

Curso 2006/07  
**CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS/26**  
I.S.B.N.: 978-84-7756-776-9

**YOEL E. GUTIÉRREZ TOVAR**

**La transformación integral distribucional  
de Kontorovich-Lebedev  
y sus aplicaciones**

**Director**  
**JOSÉ MANUEL MÉNDEZ PÉREZ**



**SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS**  
**Serie Tesis Doctorales**

## Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento al Prof. José Manuel Méndez Pérez, por su dedicación y asesoría brindada al desarrollo del presente trabajo. Sin su pertinente seguimiento y paciencia no hubiese sido posible llevar a feliz término esta Memoria.

Gracias al Prof. Jorge J. Betancor Pérez, por sus valiosos aportes y sugerencias, a todos los profesores del Departamento de Análisis Matemático y a D. Pablo F. Lorenzo Cáceres, de la Secretaría, por toda la facilidad, amistad y permanente estímulo que me ofrecieron durante mis estancias en dicho Departamento.

Al Prof. Ángel Montesdeoca Delgado, quien me ayudó a conocer las potencialidades que ofrece el sistema de composición de documentos científicos *LATEX*, para así lograr una mejor presentación de esta Memoria.

A la Oficina de Relaciones Internacionales de la Universidad de La Laguna, por la adjudicación de ayuda que me brindaron en una de las estancias.

A los miembros de la Dirección de Investigación y Postgrado, y del Departamento de Estudios Generales de la Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre", Venezuela, en especial a los profesores Luis Nuñez y Esther Morales, que me ofrecieron sus roces de aliento y compromiso académico.

Por último, gracias al grupo de doctorandos que coincidimos durante las diferentes estancias en La Universidad de La Laguna, a mis familiares, amigos y colegas, quienes de alguna forma influyeron académica y emocionalmente a lo largo del camino recorrido para lograr esta meta.

A todos mi mayor reconocimiento.

A mi madre Emelia,  
a mi esposa Mary,  
a mis hijos Yósmar y Yósmar,  
por la comprensión y apoyo  
en los grandes momentos que dejé de compartir con ellos  
para poder dedicarme a la elaboración de esta memoria.

# ÍNDICE GENERAL

<b>Prólogo</b>	<b>3</b>
<b>1. La transformación integral clásica de Hankel–Kontorovich–Lebedev (la transformación H-K-L)</b>	<b>15</b>
1.1. Introducción . . . . .	15
1.2. Resultados preliminares. Notación y terminología . . . . .	17
1.3. La transformación integral clásica de Hankel-Kontorovich-Lebedev. Fórmula de inversión. . . . .	23
1.4. Aplicaciones . . . . .	37
<b>2. La transformación de Hankel-Kontorovich-Lebedev de distribuciones de soporte compacto</b>	<b>45</b>
2.1. Introducción . . . . .	45
2.2. La transformación H-K-L en el espacio de distribuciones $\mathcal{E}'(I)$	47
2.2.1. Definiciones y propiedades . . . . .	47
2.2.2. Fórmula de inversión. . . . .	52
2.3. Aplicaciones . . . . .	63
<b>3. La transformación H-K-L en espacios de funciones generalizadas de crecimiento exponencial</b>	<b>65</b>
3.1. Introducción . . . . .	65
3.2. El espacio de funciones prueba $\mathcal{F}_a$ y su dual . . . . .	66
3.3. La transformación H-K-L en el espacio de funciones generalizadas $\mathcal{F}'_a$ . . . . .	78
3.4. Reglas operacionales. Aplicaciones . . . . .	98
<b>4. La convolución distribucional asociada a la transformación H-K-L</b>	<b>103</b>
4.1. Introducción . . . . .	103

4.2. El operador traslación y la convolución para la transformación H-K-L en el sentido clásico. . . . .	105
4.3. La convolución distribucional asociada con la transformación H-K-L . . . . .	115
4.4. Aplicaciones . . . . .	138
<b>Cuestiones abiertas</b>	<b>145</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>153</b>

# PRÓLOGO

En esta Memoria se investiga una variante de la transformación integral de Kontorovich-Lebedev en cuyo núcleo comparece la función de Hankel  $H_\nu^{(2)}(x)$  de segunda clase, tanto desde un punto de vista clásico como en ciertos espacios de funciones generalizadas, así como sus aplicaciones a la resolución de diferentes problemas de la Física-Matemática.

Existe en la literatura una gran variedad de transformaciones integrales que llevan en su núcleo la función modificada de Bessel de segunda especie  $K_\nu(z)$ . Así podemos encontrar la K-transformación o transformación de Meijer, definida por ([84], [86, p. 174])

$$F(s) = \int_0^\infty \sqrt{st} K_\nu(st) f(t) dt, \quad (1)$$

que admite, bajo adecuadas condiciones impuestas sobre la función  $f(t)$ , la fórmula de inversión

$$f(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{st} I_\nu(st) F(s) ds, \quad (2)$$

donde  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\nu$  es un número complejo fijado e  $I_\nu(z)$  denota la función modificada de Bessel de primera especie ([19], [42], [75]). Esta transformación ha sido extendida a espacios de distribuciones por A. H. Zemanian [84], siguiendo técnicas análogas a las empleadas en el análisis distribucional de la transformación de Laplace [82].

También E. L. Koh y A. H. Zemanian [40] estudiaron la I-transformación

$$F(z) = \int_0^\infty \sqrt{zt} I_\nu(zt) f(t) dt \quad (3)$$

$$f(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{zt} K_\nu(z) F(z) dz, \quad (4)$$

con los núcleos intercambiando sus posiciones respecto del par (1)-(2).

Por otra parte, M. I. Kontorovich y N. N. Lebedev [41] introdujeron en 1938 la transformación integral

$$(\mathbf{T}\varphi)(kr) = \Phi(kr) = -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(kr) \varphi(\nu) d\nu, \quad (5)$$

donde  $J_\nu(z)$  es la función de Bessel de primera especie y orden  $\nu$ , que –bajo ciertas hipótesis– posee la fórmula de inversión

$$(\mathbf{T}^{-1}\Phi)(\nu) = \varphi(\nu) = \int_0^\infty \frac{H_\nu^{(2)}(kr)}{r} \Phi(kr) dr. \quad (6)$$

Posteriormente, en 1946, N. N. Lebedev introdujo una transformación que, como la anterior, es de la clase índice y es conocida como transformación de Kontorovich-Lebedev, viniendo dada por el par

$$(KLg)(\tau) = G(\tau) = \int_0^\infty \frac{K_{i\tau}(x)}{x} g(x) dx \quad (7)$$

$$(KL^{-1}G)(x) = g(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \pi\tau K_{i\tau}(x) G(\tau) d\tau, \quad (8)$$

siendo  $K_{i\tau}(x)$  la función de Macdonald ([42], [68]). N. N. Lebedev estableció el siguiente resultado clásico [43]

*Sea  $g$  una función definida en el intervalo  $(0, \infty)$ , donde es continua a trozos y de variación acotada en cualquier intervalo finito  $[x_1, x_2]$ ,  $0 < x_1 < x_2 < \infty$ . Supongamos además que las integrales*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-1} |g(x)| \ln \frac{1}{x} dx, \quad \int_{\frac{1}{2}}^\infty x^{-\frac{1}{2}} |g(x)| dx$$

*son finitas. Entonces, existe*

$$G(\tau) = \int_0^\infty \frac{K_{i\tau}(x)}{x} g(x) dx$$

y se cumple que

$$\frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \pi \tau K_{i\tau}(x) G(\tau) d\tau = \frac{g(x+0) + g(x-0)}{2}.$$

En [72] Vu Kim Tuan y S. B. Yakubovich presentaron este resultado bajo hipótesis más generales. Por otro lado, A. M. Gornilko ([26], [27], [28]) interpreta esta fórmula de inversión en el sentido de la convergencia en media en ciertos espacios clásicos. La demostración del anterior aserto es muy complicada y remitimos para su consideración a [43]. S. B. Yakubovich ([78], [80]) realizó un exhaustivo estudio clásico de esta transformación, su convolución y principales propiedades en espacios  $L^p$  pesados en su libro *Index transforms* [81]. Fue A. H. Zemanian, en 1975, quien primero la extendió a espacios de distribuciones, concretamente, a espacios de distribuciones de soporte compacto [85]. Más tarde, en 1979, R. S. Pathak y J. N. Pandey la investigaron en espacios distribucionales más generales, con un determinado comportamiento potencial [56]. El estudio de la convolución asociada a esta transformación y sus propiedades en espacios de funciones generalizadas se debe, en 1986, a H.-J. Glaeske y A. Hess [25]. S. B. Yakubovich y B. Fisher [79] efectúan en 1994 un original análisis de la transformación de Kontorovich-Lebedev en ciertos espacios de distribuciones, usando la representación de Cauchy de funciones generalizadas.

Por otra parte, S. B. Yakubovich [81, p. 62] consideró la versión compleja de la transformación de Kontorovich-Lebedev

$$(KLg)(s) = G(s) = \int_0^\infty K_s(y)g(y)dy \quad (9)$$

$$(KL^{-1}G)(x) = g(x) = \frac{i}{\pi^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} s \operatorname{sen}(\pi s) \frac{K_s(x)}{x} G(s) ds, \quad (10)$$

probando el siguiente resultado:

*Sea  $f$  definida en  $(0, \infty)$  de modo que  $x^\nu f(x) \in L^p((0, \infty), x^{-1}dx)$ ,  $\nu < 1$ ,  $p \geq 1$ . Entonces la transformada de Kontorovich-Lebedev  $G(s)$  de la función  $f(x)$ , dada por (9), existe y pertenece al espacio  $L^2(\sigma - i\infty, \sigma + i\infty)$ ,  $s = \sigma + i\tau$ ,  $|\sigma| < \min\{\frac{1}{2}, 1 - \nu\}$ . Además, la fórmula de inversión (10) vale para casi toda  $x \in (0, \infty)$ .*

Que sepamos, esta transformación no ha sido extendida aún a espacios de funciones generalizadas.

D. Naylor ([50], [51], [52]) y A. N. Chakrabarti ([13], [14], [15]) introdujeron la transformación integral del tipo índice

$$F_k(\nu) = \int_0^\infty \frac{Y_\nu(k\tau)}{\tau} f(\tau) d\tau \quad (11)$$

$$f(\tau) = \frac{i}{2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \nu F_k(\nu) J_\nu(k\tau) d\nu, \quad (12)$$

$c \in \mathbb{R}$ . Obsérvese que en (11) figura en el núcleo la función de Bessel  $Y_\nu(z)$  de segunda especie y orden  $\nu$ . Al resolver ciertos problemas de valores en la frontera, D. Naylor y A. N. Chakrabarti también investigaron transformaciones integrales finitas de la clase de Kontorovich-Lebedev, a saber,

$$F_k(\nu) = \int_a^b \frac{I_\nu(kr)K_\nu(kb) - I_\nu(kb)K_\nu(kr)}{r} f(r) dr \quad (13)$$

$$f(r) = -\frac{1}{\pi i} \int_L \nu \frac{I_\nu(kr)K_\nu(ka) - I_\nu(ka)K_\nu(kr)}{I_\nu(kb)K_\nu(ka) - I_\nu(ka)K_\nu(kb)} F_k(\nu) d\nu, \quad (14)$$

donde  $b > a > 0$  y  $L$  representa un camino de integración contenido en el semiplano derecho del plano complejo  $\nu$  y paralelo al eje imaginario.

M. M. Crum [17] describió pares de transformadas integrales de la forma ( $a > 0$ ).

$$F(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi}{2}(\xi+\eta)} K_{i(\xi+\eta)}(a) G(\eta) d\eta \quad (15)$$

$$G(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi}{2}(\xi+\eta)} K_{i(\xi+\eta)}(a) F(\eta) d\eta \quad (16)$$

y

$$F(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{i(\xi+\eta)}(ia) G(\eta) d\eta \quad (17)$$

$$G(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{i(\xi+\eta)}(-ia) F(\eta) d\eta, \quad (18)$$

en cuyos núcleos comparece de nuevo la función de Macdonald. Estas transformadas han sido tratadas en ciertos espacios de funciones generalizadas por Vu Kim Tuan [73].

Si repasamos la forma de todas las transformaciones consideradas hasta aquí, concluimos que tienen en común la presencia en sus núcleos de  $K_\nu(z)$ , función modificada de Bessel de segunda clase y orden  $\nu$ , y que el índice  $\nu$  y el argumento  $z$  desempeñan todos los papeles posibles. En efecto, en los pares (1)-(2) y (3)-(4), mientras que el índice  $\nu$  permanece fijo, la variable de la función de partida es  $t$  y la variable imagen es  $s$  o  $z$ . En cambio, en la transformación (5)-(6) el índice  $\nu$  actúa como variable. Lo mismo ocurre con el par integral de Kontorovich-Lebedev (7)-(8), donde se ve que en la fórmula directa la variable es  $x$ , pero en la fórmula de inversión la variable es el índice  $\tau$ . A esta clase de transformaciones integrales se les denomina transformaciones del tipo o de la clase índice. Por último, la transformación de Crum (15)-(16) es doblemente índice, puesto que ambas variables –la original  $\eta$  y la imagen  $\xi$ – son indiciales (en este caso el argumento  $a > 0$  es una constante fijada).

Son numerosas las referencias bibliográficas en las que se pueden encontrar aplicaciones de la transformación de Kontorovich-Lebedev a la resolución de distintos problemas de la Física-Matemática. Así, J. M. L. Bernard y M. A. Lyalinov ([6], [7]) la utilizaron en la determinación de la difracción de ondas planas por un cono de sección arbitraria, lo que se reduce –cuando hay dependencia radial– a determinar la solución de la ecuación de Helmholtz

$$(\Delta + k^2)u = 0,$$

siendo

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

V. A. Doroshenko y V. F. Kravchenko ([21], [22]) la usan para hallar la excitación producida por un dipolo eléctrico radial en un cono circular semiinfinito, muy fino y perfectamente conductor, con ranuras semiinfinitas. La transformación de Kontorovich-Lebedev también permite a G. Gasaneo, S. Ovchinnikov y J. H. Macek [23] representar las soluciones de la ecuación de Schrödinger para el problema de tres partículas cuando dos de ellas interactúan con un rango de potencial cero. Con su ayuda A. D. Rawlins [63] obtiene expresiones aproximadas del campo producido cuando una onda

electromagnética plana es difractada por una cuña dieléctrica de ángulo arbitrario. N. N. Lebedev e I. P. Skalskaya ([45], [46]) la emplean para resolver cierta clase de ecuaciones integrales. Más aplicaciones pueden ser encontradas en N. N. Lebedev, I. P. Skalskaya e Y. S. Uflyand [44], R. S. Pathak [55] e I. N. Sneddon [68]. Incluso en [54] V. G. Novitzky, aunque no sea de forma explícita, resuelve con su concurso una ecuación en diferencias finitas.

Precisamente el estudio de las transformaciones integrales del tipo índice ha sido una línea de investigación muy activa durante los últimos años en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna. Así, en el par (1)-(2) se observa que  $\nu$  actúa como parámetro, mientras que la variable  $t$  se convierte, se transforma, en la variable  $s$ . Pero si intercambiamos los papeles de  $\nu$  y  $s$ , resulta la transformación

$$F_s(\nu) = \int_0^\infty \sqrt{st} K_\nu(st) f(t) dt, \quad (19)$$

cuya fórmula de inversión viene dada por

$$f(t) = \frac{1}{\pi t i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \nu I_\nu(st) F_s(\nu) d\nu, \quad \sigma > 0. \quad (20)$$

Ahora  $s$  actúa como parámetro, siendo  $t$  y  $\nu$  las variables. El par (19)-(20) fue investigado y extendido por E. R. Negrín en 1988 a ciertos espacios de distribuciones en su Tesis Doctoral *Una transformación del tipo Kontorovich-Lebedev con índice arbitrario* [53].

Una transformación análoga a ésta, introducida por M. I. Kontorovich y N. N. Lebedev [41] y extendida a una más amplia clase de funciones por A. M. Gomitko [28], viene definida por el par

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho) &= \int_{-\infty}^{\infty} t I_{-it}(\lambda\rho) f(t) dt \\ f(t) &= \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \frac{K_{it}(\lambda\rho)}{\rho} F_\lambda(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ .

Posteriormente, en 1992 y en su Memoria Doctoral *La  ${}_2F_1$ -transformación índice*, B. J. González [29] analizó en detalle la transformación integral

$$F(\tau) = \int_0^\infty F(\mu, \alpha, \tau, t) f(t) dt,$$

donde se denota

$$F(\mu, \alpha, \tau, t) = {}_2F_1\left(\mu + \frac{1}{2} + i\tau, \mu + \frac{1}{2} - i\tau; \mu + 1; -t\right)t^\alpha,$$

siendo  ${}_2F_1$  la función hipergeométrica de Gauss ([19], [42]),  $\alpha$  y  $\mu$  parámetros complejos y  $\tau$  real y positivo. Su fórmula de inversión es

$$f(t) = \int_0^\infty S(\mu, \tau)G(\mu, \alpha, \tau, t)F(\tau)d\tau,$$

donde

$$S(\mu, \tau) = \frac{2}{\pi\Gamma^2(\mu + 1)}\tau \operatorname{sh} \pi\tau \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2} + i\tau\right)\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2} - i\tau\right)$$

y

$$G(\mu, \alpha, \tau, t) = t^{\mu-\alpha} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + i\tau, \frac{1}{2} - i\tau; \mu + 1; -t\right).$$

B. J. González y E. R. Negrín abordan otras transformaciones tipo índice en [30] y [31].

Más recientemente y en un contexto más general y abstracto, Juan Diego Betancor en 2002 investiga en su Memoria Doctoral *La transformación integral de Chébli-Trimèche* [8] la transformación integral de Fourier generalizada, asociada al hipergrupo de Chébli-Trimèche ([16], [71]),

$$\mathcal{F}_\Delta(f)(\lambda) = F_\Delta(\lambda) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(x)f(x)A(x)dx, \quad (21)$$

donde  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\operatorname{Im}\lambda| \leq \rho$ ,  $f \in L^1((0, \infty), A(x)dx)$ ,  $A(x)$  es conocida como función de Chébli y  $\varphi_\lambda$  son las soluciones del problema

$$\begin{cases} [\Delta - (\lambda^2 + \rho^2)]\varphi_\lambda(x) = 0, & x > 0 \\ \varphi_\lambda(0) = 1, \quad \varphi'_\lambda(0) = 0, \end{cases}$$

siendo  $\Delta$  el operador diferencial

$$\Delta = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{A'(x)}{A(x)} \frac{d}{dx}.$$

Su inversa viene determinada por la fórmula

$$\mathcal{F}_{\Delta}^{-1}(F_{\Delta}(\lambda))(x) = f(x) = \int_0^{\infty} \varphi_{\lambda}(x) F_{\Delta}(\lambda) \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}, \quad (22)$$

donde  $c(\lambda)$  es una función continua y sin ceros sobre  $[0, \infty)$ , del tipo Harish-Chandra. Dos casos particulares de esta transformación son las de Hankel y Jacobi. En [9], [10] y [11] J. J. Betancor et al. investigan distintos aspectos relativos a esta transformación.

Sin más preámbulos pasamos a dar cuenta del contenido de esta Memoria, que hemos dividido en cuatro capítulos.

D. S. Jones –en el contexto de la resolución de ciertos problemas físicos regidos por la ecuación de Helmholtz, donde la función de Hankel aparece de forma natural ([38], [39])– investigó en 1980 el par integral

$$(\mathcal{J}f)(\nu) = F(\nu) = \int_0^{\infty} H_{\nu}^{(2)}(x) f(x) dx \quad (23)$$

$$(\mathcal{J}^{-1}F)(x) = f(x) = -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_{\nu}(x) F(\nu) d\nu. \quad (24)$$

Obsérvese que este par y el (5)-(6) coinciden básicamente, salvo en el orden de actuación. En el último par las hipótesis se imponen sobre la función  $f$  y (23) nos da la fórmula directa, viniendo servida la fórmula de inversión por (24). Conviene resaltar que éste es el orden más lógico y es el que se sigue en las aplicaciones.

El objetivo fundamental del Capítulo 1 es presentar una versión alternativa del resultado de M. I. Kontorovich y N. N. Lebedev, analizando bajo qué condiciones existe el par integral

$$(\mathcal{J}^*g)(x) = G(x) = -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_{\nu}(x) g(\nu) d\nu \quad (25)$$

$$(\mathcal{J}^{*-1}G)(\nu) = g(\nu) = \int_0^{\infty} H_{\nu}^{(2)}(x) G(x) dx. \quad (26)$$

Nótese que en este par no figura la constante compleja  $k$  que comparece en el par (5)-(6), cuya presencia resulta esencial en la derivación de la fórmula

de inversión, pues M. I. Kontorovich y N. N. Lebedev [41] utilizan para su deducción una representación integral de la función de Hankel que sólo es válida cuando la parte imaginaria de  $kr$  es negativa. Aclaremos desde un principio que el par (25)-(26) no es un caso particular del par (5)-(6) haciendo  $k = 1$ , ya que este valor de  $k$  está completamente descartado allí.

Tras hacer un resumen de los principales resultados que conciernen al par (23)-(24) estudiado por D. S. Jones, se recuerdan las definiciones de las funciones especiales que más aparecen en esta Memoria, de sus expresiones asintóticas, relaciones de recurrencia,... y se incluye una parte de la notación y terminología que usaremos a lo largo de este trabajo. En la tercera sección se obtienen los principales resultados relacionados con el par (25)-(26), a saber, la fórmula de inversión y una relación de Parseval. Nos hemos basado en los trabajos de M. I. Kontorovich y N. N. Lebedev [41] y, especialmente, en la técnica de deformación de los contornos de integración debido a D. S. Jones ([38], [39]). En el cuarto y último párrafo de este primer capítulo se ilustra la teoría con algunos resultados originales. Es bien conocida, como acabamos de ver, la utilización de las diferentes variantes de la transformación de Kontorovich-Lebedev –los pares (7)-(8) y (23)-(24)– en la resolución de problemas de la Física-Matemática que vienen planteados por ecuaciones en derivadas parciales en dominios con forma de cuñas. Sin embargo, no existe en la literatura matemática –al menos que sepamos– aplicaciones ni del par (5)-(6) ni del (25)-(26), es decir, cuando se considera que las transformaciones directas vienen dadas por las fórmulas (5) y (25), respectivamente. Por eso finalizamos este capítulo mostrando, después de obtener las pertinentes reglas operacionales, que estas transformaciones integrales resultan útiles en la resolución de ciertas clases de ecuaciones en diferencias finitas con coeficientes variables.

A las transformaciones de la forma (23)-(24) y (25)-(26) y sus variantes las llamaremos transformaciones de Hankel- Kontorovich-Lebedev o, a lo largo de la tesis y en aras de la brevedad, transformaciones H-K-L. Este término fue acuñado por M. Cessenat [12], por cuanto en sus núcleos –además de la función  $J_\nu(x)$  de Bessel– figura la función  $H_\nu^{(2)}(x)$  de Hankel.

En el resto de la memoria se investiga esta transformación integral en diferentes espacios de funciones generalizadas o distribuciones. Recordemos, por ello, que en este proceso de extensión de las transformaciones integrales clásicas se suele recurrir a espacios de funciones prueba que sólo son ideales para la transformación que se considera pero no, en general, para otras. Ello se debe a que el espacio fundamental asociado a determinada transformación integral tiene que ser construido la mayor parte de las veces teniendo en

cuenta las propiedades de la función que actúa como núcleo.

Como es sabido, una transformación integral clásica cualquiera viene caracterizada por el núcleo y el intervalo o camino de integración. Los núcleos  $K_1(x, y)$  y  $K_2(x, y)$  son funciones especiales conocidas y los caminos de integración  $I$  y  $J$  pueden ser reales o complejos. Se tiene así la transformación genérica

$$(Tf)(y) = F(y) = \int_I K_1(x, y)f(x)dx \quad (27)$$

$$(T^{-1}F)(x) = f(x) = \int_J K_2(x, y)F(y)dy. \quad (28)$$

Si  $K_1(x, y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-ixy}$ ,  $K_2(x, y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{ixy}$  e  $I = J = (-\infty, \infty)$  resulta la transformación integral de Fourier. Cuando  $K_1(x, y) = K_2(x, y) = \sqrt{xy}J_\nu(xy)$  e  $I = J = (0, \infty)$  aparece la transformación integral de Hankel. En cambio, si  $K_1(t, y) = e^{-st}$ ,  $K_2(t, y) = (2\pi i)^{-1}e^{st}$ ,  $I = (0, \infty)$  y  $J$  denota el camino  $\text{Res} = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , constituido por una recta paralela al eje imaginario en el plano complejo y contenido en la región de analiticidad de  $F(s)$ , entonces (27)-(28) se convierte en la transformada de Laplace.

Pues bien, existen fundamentalmente dos métodos para extender la transformación clásica (27)-(28) a espacios de funciones generalizadas. En el primer método, llamado método del núcleo, se construye un espacio de funciones prueba  $A$  sobre  $I$  que contiene al núcleo  $K_1(., y)$ ,  $y \in J$ , y se define la transformada  $T'f$ , donde  $f$  es un elemento arbitrario de su espacio dual  $A'$ , aplicando  $f$  directamente al núcleo  $K_1(., y)$

$$(T'f)(y) = F(y) = \langle f(x), K_1(x, y) \rangle. \quad (29)$$

El siguiente paso es verificar la fórmula de inversión (28) en el sentido de la convergencia en el espacio  $\mathcal{D}'(I)$  de las distribuciones de Schwartz. Este procedimiento ha sido adoptado por A. H. Zemanian ([85], [86]) para realizar las extensiones de las transformaciones de Laplace y Mellin, de Meijer o K-transformación, de Kontorovich-Lebedev; por E. L. Koh y A. H. Zemanian [40] para la de Hankel,....

El segundo método, conocido como método del operador adjunto, consiste en definir dos espacios de funciones prueba  $A$  y  $B$  de tal manera que la transformación clásica  $T$  sea un isomorfismo de  $A$  en  $B$ , definiendo entonces la transformada generalizada  $T'f$ ,  $f \in B'$ , mediante el operador adjunto de  $T$  actuando sobre  $A$ , es decir

$$\langle T'f, \varphi \rangle = \langle f, T\varphi \rangle, \quad f \in B', \quad \varphi \in A. \quad (30)$$

Sigue inmediatamente que  $T'$  es asimismo un isomorfismo entre los espacios de funciones generalizadas  $B'$  y  $A'$ . Esta vía ha sido utilizada, entre otros, por L. Schwartz [66] en su extensión de la transformación de Fourier a distribuciones atemperadas o de crecimiento lento, y por A. H. Zemanian ([83], [86]) para definir la de Hankel en ciertos espacios de funciones generalizadas. Aunque el primer método es más natural y las transformadas son más fáciles de evaluar, el método del operador adjunto permite considerar espacios distribucionales más amplios. Habitualmente, la definición (30) se adapta a una relación de Parseval satisfecha por la transformación estudiada.

En esta dirección, en el Capítulo 2, utilizando el método del núcleo, se investiga la transformación de Hankel-Kontorovich-Lebedev (23)-(24) en el espacio  $\mathcal{E}'(I)$  de las distribuciones de soporte compacto. Después de estudiar algunas de sus propiedades, entre ellas, la analiticidad y la acotación de la función imagen, se prueba el resultado capital del capítulo, a saber, la fórmula de inversión. Destaquemos que en la primera parte de la prueba, a la hora de justificar el intercambio de una integral con cierto funcional, en lugar de recurrir a la técnica habitual en estos casos, que resulta muy laboriosa –la conocida técnica de las sumas de Riemann ([55], [86])– se acude a un método novedoso debido a J. J. Betancor (véase, por ejemplo, [11]), el cual está basado en una adecuada representación de las distribuciones consideradas.

En el Capítulo 3 se introducen nuevos espacios de funciones prueba  $\mathcal{F}_a$  y sus duales, realizándose un exhaustivo estudio de sus principales propiedades, lo cual concluirá con el establecimiento de que se trata de espacios de Fréchet y de que la función de Hankel de segunda clase  $H_\nu^{(2)}(x)$ , que aparece en el núcleo, y sus derivadas pertenecen a dichos espacios. Después se define la transformación de Hankel-Kontorovich-Lebedev en su espacio dual  $\mathcal{F}'_a$ , espacio de distribuciones o funciones generalizadas, mediante el método del núcleo y se establecen los cuatro resultados fundamentales: la analiticidad de la función imagen, la acotación de la misma, la fórmula de inversión distribucional y el teorema de unicidad. Nos hemos inspirado en el trabajo de E. L. Koh y A. H. Zemanian [40], en donde se estudia la transformación de Hankel ([83], [86]) en un espacio de funciones generalizadas de crecimiento exponencial en el infinito. Lo novedoso de nuestro caso, además de las distintas técnicas empleadas, es que las funciones generalizadas introducidas tienen un doble crecimiento exponencial, tanto en el origen como en el infinito.

En el Capítulo 4 se estudia la convolución asociada a la transformación de Hankel-Kontorovich-Lebedev. Por cuestiones de simetría en lugar de la transformación dada por el par (23)-(24) –que ha sido investigada en los capítulos precedentes– se considera la variante

$$(\mathcal{H}f)(\nu) = F(\nu) = \int_0^\infty \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} f(x) dx \quad (31)$$

$$(\mathcal{H}^{-1}F)(x) = f(x) = -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu. \quad (32)$$

Obsérvese que entre estas dos versiones de la transformación de Hankel-Kontorovich-Lebedev se dan las siguientes relaciones

$$\mathcal{H}f = \mathcal{J}(x^{-1}f)$$

y

$$\mathcal{J}f = \mathcal{H}(xf).$$

Ello nos obligará a modificar, aunque sólo sea ligeramente, el espacio de funciones prueba  $\mathcal{F}_a$ , estudiado en el Capítulo 3, debiendo definir nuevos espacios fundamentales  $\mathcal{G}_a$  y  $\mathcal{H}_a$ . Como resultados más significativos, destacaríamos la introducción del operador traslación y la convolución asociada a la transformación (31)-(32), primero, en un contexto clásico y, más tarde, en espacios de funciones generalizadas. Todo este desarrollo teórico se basa en la consideración de cierto núcleo  $E(x, y, z)$  y la noción de factores admisibles para la convolución definida.

Todos los capítulos finalizan ilustrando la teoría desarrollada con la resolución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias y, muy especialmente, de ecuaciones en derivadas parciales del tipo Helmholtz con condiciones de frontera fijadas en los lados de cuñas infinitas. Subrayemos que D. S. Jones demuestra que, según la naturaleza del problema, en muchos casos es más conveniente utilizar las transformaciones del tipo (23)-(24) y (31)-(32) que la más conocida versión de Kontorovich-Lebedev, dada por el par (7)-(8).

Finalizamos la Memoria con un Apéndice en el que exponemos algunas cuestiones abiertas, en parte de las cuales estamos trabajando actualmente, y una bibliografía sobre los temas tratados.

# CAPÍTULO 1

## LA TRANSFORMACIÓN INTEGRAL CLÁSICA DE HANKEL–KONTOROVICH–LEBEDEV (LA TRANSFORMACIÓN H-K-L)

### 1.1. Introducción

N. N. Lebedev [43] introdujo en 1946 una clase particular de transformadas del tipo índice conocida como transformación de Kontorovich-Lebedev, que viene dada por el par

$$(KLg)(\tau) = G(\tau) = \int_0^\infty \frac{K_{i\tau}(x)}{x} g(x) dx \quad (1.1.1)$$

$$(KL^{-1}G)(x) = g(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \pi\tau K_{i\tau}(x) G(\tau) d\tau, \quad (1.1.2)$$

donde  $K_{i\tau}(x)$  es la función de Macdonald ([42], [68]). S. B. Yakubovich realizó un excelente estudio clásico de esta transformación y su convolución en la monografía [81].

Con anterioridad, en 1938, M. I. Kontorovich y N. N. Lebedev [41], ya habían considerado la transformación integral del tipo índice

$$(\mathbf{T}\varphi)(kr) = \Phi(kr) = -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu J_\mu(kr) \varphi(\mu) d\mu \quad (1.1.3)$$

$$(\mathbf{T}^{-1}\Phi)(\mu) = \varphi(\mu) = \int_0^\infty \frac{H_\mu^{(2)}(kr)}{r} \Phi(kr) dr, \quad (1.1.4)$$

donde  $J_\nu(z)$  es la conocida función de Bessel de primera especie y orden  $\nu$ ;  $H_\nu^{(2)}(z)$  es la función de Bessel de tercera especie, también llamada función de Hankel de segunda clase ([19], [42], [75]);  $|\operatorname{Re}\mu| < \delta$ , para cierto  $\delta > 0$ ; y  $k = |k|e^{-i\alpha}$  es un número complejo fijo con  $0 < \alpha < \pi$ , lo cual entraña que  $\operatorname{Im}(kr) < 0$ . Posteriormente, en 1968, D. S. Jones –en el contexto de la resolución de problemas físicos regidos por la ecuación de Helmholtz, donde la función de Hankel aparece de forma natural ([38], [39], [44])– investigó el par integral

$$(\mathcal{J}f)(\nu) = F(\nu) = \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x) f(x) dx \quad (1.1.5)$$

$$(\mathcal{J}^{-1}F)(x) = f(x) = -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu. \quad (1.1.6)$$

Obsérvese que este par y el (1.1.3)-(1.1.4) coinciden básicamente, salvo en el orden de actuación. En el último par las hipótesis se imponen sobre la función  $f$  y (1.1.5) nos da la fórmula directa, viniendo servida la fórmula de inversión por (1.1.6). Conviene resaltar que éste es el orden más lógico y es el que se sigue en las aplicaciones.

El objetivo fundamental de este primer capítulo es presentar una versión alternativa del resultado de M. I. Kontorovich y N. N. Lebedev, analizando bajo qué condiciones existe el par integral

$$(\mathcal{J}^*g)(x) = G(x) = -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu \quad (1.1.7)$$

$$(\mathcal{J}^{*-1}G)(\nu) = g(\nu) = \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x) G(x) dx. \quad (1.1.8)$$

Nótese que en este par no figura la constante compleja  $k$  que comparece en el par (1.1.3)-(1.1.4), cuya presencia resulta esencial en la derivación de la fórmula de inversión, pues M. I. Kontorovich y N. N. Lebedev [41] utilizaron para su deducción una representación integral de la función de Hankel que sólo es válida cuando la parte imaginaria de  $kr$  es negativa

(véase [42, p. 118, (5.10.17)]). Aclaremos desde un principio que el par (1.1.7)-(1.1.8) no es un caso particular del par (1.1.3)-(1.1.4) haciendo  $k = 1$ , ya que este valor de  $k$  está completamente descartado allí.

En el segundo párrafo se hace un resumen de los principales resultado que conciernen al par (1.1.5)-(1.1.6) estudiado por D. S. Jones. También se recuerdan las definiciones de las funciones especiales que más aparecen en esta Memoria, de sus expresiones asintóticas, relaciones de recurrencia,... Además se incluye una parte de la notación y terminología que usaremos a lo largo de esta Tesis. En la tercera sección se obtienen los principales resultados relacionados con el par (1.1.7)-(1.1.8), a saber, la fórmula de inversión y una relación de Parseval. Nos basaremos en los trabajos de M. I. Kontorovich y N. N. Lebedev [41] y, especialmente, en la técnica de deformación de los contornos integrales debida a D. S. Jones ([38], [39]). En el cuarto y último párrafo se ilustra la teoría con algunas aplicaciones originales. Es bien conocida la utilización de las diferentes variantes de la transformación de Kontorovich-Lebedev –los pares (1.1.1)-(1.1.2) y (1.1.5)-(1.1.6)– en la resolución de problemas de la Física-Matemática que vienen planteados por ecuaciones en derivadas parciales en dominios con forma de cuñas. Sin embargo, no existen en la literatura matemática –que sepamos– aplicaciones ni del par (1.1.3)-(1.1.4) ni del (1.1.7)-(1.1.8), es decir, cuando se considera que las transformaciones directas vienen dadas por (1.1.3) y (1.1.7), respectivamente. Por eso finalizamos este capítulo mostrando, después de obtener las pertinentes reglas operacionales, que estas transformaciones integrales resultan útiles en la resolución de ciertas clases de ecuaciones en diferencias finitas.

## 1.2. Resultados preliminares. Notación y terminología

D. S. Jones demostró con un contraejemplo [38, §2] que la fórmula de inversión (1.1.6) es falsa en general, por lo que introdujo en la misma un factor corrector y reemplazó el par (1.1.5)-(1.1.6) por

$$(\mathcal{J}f)(\nu) = F(\nu) = \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x)f(x)dx \quad (1.2.1)$$

$$(\mathcal{J}^{-1}F)(x) = f(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x)F(\nu)d\nu, \quad (1.2.2)$$

estableciendo bajo qué condiciones se puede asegurar la existencia del límite (1.2.2). Para ello deformó, como indicaremos más adelante, el camino de integración de esta última integral. De esta manera, probó el siguiente resultado [38]

**Teorema 1.1 (Teorema de D. S. Jones)** *Supongamos que  $f$  satisface las condiciones*

$$(a) \int_0^1 |f(x)| \ln \frac{1}{x} dx < \infty,$$

$$(b) \int_c^\infty x^{-\frac{1}{2}} f(x) e^{-i(x-\frac{\pi}{4})} dx \text{ es finita, para toda } c > 0.$$

Entonces existe

$$F(\nu) = \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x) f(x) dx, \quad (\operatorname{Re} \nu = 0),$$

y se tiene que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

siempre que la función  $f$  sea de variación acotada en un entorno de  $x > 0$ .

A las transformaciones de la forma (1.1.7)-(1.1.8) y (1.2.1)-(1.2.2) y sus variantes las llamaremos transformaciones de Hankel-Kontorovich-Lebedev o, en aras de la brevedad, transformaciones H-K-L. Este término fue acuñado por M. Cessenat [12] en sus trabajos sobre una transformación de este tipo, por cuanto en sus núcleos –además de la función  $J_\nu(x)$  de Bessel– comparece la función  $H_\nu^{(2)}(x)$  de Hankel.

Como es bien sabido,  $J_\nu(z)$  es la función de Bessel de primera especie y orden  $\nu$ . Viene definida por la serie [42, p. 102]

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)},$$

donde  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , y satisface la ecuación diferencial

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = 0 \quad (1.2.3)$$

y la relación de recurrencia [42, p. 103]

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z). \quad (1.2.4)$$

La función de Bessel de tercera especie  $H_{\nu}^{(2)}(z)$ , denominada también función de Hankel de segunda clase ([19], [42], [75]), viene dada por

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = \frac{e^{\nu\pi i} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z)}{i \operatorname{sen} \nu\pi}. \quad (1.2.5)$$

Obviamente verifica la misma ecuación diferencial (1.2.3) y la relación de recurrencia [42, p. 108]

$$H_{\nu-1}^{(2)}(z) + H_{\nu+1}^{(2)}(z) = \frac{2\nu}{z} H_{\nu}^{(2)}(z). \quad (1.2.6)$$

Asimismo se cumple que [42, p. 108, (5.6.5)]

$$H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\pi\nu} H_{\nu}^{(2)}(z). \quad (1.2.7)$$

Como funciones de  $z$ , tanto  $J_{\nu}(z)$  como  $H_{\nu}^{(2)}(z)$  son funciones holomorfas en todo el plano complejo excepto en el eje real negativo y el cero, mientras que, para  $z \neq 0$ , son funciones enteras del orden o índice  $\nu$ .

$I_{\nu}(z)$  denota la función modificada de Bessel de primera especie y viene definida por [42]

$$I_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}, \quad (1.2.8)$$

para toda  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . A partir de ella se introduce la función modificada de Bessel de segunda especie  $K_{\nu}(z)$ , mediante

$$K_{\nu}(z) = \frac{\pi I_{-\nu}(z) - I_{\nu}(z)}{2 \operatorname{sen} \pi\nu} \quad (1.2.9)$$

para toda  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  y  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Para valores enteros  $\nu = n$  del índice se define, como es natural [42, p. 109]

$$K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_{\nu}(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2.10)$$

Las funciones  $I_{\nu}(z)$  y  $K_{\nu}(z)$  satisfacen la ecuación diferencial modificada de Bessel

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2)w = 0 \quad (1.2.11)$$

y las relaciones de recurrencia [42, p. 110]

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z) \quad (1.2.12)$$

y

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z). \quad (1.2.13)$$

Se tiene igualmente que [42, p. 110]

$$I_{-n}(z) = I_n(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

y

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z), \quad (1.2.14)$$

para toda  $\nu \in \mathbb{C}$ . También se cumple que [75, p. 80(17)]

$$I_\nu(-z) = e^{\nu\pi i} I_\nu(z). \quad (1.2.15)$$

En algunos textos se refieren a la función modificada de Bessel de segunda clase  $K_\nu(z)$  como función de Macdonald. En esta Memoria reservaremos ese nombre para la función  $K_\nu(z)$  cuando posee orden imaginario puro, esto es, la función de Macdonald es  $K_{i\tau}(z)$ , donde  $\tau \in \mathbb{R}$ . Por tanto, de (1.2.11) se infiere que la función de Macdonald satisface la ecuación diferencial

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 - \tau^2)w = 0. \quad (1.2.16)$$

Recordemos a continuación algunas fórmulas que utilizaremos con frecuencia a lo largo de esta Tesis, relativas al comportamiento asintótico de las funciones que hemos descrito anteriormente.

$$H_\nu^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4})}, \quad \text{si } x \longrightarrow \infty \quad (1.2.17)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \approx i \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\pi}, \quad \text{si } x \longrightarrow 0+, \quad \operatorname{Re} \nu > 0 \quad (1.2.18)$$

$$H_0^{(2)}(x) \approx i \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{x}, \quad \text{si } x \longrightarrow 0+ \quad (1.2.19)$$

$$J_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, \quad \text{si } x \longrightarrow 0+ \quad (1.2.20)$$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{si } x \longrightarrow \infty \quad (1.2.21)$$

$$K_\nu(x) \approx \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{x^\nu}, \quad \text{si } x \longrightarrow 0+, \quad \operatorname{Re} \nu > 0 \quad (1.2.22)$$

$$K_0(x) \approx \ln \frac{2}{x}, \quad \text{si } x \longrightarrow 0+ \quad (1.2.23)$$

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad \text{si } x \longrightarrow \infty, \quad (1.2.24)$$

para  $\nu$  fijado ([19], [42], [75]).

Para grandes valores de  $|\nu|$  valen

$$J_\nu(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} e^{\nu - \nu \ln \frac{2\nu}{z}} \quad (1.2.25)$$

y

$$H_\nu^{(2)}(z) \approx i \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} e^{\nu(\ln \frac{2\nu}{z} - 1)} \quad (1.2.26)$$

[75, p. 262]. De (1.2.25) y (1.2.26), o bien de [38, (16)], resulta que

$$\nu J_\nu(x) H_\nu^{(2)}(y) = \frac{i}{\pi} e^{\nu \ln \frac{x}{y}}. \quad (1.2.27)$$

Para valores del argumento  $z$  mayores que el orden  $\nu$ , usaremos [75, p. 244]

$$H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} (z^2 - \nu^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-i\sqrt{z^2 - \nu^2} - i \arcsen \frac{\nu}{z}} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu + \frac{1}{2})}. \quad (1.2.28)$$

Por el contrario, para valores del argumento  $z$  inferiores al orden  $\nu$ , resulta ser [75, p. 262]

$$H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} i(\nu^2 - z^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\sqrt{\nu^2 - z^2} + \nu \ln\left(\frac{\nu}{z} + \sqrt{\frac{\nu^2}{z^2} - 1}\right)}. \quad (1.2.29)$$

Recurrimos con frecuencia a la representación integral [42, p. 139]

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{e^{-i(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{s}{2iz}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} ds \quad (1.2.30)$$

válida cuando  $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$ ,  $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$ .

Recordemos que [42, p. 14]

$$\frac{1}{|\Gamma(\frac{1}{2} + iy)|^2} = \frac{\operatorname{ch} \pi y}{\pi}, \quad (1.2.31)$$

para todo  $y$  real.

Merece la pena, finalmente, reseñar la expresión asintótica de la función de Macdonald [42, p. 140]

$$K_{i\tau}(x) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}} e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \tau \ln \tau - \tau - \tau \ln \frac{x}{2}\right) \quad (1.2.32)$$

cuando  $\tau \rightarrow \infty$ , para  $x > 0$  fijado.

Para detalles más concretos sobre las funciones utilizadas, pueden consultarse especialmente las referencias A. Erdélyi [19], I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik [32], A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov y O. I. Marichev [59] y G. N. Watson [75]. Un texto excepcional que conjuga sencillez y rigor, amenidad y abundante información, en pocas páginas, es la obra de N. N. Lebedev "Special Functions and their Applications" [42].

A lo largo de esta monografía  $I$  denota el eje real positivo, es decir,  $I = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ .

Por último,  $C$  representa una constante positiva que no será necesariamente la misma cada vez que aparezca.

### 1.3. La transformación integral clásica de Hankel-Kontorovich-Lebedev. Fórmula de inversión.

Establecemos a continuación el resultado fundamental de este capítulo.

**Teorema 1.2 (Fórmula de inversión)** *Sea la región no acotada del plano complejo*

$$\mathcal{S}_{\nu_0} = \{\nu \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}\nu| - |\operatorname{Im}\nu| \leq \nu_0, \quad \nu_0 > 0\}$$

*que contiene al eje imaginario y está limitado a la izquierda por dos semirrectas que parten del punto  $-\nu_0$  del eje real negativo, formando con él ángulos de  $\frac{3\pi}{4}$  radianes, y a la derecha por otras dos semirrectas que parten del punto  $\nu_0$  del eje real positivo con el que forman ángulos iguales a  $\frac{\pi}{4}$  (ver Figura 1.3.1). Supongamos que:*

(a)  *$g$  es analítica en un dominio abierto  $\mathcal{S}_a$  que contiene a  $\mathcal{S}_{\nu_0}$  ( $a > \nu_0$ ).*

(b)  *$g(\nu) = O(|\nu|^{-\frac{1}{2}-\delta} e^{-\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\nu|})$ , cuando  $|\operatorname{Im}\nu| \rightarrow \infty$ , en  $\mathcal{S}_a$ , donde  $\delta > 1$ .*

*Entonces, si ponemos*

$$(\mathcal{J}^*g)(x) = G(x) = -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu, \quad \operatorname{Re}\nu = 0, \quad (1.3.1)$$

*se tiene que*

$$(\mathcal{J}^{*-1}G)(\nu) = g(\nu) = \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x) G(x) dx. \quad (1.3.2)$$

*Prueba:* Para  $x > 0$ , la integral (1.3.1) está bien definida. En efecto,

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu = \left( \int_{-i\infty}^{-iN} + \int_{-iN}^{iN} + \int_{iN}^{i\infty} \right) \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu,$$

donde  $\operatorname{Re}\nu = 0$  y  $N > 0$ . En virtud de la condición (b) y de la expresión asintótica (1.2.25), se tiene que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-i\infty}^{-iN} \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu \right| &= \left| \int_{-\infty}^{-N} i\mu J_{i\mu}(x) g(i\mu) i d\mu \right| \\
&\leq C \int_{-\infty}^{-N} |\mu| (2\pi|\mu|)^{-\frac{1}{2}} |e^{i\mu - i\mu \ln \frac{2i\mu}{x}}| |\mu|^{-\frac{1}{2} - \delta} e^{-\frac{\pi|\mu|}{2}} d\mu \\
&\leq C \int_{-\infty}^{-N} e^{-\frac{\pi\mu}{2}} (-\mu)^{-\delta} e^{-\frac{\pi(-\mu)}{2}} d\mu \\
&\leq C \frac{N^{1-\delta}}{\delta-1} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

si  $N \rightarrow \infty$ . Igual ocurre con la tercera integral

$$\int_{iN}^{i\infty} \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu.$$

Así pues, la integral (1.3.1) existe.

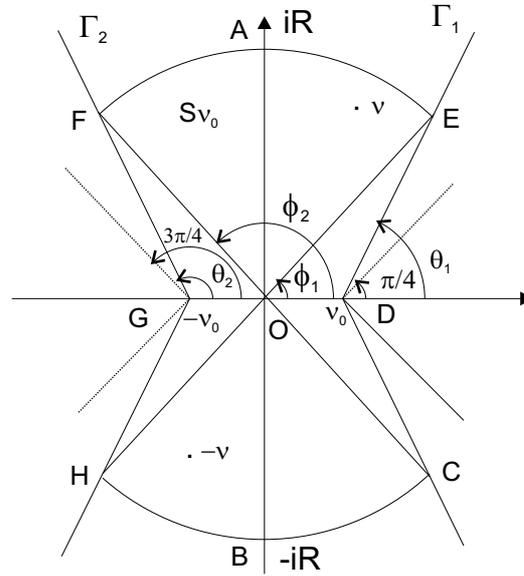


Figura 1.3.1: Región no acotada  $\mathcal{S}_{\nu_0}$

Si reemplazamos  $G(x)$  en (1.3.2) por su valor (1.3.1), queda

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x)G(x)dx \\ &= \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x)\left(-\frac{1}{2x}\right)\int_{-i\infty}^{i\infty}\mu J_\mu(x)g(\mu)d\mu dx. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Ahora bien, de acuerdo con D. S. Jones [38], se puede sustituir la integral interior por

$$\int_{\Gamma_1}\mu J_\mu(x)g(\mu)d\mu,$$

donde  $\Gamma_1$  denota el camino formado por dos semirrectas que parten del punto  $D$  (de abscisa  $\nu_0$ ) y forman con el eje real positivo ángulos  $\pm\theta_1$ , con  $\theta_1$  ligeramente mayor que  $\frac{\pi}{4}$  (ver Figura 1.3.1), o por

$$\int_{\Gamma_2}\mu J_\mu(x)g(\mu)d\mu,$$

siendo  $\Gamma_2$  el camino constituido por dos semirrecta que salen del punto  $G$  (de abscisa  $-\nu_0$ ) y forman con el eje real positivo ángulos  $\pm\theta_2$ , con  $\theta_2$  ligeramente menor que  $\frac{3\pi}{4}$ . Entonces, en lugar de (1.3.3), podemos escribir

$$\int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x)\left(-\frac{1}{2x}\right)\int_{\Gamma_1}\mu J_\mu(x)g(\mu)d\mu dx. \quad (1.3.4)$$

En virtud de los desarrollos asintóticos de (1.2.17), (1.2.18), (1.2.19), (1.2.20) y (1.2.21) de  $J_\mu(x)$  y  $H_\nu^{(2)}(x)$  cuando  $x \rightarrow 0+$  y  $x \rightarrow \infty$ , se tiene

$$\frac{J_\mu(x)H_\nu^{(2)}(x)}{x} = \begin{cases} O(x^{-2}), & \text{cuando } x \rightarrow \infty \\ O\left(x^{Re\mu-|Re\nu|-1}\right), & \text{cuando } x \rightarrow 0+, \text{ si } \nu \neq 0, \\ O\left(x^{Re\mu} \ln \frac{2}{x}\right), & \text{cuando } x \rightarrow 0+, \text{ si } \nu = 0, \end{cases}$$

para  $\nu \in \mathcal{S}_{\nu_0}$  fijo. Si, además de estos resultados, tomamos en cuenta el desarrollo asintótico (1.2.25) de  $J_\mu(x)$  para grandes valores de  $|\mu|$ , así como las hipótesis sobre la función  $g(\mu)$ , concluimos que cuando  $Re\mu > |Re\nu|$ , la integral (1.3.4) converge absolutamente y podemos cambiar el orden de integración, esto es,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x) \left( -\frac{1}{2x} \right) \int_{\Gamma_1} \mu J_\mu(x) g(\mu) d\mu dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \mu g(\mu) \int_0^\infty \frac{H_\nu^{(2)}(x) J_\mu(x)}{x} dx d\mu. \tag{1.3.5}
\end{aligned}$$

Pero, combinando las fórmulas [59, p. 273, 5] y [59, p. 211, 3], con  $\alpha = 0$  y  $c = 1$ , se deriva

$$\int_0^\infty \frac{H_\nu^{(2)}(x) J_\mu(x)}{x} dx = \frac{2i e^{i\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)}}{\pi \mu^2 - \nu^2}.$$

Por consiguiente, (1.3.5) se puede expresar como

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma_1} \mu g(\mu) \frac{i e^{i\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)}}{\pi \mu^2 - \nu^2} d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\mu) e^{i\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)} \left( \frac{1}{\mu - \nu} + \frac{1}{\mu + \nu} \right) d\mu. \tag{1.3.6}
\end{aligned}$$

Para evaluar esta integral consideramos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} g(\mu) e^{i\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)} \left( \frac{1}{\mu - \nu} + \frac{1}{\mu + \nu} \right) d\mu, \tag{1.3.7}$$

donde  $\Gamma_R$  denota la curva cerrada  $AFGHBCDEA$  (ver Figura 1.3.1), eligiendo  $R > 0$  y  $\nu_0$  suficientemente grandes para que la región limitada por  $\Gamma_R$  contenga los puntos  $\mu = \nu$  y  $\mu = -\nu$ . Nótese que las semirrectas  $GF$  y  $GH$  forman ángulos  $\pm\theta_2 = \pm(\pi - \theta_1)$  con el eje real positivo, y que el ángulo  $\theta_2$  es ligeramente menor que  $\frac{3\pi}{4}$ . Podemos elegir, si  $R$  es suficientemente grande, los ángulos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  con vértices en el origen, de modo que  $\frac{\pi}{4} < \phi_1 < \theta_1$  y  $\phi_2 = \pi - \phi_1$ , lo cual implicará que  $\theta_2 < \phi_2 < \frac{3\pi}{4}$ . Por el Teorema integral de Cauchy [3] y tomando en consideración que, por (1.2.7) y (1.1.8), debe ser

$$g(-\nu) = e^{-i\nu\pi} g(\nu), \tag{1.3.8}$$

se llega a que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} g(\mu) e^{i\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)} \left( \frac{1}{\mu-\nu} + \frac{1}{\mu+\nu} \right) d\mu \\ &= g(\nu) + g(-\nu) e^{i\pi\nu} = 2g(\nu). \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Ahora bien, si evaluamos esta integral sobre el arco de circunferencia  $\overline{EA}$ , en el cual  $\mu = Re^{i\phi}$ ,  $\phi_1 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ , resulta

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\overline{EA}} \mu g(\mu) \frac{i e^{i\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)}}{\pi \mu^2 - \nu^2} d\mu \right| \\ & \leq \int_{\phi_1}^{\frac{\pi}{2}} R |g(Re^{i\phi})| \frac{e^{-\frac{\pi}{2}Im\nu} e^{\frac{\pi}{2}R\text{sen}\phi}}{\pi (R^2 - |\nu|^2)} R d\phi \\ & \leq C \int_{\phi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2}{R^2 - |\nu|^2} R^{-\frac{1}{2}-\delta} e^{-\frac{\pi}{2}R\text{sen}\phi} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}Im\nu}}{\pi} e^{R\frac{\pi}{2}\text{sen}\phi} d\phi \\ & \leq C \frac{R^{\frac{3}{2}-\delta}}{R^2 - |\nu|^2} e^{-\frac{\pi}{2}Im\nu} \left( \frac{\pi}{2} - \phi_1 \right) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

si  $R \longrightarrow \infty$ . A lo largo del arco  $\overline{AF}$  se deduce análogamente

$$\left| \int_{\overline{AF}} \mu g(\mu) \frac{i e^{i\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)}}{\pi \mu^2 - \nu^2} d\mu \right| \leq C \frac{R^{\frac{3}{2}-\delta}}{R^2 - |\nu|^2} e^{-\frac{\pi}{2}Im\nu} \left( \phi_2 - \frac{\pi}{2} \right) \longrightarrow 0,$$

si  $R \longrightarrow \infty$ . En definitiva, cuando  $R \longrightarrow \infty$ , esta integral vale cero sobre el arco de circunferencia  $\overline{EF}$ . El mismo razonamiento y conclusión se aplica a la integral sobre el arco  $\overline{HC}$ . Luego, cuando  $R \longrightarrow \infty$ , (1.3.9) se reduce a

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} \right) g(\mu) e^{i\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)} \left( \frac{1}{\mu-\nu} + \frac{1}{\mu+\nu} \right) d\mu = 2g(\nu). \quad (1.3.10)$$

Si sustituimos  $\mu$  por  $-\mu$  en la integral  $\int_{\Gamma_2}$  y usamos (1.3.8), se llega fácilmente a que  $\int_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_1}$ . En consecuencia, (1.3.10) se simplifica y queda

$$- \int_{\Gamma_1} \mu g(\mu) \frac{i e^{i\pi(\nu-\mu)}}{\pi \mu^2 - \nu^2} d\mu = g(\nu), \quad (1.3.11)$$

a la vista de (1.3.6).

De acuerdo con D. S. Jones [38], deformando el camino de integración, la integral a lo largo del eje imaginario  $(-i\infty, i\infty)$  del plano complejo coincide con la integral sobre  $\Gamma_1$ . La argumentación de D. S. Jones se basa, en resumen, en redefinir

$$(\mathcal{J}^*g)(x) = G(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu.$$

Debido a la analiticidad del integrando, por el Teorema de Cauchy [3] se infiere que la integral a lo largo de la curva cerrada  $ABCDEA$  vale cero. Como quiera que, efectuando un razonamiento similar al realizado con la integral (1.3.6), las integrales sobre los arcos de circunferencias  $\overline{EA}$  y  $\overline{BC}$  se anulan cuando  $R \rightarrow \infty$ , la integral a lo largo del eje imaginario coincide con la integral a lo largo de  $\Gamma_1$ , es decir,

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2x} \int_{\Gamma_1} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu. \end{aligned}$$

Finalmente, D. S. Jones estableció que, en esta última integral y bajo las hipótesis adecuadas (ver Teorema 1.1), es lícito hacer  $\rho = 0$  en el integrando. Por esta razón queda

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}^*g)(x) = G(x) &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu \\ &= -\frac{1}{2x} \int_{\Gamma_1} \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu. \end{aligned}$$

Llevando a cabo un estudio similar en el recinto limitado por la curva cerrada  $AFGHBA$  se comprueba que

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}^*g)(x) = G(x) &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu \\ &= -\frac{1}{2x} \int_{\Gamma_2} \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu. \end{aligned}$$

Por tanto, se deduce de (1.3.3), (1.3.4), (1.3.5), (1.3.6) y (1.3.11) que

$$\int_0^{\infty} H_{\nu}^{(2)}(x)G(x)dx = g(\nu),$$

que es el resultado deseado. ■

A fin de derivar una relación de Parseval para la transformación de Kontorovich-Lebedev (1.3.1), nos vemos obligados a imponer algunas hipótesis más restrictivas que las mencionadas anteriormente para facilitar su deducción. Advertimos que se tratan de condiciones suficientes, pero no necesarias, para llegar al resultado deseado y que, muy probablemente, pueden ser debilitadas.

**Teorema 1.3 (Relación de Parseval)** *Sean  $f$  y  $g$  funciones analíticas en  $S_a$  tales que*

$$f(\nu) = O\left(|\nu|^{-1-\delta}e^{-\pi|Im\nu|}\right)$$

y

$$g(\nu) = O\left(|\nu|^{-1-\delta}e^{-\pi|Im\nu|}\right),$$

si  $|Im\nu| \rightarrow \infty$ , con  $\delta > 1$ . Si  $F$  y  $G$  denotan las transformadas de Hankel-Kontorovich-Lebedev, esto es,  $F = \mathcal{J}^*f$  y  $G = \mathcal{J}^*g$ , y suponemos además que  $F(x) = O(1)$ , si  $x \rightarrow 0+$ , entonces

$$\int_0^{\infty} xF(x)G(x)dx = \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \operatorname{sen} \pi\nu e^{-i\pi\nu} f(\nu)g(\nu)d\nu \quad (1.3.12)$$

*Prueba:* Nótese que  $f$  y  $g$  satisfacen de sobra las hipótesis del Teorema 1.2, por lo cual  $F$  y  $G$  están bien definidas. Precisamente, la existencia de la integral en (1.3.1) implica que, al menos, se tiene que  $F(x) = O(x^{-1})$  para valores grandes de  $x > 0$ . Primeramente, en base a (1.3.8) podemos escribir para  $T_1, T_2 > 0$  grandes

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \operatorname{sen} \pi\nu e^{-i\pi\nu} f(\nu)g(\nu)d\nu \\ &= \frac{1}{4i} \left( \int_{-i\infty}^{-iT_1} + \int_{-iT_1}^{iT_2} + \int_{iT_2}^{i\infty} \right) \nu \operatorname{sen} \pi\nu f(\nu)g(-\nu)d\nu. \end{aligned}$$

Por una parte, en virtud de las hipótesis, la integral central existe. Por otra parte, tomando en consideración la expresión asintótica de la función  $H_\nu^{(2)}$  [38, (7)] (véase también el Capítulo 3) y la fórmula (1.2.31), al sustituir  $f(\nu)$  por (1.3.2) resulta para la tercera integral

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{iT_2}^{i\infty} \nu \operatorname{sen} \pi \nu \left( \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x) F(x) dx \right) g(-\nu) d\nu \right| \\
&= \left| \int_{T_2}^\infty \tau \operatorname{sh} \pi \tau \left( \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x) F(x) dx \right) g(-i\tau) d\tau \right| \\
&\leq C \int_{T_2}^\infty \tau \operatorname{sh} \pi \tau \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\tau}}{\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau\right) \right|} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}} |F(x)| dx |g(-i\tau)| d\tau \\
&\leq C \int_{T_2}^\infty \tau^{-\delta} d\tau \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} |F(x)| dx = \frac{C}{(\delta-1)T_2^{\delta-1}} \int_0^\infty \frac{|F(x)|}{\sqrt{x}} dx < \infty.
\end{aligned}$$

Paralelamente se obtiene para la primera integral

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-i\infty}^{-iT_1} \nu \operatorname{sen} \pi \nu \left( \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x) F(x) dx \right) g(-\nu) d\nu \right| \\
&= \left| \int_{T_1}^\infty \tau \operatorname{sh} \pi \tau \left( \int_0^\infty H_{-i\tau}^{(2)}(x) F(x) dx \right) g(i\tau) d\tau \right| \\
&\leq \int_{T_1}^\infty \tau \operatorname{sh} \pi \tau \int_0^\infty e^{-\pi\tau} |H_{i\tau}^{(2)}(x)| |F(x)| |g(i\tau)| dx d\tau \\
&\leq C \int_{T_1}^\infty \tau^{-\delta} e^{-\pi\tau} d\tau \int_0^\infty \frac{|F(x)|}{\sqrt{x}} dx < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, la integral converge absolutamente y aplicando el teorema de Fubini es válido el cambio del orden de integración. Así,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \operatorname{sen} \pi\nu e^{-i\pi\nu} f(\nu)g(\nu)d\nu \\
&= \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \operatorname{sen} \pi\nu e^{-i\pi\nu} g(\nu) \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x)F(x)dx d\nu \\
&= \frac{1}{4i} \int_0^\infty F(x) \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \operatorname{sen} \pi\nu e^{-i\pi\nu} g(\nu) \\
&\quad \cdot \frac{e^{\nu\pi i} J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{i \operatorname{sen} \nu\pi} d\nu dx. \tag{1.3.13}
\end{aligned}$$

Si en la integral que involucra a  $J_{-\nu}(x)$  cambiamos de signo el índice  $\nu$  y tenemos presente (1.3.8), sigue que (1.3.13) se puede escribir

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \int_0^\infty F(x) \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu g(\nu) \left( J_\nu(x) - e^{-i\pi\nu} J_{-\nu}(x) \right) d\nu dx \\
&= -\frac{1}{4} \int_0^\infty F(x) \left( \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu g(\nu) J_\nu(x) d\nu - \int_{i\infty}^{-i\infty} \nu g(-\nu) e^{i\pi\nu} J_\nu(x) d\nu \right) dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\infty F(x) \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(x) g(\nu) d\nu dx = \int_0^\infty x F(x) G(x) dx
\end{aligned}$$

De este modo se ha probado la igualdad (1.3.12). ■

**Nota 1.1** Si en (1.3.12) consideramos el caso particular  $g(\nu) = -\overline{f(-\nu)}$ , obtenemos la relación

$$\int_0^\infty x |F(x)|^2 dx = \frac{i}{4} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \operatorname{sen} \pi\nu |f(\nu)|^2 d\nu. \tag{1.3.14}$$

Se constata inmediatamente que el segundo miembro de (1.3.14) es un número real no negativo.

**Nota 1.2** No abundan los pares de funciones que satisfacen la igualdad de Parseval para la transformación H-K-L, ya que no existe ninguna tabla para esta transformada. Los ejemplos hay que buscarlos dispersos en las tablas de A. Erdélyi [20], I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik [32] y A. P. Prudnikov

et al. [59]. Así, de A. P. Prudnikov et al. [59, p. 291, 2.14.13 ], con  $p = 2$  y  $c = 1$ , se tiene

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-\frac{2}{x}} H_{\nu}^{(2)}(x) dx = 2H_{\nu}^{(2)}(2)K_{\nu}(2),$$

o bien, de acuerdo con la notación (1.1.5),

$$\mathcal{J}\left(\frac{1}{x}e^{-\frac{2}{x}}\right)(\nu) = 2H_{\nu}^{(2)}(2)K_{\nu}(2).$$

Análogamente [59, p. 290, 2.14.1-1 ]

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-px} H_{\nu}^{(2)}(cx) dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{p^2 + c^2} \operatorname{sen} \pi \nu} \left[ \frac{(p + \sqrt{p^2 + c^2})^{\nu}}{c^{\nu}} - \frac{e^{i\pi\nu} c^{\nu}}{(p + \sqrt{p^2 + c^2})^{\nu}} \right], \end{aligned}$$

$\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} c|$ ,  $|\operatorname{Re} \nu| < 1$ . Si ponemos  $p = \operatorname{sh} \beta$  (con  $\operatorname{Re} \beta > 0$  e  $|\operatorname{Im} \beta| < \frac{\pi}{2}$ ) y  $c = 1$ , queda

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-(\operatorname{sh} \beta)x} H_{\nu}^{(2)}(x) dx &= \frac{i}{(\operatorname{ch} \beta)(\operatorname{sen} \pi \nu)} \left( e^{\beta\nu} - e^{i\pi\nu} e^{-\beta\nu} \right) \\ &= \frac{2ie^{i\frac{\pi}{2}\nu}}{(\operatorname{ch} \beta)(\operatorname{sen} \pi \nu)} \operatorname{sh}\left[\left(\beta - i\frac{\pi}{2}\right)\nu\right], \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathcal{J}\left(e^{-(\operatorname{sh} \beta)x}\right)(\nu) = \frac{2ie^{i\frac{\pi}{2}\nu}}{(\operatorname{ch} \beta)(\operatorname{sen} \pi \nu)} \operatorname{sh}\left[\left(\beta - i\frac{\pi}{2}\right)\nu\right].$$

Si tomamos

$$F(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{2}{x}} \quad \text{y} \quad G(x) = e^{-(\operatorname{sh} \beta)x},$$

el primer miembro de (1.3.12) vale

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} xF(x)G(x) dx &= \int_0^{\infty} e^{-(\operatorname{sh} \beta)x} e^{-\frac{2}{x}} dx \\ &= \sqrt{\frac{8}{\operatorname{sh} \beta}} K_1\left(\sqrt{8 \operatorname{sh} \beta}\right). \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Este último resultado se deduce de [32, p. 363] al hacer  $\nu = 1$ ,  $\beta = 2$  y  $\gamma = \text{sh } \beta$ .

Por otra parte, si ponemos

$$f(\nu) = 2H_\nu^{(2)}(2)K_\nu(2) \quad \text{y} \quad g(\nu) = \frac{2ie^{i\frac{\pi}{2}\nu}}{(\text{ch } \beta)(\text{sen } \pi\nu)} \text{sh}[(\beta - i\frac{\pi}{2})\nu]$$

en el segundo miembro de (1.3.12), resulta

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \text{sen } \pi\nu e^{-i\pi\nu} f(\nu)g(\nu) d\nu \\ &= \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \text{sen } \pi\nu e^{-i\pi\nu} 2H_\nu^{(2)}(2)K_\nu(2) \frac{2ie^{i\frac{\pi}{2}\nu}}{(\text{ch } \beta)(\text{sen } \pi\nu)} \text{sh}[(\beta - i\frac{\pi}{2})\nu] d\nu \\ &= -\frac{i}{\text{ch } \beta} \int_{-\infty}^{\infty} \tau e^{\frac{\pi\tau}{2}} H_{i\tau}^{(2)}(2)K_{i\tau}(2) \text{sen}[(\beta - i\frac{\pi}{2})\tau] d\tau. \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Esta última integral existe. En efecto, de (1.2.7) y (1.2.14) se infiere la paridad del integrando de (1.3.16), por lo cual esta última expresión se puede escribir

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\infty} \tau e^{\frac{\pi\tau}{2}} H_{i\tau}^{(2)}(2)K_{i\tau}(2) \text{sen}[(\beta - i\frac{\pi}{2})\tau] d\tau \\ &= 2 \left( \int_0^T + \int_T^{\infty} \right) \tau e^{\frac{\pi\tau}{2}} H_{i\tau}^{(2)}(2)K_{i\tau}(2) \text{sen}[(\beta - i\frac{\pi}{2})\tau] d\tau, \end{aligned}$$

para  $T > 0$  grande. Puesto que el argumento de las funciones  $H_\nu^{(2)}(\cdot)$  y  $K_\nu(\cdot)$  es 2, de la continuidad del integrando para  $0 \leq \tau \leq T$  se concluye la existencia de la integral  $\int_0^T \dots d\tau$ . Por otro lado, para  $T > 0$  suficientemente grande y fijo, recurriendo a las expresiones asintóticas (1.2.26) y (1.2.32), la integral  $\int_T^{\infty} \dots$  se comporta como

$$\begin{aligned} & \int_T^{\infty} \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \tau \ln \tau - \tau\right) d\tau \\ &= \frac{1}{\ln T} \cos\left(\frac{\pi}{4} + T \ln T - T\right) - \int_T^{\infty} \frac{1}{\tau \ln^2 \tau} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \tau \ln \tau - \tau\right) d\tau, \end{aligned}$$

donde hemos integrado por partes. Finalmente,

$$\left| \int_T^\infty \frac{1}{\tau \ln^2 \tau} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \tau \ln \tau - \tau\right) d\tau \right| \leq \int_T^\infty \frac{d\tau}{\tau \ln^2 \tau} = \frac{1}{\ln T}.$$

Luego, la integral  $\int_T^\infty \dots d\tau$  también existe.

Si reemplazamos  $H_{i\tau}^{(2)}(2)$  en (1.3.16) por su relación con la función modificada de Bessel de segunda clase, dada por la expresión [42, p. 109]

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{2i}{\pi} e^{i\frac{\pi\nu}{2}} K_\nu(ix),$$

se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \operatorname{sen} \pi\nu e^{-i\pi\nu} f(\nu) g(\nu) d\nu \\ &= \frac{2}{\pi \operatorname{ch} \beta} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \operatorname{sen}\left[\left(\beta - i\frac{\pi}{2}\right)\tau\right] K_{i\tau}(2i) K_{i\tau}(2) d\tau. \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

Seguidamente, si partimos de la fórmula [32, p. 742(2)]

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho x} K_{\nu+ix}(\alpha) K_{\nu-ix}(\beta) dx \\ &= \pi \left( \frac{\alpha e^\rho + \beta}{\alpha + \beta e^\rho} \right)^\nu K_{2\nu} \left( \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \operatorname{ch} \rho} \right) \end{aligned}$$

y tenemos en cuenta que

$$\cos \rho x = \frac{e^{i\rho x} + e^{-i\rho x}}{2},$$

se infiere que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \cos \rho x K_{\nu+ix}(\alpha) K_{\nu-ix}(\beta) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ \left( \frac{\alpha e^\rho + \beta}{\alpha + \beta e^\rho} \right)^\nu + \left( \frac{\alpha + \beta e^\rho}{\alpha e^\rho + \beta} \right)^\nu \right] K_{2\nu} \left( \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \operatorname{ch} \rho} \right). \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

Subrayemos que las integrales

$$y \int_{-\infty}^{\infty} \cos \rho x K_{\nu+ix}(\alpha) K_{\nu-ix}(\beta) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \operatorname{sen} \rho x K_{\nu+ix}(\alpha) K_{\nu-ix}(\beta) dx$$

existen, siempre que  $|\arg \alpha| + |\arg \beta| + |\operatorname{Im} \rho| < \pi$  [59, p. 408]. Por tanto, es lícito derivar paramétricamente en (1.3.18) respecto de  $\rho$  para obtener

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x \operatorname{sen} \rho x K_{\nu+ix}(\alpha) K_{\nu-ix}(\beta) dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \left[ \left( \frac{\alpha e^{\rho} + \beta}{\alpha + \beta e^{\rho}} \right)^{\nu} + \left( \frac{\alpha + \beta e^{\rho}}{\alpha e^{\rho} + \beta} \right)^{\nu} \right] K'_{2\nu} \left( \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \operatorname{ch} \rho} \right) \\ & \cdot \frac{\alpha\beta \operatorname{sh} \rho}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \operatorname{ch} \rho}} - \frac{\pi\nu}{2} (\alpha^2 - \beta^2) e^{\rho} \\ & \cdot \left[ \left( \frac{\alpha e^{\rho} + \beta}{\alpha + \beta e^{\rho}} \right)^{\nu-1} \frac{1}{(\alpha + \beta e^{\rho})^2} - \left( \frac{\alpha + \beta e^{\rho}}{\alpha e^{\rho} + \beta} \right)^{\nu-1} \frac{1}{(\alpha e^{\rho} + \beta)^2} \right] \\ & \cdot K_{2\nu} \left( \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \operatorname{ch} \rho} \right). \end{aligned}$$

A continuación hacemos  $\nu = 0$  y, recordando que  $K'_0(z) = -K_1(z)$  [42, p. 110], se llega a que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x \operatorname{sen} \rho x K_{ix}(\alpha) K_{ix}(\beta) dx \\ &= \pi \frac{\alpha\beta \operatorname{sh} \rho}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \operatorname{ch} \rho}} K_1 \left( \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \operatorname{ch} \rho} \right). \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Si comparamos las fórmulas (1.3.17) y (1.3.19), y elegimos  $\alpha = 2i$ ,  $\beta = 2$  y  $\rho = \beta - i\frac{\pi}{2}$ , resulta

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi \operatorname{ch} \beta} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \operatorname{sh} \left[ (\beta - i\frac{\pi}{2})\tau \right] K_{i\tau}(2i) K_{i\tau}(2) d\tau \\ &= \frac{8\pi i \operatorname{sh}(\beta - i\frac{\pi}{2})}{\pi \operatorname{ch} \beta \sqrt{8i \operatorname{ch}(\beta - i\frac{\pi}{2})}} K_1 \left( \sqrt{8i \operatorname{ch}(\beta - i\frac{\pi}{2})} \right) \\ &= \sqrt{\frac{8}{\operatorname{sh} \beta}} K_1 \left( \sqrt{8 \operatorname{sh} \beta} \right). \end{aligned}$$

De aquí y (1.3.17) se infiere en definitiva que

$$\frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \operatorname{sen} \pi \nu e^{-i\pi \nu} f(\nu) g(\nu) d\nu = \sqrt{\frac{8}{\operatorname{sh} \beta}} K_1(\sqrt{8 \operatorname{sh} \beta}). \quad (1.3.20)$$

Vemos, pues, que (1.3.15) y (1.3.20) coinciden y, de este modo, hemos establecido que los pares de funciones

$$F(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{2}{x}}, \quad f(\nu) = 2H_\nu^{(2)}(2)K_\nu(2)$$

y

$$G(x) = e^{-(\operatorname{sh} \beta)x}, \quad g(\nu) = \frac{2ie^{i\frac{\pi\nu}{2}}}{(\operatorname{ch} \beta)(\operatorname{sen} \pi \nu)} \operatorname{sh}[(\beta - i\frac{\pi}{2})\nu]$$

satisfacen la relación de Parseval (1.3.12) para la transformación H-K-L.

**Nota 1.3** La relación de Parseval (1.3.12) permite obtener algunas nuevas y complicadas integrales que involucran las funciones  $H_\nu^{(2)}(z)$  y  $K_\nu(z)$  a partir de otras integrales más simples. En realidad, la Nota 1.2 constituye una comprobación numérica de la igualdad de Parseval, si bien puede considerarse igualmente como una justificación de la evaluación de la siguiente integral

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \tau \operatorname{sen}[(\beta - i\frac{\pi}{2})\tau] e^{\frac{\pi\tau}{2}} H_{i\tau}^{(2)}(2) K_{i\tau}(2) d\tau \\ & = i \operatorname{ch} \beta \sqrt{\frac{8}{\operatorname{sh} \beta}} K_1(\sqrt{8 \operatorname{sh} \beta}), \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

de acuerdo con (1.3.16) y (1.3.20).

De forma similar, si consideramos los pares de funciones [59, p. 188, 2.12.10-1 ]

$$F(x) = \frac{1}{x} e^{-(\operatorname{sh} \alpha)x - \frac{1}{2x}}, \quad f(\nu) = 2H_\nu^{(2)}(e^{-\frac{\alpha}{2}})K_\nu(e^{\frac{\alpha}{2}})$$

y

$$G(x) = \frac{1}{x} e^{-(\operatorname{sh} \beta)x - \frac{1}{2x}}, \quad g(\nu) = 2H_\nu^{(2)}(e^{-\frac{\beta}{2}})K_\nu(e^{\frac{\beta}{2}})$$

( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ), la relación de Parseval (1.3.12) legitima la igualdad

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-(\text{sh } \alpha + \text{sh } \beta)x - \frac{1}{x}} dx$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \tau \text{sh } \pi \tau e^{\pi \tau} H_{i\tau}^{(2)}(e^{-\frac{\alpha}{2}}) H_{i\tau}^{(2)}(e^{-\frac{\beta}{2}}) K_{i\tau}(e^{\frac{\alpha}{2}}) K_{i\tau}(e^{\frac{\beta}{2}}) d\tau.$$

Mas la primera integral es fácilmente calculable. Ciertamente, si en la conocida expresión [32, p. 363, 3.471.9]

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\frac{\beta}{x} - \gamma x} dx = 2 \left( \frac{\beta}{\gamma} \right)^{\frac{\nu}{2}} K_{\nu} \left( 2\sqrt{\beta\gamma} \right),$$

$\text{Re}\beta > 0$ ,  $\text{Re}\gamma > 0$ , hacemos  $\nu = 0$ ,  $\beta = 1$  y  $\gamma = \text{sh } \alpha + \text{sh } \beta$ , concluimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau \text{sh } \pi \tau e^{\pi \tau} H_{i\tau}^{(2)}(e^{-\frac{\alpha}{2}}) H_{i\tau}^{(2)}(e^{-\frac{\beta}{2}}) K_{i\tau}(e^{\frac{\alpha}{2}}) K_{i\tau}(e^{\frac{\beta}{2}}) d\tau$$

$$= -2K_0 \left( 2\sqrt{\text{sh } \alpha + \text{sh } \beta} \right). \quad (1.3.22)$$

Las expresiones (1.3.18), (1.3.21) y (1.3.22) creemos que son nuevas o al menos no figuran en las principales tablas ([20], [32] y [59]).

## 1.4. Aplicaciones

Introducimos el operador en diferencias finitas

$$Eg(\nu) = \frac{g(\nu + 1) + g(\nu - 1)}{2\nu}. \quad (1.4.1)$$

Si le aplicamos la transformación (1.3.1), resulta

$$(\mathcal{J}^*(Eg))(x)$$

$$= -\frac{1}{4x} \left[ \int_{-i\infty}^{i\infty} g(\nu + 1) J_{\nu}(x) d\nu + \int_{-i\infty}^{i\infty} g(\nu - 1) J_{\nu}(x) d\nu \right]. \quad (1.4.2)$$

Ahora, si hacemos el cambio de variable  $\mu = \nu + 1$  en la primera integral de (1.4.2), obtenemos

$$\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} g(\mu) J_{\mu-1}(x) d\mu. \quad (1.4.3)$$

A fin de evaluar esta integral, consideraremos el contorno rectangular  $\mathcal{R}$  de vértices  $iN$ ,  $1 + iN$ ,  $1 - iN$ ,  $-iN$ , donde  $N \in \mathbb{R}$ ,  $N > 0$  (ver Figura 1.4.1). Nótese que esta región rectangular –para  $\nu_0 > 1$ – cae en  $\mathcal{S}_{\nu_0}$ , como se muestra en la Figura 1.4.1, y supóngase que  $g$  verifica las hipótesis del Teorema 1.2. Por el Teorema de Cauchy se deduce que

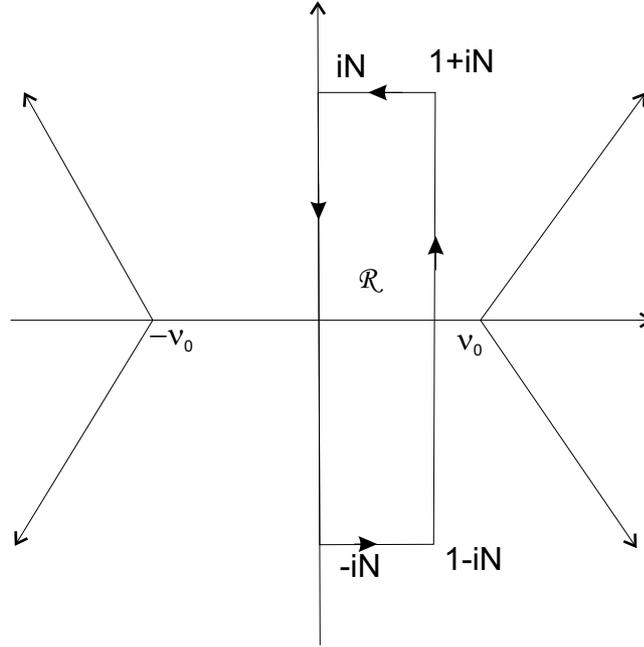


Figura 1.4.1: Contorno rectangular  $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{R}} g(\mu) J_{\mu-1}(x) d\mu \\ &= \left( \int_{-iN}^{1-iN} + \int_{1-iN}^{1+iN} + \int_{1+iN}^{iN} + \int_{iN}^{-iN} \right) g(\mu) J_{\mu-1}(x) d\mu = 0. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

De la expresión asintótica (1.2.25),

$$J_{\nu}(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} e^{\nu + \nu \ln \frac{x}{2} - \nu \ln \nu},$$

válido para grandes valores de  $|\nu|$ ,  $\nu \in \mathbb{C}$ ,  $|\arg x| < \pi$ , sigue si ponemos  $\nu = \lambda + i\tau$  ( $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned}
J_\nu(x) &= J_{\lambda+i\tau}(x) \\
&= O\left((\lambda^2 + \tau^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left\{\lambda \ln \frac{ex}{2\sqrt{\lambda^2 + \tau^2}} + \tau \arctan \frac{\tau}{\lambda}\right\}\right), \quad (1.4.5)
\end{aligned}$$

cuando  $|\nu| \rightarrow \infty$ ,  $\nu = \lambda + i\tau \in \mathbb{C}$ , para  $x > 0$  fijo.

Analizando la tercera integral de (1.4.4), con  $\mu = t + iN$ , en virtud de (1.4.5) se deduce que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{1+iN}^{iN} g(\mu) J_{\mu-1}(x) d\mu \right| &\leq \int_0^1 |g(t+iN)| |J_{t-1+iN}(x)| dt \\
&\leq C \int_0^1 N^{-\frac{1}{2}} |t+iN|^{-\frac{1}{2}-\delta} e^{-\frac{\pi}{2}N} e^{\frac{\pi}{2}N} dt \\
&\leq \frac{C}{N^{1+\delta}} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

si  $N \rightarrow \infty$ . Obsérvese que en este caso  $\lambda = t - 1 < 0$  ( $0 < t < 1$ ) y  $\tau = N > 0$ .

De manera similar se prueba para la primera integral de (1.4.4), recurriendo de nuevo a (1.4.5), que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-iN}^{1-iN} g(\mu) J_{\mu-1}(x) d\mu \right| &\leq \int_0^1 |g(t-iN)| |J_{t-1+iN}(x)| dt \\
&\leq C \int_0^1 N^{-\frac{1}{2}} |t+iN|^{-\frac{1}{2}-\delta} e^{-\frac{\pi}{2}N} e^{-\frac{\pi}{2}N} dt \\
&\leq \frac{C e^{-\pi N}}{N^{1+\delta}} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

si  $N \rightarrow \infty$ , ya que ahora  $\lambda = t - 1 < 0$  ( $0 < t < 1$ ) y  $\tau = -N < 0$ . Finalmente, tomando límite cuando  $N \rightarrow \infty$  en (1.4.4) se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{-i\infty}^{i\infty} g(\nu+1) J_\nu(x) d\nu &= \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} g(\nu) J_{\nu-1}(x) d\nu \\
&= \int_{-i\infty}^{i\infty} g(\nu) J_{\nu-1}(x) d\nu. \quad (1.4.6)
\end{aligned}$$

Seguidamente estudiamos la segunda integral de (1.4.2). Es inmediato que

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} g(\nu - 1)J_\nu(x)d\nu = \int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} g(\nu)J_{\nu+1}(x)d\nu.$$

Si ahora consideramos el rectángulo  $\mathcal{R}'$  de vértices los puntos  $iN$ ,  $-iN$ ,  $-1 - iN$ ,  $-1 + iN$ , se deduce que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{R}'} g(\nu)J_{\nu+1}(x)d\mu \\ &= \left( \int_{-iN}^{iN} + \int_{iN}^{-1+iN} + \int_{-1+iN}^{-1-iN} + \int_{-1-iN}^{-iN} \right) g(\nu)J_{\nu+1}(x)d\nu = 0, \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

sin más que aplicar el Teorema de Cauchy [3]. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \left| \int_{iN}^{-1+iN} g(\nu)J_{\nu+1}(x)d\nu \right| &\leq \int_0^1 |g(-t + iN)||J_{1-t+iN}(x)|dt \\ &\leq C \int_0^1 N^{-\frac{1}{2}} |-t + iN|^{-\frac{1}{2}-\delta} e^{-\frac{\pi}{2}N} e^{\frac{\pi}{2}N} dt \\ &\leq \frac{C}{N^{1+\delta}} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1-iN}^{-iN} g(\nu)J_{\nu+1}(x)d\nu \right| &\leq \int_0^1 |g(-t - iN)||J_{1-t-iN}(x)|dt \\ &\leq C \int_0^1 N^{-\frac{1}{2}} |t + iN|^{-\frac{1}{2}-\delta} e^{-\frac{\pi}{2}N} e^{-\frac{\pi}{2}N} dt \\ &\leq \frac{C e^{-\pi N}}{N^{1+\delta}} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

si  $N \longrightarrow \infty$ .

Teniendo presente estos resultados, al hacer tender  $N$  hacia infinito en (1.4.7), se llega de igual forma a que

$$\begin{aligned} \int_{-i\infty}^{i\infty} g(\nu - 1)J_\nu(x)d\nu &= \int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} g(\nu)J_{\nu+1}(x)d\nu \\ &= \int_{-i\infty}^{i\infty} g(\nu)J_{\nu+1}(x)d\nu. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Si sustituimos (1.4.6) y (1.4.8) en (1.4.2), en virtud de (1.2.4), se concluye que

$$(\mathcal{J}^*(Eg))(x) = \frac{1}{x}(\mathcal{J}^*g)(x) \quad (1.4.9)$$

y, en general,

$$(\mathcal{J}^*(E^k g))(x) = \frac{1}{x^k}(\mathcal{J}^*g)(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

A continuación planteamos resolver la ecuación en diferencias finitas

$$P(E)g(\nu) = h(\nu), \quad (1.4.10)$$

donde  $P(x)$  es un polinomio con coeficientes constantes que no tiene raíces en el eje real positivo,  $g$  es una función por determinar,  $h$  es una función conocida y  $E$  denota el operador en diferencias finitas (1.4.1). Asumimos que  $g$  y  $h$  satisfacen las hipótesis del Teorema 1.2. Si ponemos  $G(x) = (\mathcal{J}^*g)(x)$  y  $H(x) = (\mathcal{J}^*h)(x)$ , y aplicamos la transformada H-K-L (1.3.1) a (1.4.10), a consecuencia de la regla operacional (1.4.9), deducimos que

$$P\left(\frac{1}{x}\right)G(x) = H(x),$$

cuya solución es

$$G(x) = \left[P\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-1} H(x).$$

Finalmente, aplicando la fórmula de inversión (1.3.2) se obtiene la solución formal

$$g(\nu) = \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x) \left[P\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-1} H(x) dx,$$

que fácilmente se prueba que satisface la ecuación (1.4.10).

Para una ilustración del caso general, consideraremos el problema de determinar una función  $g$  que satisface la ecuación en diferencias finitas

$$Eg(\nu) = h(\nu), \quad (1.4.11)$$

donde

$$h(\nu) = \frac{\sqrt{2\pi}}{e} \sec \frac{\pi\nu}{2} \left[ e^{i\frac{\pi\nu}{2}} I_{\frac{\nu}{2}}(1) + \frac{i}{\pi} K_{\frac{\nu}{2}}(1) \right]$$

e  $I_\nu(z)$  es la función modificada de Bessel de primera clase. Nótese, en vista de (1.2.9), que  $h(-\nu) = e^{-i\pi\nu} h(\nu)$ . Entonces, aplicando la transformada de Hankel-Kontorovich-Lebedev y usando la regla operacional (1.4.9), la ecuación (1.4.11) se convierte en una sencilla ecuación algebraica

$$\frac{1}{x} G(x) = e^{-\frac{x^2}{8}},$$

debido a la fórmula [59, p. 290, 2.14.1(9)]. Ahora bien, aplicando la fórmula de inversión (1.3.2) y teniendo en cuenta el resultado [59, p. 291, 2.14.1(10)], se deduce que

$$g(\nu) = \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{8}} H_\nu^{(2)}(x) dx = \frac{\sqrt{2}\nu e^{i\frac{\pi\nu}{2}}}{e \operatorname{sen} \frac{\pi\nu}{2}} W_{-\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}}(-2), \quad (1.4.12)$$

donde  $W_{\kappa, \mu}(z)$  denota la función Witteraker [32, p. 1014]. Veamos que (1.4.12) es efectivamente una solución de (1.4.11). Primeramente, de las expresiones (9.234-1) y (9.234-2) en [32, p. 1017] se infiere la relación de recurrencia

$$\sqrt{z} \left( W_{\lambda-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2}}(z) - W_{\lambda-\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2}}(z) \right) + 2\mu W_{\lambda-1, \mu}(z) = 0 \quad (1.4.13)$$

Para  $z = -2$  y  $\lambda = \frac{1}{2}$ , si tomamos  $\mu = \frac{\nu+1}{2}$  y  $\mu = \frac{\nu-1}{2}$ , la expresión (1.4.13) adopta las formas

$$(\nu + 1) W_{-\frac{1}{2}, \frac{\nu+1}{2}}(-2) = i\sqrt{2} \left( W_{0, \frac{\nu+2}{2}}(-2) - W_{0, \frac{\nu}{2}}(-2) \right)$$

y

$$(\nu - 1) W_{-\frac{1}{2}, \frac{\nu-1}{2}}(-2) = i\sqrt{2} \left( W_{0, \frac{\nu}{2}}(-2) - W_{0, \frac{\nu-2}{2}}(-2) \right),$$

respectivamente.

Usando estos resultados y teniendo en cuenta que [32, p. 1017, 9.235(2)]

$$W_{0, \mu}(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}} K_\mu\left(\frac{z}{2}\right) \quad ,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
 Eg(\nu) &= -\frac{e^{i\pi\nu}}{e\nu \cos \frac{\pi\nu}{2}} \left[ W_{0, \frac{\nu+2}{2}}(-2) - W_{0, \frac{\nu-2}{2}}(-2) \right] \\
 &= -\frac{i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi\nu}{2}}}{e\sqrt{\pi\nu} \cos \frac{\pi\nu}{2}} \left[ K_{\frac{\nu}{2}+1}(-1) - K_{\frac{\nu}{2}-1}(-1) \right]. \quad (1.4.14)
 \end{aligned}$$

Finalmente, el resultado deseado es consecuencia inmediata de (1.4.14), la fórmula de recurrencia (1.2.13) de la función modificada de Bessel de segunda clase, la propiedad (1.2.15) y la relación entre las funciones  $I_\nu$  y  $K_\nu$  recogida en la definición (1.2.9).

# CAPÍTULO 2

## LA TRANSFORMACIÓN DE HANKEL-KONTOROVICH-LEBEDEV DE DISTRIBUCIONES DE SOPORTE COMPACTO

### 2.1. Introducción

Afirmaba A. H. Zemanian [85] que una de las transformaciones integrales que más se resistió a su extensión a espacio de funciones generalizadas fue la de Kontorovich-Lebedev que, recordemos, viene definida por el par (1.1.1)-(1.1.2). El principal obstáculo se presentaba al intentar interpretar en un sentido distribucional la complicada fórmula de inversión clásica de esta transformación ([41], [43]).

El objetivo de este capítulo es investigar la transformación de Hankel-Kontorovich-Lebedev, dada en el Capítulo 1 por el par (1.1.5)-(1.1.6),

$$(\mathcal{J}f)(\nu) = F(\nu) = \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x)f(x)dx \quad (2.1.1)$$

$$(\mathcal{J}^{-1}F)(x) = f(x) = -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(x)F(\nu)d\nu, \quad (2.1.2)$$

en el espacio de distribuciones  $\mathcal{E}'(I)$  de soporte compacto. Así, en la sección segunda se da la definición de la transformada H-K-L de una distribución de soporte compacto y se estudian algunas de sus propiedades, entre ellas,

la analiticidad y la acotación de la función imagen. El resultado capital de esta sección es la demostración de la fórmula de inversión. Destaquemos que en la primera parte de la prueba, a la hora de justificar el intercambio de una integral con cierto funcional, en lugar de recurrir a la técnica habitual en estos casos, que resulta muy laboriosa –la conocida técnica de las sumas de Riemann ([56], [85], [86])– se acude a un método novedoso debido a J. J. Betancor (véase, por ejemplo, [11]), el cual está basado en una adecuada representación de las distribuciones consideradas. En la segunda parte se verifica la fórmula de inversión, dando sentido distribucional a los resultados clásicos de D. S. Jones [38]. El tercer párrafo se inicia modificando ligeramente la definición de la transformación H-K-L de una distribución, a fin de generar un cálculo operacional. Ello nos permitirá ilustrar la teoría desarrollada resolviendo un problema de valores en la frontera, que involucra una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, en una cuña infinita.

Recordemos de nuevo que a lo largo de esta Memoria  $I$  denota el intervalo real  $(0, \infty)$  y  $K$  cualquier subconjunto compacto de  $I$ . De acuerdo con la notación de A. H. Zemanian [86], por  $\mathcal{D}_K(I)$  representaremos el espacio de todas las funciones complejas  $\varphi$  infinitamente derivables sobre  $I$  con soporte contenido en  $K$ . Dotaremos a  $\mathcal{D}_K(I)$  de la topología generada por la familia de seminormas

$$\gamma_k(\varphi) = \sup_{x \in I} |D^k \varphi(x)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.3)$$

Así,  $\mathcal{D}_K(I)$  es un espacio de Fréchet.  $\mathcal{D}(I)$  es el espacio unión estricto

$$\mathcal{D}(I) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{D}_{K_m}(I),$$

donde  $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente de subconjuntos compactos de  $I$  tales que su unión es  $I$ . Asignaremos a  $\mathcal{D}(I)$  la topología del límite inductivo. Su dual  $\mathcal{D}'(I)$  es el espacio de las distribuciones de Schwartz ([2], [24], [55], [66], [86]).

El espacio  $\mathcal{E}(I)$  está constituido por todas las funciones complejas  $\varphi$  infinitamente derivables y definidas en  $I$ , equipado con la topología de la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de  $I$ , esto es, por la familia de seminormas

$$\gamma_{K,k}(\varphi) = \sup_{x \in K} |D^k \varphi(x)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1.4)$$

donde  $\varphi \in \mathcal{E}(I)$ . Su dual  $\mathcal{E}'(I)$  es el espacio de las distribuciones de soporte compacto. Subrayemos que  $\mathcal{D}(I)$  es un subespacio denso de  $\mathcal{E}(I)$  y que, por tanto,  $\mathcal{E}'(I)$  es un subespacio de  $\mathcal{D}'(I)$ .

Finalmente,  $\Delta$  y  $\Delta^*$  simbolizarán los operadores diferenciales

$$\Delta = \Delta_z = z^2 D^2 + zD + z^2 \quad (2.1.5)$$

y

$$\Delta^* = \Delta_z^* = z^2 D^2 + 3zD + z^2 + 1, \quad (2.1.6)$$

donde  $D = \frac{d}{dz}$ . Estos operadores satisfacen la relación

$$\Delta_z^* z^{-1} = z^{-1} \Delta_z. \quad (2.1.7)$$

Además, dado que  $J_\nu(z)$  y  $H_\nu^{(2)}(z)$  son soluciones de la ecuación de Bessel, cumplen que

$$\Delta_z J_\nu(z) = \nu^2 J_\nu(z) \quad (2.1.8)$$

y

$$\Delta_z H_\nu^{(2)}(z) = \nu^2 H_\nu^{(2)}(z). \quad (2.1.9)$$

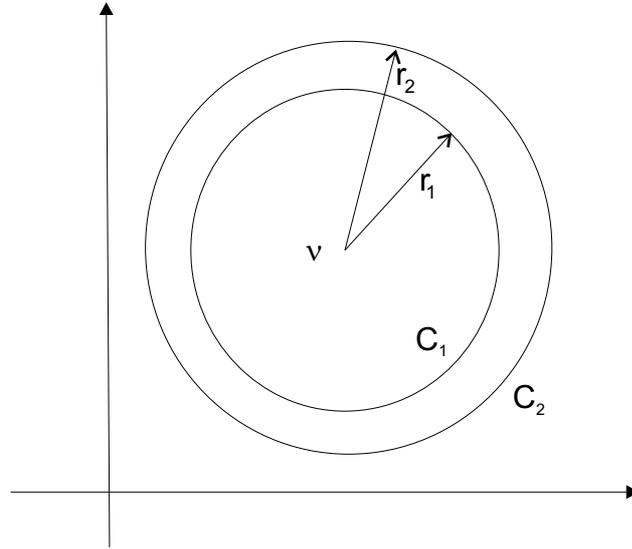
## 2.2. La transformación H-K-L en el espacio de distribuciones $\mathcal{E}'(I)$

### 2.2.1. Definiciones y propiedades

Mediante el método del núcleo, definimos la transformada de Hankel–Kontorovich–Lebedev de una función generalizada  $f \in \mathcal{E}'(I)$ , como la aplicación de  $f$  directamente a  $H_\nu^{(2)}(\cdot)$ , es decir,

$$(\mathcal{J}'f)(\nu) = F(\nu) = \langle f(x), H_\nu^{(2)}(x) \rangle. \quad (2.2.1)$$

El segundo miembro de (2.2.1) tiene sentido. En efecto, para  $\nu \in \mathbb{C}$  fijo, la función  $H_\nu^{(2)}(\cdot) \in \mathbb{C}^\infty(I)$  y sus derivadas de cualquier orden están acotadas en todo subconjunto compacto de  $I$ .

Figura 2.2.1: Círculos concéntricos  $C_1$  y  $C_2$ 

A continuación estudiaremos algunas propiedades de esta transformada:

- (i)  $F$  es una función entera. En efecto, fijado  $\nu \in \mathbb{C}$ , consideremos dos círculos concéntricos  $C_1$  y  $C_2$  de centros  $\nu$  y radios  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente, y supongamos que  $0 < r_1 < r_2$  (ver Figura 2.2.1).

Sea  $\Delta \nu$  un incremento complejo no nulo que satisface  $0 < |\Delta \nu| < r_1$  y escribamos

$$\frac{F(\nu + \Delta \nu) - F(\nu)}{\Delta \nu} - \left\langle f(x), \frac{\partial}{\partial \nu} H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle = \langle f(x), A_{\Delta \nu}(x) \rangle \quad (2.2.2)$$

donde

$$A_{\Delta \nu}(x) = \frac{H_{\nu + \Delta \nu}^{(2)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)}{\Delta \nu} - \frac{\partial}{\partial \nu} H_\nu^{(2)}(x).$$

Para todo entero no negativo  $k$ , resulta que  $D_x^k A_{\Delta \nu}(x)$  es holomorfa en el interior del círculo  $C_2$ , por lo que vale la fórmula integral de Cauchy [3]

$$\begin{aligned}
D_x^k A_{\Delta\nu}(x) &= \frac{1}{\Delta\nu} \left\{ D_x^k H_{\nu+\Delta\nu}^{(2)}(x) - D_x^k H_\nu^{(2)}(x) \right\} - \frac{\partial}{\partial\nu} D_x^k H_\nu^{(2)}(x) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} D_x^k H_z^{(2)}(x) \left[ \frac{1}{\Delta\nu} \left( \frac{1}{z-\nu-\Delta\nu} - \frac{1}{z-\nu} \right) - \frac{1}{(z-\nu)^2} \right] dz \\
&= \frac{\Delta\nu}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{D_x^k H_z^{(2)}(x)}{(z-\nu-\Delta\nu)(z-\nu)^2} dz \tag{2.2.3}
\end{aligned}$$

Puesto que  $|z-\nu| = r_1$  y  $|z-\nu-\Delta\nu| \geq r_2 - r_1$ , se infiere de (2.2.3) que

$$\begin{aligned}
|D_x^k A_{\Delta\nu}(x)| &\leq \frac{|\Delta\nu|}{2\pi i} \sup_{z \in C_2} |D_x^k H_z^{(2)}(x)| \int_{C_2} \frac{1}{(r_2 - r_1)r_2^2} |dz| \\
&\leq C \frac{|\Delta\nu|}{(r_2 - r_1)r_2} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

si  $|\Delta\nu| \longrightarrow 0$ .

Luego, hemos probado que  $\gamma_{K,k}(A_{\Delta\nu}) \longrightarrow 0$ , si  $\Delta\nu \longrightarrow 0$ ; dicho de otra forma,  $A_{\Delta\nu}$  converge a cero en la topología del espacio  $\mathcal{E}(I)$  cuando  $\Delta\nu \longrightarrow 0$ . Sigue de (2.2.2) que  $\langle f(x), A_{\Delta\nu}(x) \rangle \longrightarrow 0$ , si  $\Delta\nu \longrightarrow 0$ , y, consecuentemente, que

$$F'(\nu) = \left\langle f(x), \frac{\partial}{\partial\nu} H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle.$$

En general

$$F^{(k)}(\nu) = \left\langle f(x), \frac{\partial^k}{\partial\nu^k} H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- (ii) Ahora equiparemos el espacio  $\mathcal{E}(I)$  con la topología generada por la familia separadora de seminormas  $\{\lambda_{K,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , definida por

$$\lambda_{K,k}(\varphi) = \sup_{x \in K} |\Delta^k \varphi(x)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{E}(I)$ , donde  $\Delta = \Delta_x = x^2 D^2 + xD + x^2$  y  $K$  es un subconjunto compacto de  $I$ . Esta topología es equivalente a la definida por la colección de seminormas (2.1.4). En efecto, supongamos que la sucesión  $(\varphi_n)$  converge a cero en el espacio  $\mathcal{E}(I)$  con la topología inducida por la familia de seminormas  $\{\lambda_{K,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  y sea  $x_0 \in I - K$  fijo. Si  $(\varphi_n) \rightarrow 0$  en  $\mathcal{E}(I)$  con la familia de seminormas  $\{\lambda_{K,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , entonces  $(\varphi_n)$  y  $(\Delta\varphi_n)$  convergen uniformemente a cero en  $K$ , lo que implica que  $x D^2 \varphi_n + D\varphi_n \rightarrow 0$ , uniformemente en  $K$ . Entonces

$$\int_{x_0}^x [t D^2 \varphi_n(t) + D\varphi_n(t)] dt \rightarrow 0 \quad (2.2.4)$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $x \in K$ . Integrando el primer miembro de (2.2.4) se tiene que  $x D\varphi_n(x) - x_0 D\varphi_n(x_0) \rightarrow 0$ , uniformemente en  $x \in K$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces

$$D\varphi_n(x) - \frac{x_0}{x} D\varphi_n(x_0) \rightarrow 0 \quad (2.2.5)$$

uniformemente en  $x \in K$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Integrando nuevamente se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x [D\varphi_n(t) - \frac{x_0}{t} D\varphi_n(x_0)] dt \\ &= \varphi_n(x) - \varphi_n(x_0) - x_0 D\varphi_n(x_0) \ln \frac{x}{x_0} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

converge a cero, uniformemente en  $x \in K$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por hipótesis  $\varphi_n(x) \rightarrow 0$  y  $\varphi_n(x_0) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Puesto que  $\ln^{-1} \frac{x}{x_0}$  es acotado en el compacto  $K$ , se infiere de (2.2.6) que  $D\varphi_n(x_0) \rightarrow 0$ , si  $n \rightarrow \infty$  y, por consiguiente, de (2.2.5), que  $D\varphi_n(x) \rightarrow 0$ , uniformemente en  $x \in K$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Del hecho de que  $\Delta_x \varphi_n = x^2 D^2 \varphi_n + x D\varphi_n + x^2 \varphi_n$  converge uniformemente en  $K$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , sale que  $D^2 \varphi_n(x) \rightarrow 0$  uniformemente en  $K$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , sin más que recordar que ya  $(\varphi_n)$  y  $(D\varphi_n)$  lo hacen igualmente. Como  $(\Delta_x^2 \varphi_n) \rightarrow 0$  uniformemente en  $K$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , repitiendo el proceso y teniendo en cuenta que  $(\varphi_n)$ ,  $(D\varphi_n)$  y  $(D_x^2 \varphi_n)$  ya fue probado que convergen uniformemente en  $K$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , se concluye que  $(D_x^3 \varphi_n)$  y  $(D_x^4 \varphi_n)$  convergen igualmente en el mismo sentido. Por inducción, finalmente, podemos

afirmar que  $(D^k \varphi_n)$  converge uniformemente a cero en  $K$ , para todo entero no negativo  $k$ . Es decir,  $(\varphi_n)$  converge a cero en el espacio  $\mathcal{E}(I)$  dotado con la topología generada por la colección de seminormas (2.1.4) ([85], [86, p. 177]).

Por un argumento inductivo, conseguimos fácilmente ver que

$$\Delta^k \varphi(x) = \sum_{j=0}^{2k} P_j(x) D^{2k-j} \varphi(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2.7)$$

donde  $P_j(x)$  denotan polinomios de grado menor o igual a  $2k$  con coeficientes enteros y positivos. De esto se infiere que

$$\lambda_{K,k}(\varphi_n) \leq \sum_{j=0}^{2k} C_j \gamma_{K,2k-j}(\varphi_n) \longrightarrow 0,$$

si  $n \longrightarrow \infty$ , donde  $C_j = \sup_{x \in K} |P_j(x)|$ . Esto implica que  $(\varphi_n)$  tiende a cero en  $\mathcal{E}(I)$  equipada con la segunda topología. Consecuentemente, con la topología generada por la familia de seminormas  $\{\lambda_{K,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathcal{E}(I)$  es también un espacio de Fréchet [86, p. 37].

Recuérdese finalmente que  $\mathcal{D}(I) \subset \mathcal{E}(I)$  ([66],[86]), y en consecuencia  $\mathcal{E}'(I)$  también es un subespacio de  $\mathcal{D}'(I)$ .

- (iii) En virtud de [86, Theorem 1.8-1] y de (2.1.9), existe una constante positiva  $C$  y un número entero no negativo  $r$  tal que

$$|F(\nu)| \leq C \max_{0 \leq k \leq r} \sup_{x \in K} |\Delta_x^k H_\nu^{(2)}(x)| = C \max_{0 \leq k \leq r} \sup_{x \in K} |\nu^{2k} H_\nu^{(2)}(x)|.$$

A la vista de los desarrollos asintóticos (1.2.19) y (1.2.29) y dado que  $x$  pertenece al compacto  $K \subset [x_0, y_0]$ , con  $0 < x_0 < y_0$  y  $\ln \frac{2}{x}$  está acotado en  $K$ , concluimos que

$$F(\nu) = \begin{cases} O(1), & \text{si } \nu \longrightarrow 0 \\ O\left(\nu^{2r-\frac{1}{2}} e^{\nu(\ln \frac{2\nu}{x_0}-1)}\right), & \text{si } \nu \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

### 2.2.2. Fórmula de inversión.

En este párrafo estableceremos el resultado fundamental

**Teorema 2.1 (Fórmula de inversión)** *Sea  $f \in \mathcal{E}'(I)$  y definamos su transformada de Hankel-Kontorovich-Lebedev por*

$$(\mathcal{J}'f)(\nu) = F(\nu) = \langle f(x), H_\nu^{(2)}(x) \rangle. \quad (2.2.8)$$

Entonces

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{2x} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu = f(x),$$

en el sentido de la convergencia en el espacio  $\mathcal{D}'(I)$ .

*Prueba:* Sabemos que  $f \in \mathcal{E}'(I)$ . Entonces, por [86, Teorema 1.8.1] existe  $C > 0$ ,  $r \in \mathbb{N}$  y un compacto  $K \subset I$  tal que

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \max_{0 \leq k \leq r} \sup_{x \in K} |\Delta^k \varphi(x)|, \quad (2.2.9)$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{E}(I)$ .

Consideremos las aplicaciones

$$\begin{aligned} L : \mathcal{E}(I) &\longrightarrow (C(K))^{r+1} \\ \varphi &\longrightarrow \left( \Delta^k \varphi \right)_{k=0}^{r+1} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{L} : L(\mathcal{E}(I)) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \left( \Delta^k \varphi \right)_{k=0}^{r+1} &\longrightarrow \mathbb{L} \left( \left( \Delta^k \varphi \right)_{k=0}^{r+1} \right) = \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

donde  $C(K)$  es el conjunto de todas las funciones complejas continuas sobre  $K$ . La aplicación  $L : \mathcal{E}(I) \longrightarrow L(\mathcal{E}(I)) \subset (C(K))^{r+1}$  es biyectiva, por lo que  $\mathbb{L}$  está bien definida. Además, en virtud de (2.2.9),  $\mathbb{L}$  es continua cuando se dota a  $L(\mathcal{E}(I))$  de la topología inducida por la de  $(C(K))^{r+1}$ . El Teorema de Hahn-Banach [64] nos permite extender  $\mathbb{L}$  a  $(C(K))^{r+1}$  y entonces existen medidas regulares de Borel  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k$  soportadas sobre  $K$  de modo que

$$\mathbb{L}\left(\left(\Delta^k \varphi\right)_{k=0}^{r+1}\right) = \langle f, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{r+1} \int_K \Delta^k \varphi(x) d\mu_k(x), \quad (2.2.12)$$

para  $\varphi \in \mathcal{E}(I)$ .

Como quiera que

$$-\frac{1}{2x} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu \quad (2.2.13)$$

define una función continua en  $x \in I$ , la expresión (2.2.13) origina una distribución regular en  $\mathcal{D}'(I)$ . Ello significa que, para todo  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} & \left\langle -\frac{1}{2x} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu, \varphi(x) \right\rangle \\ &= \int_0^\infty -\frac{1}{2x} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Recordemos que, en nuestro caso,

$$F(\nu) = \langle f(y), H_\nu^{(2)}(y) \rangle, \quad f \in \mathcal{E}'(I).$$

Entonces, a tenor de (2.2.12), es factible expresar (2.2.14) en la forma

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{r+1} \int_0^\infty -\frac{1}{2x} \varphi(x) \int_K \int_{-iN}^{iN} \Delta_y^k \left\{ H_\nu^{(2)}(y) \right\} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) d\nu d\mu_k(y) dx \\ &= \sum_{k=0}^{r+1} \int_K \Delta_y^k \left\{ \int_0^\infty -\frac{1}{2x} \varphi(x) \int_{-iN}^{iN} H_\nu^{(2)}(y) e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) d\nu dx \right\} d\mu_k(y). \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Enfaticemos que, al ser  $\text{sop}\varphi \subset [a, b]$ ,  $0 < a < b$ , las tres integrales que comparecen en (2.2.15) se realizan sobre los conjuntos acotado  $K$ ,  $[a, b]$  y  $[-iN, iN]$  y que es lícito cambiar como se desee el orden de integración.

De (2.2.15) se colige, a la vista de (2.2.12) y (2.2.14), que

$$\begin{aligned}
& \left\langle -\frac{1}{2x} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu, \varphi(x) \right\rangle \\
&= \left\langle f(y), \int_0^\infty -\frac{1}{2x} \varphi(x) \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu dx \right\rangle \\
&= \left\langle f(x), -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu dy \right\rangle \\
&= \left\langle f(x), \Omega_{N,\rho}(x) \right\rangle, \tag{2.2.16}
\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
\Omega_{N,\rho}(x) &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{\varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} H_\nu^{(2)}(x) e^{\rho\nu^2} \nu \int_a^b J_\nu(y) \frac{\varphi(y)}{y} dy d\nu. \tag{2.2.17}
\end{aligned}$$

Nos queda por demostrar que  $\Omega_{N,\rho}(\cdot) \rightarrow \varphi$  en la topología del espacio  $\mathcal{D}(I)$ , cuando  $N \rightarrow \infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ .

Si integramos por partes dos veces, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \Delta_y \{J_\nu(y)\} \frac{\varphi(y)}{y} dy \\
&= \int_a^b \left[ y \frac{d^2}{dy^2} J_\nu(y) + \frac{d}{dy} J_\nu(y) \right] \varphi(y) dy + \int_a^b y^2 J_\nu(y) \frac{\varphi(y)}{y} dy \\
&= \int_a^b J_\nu(y) \left[ y \frac{d^2}{dy^2} \varphi(y) + \frac{d}{dy} \varphi(y) \right] dy + \int_a^b y^2 J_\nu(y) \frac{\varphi(y)}{y} dy \\
&= \int_a^b J_\nu(y) \frac{\Delta_y \varphi(y)}{y} dy, \tag{2.2.18}
\end{aligned}$$

ya que  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ , lo que implica que  $\varphi$  y sus derivadas se anulan tanto en  $a$  como en  $b$  (asumimos que  $\text{sop}\varphi \subset [a, b]$ ,  $0 < a < b$ ).

Entonces es lícito efectuar las manipulaciones que siguen, en virtud de (2.1.8) y (2.1.9),

$$\begin{aligned}
\Delta_x^k \Omega_{N,\rho}(x) &= -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} \Delta_x^k \{H_\nu^{(2)}(x)\} e^{\rho\nu^2} \nu \int_a^b J_\nu(y) \frac{\varphi(y)}{y} dy d\nu \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} \nu^{2k} H_\nu^{(2)}(x) e^{\rho\nu^2} \nu \int_a^b J_\nu(y) \frac{\varphi(y)}{y} dy d\nu \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} H_\nu^{(2)}(x) e^{\rho\nu^2} \nu \int_a^b \Delta_y^k \{J_\nu(y)\} \frac{\varphi(y)}{y} dy d\nu \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} H_\nu^{(2)}(x) e^{\rho\nu^2} \nu \int_a^b J_\nu(y) \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} dy d\nu. \quad (2.2.19)
\end{aligned}$$

Ahora bien, el cambio del orden de integración en (2.2.19) es válido y podemos descomponer la integral en tres partes, como se indica

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu dy \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \int_0^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^\infty \right\} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \\
& \quad \cdot \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu dy, \quad (2.2.20)
\end{aligned}$$

donde  $\delta$  es un número,  $0 < \delta < 1$ , que fijaremos más adelante.

Analicemos la integral

$$\int_{x+\delta}^\infty \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu dy. \quad (2.2.21)$$

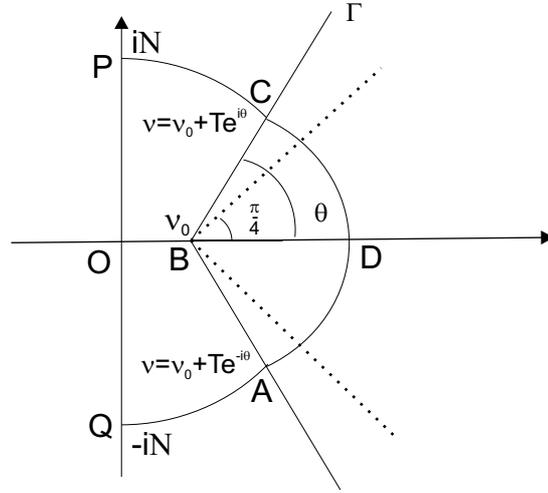
Esta integral vale claramente cero si  $x + \delta \geq b$ , puesto que el soporte de  $\varphi$  está contenido en  $[a, b]$ . Cuando  $x + \delta < b$  podemos deformar el contorno de la integral interior de (2.2.21), desplazándolo de  $\text{Re } \nu = 0$  (la integral se efectúa sobre el eje imaginario) a una región del  $\nu$ -plano donde  $\text{Re } \nu > 0$ . Si seleccionamos  $\nu_0 \in \mathbb{R}$ , con  $\nu_0 > 0$ , el nuevo camino de integración estará compuesto por dos semirrectas que parten de  $\nu_0$  y forman unos ángulos  $\pm\theta$  con el eje real positivo, como se muestra en la Figura 2.2.2. El ángulo  $\theta$  es fijo y ligeramente mayor que  $\frac{\pi}{4}$ . A este camino lo denotamos por  $\Gamma$ , y por  $\Gamma_T$  a la parte de él constituida por los segmentos  $AB$  y  $BC$ , es decir, por los  $\nu \in \mathbb{C}$  tales que  $\nu = \nu_0 + te^{-i\theta}$  y  $\nu = \nu_0 + te^{i\theta}$ , con  $0 \leq t \leq T$ , respectivamente.

Previamente D. S. Jones observó, a partir de la definición (1.2.5) que

$$\begin{aligned}
& \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu \\
&= \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu \left( \frac{e^{\nu\pi i} J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{i \text{sen } \nu\pi} \right) J_\nu(y) d\nu \\
&= \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{\rho\nu^2} \nu e^{\nu\pi i} J_\nu(x) J_\nu(y)}{i \text{sen } \nu\pi} d\nu - \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{\rho\nu^2} \nu J_{-\nu}(x) J_\nu(y)}{i \text{sen } \nu\pi} d\nu \\
&= \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{\rho\nu^2} \nu e^{\nu\pi i} J_\nu(x) J_\nu(y)}{i \text{sen } \nu\pi} d\nu \\
&\quad - \int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{e^{\rho\nu^2} (-\nu) J_\nu(x) J_{-\nu}(y)}{i \text{sen}(-\nu\pi)} (-d\nu) \\
&= \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu \left( \frac{e^{\nu\pi i} J_\nu(y) - J_{-\nu}(y)}{i \text{sen } \nu\pi} \right) J_\nu(x) d\nu \\
&= \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu. \tag{2.2.22}
\end{aligned}$$

Así que en lugar de (2.2.21) podemos considerar

$$\int_{x+\delta}^{\infty} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu dy \tag{2.2.23}$$

Figura 2.2.2: Camino de integración  $\Gamma$ 

y demostrar que esta expresión converge uniformemente a cero, cuando  $N \rightarrow \infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ , en todo compacto  $K \subset I$ . Como quiera que la función  $y^{-1} \Delta^k \varphi(y)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ , satisface las hipótesis asumidas por D. S. Jones en [38, p. 135], la integral a lo largo de  $(-i\infty, i\infty)$  puede ser reemplazada por la integral a lo largo del camino  $\Gamma$  descrito anteriormente. Luego, probar que (2.2.23) converge uniformemente a cero, si  $N \rightarrow \infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ , es equivalente a verificar que

$$\int_{x+\delta}^{\infty} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{\Gamma_T} e^{\rho \nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu dy \quad (2.2.24)$$

converge uniformemente a cero si  $T \rightarrow \infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ . Esta última integral converge absolutamente. En efecto, cuando  $T \rightarrow \infty$  con  $\nu = \nu_0 + te^{i\theta}$ ,  $0 \leq t < T$ ,  $\theta > \frac{\pi}{4}$ , a lo largo de la semirrecta  $BC$  resulta que

$$\begin{aligned} \left| \int_{BC} e^{\rho \nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu \right| &\leq \int_0^\infty |e^{\rho \nu^2}| |\nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x)| dt \\ &\leq C \int_0^\infty e^{\rho(\nu_0^2 + 2\nu_0 t \cos \theta + t^2 \cos 2\theta)} e^{(\nu_0 + t \cos \theta) \ln \frac{x}{y}} dt, \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

en virtud de las expresiones asintóticas (1.2.25) y (1.2.29) (véase también [38, (16)]). Por la especial elección de  $\theta$ , se tiene que  $\cos 2\theta < 0$ , por lo que el término de segundo grado  $(\rho \cos 2\theta)t^2$  contrarresta al término positivo

$(2\rho\nu_0 \cos \theta)t$ , que es de primer grado, y consecuentemente la integral existe. Incluso converge absolutamente si  $\rho = 0$ , por cuanto quedaría

$$\begin{aligned} C \int_0^\infty e^{(\nu_0+t \cos \theta) \ln \frac{x}{y}} dt &\leq C \int_0^\infty e^{(\nu_0+t \cos \theta) \ln \frac{x}{x+\delta}} dt \\ &= C e^{\nu_0 \ln \frac{x}{x+\delta}} \int_0^\infty e^{t \cos \theta \ln \frac{x}{x+\delta}} dt \\ &\leq C e^{\nu_0 \ln \frac{x}{x+\delta}} \left( \ln \frac{x+\delta}{x} \right)^{-1} \sec \theta, \end{aligned}$$

que está acotada uniformemente en todo compacto  $K \subset I$ . Mediante un argumento parecido, llegamos a la misma conclusión a lo largo de la semirrecta  $BA$ . Por el teorema de la convergencia dominada podemos hacer  $\rho = 0$  en (2.2.24), resultando

$$\int_{x+\delta}^\infty \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{\Gamma_T} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu dy. \quad (2.2.26)$$

Mas, si cerramos la región del sector de ángulo  $2\theta$  por un arco de circunferencia de radio  $T$  y centro en  $\nu_0$ , la integral a lo largo de la curva cerrada  $BADCB$  es igual a cero en virtud del Teorema de Cauchy [3], ya que las posibles singularidades de la función  $\nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x)$  son polos simples en  $\nu = 1, 2, 3, \dots$ , pero son evitables sin más que tener en cuenta que  $J_{-n}(y) = (-1)^n J_n(y)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  [42, (5.3.3)]; en otras palabras,  $\nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x)$  es una función holomorfa en esa región.

Si ahora tenemos presente que los puntos del arco  $\overline{CDA}$  de circunferencia adoptan la forma  $\nu = \nu_0 + T e^{i\phi}$ ,  $-\theta < \phi < \theta$  y recurrimos una vez más a (1.2.25) y (1.2.29), haciendo el cambio de variable  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi$  y usando el hecho que  $\sin \alpha \geq \frac{2\alpha}{\pi}$  para cada  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , se infiere que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\overline{CDA}} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu \right| &\leq C \int_{-\theta}^\theta e^{(T \cos \phi + \nu_0) \ln \frac{x}{x+\delta}} T d\phi \\ &= CT e^{\nu_0 \ln \frac{x}{x+\delta}} \int_0^\theta e^{T \cos \phi \ln \frac{x}{x+\delta}} d\phi = CT e^{\nu_0 \ln \frac{x}{x+\delta}} \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{T \sin \alpha \ln \frac{x}{x+\delta}} d\alpha \\ &\leq CT e^{\nu_0 \ln \frac{x}{x+\delta}} \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2T}{\pi} (\ln \frac{x}{x+\delta}) \alpha} d\alpha = C \frac{e^{\nu_0 \ln \frac{x}{x+\delta}}}{\ln \frac{x}{x+\delta}} \left[ e^{T \ln(\frac{x}{x+\delta})} - e^{\frac{2T}{\pi} (\ln \frac{x}{x+\delta}) (\frac{\pi}{2}-\theta)} \right] \end{aligned}$$

tiende uniformemente a cero, cuando  $T \rightarrow \infty$ , en todo compacto  $K \subset I$ , a causa de que  $\ln \frac{x}{x+\delta} < \ln \frac{b-\delta}{b} < 0$ . Con todas estas consideraciones, inferimos que

$$\int_{\Gamma} \nu H_{\nu}^{(2)}(y) J_{\nu}(x) d\nu = 0.$$

Estos resultados nos permiten concluir, a partir de (2.2.26), que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x+\delta}^{\infty} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{\Gamma_T} \nu H_{\nu}^{(2)}(y) J_{\nu}(x) d\nu dy \right| \\ & \leq \sup_{y \in [a, b]} |y \Delta_y^k \varphi(y)| \frac{1}{a + \delta} \sup_{(x, y) \in K \times [a, b]} \left| \int_{\Gamma_T} \nu H_{\nu}^{(2)}(y) J_{\nu}(x) d\nu \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

si  $T \rightarrow \infty$ , uniformemente en todo compacto  $K \subset I$ .

A continuación estudiamos la integral

$$\int_0^{x-\delta} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{\Gamma_T} e^{\rho \nu^2} \nu H_{\nu}^{(2)}(x) J_{\nu}(y) d\nu dy. \quad (2.2.27)$$

Si  $x - \delta \leq a$  esta integral vale cero (recuérdese que  $\text{sop} \varphi \subset [a, b]$ ). Supongamos, pues, que  $x - \delta > a$  ( $a < y < x - \delta < x$ ). Como en el caso anterior

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left| \int_0^{x-\delta} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{\Gamma_T} e^{\rho \nu^2} \nu H_{\nu}^{(2)}(x) J_{\nu}(y) d\nu dy \right| \\ & = \left| \int_0^{x-\delta} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{\Gamma_T} \nu H_{\nu}^{(2)}(x) J_{\nu}(y) d\nu dy \right| \\ & \leq \frac{1}{a} \sup_{y \in [a, b]} |\Delta^k \varphi(y)| \left| \int_{\Gamma_T} \nu H_{\nu}^{(2)}(x) J_{\nu}(y) d\nu \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

uniformemente, cuando  $T \rightarrow \infty$ , sobre cualquier compacto  $K \subset I$ .

Finalmente, investigaremos

$$-\frac{1}{2} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho \nu^2} \nu H_{\nu}^{(2)}(x) J_{\nu}(y) d\nu dy. \quad (2.2.28)$$

Si  $b \leq x - \delta$  o  $x + \delta \leq a$ , la integral (2.2.28) es obviamente cero. Nos limitaremos, pues, al caso  $a - \delta < x < b + \delta$ . De aquí en adelante fijaremos  $0 < \delta < \min\{1, a\}$ .

Traemos a colación la fórmula de inversión de la transformación integral de Laplace  $\mathcal{L}$ . Para todo  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$  vale

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} &= \mathcal{L}^{-1} \left( \mathcal{L} \left( \frac{\Delta_x^k \varphi}{x} \right) \right) (y) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iN}^{c+iN} e^{sy} \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\Delta_x^k \varphi(x)}{x} dx ds \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\Delta_x^k \varphi(x)}{x} \int_{c-iN}^{c+iN} e^{s(y-x)} ds dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_x^k \varphi(x)}{x} e^{c(y-x)} \frac{\text{sen } N(y-x)}{y-x} dx. \end{aligned}$$

En la demostración de esta fórmula de inversión (véase G. Doetsch, [18, pp. 148-151]), las integrales sobre los rangos  $(0, x - \delta)$  y  $(x + \delta, \infty)$  se anulan cuando  $N \rightarrow \infty$  y sólo es significativa la integral en el intervalo  $(x - \delta, x + \delta)$ .

Sabemos que ([38], [20, p. 188 (55)])

$$H_\nu^{(2)}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \text{sen } \nu\pi} e^{sy} ds,$$

donde  $b = s + (s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ ,  $y > 0$  y  $|\text{Re } \nu| < 1$ . De aquí, usando un razonamiento similar al utilizado en [38, p. 139], inferimos que

$$\begin{aligned} &\int_{x-\delta}^{x+\delta} H_\nu^{(2)}(y) \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} dy \\ &= \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \text{sen } \nu\pi} e^{sy} ds dy. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Observe que podemos escribir el segundo miembro de (2.2.29) como

$$\begin{aligned} &\int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{cy} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[ \frac{\{(c+it) + [(c+it)^2 + 1]^{\frac{1}{2}}\}^\nu}{[(c+it)^2 + 1]^{\frac{1}{2}} \text{sen } \nu\pi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{i\nu\pi} \{(c+it) + [(c+it)^2 + 1]^{\frac{1}{2}}\}^{-\nu}}{[(c+it)^2 + 1]^{\frac{1}{2}} \text{sen } \nu\pi} \right] e^{ity} dt dy. \end{aligned}$$

Se ve fácilmente que el primer sumando de la integral interior se comporta como  $t^{\nu-1}e^{ity}$  si  $|t| \rightarrow \infty$ , mientras que el segundo miembro lo hace como  $t^{-\nu-1}e^{ity}$ , en ambos casos, salvo en una constante multiplicativa que depende de  $\nu$ . El integrando total es una función continua y acotada en el conjunto

$$\{(y, t) : a \leq y \leq b, -\infty < t < \infty\},$$

siempre que  $|\operatorname{Re} \nu| < 1$ . Se puede comprobar que la integral interior converge uniformemente hacia una función continua de  $y \in (x - \delta, x + \delta)$ . Por tanto, en virtud de un teorema clásico del análisis [1, Teorema 14-26], se puede intercambiar el orden de integración y (2.2.29) queda así

$$\frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \nu\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{sy} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} dy ds.$$

Entonces, multiplicando por  $-\frac{1}{2}e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x)$ , integrando de  $-i\infty$  a  $i\infty$ , y tomado límite cuando  $\rho \rightarrow 0+$  obtenemos

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0+} -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(y) \int_{x-\delta}^{x+\delta} H_\nu^{(2)}(y) \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} dy d\nu \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0+} -\frac{1}{4\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(y)}{\operatorname{sen} \nu\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \\ & \cdot \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{sy} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} dy ds d\nu \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0+} -\frac{1}{4\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{sy} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \\ & \cdot \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{\operatorname{sen} \nu\pi} d\nu dy ds \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{sy} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \\ & \cdot \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(x) \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{\operatorname{sen} \nu\pi} d\nu dy ds. \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Ya que el camino de integración en la variable  $\nu$  se puede deformar aplicando los mismos procedimientos que se han hecho anteriormente, es lícito poner  $\rho = 0$ . La integral resultante a lo largo de  $\Gamma$  se puede evaluar por la teoría de residuos [3], tal como hace D. S. Jones en [38, p. 139], obteniendo

$$\int_{\Gamma} \nu J_{\nu}(x) \frac{b^{\nu} - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{\operatorname{sen} \nu\pi} d\nu = 2ix(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-sx}.$$

Si tomamos en cuenta esto y los comentarios que conciernen a la transformada integral de Laplace, el último miembro de (2.2.30) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{sy} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} 2ix(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-sx} dy ds \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2ix e^{-sx} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{sy} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} dy ds \\ &= \frac{x}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y}\right) (-s) e^{-sx} ds \\ &= x \frac{\Delta_x^k \varphi(x)}{x} = \Delta_x^k \varphi(x). \end{aligned}$$

En resumen, hemos establecido que

$$-\frac{1}{2} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_{\nu}^{(2)}(x) J_{\nu}(y) d\nu dy \longrightarrow \Delta_x^k \varphi(x),$$

cuando  $N \longrightarrow \infty$  ( $T \longrightarrow \infty$ ) y  $\rho \longrightarrow 0+$ , uniformemente en todo compacto  $K \subset I$ .

Finalmente, combinando estos últimos resultados, concluimos que

$$\lambda_{K,k}(\Omega_{N,\rho} - \varphi(x)) \longrightarrow 0,$$

si  $N \longrightarrow \infty$  y  $\rho \longrightarrow 0+$ , es decir,  $\Omega_{N,\rho}(\cdot) \longrightarrow \varphi(\cdot)$  en la topología del espacio  $\mathcal{E}(I)$ , cuando  $N \longrightarrow \infty$  y  $\rho \longrightarrow 0+$ . Nuestro aserto se deduce ahora fácilmente de (2.2.16), sin más que tener en cuenta esta última afirmación y la linealidad de  $f$ . ■

## 2.3. Aplicaciones

De cara a las aplicaciones, en lugar del par (2.1.1)-(2.1.2) se utiliza con más frecuencia la transformación de Hankel-Kontorovich–Lebedev definida por el par

$$(\mathcal{H}g)(\nu) = G(\nu) = \int_0^\infty \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} g(x) dx \quad (2.3.1)$$

$$(\mathcal{H}^{-1}G)(x) = g(x) = -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(x) G(\nu) d\nu. \quad (2.3.2)$$

Ello apenas conlleva modificación alguna en el desarrollo teórico realizado anteriormente. Así, si  $g \in \mathcal{E}'(I)$ , se definirá su transformada de Hankel-Kontorovich–Lebedev generalizada mediante

$$(\mathcal{H}'g)(\nu) = G(\nu) = \left\langle g(x), \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} \right\rangle. \quad (2.3.3)$$

El Teorema 2.1 de inversión se enuncia ahora en la forma

**Teorema 2.2** *Sea  $g \in \mathcal{E}'(I)$  y supongamos que  $\mathcal{H}'g$  viene definida por (2.3.3). Entonces,*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) G(\nu) d\nu = g(x), \quad (2.3.4)$$

en el sentido de la convergencia en el espacio de distribuciones  $\mathcal{D}'(I)$ .

Si  $g \in \mathcal{E}'(I)$ , también se tiene que  $\Delta g \in \mathcal{E}'(I)$  por la forma habitual de definir el operador generalizado. En nuestro caso, nos interesa evaluar  $(\mathcal{H}'\Delta g)$ . Por (2.1.5) y algunas manipulaciones

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}'\Delta g)(\nu) &= \left\langle \Delta g(x), \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} \right\rangle \\ &= \left\langle x^2 \frac{d^2}{dx^2} g(x), \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} \right\rangle + \left\langle x \frac{d}{dx} g(x), \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} \right\rangle + \left\langle x^2 g(x), \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} \right\rangle \\ &= \left\langle g(x), \frac{d^2}{dx^2} [x H_\nu^{(2)}(x)] - \frac{d}{dx} H_\nu^{(2)}(x) + x H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle \end{aligned}$$

$$= \left\langle g(x), \frac{\Delta_x H_\nu^{(2)}(x)}{x} \right\rangle = \nu^2 \left\langle g(x), \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} \right\rangle = \nu^2 (\mathcal{H}'g)(\nu).$$

En resumen, se obtiene la regla operacional

$$(\mathcal{H}'\Delta g)(\nu) = \nu^2 (\mathcal{H}'g)(\nu), \quad (2.3.5)$$

válida para toda  $g \in \mathcal{E}'(I)$ .

A fin de ilustrar las aplicaciones de la transformada (2.3.1)-(2.3.2), nos proponemos encontrar la solución  $u(r, \theta)$  de la ecuación

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + r^2 u = -r_0 \delta(r - r_0) \quad (2.3.6)$$

en la cuña  $0 < \theta < \theta_0$ , donde las constantes  $\theta_0$  y  $r_0$  son tales que  $0 < \theta_0 < \pi$  y  $r_0 > 0$ . Las correspondientes condiciones de frontera,  $u(r, 0) = 0$  y  $u(r, \theta_0) = 0$ , son fijadas sobre los lados de la cuña. Aquí  $\delta(\cdot)$  denota la funcional de Dirac, que pertenece a  $\mathcal{E}'(I)$ . Si ponemos  $U(\nu, \theta) = \mathcal{H}'u(r, \theta)$  y aplicamos la transformada  $\mathcal{H}'$  a (2.3.6), y tenemos presente la regla operacional (2.3.5) y el hecho que  $\mathcal{H}'(-r_0 \delta(r - r_0)) = -H_\nu^{(2)}(r_0)$ , el problema de valores en la frontera para la ecuación en derivadas parciales (2.3.6) se convierte en el problema ordinario

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(\nu, \theta)}{\partial \theta^2} + \nu^2 U(\nu, \theta) = -H_\nu^{(2)}(r_0) \\ U(\nu, 0) = 0, \quad U(\nu, \theta_0) = 0, \end{cases}$$

cuya solución es dada por

$$U(\nu, \theta) = 2 \frac{H_\nu^{(2)}(r_0)}{\nu^2} \operatorname{sen} \frac{\nu \theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\nu(\theta_0 - \theta)}{2} \operatorname{sec} \frac{\nu \theta_0}{2}.$$

Recurriendo a la fórmula de inversión (2.3.4) se obtiene la solución

$$u(r, \theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho \nu^2} \frac{J_\nu(r) H_\nu^{(2)}(r_0)}{\nu} \operatorname{sen} \frac{\nu \theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\nu(\theta - \theta_0)}{2} \operatorname{sec} \frac{\nu \theta_0}{2} d\nu.$$

Un problema semejante es abordado por D. S. Jones desde un punto de vista clásico en [38].

Algunos problemas de interés físico y conectados con la ecuación de Helmholtz son analizados con detalle en [38], [39] y [44].

# CAPÍTULO 3

## LA TRANSFORMACIÓN H-K-L EN ESPACIOS DE FUNCIONES GENERALIZADAS DE CRECIMIENTO EXPONENCIAL

### 3.1. Introducción

El método del núcleo constituye una de las técnicas más habituales para extender una transformación integral clásica a un espacio de distribuciones. Consiste en construir un espacio de funciones prueba que contenga el núcleo de la transformación considerada. El dual de este espacio es el espacio de distribuciones o funciones generalizadas apropiado a nuestros fines: se definirá la transformación de una distribución o de una función generalizada aplicándola directamente al núcleo. Desde luego que es el método más natural. Ha sido utilizado por A. H. Zemanian, en 1975, para extender por primera vez la transformación de Kontorovich-Lebedev

$$(KLf)(\tau) = F(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{K_{i\tau}(x)}{x} f(x) dx$$
$$(KL^{-1}F)(x) = f(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \tau \operatorname{sh} \pi\tau K_{i\tau}(x) F(\tau) d\tau$$

a un espacio de distribuciones, concretamente, a las de soporte compacto [85]. Posteriormente, en 1979, R. S. Pathak y J. N. Pandey ([55], [56]) la consideraron en un espacio más amplio de funciones generalizadas, con un cierto crecimiento potencial.

El objetivo central de este capítulo es investigar la transformación de Hankel-Kontorovich-Lebedev (transformación H-K-L) siguiendo el mismo esquema. En el Capítulo 2 ya se hizo en el espacio  $\mathcal{E}'(I)$  de las distribuciones con soporte compacto y en este capítulo se procederá a hacerlo en ciertos espacios más amplios de funciones generalizadas. Lo primero que se hará es introducir esta clase de espacios. Así, en la segunda sección, se definirán los espacios  $\mathcal{F}_a$  y sus duales, realizándose un exhaustivo estudio de sus principales propiedades, lo cual concluirá con el establecimiento de que se trata de un espacio de Fréchet y de que la función de Hankel de segunda clase  $H_\nu^{(2)}(x)$ , que comparece en el núcleo, y sus derivadas pertenecen a dicho espacio. En el tercer párrafo se define la transformación H-K-L en su espacio dual  $\mathcal{F}'_a$ , espacio de distribuciones o de funciones generalizadas, mediante el método del núcleo y se demuestran los cuatro resultados fundamentales: la analiticidad y la propiedad de acotación de la función imagen, la fórmula de inversión distribucional y el teorema de unicidad. Nos hemos inspirado en el trabajo de E. L. Koh y A. H. Zemanian [40], en donde se estudia la transformación de Hankel ([83], [86]) en un espacio de funciones generalizadas de crecimiento exponencial en el infinito. Lo novedoso en nuestro caso, además de las distintas técnicas empleadas, es que las funciones generalizadas tienen un crecimiento exponencial tanto en el origen como en el infinito. Finalmente, en el párrafo cuarto se genera un cálculo operacional que puede ser utilizado tanto en la resolución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias, como de ecuaciones en derivadas parciales con condiciones de contorno fijadas en los lados de cuñas infinitas.

### 3.2. El espacio de funciones prueba $\mathcal{F}_a$ y su dual

El espacio  $\mathcal{F}_a$  está constituido por las funciones complejas  $\varphi$  infinitamente derivables y definidas sobre el intervalo  $I$  tales que

$$\gamma_{k,a}(\varphi) = \sup_{x \in I} |\lambda_a^-(x) \Delta_x^k \varphi(x)| < \infty, \quad (3.2.1)$$

donde  $a > 0$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\lambda_a^-$  denota la función continua y positiva

$$\lambda_a^-(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a}{x}}, & x \in (0, 1] \\ e^{-ax}, & x \in [1, +\infty) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

y  $\Delta_x$  es el operador diferencial (2.1.5). Dotamos a  $\mathcal{F}_a$  de la topología generada por la familia separadora de seminormas  $(\gamma_{k,a})_{k \in \mathbb{N}_0}$ .  $\mathcal{F}'_a$  representa su espacio dual.

A continuación analizamos algunas propiedades de estos espacios:

- (i)  $\mathcal{F}_a$  es un espacio completo. En efecto, se sabe que existe una sucesión creciente de compactos  $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de  $I$  de modo que  $I = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$ . Sea ahora  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{F}_a$ . Entonces las sucesiones  $(\Delta^k \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , convergen uniformemente en cualquier compacto  $K \subset I$ . Recuérdese que  $K$  está contenido en uno de los  $K_m$ . En particular,  $(\varphi_n)$  y  $(\Delta \varphi_n)$  convergen uniformemente en  $K$ , por lo cual de

$$\Delta \varphi_n = x^2 D^2 \varphi_n + x D \varphi_n + x^2 \varphi_n \quad (3.2.3)$$

se infiere que  $(x D^2 \varphi_n + D \varphi_n)$  también converge uniformemente en  $K$ . Sea  $x_0 \in I - K$  fijado. Puesto que la integración preserva la convergencia uniforme [1, Teorema 13-10], resulta que

$$\int_{x_0}^x [t D^2 \varphi_n(t) + D \varphi_n(t)] dt = x D \varphi_n(x) - x_0 D \varphi_n(x_0) \quad (3.2.4)$$

converge uniformemente en  $K$ . Por esa misma razón, integrando de nuevo en (3.2.4) sigue que

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x \frac{1}{u} \int_{x_0}^u (t D^2 \varphi_n(t) + D \varphi_n(t)) dt du \\ &= \varphi_n(x) - \varphi_n(x_0) - x_0 \ln \frac{x}{x_0} D \varphi_n(x_0) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

converge uniformemente en  $K$ . Como  $(\varphi_n)$  converge uniformemente en  $K$  y  $(\varphi_n(x_0))$  es convergente, de (3.2.5) se sigue que  $(D \varphi_n(x_0))$  es una sucesión numérica convergente. Este hecho nos permite concluir a partir de (3.2.4) que  $(D \varphi_n)$  converge uniformemente en  $K$  y, por consiguiente, de (3.2.3) que  $(D^2 \varphi_n)$  también converge uniformemente en  $K$ . Teniendo en cuenta que

$$\Delta^k \varphi_n(x) = \sum_{j=0}^{2k} P_j(x) D^{2k-j} \varphi_n(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2.6)$$

donde  $P_j(x)$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots, 2k$ , simboliza un polinomio de grado menor o igual que  $2k$ , una argumentación por inducción nos permite asegurar que  $(D^k \varphi_n)$  converge uniformemente en  $K$ . Por tanto, existe una función  $\varphi$  infinitamente derivable en  $I$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D^k \varphi_n(x) = D^k \varphi(x),$$

puntualmente en  $I$ . Además, ya que  $(\varphi_n)$  es de Cauchy en  $\mathcal{F}_a$ , para  $\epsilon > 0$  arbitrario se tiene que

$$\gamma_{k,a}(\varphi_n - \varphi_m) < \epsilon,$$

para todo  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m$  y  $n$  mayores que cierto  $\nu = \nu(k, a) \in \mathbb{N}$ . Si ahora hacemos que  $m \rightarrow \infty$ , queda

$$\gamma_{k,a}(\varphi_n - \varphi) \leq \epsilon.$$

Por último,

$$\gamma_{k,a}(\varphi) \leq \gamma_{k,a}(\varphi_n - \varphi) + \gamma_{k,a}(\varphi_n) \leq \epsilon + C_{k,a} < \infty,$$

pues  $\varphi_n \in \mathcal{F}_a$  y  $\gamma_{k,a}(\varphi_n)$  está acotado, digamos que por la constante  $C_{k,a} > 0$ . En definitiva, hemos probado que  $(\varphi_n)$  converge a  $\varphi$  en la topología del espacio  $\mathcal{F}_a$ . En realidad,  $\mathcal{F}_a$  es un espacio localmente convexo, de Hausdorff y completo, en otras palabras, un espacio de Fréchet.

- (ii) Si  $0 < a_1 < a_2$ , se tiene que  $\mathcal{F}_{a_1} \subset \mathcal{F}_{a_2}$  y la topología de  $\mathcal{F}_{a_1}$  es más fuerte que la inducida en dicho espacio por la topología de  $\mathcal{F}_{a_2}$ . En efecto, se ve fácilmente que  $\lambda_{a_2}^-(x) \leq \lambda_{a_1}^-(x)$ ,  $x \in I$ . De aquí se deduce

$$\gamma_{k,a_2}(\varphi) = \sup_{x \in I} |\lambda_{a_2}^-(x) \Delta^k \varphi(x)| \leq \sup_{x \in I} |\lambda_{a_1}^-(x) \Delta^k \varphi(x)| = \gamma_{k,a_1}(\varphi),$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{F}_{a_1}$ . Consecuentemente,  $\mathcal{F}'_{a_2} \subset \mathcal{F}'_{a_1}$  en el sentido de que si  $f \in \mathcal{F}'_{a_2}$  se restringe a  $\mathcal{F}_{a_1}$ , entonces  $f$  define un funcional lineal y continuo sobre  $\mathcal{F}_{a_1}$ .

- (iii)  $\mathcal{D}(I) \subset \mathcal{F}_a$  y la topología de  $\mathcal{D}(I)$  es más fuerte que la inducida en él por  $\mathcal{F}_a$ . En efecto, tomando en cuenta que [33]

$$\Delta^k \varphi(x) = \sum_{j=0}^{2k} P_j(x) D^{2k-j} \varphi(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde  $P_j(x)$  es un polinomio de grado menor o igual que  $2k$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots$ , sigue inmediatamente para todo  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$  que

$$\gamma_{k,a}(\varphi) \leq \sum_{j=0}^{2k} C_j \gamma_{2k-j}(\varphi) < \infty,$$

donde

$$C_j = \sup_{x \in K} |\lambda_a^-(x) P_j(x)|,$$

$j = 0, 1, 2, \dots, 2k$ , siendo  $K$  cualquier subconjunto compacto de  $I$ . Si  $f \in \mathcal{F}'_a$  se restringe a  $\mathcal{D}(I)$ , se genera un funcional lineal y continuo  $f$  sobre  $\mathcal{D}(I)$ . En este sentido es como debe interpretarse la inclusión  $\mathcal{F}'_a \subset \mathcal{D}'(I)$ .

- (iv)  $\mathcal{F}_a$  es un subespacio de  $\mathcal{E}(I)$ . Efectivamente, si  $\varphi$  es un elemento cualquiera de  $\mathcal{F}_a$ , por definición  $\varphi$  es infinitamente derivable en  $I$  y, consecuentemente,  $\varphi, D\varphi, D^2\varphi, \dots, D^k\varphi, \dots$  permanecerán acotado en cualquier subconjunto compacto  $K$  de  $I$ , esto es,

$$\gamma_{K,k}(\varphi) = \sup_{x \in K} |D^k \varphi(x)| < \infty \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Además, la convergencia en  $\mathcal{F}_a$  implica la convergencia en  $\mathcal{E}(I)$ . Luego,  $\varphi \in \mathcal{E}(I)$ , lo cual entraña que  $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{E}(I)$ . De las inclusiones  $\mathcal{D}(I) \subset \mathcal{F}_a \subset \mathcal{E}(I)$  y de la densidad de  $\mathcal{D}(I)$  en  $\mathcal{E}(I)$  [86] sigue que  $\mathcal{F}_a$  es un subespacio denso en  $\mathcal{E}(I)$ . Por tanto,  $\mathcal{E}'(I)$  es un subespacio de  $\mathcal{F}'_a$ .

- (v) Si  $f$  es una función localmente integrable en  $I$  tal que

$$\int_I \frac{|f(x)|}{\lambda_a^-(x)} dx < \infty,$$

entonces  $f$  genera un elemento regular en  $\mathcal{F}'_a$  mediante

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_I f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{F}_a. \quad (3.2.7)$$

Ciertamente, para todo  $\varphi \in \mathcal{F}_a$ ,

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \gamma_{0,a}(\varphi) \int_I \frac{|f(x)|}{\lambda_a^-(x)} dx.$$

(vi) Para cada  $f \in \mathcal{F}'_a$  existe una constante  $C > 0$  y un entero no negativo  $r$  de modo que

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \max_{0 \leq k \leq r} \gamma_{k,a}(\varphi) = C \max_{0 \leq k \leq r} |\lambda_a^-(x) \Delta^k \varphi(x)|, \quad (3.2.8)$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{F}_a$ . Aquí  $C$  y  $r$  dependen de  $f$  pero no de  $\varphi$  [86, p. 19]. A la vista de la forma particular de la función  $\lambda_a^-(x)$ , nos referimos a estas distribuciones como "funciones generalizadas de doble crecimiento exponencial", por cuanto las funciones prueba  $\varphi$  tienen a lo más un comportamiento exponencial tanto en el origen como en el infinito. Nótese que E. L. Koh y A. H. Zemanian investigaron la transformación de Hankel en un espacio de distribuciones que satisfacían esta propiedad sólo en el infinito [40].

(vii) Para  $\nu \in \mathbb{C}$  fijado, se cumple que

$$\frac{\partial^m}{\partial \nu^m} H_\nu^{(2)}(x) \in \mathcal{F}_a, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2.9)$$

considerada como función de  $x$ . En efecto, partiendo de la siguiente representación integral de la función de Hankel [42, p. 139]

$$H_\nu^{(2)}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-i(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{s}{2ix}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} ds, \quad (3.2.10)$$

válida para  $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$ ,  $x > 0$ , resulta que

$$\frac{\partial^m (\nu^{2k} H_\nu^{(2)}(x))}{\partial \nu^m} = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \frac{\partial^{m-n}}{\partial \nu^{m-n}} \left( e^{-i(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \right. \\ \left. \cdot \nu^{2k} \Gamma^{-1}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \right) \int_0^\infty e^{-s} \frac{\partial^n}{\partial \nu^n} \left[ s^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{s}{2ix}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \right] ds. \quad (3.2.11)$$

Por una parte, es inmediato ver que para  $\nu \in \mathbb{C}$  fijado, las derivadas

$$\left| \frac{\partial^{m-n}}{\partial \nu^{m-n}} \left( e^{-i(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \nu^{2k} \Gamma^{-1}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \right) \right|$$

están acotadas independientemente de  $x \in I$ . Por otra parte,

$$\left| \int_0^\infty e^{-s} \frac{\partial^n}{\partial \nu^n} \left[ s^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{s}{2ix}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \right] ds \right| \\ = \left| \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{s}{2ix}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} (\ln s)^{n-j} \right. \\ \left. \cdot \left[ \ln \left(1 + \frac{s}{2ix}\right) \right]^j ds \right| \\ \leq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \int_0^\infty e^{-s} s^{Re\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{s^2}{4x^2}\right)^{\frac{1}{2}(Re\nu - \frac{1}{2})} e^{\frac{\pi Im\nu}{4}(1 + \text{sgn } Im\nu)} \\ \cdot \left[ \ln \left(1 + \frac{s^2}{4x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2} \right]^j |\ln s|^{n-j} ds, \quad (3.2.12)$$

donde  $\text{sgn}$  denota la conocida función signo.

Analicemos la integral interior al sumatorio de (3.2.12). Para ello distinguiremos tres casos:

**Caso A:** Supongamos que  $2x \geq 1$ .

(a) Consideremos primero que  $Re\nu \geq \frac{1}{2}$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
Y &= \left( \int_0^1 + \int_1^{2x} + \int_{2x}^\infty \right) e^{-s} s^{Re\nu - \frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{s^2}{4x^2} \right)^{\frac{1}{2}(Re\nu - \frac{1}{2})} \\
&\quad \cdot \left[ \ln \left( 1 + \frac{s^2}{4x^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2} \right]^j |\ln s|^{n-j} e^{\frac{\pi Im\nu}{4}(1 + \operatorname{sgn} Im\nu)} ds \\
&= Y_1 + Y_2 + Y_3,
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

donde  $Y_1$ ,  $Y_2$  y  $Y_3$  denotan las integrales sobre los intervalos  $(0, 1)$ ,  $(1, 2x)$  y  $(2x, \infty)$  respectivamente. Recordemos que [38]

$$1 + \frac{s^2}{4x^2} \leq \begin{cases} 2, & \text{si } s^2 \leq 4x^2 \\ \frac{s^2}{2x^2}, & \text{si } s^2 \geq 4x^2 \end{cases} \tag{3.2.14}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
|Y_1| &\leq 2^{\frac{1}{2}(Re\nu - \frac{1}{2})} e^{\frac{\pi Im\nu}{4}(1 + \operatorname{sgn} Im\nu)} \left( \frac{\ln 2 + \pi}{2} \right)^j \\
&\quad \cdot \int_0^1 s^{Re\nu - \frac{1}{2}} |\ln s|^{n-j} ds \leq C_1(\nu).
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Además,

$$\begin{aligned}
|Y_2| &\leq \int_1^{2x} e^{-s} s^{Re\nu - \frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}(Re\nu - \frac{1}{2})} e^{\frac{\pi Im\nu}{4}(1 + \operatorname{sgn} Im\nu)} \\
&\quad \cdot \left( \frac{\ln 2 + \pi}{2} \right)^j (\ln 2x)^{n-j} ds \\
&\leq 2^{\frac{1}{2}(Re\nu - \frac{1}{2})} e^{\frac{\pi Im\nu}{4}(1 + \operatorname{sgn} Im\nu)} \left( \frac{\ln 2 + \pi}{2} \right)^j (\ln 2x)^{n-j} \\
&\quad \cdot \int_1^\infty e^{-s} s^{Re\nu - \frac{1}{2}} ds \\
&\leq C_2(\nu) (\ln 2x)^{n-j}.
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Finalmente, de (3.2.14) se infiere que

$$\begin{aligned}
|Y_3| &\leq \int_{2x}^{\infty} e^{-s} s^{Re\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{2s^2}{4x^2}\right)^{\frac{1}{2}(Re\nu-\frac{1}{2})} s^{n-j} e^{\frac{\pi Im\nu}{4}(1+\operatorname{sgn} Im\nu)} \\
&\quad \cdot \left(\ln\left(\frac{2s^2}{4x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2}\right)^j ds \\
&\leq \frac{2^{-\frac{1}{2}(Re\nu-\frac{1}{2})}}{x^{Re\nu-\frac{1}{2}}} e^{\frac{\pi Im\nu}{4}(1+\operatorname{sgn} Im\nu)} \\
&\quad \cdot \int_{2x}^{\infty} e^{-s} s^{Re\nu-\frac{1}{2}+n-j+Re\nu-\frac{1}{2}} \left(\ln(4s^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2}\right)^j ds \\
&\leq \frac{2^{-\frac{1}{2}(Re\nu-\frac{1}{2})}}{x^{Re\nu-\frac{1}{2}}} e^{\frac{\pi Im\nu}{4}(1+\operatorname{sgn} Im\nu)} \\
&\quad \cdot \int_1^{\infty} e^{-s} s^{2Re\nu-\frac{1}{2}-1+n-j} \left(\ln s + \frac{\ln 2 + \pi}{2}\right)^j ds \\
&\leq C_3(\nu) x^{\frac{1}{2}-Re\nu}, \tag{3.2.17}
\end{aligned}$$

puesto que la hipótesis  $2x \geq 1$  y el hecho de ser  $s > 2x$  implican que

$$1 < \frac{2s^2}{4x^2} \leq 2s^2.$$

Considerando (3.2.13), (3.2.15), (3.2.16) y (3.2.17) concluimos que

$$|Y| \leq C_1(\nu) + C_2(\nu)(\ln 2x)^{n-j} + C_3(\nu)x^{\frac{1}{2}-Re\nu}, \tag{3.2.18}$$

si  $Re\nu \geq \frac{1}{2}$ .

(b) Asumamos ahora que  $0 \leq Re\nu < \frac{1}{2}$ . Para este caso se tiene que

$$\left(1 + \frac{s^2}{4x^2}\right)^{\frac{1}{2}(Re\nu-\frac{1}{2})} \leq 1$$

por lo que, utilizando el mismo argumento que nos permitió obtener (3.2.17),

$$\begin{aligned}
|Y| &\leq e^{\frac{\pi Im\nu}{4}(1+\operatorname{sgn} Im\nu)} \int_0^\infty e^{-s} s^{Re\nu-\frac{1}{2}} |\ln s|^{n-j} \\
&\quad \cdot \left( \ln \left( 1 + \frac{s^2}{4x^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2} \right)^j ds \\
&\leq e^{\frac{\pi Im\nu}{4}(1+\operatorname{sgn} Im\nu)} \left[ \left( \frac{\ln 2 + \pi}{2} \right)^j \int_0^{2x} e^{-s} s^{Re\nu-\frac{1}{2}} |\ln s|^{n-j} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{2x}^\infty e^{-s} s^{Re\nu-\frac{1}{2}} |\ln s|^{n-j} \left( \ln \left( \frac{s^2}{2x^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2} \right)^j ds \right] \\
&\leq e^{\frac{\pi Im\nu}{4}(1+\operatorname{sgn} Im\nu)} \left[ \left( \frac{\ln 2 + \pi}{2} \right)^j \int_0^\infty e^{-s} s^{Re\nu-\frac{1}{2}} |\ln s|^{n-j} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_1^\infty e^{-s} s^{Re\nu-\frac{1}{2}} (\ln s)^{n-j} \left( \ln s + \frac{\ln 2 + \pi}{2} \right)^j ds \right] \\
&\leq C_4(\nu). \tag{3.2.19}
\end{aligned}$$

Basta percatarse de que si  $0 < \delta < 1$ ,

$$\int_0^\delta e^{-s} s^{Re\nu-\frac{1}{2}} (-\ln s)^{n-j} ds \approx \int_0^\delta s^{Re\nu-\frac{1}{2}} (-\ln s)^{n-j} ds,$$

e integrando por partes esta última integral, se obtiene, poniendo  $k = n - j$ ,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\delta s^{Re\nu-\frac{1}{2}} (-\ln s)^k ds \\
&= \frac{\delta^{Re\nu+\frac{1}{2}} (-\ln \delta)^k}{Re\nu + \frac{1}{2}} + \frac{k}{Re\nu + \frac{1}{2}} \int_0^\delta s^{Re\nu-\frac{1}{2}} (-\ln s)^{k-1} ds,
\end{aligned}$$

ya que  $Re\nu + \frac{1}{2} > 0$ . Iterando este proceso  $k$  veces se llega a la integral  $\int_0^\delta s^{Re\nu-\frac{1}{2}} ds$ , que es convergente.

Teniendo en cuenta (3.2.11), (3.2.12), (3.2.13), (3.2.18) y (3.2.19) se infiere que, en el Caso A,

$$\left| \frac{\partial^m (\nu^{2k} H_\nu^{(2)}(x))}{\partial \nu^m} \right| \leq x^{-\frac{1}{2}} \left( C_1(\nu, k) + C_2(\nu, k) (\ln 2x)^m + C_3(\nu, k) x^{\frac{1}{2} - \operatorname{Re} \nu} \right), \quad (3.2.20)$$

si  $\operatorname{Re} \nu \geq \frac{1}{2}$ , y

$$\left| \frac{\partial^m (\nu^{2k} H_\nu^{(2)}(x))}{\partial \nu^m} \right| \leq C_4(\nu, k) x^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.2.21)$$

si  $0 \leq \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$ , cuando  $2x \geq 1$ .

**Caso B:** Supongamos que  $0 < 2x < 1$ .

(c) Asumamos inicialmente que  $\operatorname{Re} \nu \geq \frac{1}{2}$ . Partiendo ahora la integral (3.2.13) en dos partes, a la vista de (3.2.14) y teniendo presente que  $\ln s \leq s$  cuando  $s \geq 1$ , se obtiene

$$\begin{aligned} |Y| &\leq e^{\frac{\pi \operatorname{Im} \nu}{4} (1 + \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \nu)} \left[ \int_0^{2x} e^{-s} s^{\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}(\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2})} |\ln s|^{n-j} \left( \frac{\ln 2 + \pi}{2} \right)^j ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{2x}^\infty e^{-s} s^{\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2}} \left( \frac{s^2}{2x^2} \right)^{\frac{1}{2}(\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2})} |\ln s|^{n-j} \left( \ln \left( \frac{s^2}{2x^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2} \right)^j ds \right] \\ &\leq C'_5(\nu) \int_0^1 e^{-s} s^{\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2}} |\ln s|^{n-j} ds \\ &\quad + C'_6(\nu) \int_0^\infty e^{-s} \frac{s^{2\operatorname{Re} \nu - 1}}{x^{\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2}}} |\ln s|^{n-j} \left( \frac{s}{\sqrt{2x}} + \frac{\pi}{2} \right)^j ds \\ &\leq C_5(\nu) + C'_6(\nu) x^{\frac{1}{2} - \operatorname{Re} \nu - j} \int_0^\infty e^{-s} s^{2\operatorname{Re} \nu - 1 + j} |\ln s|^{n-j} ds \\ &\leq C_5(\nu) + C_6(\nu) x^{\frac{1}{2} - \operatorname{Re} \nu - j}. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

(d) Aceptemos ahora que  $0 \leq \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$ . Entonces, en forma análoga se tiene que

$$\begin{aligned}
|Y| &\leq C'_7(\nu) \int_0^{2x} e^{-s} s^{Re\nu-\frac{1}{2}} |\ln s|^{n-j} \left(\frac{\ln 2 + \pi}{2}\right)^j ds \\
&\quad + C'_8(\nu) \int_{2x}^{\infty} e^{-s} s^{Re\nu-\frac{1}{2}} |\ln s|^{n-j} \left(\ln\left(\frac{s^2}{2x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2}\right)^j ds \\
&\leq C'_7(\nu) \left(\frac{\ln 2 + \pi}{2}\right)^j \int_0^1 e^{-s} s^{Re\nu-\frac{1}{2}} (-\ln s)^{n-j} ds \\
&\quad + C'_8(\nu) \int_0^{\infty} e^{-s} s^{Re\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{s}{\sqrt{2x}} + \frac{\pi}{2}\right)^j |\ln s|^{n-j} ds \\
&\leq C_7(\nu) + C_8(\nu)x^{-j}. \tag{3.2.23}
\end{aligned}$$

Resumiendo, en virtud de (3.2.22) y (3.2.23), junto con (3.2.11), podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial^m (\nu^{2k} H_\nu^{(2)}(x))}{\partial \nu^m} \right| \\
&\leq \begin{cases} C_5(\nu, k)x^{-\frac{1}{2}} + C_6(\nu, k)x^{-Re\nu-m}, & \text{si } Re\nu \geq \frac{1}{2} \\ C_7(\nu, k)x^{-\frac{1}{2}} + C_8(\nu, k)x^{-m-\frac{1}{2}}, & \text{si } 0 \leq Re\nu < \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{3.2.24}
\end{aligned}$$

cuando  $0 < 2x < 1$ .

**Caso C:** Si  $Re\nu < 0$ , de la relación (1.2.7) se deduce inmediatamente que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^m}{\partial \nu^m} H_\nu^{(2)}(x) &= \frac{\partial^m}{\partial \nu^m} (e^{i\nu\pi} H_{-\nu}^{(2)}(x)) \\
&= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{\partial^{m-j}}{\partial \nu^{m-j}} e^{i\nu\pi} \frac{\partial^j}{\partial \nu^j} H_{-\nu}^{(2)}(x) \\
&= e^{i\nu\pi} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (i\pi)^{m-j} \frac{\partial^j}{\partial \nu^j} H_{-\nu}^{(2)}(x). \tag{3.2.25}
\end{aligned}$$

y siendo ahora  $Re(-\nu) > 0$ , valen las expresiones asintóticas anteriores.

Nótese que las cantidades  $C_j(\nu)$  y  $C_j(\nu, k)$ , con  $j = 1, 2, \dots, 8$ , son constantes con respecto a  $x$ .

Por tanto, como las expresiones  $\lambda_a^-(x)x^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\lambda_a^-(x)|\ln 2x|^m$ ,  $\lambda_a^-(x)x^{\frac{1}{2}-Re\nu}$ ,  $\lambda_a^-(x)x^{-Re\nu-m}$  y  $\lambda_a^-(x)x^{-m-\frac{1}{2}}$  permanecen acotadas en  $I$ , para todo  $\nu \in \mathbb{C}$  fijado y para cualquier  $m = 0, 1, 2, \dots$ , sigue de (2.1.9), que

$$\begin{aligned} \gamma_{k,a} \left( \frac{\partial^m}{\partial \nu^m} H_\nu^{(2)}(x) \right) &= \sup_{x \in I} \left| \lambda_a^-(x) \Delta_x^k \frac{\partial^m}{\partial \nu^m} H_\nu^{(2)}(x) \right| \\ &= \sup_{x \in I} \left| \lambda_a^-(x) \frac{\partial^m}{\partial \nu^m} \left( \nu^{2k} H_\nu^{(2)}(x) \right) \right| < \infty, \end{aligned}$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , en virtud de (3.2.20), (3.2.21) y (3.2.24). Es decir, como función de  $x$  se tiene que  $\frac{\partial^m}{\partial \nu^m} H_\nu^{(2)}(x) \in \mathcal{F}_a$ , para  $\nu$  arbitrariamente fijado.

- (viii) El operador  $\Delta$ , definido por (2.1.5) define una aplicación lineal y continua del espacio  $\mathcal{F}_a$  en sí mismo. Ciertamente, se tiene que

$$\gamma_{k,a}(\Delta\varphi) = \gamma_{k+1,a}(\varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{F}_a$ .

Entonces, el operador diferencial

$$\Delta^* = \Delta_x^* = x^2 D^2 + 3x D + x^2 + 1, \quad (3.2.26)$$

se define en  $\mathcal{F}'_a$  como el operador adjunto de  $\Delta$  actuando en  $\mathcal{F}_a$ , esto es,

$$\langle \Delta^* f, \varphi \rangle = \langle f, \Delta \varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{F}'_a, \quad \varphi \in \mathcal{F}_a,$$

resultando ser igualmente una aplicación lineal y continua del espacio  $\mathcal{F}'_a$  en sí mismo.

**Nota 3.1** Merece la pena destacar que en (vii) se ha establecido un resultado más general que el propuesto. En realidad se ha demostrado que

$$\frac{\partial^m}{\partial \nu^m} \left( \nu^l H_\nu^{(2)}(x) \right) \in \mathcal{F}_a,$$

como función de  $x$ , para cualesquiera  $m, l = 0, 1, 2, \dots$ , y para  $\nu \in \mathbb{C}$  fijado arbitrariamente.

### 3.3. La transformación H-K-L en el espacio de funciones generalizadas $\mathcal{F}'_a$

Para extender la transformación (2.1.1)-(2.1.2) al espacio de funciones generalizadas  $\mathcal{F}'_a$  utilizaremos el método del núcleo. Dada  $f \in \mathcal{F}'_a$  se definirá la transformada generalizada de Hankel-Kontorovich-Lebedev aplicando directamente  $f$  al núcleo  $H_\nu^{(2)}(\cdot)$

$$(\mathcal{J}'f)(\nu) = F(\nu) = \left\langle f(x), H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle. \quad (3.3.1)$$

Obsérvese que esta definición tiene sentido ya que,  $H_\nu^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{F}_a$  merced a la propiedad (vii).

**Ejemplo 3.1** Fácilmente se comprueba que

$$\varphi(x) = e^{-px} \in \mathcal{F}_a,$$

para toda  $a > 0$ . Su transformada H-K-L es [59, p. 290, (2)]

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(e^{-px}) &= F_1(\nu) \\ &= \frac{i}{\sqrt{p^2 + 1} \operatorname{sen} \pi \nu} \left[ (p + \sqrt{p^2 + 1})^\nu - e^{i\pi \nu} (p + \sqrt{p^2 + 1})^{-\nu} \right], \end{aligned}$$

si  $\operatorname{Re} \nu > 0$  y  $|\operatorname{Im} \nu| < 1$ . Obsérvese que  $F_1(\nu)$  es analítica en la banda  $|\operatorname{Im} \nu| < 1$ .

**Ejemplo 3.2** Si en el ejemplo anterior, en particular, ponemos  $p = \operatorname{sh} \beta$ ,  $\beta > 0$ , se tiene que

$$\varphi(x) = e^{-(\operatorname{sh} \beta)x} \in \mathcal{F}_a,$$

para toda  $a > 0$  y

$$\mathcal{J}(e^{-(\text{sh}\beta)x}) = F_2(\nu) = \frac{2}{\text{ch}\beta} \frac{e^{i\frac{\pi\nu}{2}}}{\text{sen}\pi\nu} \text{sh} \left[ \left( i\frac{\pi}{2} - \beta \right) \nu \right].$$

**Ejemplo 3.3** Resulta trivial ver que

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{2}{x}}}{x} \in \mathcal{F}_a,$$

también para toda  $a > 0$ , siendo su transformada H-K-L [32, p. 700, 6.635-1 ]

$$\mathcal{J}(x^{-1}e^{-\frac{2}{x}}) = F_3(\nu) = 2H_\nu^{(2)}(2)K_\nu(2).$$

En este caso  $F_3(\nu)$  es una función entera [42, p. 108-109 ].

**Ejemplo 3.4** La distribución de Dirac

$$\delta(x - x_0) \in \mathcal{F}'_a, \quad a > 0, \quad x_0 > 0,$$

y su transformada H-K-L generalizada vale, según la definición (3.3.1),

$$\mathcal{J}'(\delta(x - x_0)) = \left\langle \delta(x - x_0), H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle = H_\nu^{(2)}(x_0).$$

**Ejemplo 3.5** Análogamente se tiene que

$$\delta^{(k)}(x - x_0) \in \mathcal{F}'_a, \quad a > 0, \quad x_0 > 0,$$

para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$ , resultando que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(\delta^{(k)}(x - x_0))(\nu) &= \left\langle \delta^{(k)}(x - x_0), H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle \\ &= \left\langle \delta(x - x_0), (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle \\ &= (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} H_\nu^{(2)}(x) \Big|_{x=x_0}. \end{aligned}$$

En los dos últimos ejemplos las funciones imagen son funciones enteras.

**Teorema 3.1 (Teorema de analiticidad)** Si  $f \in \mathcal{F}'_a$  y  $F = \mathcal{J}'f$  es definida por (3.3.1), entonces  $F$  es una función entera.

*Prueba:* Sea  $\nu \in \mathbb{C}$  arbitrariamente fijado. Consideremos dos circunferencias concéntricas  $B_1$  y  $B_2$  de radios  $r$  y  $r'$ , respectivamente ( $0 < r < r'$ ) y tomemos un incremento complejo  $\Delta\nu$  tal que  $0 < |\Delta\nu| < r$ . Pongamos

$$\frac{F(\nu + \Delta\nu) - F(\nu)}{\Delta\nu} - \left\langle f(x), \frac{\partial}{\partial\nu} H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle = \left\langle f(x), A_{\Delta\nu}(x) \right\rangle \quad (3.3.2)$$

donde

$$A_{\Delta\nu}(x) = \frac{H_{\nu+\Delta\nu}^{(2)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)}{\Delta\nu} - \frac{\partial}{\partial\nu} H_\nu^{(2)}(x).$$

Todo tiene sentido pues, por la propiedad (vii), se ve fácilmente que tanto  $\frac{\partial}{\partial\nu} H_\nu^{(2)}(\cdot)$  como  $A_{\Delta\nu}(\cdot)$  pertenecen a  $\mathcal{F}_a$ . Por otra parte, de (2.1.9) y de la fórmula integral de Cauchy, se infiere

$$\begin{aligned} \Delta_x^k(A_{\Delta\nu}(x)) &= \frac{(\nu + \Delta\nu)^{2k} H_{\nu+\Delta\nu}^{(2)}(x) - \nu^{2k} H_\nu^{(2)}(x)}{\Delta\nu} - \frac{\partial}{\partial\nu} (\nu^{2k} H_\nu^{(2)}(x)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2} \frac{\Delta\nu}{(\mu - \nu - \Delta\nu)(\mu - \nu)^2} \mu^{2k} H_\mu^{(2)}(x) d\mu. \end{aligned}$$

Tenemos que demostrar que  $\lambda_a^-(x) |\mu|^{2k} |H_\mu^{(2)}(x)|$  está uniformemente acotado en  $x \in I$ ,  $\mu \in B_2$ . A tal fin recurriremos a las expresiones asintóticas (3.2.20), (3.2.21) y (3.2.24) con  $m = 0$ , y estudiaremos con mayores detalles las cantidades  $C_j(\nu, k)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 8$ , que allí comparecen. De este modo obtenemos que si  $2x \geq 1$ , las expresiones asintóticas (3.2.20) y (3.2.21) adoptan la forma

$$\begin{aligned} |H_\nu^{(2)}(x)| &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{\frac{\pi}{2} Im\nu}}{|\Gamma(\nu + \frac{1}{2})|} \\ &\cdot \left( 2^{\frac{1}{2}(Re\nu - \frac{1}{2})} \Gamma\left(Re\nu + \frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}(Re\nu - \frac{1}{2})} \Gamma(2Re\nu, 1) x^{-Re\nu} \right), \quad (3.3.3) \end{aligned}$$

si  $Re\nu \geq \frac{1}{2}$ , y

$$|H_\nu^{(2)}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{\frac{\pi}{2} Im\nu}}{|\Gamma(\nu + \frac{1}{2})|} \Gamma\left(Re\nu + \frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.3.4)$$

si  $0 \leq \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$ .

Además, cuando  $0 < 2x < 1$ , la expresión (3.2.24) se reduce a

$$|H_\nu^{(2)}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{\frac{\pi}{2} \operatorname{Im} \nu}}{|\Gamma(\nu + \frac{1}{2})|} \cdot \left( 2^{\frac{1}{2}(\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2})} \gamma\left(\operatorname{Re} \nu + \frac{1}{2}, 1\right) x^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}(\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2})} \Gamma(2\operatorname{Re} \nu) x^{-\operatorname{Re} \nu} \right), \quad (3.3.5)$$

si  $\operatorname{Re} \nu \geq \frac{1}{2}$ , y

$$|H_\nu^{(2)}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{\frac{\pi}{2} \operatorname{Im} \nu}}{|\Gamma(\nu + \frac{1}{2})|} \Gamma\left(\operatorname{Re} \nu + \frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.3.6)$$

si  $0 \leq \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$ .

Finalmente, si  $\operatorname{Re} \nu < 0$ , utilizaremos (3.2.25). Nótese que en las anteriores acotaciones aparecen las funciones gamma  $\Gamma(\nu)$  y gamma incompleta  $\gamma(\nu, 1)$ , que son funciones meromorfas con polos simples en  $\nu = 0, -1, -2, \dots$ , y la función gamma complementaria  $\Gamma(\nu, 1)$ , que es entera ([19, vol.I], [42]). Se ve inmediatamente que  $e^{-\frac{\pi}{x}} x^{-\operatorname{Re} \nu} \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow 0+$ , para todo valor de  $\nu \in \mathbb{C}$ .

En definitiva, de las anteriores consideraciones y de (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) y (3.3.6), se deduce que

$$\sup_{x \in I, \nu \in B_2} \lambda_a^-(x) |\nu|^{2k} |H_\nu^{(2)}(x)| \leq C.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |\lambda_a^-(x) \Delta_x^k A_{\Delta\nu}(x)| &\leq \frac{|\Delta\nu|}{2\pi} \int_{B_2} \frac{|\mu|^{2k} \lambda_a^-(x) |H_\mu^{(2)}(x)|}{|\mu - \nu - \Delta\nu| |\mu - \nu|^2} |d\mu| \\ &\leq C |\Delta\nu| \int_{B_2} \frac{|d\mu|}{(r' - r) r'^2} \\ &\leq \frac{C |\Delta\nu|}{(r' - r) r'} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

si  $|\Delta\nu| \rightarrow 0$ . Esto implica que  $A_{\Delta\nu}(\cdot) \rightarrow 0$ , si  $\Delta\nu \rightarrow 0$ , en la topología del espacio  $\mathcal{F}_a$ , lo cual entraña, haciendo en (3.3.2) que  $\Delta\nu \rightarrow 0$ ,

$$F'(\nu) = \left\langle f(x), \frac{\partial}{\partial \nu} H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle.$$

En general,

$$F^{(n)}(\nu) = \left\langle f(x), \frac{\partial^n}{\partial \nu^n} H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y termina la prueba. ■

**Teorema 3.2 (Teorema de acotación)** *Si  $F(\nu)$  es la transformada de Hankel-Kontorovich-Lebedev de  $f \in \mathcal{F}'_a$ , dada por (3.3.1), entonces*

$$F(\nu) = O\left(|\nu|^{2r} e^{\frac{\pi}{2}(|\operatorname{Im}\nu| - \operatorname{Im}\nu)} 2^{\frac{1}{2}(\operatorname{Re}\nu - \frac{1}{2})} e^{\operatorname{Re}\nu \ln \operatorname{Re}\nu + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\nu}\right), \quad (3.3.7)$$

si  $\operatorname{Re}\nu \geq \frac{1}{2}$ , y

$$F(\nu) = O\left(|\nu|^{2r} e^{\frac{\pi}{2}(|\operatorname{Im}\nu| - \operatorname{Im}\nu)} 2^{\frac{1}{2}(\operatorname{Re}\nu - \frac{1}{2})}\right), \quad (3.3.8)$$

si  $0 \leq \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$ , cuando  $|\operatorname{Im}\nu| \rightarrow \infty$ .

*Prueba:* De (3.2.8), (2.1.9) y (vi) se deriva que

$$|F(\nu)| \leq C \max_{0 \leq k \leq r} \sup_{x \in I} \left| \lambda_a^-(x) \nu^{2k} H_\nu^{(2)}(x) \right|.$$

Ahora es suficiente considerar las expresiones (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) y (3.3.6), la fórmula de Stirling ([19], [42, p. 12]) y el hecho que  $\lambda_a^-(x) x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow 0+$  y  $x \rightarrow +\infty$ , y que  $\lambda_a^-(x) x^{-\operatorname{Re}\nu} \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow 0+$ , para cada  $\nu \in \mathbb{C}$ . Para el caso  $\operatorname{Re}\nu < 0$ , aplicamos este último resultado a (1.2.7), es decir, a  $H_\nu^{(2)}(x) = e^{\nu\pi i} H_{-\nu}^{(2)}(x)$ , siendo ahora  $\operatorname{Re}(-\nu) > 0$ . ■

**Teorema 3.3 (Teorema de inversión)** *Sea  $f \in \mathcal{F}'_a$  y denotemos por*

$$(\mathcal{J}'f)(\nu) = F(\nu) = \left\langle f(x), H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle$$

*su transformada generalizada de Hankel-Kontorovich-Lebedev. Entonces se tiene*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0+} \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{2x} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu = f(x), \quad (3.3.9)$$

*en el sentido de la convergencia en el espacio  $\mathcal{D}'(I)$ .*

Para probar este teorema nos apoyaremos en dos lemas previos. Sea  $\varphi$  un elemento cualquiera de  $\mathcal{D}(I)$  y supongamos que  $\text{sop}\varphi \subset [c, d]$ , donde  $0 < c < d$ . En lo que sigue pondremos

$$\Phi(\nu) = \int_0^\infty J_\nu(y) \frac{\varphi(y)}{y} dy. \quad (3.3.10)$$

**Lema 3.1** *Para todo número real fijo  $N > 0$ , se cumple que*

$$\begin{aligned} & \int_{-iN}^{iN} -\frac{1}{2} \langle f(x), H_\nu^{(2)}(x) \rangle \nu e^{\rho\nu^2} \Phi(\nu) d\nu \\ &= \left\langle f(x), -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} \nu e^{\rho\nu^2} H_\nu^{(2)}(x) \Phi(\nu) d\nu \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

*Prueba:* Si  $\varphi \equiv 0$ , el resultado es trivial, de modo que consideraremos que  $\varphi \not\equiv 0$ . Usando (2.1.9) y [42, p. 14], y recurriendo a (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) y (3.3.6) con  $\text{Re}\nu = 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} & \left| \lambda_a^-(x) \Delta_x^k \left( -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) \Phi(\nu) d\nu \right) \right| \\ & \leq \frac{\lambda_a^-(x)}{2} \int_{-N}^N e^{-\rho t^2} |t|^{2k+1} |H_{it}^{(2)}(x)| |\Phi(it)| dt \\ & \leq C \lambda_a^-(x) \int_{-N}^N e^{-\rho t^2} |t|^{2k+1} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}t}}{|\Gamma(\frac{1}{2} + it)|} x^{-\frac{1}{2}} |\Phi(it)| dt \\ & \leq C \int_{-N}^N e^{-\rho t^2} |t|^{2k+1} e^{-\frac{\pi}{2}t} (\text{ch } \pi t)^{\frac{1}{2}} |\Phi(it)| dt < \infty, \end{aligned}$$

ya que el integrando es una función continua. Ello nos permite asegurar que

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) \Phi(\nu) d\nu \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-N}^N e^{-\rho t^2} t H_{it}^{(2)}(x) \Phi(it) dt \in \mathcal{F}_a. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Por consiguiente, el segundo miembro de (3.3.11) tiene sentido.

A continuación dividimos el intervalo  $[-N, N]$  en  $2m$  subintervalos de igual longitud  $\frac{N}{m}$  y construimos la suma de Riemann correspondiente a la integral (3.3.12), es decir,

$$-\frac{1}{2} \sum_{r=-m+1}^m i \frac{rN}{m} e^{-\rho \frac{r^2 N^2}{m^2}} H_{i \frac{rN}{m}}^{(2)}(x) \Phi\left(i \frac{rN}{m}\right) i \frac{N}{m}.$$

La linealidad de  $f$  nos permite escribir

$$\begin{aligned} & \sum_{r=-m+1}^m -\frac{1}{2} \left\langle f(x), H_{i \frac{rN}{m}}^{(2)}(x) \right\rangle i \frac{rN}{m} e^{-\rho \frac{r^2 N^2}{m^2}} H_{i \frac{rN}{m}}^{(2)}(x) \Phi\left(i \frac{rN}{m}\right) i \frac{N}{m} \\ &= \left\langle f(x), -\frac{1}{2} \sum_{r=-m+1}^m i \frac{rN}{m} e^{-\rho \frac{r^2 N^2}{m^2}} H_{i \frac{rN}{m}}^{(2)}(x) \Phi\left(i \frac{rN}{m}\right) i \frac{N}{m} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Hemos de probar, pues, que

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \sum_{r=-m+1}^m i \frac{rN}{m} e^{-\rho \frac{r^2 N^2}{m^2}} H_{i \frac{rN}{m}}^{(2)}(x) \Phi\left(i \frac{rN}{m}\right) i \frac{N}{m} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-N}^N ite^{-\rho t^2} H_{it}^{(2)}(x) \Phi(it) idt, \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

en el sentido de la convergencia en el espacio  $\mathcal{F}_a$ . A tal fin analizaremos la expresión

$$\begin{aligned} J(x, m) &= \lambda_a^-(x) \Delta_x^k \left[ \frac{1}{2} \int_{-N}^N ite^{-\rho t^2} H_{it}^{(2)}(x) \Phi(it) idt \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{r=-m+1}^m i \frac{rN}{m} e^{-\rho \frac{r^2 N^2}{m^2}} H_{i \frac{rN}{m}}^{(2)}(x) \Phi\left(i \frac{rN}{m}\right) i \frac{N}{m} \right] \\ &= \frac{\lambda_a^-(x)}{2} \left[ \int_{-N}^N (it)^{2k+1} e^{-\rho t^2} H_{it}^{(2)}(x) \Phi(it) idt \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=-m+1}^m \left(i \frac{rN}{m}\right)^{2k+1} e^{-\rho \frac{r^2 N^2}{m^2}} H_{i \frac{rN}{m}}^{(2)}(x) \Phi\left(i \frac{rN}{m}\right) i \frac{N}{m} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Usando (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) y (3.3.6) con  $Re\nu = 0$  y las expresiones asintóticas (1.2.17), (1.2.18) y (1.2.19), se llega a que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| e^{-\frac{a}{x}} (it)^{2k+1} e^{-\rho t^2} H_{it}^{(2)}(x) \right| \leq N^{2k+1} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| e^{-\frac{a}{x}} H_{it}^{(2)}(x) \right| = 0,$$

para todo  $t \in [-N, N]$  y, en forma similar,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| e^{-ax} (it)^{2k+1} e^{-\rho t^2} H_{it}^{(2)}(x) \right| = 0,$$

para todo  $t \in [-N, N]$ . Estos resultados significan que para todo número real  $\varepsilon > 0$ , existen  $x_0, X_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 > 0$ ,  $X_0 > 0$ , tales que

$$\left| \lambda_a^-(x) (it)^{2k+1} e^{-\rho t^2} H_{it}^{(2)}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \left[ \int_{-N}^N |\Phi(it)| dt \right]^{-1},$$

para todo  $x \in I$ ,  $0 \leq x < x_0$  y  $x > X_0$ , respectivamente. Luego,

$$\left| \lambda_a^-(x) \int_{-N}^N (it)^{2k+1} e^{-\rho t^2} H_{it}^{(2)}(x) \Phi(it) i dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (3.3.16)$$

para todo  $x \in I$ ,  $0 \leq x < x_0$  y para cualquier  $x > X_0$ .

Análogamente,

$$\begin{aligned} & \left| \lambda_a^-(x) \sum_{r=-m+1}^m \left( i \frac{rN}{m} \right)^{2k+1} e^{-\rho \frac{r^2 N^2}{m^2}} H_{i \frac{rN}{m}}^{(2)}(x) \Phi\left( i \frac{rN}{m} \right) i \frac{N}{m} \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{3} \sum_{r=-m+1}^m \left| \Phi\left( i \frac{rN}{m} \right) \right| \frac{N}{m} \left[ \int_{-N}^N |\Phi(it)| dt \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Como quiera que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{r=-m+1}^m \left| \Phi\left( i \frac{rN}{m} \right) \right| \frac{N}{m} = \int_{-N}^N |\Phi(it)| dt < 2 \int_{-N}^N |\Phi(it)| dt,$$

podemos asegurar que existe  $\nu_1 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq \nu_1$ , resulta que

$$\sum_{r=-m+1}^m \left| \Phi\left(i\frac{rN}{m}\right) \right| \frac{N}{m} < 2 \int_{-N}^N |\Phi(it)| dt.$$

Por consiguiente, para  $m \geq \nu_1$ , se deduce de (3.3.17) que

$$\left| \lambda_a^-(x) \sum_{r=-m+1}^m \left(i\frac{rN}{m}\right)^{2k+1} e^{-\rho\frac{r^2N^2}{m^2}} H_{i\frac{rN}{m}}^{(2)}(x) \Phi\left(i\frac{rN}{m}\right) i\frac{N}{m} \right| < \frac{2}{3}\varepsilon. \quad (3.3.18)$$

En definitiva, de (3.3.15), (3.3.16) y (3.3.18) se sigue que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(x, m) = 0,$$

para todo  $x \in I$  tal que  $0 \leq x < x_0$  ó  $x > X_0$ .

Por otra parte, el integrando de (3.3.12) es una función continua en el compacto

$$\{(x, t) : x_0 \leq x \leq X_0, \quad -N \leq t \leq N\},$$

lo cual implica que es uniformemente continua. En esta situación el límite de la suma de Riemann coincide con la correspondiente integral, en otras palabras, dado  $\varepsilon > 0$  arbitrario, existe  $\nu_2 \in \mathbb{N}$  y para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq \nu_2$ , resulta que  $|J(x, m)| < \varepsilon$ , para todo  $x \in I$ ,  $x_0 \leq x \leq X_0$ .

Finalmente, combinando todos estos resultados, si tomamos  $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ , sigue que para todo  $m \geq \nu$  es  $|J(x, m)| < \varepsilon$ , para todo  $x \in I$ . Con ello se prueba (3.3.14), y haciendo que  $m \rightarrow \infty$  en (3.3.13) se concluye la validez de (3.3.11). ■

**Lema 3.2** *Si ponemos*

$$W(x; N, \rho) = -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) \int_0^\infty J_\nu(y) \frac{\varphi(y)}{y} dy d\nu,$$

*resulta que  $W(x; N, \rho)$  converge en  $\mathcal{F}_a$  a  $\varphi$  cuando  $N \rightarrow +\infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ .*

*Prueba:* Si tenemos en cuenta (2.1.8) y (2.1.9), integramos por partes  $2k$  veces respecto de la variable  $y$ , no olvidamos que  $\text{supp } \varphi \subset [c, d]$  y aplicamos el teorema de Fubini, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\lambda_a^-(x)\Delta_x^k W(x; N, \rho) &= -\frac{1}{2}\lambda_a^-(x) \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) \nu^{2k} \int_c^d J_\nu(y) \frac{\varphi(y)}{y} dy d\nu \\
&= -\frac{1}{2}\lambda_a^-(x) \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) \int_c^d (\Delta_y^k J_\nu(y)) \frac{\varphi(y)}{y} dy d\nu \\
&= -\frac{1}{2}\lambda_a^-(x) \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) \int_c^d J_\nu(y) \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} dy d\nu \\
&= -\frac{1}{2}\lambda_a^-(x) \int_c^d \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu dy \\
&= -\frac{1}{2}\lambda_a^-(x) \int_0^\infty \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu dy \\
&= -\frac{1}{2}\lambda_a^-(x) \left[ \int_0^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^\infty \right] \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \\
&\quad \cdot \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu dy \\
&= W_1(x; N, \rho) + W_2(x; N, \rho) + W_3(x; N, \rho), \quad (3.3.19)
\end{aligned}$$

donde  $\delta \in \mathbb{R}$ , con  $0 < \delta < c$ , es cierto número real que fijaremos más adelante, y  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$  representan integrales sobre los intervalos  $(0, x - \delta)$ ,  $(x - \delta, x + \delta)$  y  $(x + \delta, \infty)$ , respectivamente.

Comenzaremos analizando la integral  $W_3(x; N, \rho)$ . Nótese que, reemplazando  $H_\nu^{(2)}(x)$  por su definición (1.2.5), se pueden intercambiar los roles de  $x$  y  $y$ . En efecto [38],

$$\int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu = \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu. \quad (3.3.20)$$

Por tanto, podemos escribir  $W_3(x; N, \rho)$  de la forma

$$W_3(x; N, \rho) = -\frac{\lambda_a^-(x)}{2} \int_{x+\delta}^\infty \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu dy. \quad (3.3.21)$$

Si  $x + \delta \geq d$ , entonces  $W_3 \equiv 0$ , ya que  $\text{sop}\varphi \subset [c, d]$ . Supongamos que  $x + \delta < d$ , es decir,  $x < d - \delta$ . Si fuera  $0 < x + \delta < c$ , la integral sobre el intervalo  $(x + \delta, \infty)$ , se reduce a una integral sobre el intervalo  $(c, d)$ . De acuerdo con D. S. Jones [38] podemos deformar el camino de la integral

$$\int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu \quad (3.3.22)$$

desplazándolo de  $\text{Re}\nu = 0$  hasta cierto punto  $\nu$  en el plano complejo con  $\text{Re}\nu > 0$ . Fijado  $\nu_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\nu_0 > 0$ , el nuevo camino de integración  $\Gamma$  esta constituido por dos semirrecta que parte de  $\nu_0$  y forman ángulos  $\pm\theta$  ( $\theta$  ligeramente mayor que  $\frac{\pi}{4}$ ) con el eje real positivo, como se muestra en la Figura 2.2.2.  $\Gamma_T$  es la parte de  $\Gamma$  formado por los segmentos  $AB$  y  $BC$ , es decir,

$$\Gamma_T = \{\nu \in \mathbb{C} : \nu = \nu_0 + te^{\pm i\theta}, \quad 0 \leq t < T\}.$$

Recordemos que  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ , por lo cual  $y^{-1}\Delta^k\varphi(y)$  satisface las hipótesis del teorema de inversión clásico de D. S. Jones [38] y es válido reemplazar la integral a lo largo del eje imaginario  $(-i\infty, i\infty)$  por la integral a lo largo del nuevo camino  $\Gamma$ . Así pues, probar que  $W_3(x; N, \rho)$ , dado por (3.3.21), converge uniformemente a cero,  $x \in I$ , cuando  $N \rightarrow +\infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ , es equivalente a verificar que

$$-\frac{\lambda_a^-(x)}{2} \int_{x+\delta}^{\infty} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{\Gamma_T} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu dy \quad (3.3.23)$$

converge uniformemente a cero,  $x \in I$ , cuando  $T \rightarrow +\infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ . La última integral en (3.3.23) converge absolutamente. Efectivamente, cuando  $T \rightarrow +\infty$ , a lo largo del segmento  $BC$  (sobre el cual  $\nu = \nu_0 + te^{i\theta}$ ,  $0 \leq t < T$ ), se tiene

$$\begin{aligned} & \left| \int_{BC} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu \right| \\ & \leq C \int_0^\infty e^{\rho(\nu_0^2 + 2\nu_0 t \cos \theta + t^2 \cos 2\theta)} e^{(\nu_0 + t \cos \theta) \ln \frac{x}{y}} dt \\ & \leq C e^{\rho\nu_0^2} \int_0^\infty e^{\rho(2\nu_0 t \cos \theta + t^2 \cos 2\theta)} dt < \infty, \end{aligned}$$

puesto que, por una parte,  $0 < x < x + \delta < y < d$  implica que  $\ln \frac{x}{y} < 0$  y, por otra parte,  $\cos 2\theta < 0$  debido a la especial elección de  $\theta$ . Es más, esta integral converge absolutamente, incluso si  $\rho = 0$ , ya que

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{(\nu_0+t\cos\theta)\ln\frac{x}{y}} dt \leq \int_0^\infty e^{(\nu_0+t\cos\theta)\ln\frac{x}{x+\delta}} dt \\ & \leq \int_0^\infty e^{(\nu_0+t\cos\theta)\ln\frac{d-\delta}{d}} dt = e^{\nu_0\ln\frac{d-\delta}{d}} \sec\theta \ln^{-1} \frac{d}{d-\delta} < \infty. \end{aligned}$$

Lo mismo ocurre a lo largo del segmento  $AB$ . Así pues, por el teorema de la convergencia dominada podemos hacer  $\rho = 0$  en la integral en  $\nu$  presente en la expresión (3.3.23) si  $T \rightarrow +\infty$ . Por otra parte, si cerramos la región angular  $\widehat{ABC}$  de amplitud  $2\theta$  dada por un arco de circunferencia de radio  $T$  y centrado en  $\nu_0$ , la integral sobre la curva cerrada  $ADCBA$  (ver Figura 2.2.2) vale cero por el Teorema de Cauchy [3], a causa de la analiticidad de la función  $\nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x)$  en dicha región. Ello nos permite escribir

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_T} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\widehat{ADC}} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu, \quad (3.3.24)$$

donde  $\widehat{ADC}$  denota el arco de circunferencia de la figura. Pero sobre este arco, la integral vale cero si  $T \rightarrow +\infty$ . En efecto, sobre dicho arco  $\nu = \nu_0 + T e^{i\phi}$ , con  $-\theta < \phi < \theta$ , y en virtud de (1.2.27), se tiene

$$\left| \int_{\widehat{ADC}} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu \right| \leq C e^{\nu_0 \ln \frac{d-\delta}{d}} T \int_0^\theta e^{T \ln \frac{d-\delta}{d} \cos \phi} d\phi.$$

Haciendo la sustitución  $\beta = \frac{\pi}{2} - \phi$  y teniendo en cuenta que  $\sin \beta \geq \frac{2\beta}{\pi}$  para todo  $\beta$  tal que  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ , esta última integral está acotada por

$$\begin{aligned} & C e^{\nu_0 \ln \frac{d-\delta}{d}} T \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2T}{\pi} \beta \ln \frac{d-\delta}{d}} d\beta \\ & = C \pi e^{\nu_0 \ln \frac{d-\delta}{d}} \ln^{-1} \left( \frac{d-\delta}{d} \right) \left( e^{T \ln \frac{d-\delta}{d}} - e^{\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-\theta) T \ln \frac{d-\delta}{d}} \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

si  $T \rightarrow +\infty$ , puesto que  $\ln \frac{d-\delta}{d} < 0$ , independientemente de  $x, y \in I$ . Consecuentemente, el primer miembro de (3.3.24) también tiende a cero, uniformemente en  $x, y \in I$ , en otras palabras,

$$\int_{\Gamma} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu = 0.$$

Entonces, se infiere de (3.3.21) y (3.3.23) que, cuando  $T \longrightarrow +\infty$  ( $N \longrightarrow +\infty$ ),

$$|W_3(x; N, \rho)| \leq C\gamma_k(\varphi) \sup_{x \in I, y \in [c, d]} \left| \int_{\Gamma} \nu J_{\nu}(x) H_{\nu}^{(2)}(y) d\nu \right| = 0. \quad (3.3.25)$$

A continuación estudiaremos la integral

$$W_1(x; N, \rho) = -\frac{\lambda_a^-(x)}{2} \int_0^{x-\delta} \frac{\Delta^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_{\nu}^{(2)}(x) J_{\nu}(y) d\nu dy. \quad (3.3.26)$$

Si fuera  $x - \delta \leq c$ , esta integral valdría cero. Aceptaremos, pues, que  $x - \delta > c$ . Cuando  $x - \delta \geq d$ , es válido reemplazar la integral a lo largo del intervalo  $(0, x - \delta)$  por la integral a lo largo de  $(c, d)$ . Como antes, se puede sustituir la integral interior de (3.3.26) por la integral a lo largo del camino  $\Gamma_T$

$$-\frac{\lambda_a^-(x)}{2} \int_0^{x-\delta} \frac{\Delta^k \varphi(y)}{y} \int_{\Gamma_T} e^{\rho\nu^2} \nu H_{\nu}^{(2)}(x) J_{\nu}(y) d\nu dy.$$

De (1.2.27), intercambiando los papeles entre las variables  $x$  e  $y$ , se tiene que

$$|e^{\rho\nu^2} \nu H_{\nu}^{(2)}(x) J_{\nu}(y)| \leq \pi^{-1} |e^{\nu \ln \frac{y}{x}}|,$$

donde siempre  $\ln \frac{y}{x} < 0$ , puesto que  $0 < c < y < x - \delta$ . Esto implica que la integral sobre  $\Gamma_T$  es absolutamente convergente aun en el caso de que  $\rho = 0$ . Por consiguiente, probar que (3.3.26) tiende uniformemente a cero,  $x \in I$ , cuando  $N \longrightarrow +\infty$  y  $\rho \longrightarrow 0+$ , equivale a verificar que

$$-\frac{\lambda_a^-(x)}{2} \int_0^{x-\delta} \frac{\Delta^k \varphi(y)}{y} \int_{\Gamma_T} \nu H_{\nu}^{(2)}(x) J_{\nu}(y) d\nu dy \quad (3.3.27)$$

converge uniformemente a cero,  $x \in I$ , cuando  $T \longrightarrow +\infty$ .

Si  $x - \delta \leq c$ , hemos visto que  $W_1(x; N, \rho) = 0$ . Asumiremos entonces que  $x - \delta > c$ . Primeramente, si  $c < x - \delta < d$  (lo cual implica que  $c + \delta < x < d + \delta$ ), en virtud del Teorema de Cauchy y de (1.2.27), resulta que (ver Figura 2.2.2)

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Gamma_T} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu \right| &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \int_{ADC} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu \right| \\ &\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} CT e^{\nu_0 \ln \frac{d}{d+\delta}} \int_0^\theta e^{T \cos \phi \ln(\frac{d}{d+\delta})} d\theta = 0, \end{aligned}$$

uniformemente en  $x \in I$ , por cuanto  $\ln \frac{d}{d+\delta} < 0$ . En segundo lugar, cuando  $x - \delta \geq d$  ( $x \geq d + \delta$ ) se tiene que  $\frac{y}{x} \leq \frac{d}{d+\delta}$  y vale el mismo razonamiento y conclusión que acabamos de conseguir. En consecuencia,

$$\int_{\Gamma} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu = 0,$$

para toda  $x \in I$ ,  $y \in [c, d]$ . De estos resultados, y de (3.3.26) y (3.3.27), se llega a que

$$|W_1(x; N, \rho)| \leq C \gamma_k(\varphi) \sup_{x \in I, y \in [c, d]} \left| \int_{\Gamma} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu \right| = 0. \quad (3.3.28)$$

Las conclusiones (3.3.25) y (3.3.28) implican que las integrales sobre los intervalos  $(0, x - \delta)$  y  $(x + \delta, \infty)$  no son significativas.

Finalmente estudiaremos la integral

$$W_2(x; N, \rho) = -\frac{\lambda_a^-(x)}{2} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\Delta^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho \nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu dy. \quad (3.3.29)$$

Hemos de verificar que  $W_2(x; N, \rho)$  converge a  $\lambda_a^-(x) \Delta^k \varphi(x)$ , uniformemente en  $x \in I$ , cuando  $N \rightarrow +\infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ . Con este objetivo escribimos

$$\begin{aligned} W_2^*(x; N, \rho) &= W_2(x; N, \rho) - \lambda_a^-(x) \Delta^k \varphi(x) \\ &= \lambda_a^-(x) \left( -\frac{1}{2} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\Delta^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho \nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) J_\nu(y) d\nu dy - \Delta^k \varphi(x) \right) \\ &= \lambda_a^-(x) \left( -\frac{1}{2} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\Delta^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho \nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu dy \right. \\ &\quad \left. - \Delta^k \varphi(x) \right), \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

a tenor de (3.3.20). Debemos probar que  $W_2^*(x; N, \rho) \rightarrow 0$  cuando  $N \rightarrow +\infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ , uniformemente en  $x \in I$ . Obsérvese que si  $x - \delta \geq d$  o  $x + \delta \leq c$ , tanto  $W_2(x; N, \rho)$  como  $\Delta^k \varphi(x)$  valen cero, por lo que  $W_2^* \equiv 0$ . Así pues, basta que estudiemos  $W_2^*$  en el intervalo  $c - \delta < x < d + \delta$ .

Para alcanzar nuestra meta intentaremos conectar esta transformada con la de Laplace [18]. Consideraremos, como punto de partida, la transformada de Laplace [20, p. 188(55)]

$$H_\nu^{(2)}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \nu\pi} e^{sy} ds,$$

donde  $b = s + (s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ ,  $y > 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  y  $|\operatorname{Re} \nu| < 1$ . De esta forma se obtiene que

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} H_\nu^{(2)}(y) \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \nu\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{sy} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} dy ds.$$

A continuación procederemos como en [38, p. 139], es decir, multiplicamos ambos miembros de la igualdad anterior por  $-\frac{1}{2} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x)$ , integramos desde  $-iN$  a  $iN$  y cambiamos el orden de integración, llegando a que

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0+} -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) \int_{x-\delta}^{x+\delta} H_\nu^{(2)}(y) \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} dy d\nu \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0+} -\frac{1}{4\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \\ & \cdot \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{sy} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{\operatorname{sen} \nu\pi} d\nu dy ds. \quad (3.3.31) \end{aligned}$$

Elijamos  $N$  suficientemente grande como para que el ángulo  $\widehat{COD} = \phi_1$  sea ligeramente mayor que  $\frac{\pi}{4}$  y analicemos la integral en  $\nu$  sobre el arco  $\widehat{PC}$ , cuyos puntos son de la forma  $\nu = Ne^{i\phi}$ ,  $\phi_1 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  (véase Figura 2.2.2). Obsérvese que  $\phi_1 \rightarrow \theta$  si  $N \rightarrow +\infty$ . Recurriendo a (1.2.25), resulta que

$$\left| \int_{\overline{PC}} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{\operatorname{sen} \nu\pi} d\nu \right| \leq 2 \int_{\phi_1}^{\frac{\pi}{2}} e^{\rho N^2 \cos 2\phi} \sqrt{\frac{N}{2\pi}}$$

$$\cdot e^{N \cos \phi - N \cos \phi \ln \frac{2N}{x} + N\phi \operatorname{sen} \phi} \frac{\operatorname{ch}(N \cos \phi \ln |b| - N \arg b \operatorname{sen} \phi)}{\operatorname{sh}(N \operatorname{sen} \phi)} d\phi \longrightarrow 0,$$

si  $N \longrightarrow +\infty$ , pues  $\rho > 0$  y  $\cos 2\phi < 0$ , por lo cual el término predominante es  $e^{\rho N^2 \cos 2\phi}$ . La misma conclusión vale si integramos a lo largo del arco  $\overline{QA}$ . Por tanto, si elegimos ahora  $\nu_0 \in \mathbb{R}$  de modo que  $0 < \nu_0 < 1$ , y representamos por  $\Gamma_{N,T}$  a la curva cerrada  $PQABCP$  de la Figura 2.2.2 constituida por el segmento  $[-iN, iN]$ , los dos segmentos,  $\Gamma_T$  y los arcos de circunferencias  $\overline{PC}$  y  $\overline{QA}$ , podemos asegurar que

$$\int_{\Gamma_{N,T}} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{\operatorname{sen} \nu\pi} d\nu = 0, \quad (3.3.32)$$

en virtud del Teorema de Cauchy, ya que  $\nu = 0$  es una singularidad evitable y el resto de los polos del integrando yacen fuera del recinto limitado por la curva  $\Gamma_{N,T}$ . Si hacemos que  $N \longrightarrow +\infty$  (lo cual entraña que  $T \longrightarrow +\infty$ ) en (3.3.32) y tenemos presente que las integrales sobre los arcos  $\overline{PC}$  y  $\overline{QA}$  se anulan, se infiere que

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{\operatorname{sen} \nu\pi} d\nu = \int_{\Gamma} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{\operatorname{sen} \nu\pi} d\nu.$$

Ahora bien, esta última integral converge absolutamente, incluso si  $\rho = 0$ . En efecto, sobre  $\Gamma_T$  es  $\nu = \nu_0 + te^{i\theta}$ ,  $0 \leq t < T$ , y en virtud de (1.2.25),

$$\left| \int_{\Gamma_T} \nu J_\nu(x) \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{\operatorname{sen} \nu\pi} d\nu \right|$$

$$\leq \int_{\Gamma_T} \sqrt{\frac{|\nu|}{2\pi}} \left| e^{\nu - \nu \ln \frac{2\nu}{x}} \right| \left| \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{\operatorname{sen} \nu\pi} \right| |d\nu| < \infty,$$

si  $T \longrightarrow +\infty$ , puesto que el término prevaleciente es  $e^{-\nu \ln \frac{2\nu}{x}}$ . Por consiguiente,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{\operatorname{sen} \nu\pi} d\nu = \int_{\Gamma} \nu J_\nu(x) \frac{b^\nu - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{\operatorname{sen} \nu\pi} d\nu.$$

Esta última integral será evaluada mediante la teoría de los residuos [3]. Por un lado, y debido a la presencia dominante del factor  $e^{-\nu \ln \frac{2\nu}{x}}$ , la integral sobre el arco  $\overline{ADC}$  se anula cuando  $T \rightarrow \infty$ . Por otro lado, en el recinto limitado por  $\Gamma$ , el integrando posee polos simples en  $\nu = 1, 2, 3, \dots$  (ver Figura 2.2.2). Entonces, utilizando teoría de residuos, D. S. Jones [38] estableció que

$$\int_{\Gamma} \nu J_{\nu}(x) \frac{b^{\nu} - e^{i\nu\pi} b^{-\nu}}{\operatorname{sen} \nu\pi} d\nu = 2ix(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-sx}.$$

En definitiva, tomando límite cuando  $N \rightarrow +\infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ , (3.3.30) adopta la forma

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0+} \lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_{\nu}(x) \int_{x-\delta}^{x+\delta} H_{\nu}^{(2)}(y) \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} dy d\nu \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{sy} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} 2ix(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-sx} dy ds \\ &= -\frac{ix}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{s(y-x)} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} dy ds \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{x}{2\pi i} \int_{\gamma-iM}^{\gamma+iM} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{s(y-x)} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} dy ds \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{x}{2\pi i} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{\gamma-iM}^{\gamma+iM} e^{s(y-x)} ds dy \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{x}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} e^{\gamma(y-x)} \frac{\operatorname{sen} M(y-x)}{y-x} dy \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{x}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi_k^*(y) e^{\gamma(y-x)} \frac{\operatorname{sen} M(y-x)}{y-x} dy \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{x}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_k^*(y+x) e^{\gamma y} \frac{\operatorname{sen} My}{y} dy, \end{aligned}$$

donde

$$\varphi_k^*(y) = \frac{\Delta^k \varphi(y)}{y}.$$

Por esta vía hemos demostrado que

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\Delta_y^k \varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(y) J_\nu(x) d\nu dy \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{x}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_k^*(y+x) e^{\gamma y} \frac{\text{sen } My}{y} dy. \end{aligned}$$

Como consecuencia de ello, (3.3.30) puede ser reformulado como

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow +\infty} W_2^*(x; N, \rho) \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \lambda_a^-(x) \left( \frac{x}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_k^*(y+x) e^{\gamma y} \frac{\text{sen } My}{y} dy - x \varphi_k^*(x) \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \lambda_a^-(x) x \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varphi_k^*(y+x) e^{\gamma y} - \varphi_k^*(x)}{y} \text{sen } My dy \right. \\ & \quad \left. + \varphi_k^*(x) \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\text{sen } My}{y} dy - 1 \right) \right] \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \lambda_a^-(x) x \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Theta(y, x) \text{sen } My dy \right. \\ & \quad \left. + \varphi_k^*(x) \left( \frac{1}{\pi} \int_{-M\delta}^{M\delta} \frac{\text{sen } y}{y} dy - 1 \right) \right], \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

donde

$$\Theta(y, x) = \frac{\varphi_k^*(y+x) e^{\gamma y} - \varphi_k^*(x)}{y},$$

que es una función continua de  $(x, y)$ , para todo  $x > 0$  e  $y + x > 0$ , con tal que  $\Theta(x, y)$  se defina en  $y = 0$  por continuidad, es decir,

$$\Theta(0, x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \Theta(y, x).$$

En particular, esta función es continua en el conjunto

$$\left\{ (y, x) : -\frac{c}{2} < y < \frac{c}{2}, \quad \frac{c}{2} < x < \frac{c}{2} + d \right\}$$

y, obviamente, permanece acotada en él. Por tanto, dado arbitrariamente  $\varepsilon > 0$ , podemos escoger un  $\delta > 0$  de modo que

$$\left| \lambda_a^-(x) x \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Theta(y, x) \operatorname{sen} My dy \right| \leq C2\delta < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.3.34)$$

A partir de este momento elegimos  $0 < \delta < \min\{\frac{\varepsilon}{4C}, c\}$ .

Como quiera que  $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{y} dy = 1$  y  $x\lambda_a^-(x)\varphi_k^*(x)$  está uniformemente acotada en  $I$ , se infiere que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x\lambda_a^-(x)\varphi_k^*(x) \left( \frac{1}{\pi} \int_{-M\delta}^{M\delta} \frac{\operatorname{sen} y}{y} dy - 1 \right) = 0,$$

uniformemente en  $x \in I$ , esto es, podemos hacer

$$\left| x\lambda_a^-(x)\varphi_k^*(x) \left( \frac{1}{\pi} \int_{-M\delta}^{M\delta} \frac{\operatorname{sen} y}{y} dy - 1 \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.3.35)$$

para  $M$  suficientemente grande. Llevando (3.3.34) y (3.3.35) a (3.3.33) se deduce que  $W_2^*(x; T, 0)$  converge uniformemente a cero cuando  $T \rightarrow +\infty$ ,  $x \in I$ . Consiguientemente, de (3.3.30) se infiere que  $W_2^*(x; N, \rho)$  converge uniformemente a cero, si  $N \rightarrow +\infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ ,  $x \in I$ . Lo que equivale a asegurar que

$$W_2(x; N, \rho) \rightarrow \lambda_a^-(x) \Delta^k \varphi(x), \quad (3.3.36)$$

cuando  $N \rightarrow +\infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ , uniformemente en  $x \in I$ .

Por último, combinando (3.3.19), (3.3.25), (3.3.28) y (3.3.36) finalizamos la demostración de nuestro aserto. ■

*Prueba del Teorema 3.3:* Tenemos que demostrar que, para todo  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ ,

$$\left\langle -\frac{1}{2x} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu, \varphi(x) \right\rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle, \quad (3.3.37)$$

cuando  $N \rightarrow +\infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ . Para  $N > 0$  arbitrariamente grande y fijado, en virtud del Teorema 3.2 con  $Re\nu = 0$  y (1.2.25) podemos garantizar que la integral en el interior del funcional existe para todo  $\rho > 0$  y origina una función continua de  $x \in I$ . Por tanto, el primer miembro de (3.3.37) puede ser escrito, en consideración de la definición (3.3.1), como

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(y) F(\nu) d\nu \varphi(y) dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_c^d \frac{\varphi(y)}{y} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(y) F(\nu) d\nu dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu \langle f(x), H_\nu^{(2)}(x) \rangle \int_c^d J_\nu(y) \frac{\varphi(y)}{y} dy d\nu \\
&= \left\langle f(x), -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu H_\nu^{(2)}(x) \int_c^d J_\nu(y) \frac{\varphi(y)}{y} dy d\nu \right\rangle \\
&= \left\langle f(x), W(x; N, \rho) \right\rangle, \tag{3.3.38}
\end{aligned}$$

donde el intercambio entre el funcional y las integrales está justificado por el Lema 3.1. Por fin, aplicando el Lema 3.2 se infiere que el último miembro de (3.3.38) tiende a  $\langle f, \varphi \rangle$  cuando  $N \rightarrow +\infty$  y  $\rho \rightarrow 0+$ , que es el resultado deseado. ■

**Teorema 3.4 (Teorema de unicidad)** Sean  $f, g \in \mathcal{F}'_a$  y sean  $F(\nu) = (\mathcal{J}'f)(\nu)$  y  $G(\nu) = (\mathcal{J}'g)(\nu)$  sus respectivas transformadas de Hankel-Kontorovich-Lebedev. Supongamos que  $F = G$  en  $\mathbb{C}$ . Entonces,  $f = g$  en el sentido de la igualdad en el espacio distribucional  $\mathcal{D}'(I)$ .

*Prueba:* Sigue inmediatamente del Teorema 3.3, ya que

$$\begin{aligned}
\langle f, \varphi \rangle &= \lim_{\rho \rightarrow 0+} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\langle -\frac{1}{2x} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu, \varphi(x) \right\rangle \\
&= \lim_{\rho \rightarrow 0+} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\langle -\frac{1}{2x} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) G(\nu) d\nu, \varphi(x) \right\rangle = \langle g, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

es decir,  $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ , para todo  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ . ■

**Nota 3.2** La demostración del teorema de inversión (Teorema 3.3) es similar a la verificación del mismo resultado en el espacio  $\mathcal{E}'(I)$  de las distribuciones de soporte compacto, llevada a cabo en el Capítulo 2. Sin embargo, aquí resulta una tarea más laboriosa. Ciertamente, en el Capítulo 2 las distribuciones consideradas son de soporte compacto y, al investigar la fórmula de

*inversión, nos apoyamos en funciones pruebas del espacio  $\mathcal{D}(I)$ , que también tienen soportes compactos, lo cual facilita considerablemente la demostración. En este capítulo únicamente son de soporte compacto las funciones prueba, pero no en general las funciones generalizadas.*

*No obstante, se amplió notablemente el espacio de funciones generalizadas en que se puede definir la transformación H-K-L. Por ejemplo, la función*

$$f(x) = e^{-\alpha x - \frac{\beta}{x}}$$

*cumple la condición*

$$\int_I \frac{|f(x)|}{\lambda_a^-(x)} dx < \infty$$

*siempre que  $0 < a < \min\{\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta\}$ . Por consiguiente, de acuerdo con la propiedad (v) del párrafo 3.2,  $f \in \mathcal{F}'_a$  como distribución regular. Ahora bien, es obvio que  $f$  no tiene soporte compacto, lo que excluye que pertenezca a  $\mathcal{E}'(I)$ . Luego,  $\mathcal{E}'(I)$  es un subespacio propio de  $\mathcal{F}'_a$ .*

**Nota 3.3** *Tal como ocurre con otras transformaciones [86], la fórmula de inversión sigue siendo válida cuando la integral presenta en el Teorema 3.3 es reemplazada por*

$$-\frac{1}{2x} \int_{-iN_1}^{iN_2} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu,$$

*para  $N_1, N_2 > 0$ , y después se hace tender  $N_1$  y  $N_2$  independientemente a infinito.*

### 3.4. Reglas operacionales. Aplicaciones

Hemos visto en la propiedad (viii) que si  $f \in \mathcal{F}'_a$ , entonces  $\Delta^* f \in \mathcal{F}'_a$ . Ahora, según la definición (3.3.1) y teniendo en cuenta la fórmula (2.1.9), se obtiene

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}' \Delta^* f)(\nu) &= \left\langle \Delta^* f(x), H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle \\ &= \left\langle f, \Delta_x H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle = \left\langle f, \nu^2 H_\nu^{(2)}(\cdot) \right\rangle = \nu^2 (\mathcal{J}' f)(\nu), \end{aligned}$$

es decir,

$$(\mathcal{J}'\Delta^* f)(\nu) = \nu^2(\mathcal{J}'f)(\nu) = \nu^2 F(\nu), \quad (3.4.1)$$

donde  $F(\nu) = (\mathcal{J}'f)(\nu)$ . En general,

$$(\mathcal{J}'\Delta^{*k} f)(\nu) = \nu^{2k} F(\nu), \quad (3.4.2)$$

para todo  $f \in \mathcal{F}'_a$  y  $k = 0, 1, 2, \dots$

Para ilustrar la teoría con aplicaciones, planteamos estos dos problemas:

(a) Resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$P(\Delta^*)u = f, \quad (3.4.3)$$

donde  $f \in \mathcal{F}'_a$  es conocida y  $u \in \mathcal{F}'_a$  es la incognita, siendo  $P$  un polinomio cualquiera con coeficientes constantes sin raíces en el eje real no positivo. Si ponemos  $U(\nu) = (\mathcal{J}'u)(\nu)$  y  $F(\nu) = (\mathcal{J}'f)(\nu)$ , aplicando la transformada (3.3.1) a (3.4.3) y haciendo uso de la regla operacional (3.4.2), resulta la ecuación algebraica

$$P(\nu^2)U(\nu) = F(\nu),$$

cuya solución es

$$U(\nu) = \frac{F(\nu)}{P(\nu^2)}.$$

La solución formal se deduce aplicando la fórmula de inversión (3.3.9)

$$u(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) \frac{F(\nu)}{P(\nu^2)} d\nu.$$

(b) Hallar la solución  $u(r, \theta)$  de la ecuación en derivadas parciales

$$\Delta^* u(r, \theta) + \frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial \theta^2} = f(r, \theta), \quad r > 0, \quad (3.4.4)$$

en una cuña infinita, sobre cuyos lados  $\theta = 0$  y  $\theta = \theta_0$  ( $0 < \theta_0 < \pi$ ) son impuestas las siguientes condiciones

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \theta_0) = 0. \quad (3.4.5)$$

Asumimos que  $u(., \theta) \in \mathcal{F}'_a$ , mientras que  $f(r, \theta)$  es conocida y  $f(., \theta) \in \mathcal{F}'_a$ , para todo  $\theta$ ,  $0 < \theta < \theta_0$ . Si ponemos  $U(\nu, \theta) = \mathcal{J}'(u(r, \theta))$  y  $F(\nu, \theta) = \mathcal{J}'(f(r, \theta))$ , y aplicamos la regla operacional (3.4.1), el problema original se convierte en un problema de valores en la frontera para la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(\nu, \theta)}{\partial \theta^2} + \nu^2 U(\nu, \theta) = F(\nu, \theta) \\ U(\nu, 0) = 0, \quad U(\nu, \theta_0) = 0 \end{cases} \quad (3.4.6)$$

El método de variación de los parámetros nos permite hallar la solución general

$$U(\nu, \theta) = C_1 \cos \nu \theta + C_2 \operatorname{sen} \nu \theta + \frac{1}{\nu} \int_{\theta_0}^{\theta} F(\nu, t) \operatorname{sen} \nu(\theta - t) dt$$

Determinando las constantes  $C_1$  y  $C_2$  de acuerdo con las condiciones de contorno, concluimos que la solución del problema transformado (3.4.6) viene dada por

$$\begin{aligned} U(\nu, \theta) &= \frac{1}{\nu} \int_{\theta_0}^{\theta} F(\nu, t) \operatorname{sen} \nu(\theta - t) dt \\ &\quad - \frac{\operatorname{sen} \nu(\theta_0 - \theta)}{\nu \operatorname{sen} \nu \theta_0} \int_0^{\theta_0} F(\nu, t) \operatorname{sen} \nu t dt \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Finalmente, recurriendo al Teorema 3.3 de inversión, se infiere que la solución formal del problema (3.4.4)-(3.4.5) es

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{1}{2r} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} J_\nu(r) \left[ \int_{\theta_0}^{\theta} F(\nu, t) \operatorname{sen} \nu(\theta - t) dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{sen} \nu(\theta_0 - \theta)}{\nu \operatorname{sen} \nu \theta_0} \int_0^{\theta_0} F(\nu, t) \operatorname{sen} \nu t dt \right] d\nu \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

sin más que invertir (3.4.7) y utilizar la fórmula (3.3.9).

Para problemas de la Física-Matemática cuyo objetivo es la determinación de ondas armónicas en dominios con formas de cuñas infinitas, resulta más conveniente utilizar la versión (1.1.5)-(1.1.6) de la transformación de Kontorovich-Lebedev que contiene la función de Hankel  $H_\nu^{(2)}(z)$  de segunda

clase y orden  $\nu$  en el núcleo, en lugar de la más conocida dada por el par (1.1.1)-(1.1.2). Interesantes aplicaciones físicas de la transformada (1.1.5)-(1.1.6) pueden ser encontradas en ([38], [39] y [44]).

**Nota 3.4** *La fórmula (3.4.8) se simplifica notablemente si resolvemos el problema de valores en la frontera (3.4.6) a partir de la función de Green asociada al mismo. En efecto, no resulta difícil verificar que la función de Green correspondiente al problema homogéneo*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(\nu, \theta)}{\partial \theta^2} + \nu^2 U(\nu, \theta) = 0 \\ U(\nu, 0) = 0, \quad U(\nu, \theta_0) = 0 \end{cases}$$

es

$$G(\theta, t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} \nu(t - \theta_0) \operatorname{sen} \nu \theta}{\nu \operatorname{sen} \nu \theta_0}, & 0 \leq \theta \leq t \\ \frac{\operatorname{sen} \nu(\theta - \theta_0) \operatorname{sen} \nu t}{\nu \operatorname{sen} \nu \theta_0}, & t \leq \theta \leq \theta_0. \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución del problema (3.4.6) adopta la forma

$$U(\nu, \theta) = \int_0^{\theta_0} G(\theta, t) F(\nu, t) dt$$

y (3.4.8) se puede expresar

$$u(r, \theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2r} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(r) \int_0^{\theta_0} G(\theta, t) F(\nu, t) dt d\nu.$$

# CAPÍTULO 4

## LA CONVOLUCIÓN

### DISTRIBUCIONAL ASOCIADA A LA TRANSFORMACIÓN H-K-L

#### 4.1. Introducción

En este capítulo se crea una estructura convolucional para la transformación H-K-L. Por cuestiones de simetría, en lugar de la transformación dada por el par (1.1.5)-(1.1.6) –que ha sido investigada en los capítulos precedentes– consideraremos la variante

$$(\mathcal{H}f)(\nu) = F(\nu) = \int_0^\infty \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} f(x) dx \quad (4.1.1)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}^{-1}F)(x) = f(x) &= -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu \\ &= \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu e^{-\pi\nu} \operatorname{sen} \pi\nu H_\nu^{(2)}(x) F(\nu) d\nu. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

La segunda expresión para la fórmula de inversión se obtiene sin más que acudir a la conexión (1.2.5) existente entre las funciones de Bessel  $J_\nu(x)$  y  $H_\nu^{(2)}(x)$ .

Obsérvese que entre estas dos versiones de la transformación H-K-L se dan las siguientes relaciones

$$\mathcal{H}f = \mathcal{J}(x^{-1}f)$$

y

$$\mathcal{J}f = \mathcal{H}(xf).$$

El Teorema 1.1 de D. S. Jones adaptado a esta nueva versión quedaría establecido en los siguientes términos

**Teorema 4.1** *Supongamos que  $f$  satisface las condiciones*

$$(a) \int_0^1 x^{-1}|f(x)| \ln \frac{1}{x} dx < \infty,$$

$$(b) \int_c^\infty x^{-\frac{3}{2}} f(x) e^{-i(x-\frac{\pi}{4})} dx \text{ es finita, para toda } c > 0.$$

Entonces existe

$$F(\nu) = \int_0^\infty \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} f(x) dx, \quad (\operatorname{Re} \nu = 0),$$

y se tiene que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

siempre que la función  $f$  sea de variación acotada en un entorno de  $x > 0$ .

Para la transformación integral en la dirección contraria, es decir, para la transformación (4.1.2)-(4.1.1), el Teorema 1.2 se expresaría así

**Teorema 4.2** *Sea  $\mathcal{S}_{\nu_0}$  la región del plano complejo considerada en el Teorema 1.2. Supongamos que:*

$$(a) F \text{ es analítica en un dominio } \mathcal{S}_a \text{ que contiene a } \mathcal{S}_{\nu_0} \text{ (} a > \nu_0 \text{)}.$$

$$(b) F(\nu) = O(|\nu|^{-\frac{1}{2}-\delta} e^{-\frac{\pi}{2}|Im\nu|}), \text{ cuando } |Im\nu| \rightarrow \infty, \text{ en } \mathcal{S}_a, \text{ donde } \delta > 1.$$

Entonces, si ponemos

$$f(x) = -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu,$$

se tiene que

$$F(\nu) = \int_0^\infty \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} f(x) dx.$$

Esta nueva versión de la transformación H-K-L nos forzará a modificar, aunque sólo sea ligeramente, el espacio de funciones prueba  $\mathcal{F}_a$  estudiado en el Capítulo 3.

Comenzaremos motivando la introducción de una convolución para la transformación H-K-L en un marco clásico. En este proceso resultará fundamental la consideración de un núcleo  $E(x, y, z)$  y el estudio de sus propiedades. Este núcleo conserva la simetría del núcleo asociado con la transformación de Kontorovich-Lebedev [25], pero no es positivo. La presencia de las funciones  $H_\nu^{(2)}(x)$  le da un carácter oscilatorio.

Tras introducir en el segundo párrafo el operador traslación y la convolución desde un punto de vista clásico, en la tercera sección se investiga esta convolución en espacios de funciones prueba y distribuciones análogas a las consideradas en el Capítulo 3, analizando sus principales propiedades, reglas operacionales y conexión con la transformación generalizada H-K-L. Finalmente, en la última sección se muestran algunas aplicaciones.

## 4.2. El operador traslación y la convolución para la transformación H-K-L en el sentido clásico.

A fin de motivar la introducción de la convolución  $*$  para la transformación H-K-L, partimos de su principal regla operacional, a saber,

$$\mathcal{H}(\varphi * \psi)(\nu) = \omega(\nu)\Phi(\nu)\Psi(\nu),$$

donde  $\Phi(\nu) = (\mathcal{H}\varphi)(\nu)$  y  $\Psi(\nu) = (\mathcal{H}\psi)(\nu)$ , para cierto factor  $\omega(\nu)$ . Como consecuencia de (1.3.8) se tiene, por una parte, que

$$\mathcal{H}(\varphi * \psi)(-\nu) = \omega(-\nu)\Phi(-\nu)\Psi(-\nu) = \omega(-\nu)e^{-i2\pi\nu}\Phi(\nu)\Psi(\nu).$$

Por otra parte, la propia convolución como función de  $\nu$  ha de satisfacer

$$\mathcal{H}(\varphi * \psi)(-\nu) = e^{-i\pi\nu}\mathcal{H}(\varphi * \psi)(\nu) = e^{-i\pi\nu}\omega(\nu)\Phi(\nu)\Psi(\nu).$$

Luego, los factores  $\omega$  que acompañan a la convolución verifican la relación

$$\omega(-\nu) = e^{i\pi\nu} \omega(\nu). \quad (4.2.1)$$

**Ejemplo 4.1** La función  $\omega_1(\nu) = e^{-\frac{\pi\nu}{2}}$  cumple esta condición.

**Ejemplo 4.2** La función  $\omega_2(\nu) = e^{-\frac{\pi\nu}{2}} K_{k\nu}(a)$ ,  $a > 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , también satisface la condición (4.2.1), a la vista de (1.2.14).

Operando formalmente y aplicando la fórmula de inversión (Teorema 4.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \varphi * \psi(x) &= \int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{y} \int_0^\infty \frac{\psi(z)}{z} \\ &\cdot \left[ -\frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu \omega(\nu) J_\nu(x) H_\nu^{(2)}(y) H_\nu^{(2)}(z) d\nu \right] dz dy. \end{aligned}$$

Ello sugiere introducir el núcleo

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu \omega(\nu) J_\nu(x) H_\nu^{(2)}(y) H_\nu^{(2)}(z) d\nu. \quad (4.2.2)$$

O bien, de una forma equivalente, a temer de (4.1.2),

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{1}{4i} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu \omega(\nu) e^{-i\pi\nu} \operatorname{sen} \pi\nu \\ &\cdot H_\nu^{(2)}(x) H_\nu^{(2)}(y) H_\nu^{(2)}(z) d\nu. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Como ocurre en el teorema de inversión de D. S. Jones [38], no siempre se puede hacer  $\rho = 0$  en (4.2.2) y (4.2.3). Haremos la siguiente

**Definición 4.1** Diremos que  $\omega(\nu)$  es un factor admisible para la convolución \* si cumple los requisitos que enunciaremos a continuación:

(i)  $\omega$  es analítica,  $\omega \neq 0$ , en la región no acotada del plano complejo que, conteniendo el eje imaginario, está limitado a la izquierda por dos semirrectas que parten del punto  $-\nu_0$  del eje real negativo y a la derecha por dos semirrectas que parten del punto  $\nu_0$  del eje real positivo ( $\nu_0 \geq 0$ ) y forman con él, respectivamente, los ángulos  $\frac{3\pi}{4}$  y  $\frac{\pi}{4}$ .

(ii)  $\omega(-\nu) = e^{i\pi\nu}\omega(\nu)$ .

(iii)  $\omega(\nu) = O\left(e^{-p\pi|Im\nu|}\right)$ , cuando  $|Im\nu| \rightarrow \infty$ ,  $p > 1$ .

Para estos factores admisibles se puede garantizar la existencia de (4.2.2)-(4.2.3) y que es factible hacer  $\rho = 0$ , es decir, se puede escribir

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \omega(\nu) J_\nu(x) H_\nu^{(2)}(y) H_\nu^{(2)}(z) d\nu \\ &= \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \omega(\nu) e^{-i\pi\nu} \operatorname{sen} \pi\nu H_\nu^{(2)}(x) H_\nu^{(2)}(y) H_\nu^{(2)}(z) d\nu. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

En efecto, de la representación integral (1.2.30) de la función de Hankel de segunda clase y de (1.2.31) se infiere, para valores de  $\nu$  imaginarios puros ( $\nu = i\tau$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ ), que

$$\begin{aligned} |H_{i\tau}^{(2)}(x)| &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{e^{-\frac{\pi\tau}{2}}}{|\Gamma(i\tau + \frac{1}{2})|} \int_0^\infty e^{-s} s^{-\frac{1}{2}} \left| \left(1 + \frac{s}{2ix}\right)^{i\tau - \frac{1}{2}} \right| ds \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \frac{(\operatorname{ch} \pi\tau)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s} s^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{s^2}{4x^2}\right)^{-\frac{1}{4}} e^{\tau \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{s}{2x}} ds \\ &\leq C x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi\tau}{2}} e^{\frac{\pi|\tau|}{2}} e^{\frac{\pi\tau}{4}(1+\operatorname{sgn} \tau)} \leq C x^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi\tau}{4}(3\operatorname{sgn} \tau - 1)}. \end{aligned}$$

En definitiva,

$$|H_{i\tau}^{(2)}(x)| \leq C x^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi\tau}{4}(3\operatorname{sgn} \tau - 1)}, \quad (4.2.5)$$

para todo  $x > 0$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ .

Veamos ya que (4.2.4) tiene sentido. Se constata primeramente que

$$\begin{aligned}
E(x, y, z) &= -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \omega(\nu) J_\nu(x) H_\nu^{(2)}(y) H_\nu^{(2)}(z) d\nu \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \omega(i\tau) J_{i\tau}(x) H_{i\tau}^{(2)}(y) H_{i\tau}^{(2)}(z) d\tau \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{-T_1} + \int_{-T_1}^{T_2} + \int_{T_2}^{\infty} \right) \tau \omega(i\tau) J_{i\tau}(x) H_{i\tau}^{(2)}(y) H_{i\tau}^{(2)}(z) d\tau,
\end{aligned}$$

donde  $T_1 > 0$ ,  $T_2 > 0$  se determinarán suficientemente grandes. Para grandes valores de  $|\nu|$ , en particular, para grandes valores de  $\tau$ , sigue de (1.2.27) que

$$\left| \tau J_{i\tau}(x) H_{i\tau}^{(2)}(y) \right| = \left| \frac{i}{\pi} e^{i\tau \ln \frac{x}{y}} \right| = \frac{1}{\pi}.$$

Teniendo en cuenta este resultado, (4.2.5) y la propiedad (iii) de la Definición 4.1, resulta

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{-T_1} \tau \omega(i\tau) J_{i\tau}(x) H_{i\tau}^{(2)}(y) H_{i\tau}^{(2)}(z) d\tau \right| &\leq C \int_{-\infty}^{-T_1} e^{p\pi\tau} \frac{1}{\pi} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi\tau} d\tau \\
&\leq C z^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{-T_1} e^{(p-1)\pi\tau} d\tau < \infty,
\end{aligned}$$

siempre que se tome  $p > 1$ . Análogamente,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{T_2}^{\infty} \tau \omega(i\tau) J_{i\tau}(x) H_{i\tau}^{(2)}(y) H_{i\tau}^{(2)}(z) d\tau \right| &\leq C \int_{T_2}^{\infty} e^{-p\pi\tau} \frac{1}{\pi} z^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi\tau}{2}} d\tau \\
&\leq C z^{-\frac{1}{2}} \int_{T_2}^{\infty} e^{-(p-\frac{1}{2})\pi\tau} d\tau < \infty.
\end{aligned}$$

Así pues, vale (4.2.4).

Aprovechando (4.2.5) se obtiene una útil y sencilla acotación del núcleo  $E(x, y, z)$ . Ciertamente, de (2.1.9), (4.2.4) y (4.2.5) se deduce que

$$\begin{aligned}
\left| \Delta_x^l E(x, y, z) \right| &= \left| \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu^{2l+1} \omega(\nu) e^{-i\pi\nu} \operatorname{sen} \pi\nu H_\nu^{(2)}(x) H_\nu^{(2)}(y) H_\nu^{(2)}(z) d\nu \right| \\
&= \left| \frac{1}{2i} \int_0^{i\infty} \nu^{2l+1} \omega(\nu) e^{-i\pi\nu} \operatorname{sen} \pi\nu H_\nu^{(2)}(x) H_\nu^{(2)}(y) H_\nu^{(2)}(z) d\nu \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} \int_0^\infty (i\tau)^{2l+1} \omega(i\tau) e^{\pi\tau} \operatorname{sh} \pi\tau H_{i\tau}^{(2)}(x) H_{i\tau}^{(2)}(y) H_{i\tau}^{(2)}(z) d\tau \right| \\
&\leq C \int_0^\infty \tau^{2l+1} e^{-p\pi\tau} e^{2\pi\tau} (xyz)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{3\pi\tau}{2}} d\tau \\
&\leq C (xyz)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \tau^{2l+1} e^{-(p-\frac{7}{2})\pi\tau} d\tau,
\end{aligned}$$

para todo  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Por fin, basta elegir  $p > \frac{7}{2}$  para obtener

$$\left| \Delta_x^l E(x, y, z) \right| \leq C (xyz)^{-\frac{1}{2}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.2.6)$$

cualesquiera que sean  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ . Subrayemos que la constante  $C$  no depende de ninguna de estas variables. Nótese que el resultado no varía si el operador  $\Delta_x$  se reemplaza por los operadores  $\Delta_y$  y  $\Delta_z$ .

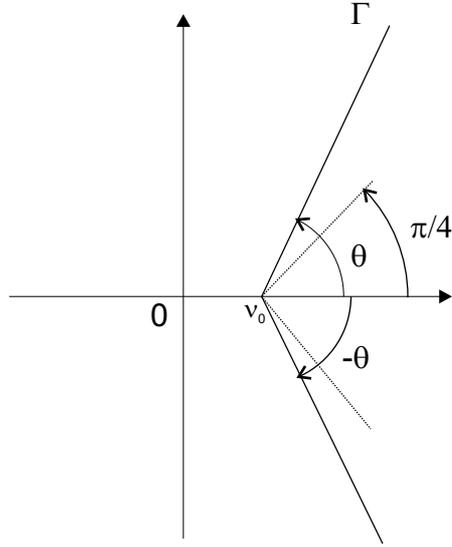
A veces –en una situación más general– aunque no existan las integrales (4.2.4), se puede asegurar la existencia de los límites (4.2.2)-(4.2.3). En efecto, si imponemos a  $\omega(\nu)$  las hipótesis del Teorema 4.2, resultaría

$$\begin{aligned}
E(x, y, z) &= -\frac{1}{2} \int_\Gamma \nu \omega(\nu) J_\nu(x) H_\nu^{(2)}(y) H_\nu^{(2)}(z) d\nu \\
&= \frac{1}{4i} \int_\Gamma \nu \omega(\nu) e^{-i\pi\nu} \operatorname{sen} \pi\nu H_\nu^{(2)}(x) H_\nu^{(2)}(y) H_\nu^{(2)}(z) d\nu.
\end{aligned} \quad (4.2.7)$$

donde, como es sabido,  $\Gamma$  denota el camino de integración que parte del punto  $\nu_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\nu_0 > 0$ , y forma con el eje real positivo ángulos  $\pm\theta$ , con  $\theta$  ligeramente mayor que  $\frac{\pi}{4}$  (ver Figura 4.2.1).

En lo que sigue,  $\varphi$  y  $\psi$  pertenecen a un espacio de funciones apropiado. El operador traslación se define por medio de

$$\mathcal{T}_x \varphi(y) = \int_0^\infty E(x, y, z) \frac{\varphi(z)}{z} dz. \quad (4.2.8)$$

Figura 4.2.1: Camino de integración  $\Gamma$ 

Para todo  $x > 0$  fijado es fácil ver, en virtud de (4.2.6), que  $\mathcal{T}_x$  aplica el espacio  $L^1(I, y^{-\frac{3}{2}} dy)$  en el espacio  $y^{\frac{1}{2}} L^\infty(I)$ . Consecuentemente, la convolución se define como se indica a continuación

$$\begin{aligned} \varphi * \psi(x) &= \int_0^\infty \varphi(y) \mathcal{T}_x \psi(y) \frac{dy}{y} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty E(x, y, z) \frac{\varphi(y)}{y} \frac{\psi(z)}{z} dy dz. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Dado que, a la vista de (4.2.6), se tiene

$$x^{\frac{1}{2}} |\varphi * \psi(x)| \leq C \int_0^\infty y^{-\frac{3}{2}} |\varphi(y)| dy \int_0^\infty z^{-\frac{3}{2}} |\psi(z)| dz,$$

la convolución aplica  $L^1(I, x^{-\frac{3}{2}} dx) \times L^1(I, x^{-\frac{3}{2}} dx)$  en el espacio  $x^{\frac{1}{2}} L^\infty(I)$ .

**Nota 4.1** En nuestro intento de hallar una fórmula de duplicación para la función de Hankel de segunda clase  $H_\nu^{(2)}(x)$ , hemos encontrado algunas integrales que involucran esta función y que no figuran —en lo que sabemos— en las principales tablas consultadas. Partimos del conocido producto de dos funciones de Macdonald [42, p. 140]

$$K_{i\tau}(x)K_{i\tau}(y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{2xyz}} \frac{1}{z} K_{i\tau}(z) dz, \quad (4.2.10)$$

para cada  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $\tau > 0$ . Nótese que  $\arg z = 0$  y  $\arg(-iz) = -\frac{\pi}{2}$ . Entonces, si tenemos en cuenta la relación que existe entre las funciones  $K_\nu(z)$  y  $H_\nu^{(2)}(z)$ , con  $\nu = i\tau$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , [42, p. 109, (5.7.6)]

$$K_\nu(z) = -\frac{\pi i}{2} e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} H_\nu^{(2)}(-iz),$$

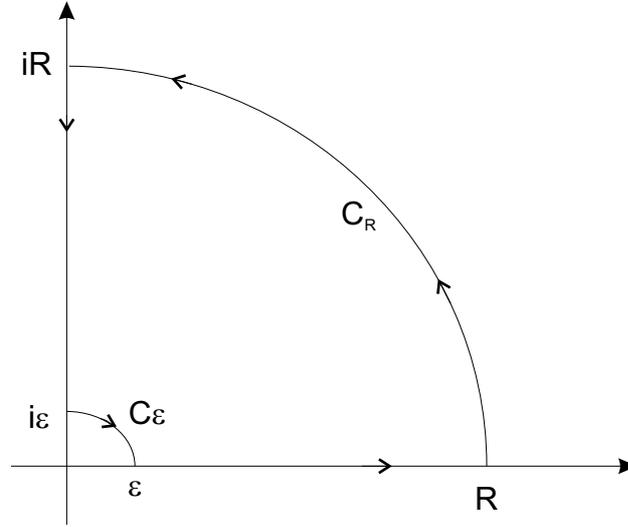
es inmediato que

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{2xyz}} \frac{1}{z} H_\nu^{(2)}(-iz) dz \\ &= -i\pi e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} H_\nu^{(2)}(-ix) H_\nu^{(2)}(-iy). \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Consideremos en el primer cuadrante del plano complejo el contorno integral cerrado  $\Lambda$ , consistente del segmento que va de  $\epsilon$  a  $R$  en el eje real positivo, del cuadrante de circunferencia  $C_R$  de radio  $R$ , del segmento que va de  $iR$  a  $i\epsilon$  en el eje imaginario y del cuadrante de circunferencia  $C_\epsilon$  ( $0 < \epsilon < R$ ), como se muestra en la Figura 4.2.2. Dado que el integrando en (4.2.11) es una función analítica en el dominio limitado por  $\Lambda$ , de acuerdo con el Teorema de Cauchy podemos asegurar que

$$\begin{aligned} & \int_\Lambda e^{-\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{2xyz}} \frac{1}{z} H_\nu^{(2)}(-iz) dz \\ &= \left( \int_\epsilon^R + \int_{C_R} + \int_{iR}^{i\epsilon} + \int_{C_\epsilon} \right) e^{-\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{2xyz}} \frac{1}{z} H_\nu^{(2)}(-iz) dz = 0, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

para todo  $\epsilon$ ,  $0 < \epsilon < 1$ , y para cada  $R > 1$ . Los puntos del arco mayor  $C_R$  son de la forma  $z = Re^{i\theta}$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . De ello se infiere, a la vista de la expresión asintótica (1.2.17) de la función de Hankel  $H_\nu^{(2)}(x)$  para valores grandes del argumento  $x$ , que

Figura 4.2.2: Contorno integral cerrado  $\Lambda$ 

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{-\frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2}{2xyz}}}{z} H_\nu^{(2)}(-iz) dz \right|$$

$$\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{xy}{2R} \cos \theta} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2xy} R \cos \theta} \sqrt{\frac{2}{\pi R}} e^{-R \cos \theta} d\theta \leq C R^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow 0,$$

cuando  $R \rightarrow +\infty$ . Por otra parte, sobre el arco menor  $C_\epsilon$  se tiene que  $z = \epsilon e^{i\theta}$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Teniendo presente (1.2.18), se deduce que

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{e^{-\frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2}{2xyz}}}{z} H_\nu^{(2)}(-iz) dz \right|$$

$$\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{xy}{2\epsilon} \cos \theta} \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^{\epsilon \cos \theta} \frac{|\Gamma(\nu)|}{\pi} d\theta \longrightarrow 0,$$

cuando  $\epsilon \rightarrow 0+$ , por el teorema de la convergencia dominada. Entonces, tomando límites cuando  $\epsilon \rightarrow 0+$  y  $R \rightarrow +\infty$  en (4.2.12), concluimos que la integral a lo largo del eje real positivo coincide con la integral a lo largo del eje imaginario desde 0 hasta  $i\infty$ , es decir, (4.2.11) se puede reescribir de la forma

$$\begin{aligned} & \int_0^{i\infty} e^{\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{2xyz}} \frac{1}{z} H_\nu^{(2)}(-iz) dz \\ &= -i\pi e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} H_\nu^{(2)}(-ix) H_\nu^{(2)}(-iy). \end{aligned}$$

La fórmula (4.2.10), en principio válida para  $x > 0$ ,  $y > 0$ , por continuación analítica puede ser extendida a valores complejos de los argumentos siempre que [75]

$$|\arg x| < \pi, \quad |\arg y| < \pi, \quad |\arg(x+y)| < \frac{\pi}{4}.$$

Por tanto, podemos sustituir en la última expresión  $x$  por  $-ix$  e  $y$  por  $iy$ , para obtener

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{\frac{ix^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{2xyz}} \frac{1}{z} H_\nu^{(2)}(z) dz \\ &= -i\pi e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} H_\nu^{(2)}(-x) H_\nu^{(2)}(y). \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Teniendo en cuenta que [75, p. 75(6)]

$$H_\nu^{(2)}(-x) = 2 \cos \pi x H_\nu^{(2)}(x) + e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}(x),$$

se llega finalmente a que

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{\frac{ix^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{2xyz}} \frac{1}{z} H_\nu^{(2)}(z) dz \\ &= -i\pi e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} \left( 2 \cos \pi x H_\nu^{(2)}(x) + e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}(x) \right) H_\nu^{(2)}(y), \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

para  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

**Nota 4.2** Las fórmulas (4.2.13) y (4.2.14) valen para todo  $\nu \in \mathbb{C}$ ,  $|\operatorname{Re}\nu| < 1$ . En realidad, su primer miembro equivale a

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{z} \cos\left(\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{2xyz}\right) H_\nu^{(2)}(z) dz \\ & + i \int_0^\infty \frac{1}{z} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{2xyz}\right) H_\nu^{(2)}(z) dz. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

A su vez, la primera integral de (4.2.15) se puede expresar como

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{z} \cos\left(\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{2xyz}\right) H_\nu^{(2)}(z) dz \\ & = \left( \int_0^{z_0} + \int_{z_0}^{Z_0} + \int_{Z_0}^\infty \right) \frac{1}{z} \cos\left(\frac{xy}{2z} + \frac{yz}{2x} + \frac{xz}{2y}\right) H_\nu^{(2)}(z) dz, \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

donde  $0 < z_0 < Z_0$ . La integral intermedia, sobre el intervalo  $[z_0, Z_0]$ , existe para todo valor de  $\nu \in \mathbb{C}$ . Por otra parte, si  $Z_0$  es muy grande, invocando la expresión asintótica (1.2.17), sigue para la tercera integral que

$$\left| \int_{Z_0}^\infty \frac{1}{z} \cos\left(\frac{xy}{2z} + \frac{yz}{2x} + \frac{xz}{2y}\right) H_\nu^{(2)}(z) dz \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{\pi}{2} \operatorname{Im}\nu} \int_{Z_0}^\infty \frac{dz}{z^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow 0,$$

si  $Z_0 \longrightarrow \infty$ , para todo  $\nu \in \mathbb{C}$ . En cuanto a la primera integral de (4.2.16), que es la que resta por analizar, para  $z_0 > 0$  muy pequeño y debido a (1.2.18), se infiere que

$$\begin{aligned} & \int_0^{z_0} \frac{1}{z} \cos\left(\frac{xy}{2z} + \frac{yz}{2x} + \frac{xz}{2y}\right) H_\nu^{(2)}(z) dz \\ & \approx i \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} 2^\nu \int_0^{z_0} \frac{1}{z^{1+\nu}} \cos\left(\frac{xy}{2z}\right) dz = i \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} 2^\nu \int_{\frac{1}{z_0}}^\infty t^{\nu-1} \cos(at) dt, \end{aligned}$$

donde  $a = \frac{xy}{2} > 0$ . Integrando por partes, esta última integral vale

$$i \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} 2^\nu \left\{ -z_0^{1-\nu} \operatorname{sen} \frac{a}{z_0} - \frac{\nu-1}{a} \int_{\frac{1}{z_0}}^\infty t^{\nu-2} \operatorname{sen}(at) dt \right\},$$

siempre que  $\operatorname{Re}\nu < 1$ . Además,

$$\left| \int_{\frac{1}{z_0}}^{\infty} t^{\nu-2} \operatorname{sen}(at) dt \right| \leq \frac{z_0^{1-\operatorname{Re}\nu}}{1-\operatorname{Re}\nu}.$$

Si  $\operatorname{Re}\nu \leq 0$ , a tenor de (1.2.7) resulta

$$\begin{aligned} & \int_0^{z_0} \frac{1}{z} \cos\left(\frac{xy}{2z} + \frac{yz}{2x} + \frac{xz}{2y}\right) H_\nu^{(2)}(z) dz \\ &= \int_0^{z_0} e^{i\pi\nu} \frac{1}{z} \cos\left(\frac{xy}{2z} + \frac{yz}{2x} + \frac{xz}{2y}\right) H_{-\nu}^{(2)}(z) dz, \end{aligned}$$

donde ahora  $\operatorname{Re}(-\nu) \geq 0$ , convergiendo –según el argumento anterior– cuando  $\operatorname{Re}(-\nu) < 1$ . Luego, la primera integral de (4.2.16) converge si  $-1 < \operatorname{Re}\nu < 1$ , valiendo el mismo razonamiento para la segunda integral.

### 4.3. La convolución distribucional asociada con la transformación H-K-L

Introduciremos el espacio  $\mathcal{H}_a$ , análogo al considerado en el Capítulo 3. Este nuevo espacio consta de todas las funciones complejas  $\varphi$  infinitamente derivables y definidas en  $I$  tales que

$$\gamma_{k,a}^*(\varphi) = \sup_{x \in I} |\lambda_a^-(x) \Delta_x^{*k} \varphi(x)| < \infty, \quad (4.3.1)$$

donde  $a > 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\lambda_a^-$  denota la función continua

$$\lambda_a^-(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a}{x}}, & x \in (0, 1] \\ e^{-ax}, & x \in [1, +\infty) \end{cases} \quad (4.3.2)$$

y  $\Delta_x^*$  simboliza el operador diferencial (2.1.6). Al igual que le ocurría al espacio  $\mathcal{F}_a$ , con la topología generada por esta familia de seminormas,  $\mathcal{H}_a$  es un espacio de Fréchet ([2], [86]).  $\mathcal{H}'_a$  representa su espacio dual. Subrayemos que el operador  $\Delta^*$  da origen a una aplicación lineal y continua del espacio  $\mathcal{H}_a$  en sí mismo. Por lo tanto, el operador generalizado (2.1.5) definido como el operador adjunto de  $\Delta^*$  mediante

$$\langle \Delta f, \varphi \rangle = \langle f, \Delta^* \varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{H}'_a, \quad \varphi \in \mathcal{H}_a, \quad (4.3.3)$$

también es una aplicación lineal y continua del espacio  $\mathcal{H}'_a$  en sí mismo.

No resulta difícil hallar la conexión existente entre el espacio  $\mathcal{F}_a$  del Capítulo 3 y el nuevo espacio  $\mathcal{H}_a$ . Sin más que tener en cuenta (2.1.7) y que

$$\lambda_{a+b}^-(x) = \lambda_a^-(x) \cdot \lambda_b^-(x),$$

resulta que

$$\varphi \in \mathcal{H}_a \iff x\varphi \in \mathcal{F}_{a+\epsilon},$$

para  $\epsilon > 0$ .

De acuerdo con (2.1.7) y (2.1.9) llegamos a

$$\begin{aligned} \gamma_{k,a}^* \{x^{-1}H_\nu^{(2)}(x)\} &= \sup_{x \in I} |\lambda_a^-(x)x^{-1}\Delta_x^k H_\nu^{(2)}(x)| \\ &= |\nu|^{2k} \sup_{x \in I} |\lambda_a^-(x)x^{-1}H_\nu^{(2)}(x)|. \end{aligned}$$

Finalmente, en virtud de las expresiones asintóticas (1.2.17), (1.2.18) y (1.2.19), y la fórmula (1.2.7) en el caso  $\text{Re}\nu < 0$ , se obtiene

$$\gamma_{k,a}^* \{x^{-1}H_\nu^{(2)}(x)\} < \infty.$$

Esto implica que el núcleo de la transformada (4.1.1) pertenece al espacio  $\mathcal{H}_a$ , es decir,

$$x^{-1}H_\nu^{(2)}(x) \in \mathcal{H}_a.$$

Por lo tanto, como de costumbre, definimos la transformada distribucional H-K-L de cada elemento  $f \in \mathcal{H}'_a$  por el método del núcleo, como

$$(\mathcal{H}'f)(\nu) = F(\nu) = \left\langle f(x), \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} \right\rangle. \quad (4.3.4)$$

A causa de (1.2.7), se tiene que

$$F(-\nu) = e^{-i\pi\nu} F(\nu). \quad (4.3.5)$$

El Teorema 3.3 de inversión [35] para la transformada (2.1.1)-(2.1.2) es reformulado con respecto al par (4.1.1)-(4.1.2) y (4.3.4) como sigue

**Teorema 4.3** *En el sentido de la convergencia en el espacio  $\mathcal{D}'(I)$  se tiene que*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \int_{-iN}^{iN} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(x) F(\nu) d\nu = f(x),$$

donde  $f \in \mathcal{H}'_a$  y  $F$  viene definida por (4.3.4).

Teniendo presente las definiciones (4.3.3) y (4.3.4), así como también las expresiones (2.1.7) y (2.1.9), se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(\Delta f)(\nu) &= \left\langle \Delta f, \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} \right\rangle = \left\langle f, \Delta_x^* \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} \right\rangle \\ &= \left\langle f, \frac{1}{x} \Delta_x H_\nu^{(2)}(x) \right\rangle = \langle f, \nu^2 x^{-1} H_\nu^{(2)}(x) \rangle = \nu^2 \left\langle f, \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} \right\rangle, \end{aligned}$$

esto es, hemos deducido la regla operacional

$$\mathcal{H}'(\Delta f)(\nu) = \nu^2 (\mathcal{H}'f)(\nu). \quad (4.3.6)$$

Recuérdese que una función  $f$  localmente integrable sobre  $I$  y que satisface la condición

$$\int_0^\infty \frac{|f(x)|}{\lambda_a^-(x)} dx < \infty \quad (4.3.7)$$

genera una distribución regular en  $\mathcal{H}'_a$  por medio de

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{H}_a. \quad (4.3.8)$$

Ahora consideraremos un nuevo espacio de funciones pruebas, el espacio  $\mathcal{G}_a$ , constituido por todas las funciones complejas  $\varphi$  infinitamente derivables y definidas en  $I$ , tales que

$$\Gamma_{k,a}(\varphi) = \sup_{x \in I} |\lambda_a^+(x) \Delta_x^{*k} \varphi(x)| < \infty, \quad (4.3.9)$$

donde  $a > 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  y

$$\lambda_a^+(x) = \begin{cases} e^{\frac{a}{x}}, & x \in (0, 1] \\ e^{ax}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Si le asignamos la topología generada por esta colección de seminormas,  $\mathcal{G}_a$  resulta ser un espacio de Fréchet. Obsérvese que, para todo  $\varphi \in \mathcal{G}_a$ , tenemos

$$\begin{aligned}\gamma_{k,a}^*(\varphi) &= \sup_{x \in I} |\lambda_a^-(x) \Delta_x^{*k} \varphi(x)| \\ &= \sup_{x \in I} |(\lambda_a^-(x))^2 \lambda_a^+(x) \Delta_x^{*k} \varphi(x)| \\ &\leq \sup_{x \in I} |\lambda_a^+(x) \Delta_x^{*k} \varphi(x)| \\ &= \Gamma_{k,a}(\varphi),\end{aligned}$$

En efecto,  $\sup_{x \in I} |(\lambda_a^-(x))^2| \leq 1$ .

Además,  $x^{-1}H_\nu^{(2)}(x) \notin \mathcal{G}_a$ , puesto que de (1.2.17) sigue

$$\begin{aligned}|\lambda_a^+(x)x^{-1}H_\nu^{(2)}(x)| &\leq C \left| e^{ax} x^{-1} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi\nu}{x} - \frac{\pi}{4})} \right| \\ &= C \left| e^{i\frac{\pi\nu}{2}} e^{ax} x^{-\frac{3}{2}} \right| \rightarrow \infty\end{aligned}$$

cuando  $x \rightarrow \infty$  y  $\nu$  está fijado.

Resumiendo todos estos resultados, podemos afirmar que  $\mathcal{G}_a$  es un subespacio propio de  $\mathcal{H}_a$  y que la topología de  $\mathcal{G}_a$  es más fuerte que la inducida en él por  $\mathcal{H}_a$ . También se cumple que  $\mathcal{H}'_a \subset \mathcal{G}'_a$ , en el sentido de que cada elemento  $f \in \mathcal{H}'_a$ , cuando se restringe su actuación a  $\mathcal{G}_a$ , define una aplicación lineal y continua sobre  $\mathcal{G}_a$ .

**Proposición 4.1** *Para todo  $\varphi \in \mathcal{G}_a$  y  $k = 0, 1, 2, \dots$  se verifica que*

$$x^k D_x^k \varphi(x) = O(e^{-\frac{a}{x}}), \quad \text{si } x \rightarrow 0+$$

y

$$D_x^k \varphi(x) = O(e^{-ax}), \quad \text{si } x \rightarrow +\infty.$$

*Prueba.* Utilizaremos un argumento similar al dado por H.-J Glaeske y A. Hess [25] en lo que concierne a la transformada de Kontorovich-Lebedev (1.1.1)-(1.1.2). En efecto, sea  $\varphi$  cualquier elemento del espacio  $\mathcal{G}_a$  y recordemos que

$$\Delta^* \varphi(x) = x^2 D^2 \varphi(x) + 3x D \varphi(x) + (x^2 + 1) \varphi(x). \quad (4.3.10)$$

Unos sencillos cálculos muestran que

$$\begin{aligned} (\Delta^*)^2 \varphi(x) &= x^4 D^4 \varphi(x) + 10x^3 D^3 \varphi(x) + (2x^4 + 25x^2) D^2 \varphi(x) \\ &\quad + (10x^3 + 15x) D \varphi(x) + (x^4 + 10x^2 + 1) \varphi(x). \end{aligned}$$

Y, por un proceso inductivo,

$$(\Delta^*)^k \varphi(x) = \sum_{j=0}^{2k} x^j P_k^j(x) D_x^j \varphi(x), \quad (4.3.11)$$

donde  $P_k^j(x)$  son polinomios cuyo grado es  $2k - j$  si  $j$  es par y  $2k - j - 1$  si  $j$  es impar,  $j = 0, 1, 2, \dots, 2k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Se ve fácilmente que  $P_k^{2k}(x) = 1$  y  $P_k^{2k-1}(x) = 2k^2 + k$ .

De igual forma se puede establecer que

$$\begin{aligned} D(x\varphi(x)) &= xD\varphi(x) + \varphi(x), \\ (Dx)^2 \varphi(x) &= x^2 D^2 \varphi(x) + 3xD\varphi(x) + \varphi(x) \end{aligned}$$

En general,

$$(Dx)^n \varphi(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j D^j \varphi(x), \quad (4.3.12)$$

con  $b_j \in \mathbb{Z}^+$ ,  $b_{2n} = 1$  y  $b_{2n-1} = 2n^2 + n$ . Se entiende que

$$(Dx)^n \varphi(x) = (Dx)(Dx) \dots (Dx)D(x\varphi(x)).$$

De la definición (4.3.9) se infiere inmediatamente, por un lado, que

$$\varphi(x) = O(e^{-\frac{a}{x}}), \quad (\Delta^*)^k \varphi(x) = O(e^{-\frac{a}{x}}), \quad (4.3.13)$$

si  $x \rightarrow 0+$ , y, por otro lado,

$$\varphi(x) = O(e^{-ax}), \quad (\Delta^*)^k \varphi(x) = O(e^{-ax}), \quad (4.3.14)$$

cuando  $x \rightarrow \infty$ , para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$

Como quiera que

$$\Delta^* \varphi(x) = (Dx)^2 \varphi(x) + (x^2 + 1)\varphi(x), \quad (4.3.15)$$

se deduce, cuando  $x \rightarrow 0+$ , que

$$(Dx)^2 \varphi(x) = O(e^{-\frac{a}{x}}),$$

esto es,

$$\frac{1}{x^2} D(xD(x\varphi(x))) = O\left(\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x^2}\right).$$

Integrando ambos miembros, en el primero por partes, se obtiene

$$xD\varphi(x) + 3\varphi(x) + 4x \int \frac{\varphi(x)}{x^2} dx = xO(e^{-\frac{a}{x}}).$$

Luego, cuando  $x \rightarrow 0+$ ,

$$xD\varphi(x) = O((1+x)e^{-\frac{a}{x}}) = O(e^{-\frac{a}{x}}). \quad (4.3.16)$$

De (4.3.10), (4.3.13) y (4.3.15) se infiere que

$$x^2 D^2 \varphi(x) = O(e^{-\frac{a}{x}}), \quad x \rightarrow 0+.$$

A continuación suponemos que

$$x^k D^k \varphi(x) = O(e^{-\frac{a}{x}}), \quad x \rightarrow 0+,$$

para  $0 \leq k \leq 2n - 2$ . Para terminar este proceso inductivo, lo verificamos cuando  $k = 2n - 1$  y  $k = 2n$ .

Podemos escribir (4.3.11) en la forma

$$\begin{aligned} (\Delta_x^*)^n \varphi(x) &= x^{2n} D^{2n} \varphi(x) + (2n^2 + n)x^{2n-1} D^{2n-1} \varphi(x) \\ &+ \sum_{j=0}^{2n-2} x^j P_k^j(x) D_x^j \varphi(x). \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Entonces, en virtud de (4.3.13) y de las hipótesis de inducción, concluimos que

$$x^{2n}D^{2n}\varphi(x) + (2n^2 + n)x^{2n-1}D^{2n-1}\varphi(x) = O(e^{-\frac{a}{x}}),$$

cuando  $x \rightarrow 0+$ . Tomando en cuenta este resultado y (4.3.12) resulta

$$\begin{aligned} (Dx)^{2n}\varphi(x) &= x^{2n}D^{2n}\varphi(x) + (2n^2 + n)x^{2n-1}D^{2n-1}\varphi(x) \\ &+ \sum_{j=0}^{2n-2} b_j x^j D_x^j \varphi(x) = O(e^{-\frac{a}{x}}), \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

es decir,

$$\frac{1}{x^2}Dx(Dx)^{2n-1}\varphi(x) = \frac{1}{x^2}O(e^{-\frac{a}{x}}), \quad x \rightarrow 0+.$$

Integrando de nuevo se tiene

$$(Dx)^{2n-1}\varphi(x) + 2(Dx)^{2n-2}\varphi(x) + 4x \int \frac{1}{x^2}(Dx)^{2n-2}\varphi(x)dx = xO(e^{-\frac{a}{x}}),$$

si  $x \rightarrow 0+$ , lo cual entraña que

$$(Dx)^{2n-1}\varphi(x) = O(e^{-\frac{a}{x}}), \quad x \rightarrow 0+.$$

Y, puesto que en base a (4.3.12) es

$$(Dx)^{2n-1}\varphi(x) = x^{2n-1}D^{2n-1}\varphi(x) + \sum_{j=0}^{2n-2} c_j x^j D_x^j \varphi(x), \quad (4.3.19)$$

con  $c_j \in \mathbb{Z}^+$ , se deduce que

$$x^{2n-1}D^{2n-1}\varphi(x) = O(e^{-\frac{a}{x}}), \quad x \rightarrow 0+.$$

Finalmente, de (4.3.17) sigue inmediatamente que

$$x^{2n}D^{2n}\varphi(x) = O(e^{-\frac{a}{x}}), \quad x \rightarrow 0+.$$

Así pues, hemos probado que, para toda  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,

$$x^k D^k \varphi(x) = O(e^{-\frac{a}{x}}),$$

cuando  $x \rightarrow 0+$ .

Estudiemos ahora el comportamiento en el infinito. De (4.3.14) y (4.3.15) resulta

$$(Dx)^2 \varphi(x) = O(x^2 e^{-ax}), \quad x \rightarrow \infty,$$

e integrando,

$$xD\varphi(x) + \varphi(x) = O(xe^{-ax}).$$

De aquí que

$$D\varphi(x) = O\left(\frac{x+1}{x}e^{-ax}\right) = O(e^{-ax}),$$

cuando  $x \rightarrow \infty$ . Entonces, de (4.3.10) se deriva que

$$D^2\varphi(x) = O\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-ax}\right) = O(e^{-ax}),$$

si  $x \rightarrow \infty$ . Asumamos que

$$D^k\varphi(x) = O(e^{-ax}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n-2,$$

cuando  $x \rightarrow \infty$ , y verifiquemos esta acotación cuando  $k = 2n-1$  y  $k = 2n$ .

Combinando (4.3.11) y (4.3.12) se colige que

$$(Dx)^{2n}\varphi(x) = O(e^{-ax}), \quad x \rightarrow \infty,$$

e integrando

$$x(Dx)^{2n-1}\varphi(x) = O(e^{-ax}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.3.20)$$

Ahora bien, de (4.3.19) y (4.3.20) se obtiene

$$x^{2n-1}D^{2n-1}\varphi(x) = O\left(\left(\frac{1}{x^{2n-1}} + \frac{1}{x^{2n}}\right)e^{-ax}\right) = O(e^{-ax}),$$

cuando  $x \rightarrow \infty$ . De (4.3.11) y (4.3.14) y los resultados anteriores se llega a que

$$D^{2n}\varphi(x) = O(e^{-ax}), \quad x \rightarrow \infty.$$

En definitiva, se ha establecido que, para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$D^k\varphi(x) = O(e^{-ax}),$$

cuando  $x \rightarrow \infty$ . ■

Toda función localmente integrable  $g$  en  $I$  que cumple

$$\int_0^\infty \lambda_a^-(x)|g(x)|dx < \infty \quad (4.3.21)$$

genera una función generalizada regular en  $\mathcal{G}'_a$  mediante

$$\langle g, \psi \rangle = \int_0^\infty g(x)\psi(x)dx, \quad \psi \in \mathcal{G}_a. \quad (4.3.22)$$

Efectivamente, para toda  $\psi \in \mathcal{G}_a$ ,

$$|\langle g, \psi \rangle| = \Gamma_{0,a}(\psi) \int_0^\infty \lambda_a^-(x)|g(x)|dx.$$

Por tanto, todo elemento de  $\mathcal{G}_a$  satisface la condición (4.3.21), lo cual implica que  $\mathcal{G}_a$  puede considerarse como un subespacio de  $\mathcal{G}'_a$ .

**Nota 4.3** Sea  $\delta > 0$ . Podemos ver que todo elemento  $\varphi \in \mathcal{G}_{a+\delta}$  genera una distribución regular en  $\mathcal{H}'_a$  por medio de (4.3.8). Ciertamente, dado que  $\lambda_{a+\delta}^-(x) = \lambda_a^-(x)\lambda_\delta^-(x)$ , se tiene que

$$\int_0^\infty \lambda_a^+(x)|\varphi(x)| \leq \Gamma_{0,a+\delta}(\varphi) \int_0^\infty \lambda_\delta^-(x)dx \leq \frac{2}{\delta}\Gamma_{0,a+\delta}(\varphi) < \infty,$$

es decir, la condición (4.3.7) se cumple.

Ahora discutiremos las propiedades más importantes del operador traslación (4.2.8) y el núcleo  $E(x, y, z)$  definido por (4.2.4)

- (i) El operador traslación (4.2.8) está bien definido en el espacio  $\mathcal{G}_a$ . En efecto, para todo  $\varphi \in \mathcal{G}_a$ , se obtiene que

$$(xy)^{\frac{1}{2}} |\mathcal{T}_x \varphi(y)| \leq C \Gamma_{0,a}(\varphi) \int_0^\infty \lambda_a^-(z) \frac{dz}{z^{\frac{3}{2}}} = C \Gamma_{0,a}(\varphi),$$

donde  $x, y \in I$ .

- (ii) El operador traslación es simétrico con respecto a  $x$  y  $y$ , esto es,

$$\mathcal{T}_x \varphi(y) = \mathcal{T}_y \varphi(x).$$

- (iii) El núcleo  $E(x, y, z) \in C^\infty(I \times I \times I)$  y, en virtud de (2.1.9), se puede mostrar que

$$\Delta_x E(x, y, z) = \Delta_y E(x, y, z) = \Delta_z E(x, y, z),$$

donde  $\Delta$  es el operador diferencial (2.1.5).

- (iv) Nótese que, a la vista de (4.2.6),

$$\int_0^\infty \lambda_a^-(z) \frac{|E(x, y, z)|}{z} dz \leq C(xy)^{-\frac{1}{2}},$$

lo cual entraña que  $\frac{E(x, y, z)}{z}$  verifica la condición (4.3.21) y consecuentemente da origen a un elemento regular en el espacio  $\mathcal{G}'_a$  mediante (4.3.22). Este hecho nos permite expresar el operador traslación como se indica a continuación

$$\mathcal{T}_x \varphi(y) = \left\langle \frac{E(x, y, z)}{z}, \varphi(z) \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{G}_a.$$

- (v) De conformidad con el resultado anterior se ve fácilmente que [86, p. 44]

$$\mathcal{T}_x \varphi(y) \in C^\infty(I \times I),$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{G}_a$ .

- (vi) El operador diferencial (2.1.5) y el de traslación  $\mathcal{T}_x$  se intercambian, en otras palabras,

$$\Delta_x \mathcal{T}_x \varphi(y) = \Delta_x \mathcal{T}_y \varphi(x) = \mathcal{T}_y \Delta_x \varphi(x) = \mathcal{T}_x \Delta_y \varphi(y) = \Delta_y \mathcal{T}_x \varphi(y),$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{G}_a$ . En efecto, a la vista de (iii) y (v), tiene sentido

$$\Delta_y \mathcal{T}_x \varphi(y) = \int_0^\infty \Delta_y \{E(x, y, z)\} \frac{\varphi(z)}{z} dz = \int_0^\infty \Delta_z \{E(x, y, z)\} \frac{\varphi(z)}{z} dz.$$

Integrando por partes dos veces y tomando en consideración, en base a la Proposición 4.1, que los términos en el exterior de las integrales se anulan, dado que  $\varphi(z) = O(e^{-\frac{a}{z}})$  y  $zD\varphi(z) = O(e^{-\frac{a}{z}})$  si  $z \rightarrow 0+$ , mientras que  $\varphi(z) = O(e^{-az})$  y  $D\varphi(z) = O(e^{-az})$  si  $z \rightarrow +\infty$ , obtenemos

$$\Delta_y \mathcal{T}_x \varphi(y) = \int_0^\infty E(x, y, z) \Delta_z \varphi(z) \frac{dz}{z} = \mathcal{T}_x \Delta_y \varphi(y),$$

que es una de las conclusiones deseadas. Las demás se obtienen trivialmente.

- (vii) De las definiciones (4.2.4) y (4.2.8), si escogemos  $\omega$  de modo que  $\omega(\nu)H_\nu^{(2)}(x)H_\nu^{(2)}(y)$  cumpla las hipótesis del Teorema 4.2, sigue que

$$\mathcal{T}_x H_\nu^{(2)}(y) = \omega(\nu)H_\nu^{(2)}(x)H_\nu^{(2)}(y).$$

**Proposición 4.2** *El operador  $\mathcal{T}_x$  definido por*

$$\mathcal{T}_x \varphi(y) = y^{-1} \mathcal{T}_x(y\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{G}_a,$$

*donde  $\mathcal{T}_x$  es dado por (4.2.8), es una aplicación lineal y continua del espacio  $\mathcal{G}_a$  en el espacio  $\mathcal{H}_a$ .*

*Prueba.* Fijamos  $x > 0$  arbitrariamente. La linealidad de  $\mathcal{T}_x$  es obvia. Probaremos la continuidad. Recurriendo a (2.1.7), (4.2.6) y la propiedad (vi),

tenemos

$$\begin{aligned}
\gamma_{k,a}^*(T_x\varphi(y)) &= \sup_{y \in I} \left| \lambda_a^-(y) \Delta_y^{*k} y^{-1} \mathcal{T}_x(y\varphi(y)) \right| \\
&= \sup_{y \in I} \left| \lambda_a^-(y) y^{-1} \Delta_y^k \mathcal{T}_x(y\varphi(y)) \right| \\
&= \sup_{y \in I} \left| \lambda_a^-(y) y^{-1} \mathcal{T}_x(\Delta_y^k(y\varphi(y))) \right| \\
&= \sup_{y \in I} \left| \lambda_a^-(y) y^{-1} \mathcal{T}_x(y \Delta_y^{*k} \varphi(y)) \right| \\
&= \sup_{y \in I} \left| \lambda_a^-(y) y^{-1} \int_0^\infty E(x, y, z) \Delta_z^{*k} \varphi(z) dz \right| \\
&\leq Cx^{-\frac{1}{2}} \sup_{y \in I} \left| y^{-\frac{3}{2}} \lambda_a^-(y) \right| \int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}} \lambda_a^-(z) dz \Gamma_{k,a}(\varphi).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\gamma_{k,a}^*(T_x\varphi(y)) \leq Cx^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{k,a}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{G}_a.$$

Así hemos demostrado que  $T_x\varphi \in \mathcal{H}_a$ , para cada  $\varphi \in \mathcal{G}_a$ . Como consecuencia de esta desigualdad y de [86, Lemma 1.10-1], deducimos la continuidad del operador  $T_x$ . ■

**Nota 4.4** Merece la pena destacar que el operador  $T_x$  satisface propiedades parecidas a las del operador traslación. En efecto, se puede comprobar sin dificultad que:

$$(i') \quad T_x \left\{ \frac{H_\nu^{(2)}(y)}{y} \right\} = \omega(\nu) H_\nu^{(2)}(x) \frac{H_\nu^{(2)}(y)}{y}.$$

$$(ii') \quad T_y\varphi(x) = yx^{-1}T_x\varphi(y), \quad \varphi \in \mathcal{G}_a.$$

$$(iii') \quad \mathcal{H}(T_{(\cdot)}\varphi(y))(\nu) = \omega(\nu) H_\nu^{(2)}(y) (\mathcal{H}\varphi)(\nu), \quad \varphi \in \mathcal{G}_a.$$

La afirmación anterior admite la siguiente extensión

**Proposición 4.3** *El operador  $T_x^r$  dado por*

$$T_x^r \varphi(y) = y^{-1} T_x(r(y)\varphi(y)), \quad \varphi \in \mathcal{G}_a, \quad (4.3.23)$$

donde  $r(x)$  denota una función racional cuyo denominador no posee raíces en  $I$ , es una aplicación lineal y continua de  $\mathcal{G}_a$  en  $\mathcal{H}_a$ .

*Prueba.* Sea  $x$  un punto arbitrario y fijo de  $I$ . Entonces, usando un argumento similar al de la Proposición 4.2 y (4.2.6), se deduce que

$$\begin{aligned} \gamma_{k,a}^*(T_x^r \varphi) &= \sup_{y \in I} \left| \lambda_a^-(y) y^{-1} \int_0^\infty \Delta_y^k \{E(x, y, z)\} \frac{r(z)}{z} \varphi(z) dz \right| \\ &\leq C x^{-\frac{1}{2}} \sup_{y \in I} \left| \lambda_a^-(y) y^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty \lambda_a^-(z) \frac{r(z)}{z^{\frac{3}{2}}} \lambda_a^+(z) \varphi(z) dz \right| \\ &\leq C x^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{0,a}(\varphi) \sup_{y \in I} \left| \lambda_a^-(y) y^{-\frac{3}{2}} \right| \int_0^\infty z^{-\frac{3}{2}} \lambda_a^-(z) |r(z)| dz \\ &\leq C x^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{0,a}(\varphi). \end{aligned}$$

En definitiva, hemos establecido que, para cada  $\varphi \in \mathcal{G}_a$ ,

$$\gamma_{k,a}^*(T_x^r \varphi) \leq C x^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{0,a}(\varphi). \quad (4.3.24)$$

La linealidad es evidente y la continuidad de  $T_x^r$  se deduce de (4.3.24) y [86, Lemma 1.10-1]. Es de hacer notar que la Proposición 4.2 es un caso particular del resultado anterior cuando elegimos  $r(y) = y$ . ■

A continuación definimos el operador traslación generalizado  $\mathcal{T}_x'$  en el espacio  $\mathcal{H}'_a$  como el adjunto del operador  $T_x$ , dado por (4.3.23) con  $r(y) = y$ , actuando en el espacio  $\mathcal{G}_a$ . En otras palabras,

$$\langle \mathcal{T}_x' f, \varphi \rangle = \langle f, T_x \varphi \rangle = \langle f(y), y^{-1} T_x(y\varphi(y)) \rangle, \quad (4.3.25)$$

para cada  $f \in \mathcal{H}'_a$  y  $\varphi \in \mathcal{G}_a$ . De la Proposición 4.2 y [86, Theorem 1.10-1] se concluye fácilmente que

**Proposición 4.4** *El operador traslación generalizado  $\mathcal{T}_x'$ , definido por (4.3.25), es una aplicación lineal y continua de  $\mathcal{H}'_a$  en  $\mathcal{G}'_a$ .*

En relación con la convolución (4.2.9) se tiene la siguiente afirmación

**Teorema 4.4** *Asumamos que  $\varphi$  y  $\psi$  son elementos arbitrarios de  $\mathcal{G}_a$ . Entonces,  $\varphi * \psi \in \mathcal{H}_a$ .*

*Prueba.* De la definición (4.2.9) se infiere fácilmente que  $\varphi * \psi \in \mathbb{C}^\infty(I)$ , cualesquiera que sean  $\varphi, \psi \in \mathcal{G}_a$ .

Conviene primero observar que, como ocurre con el operador  $\Delta$  en (2.2.7), podemos expresar

$$\Delta^{*k}\varphi(x) = \sum_{l=0}^{2k} P_l^*(x) D^l \varphi(x),$$

donde  $P_l^*(x)$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, 2k$ , denotan polinomios de grado menor o igual a  $2k$ , con coeficientes enteros y positivos. Con ayuda de esta expresión se puede escribir

$$\begin{aligned} \Delta_x^{*k} E(x, y, z) &= \sum_{l=0}^{2k} P_l^*(x) D_x^l E(x, y, z) \\ &= \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \omega(\nu) e^{-i\pi\nu} \operatorname{sen} \pi\nu \left( \sum_{l=0}^{2k} P_l^*(x) D_x^l H_\nu^{(2)}(x) \right) \\ &\quad \cdot H_\nu^{(2)}(y) H_\nu^{(2)}(z) d\nu \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \tau \omega(i\tau) e^{\pi\tau} \operatorname{sh} \pi\tau \left( \sum_{l=0}^{2k} P_l^*(x) D_x^l H_{i\tau}^{(2)}(x) \right) \\ &\quad \cdot H_{i\tau}^{(2)}(y) H_{i\tau}^{(2)}(z) d\tau. \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

De la representación integral (1.2.30), en el caso particular de que sea  $\nu = i\tau$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , y  $x > 0$ , se tiene aplicando una conocida generalización de la regla de Leibniz para derivar el producto de varias funciones

$$\begin{aligned} D_x^l \left( H_{i\tau}^{(2)}(x) \right) &= \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=l \\ l_1, l_2, l_3 \geq 0}} \frac{l!}{l_1! l_2! l_3!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Gamma(i\tau + \frac{1}{2})} \frac{d^{l_1}}{dx^{l_1}} (x^{-\frac{1}{2}}) \\ &\quad \cdot \frac{d^{l_2}}{dx^{l_2}} \left( e^{-i(x-i\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{4})} \right) \int_0^\infty e^{-s} s^{-i\tau-\frac{1}{2}} \frac{d^{l_3}}{dx^{l_3}} \left[ \left( 1 + \frac{s}{2ix} \right)^{i\tau-\frac{1}{2}} \right] ds. \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

Ahora bien, no resulta difícil comprobar que

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \left(1 + \frac{s}{2ix}\right)^{i\tau - \frac{1}{2}} \right] &= (-1)^n \sum_{k=1}^n N_k \frac{n!}{k!} x^{-n-k} \\ &\cdot \frac{s^k}{(2i)^k} \left(i\tau - \frac{1}{2}\right) \left(i\tau - \frac{3}{2}\right) \dots \left(i\tau + \frac{1}{2} - k\right) \left(1 + \frac{s}{2ix}\right)^{i\tau - \frac{1}{2} - k}, \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ , donde  $N_k$  representa determinado entero positivo. Sustituyendo (4.3.28) en (4.3.27) se llega a que

$$\begin{aligned} D_x^l \left( H_{i\tau}^{(2)}(x) \right) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(i\tau + \frac{1}{2})} \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=l \\ l_1, l_2, l_3 \geq 0}} \sum_{q=0}^{l_3} \\ &\cdot \frac{N_q (-1)^{l_1+l_3} (-i)^{l_2} l! 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l_1 - 1)}{l_1! l_2! 2^{l_1} (2i)^q q!} \\ &\cdot x^{-\frac{1}{2}-l_1-l_3-q} e^{-i(x-i\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{4})} \left(i\tau - \frac{1}{2}\right) \left(i\tau - \frac{3}{2}\right) \dots \left(i\tau + \frac{1}{2} - q\right) \\ &\cdot \int_0^\infty e^{-s} s^{i\tau - \frac{1}{2} + q} \left(1 + \frac{s}{2ix}\right)^{i\tau - \frac{1}{2} - q} ds. \end{aligned}$$

De aquí se infiere, tomando en cuenta (1.2.31),

$$\begin{aligned} \left| D_x^l \left( H_{i\tau}^{(2)}(x) \right) \right| &\leq C (\operatorname{ch} \pi\tau)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=l \\ l_1, l_2, l_3 \geq 0}} \sum_{q=0}^{l_3} C_{l,q} \\ &\cdot x^{-\frac{1}{2}-l_1-l_3-q} e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \tau^q \int_0^\infty e^{-s} s^{q-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{s^2}{4x^2}\right)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+q)} e^{\tau \operatorname{arctg} \frac{s}{2x}} ds, \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \left| D_x^l \left( H_{i\tau}^{(2)}(x) \right) \right| &\leq C e^{\frac{\pi\tau}{4} (3 \operatorname{sgn} \tau - 1)} \\ &\cdot \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=l \\ l_1, l_2, l_3 \geq 0}} \sum_{q=0}^{l_3} C_{l,q} \Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-l_1-l_3-q} \tau^q, \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

siendo  $C_{l,q}$  constantes positivas. Llevando (4.3.29) a (4.3.26) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\left| \Delta_x^{*k} E(x, y, z) \right| &\leq C(yz)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{2k} \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=l \\ l_1, l_2, l_3 \geq 0}} \sum_{q=0}^{l_3} C_{l,q} P_l^*(x) \\
&\quad \cdot x^{-\frac{1}{2}-l_1-l_3-q} \int_0^\infty \tau^{q+1} e^{-(p-\frac{7}{2})\pi\tau} d\tau \\
&\leq (yz)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{2k} \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=l \\ l_1, l_2, l_3 \geq 0}} \sum_{q=0}^{l_3} C_{l,q}^* P_l^*(x) x^{-\frac{1}{2}-l_1-l_3-q}, \tag{4.3.30}
\end{aligned}$$

donde se elige  $p > \frac{7}{2}$  y  $C_{l,q}^*$  representan nuevas constantes positivas. Por tanto, de (4.3.30) y de la definición (4.2.9) de la convolución se deduce que

$$\begin{aligned}
\left| \lambda_a^-(x) \Delta_x^{*k} (\varphi * \psi)(x) \right| &= \left| \lambda_a^-(x) \int_0^\infty \varphi(y) \Delta_x^{*k} \mathcal{T}_x \psi(y) \frac{dy}{y} \right| \\
&= \left| \lambda_a^-(x) \int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{y} \int_0^\infty \left\{ \Delta_x^{*k} E(x, y, z) \right\} \frac{\psi(z)}{z} dz dy \right| \\
&\leq \sum_{l=0}^{2k} \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=l \\ l_1, l_2, l_3 \geq 0}} \sum_{q=0}^{l_3} C_{l,q}^* \left\{ \lambda_a^-(x) P_l^*(x) x^{-\frac{1}{2}-l_1-l_3-q} \right\} \\
&\quad \cdot \int_0^\infty y^{-\frac{3}{2}} \lambda_a^-(y) \lambda_a^+(y) \varphi(y) dy \int_0^\infty z^{-\frac{3}{2}} \lambda_a^-(z) \lambda_a^+(z) \psi(z) dz \\
&\leq \left( \sum_{l=0}^{2k} \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=l \\ l_1, l_2, l_3 \geq 0}} \sum_{q=0}^{l_3} C_{l,q}^* \right) \Gamma_{0,a}(\varphi) \Gamma_{0,a}(\psi) = C_k \Gamma_{0,a}(\varphi) \Gamma_{0,a}(\psi),
\end{aligned}$$

donde  $C_k$  son constantes reales positivas. Hemos demostrado que

$$\gamma_{k,a}^*(\varphi * \psi) \leq C_k \Gamma_{0,a}(\varphi) \Gamma_{0,a}(\psi), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{G}_a.$$

Esto implica que  $\varphi * \psi \in \mathcal{H}_a$  y con ello se finaliza la prueba. ■

Para dos elementos arbitrarios  $f$  y  $g$  de  $\mathcal{H}'_a$  definimos la convolución  $f * g$  mediante

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \left\langle f(x), \frac{1}{x} \langle \mathcal{T}'_x g(y), \varphi(y) \rangle \right\rangle \\ &= \left\langle f(x), \frac{1}{x} \langle g(y), \mathbb{T}_x \varphi(y) \rangle \right\rangle \\ &= \left\langle f(x), \frac{1}{x} \left\langle g(y), y^{-1} \mathcal{T}_x(y\varphi(y)) \right\rangle \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{G}_a$ .

**Teorema 4.5** *La convolución generalizada, definida por (4.3.31), aplica elementos del espacio  $\mathcal{H}'_a$  en el espacio  $\mathcal{G}'_a$ ; en otras palabras,  $f * g \in \mathcal{G}'_a$  para todos  $f, g \in \mathcal{H}'_a$ .*

*Prueba.* Primero ponemos

$$G(x) = x^{-1} \left\langle g(y), y^{-1} \mathcal{T}_x(y\varphi(y)) \right\rangle, \quad g \in \mathcal{H}'_a, \quad \varphi \in \mathcal{G}_a,$$

e intentamos verificar que  $G \in C^\infty(I)$ . A fin de lograr este propósito, es suficiente probar que

$$G^*(x) = \left\langle g(y), y^{-1} \mathcal{T}_x(y\varphi(y)) \right\rangle \in C^\infty(I).$$

Para ello, fijemos  $x > 0$  arbitrario y consideremos un incremento real  $h$ ,  $h \neq 0$ ,  $|h| < 1$ . Escribimos

$$\begin{aligned} \frac{G^*(x+h) - G^*(x)}{h} &= \left\langle g(y), y^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{T}_x(y\varphi(y)) \right\rangle \\ &= \langle g(y), A(x, y, h) \rangle, \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

donde

$$A(x, y, h) = y^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{T}_{x+h}(y\varphi(y)) - \mathcal{T}_x(y\varphi(y))}{h} - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{T}_x(y\varphi(y)) \right\}.$$

La demostración terminará cuando hayamos probado que  $A(x, y, h)$  converge a cero si  $h \rightarrow 0$  en la topología del espacio  $\mathcal{H}_a$ . Debido a la relación (2.1.7) entre los operadores diferenciales  $\Delta$  y  $\Delta^*$ , y recurriendo a la propiedad (vi) y a la definición (4.2.8), los siguientes pasos son lícitos

$$\begin{aligned}
\Delta_y^{*k} A(x, y, h) &= y^{-1} \Delta_y^k \left\{ \frac{\mathcal{T}_{x+h}(y\varphi(y)) - \mathcal{T}_x(y\varphi(y))}{h} - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{T}_x(y\varphi(y)) \right\} \\
&= y^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{T}_{x+h}[\Delta_y^k(y\varphi(y))] - \mathcal{T}_x[\Delta_y^k(y\varphi(y))]}{h} - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{T}_x[\Delta_y^k(y\varphi(y))] \right\} \\
&= y^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{T}_{x+h}(y\Delta_y^{*k}\varphi(y)) - \mathcal{T}_x(y\Delta_y^{*k}\varphi(y))}{h} - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{T}_x(y\Delta_y^{*k}\varphi(y)) \right\} \\
&= \frac{y^{-1}}{h} \int_x^{x+h} \int_x^u \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \mathcal{T}_t(y\Delta_y^{*k}\varphi(y)) \right\} dt du \\
&= \frac{y^{-1}}{h} \int_x^{x+h} \int_x^u \int_0^\infty \frac{\partial^2 E(t, y, z)}{\partial t^2} \Delta_z^{*k} \varphi(z) dz dt du. \tag{4.3.33}
\end{aligned}$$

Ahora bien, de (4.3.29) con  $l = 2$  y  $\tau > 0$ , se tiene

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{d^2}{dx^2} H_{i\tau}^{(2)}(x) \right| \\
&\leq Cx^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + x^{-1} + (1 + \tau)x^{-2} + \tau x^{-3} + \tau^2 x^{-4} \right) e^{\frac{\pi\tau}{2}}. \tag{4.3.34}
\end{aligned}$$

Hacemos énfasis en que la constante  $C > 0$  no depende ni de  $\tau$  ni de  $x$ . Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E(t, y, z)}{\partial t^2} &= \frac{1}{2i} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{i\infty} \nu \omega(\nu) e^{-i\pi\nu} \operatorname{sen} \pi\nu H_\nu^{(2)}(t) H_\nu^{(2)}(y) H_\nu^{(2)}(z) d\nu \\
&= -\frac{1}{2i} \int_0^\infty \tau \omega(i\tau) e^{\pi\tau} \operatorname{sh} \pi\tau \left( \frac{d^2}{dt^2} H_{i\tau}^{(2)}(t) \right) H_{i\tau}^{(2)}(y) H_{i\tau}^{(2)}(z) d\tau.
\end{aligned}$$

Por último, utilizando (4.3.34) y (4.2.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 E(t, y, z)}{\partial t^2} \right| &\leq C(tyz)^{-\frac{1}{2}} \left[ (1 + t^{-1} + t^{-2}) \int_0^\infty \tau e^{-(p-\frac{7}{2})\pi\tau} d\tau \right. \\ &\quad \left. + (t^{-2} + t^{-3}) \int_0^\infty \tau^2 e^{-(p-\frac{7}{2})\pi\tau} d\tau + t^{-4} \int_0^\infty \tau^3 e^{-(p-\frac{7}{2})\pi\tau} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Seleccionando  $p > \frac{7}{2}$ , resulta

$$\left| \frac{\partial^2 E(t, y, z)}{\partial t^2} \right| \leq C(tyz)^{-\frac{1}{2}} (1 + t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + t^{-4}). \quad (4.3.35)$$

Ahora supongamos que  $0 < h < 1$  (un razonamiento similar es válido en el caso  $-1 < h < 0$ ). Tomando en cuenta que  $x < t < \mu < x + h < x + 1$ , deducimos de (4.3.33) y (4.3.35) que

$$\begin{aligned} \left| \lambda_a^-(y) \Delta_y^{*k} A(x, y, h) \right| &\leq C \lambda_a^-(y) \frac{y^{-1}}{h} \int_x^{x+h} \int_x^u \int_0^\infty (tyz)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot (1 + t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + t^{-4}) \Delta_z^{*k} \varphi(z) dz dt d\mu \\ &\leq \frac{C}{h} \left( y^{-\frac{3}{2}} \lambda_a^-(y) \right) (1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4}) \\ &\quad \cdot \int_x^{x+h} \int_x^u \int_0^\infty \left( z^{-\frac{1}{2}} \lambda_a^-(z) \right) \lambda_a^+(z) \Delta_z^{*k} \varphi(z) dz dt d\mu \\ &\leq \frac{C(x)}{h} \int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}} \lambda_a^-(z) dz \int_x^{x+h} \int_x^u dt d\mu \Gamma_{k,a}(\varphi) \\ &\leq \frac{C(x)}{h} \int_x^{x+h} \int_x^u dt du = C(x) \frac{h}{2} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando  $h \longrightarrow 0$ , uniformemente en  $y \in I$ . Aquí  $C(x)$  denota una constante dependiente de  $x$ , cuyo valor está fijo. Por lo tanto,  $\gamma_{k,a}^*(A(x, \cdot, h)) \longrightarrow 0$  si  $h \longrightarrow 0$ , que es lo que queríamos probar. Entonces, tomando límite en (4.3.32) si  $h \longrightarrow 0$ , deducimos que

$$\frac{dG^*(x)}{dx} = \left\langle g(y), y^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{T}_x(y\varphi(y)) \right\rangle.$$

En general,

$$\frac{d^m G^*(x)}{dx^m} = \left\langle g(y), y^{-1} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \mathcal{T}_x(y\varphi(y)) \right\rangle, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

A continuación, teniendo presente esta propiedad, y en base a (2.1.7), (ii), (vi) y [86, Theorem 1.8-1], podemos encontrar una constante  $C > 0$  y un entero no negativo  $r$ , dependiente de  $g$  pero no de  $\varphi$ , de manera tal que

$$\begin{aligned} \left| \Delta_x^{*k} G(x) \right| &= \left| x^{-1} \Delta_x^k xG(x) \right| \\ &= x^{-1} \left| \left\langle g(y), y^{-1} \Delta_x^k \mathcal{T}_x(y\varphi(y)) \right\rangle \right| \\ &= x^{-1} \left| \left\langle g(y), y^{-1} \mathcal{T}_y \{ \Delta_x^k(x\varphi(x)) \} \right\rangle \right| \\ &\leq Cx^{-1} \max_{0 \leq j \leq r} \gamma_{j,a}^* \left\{ y^{-1} \mathcal{T}_x \Delta_y^k(x\varphi(x)) \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

para cada  $\varphi \in \mathcal{G}_a$ . Evaluemos aparte

$$\begin{aligned} \gamma_{j,a}^* \left\{ y^{-1} \mathcal{T}_x \Delta_y^k(x\varphi(x)) \right\} &= \sup_{y \in I} \left| \lambda_a^-(y) \Delta_y^{*j} \{ y^{-1} \mathcal{T}_x \Delta_y^k(x\varphi(x)) \} \right| \\ &= \sup_{y \in I} \left| \lambda_a^-(y) y^{-1} \Delta_y^j \left\{ \mathcal{T}_x \Delta_y^k(x\varphi(x)) \right\} \right| \\ &= \sup_{y \in I} \left| \lambda_a^-(y) y^{-1} \mathcal{T}_x \left\{ y \Delta_y^{*(k+j)} \varphi(y) \right\} \right| \\ &= \sup_{y \in I} \left| \lambda_a^-(y) y^{-1} \int_0^\infty E(x, y, z) \Delta_z^{*(k+j)} \varphi(z) dz \right| \\ &\leq Cx^{-\frac{1}{2}} \sup_{y \in I} (y^{-\frac{3}{2}} \lambda_a^-(y)) \\ &\quad \cdot \int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}} \lambda_a^-(z) dz \cdot \Gamma_{k+j,a}(\varphi). \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

Así pues, de (4.3.36) y (4.3.37) deducimos

$$\gamma_{k,a}^*(G) \leq C \max_{0 \leq j \leq r} \Gamma_{k+j,a}(\varphi) = C\Gamma_{k+J,a}(\varphi),$$

para cierto  $J$ ,  $J = 0, 1, 2, \dots, r$ , y para toda  $\varphi \in \mathcal{G}_a$ . En conclusión,  $G \in \mathcal{H}_a$ . Con mayor precisión,  $\varphi \rightarrow G$  es una aplicación lineal y continua de  $\mathcal{G}_a$  en  $\mathcal{H}_a$ . Dado que

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, G \rangle,$$

conforme al resultado que acabamos de obtener, la definición (4.3.31) tiene sentido y  $f * g \in \mathcal{G}'_a$ . Con ello se termina la demostración. ■

**Proposición 4.5 (Reglas operacionales)** Sean  $f, g, h \in \mathcal{H}'_a$ . Tenemos

$$(1) \mathcal{H}'(f * g)(\nu) = \omega(\nu)(\mathcal{H}'f)(\nu) \cdot (\mathcal{H}'g)(\nu)$$

$$(2) \begin{aligned} f * g &= g * f \\ f * (g + h) &= f * g + f * h \\ f * (g * h) &= (f * g) * h \end{aligned}$$

$$(3) \Delta_x(f * g) = (\Delta_x f) * g = f * (\Delta_x g)$$

*Prueba.* Es suficiente con probar (1), que es el resultado fundamental. La parte (2) se verifica fácilmente tomando la transformada H-K-L en ambos miembros de la correspondiente ecuación y recurriendo al teorema de unicidad para la transformación (4.3.4), completamente análogo al establecido en el Capítulo 3 (Teorema 3.4) respecto de la transformación (3.3.1). Finalmente, para ver la parte (3) recurrimos a la regla operacional (4.3.6).

Así pues, comprobaremos la validez de (1). En virtud de las definiciones (4.3.4) y (4.3.31), y la propiedad (vii) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(f * g)(\nu) &= \left\langle f * g(x), \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} \right\rangle \\ &= \left\langle f(x), \frac{1}{x} \langle g(y), y^{-1} \mathcal{T}_x H_\nu^{(2)}(y) \rangle \right\rangle \\ &= \left\langle f(x), \frac{1}{x} \langle g(y), y^{-1} \omega(\nu) H_\nu^{(2)}(x) H_\nu^{(2)}(y) \rangle \right\rangle \\ &= \omega(\nu) \left\langle f(x), \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} \langle g(y), \frac{H_\nu^{(2)}(y)}{y} \rangle \right\rangle \\ &= \omega(\nu) \left\langle g(y), \frac{H_\nu^{(2)}(y)}{y} \right\rangle \left\langle f(x), \frac{H_\nu^{(2)}(x)}{x} \right\rangle = \omega(\nu)(\mathcal{H}'f)(\nu)(\mathcal{H}'g)(\nu). \end{aligned}$$

y (1) queda probado. ■

**Nota 4.5** Es importante mencionar que la evaluación de  $\mathcal{H}'(\mathcal{T}'_x f)(\nu)$ ,  $f \in \mathcal{H}'_a$ , es en general imposible. Ciertamente, por la Proposición 4.4 podemos asegurar que  $\mathcal{T}'_x f$  no pertenece a  $\mathcal{H}'_a$  sino a  $\mathcal{G}'_a$ . Recordemos que la transformada generalizada H-K-L no está definida en la totalidad del espacio  $\mathcal{G}'_a$ . Sin embargo,  $\mathcal{H}'_a$  puede ser considerado como un subespacio de  $\mathcal{G}'_a$ . Por lo tanto, si restringimos a los elementos  $f \in \mathcal{H}'_a$  tal que  $\mathcal{T}'_x f \in \mathcal{H}'_a$ , se tendría que

$$\mathcal{H}'(\mathcal{T}'_x f)(\nu) = \omega(\nu) H_\nu^{(2)}(x)(\mathcal{H}' f)(\nu).$$

Con esta regla operacional y bajo las hipótesis restrictivas mencionadas, el operador traslación se intercambia con la convolución

$$\mathcal{T}'_x(f * g) = (\mathcal{T}'_x f) * g = f * (\mathcal{T}'_x g).$$

En algunas situaciones especiales la convolución (4.3.31) adopta una expresión más simple.

**Corolario 4.1** Si  $f \in \mathcal{H}'_a$  y  $g \in \mathcal{G}_{a+\delta}$ ,  $\delta > 0$ , se tiene

$$(f * g)(x) = \left\langle f(y), \frac{1}{y} \mathcal{T}'_x g(y) \right\rangle. \quad (4.3.38)$$

*Prueba.* En virtud de la Proposición 4.3 con  $r(y) = 1$ , tenemos que  $y^{-1} \mathcal{T}'_x g(y) \in \mathcal{H}_a$ . Por lo tanto, el segundo miembro de (4.3.38) tiene sentido. Por otra parte, recurriendo al Teorema 4.5 y a la Nota 4.3 vemos que  $f * g \in \mathcal{G}'_a$ . Así pues, verificaremos (4.3.38) en el sentido de la igualdad en el espacio  $\mathcal{G}'_a$ . Entonces, para cada  $\varphi \in \mathcal{G}_a$ , sigue

$$\begin{aligned} \left\langle (f * g)(x), \varphi(x) \right\rangle &= \left\langle f(x), \frac{1}{x} \left\langle g(y), y^{-1} \mathcal{T}'_x (y\varphi(y)) \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle f(x), \frac{1}{x} \int_0^\infty y^{-1} \mathcal{T}'_x (y\varphi(y)) g(y) dy \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

puesto que, como fue dicho,  $g$  da lugar a un elemento regular en  $\mathcal{H}'_a$  por medio de (4.3.8). Ahora, tomando en cuenta que  $E(x, y, z) = E(x, z, y)$  y aplicando el teorema de Fubini, podemos cambiar el orden de integración para obtener

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{y} \mathcal{T}_x(y\varphi(y))g(y)dy &= \int_0^\infty \frac{g(y)}{y} \int_0^\infty E(x, y, z)\varphi(z)dzdy \\
&= \int_0^\infty \varphi(z) \int_0^\infty E(x, y, z)\frac{g(y)}{y}dydz \\
&= \int_0^\infty \mathcal{T}_x g(z)\varphi(z)dz.
\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en (4.3.39) e intercambiando el funcional y la integral, lo cual se puede justificar usando la técnica de las sumas de Riemann (Ver Capítulo 3 y [86, p.148]), deducimos que

$$\begin{aligned}
\langle (f * g)(x), \varphi(x) \rangle &= \left\langle f(x), \frac{1}{x} \int_0^\infty \mathcal{T}_x g(z)\varphi(z)dz \right\rangle \\
&= \int_0^\infty \left\langle f(x), \frac{1}{x} \mathcal{T}_x g(z) \right\rangle \varphi(z)dz \\
&= \left\langle \left\langle f(x), \frac{1}{x} \mathcal{T}_x g(y) \right\rangle, \varphi(y) \right\rangle,
\end{aligned}$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{G}_a$ . De aquí se infiere la validez de (4.3.38). ■

**Corolario 4.2** Si  $f, g \in \mathcal{G}_{a+\delta}$ ,  $\delta > 0$ , entonces

$$(f * g)(x) = \int_0^\infty f(y)\mathcal{T}_x g(y)\frac{dy}{y}.$$

*Prueba.* De acuerdo con (4.3.8) y el Corolario 4.1 podemos escribir

$$(f * g)(x) = \left\langle f(y), \frac{1}{y} \mathcal{T}_x g(y) \right\rangle = \int_0^\infty f(y)\mathcal{T}_x g(y)\frac{dy}{y}.$$

que es lo que queríamos probar. ■

Enfatizamos que este resultado coincide con la definición (4.2.9) de la convolución clásica.

## 4.4. Aplicaciones

A fin de ilustrar la teoría desarrollada, nos proponemos resolver los siguientes problemas:

- (a) Encontrar la solución  $u(r, \phi)$  de la ecuación en derivadas parciales

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (4.4.1)$$

en la cuña infinita

$$\{(r, \phi) / 0 < r < +\infty, \quad 0 < \phi < \alpha\},$$

satisfaciendo las condiciones de frontera

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \alpha) = f(r) \in \mathcal{H}'_a.$$

Si ponemos  $U(\nu, \phi) = \mathcal{H}'(u(\cdot, \phi))(\nu)$ , aplicando la transformación  $\mathcal{H}'$  de H-K-L a (4.4.1) y teniendo en cuenta la regla operacional (4.3.6), el problema se convierte en

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(\nu, \phi)}{\partial \phi^2} + \nu^2 U(\nu, \phi) = 0 \\ U(\nu, 0) = 0, \quad U(\nu, \alpha) = F(\nu), \end{cases}$$

donde  $F(\nu) = (\mathcal{H}'f)(\nu)$ . La solución de este problema, que ahora concierne a una ecuación diferencial ordinaria, es

$$U(\nu, \phi) = \frac{\text{sen } \nu \phi}{\text{sen } \nu \alpha} F(\nu) = \omega(\nu) F(\nu) G(\nu, \phi),$$

con

$$G(\nu, \phi) = \frac{\text{sen } \nu \phi}{\omega(\nu) \text{sen } \nu \alpha}.$$

Ya que  $G(-\nu, \phi) = e^{-i\pi\nu} G(\nu, \phi)$ , la función  $G(\nu, \phi)$  es buena a tenor de (4.2.1) y (4.3.5). Finalmente, usando la regla operacional (1) de la Proposición 4.5 y recurriendo a la fórmula de inversión (Teorema 4.3), obtenemos la solución formal

$$u(r, \phi) = f(r) * g(r, \phi),$$

donde

$$g(r, \phi) = (\mathcal{H}^{-1}G(\cdot, \phi))(r),$$

es el sentido del Teorema 4.1. En efecto, la integral

$$-\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(r) \frac{\text{sen } \nu\phi}{\omega(\nu) \text{sen } \nu\alpha} d\nu$$

no siempre existe. Sin embargo, sí existe, cualquiera que sea el factor admisible  $\omega(\nu)$ ,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(r) \frac{\text{sen } \nu\phi}{\omega(\nu) \text{sen } \nu\alpha} d\nu$$

y vale

$$-\frac{1}{2} \int_\Gamma \nu J_\nu(r) \frac{\text{sen } \nu\phi}{\omega(\nu) \text{sen } \nu\alpha} d\nu, \tag{4.4.2}$$

siendo  $\Gamma$  el camino de la Figura 4.2.1. Ciertamente, si tomamos  $\nu_0 = 0$  y consideramos el recinto de la Figura 4.4.1, limitado por el segmento  $PQ$  del eje imaginario, los arcos de circunferencia  $\overline{PC}$  y  $\overline{AQ}$  de radio  $R > 0$  y los segmentos  $OC$  y  $OA$  que forman ángulos  $\pm\theta$  con el eje real positivo. Entonces, por el Teorema de Cauchy

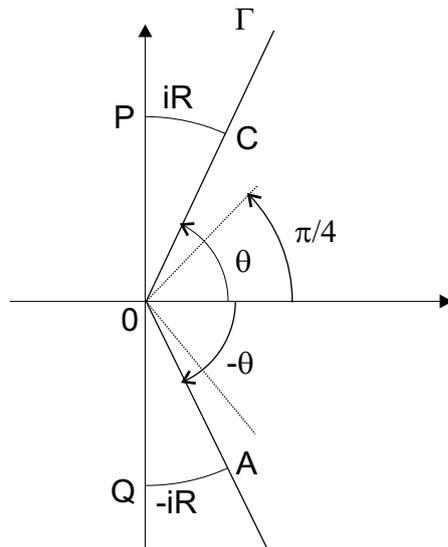


Figura 4.4.1: Camino de integración  $\Gamma$

$$\left( \int_{-iR}^{iR} + \int_{\overline{PC}} + \int_{CO \cup OA} + \int_{\overline{AQ}} \right) \nu J_\nu(r) \frac{\operatorname{sen} \nu \phi}{\omega(\nu) \operatorname{sen} \nu \alpha} d\nu = 0, \quad (4.4.3)$$

debido a la analiticidad del integrando. Sobre el arco  $\overline{PC}$  se tiene que  $\nu = Re^{i\beta}$ ,  $\theta \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ . Teniendo en cuenta (1.2.25) y (iii) de la Definición 4.1, sigue para grandes valores de  $R$

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{1}{2} \int_{\overline{PC}} e^{\rho \nu^2} \nu J_\nu(r) \frac{\operatorname{sen} \nu \phi}{\omega(\nu) \operatorname{sen} \nu \alpha} d\nu \right| \\ & \leq C \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R} e^{\rho R^2 \cos 2\beta + R(\cos \beta \ln \frac{er}{2} + \beta \operatorname{sen} \beta)} e^{-R \cos \beta \ln R} \frac{\operatorname{ch}(R\phi \operatorname{sen} \beta)}{\operatorname{sh}(R\alpha \operatorname{sen} \beta)} e^{p\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \beta} R d\beta \\ & \leq C \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} R^{\frac{3}{2}} e^{\rho R^2 \cos 2\beta} e^{R(\cos \beta \ln \frac{er}{2} + \beta \operatorname{sen} \beta + p\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \beta)} d\beta \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

si  $R \longrightarrow \infty$ , ya que por la especial elección de  $\theta$  es  $\cos 2\beta < 0$ . Idéntico resultado ocurre sobre el arco  $\overline{AQ}$ . Consecuentemente, si tomamos límite en (4.4.3) cuando  $R \longrightarrow \infty$ , queda

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho \nu^2} \nu J_\nu(r) \frac{\operatorname{sen} \nu \phi}{\omega(\nu) \operatorname{sen} \nu \alpha} d\nu \\ & = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma} e^{\rho \nu^2} \nu J_\nu(r) \frac{\operatorname{sen} \nu \phi}{\omega(\nu) \operatorname{sen} \nu \alpha} d\nu, \end{aligned}$$

donde  $\Gamma$  denota el camino de integración descrito anteriormente. A continuación veremos que este último límite existe y que se puede hacer  $\rho = 0$ . Puesto que sobre  $\Gamma$  se tiene que  $\nu = te^{\pm i\theta}$ ,  $0 \leq t < \infty$ , se puede establecer que

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \nu J_\nu(r) \frac{\operatorname{sen} \nu \phi}{\omega(\nu) \operatorname{sen} \nu \alpha} d\nu \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left( \int_0^T + \int_T^\infty \right) t |J_{te^{\pm i\theta}}(r)| \frac{\operatorname{ch}(t\phi \operatorname{sen} \theta)}{|\omega(te^{\pm i\theta})| \operatorname{sh}(t\alpha \operatorname{sen} \theta)} dt, \end{aligned}$$

donde  $T > 0$  se determinará convenientemente grande. Nótese que, recurriendo una vez más a (1.2.25) y (iii) de Definición 4.1, se infiere que

$$\begin{aligned}
& \int_T^\infty t |J_{te^{\pm i\theta}}(r)| \frac{\operatorname{ch}(t\phi \operatorname{sen} \theta)}{|\omega(te^{\pm i\theta})| \operatorname{sh}(t\alpha \operatorname{sen} \theta)} dt \\
& \leq C \int_T^\infty \sqrt{t} e^{-t(\cos \theta \ln t - \cos \theta \ln \frac{er}{2} - \operatorname{sen} \theta - p\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \theta)} dt. \tag{4.4.4}
\end{aligned}$$

Como quiera que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\cos \theta \ln t - \cos \theta \ln \frac{er}{2} - \operatorname{sen} \theta - p\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \theta) = \infty,$$

$r > 0$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , elegimos  $T > 0$  suficientemente grande de modo que para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq T$ , se tiene que

$$\cos \theta \ln t - \cos \theta \ln \frac{er}{2} - \operatorname{sen} \theta - p\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \theta > K,$$

para cierto  $K > 0$ . Por consiguiente, el último término de la desigualdad (4.4.4) está acotado por

$$C \int_T^\infty \sqrt{t} e^{-Kt} dt,$$

integral que existe. En el rango  $[0, T]$  las integrales también existen. En definitiva, tiene sentido (4.4.2).

(b) Determinar la solución  $u(r, \phi)$  del problema de valores en la frontera para la ecuación en derivadas parciales

$$\begin{aligned}
& r^4 \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + 6r^3 \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + (2r^4 + 7r^2) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \\
& + (6r^3 + r) \frac{\partial u}{\partial r} + (r^4 + 4r^2)u + \frac{\partial^4 u}{\partial \phi^4} = 0, \tag{4.4.5}
\end{aligned}$$

en la cuña infinita

$$\{(r, \phi) / 0 < r < \infty, \quad 0 < \phi < \alpha\},$$

que cumple las condiciones

$$u(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial \phi} = 0, \quad u(r, \alpha) = f(r) \in \mathcal{H}'_\alpha.$$

La ecuación (4.4.5) se puede reescribir

$$\Delta^2 u(r, \phi) + \frac{\partial^4 u(r, \phi)}{\partial \phi^4} = 0, \quad (4.4.6)$$

donde  $\Delta$  denota el operador definido por (2.1.5). Entonces, si ponemos  $U(\nu, \phi) = \mathcal{H}'(u(\cdot, \phi))(\nu)$ , el problema planteado se convierte, mediante la aplicación de la transformación  $\mathcal{H}'$  de H-K-L y de la regla operacional (4.3.6), en el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 U(\nu, \phi)}{\partial \phi^4} + \nu^4 U(\nu, \phi) = 0 \\ U(\nu, 0) = 0, \quad \frac{\partial U(\nu, 0)}{\partial \phi} = 0, \quad U(\nu, \alpha) = F(\nu), \end{cases} \quad (4.4.7)$$

siendo  $F(\nu) = (\mathcal{H}' f)(\nu)$ . La solución general de esta ecuación diferencial ordinaria es

$$U(\nu, \phi) = C_1(\nu)e^{r_1\nu\phi} + C_2(\nu)e^{r_2\nu\phi} + C_3(\nu)e^{r_3\nu\phi} + C_4(\nu)e^{r_4\nu\phi},$$

donde  $C_j(\nu)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , son constantes y  $r_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $r_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ,  $r_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ,  $r_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$ . Determinando estas constantes de acuerdo con las condiciones de contorno, la solución del problema transformado (4.4.7) adopta la forma

$$U(\nu, \phi) = F(\nu) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\nu\phi}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\nu\phi}{\sqrt{2}}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\nu\alpha}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\nu\alpha}{\sqrt{2}}\right)}, \quad (4.4.8)$$

que puede ser expresada como

$$U(\nu, \phi) = \omega(\nu)F(\nu)G(\nu, \phi, \alpha), \quad (4.4.9)$$

siendo

$$G(\nu, \phi, \alpha) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\nu\phi}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\nu\phi}{\sqrt{2}}\right)}{\omega(\nu) \operatorname{sh}\left(\frac{\nu\alpha}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\nu\alpha}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Subrayamos que  $G(\nu, \phi, \alpha)$  es una *buena función*, puesto que

$$G(-\nu, \phi, \alpha) = e^{-i\pi\nu} G(\nu, \phi, \alpha).$$

La solución del problema de partida se puede obtener invirtiendo la expresión (4.4.8) en base al Teorema 4.3

$$u(r, \phi) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\rho\nu^2} \nu J_\nu(r) F(\nu) \frac{\text{sh}(\frac{\nu\phi}{\sqrt{2}}) \text{sen}(\frac{\nu\phi}{\sqrt{2}})}{\text{sh}(\frac{\nu\alpha}{\sqrt{2}}) \text{sen}(\frac{\nu\alpha}{\sqrt{2}})} d\nu,$$

o bien invirtiendo (4.4.9) conforme a la regla operacional (1) de la Proposición 4.5 para deducir que

$$u(r, \phi) = f(r) * g(r, \phi, \alpha),$$

donde

$$g(r, \phi, \alpha) = \mathcal{H}^{-1}G(., \phi, \alpha)(r),$$

se entiende como en el Teorema 4.1, tal como se verificó en el ejemplo (a)

**Nota 4.6** *Conviene aclarar que las soluciones de los problemas (a) y (b) no dependen, como fácilmente se puede comprobar, del **factor admisible**  $\omega(\nu)$  utilizado.*

# CUESTIONES ABIERTAS

A continuación exponemos varias cuestiones abiertas, en algunas de las cuales estamos actualmente trabajando y que están muy directamente relacionadas con los tópicos tratados en esta Memoria:

## 1. La convolución paramétrica para la transformación de Kontorovich-Lebedev.

Sea la transformación de Kontorovich-Lebedev

$$(Kf)(\tau) = F(\tau) = \int_0^{\infty} K_{i\tau}(x)f(x)dx \quad (\text{C.1})$$

$$(K^{-1}F)(x) = f(x) = \frac{1}{\pi^2 x} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau K_{i\tau}(x)F(\tau)d\tau. \quad (\text{C.2})$$

La convolución asociada a esta transformación integral viene definida por

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2x} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2}{2xyz}} f(z)g(z)dzdy, \quad (\text{C.3})$$

donde  $x > 0$  y  $f$  y  $g$  pertenecen a un adecuado espacio de funciones. S. B. Yakubovic realizó un completo y detallado análisis de esta convolución en espacios  $L^p(0, \infty)$  pesados [81]. Para extender este estudio a espacio de distribuciones, previamente se define el operador traslación

$$T_x \phi(y) = \int_0^{\infty} T(x, y, z)\phi(z)dz, \quad (\text{C.4})$$

donde  $T(x, y, z)$  representa el núcleo positivo y simétrico en  $x$  y  $y$

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2z} e^{-\frac{1}{2xyz}(x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2)},$$

con  $x, y, z \in I$ . La definición de (C.4) viene sugerida por una fórmula de duplicación o de linealización que involucra la función especial que hace de núcleo, en este caso,

$$\int_0^\infty T(x, y, z)K_{i\tau}(z)dz = K_{i\tau}(x)K_{i\tau}(y).$$

Entonces, con la ayuda de (C.4), se define la convolución de dos funciones  $f$  y  $g$  como sigue

$$(f * g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty f(y)T_x(yg(y))dy. \quad (\text{C.5})$$

La versión distribucional de esta estructura convolucional fue investigada por H.-J. Glaeske y A. Hess [25]. La principal regla operacional de esta convolución es

$$K(f * g)(\tau) = (Kf)(\tau)(Kg)(\tau).$$

Consideremos ahora la transformación de Kontorovich-Lebedev en el orden

$$(Lf)(x) = F(x) = \int_{-\infty}^\infty \tau \operatorname{sh} \pi\tau K_{i\tau}(x)f(\tau)d\tau \quad (\text{C.6})$$

$$(L^{-1}F)(\tau) = f(\tau) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{K_{i\tau}(y)}{y} F(y)dy. \quad (\text{C.7})$$

El propio S. B. Yakubovich [81, p. 142] introdujo la convolución para este par en la forma

$$(\Phi \circ \Psi)(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty S_{i\beta, i\xi, i\tau}^\alpha f(\beta)g(\xi)d\beta d\xi$$

donde, para  $\xi, \beta, \tau \in \mathbb{R}$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}\alpha > 0$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 S_{i\beta, i\xi, i\tau}^\alpha &= \int_0^\infty x^{\alpha-1} K_{i\beta}(x) K_{i\xi}(x) K_{i\tau}(x) dx \\
 &= \operatorname{Re} \left[ \frac{\Gamma(i\tau)}{\Gamma(\alpha - i\tau)} \Gamma\left(\frac{\alpha + i\beta + i\xi - i\tau}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha - i\beta + i\xi - i\tau}{2}\right) \right. \\
 &\quad \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha + i\beta - i\xi - i\tau}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha - i\beta - i\xi - i\tau}{2}\right) \\
 &\quad \cdot {}_4F_3\left(\frac{\alpha + i\beta + i\xi - i\tau}{2}, \frac{\alpha - i\beta + i\xi - i\tau}{2}, \frac{\alpha + i\beta - i\xi - i\tau}{2}, \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{\alpha - i\beta - i\xi - i\tau}{2}; 1 - i\tau, \frac{\alpha - i\tau}{2}, \frac{1 + \alpha - i\tau}{2}; \frac{1}{4}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es extender este resultado a espacios de funciones generalizadas. Para ello, si  $u, \tau \in \mathbb{R}$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}\alpha > 0$ , definimos el operador traslación

$$T_u \phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v \operatorname{sh} \pi v S_{i\tau, iu, iv}^\alpha \phi(v) dv, \tag{C.8}$$

y seguidamente la convolución de dos funciones

$$(\Phi \circ \Psi)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u \operatorname{sh} \pi u f(u) T_u g(\tau) du. \tag{C.9}$$

Se tiene el resultado fundamental

$$L(\phi \circ \psi)(x) = x^\alpha \Phi(x) \Psi(x),$$

donde

$$\Phi(x) = (L\phi)(x) \quad y \quad \Psi(x) = (L\psi)(x).$$

Obsérvese que tanto el operador traslación (C.8) como la convolución (C.9) dependen del parámetro  $\alpha$ .

Una cuestión abierta es analizar si la convolución así definida tiene sentido en el marco del trabajo de S. B. Yakubovich y B. Fisher [79], o bien en espacios más generales de distribuciones.

## 2. La transformación de Kontorovich-Lebedev y el método del operador adjunto.

A. H. Zemanian reconoce que una de las transformaciones integrales que más dificultades presentó en su extensión a espacios de funciones generalizadas fue la de Kontorovich-Lebedev. Este autor ha sido quien primero lo logró, al estudiar el par (C.1)-(C.2) en el espacio  $\mathcal{E}'(I)$  de distribuciones de soporte compacto [85]. Posteriormente R. S. Pathak y J. N. Pandey [56] y R. S. Pathak [55] la estudiaron en espacios más amplios de funciones generalizadas. Pero, en ambos casos, el método empleado a fin de generalizar la transformación de Kontorovich-Lebedev es el método del núcleo. Más tarde, B. Lisena [47] introdujo el espacio  $V$  constituido por las funciones  $\phi$  definidas e infinitamente derivables sobre  $I$  de modo que

$$\Upsilon_k(\phi) = \sup_{x \in I} |x^{-1} e^x A_x^k \phi(x)| < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde  $A_x = x^2 D^2 + xD - x^2$ . Con la topología generada por la familia de seminormas  $\{\Upsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  resulta que  $V$  es un espacio de Fréchet. Después construyó el espacio  $X$  de las funciones enteras pares  $\psi(z)$  tales que

$$\sigma_r(\psi) = \sup_{t \in I} \left| t^{\frac{3}{2}} e^t (\widehat{z^{2r-1}\psi})(t) \right| < \infty, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

donde  $\widehat{\phantom{x}}$  denota la transformada de Fourier, estableciendo que el operador  $K$  –definido por (C.1)– es una aplicación lineal y continua del espacio  $X$  en el espacio  $V$ . A continuación definió la transformada generalizada  $K'$  de Kontorovich-Lebedev mediante el operador adjunto de  $K$ , a saber,

$$\langle K'f, \psi \rangle = \langle f, K\psi \rangle,$$

para todo  $f \in V'$  y cualquier  $\psi \in X$ . Consiguientemente, la transformación generalizada de Kontorovich-Lebedev es igualmente una aplicación lineal y continua de  $V'$  en  $X'$ .

Este resulta no es el óptimo esperado, pues no se establece que el operador  $K$  posea inverso que actúe de  $V$  en  $X$ . Por tanto, no se puede asegurar que la transformación generalizada  $K'$  admita inversa entre los espacios  $X'$  y  $V'$ .

Sabemos que la transformación integral de Kontorovich-Lebedev (C.1)-(C.2) cumple, bajo ciertas hipótesis ([48], [68]), la relación de Parseval

$$\int_0^\infty x f(x) g(x) dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \tau \operatorname{sh} \pi \tau F(\tau) G(\tau) d\tau, \quad (\text{C.10})$$

donde  $F(\tau) = (Kf)(\tau)$  y  $G(\tau) = (Kg)(\tau)$ . Sigue siendo un problema abierto generalizar esta transformación recurriendo al método del operador adjunto. En estos momentos intentamos dar sentido distribucional a la relación (C.10), con lo que se lograría la generalización deseada. Sin embargo, como le sucedió a B. Lisená, sólo hemos obtenido avances parciales.

### 3. La transformación integral de Kontorovich-Lebedev n-dimensional.

Al estudiar la difracción de ondas por un cono de sección transversal arbitraria, J. M. L. Bernard y M. A. Lyalinov [6] determinan la función de Green  $G(\tau, \tau_0)$  del correspondiente problema de valores en la frontera mediante la inversa de la transformación doble de Kontorovich-Lebedev, es decir,

$$G(\tau, \tau_0) = \frac{k}{(i\pi)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} s(\nu, \mu, \omega, \omega_0) \frac{K_\nu(ik\tau)}{\sqrt{ik\tau}} \frac{K_\mu(ik\tau_0)}{\sqrt{ik\tau_0}} d\nu d\mu,$$

donde  $s(\nu, \mu, \omega, \omega_0)$  representa una función espectral par respecto de las variables  $\nu$  y  $\mu$ , que viene dada por su transformación directa

$$s(\nu, \mu, \omega, \omega_0) = \frac{1}{(i\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \nu \operatorname{sen}(\pi\nu) \mu \operatorname{sen}(\pi\mu) k G(\tau, \tau_0) \cdot \frac{K_\nu(ik\tau)}{\sqrt{ik\tau}} \frac{K_\nu(ik\tau_0)}{\sqrt{ik\tau_0}} d\tau d\tau_0.$$

Ello nos motiva para considerar la versión n-dimensional del par (C.1)-(C.2)

$$(Kf)(\tau) = F(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left( \prod_{k=1}^n K_{i\tau_k}(x_k) \right) \cdot f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

$$(K^{-1}F)(x) = F(x) = \frac{1}{\pi^2[x]} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty \cdot \left( \prod_{k=1}^n \tau_k \operatorname{sh}(\pi\tau_k) K_{i\tau_k}(x) \right) F(\tau) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n,$$

donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $[x] = x_1.x_2 \dots x_n$ .

Una vez resueltas las cuestiones anteriores, se podría intentar definir esta transformación integral n-dimensional de Kontorovich-Lebedev en adecuados espacios de distribuciones, tanto por el método del núcleo como del operador adjunto, así como sus reglas operacionales, aplicaciones (que ya se conocen al menos en el caso bidimensional) y estructura convolucional.

#### 4. La transformación integral de Hankel-Kontorovich-Lebedev.

El objetivo de esta Tesis Doctoral ha sido investigar la así llamada transformación H-K-L

$$(\mathcal{J}f)(\nu) = F(\nu) = \int_0^\infty H_\nu^{(2)}(x)f(x)dx \quad (\text{C.11})$$

$$(\mathcal{J}^{-1}F)(x) = f(x) = -\frac{1}{2x} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_\nu(x)F(\nu)d\nu, \quad (\text{C.12})$$

y alguna de sus variantes, en espacios de funciones generalizadas, siempre por el método del núcleo. En el párrafo tercero del Capítulo 1 se obtiene la siguiente relación de Parseval

$$\int_0^\infty xf(x)g(x)dx = \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \operatorname{sen} \pi\nu e^{-i\pi\nu} F(\nu)G(\nu)d\nu, \quad (\text{C.13})$$

siendo  $F(\nu) = (\mathcal{J}f)(\nu)$  y  $G(\nu) = (\mathcal{J}g)(\nu)$ . Una cuestión interesante sería dar sentido distribucional a la relación (C.13), es decir, extender la transformación H-K-L a espacios de funciones generalizadas utilizando el método del operador adjunto. Si ello fuera posible, se allanaría el terreno para alcanzar metas más ambiciosas: estudio de sus propiedades y de la fórmula de inversión, obtención de las reglas operacionales, introducción en este contexto de la convolución, aplicación a la resolución de problemas de la Física-Matemática,... También nos proponemos derivar una convolución para el operador integral (C.12), como se plantea en la cuestión primera en relación con la transformación de Kontorovich-Lebedev.

**5. La transformación de Mehler-Fock.**

La transformación integral de Mehler-Fock

$$(M_1 f)(\tau) = F(\tau) = \int_0^\infty \operatorname{sh} \alpha P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) f(\alpha) d\alpha$$

$$(M_1^{-1} F)(\alpha) = f(\alpha) = \int_0^\infty \tau \operatorname{tgh}(\pi\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) F(\tau) d\tau,$$

o en esta otra versión

$$(M_2 g)(\tau) = G(\tau) = \tau \operatorname{tgh}(\pi\tau) \int_1^\infty P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) g(x) dx \tag{C.14}$$

$$(M_2^{-1} G)(x) = g(x) = \int_0^\infty P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) G(\tau) d\tau, \tag{C.15}$$

donde  $P_\nu(x)$  denota la función de Legendre

$$P_\nu(x) = {}_2F_1\left(-\nu, \nu + 1; 1; \frac{1-x}{2}\right),$$

siendo  ${}_2F_1$  la función hipergeométrica de Gauss ([42], [68]), es otra transformación del tipo índice que presenta bastantes cuestiones abiertas ([30], [31], [68]). Entre ellas, destaquemos su extensión a espacios de distribuciones por el método del operador adjunto y la determinación de una convolución, reglas operacionales y aplicaciones para el operador (C.15).

**6. Otra transformación tipo índice.**

J. Wimp [77] introdujo la transformación integral

$$(Wf)(t) = F(t) = \int_0^\infty G_{p+2,q}^{m,n+2}\left(y \Big|_{\beta_q}^{1-\mu+it, 1-\mu-it, (\alpha_p)}\right) f(y) dy,$$

cuya fórmula de inversión es

$$(W^{-1}F)(y) = f(y) = \frac{i}{\pi^2} \int_0^\infty t \operatorname{sh}(2\pi t)$$

$$\cdot G_{p+2,q}^{q-m, p-n+2}\left(y \Big|_{-(\beta_q^{m+1}), -(\beta_m)}^{\mu+it, \mu-it, -(\alpha_q^{n+1}), -(\alpha_n)}\right) F(t) dt.$$

Nótese que en su núcleo figura la G-función o función de Meijer

$$G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} (\alpha_p) \\ (\beta_q) \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Psi(s) z^{-s} ds,$$

donde  $z \neq 0$ ,  $0 \leq m \leq q$ ,  $0 \leq n \leq p$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{C}$  ( $1 \leq j \leq p$ ),  $\beta_j \in \mathbb{C}$  ( $1 \leq j \leq q$ ),

$$\Psi(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(\beta_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - \alpha_j - s)}{\prod_{j=m+1}^p \Gamma(\alpha_j + s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - \beta_j - s)}$$

y  $L$  es un camino de integración infinito que separa los polos  $s = 1 - \alpha_j + k$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ) de los polos  $s = -\beta_j - k$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Se pretende investigar esta transformación en espacios de funciones generalizadas por el método del operador adjunto, deduciendo sus principales propiedades.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, Reverté, Barcelona, 1960.
- [2] J. Barros-Neto, *An introduction to the theory of distributions*, Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1981.
- [3] J. Bak and D. J. Newman, *Complex Analysis*, Springer, N.Y., 1997.
- [4] V. Belichenko, *Diffraction of electromagnetic waves by a wedge with anisotropically conducting faces*, Zh. Vychisl. Mat. i Fiz., 27(6)(1987), 889-897.
- [5] A. Ben-Menahem, *Properties and applications of a certain operator associated with the Kontorovich-Lebedev transform*, Glasgow Math. J., 16(1975), 109-122.
- [6] J. M. L. Bernard and M. A. Lyalinov, *Diffraction of scalar waves by an impedance cone of arbitrary cross-section*, Wave Motion, 33(2001), 155-181.
- [7] J. M. L. Bernard and M. A. Lyalinov, *Spectral domain solution and asymptotics for the diffraction by an impedance cone*, IEEEET. Antenn. Propag., 49(12)(2001), 1633-1637.
- [8] J. D. Betancor, *La transformación integral de Chébli-Trimèche*, Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna, La Laguna, 2002.
- [9] J. J. Betancor, J. D. Betancor and J. M. R. Méndez Pérez, *Distributional Fourier transform and convolution associated to Chébli-Trimèche hypergroups*, Mh. Math., 134(2002), 265-286.
- [10] J. J. Betancor, J. D. Betancor and J. M. R. Méndez Pérez, *Chébli-Trimèche hypergroups and W-type spaces*, J. Math. Anal. Appl., 271(2002), 359-373.

- [11] J. J. Betancor, J. D. Betancor and J. M. R. Méndez Pérez, *Distributional Chébli-Trimèche transforms*, J. Math. Anal. Appl., 313(2006), 537-550.
- [12] M. Cessenat, *Sur quelques opérateurs liés à l'équation de Helmholtz en coordonnées polaires, transformation H-K-L (Hankel-Kantorovich-Lebedev)*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. 309(1989), 25-30.
- [13] A. Chakrabarti, *Lebedev-Kontorovich type of transforms for broken region and the Parseval relation associated with them and their use in the problem of diffraction by a wedge*, J. Tech. Bengal Engrg. College, 12(1967), 15-27.
- [14] A. Chakrabarti, *Derivation of certain finite Lebedev transforms and their uses in elastostatics*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 6(20)(1968), 635-650.
- [15] A. Chakrabarti, *Derivation of certain finite Kontotovich type of integral transforms*, Studia Sci. Math. Hungar., 4(1969), 45-53.
- [16] H. Chébli, *Sur un théorème de Paley-Wiener associé à la décomposition spectral d'un opérateur de Sturm-Liouville sur  $(0, \infty)$* , J. Funct. Anal., 17(1974), 447-461.
- [17] M. M. Crum, *Some inversion formulae*, Quart. J. Math. Oxford Ser., (2)11(1940), 49-52.
- [18] G. Doetsch, *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation*, Springer, Berlin, 1974.
- [19] A. Erdélyi (Ed), *Higher Transcendental Functions*, vols: I, II y III, McGraw-Hill, N.Y., 1953 (reprinted by R.E. Krieger, Malabar, Florida, 1981).
- [20] A. Erdélyi (Ed), *Tables of Integral Transforms*, vol I, McGraw-Hill, N.Y., 1954.
- [21] V. A. Doroshenko and V. F. Kravchenko, *Scattering of the field of an electric dipole by a conic structure with longitudinal slots*, J. Commun. Technol. El+., 45(7)(2000), 714-720.
- [22] V. A. Doroshenko and V. F. Kravchenko, *The scattering of plane electromagnetic waves from a cone with longitudinal slots*, J. Commun. Technol. El+., 46(3)(2001), 271-278.

- [23] G. Gasaneo, S. Ovchinnikov and J. H. Macek , *A Kontorovich-Lebedev representation for zero-range potencial eigensolutions*, J. Phys. A: Math. Gen. 34(2001), 8941-8954.
- [24] I. M. Gelfand and G. E. Shilov , *Generalized Functions*, vol. 2, Academic Press, N.Y., 1968.
- [25] H.-J. Glaeske and A. Hess, *A Convolution Connected with the Kontorovich-Lebedev Transform*, Math. Z., 193(1986), 67-78.
- [26] A. M. Gomilko, *The Kontorovich-Lebedev integral transform*, Ukrainian Math. J., 43(1991), 1259-1263.
- [27] A. M. Gomilko, *Inversion of the Kontorovich-Lebedev integral transform*, Matematicheskie Zametki, 51(5)(1992), 27-34. Traducido en Math. Notes, 51(5-6)(1992), 442-447.
- [28] A. M. Gomilko, *On the integral Kontorovich-Lebedev representation*, Diff. Uravn., 29(7)(1993), 1261-1271.
- [29] B. J. González, *La  ${}_2F_1$ -transformada índice*, Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna, La Laguna, 1992.
- [30] B. J. González and E. R. Negrín, *Mehler-Fock transforms of generalized functions via the method of adjoints*, Proc. Amer. Math. Soc., 125(11)(1997), 3243-3253.
- [31] B. J. González and E. R. Negrín, *Operational calculi for Kontorovich-Lebedev and Mehler-Fock transforms on distributions with compact support*, Rev. Colombiana Mat., 32(1)(1998), 81-92.
- [32] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik , *Table of integrals, series and products*, Academic Press, San Diego, 2000.
- [33] Y. E. Gutiérrez-Tovar and J. M. R. Méndez Pérez, *The distributional Kontorovich-Lebedev transformation with the Hankel function in the kernel*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 13(3)(2006), 499-512.
- [34] Y. E. Gutiérrez-Tovar and J. M. R. Méndez Pérez, *The Hankel-Kontorovich-Lebedev transformation and its applications*, preprint.
- [35] Y. E. Gutiérrez-Tovar and J. M. R. Méndez Pérez, *The Kontorovich-Lebedev integral transformation with a Hankel function kernel in a space of generalized functions of doubly exponential descent*, J. Math. Anal. Appl., 328(2007), 359-369.

- [36] Y. E. Gutiérrez-Tovar and J. M. R. Méndez Pérez, *A convolution for the Hankel-Kontorovich-Lebedev transformation*, aceptada su publicación en Math. Nachr.
- [37] Y. E. Gutiérrez-Tovar and J. M. R. Méndez Pérez, *A parametric convolution for the Kontorovich-Lebedev integral transformation*, preprint.
- [38] D. S. Jones, *The Kontorovich-Lebedev Transform*, J. Inst. Maths Applies, 26(1980), 133-141.
- [39] D. S. Jones, *The theory of electromagnetism*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [40] E. L. Koh and A. H. Zemanian, *The complex Hankel and I-transformations of generalized functions*, SIAM J. Appl. Math., 16(5)(1968), 945-957.
- [41] M. I. Kontorovich and N. N. Lebedev, *On a method of solution of some problems of the diffraction theory*, Zh. Exp. i teor. Fiz., 8(1938), 1192-1206.
- [42] N. N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover, N.Y., 1972
- [43] N. N. Lebedev, *Sur une formule d'inversion*, Dokl. Acad. Nauk. SSSR, 52(1946), 655-658.
- [44] N. N. Lebedev, I. P. Skalskaya and Y. S. Uflyand, *Problems of mathematical physics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [45] N. N. Lebedev and I. P. Skalskaya, *The dual integral equations connected with Kontorovich-Lebedev transform*, Prikl. Matem. i Mechan., 38(6)(1974), 1090-1097.
- [46] N. N. Lebedev and I. P. Skalskaya, *Some integral transform related to Kontorovich-Lebedev transform*, The Questions of the Mathematical Physics, Nauka, Leningrad, 1976, 68-79.
- [47] B. Lisena, *On the generalized Kontorovich-Lebedev transform*, Rendiconti di Matematica, Serie VII, 9(1989), 87-101.
- [48] J. S. Lowndes, *Parseval relations for Kontorovich-Lebedev transforms*, Proc. Edinburg Math. Soc. 13(1962), 5-11.

- [49] I. Marrero and J. J. Betancor, *Hankel convolution of generalized functions*, Rendiconti di Matematica, 15(1995), 351-380.
- [50] D. Naylor, *On a Finite Lebedev Transform*, J. Math. Mech., 12(1963), 375-383.
- [51] D. Naylor, *On a Lebedev Expansion Theorem*, J. Math. Mech., 13(1964), 353-363.
- [52] D. Naylor, *On a Finite Lebedev Transform. Part 2.*, J. Math. Mech., 15(1966), 455-464.
- [53] E. R. Negrín, *Una transformación del tipo Kontorovich-Lebedev con índice arbitrario*, Tesis doctoral, Universidad de La Laguna, La Laguna, 1988.
- [54] V.G. Novitzky, *Potential scattering in terms of the Wigner distribution function*, Physics Letters, 104A (6,7)(1984), 319-321.
- [55] R. S. Pathak, *Integral Transforms of Generalized Functions and Their Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1997.
- [56] R. S. Pathak and J. N. Pandey, *The Kontorovich-Lebedev transformation of distributions*, Math. Z., 165(1979), 29-51
- [57] A. Pendse, *A relation between generalized Kontorovich-Lebedev transform and Weyl fractional integral*, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 39(A)IV(1969), 477-480.
- [58] V.B. Poruchikov and J. M. Rappoport, *Inversion formulas for modified Kontorovich-Lebedev integral transformations*, Diff. Uravn., 20(3)(1984), 542-546.
- [59] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov and O. I. Marichev, *Integrals and Series, Volume 2: Special Functions*, Gordon and Breach Sc. Publ., London, 1986.
- [60] J.M. Rappoport, *Integral equations and Parseval equalities for modified integral Kontorovich-Lebedev transforms*, Diff. Uravn., 17(1981), 1696-1699.
- [61] J.M. Rappoport, *Some properties of modified Kontorovich-Lebedev integral transformations*, Diff. Uravn., 21(4)(1985), 724-727.

- [62] J.M. Rappoport, *Some results for modified Kontorovich-Lebedev integral transforms*, Lecture notes in pure and applied mathematics, vol. 214, 473-476, Marcel Dekker, Inc., N. Y., 2000.
- [63] A. D. Rawlins, *Diffraction by, or diffusion into, a penetrable wedge*, Proc. R. Soc. Lond. (A)455(1999), 2655-2686.
- [64] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, Alhambra, Madrid, 1985.
- [65] W. Rudin, *Functional analysis*, Tata MacGraw-Hill, New Delhi, 1977.
- [66] L. Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [67] S. K. Sinha, *On two new characterizations of the generalized Kontorovich-Lebedev transform for distributions of compact support*, Journ. Math. Phy. Sci., 24(5)(1990), 319-330.
- [68] I. N. Sneddon, *The use of integral transforms*, McGraw-Hill, N. Y., 1972.
- [69] J. de Sousa-Pinto, *A generalized Hankel convolution*, SIAM J. Appl. Math., 16(1985), 1335-1346.
- [70] B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, *A new Kontorovich-Lebedev like transformation*, J. Phys. A: Math. Gen. 24(1991), 3199-3203.
- [71] K. Trimèche, *Transformation intégrale de Weyl et théorème de Paley-Wiener associé à un opérateur différentiel singulier sur  $(0, \infty)$* , J. Math. Pures Appl., 60(1981), 51-98.
- [72] Vu Kim Tuan and S. B. Yakubovich, *The Kontorovich-Lebedev transformation in a new class of functions*, Amer. Math. Soc. Transl. 137(2)(1987), 61-65.
- [73] Vu Kim Tuan, *Some integral transformations with Macdonald function  $K_\nu(z)$  in the kernels*, Ukrain. Mat. Zh., 42(7)(1990), 900-903.
- [74] Vu Kim Tuan and A. I. Zayed, *Paley-Wiener type theorems for a class of integral transforms*, J. Math. Anal. Appl., 266(2002), 200-226.
- [75] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, London, 1962.
- [76] C. P. Wells and A. Leitner, *A Lebedev transform and the "baffle" problem*, Quart. Appl. Math., 15(1958), 430-434.

- [77] J. Wimp, *A class of integral transforms*, Proc. Edin. Math. Soc., 14(1964), 33-40.
- [78] S. B. Yakubovich, *On the index-convolution Kontorovich-Lebedev transform*, Integral Transforms and Special Functions, 2(1)(1994), 77-80.
- [79] S. B. Yakubovich and B. Fisher, *On the theory of the Kontorovich-Lebedev transformation on distributions*, Proc. Amer. Math. Soc., 122(1994), 773-777.
- [80] S. B. Yakubovich, *Integral transforms of the Kontorovich-Lebedev convolution type*, Collect. Math., 54(2)(2003), 99-110.
- [81] S. B. Yakubovich, *Index transforms*, World Scientific, Singapore, 1996.
- [82] A. H. Zemanian, *Inversion formulas for the distributional Laplace transformation*, SIAM J. Appl. Math., 14(1966), 159-166.
- [83] A. H. Zemanian, *A distributional Hankel transformation*, SIAM J. Appl. Math., 14(1966), 561-576.
- [84] A. H. Zemanian, *A distributional  $K$  transformation*, SIAM J. Appl. Math., 14(1966), 1350-1365.
- [85] A. H. Zemanian, *The Kontorovich-Lebedev transformation on distributions of compact support and its inversion*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 77(1975), 139-143.
- [86] A. H. Zemanian, *Generalized integral transformations*, Interscience Public., N.Y., 1968 (Reprinted by Dover, 1987).