

Curso 1995/96
HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

CELINA PESTANO GABINO

**Representaciones racionales de series matriciales
con aplicación a la especificación
de modelos multivariantes**

Directora
CONCEPCIÓN GONZÁLEZ CONCEPCIÓN



SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS
Serie Tesis Doctorales

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero expresar mi más profunda gratitud a la Dra. Concepción González Concepción, es una suerte tener una Directora con su talante humano y profesional. Sus orientaciones como tutora así como su disposición incondicional desde el momento de mi incorporación en la Facultad de CC.EE. superan con creces el apoyo y dedicación que un doctorando desea encontrar en la Universidad para poder madurar académica y profesionalmente.

En particular deseo dar las gracias a todos aquellos que desinteresadamente han hecho posible este trabajo.

Concretamente quiero expresar mi agradecimiento al Dr. Víctor Cano Fernández, profesor del Departamento de Economía Aplicada, por atender siempre las numerosas dudas que le he ido planteando, por sus comentarios y, en especial, por las importantes referencias bibliográficas proporcionadas.

Así mismo, agradezco de forma especial a mi compañera de Departamento la Dra. María Candelaria Gil Fariña sus constantes muestras de ánimo y, por supuesto, su cooperación en la presentación final de este trabajo.

Gracias también a todos mis compañeros de la subárea de Matemáticas del Departamento de Economía Aplicada por su interés y apoyo. Un agradecimiento singular merece la labor desarrollada en este curso por mi compañero de Departamento el Dr. Juan Carlos Moreno Piquero, sin cuya colaboración este trabajo se hubiera visto retrasado notablemente.

No puedo dejar de reconocer el papel fundamental que ha tenido en esta investigación mi estancia en la Universidad de Lille. Me gustaría, por ello, dar las gracias al Director del Departamento de Análisis Numérico y Optimización, el Dr. Claude Brezinski, por su hospitalidad y por poner a mi entera disposición todo el material bibliográfico que me hiciera falta.

Finalmente, este trabajo no hubiera sido posible sin mi familia, en especial, mis padres y hermanos. Su confianza, apoyo y muestras continuas de ánimo y comprensión han creado las condiciones óptimas para llevarlo a cabo.

A mis padres y hermanos

ÍNDICE

ÍNDICE

PRÓLOGO	1
---------	---

CAPÍTULO I

LA APROXIMACIÓN DE PADÉ MATRICIAL

1.- <u>INTRODUCCIÓN</u>	11
2.- <u>APROXIMACIÓN DE PADÉ. CASO CLÁSICO</u>	15
2.1.- ECUACIONES DE PADÉ	16
2.2.- EXISTENCIA Y UNICIDAD	17
2.3.- LA TABLA C	18
2.4.- LA TABLA DE PADÉ	19
2.5.- CARACTERIZACIÓN DE RACIONALIDAD	21
3.- <u>APROXIMACIÓN DE PADÉ. CASO MATRICIAL</u>	22
3.1.- CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES	22
3.2.- ECUACIONES DE PADÉ	28
3.3.- EXISTENCIA, UNICIDAD Y MINIMALIDAD	30
3.3.1.- <u>Existencia y unicidad</u>	31
3.3.1.1.- Unicidad del aproximante	38
3.3.2.- <u>Minimalidad</u>	41

CAPÍTULO II

LA APROXIMACIÓN DE PADÉ MATRICIAL EN LA IDENTIFICACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

1.- <u>INTRODUCCIÓN</u>	47
2.- <u>GENERALIZACIÓN DE LA TABLA C</u>	49
2.1.- CARACTERIZACIÓN POR ELEMENTOS	49
2.2.- EL CASO CUADRADO ($m=n>1$)	51
2.3.- EL CASO GENERAL (m y n arbitrarios)	55

3.- <u>RACIONALIDAD, MINIMALIDAD Y UNICIDAD:</u>	
<u>PRINCIPALES RESULTADOS</u>	66
3.1.- ALGUNOS RESULTADOS PREVIOS	66
3.2.- TEOREMAS DE CARACTERIZACIÓN	72
3.3.- RECINTO ESCALONADO R1: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES	76
3.4.- RECINTO ESCALONADO R2: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES	80
3.5.- CARDINAL DE MINIMALIDAD	81
4.- <u>IDENTIFICACIÓN DE ELEMENTOS NULOS Y/O REDUNDANTES</u>	
<u>EN LOS COEFICIENTES DE REPRESENTACIONES RACIONALES</u>	82
4.1.- REDUCCIÓN POR FILAS	83
4.2.- REDUCCIÓN POR COLUMNAS	85

CAPÍTULO III

ESQUEMATIZACIÓN TABULAR DE LOS RESULTADOS

1.- <u>INTRODUCCIÓN</u>	89
2.- <u>TABLA 1: RACIONALIDAD, MINIMALIDAD Y UNICIDAD</u>	91
2.1.- RACIONALIDAD	91
2.2.- MINIMALIDAD	92
2.3.- UNICIDAD	93
3.- <u>CARACTERÍSTICAS ESPECIALES DE LA TABLA 1</u>	94
3.1.- RECINTOS ESCALONADOS ACOTADOS	94
3.2.- TABLA 1 SIMPLIFICADA	99
3.3.- EL CASO ESCALAR COMO CASO PARTICULAR	103
4.- <u>TABLA 2: MINIMALIDAD Y UNICIDAD</u>	107
4.1.- MINIMALIDAD	107
4.2.- UNICIDAD	111
5.- <u>EJEMPLOS ILUSTRATIVOS</u>	113
5.1.- ESTUDIO DE FUNCIONES MATRICIALES RACIONALES	113
5.2.- ESTUDIO DE FUNCIONES MATRICIALES NO RACIONALES	133
5.3.- GRADOS MÍNIMOS POR FILAS. UN EJEMPLO	137

CAPÍTULO IV

APLICACIÓN A LA ESPECIFICACIÓN DE MODELOS VARMA

1.- <u>INTRODUCCIÓN</u>	143
2.- <u>CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES DE LOS MODELOS VARMA</u>	148
2.1.- UNICIDAD Y MINIMALIDAD DE LA REPRESENTACIÓN	151
2.1.1.- <u>El modelo en forma de ecuaciones finales</u>	155
2.1.2.- <u>El modelo en la forma escalonada</u>	155
2.1.3.- <u>Modelos de componente escalar (SCM)</u>	157
3.- <u>APROXIMANTES DE PADÉ MATRICIALES Y MODELOS VARMA</u>	160
3.1.- SERIES DE MATRICES DE AUTOCOVARIANZA Y FUNCIONES RACIONALES MATRICIALES	162
3.2.- ALGORITMO PARA LA ESPECIFICACIÓN DE MODELOS VARMA MINIMALES	171
4.- <u>RESULTADOS EMPÍRICOS</u>	172
4.1.- CON DATOS SIMULADOS	172
4.2.- CON DATOS REALES	175
CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS	181
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	187

PRÓLOGO

El principal objetivo de esta Memoria se centra en la utilización de la teoría de la aproximación racional de Padé en el caso matricial para la búsqueda de posibles caracterizaciones de funciones racionales matriciales, así como de condiciones sobre unicidad y minimalidad de representación para las mismas.

En concreto, la técnica de los aproximantes de Padé, introducida por Padé (1892) como un tipo especial de aproximación racional para la estimación del valor de una función en un punto, constituye un núcleo esencial de las numerosas investigaciones que se vienen realizando en el ámbito de la aproximación racional.

El problema de la aproximación de Padé escalar en relación con el estudio de series formales de potencias ha sido objeto de un amplio tratamiento así como de numerosas aplicaciones en disciplinas tan diversas como la Física, la Estadística, la Economía, la Ingeniería, etc., las cuales han motivado a su vez importantes resultados teóricos. Así mismo, el desarrollo a partir de los años 50 de nuevas técnicas computacionales y de métodos de computación recursiva ha estimulado las aplicaciones de este género de aproximaciones racionales a la solución de numerosos problemas. En general, dichas aplicaciones van desde la solución de todo tipo de ecuaciones con operadores, técnicas de aceleración de la convergencia, teoría de sistemas lineales, teoría de redes, procesos estocásticos, análisis de series temporales, etc. Las investigaciones que se han venido realizando en relación con la aproximación de Padé en el campo escalar se han centrado, por un lado, en la aproximación de series formales de potencias, en particular, la aproximación local de funciones analíticas en un punto -caso clásico- y, por otro lado, en la generalización a otros tipos de aproximantes racionales. Así mismo y de forma paralela, numerosas investigaciones se han llevado a cabo en el ámbito de la aproximación de Padé a nivel vectorial y

matricial tanto para el denominado caso clásico como para las distintas generalizaciones abordadas.

En este trabajo nos centramos en la generalización, no siempre trivial, del caso clásico al campo de la aproximación de Padé matricial. Algunos aspectos específicos, como son la no conmutatividad del producto de matrices y las posibilidades sobre normalización, permiten establecer diferencias claras entre los casos escalar y matricial que se ven necesariamente reflejadas desde la propia definición, si bien, dependiendo de los criterios adoptados surgen diferentes definiciones para los aproximantes matriciales.

Así mismo, la relación de la aproximación de Padé matricial con otros ámbitos de estudio ha enriquecido y estimulado el avance de la investigación en todos ellos. En concreto, cobra especial relevancia en esta investigación la relación existente entre esta técnica y la especificación de modelos racionales en el contexto de los modelos de series temporales. Es precisamente este último aspecto el que conduce nuestra línea de investigación a la búsqueda de posibles métodos para caracterizar funciones racionales matriciales, en tanto que, ello permitirá llevar a cabo la identificación de modelos racionales en el análisis de relaciones dinámicas entre variables temporales.

En este contexto, además de contribuir con una caracterización para la especificación de modelos VARMA, proporcionamos otras formas, alternativas a las que se encuentran en la literatura, para tratar los problemas de la no identificabilidad de los parámetros y de la intercambiabilidad de modelos con estructuras simplificadas. Dicha aplicación está en la línea de la preocupación y de los esfuerzos que durante las dos últimas décadas se han venido realizando en el ámbito de series temporales, destinados a profundizar en el estudio y desarrollo de nuevos métodos con los que abordar la identificación de relaciones entre variables en el dominio del tiempo.

En nuestra opinión, como nexo de unión resulta vital que las caracterizaciones que se obtengan en el marco de la teoría de Padé sean suficientemente sencillas y susceptibles de interpretación directa; de ahí que consideremos interesante la presentación gráfica -en forma tabular- de los resultados obtenidos.

El interés por profundizar en estos aspectos tiene su origen en el caso escalar, donde se han dado respuestas satisfactorias a las cuestiones planteadas sobre ellos, tanto desde el punto de vista matemático como desde el de su aplicación a la modelización de series temporales. En este sentido, es de indiscutible importancia el papel excepcional que desempeña la *Tabla C* (Baker, 1975) en la caracterización de la racionalidad, por lo que se establece como punto de referencia de esta investigación. Así mismo, su análogo en la literatura econométrica, el *método corner* (Beguin et al., 1980; Liu y Hanssens, 1982) y relacionados han venido a enriquecer notablemente el ámbito de la identificación en el análisis de series temporales.

En cambio, hasta ahora el caso matricial ha carecido de propiedades similares. La mayor complejidad del mismo justifica el hecho de que los resultados que se tienen dentro del caso escalar no hayan podido ser generalizados directamente sino que se hayan encontrado con serias dificultades. En este aspecto, en la presente investigación se ha delimitado el marco de estudio en función de la posible aplicación que se pretende abordar posteriormente.

Además, mientras que el caso escalar permite tratar los conceptos de racionalidad o naturaleza racional, minimalidad y unicidad casi como un único aspecto, en el caso matricial éstos adquieren una mayor independencia y se hace necesario un tratamiento más detallado y laborioso, teniendo que precisar diferentes definiciones de tipos de minimalidades y unicidades.

Algunas referencias valiosas relativas a las cuestiones que pretendemos abordar son, entre otras, Draux (1987a), Van Iseghem (1987) y Xu y Bultheel (1990), desde el

punto de vista de la Aproximación de Padé, y Berlinet (1982), Francq (1989) y Tiao y Tsay (1989), desde la perspectiva de los modelos VARMA.

Partiendo de estas consideraciones, la presente Memoria se estructura en cuatro capítulos:

En el primero se recopilan resultados básicos relativos a la aproximación de Padé en el caso escalar. A partir de ellos se establecen diferencias importantes entre este caso y el matricial y, con el propósito de dotar al último de ventajas similares, se delimita el marco de actuación elegido.

En el segundo, al tiempo que se presenta el estado actual de las cuestiones que queremos abordar, se desarrolla desde diferentes perspectivas el papel de la aproximación de Padé en la identificación y determinación de funciones racionales matriciales a partir de series formales de potencias cuyos coeficientes son matrices. En este sentido, se dan resultados que generalizan de forma relativamente directa los dados en el campo escalar obteniendo, por un lado, una caracterización por elementos y, por otro, condiciones necesarias que han de verificar las funciones racionales matriciales. Sin embargo, cobran un mayor interés las caracterizaciones que presentamos posteriormente así como las condiciones sobre minimalidad y unicidad a través de la teoría de rangos de matrices.

El tercer capítulo sintetiza en forma tabular las principales aportaciones del capítulo anterior, añadiendo también nuevos planteamientos teóricos relacionados con las mismas. Una variedad de ejemplos numéricos ilustran los resultados teóricos obtenidos así como las notables diferencias entre los casos escalar y matricial.

En el capítulo cuarto se presenta una de las posibles aplicaciones de los capítulos anteriores a la especificación de modelos de series temporales, en concreto a modelos VARMA. Para ello se comienza planteando las principales cuestiones que pueden ser tratadas con la metodología que proponemos así como algunas vías de

solución que se han dado desde otras vertientes. La ilustración de la técnica propuesta se lleva a cabo mediante varios ejemplos teóricos, la simulación de un modelo y la consideración, a efectos de comparar resultados, de datos reales ya tratados por otros autores.

Incluimos finalmente las conclusiones más relevantes, haciendo algunas reflexiones sobre cuestiones abiertas o extensiones para investigaciones futuras.

Cierran este trabajo, como es habitual, las referencias consultadas y citadas a lo largo del mismo.

CAPÍTULO I

LA APROXIMACIÓN DE PADÉ MATRICIAL

1.- INTRODUCCIÓN

El Análisis Numérico, una de las ramas de la Matemática Aplicada, se centra en la solución de problemas matemáticos por procedimientos aritméticos, esto es, en aproximar cantidades no aritméticas por otras que sí lo son y en establecer los errores asociados con tales aproximaciones. En cada situación existirán generalmente diversos métodos posibles para obtener la aproximación deseada, por lo que la elección de uno de ellos va a depender de los criterios que se utilicen para juzgarla de eficaz, en base a la magnitud de los errores a los que conducen así como al trabajo computacional.

En dicho contexto se plantea la conveniencia de realizar aproximaciones polinómicas a funciones reales o complejas dado que por su fácil evaluación, derivación e integración tienen reservado un puesto importante en la teoría de aproximación. No obstante, también se consideran otros tipos de funciones que conducen a aproximaciones útiles, como es el caso de las funciones exponenciales, trigonométricas o de Fourier, de uso también frecuente por su aplicabilidad general.

Así mismo, resulta de indudable actualidad el estudio de aproximaciones por medio de funciones racionales de los tipos anteriores. En este sentido, un caso particular lo constituyen los *aproximantes de Padé*¹. Como referencia de la investigación de los últimos años cabe señalar el estudio del denominado caso clásico y

¹ Véase por ejemplo Brezinski (1980) y Baker y Graves-Morris (1981, vol. I) así como las referencias al respecto citadas en ellos. Mientras que en el primero se presenta la aproximación de Padé como un caso particular de otro más general, esto es, la aproximación racional tipo-Padé, en el segundo se introduce directamente.

la generalización a otros tipos de aproximantes². En concreto, son numerosas las investigaciones que se han llevado a cabo a nivel vectorial y matricial³.

En este trabajo nos centramos en la generalización, no siempre trivial, del caso clásico al campo de la aproximación de Padé matricial. Tal y como se recoge en Baker (1975), los inicios del estudio a nivel matricial nos remiten a Gammel y McDonal (1966) si bien ha sido objeto de un desarrollo sustancial por Basdevant et al. (1969) y Zinn-Justin (1971). Además, un buen resumen es dado por Bessis (1973).

La referencia Draux (1984b) ha sido clave en nuestra investigación ya que en ella se recopilan y comentan brevemente 296 referencias sobre el tema. En los últimos años, los casos particulares que han recibido mayor atención en la literatura son el vectorial (Van Iseghem, 1986, 1987; Bultheel y Van Barel, 1990; Graves-Morris y Saff, 1991; Le Ferrand, 1992; Xu y Zhuang, 1993;...) y el matricial cuadrado (Baker, 1975; Von Sydow, 1977; Morimoto et al. 1978; Starkand, 1979; Bultheel, 1980; Baker y Graves-Morris, 1981, vol. II; Basu y Bose, 1983; Achuthan y Sundar, 1988; Basu, 1989; Labahn y Cabay, 1989; Xu, 1990;...). En particular, Draux (1983, 1987a) considera los aproximantes de Padé en un álgebra no conmutativa estableciendo propiedades básicas importantes; sin embargo, no llega a tratar el tema en toda su generalidad, entre otras razones, porque quedan fuera de contexto casos como el vectorial y, en general, cuando las matrices son de dimensión arbitraria (Rissanen, 1972; Shamash, 1975; Bose y Basu, 1980b; Xu y Li, 1990; Xu y Bultheel, 1990, 1992; Beckermann y Labahn, 1994;...).

² Véase, entre otros, Brezinski (1980, 1988), Baker y Graves-Morris (1981, vol. II), De Bruin (1984, 1988), Bultheel (1987), Draux (1987b), Van Iseghem (1991), Beckermann (1992), Cabay et al. (1992), Abouir y Cuyt (1993), etc.

³ Véase, entre otros, Bose y Basu (1980a), González (1986), Van Barel (1989), Van Barel y Bultheel (1992), González et al. (1992), Beckermann y Labahn (1992, 1994), etc.

Entre estos últimos, cabe destacar la forma en la que Xu y Bultheel (1990) llevan a cabo la generalización del caso escalar al matricial, tratando separadamente los elementos de una matriz de dimensión arbitraria. Por supuesto, en el caso más general por ellos analizado es mucho más difícil obtener "buenas" caracterizaciones, propiedades, condiciones de existencia, etc.

Desde el punto de vista de las aplicaciones, éstas se han llevado a cabo principalmente en el campo de la Física teórica⁴. Además, también Draux (1984a) muestra el papel que juegan los aproximantes de Padé, por un lado, en la aproximación a la exponencial de una matriz que aparece en la resolución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y, por otro lado, en el problema de la realización parcial por una sucesión de matrices. Así mismo, en el campo del Análisis Numérico la utilización de los aproximantes de Padé matriciales resulta especialmente valiosa como técnica de aceleración de la convergencia de ciertos problemas vectoriales y matriciales (Wynn, 1962; Xu y Zhuang, 1993).

Al mismo tiempo, la relación de la aproximación de Padé matricial con otros temas ha permitido impulsar y enriquecer la investigación en todos ellos. Así, los polinomios ortogonales matriciales (Draux, 1982), las fracciones continuas matriciales (Wynn, 1963) y el ϵ -algoritmo matricial (Draux, 1987c) se interrelacionan motivando nuevos resultados en cada uno de éstos. Por ejemplo, bajo condiciones iniciales, las relaciones de recurrencia entre polinomios ortogonales son utilizadas para obtener relaciones entre aproximantes de Padé que sugieren, a su vez, la construcción de algoritmos para la computación de los mismos (Draux, 1983). Otro ejemplo de este tipo lo tenemos en Basu y Bose (1983) donde, con el objetivo de demostrar relaciones entre los aproximantes racionales y la teoría de redes, se establecen equivalencias entre los

⁴ Veáse referencias en Draux (1984b).

aproximantes de Padé matriciales a ciertas series y las fracciones continuas matriciales; además, se presentan algunos resultados relacionados con polinomios ortogonales.

En este sentido, la extensa literatura sobre el problema de la realización parcial minimal en teoría de sistemas lineales manifiesta la relación existente entre este campo y la aproximación de Padé (Bultheel y Van Barel, 1986). En tal caso, si los sistemas tienen múltiples inputs y múltiples outputs, estamos ante un problema de aproximación matricial estrechamente relacionado con el problema de Padé matricial. Este contexto ha motivado la definición de una clase de aproximantes de Padé llamados *aproximantes de Padé matriciales minimales* (Bultheel y Van Barel, 1988, 1990; Van Barel, 1989).

La metodología considerada por Tiao y Tsay (1989) para identificar modelos VARMA en series temporales presenta bastantes puntos de conexión con la aproximación de Padé matricial, aunque aparentemente se desarrolla con independencia de esta última. Así mismo, la aplicación de métodos relacionados con la aproximación racional a modelos VARMA ha sido tratada, entre otros, por Berlinet (1982) y Francq (1989).

En este sentido, la presente investigación se dirige a la búsqueda de métodos para caracterizar funciones racionales matriciales, ya que ello permitirá identificar modelos racionales en el ámbito del análisis de series temporales.

Estableciendo como punto de referencia el caso clásico y con el objetivo de conseguir resultados análogos para el caso matricial, en el presente capítulo se recopilan resultados básicos relativos a la aproximación de Padé escalar, los cuales nos permiten introducir los puntos característicos del problema matricial, indicando al mismo tiempo algunas de las soluciones propuestas en la literatura a fin de crear un contexto adecuado para su tratamiento. Así mismo, se introducen los principales conceptos con los que trabajaremos y se delimita el marco de actuación elegido.

2.- APROXIMACIÓN DE PADÉ. CASO CLÁSICO

En este apartado nos referimos al caso clásico de la aproximación de Padé, centrándonos, por ser la base de la investigación que se lleva a cabo en los capítulos posteriores, en las ecuaciones de Padé, la existencia y unicidad del aproximante, la Tabla C, la Tabla de Padé y la caracterización de la racionalidad de una función a través de la Tabla C⁵.

Definición 1.1

Dado un desarrollo formal en serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \quad c_i, z \in \mathbb{C} \text{ (plano complejo)} \quad (1.1)$$

se denomina *aproximante de Padé (AP)* $[q/p]_f$, donde $q, p \geq 0$, a la función racional $n_q(z)/d_p(z)$ finita en $z=0$, siendo $n_q(z) = n_0 + n_1z + \dots + n_qz^q$ y $d_p(z) = d_0 + d_1z + \dots + d_pz^p$ polinomios de grados exactos q y p respectivamente, verificando:

$$f(z) - n_q(z)/d_p(z) = r(z) = O(z^{q+p+1}) \quad (1.2)$$

Es decir, al menos los coeficientes de las potencias de órdenes menores o iguales que $p+q$ de $f(z)$ coinciden con los del desarrollo de Taylor, centrado en $z=0$, del aproximante $[q/p]_f$.

A $n_q(z)$, $d_p(z)$ y $r(z)$ se les denomina *numerador*, *denominador* y *residuo* del AP, respectivamente.

Se asume que $f(z)$ existe en un entorno de $z=0$, con lo cual las manipulaciones resultan sustancialmente más simples. Si, por el contrario, el desarrollo no se realiza en

⁵ Para mayor detalle ver Baker y Graves Morris (1981, vol. I).

un entorno de $z=0$ un simple cambio de variable conducirá a ello. Por otro lado y sin pérdida de generalidad, la elección $d_p(0)=1$ como condición de normalización garantiza la unicidad de la representación en forma reducida del aproximante.

2.1.- ECUACIONES DE PADÉ

Multiplicando la expresión (1.2) a ambos lados por $d_p(z)$ e igualando los coeficientes de las potencias del mismo grado se obtienen las siguientes ecuaciones, denominadas *ecuaciones de Padé*, que determinan los coeficientes del numerador y denominador del AP:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= n_0 \\
 d_1 c_0 + c_1 &= n_1 \\
 d_2 c_0 + d_1 c_1 + c_2 &= n_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 d_p c_{q-p} + \dots + d_2 c_{q-2} + d_1 c_{q-1} + c_q &= n_q \\
 d_p c_{q-p+1} + \dots + d_2 c_{q-1} + d_1 c_q + c_{q+1} &= 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 d_p c_q + \dots + d_2 c_{q+p-2} + d_1 c_{q+p-1} + c_{q+p} &= 0
 \end{aligned}$$

considerando $c_i=0$ si $i<0$.

Una vez calculados los coeficientes del denominador a partir de las p últimas ecuaciones, se determinan los coeficientes del numerador a partir de las $q+1$ primeras.

2.2.- EXISTENCIA Y UNICIDAD

Considerando que el sistema formado por las p últimas ecuaciones se puede representar matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} c_{q-p+1} & c_{q-p+2} & \cdot & \cdot & c_q \\ c_{q-p+2} & c_{q-p+3} & \cdot & \cdot & c_{q+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_q & c_{q+1} & \cdot & \cdot & c_{q+p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_p \\ d_{p-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ d_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{q+1} \\ c_{q+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{q+p} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

el determinante de Hankel asociado, esto es,

$$C(q,p) = \begin{vmatrix} c_{q-p+1} & c_{q-p+2} & \cdot & \cdot & c_q \\ c_{q-p+2} & c_{q-p+3} & \cdot & \cdot & c_{q+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_q & c_{q+1} & \cdot & \cdot & c_{q+p-1} \end{vmatrix}$$

se convierte en una herramienta adecuada para el estudio de la *existencia* y *unicidad* del aproximante. Nótese que si $C(q,p)=0$ entonces o el AP $[q/p]_f$ no existe porque el sistema (1.3) es incompatible, o éste tiene infinitas soluciones y el AP es reducible a otro de orden menor. En cambio, si $C(q,p) \neq 0$ el sistema (1.3) tiene solución única.

2.3.- LA TABLA C

Se denomina *Tabla C*, asociada a la serie (1.1), a la tabla infinita de doble entrada siguiente, construida a partir de los determinantes de Hankel colocando el $C(q,p)$ en la intersección de la columna q y la fila p :

	0	1	2	3	.	q	.
0	$C(0,0)$	$C(1,0)$	$C(2,0)$	$C(3,0)$.	.	.
1	$C(0,1)$	$C(1,1)$	$C(2,1)$
2	$C(0,2)$	$C(1,2)$
3	$C(0,3)$
.
p	$C(q,p)$.
.

Se asume por definición que $C(j,0)=1$.

Se dice que la serie $f(z)$ es *normal* si todos los elementos de la Tabla C son distintos de cero. Ahora bien, en el caso de no normalidad de la serie, cuando el sistema (1.3) no sea compatible determinado, la tabla C presentará una estructura de bloques cuadrados, formados por valores nulos, rodeados por elementos no nulos; además, si $c_0=c_1=\dots=c_{i-1}=c_i=0$ y $c_{i+1}\neq 0$ aparece un bloque rectangular infinito, formado por valores nulos, con esquina superior izquierda la $(0,1)$ y superior derecha la $(i,1)$.

2.4.- LA TABLA DE PADÉ

Padé (1892) fue el primero en enfatizar la importancia de disponer los aproximantes de Padé en forma tabular, esto es,

	0	1	2	3	...
0	$[0/0]_f$	$[1/0]_f$	$[2/0]_f$	$[3/0]_f$...
1	$[0/1]_f$	$[1/1]_f$	$[2/1]_f$	$[3/1]_f$...
2	$[0/2]_f$	$[1/2]_f$	$[2/2]_f$	$[3/2]_f$...
3	$[0/3]_f$	$[1/3]_f$	$[2/3]_f$	$[3/3]_f$...
...
...

En esta tabla, denominada *Tabla de Padé*, aparece también una estructura de bloques que reproduce el comportamiento de la Tabla C asociada tal y como refleja el siguiente resultado.

Teorema 1.1 (Padé, 1892)⁶

La Tabla de Padé puede ser seccionada en bloques cuadrados de tamaño $h \times h$, $h > 1$. Sea $[s/r]_f$ el elemento *minimal* único ($s+r$ =mínimo) de un bloque $h \times h$, entonces:

- i) $C(s+j, r+m) = 0$ si $1 \leq j \leq h-1$ y $1 \leq m \leq h-1$.
- ii) $C(s, r+m) \neq 0$, $C(s+m, r+h) \neq 0$ si $0 \leq m \leq h$.
- iii) $C(s+j, r) \neq 0$, $C(s+h, r+j) \neq 0$ si $0 \leq j \leq h$.
- iv) Existe $[s/r]_f$ y tanto el numerador como el denominador son de grados mínimos.
- v) $[s+j/r+m]_f = [s/r]_f$ si $j+m \leq h-1$, $0 \leq j$ y $0 \leq m$.
- vi) No existen los aproximantes $[s+j/r+m]_f$ si $h \leq j+m$, $1 \leq j \leq h-1$ y $1 \leq m \leq h-1$.

⁶ La demostración de este teorema puede encontrarse en Baker (1975).

Por tanto, dado un bloque de ceros $(h-1)_x(h-1)$ en la Tabla C, tendremos un bloque $h \times h$ en la Tabla de Padé para el cual se verifica que todos los AP por encima de la antidiagonal serán reducibles a la misma forma irreducible del elemento superior izquierdo del bloque mientras que por debajo de la antidiagonal no existen los aproximantes de Padé.

Gráficamente reflejamos para $h=4$ un bloque hipotético de tamaño $(h-1)_x(h-1)$ en la Tabla C y su correspondiente bloque de tamaño $h \times h$ en la Tabla de Padé:

x	x	x	x
x	0	0	0
x	0	0	0
x	0	0	0

$[s/r]_f$	red	red	red
red	com	com	inc
red	com	inc	inc
red	inc	inc	inc

red: denota un AP con determinante de Hankel no singular que es reducible al aproximante $[s/r]_f$.

com: denota un AP con determinante de Hankel singular, pero determinado por un sistema de ecuaciones compatibles, que también es reducible al aproximante $[s/r]_f$.

inc: denota que las ecuaciones de Padé son incompatibles y, por tanto, el aproximante no existe.

2.5.- CARACTERIZACIÓN DE RACIONALIDAD

La Tabla C constituye una herramienta fundamental para la caracterización de una función racional a la vez que permite obtener los grados de los polinomios que la representan en su forma reducida. En este sentido y como consecuencia del teorema 1.1, cuando la función es racional la Tabla C presenta una estructura especial en la esquina inferior derecha de la misma donde aparece un *cuadrado infinito* formado por elementos nulos; dicho cuadrado está bien delimitado ya que sus bordes superior e izquierdo están rodeados por elementos no nulos. Esta caracterización queda recogida en el resultado que sigue a continuación:

Teorema 1.2 (Baker, 1975)

Dada una serie formal de potencias $f(z)$, las tres condiciones siguientes son equivalentes:

$$i) f(z) = \frac{\sum_{i=0}^q n_i z^i}{1 + \sum_{i=1}^p d_i z^i}$$

$$ii) f(z) = [j/m]_f \quad \text{para cualesquiera } j \geq q \text{ y } m \geq p$$

$$iii) C(q+h,p) \neq 0, C(q,p+h) \neq 0 \text{ para cualquier } h \geq 0 \text{ y } C(j,m) = 0 \text{ si } j > q \text{ y } m > p.$$

Tal y como se refleja en la siguiente tabla, asociada a la función de este teorema, la esquina superior izquierda del *cuadrado* de lado *infinito* es la casilla $(q+1,p+1)$ y sus bordes superior e izquierdo están rodeados por elementos distintos de cero.

	0	1	.	.	q-1	q	q+1
0												
1												
.												
.												
p-1												
p						x	x	x	x	x	x	.
p+1						x	0	0	0	0	0	.
.						x	0	0	0	0	0	.
.						x	0	0	0	0	0	.
.						x	0	0	0	0	0	.
.					

3.- APROXIMACIÓN DE PADÉ. CASO MATRICIAL

3.1.- CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES

Partimos de una serie formal de potencias $F(z)$ con coeficientes matriciales:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad c_k \in C^{m \times n} \quad z \in C \quad (1.4)$$

donde $C^{m \times n}$ contiene todas las matrices $m \times n$ con sus elementos en el plano complejo C . El problema consiste en determinar, si es posible, una función racional $D^{-1}(z)N(z)$ que aproxime a $F(z)$ mediante la ecuación

$$D(z)F(z) - N(z) = R(z)$$

donde $N(z)$ y $D(z)$ son matrices $m \times n$ y $m \times m$ respectivamente, cuyos elementos son polinomios en z , y $R(z)$ es una matriz $m \times n$ con ciertas restricciones (condiciones de

aproximación) sobre sus elementos. A $N(z)$, $D(z)$ y $R(z)$ se les denomina *numerador*, *denominador* y *residuo del aproximante*, respectivamente ⁷.

En la literatura pueden encontrarse diferentes definiciones de aproximantes de Padé matriciales (APM) dependiendo de las restricciones que se impongan a $D(z)$, $N(z)$ y $R(z)$. En principio, una condición natural es que los APM constituyan una generalización de los AP ya que éstos deben obtenerse en el caso particular $m=n=1$. Además, en general se desea garantizar que las ecuaciones que definan el aproximante tengan solución única. Decimos "en general" ya que puede suceder que en algunos casos el problema carezca de solución o, por el contrario, tenga infinitas. Partiendo de esta condición, en el caso escalar se dan límites superiores para los grados del numerador y el denominador y entonces su suma constituye un límite inferior estricto para el orden del residuo de la aproximación. De forma más general, dados límites para dos de estos tres números un límite para el tercero resulta inmediato.

Seguidamente exponemos aquellos aspectos más relevantes del problema matricial, indicando algunas de las soluciones propuestas en la literatura.

a) La *no conmutatividad* del producto de matrices

Este hecho obliga a definir por separado los aproximantes izquierdo y derecho, según consideremos el denominador a la izquierda o a la derecha en la expresión del APM.

⁷ De la misma forma se puede plantear el problema de determinar una función racional $N_*(z)D_*^{-1}(z)$ que aproxime a $F(z)$ por la ecuación $F(z)D_*(z) - N_*(z) = R_*(z)$, donde $N_*(z)$ y $D_*(z)$ son matrices $m \times n$ y $n \times n$ respectivamente, cuyos elementos son polinomios, y $R_*(z)$ es una matriz $m \times n$ con ciertas restricciones sobre sus elementos.

b) *La elección de grados y órdenes*

Esta elección depende de la aplicación que se desee llevar a cabo y estará motivada teóricamente por la posibilidad de obtener "buenas" propiedades y algoritmos computacionalmente "tratables". El caso más general surge al considerar el numerador y el denominador como matrices con entradas polinomiales escalares en la variable z . Así, se trata de elegir grado para cada entrada del numerador y del denominador asociando un orden a cada entrada del residuo. A partir de esta idea, casos particulares más asequibles son:

i) considerar el numerador y el denominador como polinomios en la variable z con coeficientes matriciales, elegir un grado para cada uno de ellos y un orden global para el residuo.

ii) elegir un grado para cada columna o para cada fila del numerador y del denominador y un orden para cada fila o columna del residuo.

En Xu y Bultheel (1990) se recoge una variedad de casos en los que se hacen diferentes elecciones de los grados y órdenes y se estudian las ventajas e inconvenientes que tiene cada elección. En algunos de estos casos, la restricción de que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones, en los tipos de aproximantes definidos, implica severas condiciones sobre las dimensiones matriciales del problema, a saber m y n , así mismo sobre los órdenes y grados del aproximante.

c) *Los criterios de normalización*

Los distintos criterios de normalización dan lugar a tipos diferentes de APM, no siempre equivalentes. El criterio más común en el caso escalar es asignar al término independiente del denominador la unidad o una constante no nula. Como es sabido, esta normalización se considera con el propósito de garantizar la unicidad del aproximante

de Padé. Una función racional cociente de dos polinomios de grados v y u respectivamente, tiene $v+u+2$ coeficientes. Si añadimos la normalización anterior sólo $v+u+1$ están disponibles para satisfacer las condiciones de aproximación.

En el caso matricial el número de coeficientes que pueden ser fijados sin cambiar la estructura de grados ni la función racional depende de los grados de cada uno de los polinomios escalares. Por tanto, como este punto conecta con la elección de grados y órdenes abordar el problema completamente resulta muy complicado. Una elección razonable si uno está en las proximidades de $z=0$ es tomar, por ejemplo, $D(0)=I$ (matriz identidad), condición natural que garantiza que $D^{-1}(z)N(z)$ está bien definido en torno a $z=0$ y a la vez aproxima a la función $F(z)$ precisamente en dicho entorno⁸.

d) El concepto de *irreducibilidad*

En la búsqueda de representaciones racionales parsimoniosas es comúnmente asumida la hipótesis de que los polinomios asociados son irreducibles. En el caso matricial, este concepto no resulta una extensión unívoca del existente en el caso escalar, razón por la cual hemos encontrado al menos dos definiciones diferentes en la literatura.

Definición 1.2 (Draux, 1983)

Dos polinomios $V(z)$ y $W(z)$ se dicen *reducibles a izquierda* si existe $U(z)$ -un polinomio de grado mayor o igual que uno, con coeficiente independiente invertible- tal que, para ciertos polinomios $V_*(z)$ y $W_*(z)$, $V(z)=U(z)V_*(z)$ y $W(z)=U(z)W_*(z)$. Entonces, si $V(z)$ es invertible tenemos que

$$V^{-1}(z)W(z) = V_*^{-1}(z)W_*(z).$$

⁸ Otras normalizaciones, inspiradas por el problema de realización parcial minimal, pueden verse en Xu y Bultheel (1990) y en Bultheel y Van Barel (1988).

Si no existe dicho factor común $U(z)$ entonces se dice que los polinomios $V(z)$ y $W(z)$ son *irreducibles a izquierda*⁹.

Definición 1.3 (Reinsel, 1993)

Los polinomios $V(z)$ y $W(z)$, siendo $V(z)$ invertible, son llamados *left-comprime* y la representación $F(z)=V^{-1}(z)W(z)$ se dice *irreducible* si $V(z)$ y $W(z)$ no tienen otros factores comunes que los unimodulares¹⁰, es decir, si $V(z)=U(z)V_*(z)$ y $W(z)=U(z)W_*(z)$ entonces $\det\{U(z)\}$ es una constante no nula.

Esta segunda definición es, por admitir ciertos factores comunes, menos restrictiva que la primera. En ninguna de las dos definiciones se hace referencia al papel que juegan los grados de los polinomios que intervienen. Como veremos más adelante, en el caso matricial la cancelación de factores comunes no implica necesariamente la reducción de los grados de los polinomios.

Debido a que la situación es notablemente diferente al caso escalar, es natural que surjan nuevos conceptos para acercarse, desde otro punto de vista, a la búsqueda de representaciones que conlleven una reducción en el número de coeficientes polinomiales así como en el número de elementos no nulos de los mismos. Algunas de las posibles opciones consisten en definir tipos de minimalidades basados en los grados de los polinomios que intervienen, considerándolos individual o conjuntamente.

⁹ De forma similar puede ser dada la definición de *irreducibles a derecha*. Si no existen $U(z)$, $V_*(z)$ y $W_*(z)$ tales que $U(z)$ es de grado mayor o igual que uno, $U(0)$ es invertible, $V(z)=V_*(z)U(z)$ y $W(z)=W_*(z)U(z)$, entonces $W(z)$ y $V(z)$ son irreducibles a derecha (Draux, 1983).

¹⁰ Un polinomio matricial cuya inversa es otro polinomio se caracteriza por el hecho de que su determinante es una constante no nula y es llamado *unimodular*.

e) La *unicidad* de la representación

Dado un aproximante, en el caso escalar la representación irreducible de éste es única. Una cuestión lógica que se plantea entonces en el caso matricial es la de si podemos encontrar un único par de polinomios para representar un cierto aproximante de forma irreducible.

Como se ha puesto de manifiesto, las posibilidades de investigación que se tienen en el campo de la aproximación de Padé matricial son muchas, pero algunas son suficientemente complicadas y han sido, por ahora, abandonadas por algunos autores después de serios intentos por abordar el problema.

Así, después del caso escalar, se ha prestado especial atención a la aproximación vectorial y a la aproximación matricial bajo la consideración de que el numerador y el denominador son polinomios con coeficientes matriciales, lo cual tiene además una justificación práctica debido a las aplicaciones que se conectan con esta teoría.

En nuestro caso, vamos a tratar la aproximación matricial bajo la siguiente consideración:

Definición 1.4

Sea $F(z)$ la serie formal de potencias (1.4). Suponiendo que existen los polinomios matriciales:

$$B_h(z) = \sum_{i=0}^h b_i z^i, \quad b_i \in C^{m \times n}; \quad N_h(z) = \sum_{i=0}^h n_i z^i, \quad n_i \in C^{m \times n} \quad i = 1, \dots, h$$

$$A_g(z) = \sum_{j=0}^g a_j z^j, \quad a_j \in C^{n \times n}; \quad D_g(z) = \sum_{j=0}^g d_j z^j, \quad d_j \in C^{m \times m} \quad j = 1, \dots, g$$

siendo $A_g(0)=a_0=I_{n \times n}$ y $D_g(0)=d_0=I_{m \times m}$, verificando:

$$F(z) - B_h(z)A_g^{-1}(z) = O(z^{h+g+1})$$

$$F(z) - D_g^{-1}(z)N_h(z) = O(z^{h+g+1})$$

se dice que $B_h(z)A_g^{-1}(z)$ es un *aproximante de Padé matricial derecho* y se denota ${}^D[h/g]_F(z)$; de la misma forma, se dice que $D_g^{-1}(z)N_h(z)$ es un *aproximante de Padé matricial izquierdo* y se denota ${}^I[h/g]_F(z)$.

Por otro lado, utilizamos la notación ${}^I[h/g]_F$ para el conjunto de todos los posibles aproximantes ${}^I[h/g]_F(z)$ y ${}^D[h/g]_F$ para el conjunto de todos los posibles ${}^D[h/g]_F(z)$ ¹¹.

Esta definición es la que aparece también en Baker (1975), Morimoto et al. (1978), Baker y Graves-Morris (1981, vol. II), Draux (1987a), Achuthan y Sundar (1988), Xu (1990),... para el caso cuadrado y en Bose y Basu (1980b) para el rectangular. Además, dicha elección está justificada, en particular, por el estudio de métodos racionales para series temporales, aplicación que presentaremos en el capítulo IV.

3.2.- ECUACIONES DE PADÉ

Como consecuencia de la definición dada podemos decir que:

. Existe ${}^D[h/g]_F(z)$, o lo que es lo mismo, ${}^D[h/g]_F$ no es vacío si, y sólo si, el *sistema derecho* siguiente tiene solución:

¹¹ Queremos llamar la atención sobre la forma en que hemos denotado el aproximante, considerándolo como una función de z , para distinguirlo del conjunto de aproximantes. Creemos que esta consideración contribuye a una mayor claridad en los conceptos y, en particular, en los resultados sobre unicidad.

$$\left. \begin{array}{l} c_{h-g+1} a_g + c_{h-g+2} a_{g-1} + \dots + c_h a_1 = -c_{h+1} \\ c_{h-g+2} a_g + c_{h-g+3} a_{g-1} + \dots + c_{h+1} a_1 = -c_{h+2} \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ c_h a_g + c_{h+1} a_{g-1} + \dots + c_{h+g-1} a_1 = -c_{h+g} \end{array} \right\} \text{SD}(h,g)$$

Nótese que la resolución de este sistema es equivalente a la resolución de n sistemas escalares correspondientes a cada una de las n columnas de $A_g(z)$.

. Existe ${}^I[h/g]_F(z)$, o lo que es lo mismo, ${}^I[h/g]_F$ no es vacío si, y sólo si, el *sistema izquierdo* siguiente tiene solución:

$$\left. \begin{array}{l} d_g c_{h-g+1} + d_{g-1} c_{h-g+2} + \dots + d_1 c_h = -c_{h+1} \\ d_g c_{h-g+2} + d_{g-1} c_{h-g+3} + \dots + d_1 c_{h+1} = -c_{h+2} \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ d_g c_h + d_{g-1} c_{h+1} + \dots + d_1 c_{h+g-1} = -c_{h+g} \end{array} \right\} \text{SI}(h,g)$$

Nótese que la resolución de este sistema es equivalente a la resolución de m sistemas escalares correspondientes a cada una de las m filas de $D_g(z)$.

En ambos casos se considera $c_i=0$ si $i<0$.

Dados los coeficientes matriciales a_1, a_2, \dots, a_g de $A_g(z)$, los coeficientes de $B_h(z)$ se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= c_0 \\
 b_1 &= c_0 a_1 + c_1 \\
 b_2 &= c_0 a_2 + c_1 a_1 + c_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 b_h &= c_0 a_h + c_1 a_{h-1} + \dots + c_h
 \end{aligned}$$

considerando $a_i=0$ si $i>g$. Así mismo, dados los coeficientes matriciales d_1, d_2, \dots, d_g de $D_g(z)$, los coeficientes de $N_h(z)$ son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 n_0 &= c_0 \\
 n_1 &= d_1 c_0 + c_1 \\
 n_2 &= d_2 c_0 + d_1 c_1 + c_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 n_h &= d_h c_0 + d_{h-1} c_1 + \dots + c_h
 \end{aligned}$$

considerando $d_i=0$ si $i>g$.

3.3.- EXISTENCIA, UNICIDAD Y MINIMALIDAD

En el caso escalar, dada una función racional o , en particular, un aproximante de Padé, existe *una y sólo una* representación irreducible o *minimal*. Esta representación se dice minimal porque los grados de los polinomios son los más pequeños posibles. Todas las demás representaciones racionales de la función son obtenidas multiplicando los polinomios del numerador y denominador de la representación minimal por un mismo polinomio.

En el caso matricial estos aspectos han de ser tratados con mayor detalle ya que las relaciones entre ellos presentan una mayor complejidad, como se refleja en los siguientes apartados.

3.3.1.- Existencia y unicidad

Como consecuencia de la definición 1.4, el problema de la existencia y unicidad del aproximante en el caso matricial es doble. Aquí nos encontramos con el hecho de que el determinante de Hankel $C(q,p)$, análogo al caso escalar, pierde protagonismo, entre otras razones, porque sólo tiene sentido cuando las matrices son cuadradas ($m=n$). Para este caso concreto, si $C(q,p) \neq 0$ entonces los sistemas $SD(q,p)$ y $SI(q,p)$ tienen solución única. En cambio, si $C(q,p)=0$ la compatibilidad o incompatibilidad de cada uno de los sistemas es independiente de la del otro y, evidentemente, en este último caso de compatibilidad se tienen infinitas formas de representar el aproximante que exista.

Para el caso de matrices de dimensión arbitraria, en Bose y Basu (1980b) las condiciones de existencia son dadas utilizando el rango de las matrices asociadas a los sistemas $SI(h,g)$ y $SD(h,g)$ mediante el hecho bien conocido de que un sistema de ecuaciones lineales, descrito en forma matricial por $AX=B$, tiene solución X si, y sólo si, $\text{rango}(A)=\text{rango}(A:B)$ (Teorema de Rouché-Frobenius).

Nótese que los aproximantes de Padé no tienen que existir necesariamente y, en cualquier caso, la existencia no asegura la unicidad aunque los polinomios que lo formen sean irreducibles. Esto último se observa por ejemplo en la siguiente función y representa una notable diferencia con respecto al caso escalar.

Ejemplo 1.1

Sea el polinomio matricial 2×3

$$F(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} z^2.$$

En este caso los conjuntos ${}^I[0/1]_F$ y ${}^D[0/1]_F$ son vacíos. Además, aunque existe ${}^I[1/1]_F(z)$ y puede ser representado como

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ -1 & b \end{pmatrix} z \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) z,$$

donde a y b son constantes arbitrarias, no existe ${}^D[1/1]_F(z)$. Nótese que ${}^I[1/1]_F$ no tiene un único elemento; para ello, obsérvese por ejemplo el tercer coeficiente del desarrollo en serie que, de forma genérica, es

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, un ejemplo en el que existe ${}^I[i/j]_F(z)$ si, y sólo si, existe ${}^D[i/j]_F(z)$ se tiene cuando $F(z)$ es una función simétrica cualquiera; nótese que el caso escalar es un caso particular.

Independientemente del problema de factores comunes, en el caso matricial pueden existir otras causas de multiplicidad de la representación que no están presentes en el caso escalar. A modo de ejemplos comentamos los siguientes:

a) En algunos casos, dos aproximantes con representaciones irreducibles y con diferentes pares de grados pueden dar lugar al mismo desarrollo en serie, o lo que es lo mismo, una función racional puede ser representada de forma irreducible por dos pares de polinomios cuyos pares de grados asociados son diferentes.

La existencia de estas representaciones puede ser causada, en particular, por la presencia de un factor matricial unimodular en el polinomio del numerador o del denominador. Por ejemplo, si $F(z)=U^{-1}(z)B(z)$ donde $U(z)$ es unimodular, $F(z)$ es *equivalentemente representable* como ${}^I C(z)$, donde $C(z)=U^{-1}(z)B(z)$ es un polinomio

ya que $U^{-1}(z)$ también lo es. Esto se puede observar en la siguiente función, que puede ser representada de forma irreducible como $[0/2]_F(z)$, $[1/1]_F(z)$ y $[2/0]_F(z)$.

Ejemplo 1.2

Sea la función racional

$$F(z) = \left(I + \begin{pmatrix} -1/2 & -15/4 \\ -3/4 & 1/2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 7/2 & 7/4 \\ -7/8 & -7/16 \end{pmatrix} z^2 \right)^{-1}.$$

Por un lado

$$F(z) = \left(I + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} z \right)^{-1} \left(I + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix} z \right)$$

ya que

$$I + \begin{pmatrix} -1/2 & -15/4 \\ -3/4 & 1/2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 7/2 & 7/4 \\ -7/8 & -7/16 \end{pmatrix} z^2 = \left(I + \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} z \right) \left(I + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} z \right)$$

siendo unimodulares cada uno de estos polinomios. Por otro lado, también

$$F(z) = I + \begin{pmatrix} 1/2 & 15/4 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -7/16 & -7/4 \\ 7/8 & 7/2 \end{pmatrix} z^2.$$

b) Dos representaciones del aproximante $[h/g]_F(z)$, con diferentes coeficientes matriciales y no reducibles a otras de grados menores, pueden dar lugar a los mismos coeficientes en la representación en serie formal de potencias del mismo, es decir, $[h/g]_F(z) = A_g^{-1}(z)B_h(z) = C_g^{-1}(z)D_h(z)$ siendo $A_g(z) \neq C_g(z)$ y $B_h(z) \neq D_h(z)$.

Ejemplo 1.3

Considérese $h=g=1$ y

$$A_1(z) = I + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \qquad B_1(z) = I + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z$$

$$C_1(z) = I + Iz \qquad D_1(z) = I + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z.$$

c) También hay que resaltar el hecho de que, a diferencia de lo que ocurre en el caso clásico, aunque existan factores comunes puede suceder que la cancelación de los mismos deje inalterados los grados de los polinomios que resultan. Esto queda ilustrado a continuación.

Ejemplo 1.4

Sean

$$A_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \quad \text{y} \quad B_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z.$$

Considerando

$$U(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z,$$

se tiene que

$$A_1(z) = U(z) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \right) \quad \text{y} \quad B_1(z) = U(z) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \right).$$

Además

$$A_1(z) = U(z)U(z) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \right) \quad \text{y} \quad B_1(z) = U(z)U(z) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \right)$$

ya que

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \right) = U(z) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \right)$$

y

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \right) = U(z) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \right).$$

d) Puede ocurrir que exista un elemento de ${}^1[h/g]_F$ que sea idéntico a $F(z)$ y otro que no lo sea.

Ejemplo 1.5

$$F(z) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z^2 \right) \in {}^I[2/1]_F$$

y, sin embargo, aunque el aproximante

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z^2 \right) \in {}^I[2/1]_F$$

no es idéntico a $F(z)$.

A la luz de las diversas situaciones que pueden presentarse consideramos que para poder llevar a cabo un estudio en profundidad, en el caso matricial es necesario distinguir entre tres tipos diferentes de unicidades. Con este propósito damos las siguientes definiciones. Como los resultados van a ser fácilmente trasladables al aproximante derecho, nos centraremos sólo en el izquierdo por ser éste el que aparece en la aplicación del capítulo cuarto.

Definición 1.5 (*Unicidad del aproximante ${}^I[h/g]_F(z)$*)

Decimos que el aproximante ${}^I[h/g]_F(z)$ es único cuando ${}^I[h/g]_F$ tiene un único elemento.

Definición 1.6 (*Unicidad de la representación de ${}^I[h/g]_F(z)$*)

Decimos que la representación de ${}^I[h/g]_F(z)$ es única cuando el sistema $SI(h,g)$ tiene una única solución, en cuyo caso, el par de polinomios que representan ${}^I[h/g]_F(z)$ es único.

Definición 1.7 (*Unicidad de la representación izquierda de $F(z)$ para los grados (h,g)*)

Decimos que la función $F(z)$ tiene una única representación izquierda para (h,g) cuando existe un único par de polinomios $H_h(z)$ y $G_g(z)$ de grados h y g respectivamente, verificando $G_g(0)=I$ y $F(z) \equiv G_g^{-1}(z)H_h(z)$.

Nótese que:

. La unicidad de la representación de ${}^I[h/g]_F(z)$ implica la unicidad del aproximante ${}^I[h/g]_F(z)$ y en caso de ser ${}^I[h/g]_F(z) \equiv F(z)$ implicaría, también, la unicidad de la representación izquierda de $F(z)$ para los grados (h,g) .

. La unicidad del aproximante no implica la unicidad de su representación, ni la unicidad de la representación izquierda de $F(z)$.

. La unicidad de la representación izquierda de $F(z)$ para los grados (h,g) no implica la unicidad del aproximante ${}^I[h/g]_F(z)$ y, por tanto, tampoco la unicidad de la representación de ${}^I[h/g]_F(z)$.

Para ilustrar y resaltar las diferencias "sutiles" existentes entre los tres tipos de unicidades definidos vamos a considerar en detalle la función polinómica del siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6

Sea $F(z)$ el polinomio matricial 3×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z^2.$$

En lo relativo a los tipos de unicidades se tiene que:

. Cualquier aproximante ${}^I[i/j]_F(z)$ para $i \geq 2$ y $j \geq 0$ es único.

. La representación de ${}^I[2/0]_F(z)$ es única y por tanto también lo es la de $F(z)$ para el par $(2,0)$.

. La representación de ${}^I[1/1]_F(z)$ no es única ya que los elementos de ${}^I[1/1]_F$ se representan de forma genérica como sigue:

$$\left(I + \begin{pmatrix} a & b & -1-a-b \\ c & d & -d-c \\ e & f & -1-e-f \end{pmatrix} z \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+a & b \\ 1+c & d \\ 1+e & f \end{pmatrix} z \right)$$

y, de todos ellos, sólo hay uno cuyo desarrollo coincide con la función $F(z)$; éste se obtiene considerando $b=f=-1$ y $d=0$. Como los parámetros a , c y e quedan libres, la representación izquierda de $F(z)$ para $(1,1)$ no es única.

. La representación de ${}^I[0/2]_F(z)$ no es única ya que los elementos de ${}^I[0/2]_F$ se representan de forma genérica como

$$\left(I + \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ -1 & 0 & f \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -a & 0 & c \\ 1-f & 0 & d \\ -b & 0 & e \end{pmatrix} z^2 \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De éstos sólo hay uno que coincide con $F(z)$ y es aquél con $a=b=c=e=f=1$ y $d=0$; por tanto, la representación izquierda de $F(z)$ para el par $(0,2)$ sí es única, aunque no lo sea la del aproximante correspondiente.

En este trabajo llevaremos a cabo el estudio de la unicidad sin imponer condiciones para que el sistema que proporciona los coeficientes del polinomio del denominador tenga solución única. De una forma más general, aportamos algunos resultados teóricos para abordar el estudio de los tipos de unicidades antes definidos, sin necesidad de restricciones externas que actúen a modo de condiciones suficientes para obtener objetivos concretos.

En el siguiente apartado estudiamos el primer tipo de unicidad. En cuanto al segundo la caracterización es trivial, ya que, si existe el aproximante correspondiente la unicidad de representación equivale a que el rango de la matriz asociada al sistema $SI(h,g)$ sea igual a gm . En cambio, el tercer tipo necesita de resultados previos y por ello será tratado en capítulos posteriores.

3.3.1.1.- Unicidad del aproximante

La unicidad del aproximante de Padé en el caso matricial ha sido tratada, entre otros, en Xu y Li (1990), Xu y Bultheel (1990) y Xu (1990). El resultado que se obtiene queda recogido en el siguiente teorema, para el que daremos una demostración alternativa, relativamente más sencilla y válida para matrices de dimensión arbitraria.

Teorema 1.3

a) Suponiendo que existe ${}^I[q/p]_F(z)$, el conjunto ${}^I[q/p]_F$ tiene un único elemento si, y sólo si, el conjunto ${}^D[q/p]_F$ no es vacío. (Se tiene así que ambos aproximantes son idénticos).

b) Suponiendo que existe ${}^D[q/p]_F(z)$, el conjunto ${}^D[q/p]_F$ tiene un único elemento si, y sólo si, el conjunto ${}^I[q/p]_F$ no es vacío. (Se tiene así que ambos aproximantes son idénticos).

Esto se traduce en que: *la unicidad del aproximante de Padé es equivalente a la existencia de los aproximantes derecho e izquierdo, es decir, si sólo existe el aproximante de un lado éste no es único, además, cuando ambos existen son idénticos.*

Demostración

a) Nos limitaremos a demostrar el apartado a) ya que la demostración del apartado b) es similar.

" \Leftarrow " Sea $B_q(z)A_p^{-1}(z) \in {}^D[q/p]_F$ y $D_p^{-1}(z)N_q(z) \in {}^I[q/p]_F$. Por la definición 1.4,

$$F(z) - B_q(z)A_p^{-1}(z) = O(z^{q+p+1})$$

$$F(z) - D_p^{-1}(z)N_q(z) = O(z^{q+p+1})$$

lo cual implica que $B_q(z)A_p^{-1}(z) - D_p^{-1}(z)N_q(z) = O(z^{q+p+1})$. La parte izquierda de esta igualdad tiene que ser nula porque es un polinomio de grado $p+q$ igualado a un

infinitésimo $O(z^{q+p+1})$. Se tiene así que el aproximante izquierdo y el derecho son idénticos y la unicidad es obvia.

" \Rightarrow " Para demostrar esta implicación utilizaremos como base los tres hechos siguientes:

1) Dado un elemento de $I[q/p]_F$, esto es, $U(z) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i z^i$, se tiene que los conjuntos $I[q/p]_F$ y $I[q/p]_U$ son idénticos, incluyendo el caso en que pueden ser conjuntos vacíos. Esto es debido a que $c_i = u_i$ para cualquier $i=0,1,\dots,q+p$. De la misma forma, $D[q/p]_U \equiv D[q/p]_F$.

2) Dados dos sistemas lineales compatibles de la forma:

$$Ax = a \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},$$

donde A_{dx} , C_{fx} , a_{dx} , c_{fx} , x_{ex} , éstos tienen exactamente el mismo conjunto de soluciones si, y sólo si,

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}.$$

3) Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\begin{pmatrix} u_{q-p+1} & u_{q-p+2} & \cdot & \cdot & \cdot & u_q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_q & u_{q+1} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{q+p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{q+k} & u_{q+k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{q+p+k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{q-p+1} & \cdot & \cdot & \cdot & u_q & \cdot & \cdot & \cdot & u_{q+k} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ u_q & \cdot & \cdot & \cdot & u_{q+p-1} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{q+p+k-1} \end{pmatrix}.$$

Partimos ahora de que si ${}^1[q/p]_U$ tiene un único elemento, es decir, todos los aproximantes de Padé izquierdos de los órdenes en cuestión son idénticos a $U(z)$, entonces cualquier solución del sistema (que es compatible porque $U(z)$ existe)

$$\left. \begin{aligned} X_p u_{q-p+1} + \dots + X_1 u_q &= -u_{q+1} \\ X_p u_{q-p+2} + \dots + X_1 u_{q+1} &= -u_{q+2} \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_p u_q + \dots + X_1 u_{q+p-1} &= -u_{q+p} \end{aligned} \right\}$$

es solución del sistema, también compatible (por ser $U(z)$ racional),

$$\left. \begin{aligned} X_p u_{q-p+1} + \dots + X_1 u_q &= -u_{q+1} \\ X_p u_{q-p+2} + \dots + X_1 u_{q+1} &= -u_{q+2} \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_p u_q + \dots + X_1 u_{q+p-1} &= -u_{q+p} \\ X_p u_{q+1} + \dots + X_1 u_{q+p} &= -u_{q+p+1} \end{aligned} \right\}$$

Por tanto, considerando

$$A = \begin{pmatrix} u'_{q-p+1} & u'_{q-p+2} & \cdot & \cdot & \cdot & u'_q \\ u'_{q-p+2} & u'_{q-p+3} & \cdot & \cdot & \cdot & u'_{q+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u'_q & u'_{q+1} & \cdot & \cdot & \cdot & u'_{q+p-1} \end{pmatrix}, \quad C = (u'_{q+1} \quad u'_{q+2} \quad \cdot \quad \cdot \quad u'_{q+p})$$

y teniendo en cuenta 2) y 3),

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{q-p+1} & \mathbf{u}_{q-p+2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{u}_q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{u}_q & \mathbf{u}_{q+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{u}_{q+p-1} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{q-p+1} & \mathbf{u}_{q-p+2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{u}_q & \mathbf{u}_{q+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{u}_q & \mathbf{u}_{q+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{u}_{q+p-1} & \mathbf{u}_{q+p} \end{pmatrix}$$

lo cual es equivalente a que ${}^D[q/p]_U$ no es vacío y, por 1), ${}^D[q/p]_F$ tampoco lo es. |

En lo sucesivo, si no es necesario distinguir entre el APM izquierdo y el derecho porque son idénticos, denotaremos por $[h/g]_F(z)$ al *aproximante de Padé matricial*.

En el siguiente capítulo desarrollamos una metodología que permite, entre otras cosas, estudiar los tres tipos de unicidades considerados.

3.3.2.- Minimalidad

En la literatura han sido definidos varios tipos de minimalidades relacionados con los grados de los polinomios que intervienen en una función racional. Estas definiciones surgen en marcos diferentes pero existen relaciones entre ellas. En el estudio del problema de la realización parcial minimal (Dickinson et al., 1974; Antoulas, 1986) se define el orden minimal o el grado de McMillan de una función racional. También, dentro del espacio de estado de un sistema lineal, los índices de Kronecker son una herramienta útil para obtener una representación del modelo.

En el contexto de modelos VARMA para series temporales estos índices son adaptados para lograr alguna reducción en el número de parámetros del sistema ya que ellos definen grados por filas (Reinsel, 1993). En este contexto, Tiao y Tsay (1989) introducen el concepto de "modelos de componente escalar" (SCM); además comentan la relación entre SCM y los índices de Kronecker en modelos lineales estacionarios (Tsay,

1989). Debido a la posibilidad de no ser única la definición de minimalidad, es evidente que será útil una noción de representación minimal VARMA(p,q) tal que el proceso no admita una representación VARMA(p',q') con $p' < p$ y $q' \leq q$ ni con $q' < q$ y $p' \leq p$. Esta idea de minimalidad, aunque subyace en algunos trabajos (Francq, 1989; Gouriéroux y Monfort, 1990) no ha sido tratada en su generalidad y es precisamente en la que hemos centrado nuestro interés.

En concreto, partiendo de un tipo de minimalidad global para los dos polinomios que intervienen en la función racional, el concepto de *grados mínimos* en este trabajo queda definido de la siguiente forma:

Definición 1.8

Consideramos que los *grados* (q,p) de los polinomios matriciales $B_q(z)$ y $A_p(z)$, donde $A_p(0)=I$, son *mínimos a izquierda* si, y sólo si, en caso de existir dos polinomios matriciales $N_h(z)$ y $D_g(z)$ de grados h y g respectivamente, verificando:

- i) $D_g(0)=I$ y
- ii) $A_p^{-1}(z)B_q(z)=D_g^{-1}(z)N_h(z)$,

se cumple que: $h < q$ implica $g > p$ y $g < p$ implica $h > q$.

De forma similar se podría definir el concepto de *grados mínimos a derecha*. Téngase en cuenta que en lo sucesivo al hablar de *grados mínimos* nos referiremos en todo momento a grados mínimos a izquierda.

Así mismo, se dice que (q,p) es un par de grados mínimos para una función racional $F(z)$ si existe al menos un par de polinomios, $A_p(z)$ y $B_q(z)$, de grados p y q mínimos, verificando que $F(z)=A_p^{-1}(z)B_q(z)$.

Aunque los conceptos de *representación irreducible* y de *representación con grados mínimos* son equivalentes en el caso escalar, no ocurre lo mismo en el caso matricial. Con el siguiente ejemplo pretendemos ilustrar esta diferencia.

Ejemplo 1.7

Sea $F(z)$ la función racional

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} z \right),$$

cuyo desarrollo en serie es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (-1)^{i-1} & 0 \end{pmatrix} z^i$.

Aunque (1,1) es un par de grados mínimos la representación dada no es irreducible ya que $F(z)$ puede ser presentada también con la forma

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z \right)$$

y existe el polinomio (no unimodular) $U(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z$ verificando que

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z \right) = U(z) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right)$$

y

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} z \right) = U(z) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z \right)$$

Es lógico preguntarse si $F(z)$ tiene más representaciones (1,1) y, en caso afirmativo, si siempre existe una única irreducible. Veamos:

Las representaciones a izquierda de $F(z)$ para los grados (1,1) son, de forma genérica, como sigue:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} z \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1+b & 1 \end{pmatrix} z \right).$$

Se obtiene que:

- . si $a \neq 0$ cualquier representación de este tipo se puede reducir a otra con $a=0$ mediante un polinomio no unimodular.
- . si $a=0$ la reducibilidad se produce sólo a través de polinomios unimodulares.

Por tanto, dado que cualquier representación con $a=0$ puede considerarse irreducible -según la definición 1.3- ésta no es única.

Así, el estudio de representaciones de funciones racionales desde el punto de vista de los grados mínimos aporta otra perspectiva diferente con respecto al estudio de representaciones irreducibles.

Una vez expuestas e ilustradas algunas de las principales diferencias que se presentan en el caso matricial con respecto al escalar, y que influyen muy de cerca en nuestra investigación, estamos en condiciones de abordar los aspectos centrales de este trabajo.

En el siguiente capítulo se estudian series matriciales identificando cuándo corresponden a funciones racionales así como, en caso afirmativo, sus posibles grados mínimos y unicidad de representación.

CAPÍTULO II

LA APROXIMACIÓN DE PADÉ MATRICIAL EN LA IDENTIFICACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

1.- INTRODUCCIÓN

La idea de la que parten las investigaciones llevadas a cabo es la de *caracterizar* funciones racionales matriciales. En este sentido, el estudio de la racionalidad en el caso matricial posee una complejidad considerablemente mayor que en el escalar. Además, dicha caracterización conduce inmediatamente a la consideración de ciertos tipos de minimalidades asociados a los grados de los polinomios que representan a una función racional. En consecuencia, el concepto de *grados mínimos* surge debido al interés que, en la búsqueda de representaciones racionales parsimoniosas, tiene un tipo de minimalidad global para los grados de los polinomios de tales representaciones. La profundización en estos dos aspectos conjuntamente con el de la *unicidad de la representación* dado un par de grados constituye el objetivo del presente capítulo.

Al mismo tiempo se pretende que la caracterización obtenida sea sencilla de manera que el procedimiento a seguir resulte fácil de interpretar en las aplicaciones.

Dado que los coeficientes de los polinomios que representan a la función racional se obtienen como solución de las *ecuaciones de Padé*, las herramientas fundamentales que nos proponemos utilizar se encuentran localizadas en el Álgebra Lineal, en concreto, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

En una primera fase se lleva a cabo el estudio de la Tabla C generalizada, mostrando una caracterización por elementos que pierde importancia en la medida en que aumenta el tamaño de la matrices así como la necesidad de conocer los grados globales de los polinomios. Por ello, en una etapa posterior centramos nuestra atención en la

búsqueda de condiciones para el tratamiento matricial adecuado de la función. En este sentido, es de hacer notar que la caracterización que se obtiene resulta igualmente aplicable a cualquier tipo de serie matricial, sea ésta cuadrada o rectangular.

A diferencia de lo que sucede en el caso escalar, en el caso matricial para algunos pares de grados mínimos pueden existir a su vez varios pares diferentes de polinomios que representen a la función de forma racional. Es por ello que establecemos en este punto condiciones necesarias y suficientes para la unicidad de la representación de la función, que sólo requieren la consideración de la serie inicial sin tomar en cuenta los coeficientes de los polinomios que intervienen.

A la luz de estas consideraciones, este capítulo se estructura, a partir de aquí, en tres apartados. En el apartado 2 se lleva a cabo, por caminos diferentes, la generalización de la Tabla C al caso matricial, utilizando las mismas herramientas que en el caso escalar, esto es, los determinantes; de esta forma, se logra encontrar y proponer condiciones necesarias de racionalidad. Es en el apartado 3 donde, utilizando la teoría de rangos, presentamos caracterizaciones así como condiciones sobre unicidad y minimalidad para el caso matricial. Además, los resultados de este apartado anticipan algunas propiedades sobre la estructura de bloques para las tablas de Padé. Adicionalmente, en el apartado 4 se hacen comentarios sobre la estructura de los polinomios matriciales de una representación racional que ayudan a determinar elementos nulos y/o redundantes de los coeficientes matriciales.

2.- GENERALIZACIÓN DE LA TABLA C

2.1.- CARACTERIZACIÓN POR ELEMENTOS

Por supuesto, el estudio de la racionalidad de una función matricial puede hacerse por elementos como nos indican los siguientes resultados.

Lema 2.1

Sea $P(z)$ un polinomio matricial tal que existe $P^{-1}(z)$, entonces cada elemento de la matriz $P^{-1}(z)$ es una función racional escalar.

Demostración

Como $P(z)$ es un polinomio matricial, cada elemento de la matriz $P(z)$ es un polinomio escalar y, por tanto, $|P(z)|$ también lo es. De la misma forma, cada adjunto de $P(z)$ es también un polinomio escalar. Debido a que $P^{-1}(z) = \text{Adj}(P^t(z)) / |P(z)|$, cada elemento de $P^{-1}(z)$ es una función racional. |

Lema 2.2

La serie de potencias de la expresión (1.4) es racional, idéntica a $P^{-1}(z)Q(z)$ donde $P(z)$ y $Q(z)$ son ciertos polinomios matriciales de dimensiones apropiadas, si, y sólo si, cada elemento de la matriz $F(z)$ es una función racional escalar.

Demostración

" \Rightarrow " Partimos de que existen los polinomios matriciales $P(z)$ y $Q(z)$ de tal forma que $F(z) \equiv P^{-1}(z)Q(z)$. Por el lema 2.1 cada elemento de $P^{-1}(z)$ es una función racional escalar, entonces $P^{-1}(z)Q(z)$ también verifica la misma propiedad por ser cada elemento de $Q(z)$ un polinomio.

" \Leftarrow " Por hipótesis, cada elemento $f_{ij}(z)$ de $F(z)$ es de la forma $a_{ij}(z)/b_{ij}(z)$ ($i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,n$) siendo $a_{ij}(z)$ y $b_{ij}(z)$ polinomios escalares con $b_{ij}(0)\neq 0$. Si denotamos por $b(z)$ al mínimo común múltiplo de todos los $b_{ij}(z)$ y por $q_{ij}(z)$ al cociente $a_{ij}(z)b(z)/b_{ij}(z)$ ($i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,n$) entonces también podemos decir que $f_{ij}(z)=q_{ij}(z)/b(z)$ con $b(0)\neq 0$.

Considerando $P(z)=b(z)I_{m \times m}$ y $Q(z)=(q_{ij}(z))_{ij}$ ($i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,n$) tenemos que $|P(0)| \neq 0$ y que $F(z) \equiv P^{-1}(z)Q(z)$. \dagger

Teniendo en cuenta este último lema podríamos dar una forma de proceder para saber si una función matricial es racional, sin entrar a considerar los grados de los polinomios matriciales que intervienen. Ésta consiste en construir las mn Tablas C escalares correspondientes a cada uno de los elementos de la matriz $F(z)$, de tal forma que, la función es racional si, y sólo si, todas las tablas presentan la estructura de bloque de lado infinito con todas sus casillas nulas.

No obstante, si bien esta vía proporciona realmente una caracterización de racionalidad, no resulta eficiente ya que, no sólo necesita del cálculo de un número de tablas que puede ser considerable al aumentar la dimensión de los coeficientes matriciales sino que, además, no caracteriza los grados globales de los polinomios que puedan representar a la función de forma simplificada. Es por ello que, en los siguientes apartados, nuestro interés nos lleva a trabajar matricialmente y no por elementos. Tras exponer los resultados que hasta ahora se han dado en este sentido en el caso matricial cuadrado, se resaltan los inconvenientes adicionales que surgen cuando las matrices no son cuadradas y se abren otras posibilidades en este último caso, el cual ha sido objeto de un menor tratamiento en la literatura especializada.

2.2.- EL CASO CUADRADO (m=n>1)

La construcción de la Tabla C en esta situación es similar a la del caso clásico, sin más que considerar cada c_i escalar como c_i matriz cuadrada. No obstante, la estructura final de la tabla en relación con la presencia de los elementos nulos manifiesta notables diferencias entre los casos matricial y escalar. Un ejemplo ilustrativo considerado en Draux (1983) es el que sigue:

Ejemplo 2.1

Sea $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$, donde

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad c_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad c_9 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad c_{10} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots$$

La tabla C presenta la siguiente estructura:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	0	1	0	1	0	-1	0	0	1
2		-2	1	0	1	0	1	0	0	0	0	3/2
3			-1	1	-1	0	0	-1/4	0	0	9/8	
4				-2	0	0	0	0	-3/8	-31/8		
5					6	0	5/2	5/2				
6						15/2						

donde se observa que los ceros no respetan la estructura de bloques cuadrados que caracteriza al caso escalar.

En lo referente a la racionalidad, en Draux (1987a) se recoge la siguiente condición necesaria para identificar una función racional.

Teorema 2.1

Si $F(z)$ es una función racional matricial cuadrada idéntica a $D_p^{-1}(z)N_q(z)$, donde $D_p(z)$ y $N_q(z)$ son matrices polinomiales cuadradas de grados p y q respectivamente, entonces la Tabla C asociada a esta función presenta un *cuadrado* de lado *infinito* formado por determinantes nulos, donde la esquina superior izquierda es la casilla $(q+1, p+1)$.

A diferencia de lo que ocurre en el caso escalar, la mencionada esquina no tiene siempre que aparecer bien delimitada, dificultando así una caracterización inmediata de funciones racionales matriciales análoga a la del teorema 1.2 para el caso escalar. Veamos ejemplos que reflejan diferentes situaciones.

Ejemplo 2.2

Sea la función

$$F(z) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix} z \right)^{-1}.$$

La Tabla C asociada presenta la siguiente estructura:

	0	1	2	3	4	5
0	x	x	x	x	x	x
1	x	x	x	x	x	x
2	x	0	0	0	0	0
3	x	0	0	0	0	0
4	x	0	0	0	0	0
5	x	0	0	0	0	0

Éste es un ejemplo en el que la esquina (0,1), que corresponde a los grados de la función racional dada, aparece perfectamente delimitada tal y como sucede en el caso escalar.

Ejemplo 2.3

Sea

$$F(z) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z^2 \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z^2 \right)^{-1}$$

y, asociada a ésta, la Tabla C

	0	1	2	3	4	5
0	x	x	x	x	x	x
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	x	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0

Nótese que $C(2,2)$ es no nulo pero no aparece bien delimitado el bloque infinito. Sin embargo, por el teorema 2.1 podemos decir que la función no puede ser representada por aproximantes $[q/p]_F(z)$ tales que $0 \leq q \leq 2$ y $0 \leq p \leq 1$ ni por aquéllos con $p=2$ y $0 \leq q \leq 1$. En la Tabla de Padé, son idénticos todos los aproximantes $[q/p]_F(z)$ tales que q y $p \geq 2$.

Ejemplo 2.4

Sea

$$F(z) = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} z^3 \right) \right)$$

en cuyo caso la Tabla C asociada es

	0	1	2	3	4	5
0	x	x	x	x	x	x
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0

En este caso puede parecer que $F(z) \in {}^I[0/1]_F$ ó $F(z) \in {}^D[0/1]_F$, lo cual no es cierto.

Aunque Draux (1987a) estudia la frontera del bloque infinito de ceros, es decir, la naturaleza de los determinantes $C(j,p)$ para $j \geq q$ y $C(q,i)$ para $i \geq p$, las condiciones teóricas que obtiene se basan en los determinantes $C(q,p)$ y/o en ciertos coeficientes de

los polinomios que representan la función de forma racional, por lo que no resultan plenamente satisfactorias en la práctica.

Con respecto a la Tabla de Padé, como consecuencia de la definición de APM, existe una notable diferencia entre los casos escalar y matricial, ya que este último da lugar a dos tablas de Padé, una izquierda y otra derecha. La estructura de bloques en dichas tablas es una cuestión que no ha recibido respuesta de forma general; sin embargo, de forma particular Draux (1987a) estudia el caso del *bloque infinito* que aparece en ellas cuando la función es racional, proponiendo el siguiente resultado:

Teorema 2.2 (Draux, 1987a)

Suponiendo que la función es racional de la forma $W_q(z)V_p^{-1}(z)$, si existen dos polinomios $A_p(z)$ y $B_q(z)$ de grados p y q respectivamente, tales que $A_p(0)=I$ y $F(z)=A_p^{-1}(z)B_q(z)$, entonces $[q/p]_F(z)$ es único debido a la existencia de los dos aproximantes y además $F(z)=[q/p]_F(z)=[r/s]_F(z)$ para cualquier $r \geq q$ y $s \geq p$.

Obsérvese que, dada una función racional, este teorema no aporta condiciones sobre la existencia de los aproximantes de Padé de ambos lados sino que, en la base de que éstos existen, concluye el resultado.

2.3.- EL CASO GENERAL (m y n arbitrarios)

Los teoremas que se presentan a continuación intentan explotar las ideas del caso escalar para su aplicación general cuando los coeficientes matriciales de la función son rectangulares, situación ésta en la que no es factible la construcción de los determinantes de Hankel dado que no están definidos. Siguiendo en la misma línea del caso clásico e inspirados por el caso vectorial (Van Iseghem, 1987), proponemos la

construcción, en base a dichos coeficientes matriciales, de nuevos determinantes que estén bien definidos y que, de forma similar a lo que ocurre en la Tabla C, contribuyan con información útil para dar respuesta al objetivo inicial de caracterizar una función racional matricial. Con tal propósito son introducidas las definiciones 2.1, 2.2 y 2.3.

Definición 2.1

Si $n > m^1$ definimos:

$$A^j(f, e) = \begin{vmatrix} c_{f-e+1}^{w(j)} & c_{f-e+2}^{w(j)} & \cdot & \cdot & c_f^{w(j)} \\ c_{f-e+2}^{w(j)} & c_{f-e+3}^{w(j)} & \cdot & \cdot & c_{f+1}^{w(j)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_f^{w(j)} & c_{f+1}^{w(j)} & \cdot & \cdot & c_{f+e-1}^{w(j)} \end{vmatrix} \quad j = 1, \dots, \binom{n}{m}$$

donde $w(j)$ es un elemento de R^m de la forma $(i_1 i_2 \dots i_m)_j$, siendo $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i_u < i_v$ si $u < v$ y $c_f^{w(j)}$ es una matriz $m \times m$ que se obtiene eligiendo las m columnas de c_f como indica $w(j)$, para $j=1, 2, \dots, \binom{n}{m}$. En otras palabras, si $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ la matriz cuadrada $c_f^{w(j)}$ tendrá por k -ésima columna la i_k -ésima columna de c_f .

En base a esta definición, para cada j podemos construir una tabla similar a la Tabla C colocando el determinante $A^j(f, e)$ en la intersección de la fila e con la columna f . De esta forma se tienen $\binom{n}{m}$ tablas diferentes. A partir de aquí podemos obtener una condición necesaria para la identificación de una función racional que consideramos en el siguiente resultado.

¹ Si $n < m$ son aplicables las definiciones 2.2 y 2.3. Si $n = m$ tenemos que $A^1(f, e) = C(f, e)$.

Teorema 2.3

Sea $F(z)$ idéntica a $D_p^{-1}(z)N_q(z)$, donde $D_p(z)$ y $N_q(z)$ son matrices polinomiales de grados p y q respectivamente, siendo los coeficientes de $D_p(z)$ de dimensión $m \times m$ y los de $N_q(z)$ $m \times n$. Entonces cada una de las $\binom{n}{m}$ tablas asociadas a los determinantes $A^j(f,e)$ muestra un bloque *cuadrado* de lado *infinito*, que contiene todas sus casillas nulas, cuya esquina superior izquierda es la intersección $(q+1,p+1)$.

Demostración

Si $F(z)=D_p^{-1}(z)N_q(z)$ entonces $D_p(z)F(z)-N_q(z)=0$. Considerando los coeficientes de las potencias del mismo orden, desde $q+1$ en adelante, en ambos lados de esta igualdad, obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} d_p c_{q-p+1} + d_{p-1} c_{q-p+2} + \dots + d_0 c_{q+1} = 0 \\ d_p c_{q-p+2} + d_{p-1} c_{q-p+3} + \dots + d_0 c_{q+2} = 0 \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \cdot \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

esto es,

$$d_p c_{q-p+i} + d_{p-1} c_{q-p+i+1} + \dots + d_0 c_{q+i} = 0 \quad \text{para cualquier } i \geq 1$$

siendo $c_k=0$ si $k < 0$.

Fijemos $j \in \{1,2,\dots,\binom{n}{m}\}$. A partir de (2.1), tomando algunas columnas de los c_i

se llega también al siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} d_p c_{q-p+1}^{w(j)} + d_{p-1} c_{q-p+2}^{w(j)} + \dots + d_0 c_{q+1}^{w(j)} &= 0 \\ d_p c_{q-p+2}^{w(j)} + d_{p-1} c_{q-p+3}^{w(j)} + \dots + d_0 c_{q+2}^{w(j)} &= 0 \\ \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

y, en base a (2.2), cualquier sistema homogéneo dado por

$$\left. \begin{aligned} x_0 c_h^{w(j)} + \dots + x_p c_{h+p}^{w(j)} + x_{p+1} c_{h+p+1}^{w(j)} + \dots + x_{f-h} c_f^{w(j)} &= 0 \\ x_0 c_{h+1}^{w(j)} + \dots + x_p c_{h+p+1}^{w(j)} + x_{p+1} c_{h+p+2}^{w(j)} + \dots + x_{f-h} c_{f+1}^{w(j)} &= 0 \\ \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot \\ x_0 c_f^{w(j)} + \dots + x_p c_{f+p}^{w(j)} + x_{p+1} c_{f+p+1}^{w(j)} + \dots + x_{f-h} c_{2f-h}^{w(j)} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

donde $h \geq q-p+1$ y $f \geq h+p$, tiene solución diferente de la trivial ya que $(d_p, d_{p-1}, \dots, d_0, 0, \dots, 0)$ es una posible solución; en consecuencia, su determinante asociado $A^j(f, f-h+1)$ será nulo, esto es, en la tabla correspondiente los determinantes de la diagonal principal y del triángulo superior del *cuadrado infinito* con esquina superior izquierda la casilla $(q+1, p+1)$ serán nulos.

Por otro lado, cualquier determinante del triángulo inferior es de la forma:

$$A^j(h+p, h+p-g+1) = \begin{vmatrix} c_g^{w(j)} & \cdot & c_h^{w(j)} & \cdot & c_{h+p}^{w(j)} \\ c_{g+1}^{w(j)} & \cdot & c_{h+1}^{w(j)} & \cdot & c_{h+p+1}^{w(j)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{h+p}^{w(j)} & \cdot & c_{2h+p-g}^{w(j)} & \cdot & c_{2(h+p)-g}^{w(j)} \end{vmatrix}$$

con $h \geq q-p+1$, $g < q-p+1$ y, por tanto, de un orden mayor o igual a $(p+2)m \times (p+2)m$.

El determinante anterior es el asociado al sistema homogéneo:

$$\left. \begin{array}{l} X_0 c_g^{w(j)} + \dots + X_{h-g} c_h^{w(j)} + \dots + X_{h+p-g} c_{h+p}^{w(j)} = 0 \\ X_0 c_{g+1}^{w(j)} + \dots + X_{h-g} c_{h+1}^{w(j)} + \dots + X_{h+p-g} c_{h+p+1}^{w(j)} = 0 \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\ X_0 c_{h+p}^{w(j)} + \dots + X_{h-g} c_{2h+p-g}^{w(j)} + \dots + X_{h+p-g} c_{2(h+p)-g}^{w(j)} = 0 \end{array} \right\}$$

que tiene solución diferente de la trivial ya que, por (2.2), $(0, 0, \dots, 0, d_p, d_{p-1}, \dots, d_0)$ es una de ellas. Por tanto, $A^j(h+p, h+p-g+1) = 0$ para cualesquiera $h \geq q-p+1$ y $g < q-p+1$ ó, de forma equivalente, el triángulo inferior del *cuadrado* de lado *infinito* tiene sus casillas nulas. |

Definición 2.2

Sea

$$B^j(f, e) = \begin{vmatrix} c_{f-e+1}^j & c_{f-e+2}^j & \cdot & \cdot & c_{f-e+em}^j \\ c_{f-e+2}^j & c_{f-e+3}^j & \cdot & \cdot & c_{f-e+em+1}^j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_f^j & c_{f+1}^j & \cdot & \cdot & c_{f+em-1}^j \end{vmatrix} \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

donde c_f^j es la j -ésima columna de c_f .

Para cada j podemos construir una tabla similar a la Tabla C colocando el determinante $B^j(f, e)$ en la intersección de la fila e con la columna f y obtener n tablas diferentes para las que podemos establecer la siguiente condición necesaria.

Teorema 2.4

Sea $F(z)$ idéntica a $D_p^{-1}(z)N_q(z)$, donde $D_p(z)$ y $N_q(z)$ son matrices polinomiales de grados p y q respectivamente, siendo los coeficientes de $D_p(z)$ de dimensión $m \times m$ y los de $N_q(z)$ $m \times n$. Entonces cada una de las n tablas asociadas a los determinantes $B^j(f,e)$ muestra un *cuadrado* de lado *infinito*, que contiene todas sus casillas con ceros, cuya esquina superior izquierda es la intersección $(q+1,p+1)$.

Demostración

Fijemos $j \in \{1,2,\dots,n\}$. A partir de (2.1) podemos obtener el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} d_p c_{q-p+1}^j + d_{p-1} c_{q-p+2}^j + \dots + d_0 c_{q+1}^j &= 0 \\ d_p c_{q-p+2}^j + d_{p-1} c_{q-p+3}^j + \dots + d_0 c_{q+2}^j &= 0 \\ \cdot & \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

y, en base a (2.3), cualquier sistema homogéneo dado por

$$\left. \begin{aligned} x_0 c_h^j + \dots + x_p c_{h+p}^j + x_{p+1} c_{h+p+1}^j + \dots + x_{f-h} c_f^j &= 0 \\ x_0 c_{h+1}^j + \dots + x_p c_{h+p+1}^j + x_{p+1} c_{h+p+2}^j + \dots + x_{f-h} c_{f+1}^j &= 0 \\ \cdot & \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ x_0 c_{h+(f-h+1)m-1}^j + \dots + x_{f-h} c_{f+(f-h+1)m-1}^j &= 0 \end{aligned} \right\}$$

donde $h \geq q-p+1$ y $f \geq h+p$, tiene solución diferente de la trivial ya que $(d_p, d_{p-1}, \dots, d_0, 0, \dots, 0)$ es una posible solución; en consecuencia, su determinante asociado $B^j(f, f-h+1)$ será nulo, esto es, en la tabla correspondiente los determinantes de la diagonal principal y

del triángulo superior del *cuadrado infinito* con esquina superior izquierda la casilla $(q+1,p+1)$ serán nulos.

Por otro lado, cualquier determinante del triángulo inferior es de la forma:

$$B^j(h+p, h+p-g+1) = \begin{vmatrix} c_g^j & \cdot & \cdot & \cdot & c_{g+(h+p-g+1)m-1}^j \\ c_{g+1}^j & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{h+p}^j & \cdot & \cdot & \cdot & c_{h+p+(h+p-g+1)m-1}^j \end{vmatrix}$$

con $h \geq q-p+1$, $g < q-p+1$ y, por tanto, de un orden mayor o igual a $(p+2)m \times (p+2)m$.

El determinante anterior es el asociado al sistema homogéneo

$$\left. \begin{array}{l} x_0 c_g^j + \dots + x_{h-g} c_h^j + \dots + x_{h+p-g} c_{h+p}^j = 0 \\ x_0 c_{g+1}^j + \dots + x_{h-g} c_{h+1}^j + \dots + x_{h+p-g} c_{h+p+1}^j = 0 \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\ x_0 c_{g+(h+p-g+1)m-1}^j + \dots + x_{h+p-g} c_{h+p+(h+p-g+1)m-1}^j = 0 \end{array} \right\}$$

que tiene solución diferente de la trivial ya que, por (2.3), $(0,0,\dots,0,d_p,d_{p-1},\dots,d_0)$ es una de ellas. Por tanto, $B^j(h+p,h+p-g+1)=0$ para cualesquiera $h \geq q-p+1$ y $g < q-p+1$ ó, de forma equivalente, el triángulo inferior del *cuadrado* de lado *infinito* tiene sus casillas nulas. |

Otro de los muchos determinantes que pueden proporcionar información sobre la racionalidad de la función es el recogido en la definición siguiente.

Definición 2.3

Sea b una matriz con infinitas columnas que ha sido construida como sigue:

$$b = (c_0^1 \ c_0^2 \ \dots \ c_0^n \ c_1^1 \ c_1^2 \ \dots \ c_1^n \ c_2^1 \ \dots \dots)$$

siendo c_f^j la j -ésima columna de c_f . Definimos

$$G(f, e) = \begin{vmatrix} b_{f-e+1, e} \\ b_{f-e+2, e} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{f, e} \end{vmatrix}$$

donde $b_{i,j}$ es la submatriz de jm columnas de b , de la columna c_i^1 en adelante.

Este determinante permite, de forma análoga a los casos anteriores, la construcción de una tabla así como de una condición necesaria asociada a la misma.

Teorema 2.5

Sea $F(z)$ en las condiciones de los teoremas 2.3 y 2.4. Entonces la tabla asociada al determinante $G(f,e)$ muestra un *cuadrado* de lado *infinito*, que contiene todas sus casillas con ceros, cuya esquina superior izquierda es la intersección $(q+1,p+1)$.

Demostración

A partir de (2.1) podemos obtener el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned}
 d_p c_{q-p+1}^1 + d_{p-1} c_{q-p+2}^1 + \dots + d_0 c_{q+1}^1 &= 0 \\
 d_p c_{q-p+1}^2 + d_{p-1} c_{q-p+2}^2 + \dots + d_0 c_{q+1}^2 &= 0 \\
 \cdot &\cdot \\
 \cdot &\cdot \\
 d_p c_{q-p+1}^n + d_{p-1} c_{q-p+2}^n + \dots + d_0 c_{q+1}^n &= 0 \\
 d_p c_{q-p+2}^1 + d_{p-1} c_{q-p+3}^1 + \dots + d_0 c_{q+2}^1 &= 0 \\
 d_p c_{q-p+2}^2 + d_{p-1} c_{q-p+3}^2 + \dots + d_0 c_{q+2}^2 &= 0 \\
 \cdot &\cdot \\
 \cdot &\cdot
 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

y, en base a (2.4), cualquier sistema homogéneo dado por

$$\left. \begin{aligned}
 x_0 c_h^1 + x_1 c_{h+1}^1 + \dots + x_{f-h} c_f^1 &= 0 \\
 x_0 c_h^2 + x_1 c_{h+1}^2 + \dots + x_{f-h} c_f^2 &= 0 \\
 \cdot &\cdot \\
 \cdot &\cdot \\
 x_0 c_h^n + x_1 c_{h+1}^n + \dots + x_{f-h} c_f^n &= 0 \\
 x_0 c_{h+1}^1 + x_1 c_{h+2}^1 + \dots + x_{f-h} c_{f+1}^1 &= 0 \\
 \cdot &\cdot \\
 \cdot &\cdot \\
 x_0 c_{h+a}^{(f-h+1)m-an} + \dots + x_{f-h} c_{f+a}^{(f-h+1)m-an} &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

donde a es la parte entera de $(f-h+1)m/n$, $h \geq q-p+1$ y $f \geq h+p$, tiene solución diferente de la trivial ya que $(d_p, d_{p-1}, \dots, d_0, 0, \dots, 0)$ es una posible solución; por tanto, su determinante asociado $G(f, f - h + 1)$ será nulo, esto es, en la tabla correspondiente los determinantes de la diagonal principal y del triángulo superior del *cuadrado infinito* con esquina superior izquierda la casilla $(q+1, p+1)$ son nulos.

Por otro lado, cualquier determinante del triángulo inferior es de la forma:

$$G(h+p, h+p-g+1) = \begin{vmatrix} c_g^1 & \cdot & c_g^n & c_{g+1}^1 & \cdot & c_{g+k}^{(h+p-g+1)m-kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{h+p}^1 & \cdot & c_{h+p}^n & c_{h+p+1}^1 & \cdot & c_{h+p+k}^{(h+p-g+1)m-kn} \end{vmatrix}$$

siendo k la parte entera de $(h+p-g+1)m/n$, $h \geq q-p+1$ y $g < q-p+1$. Por tanto, es de un orden mayor o igual a $(p+2)m \times (p+2)m$.

El determinante anterior es el asociado al sistema homogéneo

$$\left. \begin{array}{l} x_0 c_g^1 + x_1 c_{g+1}^1 + \dots + x_{h+p-g} c_{h+p}^1 = 0 \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ x_0 c_g^n + x_1 c_{g+1}^n + \dots + x_{h+p-g} c_{h+p}^n = 0 \\ x_0 c_{g+1}^1 + x_1 c_{g+2}^1 + \dots + x_{h+p-g} c_{h+p+1}^1 = 0 \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ x_0 c_{g+k}^{(h+p-g+1)m-kn} + \dots + x_{h+p-g} c_{h+p+k}^{(h+p-g+1)m-kn} = 0 \end{array} \right\}$$

que tiene solución diferente de la trivial ya que, por (2.4), $(0,0,\dots,0,d_p,d_{p-1},\dots,d_0)$ es una de ellas. Por tanto, $G(h+p,h+p-g+1)=0$ para cualesquiera $h \geq q-p+1$ y $g < q-p+1$ ó, de forma equivalente, el triángulo inferior del *cuadrado* de lado *infinito* mencionado tiene sus casillas nulas. |

En cualquier caso, éstos son sólo algunos de los posibles tipos de determinantes cuyas tablas asociadas contienen, en teoría, información útil para la consecución del objetivo propuesto.

En definitiva, a la luz de los resultados expuestos, puede concluirse que cuando se lleva a cabo la generalización de las propiedades dadas para el caso escalar a través de los determinantes de Hankel, se obtienen ciertas tablas que mantienen la presencia de una estructura de bloques de tamaño infinito. No obstante, esta configuración no permite establecer una caracterización análoga a la dada en el caso clásico. En general, la única condición necesaria que podría establecerse es la de que *si alguna de las tablas no muestra esta estructura corresponderá a una función que no es racional*.

Manteniendo el propósito de identificar funciones racionales matriciales así como sus grados, el paso inmediato en el siguiente apartado es sentar las bases de una nueva propuesta metodológica para la modelización racional de series formales de potencias con coeficientes matriciales, que permita englobar el caso de matrices de dimensión arbitraria y contribuya, entre otras cosas, a superar las limitaciones que en términos determinantaes conlleva la propuesta clásica.

No perdemos de vista el conseguir también que dicha metodología posea el atractivo adicional de permitir presentar los resultados por medio de tablas con el fin de que la interpretación de los mismos a través de ellas resulte, por lo gráfica, relativamente fácil y rápida.

3.- RACIONALIDAD, MINIMALIDAD Y UNICIDAD: PRINCIPALES RESULTADOS

3.1.- ALGUNOS RESULTADOS PREVIOS

Como veremos, la observación minuciosa y detallada del rango de ciertas matrices resulta fundamental para caracterizar la racionalidad, obtener pares de grados mínimos y estudiar la unicidad de las representaciones de funciones racionales matriciales.

Definimos, en primer lugar, la notación para las matrices bloques de Hankel asociadas a los sistemas de ecuaciones lineales SI(i,j) y SD(i,j).

Definición 2.4

Dado el desarrollo en serie de potencias (1.4) definimos, para $i \geq 0$ y $j > 0$, las siguientes matrices:

$$M1(i, j) = \begin{pmatrix} c_{i-j+1} & c_{i-j+2} & \cdot & \cdot & c_i \\ c_{i-j+2} & c_{i-j+3} & \cdot & \cdot & c_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_i & c_{i+1} & \cdot & \cdot & c_{i+j-1} \end{pmatrix}$$

$$M2(i, j) = \begin{pmatrix} c_{i-j+1} & c_{i-j+2} & \cdot & \cdot & c_i & c_{i+1} \\ c_{i-j+2} & c_{i-j+3} & \cdot & \cdot & c_{i+1} & c_{i+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_i & c_{i+1} & \cdot & \cdot & c_{i+j-1} & c_{i+j} \end{pmatrix}$$

$$M3(i, j) = \begin{pmatrix} c_{i-j+1} & c_{i-j+2} & \cdot & \cdot & c_i \\ c_{i-j+2} & c_{i-j+3} & \cdot & \cdot & c_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_i & c_{i+1} & \cdot & \cdot & c_{i+j-1} \\ c_{i+1} & c_{i+2} & \cdot & \cdot & c_{i+j} \end{pmatrix}$$

Nótese que:

- $\text{rango}(M1(i,j)) = \text{rango}(M2(i,j))$ si, y sólo si, existe ${}^D[i/j]_{\mathbb{F}}(z)$.
- $\text{rango}(M1(i,j)) = \text{rango}(M3(i,j))$ si, y sólo si, existe ${}^I[i/j]_{\mathbb{F}}(z)$.
- $\text{rango}(M1(i,j)) = \text{rango}(M2(i,j)) = \text{rango}(M3(i,j))$ si, y sólo si, existe $[i/j]_{\mathbb{F}}(z)$.

Para $j=0$, por convenio, el rango a que se hace referencia vale cero.

Lema 2.3

Si $\text{rango}(M1(i,j)) = \text{rango}(M1(i+1,j+1))$ entonces

$$\text{rango}(M1(i,j)) = \text{rango}(M2(i,j)) = \text{rango}(M3(i,j)).$$

Demostración

Al ser $\text{rango}(M1(i+1,j+1)) \geq \text{rango}(M2(i,j)) \geq \text{rango}(M1(i,j))$, como por hipótesis $\text{rango}(M1(i+1,j+1)) = \text{rango}(M1(i,j))$, entonces $\text{rango}(M1(i,j)) = \text{rango}(M2(i,j))$.

De la misma forma se llega a que $\text{rango}(M1(i,j)) = \text{rango}(M3(i,j))$. |

Lema 2.4

Supongamos la existencia de $[i/j]_{\mathbb{F}}(z)$.

Existe $[i+1/j]_{\mathbb{F}}(z)$ siendo $[i/j]_{\mathbb{F}}(z) \equiv [i+1/j]_{\mathbb{F}}(z)$ si, y sólo si, existe $[i/j+1]_{\mathbb{F}}(z)$ siendo $[i/j]_{\mathbb{F}}(z) \equiv [i/j+1]_{\mathbb{F}}(z)$.

Demostración

" \Rightarrow " Si $[i/j]_F(z) \equiv [i+1/j]_F(z)$ entonces $F(z) - [i/j]_F(z) = 0(z^{i+j+2})$. Por tanto, $[i/j]_F(z) \in [i/j+1]_F$ y, por ser ambos únicos, $[i/j]_F(z) \equiv [i/j+1]_F(z)$.

" \Leftarrow " Se demuestra de forma análoga. \downarrow

Corolario 2.1

Para cierto $k \in \mathbb{N}$, las cinco condiciones siguientes son equivalentes:

1) Existen y son idénticos $[i/j]_F(z)$ y $[i+k/j]_F(z)$, pero no son idénticos $[i/j]_F(z)$ y $[i+k+1/j]_F(z)$ en caso de existir este último.

2) Existen y son idénticos $[i/j]_F(z)$, $[i+1/j]_F(z)$, ..., $[i+k/j]_F(z)$, pero no son idénticos a $[i+k+1/j]_F(z)$ en caso de existir este último.

3) Dado $h \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ existen y son idénticos $[i/j]_F(z)$ y $[a/j+h]_F(z)$ para cualquier $a \in \{i, i+1, \dots, i+k-h\}$, pero no son idénticos $[i/j]_F(z)$ y $[i+k-h+1/j+h]_F(z)$ en caso de existir este último.

4) Existen y son idénticos $[i/j]_F(z)$, $[i/j+1]_F(z)$, ..., $[i/j+k]_F(z)$, pero no son idénticos a $[i/j+k+1]_F(z)$ en caso de existir este último.

5) Existen y son idénticos $[i/j]_F(z)$ y $[i/j+k]_F(z)$, pero no son idénticos $[i/j]_F(z)$ y $[i/j+k+1]_F(z)$ en caso de existir este último.

Proposición 2.1

Existen $[i/j]_F(z)$ y $[i+1/j]_F(z)$ y además son idénticos si, y sólo si, $\text{rango}(M1(i,j)) = \text{rango}(M1(i+1,j+1))$.

Demostración

" \Rightarrow " Si existe $[i/j]_F(z)$ entonces $\text{rango}(M1(i,j)) = \text{rango}(M2(i,j))$. Además, como $[i/j]_F(z) \equiv [i+1/j]_F(z)$ cualquier solución b_j, b_{j-1}, \dots, b_1 del sistema

$$\left. \begin{array}{l} b_j c_{i-j+1} + b_{j-1} c_{i-j+2} + \dots + b_1 c_i = -c_{i+1} \\ b_j c_{i-j+2} + b_{j-1} c_{i-j+3} + \dots + b_1 c_{i+1} = -c_{i+2} \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ b_j c_i + b_{j-1} c_{i+1} + \dots + b_1 c_{i+j-1} = -c_{i+j} \end{array} \right\}$$

verifica también la ecuación $b_j c_{i+1} + \dots + b_1 c_{i+j} = -c_{i+j+1}$. En consecuencia, el rango de las matrices $M2(i,j)$ y $M1(i+1,j+1)$ coincide y, por tanto, $\text{rango}(M1(i,j)) = \text{rango}(M1(i+1,j+1))$.

" \Leftarrow " Como el rango de $M1(i,j)$ y el de $M1(i+1,j+1)$ son iguales, por el lema 2.3 $\text{rango}(M2(i,j)) = \text{rango}(M1(i+1,j+1))$, entonces existe ${}^I[i/j]_F(z)$ tal que $F(z) - {}^I[i/j]_F(z) = 0(z^{i+j+2})$, lo cual implica que ${}^I[i/j]_F(z)$ representa un caso particular de ${}^I[i+1/j]_F(z)$.

Como el rango de $M1(i,j)$ y el de $M1(i+1,j+1)$ son iguales, por el lema 2.3 $\text{rango}(M3(i,j)) = \text{rango}(M1(i+1,j+1))$, entonces existe ${}^D[i/j]_F(z)$ tal que $F(z) - {}^D[i/j]_F(z) = 0(z^{i+j+2})$, lo cual implica que ${}^D[i/j]_F(z)$ constituye un caso particular de ${}^D[i+1,j]_F(z)$.

Por tanto, $[i+1/j]_F(z)$ es único e idéntico a $[i/j]_F(z)$. \mid

Como consecuencia de la proposición 2.1 y del lema 2.4 damos el siguiente resultado:

Corolario 2.2

$\text{rango}(M1(i,j)) = \text{rango}(M1(i+1,j+1))$ si, y sólo si, existen $[i/j]_F(z)$, $[i+1/j]_F(z)$ y $[i/j+1]_F(z)$ y además los tres son idénticos.

Obsérvese que el lema 2.4 y la proposición 2.1 proporcionan una descripción local de los posibles bloques en la correspondiente tabla de Padé mientras que los corolarios 2.1 y 2.2 proporcionan una descripción global por aplicación reiterada de los resultados previos respectivos.

Proposición 2.2

Si $\text{rango}(M1(i,j))=\text{rango}(M1(i+1,j+1))$, entonces
 $\text{rango}(M1(i+1,j))=\text{rango}(M1(i+2,j+1))$ si, y sólo si,
 $\text{rango}(M1(i,j+1))=\text{rango}(M1(i+1,j+2))$.

Demostración

" \Rightarrow " Por el corolario 2.2, al ser $\text{rango}(M1(i,j))=\text{rango}(M1(i+1,j+1))$ tenemos que $[i+1/j]_F(z)\equiv [i/j+1]_F(z)$. Utilizando de nuevo dicho corolario con la hipótesis $\text{rango}(M1(i+1,j))=\text{rango}(M1(i+2,j+1))$ tenemos también que $[i+1/j]_F(z)\equiv [i+1/j+1]_F(z)$. Así, $[i/j+1]_F(z)\equiv [i+1/j+1]_F(z)$ y por ello $F(z)^D[i/j+1]_F(z)=0(z^{i+j+3})$; en este caso el sistema

$$\left. \begin{array}{l} c_{i-j}a_{j+1} + c_{i-j+1}a_j + \dots + c_i a_1 = -c_{i+1} \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \cdot \\ c_i a_{j+1} + c_{i+1}a_j + \dots + c_{i+j}a_1 = -c_{i+j+1} \\ c_{i+1}a_{j+1} + c_{i+2}a_j + \dots + c_{i+j+1}a_1 = -c_{i+j+2} \end{array} \right\}$$

tiene solución, o lo que es lo mismo, $\text{rango}(M3(i,j+1))=\text{rango}(M1(i+1,j+2))$. Como existe el aproximante $^1[i/j+1]_F(z)$ entonces $\text{rango}(M1(i,j+1))=\text{rango}(M3(i,j+1))$ y, por tanto, $\text{rango}(M1(i,j+1))=\text{rango}(M1(i+1,j+2))$.

" \Leftarrow " De forma similar. |

Proposición 2.3

Si $\text{rango}(M1(i,j))=\text{rango}(M1(i+2,j+2))$ entonces:

- a) $\text{rango}(M1(i,j))=\text{rango}(M1(i+1,j+1))=\text{rango}(M1(i+2,j+2))$
- b) $\text{rango}(M1(i+1,j))=\text{rango}(M1(i+2,j+1))$
- c) $\text{rango}(M1(i,j+1))=\text{rango}(M1(i+1,j+2))$
- d) $\text{rango}(M1(i+2,j))=\text{rango}(M1(i+3,j+1))$
- e) $\text{rango}(M1(i,j+2))=\text{rango}(M1(i+1,j+3))$.

Demostración

a) Trivial ya que $M1(i,j)$ es una submatriz de $M1(i+1,j+1)$ y esta última lo es de $M1(i+2,j+2)$.

b) Por el apartado a) y el lema 2.3

$$\text{rango}(M1(i,j))=\text{rango}(M2(i,j)) \tag{2.5}$$

Además, por la proposición 2.1, existe ${}^D[i+1/j]_F(z)$ y, por tanto,

$$\text{rango}(M1(i+1,j))=\text{rango}(M2(i+1,j)) \tag{2.6}$$

lo que quiere decir que las n últimas columnas de $M2(i+1,j)$ son combinación lineal de las columnas de $M1(i+1,j)$.

Por (2.5) y (2.6), $\text{rango}(M1(i,j))=\text{rango}(S)$ siendo

$$S = \begin{pmatrix} c_{i-j+1} & c_{i-j+2} & \cdot & \cdot & c_i & c_{i+1} & c_{i+2} \\ c_{i-j+2} & c_{i-j+3} & \cdot & \cdot & c_{i+1} & c_{i+2} & c_{i+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_i & c_{i+1} & \cdot & \cdot & c_{i+j-1} & c_{i+j} & c_{i+j+1} \end{pmatrix}$$

Como por hipótesis el rango de $M1(i,j)$ es igual al de $M1(i+2,j+2)$ entonces $\text{rango}(S)=\text{rango}(M1(i+2,j+2))$, esto es, las $2m$ últimas filas de $M1(i+2,j+2)$ son combinación lineal de las filas de S . Observando S sin sus n primeras columnas, tenemos que $\text{rango}(M2(i+1,j))=\text{rango}(M1(i+2,j+1))$. Teniendo en cuenta (2.6) queda demostrado este apartado.

c) y d) son consecuencias de a), b) y la proposición 2.2.

e) es consecuencia de a), c) y la proposición 2.2. $\quad \mid$

Aplicando reiteradamente la proposición 2.3 llegamos al siguiente resultado.

Corolario 2.3

Si $\text{rango}(M_1(i,j))=\text{rango}(M_1(i+k,j+k))$ para cierto $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$, entonces para h y g tales que $1 \leq h \leq k-1$ y $1 \leq g \leq k-h$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{rango}(M_1(i,j)) &= \text{rango}(M_1(i+h,j+h)) \\ \text{rango}(M_1(i+2h-1,j)) &= \text{rango}(M_1(i+2h-1+g,j+g)) \\ \text{rango}(M_1(i+2h,j)) &= \text{rango}(M_1(i+2h+g,j+g)) \\ \text{rango}(M_1(i,j+2h-1)) &= \text{rango}(M_1(i+g,i+2h-1+g)) \\ \text{rango}(M_1(i,j+2h)) &= \text{rango}(M_1(i+g,j+2h+g)) \end{aligned}$$

En el siguiente capítulo la utilización de este corolario nos conducirá a la obtención de recintos especiales dentro de la que llamaremos *Tabla 1* al mismo tiempo que permitirá simplificar de forma considerable la construcción de la misma.

3.2.- TEOREMAS DE CARACTERIZACIÓN

En base a los resultados previos, en este apartado se dan condiciones necesarias y suficientes para que una serie de potencias con coeficientes matriciales pueda ser representada de forma racional.

Teorema 2.6

Sea $F(z)$ una función matricial de la forma (1.4). $F(z)$ es racional si, y sólo si, existen r y $s \in \mathbb{N}$ de tal forma que ${}^L[h/g]_F(z) \equiv^D [h/g]_F(z) \equiv F(z)$ para cualesquiera $h \geq s$ y $g \geq r$.

Demostración

" \Leftarrow " Trivial.

" \Rightarrow " Como se indica en la demostración del lema 2.2, toda función racional $F(z)$ puede ser puesta como $P^{-1}(z)Q(z)$ con $P(z)$ diagonal y $|P(0)| \neq 0$. Si escribimos $P(z) = b(z)I_{m \times m}$, podemos decir que $F(z) = U(z)V^{-1}(z)$ siendo $U(z) = Q(z)$ y $V(z) = b(z)I_{n \times n}$.

Suponiendo que el grado de $P(z)$ es r y el de $Q(z)$ es s tenemos, por un lado, que $P^{-1}(0)Q(z)$ y $P^{-1}(0)P(z)$ son dos polinomios que dan lugar a un elemento de ${}^I[s/r]_F$ y, por otro lado, $U(z)V^{-1}(0)$ y $V(z)V^{-1}(0)$ son dos polinomios que dan lugar a un elemento de ${}^D[s/r]_F$.

Entonces existen, y por tanto son idénticos y únicos, ${}^I[h/g]_F(z)$ y ${}^D[h/g]_F(z)$ para cualesquiera $h > s$ y $g > r$ ya que ${}^I[s/r]_F(z) \in {}^I[h/g]_F(z)$ y ${}^D[s/r]_F(z) \in {}^D[h/g]_F(z)$. Así, podemos concluir que $[h/g]_F(z) \equiv F(z)$ para cualesquiera $h \geq s$ y $g \geq r$. \mid

Como consecuencia del teorema 2.6 y del corolario 2.2 se tiene el siguiente resultado:

Corolario 2.4

$F(z)$ es racional si, y sólo si, existen s y $r \in \mathbb{N}$ de tal forma que
 $\text{rango}(M1(i,j)) = \text{rango}(M1(i+k,j+k))$ para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$, $i \geq s$ y $j \geq r$.

Teniendo en cuenta el corolario 2.3, el corolario 2.4 es equivalente al siguiente:

Corolario 2.4 (bis)

$F(z)$ es racional si, y sólo si, existen s y $r \in \mathbb{N}$ de tal forma que
 $\text{rango}(M1(s,r)) = \text{rango}(M1(s+k,r+k))$ para cualquier $k \geq 0$.

En estas condiciones se garantiza que $F(z) \equiv [s/r]_F(z)$.

Teorema 2.7²

Supongamos que $F(z) \equiv [s/r]_F(z)$. Entonces, $F(z)$ es idéntica a uno de los aproximantes de ${}^l[i/j]_F$ para $i \leq s$ y $j \leq r$ si, y sólo si, $\text{rango}(M4_{sr}(i,j)) = \text{rango}(M5_{sr}(i,j))$ siendo

$$M4_{sr}(i,j) = \begin{pmatrix} c_{i-j+1} & c_{i-j+2} & \cdot & \cdot & c_{s+r-j} \\ c_{i-j+2} & c_{i-j+3} & \cdot & \cdot & c_{s+r-j+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_i & c_{i+1} & \cdot & \cdot & c_{s+r-1} \end{pmatrix}$$

$$M5_{sr}(i,j) = \begin{pmatrix} c_{i-j+1} & c_{i-j+2} & \cdot & \cdot & c_{s+r-j} \\ c_{i-j+2} & c_{i-j+3} & \cdot & \cdot & c_{s+r-j+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_i & c_{i+1} & \cdot & \cdot & c_{s+r-1} \\ c_{i+1} & c_{i+2} & \cdot & \cdot & c_{s+r} \end{pmatrix}$$

Demostración

Como consecuencia del teorema 2.6, el sistema

$$\left. \begin{array}{l} d_r c_{s-r+1} + d_{r-1} c_{s-r+2} + \dots + d_1 c_s = -c_{s+1} \\ d_r c_{s-r+2} + d_{r-1} c_{s-r+3} + \dots + d_1 c_{s+1} = -c_{s+2} \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \cdot \\ d_r c_s + d_{r-1} c_{s+1} + \dots + d_1 c_{s+r-1} = -c_{s+r} \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

² Este resultado tiene su análogo para el caso del aproximante derecho sin más que considerar $M4_{sr}^*(i,j) = (c_{i-j+f+g-1})_{f,g=1}^{s+r-i,j}$ y $M5_{sr}^*(i,j) = (c_{i-j+f+g-1})_{f,g=1}^{s+r-i,j+1}$ en lugar de $M4_{sr}(i,j)$ y $M5_{sr}(i,j)$.

tiene como solución/es los coeficientes de todos los posibles denominadores de ${}^I[s/r]_F(z)$. Este aproximante sabemos que es único, porque también existe ${}^D[s/r]_F(z)$, y que coincide con $F(z)$. La función $F(z)$ se puede representar de forma racional mediante un denominador de grado j y un numerador de grado i si, y sólo si, el sistema de infinitas ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} d_j c_{i-j+1} + d_{j-1} c_{i-j+2} + \dots + d_1 c_i = -c_{i+1} \\ d_j c_{i-j+2} + d_{j-1} c_{i-j+3} + \dots + d_1 c_{i+1} = -c_{i+2} \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

es compatible. Teniendo en cuenta lo anterior y que si $i \leq s$ y $j \leq r$ cualquier solución de (2.8) es solución de (2.7), se llega a que existe otra forma de representar $F(z)$ mediante un numerador de grado i y un denominador de grado j a la izquierda, con $i \leq s$ y $j \leq r$, si, y sólo si, el sistema

$$\left. \begin{array}{l} d_j c_{i-j+1} + d_{j-1} c_{i-j+2} + \dots + d_1 c_i = -c_{i+1} \\ d_j c_{i-j+2} + d_{j-1} c_{i-j+3} + \dots + d_1 c_{i+1} = -c_{i+2} \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ d_j c_{s+r-j} + d_{j-1} c_{s+r-j+1} + \dots + d_1 c_{s+r-1} = -c_{s+r} \end{array} \right\}$$

tiene solución, o lo que es lo mismo, coinciden los rangos de las matrices $M4_{sr}(i,j)$ y $M5_{sr}(i,j)$. |

De forma inmediata se deduce el siguiente resultado.

Corolario 2.5

Partiendo de que $F(z) \equiv [s/r]_F(z)$, sean $h \leq s$ y $g \leq r$ números naturales tales que $\text{rango}(M4_{sr}(h,g)) = \text{rango}(M5_{sr}(h,g))$, entonces $\text{rango}(M4_{sr}(a,b)) = \text{rango}(M5_{sr}(a,b))$ para cualesquiera a y b tales que $h \leq a \leq s$ y $g \leq b \leq r$. De forma equivalente, si c y d son números naturales verificando que $c \leq s$, $d \leq r$ y $\text{rango}(M4_{sr}(c,d)) \neq \text{rango}(M5_{sr}(c,d))$, entonces $\text{rango}(M4_{sr}(k,t)) \neq \text{rango}(M5_{sr}(k,t))$ para cualesquiera k y t tales que $0 \leq k \leq c$ y $0 \leq t \leq d$.

Este resultado es fundamental en la elaboración del algoritmo para la construcción de la que denominaremos *Tabla 2* y que presentaremos en el siguiente capítulo.

3.3.- RECINTO ESCALONADO R1: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Los resultados anteriores sugieren la siguiente definición asociada al desarrollo en serie (1.4).

Definición 2.5

Llamamos *recinto escalonado* R1 al siguiente subconjunto de \mathbb{N}^2 :
 $R1 = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / \text{rango}(M1(h,g)) = \text{rango}(M1(h+k,g+k)) \text{ para cualesquiera } k \in \mathbb{N}, h \geq i \text{ y } g \geq j\}$.

Este conjunto tiene una serie de características que exponemos a continuación en forma de propiedades.

Propiedades de R1

Propiedad 2.1: $(i,j) \in R1$ si, y sólo si, $(h,g) \in R1$ para cualesquiera $h \geq i$ y $g \geq j$.

Esto es una consecuencia directa de la definición de R1.

Propiedad 2.2: $(i,j) \in R1$ si, y sólo si, existen los aproximantes ${}^I[i/j]_F(z)$ y ${}^D[i/j]_F(z)$ y además $[i/j]_F(z) \equiv F(z)$.

Esto es consecuencia del corolario 2.4. Es necesario comentar, sin embargo, el caso $j=0$ ya que, por convenio, $\text{rango}(M1(i,0))=0$. El elemento $(i,0)$ se corresponde con una función polinomial y, evidentemente, $F(z)=c_0+c_1z+\dots+c_qz^q$ si, y sólo si, $c_k=0$ para cualquier $k \geq q+1$. Como $M1(i,1)=c_i$, la función es un polinomio de grado q si, y sólo si, $\text{rango}(M1(k,1))=0$ para cualquier $k \geq q+1$; por ello, no presenta ningún problema asumir que $\text{rango}(M1(i,0))=0$ para cualquier $i \in N$ para tener así que $(q,0) \in R1$.

Propiedad 2.3: $F(z)$ es un polinomio de grado p si, y sólo si, $(p,0) \in R1$.

Esto se tiene como consecuencia de la propiedad 2.2 y por el hecho de que $I^{-1}F(z)$ es un elemento de ${}^I[p/0]_F$ y $F(z)I^{-1}$ es un elemento de ${}^D[p/0]_F$.

Propiedad 2.4: (a,b) y $(c,d) \in R1$ si, y sólo si, $[a/b]_F(z) \equiv [c/d]_F(z) \equiv F(z)$.

Equivalente a la propiedad 2.2.

Propiedad 2.5: Si $\text{rango}(M1(i,j))=j \cdot \min\{m,n\}$ entonces $(i-1,j-1) \notin R1$.

Esto es debido a que $M1(i-1,j-1)$ es una submatriz de $M1(i,j)$ y a que el rango de esta última es máximo.

Propiedad 2.6: Si $\text{rango}(M1(i-1,j)) < \text{rango}(M1(i,j))$ entonces $(i-1,j) \notin R1$ porque no existe ${}^I[i-1/j]_F(z)$ y, además, no existe ${}^D[i-1/j]_F(z)$.

En efecto, existe ${}^I[i-1/j]_F(z)$ si, y sólo si, los rangos de $M1(i-1,j)$ y de $M3(i-1,j)$ son iguales. Por otro lado, $\text{rango}(M3(i-1,j)) \geq \text{rango}(M1(i,j))$ ya que $M1(i,j)$ es submatriz de $M3(i-1,j)$. Por tanto, $\text{rango}(M1(i-1,j)) \geq \text{rango}(M1(i,j))$ en contra de la hipótesis.

De forma similar se llega a que no existe ${}^D[i-1/j]_F(z)$.

Propiedad 2.7: Si $(i,j) \in R1$ y $\text{rango}(M1(i,j))=j \cdot \min\{m,n\}$ entonces el rango de $M1(i-k,j)$ es también $j \cdot \min\{m,n\}$ para cualquier $(i-k,j) \in R1$ con $k \geq 0$.

Si existe ${}^I[i/j]_F(z)$ entonces $\text{rango}(M1(i,j)) \geq \text{rango}(M1(i+1,j))$, por ello, para cualquier $(i-k,j) \in R1$ $\text{rango}(M1(i-k,j)) \geq \text{rango}(M1(i,j))$ y, al ser $\text{rango}(M1(i,j))$ máximo, se tiene que $\text{rango}(M1(i-k,j)) = \text{rango}(M1(i,j))$.

Propiedad 2.8: Si $(i,j) \in R1$ y $\text{rango}(M1(i,j)) = jm$ entonces $\text{rango}(M1(i,j-h)) = (j-h)m$ para cualquier h tal que $(i,j-h) \in R1$.

Si $\text{rango}(M1(i,j)) = jm$ entonces $SI(i,j)$ sólo tiene una solución porque jm es el número de incógnitas escalares de cada uno de los m sistemas asociados a $SI(i,j)$. Como $(i,j) \in R1$, ${}^I[i/j]_F(z) \equiv F(z)$.

Si $(i,j-h) \in R1$ entonces ${}^I[i/j-h]_F(z) \in {}^I[i/j]_F$. Por tanto, sólo hay una solución de $SI(i,j-h)$ y, por ello, $\text{rango}(M1(i,j-h)) = (j-h)m$.

Propiedad 2.9: Si $\text{rango}(M1(i,j)) = jm$ y $(i,j) \notin R1$ entonces $F(z)$ no es idéntico a ${}^I[i/j]_F(z)$ en caso de existir éste.

Si existe ${}^I[i/j]_F(z)$ entonces es único porque $\text{rango}(M1(i,j)) = jm$. Por el teorema 1.3 existe ${}^D[i/j]_F(z)$ y, por la propiedad 2.2, si ${}^I[i/j]_F(z) \equiv F(z)$ entonces $(i,j) \in R1$, lo que contradice la hipótesis.

Propiedad 2.10: Si $(i,j) \in R1$, $(i-1,j) \notin R1$ y $\text{rango}(M1(i,j)) = jm$ entonces $F(z)$ no es idéntica a ningún aproximante ${}^I[i-1/j]_F(z)$, en caso de existir este último.

Si existe ${}^I[i-1/j]_F(z)$ tal que $F(z) \equiv {}^I[i-1/j]_F(z)$ entonces, por la propiedad 2.6, $\text{rango}(M1(i-1,j)) \geq \text{rango}(M1(i,j))$, con lo cual $\text{rango}(M1(i-1,j)) = jm$. Esto implica la unicidad de ${}^I[i-1/j]_F(z)$ y, esto último, la existencia de ${}^D[i-1/j]_F(z)$. Por ser $F(z) \equiv {}^I[i-1/j]_F(z)$ se tiene que $F(z) \equiv {}^D[i-1/j]_F(z)$. Como consecuencia $(i-1,j) \in R1$, lo que contradice la hipótesis.

Propiedad 2.11: Sea $(i,j) \in R1$, $(i-1,j) \notin R1$ y $\text{rango}(M1(i,j)) = jm$. Si existen $h \in \{0,1,\dots,i\}$ y $k \in \{0,1,\dots,j\}$ tales que $F(z)$ es idéntica a un aproximante ${}^I[i-h/j-k]_F(z)$ entonces $h=0$ y

$b_j \equiv b_{j-1} \equiv \dots \equiv b_{j-k+1} \equiv 0$, siendo b_j, b_{j-1}, \dots, b_1 los coeficientes matriciales solución del sistema $SI(i,j)$.

Por la propiedad 2.10, $F(z)$ no es idéntica a ${}^I[i-1/j]_F(z)$ y, por tanto, tampoco es idéntica a ${}^I[i-h/j]_F(z)$ para cualquier $h \in \{1, \dots, i\}$, y así $h=0$.

Como $\text{rango}(M1(i,j))=jm$ sólo hay una forma de representar ${}^I[i/j]_F(z)$. Si existe un elemento de ${}^I[i/j-k]_F$ tal que $F(z)$ es idéntica a él, al ser ${}^I[i/j-k]_F(z) \in {}^I[i/j]_F$, se tiene que $b_j \equiv b_{j-1} \equiv \dots \equiv b_{j-k+1} \equiv 0$.

Propiedad 2.12: Si $m=n$ y $(0,j) \in R1$ entonces $\text{rango}(M1(0,k))$ es máximo para cualquier $k \geq j$.

Si una serie se puede representar sólo por medio de un denominador de grado p , los coeficientes de éste se identifican de forma única como indica el siguiente razonamiento:

$$\text{Si } (I+d_1z+d_2z^2+ \dots +d_pz^p)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \text{ entonces } I= (I+d_1z+d_2z^2+ \dots +d_pz^p) \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right)$$

y considerando los coeficientes de las potencias del mismo orden en ambos lados de la igualdad, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= c_0 \\ 0 &= d_1 + c_1 \Rightarrow d_1 = -c_1 \\ 0 &= d_2 + d_1 c_1 + c_2 \Rightarrow d_2 = -d_1 c_1 - c_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 &= d_p + d_{p-1} c_1 + \dots + d_1 c_{p-1} + c_p \Rightarrow d_p = -(d_{p-1} c_1 + \dots + d_1 c_{p-1} + c_p) \end{aligned}$$

y se obtienen así de forma única los coeficientes d_p, d_{p-1}, \dots, d_1 , que además verifican la ecuación $d_p c_i + d_{p-1} c_{i+1} + \dots + d_1 c_{i+p-1} + c_{i+p} = 0$ para cualquier $i \geq 1$. Por tanto, cualquier matriz $M1(0,j)$ de tal forma que $(0,j) \in R1$ tiene rango máximo. Nótese que si $k > 0$, $0 < p < k$ y $(I+a_1z+a_2z^2+ \dots +a_kz^k)^{-1}=F(z)$ es evidente que

$$a_i = \begin{cases} d_i & 0 \leq i \leq p \\ 0 & p < i \leq k \end{cases}$$

3.4.- RECINTO ESCALONADO R2: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Dado $(s,r) \in R1$, en este apartado definimos el conjunto $R2$ -motivado por el teorema 2.7- y damos algunas de sus características principales en forma de propiedades.

Definición 2.6

Llamamos *recinto escalonado* $R2_{sr}$, $(s,r) \in R1$, al siguiente subconjunto de N^2 :

$$R2_{sr} = \{(i,j) \in N^2 / 0 \leq i \leq s, 0 \leq j \leq r \text{ y } \text{rango}(M4_{sr}(i,j)) = \text{rango}(M5_{sr}(i,j))\}.$$

Propiedades de $R2_{sr}$

Propiedad 2.13: $R2_{sr} \subseteq R2_{s+h, r+k}$ para cualesquiera h y $k \in N$.

Esta propiedad es debida al teorema 2.7 ya que $(s+h, r+k) \in R1$ para cualesquiera h y $k \in N$.

Propiedad 2.14: Si $(h,g) \in R2_{sr}$ entonces $(a,b) \in R2_{sr}$ para cualesquiera a y b tales que $h \leq a \leq s$ y $g \leq b \leq r$.

Esta propiedad es consecuencia directa del corolario 2.5 al igual que la siguiente:

Propiedad 2.15: Si $h \leq s$, $g \leq r$ y $(h,g) \notin R2_{sr}$ entonces $(a,b) \notin R2_{sr}$ para cualesquiera a y b tales que $0 \leq a \leq h$ y $0 \leq b \leq g$.

Propiedad 2.16: Si $i \leq s$ y $j \leq r$, (i,j) es un par de grados mínimos de $F(z)$ si, y sólo si, $(i,j) \in R2_{sr}$, $(i-1,j) \notin R2_{sr}$ y $(i,j-1) \notin R2_{sr}$.

Esta propiedad es consecuencia de la definición 1.8 y de las propiedades 2.14 y 2.15.

3.5.- CARDINAL DE MINIMALIDAD

Entre todas las representaciones racionales de una función son de interés, por su simplicidad, aquéllas con grados mínimos. Además de estudiar si ciertos pares de grados son mínimos o no, pretendemos conocer el número de pares posibles de este tipo, lo que hacemos a partir de las siguientes consideraciones.

Definición 2.7

Dada una función racional $F(z)$ se define el conjunto de grados mínimos de $F(z)$ de la siguiente forma:

$$GM_F = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 / (a,b) \text{ grados mínimos de } F(z)\}.$$

Al número de elementos de GM_F se le llama *cardinal* de GM_F .

Lema 2.5

Si $F(z)$ es racional, el cardinal de GM_F es finito.

Demostración

Dado que $F(z)$ es racional, GM_F no es vacío. Sea $(q,p) \in GM_F$, si $(q',p') \in GM_F$ verifica $(q',p') \neq (q,p)$ entonces $p' < p$ y $q' > q$ ó $p' > p$ y $q' < q$. Por tanto, el cardinal de GM_F tiene que ser menor o igual que $p+q+1$. |

Proposición 2.4

Sea $A = \{(q_i, p_i) / i=1,2,\dots,h; q_i < q_{i+1}\} \subseteq GM_F$. Si no existe $(a,b) \in GM_F$ tal que $a < q_h$, $b < p_1$ y $(a,b) \notin A$, entonces son equivalentes los siguientes apartados:

i) $GM_F = A$

ii) El cardinal de GM_F es h .

iii) Para cualquier $(u,v) \in R_1$ tal que $u \geq q_h$ y $v \geq p_1$ se verifica que:

$$(q_1-1, k) \notin R_{2_{uv}} \quad \text{si } k \leq v$$

$$(k, p_h-1) \notin R_{2_{uv}} \quad \text{si } k \leq u$$

iv) Para cualquier $(u,v) \in R_1$ tal que $u \geq q_h$ y $v \geq p_1$ se verifica que:

$$(q_1-1, v) \notin R_{2_{uv}}$$

$$(u, p_h-1) \notin R_{2_{uv}}$$

v) Para cualquier $k \geq p_1$, $(q_1-1, k) \notin R_{2_{q_1 k}}$

Para cualquier $k \geq q_h$, $(k, p_h-1) \notin R_{2_{k p_h}}$

La demostración es consecuencia directa de las propiedades 2.14 y 2.15 por lo que la proposición 2.4 puede considerarse como un corolario del teorema 2.7.

Debido a la importancia que tienen las representaciones simplificadas y, por tanto, la determinación de parámetros nulos y/o redundantes en la aplicación que se presenta en el cuarto capítulo, hemos incluido en el siguiente apartado comentarios adicionales sobre la estructura de los polinomios matriciales de una representación racional. En cualquier caso, el apartado que sigue se enmarca en la aproximación de Padé con independencia de sus posibles aplicaciones.

4.- IDENTIFICACIÓN DE ELEMENTOS NULOS Y/O REDUNDANTES EN LOS COEFICIENTES DE REPRESENTACIONES RACIONALES

A nivel metodológico, este apartado está íntimamente relacionado con el de minimalidad global y conduce a definir otros conceptos de minimalidad que reducen el número de elementos a calcular, porque pueden considerarse nulos, en los coeficientes de

representaciones racionales de una función aportando, por tanto, cierta información adicional sobre la estructura de los polinomios matriciales que la forman. En este sentido consideramos dos posibilidades, la de identificar ceros por filas o por columnas.

4.1.- REDUCCIÓN POR FILAS

Dada una función racional $F(z)$, supongamos que $(s,r) \in \mathbb{R}^1$ y que $F(z)$ puede ser representada por un denominador de grado $p \leq r$ y un numerador de grado $q \leq s$. La matriz $m \times ((p+1)m + (q+1)n)$ siguiente:

$$(d_p, d_{p-1}, \dots, d_1, d_0, n_q, \dots, n_1, n_0) \quad d_0 = I_{m \times m} \quad (2.9)$$

formada por los coeficientes de dichos polinomios, tiene asociado a los coeficientes del denominador el sistema

$$(d_p \ d_{p-1} \ \dots \ d_1) M_{4_{sr}}(q,p) = (c_{q+1} \ c_{q+2} \ \dots \ c_{s+r}) \quad (2.10)$$

cuya compatibilidad asegura que tales polinomios representan a la función de forma racional.

Como sabemos, q y p son grados mínimos si, y sólo si:

$$\begin{aligned} \text{rango}(M_{4_{sr}}(q,p)) &= \text{rango}(M_{5_{sr}}(q,p)) \\ \text{rango}(M_{4_{sr}}(q-1,p)) &\neq \text{rango}(M_{5_{sr}}(q-1,p)) \\ \text{rango}(M_{4_{sr}}(q,p-1)) &\neq \text{rango}(M_{5_{sr}}(q,p-1)) \end{aligned}$$

Por otro lado, cada fila i ($i=1, \dots, m$) de (2.9) tiene asociado su propio sistema de la forma³:

$$(d_p^{(i)} d_{p-1}^{(i)} \dots d_1^{(i)}) M4_{sr}(q, p) = (c_{q+1}^{(i)} \dots c_{s+r}^{(i)}) \quad (2.11)$$

Sin embargo, aunque p y q sean grados mínimos, cada uno de los sistemas de (2.11) no tiene que tener necesariamente p y q como mínimos, esto es, para la fila i podrían existir $p^{(i)}$ y $q^{(i)}$ verificando $0 \leq p^{(i)} \leq p$ y $0 \leq q^{(i)} \leq q$, de manera que:

a) $(d_{p^{(i)}}^{(i)} d_{p^{(i)}-1}^{(i)} \dots d_1^{(i)}) M4_{sr}(q^{(i)}, p^{(i)}) = (c_{q^{(i)}+1}^{(i)} \dots c_{s+r}^{(i)})$

b) cualquier solución de (2.10) tiene $d_{p^{(i)}}^{(i)} \neq 0$ y admite al menos una con $d_{p^{(i)}+1}^{(i)} = \dots = d_{p-1}^{(i)} = d_p^{(i)} = 0$

c) $n_{q^{(i)}+1}^{(i)} = \dots = n_{q-1}^{(i)} = n_q^{(i)} = 0$ y $n_{q^{(i)}}^{(i)} \neq 0$.

En base a ello y de manera análoga a como hicimos anteriormente definimos, para $i=1, \dots, m$ y para cualesquiera h y $g \in \mathbb{N}$, la siguiente matriz:

$$M5_{sr}^{(i)}(h, g) = \begin{pmatrix} c_{h-g+1} & c_{h-g+2} & \cdot & \cdot & c_{s+r-g} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_h & c_{h+1} & \cdot & \cdot & c_{s+r-1} \\ c_{h+1}^{(i)} & c_{h+2}^{(i)} & \cdot & \cdot & c_{s+r}^{(i)} \end{pmatrix}$$

similar a la matriz $M5_{sr}(h, g)$, pero con referencia a la fila i -ésima de los últimos coeficientes considerados.

Con respecto a ella damos las siguientes definiciones:

³ Xu y Bultheel (1990) consideran una definición con grados por elementos y, como caso particular, grados por filas y grados por columnas para un APM.

Definición 2.8

Dado $(s,r) \in R1$, decimos que los *grados* $(q^{(i)}, p^{(i)})$ son *mínimos de la i-ésima fila* si, y sólo si:

$$\begin{aligned} \text{rango}(M4_{sr}(q^{(i)}, p^{(i)})) &= \text{rango}(M5_{sr}^{(i)}(q^{(i)}, p^{(i)})) \\ \text{rango}(M4_{sr}(q^{(i)} - 1, p^{(i)})) &\neq \text{rango}(M5_{sr}^{(i)}(q^{(i)} - 1, p^{(i)})) \\ \text{rango}(M4_{sr}(q^{(i)}, p^{(i)} - 1)) &\neq \text{rango}(M5_{sr}^{(i)}(q^{(i)}, p^{(i)} - 1)) \end{aligned}$$

Definición 2.9

Llamamos *recinto escalonado* $R2_{sr}^{(i)}$ al siguiente subconjunto de N^2 :

$$R2_{sr}^{(i)} = \{(a, b) \in N^2 / 0 \leq a \leq s, 0 \leq b \leq r \text{ y } \text{rango}(M4_{sr}(a, b)) = \text{rango}(M5_{sr}^{(i)}(a, b))\}$$

Al igual que se hizo para $R2_{sr}$, para cada $R2_{sr}^{(i)}$ se pueden establecer propiedades similares. De forma trivial relacionamos estos recintos mediante la siguiente identidad:

$$\bigcap_{i=1}^m R2_{sr}^{(i)} = R2_{sr} .$$

4.2.- REDUCCIÓN POR COLUMNAS

Supongamos que $(s,r) \in R1$ y que (q,p) es un par de *grados mínimos* de $F(z)$. Si el rango de $M4_{sr}(q,p)$ es igual a k , y éste no es máximo, entonces en cada uno de los sistemas (2.11) quedan $f=pm-k$ coeficientes libres. Así, en $M4_{sr}(q,p)$ pueden seleccionarse f filas linealmente dependientes de las k restantes. Si i_1, i_2, \dots, i_f son las filas seleccionadas entonces los elementos de las columnas i_1 -ésima, i_2 -ésima, ... e i_f -ésima de $(d_p \ d_{p-1} \ \dots \ d_1)$ pueden considerarse libres. Por tanto, los restantes son identificados de forma única en función de ellos. Buscando la unicidad de solución, y si lo que se desea es un representante, dichos parámetros pueden considerarse nulos.

A título ilustrativo, obsérvese que en la función del ejemplo 1.6 las matrices $M_{4_{22}}(2,0)$ y $M_{4_{22}}(0,2)$ tienen rango máximo. Sin embargo

$$M_{4_{22}}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2; por ello podemos elegir una fila linealmente dependiente de las otras dos, que puede ser la primera o la tercera, y así considerar nula la primera o la tercera columna de d_1 . El resto de los coeficientes son determinados a partir de aquí de forma única.

Estrategias relacionadas con ésta se llevan a cabo en modelos VARMA a través de los *índices de Kronecker* y de los *modelos de componente escalar* que comentaremos más detalladamente en el capítulo cuarto.

Retomando nuestro objetivo inicial de que los resultados sean suficientemente sencillos y susceptibles de interpretación directa, las principales aportaciones matemáticas de este capítulo nos conducen a proponer en el siguiente la construcción de dos tablas cuyas estructuras especiales caracterizan una función racional y dan información sobre los grados mínimos y la unicidad de la representación para la misma.

CAPÍTULO III

ESQUEMATIZACIÓN TABULAR DE LOS RESULTADOS

1.- INTRODUCCIÓN

La idea de esquematizar ciertas características de una función por medio de tablas que presenten estructuras especiales se encuentra en diversos trabajos. En particular, dentro de la aproximación de Padé se tienen, además de la Tabla C, la generalización de ésta al caso matricial cuadrado (Draux, 1987a), la tabla de la aproximación de Padé minimal (Bultheel y Xu, 1988), la tabla para los aproximantes de Hermite-Padé y los aproximantes de Padé simultáneos y sus generalizaciones a diferentes conceptos de aproximantes de Padé de tipo matricial (Beckermann y Labahn, 1992), la Tabla T (Bultheel, 1987), etc.

En este capítulo proponemos la construcción de dos tablas, que denominamos Tabla 1 y Tabla 2. Por un lado, la estructura especial de la Tabla 1 caracteriza la racionalidad de la función y muestra posibles grados de polinomios que la representan. Al mismo tiempo, en algunos casos concretos, proporciona información con objeto de asegurar que ciertos grados son mínimos, a la vez que resulta útil para conocer cuál es el número exacto de estos pares de grados y para el estudio de los tipos de unicidades definidos en el primer capítulo. Por otro lado, la Tabla 2, partiendo de que la función (1.4) es racional, permite estudiar los posibles pares de grados mínimos y la unicidad de representación de la función para cualquier par de grados.

Por lo general, la construcción de la Tabla 2 es posterior a la de la Tabla 1; no obstante, cada una de ellas puede utilizarse con cierta independencia de la otra en función del objetivo concreto de estudio. Además, en dichas tablas se verifican ciertas propiedades que resultan útiles en la medida en que permiten reducir el número de

casillas a calcular, con el consiguiente ahorro de trabajo computacional, lo cual puede resultar especialmente beneficioso desde el punto de vista práctico en el desarrollo de las aplicaciones.

Aunque la metodología de caracterización que proporciona la Tabla 1 no es exactamente una generalización del procedimiento descrito mediante la Tabla C para series formales de potencias, sin embargo, pueden establecerse estrechas relaciones entre ambos.

Así mismo, algunos resultados, aunque todavía parciales, ponen de manifiesto la vinculación existente entre la estructura de bloques de la Tabla 1 con la de las tablas de Padé.

Hechas estas consideraciones previas, estructuramos el presente capítulo conforme a la siguiente distribución. En el segundo apartado se presenta la construcción de la Tabla 1 así como su interpretación, con el fin de obtener respuestas sobre racionalidad, minimalidad y unicidad. En el tercer apartado se profundiza en ciertas características especiales de la estructura de dicha tabla así como en la conexión de ésta con las tablas de Padé matricial. La construcción de la Tabla 2 se muestra en el cuarto apartado, donde a su vez se sugieren las pautas a seguir con objeto de captar y entender la información que ésta proporciona sobre minimalidad y unicidad. Finalmente, tras hacer unos breves comentarios que implican a las dos tablas, concluimos este capítulo con un quinto apartado en el que diversos ejemplos ilustran detalladamente las diferentes situaciones que pueden presentarse en las aplicaciones.

2.- TABLA 1: RACIONALIDAD, MINIMALIDAD Y UNICIDAD

Comenzamos introduciendo la notación que utilizaremos a fin de facilitar la exposición e interpretación de los resultados que se presentan.

Definición 3.1

Para cualquier $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ decimos que $T1(i,j) = \text{rango}(M1(i,j))$ es el valor de la casilla (i,j) de la Tabla 1.

En primer lugar, como por el corolario 2.4 tenemos que $F(z)$ es racional idéntica a $[i/j]_{\mathbb{F}}(z)$ si, y sólo si, $T1(g,h) = T1(g+k,h+k)$ para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$, $g \geq i$ y $h \geq j$, podemos proponer un método práctico a través de la Tabla 1 para saber si la serie (1.4), suponiendo conocidos todos sus coeficientes o en su caso una ley de formación para los mismos, proviene o no de una función racional. Ahora bien, dado que en numerosas aplicaciones sólo se conocen los N primeros coeficientes de (1.4), esto limita y condiciona las conclusiones obtenidas a la dimensión de la Tabla 1 y, en tales casos, únicamente resulta posible decir que los coeficientes disponibles de la serie coinciden con los de una función racional de ciertos grados.

2.1.- RACIONALIDAD

La implementación e interpretación de la Tabla 1 queda ilustrada en los siguientes pasos:

Paso 1: Construcción de la tabla

Construir una tabla de dos dimensiones. En la intersección de la columna i con la fila j colocar $T1(i,j)$ para cada $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. En la práctica i y j pueden ser tan grandes como permita el número de coeficientes conocidos de la serie (1.4).

Paso 2: Interpretación de la tabla

$F(z)$ es racional si, y sólo si, en la parte inferior derecha de la Tabla 1 aparece *al menos* un cuadrado de lado infinito en el que todas las casillas en la misma diagonal tienen idénticos valores. Téngase en cuenta que, dentro del cuadrado infinito, casillas de diferentes diagonales pueden tener valores diferentes.

Además, todas las casillas de este cuadrado están contenidas en el recinto escalonado R_1 . En este sentido, es importante decir que dicho cuadrado no siempre es único y que la unión de todos los que aparecen da lugar precisamente a R_1 , cuya frontera izquierda-superior es una escalera ascendente, de ahí su nombre, y sus fronteras inferior y derecha están abiertas.

Una vez caracterizada la racionalidad, esta tabla posee propiedades que la acreditan también para el estudio de la minimalidad y la unicidad.

2.2.- MINIMALIDAD

Los pares de grados asociados con las casillas que están situadas en las esquinas de los escalones, esto es, en casillas (i,j) tales que $T_1(i,j) \in R_1$, $T_1(i-1,j) \notin R_1$ y $T_1(i,j-1) \notin R_1$, en general no son grados mínimos sino posibles grados para representar la función racional en cuestión. En situaciones particulares podría garantizarse que constituyen grados mínimos utilizando las propiedades de R_1 . Así, por ejemplo, tenemos que:

- . Por la propiedad 2.3: si $(i,0) \in R_1$ y $(i-1,0) \notin R_1$ entonces $(i,0)$ es un par de grados mínimos.
- . Por la propiedad 2.3: si $(i,0) \notin R_1$ entonces $(i,0)$ no es un par de grados mínimos.

- . Por la propiedad 2.6: si $T1(i-1,j) < T1(i,j)$ entonces $(i-1,j)$ no es un par de grados mínimos.
- . Por la propiedad 2.9: si $T1(i,j) = jm$ y $(i,j) \notin R1$ entonces (i,j) no es un par de grados mínimos.
- . Por la propiedad 2.10: si $(i,j) \in R1$, $(i-1,j) \notin R1$ y $T1(i,j) = jm$ entonces $(i-1,j)$ no es un par de grados mínimos.
- . Por la propiedad 2.12: si $m=n$, $(0,j) \in R1$ y $(0,j-1) \notin R1$ entonces $(0,j)$ es un par de grados mínimos.

2.3.- UNICIDAD

Los tres tipos de unicidades de las definiciones 1.5, 1.6 y 1.7 pueden ser estudiados a través de la información que proporciona la Tabla 1. Ésta nos permite abordarlos atendiendo a los siguientes puntos:

Unicidad del aproximante

- . Si $T1(h,g) = T1(h+1,g+1)$ entonces el aproximante ${}^1[h/g]_F(z)$ es único.
- . Si $m=n$ y $T1(h,g) = mg$ entonces el aproximante ${}^1[h/g]_F(z)$ es único.

Unicidad de la representación del aproximante

. Si existe ${}^1[h/g]_F(z)$, el par de polinomios para representarlo es único si, y sólo si, $T1(h,g) = mg$ ¹. En particular:

- . Si $m=n$ la representación de ${}^1[h/g]_F(z)$ es única si, y sólo si, $T1(h,g) = mg$.
- . Si $(h,g) \in R1$ la representación de ${}^1[h/g]_F(z)$ es única si, y sólo si, $T1(h,g) = mg$.

¹ Nótese que cada uno de los m sistemas que resuelven $SI(h,g)$, cuya matriz asociada es $M1(h,g)$, tiene mg incógnitas escalares.

Unicidad de la representación izquierda de $F(z)$ para los grados (h,g)

. Si $(h,g) \in R1$, la representación izquierda de $F(z)$ para los grados (h,g) es única si, y sólo si, $T1(h,g)=mg$.

En el apartado 4 este último tipo de unicidad va a poder ser caracterizado de forma completa a partir de la Tabla 2.

3.- CARACTERÍSTICAS ESPECIALES DE LA TABLA 1

3.1.- RECINTOS ESCALONADOS ACOTADOS

Los recintos que en este apartado se explican constituyen una generalización en la que $R1$ podría ser considerado un caso particular especial.

Como paso previo a exponer los mencionados recintos, es necesario llamar la atención sobre el caso, que llamamos caso de la "cruz", en el que una casilla "encrucijada" (i,j) verifica:

$$\begin{aligned} T1(i-1,j) &= T1(i,j+1) \\ T1(i,j-1) &= T1(i+1,j) \end{aligned}$$

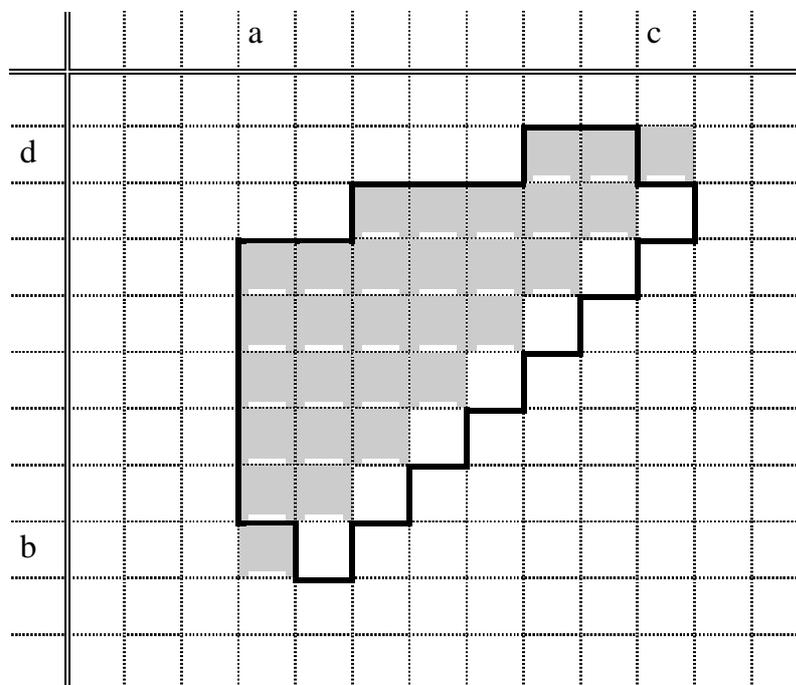
(3.1)

$$\begin{aligned} T1(i-1,j-1) &\neq T1(i,j) \\ T1(i,j) &\neq T1(i+1,j+1) \end{aligned}$$

$T1(i-1,j-1)$	$T1(i,j-1)$	
$T1(i-1,j)$	$T1(i,j)$	$T1(i+1,j)$
	$T1(i,j+1)$	$T1(i+1,j+1)$

- . La frontera inferior-derecha es una escalera ascendente donde cada escalón está constituido por una única casilla.
- . La frontera superior-izquierda también forma escalera ascendente pero en ésta los escalones pueden estar constituidos por más de una casilla.
- . Las casillas (a,b) y (c,d) no pertenecen a la figura en cuestión.

Al anterior recinto asociamos la siguiente figura:



en la que las casillas sombreadas indican que todos los aproximantes correspondientes son idénticos y únicos.

Ejemplo 3.1

A título ilustrativo, presentamos la Tabla 1 de una función para la cual los coeficientes de su desarrollo en serie son los siguientes:

$$c_0 = I \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 15/4 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} -7/16 & -7/4 \\ 7/8 & 7/2 \end{pmatrix}$$

$$c_3=c_4=0 \quad c_i=I \quad i \geq 5$$

Tabla 1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	2	1	0	0	2
2	4	3	2	1	2	4
3	6	4	3	4	5	6
4	8	6	6	7	8	8
5	10	10	10	10	10	10

Esta configuración indica que los aproximantes correspondientes a las casillas sombreadas en la siguiente figura son idénticos entre ellos:

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	2	1	0	0	2
2	4	3	2	1	2	4
3	6	4	3	4	5	6
4	8	6	6	7	8	8
5	10	10	10	10	10	10

Ejemplo 3.2

Una Tabla 1, en la que puede verse que los escalones de la escalera superior-izquierda del recinto no tienen porqué estar formados por una sola casilla y ni siquiera tienen que ser de la misma dimensión entre ellos, es la asociada a la serie cuyos coeficientes son:

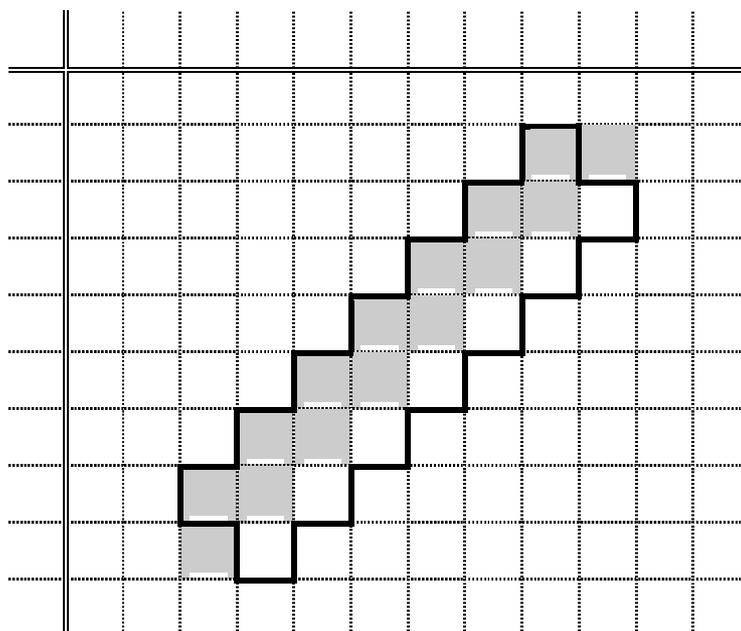
$$c_0 = \begin{pmatrix} 0 & 10.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 9.25 & 1 \\ 1 & 22 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10.5 & 0 \end{pmatrix} \quad c_3 = \begin{pmatrix} 4.5 & 1.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c_5 = c_6 = 0 \quad c_i = I \quad i \geq 7$$

En tal caso, la tabla que resulta es la siguiente

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	1	1	1	0	0
2	3	4	4	3	2	1	2
3	5	6	6	5	3	4	5
4	7	8	8	7	7	7	7
5	8	10	10	10	10	10	9

Por otro lado, nótese como la casilla (4,2) es un ejemplo de lo que hemos llamado casilla "encrucijada". El caso de la "cruz" puede verse generalizado en figuras como la siguiente:



Un ejemplo lo tenemos si consideramos el 3.1 con $c_4=I$ en lugar de $c_4=0$.

Recordamos aquí que en el caso escalar los "ceros" de la Tabla C aparecen siempre agrupados en cuadrados (o figuras escalonadas con un sólo escalón) rodeados por valores no nulos; así mismo, todos los aproximantes de Padé asociados a los "ceros" del triángulo superior-izquierdo y a las fronteras izquierda y superior del cuadrado son idénticos. Nótese, por tanto, que los llamados recintos escalonados acotados constituyen la generalización al caso matricial de lo que ocurre en la Tabla C y la Tabla de Padé para el caso escalar.

3.2.- TABLA 1 SIMPLIFICADA

El corolario 2.3 permite simplificar la computación de los elementos de la Tabla 1. En concreto, si coinciden los valores de dos casillas que están en la misma diagonal, podemos dibujar un subconjunto de alguno de los recintos escalonados de la Tabla 1. Por

- . Si $i=u$ ir al paso 5.
- . Ir a 2.1.

2.3.- Si $T1(i,j)=T1(u,v)$:

- . Si $i=u$ ir al paso 5.
- . Ir al paso 3.

Paso 3

3.1.- Asignar:

- . $h=i+1$.
- . $f=j$.

3.2.- Calcular $T1(h,f)$.

Calcular $T1(h-1,f-1)$.

3.3.- Si $T1(h-1,f-1) \neq T1(h,f)$:

- . $h=h+1$.
- . Si $h=u+1$ ir al paso 4.
- . Ir a 3.2.

3.4.- Si $T1(h-1,f-1)=T1(h,f)$:

- . $f=f-1$.
- . Si $f=0$ ir al paso 4.
- . Ir a 3.2.

Paso 4

4.1.- Asignar:

- . $h=i$.
- . $f=j+1$.

4.2.- Calcular $T1(h,f)$.

Calcular $T1(h-1,f-1)$.

4.3.- Si $T1(h-1,f-1) \neq T1(h,f)$:

- . $f=f+1$.

- . Si $f=v+1$ ir al paso 5.
- . Ir a 4.2.

4.4.- Si $T1(h-1,f-1)=T1(h,f)$:

- . $h=h-1$.
- . Si $h=0$ ir al paso 5.
- . Ir a 4.2.

Paso 5

Reflejar en la tabla sólo los valores de las casillas que hemos calculado, a partir de los cuales podemos trazar sin problema la frontera del recinto R1.

Con el fin de ilustrar el procedimiento propuesto, supongamos que tenemos una función para la cual el recinto R1 tiene las fronteras que se indican en la siguiente tabla y, teniendo en cuenta que en la tabla simplificada se estudian sólo los valores de algunas de las casillas de la Tabla 1, colocamos en éstas el orden en que serán estudiadas:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0				2						18	20	
1					3					16	17	19
2						4		10	12	14	15	
3							5	8	9	11	13	
4							22	6	7			
5							24	21				
6			34	32	30	28	26	23				
7	40	38	36	33	31	29	27	25				
8		39	37	35								1

Resaltamos el hecho de que, en este ejemplo concreto, de las 108 casillas de la tabla, sólo necesitamos calcular los valores de 37, teniendo en cuenta que los 3 valores considerados de la fila cero son cero por convenio.

3.3.- EL CASO ESCALAR COMO CASO PARTICULAR

Este apartado es consecuencia de los resultados que se observan para el caso particular $m=n=1$ en la Tabla C. Así, cuando la función escalar es racional, la Tabla 1 presenta una estructura propia que se recoge en el siguiente resultado y que es consecuencia del teorema 1.2.

Teorema 3.1

La función escalar $f(z)$ es racional idéntica a $b_q(z)/a_p(z)$, donde $b_q(z) = \sum_{i=0}^q b_i z^i$ y $a_p(z) = \sum_{i=0}^p a_i z^i$ son polinomios irreducibles tales que $b_q \neq 0$, $a_p \neq 0$ y $a_0 = 1$ si, y sólo si, $T1(i+k, p+k) = p$ y $T1(q+k, p+h+k) = p+h$ para cualquier $k \geq 0$, $i \geq q$ y $h \geq 0$.

En estas condiciones, es evidente que $T1(i-1, p-1) < p$ si $i \geq q$ y $T1(q-1, p+h-1) < p+h$ si $h \geq 0$.

Por tanto, el recinto $R1$ estará formado por una única esquina, o lo que es lo mismo, las fronteras izquierda y superior de $R1$ formarán un único escalón. Todo esto queda bien reflejado en la siguiente tabla:

	0	1	.	.	.	q	q+
0												
1												
.												
p						p	p	p	p	p	p	.
p+						p+	p	p	p	p	p	.
.						p+	p+	p	p	p	p	.
.						p+	p+	p+	p	p	p	.
.						p+	p+	p+	p+	p	p	.
.					

Es interesante resaltar que $T_1(q,p)$ es máximo y, por ello, en este caso la minimalidad y unicidad de la representación se dan al mismo tiempo, es decir, $f(z)$ tiene un único par de grados mínimos (q,p) cuya representación asociada es única.

Por otro lado, considerando una función escalar en general, dado que en la tabla C los ceros aparecen agrupados en bloques cuadrados rodeados por valores no nulos, los recintos escalonados acotados tendrán también la particularidad de que las fronteras izquierda y superior dan lugar a un único escalón. Los valores asociados a las casillas de un recinto escalonado acotado, que se corresponde en la Tabla C con un cuadrado de ceros 5×5 cuya casilla superior izquierda es la $(a+1,b+1)$, así como los aproximantes que son idénticos entre sí (zona sombreada) se muestran en la siguiente figura:

		a					
b		b	b	b	b	b	b
		b+	b	b	b	b	b+
		b+	b+	b	b		b+
		b+	b+	b+	b		b+
		b+	b+	b+			b+
		b+	b+				b+
		b+	b+	b+	b+	b+	b+

Con el siguiente ejemplo (Baker y Graves-Morris, 1981, vol. I) se pretende ilustrar gráficamente las relaciones que existen entre los bloques de la Tabla C y los de la Tabla 1 de una función racional escalar dada.

Ejemplo 3.3

Sea $f(z)$ la función racional

$$\frac{1 + 2z + z^2 + z^3}{1 + z + z^3}$$

cuyo desarrollo en serie de Taylor tiene los siguientes coeficientes:

$$c_0=1, c_1=1, c_2=0, c_3=0,$$

$$c_n = -c_{n-1} - c_{n-3} \quad n \geq 4$$

La Tabla C asociada presenta la estructura que sigue:

	0	1	2	3	4	5	6	7	.
0	1	1	1	1	1	1	1	.	.
1	1	1	0	0	-1	1	-1	2	.
2	-1	-1	0	0	-1	0	1	-1	.
3	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	.
4	1	2	0	1	0	0	0	0	.
5	1	4	2	1	0	0	0	0	.
.
.

$$f(z)=[3/3]_f(z)$$

La Tabla 1 correspondiente es la siguiente:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
2	2	2	1	1	2	1	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	3	4	3	3	3	3	3
5	5	5	5	5	4	3	3	3	3
6	6	6	6	6	5	4	3	3	3
7	7	7	7	7	6	5	4	3	3
8	8	8	8	8	7	6	5	4	3

$$f(z)=[3/3]_f(z)$$

Si bien conviene llamar la atención mediante el sombreado sobre la forma en que se presentan en cada tabla los recintos acotados, debe apreciarse también en la segunda la ilustración del resultado que se presenta en el teorema 3.1 sobre el recinto R_1 .

4.- TABLA 2: MINIMALIDAD Y UNICIDAD

Comenzamos introduciendo la notación que utilizaremos para hacer referencia a las casillas de la Tabla 2.

Definición 3.2

Dado $(s,r) \in R_1$, llamamos $T_{sr}(i,j)$ al valor de la casilla (i,j) de la Tabla 2 con esquina inferior derecha (s,r) , para cualquier (i,j) tal que $0 \leq i \leq s$ y $0 \leq j \leq r$. Concretamente,

$$T_{sr}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{rango}(M4_{sr}(i,j)) = \text{rango}(M5_{sr}(i,j)) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De forma equivalente, $T_{sr}(i,j)=0$ si, y sólo si, $(i,j) \in R_{2, sr}$.

4.1.- MINIMALIDAD

En algunos casos la minimalidad no requiere de un estudio adicional ya que queda reflejada explícita y conjuntamente con la caracterización de la racionalidad en la Tabla 1. Sin embargo, a veces será necesario llevar a cabo un estudio complementario para conseguir la información deseada.

El teorema 2.6 garantiza que, si (1.4) es racional, existen (y podemos encontrar) unos determinados grados r y s asociados a dos pares de polinomios matriciales que

representan a la función en forma racional, con el polinomio invertido de grado r multiplicando bien a la derecha o bien a la izquierda. No obstante, cabe la posibilidad de que r y s no sean grados mínimos para representar $F(z)$ ya que, como hemos mencionado, puede presentarse el caso en que la función sea idéntica a un aproximante ${}^1[i/j]_F(z)$ pero no exista el aproximante ${}^D[i/j]_F(z)$; en esta situación, por el lema 2.3, $\text{rango}(M1(i,j)) \neq \text{rango}(M1(i+1,j+1))$ y, por tanto, la Tabla 1 no proporciona información acerca del aproximante izquierdo. Por esta razón y como consecuencia del teorema 2.7, presentamos la Tabla 2 cuya estructura refleja los posibles pares de grados mínimos para representar $F(z)$. Los pasos a seguir para su implementación son los siguientes:

Paso 1: Elección de los grados de una posible representación racional para $F(z)$

Tras la observación de la Tabla 1 elegimos r y s de tal forma que $(s,r) \in R1$. Sabemos que $F(z)$ puede ser representada al menos en la forma $D_r^{-1}(z)N_s(z)$, donde r y s no son necesariamente mínimos.

Paso 2: Inicialización

2.1.- Asignar a $T2_{sr}(i,j)$ el valor 1 para $0 \leq j \leq r$ y $0 \leq i \leq s$. En los siguientes pasos se asignará el valor cero a las casillas que lo requieran.

2.2.- $T2_{sr}(s,r) = 0$.

2.3.- Inicializar $i = s - 1$ y $j = r$.

2.4.- Si $i = -1$ ir a 3.4.

Paso 3: Construcción de la tabla

3.1.- Calcular $T2_{sr}(i,j)$.

3.2.- Si $T2_{sr}(i,j) = 1$:

. Si $i = s$ ir a 3.4.

. Si $j = r$, $j = j - 1$.

. Si $j = -1$ ir a 3.4.

. $i=i+1$.

. Ir a 3.1.

3.3.- Si $T_{sr}(i,j)=0$:

. Si $j=r$:

Si $i=0$:

. $j=j-1$.

. Si $j=-1$ ir a 3.4.

. Ir a 3.1.

Si $i \neq 0$:

. $i=i-1$.

. Ir a 3.1.

. Si $j \neq r$:

. $T_{sr}(a,j)=0$ para $i \leq a \leq s$.

. $j=j-1$.

. Si $j=-1$ ir a 3.4.

. Ir a 3.1.

3.4.- Construir una tabla con $s+1$ columnas (desde la 0 hasta la s) y $r+1$ filas (desde la 0 hasta la r). Colocar $T_{sr}(i,j)$ en la intersección de la columna i con la fila j , para $0 \leq j \leq r$ y $0 \leq i \leq s$.

Paso 4: Interpretación de la tabla

$F(z)$ es una función racional idéntica a un aproximante ${}^I_{[q/p]_F}(z)$, donde q y p son grados mínimos con $q \leq s$ y $p \leq r$, si, y sólo si, $T_{sr}(q,p)=0$, $T_{sr}(q-1,p)=1$ y $T_{sr}(q,p-1)=1$.

La consideración de este algoritmo requiere los siguientes comentarios:

Por la propiedad 2.16, para un par de grados mínimos (q,p) la Tabla 2 presenta un rectángulo inferior derecho, con valores nulos, cuya esquina superior izquierda es (q,p) . Esta esquina está bien delimitada.

En general, la estructura de la Tabla 2 está caracterizada por el recinto escalonado $R_{2_{sr}}$, es decir, $\{(i,j) \in N^2 / T_{2_{sr}}(i,j)=0\}$.

Por el teorema 2.7, $F(z)$ admite dos representaciones ${}^I[q/p]_F(z)$ y ${}^I[d/e]_F(z)$ donde (q,p) y (d,e) son los únicos pares de grados mínimos siendo $0 \leq e < p \leq r$ y $0 \leq q < d \leq s$, si, y sólo si, la Tabla 2 correspondiente presenta el recinto escalonado $R_{2_{sr}}$ que se indica en la siguiente ilustración:

	0	1	q	d	.	.	.	s
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
.
.	1	1	1	1	1	1	.	.	1
e	1	1	1	1	0	0	.	.	0
.	1	1	1	1	0	0	.	.	0
.	1	1	.	.	.	1	0	0	.	.	.
p	1	1	1	0	0	.	.	0	0	0	.	.	0
.	1	1	1	0	0	.	.	0	0	0	.	.	0
.
r	1	1	1	0	0	.	.	0	0	0	.	.	0

El paso 3 es consecuencia de las propiedades 2.14 y 2.15; de ellas se deduce que, si se detecta una intersección (h,g) donde $T_{2_{sr}}(h,g)=0$ se garantiza que cualquier intersección (a,b) con $h \leq a \leq s$ y $g \leq b \leq r$ tendrá $T_{2_{sr}}(a,b)=0$. Si, por el contrario, $T_{2_{sr}}(h,g)=1$ entonces $T_{2_{sr}}(c,d)=1$ para $0 \leq c \leq h$ y $0 \leq d \leq g$.

Por esto último, si suponemos por ejemplo que la Tabla 2 para cierta función es de la siguiente forma

	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0
2	1	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0

para su construcción, en el paso 3, sólo se ha tenido que calcular $T2_{sr}(i,j)$ para las casillas: (4,4), (3,4), (2,4), (1,4), (0,4), (1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,1), (4,1), (5,1) y (5,0), es decir, sólo para 13 de las 30 casillas que posee en realidad la tabla.

4.2.- UNICIDAD

El tercer tipo de unicidad se puede estudiar a partir de la Tabla 2 teniendo en cuenta que la representación izquierda de $F(z)$ para los grados (h,g) es única si, y sólo si, dado $(s,r) \in R1$ tal que $(h,g) \in R2_{sr}$, se tiene que $\text{rango}(M4_{sr}(h,g)) = mg$. Esto es debido a que mg es el número de incógnitas escalares de cada uno de los m sistemas que contiene el siguiente:

$$\left. \begin{aligned} d_g c_{h-g+1} + d_{g-1} c_{h-g+2} + \dots + d_1 c_h &= -c_{h+1} \\ d_g c_{h-g+2} + d_{g-1} c_{h-g+3} + \dots + d_1 c_{h+1} &= -c_{h+2} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ d_g c_{s+r-g} + d_{g-1} c_{s+r-g+1} + \dots + d_1 c_{s+r-1} &= -c_{s+r} \end{aligned} \right\}$$

cuya matriz asociada es precisamente $M4_{sr}(h,g)$.

En el caso en que $(h,g) \in R1$ este tipo de unicidad se puede estudiar directamente en la Tabla 1, tal y como comentamos en el apartado 2.3 de este capítulo.

En el siguiente apartado se estudia detalladamente una amplia variedad de ejemplos. Previamente, a modo de síntesis, procede hacer los siguientes comentarios:

La Tabla 1 caracteriza la racionalidad de la función y , en algunos casos, asegura que ciertos pares de grados son mínimos; en ocasiones puede detectar incluso todos los posibles pares de grados mínimos sin necesidad de recurrir a la Tabla 2. Además resulta útil en el estudio de la unicidad.

Para calcular la Tabla 2 hay que partir del hecho de que la función es racional y de un par de grados con los que se pueda representar mediante un aproximante único, información que se obtiene, caso de no conocerla, desde la Tabla 1.

Los grados mínimos que en su caso detecta la Tabla 2 son todos los posibles dentro de los límites s y r .

Cuando el número de coeficientes conocidos de la serie no es muy grande parece innecesaria la construcción de la Tabla 1 ya que una Tabla 2 suficientemente grande proporciona por sí sola todos los pares de grados mínimos posibles dentro de ella. La racionalidad de la función la podemos "asegurar" comprobando que los rangos de $M1(s,r)$, $M2(s,r)$ y $M3(s,r)$ son idénticos siendo (s,r) la esquina inferior derecha de la tabla.

Mediante la Tabla 2 se caracteriza la unicidad de representación de la función para cada par de grados.

Las matrices que intervienen en cada casilla de la Tabla 1 son de menor dimensión que las de la Tabla 2, por lo que la primera resulta preferible desde el punto de vista computacional.

5.- EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

5.1.- ESTUDIO DE FUNCIONES MATRICIALES RACIONALES

Con el fin de ilustrar en la práctica el método propuesto, en este apartado presentamos y comentamos algunos ejemplos de funciones matriciales racionales de dimensiones diferentes, donde se ven reflejadas las diversas situaciones que pueden presentarse.

Debido a las propiedades de $R1$, bajo ciertas condiciones la Tabla 1 proporciona la suficiente información para saber cuáles son los *grados mínimos*, de tal forma que, sólo se calcula la Tabla 2 en aquellos casos en que sea necesario. Recordemos que para $(s,r) \in R1$, $0 \leq i \leq r$ y $0 \leq j \leq s$, $T2_{sr}(i,j) = 0$ si, y sólo si, existe algún elemento de ${}^l[i/j]_F$ idéntico a $F(z)$.

En la práctica las tablas que podemos construir son de dimensión finita y, por ello, no tenemos certeza total sobre la racionalidad de la función ni, en caso de racionalidad, sobre el cardinal de minimalidad. En algunas aplicaciones en las que se conoce una regla de formación para los coeficientes de la serie (1.4), ciertas relaciones entre las matrices que definen los elementos $T1$ y $T2$ pueden ayudar a generalizar las propiedades de las Tablas 1 y 2 a un tamaño infinito. En concreto, la regla de formación de los coeficientes ayudará a determinar una relación de recurrencia entre las filas y/o columnas de las matrices $M1$, $M4$ y $M5$ que, de forma genérica, permite conocer el rango de $M1$ o la diferencia entre los rangos de $M4$ y $M5$.

Para la validación de la Tabla 1 de dimensión finita es suficiente demostrar que el rango de las matrices $M1$ se conserva sobre una sola diagonal elegida al azar del " $R1$ " detectado en la tablas de dimensión finita. Esto es, utilizando el corolario 2.4 (bis) se asegura la racionalidad eligiendo un (i,j) cualquiera de $R1$ y asegurando que $(i+k, j+k) \in R1$ para cualquier $k > 0$.

En dicha tabla, algunas veces, podemos validar la minimalidad utilizando especialmente las propiedades 2.3, 2.6, 2.9, 2.10 y 2.12 según el caso.

Respecto a la Tabla 2, deberá demostrarse que la diferencia de rangos entre M4 y M5 se conserva a lo largo de una fila y/o columna. La proposición 2.4 tiene aquí aplicación.

En cada uno de los ejemplos realizaremos por separado el análisis de la racionalidad y el del número total de grados mínimos, así como el estudio para saber cuáles de ellos tienen asociadas representaciones únicas de la función. Para la validación de las tablas se analizan, en cada caso particular, aquellos aspectos que nos proporcionen la certidumbre deseada. En este estudio sirven de base y orientación los resultados que, dentro de sus límites, reflejan las tablas construidas y que luego intentamos extrapolar, si es posible.

Para la construcción de las Tablas 1 y 2 y el estudio de la unicidad se ha elaborado un algoritmo en FORTRAN. En el proceso de cálculo del rango mediante dicho algoritmo, ciertos elementos teóricamente nulos no serán ceros absolutos debido a las limitaciones de la aritmética finita. Por ello, se ha elegido una cota -que en este caso es una diezmilésima- de tal forma que se considerará nulo todo número en valor absoluto menor que 10^{-4} .

De los diez ejemplos que se presentan en este apartado, los seis primeros (3.4-3.9) muestran casos de funciones cuadradas o rectangulares en los que la realización de la Tabla 1 y la consideración de las propiedades de R1 son suficientes para garantizar la racionalidad, determinar los posibles pares de grados mínimos y estudiar la unicidad de la representación para dichos pares. En los cuatro ejemplos últimos (3.10-3.13), la Tabla 1 proporciona la información sobre la racionalidad pero no sobre la minimalidad; de ahí que sea necesario construir la Tabla 2 para analizar este último aspecto.

Ejemplo 3.4

$$F(z) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix} z \right)^{-1}$$

Coefficientes de la serie

$$c_{2i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4^i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^i} \end{pmatrix} \quad i \geq 0$$

$$c_{2i+1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4^i} & -\frac{3}{4^i} \\ \frac{1}{4^{i+1}} & \frac{1}{4^i} \end{pmatrix} \quad i \geq 0$$

Tabla 1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	2	2	2	2	2
2	4	2	2	2	2	2
3	6	4	2	2	2	2
4	8	6	4	2	2	2
5	10	8	6	4	2	2

$$F(z) \equiv [0/1]_F(z)$$

Racionalidad

Se asegura con el hecho de que $T1(0+k,1+k)=2$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Esto es cierto ya que para cualquier $k \in \mathbb{N}$, en $M1(0+k,1+k)$ las dos primeras filas son linealmente independientes, debido a que $c_0=I$ aparece en ellas, y el resto de las filas son combinación lineal de las mismas. Si denotamos por f_i a la i -ésima fila de $M1(0+k,1+k)$ la relación de dependencia es la siguiente:

$$f_{2i+1} = -f_{2i-1} - 3 f_{2i} \quad i \geq 1$$

$$f_{2i} = \frac{1}{4} f_{2i-3} + f_{2i-2} \quad i \geq 2$$

como consecuencia de que $c_i = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} c_{i-1}$.

Grados mínimos

Por la propiedad 2.3, (0,1) es el único par de grados mínimos para la función ya que ésta no es polinómica por ser $T1(k,1)=2$ (trivial) y $T1(k,0)=0$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Unicidad

La representación izquierda de $F(z)$ dada es la única para dicho par puesto que, al ser $T1(0,1)=2$, es única la representación de ${}^l[0/1]_F(z)$.

Por otro lado, la propiedad 2.7 -que se traduce en que si $(i,j) \in R1$ y $T1(i,j)=j \cdot \min\{m,n\}$ entonces $T1(i-k,j)=j \cdot \min\{m,n\}$ para cualquier $(i-k,j) \in R1$ - se ve reflejada en la fila 1 de $R1$, considerando $i=5$ y $j=1$. De la misma forma, la propiedad 2.8 -traducida en que si $(i,j) \in R1$ y $T1(i,j)=jm$ entonces $T1(i,j-h)=(j-h)m$ para cualquier $(i,j-h) \in R1$ - se ve reflejada en la columna 0 de $R1$. Además, tenemos un ejemplo de la propiedad 2.12 en $(0,j)$ para $j \geq 1$.

Ejemplo 3.5

$$F(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} z^4$$

Coeficientes de la serie

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c_i = 0 \quad i \neq 0, i \neq 4$$

Tabla 1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	1	0
2	4	2	0	1	2	1
3	6	4	3	2	3	2
4	8	7	6	5	4	3
5	10	8	7	6	5	4

$$F(z) \equiv [4/0]_F(z) \equiv [0/4]_F(z)$$

Racionalidad

La certidumbre en la racionalidad está garantizada puesto que de partida la función es polinómica.

Grados mínimos

Para asegurar que los únicos pares de grados mínimos son (0,4) y (4,0) basta con observar que $F(z) \notin {}^I[3/3]_F$. Teniendo en cuenta la propiedad 2.6 y el corolario 2.5, si $T1(i-1,j) < T1(i,j)$ entonces $T2_{sr}(i-1,j)=1$ para cualquier $(s,r) \in R1$, $1 \leq i \leq s$ y $0 \leq j \leq r$. Puesto que $T1(3,3) < T1(4,3)$ sólo existen los grados mínimos que refleja la Tabla 1, de forma que no se hace necesaria la construcción de la Tabla 2 en la búsqueda de otras posibilidades.

Unicidad

Se tiene unicidad para la representación izquierda de $F(z)$ con ambos pares al ser $T1(0,4)$ y $T1(4,0)$ máximos.

Las propiedades 2.8 y 2.12 se ven reflejadas de nuevo en la columna 0 de $R1$.

Por otro lado, sin construir la Tabla 1, al conocer a priori que la función es polinómica, y por tanto racional, con cualquier Tabla 2 de esquina inferior derecha la $(4,v)$ para $v \geq 4$ arbitrario tendríamos también la seguridad de que $(4,0)$ y $(0,4)$ son los únicos pares de grados mínimos y de que las representaciones de $F(z)$ asociadas a los mismos son únicas.

Ejemplo 3.6

$$F(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 15/4 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -7/16 & -7/4 \\ 7/8 & 7/2 \end{pmatrix} z^2$$

Coeficientes de la serie

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 15/4 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} -7/16 & -7/4 \\ 7/8 & 7/2 \end{pmatrix} \quad c_i = 0 \quad i \geq 3$$

Tabla 1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	2	1	0	0	0
2	4	3	2	1	0	0
3	6	4	3	2	1	0
4	8	6	4	3	2	1
5	10	8	6	4	3	2

$$F(z) \equiv [2/0]_F(z) \equiv [1/1]_F(z) \equiv [0/2]_F(z)$$

Racionalidad

La racionalidad es evidente al ser la función polinómica.

Grados mínimos

Los límites de la Tabla 1 construida son suficientes para asegurar que los 3 pares de grados mínimos que ésta refleja son los únicos debido a las propiedades 2.3 y 2.9. Por la propiedad 2.9 y el corolario 2.5, si $(i,j) \notin R1$ y $T1(i,j)=jm$ entonces $T2_{sr}(i,j)=1$ para cualquier $(s,r) \in R1$ tal que $s \geq i$ y $r \geq j$; en este caso $T1(0,1)=2$ (máximo).

Unicidad

Se tiene unicidad en la representación izquierda de $F(z)$ para los tres pares por ser únicas las representaciones del aproximante izquierdo de los grados correspondientes.

La propiedad 2.8 se ve reflejada en la columna 0 de $R1$. Obsérvese también la propiedad 2.12 en $(0,i)$ para $i \geq 2$.

Por otro lado, al ser la función polinómica, construyendo cualquier Tabla 2 con esquina inferior derecha $(2,v)$ para $v \geq 2$ tendremos también la seguridad de que los tres pares $(2,0)$, $(1,1)$ y $(0,2)$ son los únicos mínimos, sin necesidad de conocer la Tabla 1.

Ejemplo 3.7

$$F(z) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} z \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & 3/2 \\ 1 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix} z^2$$

Coeficientes de la serie

$$c_i = 0 \quad i = 0, 1$$

$$c_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{i-2}} & 6\left(\frac{1}{2^{i-2}} - \frac{1}{3^{i-2}}\right) \\ 0 & \frac{1}{3^{i-2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & 3/2 \\ 1 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix} \quad i \geq 2$$

Tabla 1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	2	2	2	2
2	0	2	4	2	2	2
3	2	4	6	4	2	2
4	4	6	8	6	4	2
5	6	8	10	8	6	4

$$F(z) \equiv [2/1]_F(z)$$

Racionalidad

La función es racional ya que $T1(2+k,1+k)=2$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Esto es debido a que para cualquier $k \in \mathbb{N}$, las dos primeras filas de $M1(2+k,1+k)$ son linealmente independientes, puesto que c_2 tiene rango 2 y aparece en ellas, y la relación de dependencia del resto de las filas es la siguiente:

$$f_{2i+1} = \frac{1}{2} f_{2i-1} + f_{2i} \quad i \geq 1$$

$$f_{2i} = \frac{1}{3} f_{2i-2} \quad i \geq 2$$

Nótese que:

$$c_i = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} c_{i-1} \quad i \geq 3$$

Grados mínimos

El único par de grados mínimos dentro de la tabla es (2,1) ya que, por la propiedad 2.3, la función no es polinómica y por la 2.6, al ser $T1(1,5) < T1(2,5)$, no se puede reducir más el grado del numerador.

De forma más general, no se puede reducir el grado del denominador ya que la función no es polinómica. Por la propiedad 2.6, (2,1) es el único par de grados mínimos ya que $T1(1,k) < T1(2,k)$ para cualquier $k \geq 1$. Por una parte, $M1(2,k)$ tiene rango máximo $2k$ debido a que la parte triangular superior izquierda de esta matriz es completamente nula y la antidiagonal está formada por c_2 de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & 0 & c_2 \\ \cdot & \cdot & 0 & c_2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & c_2 & & & \\ c_2 & & & & \end{pmatrix}$$

y, por otra parte, $M1(1,k)$ tiene rango $2k-2$, también observable directamente en su estructura:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & c_2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & 0 & c_2 & & & \\ 0 & c_2 & & & & \end{pmatrix}$$

Unicidad

La representación de ${}^1[2/1]_F(z)$ dada es única al ser $T1(2,1)$ máximo.

En la fila 1 se ve reflejada la propiedad 2.7 y en la columna 2 la propiedad 2.8.

Ejemplo 3.8

$$F(z) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} z \right)^{-1}$$

Coefficientes de la serie

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (-1)^{i-1} & 0 \end{pmatrix} \quad i \geq 1$$

Tabla 1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	1	1	1	1
2	4	3	1	1	1	1
3	6	5	3	1	1	1
4	8	7	5	3	1	1
5	10	9	7	5	3	1

$$F(z) \equiv [1/1]_F(z)$$

Racionalidad

$T_1(1+k, 1+k) = 1$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ (trivial).

Grados mínimos

Dentro de la tabla, el único par de grados mínimos es (1,1). Esto se garantiza por la propiedad 2.9 - $F(z)$ no es idéntico al aproximante $^1[0/5]_F(z)$ al ser $T_1(0,5) = 10$ -, el corolario 2.5 y la propiedad 2.3.

De forma general, el único par de grados mínimos para la función es (1,1) ya que:

i) No se puede reducir más el grado del denominador porque no es polinómica, $T_1(k, 1) = 1 \neq 0$ para cualquier $k \geq 1$.

ii) No se puede reducir más el grado del numerador. Esto se asegura con la propiedad 2.9 al comprobar que $(0, k) \notin R_1$ porque $T_1(0, k) \neq T_1(1, k)$ para cualquier $k \geq 1$:

$T_1(0, k) = 2k$ si $k \geq 1$ debido a la forma que tiene $M_1(0, k)$, esto es,

$$M1(0,k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & 0 & I \\ \cdot & \cdot & \cdot & I & \\ \cdot & 0 & \cdot & & \\ 0 & I & & & \\ I & & & & \end{pmatrix}$$

$T1(1,k+1)=2k+1$ si $k \geq 1$ ya que por ser

$$M1(1, k + 1) = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & I & c_1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & I & c_1 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_k \\ c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & c_k & c_{k+1} \end{pmatrix}$$

el rango de las $2k$ primeras filas es evidentemente $2k$, la penúltima fila es totalmente nula y la última no es combinación lineal de las $2k$ primeras.

Unicidad

La representación izquierda de $F(z)$ no es única para este par ya que $T1(1,1)$ no es máximo.

Ejemplo 3.9

$$F(z) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5/2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} z \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z \right)^{-1}$$

Coefficientes de la serie

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_i = \begin{pmatrix} -\frac{4}{2^i} & 1 \\ -\frac{3}{2^{i-1}} & 2 \end{pmatrix} \quad i \geq 1$$

Tabla 1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	2	2	2	2	2
2	4	4	2	2	2	2
3	6	6	4	2	2	2
4	8	8	6	4	2	2
5	10	10	8	6	4	2

$$F(z) \equiv [1/1]_F(z)$$

Racionalidad

$T1(1+k,1+k)=2$ si $k \geq 0$ ya que, si llamamos p_i a la columna i -ésima de $M1(1+k,1+k)$, $p_{2i+1} = \frac{1}{2^i} p_1$, $p_{2i+2} = p_2$ ($i=1, \dots, k$) y denotando por $c_i^{(j)}$ a la columna j -ésima de c_i se tiene que:

$$c_i^{(1)} = \frac{1}{2^{i-1}} c_1^{(1)} \quad i > 0$$

$$c_i^{(2)} = c_1^{(2)}$$

Grados mínimos

Dentro de las tablas, por las mismas razones que en el ejemplo 3.8, el único par de grados mínimos es (1,1). Además, en este ejemplo, en lugar de utilizar la propiedad 2.9 para asegurar que $F(z)$ no es idéntico al aproximante ${}^1[0/5]_F(z)$, este hecho puede ser también garantizado por la propiedad 2.10 puesto que, si $(i,j) \in R1$, $(i-1,j) \notin R1$ y $T1(i,j)=jm$ entonces $T2_{sr}(i-1,j)=1$ para cualquier $(s,r) \in R1$ tal que $s \geq i$ y $r \geq j$.

De forma general, por la propiedad 2.9, $T2_{uv}(0,k)=1$ para cualquier $(u,v) \in R1$ y $0 \leq k \leq v$, ya que los rangos de $M1(0,k)$ y de $M1(1,k)$ son máximos y, por tanto, $T1(0,k) \neq T1(1,k+1)$, o lo que es lo mismo, $(0,k) \notin R1$.

$$M1(0,k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & 0 & I \\ \cdot & \cdot & \cdot & I & \\ \cdot & 0 & \cdot & & \\ 0 & I & & & \\ I & & & & \end{pmatrix}$$

$$M1(1,k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & I & c_1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & I & c_1 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{k-1} \\ c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{k-1} & c_k \end{pmatrix}$$

Unicidad

En este ejemplo, debido a que $T1(1,1)$ es máximo, es única la representación de ${}^I[1/1]_F(z)$ y, por tanto, también la de $F(z)$ para este par.

Hacemos notar que la propiedad 2.7 se ve reflejada en la fila 1 de $R1$ y la propiedad 2.8 en la columna 1 del mismo.

Ejemplo 3.10

$$F(z) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} z \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z$$

Coefficientes de la serie

$$c_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i \geq 2$$

Tabla 1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	1	2	2	1	1	1
3	2	3	3	2	1	1
4	3	4	4	3	2	1
5	4	5	5	4	3	2

$$F(z) \equiv [2/1]_F(z)$$

Racionalidad

Se asegura, por ejemplo, con el hecho de que:

$$T1(2+k,1+k)=1 \quad \text{para cualquier } k \in \mathbb{N}$$

en cuyo caso las filas de orden impar de $M1(2+k,1+k)$ son nulas y todas las pares son idénticas a la segunda.

Grados mínimos

Sin construir la Tabla 2 con esquina inferior derecha cualquier casilla (u,v) , tal que $2 \leq u$ y $1 \leq v \leq 5$, conocemos con certeza los valores de sus casillas, ya que, por la propiedad 2.3, la función no va a ser polinómica; así, $T2_{uv}(i,0)=1$ para $0 \leq i \leq u$. Además, por la propiedad 2.6 y el corolario 2.5, se puede asegurar que $T2_{uv}(0,j)=1$ para $1 \leq j \leq v$ puesto que $T1(0,j) < T1(1,j)$. Por último, nótese que $F(z)$ es idéntica a un elemento de ${}^I[1/1]_F$, por lo que $T2_{uv}(1,j)=0$ para $1 \leq j \leq v$. Dado que no aparece el par $(1,1)$ reflejado en la Tabla 1 el conjunto ${}^D[1/1]_F$ es vacío. Recurrimos a la Tabla 2, con esquina inferior derecha la $(2,5)$,

para obtener así que (1,1) es el único par de grados mínimos para valores de los grados menores o iguales que 5.

Tabla 2

	0	1	2
0	1	1	1
1	1	0	0
2	1	0	0
3	1	0	0
4	1	0	0
5	1	0	0

En general, el único par posible de grados mínimos es (1,1) ya que:

i) La función no es polinómica, $T1(k,1)=1$ para cualquier $k \geq 1$.

ii) Por la propiedad 2.6 y el corolario 2.5 se puede asegurar que, para cualquier $(u,v) \in R1$, $T2_{uv}(0,j)=1$ para $1 \leq j \leq v$, ya que $T1(0,k) < T1(1,k)$ para cualquier $k \in N$; esto último es debido a que:

. $T1(0,k)=k-1$ para cualquier $k \geq 1$ porque $M1(0,k)$ tiene las dos primeras filas nulas y, del resto, las impares son linealmente independientes (trivial) y las pares verifican:

$$f_{2i} = f_{2i-3} + f_{2i-5} + \dots + f_1 \quad i \geq 2.$$

. $T1(1,k)=k$ ya que las filas impares de $M1(1,k)$ son linealmente independientes y las pares dependen de éstas de la siguiente forma:

$$f_2=0 \text{ y } f_{2i} = f_{2i-2} + f_{2i-3} \quad i \geq 2.$$

iii) Como $T2_{25}(1,1)=0$ entonces $T2_{uv}(1,1)=0$ para cualquier $(u,v) \in R1$.

Unicidad

La representación que, para este par, se da de $F(z)$ es única ya que el rango de $M_{25}(1,1)$ es máximo, si bien ${}^I[1/1]_F$ tiene más de un elemento.

Ejemplo 3.11

$$F(z) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z^2 \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z^2 \right)^{-1}$$

Coefficientes de la serie

$$c_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_{2i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i \geq 0$$

$$c_{2i} = 0 \quad i \geq 2$$

Tabla 1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1
2	2	3	4	3	2	2
3	3	5	5	4	3	2
4	5	7	7	5	4	3
5	7	9	9	7	5	4

$$F(z) \equiv [2/2]_F(z)$$

Racionalidad

$T1(4+k,2+k)=2$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ ya que $M1(4+k,2+k)$ tiene sus filas pares nulas y las impares verifican:

$$f_{2i+5} = f_{2i+1} \quad i \geq 0$$

siendo f_1 y f_3 linealmente independientes.

Grados mínimos

En este ejemplo la Tabla 1 no aporta especial información sobre los grados mínimos, si bien existe plena certeza de que la función no puede ser representada en forma polinómica ni, debido a la propiedad 2.6, por ninguno de los aproximantes de ${}^I[0/j]_F$ para $0 \leq j \leq 5$, ni por los de ${}^I[1/j]_F$ para $0 \leq j \leq 2$, ni por los de ${}^I[i/1]_F$ para $0 \leq i \leq 4$. Podemos estudiar el resto a través de la Tabla 2, construyendo una con esquina inferior derecha la (2,5) y otra con la (5,2); en lugar de esto, acudimos a una única tabla cuya esquina inferior derecha es la (5,5):

Tabla 2

	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0

En esta tabla no aparecen otros pares de grados mínimos que el que indica la Tabla 1. En consecuencia, se puede asegurar que (2,2) constituye el único par de grados mínimos ya que, en general, para cualquier Tabla 2 con esquina inferior derecha $(u,v) \in R1$, se tiene que:

i) $T_{2_{uv}}(h,1)=1$ si $h \geq 0$. En efecto, concretamente para $k \geq 3$ se tiene $\text{rango}(M_{4_{k2}}(k,1))=1$ y $\text{rango}(M_{5_{k2}}(k,1))=2$.

ii) $T_{2uv}(1,h)=1$ si $h \geq 0$ puesto que la última fila de $M_{5_{2k}}(1,k)$ es linealmente independiente de las de $M_{4_{2k}}(1,k)$ para $k \geq 2$.

Unicidad

Como $T_1(2,2)=4$ la representación izquierda de $F(z)$ es única para este par.

Ejemplo 3.12

$$F(z) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} z \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z^2 + \begin{pmatrix} 1+a & 1+a \\ b & b \end{pmatrix} z^3 \right)$$

$a, b \in \mathbb{C}$

Coefficientes de la serie

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i \geq 3$$

Tabla 1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	3	3	2	2	1	1
3	5	5	4	3	2	1
4	7	7	6	5	3	2
5	9	9	8	7	5	3

$$F(z) \equiv [3/1]_F(z)$$

Racionalidad

$T_1(3+k,1+k)=1$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ (trivial).

Grados mínimos

La Tabla 1 no proporciona la suficiente información sobre los grados mínimos; por ello acudimos a la Tabla 2.

Tabla 2

	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	1	0	0
2	1	1	0	0
3	1	1	0	0
4	1	1	0	0
5	1	1	0	0

La Tabla 2 con esquina inferior derecha la (3,5) detecta que existe al menos un aproximante de ${}^1[2/1]_{\mathbb{F}}$, cuyos grados son mínimos, idéntico a la función .

El único par de grados mínimos es (2,1) ya que:

- i) No se puede reducir más el grado del denominador porque no es polinómica.
- ii) $T_{uv}(2,k)=0$ para cualquier $(u,v) \in \mathbb{R}1$ y $1 \leq k \leq v$ ya que, como indica la tabla anterior, $T_{35}(2,1)=0$.

iii) $T_{uv}(1,k)=1$ para cualquier $(u,v) \in \mathbb{R}1$ y para cualquier $k \leq v$. Para comprobarlo basta con observar que en $M_{5_{3k}}(1,k)$, para $k \geq 1$, todas las columnas son linealmente independientes excepto 3: la $2k$ -ésima (que es igual a la $(2k-1)$ -ésima), la $(2k+2)$ -ésima (que es igual a la $(2k+1)$ -ésima) y la $(2k+4)$ -ésima (que es igual a la $(2k+3)$ -ésima). Por ello $\text{rango}(M_{5_{3k}}(1,k))=2(k+2)-3$. Al ser $\text{rango}(M_{4_{3k}}(1,k)) \leq 2k$ (número de filas de la matriz), $T_{3k}(1,k)=1$ si $k \geq 1$.

Unicidad

La representación de $F(z)$ con $(2,1)$ es única, aunque ${}^I[2/1]_F$ no tiene un único elemento.

Ejemplo 3.13

$$F(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z^2$$

Coefficientes de la serie

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tabla 1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	1	0	0	0
2	4	3	2	1	0	0
3	6	5	4	2	1	0
4	8	7	6	4	2	1
5	10	9	8	6	4	2

$$F(z) \equiv [2/0]_F(z)$$

Racionalidad

En este caso, al ser la función polinómica, si sólo estuviéramos interesados en conocer los pares de grados mínimos, la Tabla 1 es innecesaria ya que a priori sabemos que $\{(i,j) / i \geq 3, j \geq 0\} \subseteq R1$ y podemos trabajar sólo con la Tabla 2.

Grados mínimos

Tabla 2

	0	1	2
0	1	1	0
1	1	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0

Como indica la Tabla 2, los únicos pares de grados mínimos para $F(z)$ son (0,2), (1,1) y (2,0).

Unicidad

La representación izquierda de $F(z)$ es única para (2,0) y (0,2), pero no lo es para (1,1).

5.2.- ESTUDIO DE FUNCIONES MATRICIALES NO RACIONALES

Los ejemplos que se presentan en este apartado pretenden ilustrar la Tabla 1 para algunas funciones no racionales particulares. Téngase en cuenta que la *no racionalidad* de las mismas queda caracterizada por la ausencia del recinto R1 en la Tabla 1.

Ejemplo 3.14

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i} z^{2i}$$

Coefficientes de la serie

$$c_{2i} = 2 \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i \geq 0$$

Tabla 1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
2	1	2	2	2	2	2
3	2	3	2	3	2	3
4	3	4	4	4	4	4
5	4	5	4	5	4	4

la cual indica que $F(z)$ no corresponde a una función racional de grados (s,r) para $0 \leq s, r \leq 5$.

Ejemplo 3.15: La función exponencial

$$F(z) = e^{Az} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} z^i \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix}$$

Coefficientes de la serie

$$c_{2i} = \frac{1}{(2i)!} \begin{pmatrix} \frac{1}{4^i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^i} \end{pmatrix} \quad c_{2i+1} = \frac{1}{(2i+1)!} \begin{pmatrix} \frac{1}{4^i} & \frac{3}{4^i} \\ -\frac{1}{4^{i+1}} & -\frac{1}{4^i} \end{pmatrix} \quad i \geq 0$$

Esta función, de forma análoga a lo que ocurre en la Tabla C para la función exponencial escalar, presenta una gran sensibilidad ante la cota que se elija para decidir si un elemento es nulo o no. Esto es debido a que los coeficientes del desarrollo decrecen a gran velocidad, tal y como se ilustra con las siguientes Tablas 1:

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	2	2	2	2	1
2	4	4	4	4	2	2
3	6	6	6	4	4	2
4	8	8	6	6	4	4
5	10	8	8	6	6	4

Cota 10^{-4}

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	2	2	2	2	2
2	4	4	4	4	4	4
3	6	6	6	6	6	6
4	8	8	8	8	8	8
5	10	10	10	10	10	10

Cota 10^{-10}

La función no es racional de grados (s,r) tal que $0 \leq s, r \leq 5$. Aunque la Tabla 1 con la cota 10^{-10} proporciona la información correcta, no sucede lo mismo con la de la cota 10^{-4} ya que según ésta los datos corresponden a una función racional idéntica, entre otros, a los aproximantes $[3/1]_F(z)$, $[2/2]_F(z)$, $[1/3]_F(z)$ y $[0/4]_F(z)$. Obsérvese que la cota 10^{-4} equivale a que $c_i=0$ para cualquier $i \geq 6$.

Ejemplo 3.16: La función coseno

$$F(z) = \cos(Az) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^{2i}}{(2i)!} z^{2i}$$

Con las tablas ocurre algo similar al ejemplo anterior

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	2	0	2	0
2	4	4	4	4	4	2
3	6	4	6	4	4	4
4	8	8	8	6	4	4
5	10	8	10	8	6	4

Cota 10^{-4}

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	2	0	2	0
2	4	4	4	4	4	4
3	6	4	6	4	6	4
4	8	8	8	8	8	8
5	10	8	10	8	10	8

Cota 10^{-10}

En esta última tabla vemos como los aproximantes coinciden de 3 en 3, de la siguiente forma $[i/j]=[i+1/j]=[i/j+1]$ para i, j par, lo cual es lógico debido a que los coeficientes de las potencias impares son nulos. La función no es racional.

5.3.- GRADOS MÍNIMOS POR FILAS. UN EJEMPLO

Retomando la definición de grados mínimos por fila, dada en el segundo capítulo, en este apartado pretendemos ilustrar una posible forma de abordar este tipo de minimalidad. Para ello, y siguiendo con la misma metodología tabular, a cada fila i para $i=1,\dots,m$, podríamos también asociar una Tabla $2^{(i)}$ con esquina inferior derecha $(s,r)\in R1$, cuya casilla (h,g) tiene el valor

$$T2_{sr}^{(i)}(h, g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{rango}(M4_{sr}(h, g)) = \text{rango}(M5_{sr}^{(i)}(h, g)) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Podemos entonces describir la definición 2.8 para este tipo de grados de la siguiente forma:

Decimos que $(q^{(i)}, p^{(i)})$, siendo $0 \leq p^{(i)} \leq r$ y $0 \leq q^{(i)} \leq s$, es un par de *grados mínimos de la i -ésima fila* si, y sólo si,

$$T2_{sr}^{(i)}(q^{(i)}, p^{(i)}) = 0, T2_{sr}^{(i)}(q^{(i)} - 1, p^{(i)}) \neq 0 \text{ y } T2_{sr}^{(i)}(q^{(i)}, p^{(i)} - 1) \neq 0.$$

Obviamente, el hecho de que un par de grados sea mínimo para una fila no implica que sea un par de grados mínimos (global). Esto puede verse en la función del ejemplo 3.13, donde las tablas por filas presentan las siguientes estructuras para $(s,r)=(2,5)\in R1$.

Tabla 2⁽¹⁾

	0	1	2
0	1	1	0
1	1	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0

Tabla 2⁽²⁾

	0	1	2
0	1	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0

Tabla 2⁽³⁾

	0	1	2
0	1	1	0
1	1	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0

Por tanto, los grados mínimos por fila son (2,0), (1,1) y (0,2), para la primera y la tercera, y (1,0) y (0,1), para la segunda.

Como vimos, los pares de grados mínimos de $F(z)$ son (2,0), (1,1) y (0,2), por lo que los pares de grados mínimos de la segunda fila no son mínimos globales. En cambio,

sí se tiene que $\bigcap_{i=1}^3 R2_{25}^{(i)} = R2_{25}$.

Por otra parte, eligiendo para cada fila desde $i=1, \dots, m$, una solución representada en el vector de coeficientes fila

$$(d_{p^{(i)}}^{(i)}, \dots, d_1^{(i)}, I, n_{q^{(i)}}^{(i)}, \dots, n_1^{(i)}, n_0^{(i)})$$

donde $(q^{(i)}, p^{(i)})$ es un par arbitrario de grados mínimos para la fila i -ésima, la representación de $F(z)$ por medio de la solución global

$$(d_{p^*}, \dots, d_1, I, n_{q^*}, \dots, n_1, n_0)$$

donde $p^* = \max\{p^{(i)}\}$, $q^* = \max\{q^{(i)}\}$, $d_k^{(i)} = 0$ si $k > p^{(i)}$ y $n_k^{(i)} = 0$ si $k > q^{(i)}$, no conlleva necesariamente que (q^*, p^*) sea un par de grados mínimos de $F(z)$.

Para ilustrar esto último, consideramos de nuevo la función del ejemplo 3.13. Eligiendo:

$$(q^{(1)}, p^{(1)}) = (0, 2)$$

$$(d_2^{(1)}, d_1^{(1)}, d_0^{(1)}, n_0^{(1)}) = (-1 \ 0 \ 1, -1 \ 0 \ 1, 1 \ 0 \ 0, 1 \ 0)$$

$$(q^{(2)}, p^{(2)}) = (1, 0)$$

$$(d_0^{(2)}, n_1^{(2)}, n_0^{(2)}) = (0 \ 1 \ 0, 1 \ 0, 0 \ 1)$$

$$(q^{(3)}, p^{(3)}) = (2, 0)$$

$$(d_0^{(3)}, n_2^{(3)}, n_1^{(3)}, n_0^{(3)}) = (0 \ 0 \ 1, 1 \ 0, 1 \ 0, 0 \ 0)$$

En este caso $p^* = 2$, $q^* = 2$ y

$$F(z) = \left(I + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z^2 \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z^2 \right)$$

donde, aunque cada fila está representada con grados mínimos, los grados globales (2,2) no son mínimos.

En el siguiente capítulo, presentamos a título ilustrativo una de las posibles aplicaciones que tienen los resultados obtenidos en la identificación de modelos racionales para series de datos temporales, concretamente de modelos ARMA vectoriales.

CAPÍTULO IV

APLICACIÓN A LA ESPECIFICACIÓN DE MODELOS VARMA

1.- INTRODUCCIÓN

En el análisis económico el estudio de las relaciones dinámicas entre variables económicas y su configuración temporal ha sido objeto de amplias investigaciones en el contexto de la Econometría teórica y empírica. Desde principio de los años setenta, en especial, ha habido un gran desarrollo del análisis de series temporales fruto de las numerosas contribuciones que éste ha proporcionado en distintas áreas como son, por ejemplo, la Economía, la Estadística, la Ingeniería de Sistemas, la Investigación Operativa, la Biología, la Medicina, etc.

En dichas áreas, los datos estadísticos a tratar se presentan en forma de una serie cronológica discreta, esto es, una *serie* de observaciones de una (*univariante*) o de varias variables (*multivariante*) tomadas en intervalos de tiempo generalmente iguales; por ejemplo, pueden ser diarios, semanales, mensuales, cuatrimestrales, anuales, etc.

Son diversas las razones que abogan por el análisis y la modelización conjunta de las diferentes series univariantes que componen la serie vectorial, en tanto que éstas pueden estar contemporáneamente relacionadas, una serie puede causar a la otra o incluso pueden existir relaciones de "feedback" entre ellas. Además, en muchos casos se consiguen mejores predicciones cuando las series son modelizadas conjuntamente. No obstante, la utilización del análisis multivariante requiere de técnicas más sofisticadas y sus desarrollos teóricos son menos conocidos que en el análisis univariante.

En un análisis estadístico de series temporales multivariantes, los objetivos generales consisten en entender las relaciones dinámicas entre las variables, validar empíricamente ciertos supuestos "a priori" en la estructura de las series y mejorar la exactitud de las predicciones. Estos objetivos se pueden considerar de forma independiente; sin embargo, a menudo en la práctica se establecen ciertas prioridades entre ellos, según la aplicación de que se trate.

Dentro del caso de series temporales que admiten una representación lineal en función de un ruido blanco, este capítulo pretende ilustrar la aplicación de los resultados previos a los modelos VARMA, *modelos vectoriales autorregresivos medias móviles*. Éstos constituyen la generalización de los modelos ARMA univariantes, tienen la habilidad de acomodarse a una gran variedad de estructuras dinámicas y contemplan como casos particulares otros modelos conocidos como, por ejemplo, el modelo de Función de Transferencia (Box y Jenkins, 1976).

Son numerosos los procedimientos propuestos hasta ahora para abordar el problema de la identificación del comportamiento dinámico en el marco de los modelos VARMA, prueba de ello son las referencias bibliográficas existentes al respecto¹. El interés por profundizar en el estudio de la especificación en este tipo de modelos ha permitido el desarrollo de diversos métodos alternativos de identificación entre los que podemos destacar las técnicas basadas en estadísticos muestrales como las correlaciones y las correlaciones parciales, la determinación del orden de un VAR por medio de tests de hipótesis asociados a la estimación por mínimos cuadrados del modelo VAR, los métodos basados en el análisis de correlaciones canónicas, los criterios de selección del orden como el AIC, BIC, etc. Muchos de los métodos utilizados en el caso multivariante son adaptaciones de los utilizados en el univariante (Reinsel, 1993).

¹ Ver referencias de Tiao y Tsay (1989).

Teniendo en cuenta que cada herramienta estadística por separado aporta información útil para el analista, es común utilizar varias de ellas, y no sólo una, para la elección del modelo más apropiado.

Atendiendo al principio de parsimonia, la determinación de un modelo VARMA supone dos grandes retos:

- i) la determinación de los órdenes (especificación del modelo) y
- ii) la estimación de los parámetros.

Algunas estrategias se han desarrollado intentando, en buena parte, abordar conjuntamente ambos retos (Lütkepohl, 1991; Reinsel, 1993); sin embargo, de modo análogo a lo que ocurre en el caso univariante, es interesante determinar los órdenes a partir de los datos sin tener que recurrir a la estimación de los parámetros (Tiao y Box, 1981; Berlinet, 1982; Francq, 1989). Este primer paso tiene consistencia teórica por sí mismo ya que en la literatura se dispone de métodos para una estimación eficiente de los parámetros en un modelo VARMA correctamente especificado (Lütkepohl, 1991; Reinsel, 1993).

La preocupación por abordar el problema de la especificación es lo que nos motiva a trasladar los resultados sobre funciones racionales de los capítulos anteriores, presentándolos como otra alternativa -válida por su justificación en la aproximación de Padé matricial- muy relacionada con la propuesta presentada en Tiao y Tsay (1989) para la especificación de modelos VARMA.

En la literatura econométrica la aproximación de Padé ha contribuido a completar y a estimular gratamente el estudio de la especificación dinámica. Sus propiedades se han mostrado especialmente útiles no sólo en el estudio del comportamiento asintótico de ciertas series numéricas sino, en particular, constituyen

una herramienta valiosa para llevar a cabo la especificación de la estructura de relación dinámica entre variables.

Algunos autores han intentado en los últimos años profundizar en la consideración de la teoría de la representación racional de series en la modelización econométrica, proponiendo la utilización de diversas técnicas al respecto; no obstante, la mayor parte de las aportaciones realizadas se refieren al caso univariante. En este sentido cabe señalar algunas propuestas de caracterización dinámica, vinculadas con la aproximación de Padé, como son el *método corner* o métodos basados en la *Tabla C* (Beguin et al., 1980; Liu y Hanssens, 1982; Lii, 1985; Claverie et al., 1990; Gil, 1995), el ε -*algoritmo* (Berlinet, 1984; González et al. 1993, 1995), el *R-S algoritmo* (Gray et al., 1978; Berlinet y Francq, 1994), etc. Aunque en Tiao y Box (1981) se aborda una generalización del método corner al caso multivariante y en Francq (1989) la utilización del ε -algoritmo en la especificación de modelos VARMA, en ninguno de ellos se caracterizan por completo estos modelos.

Por otro lado, en la etapa de especificación de modelos VARMA las posibles representaciones dan lugar a dos problemas específicos en el caso multivariante como son el de la existencia de modelos *intercambiables*, en particular, el de la no unicidad de pares de órdenes mínimos en algún sentido y el de la *identificabilidad*, en particular, el de la no unicidad de la representación dado un par de órdenes mínimos.

En cuanto a la existencia de modelos *intercambiables*, en nuestra opinión el principal acercamiento se ha llevado a cabo a través de los *modelos de componente escalar* (Tiao y Tsay, 1989), aunque también ha sido abordada, si bien de forma parcial, en Francq (1989) en el caso en que los modelos son identificables.

La *identificabilidad* de modelos VARMA ha sido tratada desde diferentes perspectivas. Así, por ejemplo, por un lado se han dado condiciones para la

identificabilidad que necesitan del conocimiento de los parámetros del modelo (Hannan, 1969) y, por otro lado, se han definido formas representativas dentro de las posibles representaciones del modelo, entre las que destacamos la *forma "echelon" o escalonada* (Reinsel, 1993). Sin embargo, no hemos encontrado en la literatura procedimientos para estudiar, a partir de los datos y sin necesidad de conocer los parámetros, qué pares de órdenes tienen asociada una única representación.

La aproximación de Padé matricial y sus propiedades resultan especialmente interesantes en la especificación de modelos VARMA bajo la consideración de los problemas anteriores. En concreto, en el contexto de esta investigación, a partir de los capítulos segundo y tercero puede deducirse un método práctico de aplicación al campo de series temporales multivariantes que permite:

- 1- *Caracterizar* modelos VARMA.
- 2- Estudiar los posibles pares de *órdenes mínimos* reconociendo además los modelos *intercambiables* que existan.
- 3- Detectar qué representaciones son *identificables* y cuáles no.

Todo ello sin necesidad de conocer los coeficientes matriciales de los polinomios que intervienen en el modelo.

En el capítulo anterior, por medio de las Tablas 1 y 2, se ha estudiado el carácter racional y el número de pares posibles de órdenes mínimos de representación de una serie matricial a partir de los coeficientes de la misma. Sin embargo, en el contexto de series temporales, debido a la componente estocástica, aumenta la dificultad puesto que no se tienen valores exactos sino estimaciones de los coeficientes de la serie asociada a sus autocovarianzas, por lo que calcularemos tablas estimadas.

Por otro lado, al conocer sólo un número finito de coeficientes y no disponer de una ley de formación, los resultados son en cualquier caso limitados. No obstante, como lo habitual en la práctica es obtener órdenes pequeños para el modelo, los resultados de las tablas de dimensión finita se pueden considerar aceptables.

En el presente capítulo se exponen en primer lugar las principales características de los modelos VARMA, resaltando los problemas relativos a la *identificabilidad*, *minimalidad* e *intercambiabilidad*, haciendo referencia a las principales vías de solución propuestas en la literatura relacionadas con nuestra investigación. Posteriormente se presentan las aportaciones teóricas que pueden derivarse de los capítulos anteriores así como los resultados empíricos que hemos obtenido en este sentido al considerar, por un lado, datos simulados y, por otro, datos reales.

2.- CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES DE LOS MODELOS VARMA

El conjunto de variables de interés está representado por un vector de dimensión k , X_t , $t \in Z$ (números enteros). Cada una de las componentes X_{it} , $i=1, \dots, k$, es una variable aleatoria real.

Los dos primeros momentos de un proceso son:

i) la *media*: $E(X_t) = m_t$, $t \in Z$, y

ii) las *autocovarianzas*: $Cov(X_t, X_{t-h}) = E[(X_t - m_t)(X_{t-h} - m_{t-h})']$; $t, h \in Z$

De ellos, la serie de autocovarianzas es la que más información aporta sobre el proceso, puesto que da una idea de la evolución de las dispersiones de cada una de las variables, de las relaciones instantáneas existentes entre dos componentes de un proceso, de las relaciones temporales entre dos valores de una misma serie asociados a dos datos

diferentes y, más concretamente, proporciona las medidas de relaciones temporales entre dos componentes diferentes (Gourieroux y Monfort, 1990).

Entre los posibles procesos es interesante considerar aquéllos en los que las propiedades son invariantes en el tiempo. Así, un proceso se dice *estacionario* cuando la media y las autocovarianzas son independientes de t . En este caso, denotaremos por $R(h)$ a la matriz $\text{Cov}(X_t, X_{t-h})$ para cualquier $h \in \mathbb{Z}$. Es evidente el hecho de que $R(h) = R'(-h)$.

Sin pérdida de generalidad asumimos que X_t es centrado, es decir, $E(X_t) = 0$ para cualquier $t \in \mathbb{Z}$.

Si X_t es un proceso no determinístico y estacionario, una generalización al caso multivariante del Teorema de Wold (Reinsel, 1993) establece que X_t puede ser representado como un proceso *vectorial media móvil* (VMA) infinito,

$$X_t = W(L) \varepsilon_t \quad W_0 = I$$

donde:

- L es el *operador retardo*, $Y_{t-n} = L^n Y_t$.
- ε_t es un proceso ruido blanco vectorial tal que $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Sigma$ y $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+f}') = 0$ si $f \neq 0$.

• la serie matricial $k \times k$ $W(L) = \sum_{j=0}^{\infty} W_j L^j$ es la aplicación que al proceso ε_t le hace corresponder el proceso X_t . Estas series operadores en L verifican propiedades que permiten tratarlas como series formales de potencias (Gourieroux y Monfort, 1990). Los coeficientes W_j no son necesariamente absolutamente sumables pero satisfacen la condición más débil $\sum_{j=0}^{\infty} \|W_j\|^2 < \infty$.

Considerando $W_j=0$ si $j<0$, la expresión de las autocovarianzas se deduce de la siguiente forma:

$$R(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} W_j \text{Cov}(\varepsilon_{t-j}, \varepsilon_{t-h-i}) W_i' = \sum_{j=0}^{\infty} W_j \Sigma W_{j-h}' \quad (4.1)$$

bajo el supuesto de que las series son convergentes para todo $h \in Z$.

Asumiendo que la serie matricial $W(L)$ puede ser representada (al menos aproximadamente) como el producto de dos matrices de la forma $A_p^{-1}(L)B_q(L)$, donde:

$$A_p(L) = I + A_1L + \dots + A_pL^p \quad (A_p \neq 0)$$

$$B_q(L) = I + B_1L + \dots + B_qL^q \quad (B_q \neq 0)$$

siendo los coeficientes A_i y B_j ($i=1,2,\dots,p$; $j=1,2,\dots,q$) matrices constantes $k \times k$, podemos escribir:

$$X_t + A_1X_{t-1} + \dots + A_pX_{t-p} = \varepsilon_t + B_1\varepsilon_{t-1} + \dots + B_q\varepsilon_{t-q}$$

o en forma reducida:

$$A_p(L)X_t = B_q(L)\varepsilon_t.$$

que constituye el modelo lineal *autorregresivo media móvil* de órdenes p y q , esto es, VARMA(p,q).

En el caso en que $q=0$ el proceso satisface la ecuación $A_p(L)X_t = \varepsilon_t$ y se trata de un proceso *vectorial autorregresivo de orden p* , VAR(p). Cuando $p=0$, $X_t = B_q(L)\varepsilon_t$ y se trata de un proceso *vectorial media móvil de orden q* , VMA(q). En el caso particular $p=0$ y $q=0$ estamos ante un proceso *ruido blanco*.

Un proceso VARMA es *estacionario* si las raíces del determinante de $A_p(z)$ son, en módulo, todas estrictamente mayores que la unidad. Además el proceso se dice *invertible* si las raíces del determinante de $B_q(z)$ son también, en módulo, estrictamente mayores que la unidad.

2.1.- UNICIDAD Y MINIMALIDAD DE LA REPRESENTACIÓN

En la literatura, los conceptos íntimamente relacionados de minimalidad y unicidad han sido estudiados desde diferentes perspectivas.

En el caso univariante, un proceso x_t con representación $a_p(L)x_t = b_q(L)\varepsilon_t$ se dice ARMA(p,q) *minimal* si, y sólo si, los coeficientes a_p y b_q son no nulos, $a_0=1$ y los polinomios $a_p(z)$ y $b_q(z)$ no tienen factores comunes. En tal caso, los órdenes p y q se dicen *minimales*. Además, suponiendo que:

$$\text{Si } a_p(z)=0 \text{ entonces } |z|>1 \text{ y si } b_q(z)=0 \text{ entonces } |z|>1 \quad (4.2)$$

existe *una y sólo una* representación minimal. Esta representación se dice minimal porque p y q son los más pequeños posibles. Todas las demás representaciones verificando (4.2) son obtenidas multiplicando los polinomios $a_p(z)$ y $b_q(z)$ de la representación minimal por un mismo polinomio (Gourieroux y Monfort, 1990).

Sin embargo, esta importante propiedad no puede generalizarse al caso multivariante donde pueden existir tipos de multiplicidad de la representación inexistentes en el caso univariante. Surgen entonces nuevos conceptos que pasamos a definir.

Definición 4.1

Dos modelos VARMA con diferentes órdenes se dice que son *intercambiables* si dan lugar a la misma estructura de autocovarianzas para el proceso X_t o, de forma equivalente, dan lugar a la misma representación MA infinita.

Esto se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1

X_t puede ser representado como el VAR(2)

$$X_t + \begin{pmatrix} -1/2 & -15/4 \\ -3/4 & 1/2 \end{pmatrix} X_{t-1} + \begin{pmatrix} 7/2 & 7/4 \\ -7/8 & -7/16 \end{pmatrix} X_{t-2} = \varepsilon_t$$

que es intercambiable con el VARMA(1,1)

$$X_t + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} X_{t-1} = \varepsilon_t + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix} \varepsilon_{t-1}$$

y con el VMA(2)

$$X_t = \varepsilon_t + \begin{pmatrix} 1/2 & 15/4 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \varepsilon_{t-1} + \begin{pmatrix} -7/16 & -7/4 \\ 7/8 & 7/2 \end{pmatrix} \varepsilon_{t-2}$$

siendo ε_t ruido blanco con una cierta matriz de covarianza invertible.

Nótese que en ninguna de las representaciones de este ejemplo pueden reducirse a la vez los dos órdenes del modelo, aunque esto no está implícito en la definición anterior. En este sentido pueden surgir diferentes tipos de minimalidades; uno de ellos es el siguiente.

Definición 4.2

Los órdenes (p,q) de un modelo VARMA (p,q) : $A_p(L)X_t = B_q(L)\varepsilon_t$, son *mínimos* si, y sólo si, (q,p) es un par de *grados mínimos* de la función racional $A_p^{-1}(z)B_q(z)$.²

Por otro lado, también es posible que dos representaciones VARMA (p,q) :

$$A_p(L)Y_t = B_q(L)\varepsilon_t \quad \text{y} \quad C_p(L)Y_t = D_q(L)\varepsilon_t$$

con diferentes coeficientes matriciales y cuyo par de órdenes asociado es mínimo, den lugar a los mismos coeficientes W_j en la representación MA infinita del proceso, es decir:

$$W(L) = A_p^{-1}(L)B_q(L) = C_p^{-1}(L)D_q(L).$$

Dos representaciones VARMA (p,q) con esta propiedad se dice que son *observacionalmente equivalentes*.

Es por todo ello que se introduce el siguiente concepto.

Definición 4.3 (Reinsel, 1993)

Se dice que los parámetros del modelo VARMA (p,q) , $A_p(L)Y_t = B_q(L)\varepsilon_t$, son *identificables* si los coeficientes matriciales de los polinomios $A_p(z)$ y $B_q(z)$ están únicamente determinados por las matrices W_j de la (única) representación MA infinita del proceso, es decir, no existen otros pares de operadores VARMA (p,q) que conduzcan a una representación observacionalmente equivalente a la anterior.

Dado un par de órdenes mínimos, no siempre existe una representación identificable; por otro lado, puede existir para unos órdenes mínimos y no para otros.

² Ver capítulo II.

Es evidente el hecho de que si un proceso estacionario admite una representación media móvil pura ésta es identificable. Lo mismo sucede con la representación autorregresiva pura.

En el contexto de la estimación de los coeficientes matriciales del modelo, el problema de la no unicidad de una representación VARMA es un inconveniente importante y antes de proceder a la estimación se suelen imponer restricciones sobre los operadores VAR y VMA que garanticen la unicidad.

En particular, suponiendo estacionariedad e invertibilidad, las dos condiciones siguientes (Hannan, 1969) son necesarias y suficientes para la identificabilidad de los parámetros en el modelo VARMA(p,q):

- i) los polinomios $A_p(z)$ y $B_q(z)$, de grados p y q exactamente, no tienen otros factores comunes que los unimodulares, y
- ii) $\text{rango}(A_p; B_q) = k$.

Obsérvese que la condición de identificabilidad ii) requiere del conocimiento de los polinomios $A_p(z)$ y $B_q(z)$. Además, dicha condición no proporciona información acerca de si el proceso verifica otras representaciones también identificables ni sobre el número de representaciones de este tipo; tampoco permite afirmar si un proceso dado no admite ninguna representación identificable.

No obstante, algunos modelos VARMA no satisfacen condiciones de este tipo. En su lugar, para ellos se consideran las llamadas representaciones *canónicas* garantizando que exista un único modelo representativo de esta forma para la clase de modelos observacionalmente equivalentes, cuyos parámetros sean entonces identificables. Posibles alternativas que se han considerado para asegurar

identificabilidad son los modelos en forma de *ecuaciones finales* y el modelo en la forma *escalonada* (Lütkepohl, 1991).

Desde otro punto de vista, los *modelos de componente escalar* (SCM) (Tiao y Tsay, 1989) han abordado el problema de la especificación tratando con mayor interés la minimalidad e intercambiabilidad, sin prestar demasiada atención al problema de la identificabilidad.

Por la estrecha vinculación que guardan con nuestra investigación, dedicamos a ellos los tres apartados que siguen.

2.1.1.- El modelo en forma de ecuaciones finales

La representación VARMA(p,q): $A_p(L)Y_t = B_q(L)\varepsilon_t$ se dice que está en forma de *ecuaciones finales* si p es el mínimo número natural para el cual se verifica que $A_p(L)=c(L)I$, donde $c(L) = 1-c_1L- \dots -c_pL^p$ es un polinomio escalar con $c_p \neq 0$.

Con esta forma la representación es única. La especificación de este tipo de modelos está estrechamente relacionada con la caracterización racional por elementos dada en el apartado 2 del capítulo II.

2.1.2.- El modelo en la forma escalonada

Surge del estudio del *grado de McMillan* y los *índices de Kronecker*.

En efecto, para un proceso vectorial estacionario X_t con matrices de autocovarianza $R(i) \ i \in \mathbb{Z}$, se define el *grado de McMillan* M como el rango de la matriz de Hankel de dimensión infinita siguiente:

$$H = \begin{pmatrix} R(1) & R(2) & R(3) & \cdot & \cdot \\ R(2) & R(3) & R(4) & \cdot & \cdot \\ R(3) & R(4) & R(5) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

de modo que, el proceso X_t sigue un modelo VARMA de orden finito si, y sólo si, M es finito. Se deduce que $M \leq sk$, donde $s = \max\{p, q\}$ pero podría ser considerablemente menor que sk .

Por otro lado, el i -ésimo *índice de Kronecker* k_i , $i=1,2,\dots,k$ es el valor más pequeño tal que la $(kk_i + i)$ -ésima fila de H (la i -ésima fila en el (k_i+1) -ésimo bloque de filas de H) es linealmente dependiente con las filas anteriores de H . Esto implica que el resto de filas después de ésta también serán linealmente dependientes con las que preceden a la (kk_i+i) -ésima. El conjunto $\{k_1, k_2, \dots, k_k\}$ de los índices de Kronecker es único para todo proceso VARMA y, por tanto, no depende de cualquier forma particular de representaciones observacionalmente equivalentes. Se verifica que

$$M = \sum_{i=1}^k k_i .$$

Con la información que proporcionan los índices de Kronecker se pueden localizar los parámetros redundantes y tras considerarlos nulos obtener, para un proceso lineal estacionario y centrado X_t , una representación única con la siguiente forma:

$$A_0^\# X_t - \sum_{j=1}^p A_j^\# X_{t-j} = B_0^\# \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q B_j^\# \varepsilon_{t-j}$$

donde $A_0^\# = B_0^\#$ es triangular inferior con unos en la diagonal, $p=q=\max\{k_i\}$ y los $A_j^\#$ y $B_j^\#$ para $j>k_i$ tienen sus i -ésimas filas nulas. Esta es la llamada representación *escalonada*³.

2.1.3.- Modelos de componente escalar (SCM)

Constituyen otra forma diferente de conseguir ciertos tipos de representaciones parsimoniosas. En Tsay (1989) se comparan, a través del análisis de correlaciones canónicas, el modelo basado en la consideración de los índices de Kronecker y los basados en las SCM, pudiendo ser visto este último como un refinamiento del primero, ya que proporciona información sobre la estructura de los órdenes de las filas de los coeficientes de las partes VAR y VMA separadamente.

Tiao y Tsay (1989) eligen en primer lugar unos posibles órdenes (p,q) por medio de una *condición necesaria* basada en los rangos de ciertas matrices construidas a partir de las autocovarianzas del proceso, estrechamente vinculada con la *caracterización* que daremos en este trabajo. A continuación, introducen el modelo de componente escalar para determinar estructuras minimales por filas.

Para motivar el acercamiento a los SCM consideramos el modelo VARMA escrito de la siguiente forma:

³ Para más detalle sobre este apartado véase Reinsel (1993).

$$X_{it} - A_{li}X_{t-1} - \dots - A_{pi}X_{t-p} = \varepsilon_{it} - B_{li}\varepsilon_{t-1} - \dots - B_{qi}\varepsilon_{t-q}$$

donde A_{hi} y B_{hi} son las filas i -ésimas de A_h y B_h respectivamente.

Se dice que $x_t = v_0'X_t$, una combinación lineal de X_t , sigue un SCM(r,s), es decir, un modelo de componente escalar de órdenes (r,s), si existen r vectores k -dimensionales, v_1, \dots, v_r , tales que el proceso escalar $u_t = x_t + \sum_{i=1}^r v_i'X_{t-i}$ verifica que

$$E(\varepsilon_{t-j}u_t) \begin{cases} \neq 0 & \text{si } j = s \\ = 0 & \text{si } j > s \end{cases}$$

Obviamente, para un modelo VARMA(p,q), cada componente X_{it} es un SCM(p,q). La idea de SCM no es sólo un simple camino para descubrir la estructura de X_{it} . Puesto que el vector v_0 es un vector arbitrario no nulo, el SCM permite buscar combinaciones lineales de X_t que pueden sustancialmente simplificar la estructura del modelo ya que con frecuencia algunas de las componentes X_{it} de un VARMA(p,q) suelen ser de órdenes más bajos que (p,q).

Si $x_{1t} = v_{10}'X_t \sim \text{SCM}(p_1,q_1)$ y $x_{2t} = v_{20}'X_t \sim \text{SCM}(p_2,q_2)$ se dice que estos SCM son linealmente independientes si los vectores k -dimensionales v_{10} y v_{20} son linealmente independientes. Así, para un vector X_t k -dimensional que sigue un VARMA(p,q) existen k SCM linealmente independientes que determinan el modelo.

Una componente escalar $v_{i0}'X_t + \sum_{j=1}^{p_i} v_{ij}'X_{t-j}$ debe estar en el subespacio generado por $\{\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}\}$. Como consecuencia

$$v'_{i0}X_t + \sum_{f=1}^{p_i} v'_{if}X_{t-f} = v'_{i0}\varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q_i} h'_{ij}\varepsilon_{t-j},$$

donde los h_{ij} son vectores k -dimensionales.

Supongamos que tenemos k componentes escalares linealmente independientes para X_t . Sea $p = \max\{p_i\}$ y $q = \max\{q_i\}$. Para $f=0, \dots, p$, sea $V_f = [v_{1f}, \dots, v_{kf}]'$ una matriz $k \times k$ donde $v_{if} = 0$ si $p_i < f \leq p$. De la misma forma, para $j=1, \dots, q$, definimos $H_j = [h_{1j}, \dots, h_{kj}]'$ donde $h_{ij} = 0$ si $q_i < j \leq q$. Tenemos entonces el modelo

$$V_0X_t + V_1X_{t-1} + \dots + V_pX_{t-p} = V_0\varepsilon_t + H_1\varepsilon_{t-1} + \dots + H_q\varepsilon_{t-q}.$$

Con el objetivo de simplificar el modelo al máximo se requiere que el número de filas no nulas $\sum_{i=1}^k (p_i + q_i)$ sea mínimo. Puesto que la elección de las componentes y sus estructuras no necesariamente han de ser únicas, se buscan las componentes con la siguiente propiedad minimal. Denotando por $o_{(i)} = p_i + q_i$, sea $OR(Y_t) = \{o_{(1)}, o_{(2)}, \dots, o_{(k)}\}$. Se dice que las k componentes son de órdenes minimales si no existe otro conjunto de k componentes Y_t^* con $OR(Y_t^*) = \{o_{(1)}^*, o_{(2)}^*, \dots, o_{(k)}^*\}$ tales que $o_{(i)}^* \leq o_{(i)}$ para $1 \leq i \leq k$ y se tiene al menos una desigualdad estricta para algún i . Los k SCM encontrados se utilizan para especificar un modelo VARMA para $Y_t = V_0X_t$.

También es eliminado un tipo de parámetros redundantes mediante un estudio cuidadoso de las SCM, sin embargo, con ello no se asegura que la representación resultante sea única⁴.

⁴ Para más detalle sobre este apartado véase Tiao y Tsay (1989).

En la terminología de los SCM, para un proceso lineal estacionario k -dimensional, un índice de Kronecker igual a k_i implica la existencia de un SCM para X_t de orden (p_i, q_i) con $\max\{p_i, q_i\} = k_i$. Más concretamente, para un proceso lineal estacionario k -dimensional, sea $\{k_1, \dots, k_k\}$ el conjunto de los índices de Kronecker y $\text{SCM}(p_i, q_i)$ para $i=1, \dots, k$ los k modelos de componente escalar de órdenes mínimos. Si $m_i = \max\{p_i, q_i\}$ para $i=1, 2, \dots, k$ entonces los conjuntos $\{k_1, \dots, k_k\}$ y $\{m_1, \dots, m_k\}$ son equivalentes (Tsay, 1989).

3.- APROXIMANTES DE PADÉ MATRICIALES Y MODELOS VARMA

En este apartado presentamos una técnica alternativa que se pretende contribuya a enriquecer el tratamiento y, en concreto, la especificación de modelos VARMA.

Previamente es interesante comentar que, aunque la forma escalonada permite obtener una representación parsimoniosa, la utilización de los índices de Kronecker en su especificación tiende a obligar a que sean ceros ciertos parámetros VAR en la presencia de parámetros redundantes. Si bien en teoría esta forma de proceder constituye una estrategia útil, puede no ser óptima en algunas aplicaciones (Tiao y Tsay, 1989). Además, no responde a la cuestión de la especificación de los posibles pares de órdenes mínimos ni a la identificabilidad en cada caso.

Por otro lado, respecto a los SCM, aunque Tiao y Tsay (1989) no discuten la teoría de identificabilidad o de condiciones suficientes para una representación única, su método reconoce modelos intercambiables cuando existen.

Resulta interesante establecer relaciones entre los órdenes mínimos de los SCM y los *grados mínimos por fila* que hemos definido en el capítulo III, puesto que, a través de los grados mínimos por fila cabe la posibilidad de definir lo que podríamos llamar

los *SCM estandarizados*, en el sentido de que V_0 se considera la matriz identidad y así se trabaja directamente sobre los datos iniciales. Además, la reducción de parámetros que se propone en Tiao y Tsay (1989) desde el contexto de los *SCM* puede ser trasladada al campo de funciones racionales y justificarse, mediante la observación detenida de algunas filas linealmente dependientes de las matrices $M4_{sr}$ y $M5_{sr}^{(i)}$, para ciertos pares de grados mínimos por fila. Esto es un caso particular del estudio de coeficientes redundantes dado en el capítulo III, siendo este último más completo porque asegura la identificación única del resto de parámetros.

Todo ello permite centrar en el contexto de las estrategias citadas el estudio de órdenes mínimos siguiendo la definición 4.2. En este sentido, Gouriéroux y Monfort comentan:

"Es evidente que será útil introducir una noción de representación minimal VARMA(p,q) tal que el proceso no admita otra representación VARMA(p',q') con $p' \leq p$, $q' \leq q$ siendo estricta al menos una de las desigualdades. Este problema de minimalidad, difícil desde el punto de vista matemático, no será tratado pero estará subyacente en diversos resultados de este capítulo" (Gouriéroux y Monfort, 1990, cap. VIII, pág. 310).

Esta idea de minimalidad unida a la identificabilidad subyace también en otros trabajos (Francq, 1989) pero particularizada en casos concretos. Francq (1989), para distinguir las eventuales múltiples representaciones identificables, define tres tipos de minimalidad, que son casos particulares de *órdenes mínimos*: p minimal sobre q minimal, q minimal sobre p minimal y p+q minimal. Así mismo, propone una condición necesaria y suficiente para obtener una representación identificable, en base a la dimensión de ciertos espacios vectoriales. En la práctica no es posible determinar la dimensión de dichos espacios a partir de las matrices de autocovarianza del proceso;

por ello, recurre a la dimensión de otros espacios con los que propone sólo condiciones suficientes para obtener cierto tipo de representaciones identificables.

Por otro lado, a través del ε -algoritmo matricial, bajo el supuesto de que X_t posee una representación identificable p minimal sobre q minimal, Berlinet (1982) y Francq (1989) encuentran los órdenes de la representación de este tipo concreto. Este método necesita de la inversión de matrices, lo cual puede hacer inestable el algoritmo. Por ello plantean como alternativa la utilización del ε -algoritmo vectorial que, aunque no presenta este inconveniente, no constituye una caracterización y sólo permite seleccionar un número restringido de órdenes.

3.1.- SERIES DE MATRICES DE AUTOCOVARIANZA Y FUNCIONES RACIONALES MATRICIALES

Una alternativa que puede enriquecer el proceso de especificación de un modelo VARMA surge de la aplicación a series temporales multivariantes de los resultados expuestos en los capítulos anteriores completados oportunamente por el necesario estudio de la componente estocástica.

Comenzamos este apartado exponiendo algunos resultados de modelos VARMA que actuarán como nexos entre series temporales multivariantes y series de potencias matriciales.

Proposición 4.1 (Reinsel, 1993)

Si X_t admite una representación VARMA(p,q) estacionaria,

$$\sum_{i=0}^p A_{p-i} X_{t-p+i} = \sum_{i=0}^q B_{q-i} \varepsilon_{t-q+i} ,$$

donde $A_0=B_0=I$, entonces la sucesión de matrices de autocovarianzas satisface una ecuación en diferencias de orden p a partir del rango $q-p+1$, esto es,

$$\sum_{i=0}^p A_{p-i} R(f+i) = 0 \text{ para cualquier } f \geq q-p+1.$$

Esta última expresión constituye las *ecuaciones de Yule-Walker*.

Proposición 4.2 (Berlinet, 1982)

Si $(R(s))_{s \in \mathbb{Z}}$ satisface una ecuación en diferencias de orden p a partir del rango r , X_t admite una representación VARMA(p_1, q_1) con $0 \leq p_1 \leq p$ y $0 \leq q_1 \leq p+r-1$.

Como corolario que relaciona los modelos VARMA con la aproximación de Padé a $W(z)$ se obtiene:

Corolario 4.1

Las siguientes sentencias son equivalentes:

a) X_t admite la representación VARMA(p, q): $A_p(L)X_t = B_q(L)\varepsilon_t$, $A_0=B_0=I$, de órdenes p y q mínimos.

b) Existen p matrices $k \times k$, A_1, A_2, \dots, A_p verificando la ecuación en diferencias

$$(i) A_p R(q-p+1+i) + \dots + A_1 R(q+i) = -R(q+1+i) \text{ para cualquier } i \geq 0,$$

y además, para cualquier posible solución A_1, A_2, \dots, A_p de (i) se verifican las siguientes condiciones:

$$(ii) A_p \neq 0$$

$$(iii) A_p R(q-p) + \dots + A_1 R(q-1) \neq -R(q).$$

c) $W(z) \equiv A_p^{-1}(z)B_q(z)$, siendo (q, p) un par de grados mínimos para dicha función.

En efecto,

$$W(z) = \sum_{j=0}^{\infty} W_j z^j \quad W_0 = I \quad W_j \in C^{k \times k} \quad z \in C$$

constituye la serie formal de potencias asociada al $MA(\infty)$

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} W_j \varepsilon_{t-j}$$

de tal forma que la especificación de un modelo VARMA para X_t equivale a la determinación de una estructura racional para $W(z)$.

Para aplicar los resultados del capítulo II, teniendo en cuenta el corolario 4.1, construimos la sucesión de matrices de autocovarianza a partir de los datos temporales de las variables de interés. Las autocovarianzas de un proceso estacionario pueden ser estimadas por medio de la siguiente expresión (Reinsel, 1993):

$$R(h) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-h} (X_{t+h} - \bar{X})(X_t - \bar{X})' \quad (4.3)$$

donde $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N X_i$ y N es el tamaño de la muestra.

Con estas matrices, para $k \in N$, construimos la serie formal de potencias que sigue:

$$W_{-k}^*(z) = \sum_{j=0}^{\infty} R(-k + j) z^j$$

Nótese que la principal diferencia entre las ecuaciones de Padé para la serie $\sum_{i=0}^{\infty} R(i)z^i$ y las ecuaciones de Yule-Walker estriba en que en las primeras se considera $R(i)=0$ si $i<0$ y en las segundas $R(-i)=R'(i)$ para cualquier $i \in \mathbb{Z}$.

Utilizando las proposiciones 4.1 y 4.2 de este capítulo, tenemos como consecuencia los siguientes resultados dentro del campo de la aproximación de Padé.

Corolario 4.2

Las siguientes sentencias son equivalentes:

- i) $W(z) \in {}^1[h/g]_w$
- ii) $W_{-g}^*(z) \in {}^1[h+g/g]_{w_{-g}^*}$
- iii) $W_{-k}^*(z) \in {}^1[h+k/g]_{w_{-k}^*}$ si $h+k \geq g-1$

Corolario 4.3

Si $h \geq g-1$, $W(z) \in {}^1[h/g]_w$ si, y sólo si, $W_0^*(z) \in {}^1[h/g]_{w_0^*}$.

Corolario 4.4

Dado $k \geq p-1$, si $W_{-k}^*(z) \in {}^1[k/p]_{w_{-k}^*}$ entonces, para cualesquiera h y $g \in \mathbb{N}$:

$$W(z) \in {}^1[h/g]_w \text{ si, y sólo si, } W_{-k}^*(z) \in {}^1[h+k/g]_{w_{-k}^*}.$$

Teniendo en cuenta el corolario 4.2, teóricamente podemos construir las Tablas 1 y 2 para dos series diferentes:

$$(i) W(z) = \sum_{j=0}^{\infty} W_j z^j$$

$$(ii) W_{-g+1}^*(z) = \sum_{i=0}^{\infty} R(i - g + 1) z^i$$

si bien, en las aplicaciones consideraremos la (ii), ya que sus coeficientes pueden ser estimados de una forma relativamente fácil, como indica la expresión (4.3).

Con respecto a los recintos escalonados que presentan las tablas asociadas a cada una de estas series podemos establecer varias relaciones. Para ello es necesario definir ciertos conjuntos⁵.

Definición 4.4

$$\overline{R1}(W_{-g}^*) = \{(i, j) \in N^2 / (i + g, j) \in R1(W_{-g}^*)\}$$

El siguiente ejemplo muestra el hecho de que no tienen por qué coincidir $\overline{R1}(W_{-g}^*)$ y $R1(W)$.

Ejemplo 4.2

Sea X_t el modelo bivalente VARMA(0,3) siguiente:

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon_t + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \epsilon_{t-2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/4 & 1/8 \end{pmatrix} \epsilon_{t-3}$$

donde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

⁵ Debido a que estamos considerando funciones diferentes, al hacer referencia a los recintos escalonados de las Tablas 1 y 2, en la notación incluimos entre paréntesis la serie de potencias a la que están asociados.

La Tabla 1 para la función

$$W(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/4 & 1/8 \end{pmatrix} z^3$$

es

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	1	1	0	0
2	4	3	2	2	1	0
3	6	5	4	3	2	1
4	8	7	6	5	3	2
5	10	9	7	7	5	3

$W(z) \equiv [3/0]_w(z)$

Con respecto a los grados mínimos de $W(z)$, con esta tabla sólo podemos decir que, por la propiedad 2.3, (3,0) es un par de grados mínimos y, por la propiedad 2.9 los pares de grados (0,j) para $j=0,\dots,5$ no son mínimos.

La Tabla 2, con esquina inferior derecha la (3,5), muestra la siguiente estructura:

	0	1	2	3
0	1	1	1	0
1	1	1	0	0
2	1	1	0	0
3	1	1	0	0
4	1	1	0	0
5	1	1	0	0

Si calculamos las matrices de autocovarianza mediante la expresión (4.1), teniendo en cuenta que $W_i=0$ si $i \geq 4$, obtenemos los siguientes resultados:

$$R(0) = \begin{pmatrix} 5.31 & 1 \\ 1 & 1.33 \end{pmatrix}, R(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.66 & 0 \end{pmatrix}, R(2) = \begin{pmatrix} 2.25 & 0.75 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1.125 & 0.375 \end{pmatrix}, R(i) = 0 \quad i \geq 4$$

La Tabla 1 para la función polinómica

$$W_0^*(z) = \begin{pmatrix} 5.31 & 1 \\ 1 & 1.33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.66 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 2.25 & 0.75 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1.125 & 0.375 \end{pmatrix} z^3$$

presenta la siguiente estructura:

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	1	1	0	0
2	4	4	3	2	1	0
3	6	6	5	3	2	1
4	8	8	7	5	3	2
5	10	10	9	7	5	3

$$W_0^*(z) \equiv [3/0]_{W_0^*}(z) \equiv [2/2]_{W_0^*}(z)$$

Como $R1(W) = \{(i,j) / i \geq 3 \wedge j \geq 0\}$ y $\overline{R1}(W_0^*) = \{(i,j) / (i \geq 3 \wedge j \geq 0) \text{ ó } (i \geq 2 \wedge j \geq 2)\}$, en este ejemplo, $R1(W) \subset \overline{R1}(W_0^*)$.

Por el corolario 4.2, según esta última tabla $W(z) \in [3/0]_W$ y $W(z) \in [2/2]_W$. En vista de los resultados, el corolario 4.3 nos asegura que $R1(W_0^*) = \overline{R1}(W_{-k}^*)$ $k \geq 0$.

Con respecto a la tabla 2 damos la siguiente definición.

Definición 4.5

Para cualquier $(a,b) \in \overline{R1}(W_{-g}^*) \cap R1(W)$ siendo $g \geq 0$, definimos el conjunto:

$$\overline{R2}_{ab}(W_{-g}^*) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 / (i + g, j) \in R2_{a+g,b}(W_{-g}^*)\}$$

Por el corolario 4.2 podemos establecer la siguiente identidad.

Corolario 4.5

$$\overline{R2}_{ab}(W_{-g}^*) = R2_{ab}(W)$$

Como consecuencia, en el ejemplo anterior $R2_{sr}(W) = \overline{R2}_{sr}(W_k^*)$ para cualesquiera $k \leq 0$, $s \geq 3$ y $r \geq 0$. En particular para $k=0$ y $(s,r)=(3,5)$ la estructura que presenta la Tabla 2 es la siguiente:

	0	1	2	3
0	1	1	1	0
1	1	1	0	0
2	1	1	0	0
3	1	1	0	0
4	1	1	0	0
5	1	1	0	0

Esto indica que $W(z) \in I[2/1]_W$ y $W(z) \in I[3/0]_W$, o lo que es lo mismo $W_{-k}^*(z) \in I[2+k/1]_{W_{-k}^*}$ y $W_{-k}^*(z) \in I[3+k/0]_{W_{-k}^*}$ para cualquier $k \geq 0$.

En consecuencia las representaciones VARMA(0,3) y VARMA(1,2) son la únicas con órdenes mínimos dentro de las dimensiones de la Tabla 1. Con esta tabla limitada no tenemos estudiada la existencia de órdenes mínimos (p,q) tales que $0 \leq q \leq 1$ y $p \geq 6$; pero como lo que buscamos son representaciones simplificadas, para los posibles pares que puedan existir en dicha zona de la tabla, sus correspondientes representaciones tienen como mínimo 6 matrices de parámetros y con los pares que tenemos el número de matrices es 3.

En cuanto a la unicidad, el estudio realizado sobre los dos pares de órdenes mínimos da como resultado que hay unicidad en las representaciones respectivas debido a que, tanto $T1(3,0)$ como el rango($M4_{35}(2,1)$) son máximos. Además, teniendo en cuenta la demostración del lema 2.5, una cota superior del número total de pares de órdenes mínimos es 4.

Nótese que en las condiciones del corolario 4.4 podemos considerar nulos, sin pérdida de información, los coeficientes con subíndice menor o igual que -p. De forma más general, como consecuencia del corolario 4.2 y con el objetivo de unificar las tablas, en la práctica recomendamos construir éstas sólo para la función $W_0^*(z)$ pero, en lugar de considerar nulos los coeficientes de la serie con subíndices negativos, por convenio, se toman como los traspuestos de los coeficientes con subíndices positivos correspondientes, es decir, $R(-i) = R'(i)$ para cualquier $i > 0$. Nótese que, si construimos una tabla con p+1 filas lo anterior equivale a considerar que la serie bajo estudio es $W_{-p+1}^*(z)$ y que la Tabla 1 refleja $\overline{R1}(W_{-p+1}^*)$ en lugar de $R1(W_{-p+1}^*)$.

3.2.- ALGORITMO PARA LA ESPECIFICACIÓN DE MODELOS VARMA MINIMALES

Los resultados permiten caracterizar, identificar los órdenes mínimos y estudiar la identificabilidad de los parámetros de un modelo VARMA, a partir de una muestra de tamaño N de las variables de interés. Los pasos a seguir quedan esquematizados a continuación.

Paso 1

Elegir las dimensiones de la Tabla 1: NF (número de filas) y NC (número de columnas).

Paso 2

Estimar las matrices de autocovarianza $R(0)$, $R(1)$, ..., $R(NF+NC)$ utilizando (4.3).

Paso 3

Construir la Tabla 1 para la serie $\sum_{i=0}^{\infty} R(i)z^i$ considerando $R(i)=R'(-i)$, $i < 0$.

Paso 4

Si la Tabla 1, por medio de sus propiedades, no da la suficiente información para saber cuáles son los grados mínimos, construir la Tabla 2.

Paso 5

Estudiar la identificabilidad de cada representación con órdenes mínimos (i,j) observando si es máximo el valor de $T1(i,j)$ o si $\text{rango}(M4_{st}(i,j))=jk$.⁶

4.- RESULTADOS EMPÍRICOS

4.1.- CON DATOS SIMULADOS

Con el objetivo de ilustrar el método propuesto hemos llevado a cabo un ejercicio de simulación. Para ello hemos elegido el siguiente modelo estacionario e invertible:

Ejemplo 4.3

Sea el modelo VMA(2)

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon_t + \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon_{t-1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \varepsilon_{t-2}$$

siendo

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La Tabla 1 asociada a la función polinómica

$$W(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} z^2$$

presenta la siguiente forma:

⁶ En caso de no ser única la representación para un cierto par de grados mínimos, se podría llegar a definir una representación única detectando los parámetros redundantes, tal y como se comentó en el capítulo III.

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	1	0	0	0
2	4	3	2	1	0	0
3	6	5	4	2	1	0
4	8	7	6	4	2	1
5	10	9	8	6	4	2

Esta tabla indica que el modelo es un VMA(2) y por tanto identificable. Aunque por la propiedad 2.9 de R1 podemos asegurar que X_t no sigue ningún modelo VAR(p), sin embargo es necesaria la Tabla 2 para saber si existe otro par de órdenes mínimos (p,q) con q=1.

	0	1	2
0	1	1	0
1	1	0	0
2	1	0	0
3	1	0	0
4	1	0	0
5	1	0	0

Como indica la Tabla 2, X_t posee dos representaciones con órdenes mínimos dentro de las dimensiones de la Tabla 1, VARMA(0,2)=VMA(2) y VARMA(1,1). Además esta última representación también es identificable.

Si realizamos el estudio a través las matrices de autocovarianzas del proceso, que es como lo haremos en las aplicaciones, esto es, considerando:

$$R(0) = \begin{pmatrix} 9.25 & 1 \\ 1 & 2.31 \end{pmatrix}, \quad R(1) = \begin{pmatrix} 4.5 & 1.5 \\ 2.63 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2.25 & 0.75 \end{pmatrix}, \quad R(i) = 0 \quad i \geq 3$$

obtenemos la siguiente Tabla 1:

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	2	2	1	0	0	0
2	4	4	2	1	0	0
3	6	6	4	2	1	0
4	8	8	6	4	2	1
5	10	10	8	6	4	2

Por tanto, en este ejemplo, considerando esta alternativa se obtienen los mismos resultados de una forma más directa.

Con respecto a las tablas estimadas los cálculos se realizan mediante un programa FORTRAN elaborado al efecto (Pestano y González, 1994). Los porcentajes de aciertos que se obtienen tras la realización de 1000 replicaciones cada una con 350 observaciones, han sido los siguientes:

En el 81,5 % de las tablas se identifica el VARMA(0,2).

En el 83,1 % se identifica el VARMA(1,1).

En el 79,9 % se identifican ambos.

Además, en un 64,7 % de ellas también se identifica el modelo VARMA(2,0) o VAR(2). Este error puede ser debido a los problemas de la muestra finita así como a las limitaciones de la aritmética finita. Consideramos que el VARMA(2,0) es un modelo

aproximado que no se distingue de los modelos intercambiables, a partir de los datos disponibles. El problema estadístico de cómo reconocer unos y otros es dejado para las etapas posteriores de estimación y contraste.

Con respecto a las tablas restantes, se tiene que hay un 3,9 % donde no es posible identificar ningún par de órdenes y un 11 % donde no nos hemos decidido a identificar ya que, en este grupo de tablas, algunas de las diagonales son correctas y otras no. Aunque aplicando el corolario 2.3 los errores quedarían justificados, hemos optado por considerarlas dudosas.

4.2.- CON DATOS REALES⁷

Dado que uno de los objetivos de la metodología propuesta es su aplicación, en este apartado hemos querido analizar varias series temporales de datos reales que ya hayan sido estudiadas por otros autores, para poder así comparar resultados.

Ejemplo 4.4

En primer lugar, consideramos los datos cuatrimestrales y estacionalmente ajustados de las variables renta disponible (X_{1t}) y gastos de consumo (X_{2t}) en Alemania Occidental, correspondientes al periodo 1969-1982. Debido a que los datos originales presentan una tendencia, Lütkepohl (1991) toma las primeras diferencias de los logaritmos. Posteriormente ilustra la estimación de un VARMA(2,2) en la forma "echelon".

Para las variables $X_{1t}^* = \log X_{1t} - \log X_{1t-1}$ y $X_{2t}^* = \log X_{2t} - \log X_{2t-1}$ hemos obtenido la siguiente Tabla 1:

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	2	0	1	0	0
2	4	3	1	1	0
3	6	4	3	1	1
4	7	6	4	3	1

la cual indica, directamente, que los datos utilizados corresponden a un VMA(2) intercambiable con un VAR(2), ambos identificables. Además, por la propiedad 2.6 el proceso no admite un representación VARMA(1,1) y por tanto no existen otros pares de órdenes mínimos.

Ejemplo 4.5

En segundo lugar, hemos considerado los datos del plan semanal de producción (Y_{1t}) y facturación (Y_{2t}) de una compañía para $N=100$ semanas. Reinsel (1993) opta por las variables $Y_{1t}^* = Y_{1t-2}$ e Y_{2t} . Aunque después de ajustar varios modelos VAR a la serie $Y_t=(Y_{1t}^*, Y_{2t})$ considera que de ellos el más apropiado es el VAR(3), en la búsqueda de un modelo mixto propone el modelo alternativo VARMA(2,1) y justifica su predilección por este último.

Para las mismas variables hemos obtenido la siguiente Tabla 1:

⁷ Los datos del ejemplo 4.4 pueden encontrarse en Lütkepohl (1991) y los del 4.5 y 4.6 en Reinsel (1993).

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	2	2	1	0	0
2	3	3	3	2	1
3	3	4	3	3	2
4	5	5	4	3	3

la cual concuerda con la predilección de Reinsel (1993).

Por las propiedades 2.9 y 2.12 la representación VARMA(2,1) es de órdenes mínimos pero no es identificable ya que el valor de la casilla (1,2) no es máximo. Concretamente, al ser la casilla (1,1) de rango máximo la propiedad 2.9 asegura que el proceso no admite una representación VARMA(1,1); la propiedad 2.12 es la que asegura que el proceso no admite una representación VAR(p) con $p < 5$, de admitirla tiene que aparecer reflejada en la Tabla 1. Además, por la propiedad 2.3 el proceso no es VMA(q) para $q < 4$. Queda por comprobar si existe algún modelo VARMA(1,q) para $q > 1$ con órdenes mínimos. Por el corolario 2.5 no es necesario construir la Tabla 2 completa, así sólo hemos tenido que calcular $T_{242}(4,1)=0$ y $T_{242}(3,1)=1$, lo cual indica que podría existir una representación VARMA(1,4) de órdenes mínimos. Esta última, con 5 coeficientes matriciales, pierde interés en relación con el VARMA(2,1) que tiene sólo 3.

Ejemplo 4.6

En tercer lugar, hemos considerado también los datos de las variables inversión fija (Z_{1t}) y cambios de inventarios empresariales (Z_{2t}) para Estados Unidos. Estos datos son cuatrimestrales y estacionalmente ajustados, durante el periodo 1947-1971. Debido a que Z_{1t} es no estacionaria, Reinsel (1993) utiliza las variables $Z_{1t}^* = Z_{1t} - Z_{1t-1}$ y Z_{2t}

resultando $N=99$ observaciones. Después de ajustar varios modelos VAR considera el VAR(2) como el más apropiado entre ellos. Además, afirma que este modelo es esencialmente equivalente a un VARMA(1,1).

Para las mismas variables hemos obtenido la siguiente Tabla 1:

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	2	2	2	1	1
2	4	3	2	2	2
3	5	4	3	2	2
4	6	5	5	3	2

la cual está de acuerdo con los resultados de Reinsel (1993).

Además, los valores máximos de las casillas (1,1) y (0,2) aseguran que las representaciones VARMA(1,1) y VAR(2) son identificables. Por las propiedades 2.3 y 2.9, la Tabla 2 es innecesaria.

Ejemplo 4.7

Por último consideremos los datos que se encuentran en Tiao y Tsay (1989), consistentes en tres series (P_{1t} , P_{2t} , P_{3t}) de los índices mensuales de los precios de la harina en tres ciudades norteamericanas, desde agosto de 1972 hasta noviembre de 1980, esto es, con 100 observaciones cada una. Estos datos han sido analizados por varios autores entre los que comentamos a Tiao y Tsay (1989) y a Lütkepohl y Poskitt (1996).

Por un lado, Tiao y Tsay (1989) especifican, para el logaritmo de los datos ($\log P_{1t}$, $\log P_{2t}$, $\log P_{3t}$), un modelo VARMA(1,1) con dos SCM de órdenes (1,0) y uno de órdenes (1,1).

Por otro lado, debido a que los datos originales parecen ser no estacionarios, Lütkepohl y Poskitt (1996) consideran las primeras diferencias de los logaritmos ($\log P_{1t+1} - \log P_{1t}$, $\log P_{2t+1} - \log P_{2t}$, $\log P_{3t+1} - \log P_{3t}$) y especifican entonces un modelo VARMA(1,1) en la forma "echelon". Después de eliminar los coeficientes no significativos obtienen los modelos intercambiables VAR(1) y VMA(1). Posteriormente -en base a los determinantes de las matrices de covarianza residual- indican que el modelo VAR(1) es ligeramente preferido al VMA(1), sin embargo, en la etapa final del análisis de adecuación de ambos modelos obtienen que los dos proporcionan una representación adecuada de los datos.

Considerando también las primeras diferencias de los logaritmos, hemos elegido este ejemplo para ilustrar el hecho de que la Tabla 1 puede identificar directamente ambos modelos, esto es, VAR(1) y VMA(1). Puesto que en este caso tenemos tres series y el trabajo computacional es elevado, se observa la eficacia de la Tabla 1 simplificada (apartado 3.2, capítulo III) en las aplicaciones. Los resultados obtenidos, esquematizados como sigue:

	0	1	2	3	4
0	0	0			
1	3	1	0		
2		3			
3					
4					1

indican, como hemos dicho, que los datos corresponden a los modelos intercambiables e identificables VAR(1) y VMA(1). Nótese que las casillas a las que se les ha asignado su valor han sido consideradas en el siguiente orden: (4,4), (0,0), (1,1), (2,1), (1,0), (1,2) y (0,1). Teniendo en cuenta la propiedad 2.12 y el corolario 2.3, podemos completar la Tabla 1 sin necesidad de calcular los valores de la casillas vacías tal y como se muestra a continuación:

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	3	1	0	0	0
2	6	3	1	0	0
3	9	6	3	1	0
4	12	9	6	3	1

Para finalizar queremos resaltar que, como puede observarse, los resultados de este trabajo dependen básicamente de las estructuras algebraicas que caracterizan la racionalidad de una función y no de la localización de los ceros de los polinomios que la representan. Por ello, aunque en la aplicación sólo hemos considerado procesos estacionarios, la metodología general propuesta puede ser extendida al caso de procesos no estacionarios.

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

En este trabajo de investigación caracterizamos funciones racionales matriciales de dimensión arbitraria, a partir de series formales de potencias, trasladando posteriormente los resultados a la especificación de modelos racionales en series temporales, en particular a modelos VARMA.

Dentro de este objetivo, ciertos problemas que tienen un papel secundario ante la caracterización de la racionalidad pasan a un primer plano una vez conseguida ésta. Nos referimos a los aspectos de minimalidad y unicidad de representación o, en la terminología de series temporales, a la intercambiabilidad de modelos y a la identificabilidad de los parámetros. Ambos han podido ser también considerados desde la aproximación de Padé para su tratamiento y posterior aplicación a series temporales.

En este sentido se lleva a cabo un estudio completo de un tipo de minimalidad global para los polinomios de las representaciones racionales y se dan resultados sobre unicidad, desde una perspectiva diferente a las que existen en la literatura. A partir de estos resultados surgen determinadas herramientas que permiten reconocer aquellos pares de grados que tienen asociados un único par de polinomios para representar la serie de forma racional, sin necesidad de conocer los coeficientes de dichos polinomios.

Cabe comentar que, al mismo tiempo se aportan resultados parciales sobre la estructura de la Tabla de Padé en el caso de funciones matriciales de dimensión arbitraria, que constituyen la generalización de lo que ocurre en el caso clásico.

Por otro lado, la forma que se indica para estudiar los parámetros nulos y/o redundantes de una representación racional responde también a ciertos problemas de sobreparametrización que se presentan en la estimación de modelos racionales para series temporales.

En nuestra opinión, el mayor atractivo de este trabajo está en la metodología tabular que proponemos con la que, de una forma gráfica y por ello relativamente fácil de interpretar para el usuario, no siempre familiarizado con la aproximación de Padé, se pueden dar respuestas precisas a determinadas cuestiones que, en estos últimos años, han buscado solución y sólo la han encontrado de forma parcial.

Si desde el campo del Análisis Numérico han sido básicos los trabajos de Draux (1987a) y Xu y Bultheel (1990), desde la aplicación a modelos VARMA no podemos dejar de reconocer el papel central que juega en nuestra investigación el trabajo de Tiao y Tsay (1989).

Aunque en el último capítulo presentamos básicamente una nueva forma de abordar la especificación de modelos VARMA, también contribuimos a completar la aportación teórica dada por Tiao y Tsay (1989), en tanto que la Tabla 1 constituye un refinamiento del método propuesto por ellos para obtener, en la etapa inicial, unos órdenes globales del modelo.

Y viceversa, desde la terminología utilizada por Tiao y Tsay (1989) es posible trasladar resultados y motivar otros nuevos dentro de la aproximación matricial de Padé. Como un ejemplo dentro de esta línea pueden considerarse los grados mínimos por fila que hemos definido en el segundo capítulo y a los que no hemos dedicado toda la atención que merecen. Por tanto, la investigación queda abierta en este punto.

Aunque dentro de las posibles aplicaciones sólo se ha considerado un modelo racional con matrices cuadradas, en principio, la metodología que se propone no tiene por qué encontrar obstáculos para ser utilizada en otros modelos racionales como, por ejemplo, el de sistemas de función de transferencia, donde las matrices son de dimensión arbitraria (Pestano y González, 1993), ya que desde el presente trabajo está

perfectamente justificada la caracterización de funciones racionales matriciales de cualquier dimensión. Por ello, esta aplicación se contempla dentro del marco de investigaciones futuras.

En cuanto a modelos no estacionarios, que no consideramos en nuestra aplicación, está en nuestras perspectivas llevar a cabo, en colaboración con otros investigadores, la adaptación a nuestro método del estudio estadístico propuesto por Tiao y Tsay (1989) para el cálculo de rangos de matrices de autocovarianza y su significación estadística a partir de modelos VARMA tanto estacionarios como no estacionarios.

Teniendo en cuenta el carácter metodológico de la propuesta aquí presentada, sería interesante llevar a cabo estudios empíricos y comparativos entre los diversos procedimientos existentes, que han sido mencionados en este trabajo.

No cabe duda de que todas las aportaciones que puedan llevarse a cabo en el perfeccionamiento de algoritmos numéricos para el cálculo de las tablas aquí propuestas -por ejemplo, a través de relaciones de recurrencia y control de errores- prestarán un gran servicio al método que se presenta, en la medida en que puedan conducir a simplificaciones y mejoras eficientes a la hora de la aplicación.

Para finalizar, destacamos que somos conscientes de que al igual que el caso clásico de la aproximación de Padé ha dado lugar a una cantidad importante de generalizaciones y aplicaciones, la ramificación de la que forma parte la aproximación matricial de Padé está aún muy lejos de ver sus límites, suponiendo que existan.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABOUIR, J. y CUYT, A. (1993). *Multivariate Partial Newton-Padé and Newton-Padé Type Approximants.* Journal of Approximation Theory 72, 301-316.

ACHUTHAN, P. y SUNDAR, S. (1988). *A New Application of the Extended Euclidean Algorithm for Matrix Padé Approximants.* Comput. Math. Applic., Vol. 16, No. 4, 287-296.

ANTOULAS, A.C. (1986). *On Recursiveness and Related Topics in Linear Systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-31, No. 12, 1121-1135.

BAKER, G.A. (1975). "Essentials of Padé Approximants". Academic Press, New York.

BAKER, G.A. y GRAVES-MORRIS, P.R. (1981). "Padé Approximants". Part I: Basic Theory. Part II: Extensions and Applications. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 13 y 14. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

BASU, S. (1989). *Padé Approximants to Matrix Stieltjes Series: Convergence and Related Properties.* SIAM J. Matrix Anal. Appl., Vol. 10, No. 3, 383-406.

BASU, S. y BOSE, N.K. (1983). *Matrix Stieltjes Series and Network Models.* SIAM J. Math. Anal., Vol. 14, No. 2, 209-222.

BECKERMANN, B. (1992). *A Reliable Method for Computing M-Padé Approximants on Arbitrary Staircases.* Journal of Computational and Applied Mathematics 40, 19-42.

BECKERMANN, B. y LABAHN, G. (1992). *A Uniform Approach for Hermite Padé and Simultaneous Padé Approximants and their Matrix-Type Generalizations.* Numerical Algorithms 3, 45-54.

_____ **(1994).** *A Uniform Approach for the Fast Computation of Matrix-Type Padé Approximants.* SIAM J. Matrix Anal. Appl., Vol. 15, No. 3, 804-823.

BEGUIN, J.M., GOURIEROUX, C. y MONFORT, A. (1980). *Identification of a Mixed Autoregressive-Moving Average Process: The Corner Method* en "Time Series", O.D. Anderson ed., North-Holland, Amsterdam, 423-436.

BERLINET, A. (1982). *Estimation des Degrés d'un ARMA Multivarié.* Pub. IRMA-Lille, Vol IV-Fasc. III.

BERLINET, A. (1984). *Estimating the Degrees of an ARMA Model.* Compstat Lectures 3, 61-94. Physica-Verlag.

BERLINET, A. y FRANCO, C. (1994). *Identification of a Univariate ARMA Model.* Computational Statistics 9, 117-133.

BOSE, N.K. y BASU, S. (1980a). *Two-Dimensional Matrix Padé Approximants: Existence, Nonuniqueness and Recursive Computation.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-25, No. 3, 509-514.

_____ **(1980b).** *Theory and Recursive Computation of 1-D Matrix Padé Approximants.* IEEE Transactions on Circuits Systems, Vol. CAS-27, No. 4, 323-325.

BOX, G.E.P. y JENKINS, G.M. (1976). "Time Series Analysis: Forecasting and Control". Revised Edition. Holden-Day, San Francisco.

BREZINSKI, C. (1980). "Padé-Type Approximation and General Orthogonal Polynomials". ISNM, Vol. 50. Birkhäuser, Basel.

_____ (1988). *Partial Padé Approximants*. Journal of Approximation Theory 54, 210-233.

BULTHEEL, A. (1980). *Recursive Algorithms for the Matrix Padé Problem*. Mathematics of Computation, Vol. 35, No. 151, 875-892.

_____ (1987). "Laurent Series and their Padé Approximations". Birkhäuser-Verlag, Basel/Boston.

BULTHEEL, A. y VAN BAREL, M. (1986). *Padé Techniques for Model Reduction in Linear System Theory: a Survey*. Journal of Computational and Applied Mathematics 14, 401-438.

_____ (1988). *A Matrix Euclidean Algorithm and Matrix Padé Approximation*. Report TW 104, Department of Computer Science, K.U. Leuven.

_____ (1990). *Minimal Vector Padé Approximation*. Journal of Computational and Applied Mathematics 32, 27-37.

BULTHEEL, A. y XU, G.L. (1988). *The Structure of the Minimal Padé Approximation Table*. Report TW 117, Department of Computer Science, K.U. Leuven.

CABAY, S., LABAHN, G. y BECKERMANN, B. (1992). *On the Theory and Computation of Nonperfect Padé-Hermite Approximants.* Journal of Computational and Applied Mathematics 39, 295-313.

CLAVERIE, P., SZPIRO, D. y TOPOL, R. (1990). *Identification des Modèles à Fonction de Transfert: La Méthode Padé-Transformée en z.* Annales d'Économie et de Statistique, No. 17, 145-161.

DE BRUIN, M.G. (1984). *Some Explicit Formulas in Simultaneous Padé Approximation.* Linear Algebra and its Applications 63, 271-281.

_____ **(1988).** *Simultaneous Partial Padé Approximants.* Journal of Computational and Applied Mathematics 21, 343-355.

DICKINSON, B.W., MORF, M. y KAILATH, T. (1974). *A Minimal Realization Algorithm for Matrix Sequences.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-19, No. 1, 31-37.

DRAUX, A. (1982). *Polynomes Orthogonaux Formels dans une Algebre Non Commutative.* Publication ANO 92. Université des Sciences et Techniques de Lille. Véase también: *Formal Orthogonal Polynomials and Padé Approximants in a Non-Commutative Algebra* en "Mathematical Theory of Networks and Systems". Lecture Notes in Control and Information Sciences 58, Springer-Verlag, Berlin (1984), 278-292.

_____ **(1983).** *Approximants de Type-Padé et de Padé.* Publication ANO 96. Université des Sciences et Techniques de Lille. Véase también: *The Padé Approximants in Non-Commutative Algebra and their Applications* en "Padé

Approximation and its Applications - Bad Honnef 1983"- Proceedings, H. Werner and H.J. Bünger eds., LNM 1071, Springer-Verlag, Berlin (1984), 117-131.

_____ (1984a). *Quelques Applications*. Publication ANO 120. Université des Sciences et Techniques de Lille.

_____ (1984b). *Bibliographie-Index*. Publication ANO 145. Université des Sciences et Techniques de Lille.

_____ (1987a). *On the Non-Normal Padé Table in a Non-Commutative Algebra*. Publication ANO 175. Université des Sciences et Techniques de Lille.

_____ (1987b). *Two-Point Padé-Type and Padé Approximants in a Non-Commutative Algebra* en "Rational Approximation and its Application in Mathematics and Physics". LNM 1237, edited by Gilewicz et al., Springer-Verlag, Berlin, 51-62.

_____ (1987c). *The Epsilon Algorithm in a Non-Commutative Algebra*. Journal of Computational Applied Mathematics 19, 9-21.

FRANCQ, C. (1989). *Identification et Minimalité dans les Séries Chronologiques*. Thèse. Université des Sciences et Techniques du Languedoc (Montpellier II).

GIL, C. (1995). *Propuesta Metodológica en el Contexto de Modelos de Función de Transferencia con Expectativas*. Tesis doctoral. Departamento de Economía Aplicada, Universidad de La Laguna.

GONZÁLEZ, C. (1986). *Aproximantes Tipo Padé Matriciales a la Exponencial*. Tesis doctoral. Departamento de Ecuaciones Funcionales, Universidad de La Laguna.

GONZÁLEZ, C., CANO, V. y GIL, C. (1993). *Comparación de Algoritmos para la Identificación de una Función de Transferencia: una Generalización al Caso de Varios Inputs.* Revista Española de Economía, Vol. 10, No. 1, 163-175.

_____ **(1995).** *The ε -Algorithm for the Identification of a Transfer-Function Model: some Applications.* Numerical Algorithms 9, 379-395.

GONZÁLEZ, C., GONZÁLEZ, P. y HENDRIKSEN, E. (1992). *Matrix Orthogonal Laurent Polynomials and Two-Point Padé Approximants.* Numerical Algorithms 3, 201-210.

GOURIEROUX, C. y MONFORT, A. (1990). "Séries Temporelles et Modèles Dynamiques". Economica, Paris.

GRAVES-MORRIS, P.R. y SAFF, E.B. (1991). *An Extension of a Row Convergence Theorem for Vector Padé Approximants.* Journal of Computational and Applied Mathematics 34, 315-324.

GRAY, H.L., KELLEY, G.D. y McINTIRE, D.D. (1978). *A New Approach to ARMA Modeling.* Commun. Statist. B7(1), 1-77.

HANNAN, E.J. (1969). *The Identification of Vector Mixed Autoregressive-Moving Average Systems.* Biometrika 56, 223-225.

LABAHN, G. y CABAY, S. (1989). *Matrix Padé Fractions and their Computation.* SIAM J. Comput., Vol. 18, No. 4, 639-657.

LE FERRAND, H. (1992). *Convergence et Applications d'Approximations Rationnelles Vectorielles*. Thèse. Université des Sciences et Techniques de Lille.

LII, K.S. (1985). *Transfer Function Model Order and Parameter Estimation*. Journal of Time Series Analysis, Vol. 6, No. 3, 153-169.

LIU, L.M. y HANSSENS, D.M. (1982). *Identification of Multiple-Input Transfer Function Models*. Commun. Statist. -Theor. Math. 11(3), 297-314.

LÜTKEPOHL, H. (1991). "Introduction to Multiple Time Series Analysis". Springer-Verlag, Berlin.

LÜTKEPOHL, H. y POSKITT D.S. (1996). *Specification of Echelon-Form VARMA Models*. Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 14, No. 1, 69-79.

MORIMOTO, K., MATSUMOTO, N., HAMADA, N. y TAKAHASHI, S.I. (1978). *Matrix Padé Approximants and Multiport Networks*. Electronics and Communications in Japan, Vol. 61-A, No. 4, 28-36.

PADÉ, H. (1892). *Sur la Représentation Approchée d'une Fonction par des Fractions Rationnelles*. Ann. Ec. Norm. Sup. 9.

PESTANO, C. y GONZÁLEZ, C. (1993). *On the Multiple Transfer Function Model* en "Econometrie du Temps Reel: Series Temporelles Inframensuelles", 409-414. AEA International Conference, Luxemburgo 14 y 15 de octubre de 1993.

_____ **(1994).** *Characterization of the Orders in VARMA Models*. MSA'94. Institute of Econometrics and Statistics. Lodz (Polonia).

REINSEL, G.C. (1993). "Elements of Multivariate Time Series Analysis". Springer-Verlag, New York.

RISSANEN, J. (1972). *Recursive Evaluation of Padé Approximants for Matrix Sequences*. IBM J. Res. Develop., 401-406.

SHAMASH, Y. (1975). *Multivariable System Reduction via Modal Methods and Padé Approximation*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-20, 815-817.

STARKAND, Y. (1979). *Explicit Formulas for Matrix-Valued Padé Approximants*. Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 5, No. 1, 63-66.

TIAO, G.C. y BOX, G.E.P. (1981). *Modeling Multiple Time Series with Applications*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 76, 802-816.

TIAO, G.C. y TSAY, R.S. (1989). *Model Specification in Multivariate Time Series*. J.R. Statist. Soc. B 51, No. 2, 157-213.

TSAY, R.S. (1989). *Parsimonious Parameterization of Vector Autoregressive Moving Average Models*. Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 7, No. 3, 327-341.

VAN BAREL, M. (1989). *Nested Minimal Partial Realizations and Related Matrix Rational Approximants*. Ph. D. Thesis. Dept. Computer Sc., K.U. Leuven.

VAN BAREL, M. y BULTHEEL, A. (1992). *A General Module Theoretic Framework for Vector M-Padé and Matrix Rational Interpolation*. Numerical Algorithms 3, 451-462.

VAN ISEGHEM, J. (1986). *An Extended Cross Rule for Vector Padé-Approximants.* Applied Numerical Mathematics 2, 143-155.

_____ (1987). *Approximants de Padé Vectoriels.* Thèse. Université des Sciences et Techniques de Lille.

_____ (1991). *Multipoint Padé-Type Approximants.* Publication ANO 254. Université des Sciences et Techniques de Lille.

VON SYDOW, B. (1977). *Padé Approximation of Matrix-Valued Series of Stieltjes.* Ark. Math. 15, 199-210.

WYNN, P. (1962). *Acceleration Techniques for Iterated Vector and Matrix Problems.* Math. Comp. 16, 301-322.

_____ (1963). *Continued Fractions whose Coefficients Obey a Non-Commutative Law of Multiplication.* Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 12, 273-312.

XU G.L. (1990). *Existence and Uniqueness of Matrix Padé Approximants.* Journal of Computational Mathematics, Vol. 8, No. 1, 65-74.

XU G.L. y BULTHEEL, A. (1990). *Matrix Padé Approximation: Definitions and Properties.* Linear Algebra and its Applications 137/138, 67-136.

_____ (1992). *Matrix Padé Approximation: Recursive Computations.* Journal of Computational Mathematics, Vol. 10, No. 3, 254-262.

XU G.L. y LI J.K.(1990). *Generalized Matrix Padé Approximants.* Approximation Theory and its Applications 8, 65-74.

XU G.L. y ZHUANG G.Z. (1993). *Convergence Acceleration of Vector Sequences by Vector Padé Approximation.* Journal of Computational Mathematics, Vol. 11, No. 1, 77-86.