to mean 'capable of being known by some hypothetical being whose intellectual capacities and powers of observation may exceed our own' (1959: 24)

Según esta definición de Dummett, y en relación a este punto en concreto, la postura de Peirce debe considerarse como una postura realista mientras que la de Putnam se enmarca perfectamente en el anti-realismo, ya que afirma que los sujetos que deben establecer la verdad o falsedad de los enunciados son sujetos con capacidades cognitivas similares a las nuestras.

Pero entonces, si Putnam no está haciendo referencia a nada parecido a la propuesta de Peirce, ¿por qué motivo introduce el aspecto "ideal"? Y, ¿a qué se refiere Putnam cuando habla de condiciones ideales? Según él mismo afirma, a condiciones "suficientemente buenas", es decir, condiciones en las que sea posible aceptar racionalmente un enunciado:

> If I say: "there is a chair in my study", an ideal epistemic situation would be to be in my study with the lights on or with daylight

> streaming through the window, with nothing wrong with my eyesight, with an unconfused mind, without having taken drugs or been subjected to hypnosis, and so forth, and to look and see if there is a chair there. Or, to drop the notion of "ideal" altogether, since that is only a metaphor, I think there are *better and worse* epistemic situations *with respect to particular statements* (1990: viii. Cursiva del autor)

La noción de condiciones "ideales" o "suficientemente buenas" fue introducida por Putnam para alejarse de la postura verificacionista de Dummett. Pero, ¿en qué se diferencia exactamente su propuesta de la de Dummett? La noción de verdad defendida por Putnam mantiene una estrecha relación con la justificación, pero Putnam insiste en que no está determinada por la justificación "aquí y ahora" (a diferencia de Dummett, para quien la verdad estaba totalmente determinada por la justificación). Putnam señala dos elementos clave que diferencian a su propuesta de la mera "verificación" y evitan así que caiga en el "idealismo de Dummett", tal y como él mismo lo define. Por un lado, Putnam no cree, como hace Dummett, que sea posible verificar un enunciado empírico de manera conclusiva. La verificación, afirma Putnam, es una cuestión de grados y no es estable. La verdad, por el contrario, es absoluta (no admite grados) y es estable. La verdad es, en otras palabras "atemporal" ("timeless"), mientras que la asertabilidad justificada es relativa "tanto a un tiempo como a una persona".

Por otro lado, Putnam está en completo desacuerdo en la manera de entender los enunciados acerca del pasado por parte de Dummett. De hecho, aunque no hemos tocado este tema en este trabajo, el tratamiento que Dummett hace del pasado es probablemente uno de los aspectos más controvertidos de su teoría y el área en la que se muestra más "idealista"[33]. Dummett opina que para entender los enunciados acerca del pasado es necesario analizar como podemos verificarlos en el presente. La propuesta de Putnam respecto al pasado resulta mucho más "intuitiva". Para él no resulta problemático hablar de fenómenos pertenecientes al pasado y de sus condiciones para ser verdaderos o falsos.

[33] Dejando a un lado la novedosa y controvertida interpretación que hace Green (2001), según la cual Dummett no está defendiendo una postura anti-realista o idealista respecto a los enunciados del pasado.

En este punto además, Putnam establece una distinción bastante sutil pero importante. Para él, no resulta problemático afirmar o negar que, por ejemplo, existieron dinosaurios en canarias hace un millón de años, o que las islas no eran más que las cumbres más altas de un continente (la Atlántida). Sin embargo, sí resulta problemático hablar del último –mayor- número primo, o hablar de si existen o no "realmente" los conjuntos. La diferencia radica, según él, en que es posible imaginar una situación "ideal" o suficientemente adecuada, en la que un ser "racional y sensible" fuera capaz de verificar (o rechazar) el enunciado "existieron dinosaurios en canarias hace *x* tiempo" (que conviviera en su misma época y lugar, por ejemplo, y se encontrara con uno a plena luz del día). Sin embargo, es imposible imaginar una situación en la que un ser "racional y sensible"[34] pudiera verificar la verdad del enunciado "el número primo más grande que existe es *y*" o "realmente existen los conjuntos".

Así, mientras Dummett afirma que las condiciones de verdad de ambos enunciados (acerca de los dinosaurios y acerca del número primo más grande) trascienden la evidencia y por lo tanto no es posible establecer su valor de verdad (no es posible verificarlos o falsarlos); Putnam argumenta que no se trata ni mucho menos del mismo caso. En el caso del enunciado acerca de los dinosaurios, puede que no nos encontremos actualmente en las condiciones epistémicas adecuadas, pero podemos perfectamente imaginar cuales podrían ser e imaginar a "alguien" en ellas. Podríamos decir que su valor de verdad es desconocido, pero no imposible de determinar. En el caso de los números o los conjuntos, ni siquiera podemos imaginar las condiciones ideales y mucho menos a "alguien" (algún ser "racional y sensible") estando en disposición de poder afirmar o negar si existen o no los conjuntos. En este caso, la verdad trasciende de manera radical a la posibilidad de verificarlo.

Ya hemos dicho en repetidas ocasiones que Putnam ha modificado su postura sustancialmente en los últimos años y que ese cambio es especialmente radical en el caso de la noción de verdad. El Putnam del realismo de sentido común rechaza tajantemente la posibilidad de adoptar una semántica en términos verificacionistas, tal y como proponía con el RI. Por supuesto, este cambio ha sido gradual. En sus primeros

[34] Ni siquiera Dios, según Putnam, podría dar una respuesta satisfactoria a esta pregunta. Igual que en el caso de la pregunta por el número de objetos en el mundo (que vimos al analizar el fenómeno de la relatividad conceptual) el problema radica en la pregunta misma, que carece de sentido por no estar formulada dentro de un esquema conceptual determinado.

escritos, especialmente en la segunda conferencia de su libro *Meaning and the Social Sciences*, Putnam defendió la adopción de una postura muy próxima al anti-realismo de Dummett, llegando a proponer una interpretación en clave intuicionista (o "quasi-intuicionista") de las conectivas lógicas y hacerla extensiva a la ciencia empírica[35].

En los escritos siguientes Putnam fue "suavizando" su postura, acercándola cada vez más a las posturas realistas, aunque intentando siempre distanciarse de los postulados y los errores del RM. El problema es que su propuesta de verdad como aceptabilidad racional bajo condiciones epistémicas ideales, que supuestamente debía cumplir la función de ser una noción intermedia entre Dummett y el RM, entre la verificación y la correspondencia, resultó ser demasiado inestable. La dificultad, según yo la veo, radica en que si ponemos el énfasis en el aspecto "ideal" de la noción corremos el riesgo de caer en el sinsentido de Peirce o, lo que es quizás peor para Putnam, podemos caer en el RM. Al fin y al cabo, el punto de vista del "Ojo de Dios" no deja de ser una situación ideal (aunque totalmente inalcanzable y contradictoria).

No hay que olvidar que el objetivo de Putnam es desarrollar una noción de verdad que sea estable y absoluta, y esto requiere necesariamente que la justificación de un enunciado "bajo condiciones epistémicas ideales" no varíe: que una vez que un enunciado ha sido justificado no podamos falsarlo o mejorar su justificación (ya que entonces ésta no sería absoluta) en caso de aumentar o variar nuestra información. Para lograr esto parece que habría que exigir que para que una circunstancia contase como "condiciones epistémicas ideales" respecto a un enunciado concreto tendríamos que estar en posesión de toda la información relevante a ese enunciado (y al contexto). Es decir, que no exista ninguna información relevante al enunciado que no sea conocida en el momento de justificarlo (o de falsarlo).

La clave parece estar por lo tanto en cómo entendamos el término "relevante". De acuerdo con Wright (1992), por ejemplo, cualquier elemento de la información puede

[35] Este es un aspecto importante. Autores como Wright –tal y como veremos en el siguiente capítulo- mantienen que es imposible defender una noción de verdad que otorgue un papel fundamental a los aspectos epistémicos –una noción de verdad como la de Putnam o la de Dummett- sin llevar a cabo una revisión de la lógica clásica. Concretamente, sin rechazar la aplicación irrestricta del principio de bivalencia. Putnam ha propuesto en varias ocasiones la adopción de la lógica intuicionista (aparte de la mencionada, lo propone en su artículo "Vagueness and alternative logic" (1983c) para resolver el problema de la vaguedad), sin embargo no creo que en la actualidad estuviese dispuesto a renunciar a la lógica clásica. En cualquier caso, en el siguiente capítulo volveremos a analizar hasta qué punto es necesaria una revisión de la lógica clásica para adoptar una noción epistémica de la verdad.

ser, dependiendo del contexto epistémico, relevante para la justificación de un enunciado cualquiera. Cuando variamos de contexto variamos también de condiciones epistémicas; lo que en un sitio puede tener un significado en otro puede tener otro y por eso cualquier elemento es potencialmente relevante (dependiendo del contexto). Pero entonces, si admitimos esto, podría parecer que por condiciones epistémicas ideales Putnam se está refiriendo a la posesión de *toda* la información empírica, a la idea defendida por Peirce de que la verdad es lo que es justificado en el límite ideal de la investigación (cuando *toda* la información empírica está a nuestra disposición).

Putnam ha negado explícitamente esta interpretación –Peirceana- de su propuesta, alegando que por condiciones epistémicas ideales se debe entender "sufficiently good conditions" (Clark y Hale (eds) 1994: 257). Condiciones "suficientemente buenas" que sólo son aplicable además contexto a contexto, es decir, que las condiciones que en un contexto *A* son las adecuadas, pueden no serlo en un contexto *B*. De acuerdo con esto, las condiciones para la verificación de un enunciado deben evaluarse individualmente para cada enunciado en cada contexto. La idealización propuesta por Putnam no debe entenderse al modo peirceano, presuponiendo un momento ideal en el que el investigador está en posesión de toda la información que pudiese ser relevante (es decir, *toda* la información), más bien, como hemos dicho, Putnam propone que hagamos un símil con el tipo de idealizaciones llevadas a cabo por la ciencia.

En otras palabras, según mi lectura de la propuesta de Putnam, por condiciones epistémicas ideales debemos entender unas condiciones en las que nuestro acceso a lo empírico, en un contexto determinado, sea "suficientemente bueno" y además, podamos idealizar esta situación en el sentido de poder aislar los aspectos de la información que sean relevantes de los que no y generalizar este conocimiento en el resto de los contextos en la medida de lo posible.

Por supuesto, si leemos a Putnam tal y como lo hace Wright, exigiendo que por condiciones epistémicas ideales debamos entender que se tenga que poseer *toda* la información relevante, el símil con la física no sería válido y tendríamos que acabar postulando algo del estilo de la propuesta de Peirce. Pero, en mi opinión, Putnam no pone tantas exigencias como supone Wright a la idea de que podamos obtener condiciones epistémicas ideales y por lo tanto su propuesta se diferencia claramente de la de Peirce.

Lo que sí falta por ver, tal y como señala Wright, es si por medio de esta interpretación, la propuesta de Putnam logra sus objetivos: ser una noción de verdad estable y absoluta. Si intentamos quitar relevancia a este aspecto ideal e incluso eliminarlo como propone Putnam, puede resultar difícil diferenciar esta noción de la mera verificación. No creo que Dummett tuviera ningún problema en aceptar que para verificar un enunciado hemos de estar en condiciones epistémicas "suficientemente buenas". La diferencia más sustancial entre ambos estaría en su lectura de los enunciados acerca del pasado, pero aparte de esto, no parece descabellado pensar que ambos autores están finalmente definiendo la verdad de una manera prácticamente equivalente.

5.5. La noción de verdad del realismo de sentido común

El RSC, tal y como ha sido desarrollado por Putnam en los últimos años, puede ser visto como un intento de acomodar los argumentos ofrecidos en contra del RM sin perder ciertos conceptos y ciertas "intuiciones" respecto a la realidad a las que inevitablemente teníamos que renunciar si aceptábamos el RI. Putnam no rechaza la relatividad conceptual, la idea de que las nociones de "objeto" o "existencia" dependen del contexto, del esquema conceptual en el que nos encontremos. Pero sí rechaza la idea de que la verdad deba entenderse en términos verificacionistas (aún añadiendo el componente ideal). En realidad, Putnam va más allá, y rechaza toda la semántica verificacionista en general, una semántica que, en su opinión, Dummett comparte con los defensores del deflacionismo[36] y que se fundamenta en la idea de que entender un enunciado es entender las condiciones para su verificación.

[36] En Putnam (2000), diferencia entre "deflationists" y "disquotationalists". Los primeros siguen la tradición de Frege, los segundos, de Carnap. En cualquier caso, aunque esta distinción no afecta a lo que aquí vamos a decir acerca de lo que, de una manera general, vamos a denominar "deflacionismo", conviene tener siempre en cuenta que existen numerosos tipos de postura agrupadas bajo esta etiqueta (algunas de ellas, guardan importantes diferencias entre sí). Putnam, en cualquier caso, suele centrar sus críticas en la propuesta de Paul Horwich, especialmente la desarrollada en su libro *Truth* (1990) (y a veces en la de Michael Williams).

No vamos a entrar en detalles acerca de la teoría deflacionista de la verdad y acerca del rechazo de Putnam a la misma, pero conviene señalar algunos aspectos clave, ya que esto nos ayudará a entender la propia noción de verdad de Putnam (y los motivos para desarrollarla)[37]. Brevemente, los deflacionistas aceptan la idea de Dummett según la cual entender un enunciado es conocer las condiciones para su verificación, aunque se oponen a la idea de una verificación concluyente (sustituyéndola por los grados de confimación), así como a la tesis de Dummett de que esto nos debe llevar al rechazo de la lógica clásica (concretamente al rechazo de la ley del tercio excluso) y, sobre todo, se oponen a la noción de verdad como una propiedad sustantiva de los enunciados. Para los deflacionistas, la verdad no es más que un mecanismo "desentrecomillador", un mecanismo lógico extremadamente útil para realizar generalizaciones pero fácilmente eliminable. Así, como es sabido, para los deflacionistas decir que un enunciado es verdadero es lo mismo que afirmar dicho enunciado, esto es,

(ED) "P" es verdadero si y sólo si P

O, utilizando el ejemplo con el que se suele exponer,

(ED') "La nieve es blanca" es verdadero si y sólo si la nieve es blanca

Pero los deflacionistas, de acuerdo con Putnam, no están realmente ofreciendo ninguna definición o explicación del concepto de verdad. No es posible captar la "esencia" de la noción de verdad por medio únicamente del esquema desentrecomillador y de la interpretación que hacen de él los deflacionistas. La opción que ofrecen no es tan siquiera una verdadera propuesta para solucionar el problema de la verdad, al contrario, lo que intentan es *eliminar* dicho problema. Pero intentar resolver los problemas metafísicos reduciéndolos a pseudo-problemas, vaciándolos de contenido no parece una solución muy prometedora.

[37] Para más detalles, ver el siguiente capítulo, en el que expondremos las críticas de Wright al deflacionismo

Probablemente, el problema más grave al que se enfrenta el deflacionismo es que deja a un lado dos aspectos básicos de la verdad: el papel de los hablantes y el papel de la realidad. De acuerdo con Putnam, el predicado de verdad, tal y como fue formulado por Tarski, deja a un lado el papel que juegan los hablantes en la verdad. Ser verdadero en un lenguaje L, según la definición de Tarski, no representa ninguna propiedad, ni semántica ni pragmática, de los enunciados (sería simplemente una propiedad sintáctica o formal). En el esquema de Tarski, el que una determinada sucesión de letras sea o no verdadera ("L-verdadera", ya que está acotada a un lenguaje determinado) depende sólo de la manera en que esta sucesión de letras esté compuesta y de que la nieve sea o no sea blanca. Los hablantes de ese lenguaje y el uso que hagan de sus palabras no juegan ningún papel desde este punto de vista.

Además, debido a que los deflacionistas adoptan la semántica verificacionista (según la cual entender un enunciado es saber como verificarlo), se enfrentan a una "pérdida de la realidad".

> Deflationism about truth […] adopts the most disastrous feature of the antirealist view, the very feature that brings about the loss of the world (and the past). It differs from antirealists in this regard only in that it attempts to disguise that feature by means of a superfitial terminological conservatism (Putnam, 1994b: 500)

El problema, según Putnam, es que el deflacionismo, al haber adoptado este rasgo del verificacionismo, no representa una alternativa válida al mismo. De nuevo estamos enfrentados a un aparente callejón sin salida: o bien aceptamos la semántica verificacionista (asumiendo la inevitable pérdida de la realidad que esto conlleva) o bien optamos por la solución del realismo metafísico, que considera a la verdad como una propiedad sustantiva y única. Putnam, de nuevo, intenta escapar de esta dicotomía (la dicotomía entre condiciones de verdad y de asertabilidad) y para ello rechaza su propia postura anterior y propone una noción de verdad que, tal y como él mismo afirma, recupere nuestra concepción más intuitiva de lo que es la verdad y con ella, una visión del sentido común acerca del mundo y de nuestra relación con él.

La postura acerca de la verdad que Putnam ha defendido en los últimos años es bastante más compleja, a mi entender, que la "aceptabilidad racional bajo circunstancias ideales" (posiblemente porque se trata de una postura menos definida, que ha sufrido múltiples modificaciones en los distintos escritos). Putnam intenta extraer las virtudes de las posturas existentes y a la vez respetar el sentido común y mantener la coherencia con sus teorías acerca de la percepción y de nuestra relación con la realidad externa.

En cualquier caso, es cierto que la propuesta de Putnam en relación a la verdad adolece de cierta ambigüedad, de falta de precisión. Putnam afirma en varias ocasiones que lo que se propone realmente es rescatar la noción "vulgar" de la verdad: sabemos que la verdad es una propiedad de los enunciados porque podemos distinguir claramente entre enunciados verdaderos y enunciados falsos. Por lo tanto propone que simplemente nos *olvidemos* de las dicotomías que han marcado tradicionalmente el debate, que nos olvidemos de las preguntas acerca de si un enunciado tiene condiciones de verdad o condiciones de asertabilidad. El problema, una vez más, no está tanto en la noción de verdad en sí, como en la concepción metafísica desde la que partimos, la concepción que Putnam denomina "Cartesian cum materialist point of view" y que en su opinión ha impregnado el debate filosófico en los últimos siglos,

> It is not the notion of truth that has let us down, but rather a particular conception of how that notion is to be philosophically founded (and improved) (1991: 265)

Sería deseable por lo tanto recuperar la noción de verdad "vulgar" y parece obvio que el predicado "es verdadero" entendido de una manera "pre-analítica" no sólo tiene que ver con la composición de las palabras o con el hecho de que, por ejemplo, la nieve sea o no sea blanca. Por el contrario, afirma Putnam, las condiciones de verdad de ese predicado están determinadas por

> [W]hether or not speakers use the object to which the predicate is applied in such a way that it means, say, that the moon is blue or that snow is white (1983b:318)

Aceptar e integrar al sujeto en la noción de verdad no tiene porqué llevarnos a adoptar una semántica verificacionista (tal y como el propio Putnam pensaba y tal y como piensa Dummett). Aceptar la intuición subyacente a la teoría de Tarski, según la cual existe una conexión estrecha entre entender un enunciado y entender la afirmación de que ese enunciado es verdadero, no tiene porqué conducir a afirmar que esa conexión se establece a través de la comprensión de las condiciones para su verificación.

Para Putnam es más que posible que existan verdades que trasciendan nuestra capacidad de verificación, pero esto no tiene porqué plantear ningún problema. Putnam argumenta con bastante claridad las razones para sostener esto cuando, haciendo referencia a los enunciados acerca del pasado, argumenta,

> If we accept it that understanding the sentence “Lizzie Borden killed her parents with an axe” is not simply a matter of being able to recognize a verification in our own experience –accept it, that is, that we are able to conceive of how things that we cannot verify *were* – then it will not appear as “magical” or “mysterious” that we can undestand the claim that that sentence is *true*. What makes it true, if it is, is simply that Lizzie Borden killed her parents with an axe. The recognition transcendence of truth comes, in this case, to no more than the “recognition transcendence” of some killings. And did we ever think that all killers can be recognized as such? Or that the belief that there are certain determinate individuals who are or were killers and who cannot be detected as such by us is a belief in magical powers of the mind? (1994b: 510-511. Cursiva del autor)

La verdad del enunciado “Lizzie Borden mató a sus padres con un hacha” radica, simplemente, en el hecho de que Lizzie Borden mató a sus padres con un hacha. Y estos hechos, si ocurrieron, hacen que el enunciado sea *verdadero* y no meramente asertable o verificable; es decir, que no importa si somos capaces o no de afirmar la verdad del enunciado “Lizzie Borden mató a sus padres con un hacha”, lo cierto es que el hecho de que los matara (asumiendo que fuera cierto que lo hizo), hace que el enunciado sea *verdadero*.

Alguien podría pensar que es esto precisamente lo que los realistas metafísicos defienden: que la verdad puede trascender a la verificación y que es la realidad y una relación determinada con ella la que convierte a nuestros enunciados en verdaderos o falsos. Pero de hecho, existe una importante diferencia entre la propuesta de Putnam y la del RM y se basa en la distinta importancia que le dan al sujeto.

Los defensores del RM pueden tener razón al afirmar que la realidad determina el valor de los enunciados y que existe una relación de correspondencia entre nuestros términos y los estados de hecho del mundo. Pero se equivocan radicalmente, según Putnam, al creer que, por un lado, esa realidad es totalmente independiente de nosotros y de nuestras teorías y que, como consecuencia de esto, la relación de correspondencia es única, estable y predeterminada. El RM tiene razón al afirmar que la verdad ha de ser *algo más* que la mera asertabilidad o verificación, pero se confunde al otorgar a ese *algo más* una importante carga metafísica. Se confunde al pensar que la verdad es *una* propiedad sustantiva de los enunciados, una *única* propiedad que todos los enunciados verdaderos tienen en común, por encima y con independencia del contenido de cada uno de ellos.

Esto, según Putnam, es absurdo y es el fruto de esa serie de fantasías metafísicas de las que llevamos hablando durante todo el capítulo. La escapatoria es aceptar los principios que rigen el "realismo de sentido común", sin perder de vista la gran diferencia que guarda con el RM: el rechazo a las fantasías metafísicas, el rechazo a creer que existe una *única* relación de conocimiento, una *única* relación de correspondencia, entre nosotros (y nuestros enunciados, pensamientos o creencias) y el mundo.

El lenguaje, al igual que el conjunto de conocimiento o el conjunto de nuestras creencias, no es un sistema cerrado, regido por reglas únicas y comunes a las diferentes áreas. Por ello, en lugar de buscar una propiedad única y exclusiva de la verdad, compartida por todos los enunciados verdaderos, debemos analizar con detalle los diferentes "juegos del lenguaje", por utilizar un término wittgensteniano, fijarnos en las pautas que rigen los distintos ámbitos de discurso (ético, científico, matemático,etc.) y analizar las diferentes maneras por las que nos relacionamos con la realidad. De esta manera,

> [T]o regard an assertion or a belief or a thought as true or false *is* to regard it as being right or wrong; on the other hand, just what sort of rightness or wrongness is in question varies enormously with the *sort* of discourse (1994b: 515. Cursiva del autor)

De nuevo, Putnam parece estar abogando por un cierto tipo de pluralismo respecto a la verdad. Considerar un enunciado como verdadero o falso, afirma Putnam, es considerarlo "correcto" o "incorrecto", pero los criterios para determinar lo que sea o no correcto varían mucho según el área de discurso (los criterios de corrección no son los mismos en el caso de, por ejemplo, los juicios estéticos y en el caso de los enunciados matemáticos). Es posible interpretar este pluralismo de diferentes maneras. Una forma sería afirmar que los predicados de verdad cambian de significado de un área a otra: el *sentido* en el que los enunciados éticos son verdaderos sería diferente al *sentido* en el que lo serían los enunciados científicos. Sin embargo esta lectura no me parece demasiado atractiva, una cosa es afirmar que no tiene porqué existir una única propiedad común a todos los discursos y otra que la verdad cambie de significado en cada uno de ellos.

Putnam no es demasiado explícito, o al menos yo no he encontrado demasiadas explicaciones, acerca de este punto. El pluralismo respecto a la verdad, cierto tipo de pluralismo al menos, conecta armoniosamente con el resto de sus tesis y parece una salida lógica y atractiva a algunos problemas de la noción de verdad. Especialmente, parece la única manera de rescatar ciertos aspectos realistas de la verdad, que se habían perdido en la formulación internalista, sin ceder a los elementos puramente metafísicos que el realismo tradicional otorga a la verdad. El pluralismo es, en mi opinión, un aspecto clave no sólo de la propuesta de Putnam, sino de cualquier propuesta acerca de la verdad (y acerca de nuestra relación con el mundo) que pretenda situarse entre el anti-realismo y el realismo metafísico. Pero, por supuesto, este hecho no lo exime de enfrentarse a numerosas dificultades, problemas que se derivan de su formulación misma. Por eso creo que Putnam tendría que ser más explícito respecto a este tema.

Una manera bastante atractiva, en mi opinión, de interpretar el pluralismo respecto a la verdad es la desarrollada por Crispin Wright y que veremos en el capítulo siguiente. Brevemente, Wright considera que podemos definir una serie de principios básicos de la noción de verdad, principios como la correspondencia o la negación. Estos principios determinan *todo* lo que es esencial para la noción de verdad, lo que cualquier predicado de verdad tiene que poseer. La diferencia, el pluralismo, viene provocada por lo que él mismo llama "variable realisation" (1996: 924). Lo que *constituye* la verdad en ética es distinto de lo que *constituye* la verdad en matemáticas: No es necesario contar con una única *cosa* en lo que la verdad consista, ajena e invariable a través de los discursos. Pero, a pesar de esto, hay *algo* en común entre todos los predicados de verdad: los principios básicos de los que hablamos antes.

> The contention [...] is not that 'true' is ambiguous, that it means different things as applied within different regions of discourse. On the contrary, the concept admits of a uniform characterisation wherever it is applied- the characterisation given by the minimal platitudes, which determine everything that is *essential* to truth (en Khlentzos (2004): 263)

6

CRISPIN WRIGHT: SEAMOS MINIMALISTAS, PORQUE EL REALISMO SE DECIDE EN OTRA PARTE

As one reads Carnap or Wright, there seems to be something deeply and importantly correct about what one is reading, but it all seems to vanish when one tries to get clear what it is

Hartry Field

("Platonism for Cheap?")

6.1. Introducción

Crispin Wright es, de los tres autores tratados en esta segunda parte del trabajo, el que desarrolla una propuesta "más realista". Aunque sus tesis se presentan como el resultado del análisis y de las criticas a la obra de Dummett, es posible interpretarlas al hilo de la propuesta de Putnam, como un intento de "moderar" aún más el ya de por sí realismo moderado de Putnam. Un intento de eliminar completamente la "carga metafísica" de la noción de verdad, la misma carga de la que hablaba Putnam y que, según él, envuelve el debate tradicional acerca del realismo.[1] Básicamente, lo que Wright propone es encontrar, en primer lugar, una noción de verdad neutra entre realistas y anti-realistas, y por ello potencialmente aceptable por ambos, y a partir de

[1] Drew Khlentzos (2004), por ejemplo, denomina a la postura de Wright, "moderate internalism". Este intento de eliminar los aspectos metafísicos del debate será, en mi opinión, uno de los motivos por los que Wright, aunque la considera una opción "defendible", finalmente rechaza la propuesta de la verdad del Putnam del realismo interno. Concretamente, Wright rechaza la introducción de cualquier elemento "ideal" en nuestra formulación de la verdad.

ahí, intentar ver hasta qué punto ambas posturas siguen siendo tan diferentes y si por lo tanto hay espacio para el debate más allá de la noción de verdad. De hecho, Wright dedica grandes esfuerzos a demostrar que el eliminar los elementos metafísicos de la verdad no conduce al *quietismo* metafísico. Existen otros elementos de carácter metafísico que determinan el debate del realismo, otras "cruces" como él las denomina.

En la primera parte del trabajo, en el capítulo 3, analizamos la propuesta del "neo-fregeanismo", de la que Wright es su máximo defensor. En este capítulo vamos, por regla general, a obviar esta parte de la obra de Wright, mencionándola sólo para señalar los puntos en común entre ambos aspectos. Esto resulta importante porque Wright es un autor complejo, que intenta desarrollar una postura más o menos global, al estilo de Dummett, pero incorporando de una manera más explícita las diferencias entre los diferentes discursos. Creo que resultará mucho más sencillo entender la profundidad de las ideas contenidas en las tesis neo-fregeanas una vez hayamos comprendido el proyecto global acerca del realismo y de la verdad.

He considerado oportuno exponer estos dos aspectos de la propuesta de Wright por separado porque, a pesar de complementarse perfectamente, no creo que las tesis generales acerca de la verdad y del realismo impliquen necesariamente la adopción del neo-fregeanismo en las matemáticas (ni viceversa). De hecho, intentaré argumentar que éste no es el camino más deseable para aplicar las tesis generales de un tipo de "realismo moderado" al ámbito de las matemáticas e intentaré señalar una posible vía alternativa (una vía igualmente inspirada en las ideas de Wright, pero rechazada por él).

En los dos capítulos anteriores observamos que el debate en términos semánticos acerca del realismo está centrado en la noción de verdad (especialmente en el caso de Dummett). Obviando las diferencias entre ambos, tanto para Dummett como para Putnam, una teoría se considera realista si admite la posibilidad de verdades que trasciendan la evidencia y, por el contrario, se considera anti-realista (o realista interna) si considera la verdad como limitada de alguna manera por nuestras capacidades cognitivas (o, en el caso de Putnam, por las capacidades cognitivas en condiciones epistémicas ideales). Esta formulación, como vimos, tiene varios aspectos problemáticos, especialmente para quien pretenda defender una noción de verdad en clave anti-realista o realista interna. Putnam mismo ha admitido las enormes dificultades para desarrollar una noción de verdad "fuerte" (es decir, estable y absoluta) que admita limitaciones epistémicas de cualquier tipo (de ahí el rechazo a la semántica verificacionista en sus últimos escritos).

Uno de los atractivos de la propuesta de Wright es que traslada el centro del debate en torno al realismo fuera de la discusión acerca de la noción de verdad. Más exactamente, defiende la posibilidad de una noción de verdad neutra, metafísicamente hablando, entre el realismo y el anti-realismo. Una noción de verdad defendible por ambos y que, por lo tanto, no contenga elementos trascendentes pero tampoco rechace la posibilidad de que dichos elementos existan; es decir, que ni afirme ni niegue la existencia de verdades que trasciendan la evidencia (que se mantenga neutra al respecto). Es lo que Wright denomina una postura "minimalista" de la verdad.

Más allá de las cualidades intrínsecas de esta noción de verdad, su defensa viene motivada por varias razones. En primer lugar, por los ya mencionados problemas para encontrar una noción alternativa de la verdad que mantenga su alcance explicativo y sea estable y absoluta pero que, a su vez, no entrañe consecuencias metafísicas de carácter realista. Es precisamente esto último lo que pretende eliminar la concepción minimalista: las implicaciones metafísicas que habitualmente acompañan al realismo.

Por otro lado, Wright argumenta que hay ciertos discursos en los que el problema de la verdad (y de su relación con la evidencia) no parece ser esencial a la hora de decidir entre el realismo o el anti-realismo. Wright pone como ejemplo el discurso acerca de lo cómico, acerca de lo que sea o no "divertido". En este caso, mantener o no una postura realista acerca de lo "divertido" (o acerca de lo "asqueroso" o "sabroso") no parece depender del valor de verdad de enunciados como "los chistes de Goma Espuma son divertidos". Que algo sea o no divertido es una propiedad dependiente de los sujetos (o de convenciones sociales, contextos, etc) pero eso no entraña necesariamente una defensa del anti-realismo acerca de los mismos. Resulta muy poco intuitivo pensar en expresiones que son divertidas aunque nadie lo sepa, que sean divertidas más allá de nuestra capacidad para descubrirlo, pero eso no excluye necesariamente la posibilidad de concebir lo "divertido" como una propiedad real e independiente del sujeto.

Lo mismo ocurre, según Wright con enunciados morales o con enunciados como "yo siento dolor". La admisión de que la verdad de los mismos es siempre cognoscible no implica necesariamente la adopción de una postura anti-realista, hay otro tipo de elementos conceptuales que determinarán la adopción de una u otra postura (concretamente, como veremos más adelante, en estos casos, será determinante la postura que adoptemos frente a lo que Wright denomina "contraste de Eutifrón").

Por lo tanto, aún en el caso de que esta postura "minimalista" (que veremos con más detalle a continuación) efectivamente presentara una noción de verdad neutra entre realistas y anti-realistas, esto no significa que las diferencias entre ambos desaparezcan. Concretamente, aceptar el "minimalismo" no implica caer en el "quietismo metafísico". Hay más cosas, aparte de la naturaleza de la verdad, que diferencian a los realistas de los anti-realistas, condiciones sustanciales cuya satisfacción por parte de enunciados (verdaderos) acerca de un área determinada bastarían para poder defender un tipo de realismo acerca de los mismos.

Desde este punto de vista, el anti-realismo es la postura más "natural", la más intuitiva o básica. Si afirmamos que los enunciados (verdaderos) de un discurso determinado solamente cumplen con los requisitos establecidos por la noción minimalista de la verdad, estaremos defendiendo una postura anti-realista respecto al mismo. Los realistas tendrán que "añadir" otros atributos. El anti-realismo es, por lo tanto, la postura de partida. Todo enunciado, para ser verdadero, tiene que cumplir los requisitos anti-realistas mínimos y sólo si además de estos cumple otros requisitos, pasará a ser considerado en clave realista.

Brevemente, Wright establece y analiza tres características sustantivas que un enunciado (verdadero) deberá satisfacer para poder interpretarlo correctamente en términos realistas. Así, el concepto de verdad que rige un discurso es realista si pasa *a priori*

1. La prueba de la *Prescripción Cognitiva* ("Cognitive command")
2. La prueba de la *Mejor Explicación* ("Best explanation")
3. La prueba del *Contraste de Eutifrón* ("Euthyphro contrast")

Veremos con cierto detalle estas tres "pruebas", especialmente la tercera de ellas, la del contraste de Eutifrón, pero el primer paso es ver qué entiende Wright por "noción de verdad neutra". En palabras del autor, su intención es dar respuesta a dos preguntas fundamentales:

> How does the concession that a discourse is truth-apt, and indeed that many of what we take to be true assertions expressed in it are indeed true – how can this concession avoid giving the game to the realist straight away...?
>
> [...] If it can indeed be explained why this is not so, then what *is* at stake between realist and anti-realist, when both are agreed that the statements of a contested discourse are irreducibly apt for truth and falsity and that many of those which we take to be true are so? (1992: 12)

6.2. Teoría Minimalista de la Verdad: Superasertabilidad

El objetivo primero de la propuesta de Wright es, por lo tanto, demostrar que la verdad no tiene porqué ser propiedad exclusiva del realismo y, para ello, tendrá que desarrollar una noción de verdad "metafísicamente neutra", que no arrastre implicaciones realistas (que no imponga la posibilidad de verdades que trasciendan nuestro conocimiento) y por lo tanto pueda ser el punto de partida para el debate entre realistas y anti-realistas tal y como Wright lo plantea.

6.2.1. Crítica a la teoría deflacionista de la verdad

Para desarrollar su propuesta, Wright parte del análisis de una posible candidata a noción minimalista de la verdad: la teoría deflacionista. Wright argumenta que esta teoría no es válida porque, en sus propios términos, "tiende a inflarse bajo presión". En cierta medida, la crítica de Wright al deflacionismo es similar a la realizada por Putnam y que vimos (aunque muy brevemente) en el capítulo anterior: el deflacionismo no es una propuesta válida porque reduce la verdad a la "asertabilidad justificada" (“warranted assertibility”)[2] . Tanto Putnam como Wright consideran esencial que la verdad sea una noción estable (que no varíe con el tiempo) y absoluta (que no admita grados) y ambos entienden que la asertabilidad justificada no cumple ninguno de estos requisitos. La asertabilidad justificada depende de un estado de información concreto, está sujeta al momento y al lugar preciso en el que se pronuncia un enunciado. La verdad, por el contrario, para mantener el requisito de la estabilidad, debe mantenerse constante a través del tiempo y de las posibles modificaciones en la información que posea el sujeto.[3]

Sin embargo, a pesar de coincidir en lo esencial, ambos autores difieren en la forma de plantear su crítica y en los resultados que extraen de ella. Wright desarrolla su crítica al deflacionismo (a la idea de la identificación de la verdad con la asertabilidad justificada) a través del análisis exhaustivo del “principio desentrecomillador” y su comportamiento con la negación[4]. Putnam (al menos el Putnam del Realismo Interno) concluye que debemos introducir elementos “ideales” en la formulación de la asertabilidad justificada para garantizar la estabilidad deseada[5]. Wright, por el contrario, aunque no rechaza de pleno la propuesta de Putnam (su minimalismo admite un pluralismo de nociones de verdad) encuentra problemático introducir elementos ideales en la formulación y prefiere por ello utilizar la noción de “superasertabilidad”, esto es, asertabilidad justificada que se mantiene estable sin importar que la información disponible aumente o disminuya.

Para entender mejor los motivos de Wright para introducir esta noción y la propuesta minimalista en general, creo conveniente analizar con algo más de detalle las

[2] Putnam además, añade que el deflacionismo deja a un lado el papel del sujeto y el contexto en el que se emiten los enunciados.

[3] Esta crítica, obviamente, es también aplicable a la “verificación” dummettiana.

[4] En gran parte de sus trabajos, Wright concentra sus esfuerzos en exponer esta última línea de crítica (a través de la negación). Sin embargo, las diferencias más “intuitivas” entre verdad y asertabilidad justificada juegan también un papel esencial en su propuesta, especialmente a la hora de desarrollar la noción de “superasertabilidad”. Wright busca precisamente una noción que respete las características propias de la verdad que no posee la asertabilidad justificada: la estabilidad a través del tiempo y de los cambios en la información. Para ver con algo más de detalle la crítica de Wright a la asertabilidad justificada en relación a las variaciones en el tiempo, ver Wright (1993: 403- 432)

[5] Como vimos, debido a los malentendidos surgidos a raíz del término “ideal”, Putnam lo elimina afirmando que es suficiente hablar de asertabilidad justificada bajo “condiciones epistémicas suficientemente buenas”. Ya dije en el capítulo anterior que, si bien creo que es deseable eliminar todo elemento “ideal” de la formulación de la verdad, no veo cómo apelando simplemente a condiciones epistémicas “suficientemente buenas” podemos asegurar la estabilidad de la verdad a través de los cambios en los estados de información.

razones para rechazar el deflacionismo. La tesis básica del deflacionismo defiende que, al menos cuando el predicado "es verdadero" es aplicado a enunciados declarativos, su contenido queda totalmente determinado por el llamado "esquema desentrecomillador"

(ED) "P" es verdadero si y sólo si P

La verdad, así entendida, es únicamente un mecanismo sintáctico, utilizado para hacer generalizaciones (como "todo lo que dice Platón es verdadero") o para hacer afirmaciones indirectas (como "la última frase del *Tractatus* es verdadera"). El predicado "es verdadero" cumple una función "desentrecomilladora", de manera que si decimos que la última frase del *Tractatus* es verdadera, es decir, que "de lo que no es posible hablar es mejor callar" (última frase del *Tractatus*) es verdadero, lo que en realidad estamos afirmando es que de lo que no es posible hablar, es mejor callar.

Afirmar que la verdad se reduce a (ED), a un mecanismo "desentrecomillador", implica negar que la verdad sea una propiedad sustantiva de los enunciados. La verdad, según el deflacionismo, no añade nada al significado de los enunciados o, dicho de otra manera, no hay nada, ninguna propiedad en común que compartan todos los enunciados verdaderos (y por lo tanto, ninguna propiedad que los distinga de los falsos). Aplicar el predicado "es verdadero" al nombre de un enunciado (el nombre formado por el enunciado entrecomillado) no tiene como resultado nada más allá de la aseveración de ese mismo enunciado libre del entrecomillado. La verdad viene a ser lo mismo que la asertabilidad justificada.

Los deflacionistas aceptan el carácter normativo del predicado de verdad en tanto, por (ED), tener motivos para creer que un enunciado es verdadero es lo mismo que tener motivos para aceptarlo (justificadamente). Sin embargo, rechazan que la verdad sea una propiedad sustantiva y por lo tanto rechazan que sea una norma distinta de la asertabilidad justificada. La verdad, afirman los deflacionistas, no añade nada más allá de lo que aporta la aceptación justificada del enunciado, por lo tanto, la verdad coincide en fuerza normativa con la asertabilidad justificada (por ED).

Wright argumenta que el deflacionismo es una postura internamente incoherente. Aplicando la negación a (ED) pretende mostrar que la verdad tiene que ser una norma distinta de la asertabilidad justificada. Si la verdad tiene una fuerza normativa distinta a la asertabilidad justificada, debe ser vista como una propiedad distinta y esto, obviamente, contradice las tesis del deflacionismo.

> Our finding, then, is that the deflationist is committed to reading the truth predicate, explained as he proposes, as normative, in the senses characterised, of proper assertoric practice, and indeed as coinciding in normative force with warranted assertibility [...] Since the defining thesis of deflationism is that "true" is merely a device of disquotation [...] since that is the very essence of the view, a deflationist must of course insist that the only substantial norms operating in assertoric practice are norms of warranted assertibility, and that the truth predicate can indeed mark no independent norm [...]
>
> [A]lthough coincident in normative force in the senses indicated, "T" and "is warranted assertible" *have* to be regarded as registering distinct norms – distinct in the precise sense that although aiming at one is, necessarily, aiming at the other, success in the one aim need not be success in the other [...] The reason is extremely simple, and has to do with a contrast between the behaviour of "T" and "is warranted assertible" which the DS [ED] imposes in connection with *negated* sentences. (1992: 18-9. Cursiva del autor)

El argumento de Wright para demostrar que "es verdadero" y "es asertable justificadamente" tienen extensiones distintas, es el siguiente:

Partiendo de

(ED) "P" es verdadero ↔ P

y sustituyendo "P" por "~P", obtenemos,

1. "~P" es verdadero ↔ ~P

Por otro lado, si aplicamos la negación a ambos lados de ED, obtenemos,

2. "P" no es verdadero ↔ ~P

A partir de 1 y de 2, por transitividad del bicondicional,

3. "P" no es verdadero ↔ "~P" es verdadero

Asumiendo que la verdad es equivalente a la asertabiliadd justificada, tal y como afirma el deflacionismo, obtendríamos,

4. "P" no es asertable justificadamente ↔ "~P" es asertable justificadamente

Pero (4) no es un principio válido. No es válido en todos aquellos casos en los que los estados de información sean "neutros", es decir, en las ocasiones en las que no sea posible decidir entre afirmar "P" o "~P", porque la información de la que disponemos no sea suficiente o adecuada para elegir entre las dos posibilidades. Es decir, Wright considera un principio válido:

(V) ~ ("P" es verdadero) ↔ "~P" es verdadero

Pero no considera válido,

(AJ) ~ ("P" es asertable justificadamente) ↔ "~P" es asertable justificadamente[6]

En ciertos contextos, o estados de información, no es posible afirmar ni "P" ni "no-P" pero, continua Wright, sí es posible determinar que o bien "P" o bien "no-P" es verdadero. La asertabilidad justificada tiene puntos neutros ("gaps") pero la verdad no o, en otros términos, la verdad está sujeta al principio del tercio excluso pero la asertabilidad justificada no (al menos, no siempre).

Obviamente, esto contradice las tesis defendidas por Dummett, quien sostiene que la verdad no cumple necesariamente la ley del tercio excluso ya que la verdad está limitada por la capacidad de verificación de los sujetos y por lo tanto por la información que dispongan. Wright, como hemos dicho, considera un error identificar la verdad con las condiciones de verificación "aquí y ahora" (con la asertabilidad justificada). Su intención, como la de Putnam, es desarrollar una noción de verdad libre de cargas metafísicas, pero estable y absoluta, que –en discursos no-vagos- cumpla con el

[6] Si la asertabilidad justificada tuviera la misma extensión que la verdad se cumpliría el siguiente principio:
(N) Para todo enunciado S, si S no es asertable justificadamente, entonces ~S es asertable justificadamente
Este principio ha sido formulado por S. Shapiro y W. Taschek (1996)

principio del tercio excluso y, por lo tanto, no tenga "gaps". Una noción que, desde los parámetros de Dummett, es claramente realista pero que, usando la terminología de Putnam, no sea "propiedad exclusiva" del realismo metafísico[7].

6.2.2. Teoría Minimalista

Según lo dicho, nada puede considerarse un predicado de verdad a no ser que coincida en fuerza normativa con la asertabilidad justificada pero sea potencialmente divergente en extensión, de manera que constituyan dos normas diferenciadas. Wright argumenta además que, si se originan de una forma adecuada, estas condiciones son *suficientes*. Con esto, está argumentando en favor del llamado "minimalismo", es decir, una especie de deflacionismo pero con la afirmación de que la verdad es una propiedad de los enunciados (y no simplemente un mecanismo lógico). En sus propias palabras, se denomina minimalismo

> In the sense that acknowledging that a discourse is possessed of assertoric content, and indeed that its practitioners frecuently hit the truth, when truth is so conceived, is to be something which is neutral on the preferability of a broadly realist or anti-realist view of the discourse in question. (1992: 33)

En cualquier caso, como iremos viendo, aunque el minimalismo es una especie de "deflacionismo inflado", donde la verdad es considerada una propiedad genuina de los enunciados, esta propiedad ha de tener un carácter "mínimo", debe ser una propiedad en el sentido más débil de la palabra ya que de lo contrario la verdad pasaría a ser propiedad exclusiva del realismo. Es decir, desde el momento en que empecemos a "inflar" a esa propiedad genuina de los enunciados, a sustantivarla un poco más, a otorgarle atributos y valores metafísicos, entonces dejará de ser neutra en el debate en torno al realismo: comenzará a ser una propiedad sustantiva con carga metafísica.

---

[7] En Wright (1992: 19-21 y 39-42) se pueden ver con más detalle sus argumentos en contra de (AJ) y a favor de (V). Existe una amplia bibliografía acerca de estos argumentos, para profundizar algo más en ellos y sus posibles problemas, ver Greg Restall (2001), Jim Edwards (1999), Alexander Miller (2001) y Julian Dodd (2000)

La teoría minimalista de la verdad parte de la aceptación del principio desentrecomillador (ED), pero además sostiene que para que algo sea considerado verdadero debe cumplir ciertos principios básicos (“platitudes”).

> [W]e should not look for more of a truth predicate than its compliance with a certain set of very general, very intuitive principles – indeed a set of platitudes (1992: 34)

Es decir, según el minimalismo, basta con que un predicado cumpla con ciertos principios, por otro lado muy básicos e intuitivos, y que los cumpla por las razones adecuadas, para considerarlo un predicado de verdad. Los principios básicos son suficientes para determinar una noción de verdad[8]. No debemos intentar encontrar en un predicado de verdad más que su conformidad con este grupo de principios generales o lugares comunes; no hay nada en un predicado de verdad más allá del cumplimiento de estos principios que lo caracterice como tal.

Wright ofrece en varios lugares diferentes “listas” de principios básicos, enfatizando siempre el carácter meramente orientativo de estas listas. Algunos de los principios, como la relación entre verdad y asertabilidad justificada o el que todo enunciado posea una negación, son fundamentales, necesarios para cualquier noción de verdad. Otros principios, como el de correspondencia, pueden resultar algo más problemáticos y su eliminación (o matización) no implica el rechazo del modelo minimalista de la verdad. En sus últimos escritos[9], Wright presenta los siguientes principios como los mejores candidatos para determinar la noción de verdad:

1. *La transparencia de la verdad* (“transparency”): aseverar un enunciado es presentarlo como verdadero y, de manera más general, cuando adoptamos una actitud, sea cual sea, en relación a una proposición, la estamos también

[8] Wright afirma que los principios verdaderamente esenciales son aquellos que conectan la verdad con la asertabilidad (por medio del (ED)) y con la negación. Estos dos principios no sólo son suficientes, sino que además son necesarios para cualquier noción de verdad. El papel que juegan el resto de los principios resulta un poco más ambiguo. De hecho, en Wright (1992:24-27) argumenta que a partir del (ED) es posible derivar muchos de los otros principios, especialmente el principio de la transparencia, el del contraste y el de la correspondencia.

[9] Wright (1999) y (2001)

adoptando en relación a la verdad de dicha proposición (creer que *p*, por ejemplo, es creer que *p* es verdad)

2. *La opacidad de la verdad* (“opacity”): la verdad incorpora una serie de principios en relación al conocimiento; que la verdad puede no ser cognoscible, o que en determinadas circunstancias el sujeto puede no ser capaz de conocerla, etc.
3. *La conservación de la aptitud para ser verdadero* (“embedding”): la capacidad para ser verdadero se mantiene a través de una serie de operaciones. Las proposiciones aptas para ser verdaderas tienen negaciones, conjunciones, disyunciones, etc.
4. *El principio de la correspondencia* (“correspondence”): Una proposición es verdadera si se corresponde con la realidad; si refleja la realidad de una manera fiable
5. *El contraste entre la verdad y la justificación* (“contrast”): una proposición puede ser verdadera sin estar justificada (y viceversa)
6. *El carácter atemporal de la verdad* (“timelessness”): si una proposición es verdadera en un momento determinado seguirá siéndolo siempre.
7. *La verdad es absoluta* (“absolutness”): no es posible que una proposición sea más o menos verdadera, las proposiciones, de ser verdaderas, lo son completamente.

Esta lista puede ser agrandada y algunos de los principios pueden resultar discutibles. Lo esencial, para el minimalista, no es la lista en sí, sino entender que basta cumplir una serie de principios muy básicos y generales para dar forma a la noción de verdad. Lo importante es que estos principios básicos no arrastran ninguna carga metafísica realista. Hemos dicho sin embargo que algunos principios pueden resultar más problemáticos que otros. Alguien podría pensar, por ejemplo, que el principio de la correspondencia arrastra connotaciones metafísicas, ya que nos conduciría a afirmar que existe una correlación única entre nuestros términos y la realidad. Pero no es eso lo que se está afirmando. Volviendo a Putnam, es posible (y en realidad necesario) mantener un cierto tipo de correspondencia “suave” (Putnam la llama “trivial”), que asegure la relación entre los enunciados o las proposiciones y el mundo (que asegure que el mundo existe, que hablamos de él y que la verdad de nuestro lenguaje depende en gran medida de la manera en que lo describamos), pero que no implique necesariamente que esta relación de correspondencia sea única, completa o fija. Es posible, por ejemplo, acomodar este tipo de correspondencia suave o trivial a las tesis de la relatividad conceptual.

En palabras de Wright, la correspondencia es un principio del minimalismo sólo si es adecuadamente interpretado:

> [S]o as to be neutral on the status of the correspondence *theory*. As a platitude it thus carries no commitment to a real ontology of facts –'sentence-shaped' worldly truth-conferrers- nor to any seriously representational construal of 'correspondence', but merely claim that talk of truth may be paraphrased by any of a variety of kinds of correspondence idiom (1999: 233)[10]

Una vez más, resulta obvio que el minimalismo, si bien encaja perfectamente en proyectos más o menos realistas como los de Putnam o el propio Wright, contradice claramente las tesis anti-realistas de alguien como Dummett[11]. Concretamente los principios 2 y 5 chocan frontalmente con algunas ideas clave de la teoría de Dummett, a saber, con la idea de que para que un enunciado sea verdadero ha de ser justificado (verificado) y que, por lo tanto, la verdad tiene que ser cognoscible. Esto no debe resultar extraño ya que, como vimos, Wright parte del rechazo de la identificación entre verdad y justificación (o asertabilidad justificada).

Hay que tener en cuenta sin embargo que la terminología utilizada por Wright puede llevar a confusiones. Wright afirma reiteradamente que su objetivo es encontrar una noción de verdad "neutra" entre el realismo y el anti-realismo. De hecho, ya mencionamos que Wright llega a afirmar que el anti-realismo es el punto de partida de la discusión, con lo que parece estar diciendo que la mera aceptación de la verdad

---

[10]Ver también Wright (1992: 25-7).

[11] Resulta interesante observar las similitudes entre la propuesta minimalista de la verdad y la teoría neo-fregeana en relación a los objetos matemáticos. En ambos casos, Wright defiende que es suficiente cumplir una serie de requisitos mínimos (determinados además en ambos casos por aspectos sintácticos) para asegurar y explicar tanto la verdad como la existencia de los objetos abstractos.

minimalista, sin más aditivos, constituye la aceptación del anti-realismo (sólo cuando le añadamos otros elementos–como la prescripción cognitiva- pasará a ser realismo). Esto, en mi opinión, no es del todo correcto, al menos desde una lectura determinada de los términos utilizados. Acabamos de ver que varios de los principios básicos contradicen las tesis del anti-realismo semántico de Dummett.

En mi opinión, sería más apropiado hablar de distintos tipos de realismos. Wright, según mi interpretación, plantea algo similar (al menos en espíritu) a Putnam. La diferencia esencial no es ya entre anti-realismo y realismo sino entre ciertos tipos de realismos moderados y el realismo radical o metafísico. La aceptación de la verdad minimalista, sin más añadidos, es perfectamente coherente con cierto tipo de realismo moderado. Es perfectamente coherente con el realismo interno, por ejemplo[12]. Añadir elementos sustantivos, como la prescripción cognitiva, no conduce necesariamente al realismo metafísico; de nuevo, hay grados de realismos. Pero añadir ciertos elementos sustanciales (como la univocidad de la relación de correspondencia) de manera general (sin hacer distinciones entre las áreas del discurso) sí nos puede llevar a defender un tipo de realismo ciertamente radical y cargado de implicaciones metafísicas.

Por lo tanto, en mi interpretación, la idea es partir de un realismo moderado (más moderado aún que el realismo interno) y analizar, por un lado, hasta qué punto este realismo es posible y, por otro, hasta qué punto es necesario –al menos para ciertos discursos- añadir algún otro elemento sustancial a esta formulación, es decir, adoptar un tipo de realismo más radical o más próximo al realismo metafísico.

Un elemento esencial de la propuesta minimalista es su pluralismo. El minimalismo en ningún momento pretende ofrecer una definición cerrada de lo que sea la verdad. En cierta medida, podríamos decir que es una definición (si se le puede considerar como tal) marcadamente negativa, centrada en mostrar los elementos que *no* pueden formar parte de una noción de verdad neutra o no-metafísica. Cualquier noción que cumpla con el esquema desentrecomillador y con los principios básicos y que no añada ningún otro elemento sustantivo es una candidata a noción de verdad minimalista.

[12] Wright de hecho considera la idea de la verdad como aceptabilidad racional bajo circunstancias epistémicas ideales una candidata a la verdad minimalista. El único “problema” es que, para defender esta idea es necesario, según Wright, adoptar la lógica intuicionista. Además Wright ve ciertos problemas en la idea de condiciones “ideales” y en lo que entienda Putnam por información “relevante” (para aceptar un enunciado).

Además, es posible (y muy probable) que las nociones de verdad varíen según los discursos. Es posible, por ejemplo, que en ciertas áreas, como en el discurso moral, debamos añadir ciertos elementos sustantivos a la noción de verdad mientras que en otras, como el discurso científico, esto no sea necesario (o viceversa). Puede que una noción de verdad resulte adecuada en ciertos ámbitos pero no en otros. En palabras de Wright: "There may be a variety of notions, operative within distinct discourses, which pass the test" (1999: 27).

La defensa del pluralismo en relación a la verdad puede sin embargo llevar a equívocos. Wright no defiende que la noción de verdad sea ambigua, o que tenga distintos significados según los discursos. La noción de verdad admite una caracterización uniforme, la ofrecida por los principios básicos del minimalismo, que determinan todo lo *esencial* para la verdad. El pluralismo del que habla Wright consiste más bien en la aceptación de distintos tipos de *realizaciones de esa noción de verdad:*

> The form of pluralism…is one of, roughly, *variable realization*. What constitutes the existence of a number may be very different to what constitutes the existence of a material object. The identity of persons is generally held to call for a special account, contrasting with that appropriate to the identity of material continuants generally. And what constitutes truth in ethics may be quite different to what constitutes truth in theoretical physics...Evidently, there is space for a corresponding contention about truth. *There need be no single, discourse-invariant thing in which truth consists* (1996: 924)[13]

6.2.3. Superasertabilidad

Además de establecer los principios básicos de una concepción minimalista de la verdad y de defender una postura pluralista respecto a la misma, Wright desarrolla la idea de superasertabilidad. La superasertabilidad se presenta como un posible modelo de verdad, que por lo tanto ha de cumplir los requisitos que hemos ido exponiendo.

[13]Para ver más acerca de este tipo de pluralismo de la verdad y algunos problemas, ver Khlentzos (2004:263-266)

Básicamente, a riesgo de simplificar demasiado, la superasertabilidad persigue objetivos similares a la aceptabilidad racional bajo circunstancias epistémicas ideales del realismo interno desarrollado por Putnam, pero eliminando toda referencia a momentos o condiciones “ideales”.

Muy brevemente, la superasertabilidad pretende incorporar aspectos epistémicos a la verdad, manteniendo la importancia de la relación entre la verdad y la asertabilidad pero sin caer en los errores del deflacionismo, esto es, sin reducir la verdad a la asertabilidad justificada y sin renunciar a la estabilidad ni al carácter absoluto de la verdad (de manera que cumpla con los principios básicos del minimalismo).

La superasertabilidad es asertabilidad justificada que se mantiene estable a través del tiempo y de los cambios en la información: una vez un enunciado es superasertable, lo seguirá siendo sin importar que la información aumente o disminuya. Wright lleva a cabo una generalización similar a la de Dummett, quien pretende trasladar la idea de prueba matemática al ámbito empírico. El problema con esta generalización tal y como la concibió Dummett, es que una prueba matemática es estable y absoluta, pero la verificación empírica (o la asertabilidad justificada) depende del estado de información en el que se encuentre el sujeto (o la comunidad). Wright, al igual que Putnam, se da cuenta de esta limitación obvia del planteamiento de Dummett, e intenta buscar un candidato mejor para llevar a cabo esta generalización[14]. De esta manera, la superasertabilidad se presenta como la mejor generalización de la prueba matemática en el ámbito empírico; una suerte de verificación estable, independiente del estado de información.

Wright planteó por primera vez la idea de la superasertabilidad en su artículo “Can a Davidsonian Meaning-theory be Construed in Terms of Assertibility?” (en 1993:

[14] Wright considera que la noción de Putnam, aunque adecuada una vez cumplamos ciertos requisitos, se enfrenta a un problema similar a la de Dummett. En el caso de Putnam, el que un enunciado sea racionalmente aceptable dependerá de la información de la que se disponga en una circunstancia ideal (o por parte de un sujeto ideal). El problema es, por un lado, que la noción sigue dependiendo en exceso de la información de la que disponga el sujeto, con lo que la ley del tercio excluso seguirá resultando inválida en casos en los que no sea posible decidir el valor de verdad de un enunciado. Por otro lado, en circunstancias epistémicas ideales el sujeto cuenta con toda la información *relevante* para aceptar o rechazar un enunciado pero el problema es que esto resulta muy ambiguo. La dificultad, según Wright, radica en determinar qué se considera información *relevante*. En última instancia, para cualquier enunciado podríamos vernos forzados a admitir que el sujeto debe poseer *toda* la información, lo cual acabaría dando la razón a muchos de los críticos de Putnam, pues convertiría su propuesta en otra manera de presentar la de Peirce: sujetos que poseen *toda* la información en un hipotético momento ideal del desarrollo científico.

403-32), pero es en su libro *Truth and Objectivity* donde la expone con más claridad y detalle. Según Wright,

> A statement is superassertible, then, if and only if it is, or can be, warranted and some warrant for it would survive arbitrarily close scrutiny of its pedigree and arbitrarily extensive increments to or other forms of improvement of our information (1992: 48)

O, de una manera más detallada, ‘P’ es superasertable sólo si el mundo, en condiciones suficientemente favorables, permitiera que se generaran, en el sujeto “investigador”, S, una serie de creencias, $\{B_1,\ldots, B_n\}$, con las siguientes características:

> a. S has adequate grounds for regarding each of $\{B_1,\ldots, B_n\}$ as an item of knowledge
>
> b.The status of each of $\{B_1,\ldots, B_n\}$ as an item of S’s knowledge will survive arbitrarily close and extensive investigation
>
> c. The state of information constituted by $\{B_1,\ldots, B_n\}$ warrants the assertion of ‘P’
>
> d. The case provided by $\{B_1,\ldots, B_n\}$ for ‘P’ is not, *in fact*, defeasible; i.e. no $\{B_1,\ldots, B_n ,\ldots,B_z\}$ containing $\{B_1,\ldots, B_n\}$ and satisfying (a) and (b) for some S, yet *failing* to warrant ‘P’, can achieved in this world, no matter how favourable the circumstances fo the attempt (1993: 414-15)

Formalmente, si “Q” representa el predicado “es superasertable” y “W” representa “está justificado”, cuantificando sobre estados de información σ, podemos expresar la superasertabilidad de la siguiente manera:

$$QP \leftrightarrow (\exists\sigma)(WP \text{ en } \sigma \;\&\; (\forall\sigma^{*})(\sigma^{*} \geq \sigma \rightarrow WP \text{ en } \sigma^{*}))$$ [15]

[15]Ver Khlentzos (2004: 266)

En esta formula, “$\sigma^* \geq \sigma$” debe leerse como: “σ^* es una extensión de σ”. Es decir, que la superasertabilidad es asertabilidad estable. Ahora bien, para comprobar si la superasertabilidad puede considerarse un modelo de verdad, es necesario analizar, en primer lugar, si cumple con el esquema desentrecomillador y con la negación y, por otro lado, si respeta los principios básicos del minimalismo. Para ello, Wright parte de la relación entre la superasertabilidad y el conocimiento, expresada a través de dos principios:

(K) P es cognoscible → P es superasertable (KP → P)

(L) P ↔ P es cognoscible (P ↔ KP)

Ambos principios son dados a priori. A partir de ellos es relativamente sencillo demostrar la viabilidad del ED aplicado al predicado de superasertabilidad y por lo tanto, su commutabilidad con la negación.

Lo que queremos demostrar es, por lo tanto, ~Q P ↔ Q ~P. Por medio de los principios establecidos no resulta complicado demostrar ~Q P → Q ~P:

1.	~[P es superasertable]	hipótesis
2.	~ [P es cognoscible]	por (K)
3.	~ P	por (L)
4.	Es cognoscible que ~ P	por (L) (‘P’/‘~P’)
5.	Es superasertable que ~ P	por (K)[16]

Teniendo esto en cuenta y tomando (K) y (L) como premisas es sencillo demostrar, según Wright, que el esquema desentrecomillador, aplicado a la superasertabilidad (esto es: (ED^s) P es superasertable syss P) y el principio básico que conecta la verdad con el contenido asertórico, admiten la reinterpretación en términos de superasertabilidad. Esto es, afirma Wright, lo que tenemos que probar es que,

[16] Wright (92:58-59)

“P y P no es superasertable”

y

“P es superasertable y no P”

son contradicciones, del mismo modo que lo son “P y P no es verdad” y “P es verdad y no P”. Con ello, quedará demostrado que el vínculo entre la verdad y la asertabilidad, y entre la verdad y la negación, establecidos por dos de los principios básicos requeridos por el minimalismo como condición suficiente y necesaria para considerar a un predicado como predicado de verdad, se cumplen para la superasertabilidad.

En el primer caso, “P y P no es superasertable” basta, según Wright considerar que:

1.	P	hipótesis
2.	P es cognoscible	por 1 y (L)
3.	P es superasertable	por 2 y (K)

Luego, afirmar que “P y P no es superasertable”, es una contradicción. En el segundo caso, “P es superasertable y no P”, basta considerar que:

1.	~ P	hipótesis
2.	~ P es superasertable	por demostración anterior
3.	~ [P es superasertable]	Por commutabilidad con la negación

Por lo tanto, según Wright:

> [G]ranted the a priori link between knowability and superassertability postulated by (K), it follows, for any set of contents which sustain (L) a priori, that the assertion of any of these contents is a commitment to its superassertibility and the

> assertion of its superassertibility is a commitment to (rejecting any denial of) the content. Plausibly, then, for discourses all of whose contents are in that case, superassertibility is a model of the truth predicate (1992: 60)

Con todo lo dicho, quedaría demostrado que la superasertabilidad es un modelo de verdad para aquellos discursos en los que, una vez hayamos garantizado (K), (L) pueda ser considerado un principio *a priori*, es decir, para todos aquellos discursos en los que la verdad esté limitada por el conocimiento. O sea, si consideramos un discurso en el cual la verdad no trascienda nuestro conocimiento y, por lo tanto, se garantice *a priori* (L) (P ↔ P es cognoscible) y además aceptamos el vínculo, también *a priori*, establecido entre conocimiento y superasertabilidad expresado en (K) (P es cognoscible → P es superasertable) entonces, la superasertabilidad puede ser considerada un modelo de verdad. La verdad y la superasertabilidad, en estos casos, no sólo tendrían la misma fuerza normativa (como la verdad y la asertabilidad) sino que tendrían la misma extensión: serían la misma norma. Un ejemplo claro, utilizado frecuentemente por Wright, es el discurso acerca de lo cómico pero, por supuesto, puede haber muchos más.

De hecho, una manera de entender la superasertabilidad es como una extensión del anti-realismo semántico de Dummett. Para Dummett, la verdad no puede transcender el conocimiento en ningún discurso y por ello, tanto (L) como (K) serían principios válidos para todo el lenguaje o, más exactamente, para todo discurso con contenido asertórico. En palabras de Wright, con la noción de superasertabilidad el anti-realismo semántico:

> [N]ow distances itself from the almost certainly doomed project of attempting a meaning theory which proceeds in terms of an indexical notion of assertibility; instead it avails itself of a notion of truth, contrasting with assertibility, and an associated truth-conditional conception of meaning. But it can do this only because superassertibility is, as any anti-realistically acceptable notion of truth must be, an essentially epistemically constrained notion (1992: 61)

6.3. Realismo vs. Anti-realismo: Más allá de la verdad

La superasertabilidad es entonces un modelo de verdad siempre que ésta sea entendida bajo los parámetros del minimalismo y siempre que no transcienda el conocimiento. Ya hemos dicho que por medio de esta noción es posible re-interpretar el anti-realismo semántico de Dummett como la aplicación de la superasertabilidad a nivel global. También resulta obvio que la superasertabilidad encaja perfectamente en el espíritu del realismo interno de Putnam, quien igualmente buscaba una noción de verdad limitada por el conocimiento pero diferenciable de la asertabilidad justificada y que fuera estable y absoluta.

Obviamente, los realistas “metafísicos” no pueden aceptar esta “globalización” de la noción de superasertabilidad como modelo de la verdad. Los más radicales de ellos, ni siquiera aceptarían que en discursos como el cómico se respetaran las limitaciones epistémicas de la verdad y por lo tanto la superasertabilidad pudiese ser considerada un modelo de verdad para ellos. La verdad, para los defensores del realismo metafísico o radical, puede en ocasiones trascender nuestra evidencia y por lo tanto el principio (L) no sería válido. Sin embargo, otros –más razonables- podrían aceptar la superasertabilidad en ciertas áreas, aunque no pudieran hacerlo en la mayor parte de ellas.

Una vez llegados a este punto es posible, según Wright, optar por dos líneas diferentes de razonamiento. Podríamos llamar a la primera la *línea dummettiana*. Ya hemos hablado de las propuestas de Dummett así que no vamos a volver a ellas en este apartado. Muy rápidamente, la *línea dummettiana* de razonamiento, vista desde la perspectiva de Wright, centra su atención en la verdad y establece la diferencia entre realistas y anti-realistas en la distinción entre verdad y superasertabilidad. El realista dummettiano sostiene insistentemente que es posible considerar ciertos enunciados verdaderos aunque no sea posible conocer o comprobar su valor de verdad. Es decir, para el realista dummettiano, la verdad y la superasertabilidad divergen extensionalmente.

La segunda línea de razonamiento, defendida por Wright, cuestiona precisamente esto último. El realista dummettiano fundamenta la diferencia extensional entre verdad y superasertabilidad en el hecho de que ambos conceptos tienen orígenes distintos, fuentes diferentes (una basada en el conocimiento y la otra no). Pero ¿es esto suficiente? ¿es posible contar con dos nociones fundamentadas sobre bases distintas pero aún así extensionalmente coincidentes? Y, lo que es aún más importante, ¿pueden dos nociones que coinciden en extensión expresar propiedades distintas y por lo tanto marcar la diferencia entre realistas y anti-realistas?

Dejando a un lado las pretensiones globalizadoras tanto de Dummett como de ciertos realistas metafísicos, y aceptando que por medio del minimalismo Wright ha conseguido formular una noción de verdad metafísicamente neutra y por lo tanto apta tanto para realistas como para anti-realistas[17], ¿en que radica la diferencia entre ambos?

Según Wright, la divergencia entre realistas y anti-realistas radica en ciertas diferencias de tipo conceptual en su manera de entender la verdad. Estas diferencias, derivadas de ciertas normas constitutivas de la aplicación de los conceptos de verdad, establecerán una distinción conceptual entre la verdad y la superasertabilidad sin que por ello pasen a registrar normas distintas (con extensiones distintas).

> We ought to be receptive to the possibility that a truth predicate may have certain more-than-minimal features, as it were, which in some way define and substantiate realist intuitions about the discourse in which it operates without entailing a lack of evidential constraint and enforcing a distinction from superasertiblity for that reason. The crucial matter for debate, I want to suggest is, in all cases, *whether any of the properties of a local truth predicate additional to the essential minimal set may somehow justifiably inspire a realist perspective on the discourse concerned* (1992: 78. Cursiva del autor)

Es posible, según esto, encontrar elementos de carácter conceptual que diferencian el realismo del anti-realismo sin que por ello se tenga que defender una noción de verdad que trascienda el conocimiento y que por lo tanto la distancie de la superasertabilidad. Wright establece tres posibles estrategias para llevar a cabo el debate entre realistas y anti-realistas, asumiendo que ambos acepten, para el discurso en

[17] De la cual la superasertabilidad es una posible candidata a modelo de verdad para aquellas áreas del discurso en las que se cumplan (K) y (L)

cuestión, las nociones mínimas de la verdad y del contenido asertórico. De esta manera, la noción de verdad que rige un discurso será realista si pasa *a priori*: la prueba de la prescripción cognitiva, la prueba de la mejor explicación o la prueba del contraste de Eutifrón (o del orden de determinación).

Analizaremos muy brevemente las dos primeras pruebas, pero nos detendremos algo más en la tercera por varios motivos. En primer lugar, durante los últimos años, se ha venido llevando a cabo una intensa discusión acerca de la idea de los llamados conceptos "response dependence", es decir, de los conceptos dependientes de la respuesta o del juicio de los sujetos; noción que se genera a partir del análisis del contraste de Eutifrón. Además, en mi opinión, es posible extraer importantes consecuencias para el realismo y para nuestra comprensión de ciertos objetos y de nuestra relación con ellos (de nuestro conocimiento). Por último, aunque este tipo de conceptos suelen ser introducidos en relación al discurso acerca de las llamadas "propiedades secundarias", como los colores, o al discurso acerca de los conceptos morales, en los últimos tiempos han surgido propuestas para extender su aplicación a otros ámbitos, incluido el matemático. En un último apartado analizaremos la viabilidad de interpretar el conocimiento matemático (y con ello desarrollar un cierto tipo de realismo moderado en este ámbito) en términos de los conceptos dependientes del juicio.

6.3.1. La Prescripción Cognitiva

Brevemente, la prueba de la prescripción cognitiva consiste en evaluar hasta que punto los desacuerdos entre los hablantes respecto al valor de verdad de un enunciado dependen de una limitación cognitiva de esos hablantes (o un defecto) o por el contrario responden a cuestiones de gusto o de afinidad natural. Tal y como Wright la define:

> A discourse exhibits Cognitive Command if and only if it is a priori that differences of opinión arising within it can be satisfactorily explained only in terms of "divergent input", that is, the disputants' working on the basis of different information (and hence gulty of ignorante or error, depending on the status of that

> information), or "unsuitable conditions" (resulting in inattention or distraction and so in inferential error, or oversight data and so on), or "malfunction" (for example, prejudicial assessment of data, upwards or downwards, or dogma, or failings in other categories already listed) (1992: 93)

Un discurso pasa la prueba de la prescripción cognitiva por lo tanto si resulta a priori que las diferencias de opinión pueden ser explicadas satisfactoriamente únicamente en términos de algún tipo de error cognitivo (por alguna o por ambas partes). En este sentido, parece obvio que el discurso acerca de lo cómico, por seguir con el ejemplo de Wright, no pasa la prueba, de la misma manera que tampoco parecen hacerlo discursos acerca de lo bello o de lo repugnante. Diferencias de opinión acerca de la belleza de Brad Pitt o acerca de lo gracioso de Buster Keaton pueden tener diferentes causas (sociales, personales, culturales, etc.), pero en ningún caso parece acertado afirmar que se deban a algún tipo de error o malformación cognitiva.[18]

En el otro extremo, casos como las listas de los censos de las ciudades, los resúmenes de resultados deportivos o el menú de un restaurante, parecen ejemplos casos de discursos que pasan la prueba de la prescripción cognitiva. Cuando dos personas difieren en su opinión acerca del valor de verdad de un enunciado acerca del resultado de un partido de baloncesto es porque alguna de las dos (o ambas) han cometido algún error a la hora de leer (u oír) el resultado. En cualquier caso, no es una cuestión de gusto o afinidad.

La prescripción cognitiva está íntimamente relacionada con la idea de *convergencia*, es decir, con la posibilidad de solucionar las diferencias de opinión mediante acuerdos. Generalmente, si la disputa se genera por un error cognitivo de alguno (o varios) de los hablantes, la comunidad es capaz de detectarlo y resolver la discusión apelando a dicho error. Sin embargo, si la disputa no depende de limitaciones cognitivas, sino de gustos o afinidades, no es posible resolverla apelando a sensibilidades mayoritarias o a un supuesto gusto idiosincrásico de la mayoría.

Así, podemos efectivamente concluir que el concepto de verdad que rige un discurso determinado será de naturaleza realista si pasa la prueba de la prescripción

[18] Hay quien considera que el discurso acerca de los valores morales tampoco pasa la prueba, pero esto resulta obviamente mucho más complejo.

cognitiva y que, por lo tanto, la capacidad para determinar el valor de verdad de los enunciados de ese discurso depende del criterio de convergencia en el juicio de los hablantes de una comunidad, capaces de detectar los errores cognitivos a los que pueden estar sujetos. Si aceptamos estas premisas, podremos concluir que una noción de verdad realista no tiene porqué trascender la evidencia (la capacidad de la comunidad para decidir los valores de verdad) y por lo tanto, el predicado que la exprese no tiene porqué diferenciarse extensionalmente de la noción minimalista de verdad.

En cierta medida, la prueba de la prescripción cognitiva guarda muchas similitudes con el argumento de la relatividad conceptual de Putnam y con su insistencia en el papel de la representación en la discusión acerca del realismo. La prescripción cognitiva depende de una idea "fuerte" de representación. Afirmar que un discurso determinado la supera, implica defender que nuestras opiniones y enunciados acerca del mundo reflejan de una manera fiel ese mundo. Solo de esta manera podremos afirmar que siempre que haya una diferencia de opinión se debe a un error cognitivo y no a distintas maneras de representar o de entender los hechos (ambas igualmente válidas). En otras palabras, aceptar la prescripción cognitiva para un discurso equivale a rechazar la relatividad conceptual en el mismo.

Volviendo al ejemplo de Putnam, si tenemos un mundo con tres elementos, sólo podría haber una respuesta válida a la pregunta ¿cuántos objetos hay en el mundo? No es posible admitir que tanto 7 como 3 son respuestas válidas (dentro de su esquema conceptual). Una de las dos maneras de entender la realidad tiene que estar equivocada y para poder afirmar esto, obviamente, es necesario interpretar la representación como algo estable y absolutamente fiable (una suerte de mapa o fotografía de la realidad). Sin esa noción de representación resultaría difícil explicar el criterio de convergencia, la capacidad de la comunidad de hablantes para detectar los errores cognitivos, diferenciar los enunciados verdaderos de los falsos y corregir los errores cognitivos que puedan dar lugar a diferencias de opinión.

Para Putnam, rechazar la prueba de la prescripción cognitiva equivaldría a aceptar la relatividad conceptual; para Wright, a aceptar la relatividad de la verdad. Putnam pone el acento (especialmente en sus últimos escritos) en la posibilidad de distintas conceptualizaciones de la realidad, en el papel activo de los sujetos y en el fracaso de la noción de representación entendida como un intermediario necesario entre el sujeto y la realidad. Wright pone el énfasis en el carácter mínimo de la verdad, en que no es necesario que exista este tipo de relación única y estable entre nuestros enunciados y los hechos que describen.

En ambos casos, el término “relatividad” no debe confundirse con la defensa del “relativismo” y mucho menos con anti-realismo (esto ya quedó claro en el apartado dedicado a Putnam). En pocas palabras, ambos defienden el realismo, pero incorporando al sujeto activo y aceptando la posibilidad del pluralismo. La prescripción cognitiva (o la noción de representación como única y estable) puede ser válida, como dijimos, para discursos sobre el menú de un restaurante o sobre resúmenes de resultados deportivos, pero después de todo lo dicho, resulta difícil encontrar otro discurso que pudiera cumplir estos requisitos.

Probablemente uno de los candidatos clásicos para pasar esta prueba es el discurso matemático. No voy a entrar a analizar en detalle los motivos por los que creo que no la supera ya que lo he ido haciendo durante todo el trabajo. Baste recordar, en mi opinión, el argumento basado en la teoría de los modelos de Putnam para ver porqué el discurso matemático no cumple la prueba cognitiva.

Por otro lado, el problema de la indeterminación en las matemáticas, que hemos mencionado en varias ocasiones, refuerza aún más la idea de que la prescripción cognitiva no siempre se cumple en el caso de las matemáticas[19]. Un ejemplo claro de indeterminación en matemáticas fue expuesto por Benacerraf en su artículo “What Numbers Could Not Be”, en el que pone de manifiesto la imposibilidad de elegir entre dos tipos de definiciones del concepto de número: una según la cual los números deben ser identificados con los conjuntos de la teoría de von Neumman y otra en la que son identificados con los conjuntos de la teoría de Zermelo-Fraenkel. Por supuesto, el caso de las matemáticas no es equivalente al del discurso acerca de lo cómico o lo bello. La elección entre los dos modelos de conjuntos no se hace (en caso de tener que hacerse) en base a los gustos o las afinidades emocionales de los sujetos (al menos no

[19] Por supuesto, a veces si que se cumple. Sobre todo en un nivel básico, por ejemplo si dos personas discuten acerca del valor de la suma “2+2” porque una de ellas afirma que “2+2=4” y otra que “2+2=5”, obviamente una de las dos está cometiendo un error cognitivo, fácilmente subsanable, por lo que no resultará difícil cumplir el criterio de convergencia.

generalmente)[20]. Pero tampoco representa un caso de prescripción cognitva: cuando suceden desacuerdos entre los matemáticos no siempre se debe a que alguno de ellos está cometiendo un error, en muchos casos es simplemente imposible decidir (a no ser en base a criterios estéticos o de sencillez) entre dos posturas debido al fenómeno de la indeterminación.

6.3.2. La Mejor Explicación

Básicamente, se trata de establecer si lo que determina que un enunciado sea verdadero son estados de cosas del *mundo* como tal. Uno de los criterios básicos para determinar si esto es así es el llamado "amplio rol cosmológico" ("wide cosmological role") de los hechos o los estados de cosas que consideramos explicativos o determinantes. La pregunta clave que tenemos que formular es si los hechos de los que hablan los enunciados verdaderos (de un discurso determinado) juegan algún papel en la explicación de otros hechos (de otro tipo de hechos, pertenecientes a otros discursos).

Por ejemplo, parece razonable aceptar que las creencias morales figuran en la explicación de nuestras acciones o nuestros deseos. Pero esto no implica que los hechos morales en sí jueguen ningún papel en estas (u otras) explicaciones. Sin embargo, parece más acertado afirmar que los hechos acerca de, por ejemplo, ciertas propiedades primarias de los cuerpos, ejercen una influencia en otros muchos hechos y en el mundo en general.

Aceptar esto, según Wright, sería suficiente para justificar la adopción de un cierto tipo de realismo respecto a los hechos del segundo tipo mientras que no lo justificaría respecto a los hechos morales.

[20]Los aspectos estéticos juegan un papel muy importante en las matemáticas, donde no es extraño encontrar teorías que han sido rechazadas aún siendo *ciertas*, a favor de otras teorías similares pero más *bellas*. Cuando los matemáticos, y los científicos en general, cuentan con dos teorías con el mismo alcance explicativo siempre optarán por la más simple o la más elegante.

6.3.3.El contraste de Eutifrón o "response-dependence"

La prueba del contraste de Eutifrón (o del orden de determinación) consiste, en pocas palabras, en determinar si la mejor opinión (el juicio realizado bajo circunstancias óptimas) de los hablantes de una comunidad respecto a la verdad de los enunciados de un discurso simplemente *refleja* la verdad de esos enunciados (la verdad en sí misma) o si por el contrario la *determina*. Wright señala que disputas de este tipo se remontan hasta Platón, quien en su diálogo "Eutifrón" planteaba el problema de decidir entre las siguientes afirmaciones,

"Algunos actos son píos y por eso son amados por los dioses"

y

"Algunos actos son amados por los dioses y por eso son píos"

Estas dos afirmaciones no son más que distintas maneras de entender el bicondional:

"Para cualquier acto x: x es pío si y sólo si es amado por los dioses"

La primera de las afirmaciones da más importancia al lado izquierdo del bicondicional (la opción elegida por Sócrates, que Wright denomina "detectivism") mientras que la segunda enfatiza el lado derecho del mismo (la opción defendida por Eutifrón, denominada por Wright "projectivism").[21]

De manera análoga, continúa Wright, podemos trasladar este debate a la relación entre la verdad y la superasertabilidad para todos los discursos en los que la coincidencia en extensión de ambos términos no esté en duda, es decir, para aquellos discursos en los que se acepte el bicondicional

[21] Dicho con otras palabras, para Sócrates, la piedad (o la santidad) es una propiedad intrínseca que provoca una reacción concreta –amor- por parte de los dioses. Por el contrario, para Eutifrón, ser pío (o santo) consiste precisamente en estar en disposición de recibir una reacción –amor- por parte de los dioses.

> "Los enunciados (del discurso en cuestión) son verdaderos si y solo si son superasertables"

De esta forma, si ponemos el énfasis en el lado izquierdo del bicondicional obtenemos:

> "Los enunciados (del discurso en cuestión) son verdaderos y por eso son superasertables"

mientras que dándole más importancia al lado derecho obtenemos,

> "Los enunciados (del discurso en cuestión) son superasertables y por eso son verdaderos"

Si optamos por la primera formulación, en la que la verdad determina la superasertabilidad, estaremos aceptando cierta independencia de la verdad respecto a la superasertabilidad y, por lo tanto, adoptando una postura claramente realista respecto al discurso que estemos analizando. Por el contrario, si optamos por la segunda formulación, esta independencia de la verdad desaparece y, por lo tanto, defenderíamos una postura de corte anti-realista respecto al discurso en cuestión.

De esta manera, la prueba del contraste de Eutifrón ofrece una manera alternativa de plantear y discutir la relación entre verdad y superasertabilidad y, por consiguiente, la relación entre realistas y anti-realistas, sin tener que limitar el debate a la posibilidad de verdades que trasciendan la evidencia, tal y como hacía Dummett. Estas dos alternativas no son necesariamente excluyentes, muy al contrario, cada una de ellas tiene su propio ámbito de actuación:

> Dummett's debate will be the natural focus in the case of discourses (such as pure number theory) where we at best lack any assurance that truth and superassertibility coincide in extension, or even – the view of a Dummetttian

> realist about the past- have some assurance that they do not. The Euthyphro debate will arise for the case of discourses where we do have such an assurance, and where the issue concerns, rather, further aspects of the relation between the two concepts: for even if they are co-extensive, it can still be, crudely, that truth is one thing and superassertibility is another, provided the Socratic view is correct – provided, that is, a statement's being true *explains*, in some appropriate way, its being superassertible (Wright 1992: 81. Cursiva del autor)[22]

En general, el problema del orden de determinación se da para una gran cantidad de propiedades o conceptos y la elección que hagamos determinará en gran medida nuestra posición en el debate del realismo. Se suelen denominar "response-dependence concepts" (conceptos R-D, en adelante) a aquellos conceptos que requieren cierto grado de familiaridad por parte del sujeto para ser captados[23].

El término "response-dependence" apareció en la literatura por primera vez de la mano de Mark Johnston, en su artículo "Dispositional theories of value" (1989)[24]. La introducción del mismo se produjo en relación a un proyecto de carácter puramente metafísico, cuyo objetivo último era explicar el

> Qualified realism [which philosophers have urged about many areas of discourse], asserting both that the discourse in question serves up genuine candidates for truth and falsity, and that, nonetheless, the subject matter which makes statements true or false is not wholly independent of the cognitive or affective responses of the speakers in the discourse (1989: 144)[25]

---

[22]Esta limitación en el área de actuación de los conceptos dependientes de la respuesta sin embargo no es compartida por todos, de hecho, en mi opinión la aplicación del contraste de Eutifrón tiene mucho más alcance del que Wright admite. Concretamente, veremos hasta que punto es posible aplicar estos conceptos de una manera más o menos global y especialmente al caso del conocimiento matemático (que Wright, en esta cita, sitúa en el ámbito de acción de la crítica dummettiana – al menos parte de ese conocimiento matemático)

[23] R-D es una propiedad que puede en realidad ser asociada con distintos tipos de representaciones (según las preferencias teóricas). Generalmente, y nosotros seguiremos a la mayoría en este punto, se suele asociar a conceptos, de manera que son propiedades de conceptos. Para simplificar, hablaremos en general de conceptos R-D (conceptos que cumplen la propiedad de ser R-D)

[24]Los conceptos R-D también suelen ser llamados "judgement-dependent concepts" o "dispositional concepts".

[25]En este artículo concretamente, Johnston utiliza la noción de R-D para el análisis de los valores morales y, por lo tanto, de la posibilidad de defender cierto tipo de realismo respecto a los mismos (similar al planteado por autores como McDowell y Wiggins)

La formulación original de Mark Johnston establecía:

> (RD_0) A (predicative) concept is R-D iff there is a R-D- giving biconditional for which holds *a priori*.

Es decir, que siempre que se de *a priori* un bicondicional similar a los vistos en el caso de Eutifrón o de la relación entre verdad y superasertabilidad, tendremos un caso de R-D, ya que en todos ellos cabe posibilidad de elegir entre dar más importancia a un lado o a otro del mismo, esto es, de afirmar que los conceptos simplemente reflejan o que en cierto modo determinan la realidad. Muchos autores sin embargo han argumentado que la caracterización de los conceptos R-D ofrecida por M. Johnston no es suficiente para sustentar el proyecto metafísico para el que fue concebido: para generalizar la noción de propiedad secundaria y sustentar con ello un tipo de realismo moderado o, tal y como enuncia el título de uno de sus artículos, un "Objectivity Refigured: Pragmatism without Verificationism" (1993). Nosotros seguiremos la formulación ofrecida por Wright, especialmente en *Truth and Objectivity*, pero intentaremos argumentar que estos conceptos tienen un campo de aplicación más amplio del admitido por Wright.

Comúnmente, los conceptos R-D son identificados con lo que tradicionalmente se ha venido denominando "cualidades secundarias", esto es, conceptos que implican al sujeto de una manera determinante. Wright, por ejemplo, respeta en términos generales esta identificación, afirmando que únicamente es posible ofrecer una descripción de la verdad en términos de R-D para discursos en relación a los colores o a la intención. Según él, no es posible por ejemplo, aplicar esta definición en discursos acerca de la moral o de las formas (geométricas).

Algunos autores sin embargo, en especial P. Pettit, ofrecen una visión de los conceptos R-D como un fenómeno global. Así, para este autor, no existen conceptos independientes de la respuesta ("response-independent concepts"); la verdad es, para todo discurso, R-D. Pero esto no conduce necesariamente al idealismo. De hecho, Pettit argumenta que el realismo es perfectamente compatible con una aplicación global de los conceptos R-D. En mi opinión, la propuesta de Pettit y otras similares son muy atractivas ya que ofrecen una manera de formular y de entender el tipo de realismo moderado al que hemos estado intentando dar forma en los dos últimos capítulos de este trabajo. Los conceptos R-D vienen a ser una nueva manera de plantear la posibilidad de un realismo moderado, en el que el sujeto juegue un papel activo y determinante a la hora de fijar la verdad de los enunciados pero en el que la realidad mantenga su independencia[26]. Este equilibrio, sobra decirlo a estas alturas, no es sencillo pero, aunque el planteamiento en términos de R-D no resuelva todos los inconvenientes (y de hecho, como casi siempre ocurre, incorpora sus propias limitaciones), es posible que a través de estos conceptos consigamos al menos ofrecer una visión clara y novedosa a partir de la cual desarrollar una postura viable.

Intentaremos analizar hasta que punto es posible, y deseable, defender este tipo de realismo moderado a través de los conceptos R-D, la relación que esta postura tiene con la de Putnam o el propio Wright y, en última instancia, la posibilidad de aplicar estos conceptos al discurso matemático (con lo que se estaría también ofreciendo una posible vía para resolver el conocimiento de las entidades matemáticas).

De acuerdo con la formulación de Wright, un predicado F es R-D si (y sólo si) cumple la denominada "ecuación básica":

(EB) $\forall x\ (Fx \leftrightarrow (C \rightarrow S \text{ juzga que } Fx))$

Donde S es un sujeto competente y C son las condiciones óptimas para llevar a cabo el juicio. Probablemente el caso menos controvertido para la aplicación de estas ecuaciones es el caso de los conceptos acerca de los colores. De esta manera, podríamos aplicar la EB y obtendríamos:

[26] Este tipo de realismo moderado es muy similar al defendido por Putnam, al menos el Putnam del realismo interno, quien, en *Reason, Truth and History* sugiere que un tipo de R-D global es el tipo de postura que Kant defendió. De hecho, muchas de las críticas a los conceptos R-D (como las elevadas por Mark Johnston) suelen ser consideradas así mismo como críticas al "realismo interno" de Putnam y a propuestas "anti-realistas" análogas (generalmente, lo cual resulta muy revelador, los defensores de este tipo de doctrinas suelen auto-denominarse realistas, mientras que sus críticos suelen tacharles de lo contrario, de anti-realistas)

(EB*) $\forall x$ (x es azul $\leftrightarrow$(C$\rightarrow$ S juzga que x es azul))

Donde las condiciones optimas C serían del tipo: que la luz sea apropiada, que el sujeto esté despierto, que tenga buena vista, etc. Por supuesto, estas condiciones tendrán que ser especificadas con más detalle de manera que podamos ofrecer una definición sustancial de las mismas, sin caer en la trivialización (en lo que Wright denomina "whatever it takes"). En general, Wright establece que el predicado "F" será considerado dependiente de la respuesta (R-D) si (y sólo si) la ecuación básica cumple las siguientes condiciones:

1. *Condición de aprioricidad* ("A prioricity condition"): La ecuación básica tiene que ser verdadera *a priori*; o, dicho de otra manera, la coincidencia en extensión entre la mejor opinión y la verdad debe ser *a priori*. Esto se debe a que la propuesta de R-D establece, para el discurso que estemos tratando, que la mejor opinión de los hablantes es la base conceptual de la verdad (si un enunciado es superasertado -afirmado bajo condiciones óptimas o establecido por la "mejor opinión" - entonces es verdadero). Para que un concepto cuente como R-D, el que su extensión sea determinada por la mejor opinión del sujeto no puede ser accidental. Tal y como lo expresa Wright,

   > The truth, if it is true, that the extensions of [a class of concept] are constrained by idealised human response –best opinion- ought to be available purely by analytic reflection on those concepts, and hence available as knowledge *a priori* (1992: 117)

2. *Condición de substanciación* ("Substantiality Condition"). Las condiciones, C, deben ser especificadas de una manera no trivial, no pueden ser descritas estableciendo que el sujeto se encuentra en las condiciones apropiadas –cualesquiera que estas sean- para ofrecer su mejor opinión, debemos ser capaces de ofrecer una descripción sustantiva de esas condiciones:

> They must be specified in sufficient detail to incorporate a constructive account of the epistemology of the judgements in question, so that not merely does a subject's satisfaction of them ensure that the conditions under which she is operating have "whatever-it-takes" to bring it about that the judgement is true, but a concrete conception is conveye of what it actually does take (1992: 112)

3. *Condición de independencia* ("independence condition"). La satisfacción de las condiciones, C, debe ser (lógicamente) independiente de la extensión del predicado en cuestión (para evitar caer en una explicación circular). Es decir, las condiciones que estipulemos como ideales o adecuadas para emitir un juicio (una "mejor opinión") no pueden interferir en el mismo, tienen que ser independientes de la extensión del predicado (F).

> The relevant concepts are to be involved in the formulation of the C-conditions only in ways which allow the satisfaction of those conditions to be logically independent of the details of the extension of those concepts (1992: 123)

4. *Condición extrema o primitiva* ("extremal or primitive condition"). No debe haber una explicación mejor de la condición a priori de la relación, tiene que ser primitiva. La ecuación no puede derivarse de otra o de alguna reflexión acerca de la propiedad, etc.

La condición de independencia es, probablemente, la más problemática de las cuatro. Esto no debe resultar extraño. Básicamente, la condición de independencia para los conceptos R-D refleja el principal escollo –tanto metafísico como epistemológico- para las propuestas realistas moderadas (tales como la de Putnam). El problema radica en sostener un equilibrio ciertamente difícil entre, por un lado, las convicciones realistas: la suposición no sólo de la existencia de la realidad sino de una cierta independencia respecto a nosotros, y, por otro lado, el papel activo de los sujetos a la hora de determinar el valor de verdad de los enunciados declarativos acerca de esa realidad. O en otras palabras, mantener un equilibrio entre la idea de que somos los sujetos (con nuestras divergencias, versiones y distintos esquemas conceptuales) los que "clasificamos" o "estructuramos" la realidad y la idea de que la realidad a su vez juega un papel esencial en el proceso de percepción y de conocimiento.

Este precario equilibrio queda perfectamente expresado por Putnam en el prefacio de *Reason, Truth and History*, en el que es probablemente uno de sus párrafos más citados y a la vez más enigmáticos:

> My view is not a view in which the mind makes up the world. If one must use metaphorical language then let the metaphor be this: the mind and the world jointly make up the mind and the world (1981: 13)[27]

Precisamente esta condición de independencia es la principal fuente de problemas para las ecuaciones básicas. La principal complicación con las ecuaciones básicas es que, debido a esto, presentan problemas con el requisito de ser a priori, especialmente en los casos en los que el tipo de hechos que otorgan el valor de verdad al enunciado son casualmente activos (o se dejan influenciar causalmente por la realidad). Mark Johnston ha ilustrado un ejemplo paradigmático de esta clase de situaciones por medio del caso del "camaleón"[28], que cambia de color según las condiciones lumínicas, de manera que, a oscuras tiene un determinado tono de color verde pero que, al ser iluminado, cambia radicalmente de color (dependiendo de la superficie en la que se encuentre). Las condiciones (entre las que está que haya suficiente luz) interfieren claramente en la extensión del predicado (el color del camaleón), por lo que el requisito de independencia no es superado. En casos como éste, en los que la realización de las condiciones requeridas para emitir un juicio (adecuado) interfiere decisivamente en el mismo, ¿cómo es posible defender que la satisfacción de la ecuación básica es *a priori*?

Wright cree que no es posible y que debemos modificar sustancialmente la ecuación básica para superar esta dificultad. Para ello, introduce la llamada ecuación

---

[27] Nelson Goodman, en *Mind and Other Matters* propone otra metáfora para expresar la idea subyacente a este equilibrio, una metáfora sustancialmente diferente (claramente más idealista) de la de Putnam pero, en mi opinión, muy similar en su espíritu. Es la denominada "Metaphor of Nature's toleration", de acuerdo con la cual la naturaleza no demanda ser descrita o clasificada pero admite "generosamente" ser descrita y tolera múltiples descripciones.

[28] Johnston (1993: Apéndice 2)

provisional, que por supuesto, al igual que la básica, tendrá que cumplir las cuatro condiciones anteriores para poder establecer que el concepto en cuestión es R-D. De acuerdo con la ecuación provisional:

(EP) $\forall x\ (C \rightarrow (Fx \leftrightarrow S \text{ juzga que } Fx))$

Es decir, para todo x, si se dan las condiciones necesarias entonces x es F si y sólo si S juzga que x es F. De nuevo, aplicando esta ecuación al caso de los colores obtendríamos:

(EP*) $\forall x\ (C \rightarrow (x \text{ es azul} \leftrightarrow S \text{ juzga que } x \text{ es azul}))$

Las ecuaciones provisionales tienen la ventaja de encajar perfectamente con la condición de aprioricidad, pero su alcance es mucho más limitado. Al colocar las condiciones (C) para el juicio al inicio, como requisito previo al bicondicional, la (EP) no dice nada acerca de las condiciones de verdad de “Fx” cuando estas condiciones no se cumplen. En el caso del camaleón, es fácil ver que la (EP) cumple perfectamente el requisito de aprioricidad, ya que queda perfectamente estipulado desde el inicio que estamos partiendo de las condiciones estándares (C) de observación, es decir, sólo tendremos en cuenta el color del camaleón (y la respuesta del sujeto) bajo determinadas condiciones (con una luz determinada).

Obviamente, para lograr una explicación adecuada de la extensión de los predicados por medio de los conceptos R-D, habría que matizar mucho más la naturaleza de las condiciones establecidas y los ámbitos en los que su aplicación resulta pertinente. La utilización de los conceptos R-D es un fenómeno relativamente nuevo, que en la última década ha vivido un verdadero resurgir con la aparición de una gran cantidad de formulaciones novedosas e intentos de aplicación a campos nuevos. El propio Wright, quien ha llevado a cabo una labor exhaustiva para la defensa de estos conceptos en el ámbito de los colores y de las intenciones, reconoce que se trata de un proyecto en fase de gestación, con una serie de problemas aún sin resolver y con un campo de aplicación –al menos de momento- muy limitado.

Entrar en la exposición de todos estos problemas y en las distintas alternativas propuestas está fuera del alcance de este trabajo. Lo interesante para nosotros es, sobre todo, señalar la posibilidad de plantear el debate del realismo y de desarrollar una alternativa realista al realismo metafísico, sin tener que centrarnos en el –excesivamente acotado y extremadamente resbaladizo- debate acerca de la posibilidad de verdades que trasciendan a la evidencia. Wright no es el único en darse cuenta de la conveniencia de desviar el debate del problema de – la trascendencia o no de- la verdad; Putnam, tal y como vimos, también ha optado por renunciar al intento de basar su propuesta realista en una teoría epistémica de la verdad e intenta, desde hace unos años, fundamentar su propuesta sobre el análisis de la percepción y del conocimiento.

Ambos intentos requieren aún mucho trabajo para constituir alternativas realistas viables al realismo metafísico (o radical), pero ciertamente abren una puerta al optimismo haciendo que sus propuestas, aunque más complejas, resulten mucho más prometedoras que las basadas únicamente en el desarrollo de una noción de verdad alternativa.

Antes de pasar a analizar hasta que punto podría ser viable una explicación del conocimiento matemático en términos de conceptos R-D, me gustaría sin embargo mencionar, muy brevemente, los intentos tanto de Mark Johnston como de Philip Pettit para llevar a cabo una aplicación global de los conceptos R-D y de esta manera fundamentar un tipo de realismo moderado sobre ellos[29].

Ambos autores interpretan los conceptos R-D en términos de "disposiciones", según lo cual la mejor manera de defender la determinación de la extensión de los predicados por medio de la respuesta de los sujetos (esto es, defender la postura de Eutifrón) es considerando los conceptos R-D como conceptos de propiedades "response-dispositional": propiedades identificables –a priori- con disposiciones para provocar respuestas determinadas por parte de los sujetos adecuados bajo las circunstancias adecuadas (también en este caso habría que definir sustancialmente lo que entendemos por sujetos "adecuados" y condiciones "adecuadas"). La propiedad de la suavidad, por ejemplo, es, bajo esta lectura, la disposición para ser suave al tacto, al

[29] Ver Johnston (1993) y Pettit (1991). Para esta breve exposición obviaré las diferencias entre ambos autores ya que no resultan relevantes para la visión global.

menos bajo condiciones “normales”. Formalmente, el concepto F es un concepto disposicional si y sólo si la siguiente identidad es verdadera:

(R-Disp) El concepto F = el concepto de la disposición para producir R en S bajo C

Donde, de nuevo, R es una respuesta por parte del sujeto (como juzgar o creer), S es el sujeto (o grupo de sujetos) que producen dicha respuesta y C son las condiciones específicas bajo las que se produce dicha respuesta (específica) por parte del sujeto (o los sujetos). Igualmente, la identidad, de ser verdadera, debe serlo a priori y las condiciones, C, deben ser especificadas de una manera no trivial (sustancial).

La gran diferencia entre esta interpretación y la ofrecida por Wright es la ausencia de las dos últimas condiciones: la independencia y la primitiva. Esta es la gran ventaja de esta interpretación frente a la de Wright, lo que permite plantear una aplicación global de estos conceptos, pero también conlleva ciertas limitaciones en tanto pierde rigurosidad. Al adscribir a un objeto la disposición de ser, por ejemplo, azul, bajo determinadas circunstancias no tenemos porqué implicar que ese objeto tenga que poseer la disposición de aparentar azul bajo todas las circunstancias.

En la interpretación de Wright resultaba problemático acomodar casos como el del camaleón y por eso hubo que sustituir la ecuación básica por la provisional, de alcance mucho más limitado. Pero en la interpretación de Johnston y Pettit es perfectamente posible acomodar esta posibilidad y otras similares. Concretamente, es posible acomodar los tres casos que el propio Johnston considera problemáticos en el caso de los conceptos R-D: “altering” (las condiciones pueden alterar la disposición del sujeto a provocar determinada respuesta, como el caso del camaleón donde la luz cambia la apariencia del mismo y por lo tanto el juicio del sujeto respecto a su color); “masking” (donde la disposición a producir cierta respuesta es enmascarada o evitada, por ejemplo, si una copa tiene la disposición de ser frágil pero, al caer, un ángel evita que se rompa) y “mimicking” (donde un objeto que no posee determinada disposición y bajo unas condiciones que no lo alterarían, fuera capaz de producir esa disposición por la conjunción de eventos en un nivel más amplio, por ejemplo, un trozo de plomo no tiene la disposición de ser frágil pero al caer es posible que un ángel lo rompa, sin motivo alguno).

Como vemos, los requisitos de los conceptos disposicionales son mucho más laxos que los de los conceptos R-D. Esto, por supuesto, plantea la cuestión de hasta qué punto es posible desarrollar una defensa coherente de una postura en la línea de Eutifrón, pero en principio, resulta intuitivamente atrayente y concuerda perfectamente con lo que tradicionalmente se ha venido afirmando acerca de las disposiciones (o de las propiedades secundarias).

Los conceptos disposicionales no contradicen las tesis principales del realismo moderado, pero sí plantean problemas para los defensores del realismo metafísico. La admisión de estos conceptos en un discurso determinado no conduce al fenomenalismo o al rechazo de lo que Pettit llama la tesis “descriptivista”. Los conceptos R-D no son descripciones de “sensaciones” (o apariencias) sino de las propiedades en sí; no describen la “sensación de que algo es suave” sino la propiedad de la suavidad. De la misma manera, tampoco compromete la tesis realista que Pettit denomina “objetivista”: de la aceptación de los conceptos R-D para un discurso no se deriva que las respuestas de los sujetos “hagan” o “construyan” de alguna manera las cosas suaves o azules. Los sujetos, con sus respuestas, no estructuran la realidad (de manera que se adecue a sus juicios), por el contrario, lo que hacen es darle forma al concepto de “suavidad” o “azul” de manera que encajen con la realidad (que encajen con las cosas suaves o azules)

Hasta aquí, sin problemas para los realistas, pero la admisión de los conceptos R-D sí contradice una tesis principal del realismo metafísico, la que Pettit denomina “cosmocentrismo” y que afirma que los sujetos pueden estar equivocados o ser ignorantes acerca de todos o de cualquier enunciado (sustantivo) del discurso.[30] La ignorancia o el error no tienen cabida en este tipo de juicios realizados bajo circunstancias normales o ideales, aunque sí cabe la posibilidad que los sujetos no sepan que se encuentran en dichas circunstancias. Esto, en cualquier caso, no contradice las

[30] La admisión de los conceptos R-D nos conduce inevitablemente a aceptar una conclusión similar a la defendida por Putnam con el argumento derivado de la teoría de los modelos: una teoría ideal, o un juicio hecho bajo las condiciones adecuadas, por el o los sujetos adecuados, no puede ser falsa. Hay que tener en cuenta que decir que la respuesta del sujeto debe darse bajo las condiciones “adecuadas” viene a ser algo similar a lo que Putnam entendía por “condiciones epistémicas ideales”.

que podríamos denominar “tesis fundamentales del realismo” (existencia e independencia), simplemente niega la posibilidad de coexistencia (en un discurso determinado) entre los conceptos R-D y el realismo metafísico. El realismo moderado (en cualquiera de sus formas) permanece por lo tanto como una opción viable,

> It allows [the kind of anthropocentrism introduced with R-D concepts] realists to think of learning about the entities posited in the discourse as a matter of discovery, not invention. In particular, it allows them to acknowledge epistemic servility and ontic neutrality: they can think of subjects, even subjects in normal and ideal conditions, as having to bow to the authority of an independent reality in determining what is what; and they can expect such subjects sometimes to identify kinds that are of more than species-relative or standpoint-relative interest (1991: 623)

6.3.3.1. Las aplicaciones de los conceptos R-D para las Matemáticas

Para ver hasta que punto los conceptos R-D pueden ser de utilidad para solucionar los problemas epistémicos del platonismo en matemáticas conviene volver brevemente sobre algunas ideas ya vistas. Recordemos que el dilema epistémico del platonismo, tal y como lo plantea Field, no requiere la aceptación de una teoría causal del conocimiento. De hecho, Field afirma que el problema para los platonistas no es sólo que no sea posible ofrecer una explicación en términos causales del conocimiento matemático –tal y como afirma Benacerraf- sino que tampoco es posible concebir una explicación no-causal del mismo:

> The problem arises in part from the fact that mathematical entities, as the platonist conceives them, do not causally interact with mathematicians, or indeed with anything else. This means we cannot explain the mathematicians belief and utterances on the basis of the mathematical facts being causally involved in the production of those beliefs and utterances; or on the basis of the beliefs or utterances causally producing the mathematical facts; or on the basis of some common cause producing both. Perhaps then some sort of non-causal explanation

> of the correlation is possible? Perhaps; but it is very hard to see what this supposed non-causal explanation could be. Recall that on the usual platonist picture, mathematical objects are supposed to be mind- and language-independent; they are supposed to bear no spatiotemporal relations to anything, etc. The problem is that the claims that the platonist makes about mathematical objects appears to rule out any reasonable strategy for explaining the systematic correlation in question (Field, 1989: 230-1)

El problema, según Field, es que la definición de los objetos matemáticos ofrecida por los platonistas y su condición de entes independientes de la mente y del lenguaje hace que sea imposible –o al menos muy difícil- ofrecer una explicación del conocimiento, sea ésta causal o no-causal. Las explicaciones causales del conocimiento, tal y como señala Benacerraf, son incompatibles con la definición platonista de objetos matemáticos como objetos abstractos (fuera del espacio y del tiempo e incapaces de establecer relaciones causales). Las explicaciones no-causales del conocimiento chocan con la independencia de los objetos matemáticos; ¿cómo podríamos explicar el acceso –no causal- con este tipo de objetos abstractos si además son completamente independientes de nosotros?[31]

Utilizando la idea de los conceptos R-D, autores como John Divers y Alexander Miller han desarrollado una arriesgada y novedosa propuesta para dar respuesta a este dilema epistemológico sin renunciar por ello al platonismo y a su definición de objeto matemático. Para ello, justifican la fiabilidad del conocimiento matemático afirmando que la verdad matemática es dependiente de la respuesta, esto es,

> Our central two-fold claim is that mathematical belief is reliable because mathematical truth is judgement-dependent, and that the judgement-dependence of mathematical truth brings no commitment to the mind-dependence of mathematical objects (1999: 281)

[31] Ver los problemas expuestos en el capítulo 1 en relación a la intuición como forma de conocimiento matemático.

Para el caso matemático podemos fácilmente trasladar la ecuación básica de los conceptos R-D (según la interpretación de Wright), de la siguiente forma:

(EB) $\forall$x (x es (un número) primo $\leftrightarrow$ (C $\rightarrow$ S juzga que x es (un número) primo))

Teniendo en cuenta que –según la definición platonista- los objetos matemáticos son incapaces de establecer relaciones causales no es necesario, como en el resto de los casos, sustituir la ecuación básica por la provisional (ya que no habrá problemas a la hora de garantizar la aprioricidad de la verdad de la ecuación y la condición de independencia). Esto es una ventaja ya que, como vimos, las ecuaciones básicas tienen un alcance mucho más general que las provisionales. Lo que sí sigue siendo necesario es que la ecuación cumpla las cuatro condiciones establecidas para poder afirmar que la respuesta determina la extensión del predicado “es primo” (y no sólo la refleja).

Por regla general, las condiciones, C, requeridas en el caso de, por ejemplo, el discurso acerca del color, son condiciones de carácter perceptual o acerca del entorno en el que se produce la percepción. Sin embargo, resulta obvio que esto no funcionará en el caso de las matemáticas (a no ser que defendamos un tipo de naturalismo como el de Penelope Maddy y argumentemos que el conocimiento matemático es esencialmente conocimiento perceptual). En este caso, de acuerdo con Miller y Divers, lo que necesitamos son, por un lado, condiciones lingüísticas (ser capaz de utilizar el lenguaje matemático, etc.) y, por otro, condiciones psicológicas (no mentir, estar despierta, etc.).

Además es necesario cumplir otro tipo de condiciones algo más específicas. La primera es que el sujeto, para ser adecuado, tiene que ser conceptualmente competente. Ser un sujeto competente y ser capaz por lo tanto de emitir juicios adecuados sobre objetos numéricos, requiere altos niveles de competencia conceptual, lo cual se adquiere a través de un proceso de aprendizaje. Así, para seguir con la analogía, mientras en el caso del discurso acerca del color el sujeto tiene que ser perceptualmente competente (poseer la capacidad visual apropiada), en el caso del discurso matemático el requerimiento necesario es que el sujeto conozca los conceptos claves.

La segunda condición específica está relacionada con el problema del conocimiento de esos objetos y, concretamente, con el modo de presentación de los mismos. Los objetos matemáticos tienen que ser presentados al sujeto de una manera "canónica". Esto ayudará a evitar problemas relacionados principalmente con la indeterminación derivada de los enunciados no-decidibles y de la excesiva dependencia de los expertos. Esta condición sin embargo puede resultar mucho más problemática que la primera, especialmente en casos en los que no sea posible determinar el valor de verdad de los enunciados en cuestión. Por ejemplo, si estamos refiriéndonos al "número más pequeño que contradiga la conjetura de Goldbach" y afirmamos que ese número (llamémoslo "g") es un número par. En este tipo de enunciados, ni siquiera los expertos no son capaces de identificar el referente de "g" y, por lo tanto, de determinar el valor de verdad del juicio en cuestión (que g sea par). La mejor opinión de los expertos no es capaz por lo tanto de establecer el valor de verdad del enunciado.

En el caso de los enunciados empíricos nos encontramos con un problema similar en los casos en los que los predicados en cuestión admitan grados de vaguedad. Así, por ejemplo, en un caso límite entre el rojo y el naranja, en el que es imposible decidir entre uno u otro color, la opinión del más competente de los sujetos no podrá determinar la verdad de un enunciado como "esto es rojo" o "esto es naranja". En cualquier caso, el problema de la vaguedad es un problema que no vamos a tratar aquí. El caso de la indeterminación de la verdad en matemáticas es algo más complejo porque la vaguedad no tiene cabida en ese discurso: un número es o bien par o bien impar, no hay casos límite. Y recurrir a la ignorancia de los sujetos respecto al valor de verdad de "g es un número par" no es de ayuda ya que el problema no es que no lo sepamos sino que, más bien, parece imposible que podamos llegar a saberlo. No es un problema de ignorancia, es un problema de trascendencia: la verdad de estos enunciados trasciende la evidencia (incluso de los sujetos ideales).

Por lo tanto, volviendo a la distinción que traza Wright entre las distintas "cruces" del realismo, o las distintas formas de intentar resolver las disputas realistas, este tipo de casos deberán ser resueltos, no desde la óptica de los conceptos R-D, sino desde el análisis dummetiano de la verdad. No se trata, tal y como yo lo entiendo, de decidir entre la opción de Eutifrón y la de Sócrates, entre afirmar que los juicios determinan o solamente reflejan la verdad. Se trata, por el contrario, de determinar si es posible aceptar que casos como el mencionado, en el que la verdad simplemente trasciende la posibilidad de emitir juicios acerca de ella, son posibles, si es posible aceptar que puedan ser verdaderos sin evidencia o si simplemente tenemos que rechazarlos y poner ciertos límites a la noción de verdad. Pero, una vez más, este debate no contradice el planteado por los conceptos R-D, son formas complementarias de analizar los problemas del realismo. De la misma manera que resulta erróneo limitar todo el debate a la discusión acerca de la posibilidad de verdades que trasciendan la evidencia (como hace Dummett), resulta también un error limitarlo a la interpretación de los conceptos R-D.

De acuerdo con lo dicho, Divers y Miller establecen que la ecuación básica para el predicado "x es primo" debería ser:

> PRIME: ∀x (x is prime ↔ (S meets the conditions on reporting, on background psychological considerations and on conceptual competence and x is to be presented to S in a canonical mode of presentation → S will judge that x is prime))
> (1999: 292)

Asumamos que estas condiciones se cumplen y asumamos igualmente que la ecuación básica cumple el resto de las condiciones, de manera que el predicado "es primo" sea R-D. Dos cuestiones esenciales quedarían por responder para demostrar que esta interpretación es compatible con una postura realista acerca de los objetos matemáticos.

La primera cuestión por resolver es hasta que punto la aplicación de los conceptos R-D es compatible con la independencia de los objetos matemáticos. Divers y Miller argumentan que es perfectamente viable conjugar ambas nociones, que la interpretación del discurso matemático en términos de R-D no representa ningún problema para el platonismo y para probarlo recurren a la diferencia entre dos tipos de dependencia de la mente (o del lenguaje). El primer tipo de dependencia, la dependencia (de la mente) de las condiciones de verdad ("mind-dependence of truth") está claramente ligada a la idea de la dependencia de la respuesta, ya que los conceptos R-D afirman que son los sujetos los que determinan los valores de verdad de un discurso (de manera que la verdad depende del juicio de los sujetos).

Sin embargo, de acuerdo con Divers y Miller, los platonistas pueden (y deben) aceptar este tipo de dependencia sin que ello provoque contradicciones. Es el segundo tipo de relación de dependencia el que resulta problemático: la dependencia (de la mente) de las entidades o de los objetos (“mind-dependence of entities”). Esta dependencia de las entidades matemáticas contradice las tesis básicas del platonismo, haciendo que la existencia de los objetos matemáticos dependa de la existencia de las mentes de los sujetos. Pero de la aceptación de la interpretación en términos de R-D del discurso matemático no se sigue que los objetos matemáticos dependan de la mente de los sujetos.

Esto no deja de ser otra manera de expresar el fenómeno de la relatividad conceptual. El que la verdad de nuestros enunciados (en este caso matemáticos) dependa de la “mejor” opinión de los sujetos (de determinados sujetos, en determinadas circunstancias) no conduce al realismo metafísico o al platonismo tradicional. El que la verdad pueda depender del contexto, del esquema conceptual o del juicio de los sujetos no es más que una manifestación del hecho de que la realidad admite múltiples interpretaciones. Es importante sin embargo tener siempre presente que esto no tiene porqué conducirnos a negar que exista la realidad o que sea independiente de los sujetos. La verdad está determinada por la mejor opinión de los sujetos pero esa opinión es una respuesta ante el mundo, ante los objetos, sus propiedades y sus relaciones. Es perfectamente compatible defender la existencia y la independencia de los objetos matemáticos y la dependencia de la verdad de nuestros enunciados acerca de ellos (de la misma manera que es posible, o más bien inevitable, aceptar la indeterminación de la relación de referencia de nuestros términos y la posibilidad de distintas interpretaciones de un mismo hecho).

Dicho de otra manera, es posible cuestionar la independencia de la verdad matemática- de los criterios de corrección- aún presuponiendo que existe una realidad fija de objetos matemáticos independientes. Se trata de dos cuestiones distintas: ni la dependencia de la verdad implica la dependencia de los objetos, ni la independencia de los objetos conlleva una noción de verdad concreta (basada en una relación única de correspondencia). Esa es, al fin y al cabo, la tesis principal del argumento derivado de la teoría de los modelos de Putnam: aún si asumimos la existencia y la completa independencia de los objetos matemáticos, esto no garantiza la independencia de los criterios para determinar la verdad de los enunciados matemáticos.[32]

Negar cierto grado de dependencia de la verdad (con respecto a nuestras mentes, o a nuestro lenguaje) resulta una postura ciertamente radical. Sería como afirmar que aún si los seres humanos no hubieran existido, la aritmética (tal y como la conocemos) existiría igualmente. El que nuestras teorías son construcciones, creaciones del ser humano parece algo fuera de duda. Por lo mismo, parece claro que podemos inferir que la verdad de las proposiciones de esas teorías está, al menos parcialmente, determinada por los sujetos. El error está en intentar deducir de esto el que la existencia de los objetos matemáticos (de los números, por ejemplo) depende de esos mismos sujetos. O inferir que si los seres humanos hubiésemos sido distintos (cognitivamente hablando), los números hubieran sido diferentes, con propiedades intrínsecas diferentes. La diferencia entre estas dos afirmaciones es, me parece, muy clara, pero desgraciadamente se ha pasado por alto en numerosas ocasiones.

La segunda cuestión que hay que resolver para que la explicación en términos de R-D resulte no sólo compatible con el platonismo, sino también atractiva, es hasta qué punto, y cómo, puede ayudar a resolver el problema epistemológico al que se enfrentan los platonistas. Los conceptos R-D ofrecen una explicación atractiva de la verdad matemática, introduciendo el factor epistémico pero sin caer en los errores del verificacionismo. Hasta aquí todo bien, los platonistas pueden aceptar esta noción de verdad en términos de R-D, pero esto no resuelve el mayor problema al que se enfrentan, el epistemológico. Aún aceptando que los objetos matemáticos son R-D, que la verdad de los enunciados acerca de ellos está determinada por la mejor opinión de los sujetos, necesitamos explicar cómo es posible que nosotros (seres causales) tengamos conocimiento de los objetos matemáticos (acausales).[33]

---

[32] Por lo tanto, tampoco garantiza la objetividad de estos criterios (al menos no un tipo de objetividad fuerte, en la que el papel de los sujetos quede minimizado o eliminado). Analizaremos este punto con algo más de detalle en el capítulo dedicado a las conclusiones.

[33] Por supuesto, los problemas epistemológicos no son exclusivos del ámbito matemático pero en el caso de los objetos empíricos tenemos, al menos, premisas firmes sobre las que partir. En el caso de los colores por ejemplo, por tomar como ejemplo a una propiedad que cumple con claridad los requisitos de R-D, podemos suponer que existe una relación causal entre los eventos físicos o químicos que provocan los colores y la sensación que producen en la mente de los sujetos. Este no es, claro está, el final de la historia ya que, en principio, se deja a un lado los aspectos fenomenológicos de los colores y no se dan detalles de la naturaleza de esa relación (causal o no) entre eventos físicos y las sensaciones. Pero lo que parece cierto es que en estos casos contamos con una idea general acerca de cómo se genera el conocimiento,

Es cierto que la fiabilidad de nuestras creencias matemáticas está garantizada por la ecuación básica (al establecer que los enunciados matemáticos son verdaderos si y sólo si son justificados por la mejor opinión de los sujetos), pero ésta es sólo una cara del dilema, un primer (pero esencial) paso hacia una solución convincente. Es necesario despejar las dudas acerca del alcance de esta respuesta. Es más que probable que no satisfaga a los platonistas tradicionales, no sólo porque implica la aceptación de una noción de verdad dependiente de los sujetos, sino porque además deja fuera aspectos generalmente considerados esenciales del dilema: no ofrece una explicación de la *naturaleza* de la relación entre los sujetos y los objetos. Por lo tanto, antes siquiera de entrar a debatir la viabilidad de la aplicación de los conceptos R-D a las matemáticas y su capacidad para ofrecer una respuesta al dilema epistemológico, habría que despejar las dudas de los platonistas tradicionales; defender que no es necesario ir *más allá* a la hora de explicar nuestro conocimiento de las entidades abstractas en general y matemáticas en particular.

Tradicionalmente se considera que, para salvaguardar la objetividad del conocimiento, es necesario asegurar que, por un lado, los objetos de los que hablamos existen y son completamente independientes de nosotros y, por otro lado, que los criterios por los que evaluamos los enunciados acerca de dichos objetos (por los que establecemos sus valores de verdad) son también independientes de nosotros, en tanto se generan en una relación (única y preestablecida) entre los sujetos y los objetos (o entre las palabras y sus referentes).

En las conclusiones intentaremos argumentar en contra de esta manera de entender la relación con el mundo, con lo que obviamente estaríamos argumentando en contra de las teorías epistémicas con una carga metafísica importante, contra las teorías de la referencia que no dejan espacio a la indeterminación y a las teorías de la verdad que presuponen una relación única y preestablecida entre el lenguaje y el mundo. Es decir, intentaremos argumentar con la visión tradicional del realismo en general y del platonismo en particular.

contamos con una facultad precisa (aunque no del todo clara) de acceso a esos eventos o propiedades externas: la percepción. Pero en el caso de los objetos matemáticos, ni siquiera contamos con esa idea general ni con esa facultad de acceso. Por eso el problema epistémico resulta mucho más intratable.

Además, a raíz de estas críticas, podemos extraer importantes conclusiones con respecto a la naturaleza del dilema epistémico. Podemos, en efecto, *liberarnos* de los requerimientos metafísicos que invadían al dilema y que por lo tanto condicionaban las posibles soluciones; *liberarnos* de la necesidad de ofrecer una explicación de la *naturaleza* del acceso a las entidades abstractas, de nuestra relación con ellas. A partir de esta "des-metafisicación" del problema del realismo y de los problemas epistémicos en el ámbito abstracto, respuestas como la ofrecida por la aplicación de los conceptos R-D pueden ser consideradas candidatas *serias* a solucionar el dilema, porque bajo esta nueva lectura, no es necesario ir más allá de la explicación de la fiabilidad de nuestras creencias para explicar el conocimiento. Las reflexiones respecto a la viabilidad del realismo metafísico y la carga metafísica que arrastra, nos conducirán en última instancia a afirmar que, en el ámbito matemático, el problema epistémico, tal y como fue expresado por Benacerraf y por Field, puede ser interpretado como un problema acerca de la objetividad de nuestro conocimiento matemático. La cuestión esencial pasa a ser, por lo tanto, la objetividad de los criterios por los que establecemos los valores de verdad de los enunciados matemáticos.

7

CONCLUSIÓN

"The world is full of a number of things"
David Wiggins

7.1 Introducción

En este capítulo final, no intentaré resumir todo lo dicho hasta el momento. Lo que intentaré hacer es enunciar una vez más las conclusiones que considero más importantes de mi labor de investigación y esbozar la que es, en mi opinión, la solución más prometedora a las cuestiones analizadas. Sobre decir que, debido a la complejidad de los problemas discutidos, no es mi intención ofrecer una propuesta *final*, una salida satisfactoria a los problemas del realismo en matemáticas o en cualquier otro ámbito. Aún así, creo que hay una serie de conclusiones importantes que merece la pena destacar y creo que tenerlas en cuenta es esencial para desarrollar una propuesta atractiva respecto al realismo.

Muy brevemente, las ideas que he defendido durante el trabajo pueden ser divididas en tesis negativas y positivas. En el lado negativo, mi afirmación principal ha sido que no sólo el dilema epistemológico es un problema real y apremiante para los realistas en las matemáticas, sino que, además, para lograr resolverlo es necesario revisar algunas de las concepciones tradicionales con las que trabajan los platonistas, en especial, la manera tradicional del realismo de entender y explicar tanto la verdad como el papel del sujeto en el conocimiento. Obviamente, modificar nuestros puntos de vista acerca de estas cuestiones traerá consigo un cambio radical en nuestra manera de entender el realismo en general (y no sólo en las matemáticas) y, por lo tanto, un cambio radical en nuestra manera de entender la realidad misma y nuestro lugar en ella en tanto sujetos.

Ninguna de las soluciones que los platonistas han propuesto tradicionalmente parece ser de mucha ayuda para solucionar el dilema epistemológico. En este trabajo hemos discutido, de una manera sistemática, tres de estas opciones. En primer lugar, hemos afirmado que la noción de intuición matemática, en sus diferentes formulaciones, no pasa aún de ser una mera metáfora y, lo que es probablemente peor para los platonistas, cada vez que un filósofo ha intentado darle un mayor contenido (como lo han hecho Sosa y Parsons), la noción se muestra incapaz de explicar nuestro acceso a los objetos abstractos. Por otro lado, tampoco el naturalismo ofrece una solución al dilema epistemológico satisfactoria. Puede que sea un punto de vista convincente en general; de hecho, ha dado lugar al que considero el mejor argumento a favor de la existencia de los objetos matemáticos: la tesis de la indispensabilidad (desarrollada por Quine y Putnam). Pero incluso admitiendo esto, ningún filósofo (naturalista o no) ha conseguido dar una *explicación* de nuestro conocimiento de los objetos matemáticos.

Penelope Maddy, por ejemplo, ha intentado desarrollar una original explicación, negando el carácter abstracto de los objetos matemáticos (al menos de algunos). Por desgracia, su propuesta deja muchas (demasiadas) cuestiones sin resolver. Su atractivo radica en el hecho de que centra su atención, no en una facultad especial de conocimiento, sino en la naturaleza misma de los objetos a conocer. Puede que el problema no radique en nuestras capacidades cognitivas, puede que el problema se encuentre en la manera en la que tradicionalmente pensamos acerca de los objetos matemáticos (como abstractos). Maddy no es la primera, por supuesto, en considerar esta posibilidad; Quine, por ejemplo, también niega que los objetos matemáticos deban ser tratados de una manera diferente y sostiene que deben ser equiparados a las entidades teoréticas, tales como los electrones (y por consiguiente, que no necesitamos ninguna facultad cognitiva misteriosa para comprenderlos).

Pero la seriedad con la que Maddy intenta asumir este punto de vista y desarrollar una explicación satisfactoria de nuestro conocimiento de los objetos matemáticos (concretos), así como los numerosos problemas con los que se encuentra, hicieron que me diera cuenta no sólo de lo importante que es revisar nuestras presuposiciones acerca de la naturaleza de los objetos y de la realidad, sino también el papel que dichas presuposiciones juegan en nuestra visión global del realismo. A través de la lectura de sus tesis realmente comprendí ciertas observaciones realizadas en las últimas décadas por Hilary Putnam; como una determinada manera de mirar el mundo y de explicar nuestro lugar en él contaminan toda nuestra teoría acerca del mismo, así como la importancia de "desenmascarar" esas presuposiciones tradicionales (metafísicas), ya que ellas son las responsables de muchos de los problemas más profundos acerca del realismo, el conocimiento y la verdad.

Por último, en las últimas décadas hemos asistido al resurgir de algunas de las ideas defendidas por Frege por medio de su logicismo. En cierto sentido, los neo-fregeanos (como ellos mismos se denominan) se enfrentan precisamente a un problema opuesto al que tienen que solucionar los defensores de la tesis de la indipensabilidad. Su propuesta, asumiendo que fuera capaz de salvar diversos obstáculos, podría representar una explicación del acceso a los objetos abstractos pero a un precio: dependen demasiado de la noción de analiticidad y esto aparentemente deja a un lado cualquier compromiso ontológico con dichos objetos. Su teoría no se compromete con una ontología de los objetos abstractos y, lo que es más, la introducción de este compromiso ontológico acarrea serios problemas para sus principios básicos (para los principios de abstracción y, especialmente, para el llamado "principio de Hume").

Sin embargo, el neo-fregeanismo trae a colación la que será una de las principales ideas de esta conclusión: el hecho de que no es posible separar los aspectos epistemológicos de los semánticos. De acuerdo con los defensores de esta postura, el problema no consiste realmente en explicar cómo podemos adquirir conocimiento de los objetos matemáticos, sino en explicar cómo podemos tan siquiera referirnos a ellos en primera instancia. Por lo tanto, para poder solucionar el problema epistemológico, tendremos que desarrollar primero una teoría adecuada de la referencia y de la verdad. O más bien, únicamente a través del análisis de la referencia y de la verdad seremos capaces de ofrecer una respuesta al dilema epistémico. Porque es principalmente nuestra concepción tradicional de ellos la que hace que el problema del *acceso* aparente *intractable.*

Esto es, muy brevemente, lo que he intentado llevar a cabo en la segunda parte del trabajo; intentar encontrar, por medio del análisis de distintas propuestas, una noción de verdad adecuada y con ella, una formulación satisfactoria del realismo, que nos permita explicar nuestra relación con la realidad (y en concreto con la realidad matemática) sin tener que adoptar el tipo de realismo tradicional (o platonismo en matemáticas) que hace que el dilema epistemológico resulte tan difícil de solucionar (o siquiera de entender).

El problema más apremiante para los que, de alguna manera, rechazan las premisas metafísicas del platonismo tradicional es la pérdida de la uniformidad semántica con el ámbito empírico. En otras palabras, el problema es que si rechazamos la existencia o la independencia de los objetos matemáticos, nos encontraremos con serias dificultades para desarrollar una noción adecuada de la verdad (que no la reduzca a verdad ficticia o a asertabilidad justificada). Dummett, por ejemplo, presenta una propuesta en la que la verdad queda reducida a prueba en el caso matemático y a verificación en el caso empírico. De esta manera, consigue mantener la uniformidad semántica, pero a un precio muy alto. Por un lado, a raíz de sus consideraciones acerca del significado, se ve obligado (o al menos eso piensa él) a abandonar la lógica clásica y a adoptar en su lugar una lógica intuicionista. Por otro lado, reducir la verdad a verificación en el caso empírico no resulta muy "atractivo" (entre otras cosas porque la verdad se considera estable, y no es posible verificar de manera conclusiva un enunciado empírico). Puede resultar intuitivo pensar en las entidades matemáticas como construcciones mentales pero ciertamente resulta más problemático pensar que los objetos que pueblan el mundo empírico (como las mesas o los árboles) son meras construcciones[1].

[1] Podemos admitir, y de hecho debemos hacerlo, que la manera en que entendamos estos objetos depende del contexto o del esquema conceptual en el que estemos inmersos, pero de ahí a afirmar que esos objetos

Sin embargo, hay varios aspectos de la propuesta de Dummett que considero conveniente mantener. Entre ellos, está el hecho de que Dummett centra su análisis en los enunciados (del discurso en cuestión) y no en la existencia de las entidades o en su naturaleza. Creo que éste es un punto de partida más adecuado para la discusión, aunque sólo sea porque (tal y como afirma el dilema epistémico) no podemos explicar el acceso a las entidades matemáticas[2]. Por otro lado, creo que es conveniente que tomemos en consideración el papel de los sujetos en las atribuciones de valores de verdad, tal y como Dummett nos insta a hacer. El problema surge cuando intentamos hacer esto de la manera en que lo hace él, reduciendo la verdad a verificación, ya que, en última instancia, esto nos conduciría a abandonar el realismo y a adoptar una postura de corte idealista.

Hilary Putnam ha intentado, a lo largo de los años, evitar el compromiso de Dummett con el idealismo a través del desarrollo de una "vía intermedia" o realismo moderado. Ha afirmado insistentemente que debemos abandonar todas las fantasías metafísicas que, según él, contaminan el pensamiento filosófico (en especial en lo referente al realismo), especialmente toda una serie de dicotomías del tipo: realidad/apariencia, verdad/asertabilidad, hecho/valor, etc. A finales de los años setenta desarrolló tres poderosos argumentos en contra de lo que denominó "realismo metafísico": el argumento de los cerebros en cubetas, el argumento de la relatividad conceptual y el argumento derivado de la teoría de los modelos. Los tres han sido ampliamente discutidos en estos años. Putnam además desarrolló una noción de verdad como "aceptabilidad racional bajo circunstancias epistémicas ideales (o suficientemente buenas)" a la que más tarde (acertadamente) ha renunciado. En los últimos años ha defendido un realismo moderado, en el que las tesis de la relatividad conceptual pueden ser fácilmente acomodadas, pero en el que la verdad ha dejado de ser explicada en términos verificacionistas. Unos de los aspectos de esta nueva propuesta que destaco en este trabajo es la posibilidad de admitir el pluralismo en relación a la verdad. La negación de que la verdad deba ser, como los realistas metafísicos proponen, *una única* propiedad que pueda ser aplicada en todos los discursos.

---

son construcciones hay una gran diferencia (ver el capítulo dedicado a Putnam para más detalles acerca de esta diferencia).

[2] No, al menos, si las consideramos como hacen los platonistas tradicionales (como abstractas e independientes)

Crispin Wright propone una sugestiva interpretación de la posibilidad del pluralismo en relación a la verdad, de acuerdo con la cual, la noción de verdad sólo tiene que cumplir con una serie de principios muy generales. Estos principios, o lugares comunes, no tienen peso metafísico, lo que hace que la verdad deje de ser una propiedad exclusiva del realismo. Una vez que un predicado ha cumplido con dichos principios, y por lo tanto pasa a ser un predicado de verdad, podemos encontrar diferentes *realizaciones* para cada discurso. Además, hay que tener en cuenta que más de un predicado puede cumplir estos requisitos mínimos. En definitiva, podemos tener múltiples nociones de verdad válidas (siendo el único requisito en común para todas ellas que satisfagan esos principios básicos).

A partir de esto, ya que esta noción de verdad *mínima* es metafísicamente neutra, Wright afirma que para que una noción de verdad sea realista tendrá además que cumplir una serie de requisitos adicionales. Entre ellos, Wright destaca la prescripción cognitva, el requisito de la mejor explicación y el contraste de Eutifrón (o los conceptos dependientes de la respuesta).

Hasta aquí las tesis negativas; en el lado positivo, podemos dividir, por motivos de claridad, las principales tesis que defiendo en tres áreas principales, aunque, como quedará claro, todas ellas están íntimamente relacionadas. Resumiré lo que ha sido dicho hasta el momento durante el trabajo y elaboraré un poco más ciertos aspectos en esta conclusión; pero muy brevemente, estas tres áreas son:

1. La urgencia de modificar algunos aspectos esenciales de nuestra visión global acerca del realismo en general y del platonismo en particular. Especialmente, he defendido que es importante tomar en consideración, tanto en las matemáticas como en el caso empírico, el papel del sujeto como un personaje activo en el proceso del conocimiento y la verdad

2. Los problemas del conocimiento en matemáticas deben ser vistos como un problema de objetividad. De esta manera, en lugar de buscar una explicación del nexo entre nosotros y los objetos a través de algún tipo de facultad de conocimiento (más o menos misteriosa), deberíamos intentar desarrollar una explicación de la objetividad

matemática. Con el objetivo de clarificar la noción de objetividad, diferenciaré (siguiendo a Hartry Field) entre objetividad lógica y matemática. Además, argumentaré que la existencia de los objetos matemáticos no es esencial para obtener objetividad lógica (ni para explicar la aplicabilidad de las matemáticas). Es la objetividad la que es indispensable para la ciencia, no una ontología determinada.

3. Incluso si aceptamos que la objetividad lógica puede ser suficiente para justificar la aplicabilidad de las matemáticas, aún tenemos que resolver el problema filosófico de explicar la fiabilidad de nuestra elección de los axiomas básicos (a partir de los cuales se deriva el resto). Aún tenemos que aportar alguna respuesta al dilema epistemológico, pero no tenemos que hacerlo en términos de una relación (única) entre el sujeto y los objetos. Para solucionar esto, propondré la adopción de una interpretación de la noción de verdad por medio de los conceptos dependientes de la respuesta (“response-dependence”) ya que, aunque pienso que aún quedan importantes obstáculos por solucionar, ofrece la mejor explicación de la fiabilidad de las creencias de los matemáticos y es coherente con los requerimientos que hemos ido estableciendo para la noción de verdad.

7.2. La Cuestión del Realismo

A lo largo del trabajo he defendido la necesidad de desarrollar un nuevo tipo de realismo, libre de la caracterización tradicional, esto es, libre de todas las implicaciones metafísicas de la visión tradicional. En este nuevo tipo de realismo moderado, el sujeto deja de ser pasivo y pasa a jugar un papel activo y creativo en los procesos de conocimiento y en la determinación de la verdad que, de esta forma, tendrá que incluir algún componente epistémico. He argumentado, a raíz de los argumentos de Putnam y de Wright, que la defensa de este tipo de noción de verdad “contaminada epistemológicamente” no conduce necesariamente al anti-realismo, tal y como muchos filósofos afirman. Es posible, de acuerdo con este punto de vista, defender la dependencia de la mente de la verdad sin tener que defender la dependencia de la mente de las entidades.

De acuerdo con la manera tradicional de entender el realismo y nuestra relación con el mundo, la verdad es una noción altamente metafísica, que incluye la creencia en una noción de correspondencia fuerte (no trivial) y la creencia en la existencia de una realidad externa que es única y está predeterminada. A partir de esto, se sigue que debe haber una relación entre nosotros y la realidad única, completa y estable (por medio de la cual la verdad es determinada). Es este fuerte dualismo metafísico, entre el sujeto y el objeto, el que genera muchos de los problemas del realismo tradicional y del platonismo (siendo él mismo, en mi opinión, una manifestación del realismo metafísico en matemáticas). Es este dualismo, claramente manifestado en la noción de verdad, el que hace, en mi opinión, que el dilema epistémico sea tan difícil de solucionar.

Uno de los sentimientos más comunes cuando nos enfrentamos al dilema epistémico en matemáticas, igual que cuando intentamos responder a preguntas del tipo ¿existen los números?, es cierta sensación de impaciencia (al menos, yo lo experimento). El dilema en sí mismo no podría ser expuesto de una manera más clara y tenemos a nuestra disposición una cantidad inmensa de literatura secundaría acerca de él y aún así, no resulta sencillo comprender su significado real; no es fácil saber qué es lo que se necesita para poder solucionarlo satisfactoriamente (necesitamos una explicación del conocimiento de los objetos matemáticos, pero ¿qué tipo de explicación?, ¿necesitamos demostrar primero que los números y el resto de los objetos matemáticos existen?, ¿tenemos que entender su naturaleza primero?). Esta desagradable sensación de impaciencia es generada, en mi opinión, por la visión metafísica de la realidad y de nuestra relación con ella (y por lo tanto, de la verdad).

En otras palabras, si interpretamos el dilema epistemológico desde el punto de vista de la noción tradicional de la verdad (y lo intentamos solucionar desde él) lo que el dilema demanda no es una solución epistémica, sino metafísica. Lo que el dilema requiere, desde este punto de vista, es una explicación de la *naturaleza* de la relación sujeto-objeto, una explicación de la *naturaleza* de los objetos abstractos (en contraste con los concretos) y una explicación de la *naturaleza* de los propios sujetos (entendidos como independientes y de alguna manera alejados de la realidad).

Es precisamente este tipo de dualidad, que, tal y como Putnam ha afirmado insistentemente, contamina el pensamiento occidental desde el siglo XVII, lo que convierte el conocimiento de los objetos abstractos en algo misterioso y oscuro. Esta dualidad está en la base de la noción tradicional de la verdad. La división del mundo entre sujeto-objeto, concreto-abstracto (mente-cuerpo, etc.) es lo que hace que nuestro conocimiento de los objetos matemáticos y la noción de verdad sean algo prácticamente imposible de explicar. El problema, creo, no está tanto en la naturaleza de los objetos abstractos o en la naturaleza de nuestra relación con ellos, sino en nuestra interpretación de los mismos como completamente independientes, diferentes y externos al sujeto. Por ello, la solución no debe darse en términos de algún nuevo tipo de facultad de conocimiento (más o menos misteriosa), sino a través de una nueva noción de verdad, que reconozca el papel de los sujetos en su determinación.

Por lo tanto, a partir de nuestros argumentos, debería haber quedado claro, o eso espero, que para solucionar el problema epistemológico debemos introducir algunas modificaciones en nuestra teoría semántica, no sólo en nuestra noción de verdad, sino también en nuestra teoría de la referencia. Esto no debería ser una sorpresa ya que el dilema epistémico, como vimos con los neo-fregeanos, puede ser interpretado como un problema de la referencia. Durante la disertación hemos visto que el realismo tradicional (o el platonismo tradicional) tiene problemas serios para acomodar la indeterminación de la referencia. Lo vimos cuando discutimos el argumento de Putnam basado en la teoría de los modelos, pero la cuestión estaba ya presente (aunque no explícitamente) en el dilema de Benacerraf[3]. No voy a entrar a discutir aquí en detalle los problemas de la referencia (matemática), esto nos alejaría mucho de los temas que estamos tratando, pero creo que es importante tener presente que los aspectos semánticos no son fácilmente diferenciables de los epistémicos.

Al revisar la bibliografía disponible acerca de los problemas del conocimiento y la verdad en matemáticas, uno de los aspectos que más me sorprenden es el hecho de que pocos autores interpreten estos problemas como una manifestación de dificultades globales acerca del conocimiento y la verdad y que, por lo tanto, se trata de problemas que no se originan en las particularidades de la práctica matemática y sus objetos. Puede

[3] El problema de la indeterminación de la referencia en las matemáticas fue claramente planteado en otro artículo de Benacerraf, "What Numbers Could Not Be" (1965)

que, efectivamente, cada área de conocimiento posea características particulares que, por lo tanto, afecten a la naturaleza de los problemas que en ellas se plantean (características que, como en el caso matemático, los hacen aún más difíciles de solucionar) pero *en esencia*, los problemas se originan en nuestra concepción global de la realidad. Un claro ejemplo de esto es el acercamiento tradicional a los problemas del conocimiento en matemáticas, donde la mayor parte de los autores los tratan como problemas exclusivos de este área y que, por lo tanto, requieren una solución especial, exclusiva para el caso matemático[4]. Esta caracterización puede parecer algo burda, pero creo que captura la concepción general que subyace a la mayor parte de las aproximaciones tradicionales a los problemas de las matemáticas: la idea de que los dominios de las matemáticas y de lo empírico son completamente (o al menos substancialmente) diferentes.

Yo no creo que estas dos áreas de conocimiento sean esencialmente diferentes, con esto no quiero decir, por supuesto, que no hallan importantes diferencias entre ellas, pero creo que han sido exageradas. Lo pudimos observar cuando analizamos la supuesta distinción radical entre los objetos matemáticos (abstractos) y los físicos (concretos), que nos llevó a concluir que, de hecho, no se trata de una distinción ni mucho menos clara. También lo pudimos observar, en mi opinión, por medio del análisis de las distintas críticas semánticas al realismo tradicional, donde la mayor parte de los problemas de un área eran aplicables a la otra. De hecho, a estas alturas debería estar claro, espero, que el platonismo (al menos bajo las formas que hemos visto en este trabajo) puede ser visto como realismo metafísico (en términos de Putnam) aplicado al área de las matemáticas, por lo que comete los mismos errores que el realismo metafísico; concretamente, ambos consideran al sujeto como capaz, de alguna manera, de distanciarse de la realidad y conocerla “desde fuera”. En otras palabras, el platonismo defiende lo que Putnam denomina “el punto de vista del ojo de Dios” en relación a los números y a los objetos matemáticos en general. Ésta, afirmaré, es una de las razones por las que el dilema epistémico resulta tan difícil de solucionar para los platonistas. Una razón que, además, está en la base de esa sensación de *impaciencia* de la que hablábamos.

[4] Cuando la conexión entre los ámbitos matemáticos y empíricos se lleva a cabo el objetivo es, generalmente, o bien explicar la aplicación de las matemáticas o bien para desarrollar algún tipo de facultad cognitiva matemática, análoga a la percepción.

En el caso matemático, sin embargo, puede parecer algo más complicado rechazar este punto de vista, principalmente, creo, por la tan altamente estimada objetividad del conocimiento matemático. De acuerdo con la concepción tradicional, las matemáticas representan el tipo de conocimiento más objetivo que poseemos y de aquí parece poder inferirse, no sólo que los objetos matemáticos *tienen* que existir, sino que la distancia entre el sujeto y el objeto, y la independencia de los objetos de la mente, es más obvia, si cabe, que en el caso empírico.

En realidad, los problemas de la fiabilidad del conocimiento (como el dilema de Benacerraf-Field) aparecen en todo ámbito de conocimiento objetivo en el que pensemos que el conocimiento es a priori, independiente del contenido de nuestra experiencia acerca del mundo. No hemos desarrollado un modelo adecuado para explicar la objetividad del conocimiento no-empírico. Es decir, el problema de la fiabilidad de las creencias matemáticas (o morales, como en el dilema de Mackie) no se genera por las características ontológicas de las entidades de las que se habla. La base del problema debemos buscarla, más bien, en la aparente objetividad del conocimiento matemático (o moral). Lo que necesitamos es un modelo para explicar la objetividad en estas áreas del conocimiento (no empíricas).

Resulta plausible afirmar que nuestro lenguaje y nuestra mente tienen una influencia tan profunda en la realidad empírica que ya no es posible suponer que sea totalmente independiente de nosotros y de nuestro conocimiento. Pienso que los argumentos de Putnam (entre otros) contra el “punto de vista desde ningún sitio” o el “punto de vista del ojo de Dios” son básicamente correctos y que tenemos, por lo tanto, que reformular nuestra concepción tradicional del mundo y de nosotros mismos como sujetos capaces de conocimiento. También estoy de acuerdo en que, como he dicho, esto no debería conducirnos al anti-realismo (o no tendría porqué hacerlo). Pero el que los problemas acerca del conocimiento y de la verdad tengan un origen similar en ambos ámbitos (matemático y empírico), no implica (necesariamente) que la solución tenga que ser la misma para los dos. La pregunta, por lo tanto, que me gustaría considerar ahora es, ¿podemos adoptar estos argumentos que hemos mencionado (aplicados al ámbito empírico) en el ámbito matemático?, ¿tenemos que hacerlo? O quizás más importante aún, ¿nos ayudaría esto a resolver el dilema epistémico manteniendo a su vez la objetividad de la verdad matemática?

7.3. El Problema de la Objetividad

Una de las tesis principales que he venido defendiendo durante este trabajo es la necesidad de desarrollar un tipo de realismo sin las suposiciones metafísicas del realismo tradicional. Estas suposiciones, siguiendo a Putnam, incluyen la creencia en la existencia de un universo fijo de objetos de conforman la realidad y la existencia de una relación única de correspondencia entre nuestros términos y dichos objetos (que determina la verdad o la falsedad de nuestros enunciados).

En el ámbito de las matemáticas, parece que la única manera de ser realista en relación a la existencia de sus objetos, por ejemplo, de los conjuntos, sin pasar a ser una metafísica, es adoptando algún tipo de ontología naturalista. Sin embargo, el naturalismo, bajo mi interpretación, no asegura *necesariamente* la existencia de los objetos matemáticos (tampoco la niega, de hecho, no creo que tenga mucho que decir sobre ella). Lo que sí garantiza es, por el contrario, el tipo de objetividad del conocimiento matemático requerida por la ciencia.

Sin duda, hay muchos aspectos que merecen la pena ser conservados de las teorías naturalistas, especialmente de la tesis de la indispensabilidad de Quine y Putnam, aunque no sean capaces de ofrecer una respuesta satisfactoria al problema epistemológico. La tesis de la indispensabilidad se basa, en última instancia, en el holismo de Quine, en la creencia de que las matemáticas no deben ser consideradas por sí mismas, sino como parte del *corpus* total de la ciencia. Esta es otra manera (mucho mejor) de defender la importancia de analizar los problemas filosóficos de las matemáticas como parte del mismo problema en otras áreas[5]. Además, de acuerdo con Quine, los objetos matemáticos, como los conjuntos, son muy similares a los objetos teoréticos, como los electrones: necesitamos postular ambos para hacer ciencia (como lo hacemos actualmente).

[5] Cuando digo “otras áreas” estoy generalmente pensando en el ámbito empírico y específicamente en lo perteneciente al dominio de la ciencia. Pero se trata únicamente de una restricción metodológica, de hecho, es bastante común establecer analogías entre el caso matemático y el ético. Existe, por ejemplo, un argumento similar al dilema de Benacerraf-Field en relación a las verdades morales: el denominado “Mackie’s queerness argument” (1977). De acuerdo con una versión del mismo, el realismo moral se enfrenta a la dificultad de explicar nuestra fiabilidad en relación a las verdades morales, ya que si existiesen los valores morales objetivos, serían entidades peculiares, fuera de nuestro alcance.

Pero si fuese posible encontrar una manera de garantizar la objetividad matemática sin postular la necesaria existencia de los objetos abstractos o, al menos, sin tener que comprometernos con una ontología precisa acerca de ellos (una ontología que incluya una descripción de su naturaleza y la defensa de una relación única y fija entre los sujetos y los objetos). Esto es, si pudiéramos desarrollar una noción de verdad para las matemáticas, no como una descripción de un dominio (definido) de objetos abstractos, realizada a través de algún tipo de relación (causal o no) entre nosotros y los objetos, sino más bien como el resultado de los mejores juicios de ciertos sujetos bajo circunstancias favorables, entonces, la existencia de los objetos matemáticos, en tanto que abstractos, no sería una condición necesaria para la aplicabilidad de las matemáticas a la ciencia (ni para la defensa de cierto realismo en matemáticas). Una vez más, la objetividad matemática es la que es indispensable para la ciencia, no la existencia de los objetos matemáticos[6]. Putnam, quien desarrolló el holismo de Quine hasta convertirlo en lo que hoy conocemos como la tesis de la indispensabilidad, y quien solía considerarlo como un argumento claro a favor de la existencia de los objetos matemáticos, en sus "Hermes Lectures" afirma:

> Everything about the success of mathematics, and the deep dependence of much contemporary science, including physics, but not only physics, on mathematics, supports taking mathematical theorems as objective truths; but nothing supports taking mathematical theorems as descriptions of a special realm of "abstract entities", and nothing is gained, in philosophy of mathematics or elsewhere, by so doing (2003)

[6] En cierto sentido, hay algo "raro" en la tesis de la indispensabilidad (interpretada como un argumento en favor de la existencia de los objetos matemáticos como objetos abstractos). Si asumimos la caracterización tradicional de las matemáticas, de acuerdo con la cual el conocimiento matemático es a priori y los objetos matemáticos son abstractos (y, lo que puede ser aún peor, si existen, lo hacen necesariamente), ¿por qué querríamos investigar sus aplicaciones (en el mundo empírico) para buscar confirmación de la existencia de los objetos matemáticos?, ¿por qué buscar argumentos a favor de la existencia de los objetos abstractos a través de sus aplicaciones para los concretos? Esta crítica, o este comentario, por supuesto no es aplicable a Quine, quien defendía que los objetos matemáticos son equiparables a los objetos de la ciencia y para quien el conocimiento matemático no podía ser a priori. Pero sí afecta a todos aquellos defensores del platonismo tradicional que pretenden justificar su defensa de la existencia de los objetos matemáticos por medio de la tesis de la indispensabilidad. Para más detalles, ver Shapiro (2000) y, especialmente, Tennant (1997: 309), quien argumenta que las afirmaciones acerca del papel de las matemáticas en la cienca "are not strictly relevant to the philosophical problem of the existente of numbers".

Si la existencia de un dominio especial de objetos matemáticos no es necesaria para la objetividad matemática entonces, su postulación no añade nada a la explicación de la aplicabilidad de las matemáticas o a la explicación del conocimiento matemático. A pesar de esto, si mantenemos la noción tradicional de la verdad, la existencia de los objetos matemáticos será un requisito necesario ya que, de acuerdo con esta noción, un enunciado declarativo es verdadero si (y sólo si) *describe* correctamente una realidad determinada. Así, "2+2=4" es verdadero si (y sólo si) este enunciado está describiendo correctamente una relación particular (de suma) entre objetos (2 y 4). De acuerdo con esta noción tradicional de verdad entonces, para que un enunciado sea verdadero, los objetos de los que habla (independientemente de que sean abstractos o no) *tienen* que existir. Ya hemos dicho que en el caso matemático este requerimiento existencial es muy problemático, por varias razones que hemos ido viendo a lo largo del trabajo. Muy brevemente[7]:

1. Trae a colación el problema del conocimiento de los objetos matemáticos o, más importante quizás, el problema de cómo podemos referirnos a ellos. Esto resulta especialmente acuciante en el caso matemático porque:
2. los objetos matemáticos, siendo abstractos, no son fáciles de definir. No existe una manera adecuada de definir los objetos abstractos. En otras palabras:
3. los objetos matemáticos no tienen relaciones de identidad claras. Resulta sencillo aplicar la relatividad conceptual al caso matemático, donde prácticamente todo acerca de las relaciones de identidad es convencional (si debemos o no, por ejemplo, identificar los números con los conjuntos y en tal caso, con qué conjuntos concretamente –este

[7] Aparte de las tres razones que mencionamos, existe otra, que no hemos considerado en este trabajo, pero que merece ser al menos mencionada. De acuerdo con ella, hablar de la existencia matemática puede ser interpretado como hablar de posibilidades. Cuando hablamos de la existencia matemática no estamos refiriéndonos a la existencia actual sino a la existencia posible (posibilidad matemática). Se trata de una línea argumental compleja pero muy fructífera, que ha dado pie a diversas propuestas. Véase en concreto Putnam (1967b) (artículo clásico en la interpretación modal de las matemáticas), Hellman (1989) y Friedman (2005).

es el problema expuesto por Benacerraf en su artículo “What Numbers Could not Be”).

> So much about the identity relations between different categories of mathematical objects is conventional, that the picture of ourselves as describing a bunch of objects that are there ‘anyway’, is in trouble from the start (Putnam 2003)

William W. Tait, en un artículo titulado “Beyond the Axioms: the Question of Objectivity in Mathematics” (2001) establece muy bien la distinción entre los dos tipos de realismo en matemáticas que yo he estado intentando perfilar aquí. La distinción entre un tipo de realismo que defiende la objetividad de la verdad matemática, pero que evita implicaciones metafísicas (innecesarias) acerca de la existencia y la naturaleza de los objetos matemáticos, y un tipo de realismo que toma como punto de partida justamente este conjunto de suposiciones metafísicas. Tait denomina a estas dos posiciones “realism” y “super-realism” respectivamente, identificando por lo tanto la definición tradicional del platonismo con el super-realismo.

Realismo, tal y como él lo define, es la posición que defendemos cuando

> [O]ne believes mathematics is meaningful and has, as one inevitably must, finally become convinced that mathematical propositions cannot be reduced to propositions about something else or about nothing at all, then one is a realist

Por otro lado, super-realismo,

> [I]mplies the alienation of truth in mathematics from what we actually do: mathematics become *speculative* in the sense that even the most elementary computations, deductions and propositions must answer to a reality which we, at

> best, can only partially comprehend and about which we could be wrong. (2001: 4)[8]

Tait, a partir de estas definiciones, argumenta en contra de la costumbre generalizada de identificar ambos tipos de realismo bajo la etiqueta de “platonismo” y defiende, igual que he estado haciendo yo, la necesidad de diferenciarlos y las ventajas del realismo sobre el super-realismo. El realismo, tal y como Tait lo formula, no entraña ninguna suposición metafísica substancial, no nos compromete con ninguna descripción en particular de la realidad matemática ni con ninguna teoría concreta acerca de la verdad o la referencia. Las limitaciones para esas teorías vienen establecidas por el super-realismo. Para evitar caer en el “domino de la especulación” del super-realismo (o en las fantasías metafísicas del platonismo tradicional), la verdad no puede ser concebida de manera que presuponga que somos capaces de confrontar cada enunciado matemático con una realidad matemática determinada, que hay un nexo (fijo) entre nosotros y los objetos matemáticos (abstractos) a través del cual determinamos tanto la verdad como la referencia. Y esto se debe a que, simplemente, no tenemos acceso (directo) a esta realidad, no podemos tener un contacto casual con ella y tampoco tenemos ninguna capacidad cognitiva especial que nos permita establecer ese contacto de manera no-causal. Por lo tanto, asumir que existe ese nexo fijo, y asumir que la realidad matemática posee estas o aquellas propiedades, sería adentrarnos en los dominios de la especulación metafísica.

Dicho esto, para nuestros intereses aquí, probablemente la mayor ventaja es que, para el super-realismo, o el platonismo tradicional, el dilema epistemológico, como acabamos de ver, parece no tener respuesta posible; no al menos si dejamos a un lado, como creo que debemos hacer, cualquier respuesta en clave metafísica, esto es, cualquier respuesta “especulativa” o “mágica” (en términos de una misteriosa facultad cognitiva o una misteriosa relación de referencia). Sin embargo, para el realista (o realista moderado, como yo he venido denominándolo), la respuesta al dilema podría ser mucho más sencilla (o, al menos, menos esotérica). Esto se debe a que, en el caso del realismo moderado, el problema del conocimiento puede ser interpretado como un

[8] Tener en cuenta que, bajo esta definición, autores como Hilbert pasan a ser considerados realistas. Hilbert acepta las tesis del realismo (tal y como lo define Tait), pero las acompaña con una defensa del formalismo, esto es, las “libera” de toda referencia a entidades matemáticas.

problema de objetividad. Alguien podría objetar, “de acuerdo, pero el problema de explicar y justificar el carácter objetivo de las matemáticas no es ni mucho menos sencillo, así que ¿qué es lo que hemos ganado realmente?” Estoy de acuerdo, el problema de la objetividad no es sencillo, pero al menos no tendremos que lidiar con ninguna relación misteriosa (causal o no) entre nosotros o nuestros términos y los objetos.

Aún así, incluso si estamos de acuerdo en que es deseable dejar a un lado las implicaciones metafísicas del super-realismo o del platonismo tradicional, podría argumentarse que postular la existencia de los objetos matemáticos puede tener importantes ventajas ya que, se afirmaría, mientras hayamos garantizado (de alguna forma) la existencia y la independencia de los objetos matemáticos, la objetividad de nuestro criterio de corrección en matemáticas estará también garantizado. Así, de acuerdo con este razonamiento, si deseamos garantizar la objetividad de la respuesta a cuestiones como ¿cuál es el miembro más pequeño del conjunto {1, 2, 3, …}?, tendríamos que admitir primero la existencia de los objetos de los que estamos hablando (conjunto, 1, 2, 3…y también de la relación “más pequeño que”). Si no es así, el argumento continúa, sería como preguntar por el número de pelos de Superman a las 3 de la tarde el 17 de Diciembre de 1976.

Pero, tal y como yo veo las cosas, este argumento es erróneo. En mi opinión, hemos ofrecido evidencia suficiente de que las cosas no son tan sencillas. Putnam, como vimos, desarrolló un argumento muy poderoso en “Models and Reality”, demostrando que incluso si existe universo fijo de objetos matemáticos, la objetividad de la verdad matemática no está garantizada. Una manera breve y clara de exponer la idea que subyace a el argumento de Putnam es la ofrecida por Field, según la cual,

> [T]here are lots of properties and relations that the mathematical objects in this universe can stand in; and there isn’t a whole lot to determine which such properties and relations we should take our mathematical predicates to stand for, beyond that they make the mathematical sentences we accept true [...]
>
> [...] truth adds nothing as a further constraint: it is too easy to achieve. When mathematicians decided to accept the axiom of choice (assuming for the sake of argument that they hadn’t implicitly accepted it all along) they refined their pre-

> existing conception of set so that the axiom became true of it; if we were to give up the axiom of choice in favour of some alternative such as the axiom of determinacy, we would be revising our conception of set in such a way that the axiom of choice is false of it (1998a: 319-20)

Es posible argumentar que Putnam (y Field) está reduciendo la verdad a verdad en un modelo o, aún peor, la verdad a ser considerado verdadero. Pero, ¿hay algo relevante más acerca de la verdad, aparte del hecho de ser verdadero en un modelo? ¿Hay algo relevante para la verdad más allá de, tal y como Putnam lo formula, ser considerado verdadero por una teoría ideal (una teoría que cumpla con todas las constricciones teóricas y operacionales)? Frege, en un famoso pasaje, piensa que sí lo hay, pues afirma,

> [B]eing true is different from being taken to be true, whether by one or many or even everybody, and in no case is to be reduced to it. There is no contradiction in something being truth which everybody takes to be false (1893)

En mi opinión, sin embargo, el argumento de Putnam demuestra que esto no está tan claro. Parece efectivamente haber una contradicción en la idea de una teoría ideal falsa. La única manera de escapar a esta contradicción, según yo lo veo, sería postulando algún tipo de noción de verdad que sea capaz de especificar (por sí misma) cuando un modelo es el deseado (el estándar). Pero para lograr esto, la verdad tendría que ser una noción altamente metafísica.

Los realistas tradicionales utilizan una noción de verdad y de objetividad muy fuerte y por ello no consideran la posibilidad de entender los enunciados matemáticos de otra manera que no sea "at face value". Podríamos preguntar, por ejemplo, si el padre de Hamlet estaba muerto cuando tuvo su monólogo con la calavera, y parece obvio que existe una respuesta objetiva a esta pregunta, incluso si tanto Hamlet como su padre nunca existieron. En otras palabras, parece claro que la respuesta "sí, estaba ya muerto", puede ser considerada una verdad objetiva (ya que el criterio de corrección es objetivo: está claramente establecido en el libro).

Con esto, no intento defender que debamos adoptar ningún tipo de postura ficcionalista. El ficcionalismo (o el nominalismo) se enfrenta a muchos problemas, pero la razón principal por la que no lo considero una solución prometedora es, precisamente, la misma razón esgrimida para rechazar al platonismo tradicional (o realismo tradicional en general): su dependencia de suposiciones de carácter metafísico. El platonismo tradicional toma como punto de partida la existencia y la independencia de las entidades matemáticas, una explicación determinada (metafísica) de nuestra relación con ellas y, por lo tanto, de las atribuciones de valores de verdad. Los ficcionalistas toman como punto de partida la afirmación de que los objetos matemáticos no existen (que son ficciones) y que por lo tanto tenemos que rechazar que los enunciados matemáticos sean literalmente verdaderos (por el contrario, sólo pueden ser considerados verdaderos en un sentido ficticio)[9]. En mi opinión, este es un claro ejemplo de la influencia de esas fantasías metafísicas de las que habla Putnam, no creo que ninguna de estas dos propuestas, por esta misma razón, puedan ofrecer una explicación satisfactoria de la objetividad de las matemáticas (y con ello, del conocimiento matemático)[10]

El problema con el nominalismo, tal y como yo lo veo, es que no renuncia a las suposiciones metafísicas que contaminan el platonismo tradicional; simplemente las sustituyen por las opuestas. En definitiva, sigue dependiendo de premisas con fuerte componente metafísico y este es el motivo por el que, en mi opinión, no podemos considerarlo como una alternativa prometedora al platonismo. La única manera de dar respuesta al dilema epistémico sin perder la uniformidad semántica (y por lo tanto la verdad literal) es, hasta donde alcanzo a ver, defender algún tipo de realismo moderado. Esto es, no sustituyendo ciertas premisas metafísicas por otras, sino renunciando a ellas definitivamente.

[9] Hay distintas manera de formular esto, aunque no creo que ninguna de ellas sea completamente satisfactoria. Field (1980) y (1989), por ejemplo, afirma que los enunciados matemáticos no son verdaderos pero que son aún así correctos (ya que poseen objetividad lógica; ver más adelante). Yablo (2000), (2002) y (2005), por otro lado, establece la distinción entre enunciados que son literalmente verdaderos y enunciados que son verdaderos sólo en sentido figurativo. Según esto, los enunciados matemáticos deben ser interpretados como metáforas.

[10] El platonismo tradicional es incapaz de explicar la objetividad porque precisamente las suposiciones metafísicas sobre las que se asienta son las que originan el dilema epistémico (y con ello el problema de la objetividad). El ficcionalismo, por otro lado, debido a que se basa en otras suposiciones metafísicas (las opuestas), se encuentra con serios problemas a la hora de explicar la aplicación de las matemáticas y la uniformidad semántica (con el ámbito empírico).

Por lo tanto, la afirmación esencial es que la objetividad no requiere una ontología precisa. Dejando a un lado los problemas semánticos que la objetividad tiene que resolver (especialmente del argumento derivado de la teoría de los modelos), el carácter objetivo de la verdad y del razonamiento matemático podría ser defendido sin hacer uso de ningún compromiso ontológico determinado acerca de los objetos matemáticos. De aquí se sigue que la objetividad puede ser defendida sin tener que postular ningún nexo misterioso entre nosotros y los objetos. Para facilitar la argumentación, durante este trabajo he partido de la hipótesis de que los objetos matemáticos existen y son independientes, pero ahora, me gustaría defender que esta hipótesis no añade ni influye mucho en la discusión. Este es el motivo por el que consideré seguro comenzar a trabajar suponiendo su verdad.

El problema, he afirmado, no es tanto si los objetos matemáticos existen o no,[11] el problema es cómo podemos desarrollar una propuesta acerca de la verdad de manera que preservemos la objetividad matemática (o al menos cierto tipo de objetividad moderada). Tal y como Putnam lo ha expresado,

> What seems to characterize mathematics is a certain style of reasoning; but that style of reasoning is not essentially connected with an ontology (1979:4)

La opción ontológica que elijamos estará determinada por razones semánticas y pragmáticas (en términos de aplicabilidad) y no viceversa. Es por estas razones por las que no considero adecuado pensar en los objetos matemáticos como construcciones de la mente humana, de la misma manera que tampoco considero, como acabo de decir, el ficcionalismo como una opción prometedora.

Una vez dicho todo esto, podemos seguir a Hartry Field y diferenciar entre dos tipos de objetividad. El primer tipo, que Field denomina “objetividad lógica”, está asegurada para los matemáticos siempre que cuenten con estándares completos de prueba matemática. Bajo esta lectura entonces, un enunciado matemático es objetivo

[11] Ya que no podemos añadir nada substancial a esto. Podríamos aceptar (para evitar caer en el ficcionalismo) que los objetos existen, pero esta afirmación no puede ir acompañada de ninguna otra suposición metafísica. No podemos basar nuestra explicación de la objetividad en ninguna característica peculiar de esos objetos, porque simplemente, no tenemos manera de conocerla (más allá de lo que las propia matemáticas nos puedan decir acerca de ella)

siempre que sea derivable a partir del conjunto de axiomas aceptados. Este tipo de objetividad no hace uso alguno de la existencia o no de los objetos matemáticos. Las dificultades aparecen cuando preguntamos por la objetividad de esos axiomas a partir de los que derivamos el resto de los enunciados matemáticos. Field denomina a este segundo tipo de objetividad "objetividad matemática" y hace referencia, por lo tanto, más que a nuestros criterios de corrección en relación a la prueba, a la elección de los axiomas.[12]

En este punto, parece que volvemos a tener que enfrentarnos a algo bastante similar al dilema de Benacerraf-Field: ¿cómo podemos conocer esos axiomas básicos?, ¿cómo garantizamos su objetividad? Otra manera posible de interpretar estos dos tipos de objetividad, relacionada con lo dicho hasta el momento, es en términos de la verdad: ¿hay algo acerca de la verdad matemática más allá de la prueba?[13]

De nuevo, se podría pensar que la existencia de los objetos abstractos, de ser demostrada, garantizaría la objetividad de las afirmaciones matemáticas y que, por medio de nuestro conocimiento de esos objetos (asumiendo que pudiéramos explicarlo), podríamos fácilmente explicar la corrección de la elección de los axiomas básicos. Pero ya hemos dicho que el argumento esgrimido por Putnam va en contra de esto, ya que demuestra que, incluso si hubiera un universo fijo de objetos matemáticos, no podríamos ofrecer una respuesta objetiva a cuestiones como la referente al tamaño del continuo.

Existen distintas posibilidades para aquellos a los que, como a mí, les gustaría ofrecer una solución a la objetividad matemática (y al conocimiento matemático) sin tener que limitarnos a la objetividad lógica y sin partir de supuestos metafísicos (por otro lado no demasiado útiles, como hemos visto). Una posibilidad es introducir la idea de diferentes niveles de referencia. Por ejemplo, Azzouni (1994) y (2004) desarrolla

---

[12] Por supuesto, a los criterios lógicos de corrección de la prueba matemática tienen que ser añadidos otros criterios. Por ejemplo, tendrá que ser considerada la aplicabilidad de las afirmaciones matemáticas, su belleza, su simplicidad, etc.

[13] Algunos autores, como Hilbert, han argumentado que no necesitamos ningún tipo de objetividad más allá de la lógica. Una afirmación matemática es verdadera siempre que sea derivable a partir de los axiomas básicos (siempre que sea probable). Existe una inmensa literatura al respecto y muchas maneras en las que esta idea puede ser formulada. No nos vamos a detener en ellas, nuestra preocupación principal es la noción de objetividad matemática y la posibilidad, no de eliminarla, sino de formularla de manera que deje de ser algo misterioso, que no requiera la suposición de que hay algún tipo de nexo fijo entre los sujetos y los objetos.

una propuesta según estas líneas. De acuerdo con ella, si suponemos que un término singular *t* hace referencia a un objeto *o* en un discurso dado, entonces:

1. La referencia a *o* es *gruesa* (“thick”) si contamos con una epistemología que explica su referencia a través de una interacción causal. Esta es la manera más común de explicar la referencia a objetos físicos observables (sin embargo, para evitar problemas derivados de la teoría causal de la referencia, yo habría requerido para que la referencia sea gruesa que haya algún tipo de *contacto* o *interacción* entre el término y el objeto)
2. La referencia es *fina* (“thin”) si ocurre al postular una teoría, donde esta teoría es aceptada en base a su papel organizando la experiencia. De acuerdo con Quine y sus seguidores, toda la referencia debería ser considerada delgada (sin importar el discurso)
3. La referencia es *ultrafina* (“ultrathin”) si es estipulada simplemente por medio de “postulados”. Por lo tanto, los postulados (o “posits”) son todo lo que hay en relación a la referencia. No existe la posibilidad de dar cuenta de la naturaleza del objeto *o*.

De acuerdo con Azzouni, la referencia matemática es siempre *ultrafina*. Además, elabora una propuesta destinada a asegurar la posibilidad de obtener verdad literal en matemáticas y no sólo verdad figurativa o ficticia, como sería de esperar si asumimos que la referencia es *ultrafina*. Sin embargo, en mi opinión sería posible defender que la referencia matemática es *fina* y, aún así, evitar tener que dar cuenta de la naturaleza del objeto *o*. Las ventajas de esto (frente a la postura de Azzouni o de otros ficcionalistas) son claras, especialmente en relación a la verdad, ya que no tendríamos que enfrentarnos al “peligro” de tener que renunciar a la verdad literal. Una manera de hacer esto, creo, es afirmando que la teoría que postulamos (por medio de la cual fijamos la referencia) debería ser aceptada, no por el papel que juega en la experiencia en general (aunque esto también es relevante), sino por el papel que juega en relación a otras teorías matemáticas.

Una posible estrategia para defender esta idea es (¡de nuevo!) por medio de la defensa de un tipo de realismo moderado o *fino* en matemáticas. Esto es, afirmando que las consideraciones de tipo metafísico no juegan ningún papel en nuestra elección de los axiomas; que tomamos nuestras decisiones, no sobre la base de consideraciones metafísicas, sino por el contrario, sobre la base de consideraciones metodológicas. Maddy, en un artículo reciente (2005), expone una posible alternativa a lo que ella denomina realismo robusto, y que nosotros hemos venido llamando realismo tradicional.[14] De acuerdo con este realismo alternativo, que ella llama "realimo fino", la elección de una metodología para la teoría de conjuntos (Maddy centra su análisis en ella) debe hacerse desde la teoría de conjuntos misma, de acuerdo con su efectividad. Los axiomas de la teoría de conjuntos, generados por esos métodos, son considerados verdaderos, y debido a que entre esos axiomas hay afirmaciones existenciales, los conjuntos existen.

Maddy emplea el ejemplo del axioma de la elección. Como es bien sabido, hubo durante mucho tiempo un debate entre realistas y constructivistas acerca de si debíamos o no aceptar este axioma. Pero debido a que cada vez más áreas del conocimiento matemático comenzaron a requerir el axioma para su desarrollo, actualmente es ampliamente aceptado, aunque la disputa entre los realistas y los constructivistas sigue aún sin estar resuelta. Por lo tanto, parece que el debate acerca del axioma de la elección (al igual que otros muchos debates en la historia de las matemáticas) se decidió no por consideraciones metafísicas, sino más bien, por consideraciones de tipo metodológico. Este es el punto de partida del "realismo fino", tal y como Maddy lo formula, aceptar que es posible que la filosofía de corte metafísico sea irrelevante, que todo lo que cuenta, a la hora de elegir axiomas (o de decidir acerca de su validez) son las cuestiones de tipo metodológico.

Por supuesto, es de esperar que los defensores de la filosofía de corte metafísica respondan que las consideraciones de tipo metodológico no pueden ser el final de la historia, porque dejan sin responder muchas cuestiones y, entre ellas, las relacionadas con la naturaleza de los conjuntos (y de los objetos matemáticos en general). Por ejemplo, no explican si los conjuntos son construcciones o por el contrario son independientes de los sujetos, si son causales, si son necesarios, etc.[15] El "realista fino"

[14] Maddy no defiende este tipo de realismo alternativo en este artículo, simplemente expone la posibilidad de interpretarlo como una alternativa al realismo robusto. De hecho, Maddy considera que la opción "ultrafina" es más "deseable" que la "fina".

[15] En términos de Azzouni, los partidarios de las explicaciones metafísicas requieren que la referencia a los objetos matemáticos sea *gruesa*. En relación a la naturaleza o la existencia de las entidades

tiene dos opciones frente a esto. La primera es simplemente rechazar este tipo de cuestiones desde un principio, rechazarlas por ser "pseudo-cuestiones" (esta sería la opción al estilo de Carnap).

Maddy no se detiene a considerar esta opción ya que, para ella, las cuestiones metafísicas son relevantes y muy importantes para poder comprender cómo funcionan las matemáticas, sus objetos y la verdad de sus enunciados. Por ello afirma que los defensores del "realimo fino" (o de otro tipo de realismo moderado) deben buscar otra vía para responder a las dudas de los "filósofos metafísicos":

> The thin realist will hold, in Burge's negative way, that sets are not created by our thoughts or definitions, that they are acausal and non-spatiotemporal, but whether or not CH [Continuum Hypothesis] has a determinate truth value, as we've seen, depends on whether or not there will one day be a mathematical well-motivated way of settling it (2005: 362)

Me gustaría defender algo similar a esta propuesta aquí. Podemos defender un tipo de existencia "mínima" de los objetos matemáticos, defender su independencia e incluso asumir que son no-causales y no-espacio-temporales; aún así, estas tesis metafísicas acerca de la existencia y la naturaleza de los objetos matemáticos no son relevantes para determinar la verdad de los enunciados matemáticos. Van Fraasen expresó muy claramente esta idea en su artículo "Platonism Pyrrhic Victory",

> I am not arguing that there are no sets. First, it is philosophically as uninteresting whether there are sets as whether there are unicorns. As a philosopher I am only interested in whether our world is intelligible if we assume there are no sets, and whether it remains equally intelligible if we do not. Personally, I delight in the postulation of occult entities to explain everyday phenomena, I just don't delight in

matemáticas, los partidarios del realismo "fino" defienden que, tomando el ejemplo de la teoría de conjuntos, ésta nos dice *todo* lo que hay que decir acerca de los conjuntos: los conjuntos tienen, según esta visión, todas las propiedades que le adjudica la teoría de conjuntos y adolecen de aquellas que la ciencia en general (en concreto las matemáticas y la teoría de conjuntos) consideran irrelevantes (como por ejemplo, ser concretos o entablar relaciones causales). Esto se asemeja mucho al "Realismo" del que habla Tait (en contraste con el "Super-realismo": no hay nada más allá (salvo mera especulación) acerca de las entidades matemáticas de lo que nos dicen las matemáticas mismas.

> taking it seriously. As a philosopher, however, I look forward the day when we shall be able to say "Yes, Virginia, there is a null set", and go on to explain, as the *New York Sun* did of Santa Claus, that of course there isn't one, but still there really is, living in the hearts and minds of men -exactly what a conceptualist by temperament would hope (1975: 50)

En mi opinión sin embargo, las consideraciones metodológicas, acerca de las aplicaciones futuras y presentes y acerca de la efectividad de los enunciados matemáticos, representan obviamente un aspecto importante de la verdad matemática, pero es necesario, creo, "algo más" para justificarla. Aparte de las consideraciones metodológicas, pienso que debemos decir algo más acerca de la fiabilidad de las creencias de los matemáticos, al menos cuando estamos refiriéndonos a la elección de nuevos axiomas.

Maddy también es consciente de esta limitación del realismo "fino", que necesita garantizar la fiabilidad de las creencias de los matemáticos. En concreto, necesita contar con una noción de verdad que le permita determinar cuando un enunciado es verdadero o falso sin tener que recurrir a una realidad matemática externa, estable y determinada; esto es, necesita un "sustituto" de la noción de verdad por correspondencia que manejan los partidarios del platonismo tradicional (o "realimo robusto", como los llama ella). Algunos autores, como Azzouni (1994), intentan "sustituir" la noción de verdad "robusta" de la correspondencia por medio de una teoría desentrecomilladora de la verdad. En capítulos anteriores hemos señalado algunas críticas a esta teoría de la verdad, en mi opinión lo suficientemente convincentes como para no considerar esta opción aquí[16].

[16] La crítica de Maddy a esta opción en este contexto es también, en mi opinión, bastante contundente. Básicamente, Maddy cuestiona la relevancia de apelar a la teoría dessentrecomilladora, duda de su capacidad para solucionar las limitaciones del realismo fino. De acuerdo con algunos defensores de esta opción, como Burges y Rosen (1997: 47-9), la teoría desentrecomilladora permite sustituir la cuestión: "¿está la creencia en la verdad de la teoría de conjuntos justificada?" por esta otra: "¿está la creencia en la teoría de conjuntos justificada?" , ya que según esta teoría de la verdad podemos intercambiar sin problemas "es verdad que p" por "p". Pero a esto Maddy responde,

> But it seems to me that even a correspondence theorist would aprove the first move […]; what's at issue here isn't anything about word-world relations, but the basic question of whether or not we have epistemic access to abstracta. The work of dissolving the problem of knowledge is done by Thin Realim (or in terms closer to this: by his version of naturalism), not by disquotationalism (2005: 22.n.44)

Lo que sí parece claro es que este "algo más" tendrá que incluir una nueva noción de verdad –no metafísica-, que además tendrá que incorporar algún elemento epistémico. Podríamos intentar aplicar los conceptos dependientes de la respuesta al caso matemático, de manera que la verdad matemática quedase determinada por los mejores juicios de los sujetos (bajo las condiciones adecuadas). Conviene además tener en cuenta que estas dos maneras de determinar el valor de verdad de los enunciados matemáticos no son ni mucho menos contradictorias. El axioma de la elección, por seguir con el ejemplo de Maddy, será aceptado si constituye una premisa para enunciados (o axiomas, o teoremas) que un sujeto competente, bajo condiciones adecuadas, considere verdaderos.

Por lo tanto, estoy de acuerdo con los "realistas finos", como Maddy los llama, cuando afirman que las consideraciones metafísicas no juegan ningún papel en la determinación de la verdad o en la elección de los axiomas matemáticos. Y aunque esto (más una propuesta de la verdad, en términos de conceptos dependientes de la respuesta) probablemente no satisfacerá a muchos filósofos, que seguirán insistiendo en que necesitamos algo más para explicar la objetividad matemática, que es necesario decir algo más acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos; yo creo que es suficiente para garantizar el tipo de objetividad requerido por la ciencia. Y para este tipo de objetividad son suficientes los argumentos del realismo moderado. Lo que es más, según yo lo veo, no hay nada que decir más allá de este tipo de consideraciones. ¿Qué más podría necesitarse aparte de una explicación de la verdad matemática y de la fiabilidad de las creencias de los matemáticos y de sus elecciones (de axiomas) para garantizar la objetividad? Si intentamos dar un paso más, entraremos en el ámbito del super-realismo, el dominio de la especulación metafísica.

7.4. La Verdad

En el capítulo anterior, consideramos la posibilidad de aplicar los conceptos dependientes de la respuesta a las matemáticas. En dicho capítulo, afirmé que esta propuesta tiene que salvar aún muchos obstáculos pero, aún así, pienso que una noción de verdad en términos de los conceptos dependientes de la respuesta podría resultar muy provechosa. Aquí, me gustaría simplemente señalar algunas de sus ventajas. No pretendo por lo tanto abogar sin reservas por la adopción de estos conceptos en matemáticas, pero sin duda considero que se trata de una propuesta atractiva, que, además, encaja con el resto de mis ideas y que, de ser desarrollada adecuadamente, resolvería algunos de los problemas que hemos intentado analizar aquí. Por eso he optado por introducirla de nuevo, brevemente, en estas conclusiones. No como una propuesta final, sino como una tentativa de solución atractiva para el problema del conocimiento y, sobre todo, de la verdad, en matemáticas. No hace falta decir que, para que esta propuesta pudiese ser considerada una explicación satisfactoria de la verdad y del conocimiento, tendrá que ser desarrollada con mucho más detalle. Pero, a pesar de esto, creo que resulta claro que, si finalmente fuese desarrollada satisfactoriamente, podría constituir una solución muy atractiva para algunos de los problemas más acuciantes de la filosofía de las matemáticas, al menos para el tipo de realismo "fino" o "moderado" que he defendido.

Lo que estamos buscando, resumiendo, es una noción de verdad que sea "neutra", es decir, que no tenga implicaciones metafísicas, pero que sea lo suficientemente fuerte como para ser estable y absoluta. Por otro lado, para que sea coherente con las observaciones generales que hemos hecho acerca del realismo y de nuestra relación cognitiva con el mundo (y la importancia de los esquemas conceptuales), esta noción de verdad tendrá que incluir de alguna manera a los sujetos en su formulación. En mi opinión, la explicación a través de los conceptos dependientes de la respuesta cumple con ambos requisitos sin renunciar, al mismo tiempo, al requisito realista de la independencia de los objetos matemáticos.

Una de las principales ventajas de los conceptos dependientes de la respuesta, que mencionamos en el capítulo anterior, es el hecho de que aunque impliquen la dependencia (de la mente) de la verdad, no implican necesariamente la dependencia (de la mente) de las entidades. La aplicación de estos conceptos no nos lleva a negar la existencia de las entidades matemáticas, pero tampoco trae consigo una concepción metafísica particular acerca de su naturaleza o acerca de nuestro acceso a ellas. Los conceptos dependientes de la respuesta son, por lo tanto, compatibles con el realismo moderado o, en términos de Maddy, con el "realismo fino". En otras palabras, con la concepción de los objetos matemáticos como "objetos finos".

Este recuento en términos de los conceptos dependientes de la respuesta no choca, por supuesto, con la noción de prueba matemática, que asegura lo que hemos denominado "objetividad lógica" y que permite la derivación de nuevas verdades matemáticas. Sólo tenemos que añadir como una de las condiciones C de la ecuación básica el requerimiento de que el sujeto conozca todas las reglas lógicas de la derivación y los axiomas básicos (de hecho, esto se suponía ya en el requerimiento de que el sujeto fuese competente). Por lo tanto, las ventajas de la aplicación de los conceptos dependientes de la respuesta son, tal y como yo las veo,

1. Renuncia a la pretensión (típica del platonismo tradicional) de entender la verdad matemática como una relación independiente, basada en una relación única y fija (algún tipo de correspondencia en el sentido fuerte –no-trivial- del término) entre nosotros o nuestros términos y la realidad.

2. Ofrece un criterio competente acerca de la fiabilidad de las creencias de los matemáticos y de su elección de los axiomas básicos. Esto es suficiente para garantizar un tipo de objetividad moderada y, tal y como he argumentado, para explicar la aplicabilidad de las matemáticas. No es necesario plantear ninguna otra cuestión acerca de la objetividad y el conocimiento. Intentar explicar nuestro acceso a los objetos matemáticos o la elección de los axiomas básicos sobre la base del conocimiento de esos objetos implicaría convertirnos en "super-realistas", entraríamos en el dominio de la especulación metafísica.

3. Es coherente con los otros aspectos, de carácter general, defendidos acerca del realismo y del papel de los sujetos en el conocimiento y la verdad. Sobre todo, es coherente con la idea de desarrollar una explicación metafísicamente neutra o inocente acerca de la relación epistémica, de la manera en que nuestros términos hacen referencia a los objetos y de la manera en que nuestros enunciados son verdaderos (o falsos)

En resumen, una de las preguntas acuciantes en la filosofía de las matemáticas es la cuestión de la justificación de nuestros criterios para la fiabilidad de nuestras creencias. Es lo que hemos llamado aquí la objetividad matemática. ¿Qué justificación tienen los matemáticos para aceptar ciertos axiomas básicos? De hecho, podríamos trasladar esta cuestión al ámbito de la lógica y preguntar, ¿qué justificación tenemos para aceptar reglas de inferencia supuestamente básicas (como el modus ponens)? Esta es una pregunta compleja pero importante. Mucho más importante, he argumentado, que la pregunta por la existencia o no de las entidades matemáticas (o por su naturaleza, más allá de lo que estipula la matemática misma).

En este trabajo partimos del dilema de Benacerraf-Field para las matemáticas. Hemos intentado buscar posibles soluciones pero hemos visto que no resulta tan sencillo. Yo creo que muchas de las dificultades vienen dadas por nuestras concepciones de partida y por una mala interpretación del propio dilema, de lo que cuestiona y del tipo de solución que requiere. He propuesto que reduzcamos el problema del conocimiento al problema de la objetividad y que, a su vez, intentemos solucionar éste último a través del desarrollo de una noción de verdad dependiente de la respuesta. No es una solución definitiva, pero al menos parece conducirnos en la dirección adecuada. Se podría decir que constituye una vía, un camino prometedor para encontrar una solución libre (hasta donde esto sea posible y deseable) de especulaciones metafísicas[17].

[17] Nos equivocaríamos si dijésemos que podemos eliminar totalmente la especulación metafísica. Defender que debemos eliminar algunas de ellas, u optar por una determinada noción de verdad, implica de por sí aceptar cierto punto de vista metafísico. Las especulaciones metafísicas en sí mismas no son perjudiciales. El mundo sería un lugar muy aburrido sin ellas. Pero hemos argumentado que, en muchas ocasiones, algunas de ellas son, no sólo irrelevantes, sino además perjudiciales.

BIBLIOGRAFÍA

- Amstrong, D. M. (1973) *Belief, Truth and Knowledge*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Azzouni, J. (1994) *Metaphysical Myths, Mathematical Practice: the Ontology and Epistemology of the Exact Sciences.* Cambridge: Cambridge University Press.

  ___(2004) *Deflating Existential Consequence. A Case for Nominalism*. Oxford: Oxford University Press.
- Balaguer, M. (1994) "Against (Maddian) Naturalized Platonism", *Philosophia Mathematica* 2(3), 97-108.

  ___ (1998) *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Benacerraf, P. (1965) "What Numbers Could Not Be", *Philosophical Review* 74: 47-73. En Benacerraf y Putnam (eds) (1984).

  ___ (1973) "Mathematical Truth", *The Journal of Philosophy,* 70: 661-80. En Benacerraf y Putnam (eds)(1984).
- Benacerraf, P. y Putnam H. (eds) (1984) *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*. Cambrige: Cambridge University Press.
- Bigelow, J. (1988) *The Reality of Numbers: A Physicalist Philosophy of Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.
- Blackburn, S. y Simmons, K. (eds) (1999) *Truth*. Oxford: Oxford University Press.
- Boghossian, P. y Peacocke, C. (eds) (2000) *New Essays on the A Priori*. Oxford: Oxford University Press.
- Boolos, G. (1987) "The Consistency of Frege's *Foundations of Arithmetic*", en Boolos (1998).

  ___(1997a) "Is Hume's Principle Analytic?", en Boolos (1998).

  ___ (1997b) "Glotob Frege and the Fundations of Arithmetic", en Boolos (1998).

  ___ (1998) *Logic, Logic and Logic.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Brouwer, L.E.J (1907) *Over deGrondslagen der Wiskunde.* Amsterdan: Maas & Van Suchelen. Reeditado en inglés "On the foundations of Mathematics" en Heyting, A. (ed) *Collected Works vol.1* Amsterdan: North-Holland
- Brown, J.R. (1999) *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures.* Londres y Nueva York: Routledge.
- Burges, J. y Rosen, G. (1997) *A Subject with No Object. Strategies for Nominalist Interpretations of Mathematics.* Oxford: Claredon Press.
- Byrne, D. (2005) "Compositionality and the Manifestation Challenge", *Synthese* 144:101-136.
- Carnap, R. (1950) "Empiricism, Semantics and Ontology", reeditado en Benacerraf y Putnam (1984)
- Carsons, E. (1996) "On Realism in Set Theory", *Philosophia Mathematica* 4(3) 3-17.
- Chihara (1990) *Constructivility and Mathematical Existence*. Oxford: Oxford University Press.
- Clark, P. y Hale, B. (eds.) (1994). *Reading Putnam*. Oxford: Basil Blackwell.
- Davis, P.J. y Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhauser.
- Devitt, M. (1984) *Realism and Truth*. Princeton: Princeton University Press.
- Divers, J. Y Miller, A. (1999) "Arithmetical Platonism: Reliability and Judgement-dependence", *Philosophical Studies* 95: 277-310.
- Dodd, J. (2000) "There is no Norm of Truth: a Minimalist Reply to Wright", *Analysis* 59: 291-9.
- Douven, I. (1999) "Putnam's Model-theoretic Argument Reconstructed", *The Journal of Philosophy*, 96 (9): 479-490.
- Dummett. M. (1959) "Truth", en Dummett (1978a).

  ___ (1963) "Realism", en Dummett (1978a).

  ___ (1973a) *Frege: Philosophy of Language.* London: Duckworth.

  ___ (1973b) "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic", en Dummett (1978a).

  ___ (1976) What is a Theory of Meaning (II), en Dummett (2000b).

  ___(1978a) *Truth and Other Enigmas*. Cambridge, MA: Harvard University

Press.

___ (1978b) “What do I Know When I Know a Language?”, en Dummett (2000b).

___(1981) *The Interpretation of Frege’s Philosophy*. London: Duckworth.

___ (1991a) *The Logical Basis of Metaphysics*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

___(1991b) *Frege: Philosophy of Mathematics*. London: Duckworth

___(1991c) “What is Mathematics About”, en Dummett (2000b).

___ (1992) “Realism and Anti-Realism”, en Dummett (2000b).

___(2000a) *Elements of Intuitionism*. Oxford: Oxford University Press (1ªed.1977).

___(2000b) *The Seas of Language*. Oxford: Oxford University Press (1ªed.1993).

- Edwards, J. (1999) “Prizing truth from warranted assertibility: reply to Tennant”, *Analysis*, vol.59 (4): 300-308.

___(1998) “Response-Dependence, Kripke and Minimal Truth”, *European Review of Philosophy* vol.3: 149-174.

- Evans, G. y McDowell, J. (eds) (1976) *Truth and Meaning*. Oxford: Claredon Press.

- Feferman, S. (2000) “Mathematical Intuition vs. Mathematical Monsters”, *Synthese* 125: 317-332.

- Field, H. (1972) “Tarski’s Theory of Truth”, *The Journal of Philosophy* 69, 13: 347-75.

___(1980) *Science without Numbers*. Oxford: Blackwell.

___ (1982)“Realism and Relativism”, *The Journal of Philosophy* 79, 10: 553-567.

___(1989) *Realism, Mathematics and Modality*. Oxford: Basil Blackwell.

___ (1993) “The Conceptual Contingency of Mathematical Objects”, *Mind* 102, 287-99.

___(1998a) “Mathematical Objectivity and Mathematical Truth”, en Field (2001).

___ (1998b) “Which Undecidable Mathematical Sentences have Determinate

Truth Values?", en Field (2001).

___(2001) *Truth and the Absence of Fact*. Oxford: Claredon Press.

___ (pendiente publicación) "Mathematical Undecidables, Metaphysical Realism and Equivalent Descriptions", pendiente de publicación en un volumen de la *Library of Living Philosophers*, dedicado a la filosofía de H. Putnam).

- Fine, K. (2002) *The Limits of Abstraction*. Oxford: Oxford University Press.

___(1998) "Cantorian Abstraction: a Reconstruction and Defense", *The Journal of Philosophy* 95: 599-634.

- Frege, G. (1884) *Die Grundlagen der Arithmetik*. W. Koebner, Breslau. Traducida al inglés por J.L Austin (1950) *The Foundations of Arithmetics*. Oxford: Blackwell.

___ (1893) *Die Grundgesetze der Arithmetik, i* . Jena: H.Pohle. Traducida al inglés por varios autores en Geach, P. y Black, M. (eds.) (1952) *Translations from the Philosophical Writings of Glottlob Frege*. Oxford: Blackwell.

- Friedman, J. I. (2005) "Modal Platonism: An Easy Way to Avoid Ontological Commitment to Abstract Entities", *Journal of Philosophical Logic* 34: 227-273.
- Gendler, T. y Hawthorne, J. (eds.) (2002) *Conceivability and Possibility*. Oxford: Oxford University Press.
- Giaquinto, M. (1998) "Epistemology of the Obvious: a Geometrical Case", *Philosophical Studies*, vol. 92 (1-2).
- Goodman, N. (1987) *Mind and Other Matters*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Goodman, N. y Quine, W.V. (1947) "Steps toward a Constructive Nominalism", *The Journal of Symbolic Logic,* 12 :97-122.
- Gödel, K. (1944) "Russell's Mathematical Logic", en *The Philosophy of Bertrand* Russell, Schilpp,P.A (ed). Reeditado en Benacerraf y Putnam (eds) (1983).

___ (1947) "What is Cantor's Continuum Problem?", *American Mathematical Monthly*, 54: 515-25. Reeditado en Benacerraf y Putnam (1983).

___ (1951) "Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and their

Implications", en Feferman, S. (ed) (1995).

___(1953) "Is Mathematics Syntax of Language?", en Feferman, S. (ed) (1995)

___(1995) *Collected Works Volume III: Unpublished Essays and Lectures* Feferman, S. (ed), Oxford: Oxford University Press.

- Green, K. (2001) *Dummett. Philosophy of Language*. Cambridge: Polity Press.
- Hadamard, J. (1954) *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Dover Publications (1ªed. 1945).
- Haldane, J. y Wright C. (eds) (1993) *Reality, Representation and Projection*. Oxford: Oxford University Press.
- Hale B. (1987) *Abstract Objects*. Oxford: Blackwell.

___(1997) "Realism and its Oppositions", en Wright y Hale (eds) (1997).

- Hale, B. y Wright, C. (1992) "Nominalism and the Contingency of Abstract Objects", *The Journal of Philosophy* Vol. 89: 111-135

___(1997) "Putnam's Model-theoretic Argument Against Metaphysical Realism", en Hale y Wright (eds) (1997).

___ (eds) (1997) *A Companion to the Philosophy of Langage.* Oxford: Balckwell.

___ (2001) *The Reason's Proper Study*. *Essays Towards a Neo-fregean Philosphy of Mathematics*. Oxford: Claredon Press.

___ (2002) "Benacerraf's Dilemma Revisited", *European Journal of Philosophy*, 10: 101-29.

- Hart, W.D. (1996) *The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Heck, R. (1997) "The Julius Caesar Objection", en Heck, R. (ed) *Language, Thought and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett*. New York y Oxford: Oxford University Press.

___ (Manuscrito) "Cardinality, Counting and Equinumerosity"

- Heijenoort, J. (1967) *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic*, *1879-1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Hellman, G. (1989) *Mathematics without Numbers. Towards a Modal-Structural Interpretation*. Oxford: Oxford University Press.

- Hersh, R. (1997) *What is Mathematics Really?*. Oxford: Oxford University Press.
- Horwich, P. (1990) *Truth*. Oxford: Oxford University Press.

  ___ (1998) *Meaning*. Oxford: Oxford University Press.
- Jiménez Guerra, P. (1991) *Álgebra I*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Johnston, M. (1989) "Dispositional Theories of Value", *Proceedings of the Aristotelian Society*, suppl. Vol.63, págs. 139-74.

  ___ (1991) "Explanation, Response-Dependence and Judgement-Dependence", en Menzies (ed.) *Response-Dependence Concepts*, Australian National University, RSSS, Working Papers in Philosophy, Vol.1.

  ___(1993) "Objectivity Refigured. Pragmatism without Verificationism", en Haldane, J. y Wrigt, C. (eds) (1993).
- Katz, J.J. (1998) *Realistic Rationalism*. Cambridge, MA: A Bradford Book, MIT Press.

  ___ (1990) *The Metaphysics of Meaning*. Cambridege, MA: MIT Press.
- Khlentzos, D. (2001) "Semantic Challenges to Realism", en *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Zalta, E. (ed) (http://plato.Stanford.edu/entries/realism/).

  ___(2004) *Naturalistic Realism and the Anti-realist Challenge*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Kitcher, P. (1984) *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford University Press.
- Lavine, S. (1994) *Understanding the Infinite*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Lewis, D. (1984) "Putnam's Paradox", *Australasian Journal of Philosophy*, 62: 221-36.

  ___(1986) *On the Plurality of Worlds.* Oxford: Basil Blackwell.
- Levine, A. (2005) "Conjoining Mathematical Empiricism with Mathematical Realism: Maddy's Accout of Set Perception Revisited", *Synthese* 145: 425-448.
- Linnebo, O. (2003) "Ontology and the Concept of an Object", (Borrador) disponible en internet (http://users.ox.ac.uk/~sfop0113).

- Linsky, B. y Zalta, E.N. (1995) “Naturalized Platonism vs. Platonized Naturalism”, *The Journal of Philosophy* 42, 10: 525-555.
- Liz, M. (2002) *Un Metafísico en Tecnolandia*. Murcia: Universidad de Murcia.

  ___ (2003) *Justificar y Explicar*. La Laguna: Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.
- Mackie, J. (1977) *Ethics: Inventing Right and Wrong*. Harmondsworth: Penguin
- Maddy, P. (1980) “Perception and Mathematical Intuition”, *Philosophical Review* 89(2), 163-196, reeditado en W.D Hart (ed) (1996).

  ___(1988) “Believing the Axioms I” y “Believing the Axioms II”, *Journal of Symbolic Logic*.

  ___(1990) *Realism in Mathematics*. Oxford: Oxford Universiyt Press.

  ___ (1992) “Indispensability and Practice”, *The Journal of Philosophy* 89 (6): 275-289.

  ___(1996) “The Legacy of Mathematical Truth”, en Morton , A. y Stich, S. (eds.) (1996).

  ___ (1997) *Naturalism in Mathematics*. Oxford: Claredon Press.

  ___ (2005) “Mathematical Existence”, *Bulletin of Symbolic Logic*, vol 11.
- Mancosu, P. (ed) (1998) *From Brouwer to Hilbert: the Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press.
- Margolis, J. (1994) “Comparing Dummett’s and Putnam’s Realisms”, *The Philosophical Quarterly*, vol. 44, nº177.
- McCormick, P.J. (1996) *Starmaking, Realism, Anti-realism and Irrealism*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- McDowell, J. (1977) “On the Sense and Reference of a Proper Name”, *Mind*, Vol. LXXXVI: 159-85.

  ___(1987) “In defense of Modesty”, en McDowell (1998).

  ___(1998) *Meaning, Knowledge and Reality*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Menzies, P. (1992) “Modality and Response-Dependence”, *Working Papers in Philosophy* Vol.2, RSSS, *Australian National Universit.y.*
- Mill, J.S. (1843) *A System of Logic*. En Robson, J.M. (ed) (1973) *The Collected Works of John Stuart Mill*, vol 7. Toronto: University of Toronto Press.

- Miller, A. (2001) “On Wright’s Argument against Deflationism”, *The Philosophical Quarterly*. Vol 51, nº 205.
- Morton, A. y Stich, S. (eds.) (1996) *Benacerraf and his Critics*. Oxford: Basil Blackwell.
- Nagel, T. (1986) *The View from Nowhere*. Oxford: Oxford University Press.
- Palau, G. (2002) *Introducción Filosófica a las Lógicas No Clásicas*. Gedisa Editorial.
- Parsons, C. (1980) “Mathematical Intuition”, *Proceedings of the Aristotelian Society*, 80: 145-168. Reeditado en, W.D. Hart (ed) (1996).

  ___ (1995) “Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel’s thought”, *Bulletin of Symbolic Logic*, vol.1, nº1.
- Peacocke, C. (1992) *A Study of Concepts*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Peña, L. (1985) *El Ente y su Ser*. *Un Estudio Lógico-Metafísico*. León: Servicio de Publicaciones de la Universidad de León.

  ___ (1991) *Rudimentos de Lógica Matemática*. Madrid: CSIC (Colección de Textos Universitarios)
- Pettit, P. (1991) “Realism and Response-Dependence”, *Mind* 100.
- Platón (1999) “Menón”, en *Diálogos*, (tomo 2). Madrid: Editorial Gredos.

  ___ (1999) “Eutifrón”, en *Diálogos*, (tomo 1) Madrid: Editorial Gredos.
- Poincaré, H. (1908) *Science et Méthode*. París: E. Flammarion.
- Prawitz, D. (1977) “Meaning and Proofs: on the Conflict Between Classical and Intuitionistic Logic”, *Theoria*, nº 43.
- Putnam, H. (1967a) “The Thesis that Mathematics is Logic”, en Putnam (1979).

  ___ (1967b) “Mathematics without Foundations”, en Putnam (1979).

  ___ (1971) “Philosophy of Logic”, en Putnam (1979).

  ___ (1975) “What is Mathematical Truth?”, en Putnam (1979).

  ___ (1978a) *Meaning and the Moral Sciences*. London & Boston: Routledge & Kegan Paul.

  ___ (1978b) “Realism and Reason” en Putnam (1978a).

  ___ (1979) *Mathematics, Matter and Method: Philosophical papers vol.I*. Cambridge: Cambrigde University Press.(2ª ed).

___ (1980) "Models and Reality", en Benacerraf, P. y Putnam, H. (eds) (1984).

___ (1981) *Realism, Truth and History*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

___ (1983a) *Realism and Reason*. *Philosophical Papers.* Vol. 3. Cambridge: Cambrige University Press.

___ (1983b) "On Truth", en Putnam (1994a).

___ (1983c) "Vagueness and Alternative Logic", en Putnam (1983a).

___ (1987) *The Many Faces of Realism*. La Salle, I11.: Open Court.

___ (1990) *Realism with a Human Face*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

___(1991) "Does the Disquotational Theory Solve all Philosophical Problems?", en Putnam (1994a).

___ (1992) *Renewing Philosophy*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

___(1994a) *Words and Life*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

___ (1994b) "Sense, Nonsense and the Senses. An Inquiry into the Powers of the Human Mind" (The Dewey Lectures) *The Journal of Philosophy*, Volume XCI, nº 9.

___(2000) "To Think with Integrity", Farewell Lecture, en *The Harvard Review of Philosophy*, vol. VIII.

___ (2003) *Ethics Without Ontology (Hermes Lectures)*. Cambridge, MA: Harvard University Press

- Quine, W.V. (1948) "On What There Is", en Quine (1980).

___ (1951) "Two dogmas of Empirism", en Quine (1980).

___ (1960) *Word and Object*. Cambridge, MA: MIT Press.

___ (1969) *Ontological Relativity and Other Essays.* Nueva York: Columbia University Press.

___ (1980) *From a Logical Point of View*. Cambridge, MA: Harvard University Press. (2ª ed).

___(1981) *Theories and Things*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Resnik, M. (1997) *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Claredon Press.

- Restall, G. (2001) “Constructive Logic, Truth and Warranted Assertability”, *The Philosophical Quarterly*, Vol 51, nº 205.
- Rosen, G. (2001) “Abstract Objects”, en *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Zalta, E. (ed) (http://plato.Stanford.edu/entries/abstract-objects/).
- Salto Alemany, F. y Méndez Rodriguez, J. M. (2001). “Lógica Intuicionista en Tres Horas y Pico”. En *Laguna* nº 9.
- Shapiro, S. (1997) *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*. Oxford: Oxford University Press.

  ___(2000) *Thinking about Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Shapiro, S. y Taschek, W. (1996) Intuitionism, Pluralism and Cognitive Command”, *The Journal of Philosophy*, 93 (Pág. 74-88).
- Sosa, E. (1993) “Putnam’s Pragmatic Realism”, *The Journal of Philosophy* 90: 606-626.

  ___ (2002) “Reliability and the a priori” en Gendler, T. y Hawthorne, J. (eds).(2002)

  ___ (2005) “A Defense of Intuitions” en Bishop, M. y Murphy, D. (eds) *Stich and His Critics.* Oxford: Blackwell.

  ___ (manuscrito) “Causation, Intuition, and Philosophy”, disponible en internet (http://homepage.mac.com/ernestsosa/Menu2.html.)
- Strawson, P. (1977) “Scruton and Wright on Anti-Realism, etc.”, *Proceedings of the Aristotelian Society* 77: 15-22.
- Tait, W. (2001) “Beyond the Axioms: the Question of Objectivity in Mathematics”, *Philosophia Mathematica* 9:21-36.
- Tennant, N. (1987) *Anti-Realism and Logic: Truth as Eternal*. Oxford: Claredon Press.

  ___ (1997) *The Taming of the True*. Oxford: Claredon Press.

  ___ (2004) “What is Naturalism in Mathematics, Really?”, *Philosophia Mathematica.*
- Troelstra, A.S. y van Dalen, D. (1988) *Constructivism in Mathematics. An Introduction. Vol I.* Amsterdam: North-Holland.
- Van Dalen, D. (ed) (1981) *Brouwer’s Cambridge Lectures on Intuitionism.* Cambridge MA: Harvard University Press.

___(1999) "The Intuitionistic Conception of Logic", *The European Review of Philosophy*, 4, 45-78.

___ (2002) "Intuitionistic Logic", en Gabbay, D.M. y Guenthener, F (ed). *Handbook of Philosophical Logic*, vol.5 (2ªed) Dordrecht: Kluwer.

- Van Fraassen, B. C. (1975) "Platonism Pyrrhic Victory", en Anderson, A. R., Marcus, R.B. y Martin, R. M. (eds.) (1975) *The Logical Enterprise*. New Haven y Londres: Yale University Press.
- Van Stigt, W. P. (1990) *Brouwer's Intuitionism*. *Studies in the History and Philosophy of Mathematics* vol 2. North-Holland.
- Wedgwood, R. (1998) "The Essence of Response-Dependence", *European Review of Philosophy*.
- Wright, C. (1981) "Rule Following, Objectivity and the Theory of Meaning", en Ted Honderich (ed.) *Wittgenstein: To Follow a Rule*. Routledge & Kegan Paul.

___(1983) *Frege's Conception of Number as Objects.* Aberdeen: Aberdeen University Press.

___(1988) "Realism, Anti-realism, Irrealism, Quasi-realism", en *Realism and Anti-Realism, Midwest Studies in Philosophy*, vol XII: 25-49.

___ (1992) *Truth and Objectivity*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

___(1993) *Realism, Meaning and Truth*. Oxford: Blackwell.

___(1996) "Response to Commentators", *Philosophy and Phenomenological Research* (Book Symposium of *Truth and* Objectivity)56 (4):911-941.

___(1999) "Truth: a Traditional Debate Reviewed", en Blackburn y Simmons (eds) (1999).

___(2001) "On Being a Quandary. Relativism, Vagueness and Logical Revisionism", *Mind* vol. 110.

___(2002) "The Conceivability of Naturalism", en Gendler y Hawthorne (eds) (2002)

- Yablo, S. (1998) "Does Ontology Rest on a Mystake?", *Proceedings of the Aristotelian Society*, supp.vol 72: 229-262.

___ (2002) "The Myth of the Seven", pendiente de publicación en un volumen acerca del Ficcionalismo, editado por M. Calderón.

___(2005) "Go Figure: A Path through Fictionalism", pendiente de publicación en *Midwest Studies in Phiosophy*.

- Zalta, E. N. (1983) *Abstract Objects: An Introduction to Axiomatic Metaphysics*. Dordrecht: D. Reidel.