

Curso 1992/93  
**CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS**

**JOSÉ LUIS SÁNCHEZ DE LA ROSA**

**Métodos para el procedimiento  
y análisis estadístico multivariante  
de señales multicanal.  
Aplicación al estudio del EEG**

**Director**  
**LORENZO MORENO RUIZ**



**SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS**  
**Serie Tesis Doctorales**

MÉTODOS PARA EL PROCESAMIENTO Y ANÁLISIS ESTADÍSTICO

MULTIVARIANTE

DE SEÑALES MULTICANAL:

APLICACIÓN AL ESTUDIO DEL EEG

Quiero expresar mi agradecimiento al Dr. D. Lorenzo Moreno Ruiz por la dirección y la colaboración constante en la realización de esta tesis.

A D. José Demetrio Piñeiro por la comunicación y compenetración que hemos conseguido a lo largo de todos estos años.

A Dña. Soledad Mañas por sus enseñanzas en los aspectos médicos, y por haberme abierto la posibilidad de investigar en un tema tan apasionante.

A la Dra. Dña. Victoria Jiménez cuya desinteresada colaboración me ha permitido aclarar numerosos conceptos en Estadística.

Al Departamento, en las personas del Dr. D. Leopoldo Acosta Sánchez, D. Alberto Hamilton, D. Juan Merino Rubio, D. Juan Albino Méndez, D. Juan Ramón Rodríguez, D. Roberto Betancor y el Dr. D. Gumersindo Vera por su apoyo en la realización de este trabajo.

A los Doctores D. José Peraza y D. Francisco Mauricio por haberme animado a emprender este camino.

Finalmente, quiero agradecer la colaboración de los alumnos del Centro Superior de Informática D. Jesús Javier Quijada, D. Raides Jesús Rodríguez, D. Pedro Miguel González y D. José Carlos Rodríguez Palmero.

A mis padres

por apoyarme en todo  
momento.

A Cristina

Con cariño

## PROPÓSITO Y DESARROLLO DE LA PRESENTE MEMORIA

Este trabajo ha surgido a partir de una colaboración entre miembros del Departamento de Neurofisiología del Hospital S.S. Virgen de la Candelaria de Santa Cruz de Tenerife por un lado y un grupo de profesores del Departamento de Física Fundamental y Experimental de la Universidad de La Laguna por otro. El objetivo de la misma consistió en aprovechar la complementariedad en los conocimientos de ambos equipos para desarrollar un conjunto de programas y técnicas de análisis de señales y datos que pudieran ayudar al experto médico en su diagnóstico. Esta colaboración fue financiada por el F.I.S.S. (Fondo de Investigaciones Sanitarias de la Seguridad Social) mediante el proyecto 89/0842 cuyo objetivo era el "Desarrollo de un paquete de programas para el análisis computerizado del EEG y potenciales evocados". Este trabajo tenía que cubrir los siguientes aspectos:

- a) Desarrollo de un paquete para adquisición de datos del EEG.
- b) Desarrollo de un paquete de análisis de las señales EEG.
- c) Definición e implementación de las herramientas estadísticas a utilizar para el análisis de los datos generados por el programa anterior para el estudio de poblaciones de individuos.

Como primera aplicación, se llevó a cabo un estudio de la Maduración Cerebral en niños con edades comprendidas entre los 3 y los 14 años.

La presente memoria es fruto de la investigación realizada y su objetivo principal es la presentación de la misma. Además, tiene el segundo objetivo de servir como una guía de usuario para el experto médico. Esto último nos ha obligado a explicar detalladamente cada uno de los temas y ha forzado la distribución de los diferentes capítulos de la memoria. En la misma el experto médico podrá encontrar, no sólo la descripción y funcionamiento de todos los programas realizados, sino también las bases teóricas de todos los métodos, tanto de procesamiento de señales como de análisis estadístico utilizados. Por lo que respecta a los resultados del análisis de maduración cerebral, se presentan los resultados tanto del análisis estadístico univariante como del multivariante, se comparan los distintos clasificadores utilizados y los grupos de variables sobre los que se ha trabajado.

La memoria ha sido dividida en cinco capítulos y 8 apéndices. En el capítulo 1 se dan a conocer los diferentes aspectos teóricos del procesamiento de señales. Es el capítulo más extenso de la memoria y se ha subdividido en 10 apartados. Se comienza con una introducción histórica en la que se da cuenta de la evolución del análisis espectral desde sus orígenes

con Newton hasta el estado actual de estas técnicas. El análisis espectral determinista basado en series y transformadas de Fourier nos lleva a la necesidad de abordar la explicación del algoritmo de la FFT. Por otra parte, se da un breve repaso a otras transformadas (distintas de las de Fourier) que están ligadas al procesamiento de señales. Asimismo, se da cuenta de los diferentes modelos paramétricos que se utilizan en el análisis espectral (Modelos AR, MA, ARMA y ARIMA). La no estacionariedad de las señales reales nos lleva a dar una breve explicación de los distintos modelos no estacionarios y no lineales. Se dan algunas definiciones importantes de probabilidad y teoría de procesos aleatorios. El hardware necesario para el procesamiento de señales es explicitado, detallando tanto el funcionamiento de los CA/D y CD/A como los diferentes tipos de sistemas de adquisición de datos. También son explicados en este capítulo los filtros analógicos y digitales, extendiendonos algo más en estos últimos. En particular comentamos los dos tipos principales de filtros digitales (FIR e IIR) y el diseño de los mismos ayudado por computador. Por último hacemos una breve descripción de los paquetes de software MATLAB y SPD por su utilización en el presente trabajo en el área de procesamiento de señales.

El análisis estadístico es abordado en el capítulo 2, en las que se explican las nociones básicas del análisis estadístico univariante, los métodos de análisis estadístico multivariante utilizados y la descripción del paquete de software SPSS por su aplicación a esta parte del trabajo.

El conocimiento de los mecanismos biológicos que generan la actividad eléctrica cerebral, la clasificación que los médicos llevan a cabo de la misma y los conceptos técnicos fundamentales para comprender el funcionamiento del electroencefalógrafo pueden ser de ayuda para la correcta interpretación del problema. Por ello se dan unas breves nociones sobre estos tres tópicos en el capítulo 3.

La descripción de los programas desarrollados (adquisición, filtrado y procesamiento de señales) y de los métodos utilizados (paramétricos (AR) y no paramétricos (FFT)) para la caracterización del EEG (registro electroencefalográfico) son el objetivo del capítulo 4.

Por último, el capítulo 5 describe la aplicación de las técnicas de análisis univariante y multivariante a los parámetros del EEG obtenidos con los programas descritos en el capítulo anterior.

En los apéndices se muestran los listados de todos los programas y las tablas de resultados estadísticos obtenidos.

Para el desarrollo de los programas contenidos en la memoria se han

utilizado diferentes tipos de herramientas:

a) Herramientas Hardware:

- 1) Ordenadores personales tipo IBM-PC (procesadores INTEL).
- 2) Tarjeta de Adquisición de datos DATA-TRANSLATION DT2801 con un panel terminal DT707 para el conexionado de cables.
- 3) Aprovechamiento del DMA (Acceso directo a memoria) del ordenador, por parte de esta última tarjeta.

b) Herramientas Software:

- 1) Lenguaje de Programación QuickBasic
- 2) Lenguaje de Programación C
- 3) Lenguaje de Programación PASCAL

c) Paquetes de Software utilizados:

- 1) Paquete de CAD/CAE PC-MATLAB y HP-MATLAB
- 2) Paquete de Librerías de adquisición y análisis de señales SPD de Tektronix.
- 3) Paquete de Análisis Estadístico SPSSPC +.

## INDICE

I REVISIÓN DE LOS DIFERENTES ASPECTOS TEÓRICO-PRÁCTICOS DEL PROCESAMIENTO DE SEÑALES	1
1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA	2
1.1 DEFINICIONES BÁSICAS	9
1.2 ANÁLISIS ESPECTRAL DE PROCESOS ALEATORIOS ESTACIONARIO	12
1.3 ANÁLISIS ESPECTRAL DE PROCESOS ALEATORIOS NO ESTACIONARIOS	13
2 ANÁLISIS ESPECTRAL DETERMINISTA	15
2.1 TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER	15
2.2 TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO	29
2.3 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER	31
2.4 RELACIÓN ENTRE LAS TRANSFORMADAS CONTINUAS Y DISCRETAS	32
3 ALGORITMO DE LA FFT	37
3.1 ALGORITMOS DE DECIMACIÓN EN TIEMPO	39
3.2 ALGORITMOS DE DECIMACIÓN EN FRECUENCIA	42
3.3 ALGORITMOS DE FFT PARA NÚMEROS COMPUESTOS	46
3.4 ALGORITMO DE WINOGRAD	50
3.5 ALGORITMO DE DOBLE BASE	52
3.6 COMPARACIÓN DE LOS ALGORITMOS	54
3.7 ALGORITMO PARA LA TRANSFORMADA CHIRP-Z	55
3.8 TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CORTO	58
4 OTRAS TRANSFORMADAS	60
4.1 TRANSFORMADA BIDIMENSIONAL DE FOURIER	60
4.2 TRANSFORMADA DE HANKEL	60
4.3 TRANSFORMADA DE HANKEL EN N DIMENSIONES	61
4.4 TRANSFORMADA DE MELLIN	61
4.5 TRANSFORMADA Z	62
4.6 TRANSFORMADA DE ABEL	63
4.7 TRANSFORMADA DE HILBERT	64
4.8 PROCESAMIENTO HOMOMÓRFICO DE SEÑALES	66
5 MODELOS PARAMÉTRICOS DE PROCESOS ALEATORIOS	68
5.1 MODELOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONARIOS Y NO ESTACIONARIOS	68
5.2 POTENCIA ESPECTRAL	78
5.3 RELACIONES ENTRE LOS PARÁMETROS DE LOS MODELOS AR, MA Y ARMA	79
6 MÉTODOS NO ESTACIONARIOS Y NO LINEALES	105
6.1 INTRODUCCIÓN	105
6.2 ANÁLISIS ESPECTRAL DE PROCESOS NO-ESTACIONARIOS	105
6.3 OTRAS DEFINICIONES DE ESPECTRO DEPENDIENTE DEL TIEMPO	115
6.4 MÉTODOS NO LINEALES DE ANÁLISIS ESPECTRAL	118
7 PROCESOS ALEATORIOS	124

7.1 INTRODUCCIÓN	124
7.2 ERGODICIDAD	126
7.3 SESGO Y VARIANZA DEL ESPECTRO MUESTRAL	129
<b>8 CONVERSORES ANALÓGICO/DIGITALES Y DIGITALES/ANALÓGICOS</b>	<b>131</b>
8.1 CIRCUITOS DE MUESTREO Y MANTENIMIENTO	131
8.2 CIRCUITOS CONVERSORES D/A y A/D	132
8.3 SUBSISTEMAS COMPLETOS DE ADQUISICIÓN DE DATOS	135
8.4 ADQUISICIÓN DE DATOS	136
8.5 PROCESADORES DE SEÑALES DIGITALES	140
<b>9 FILTROS</b>	<b>145</b>
9.1 INTRODUCCIÓN	145
9.2 TIPOS DE FILTRO	146
9.3 FILTROS RC	146
9.4 FILTROS DE CORTE EN DOBLE T	149
9.5 FILTROS DIGITALES	150
<b>10 PAQUETES DE SOFTWARE UTILIZADOS</b>	<b>167</b>
10.1 INTRODUCCIÓN	167
10.2 TIPOS DE PROGRAMAS USADOS EN PROCESAMIENTO DE SEÑALES	168
<b>II ANÁLISIS ESTADÍSTICO</b>	<b>175</b>
<b>1 CONCEPTOS BÁSICOS</b>	<b>176</b>
1.1 PRUEBA DE HIPÓTESIS	180
1.2 LA PRUEBA CHI-CUADRADO	181
1.3 ANÁLISIS DE VARIANZA	182
<b>2 ANÁLISIS MULTIVARIANTE</b>	<b>185</b>
2.1 INTRODUCCIÓN	185
2.2 PARÁMETROS ESTADÍSTICOS FUNDAMENTALES	186
2.3 DISTANCIAS ESTADÍSTICAS	187
2.4 ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES	189
2.5 ANÁLISIS CANÓNICO DE POBLACIONES	192
2.6 ANÁLISIS DE PROXIMIDADES	199
2.7 ANÁLISIS DISCRIMINANTE	204
2.8 ANÁLISIS DE GRUPOS	209
<b>3 PAQUETES DE SOFTWARE UTILIZADOS</b>	<b>214</b>
<b>III FUNDAMENTOS DEL ELECTROENCEFALOGRAMA</b>	<b>216</b>
<b>1 BASES NEUROFISIOLÓGICAS DEL EEG Y RITMOS CEREBRALES</b>	<b>217</b>
1.1 FENÓMENOS ELECTROQUÍMICOS	217
1.2 LA MEMBRANA NEURONAL Y EL POTENCIAL DE MEMBRANA	218
1.3 PROPAGACIÓN DEL POTENCIAL DE ACCIÓN A LO LARGO DEL AXO	219
1.4 INTERACCIONES ENTRE NEURONAS	220

1.5 REGISTRO SUPERFICIAL DE LOS POTENCIALES DE ACCIÓN DE LOS NERVIOS PERIFÉRICOS	220
	220
1.6 CORRIENTES EXTRACELULARES Y POTENCIALES EVOCADOS REGISTRADOS EN EL CUERO CABELLUDO	221
2 CLASIFICACIÓN DE LA ACTIVIDAD EEG	224
2.1 ACTIVIDAD NORMAL Y ANORMAL DEL EEG	224
2.2 VARIABLES USADAS EN LA CLASIFICACIÓN DE LA ACTIVIDAD E	227
2.3 ACTIVIDAD CEREBRAL NORMAL	228
2.4 DIFERENCIACIÓN TOPOGRÁFICA DE LOS RITMOS	230
2.5 ACTIVIDAD CEREBRAL ANORMAL	230
2.6 ARTEFACTOS	231
2.7 POTENCIALES EVOCADOS MEDIOS	234
2.8 EEG EN TRASTORNOS ENDOCRINOMETABÓLICOS	235
2.9 EEG EN NEUROPSIQUIATRÍA	235
3 TÉCNICA DEL REGISTRO ELECTROENCEFALOGRÁFICO	238
3.1 DESCRIPCIÓN DEL ELECTROENCEFALÓGRAFO	238
3.2 ELECTRODOS	238
3.3 POSICIONAMIENTO DE LOS ELECTRODOS	239
3.4 REGISTRO BIPOLAR	240
3.5 INVERSIÓN DE FASE	241
3.6 REGISTRO REFERENCIAL	241
3.7 MONTAJES	242
IV ADQUISICIÓN Y PROCESAMIENTO DE SEÑALES	243
1 ADQUISICIÓN DE LAS SEÑALES	244
1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS	249
1.2 FILTRADO DE LAS SEÑALES EEG	252
2 MÉTODOS UTILIZADOS PARA CALCULAR LA DPE	255
2.1 SELECCIÓN DEL ORDEN DEL MODELO	256
3 PROGRAMA DE ANÁLISIS INTERACTIVO	278
3.1 DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA DEL PROGRAMA DE PROCESAMIENTO	302
3.2 ORGANIGRAMA	313
4 PROGRAMA DE EDICIÓN DE SEÑALES	336
V ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LOS PARÁMETROS DEL EEG	341
0.1 ESPECIFICACIONES PREVIAS	342
1 ANÁLISIS UNIVARIANTE Y BIVARIANTE	346
1.1 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS	347
2 ANÁLISIS MULTIVARIANTE	390
2.1 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS DEL ANÁLISIS DISCRIMINANTE CUADRÁTICO	391

2.2 ANÁLISIS DE GRUPOS (CLUSTER)	398
2.3 ANÁLISIS DISCRIMINANTE LINEAL	399
2.4 ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS MÉTODOS DE ANÁLISIS MULTIVARIANTE	399

## CAPITULO I

REVISIÓN DE LOS DIFERENTES ASPECTOS

TEÓRICO PRÁCTICOS DEL

PROCESAMIENTO DE SEÑALES

# I REVISIÓN DE LOS DIFERENTES ASPECTOS TEÓRICO-PRÁCTICOS DEL PROCESAMIENTO DE SEÑALES

## 1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Las bases matemáticas para la estimación espectral moderna tienen sus orígenes en el siglo XVII con el trabajo de Newton. Él observó que la luz del sol al pasar a través de un prisma era descompuesta en una banda de muchos colores. Descubrió que cada color representaba una longitud de onda particular de la luz y que la luz blanca contenía todas las longitudes de onda. Newton (1671) introdujo la palabra *espectro* para describir a esta banda de colores.

La solución para la ecuación de onda de una cuerda musical vibrante fue desarrollada por Daniel Bernoulli (1738), un matemático que descubrió la solución general para el desplazamiento  $x(l,t)$  de la cuerda en el tiempo  $t$  y la posición  $l$  (siendo los límites de la cuerda  $l=0$  y  $l=\pi$ )

$$x(l,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{sen}(kl) [ A_k \cos(ckt) + B_k \text{sen}(ckt) ] \quad \text{I.1}$$

donde  $c$  es una cantidad física característica del material de la cuerda, que representa la velocidad a la que viajan las ondas en la cuerda. El matemático L. Euler (1755) demostró que los coeficientes  $A_k$  y  $B_k$  de la serie anterior venían dados por la expresión:

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(l,0) \text{sen}(kl) dl \quad B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(l,0) \cos(kl) dl \quad \text{I.2}$$

El ingeniero Francés Jean Baptiste Joseph Fourier aseguró que una función periódica  $x(l)$  puede ser representada como una suma de términos en seno y coseno. Además obtuvo una representación para señales aperiódicas, no como una suma ponderada de sinusoides relacionadas armónicamente, sino como integrales ponderadas de sinusoides que no estaban relacionadas armónicamente. Cuatro matemáticos y científicos distinguidos fueron los encargados de examinar el artículo de Fourier en 1807. Tres de ellos, S. F. Lacroix, G. Monge y P. S. Laplace, estaban a favor de la publicación, pero el cuarto, J.L. Lagrange rechazó el uso de series trigonométricas debido a su creencia de que era imposible representar señales con esquinas (pendientes

discontinuas) usando las mismas. En su Tesis Teoría Analítica del Calor (1822) extendió los resultados de la ecuación de ondas asegurando que una función arbitraria  $x(l)$  puede ser representada como una suma infinita de términos en seno y coseno:

$$x(l) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(k\alpha l) + B_k \sin(k\alpha l)) \quad \text{I.3}$$

Los argumentos matemáticos de Fourier eran todavía imprecisos y fue P. L. Dirichlet en 1829 quien especificó las condiciones precisas bajo las cuales una señal periódica puede ser representada por una serie de Fourier.

La formulación matemática de tomar una función  $x(l)$ , o sus muestras, y determinar sus coeficientes  $A_k$  y  $B_k$  se conoce como análisis armónico, debido a la relación armónica entre los términos sinusoidales.

A partir de la mitad del siglo XIX, empezaron a aparecer aplicaciones científicas prácticas que usaban el análisis armónico para estudiar datos fenomenológicos como:

- sonido
- clima
- flujo de los ríos
- manchas solares
- desviaciones magnéticas

En muchas de estas aplicaciones, el periodo fundamental estaba confuso, debido al ruido por error en la medida, o no era visualmente evidente. Además estaban presentes componentes periódicas secundarias que no guardaban relación con la periodicidad fundamental. El cálculo manual de los coeficientes de Fourier era bastante tedioso y estaba limitado a conjuntos de datos pequeños. Para ayudar en el análisis se desarrollaron analizadores armónicos mecánicos. Estas máquinas de calcular eran básicamente integradores mecánicos, porque encontraban el área bajo las curvas  $x(l)\sin(kl)$  y  $x(l)\cos(kl)$  en el intervalo  $0 < l < \pi$ . El físico británico Sir William Thomson (Lord Kelvin) (1876, 1878) desarrolló el primer analizador armónico mecánico basado en un integrador de productos de funciones  $\int_0^{\pi} \psi(\theta) \phi(\theta) d\theta$ , inventado por su hermano James Thomson y modificado para evaluar funciones de seno y coseno. Los analizadores fueron mejorados por O. Henrici (1894), A. Sharp (1894), G.U. Yule (1895) y el físico americano Albert A. Michelson junto con W. Stratton (1898).

El analizador de Michelson-Stratton causó impresión porque no sólo podía

calcular 80 armónicos simultáneamente, sino que podía trabajar como un sintetizador construyendo la superposición de los componentes de la serie de Fourier. Este aparato fue utilizado en sus estudios de óptica que le dieron el premio Nobel.

Aunque los analizadores armónicos mecánicos fueron útiles para evaluar series con periodicidades obvias ( variaciones lentas en el tiempo con poco o ningún ruido), todavía se requerían métodos numéricos cuando se querían analizar datos con mucho ruido para encontrar posibles periodicidades escondidas.

Schuster (1898) fue el que más se acercó a lo que hoy se conoce como estimación espectral clásica. Sugirió que se calculara la suma de los cuadrados de los coeficientes de Fourier sobre un rango de  $n$  periodos integrales de  $T_0$  y se dibujara:

$$S_k = A_k^2 + B_k^2 \quad \text{I.4}$$

Schuster denominó a su método el PERIODOGRAMA. En sus escritos, reconoció muchos de los problemas y peculiaridades del periodograma. Dependiendo del tiempo de comienzo  $\tau$  observó que se tenían patrones diferentes e irregulares, produciendo algunas veces falsos picos donde no existe periodicidad. A partir de su comprensión del análisis de Fourier del espectro óptico, sugirió la necesidad de suavizar el periodograma y eliminar las partes espúreas del espectro mediante el promediado de  $S_k$  en diferentes segmentos de datos (1894, 1897, 1898, 1900, 1904, 1905 y 1906). También se percató de los lóbulos laterales que son inherentes a cualquier análisis de Fourier de una longitud de datos finita y de que muchos investigadores confundían estos lóbulos con periodicidades ocultas. En el caso de que la señal estuviera contaminada con ruido blanco, las fluctuaciones en el periodograma eran de la misma magnitud que la propia señal.

El desencanto con este método llevó a G. Yule a introducir en 1927 un notable método de análisis alternativo. La idea de Yule era modelar una serie temporal con un análisis de regresión lineal para encontrar una o más periodicidades en los datos. Usando una identidad trigonométrica simple:

$$\text{sen}[n\omega] = 2\cos(\omega)\text{sen}[(n-1)\omega] - \text{sen}[(n-2)\omega] \quad \omega = 2\pi f \quad \text{I.5}$$

se puede obtener una ecuación en diferencias homogénea simétrica que describe en tiempo discreto una variación armónica simple:

$$x[n] - ax[n-1] + x[n-2] = 0; \quad \text{I.6}$$

$x[n]=\text{sen}(2\pi fnT)$  es la componente armónica,  $T$  es el periodo de muestreo,  $f$  es la frecuencia de la variación armónica y  $a=2\cos(2\pi ft)$  es un coeficiente que caracteriza al armónico.

Yule conjeturó que el número de manchas solares tiene sólo una componente periódica y por tanto la secuencia puede ser generada por el proceso:

$$x[n]=ax[n-1]-x[n-2]+e[n] \quad \text{I.7}$$

donde  $e[n]$  es una perturbación aleatoria. Yule sentó las bases de lo que se conoce como **Aproximación Paramétrica al Análisis Espectral**.

El método usado por Yule es una reminiscencia de otro, mucho más viejo, del Barón de Prony (1795). Prony describió un método de ajustar un modelo exponencial para representar un conjunto de datos de presiones y volúmenes de gases. El método de Prony es un ajuste exacto de los datos, mientras que el de Yule implica un ajuste por mínimos cuadrados para encontrar los coeficientes.

El año 1930 fue decisivo para el análisis espectral. Wiener publicó su artículo *Análisis armónico generalizado*. Por primera vez

- se empiezan a tratar procesos aleatorios desde el análisis espectral.
- Se da una definición precisa de autocorrelación y de la
- Densidad de Potencia espectral para procesos aleatorios estacionarios.

El uso de la Transformada de Fourier, más que el de las series, permitió a Wiener definir el espectro en términos de un continuo de frecuencias.

La ecuación de regresión de Yule puede ser considerada como una predicción lineal de la señal a partir de muestras del pasado de la misma más una contribución de ruido. Esto constituye el problema de predicción lineal.

Wold introdujo el término **media móvil** para un modelo de series descritas originalmente por Slutsky y **autoregresión lineal** para las de Yule. También fue el primero en describir la relación entre los parámetros autoregresivos y la secuencia de autocorrelación. En 1938 introdujo un teorema de descomposición muy importante para series temporales estacionarias. Este teorema asegura que:

Cualquier proceso aleatorio puede ser expresado como una suma de una componente determinista y de un proceso de media móvil sustentado por un

ruido blanco.

Este teorema llevó a Kolmogoroff (1939) a la formulación y solución del problema de predicción lineal. Mientras Wiener puede ser considerado el pionero del Análisis Espectral Moderno Teórico, John Tukey (1949) debe ser considerado como el pionero del Análisis Espectral Moderno Empírico (usando estimaciones de la correlación a partir de series temporales finitas).

La siguiente clave en el análisis espectral digital vino en la forma de un algoritmo computacional muy eficiente para resolver la transformada de Fourier discreta. Jim Cooley y John Tukey en 1965 llamaron la atención al desarrollar su algoritmo de FFT, que ha incrementado el uso del análisis espectral como una herramienta en el procesamiento de señales.

En 1967 John Burg inició el camino de la alta resolución espectral a partir de series limitadas en el espacio o el tiempo. Su estimación espectral de alta resolución, que describió en el contexto de un formalismo matemático de máxima entropía, ha sido un instrumento eficaz para el desarrollo de las aproximaciones a la alta resolución espectral por medio de modelos paramétricos.

El siguiente paso consistió en tratar de caracterizar aquellas señales cuya composición de frecuencias cambia con el tiempo. En este punto fallan los métodos vistos hasta ahora. Si se supone que nuestra señal contiene una sola frecuencia, esta frecuencia puede ser obtenida por medio de la derivada de la fase instantánea  $\arg\{x(t)\}$ . Este concepto generaliza el de frecuencia instantánea (J. Ville (1958), Papoulis (1977)). Sin embargo, este método no es capaz de dar una respuesta adecuada cuando se consideran dos frecuencias. Estas restricciones llevaron a considerar la representación por medio de una superficie (y no de una curva) de la estructura tempo-frecuencial de la señal. Aunque el espectro no muestra explícitamente la localización temporal de las componentes de frecuencia, dicha localización puede obtenerse multiplicando la señal original por una función que limite su extensión en el tiempo. De esta forma se obtiene (Allen (1977a,1977b,1977c), Rabiner and Schaffer (1978), Portnoff (1980), y Crochiere and Rabiner (1983) y Nawab and Quatieri (1988)) la transformada corta de Fourier (TCF) de una señal  $x(t)$  como:

$$\text{TCF}_x^\gamma(t,f) = \int_{\tau} [x(\tau) \gamma(\tau-t)] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad 1.8$$

Hay que notar que el resultado está notablemente influenciado por la elección de la función  $\gamma$ . Por otra parte hay que tener en cuenta que todas

las características ubicadas dentro de la zona en la que  $\gamma$  es no nula se mostrarán en el tiempo  $t$  en la TCF. Por ello se desearía que estas fueran de la menor duración posible y al mismo tiempo que su influencia en el dominio de la frecuencia también fuera lo más pequeña posible. Sin embargo, el principio de incertidumbre impide la existencia de funciones de duración y ancho de banda arbitrariamente pequeños simultáneamente. Esta técnica se ha aplicado a:

- Análisis de señales que varían con el tiempo
- Identificación de sistemas y análisis espectral
- Detección de señales y estimación de parámetros
- Análisis de sonido

Otra interpretación de la fórmula anterior en su versión discreta en tiempo y frecuencia conduce al desarrollo en serie de Gabor (Gabor (1946), Helstrom (1966), Montgomery (1967), Nelson (1972), Bastiaans (1980), Jansenn (1981) y Wexler (1990)).

Además, otra aproximación importante es la proporcionada por la transformada WAVELET definida como:

$$TW_x^\gamma(t, f) = \int_{\tau} x(\tau) \sqrt{|f/f_0|} \gamma^* \left( \frac{f}{f_0} (\tau - t) \right) d\tau \quad 1.9$$

donde \* significa conjugación compleja y  $\gamma(t)$  es una función pasobanda real o compleja centrada alrededor de cero en el dominio del tiempo. El parámetro  $f_0$  es igual a la frecuencia central de  $\gamma(t)$ . Hay que notar que TW fue introducida originalmente como una representación tiempo-escala (Kronland-Martinet, Morlett and Grossman (1987), Mallat (1989a, 1989b), Meyer (1989), Daubechies (1990, 1991), Coifman and Meyer (1991) y Rioul and Vetterli (1991)). La formulación clásica puede reobtenerse a partir de la anterior introduciendo la escala de análisis  $a=f_0/f$ . Al igual que la TCF, la TW puede ser interpretada como el resultado de filtrar la señal  $x(\tau)$  con un filtro pasobanda con frecuencia central  $f$ . En el caso de la TCF el ancho de banda de la banda pasante es independiente de la frecuencia central  $f$ . Por el contrario, el ancho de banda de la banda pasante del filtro en la TW es proporcional a  $f$ . En principio la TW sufre las mismas limitaciones que la TCF para la resolución tiempo-frecuencia. Sin embargo, al contrario que la TCF cuya resolución es idéntica para todas las frecuencias de análisis, la TW analiza las frecuencias más altas con una mejor resolución temporal, aunque con peor resolución frecuencial. Ha sido usada en los siguientes campos:

- Codificación de señales e imágenes

- Procesamiento de señales acústicas y sísmicas
- Análisis de sonido
- Procesamiento de señales estocásticas y análisis fractal
- Análisis de sistemas y
- Detección

Hasta ahora, todas las representaciones tiempo-frecuencia (RTF) que hemos visto son lineales, por lo que cumplen el principio de superposición. Sin embargo, aunque esta propiedad es deseable, la estructura cuadrática de una RTF es una suposición razonable si la queremos interpretar como una distribución de energía frente a tiempo-frecuencia, puesto que la energía es una representación cuadrática de la señal. A partir de los métodos anteriores aparecen de forma natural el **espectrograma** y el **escalograma**:

$$\text{ESPEC}_x^{\gamma}(t, f) = |\text{STFT}_x^{\gamma}(t, f)|^2$$

$$\text{ESCAL}_x^{\gamma}(t, f) = |\text{TW}_x^{\gamma}(t, f)|^2$$

Además se encuentra la RTF correlativa definida como:

$$T_x(\tau, 0) = \int_t x(t+\tau) x^*(t) dt \quad \text{I.10}$$

$$T_x(0, \nu) = \int_f X(f+\nu) X^*(f) df \quad \text{I.11}$$

donde  $X(f)$  es la TF de  $x(t)$ .

Entre las RTF cuadráticas con interpretación energética, la distribución de Wigner (DW) (Wigner (1932, 1971), Ville (1948), Debrujin (1973) y Claasen and Mecklenbrauker (1980a, 1980b, 1980c)) satisface un número excepcionalmente grande de propiedades matemáticas deseables. Por tanto, la distribución de Wigner puede ser considerada como una distribución bidimensional de la energía de la señal sobre el plano tiempo-frecuencia. Sin embargo, el principio de incertidumbre prohíbe la interpretación punto a punto de la densidad de energía tiempo frecuencia. Esta restricción se refleja en el hecho de que esta distribución puede, localmente, tomar valores negativos.

La DW se ha utilizado en campos tan diversos como:

- Mecánica cuántica
- Óptica
- Acústica
- Bioingeniería

- Procesamiento de imágenes
- Oceanografía

Un papel igualmente importante lo juega la función de ambigüedad FA (Woodward (1953), Siebert (1958), Skolnik (1962), Stutt (1964), Titebaum (1966), Van Trees (1971), Papoulis (1974), Auslander (1985)) que puede ser interpretada como una función de correlación conjunta tiempo-frecuencia:

$$\begin{aligned}
 A_{xy}(\tau, \nu) &= \int_{\tau} x(t+\frac{\tau}{2}) y^*(t-\frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi nt} dt \\
 &= \int_f X(f+\frac{\nu}{2}) Y^*(f-\frac{\nu}{2}) e^{j2\pi rf} df \qquad \qquad \qquad \text{I.12}
 \end{aligned}$$

La FA y su módulo al cuadrado (superficie de ambigüedad) se han usado extensamente en campos como:

- Radar
- Sonar
- Radioastronomía
- Comunicaciones
- Óptica

La DW y la FA son duales en el sentido de que forman un par transformado de Fourier.

Sin embargo, y pese a todo, la transformada de Fourier no ha sido abandonada y se han presentado nuevos algoritmos más efectivos que el de Cooley & Tukey. Destacan el algoritmo presentado por Winograd (1976), que contiene un número de multiplicaciones significativamente menor que el de la TDF, y el de Doble Base (Split Radix) para un número de datos que sea múltiplo de dos ( Martens (1984), Duhamel and Hollman (1984), Vetterli and Nussbaumer (1984), Duhamel (1986), Sorensen, Heideman and Burrus (1986)) aunque Yavne (1968) publicó un algoritmo con la misma complejidad computacional pero pasó desapercibido durante largo tiempo). Este algoritmo es óptimo para longitudes de hasta 16 puntos y probablemente dé la mejor cuenta total de multiplicaciones y adiciones para cualquier longitud que sea potencia de dos.

### 1.1 DEFINICIONES BÁSICAS

Una señal puede ser definida como una función que lleva información generalmente acerca del estado o comportamiento de un sistema físico. Aunque las señales pueden ser representadas de muchas maneras, en todos los casos,

la información está contenida en un patrón de variaciones de alguna forma. Las señales son representadas matemáticamente como funciones de una o más variables independientes. Por ejemplo, una señal de voz puede ser representada como una función del tiempo y un dibujo como una función brillo que depende de dos variables espaciales.

La variable independiente puede ser tanto continua como discreta.

**Señales continuas:** Son señales que están definidas en un continuo de valores de la variable independiente, generalmente el tiempo  $t$  o el espacio  $s$ . Se denominan **analógicas** si pueden tomar un continuo de valores en cualquier punto  $t$  o  $s$ .

**Señales discretas:** Son aquellas que están definidas en valores discretos de la variable independiente. Se denominan **digitales** si tanto la variable independiente como la amplitud son discretas (sólo puede tomar un número finito de valores). Una señal discreta puede representar a un fenómeno que es inherentemente discreto o a un conjunto de muestras sucesivas de un fenómeno subyacente cuya variable independiente es continua. Las señales discretas son en la práctica más comúnmente digitales. Los conversores analógico/digitales en Hardware cuantifican de manera natural las muestras, ya que los computadores digitales usan registros de longitud de palabra finita (un número finito de dígitos) para representar los valores de los datos.

En casi cualquier área de la ciencia y la tecnología las señales deben ser procesadas para facilitar la extracción de información. Por ejemplo en problemas de:

- Comunicaciones (ondas de radio)
- Aeronáutica y astronáutica (señales de radar)
- Diseño de circuitos
- Acústica
- Sismología
- Ingeniería biomédica ( trazados de electroencefalogramas, electrocardiogramas, etc... )
- Sistemas de generación y distribución de energía
- Control de procesos químicos
- Procesamiento de voz.
- Sistemas económicos ( fluctuación de precios, desempleo, etc... )
- Registros de vibración en análisis de tensiones.

Por tanto el desarrollo de técnicas de procesamiento de señales y sistemas es de gran importancia. Por ejemplo, podemos querer separar dos señales que han sido combinadas de alguna forma, estimar uno o más parámetros

de la señal, etc...

El procesamiento de señales tiene las siguientes etapas:

**Muestreo:** En el caso de que la señal sea analógica es necesario muestrearla, teniendo en cuenta que la velocidad de muestreo debe ser la menos dos veces la frecuencia máxima de la señal.

**Procesamiento digital:** según el tipo de procesador empleado puede ser llevado a cabo:

- a) Mediante computadores de propósito general
- b) Mediante procesadores de señal específicos. ( TEXAS TMS320C...)

El hecho cada vez más extendido de procesar en tiempo real hace necesaria la transición de arquitecturas monoprocesador a arquitecturas multiprocesador. En este sentido se han propuesto:

- Estructuras segmentadas tipo pipelines.
- Arrays sistólicos.
- Estructuras multimicroprocesador.

Los sistemas de procesamiento de señales pueden ser clasificados, al igual que las mismas en : Continuos, analógicos, discretos y digitales.

El análisis espectral es cualquier método de procesamiento de señales que caracteriza el contenido en frecuencia de una señal medida. La Transformada de Fourier es el fundamento matemático para relacionar una señal espacial o temporal o un modelo de la misma a su representación en el dominio de la frecuencia. La estadística juega un papel importante en el análisis espectral porque la mayoría de las señales tienen un aspecto ruidoso o aleatorio. Si la estadística que subyace a una señal se conociera exactamente o pudiera ser determinada sin error a partir de un intervalo finito de la señal, el análisis espectral sería una ciencia exacta. La realidad práctica es que sólo se puede hacer una estimación del espectro.

El análisis espectral se puede aplicar a cualquier tipo de proceso que fluctúe de alguna manera pero que muestre algún tipo de estabilidad ( la variable a considerar no puede incrementarse ni decrementarse continuamente y oscila alrededor de un valor medio). Por ejemplo, trazados de electroencefalogramas, electrocardiogramas, etc.... Este tipo de procesos suelen denominarse **Series temporales**, puesto que normalmente la variable independiente es el tiempo. Sin embargo, puede ocurrir que se quiera estudiar la variación de una variable sobre alguna región del espacio, en cuyo caso se denominan **procesos espaciales**. Si además queremos estudiar la variación simultánea de varias variables se dice que estamos ante un **proceso multivariante**. Cuando la magnitud que queremos estudiar depende de varias

variables independientes se dice que estamos ante un proceso multidimensional.

Por otra parte, es bien conocido que un proceso aleatorio se denomina estacionario si sus propiedades estadísticas no varían con el tiempo. Si estas propiedades estadísticas se modifican con el tiempo, entonces se dice que estamos ante un proceso no estacionario. Hasta hace relativamente poco tiempo, la mayor parte de la teoría del análisis espectral trataba solamente a los procesos de tipo estacionario. La teoría matemática de los procesos no estacionarios presenta una complejidad matemática mucho mayor. El punto básico es que postulando la estacionariedad de un proceso, estamos haciendo una suposición muy fuerte acerca de la estructura del mismo.

## 1.2 ANÁLISIS ESPECTRAL DE PROCESOS ALEATORIOS ESTACIONARIOS.

Cuando intentamos aplicar las ideas del análisis espectral a procesos aleatorios nos encontramos con la dificultad de que las técnicas clásicas de series y transformadas de Fourier sólo se aplican a funciones deterministas y no pueden ser aplicadas de modo inmediato a procesos aleatorios. Para evitar esta dificultad, se considerará sólo una realización del proceso. Puesto que una realización dada tendrá un valor definido en cada punto  $t$ , no habrá elemento aleatorios en ella.

Una realización dada no podrá ser expresada como una serie de Fourier, ya que en general no será una función periódica de  $t$ . Por otra parte, tampoco puede ser expresada como una integral de Fourier puesto que, debido a la estacionariedad, no es cierto que todas las realizaciones tiendan a cero cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Sin embargo, Wiener mostró que este tipo de funciones pueden ser expresadas como una transformada de Fourier-Stieljes, de la forma:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad \text{I.13}$$

donde  $Z(\omega)$  no es diferenciable pero cumple:

$$dZ(\omega) = O(\sqrt{d\omega}) \quad \text{I.14}$$

Aunque nuestro mayor interés se centra en el cuadrado de las amplitudes, por estar relacionado con la distribución de energía, por lo que podemos

definir :

$$q(\omega) = |dZ(\omega)|^2/d\omega$$

La función  $q(\omega)$  representa la densidad de energía por unidad de frecuencia.

Hasta el momento nos hemos referido a cada realización separadamente. Sin embargo, la función  $Z(\omega)$  cambiará de realización a realización. Por tanto,  $Z(\omega)$  es en sí misma, un proceso aleatorio. Para construir una función que describa las propiedades del proceso total, deberemos tomar el valor medio de  $q(\omega)$  para cada  $\omega$  sobre todas las realizaciones. Por tanto, definimos una nueva función dada por:

$$h(\omega) = \overline{q(\omega)} = \overline{|dZ(\omega)|^2/d\omega} \quad \text{I.15}$$

La función  $h(\omega)$  representa la densidad de potencia espectral del proceso.

Una explicación rigurosa de este tema se puede encontrar en Priestley (1981).

### 1.3 ANÁLISIS ESPECTRAL DE PROCESOS ALEATORIOS NO ESTACIONARIOS

La mayoría de los procesos que nos podemos encontrar en la vida real no cumplen con la suposición básica de estacionariedad. Lo más que podemos esperar en muchas ocasiones es que no se aleje tanto de la estacionariedad que el análisis subsiguiente sea inválido.

La aproximación tradicional al estudio de procesos no estacionarios ha sido la de transformar el proceso en otro que sí sea estacionario. Por ejemplo, si la no estacionariedad es debida a la presencia de una tendencia, podemos ajustar dicha tendencia a un polinomio y restar esta función a los datos, o diferenciando los datos el suficiente número de veces. Esta aproximación puede ser válida para este caso, sin embargo, hay muchos procesos que poseen características no estacionarias de mucha mayor complejidad.

La cuestión es entonces si es posible desarrollar una teoría más general de análisis espectral que incluya a la globalidad de los procesos no estacionarios. Los últimos trabajos en este área muestran que dicha generalización es posible y se ha desarrollado una nueva forma de análisis espectral que aunque no acomoda a todos los procesos no estacionarios, sí que permite tratar una gran clase de dichos procesos en una teoría unificada que

incluye a los procesos estacionarios como un caso particular. Esta nueva generalización está basada en la integral de Fourier de Wiener e introduce la importante noción de espectro dependiente del tiempo. Un estudio de la interpretación física de estos espectros implica una revisión de los conceptos de frecuencia y energía como veremos en la sección 6.

## 2 ANÁLISIS ESPECTRAL DETERMINISTA

### 2.1 TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

La transformada de Fourier aparece como una generalización de las series de Fourier. Una señal periódica puede ser representada como una combinación lineal de exponenciales complejas relacionadas armónicamente. En general, las señales que uno quiere analizar son aperiódicas y queremos representarlas como combinación lineal de exponenciales complejas para poder hablar de magnitudes tales como frecuencias presentes en la señal, etc...

Dada una señal periódica  $x(t)$ , el desarrollo en serie de Fourier exponencial de la misma viene dado por la expresión

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t} \quad \text{I.16}$$

donde  $c(nf_0)$  es el  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier dado por:

$$c(nf_0) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad \text{I.17}$$

La ecuación (I.16) establece que  $x(t)$  puede ser expresada como combinación lineal de sinusoides cuya frecuencia es múltiplo de la frecuencia fundamental  $f_0$  (frecuencias armónicas).

Por otra parte si una función es periódica, la energía necesaria para generarla desde  $t=-\infty$  a  $t=+\infty$  es infinita. Sin embargo, la energía necesaria para generar un periodo de la misma viene dada por:

$$\text{Energía sobre } T_0 = \int_{T_0} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c(nf_0)|^2 \quad \text{I.18}$$

es decir, el cuadrado del coeficiente  $c(nf_0)$  es la contribución a la potencia total del término de la serie de Fourier cuya frecuencia es  $nf_0$ .

#### 2.1.1 SEÑALES APERIÓDICAS

Consideremos una función periódica cuyo periodo es  $T_0$ . La distancia entre dos líneas espectrales será  $f_0=1/T_0$ . Si mantenemos constante la forma de la función dentro de cada periodo y separamos unos de otros por una distancia mayor, entonces al aumentar  $T_0$ , disminuirá  $f_0$  y habrá más líneas espectrales por unidad de frecuencia. En el límite, si separamos dos periodos de la señal por un intervalo  $T_0$  infinito,  $f_0$  se hará infinitesimalmente pequeño, y en lugar de tener una serie de líneas espectrales, obtendremos un espectro que variará de forma continua con la frecuencia y la suma se transformará en una integral. De esta manera obtendremos las siguientes expresiones para la transformada de Fourier de una señal aperiódica de duración finita:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df; \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{I.19}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt; \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{I.20}$$

La ecuación (I.19) se conoce como transformada inversa de Fourier o ecuación de síntesis. La ecuación (I.20) se conoce como Transformada de Fourier o ecuación de análisis. Ambas ecuaciones han sido expresadas tanto con respecto a la frecuencia  $f$  (en Hz) como con respecto a la frecuencia angular  $\omega$  (en rad/s). La ecuación de análisis permite el cálculo del espectro  $X(f)$  de la señal  $x(t)$ . La ecuación de síntesis nos dice que la señal original puede ser completamente reconstruida o sintetizada a partir de su espectro en frecuencias.

### 2.1.2 CONVERGENCIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Aunque el argumento utilizado en la derivación de la Transformada de Fourier presupone que  $x(t)$ , aún siendo arbitraria, es de duración finita, las ecuaciones siguen siendo válidas para una amplia clases de señales infinitas.

Existe un conjunto de condiciones, comúnmente conocidas como condiciones de Dirichlet, que aseguran la igualdad entre la señal original  $x(t)$  y la obtenida antitransformando el espectro en frecuencias  $X(f)$  para cualquier  $t$ , excepto en las discontinuidades. Estas condiciones requieren que:

- 1)  $x(t)$  sea absolutamente integrable, es decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \tag{I.21}$$

2)  $x(t)$  debe tener un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito.

3)  $x(t)$  debe tener un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito, siendo cada una de las discontinuidades de amplitud finita.

En los instantes  $t_d$  de discontinuidad en la función  $x(t)$ , la antitransformada del espectro proporciona el valor medio  $(x(t_d^+) - x(t_d^-))/2$  donde  $x(t_d^+)$  significa el valor de la función en el punto de discontinuidad cuando nos aproximamos por la derecha y  $x(t_d^-)$  el valor de la función en el punto de discontinuidad cuando nos aproximamos por la izquierda.

### 2.1.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En la tabla que se presenta a continuación se expresan algunas de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier. La columna de la izquierda viene dada en términos del dominio temporal, mientras que la de la derecha en términos del dominio frecuencia. Una explicación más rigurosa de las mismas puede encontrarse en Oppenheim, Willsky and Young (1983).

Tabla I.1 Propiedades de la Transformada de Fourier

$x(t)$	$X(f)$ $f$ en Hz $X(\omega)$ $\omega$ en rad/s
$a x_1(t) + b x_2(t)$	$a X_1(f) + b X_2(f)$
$x(t)$ real	$X(f) = X^*(-f)$ $\text{Re}\{X(f)\} = \text{Re}\{X(-f)\}$ $\text{Im}\{X(f)\} = -\text{Im}\{X(-f)\}$ $ X(f)  =  X(-f) $ $\arg\{X(f)\} = -\arg\{X(-f)\}$
$x(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0} X(f)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$ $a \in \mathbb{R}$

Teorema de la energía	$\int_{-\infty}^{+\infty}  x(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}  X(f) ^2 df$
-----------------------	---

El primer miembro del teorema de la energía representa la energía total de la señal  $x(t)$ . Por esta razón se conoce a la magnitud  $(X(f))$  como la Densidad de Potencia Espectral (DPE) de la señal  $x(t)$ .

#### 2.1.4 LOS DOS DOMINIOS

En la siguiente tabla se exponen algunas relaciones entre los dos dominios (tiempo y frecuencia) que se consideran de interés.

Tabla I.2 Relaciones de interés entre ambos dominios

	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$	$X(0)$
	$x(0)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df$
Momento de orden n	$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n x(t) dt$	$\frac{X^n(0)}{(-2\pi j)^n}$
Centroide	$\langle t \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t x(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt}$	$-\frac{X'(0)}{2\pi j X(0)}$
Valor Cuadrático medio	$\langle t^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 x(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt}$	$-\frac{X''(0)}{4\pi^2 X(0)}$
Varianza	$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - \langle t \rangle)^2 x(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt}$	$-\frac{X''(0)}{4\pi^2 X(0)} + \frac{[X'(0)]^2}{4\pi^2 [X(0)]^2}$

$x(t)$ y sus $(n-1)$ primeras derivadas continuas $\Rightarrow \lim_{ f  \rightarrow \infty}  f ^n X(f) = 0$
--

Si  $x(t)$  se comporta como  $|t|^{-m}$  para  $|t|$  grandes, donde  $m$  es positivo, entonces sólo existirán los primeros  $m$  momentos y derivadas de  $X(f)$  en  $f=0$ . Habrá una discontinuidad en el orden  $m+1$  en  $f=0$ .

Cuanto más suave es una función, medida por el número de derivadas continuas que posee, más compacta es su transformada. Es decir, más rápido decae al incrementar  $f$ .

Una explicación más detallada de las relaciones anteriores puede encontrarse en Bracewell (1978).

### 2.1.5 VENTANAS

Diremos que las funciones  $v(t)$  y  $V(\omega)$  forman un par de ventanas si forman un par transformado de Fourier, son reales, pares, normalizadas:

$$v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega) d\omega = 1 \quad \text{I.22}$$

limitadas en el tiempo:

$$v(t) = 0 \text{ para } |t| > T_0 \quad \text{I.23}$$

y tales que  $V(\omega)$  sea de "duración corta" (Papoulis (1978)). Este último requisito es impreciso y está sujeto a varias interpretaciones dependiendo de las aplicaciones.

Las ventanas se suelen emplear en la evaluación de la transformada de Fourier  $X(\omega)$  de una señal sin ruido  $x(t)$  cuando sólo se dispone del segmento:

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t) & 0 < |t| < T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases} \quad \text{I.24}$$

En dicho caso las ventanas deben escogerse de modo que si:

$$X_v(\omega) = \int_{-T}^{+T} v(t) x(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(y) V(\omega-y) dy \quad \text{I.25}$$

el error  $X(\omega) - X_v(\omega)$  se reduzca tanto como sea posible.

Como se sabe, a partir de la propiedad de convolución, la multiplicación en el dominio del tiempo por una función produce una convolución en el dominio de la frecuencia entre la transformada de la señal y la transformada de la ventana. Obviamente  $V(\omega)$  debe estar concentrada cerca del origen y debe tender a cero rápidamente al crecer  $\omega$  de forma que las componentes grandes de  $X(y)$  lejos de  $y=\omega$  no contribuyan apreciablemente al valor de  $X_v(\omega)$

### 2.1.6 EJEMPLOS DE VENTANAS

Para evitar la multiplicación por un factor de fase, vamos a tomar las ventanas centradas alrededor del origen. Las expresiones en el dominio del tiempo y frecuencia (en su forma continua) de las mismas se pueden encontrar en la tabla (I.4). En su forma discreta las ventanas anteriores están definidas para  $|n| \leq (N-1)/2$ . Su expresión en el dominio transformado es muy similar a las anteriores teniendo en cuenta que:

1)  $\Omega = \frac{2\pi k}{N}$  es la variable de frecuencias.

2)  $\mathbb{D}_N(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)}$  es el núcleo de Dirichlet o sinc digital para la

transformada discreta y equivale a  $\mathbb{D}(\omega) = T \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}$  para el caso continuo.

A continuación repasaremos aspectos importantes de algunas de las ventanas que se encuentran en la tabla.

#### a VENTANA RECTANGULAR

Se puede pensar en una serie temporal aleatoria de longitud finita como en el producto de una historia temporal infinita  $y(t)$  por una función rectángulo de longitud finita como las que vemos a continuación.

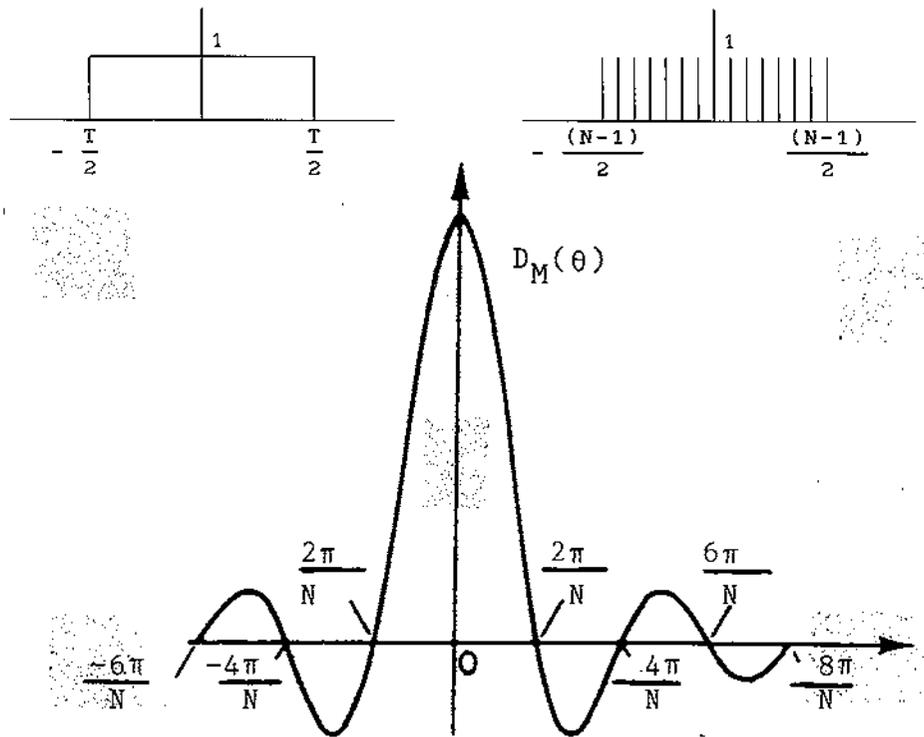


Fig. 1 Núcleo de Dirichlet correspondiente a la ventana rectangular

La transformada de la serie finita observada es una versión distorsionada de la transformada de la serie infinita. La expresión de dicha ventana en ambos dominios se puede ver en la tabla (I.4). La figura 1 permite ver la forma de la misma en el dominio de frecuencia. A partir ella se puede ver que tiene un pico grande en  $f=0$  (lóbulo principal), de magnitud  $N$ , junto con una serie de picos subsidiarios (lóbulos laterales) en las frecuencias  $\Omega = \pm \frac{(2k+1)\pi}{N}$ . Los ceros tienen lugar en  $\Omega = \pm \frac{2k\pi}{N}$

Debido a los grandes lóbulos laterales, la potencia existente en los datos en valores de  $\Omega$  que no sean múltiplos enteros de  $\pi/N$  serán promediados en el valor centrado en  $f=0$ . Sacrificando algo de resolución, se pueden mejorar las características de los lóbulos laterales.

b VENTANA DE BINGHAM

La ventana de Bingham (1967) tiene la expresión que puede verse en la tabla I.4.

Sloane (1969) apuntó que, tanto la ventana del coseno alzado truncado como la de Bingham, eran miembros de la clase arco-coseno dadas en el dominio de la frecuencia por:

$$U_{T/2}(\omega, m) = \frac{\sin \left( \left( \frac{2m-1}{2m} \right) \frac{\omega T}{2} \right)}{\left( \frac{2m-1}{2m} \right) \frac{\omega}{2}} \left[ \frac{\left( \frac{2\pi m}{T} \right)^2}{T} \right] \cos \left( \frac{T}{4m} \right)$$

Cuando  $m=1$  tenemos la ventana coseno sobre toda la función y cuando  $m=5$  tenemos la ventana coseno sólo sobre 1/10 de los extremos.

### c LA VENTANA DE GOODMAN-ENOCHSON-OTNES (GEO)

Esta primera ventana fue diseñada (Otnes and Enochson (1978)) para llevar a cabo un suavizado sobre una banda de frecuencia razonablemente ancha. La multiplicación en el dominio del tiempo se vuelve una operación de convolución en el dominio de la frecuencia. Para minimizar el coste desde un punto de vista computacional, hay que elegir entre la forma de huso en el dominio temporal o el suavizado en frecuencias.

Para minimizar el coste computacional, es deseable tener un número de coeficientes tan pequeño como sea posible. En base a un juicio relativamente arbitrario, se decidió usar 7 coeficientes. Esto parece un compromiso razonable entre la complejidad computacional y flexibilidad en la selección del proceso de suavizado. La ecuación de suavizado (donde se ha elegido el centro de los datos como origen) es:

$$X[k] = \sum_{l=-3}^3 a[l] X[k+l] = X[k] + \sum_{l=1}^3 a[l] (X[k-l] + X[k+l])$$

donde:

$$a[0]=1$$

$$a[-3]=a[3]$$

$$a[-2]=a[2]$$

$$a[-1]=a[1]$$

La siguiente restricción impuesta a estos coeficientes es que supriman las dispersiones. Una restricción de la forma:

$$a[0] - 2 a[1] + 2 a[2] - 2 a[3] = 0$$

reducirá la potencia dispersada de grandes distancias de forma proporcional a  $1/f^4$ . Los coeficientes de la ventana GEO son:

$$a[0]=1.0$$

$$a[1]=0.1817$$

$$a[2]=-0.1707$$

$$a[3]=0.1476$$

Estos coeficientes dan lugar a una ventana espectral que es un 10% más ancha que la sinc. Por tanto hay una pérdida de un 10% en resolución en frecuencias. Esto parece un compromiso razonable para conseguir una mayor atenuación de los lóbulos.

#### d CARACTERÍSTICAS DE LAS VENTANAS MAS USUALES

A continuación se presentan las características de algunas de las ventanas más usadas (Tabla I.3). Además se da la definición ambos dominios, tanto gráficamente (Fig. 2) como analíticamente (Tablas [I.3] y [I.4]).

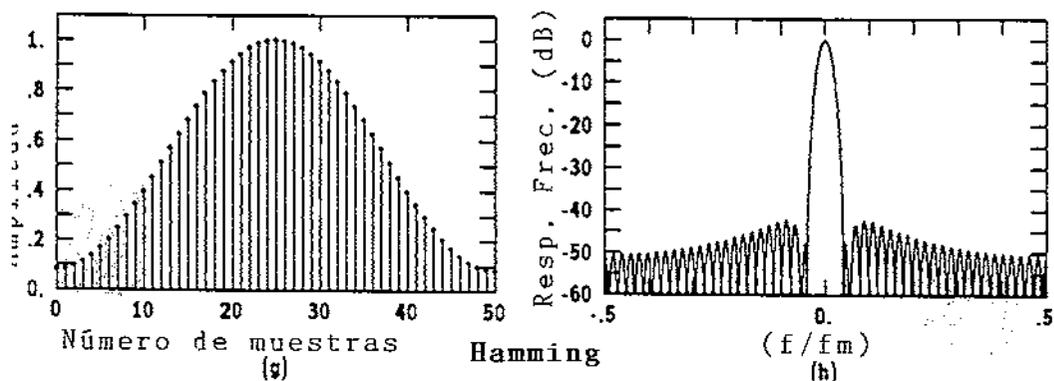
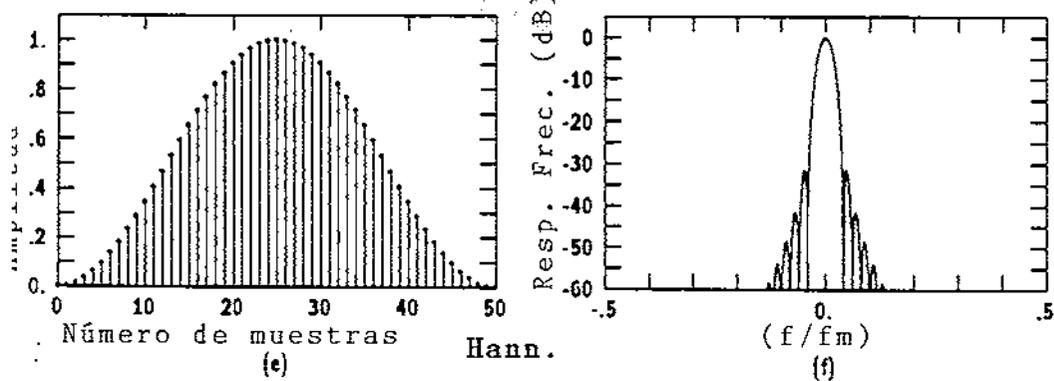
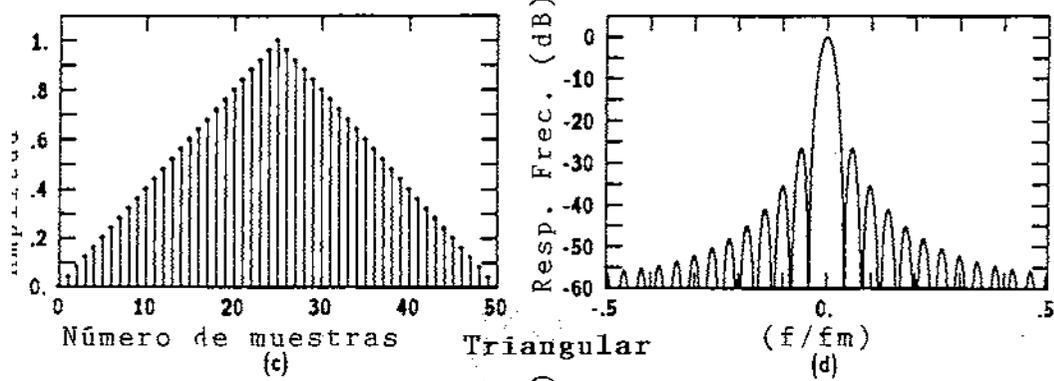
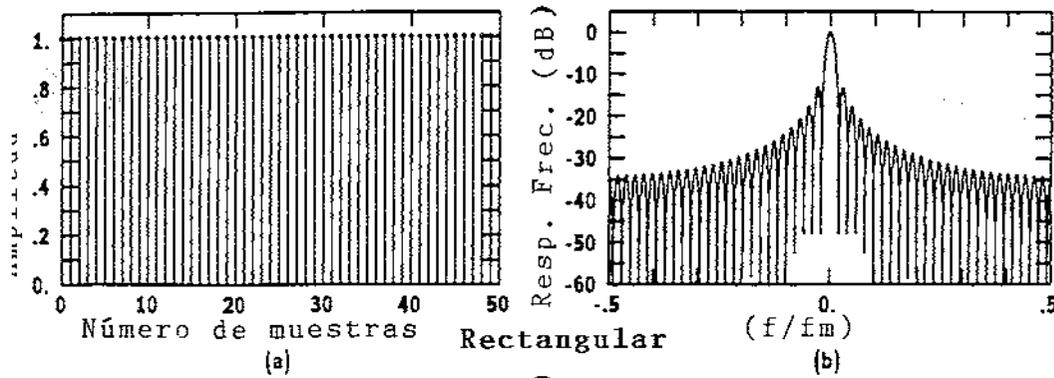
El objetivo en el dominio del tiempo es redondear potenciales discontinuidades en cada extremo del segmento finito de historia temporal a ser analizada, lo que se equivale en el dominio de la frecuencia a suprimir los lóbulos laterales más grandes (que serán definidos a continuación).

Además también pueden usarse en la evaluación de transformadas de Fourier de señales mezcladas con ruido para disminuir la varianza del estimador. Para que el sesgo entre la verdadera DPE y la estimada sea pequeño, la energía de la ventana debe ser pequeña. Por tanto, debe tomar valores significativos solamente en un intervalo  $(-M, M)$  tal que  $M \ll T$ . Una vez determinada  $M$ , de esta manera, se elige la ventana que minimice el sesgo.

El uso de un tipo u otro de ventana viene dado por la aplicación particular que se requiera. Si se trata de discriminar únicamente los picos de mayor amplitud, para ver donde está la mayor parte de la potencia, o de separar componentes muy próximas pero de gran amplitud, entonces la mejor elección consiste en la ventana rectangular por ofrecer la mayor resolución en frecuencia. Sin embargo, si lo que se quiere es discriminar componentes muy débiles de la señal, se hace necesario una ventana que reduzca la contribución de los lóbulos laterales para poder distinguir la señal del ruido causado por la presencia de los mismos. En este segundo caso la elección de la ventana concreta depende de ciertos factores como por ejemplo el valor al que se quiere que disminuyan los lóbulos laterales, si se quiere un incremento rápido que atenúe mucho los lóbulos cercanos al eje o un incremento más lento pero que reduzca más la amplitud de los lóbulos más lejanos, etc...

Por ejemplo, Adams (1991) presenta una nueva ventana que optimiza la

relación entre la amplitud del lóbulo lateral y la energía total de los lóbulos laterales.



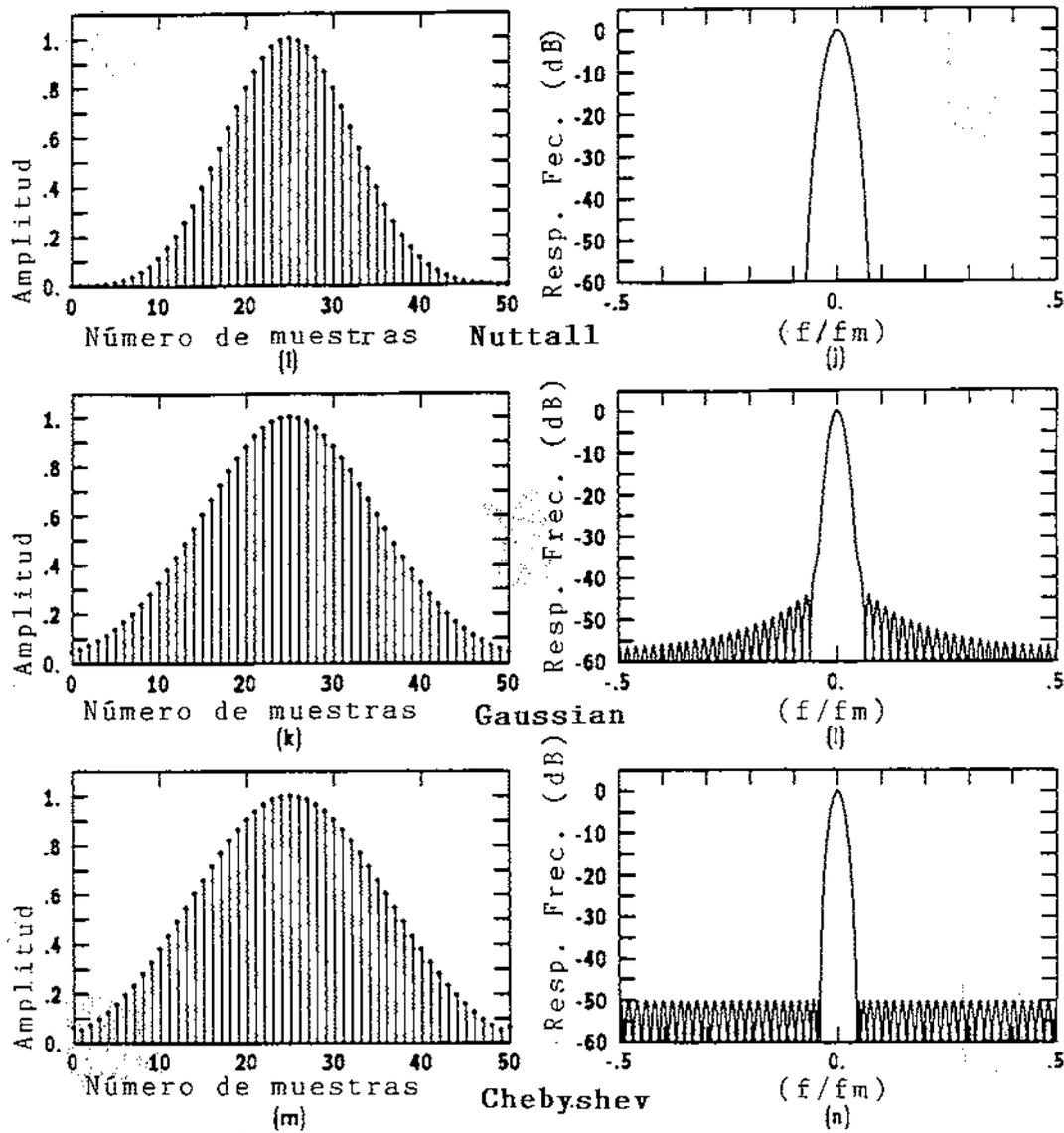


Fig. 2 Representación gráfica en los dominios del tiempo y la frecuencia de las ventanas más usuales.

Tabla I.3 Características Espectrales más importantes de las ventanas más usuales.

VENTANA	ALTURA LOB. PRIN	ALTURA PRIM LOB dB	ANCHO BANDA	CAIDA TEORICA dB/octava
RECTANGULAR	1.00*N	-13.2	0.89/N	6
TRIANGULAR	0.50*N	-26.4	1.28/N	12
HANNING	0.50*N	-31.4	1.44/N	18
HAMMING	0.54*N	-42.3	1.30/N	6
BLACKMAN	0.42*N	-58.1	1.64/N	18
FLATTOP	0.36*N	-92.1	1.90/N	6

Tabla I.4 Definición de algunas de las ventanas más usuales en ambos dominios.

Ventana	Dominio Temporal		Dominio Frecuencial
Rectangular	1	$ t  \leq \frac{T}{2}$	Núcleo de Dirichlet $D(\omega) = T \frac{\text{sen}(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}}$
	0	$ t  > \frac{T}{2}$	
Triangular Bartlet	$1 - \frac{2 t }{T}$	$ t  \leq \frac{T}{2}$	Núcleo de Fejér $F(\omega) = \frac{2}{T} D^2(\frac{\omega}{2})$
	0	$ t  > \frac{T}{2}$	
Tukey $0 < a < .25$	$1 - 2a + 2a \cos(\frac{\pi t}{T})$	$ t  \leq \frac{T}{2}$	$T(f) = a D(\omega - \frac{\pi}{T})$ $+ (1-2a) D(\omega) + a D(\omega + \frac{\pi}{T})$
	0	$ t  > \frac{T}{2}$	
Hamming Tukey(a=.23)	$0.54 + 0.46 \cos(\frac{\pi t}{T})$	$ t  \leq \frac{T}{2}$	caso particular de $T(f)$ para a=0.23
	0	$ t  > \frac{T}{2}$	
Hann Tukey(a=.25)	$0.50 + 0.50 \cos(\frac{\pi t}{T})$	$ t  \leq \frac{T}{2}$	caso particular de $T(f)$ para a=0.25
	0	$ t  > \frac{T}{2}$	
Bingham	Ventana de Bingham $\cos(\frac{5\pi t}{T})$	$\frac{4T}{10} \leq  t  \leq \frac{T}{2}$ $-\frac{4T}{10} \leq t \leq \frac{4T}{10}$	ver *
	1		
	0	$ t  > \frac{T}{2}$	
Parzen	Ventana de Parzen $1 - 6(\frac{t}{T})^2 + 6(\frac{ t }{T})^3$	$ t  \leq T/2$	***** $\frac{3T}{4} \left[ \frac{\text{sen}(\omega T/4)}{\omega T/4} \right]^4$
	$2(1 - \frac{ t }{T})^3$	$T/2 \leq  t  \leq T$	
	0	$ t  > T$	

<p>Bartlett- Priestley</p>	<p>Ventana de Bartlett - Priestley</p> $\frac{3T^2}{(mn)^2} \left[ \frac{\sin(\pi n/T)}{\pi n/T} - \cos(\pi n/T) \right]$	$\left( \frac{3T}{4\pi} \right) \left[ 1 - \left( \frac{T\omega}{\pi} \right)^2 \right] \quad \left  \omega \right  \leq \frac{\pi}{T}$ <p>0 <math>\quad \left  \omega \right  &gt; \frac{\pi}{T}</math></p>
<p>Polarización mínima</p>	$\left[ \frac{1}{\pi} \left  \sin\left(\frac{\pi}{T} t\right) \right  + \left( 1 - \frac{ t }{T} \right) \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right] R(t)$	$4T\pi^2 \frac{1 + \cos(T\omega)}{(\pi^2 - T^2\omega^2)^2}$

En la tabla I.4 se puede ver la definición tanto en el dominio temporal como en el frecuencial de algunas de estas ventanas.

### 2.1.7 DISPERSIÓN

Las ventanas espectrales tienen por objeto, entre otros, evitar el fenómeno conocido como dispersión. Estas dispersiones pueden ocurrir en ambas direcciones. Podemos tener potencia que se "dispersa fuera" de un ancho de banda espectral para sesgar las estimaciones de potencia hacia valores más bajos o puede "dispersarse hacia dentro" para que una estimación espectral pueda ser distorsionada por exceso.

Consideremos la DPE discreta de una senoide de amplitud A y frecuencia  $f = n f_0$  durante un tiempo  $T_0$ . Esto implica que tenemos un número integral de ciclos de la senoide. La DPE tendrá la forma:

$$S_x[k] = \begin{cases} \frac{A^2}{4} T_0 & k = \pm n \\ 0 & k \neq \pm n \end{cases} \quad \text{I.26}$$

que se muestra en la figura 3.

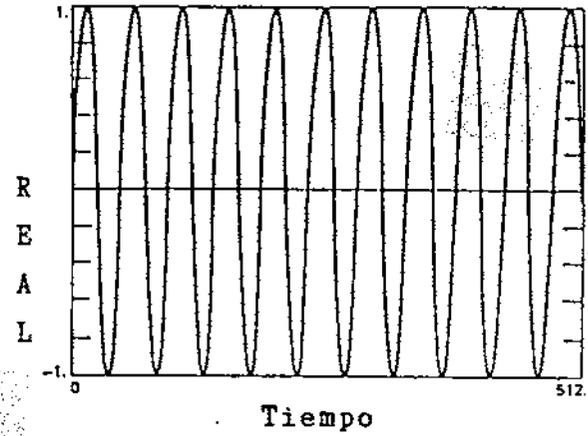
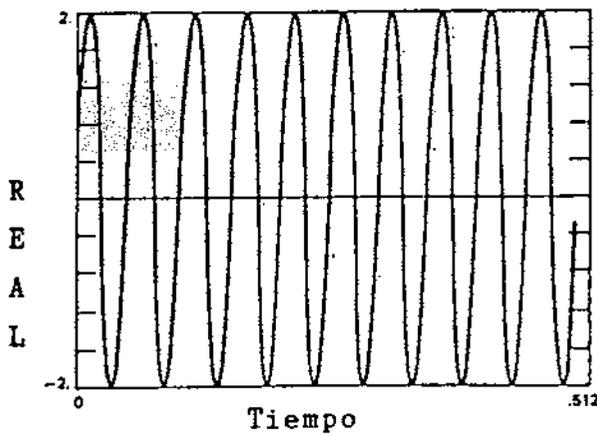


Fig. 3 D.P.E. de una onda sinusoidal con un número entero de periodos

Fig. 4 D.P.E. de una onda sinusoidal con un número fraccionario de periodos

Además conocemos que la función más general es:

$$S_x[k] = \frac{T_0 A^2}{4} \left[ \frac{\sin(\pi(n-k))}{N \sin(\pi(n-k)/N)} + \frac{\sin(\pi(n+k))}{N \sin(\pi(n+k)/N)} \right]^2 \quad \text{I.27}$$

Hay que notar que si integramos  $S_x[k]$  de la ecuación (I.26) obtenemos  $A^2/2$ , que es el valor cuadrático medio de la senoide y que se ha obtenido de sólo dos puntos  $k=\pm n$ .

Supongamos que tenemos una onda seno de la misma frecuencia, pero en lugar de un número integral de ciclos tenemos medio ciclo extra. Entonces tendremos la DPE que se muestra en la figura 4. Podemos ver este espectro como potencia que se ha perdido de la frecuencia en  $f=(n+\frac{1}{2}) f_0$ . Si tenemos otra senoide en cualquiera de los puntos, esta potencia se añadirá a la potencia de esta segunda senoide. En este sentido será potencia que "se

dispersa hacia adentro". Hay que notar que todavía mantenemos el valor cuadrático medio integrando sobre las frecuencias.

La aplicación de ventanas espectrales pueden modificar la transformada de Fourier de forma que reduzcan y minimicen estas dispersiones. El precio será una menor resolución.

En el sentido descrito anteriormente podemos evitar las dispersiones si tenemos un número integral de ciclos en nuestra ventana de datos. Debemos recordar, sin embargo, que una ventana espectral en forma de sinc limita la resolución a no menos de  $1/T$ . También debemos tener en mente que en la vida real estaremos trabajando con datos aleatorios, que tendrán componentes en frecuencia impredecibles con un número al azar de ciclos. Por tanto, raramente tendremos un número integral de ciclos.

## 2.2 TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

El razonamiento aplicado para obtener la transformada de Fourier de una señal aperiódica a partir de una periódica puede ser llevado a cabo también en el caso de series y transformadas discretas.

Consideremos una serie aperiódica general  $x[n]$  de duración finita. Esto es, para algún entero  $N_1$ ,  $x[n]=0$  si  $|n| > N_1$ . A partir de esta señal aperiódica podemos construir una serie periódica  $\tilde{x}[n]$  para la cual  $x[n]$  es un periodo. A medida que aumentamos el tamaño del periodo  $N$ ,  $x[n]$  será idéntica a  $\tilde{x}[n]$  sobre un periodo más grande, y para  $N \rightarrow \infty$ , ambas señales serán iguales para cualquier valor finito de  $n$ . La representación en serie de Fourier de  $\tilde{x}[n]$  viene dada por la expresión:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-N_1}^{N_1} C(k) e^{j(2\pi/N)nk} \quad \text{I.28}$$

donde:

$$C(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)nk} \quad \text{I.29}$$

Puesto que  $x[n]=\tilde{x}[n]$  sobre el periodo que incluye  $\|n\| \leq N_1$ , se puede reemplazar  $\tilde{x}[n]$  por  $x[n]$  en el sumatorio. Además, puesto que  $x[n]$  es cero para  $\|n\| > N_1$ , los límites del sumatorio pueden ser extendidos hasta el

infinito. Definiendo la envolvente  $X(\Omega)$  de  $N C(k)$  como:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad \text{I.30}$$

los coeficientes  $C(k)$  quedan descritos por:

$$C(k) = \frac{1}{N} X(k\Omega_0) \quad \text{I.31}$$

donde  $\Omega_0$  representa el espaciado entre muestras  $2\pi/N$ . Combinando la ecuación (I.31) con la (I.28) se obtiene:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(k\Omega_0) e^{j\Omega_0 n k} \quad \text{I.32}$$

Si llevamos esta ecuación al límite  $\Omega_0 \rightarrow 0$  y la suma se convierte en una integral:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad \text{I.33}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad \text{I.34}$$

La función  $X(\Omega)$  se denomina Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD). La primera de estas ecuaciones se denomina Ecuación de Síntesis y la segunda Ecuación de Análisis. La condición de convergencia de la suma es que  $x[n]$  sea absolutamente sumable, es decir:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|x[n]\| < \infty \quad \text{I.35}$$

o que la serie tenga una energía finita:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|x[n]\|^2 < \infty \quad \text{I.36}$$

Es obvio que la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto posee muchas similitudes con el caso de tiempo continuo. Las mayores diferencias son:

1) La periodicidad de la transformada de tiempo discreto  $X(\Omega)$ , ya que las exponenciales complejas de tiempo discreto que difieran en frecuencia por un múltiplo de  $2\pi$  son idénticas.

2) El intervalo finito de integración en la ecuación de síntesis.

### 2.3 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

En la sección anterior se ha considerado la representación de series periódicas en términos de Series Discretas de Fourier. Con la interpretación adecuada, la misma representación puede ser aplicada a series de duración finita. La representación de Fourier resultante se denominará Transformada Discreta de Fourier (TDF).

Consideremos una serie  $x[n]$  de duración finita de longitud  $N$ , por lo que  $x[n]=0$  excepto en el rango  $0 \leq n \leq (N-1)$ . Construyamos una serie periódica de periodo  $N$ , para la cual  $x[n]$  es un periodo:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN) \quad \text{I.37}$$

Puesto que  $x[n]$  es de longitud finita  $N$ , no hay solapamiento entre los términos  $x(n + rN)$  para diferentes valores de  $r$ . La serie de duración finita  $x[n]$  puede ser extraída multiplicando por una ventana rectangular:

$$x[n] = \tilde{x}[n]R_N[n] \quad R_N[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad \text{I.38}$$

Una vez construida la serie periódica podemos calcular los coeficientes de la serie discreta de Fourier correspondiente como:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)nk} \quad \text{I.39}$$

Hay que notar que la serie  $\tilde{X}[k]$  dada por esta expresión es periódica con periodo  $N$ . Esto es debido al hecho de que las exponenciales complejas son sólo distintas para  $k=0,1,\dots,N-1$ . Para mantener la dualidad entre el dominio del tiempo y la frecuencia, podemos elegir los coeficientes de Fourier que asociamos con una serie de duración finita correspondiente a un periodo de  $\tilde{X}[k]$ . De esta forma nos queda el siguiente par transformado:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j(2\pi/N)kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad \text{I.40}$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{-j(2\pi/N)kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad \text{I.41}$$

La ecuación (I.40) representa la ecuación de análisis y la (I.41) la ecuación de síntesis. En este caso se ha dividido el sumatorio por el factor  $1/N$ . Si se quiere que el resultado tenga unidades físicas debe utilizarse el factor  $1/NT$

## 2.4 RELACIÓN ENTRE LAS TRANSFORMADAS CONTINUAS Y DISCRETAS

La TDF puede ser vista como una aproximación a la TFTC basada en un número finito de muestras de datos. Para desarrollar la naturaleza exacta de esta relación, se requiere una serie de operaciones lineales en 4 pasos. Estas operaciones son :

- 1) Multiplicación por Ventana  $\begin{cases} \text{en el dominio temporal} \\ \text{en el dominio frecuencial} \end{cases}$
- 2) Muestreo  $\begin{cases} \text{en el dominio temporal} \\ \text{en el dominio frecuencial} \end{cases}$

Si se lleva a cabo la multiplicación por una ventana en un dominio, en el otro se lleva a cabo un filtrado con la función sinc, como consecuencia del teorema de convolución. Si el muestreo se lleva a cabo en un dominio,

tiene lugar la replicación periódica en el otro dominio.

Puesto que las 4 operaciones son lineales y conmutativas, hay muchas formas posibles de ordenarlas. La siguiente figura sugiere dos de ellas.

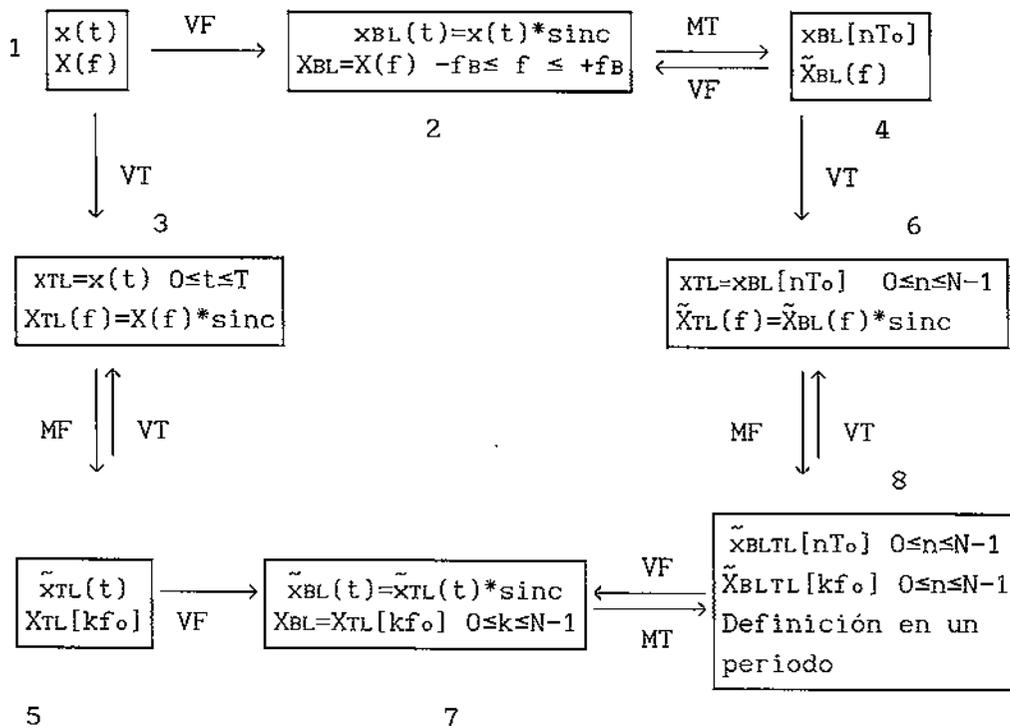


Fig. 5 Relación entre las transformadas continuas y discretas

La función original del tiempo continua  $x(t)$  y su transformada  $X(f)$  no están restringidas y pueden ser en general no periódicas,

a) La operación VF, limita en banda ( aplicación de ventana en frecuencia) la señal a  $\pm 1/2T$  Hz.

b) La segunda operación MT, muestrea la señal limitada en banda en intervalos temporales de T segundos

c) La tercera operación VT , limita en el tiempo la señal muestreada a N muestras.

d) La cuarta operación MF, muestrea en frecuencias a intervalos de  $1/NT$  Hz, que periódicamente replican las N muestras temporales originales.

$$x_{tdf} = (((x(t) * \mathcal{F}^{-1}\{VF\}) MT) VT) * \mathcal{F}^{-1}\{MF\} \quad \text{temporal}$$

$$X_{tdf} = (((X(f) VF) * \mathcal{F}\{MT\}) * \mathcal{F}\{VT\}) MF \quad \text{frecuencia}$$

Las operaciones de muestreo entre los nodos 2-4 y 6-8 son reversibles por aplicación del teorema de muestreo.

Como resultado de las operaciones de multiplicación por una ventana y

muestreo se encuentran cinco tipos de relaciones de Fourier:

- nodo 1: Transformada de Fourier de Tiempo Continuo.
- nodo 4: Transformada de Fourier de Tiempo Discreto.
- nodo 5: Series de Fourier de Tiempo continuo.
- nodo 8: Serie Discreta de Fourier si se considera que la señal y su transformada son periódicas o Transformada discreta de Fourier si se considera que fuera de este periodo ambas señales valen cero.

La limitación en banda y tiempo requerida para relacionar la Transformada discreta de Fourier y la Transformada de Fourier de Tiempo Continuo muestran que la primera es una variante distorsionada de la señal de tiempo continuo  $x(t)$  y transformada  $X(f)$  originales.

- nodo 2 : La limitación en banda crea una función filtrada en el tiempo:

$$x_{BL}(t) = x(t) * \mathcal{F}^{-1}\{VF\}$$

- nodo 3 : La limitación de tiempo crea una función transformada filtrada:

$$X_{TL}(f) = X(f) * \mathcal{F}\{VT\}$$

Las muestras de estas funciones son designadas como  $x_{BL}[n] = x_{BL}(Nt)$  y  $X_{TL}[k] = X_{TL}(k/NT)$

Otras dos observaciones de importancia conciernen a la serie de operaciones de multiplicación por una ventana y muestreo.

-En el nodo 5 :

Las operaciones de multiplicación por una ventana temporal y muestreo en frecuencias dan lugar a la Serie de Fourier de Tiempo Continuo. El par transformado de Fourier en este nodo relaciona una función periódica de tiempo continuo de periodo  $NT$  segundos a un espectro de líneas discreto y viene dado por la expresión:

$$X_{TL}[k] = \int_0^{NT} x(t) e^{(-j2\pi kt/NT)} dt \quad k \in \mathbb{Z} \quad I.42$$

$$x_{TL}(t) = \frac{1}{NT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{TL}[k] e^{(j2\pi kt/NT)} \quad 0 \leq t \leq NT \quad I.43$$

Esta última ecuación es una función periódica que coincide con la función del nodo 1 sólo sobre el intervalo de tiempo 0 a  $NT$  y representa la tradicional serie de Fourier de una señal periódica.

- En el nodo 4 :

Las operaciones de multiplicación por una ventana en frecuencia y muestreo en tiempo dan lugar a la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto. Esta se caracteriza por una función transformada periódica de periodo  $1/T$  Hz y viene dada por la expresión:

$$\tilde{X}_{BL}(f) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{BL}[n] e^{-j2\pi fnt} \quad -\frac{1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T} \quad I.44$$

$$x_{BL}[n] = \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f) e^{(j2\pi fnt)} df \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty \quad I.45$$

La función transformada está relacionada con la transformada-z (cuya definición se verá en 4.1.5?) de la serie discreta  $x_{BL}[n]$  como se indica a continuación:

$$\tilde{X}_{BL}(f) = TX(z) \Big|_{z=e^{j2\pi ft}}$$

Se supone que la región de convergencia de la transformada-z incluye el círculo unitario. Por tanto, la Transformada de Fourier de Tiempo discreto es simplemente la transformada-z evaluada sobre el círculo unitario del plano-z y escalada por T.

- en el nodo 8 :

Si nuestra señal original era periódica pura y la ventana temporal tomaba justamente un periodo de la misma, tendremos una serie periódica en el tiempo y otra serie periódica en frecuencias. La distinción con la transformada discreta es puramente formal y se basa en la consideración de que nuestra señal original sea aperiódica (TDF) o periódica (SFTD).

Independientemente de cual de las dos series de cuatro operaciones se haya seleccionado el resultado final en el nodo 8 es el mismo. En éste se obtiene la Transformada Discreta de Fourier con el siguiente par transformado:

$$X_{TL}[k] = T \sum_{n=0}^{N-1} x_{BL}[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad I.46$$

$$x_{BL}[n] = \frac{1}{NT} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_{TL}[k] e^{(j2\pi kn/N)} \quad n=0, \dots, N-1 \quad I.47$$

Ambas series  $x_{BL}[n]$  ty  $X_{TL}[k]$  son periódicas módulo  $N$ , por lo que la propiedad  $X[-k]=X[N-k]$  para  $-N/2 \leq k \leq 1$  permite que la ecuación (I.47) pueda ser reescrita como:

$$x_{BL}[n] = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} X_{TL}[k] e^{(j2\pi kn/N)} \quad n=0, \dots, N-1 \quad I.48$$

Las ecuaciones (I.46) y (I.47) constituyen el par de series de Fourier de tiempo discreto relacionado con el par original  $x(t)$  y  $X(f)$  para tiempo continuo.

Los factores  $T$  y  $1/NT$  son necesarios para poder calcular los valores correctos de energía y potencia.

Un examen de la figura 5 nos permite hacer las siguientes observaciones:

- Si  $x(t)$  está inherentemente limitada en banda a  $1/T$  Hz, entonces la serie temporal mantendrá los valores originales de  $x(t)$  en los instantes de muestreo, pero la serie transformada estará compuesta de muestras de una versión distorsionada de la transformada original  $X(f)$ .

- Si  $x(t)$  está limitada en tiempo inherentemente a  $NT$  segundos en extensión, entonces la serie transformada mantiene los valores originales de  $X(f)$  en los puntos de muestreo, pero la serie temporal estará compuesta de muestras de una versión distorsionada de la señal original  $x(t)$ . Los efectos de distorsión pueden ser mitigados disminuyendo  $T$  (aumentando el ancho de banda) o incrementando  $N$  (aumentando la duración temporal), consiguiendo por tanto una mejor aproximación de la TDF a la TFTC. Hay que notar que ambas coincidirán sólo para señales periódicas que puedan ser representadas como una suma de  $N$  sinusoides complejas de frecuencias  $k/NT$  Hz, para  $k=0$  a  $K=N-1$ .

### 3 ALGORITMO DE LA FFT

La transformada discreta de Fourier viene dada por la expresión:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad \text{I.49}$$

donde  $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$  y  $W_N^{kn} = e^{-j(2\pi/N)kn}$

La transformada discreta de Fourier inversa, es:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad \text{I.50}$$

Tanto  $x[n]$  como  $X[k]$  pueden ser complejos. Las ecuaciones (I.49) y (I.50) difieren únicamente en el signo del exponente de  $W_N$  y en el factor de escala  $1/N$ . Por tanto, una discusión de los procedimientos de cálculo de (I.49) se puede aplicar, con pequeñas modificaciones a (I.50). Para resaltar la importancia de los esquemas de cálculo eficientes consideremos en primer lugar la evaluación directa de las ecuaciones anteriores. Puesto que  $x[n]$  puede ser complejo:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ [\text{Re}(x[n]) \text{Re}(W_N^{kn}) - \text{Im}(x[n]) \text{Im}(W_N^{kn})] + j [\text{Re}(x[n]) \text{Im}(W_N^{kn}) + \text{Im}(x[n]) \text{Re}(W_N^{kn})] \right\} \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad \text{I.51}$$

A partir de la ecuación (I.51) está claro que para cada valor de  $k$ , el cálculo directo de  $X[k]$  requiere  $4N$  multiplicaciones y  $4N-2$  sumas reales. Puesto que  $X[k]$  debe ser calculado para  $N$  valores diferentes de  $k$ , el cálculo de la transformada discreta de Fourier requiere

$4N^2$ multiplicaciones reales	$N^2$ multiplicaciones complejas
$N(4N-2)$ sumas reales	$N(N-1)$ sumas complejas

Además de las multiplicaciones y adiciones, la implementación del cálculo de la TDF en un ordenador de propósito general requiere capacidad de almacenamiento y acceso a los valores de la serie de entrada  $x[n]$  y a los

valores de los coeficientes  $W_N^{kn}$ . Puesto que la cantidad de almacenamiento y acceso de datos en algoritmos de cálculo numérico es generalmente proporcional al número de operaciones aritméticas, se acepta generalmente como medida de la complejidad de un algoritmo, el número de multiplicaciones y adiciones requeridos. Puesto que el número de operaciones aritméticas es proporcional a  $N^2$ , es evidente que el cálculo por el método directo requiere grandes tiempos de cálculo para valores grandes de  $N$ . Por esta razón, los procedimientos de cálculo que reduzcan el número de multiplicaciones y adiciones son de gran interés.

La mayoría de las aproximaciones explotan una o ambas de las siguientes propiedades especiales:

$$W_N^{k(N-n)} = (W_N^{kn})^* \quad \text{I.52}$$

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n} \quad \text{I.53}$$

Por ejemplo, usando la primera propiedad (simetría del seno y el coseno) podemos agrupar los términos de la ecuación (I.51) como sigue:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(x[n]) \operatorname{Re}(W_N^{kn}) + \operatorname{Re}(x[N-n]) \operatorname{Re}(W_N^{k(N-n)}) = \\ (\operatorname{Re}(x[n]) + \operatorname{Re}(x[N-n])) \operatorname{Re}(W_N^{kn}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(\operatorname{Im}(x[n]) \operatorname{Im}(W_N^{kn}) + \operatorname{Im}(x[N-n]) \operatorname{Im}(W_N^{k(N-n)})) = \\ -(\operatorname{Im}(x[n]) + \operatorname{Im}(x[N-n])) \operatorname{Im}(W_N^{kn}) \end{aligned}$$

Para los otros dos términos de la ecuación (I.51) se pueden encontrar agrupamientos similares. De esta forma se logra reducir el número de multiplicaciones en un factor de 2. También podemos tener en cuenta que para ciertos valores de  $kn$ , las funciones seno y coseno toman los valores 1 ó 0, eliminando la necesidad de multiplicación.

Sin embargo, reducciones de este tipo, nos dejan todavía con una cantidad de cálculo que es proporcional a  $N^2$ . Afortunadamente, la segunda propiedad (periodicidad de la serie compleja  $W_N^{kn}$ ) se puede emplear para llevar a cabo grandes reducciones de cálculo.

Los algoritmos que explotaban ambas propiedades eran bien conocidos antes de la era de la alta velocidad en el cálculo. En ese momento, cualquier algoritmo que redujera el cálculo por un factor 2 era bien venido. Runge y

más tarde Danielson y Lanczos describieron algoritmos para el cálculo que eran aproximadamente proporcionales a  $N \log N$  en lugar de a  $N^2$ . Sin embargo, la distinción no fue de gran importancia para los valores pequeños de  $n$  susceptibles de ser calculados a mano. La posibilidad de reducir grandemente el cálculo fue pasada por alto hasta 1965 cuando Cooley y Tukey publicaron un algoritmo para el cálculo de la TDF que es aplicable cuando  $N$  es un número compuesto (producto de dos o más enteros). Esto generó la aparición de más algoritmos que se conocen como **Fast Fourier Transform (FFT)**.

El principio fundamental de todos estos algoritmos se basa en la descomposición del cálculo de la TDF de una serie de longitud  $N$  en transformadas sucesivamente más pequeñas. La forma en que se implemente este principio nos lleva a una variedad de algoritmos diferentes, todos con mejoras comparables en cuanto a la velocidad de cálculo. A continuación veremos dos clases básicas de algoritmos FFT.

- 1) Decimación en tiempo
- 2) Decimación en frecuencia

### 3.1 ALGORITMOS DE DECIMACIÓN EN TIEMPO

Para obtener un incremento drástico en la eficiencia, es necesario descomponer el cálculo de la TDF en el cálculo de TDF sucesivamente más pequeñas. En este proceso se explotan tanto la propiedad de simetría como la de la periodicidad de la exponencial compleja. Los algoritmos basados en la descomposición de la serie de entrada  $x[n]$  en subseries sucesivamente más pequeñas se denominan **algoritmos de decimación en tiempo**. Esto se demostrará para el caso especial en que  $N=2^p$

Puesto que  $N$  es un entero par podemos considerar el cálculo de  $X[k]$  separando  $x[n]$  en dos series de  $N/2$  puntos que consisten en los puntos numerados par y los puntos numerados impar, con  $X[k]$  dada por:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad \text{I.54}$$

separando  $x[n]$  en sus puntos numerados par e impar tenemos:

$$X[k] = \sum_{n \text{ par}} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n \text{ impar}} x[n] W_N^{kn} \quad \text{I.55}$$

o con la sustitución de las variables  $n=2r$  y  $n=2r+1$

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_{N/2}^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{kr} = G(k) + W_N^k H(k) \quad \text{I.56}$$

Cada una de las sumas se reconoce como una TDF de  $N/2$  puntos, la primera sobre los puntos pares y la segunda sobre los impares. Aunque el índice  $k$  toma valores desde  $k=0$  hasta  $k=N-1$ , cada una de las sumas necesita ser calculada sólo para  $k$  entre 0 y  $(N/2) - 1$ , Puesto que  $G(k)$  y  $H(k)$  son periódicas en  $k$  con periodo  $N/2$ . Después de que se han calculado las dos TDF de  $N/2$  puntos, se combinan para dar la DFT de  $N$  puntos.

Con el cálculo reestructurado de esta forma podemos comparar el número de multiplicaciones y sumas requeridas.

2 TDF de  $N/2$  puntos  $\Rightarrow 2 \left(\frac{N}{2}\right)^2$  multiplicaciones complejas

$2 \left(\frac{N}{2}\right)^2$  sumas complejas

$N$  multiplicaciones complejas por  $W_N^k$

$N$  sumas complejas de  $W_N^{kn} H[k]$  y  $G[k]$

Cálculo directo	Decimación en tiempo
$N^2$	$N + (N^2/2)$

Es fácil ver que  $N+(N^2/2) < N^2$  para  $N>2$

$G[k]$  y  $H[k]$  serán calculadas por el mismo procedimiento, obteniéndose:

$$G[k] = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} G[2l] W_{N/4}^{kl} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{(N/4)-1} G[2l+1] W_{N/4}^{kl} \quad \text{I.57}$$

$$H[k] = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} H[2l] W_{N/4}^{kl} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{(N/4)-1} H[2l+1] W_{N/4}^{kl} \quad \text{I.58}$$

Si  $N$  fuera una potencia de 2 mayor que 3 habría que seguir descomponiendo la transformada de  $N/4$  puntos en transformadas de  $N/8$  puntos, y continuar hasta que nos queden sólo transformadas de dos puntos. Esto requiere  $\nu$  etapas de cálculo, donde  $\nu = \log_2 N$ .

Por tanto el número de multiplicaciones y sumas complejas que se obtienen al aplicar el procedimiento en todas las etapas es:

$$N \log_2 N$$

Es útil notar que cada etapa de cálculo toma un conjunto de  $N$  números complejos y lo transforma en otro conjunto de  $N$  números complejos. El cálculo básico a realizar es el siguiente (ec. I.59):

$$X_{m+1}[p] = X_m[p] + W_N^r X_m[q] \tag{I.59.a}$$

$$X_{m+1}[q] = X_m[p] + W_N^{r+N/2} X_m[q] \tag{I.59.b}$$

Las ecuaciones anteriores sugieren un medio de reducir el número de multiplicaciones complejas por un factor 2. Para ver esto notemos que:

$$W_N^{N/2} = e^{-j(2\pi/N)(N/2)} = e^{-j\pi} = -1 \tag{I.60}$$

Por lo que las ecuaciones anteriores se convierten en (ec. I.61):

$$X_{m+1}[p] = X_m[p] + W_N^r X_m[q] \tag{I.61.a}$$

$$X_{m+1}[q] = X_m[p] - W_N^r X_m[q] \tag{I.61.b}$$

Debido a la forma del diagrama de flujo, como se puede observar en la siguiente figura, al cálculo de I.61 se le denomina mariposa.

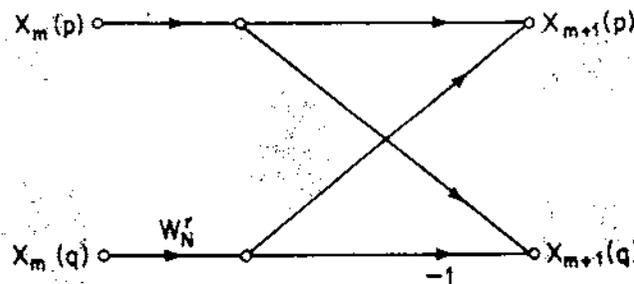


Fig. 6 Mariposa básica para el algoritmo de decimación en tiempo.

y el diagrama de Flujo de la FFT por decimación en tiempo para el caso particular de 8 puntos.

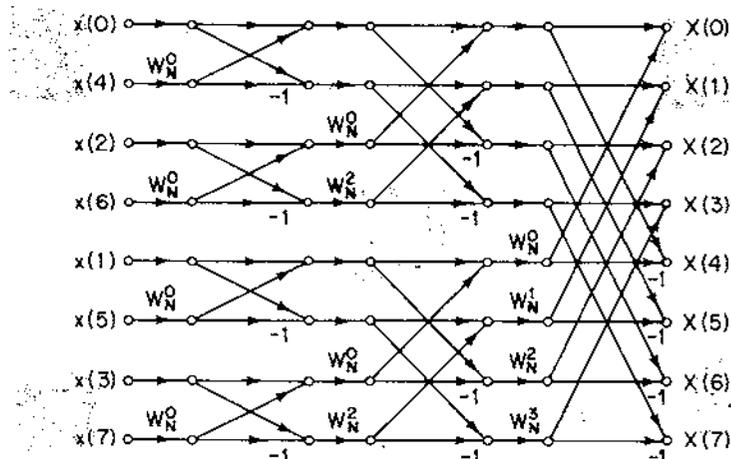


Fig. 7 Diagrama de flujo para el algoritmo de decimación en tiempo.

Puesto que hay  $N/2$  mariposas por etapa y  $\log_2 N$  etapas, el número total de multiplicaciones requerido será de  $(N/2)\log_2 N$  en lugar de  $N\log_2 N$ . Como podemos observar, los números complejos en las posiciones  $p$  y  $q$  del array de la etapa  $m$  son los únicos que se necesitan para calcular los elementos  $p$  y  $q$  del array de la etapa  $m+1$ . Por tanto, sólo se necesita un array complejo de  $N$  registros de almacenamiento para implementar el cálculo complejo si  $X_{m+1}[p]$  y  $X_{m+1}[q]$  se almacenan en los mismos registros que  $X_m[p]$  y  $X_m[q]$ .

Para que esto se pueda llevar a cabo es necesario que los datos de entrada estén almacenados en un orden no secuencial. De hecho, el orden en que se almacenan los datos de entrada es un orden de bits invertidos. Esto se debe al proceso que se ha seguido. El primer paso fue el de separar las muestras pares de las muestras impares. Formalmente dicha separación de los datos se puede llevar a cabo examinando el bit menos significativo de los datos. Por tanto el bit menos significativo pasará a ser el más significativo en la nueva ordenación. A continuación las subseries par e impar son ordenadas a su vez en partes par e impar, y esto se puede hacer mirando el segundo bit menos significativo que pasará a ser el segundo más significativo de la nueva ordenación. Este proceso se repite hasta obtener  $N$  subseries de longitud 1. Por tanto, la necesidad de invertir los bits proviene de la forma en que se ha descompuesto la serie original en subseries más pequeñas.

### 3.2 ALGORITMOS DE DECIMACIÓN EN FRECUENCIA

Los algoritmos de decimación en tiempo estaban basados sobre la descomposición de la serie de entrada  $x[n]$ . Alternativamente podemos

considerar la división de la serie de salida  $X[k]$  en subseries más pequeñas de la misma manera. Los algoritmos basados en este procedimiento se denominan de decimación en frecuencia.

Para obtener la forma de decimación en frecuencia de la TDF para  $N$  potencia de 2, podemos dividir en primer lugar la serie de entrada en primera y segunda mitad de los puntos:

$$x[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq ((N/2) - 1) \\ x[n] & (N/2) \leq n \leq (N - 1) \end{cases} \quad I.62$$

por lo que la serie de salida también quedará dividida:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad I.63$$

En el segundo sumatorio se puede hacer un cambio de variable tal que  $h = n - (N/2)$  con lo cual:

$$\begin{aligned} x[n] W_N^{kn} &= x[h+(N/2)] W_N^{k(h+N/2)} \\ &= W_N^{kN/2} x[h+(N/2)] W_N^{kh} \text{ si } \frac{N}{2} \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad I.64$$

el rango de variación para la  $h$  es:  $0 \leq h \leq (N/2) - 1$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{kn} + W_N^{k(N/2)} \sum_{h=0}^{N/2-1} x[h+N/2] W_N^{kh} \quad I.65$$

Puesto que la  $h$  es una variable muda podemos cambiar su nombre por el de  $n$  a efectos de unificar notación (para que los dos sumatorios tengan la misma variable como índice).

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{kn} + W_N^{k(N/2)} \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2] W_N^{kn} \quad I.66$$

Es importante observar que aunque la ecuación (I.66) contiene dos sumas de  $N/2$  puntos, cada una de estas sumas no es una TDF de  $N/2$  puntos, puesto

que aparece  $W_N^{kn}$  en lugar de  $W_{N/2}^{kn}$ . Hay que recordar que en una transformada discreta tenemos que multiplicar por una exponencial compleja que divida el rango entre 0 y  $2\pi$  en tantas partes como número de puntos dispongamos para calcular. Combinando las dos sumas y usando el hecho de que  $W_N^{kN/2} = (-1)^k$  obtenemos:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x[n] + (-1)^k x[n + \frac{N}{2}]] W_N^{kn} \quad I.67$$

Una vez que hemos expresado la serie de salida en esta forma, procedemos a continuación a dividirla en subseries más pequeñas, como ya se hiciera con la decimación en tiempo. Para ello consideremos los  $k$  pares e impares separadamente:

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x[n] + x[n + \frac{N}{2}]] W_N^{2rn} \quad r=0,1,\dots,\frac{N}{2} \quad I.68$$

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x[n] - x[n + \frac{N}{2}]] W_N^n W_N^{2rn} \quad r=0,1,\dots,\frac{N}{2} \quad I.69$$

Estas dos últimas ecuaciones sí pueden ser ya reconocidas como dos TDF de  $N/2$  puntos debido a que:

$$W_N^{2rn} = W_{N/2}^{rn} \quad I.70$$

La primera de ellas es la transformada de:

$$G[n] = x[n] + x[n + \frac{N}{2}] \quad I.71$$

y la segunda de:

$$H[n] = [x[n] - x[n + \frac{N}{2}]] W_N^n \quad I.72$$

Procediendo de la misma manera que para la decimación en tiempo obtenemos el cálculo básico a realizar (ec. I.73):

$$X_{m+1}[p] = X_m[p] + X_m[q] \quad I.73.a$$

$$X_{m+1}[q] = [ X_m[p] - X_m[q] ] W_N^r \tag{I.73.b}$$

A continuación se puede ver el diagrama de flujo para esta mariposa elemental.

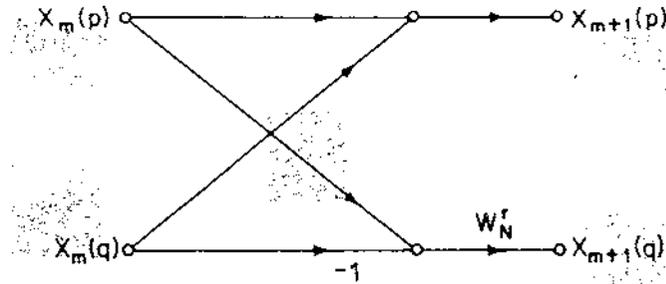


Fig. 8 Mariposa básica para el algoritmo de decimación en frecuencia.

y el diagrama de flujo correspondiente a la FFT por decimación en frecuencia para el caso particular de 8 puntos.

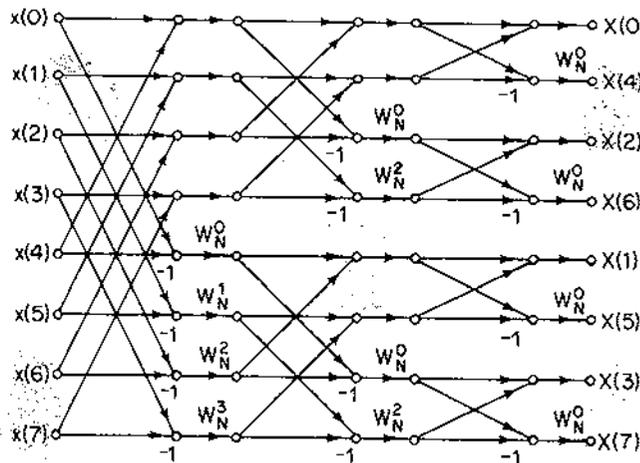


Fig. 9 Diagrama de flujo para el algoritmo de decimación en frecuencia.

Como se puede observar, el proceso consiste ahora en dividir la serie de salida resultante  $X[k]$  en subseries de puntos pares e impares. Puesto que esta división se está llevando a cabo en el dominio de la frecuencia es por lo que se denomina decimación en frecuencia.

Aunque el cálculo básico a realizar es diferente que en el caso de decimación en tiempo existe una relación entre ambos. Considerando la mariposa fundamental para un algoritmo de decimación en tiempo (ec. I.74):

$$X_{m+1}[p] = X_m[p] + W_N^r X_m[q] \tag{I.74.a}$$

$$X_{m+1}[q] = X_m[p] - W_N^r X_m[q] \tag{I.74.b}$$

Si invertimos los cálculos de esta ecuación y resolvemos para  $X_m$  en

términos de  $X_{m+1}$  (ec I.75):

$$X_m[p] = \frac{1}{2} [ X_{m+1}[p] + X_{m+1}[q] ] \quad \text{I.75.a}$$

$$X_m[q] = \frac{1}{2} [ X_{m+1}[p] - X_{m+1}[q] ] W_N^{-r} \quad \text{I.75.b}$$

Como podemos observar, una inversión de la mariposa de decimación en tiempo nos proporciona una mariposa de decimación en frecuencia salvo el factor  $1/2$  y el signo de la exponencial. Esto da cuenta de la simetría especular que existe entre los algoritmos de ambos tipos de decimación. Por tanto, si utilizamos potencias de  $W_N^{-r}$  en lugar de  $W_N^r$  y dividimos el resultado por  $N$ , habremos obtenido un algoritmo para el cálculo de la Transformada discreta de Fourier Inversa:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad \text{I.76}$$

### 3.3 ALGORITMOS DE FFT PARA NÚMEROS COMPUESTOS

Hasta ahora hemos ilustrado los principios básicos de decimación en tiempo y decimación en frecuencia para el importante caso especial de que  $N$  sea una potencia de dos. En general, el cálculo eficiente de la TDF está unido a la representación de  $N$  como un producto de factores. Supongamos que:

$$N = p_1 p_2 \dots p_x \quad \text{I.77}$$

Como ya hemos visto en el caso de que  $N$  sea potencia de dos, dicha descomposición nos lleva a un algoritmo altamente eficiente. Además, todos los cálculos requeridos son cálculos de mariposa que corresponden esencialmente a TDF de dos puntos. Por esta razón los algoritmos de potencias de dos son particularmente simples de implementar, y en muchas aplicaciones es conveniente trabajar siempre con series cuya longitud sea siempre una potencia de dos. Sin embargo, en algunos casos no es posible elegir  $N$  como una potencia de dos, lo cual hace necesario considerar la situación más general de la ecuación (I.77).

Definamos  $q_1 = p_2 p_3 \dots p_x$  de forma que  $N = p_1 q_1$ . Si  $N$  es una potencia de dos entonces podemos elegir  $p_1 = 2$  y  $q_1 = N/2$ . Usando la decimación en tiempo, podemos entonces descomponer la serie  $x[n]$  en dos series de  $N/2$  muestras, que

consisten de las muestras numeradas par e impar respectivamente. Cuando  $N=p_1q_1$ , podemos dividir la serie de entrada en  $p_1$  series de  $q_1$  muestras cada una. Por ejemplo, si  $N=12$  podemos descomponer  $x[n]$  en tres series de longitud 4:

- Primera serie:  $x(0),x(3),x(6),x(9)$
- Segunda serie:  $x(1),x(4),x(7),x(10)$
- Tercera serie:  $x(2),x(5),x(8),x(11)$

En general podemos escribir  $X[k]$  como:

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{r=0}^{q_1-1} x[p_1r] W_N^{p_1rk} + \sum_{r=0}^{q_1-1} x[p_1r+1] W_N^k W_N^{p_1rk} + \dots \\
 &+ \sum_{r=0}^{q_1-1} x[p_1r+p_1-1] W_N^{(p_1-1)k} W_N^{p_1rk} \\
 X[k] &= \sum_{l=0}^{p_1-1} W_N^{kl} \sum_{r=0}^{q_1-1} x[p_1r+l] W_N^{p_1rk} \quad \text{I.78}
 \end{aligned}$$

La suma interna puede ser considerada como la TDF de  $q_1$  puntos:

$$G_1[k] = \sum_{r=0}^{q_1-1} x[p_1r+l] W_{q_1}^{rk} \quad \text{I.79}$$

Puesto que, como se puede ver fácilmente,:

$$W_N^{p_1rk} = W_{q_1}^{rk} \quad \text{para } N=p_1q_1 \quad \text{I.80}$$

La ecuación (I.78) expresa  $X[k]$  en términos de  $p_1$  transformadas discretas de Fourier de  $q_1$  muestras de longitud. Para determinar el número de multiplicaciones y adiciones complejas necesarias para implementar la TDF de acuerdo con la ecuación (I.78) consideremos que el cálculo se lleva a cabo por medio del método directo. A partir de la ecuación se puede ver que hay  $q_1$  transformadas de  $p_1$  puntos. Por tanto, el número de adiciones y multiplicaciones complejas es  $p_1q_1^2$ . La suma exterior se implementa multiplicando las transformadas de  $q_1$  puntos por el factor  $W_N^{kl}$  y sumando los

resultados. Puesto que el doble sumatorio se implementa para  $N$  valores de  $k$ , se necesitan un total de  $N(p_1-1)$  multiplicaciones y adiciones complejas para combinar las  $q_1$  transformadas de  $p_1$  puntos. Por tanto, el número total de multiplicaciones y adiciones complejas requeridas es:

$$N(p_1-1) + p_1q_1^2 \quad \text{I.81}$$

A continuación se sigue el mismo proceso con las transformadas de  $q_1$  puntos. En particular, si representamos  $q_1$  como:

$$q_1 = p_2q_2 \quad \text{I.82}$$

entonces la suma interior de (I.78) puede ser descompuesta en  $p_2$  subseries de  $q_2$  puntos, es decir, puede ser reemplazada por un doble sumatorio de la misma forma que el anterior. El número de operaciones requeridas para calcular la TDF de  $q_1$  puntos es:

$$q_1(p_2-1) + p_2q_2^2 \quad \text{I.83}$$

en lugar de  $q_1^2$ .

El número de adiciones y multiplicaciones complejas será ahora:

$$N(p_1-1) + N(p_2-1) + p_1p_2q_2^2 \quad \text{I.84}$$

Si continuamos con este procedimiento, entonces la serie original se habrá descompuesto tanto como sea posible y el número de multiplicaciones y adiciones complejas será:

$$N(p_1 + p_2 + \dots + p_\nu - \nu) \quad \text{I.85}$$

Por ejemplo, si  $p_1 = p_2 = \dots = p_\nu = p$ , el número de multiplicaciones y adiciones complejas es  $N(p-1)\nu$ . Si  $p=2$ , este número es  $p\nu$ , como ya se vio anteriormente. En general, se puede ver de la ecuación (I.85) que es preferible llevar a cabo la descomposición en tantos factores como sea posible para un  $N$  dado. Formalmente, no es ventajoso sino elegir factores primos ya que si  $p_i = r_i s_i$  con  $r_i$  y  $s_i > 1$ , entonces  $p_i > r_i + s_i$ , excepto cuando  $r_i = s_i = 2$ , en cuyo caso  $p_i = r_i + s_i$ . Sin embargo, hay ejemplos (notablemente para

$p_i=4$  ó  $8$ ) en los cuales se producen resultados con economías adicionales que no están contempladas en las ecuación (I.85). Por tanto, incluso si  $N=2^v$ , algunas veces es ventajoso, basar el cálculo en factores de 4, usando una etapa basada en un factor de 2 si  $v$  es impar.

Las ventajas básicas de usar factores distintos de 2 son, el incremento en flexibilidad y velocidad en algunos casos. La desventaja básica es el incremento en la complejidad del algoritmo.

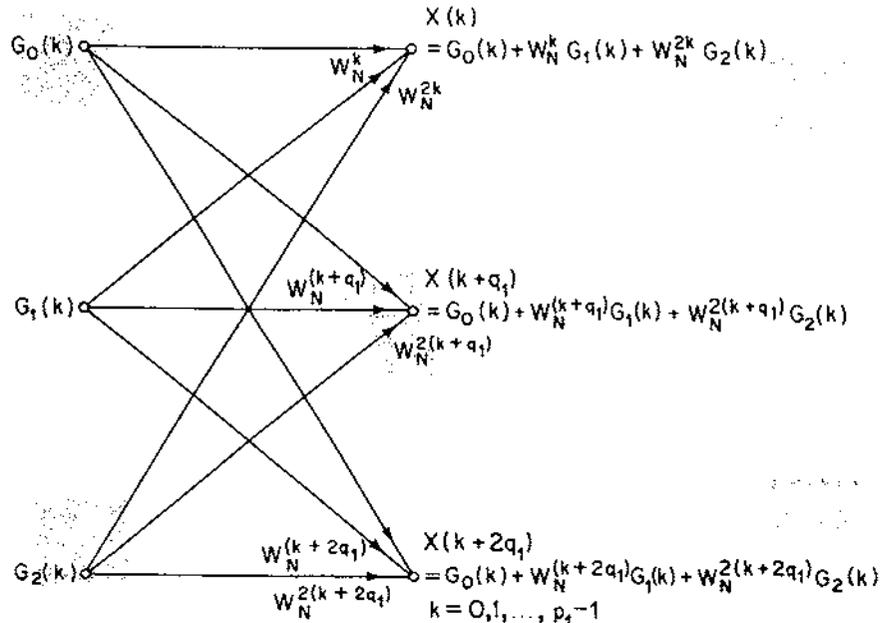


Fig. 10 Diagrama de flujo del cálculo básico para factores de 3.

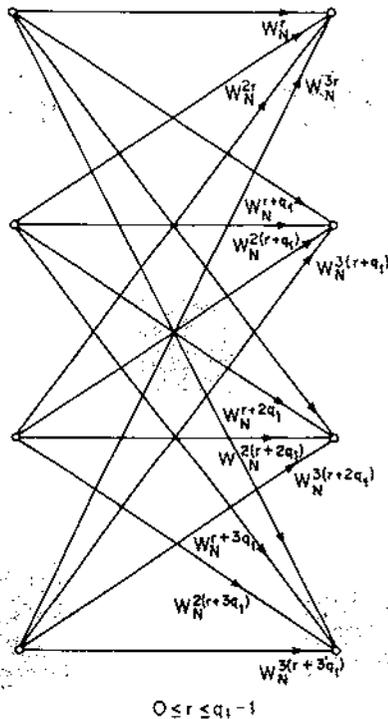


Fig. 11 Diagrama de flujo del cálculo básico para factores de 4.

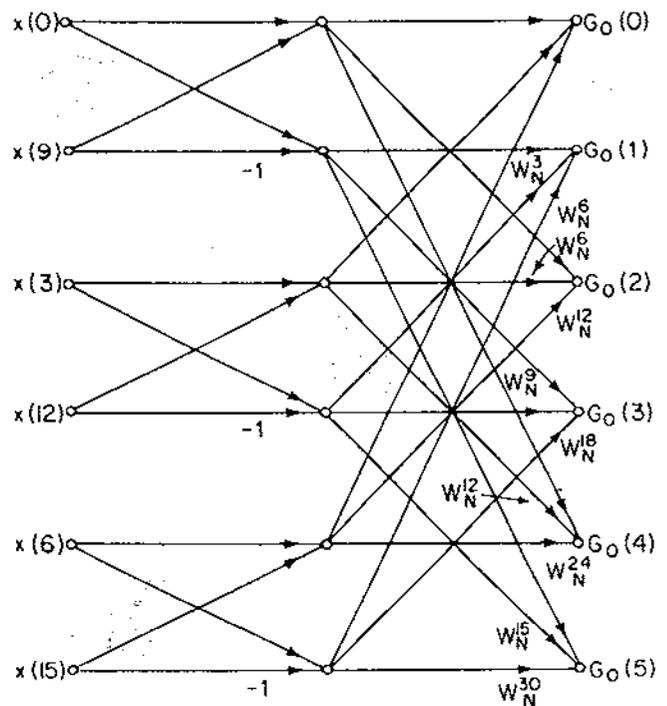


Fig. 12 Diagrama de flujo del cálculo básico para factores de 6.

La figura 10 muestra el diagrama de flujo del cálculo básico a realizar para factores de 3, la figura 11 para factores de 4 y la figura 12 para factores de 6.

### 3.4 ALGORITMO DE WINOGRAD

En 1976 Winograd presentó un nuevo algoritmo de TDF que tenía bastantes menos multiplicaciones que la FFT de Cooley y Tukey (publicada 11 años antes). Este algoritmo se basa en evaluar aquellas TDF cuyas longitudes sean primas entre sí por algoritmos especiales muy eficientes. Los algoritmos usan la permutación de índices de Rader para convertir las TDF de longitud prima en convoluciones cíclicas. Winograd desarrolló un método para calcular la convolución digital con el mínimo número de multiplicaciones. Estos algoritmos óptimos están basados en las técnicas de reducción de residuos polinomiales para descomponer la convolución en múltiples convoluciones más cortas.

La convolución discreta definida por:

$$y[n] = \sum_k h[n-k]x[k] \quad 1.86$$

se dice que es una operación bilineal porque, para un  $h[n]$  fijo es una función lineal de  $x[n]$  y para un  $x[n]$  fijo es una función lineal de  $h[n]$ .

La convolución periódica de longitud  $N$  de  $x[n]$  y  $h[n]$  puede ser representada por una multiplicación polinomial:

$$Y(s) = X(s) H(s) \text{mod}(s^N - 1) \quad 1.87$$

La reducción por residuos de un polinomio módulo otro polinomio se define de la siguiente forma: un polinomio  $F(s)$  tiene un residuo polinomial  $R(s)$  modulo  $P(s)$  si para un  $F(s)$  y  $P(s)$  dados existen  $Q(s)$  y  $R(s)$  tales que:

$$F(s) = Q(s)P(s) + R(s), \text{ siendo } \text{grado}\{R(s)\} < \text{grado}\{P(s)\} \quad 1.88$$

Una operación muy útil es una extensión del teorema chino del resto entero, que dice que si el módulo del polinomio puede ser factorizado en factores primos entre sí:

$$P(s) = P_1(s)P_2(s) \quad \text{I.89}$$

Entonces existen dos polinomios  $K_1(s)$  y  $K_2(s)$ , tales que el polinomio  $F(s)$  puede ser recuperado de sus residuos por:

$$F(s) = K_1(s) F_1(s) + K_2(s) F_2(s) \text{ mod } P(s) \quad \text{I.90}$$

donde  $F_1$  y  $F_2$  son los residuos dados por  $F_1(s) = F(s) \text{ mod } P_1(s)$  y  $F_2(s) = F(s) \text{ mod } P_2(s)$  si el orden de  $F(s)$  es menor que el de  $P(s)$ . La descomposición de  $F(s)$  en polinomios de menor orden es el proceso usado para dividir la TDF o la convolución en varios problemas más simples.

La operación bilineal (I.87) puede ser también expresada en términos de operadores lineales de matrices y un operador bilineal simple denotado por  $\circ$  que puede ser simplemente una multiplicación elemento por elemento de dos vectores. Esta formulación matricial es:

$$Y = C[AX \circ BH] \quad \text{I.91}$$

donde  $X$ ,  $H$  e  $Y$  son vectores de longitud  $N$  cuyos elementos son respectivamente  $x[n]$ ,  $h[n]$  e  $y[n]$ . Las matrices  $A$  y  $B$  tienen dimensión  $M \times N$  y la matriz  $C$  dimensión  $N \times M$  con  $M \geq N$ . Los elementos de  $A$ ,  $B$  y  $C$  están restringidos a ser números enteros o racionales, normalmente pequeños.

Para obtener un algoritmo útil de la forma (I.91) para calcular (I.86) consideremos la formulación polinomial de la ecuación (I.87) nuevamente. Para usar el esquema de reducción por residuos, el módulo se factoriza en módulos primos entre sí. Afortunadamente la factorización de este polinomio en particular,  $s^N - 1$ , ha sido estudiada extensamente y se ha encontrado que tiene una estructura interesante. Cuando se factoriza sobre los racionales, los factores son denominados **polinomios ciclotómicos**. Su propiedad más interesante es que la mayoría de los coeficientes de los polinomios ciclotómicos son cero y otros son  $\pm 1$  hasta órdenes de 100. Esto significa que la reducción por residuos generalmente no requerirá multiplicaciones.

Las operaciones para reducir  $X(s)$  y  $H(s)$  en la ecuación (I.87) se llevan a cabo por medio de las matrices  $A$  y  $B$ . La convolución de los polinomios residuo se lleva a cabo por el operador  $\circ$ , y la recombinación por la matriz  $C$ . El hecho importante es que las matrices  $A$  y  $B$  contienen normalmente sólo entradas 0 y  $\pm 1$ , y la matriz  $C$  contiene sólo números racionales.

Los términos  $h[n]$  son fijos para un filtro digital, o representan los valores  $W$  si se usa la convolución para calcular la TDF. Debido a esto  $D=BH$  puede ser precalculado en la ecuación (I.91) y en la ejecución del algoritmo sólo habría que tener en cuenta a los operadores  $A$  y  $C$ . Para explotar esta característica se ha demostrado que las propiedades de la ecuación (I.91) permiten el intercambio del operador más complicado  $C$  por el operador más simple  $B$  en la siguiente forma:

$$Y = C[AX \circ BH] \quad Y' = B^T [AX \circ C^T H'] \quad \text{I.92}$$

donde  $H'$  e  $Y'$  tienen los mismos elementos que  $H$  e  $Y$  pero permutados en orden. Esta propiedad importante permite precalcular  $C^T H'$  (lo que es más eficiente que precalcular  $BH$ ).

Por tanto, dado que  $BH$  o  $C^T H'$  pueden ser precalculadas, la forma bilineal de las ecuaciones (I.91) y (I.92) puede ser escrita en forma lineal, si se forma una matriz  $D$  diagonal  $M \times M$  formada por  $D=C^T H'$  o  $D=BH$  y usando la propiedad conmutativa para  $\circ$ , queda en la siguiente forma:

$$Y = CDAX \quad Y' = B^T DAX \quad \text{I.93}$$

Este método es muy potente para TDF de longitudes cortas. Para  $N=3$ , los residuos de ambos polinomios son constantes y la multiplicación  $\circ$  es trivial. Para  $N = 5$ , se requiere una multiplicación por un polinomio de primer grado.

Una modificación de esta aproximación también trabaja para longitudes que sean primos impares elevados a alguna potencia. Esto es algo más complicado pero ha sido desarrollado para  $N = 9$  y  $N = 25$ . Para longitudes mayores el algoritmo de Cooley & Tukey se muestra más eficiente.

Una explicación más extensa de este método puede encontrarse en Lim and Oppenheim (1988).

### 3.5 ALGORITMO DE DOBLE BASE

El algoritmo de doble base o doble raíz (split radix) es el óptimo para longitudes de hasta 16 puntos y probablemente de la mejor cuenta posible de multiplicaciones y adiciones para cualquier longitud potencia de dos. Partiendo de la definición básica de la TDF:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \tag{I.94}$$

se obtiene para los términos pares:

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n+N/2]) W^{2kn} \tag{I.95}$$

así como (I.96):

$$X[4k+1] = \sum_{n=0}^{N/4-1} [(x[n] - x[n+N/2]) - j(x[n+N/4] - x[n+3N/4])] W^{4kn} W^n \tag{I.96.a}$$

y

$$X[4k+3] = \sum_{n=0}^{N/4-1} [(x[n] - x[n+N/2]) - j(x[n+N/4] - x[n+3N/4])] W^{4kn} W^{3n} \tag{I.96.b}$$

para los términos impares.

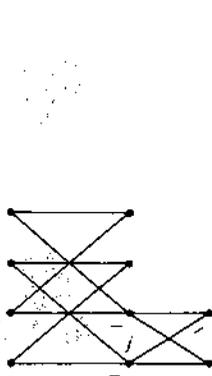


Fig. 13 Estructura de la mariposa de doble base.

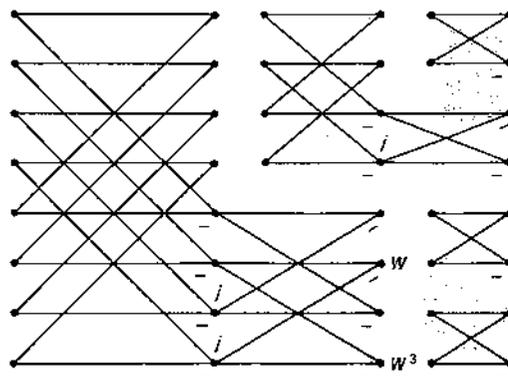


Fig. 14 Diagrama de flujo para el algoritmo de doble base.

Esto da lugar a una mariposa en forma de L como se muestra en la figura 14 que relaciona una TDF de longitud N con una TDF de longitud N/2 y dos de longitud N/4 con factores de rotación<sup>1</sup>. Este proceso se repite hasta que

<sup>1</sup>La multiplicación por un factor extra  $W^n$  o  $W^{3n}$  produce una rotación en el plano complejo.

sólo queden mariposas de dos puntos, al igual que en los algoritmos vistos anteriormente de decimación en tiempo y frecuencia. El diagrama de flujos resultante parece un algoritmo de FFT de base 2 excepto por la localización de los factores de rotación. De hecho, es la posición de estos factores la que hace que se utilice menos aritmética. La forma en L avanza el cálculo de la mitad superior en una etapa, mientras que la mitad inferior, con una mariposa de base 4, calcula dos etapas a un tiempo. Al contrario que los algoritmos de base fija, mixta o variable, e incluso que el algoritmo de Winograd, en este caso no se progresa etapa por etapa. Debido a esto, el indexado es algo más complicado que para el programa convencional de Cooley & Tukey.

### 3.6 COMPARACIÓN DE LOS ALGORITMOS

A continuación se presentan una serie de tablas en las que se encuentran recogidas la cantidad de multiplicaciones y adiciones que requiere cada uno de los algoritmos según el número de puntos que se pretenda analizar.

Tabla I.5 *Número de multiplicaciones reales.*

N	Base 2	Base 4	Base 8	Base 16	Doble Base
2	4				0
4	16	12			8
8	48		32		24
16	128	96		80	72
32	320				184
64	768	576	512		456
128	1792				1080
256	4096	3072		2560	2504
512	9216		6144		5668
1024	20480	15360			12744

Tabla I.6 *Número de adiciones reales.*

N	Base 2	Base 4	Base 8	Base 16	Doble Base
2	6				4
4	24	22			20
8	72		66		60
16	192	176		178	164
32	480				412
64	1152	1056	1056		996
128	2688				2332
256	6144	5632		5696	5348
512	13824		12672		12060
1024	30720	28160			26852

Tabla I.7 Número de multiplicaciones y adiciones reales

N	AFP Mult	W Mult	AFP Sumas	W Sumas
10	20	24	88	88
15	50	36	162	162
30	100	72	384	384
63	284	198	1236	1394
126	568	396	2724	3040
252	1136	792	5952	6584
504	2524	1584	13164	14428

AFP = Algoritmo para factores primos

W = Algoritmo de Winograd

En este último caso se han cogido únicamente aquellos números que se encontraban lo más cerca posible de la potencia de 2, para que puedan ser comparados con las tablas anteriores.

### 3.7 ALGORITMO PARA LA TRANSFORMADA CHIRP-Z

Hemos visto que es posible calcular la TDF de forma muy eficiente. Esto equivale al cálculo eficiente de muestras de la transformada-z de una serie de longitud finita tomada en puntos igualmente espaciados alrededor del círculo unitario. Para lograr esta eficiencia evaluando la transformada-z, necesitamos que  $N$  se un número compuesto. Además, podemos estar interesados en muestrear la transformada  $z$  en otro contorno, o no muestrear el círculo unidad por completo. Estos esquemas para incrementar la flexibilidad del cálculo de la TDF son de considerable interés.

Supongamos que estamos interesados en obtener muestras de la transformada  $z$  en un círculo concéntrico al círculo unidad, con las muestras igualmente espaciadas en ángulo. Entonces, con una pequeña modificación, podemos usar el algoritmo de la FFT. En particular, si tenemos una serie de duración finita  $x[n]$ , entonces la transformada discreta de Fourier de la serie  $x[n]\alpha^{-n}$  dará  $N$  muestras igualmente espaciadas en ángulo alrededor del círculo de radio  $\alpha$  en el plano- $z$ . Si estamos interesados en obtener muestras igualmente espaciadas sobre una pequeña porción del círculo unitario, la aproximación más eficiente suele ser usar un algoritmo de FFT para calcular muestras de frecuencia con el espaciado deseado, aunque obteniendo muestras fuera del rango deseado. Por ejemplo, si estamos considerando una serie de 128 puntos y estamos interesados en obtener 128 muestras de la transformada-z del círculo unitario entre  $\omega=-\pi/8$  y  $\omega=+\pi/8$ , el procedimiento más eficiente es calcular una TDF de 1024 puntos aumentando la serie original con ceros y reteniendo sólo los 128 puntos deseados.

Un procedimiento alternativo, que en muchas ocasiones es el más eficiente, es usar el algoritmo de la transformada Chirp-z (TCZ). Este algoritmo está orientado al cálculo de muestras igualmente espaciadas en ángulo de la transformada-z sobre alguna parte de un contorno espiral. Sea  $x[n]$  una serie de  $N$  puntos y  $X(z)$  su transformada-z. Usando el algoritmo chirp-z,  $X(z)$  puede ser calculado en los puntos  $z_k$  dados por:

$$z_k = AW^{-k}, \quad k=0,1,\dots,M-1 \quad \text{I.97}$$

donde  $W = W_0 e^{-j\phi_0}$  y  $A = A_0 e^{j\theta_0}$   $W_0 \in \mathbb{R}$  y  $A_0 \in \mathbb{R}$

Consecuentemente el contorno sobre el cual se obtienen las muestras es el indicado por la figura.

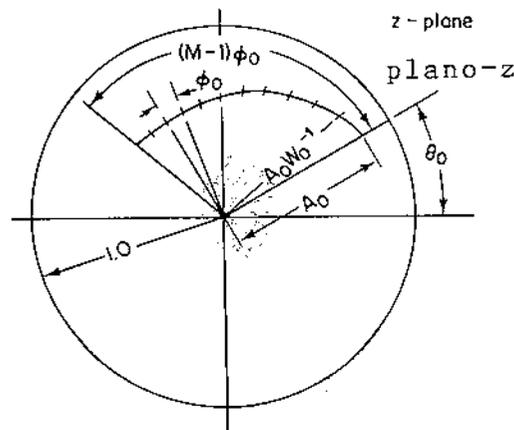


Fig. 15 Contorno en el plano-z de la transformada chirp-z.

El contorno es una espiral en el plano-z. El parámetro  $W_0$  controla el ritmo al cual el contorno da vueltas. Si  $W_0$  es mayor que la unidad, el contorno gira hacia el origen al aumentar  $k$ , y si  $W_0$  es menor que la unidad el contorno se aleja del centro al aumentar  $k$ . Los parámetros  $A_0$  y  $\theta_0$  son la posición en radio y ángulo respectivamente de la primera muestra ( $k=0$ ). Las restantes muestras están ubicadas en el contorno espiral con un espaciado angular de  $\phi_0$ . Consecuentemente, si  $W_0 = 1$ , la espiral es, de hecho, un arco de círculo y si  $A_0=1$ , este arco de círculo es parte del círculo unidad.

Con los valores de  $z_k$  dados por la ecuación (I.97), queremos calcular:

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] A^{-n} W^{nk} \quad k=0,1,\dots,M-1 \quad \text{I.98}$$

donde  $N$  es la longitud de la serie  $x[n]$ . Usando la identidad:

$$nk = \frac{1}{2} [n^2 + k^2 - (k-n)^2]$$

La ecuación (I.98) puede ser escrita como:

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] A^{-n} W^{n^2/2} W^{k^2/2} W^{-(k-n)^2/2} \quad \text{I.99}$$

o :

$$X(z_k) = W^{k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] A^{-n} W^{n^2/2} W^{-(k-n)^2/2} \quad \text{I.100}$$

Denominando  $g[n]$  a :

$$g[n] = x[n] A^{-n} W^{n^2/2} \quad \text{I.101}$$

podemos escribir entonces:

$$X(z_k) = W^{k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} g[n] W^{-(k-n)^2/2} \quad k=0, 1, \dots, M-1 \quad \text{I.102}$$

Con  $X(z_k)$  expresada en forma de la ecuación (I.102), podemos reconocer la suma como la correspondiente a la convolución de  $g[n]$  con la serie  $W^{-n^2/2}$ . Por tanto, el cálculo de la ecuación (I.102), es como se muestra en la siguiente figura, donde:

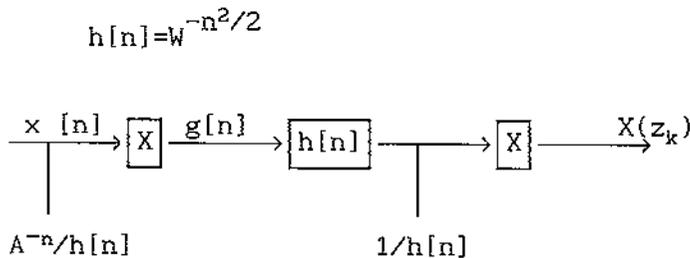


Fig. 16 Interpretación de la ecuación (I.102) en términos de un sistema lineal.

Cuando  $A$  y  $W_0$  son la unidad, la serie  $h[n]$  puede ser vista como una serie exponencial compleja cuya frecuencia se incrementa linealmente. En los

sistemas de radar, dichas señales son denominadas señales chirp. De aquí el nombre de Transformada chirp-z. Un sistema similar al de la figura 16 se usa comúnmente para análisis espectral en problemas de radar.

Puesto que la serie  $g[n]$  es de duración finita, la convolución de la ecuación (I.102) puede ser llevada a cabo por medio de la Transformada discreta de Fourier, calculada usando un algoritmo de FFT.

Mientras que la serie  $g[n]$  es de duración finita, la serie  $W^{-n^2/2}$  es de duración infinita. Por tanto, si se va a implementar la convolución usando la transformada discreta de Fourier, es necesario truncar dicha serie. Además hay que notar que, mientras que el resultado de la convolución es de longitud indefinida, nosotros sólo estamos interesados en el resultado entre  $k=0$  y  $K=M-1$ . Consecuentemente, al truncar la serie  $W^{-n^2/2}$ , debemos procurar elegir la sección de forma que el resultado del cálculo en una sección de los  $M$  puntos deseados. La convolución se implementará utilizando la TDF de  $(M+N-1)$  puntos de  $g[n]$  y la TDF de la parte de la serie  $W^{-n^2/2}$ . Puesto que el número de multiplicaciones complejas requeridas para el cálculo de cada TDF es del orden de:

$$(N+M-1) \log_2(N+M-1) \quad \text{I.103}$$

y el del cálculo directo es de  $MN$ , está claro que para pequeños valores de  $M$  y  $N$ , el método directo es el más eficiente. Sin embargo, para valores de  $M$  y  $N$  suficientemente grandes (del orden de 50), el algoritmo TCZ es más eficiente.

Además de esta eficiencia, el TCZ también ofrece una flexibilidad añadida en el cálculo de las muestras de la transformada-z de una serie de longitud finita. No es preciso que  $M=N$  como en el caso de los algoritmos FFT y ni  $N$  ni  $M$  tienen por que ser números compuestos. De hecho, pueden ser primos si se desea. En un algoritmo FFT, el parámetro  $\phi_0$  debe ser  $2\pi/N$ , mientras que en el TCZ es arbitrario. Además, las muestras de la transformada-z están tomadas sobre un contorno más general que incluye al círculo unidad como caso especial.

### 3.8 TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CORTO

La transformada de Fourier de una señal  $x[n]$  viene dada por:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad \text{I.104}$$

donde  $\omega$  es una variable continua que denota la frecuencia. La transformada de Fourier de tiempo corto de  $x[n]$  es un conjunto de transformadas discretas de Fourier correspondientes a diferentes secciones temporales de  $x[n]$ . La sección temporal para un tiempo  $n_0$  se obtiene multiplicando  $x[n]$  por una serie desplazada  $w[n_0-n]$ . La expresión de la transformada de Fourier de tiempo corto para  $n_0$  está dada por:

$$X(n_0, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n_0-n]e^{-j\omega n} \quad \text{I.105}$$

donde  $w[n]$  se denomina la ventana de análisis. La secuencia  $x[n]w[n_0-n]$  se denomina normalmente la sección de tiempo corto de  $x[n]$  en el instante  $n_0$ . Para obtener  $X(n_0+1, \omega)$ , desplazamos la ventana de análisis invertida en el tiempo un punto de su posición previa, multiplicamos por  $x[n]$  y tomamos una nueva transformada de Fourier. De esta forma generamos un conjunto de transformadas de tiempo discreto de Fourier que todas juntas constituyen la transformada de tiempo corto de Fourier.

$$X(m, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[m-n]e^{-j\omega n} \quad \text{I.106}$$

Queda claro que un cambio en la ventana de análisis cambiará las secciones de tiempo corto y por tanto, la transformada de tiempo corto.

En el caso de procesamiento digital, la transformada discreta de tiempo corto está relacionada con la transformada de tiempo corto de tiempo discreto por:

$$X(n, k) = X(n, \omega) \Big|_{\omega=2\pi k/N}^{R_N(k)} \quad \text{I.107}$$

En muchas aplicaciones, la variación temporal está decimada por un factor  $L$  para dar la función  $X(nL, k)$ .

## 4 OTRAS TRANSFORMADAS

### 4.1 TRANSFORMADA BIDIMENSIONAL DE FOURIER

Hasta ahora hemos trabajado con cantidades físicas como el tiempo o la frecuencia, que son esencialmente unidimensionales. Sin embargo, en los casos en los que intervienen dos dimensiones (membranas, antenas, lentes, pantallas de televisión, etc...) es necesario aplicar fórmulas más generales.

Una función bidimensional  $f(x,y)$  tiene una transformada de Fourier bidimensional  $F(u,v)$  dada por (ec. I.108):

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad \text{I.108.a}$$

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad \text{I.108.b}$$

Estas ecuaciones (I.108) describen un análisis de una función bidimensional  $f(x,y)$  en componentes de la forma  $e^{j2\pi(ux+vy)}$ .

La integral de convolución para funciones bidimensionales  $f(x,y)$  está definida por:

$$f**g = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x',y')g(x-x',y-y')dx' dy' \quad \text{I.109}$$

Por tanto, una de las funciones se rota media vuelta alrededor del origen cambiando el signo de  $x$  e  $y$ , desplazándola, multiplicándola por la otra función e integrando el producto para obtener el valor de la convolución para ese desplazamiento particular.

### 4.2 TRANSFORMADA DE HANKEL

Los sistemas bidimensionales a menudo muestran simetría circular, por ejemplo sistemas ópticos. Debe esperarse en dichos casos una simplificación al considerar una sola variable radial  $r$ , en lugar de dos variables independientes  $x$  e  $y$ . La expresión apropiada de dichos problemas se realiza en términos de la transformada de Hankel cuyo núcleo son las funciones de Bessel. Si existe simetría circular:

$$f(x,y) = f(r) \quad \text{donde: } r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{I.110}$$

entonces se puede demostrar que  $F(u,v)$  también tiene simetría circular, es decir:

$$F(u,v) = F(q), \quad q^2 = u^2 + v^2 \quad \text{I.111}$$

Las relaciones entre las funciones unidimensionales  $f(r)$  y  $F(q)$  son (ec. I.112):

$$F(q) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) J_0(2\pi qr) r \, dr \quad \text{I.112.a}$$

$$f(r) = 2\pi \int_0^{\infty} F(q) J_0(2\pi qr) q \, dq \quad \text{I.112.b}$$

Nos referiremos a  $F(q)$  como la **Transformada de Hankel** (de orden cero) de  $f(r)$  y observaremos que la transformación es estrictamente recíproca. El núcleo  $J_0$ , junto con seno, coseno y otros suele conocerse como núcleo de Fourier en el sentido amplio de un núcleo asociado con una transformada recíproca. El factor  $2\pi$  dentro del paréntesis proviene de medir  $q$  en ciclos completos por unidad de radio y el  $2\pi$  antes de la integral proviene del elemento de área  $2\pi r dr$ .

#### 4.3 TRANSFORMADA DE HANKEL EN N DIMENSIONES

Si existe simetría en  $n$  dimensiones, la transformada unidimensional resultante es:

$$F(q) = \frac{2\pi}{q^m} \int_0^{\infty} f(r) J_m(2\pi qr) r^{n/2} \, dr \quad \text{I.113}$$

$$\text{donde } m = \frac{1}{2} (n-1)$$

#### 4.4 TRANSFORMADA DE MELLIN

La transformada definida por:

$$F_M(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx \quad \text{EI.114}$$

es equivalente a la transformada de Laplace haciendo el siguiente cambio de variable:

$$x = e^{-t} \quad dx = -e^{-t} dt \quad x^{s-1} = e^{-t(s-1)}$$

con el que obtenemos:

$$F_M(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-t}) e^{-st} dt \quad \text{EI.115}$$

Por tanto, *la transformada de Laplace de funciones de t y la Transformada de Mellin de funciones de x son idénticas*. Cuando dibujamos una función de t como una función de e<sup>-t</sup>, estamos comprimiendo todo el tiempo positivo en el rango de 1 a 0. La fórmula de inversión para la transformada de Mellin es:

$$f(x) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_M(s) x^{-s} ds \quad \text{EI.116}$$

Podemos considerar a F<sub>M</sub>(s) como el momento (s-1) de f(x). En general:

$$\text{Área de } f(x) = F_M(1)$$

$$\text{Primer momento de } f(x) = F_M(2)$$

$$\text{Segundo momento de } f(x) = F_M(3)$$

#### U4.5 TRANSFORMADA Z

Sea una función f(t) de la cual sólo se conocen sus valores en los instantes de muestreo t=0,1,2,...,n: {f(0),f(1),f(2),..,f(n)}. Entonces el polinomio:

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots + f(n)z^{-n} \quad \text{EI.117}$$

se conoce con el nombre de transformada z de f(t).

Si en la integral de Laplace:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad \text{I.118}$$

Si efectuamos el cambio de variable  $z = e^{-t}$ , obtendremos la transformada de Mellin, mientras que si el cambio es  $z = e^{-p}$  obtendremos la transformada  $z$ . Como se puede ver estas tres transformadas están muy relacionadas.

#### 4.6 TRANSFORMADA DE ABEL

Cuando se va más allá de las aplicaciones unidimensionales de la transformada de Fourier, se encuentran problemas que invitan a usar la transformada de Abel. Estos fenómenos aparecen cuando se proyectan en una dimensión, distribuciones con simetría circular en dos dimensiones. Un ejemplo típico es la respuesta eléctrica de una cámara de televisión a medida que barre sobre una línea estrecha.

Las derivadas de orden fraccionario están muy conectadas con la Transformada de Abel, que también aparece en campos como la conducción de calor en sólidos o la transmisión de señales eléctricas a través de cables. La transformada de Abel  $FA(x)$  de la función  $f(r)$  se define comúnmente como:

$$FA(x) = 2 \int_x^{\infty} \frac{f(r)r dr}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \quad \text{I.119}$$

o bien:

$$FA(x) = \int_0^{\infty} k(r,x) f(r) dr \quad \text{I.120}$$

donde:

$$k(r,x) = \begin{cases} 2r(r^2 - x^2)^{-1/2} & r > x \\ 0 & r < x \end{cases} \quad \text{I.121}$$

El núcleo  $k(r,x)$ , considerado como una función de  $r$  en la cual  $x$  es un parámetro, se desplaza a la derecha a medida que  $x$  se incrementa y también cambia su forma.

#### U4.7 TRANSFORMADA DE HILBERT

La Transformada de Hilbert de  $f(x)$  se define como:

$$F_H(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x') dx'}{x' - x} \quad \text{EI. 122}$$

La divergencia en  $x = x'$  se permite tomando el valor principal de Cauchy de la integral.  $F_H$  se puede obtener a partir de  $f(x)$  convolucionando con  $(-\pi x)^{-1}$ , por lo que el espectro de  $F_H$  estará relacionado con el de  $f(x)$ .

La transformada de Fourier de  $(-\pi x)^{-1}$  es  $(j \operatorname{signo}(s))$ , que es igual a  $+j$  para  $s$  positiva y  $-j$  para  $s$  negativa. Por tanto, la transformada de Hilbert es equivalente a un curioso tipo de filtrado, en el cual las amplitudes de las componentes espectrales permanecen sin cambiar, pero sus fases están alteradas por  $\pm\pi/2$ .

Puesto que la aplicación de la transformada de Hilbert sucesivamente invierte las fases de todas las componentes, se sigue que el resultado será la función original cambiada de signo. Por tanto:

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_H(x') dx'}{x' - x} \quad \text{EI. 123}$$

$$f(x) = - \left( \frac{-1}{\pi x} \right) * F_H \quad \text{EI. 124}$$

Si el núcleo se elige como  $[i\pi(x'-x)]^{-1}$  en lugar de  $[\pi(x' - x)]^{-1}$ , la transformación sería estrictamente recíproca, pero entonces se habría perdido el efecto de que la transformada de Hilbert de una función real fuera también una función real.

##### B4.7.1 La señal analítica

Consideremos una función real  $f(t)$ , a la que le asociamos una función

compleja:

$$f(t) - jF_H(t) \quad \text{I.125}$$

cuya parte real es  $f(t)$ . Por ejemplo la transformada de Hilbert de  $\cos(t)$  es  $-\sin(t)$  y la función analítica correspondiente es  $e^{jt}$ .

De la misma forma que los fasores simplifican los cálculos en la teoría de corriente alterna, la función analítica es útil en algunas situaciones en las cuales el alejamiento del comportamiento puramente monocromático impide el uso de fasores. Las portadoras moduladas son un ejemplo.

La señal analítica no puede tener componentes de frecuencia negativas. De hecho se obtiene suprimiendo las frecuencias negativas de  $f(t)$ . Por ejemplo, a partir de:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad \text{I.126}$$

podemos obtener la señal analítica suprimiendo el término de frecuencias negativas  $e^{-j\omega t}$

#### 4.7.2 frecuencia instantánea y envolvente

Existen problemas a la hora de definir la envolvente de una señal, puesto que sólo toca a la señal de vez en cuando y entre medias puede hacer cualquier cosa. De igual manera, la frecuencia de una señal cuasi-monocromática no queda definida de forma obvia para todo instante de tiempo. Una generalización que permite dar una respuesta definida parte de la definición de señal analítica. Si existe una frecuencia promedio que se le pueda asignar, la señal analítica vendrá dada por:

$$V(t) e^{j\omega t} \quad \text{I.127}$$

En ese caso diremos que  $|V(t)|$  es la amplitud instantánea o módulo y que el ritmo temporal de cambio de la fase de la señal analítica es la frecuencia instantánea.

#### 4.7.3 Causalidad

Es bien conocido que el efecto nunca precede a la causa. Por tanto, la respuesta  $I(t)$  de un sistema físico a un impulso aplicado en  $t=0$  debe ser cero para valores negativos de  $t$ . El espectro de  $I(t)$ , o función de transferencia  $T(f)$ , debe tener una propiedad especial correspondiente al carácter causal de  $I(t)$ , y es que las partes real e imaginaria de  $T(f)$  sean transformadas de Hilbert una de la otra. Por tanto todas las funciones de transferencia causales tienen la forma:

$$T(f) = G(f) + j B(f) \quad \text{I.128}$$

donde  $B(f)$  es la transformada Hilbert de  $G(f)$ .

## 4.8 PROCESAMIENTO HOMOMÓRFICO DE SEÑALES

### 4.8.1 INTRODUCCIÓN

En 1963 Bogert, Healy y Tukey publicaron un artículo con un título algo inusual: "The Quefrequency analysis of time series for echoes: Cepstrum, Pseudo-autocovariance, Cross-Cepstrum, and Shape Cracking". En este trabajo, observaron que el logaritmo del espectro de potencia de una señal que contenía eco, tenía una componente periódica aditiva debida al eco. Por tanto, el espectro de potencia logarítmico de la transformada de Fourier debería contener un pico en el retardo correspondiente al eco. Denominaron a esta función CEPSTRUM parafraseando la palabra SPECTRUM porque: "*En general, nos encontrábamos operando en el dominio de la frecuencia de maneras acostumbradas en el dominio del tiempo y viceversa*". Bogert y colaboradores, definieron un vocabulario completo para complementar la nueva técnica de procesamiento de señales; sin embargo, sólo el término "Cepstrum" ha sido usado ampliamente. Puesto que el espectro de potencias es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación y siempre es positivo, sólo se requiere el logaritmo real. En general, se debe usar el logaritmo complejo y la transformada de Fourier compleja. Para distinguir ambas situaciones denominaremos a este último "Cepstrum complejo".

### 4.8.2 TRANSFORMADA HOMOMÓRFICA

El operador transformada homomórfica  $M$ -dimensional tiene la interesante

propiedad de que convierte la convolución en adición, lo que hace que sea útil en cierta variedad de problemas prácticos de procesamiento de señales. Quizás la aplicación más común sea su utilización para problemas de deconvolución en los que la respuesta al impulso distorsionante no se conoce exactamente pero es más fácil de discernir en el dominio "cepstral" que en el temporal o el frecuencial. Un ejemplo es la situación en la cual la distorsión y la señal deseada caen en diferentes regiones del dominio "cepstral".

La transformada Homomórfica de una serie se define como la *Transformada inversa de Fourier del logaritmo de la transformada de Fourier*:

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}^{-1} \ln \mathcal{F} \quad \text{I.129}$$

El resultado, cuando existe, es una segunda serie denominada *cepstrum*. EL operador transformada inversa homomórfica viene dado por:

$$\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \exp \mathcal{F} \quad \text{I.130}$$

En cualquier experimento físico los datos serán distorsionados por ruidos o no-linealidades en el sistema de medida. A menudo es razonable modelar esta distorsión como una perturbación aditiva. El hecho de que la transformada homomórfica y su inversa exhiban un comportamiento altamente no-lineal complica el análisis de estas perturbaciones aditivas. A menudo el *cepstrum* en sí mismo es de interés para el experimentador. Si, como es habitual al aplicar el procesamiento homomórfico, la serie  $a$  es de la forma  $a = b * c$  y se tiene algún conocimiento a priori de  $b$  y  $c$ , el examen del *cepstrum* puede incrementar la comprensión por parte del experimentador de la naturaleza de  $b$  y  $c$ . A menudo es más práctico utilizar el *cepstrum* de potencia que el *cepstrum* complejo porque se evitan problemas con las fases. El *cepstrum* de potencia se define como la *Transformada homomórfica de su secuencia de autocorrelación*.

Las técnicas homomórficas también se pueden usar para recuperar una señal desconocida por medio de la deconvolución. La aproximación usual es calcular el *cepstrum* complejo de la secuencia desconocida, llevar a cabo una operación lineal sobre el *cepstrum* y calcular a continuación la transformada inversa homomórfica.

## 5 MODELOS PARAMÉTRICOS DE PROCESOS ALEATORIOS

La Densidad de Potencia Espectral (DPE) definida anteriormente es la transformada de Fourier de tiempo discreto de la secuencia de autocorrelación (SAC). Esta relación transformada puede ser considerada como una descripción no-paramétrica de la estadística de segundo orden de un proceso aleatorio. Suponiendo un modelo de serie temporal, se puede también llevar a cabo una descripción paramétrica de la estadística de segundo orden. La DPE de estos modelos quedará totalmente descrita por los parámetros del mismo y por la varianza del proceso de ruido blanco. Estos parámetros también estarán relacionados con la secuencia de autocorrelación. La motivación para el modelado paramétrico de procesos aleatorios es la capacidad de permitir mejores estimadores de la DPE que los de la estimación espectral clásica. Tanto el método del periodograma como el del correlograma dan estimaciones de la DPE a partir de un conjunto truncado de datos. Los datos no disponibles o no estimados fuera de la ventana son implícitamente cero, normalmente una suposición poco realista que no es necesario hacer con los métodos paramétricos. Por tanto, la necesidad de funciones ventana es eliminada, junto con su impacto distorsionante.

### 5.1 MODELOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONARIOS Y NO ESTACIONARIOS

Una clase importante de modelos estocásticos para describir series temporales son los denominados modelos estacionarios, que supone que el proceso se encuentra en equilibrio alrededor de un nivel medio constante. Sin embargo, muchas series temporales son mejor representadas como no estacionarias y en particular sin tener una media natural (Box and Jenkins (1976)).

#### 5.1.1 NOTACIÓN

En un modelo estocástico, el valor actual del proceso se expresa como una combinación lineal finita de valores previos del proceso (en tiempos igualmente espaciados  $nT, (n-1)T, (n-2)T, \dots$ ) y un impulso  $u[n]$ .

Para expresar el valor del proceso en un instante dado indicaremos únicamente su posición dentro del conjunto de datos,  $n, n-1, n-2$ , etc...

- valores del proceso en dichos instantes  $x[n], x[n-1], x[n-2]$
- desviaciones de la media en dichos instantes  $\tilde{x}[n], \tilde{x}[n-1], \tilde{x}[n-2]$

donde  $\tilde{x}[n] = x[n] - \mu$

Algunos operadores que se suelen emplear vienen dados por:

Operador retardo :  $Rx[n] = x[n-1]$ . Por tanto  $R^m x[n] = x[n-m]$

Operador adelanto:  $(AD)x[n] = x[n+1]$ . Por tanto  $(AD)^m x[n] = x[n+m]$

Operador diferencia hacia atrás :  $\nabla x[n] = x[n] - x[n-1] = (1-R)x[n]$

El operador  $\nabla$  tiene como inversa el operador suma  $S$  :

$$\text{operador suma : } \nabla^{-1} x[n] = Sx[n] = \sum_{j=0}^{\infty} x[n-j] = (1+R+R^2+\dots)x[n] = (1-R)^{-1} x[n]$$

$R)^{-1} x[n]$

El modelo estocástico que empleamos está basado en la idea Yule (1927) de que *una serie temporal en la cual los valores sucesivos son altamente dependientes puede considerarse que se genera a partir de una serie de impulsos independientes  $u[n]$* . Estos impulsos son realizaciones de un proceso aleatorio con una distribución fija. Dicha serie de variables aleatorias se denominan ruido blanco. El proceso de ruido blanco  $u[n]$  se transforma en el proceso  $x[n]$  al pasar por un filtro lineal. El filtrado lineal simplemente toma una suma ponderada de las observaciones previas, por lo que:

$$x[n] = \mu + u[n] + \psi_1 u[n-1] + \psi_2 u[n-2] + \dots = \mu + \psi(R)u[n] \quad \text{I.131}$$

En general,  $\mu$  es un parámetro que determina el nivel medio del proceso y

$$\psi(R) = 1 + \psi_1 R + \psi_2 R^2 + \dots \quad \text{I.132}$$

es el operador lineal que transforma  $u[n]$  en  $x[n]$  y se denomina *función de transferencia del filtro*.

La serie  $\psi_1, \psi_2, \dots$  formada por los coeficientes puede ser, teóricamente finita o infinita. Si la serie es finita, o infinita y convergente, se dice que el filtro es estable y el proceso  $x[n]$  es estacionario. De otra forma,  $x[n]$  es no-estacionario y  $\mu$  no tiene un significado específico excepto como punto de referencia para el nivel del proceso.

Teniendo en cuenta las propiedades de la Transformada- $z$ , podemos observar que el operador retardo equivale a la multiplicación por el factor  $z^{-1}$ . De esta manera, la función transferencia del filtro puede expresarse también en la forma:

$$\psi(z) = 1 + \psi_1 z^{-1} + \psi_2 z^{-2} + \dots \quad \text{I.133}$$

En adelante se utilizará indistintamente el operador Retardo R o la Transformada-z.

### 5.1.2 MODELOS AUTOREGRESIVOS (AR)

En este modelo, el valor actual del proceso se expresa como una combinación lineal finita de valores previos del proceso y un impulso  $u[n]$ . Un proceso autoregresivo de orden  $p$  viene dado por la ecuación:

$$\tilde{x}[n] = -a[1]\tilde{x}[n-1] - a[2]\tilde{x}[n-2] + \dots - a[p]\tilde{x}[n-p] + u[n] \quad \text{I.134}$$

O en forma abreviada:

$$\tilde{x}(n) = - \sum_{k=1}^p a[k] \tilde{x}[n-k] + u[n]$$

Donde  $x(n)$  representa el valor de la señal en el instante  $nT$ , siendo  $T$  el periodo de muestreo,  $e(n)$  el valor de un ruido gaussiano con varianza  $\sigma^2$  en el mismo instante y  $c(k)$  los parámetros autoregresivos. Si definimos un operador autoregresivo de orden  $p$  como:

$$A(R) = 1 + a[1]R + a[2]R^2 + \dots + a[p]R^p \quad \text{I.135}$$

Entonces el proceso autoregresivo puede ser escrito abreviadamente como:

$$A(R)\tilde{x}[n] = u[n] \quad \text{I.136}$$

O bien en función de la Transformada-z, como:

$$A(Z)\tilde{x}[n] = u[n] \quad \text{I.137}$$

Este modelo contiene  $p+2$  parámetros desconocidos  $\mu$ ,  $a[1]$ ,  $a[2], \dots, a[p]$ ,  $\sigma_a^2$ , que en la práctica pueden ser estimados a partir de los datos. El parámetro adicional  $\sigma_a^2$  es la varianza del proceso de ruido blanco  $u[n]$ . Despejando  $\tilde{x}[n]$  de la ecuación (I.136) obtenemos:

$$\tilde{x}[n]=\psi(R)u[n] \quad \text{donde } \psi(R) = A^{-1}(R) \quad \text{I.138}$$

lo que nos permite considerar los procesos autoregresivos como un caso especial de los modelos de filtros lineales.

Los procesos autoregresivos pueden ser estacionarios o no-estacionarios. Para que el proceso sea estacionario, los coeficientes de  $A(R)$  deben ser elegidos de forma que constituyan una serie convergente.

### 5.1.3 MODELOS DE MEDIA MÓVIL (MA)

Otro tipo de modelo de gran importancia en la representación de series temporales observadas, es el denominado **proceso finito de media móvil**. En este, la  $\tilde{x}[n]$  se hace depender linealmente de un número finito  $q$  de impulsos  $b$  previos, por tanto:

$$\tilde{x}[n]=u[n]+b[1]u[n-1]+b[2]u[n-2] + \dots + b[q]u[n-q] \quad \text{I.139}$$

se denomina un proceso de media móvil de orden  $q$ . Si definimos un operador de media móvil de orden  $q$  como:

$$B(R)=1+b[1]R+b[2]R^2+\dots+b[q]R^q \quad \text{I.140}$$

entonces el modelo de media móvil puede ser escrito abreviadamente, tanto en función del operador retardo como de la Transformada- $z$ , según la siguiente expresión (ec. I.141):

$$\tilde{x}[n]=B(R)u[n] \quad \text{I.141.a}$$

$$\tilde{x}[n]=B(z)u[n] \quad \text{I.141.b}$$

Este modelo contiene  $q+2$  parámetros desconocidos, que pueden ser estimados a partir de los datos

### 5.1.4 MODELOS MIXTOS AUTOREGRESIVOS-MEDIA MÓVIL (ARMA)

Para conseguir una mayor flexibilidad en el ajuste de series temporales, es conveniente a veces incluir tanto el término autoregresivo como el de media móvil en el modelo. Esto nos lleva al siguiente modelo mixto

autoregresivo-media móvil.

$$\tilde{x}[n] = -a[1]\tilde{x}[n-1] - a[2]\tilde{x}[n-2] - \dots - a[p]\tilde{x}[n-p] + u[n] + b[1]u[n-1] + b[2]u[n-2] + \dots + b[q]u[n-q] \quad \text{I.142}$$

o bien:

$$A(R)\tilde{x}[n] = B(R)u[n] \quad \text{I.143}$$

para lo cual se necesita estimar a partir de los datos  $p+q+2$  incógnitas. Si lo expresamos en función de la Transformada-z obtenemos:

$$A(z)\tilde{x}[n] = B(z)u[n] \quad \text{I.144}$$

De donde se puede deducir que la función transferencia del filtro es:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad \text{I.145}$$

Este modelo se denomina también de polos y ceros, pues su función de transferencia tiene raíces tanto en el numerador como en el denominador. Si  $B(z)=1$  sería un modelo todo-polos (y se correspondería a un autoregresivo) y si  $A(z)=1$  sería un modelo todo-ceros (que se correspondería con un media-móvil).

### 5.1.5 MODELOS NO ESTACIONARIOS

Muchas series provenientes de datos reales muestran comportamientos no estacionarios y en particular no varían alrededor de una media fija. Aunque el nivel en el que dichas fluctuaciones ocurren puede ser diferente en diferentes tiempos, el comportamiento general de la serie puede ser similar. Si este fuera el caso, dicho comportamiento podría ser representado por un operador autoregresivo generalizado  $\varphi(R)$ , en el cual uno o más de los ceros del polinomio  $\varphi(R)$  es la unidad. Por tanto, el operador  $\varphi(R)$  puede ser escrito como:

$$\varphi(R) = A(R)(1-R)^d \quad \text{I.146}$$

donde  $A(R)$  es un operador estacionario. Por tanto, un modelo general, que puede representar un comportamiento homogéneo no estacionario, es de la

forma:

$$\varphi(R)x[n]=A(R)(1-R)^d x[n]=B(R)u[n] \quad \text{I.147}$$

es decir:

$$A(R)w[n]=B(R)u[n] \quad \text{I.148}$$

donde:

$$w[n]=\nabla^d x[n] \quad \text{I.149}$$

El comportamiento no estacionario homogéneo puede por tanto ser representado por un modelo que supone que la derivada d-ésima del proceso es estacionaria.

El proceso definido por las ecuaciones (I.148) y (I.149) es un modelo muy potente para describir series temporales estacionarias y no estacionarias y se denomina proceso autoregresivo integrado de media móvil (ARIMA) de orden (p,d,q).

Hay que notar que si  $d=0$ , el modelo incluye el modelo mixto estacionario (I.142) como caso especial, y por tanto el modelo autoregresivo puro (I.134) y el modelo de media móvil puro (I.139).

La razón para la inclusión de la palabra "integrado" (aunque quizás sería más apropiado decir "sumado") es la siguiente. La relación inversa de (I.149) es:

$$x[n] = S^d w[n] \quad \text{I.150}$$

donde S es el operador suma definido por:

$$Sw[n] = \sum_{j=0}^{\infty} w[n-j] = w[n] + w[n-1] + w[n-2] + \dots \quad \text{I.151}$$

Por tanto, el modelo puede ser generado a partir de un ruido blanco  $u[n]$  por medio de tres operaciones de filtrado como se indica en el diagrama de bloques de la figura.

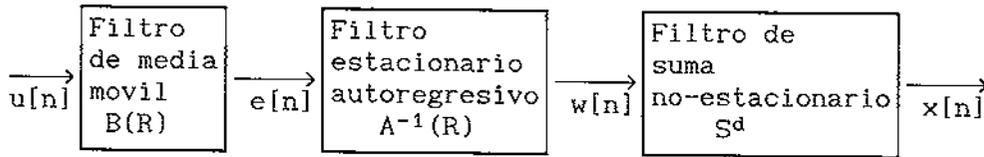


Fig. 17 Diagrama de bloques para un modelo Autoregresivo-media móvil integrado.

El primer filtro tiene entrada  $u[n]$ , función de transferencia  $B(R)$  y salida  $e[n]$  donde:

$$e[n] = u[n] + b[1]u[n-1] + \dots + b[q]u[n-q] = B(R)u[n] \quad \text{I.152}$$

El segundo filtro tiene entrada  $e[n]$ , función de transferencia  $A^{-1}(R)$  y salida  $w[n]$  donde:

$$w[n] = e[n] + a^{-1}[1]e[n-1] + \dots + a^{-1}[p]e[n-p] = A^{-1}(R)e[n] \quad \text{I.153}$$

El tercer filtro tiene entrada  $w[n]$ , función de transferencia  $S^d$  y salida  $x[n]$  donde:

$$x[n] = S^d w[n]$$

### 5.1.6 CONDICIÓN DE ESTACIONARIEDAD

#### a PARA PROCESOS AUTOREGRESIVOS

Para un proceso autoregresivo general  $\tilde{x}[n] = A^{-1}(R)u[n]$ , obtenemos:

$$A(R) = (1-G_1R)(1-G_2R)\dots(1-G_pR) \quad \text{I.154}$$

y desarrollando en fracciones simples obtenemos:

$$\tilde{x}[n] = A^{-1}(R)u[n] = \sum_{i=1}^p \frac{K_i}{(1-G_iR)} u[n] \quad \text{I.155}$$

Por tanto,  $A^{-1}(R)$  es una serie convergente para  $|R| \leq 1$  y debemos tener  $|G_i| < 1$ . Esto implica que los ceros de  $A(R)$  deben caer fuera del círculo

unitario.

#### b PARA PROCESOS DE MEDIA MÓVIL

Para un proceso de media móvil general  $\tilde{x}[n]=B(R)u[n]$  , obtenemos:

$$B(R) = (1-H_1R)(1-H_2R)\dots(1-H_pR) \quad I.156$$

y desarrollando en fracciones simples obtenemos:

$$\pi(R) = B^{-1}(R) = \sum_{j=1}^p \frac{M_j}{(1-H_jR)} u[n] \quad I.157$$

que converge si  $|H_j| < 1$ . Puesto que las raíces de  $B(R)=0$  son  $H_j^{-1}$  Esto implica que los ceros de  $B(R)$  deben caer fuera del círculo unitario.

#### c PARA PROCESOS MIXTOS

Se deben verificar las dos condiciones anteriores simultáneamente.

### 5.1.7 MODELOS LINEALES NO ESTACIONARIOS

Hay un número ilimitado de formas en las cuales un proceso puede ser no-estacionario. Una posibilidad es violando la condición de que  $|A| < 1$ . Si se observa la respuesta de un sistema de este tipo, se verá que después de un pequeño periodo de inducción, la serie sigue esencialmente una curva exponencial. Este comportamiento es el mismo, haya o no términos de media móvil en el segundo miembro del modelo.

Aunque este tipo de modelos son válidos para representar comportamientos de tipo explosivo o evolutivo, estos no son del tipo que queremos analizar.

La otra posibilidad es que las raíces estén en el círculo unitario. Consideremos el modelo:

$$\varphi(R)\tilde{x}[n]=B(R)u[n] \quad I.158$$

donde  $\varphi(R)$  es un operador autoregresivo no-estacionario, para el que  $d$  de las raíces de  $\varphi(R)=0$  están en el círculo unitario y el resto permanecen

fuera del mismo. Por tanto el modelo anterior puede ser expresado como:

$$\varphi(R)\tilde{x}[n] = A(R)(1-R)^d\tilde{x}[n]=B(R)u[n] \quad I.159$$

donde  $A(R)$  es un operador autoregresivo estacionario. Puesto que  $\nabla^d\tilde{x}[n] = \nabla^d x[n]$  para  $d \geq 1$ , podemos escribir el modelo como:

$$A(R)\nabla^d x[n] = B(R)u[n] \quad I.160$$

Equivalentemente el proceso puede ser definido por las dos ecuaciones:

$$A(R)w[n] = B(R)u[n] \quad I.161$$

$$w[n] = \nabla^d x[n] \quad I.162$$

Por tanto, vemos que el modelo corresponde a suponer que la diferencia  $d$ -ésima de la serie puede ser representada por un proceso estacionario del tipo ARMA.

Una forma alternativa de ver el proceso para  $d \geq 1$  resulta de invertir (I.162) para dar:

$$x[n] = S^d w[n] \quad I.163$$

donde  $S$  es el operador suma infinita definido por (ec. I.164):

$$Sx[n] = \sum_{h=-\infty}^t x_h = (1 + R + R^2 + \dots) x[n] = (1-R)^{-1}x[n] = \nabla^{-1}x[n]$$

Por tanto

$$S = (1-R)^{-1} = \nabla^{-1} \quad I.165$$

Igualmente el operador  $S^2$  queda definido por:

$$S^2 x[n] = Sx[n] + Sx[n-1] + Sx[n-2] + \dots = \sum_{i=-\infty}^n \sum_{h=-\infty}^i x[h] \quad I.166$$

y el operador  $S^3$  por:

$$S^3x[n] = \sum_{j=-\infty}^n \sum_{i=-\infty}^j \sum_{h=-\infty}^i x[h] \tag{I.167}$$

La ecuación (I.163) implica que el proceso (I.161) puede ser obtenido sumando ( o integrando) el proceso estacionario  $d$  veces. Por tanto el proceso se denominará *autoregresivo integrado de media móvil*.

Consideremos el caso en el que  $d=0$ , esto implica no sólo que el proceso  $x[n]$  es estacionario con media cero, sino que también  $\nabla x[n]$ ,  $\nabla^2 x[n]$ ,  $\nabla^3 x[n]$ ,... sean estacionarios con media cero.

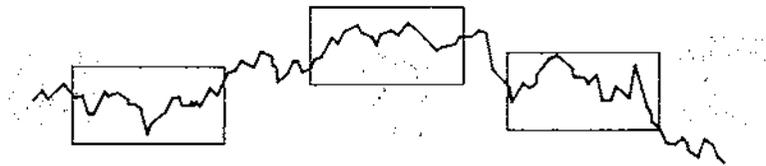


Fig. 18 *Serie que muestra una no-estacionariedad en el nivel que puede ser representada por el modelo  $A(R)\nabla x[n] = B(R)u[n]$*

La figura 18 muestra un tipo de serie no estacionaria. La serie es homogénea excepto en el nivel, en el que, excepto por una traslación vertical, una parte se parece mucho a otra. Podemos representar dicho comportamiento manteniendo el requerimiento de que las diferencias sean estacionarias con media cero, pero dejando libre el nivel. Esto se puede hacer usando el modelo:

$$A(R)\nabla x[n] = B(R)u[n] \tag{I.168}$$

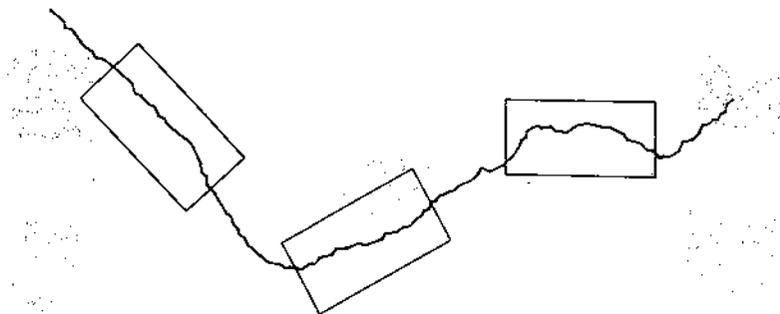


Fig. 19 *Serie que muestra una no-estacionariedad en nivel y pendiente que puede ser representada por el modelo  $A(R)\nabla^2 x[n] = B(R)u[n]$*

La figura 19 muestra un segundo tipo de no-estacionariedad bastante

común. La serie no tiene ni un nivel, ni una pendiente fija, pero de resto su comportamiento es homogéneo. Dicho comportamiento se puede representar por el modelo:

$$A(R)\nabla^2 x[n] = B(R)u[n] \quad \text{I.169}$$

que asegura la estacionariedad y media cero, para todas las diferencias mayores que la segunda, pero permite cambios en nivel y pendiente.

## 5.2 POTENCIA ESPECTRAL

La Transformada-z de la secuencia de salida  $x[n]$  está relacionada con la Transformada-z del proceso aleatorio de entrada  $u[n]$  por:

$$P_{xx}(z) = P_{uu}(z)H(z)H^*(1/z^*) = P_{uu}(z) \frac{B(z)B^*(1/z^*)}{A(z)A^*(1/z^*)} \quad \text{I.170}$$

La densidad de potencia espectral  $P_{ARMA}(f)$  se obtiene sustituyendo  $z = e^{(j2\pi ft)}$  en la ecuación (I.170) y escalando por el intervalo de muestreo  $T$ , con lo que se obtiene:

$$P_{ARMA}(f) = T\rho_w \left| \frac{B(f)}{A(f)} \right|^2 = T\rho_w \frac{e_q^H(f)bb^H e_q(f)}{e_p^H(f)aa^H e_p(f)} \quad \text{I.171}$$

donde los polinomios  $B(f)$  y  $A(f)$  están dados por (ec. I.172):

$$B(f) = 1 + \sum_{k=1}^p b[k]e^{-j2\pi f k T} \quad \text{I.172.a}$$

$$A(f) = 1 + \sum_{k=1}^q a[k]e^{-j2\pi f k T} \quad \text{I.172.b}$$

y los vectores  $e_q(f)$ ,  $e_p(f)$ ,  $b$  y  $a$  están definidos como (ec. I.173):

$$e_p(f) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{(j2\pi fT)} \\ \vdots \\ e^{(j2\pi fpT)} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ b[1] \\ \vdots \\ b[p] \end{bmatrix} \quad \text{I.173.a}$$

$$e_q(f) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{(j2\pi fT)} \\ \vdots \\ e^{(j2\pi fqT)} \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ a[1] \\ \vdots \\ a[p] \end{bmatrix} \quad \text{I.173.b}$$

La especificación de los parámetros AR, de los parámetros MA, y la varianza del ruido blanco  $\rho_w$  caracterizan enteramente la DPE del proceso ARMA  $x[n]$ . Cualquier ruido de observación aditivo en la serie medida debe ser modelado como una fuente de ruido separada y distinguible del ruido guía que es parte integrante del modelo ARMA.

Si el modelo es un MA puro de orden  $q$ , la densidad de potencia espectral viene dada por:

$$P(f) = T\rho_w e_q^H(f) b b^H e_q(f) \quad \text{I.174}$$

Si el modelo es un AR puro de orden  $p$ , la DPE viene dada por:

$$P(f) = \frac{T\rho_w}{(e_p^H(f) a a^H e_p(f))} \quad \text{I.175}$$

### 5.3 RELACIONES ENTRE LOS PARÁMETROS DE LOS MODELOS AR, MA Y ARMA

Dado un modelo AR, MA o ARMA de un número finito de parámetros, es posible expresar ese modelo en términos de los otros dos modelos. Un proceso ARMA o MA pueden ser representados por un único modelo AR generalmente de orden infinito. Igualmente un proceso ARMA o AR puede ser representado por un único modelo MA generalmente de orden infinito. Este concepto es importante porque se puede seleccionar cualquiera de los tres modelos y todavía obtener una aproximación razonable si se usa un orden del modelo suficientemente grande. Existen ciertos beneficios de tipo algorítmico al estimar los parámetros de un modelo a partir de los datos y entonces calcular los parámetros de otro modelo a partir de los del primero. El modelo AR es un caso particular para el cual existen muchos algoritmos eficientes. A menudo el primer paso de un algoritmo de estimación de un modelo MA o ARMA consiste

en estimar un modelo AR de orden alto.

$$\text{Sea } C(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c[k]z^{-k} \quad \text{I.176}$$

el polinomio del denominador de un modelo AR( $\infty$ ). Los parámetros  $c[k]$  que son equivalentes a un modelo ARMA( $p, q$ ) se obtienen igualando:

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)} \quad \text{I.177}$$

o calculando la transformada inversa de  $C(z)B(z) = A(z)$ . Esto da:

$$c[k] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^q b[k]c[n-k] + a[n] & 1 \leq n \leq p \\ -\sum_{k=1}^q b[k]c[n-k] & n > p \end{cases} \quad \text{I.178}$$

con condiciones iniciales  $c[-1]=\dots=c[-q]=0$ .

Igualmente, si dados los parámetros de un modelo AR( $\infty$ ) que se sabe es equivalente a un modelo ARMA( $p, q$ ), entonces los parámetros de MA pueden ser recuperados resolviendo:

$$\begin{bmatrix} c[p] & c[p-1] & \dots & c[p-q+1] \\ c[p+1] & c[p] & \dots & c[p-q+2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c[p+q-1] & c[p+q-2] & \dots & c[p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b[1] \\ b[2] \\ \vdots \\ b[q] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c[p+1] \\ c[p+2] \\ \vdots \\ c[p+q] \end{bmatrix} \quad \text{I.179}$$

para los términos  $b_k$  usando la relación (I.178) sobre el rango  $p+1 \leq n \leq p+q$ . La matriz de parámetros  $c[n]$  es de tipo Toeplitz, lo que facilita los cálculos. Una vez que se han encontrado los parámetros MA, entonces los parámetros AR pueden ser recuperados por la convolución:

$$a[n] = c[n] + \sum_{k=1}^q b[k]c[n-k] \quad 1 \leq n \leq p \quad \text{I.180}$$

Nótese que sólo se han usado los parámetros autoregresivos  $c[1]$ ,  $c[p+q]$  del modelo  $AR(\infty)$  en las ecuaciones (I.180) y (I.180). Si los parámetros  $c[k]$  son truncados a cero, entonces el modelo truncado resultante podrá solamente aproximar al modelo  $ARMA(p,q)$  del que proviene. Aproximará al ARMA en el sentido de que el polinomio ARMA inverso

$$G(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{A(z)}{B(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} g[k]z^{-k} \quad \text{I.181}$$

y el polinomio truncado

$$C(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p+q} c[k]z^{-k} \quad \text{I.182}$$

coincidirán sólo para  $1 \leq k \leq p+q$ . Esta aproximación de una función racional de polinomios de orden finito con un polinomio de mayor orden se conoce como la aproximación de Padé. De forma similar, sea

$$D(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d[k]z^{-k} \quad \text{I.183}$$

el polinomio del numerador de un modelo  $MA(\infty)$ . Los parámetros  $d[k]$  del modelo  $MA(\infty)$  que son equivalentes a un modelo  $ARMA(p,q)$  se obtienen igualando:

$$D(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad \text{I.184}$$

o calculando la transformada inversa de  $D(z)A(z)=B(z)$ . Esto da:

$$d[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ - \sum_{k=1}^p a[k]d[n-k] + b[n] & 1 \leq n \leq q \\ - \sum_{k=1}^p a[k]d[n-k] & n > q \end{cases} \quad \text{I.185}$$

### 5.3.1 RELACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE UN MODELO ARMA CON LA SECUENCIA DE AUTOCORRELACIÓN

Si multiplicamos la ecuación de definición del modelo (I.142) por  $x^*[n-m]$  y calculamos el valor esperado tenemos :

$$E\{x[n]x^*[n-m]\} = -\sum_{k=1}^p a[k]E\{x[n-k]x^*[n-m]\} + \sum_{k=0}^q b[k]E\{u[n-k]x^*[n-m]\}$$

o :

$$r_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^p a[k]r_{xx}[m-k] + \sum_{k=0}^q b[k]r_{ux}[m-k] \quad \text{I.186}$$

La correlación cruzada  $r_{ux}[i]$  entre la entrada y la salida puede ser expresada en términos de los parámetros  $h[k]$  de la ecuación:

$$H(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h[k]z^{-k} \quad \text{I.187}$$

usando la ecuación:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]u[n-k] \quad \text{I.188}$$

para obtener:

$$r_{ux}[i] = E\{u[n+i]x^*[n]\} = E\left\{ u[n+i] \left[ u^*[n] + \sum_{k=1}^{\infty} h^*[k]u^*[n-k] \right] \right\}$$

$$r_{ux}[i] = r_{uu}[i] + \sum_{k=1}^{\infty} h^*[k]r_{uu}[i+k] \quad \text{I.189}$$

Puesto que se ha supuesto que  $u[k]$  es un proceso de ruido blanco, entonces:

$$r_{ux}[i] = \begin{cases} 0 & i > 0 \\ \rho_w & i = 0 \\ \rho_w h^*[-i] & i < 0 \end{cases} \quad \text{I.190}$$

La relación final entre los parámetros ARMA y la autocorrelación del proceso  $x[k]$  es, por tanto:

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} r_{xx}^*[-m] & m < 0 \\ -\sum_{k=1}^p a[k]r_{xx}[m-k] + \rho_w \sum_{k=m}^q b[k]h^*[k-m] & 0 \leq m \leq q \\ -\sum_{k=1}^p a[k]r_{xx}[m-k] & m > q \end{cases} \quad \text{I.191}$$

Los parámetros autoregresivos de un modelo ARMA están relacionados por un conjunto de ecuaciones lineales a la secuencia de autocorrelación. La ecuación (I.191) puede ser evaluada para los  $p$  índices de desplazamiento  $q+1 \leq m \leq q+p$ , por ejemplo, y agrupados en la expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[q] & r_{xx}[q-1] & \dots & r_{xx}[q-p+1] \\ r_{xx}[q+1] & r_{xx}[q] & \dots & r_{xx}[q-p+2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{xx}[q+p-1] & r_{xx}[q+p-2] & \dots & r_{xx}[q] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_{xx}[q+1] \\ r_{xx}[q+2] \\ \vdots \\ r_{xx}[q+p] \end{pmatrix} \quad \text{I.192}$$

Por tanto, si se tiene la secuencia de autocorrelación para los desplazamientos desde  $q-p+1$  hasta  $q+p$ , entonces los parámetros autoregresivos pueden encontrarse separadamente de los parámetros de media móvil resolviendo las ecuaciones simultáneas (I.192). Estas relaciones son conocidas como las Ecuaciones normales de Yule-Walker para modelos ARMA o también como las Ecuaciones de Yule-Walker modificadas. El número de cálculos precisos es del orden de  $p^2$ . Desgraciadamente, los parámetros de media móvil de un modelo ARMA no pueden encontrarse simplemente como la solución a un conjunto de ecuaciones lineales. Los parámetros MA están convolucionados con los coeficientes de respuesta al impulso  $h[k]$  como se puede ver en la ecuación (I.191), lo que resulta en una relación no lineal con la secuencia de autocorrelación.

### 5.3.2 RELACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE UN MODELO AR CON LA SECUENCIA DE AUTOCORRELACIÓN

La relación entre la secuencia de autocorrelación y un modelo autoregresivo puro puede encontrarse a partir de la relación anterior haciendo  $q=0$ , lo que da:

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} r_{xx}^*[-m] & m < 0 \\ -\sum_{k=1}^p a[k]r_{xx}[m-k] + \rho_w & m = 0 \\ -\sum_{k=1}^p a[k]r_{xx}[m-k] & m > 0 \end{cases} \quad \text{I.193}$$

La ecuación (I.191) puede ser evaluada para los  $p+1$  índices de desplazamiento  $0 \leq m \leq p$ , por ejemplo, y agrupados en la expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & \dots & r_{xx}[-p] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}[-p+1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a[0] \\ a[1] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho_w \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{I.194}$$

En esta forma, esta relación se conoce como Ecuaciones normales de Yule-Walker para modelos AR.

Utilizando la secuencia de autocorrelación dada por la ecuación (I.193) se obtiene una expresión alternativa para la DPE de un modelo autoregresivo:

$$PAR(f) = \frac{T\rho_w}{|A(f)|^2} = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k]e^{-j2\pi f k T} \quad \text{I.195}$$

Nótese que los valores de la autocorrelación en los desplazamientos de 0 a  $p$  describen de forma única el proceso autoregresivo de orden  $p$ , puesto que para desplazamientos con  $|k| > p$  se obtienen recursivamente a partir de :

$$r_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^p a[k]r_{xx}[m-k] \quad \text{I.196}$$

como se indica en la ecuación (I.191) con  $q=0$ .

### 5.3.3 RELACIÓN ENTRE LOS PARÁMETROS DE UN MODELO MA Y LA SECUENCIA DE AUTOCORRELACIÓN

La relación entre la secuencia de autocorrelación y un modelo de media móvil puro puede encontrarse a partir de la ecuación (I.191) teniendo en cuenta que  $p=0$  y  $h[k]=b[k]$  si  $1 \leq k \leq q$ , con lo que se obtiene:

$$r_{xx}(m) = \begin{cases} r_{xx}^*[-m] & m < 0 \\ \rho_w \sum_{k=1}^q b[k]b^*[k-m] & 0 \leq m \leq q \\ 0 & m > q \end{cases} \quad \text{I.197}$$

Esta es una relación de convolución no-lineal entre la secuencia de autocorrelación y los parámetros MA. Usando la secuencia de autocorrelación dada por (I.197), una expresión alternativa para la DPE de media móvil es:

$$P_{MA}(f) = T \rho_w^2 |B(f)|^2 = T \sum_{k=-q}^q r_{xx}[k] e^{-j2\pi f k T} \quad \text{I.198}$$

Nótese que la ecuación (I.198) tiene un rango de suma finito. Esto simplemente refleja el hecho de que un proceso de media móvil de orden  $q$  no está correlado para desplazamientos  $|k| > q$ . La ecuación (I.198) es idéntica en la forma a la estimación de la DPE por el método del correlograma clásico.

$$P_{CORR}(f) = T \sum_{k=-q}^q \hat{r}_{xx}[k] e^{-j2\pi f k T} \quad \text{I.199}$$

si se usan las estimaciones de la autocorrelación  $\hat{r}_{xx}[k]$  hasta el desplazamiento  $q$ . La distinción entre ambos métodos espectrales reside en la forma en que son usados los datos. El método del correlograma usa la secuencia de autocorrelación directamente. El método del media móvil usa los datos para estimar los parámetros de MA y entonces utiliza la ecuación (I.173) para calcular la DPE. Ambos métodos dan lugar a espectros con características similares.

5.3.4 FACTORIZACIÓN ESPECTRAL

Consideremos la Transformada-z para un proceso AR(p):

$$PAR(z) = \frac{\rho_w}{A(z)A^*(1/z^*)} \tag{I.200}$$

donde  $A(z)A^*(1/z^*)$  es un polinomio en  $z$  de orden  $2p$ . Los polos de la ecuación (I.200) ocurren en pares recíprocos conjugados. Por ejemplo, si  $z_k$  es una raíz de  $A(z)$ , entonces  $(1/z_k)^*$  es una raíz de  $A^*(1/z^*)$ . Si  $z_k$  está dentro del círculo unitario, entonces  $1/z_k^*$  estará fuera del círculo unitario. Además, las raíces de  $A(z)$  vendrán en pares complejos conjugado si los coeficientes del polinomio son todos reales.

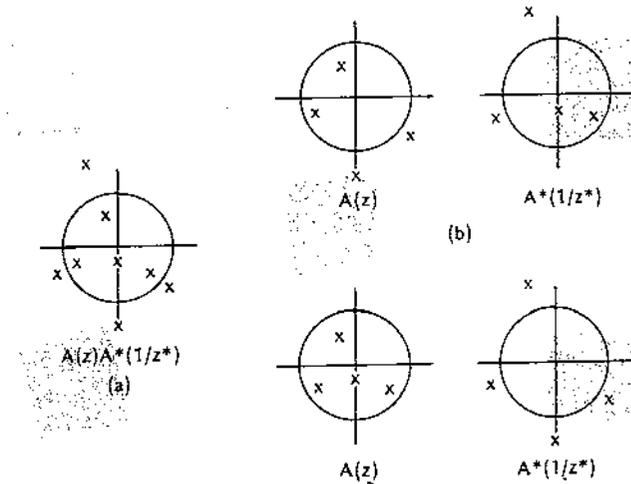


Fig. 20 Ilustración de la factorización espectral y estabilidad

Consideremos la función Transformada-z  $A(z)A^*(1/z^*)$ . La figura 20 A muestra un dibujo de polos típico del producto polinomial  $A(z)A^*(1/z^*)$ . Existen  $2^p$  posibles combinaciones de  $p$  polos para  $A(z)$  que dan el mismo polinomio  $A(z)A^*(1/z^*)$ . Las figuras 20 B y 20 C muestran dos posibles factorizaciones espectrales de los polos indicados en la figura 20 A. Para que la factorización sea única es necesario que el modelo de serie temporal sea a la vez estable y causal. La teoría de sistemas lineales muestra que dicho requerimiento fuerza a que  $A(z)$  sea de fase mínima, es decir, que tenga todas sus raíces dentro del círculo unitario del plano  $z$ . El polinomio  $A^*(1/z^*)$  tendrá por tanto, todas sus raíces fuera del círculo unitario y estará asociado con un proceso autoregresivo, estable anticausal.

Es importante distinguir la estabilidad del filtro asociado con la

factorización espectral de la estabilidad estadística. La estabilidad del filtro está relacionada con la necesidad de elegir parámetros AR o MA que formen secuencias de autocorrelación válidas. La estabilidad estadística está relacionada con los métodos que reducen la varianza del estimador espectral para un registro de datos finito dado.

### 5.3.5 PROPIEDADES DE LA DENSIDAD DE POTENCIA ESPECTRAL AUTOREGRESIVA

#### a INTERPRETACIÓN DE LA MÁXIMA ENTROPÍA

La estimación de la densidad de potencia espectral para modelos autoregresivos ha sido denominada frecuentemente en la literatura el método de la máxima entropía. Esta interpretación fue introducida por Burg (1975). Si se supone conocida la secuencia de autocorrelación finita  $r_{xx}[0] \dots r_{xx}[p]$ , entonces se plantea la cuestión de como deben especificarse los valores desconocidos de la misma para los restantes desplazamientos  $r[p+1]$ ,  $r[p+2], \dots$  para garantizar que la secuencia de autocorrelación completa es semidefinida positiva. Existe un número infinito de posibles extrapolaciones que proporcionarán secuencias de autocorrelación válidas. Burg argumentó que la extrapolación debe hacerse de forma que se maximice la entropía de la serie temporal caracterizada por la SAC extrapolada. Esta serie temporal será entonces la más aleatoria, en el sentido de la entropía, de todas las series que tienen la misma secuencia de autocorrelación entre los desplazamientos 0 hasta p.

En particular, la entropía de un proceso Gaussiano aleatorio es proporcional a :

$$\int_{-1/2T}^{1/2T} \ln(P_{MEM}(f)) df \quad \text{I.201}$$

donde  $P_{MEM}$  es la DPE del proceso y se puede calcular maximizando la ecuación (I.201), siempre que cumpla las ecuaciones de Wiener-Kintchine para los  $p+1$  valores conocidos de la autocorrelación.

$$\int_{-1/2T}^{1/2T} P_{MEM}(f) e^{(j2\pi fnT)} df = r_{xx}[n] \quad 0 \leq n \leq p \quad \text{I.202}$$

La solución, encontrada por medio de la técnica de los multiplicadores de Lagrange es:

$$P_{MEM}(f) = \frac{T\rho_w}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_p[k] e^{-j2\pi f k T} \right|^2} \quad I.203$$

donde  $\rho_w, a_p[1], \dots, a_p[p]$  son obtenidos a partir de las ecuaciones de Yule-Walker. Por tanto el análisis de la DPE AR y MEM es idéntico para el caso de un proceso Gaussiano aleatorio y una secuencia de autocorrelación conocida. Es incorrecto decir que la ecuación (I.203) es un análisis espectral de máxima entropía si el proceso no es Gaussiano, o si los parámetros han sido estimados a partir de otros datos que no sean los valores conocidos de la SAC. Si el espaciado de la SAC no es uniforme, las densidades espectrales calculadas por DPE y MEM no son idénticas.

#### b BASES PARA LA ALTA RESOLUCIÓN

Se ha visto como la DPE puede ser calculada a partir de los parámetros del modelo AR (ec.I.175) o bien a partir de la SAC (ec.I.195). Dada la SAC para los desplazamientos de 0 a p, uno puede resolver las ecuaciones de Yule-Walker para calcular tanto la varianza del ruido como los parámetros autoregresivos y entonces usar la ecuación (I.175) para calcular la DPE. Alternativamente puede usarse la extrapolación

$$r_{xx}[n] = - \sum_{k=1}^p a[k] r_{xx}[n-k] \quad n > p \quad I.204$$

que se sigue de la ecuación (I.196) para extender la SAC de forma que la ecuación (I.195) pueda ser usada para calcular la DPE (Aunque esto pueda parecer poco práctico). Por contra, consideremos el método del correlograma para el cálculo de la DPE. Este método usa p+1 valores de la autocorrelación para producir el estimador espectral:

$$P_{CORR}(f) = T \sum_{k=-p}^p r_{xx}[k] e^{-j2\pi f k T} \quad I.205$$

Comparando las ecuaciones (I.195) y (I.205) se puede concluir que el estimador de la DPE AR coincide con la secuencia de autocorrelación sobre el rango de suma del método de estimación de la DPE del correlograma hasta el desplazamiento  $p$ , pero entonces usa una extrapolación de la SAC dada por la ecuación (I.204), en lugar de suponer que todos los valores no disponibles son cero como supone el método del correlograma. Dicha extrapolación de la SAC es la base para la propiedad de alta resolución atribuida al estimador de DPE AR. No hay efecto de ventana sobre la SAC como sucede en la estimación espectral clásica, por lo que este estimador no presenta el efecto de lóbulos laterales.

El grado de mejora en la resolución del estimador DPE AR para procesos que consisten en sinusoides en ruido blanco es, sin embargo, una función de la relación señal-ruido (RSN). Marple (1982) sugiere la siguiente medida de la resolución para sinusoides de igual potencia en el caso de que se conozca la autocorrelación:

$$F = \frac{1.03}{T_p[\text{RSR}(p+1)]^{0.31}} \quad \text{I.206}$$

donde  $F$  es la resolución en Hz,  $T$  es el intervalo de muestreo en segundos,  $p$  es el mayor desplazamiento de la secuencia de autocorrelación y RSR es la relación señal-ruido expresada en unidades lineales.

### c ESTIMACIÓN DE POTENCIA SINUSOIDAL

La estimación de la DPE AR se usa a menudo para indicar la presencia de componentes sinusoidales en los datos. La potencia asociada con componentes en la estimación se calcula correctamente integrando el área bajo la densidad de potencia espectral. Esto es costoso desde el punto de vista computacional. Como alternativa se intenta usar la altura de cada pico espectral como indicador de la potencia de la senoide. La altura es un indicador fiable de la potencia relativa con los estimadores espectrales clásicos porque sus picos son linealmente proporcionales a la potencia de la senoide cuando la entrada consiste en sinusoides contaminadas por ruido blanco. Esto no funciona con estimadores espectrales AR. Consideremos la SAC para una senoide compleja contaminada por ruido blanco

$$r_{xx}[k] = P e^{(j2\pi f_0 k T)} + \rho_w \delta[k] \tag{I.207}$$

Lacoss (1971) usó la ecuación (I.207) para probar analíticamente que la función DPE AR de orden m para una senoide simple en ruido blanco puede ser representada por:

$$PAR(f) = \frac{T\rho_w \left[1 + \frac{P}{(mP + \rho_w)}\right]}{\left|1 - \frac{P}{mP + \rho_w} \sum_{k=1}^m e^{(j2\pi k[f-f_0]T)}\right|^2} \tag{I.208}$$

La función PAR(f) alcanza su máximo en  $f=f_0$ ,

$$PAR(f_0) = \rho_w T [1 + mRSR] [1 + (m+1)RSR] \approx T(mRSR)^2 \tag{I.209}$$

donde  $RSR = P/\rho_w$  y se ha supuesto  $mRSR \gg 1$ . Por tanto, el pico es proporcional al cuadrado de la potencia. Sin embargo, el área bajo el pico es linealmente proporcional a la potencia.

Johnsen y Andersen (1978) sugirieron un método para estimar la potencia de múltiples sinusoides reales a partir de los picos en un espectro AR. El método generalmente trabaja sólo para picos bien separados de componentes sinusoidales en los datos. Si expresamos la DPE en notación de la Transformada-z

$$PAR(z) = \frac{\rho_w}{A(z)A^*(1/z^*)} \tag{I.210}$$

Entonces un pico observado en  $f_k$  en el espectro AR tendrá una potencia estimada de :

$$Potencia(f_k) = 2\text{Re} \left\{ \text{Residuo de } \frac{PAR(z)}{z} \text{ evaluado en } z_k = e^{(j2\pi f_k T)} \right\} \tag{I.211}$$

El residuo está definido por la siguiente ecuación:

$$r[k] = \left[ \frac{H(z)(z-p_k)}{z} \right]_{z=p_k} \quad \text{I.212}$$

suponiendo que  $H(z)$  no tenga polos repetidos:

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \sum_{k=1}^p \frac{r[k]}{1-p_k z^{-1}} \quad \text{I.213}$$

La técnica de estimación de potencia del método de Prony es probablemente una estimación más fiable si se sabe que los datos son solamente sinusoides en ruido.

### 5.3.6 PROPIEDADES DE LOS PROCESOS AUTOREGRESIVOS

El más popular de los modelos de series temporales es el AR. Las razones de que esto sea así son las siguientes:

- 1) La estimación de los parámetros se puede obtener como la solución de un conjunto de ecuaciones lineales (mientras que las estimaciones de los parámetros MA y ARMA requieren la solución de ecuaciones no lineales).
- 2) Los estimadores obtenidos tienen menor sesgo y variabilidad que los estimadores basados en técnicas de Fourier.

Aunque las bases teóricas no son las mismas, en la práctica este modelo coincide con el estimador espectral de máxima entropía y con el estimador de predicción lineal.

#### a RELACIÓN CON EL ANÁLISIS DE PREDICCIÓN LINEAL

El problema de la predicción lineal consiste en predecir una muestra no observada  $x[n]$  basándonos en el conjunto de datos observados  $\{x[n-1], \dots, x[n-p]\}$ . Suponiendo que el estimador es una combinación lineal de las muestras pasadas:

$$\hat{x}^f[n] = - \sum_{k=1}^p a^f[k] x[n-k] \quad \text{I.214}$$

$\hat{x}^f[n]$  es la estimación del valor  $x[n]$  y  $a^f[k]$  son los coeficientes de

predicción. Estos coeficientes se eligen de forma que minimicen la potencia del error de predicción

$$\rho = E\{|e[n]|^2\} = E\{|x[n] - \hat{x}^f[n]|^2\} \quad \text{I.215}$$

Si se supone que el proceso es estacionario en sentido amplio, entonces los valores de  $a^f[k]$  son independientes de  $n$ . La potencia mínima del error de predicción se encuentra calculando:

$$\rho_{\text{MIN}} = E\{x^*[n](x[n] - \hat{x}^f[n])\} = r_{xx}[0] + \sum_{k=1}^p a^f[k] r_{xx}[-k] \quad \text{I.216}$$

Puesto que estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones de Yule-Walker para un proceso AR, los coeficientes de predicción  $a^f[k]$  coinciden con los parámetros del modelo. Esto sólo es cierto si el orden del proceso AR y el del predictor lineal son idénticos. Sin embargo existen dos distinciones a tener en cuenta:

1) La secuencia  $u[n]$  del proceso AR es un proceso de ruido blanco usado como la entrada al filtro autoregresivo. La secuencia de error  $e[n]$  es la salida del filtro de predicción lineal y no será en general un proceso de ruido blanco a menos que  $x[n]$  haya sido generado como un proceso autoregresivo puro del mismo orden que el del modelo.

2) La secuencia  $x[n]$  es la salida del filtro autoregresivo, mientras que es la entrada para el filtro de predicción lineal.

Igualmente se podría haber definido el filtro de predicción lineal hacia atrás como:

$$\hat{x}^b[n] = - \sum_{k=1}^p a^b[k] x[n+k] \quad \text{I.217}$$

Los coeficientes de predicción lineal hacia atrás son simplemente los complejos conjugados de los coeficientes de predicción lineal hacia adelante (si ambos filtros tienen la misma longitud).

## b RELACIÓN CON EL ALGORITMO DE LEVINSON

La solución recursiva de Levinson a las ecuaciones de Yule-Walker relaciona

los parámetros AR de orden  $p$  con los parámetros AR de orden  $p-1$  como sigue:

$$a_p[n] = a_{p-1}[n] + k_p a_{p-1}^*[p-n] \quad 1 \leq n \leq p-1 \quad \text{I.218}$$

El coeficiente de reflexión  $k_p$  se encuentra utilizando la función de autocorrelación conocida para los desplazamientos desde 0 a  $p-1$ :

$$k_p = a_p[p] = \frac{\sum_{n=0}^{p-1} a_{p-1}[n] r_{xx}[p-n]}{\rho_p - 1} \quad \text{I.219}$$

La ecuación recursiva para la varianza del ruido blanco viene dada por:

$$\rho_p = \rho_{p-1}(1 - |k_p|^2) \quad \rho_0 = r_{xx}[0] \quad \text{I.220}$$

De entre estas tres ecuaciones sólo el coeficiente de reflexión depende directamente de la función de autocorrelación. Esto sugiere que un posible método para calcular la DPE AR es usar los datos disponibles para estimar el coeficiente de reflexión en cada etapa de la recursión de Levinson.

### c SUMARIO DE LAS REPRESENTACIONES EQUIVALENTES DE UN PROCESO AUTOREGRESIVO

Un proceso autoregresivo  $AR(p)$  tiene tres representaciones equivalentes:

- 1) Como una secuencia de autocorrelación de duración infinita. Aunque esta queda completamente determinada por la SAC finita  $r_{xx}[0], \dots, r_{xx}[p]$ . El resto puede ser obtenido por recursión.
- 2) Como una secuencia finita de parámetros autoregresivos
- 3) Como una secuencia finita de coeficientes de reflexión. Los coeficientes de predicción lineal  $a_1^f[1], \dots, a_p^f[p]$  son denominados a menudo coeficientes de reflexión debido a su interpretación como parámetros físicos de un modelo de tubo acústico de voz o de modelos de terremotos en los cuales se considera la tierra dividida en capas. Se suelen representar por el símbolo  $k_m = a_m^f[m]$  para  $1 \leq m \leq p$ .

### 5.3.7 MÉTODOS PARA LA ESTIMACIÓN ESPECTRAL AUTOREGRESIVA

#### a MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE PREDICCIÓN LINEAL POR MÍNIMOS CUADRADOS

Restringiendo los coeficientes AR para que satisficieran la ecuación recursiva de Levinson (I.218) Burg fue capaz de llevar a cabo una optimización de mínimos cuadrados con respecto a un parámetro simple, el coeficiente de reflexión. Una aproximación alternativa es llevar a cabo un ajuste por mínimos cuadrados con respecto a todos los coeficientes de predicción lineal.

#### b MÉTODO DE LA AUTOCORRELACIÓN

Se supone que se conocen los datos  $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$ . El método de la autocorrelación consiste en estimar los parámetros AR minimizando una estimación de la potencia del error de predicción:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] + \sum_{k=1}^p a^f[k] x[n-k] \right|^2 \quad \text{I.221}$$

Las muestras del proceso que no se conocen ( $x[n]$   $n > N-1$ ) son igualadas a cero. La potencia estimada del error de predicción se minimiza diferenciando esta ecuación con respecto a la parte real e imaginaria de los  $a[k]$ , lo cual nos lleva al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \hat{r}_{xx}[0] & \hat{r}_{xx}[-1] & \dots & \hat{r}_{xx}[-p+1] \\ \hat{r}_{xx}[1] & \hat{r}_{xx}[0] & \dots & \hat{r}_{xx}[-p+2] \\ & & \vdots & \\ \hat{r}_{xx}[p-1] & \hat{r}_{xx}[p-2] & \dots & \hat{r}_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}^f[1] \\ \hat{a}^f[2] \\ \vdots \\ \hat{a}^f[p] \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \hat{r}_{xx}[1] \\ \hat{r}_{xx}[2] \\ \vdots \\ \hat{r}_{xx}[p] \end{pmatrix} \quad \text{I.222}$$

La estimación de la varianza del ruido blanco  $\sigma^2$  se encuentra como  $\rho_{\min}$  :

$$\sigma^2 = \rho_{\min} = \hat{r}_{xx}[0] + \sum_{k=1}^p \hat{a}^f[k] \hat{r}_{xx}[-k] \quad \text{I.223}$$

Este método tiene peor resolución de la estimación espectral que otros estimadores espectrales. Una variante de esta aproximación es usar el estimador de la autocorrelación no sesgado en las ecuaciones de Yule-Walker. Con esta modificación, se puede demostrar que la matriz de autocorrelación de (I.222) ya no se garantiza que sea semidefinida positiva y por tanto la matriz suele ser singular o cercana a ser singular, lo que provoca que el

estimador tenga una gran varianza por lo que no es aconsejable.

c MÉTODO DE LA COVARIANZA

El estimador se puede encontrar minimizando la potencia estimada del error de predicción:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} |x[n] + \sum_{k=1}^p a^f[k]x[n-k]|^2 \quad \text{I.224}$$

Nótese que la única diferencia entre el método de la covarianza y el método de la autocorrelación es el rango de la suma en la estimación de la potencia del error de predicción. En el método de la covarianza se usan todos los puntos necesarios para calcular  $\hat{\rho}$  sin suponer que ninguno sea cero. La minimización nos lleva a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} c_{xx}[1,1] & c_{xx}[1,2] & \dots & c_{xx}[1,p] \\ c_{xx}[2,1] & c_{xx}[2,2] & \dots & c_{xx}[2,p] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{xx}[p,1] & c_{xx}[p,2] & \dots & c_{xx}[p,p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}^f[1] \\ \hat{a}^f[2] \\ \vdots \\ \hat{a}^f[p] \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{xx}[1,0] \\ c_{xx}[2,0] \\ \vdots \\ c_{xx}[p,0] \end{pmatrix} \quad \text{I.225}$$

donde :

$$c_{xx}[j,k] = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} x^*[n-j]x[n-k] \quad \text{I.226}$$

La varianza del ruido blanco estimada es:

$$\hat{\sigma}^2 = \rho_{\min} = c_{xx}[0,0] + \sum_{k=1}^p \hat{a}^f[k]c_{xx}[0,k] \quad \text{I.227}$$

La matriz (I.225) es hermitica y semidefinida positiva. Se puede demostrar que es singular si los datos consisten en p-1 o menos sinusoides complejas. Cualquier ruido en la observación, sin embargo, hará que la matriz sea no singular. No se puede garantizar que los polos estimados por el método de la covarianza yazcan dentro del círculo unidad. Para grandes longitudes de datos

( $N \gg p$ ) los métodos de autocovarianza y autocorrelación dan estimaciones espectrales similares. Si los datos consisten en sinusoides puras, se pueden extraer las frecuencias exactas por el método de la covarianza aunque no por el de la autocorrelación.

#### d MÉTODO DE PRONY

El método original de Prony (1795) es una técnica para identificar las frecuencias  $f_i$ , los factores de amortiguamiento  $\alpha_i$ , las amplitudes  $A_i$  y las fases  $\phi_i$  de señales exponenciales reales del tipo:

$$x[n] = \sum_{i=1}^p A_i e^{(j\phi_i)} e^{[(\alpha_i + j2\pi f_i)n]} \quad n \geq 0 \quad \text{I.228}$$

Para señales reales, los modos  $z_i = e^{[(\alpha_i + j2\pi f_i)n]}$  y las amplitudes complejas  $A_{ci} = A_i e^{(j\phi_i)}$  deben ocurrir en pares complejos conjugados. Puesto que los datos pueden ser escritos como:

$$x[n] = \sum_{i=1}^p A_{ci} z_i^n \quad n \geq 0 \quad \text{I.229}$$

Es bien conocido [Oppenheim & Schaffer (1975)] que  $x[n]$  puede ser generada por la ecuación en diferencias recursiva:

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a[k] x[n-k] \quad n \geq p \quad \text{I.230}$$

con condiciones iniciales  $\{x[0], \dots, x[p-1]\}$ . La señal puede ser también vista como la respuesta natural de un filtro todo-polos con las condiciones iniciales dadas. Los coeficientes  $a[k]$  están relacionados con los modos o polos  $z_i$  por:

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a[k] z^{-k} = \prod_{i=1}^p (1 - z_i z^{-1}) \quad \text{I.231}$$

Los polos puede ser determinados exactamente resolviendo el conjunto de

ecuaciones lineales (I.230) para  $n=p, \dots, 2p-1$  para encontrar los  $a[k]$  y a partir de ellos las raíces del polinomio por (I.231)

Cuando hay ruido presente el método original de Prony da unos resultados muy pobres. Si este método se modifica para tener en cuenta la presencia de un ruido blanco entonces se obtiene una expresión idéntica a la del método de la covarianza.

#### e MÉTODO DE LA COVARIANZA MODIFICADA

Se ha visto [6.a] que para un proceso AR(p) el predictor óptimo hacia adelante es:

$$\hat{x}^f[n] = - \sum_{k=1}^p a^f[k] x[n-k] \quad \text{I.232}$$

mientras que el predictor óptimo hacia atrás es:

$$\hat{x}[n] = - \sum_{k=1}^p a^b[k] x[n+k] = - \sum_{k=1}^p a^{f*}[k] x[n+k] \quad \text{I.233}$$

donde  $a^f[k]$  son los parámetros del filtro AR. En ambos casos la potencia mínima del error de predicción es la varianza del ruido  $\sigma^2$ . El método de la covarianza modificada estima los parámetros AR minimizando el promedio de las potencias del error de predicción hacia adelante y hacia atrás. Es decir:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{\rho}^f + \hat{\rho}^b) \quad \text{I.234}$$

Minimizando esta potencia y haciendo

$$c_{xx}[j,k] = \frac{1}{2(N-p)} \left( \sum_{n=p}^{N-1} x^*[n-j] x[n-k] + \sum_{n=0}^{N-1-p} x[n+j] x^*[n+k] \right) \quad \text{I.235}$$

se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} c_{xx}[1,1] & c_{xx}[1,2] & \dots & c_{xx}[1,p] \\ c_{xx}[2,1] & c_{xx}[2,2] & \dots & c_{xx}[2,p] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{xx}[p,1] & c_{xx}[p,2] & \dots & c_{xx}[p,p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}[1] \\ \hat{a}[2] \\ \vdots \\ \hat{a}[p] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{xx}[1,0] \\ c_{xx}[2,0] \\ \vdots \\ c_{xx}[p,0] \end{bmatrix} \quad \text{I.236}$$

que son idénticas a las del método de la covarianza excepto en la definición de  $c_{xx}[j,k]$ , el estimador de la autocorrelación. El método de la covarianza modificada no garantiza un filtro estable todo-polos, aunque en la práctica los polos suelen caer dentro del círculo unitario. Este método de estimación de los parámetros AR fue propuesto independientemente por Nuttall (1976) que lo denominó **método adelante-atrás** y por Ulrych y Clayton (1976) que lo denominaron **aproximación por mínimos cuadrados**.

El método de la covarianza modificada parece proporcionar estimaciones espectrales estadísticamente estables con alta resolución. Se ha observado que tiene las siguientes propiedades para datos que consistan en sinusoides en ruido blanco:

- 1) El desplazamiento usual de los picos de una estimación espectral AR de la posición de las frecuencias verdaderas debido al ruido de observación aditivo es menos pronunciado que para muchos otros estimadores espectrales (Swingler (1979)).
- 2) La dependencia de la posición del pico con respecto a la fase inicial (Chens y Stegen (1974)) es reducida considerablemente (Ulrych y Clayton (1976)).
- 3) El desdoblamiento de una senoide en dos picos espectrales diferentes [Fougere et al (1976), Herring (1980) no ha sido nunca observado con el método de la covarianza modificada (Kay y Marple (1979), Marple (1980)).

#### f MÉTODO DE BURG

En contraste con los métodos de autocorrelación, covarianza y covarianza modificada, que estiman los parámetros AR directamente, el método de Burg estima los coeficientes de reflexión y entonces usa el algoritmo recursivo de Levinson para obtener la estimación de los parámetros AR. A partir de la estimación de los coeficientes de reflexión, los parámetros AR se pueden estimar como sigue:

$$\hat{r}_{xx}[0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \quad \text{I.237}$$

$$\hat{a}[1]=\hat{k}_1$$

$$\hat{\rho}_1=(1-|\hat{a}_1[1]|^2)\hat{r}_{xx}[0]$$

para  $k=2,3,\dots,p$

$$\hat{a}_k[i] = \begin{cases} \hat{a}_{k-1}[i] + \hat{k}_k \hat{a}_{k-1}[k-i] & i = 1, 2, \dots, k-1 \\ \hat{k}_k & i = k \end{cases}$$

$$\hat{\rho}_k = (1 - |\hat{a}_k[k]|^2)\hat{\rho}_{k-1}$$

Las estimaciones de los parámetros AR son  $\{\hat{a}_p[1], \hat{a}_p[2], \dots, \hat{a}_p[p]\}$  y la estimación de la varianza del ruido blanco es  $\hat{\rho}_p$ .

Llevando a cabo la minimización de la potencia del error de predicción se obtiene como estimación de los coeficientes de reflexión:

$$\hat{k}_k = \frac{-2 \sum_{n=k}^{N-1} \hat{e}_{k-1}^f[n] \hat{e}_{k-1}^{b*}[n-1]}{\sum_{n=k}^{N-1} (|\hat{e}_{k-1}^f[n]| + |\hat{e}_{k-1}^b[n-1]|^2)}$$

I.238

En general, el algoritmo de Burg produce estimaciones espectrales precisas para datos que son realmente AR (Nutall (1976)). Sin embargo, para datos sinusoidales, el algoritmo de Burg está sujeto a:

- 1) Desdoblamiento de líneas espectrales (Fougere et al (1976), Herring (1980)).
- 2) Las posiciones de los picos dependen fuertemente de la fase (Chen y Stegen (1974)).

### 5.3.8 CARACTERÍSTICAS DE LOS ESTIMADORES

1) Si se selecciona un modelo de orden alto con respecto al número de datos, las estimaciones espectrales AR tienden a exhibir picos espúreos. Debido a errores en la estimación, las ecuaciones normales de la mayoría de los métodos AR serán generalmente de rango completo, incluso para órdenes altos. Los polos extra generados por los parámetros AR adicionales dan cuenta de los picos espúreos. Para evitar esto hay que tener un criterio con el que seleccionar el orden del modelo. Una reducción del orden también reduce la

resolución. Entre los métodos presentados, los de Burg, covarianza y covarianza modificada tienen mejor resolución para un orden dado que otros algoritmos.

2) Se ha observado que los algoritmos de Burg, covarianza y autocorrelación presentan el desdoblamiento de líneas espectrales, cosa que no ocurre en el algoritmo de la covarianza modificada.

#### a EFECTOS DEL RUIDO EN EL ESTIMADOR ESPECTRAL AR

Un problema importante con los estimadores espectrales AR, que limita su utilidad, es su sensibilidad a la adición de ruido de observación en el proceso AR. Los efectos que se pueden producir son los siguientes:

- 1) Ensanchamiento de los picos espectrales
- 2) Desplazamiento de sus posiciones verdaderas
- 3) Enmascaramiento de alguno de los picos
- 4) Las señales que contienen una media alta o una tendencia tienden a corromper las estimaciones espectrales AR, en particular en el extremo de las frecuencias más bajas.

La resolución en ciclos/muestra del estimador espectral AR, suponiendo que se conocen los valores de la SAC, vale aproximadamente (Marple (1976)):

$$\delta f_{AR} = \frac{1.03}{p[\eta(p+1)]^{0.31}} \quad \text{I.239}$$

para  $p\eta > 10$  donde  $\eta$  es la RSR de la senoide. Como se esperaba, la resolución disminuye al disminuir la relación señal ruido y se incrementa al incrementar el orden del modelo. Asimismo, se puede demostrar (Marple (1976)) que la resolución del periodograma es:

$$\delta f_p = \frac{0.86}{N} \quad \text{I.240}$$

donde  $N$  es el número de datos muestrales. Como se ha observado frecuentemente en la práctica no hay dependencia con la relación señal-ruido. Supongamos un orden del modelo de  $p=4$  y comparemos las resoluciones por ambos métodos como:

$$\gamma = \frac{1/\delta f_{AR}}{1/\delta f_p} \quad \text{I.241}$$

Un valor de  $\gamma$  mayor que 1 indicaría una resolución superior para el estimador espectral AR. En nuestro ejemplo se tiene:

$$\gamma = \frac{5.5\eta^{0.31}}{N} \tag{I.242}$$

Para que los dos estimadores espectrales tengan la misma resolución la relación señal-ruido debe de ser:

$$10 \log_{10} \eta = -23.9 + 32.2 \log_{10} N \quad \text{dB} \tag{I.243}$$

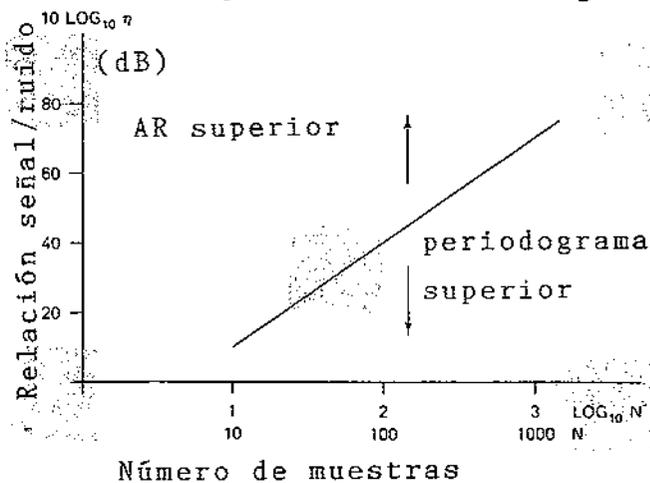


Fig. 21 Comparación de la resolución de los estimadores espectrales autoregresivos frente al periodograma.

para  $10 \log_{10} \eta > 4$  dB. Se puede ver, a partir de la figura 21 que se necesitan relaciones señal-ruido muy altas para que el estimador espectral AR tenga mayor resolución que el periodograma. Para una RSR dada, la resolución del estimador espectral AR puede ser mejorada incrementando el orden del modelo. Sin embargo, esto trae consigo un aumento de la varianza del estimador y aparecerán picos espúreos debidos a los polos extra. Por tanto, el estimador espectral AR no es válido en presencia de ruido.

b SELECCIÓN DEL ORDEN DEL MODELO

Debido a que el orden del modelo AR no se suele conocer a priori, es necesario en la práctica considerar varios órdenes diferentes y a continuación calcular algún criterio de error que indique cual debe ser el correcto.

Una aproximación intuitiva podría ser construir modelos AR con órdenes

crecientes hasta que la varianza del error de predicción alcance un mínimo. Sin embargo, todos los procedimientos de estimación discutidos tienen una varianza del error de predicción residual que disminuye monótonamente al incrementar el orden  $p$ . Por tanto, la varianza del error de predicción por si misma no es suficiente para indicar cuando debe terminar la búsqueda.

Otro chequeo simple consiste en llevar a cabo un periodograma del error de predicción. Puesto que este debe ser un ruido blanco, el periodograma debe ser aproximadamente plano. Se han propuesto muchos criterios considerados objetivos para la determinación del orden del modelo AR.

#### 1) Criterio del error de predicción final (EPF)

Este criterio, propuesto por Akaike (1969), selecciona el orden del proceso AR para que la varianza promedio del error en la predicción de un paso sea mínima. Consideró que la varianza del error es la suma de la potencia de la parte impredecible del proceso y una cantidad que representa la imprecisión en la estimación de los parámetros AR:

$$\text{EPF}[p] = \hat{\rho}_p \left( \frac{N+(p+1)}{N-(p+1)} \right) \quad \text{I.244}$$

donde  $N$  es el número de datos,  $p$  es el orden y  $\hat{\rho}_p$  es la varianza estimada del ruido blanco. Esta ecuación supone que la media ha sido sustraída de los datos. El término entre paréntesis aumenta al aumentar el orden, reflejando el incremento en la incertidumbre de la estimación de la varianza del error de predicción. El orden seleccionado será aquel para el cual el EPF sea mínimo. Para un proceso AR puro, el EPF trabaja bien seleccionando el orden correcto. Sin embargo, cuando se aplica a señales reales, el EPF parece ser demasiado conservativo, seleccionando un orden demasiado bajo. En el procesamiento de datos geofísicos, Jones (1976) y Berryman (1978) constataron que el orden seleccionado tendía a ser demasiado bajo.

#### 2) Criterio de Información de Akaike (CIA)

Este criterio, también propuesto por Akaike (1969), determina el orden del modelo minimizando una función de información teórica. Suponiendo que el proceso tiene una estadística Gaussiana el CIA tiene la forma:

$$\text{CIA}[p] = N \ln(\hat{\rho}_p) + 2p \quad \text{I.245}$$

El término  $2p$  representa una penalización por el uso de coeficientes AR extra que no resultan en una reducción sustancial de la varianza del error de

predicción. El orden seleccionado será aquel que minimice este criterio. En el caso de datos que no sean AR puros el orden seleccionado es a menudo demasiado bajo. Por otra parte Kayshap (1980) encontró que el CIA es estadísticamente inconsistente porque la probabilidad del error de elegir el orden correcto no tiende a cero al tender  $N$  a  $\infty$ . El resultado es una tendencia a sobrestimar el orden al incrementar el número de datos.

### 3) Criterio de longitud de descripción mínima.

En respuesta a esto, Rissanen (1983) desarrolló una variante del criterio de información teórico con la forma:

$$\text{LDM}[p] = N \ln(\hat{\rho}_p) + p \ln(N) \quad \text{I.246}$$

Se dice que es estadísticamente consistente porque  $p \ln(N)$  aumenta con  $N$  más rápido que con  $p$ .

### 4) Criterio de transferencia autoregresiva (CTA)

Este método, propuesto por Parzen (1974) determina el orden  $p$  como aquel en el que la estimación de la diferencia entre el error cuadrático medio del verdadero filtro de predicción de error y el filtro estimado es mínima. Parzen mostró que esta diferencia puede ser calculada, sin conocer explícitamente el filtro de predicción de error verdadero, mediante la expresión:

$$\text{CTA}[p] = \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^p \bar{\rho}_j^{-1} \right] \bar{\rho}_j^{-1} \quad \text{I.247}$$

donde  $\bar{\rho}_j = \left[ \frac{N}{N-j} \right] \hat{\rho}_j$

Nuevamente, se elige  $p$  de forma que minimice este criterio.

Los resultados de los espectros calculados usando EPF, CIA y CTA han sido mixtos, particularmente cuando se aplican a datos reales, en lugar de a procesos AR simulados. Ulrych y Clayton (1976) han encontrado que para segmentos de datos cortos ninguno de los criterios funciona bien. Para procesos armónicos en ruido, el EPF y el CIA tienden a subestimar el orden, especialmente si la RSR es alta. Ulrych y Ooe (1983) determinaron experimentalmente que, en el caso de segmentos cortos de datos de procesos armónicos, una selección del orden de  $N/3$  a  $N/2$  producía a menudo resultados

satisfactorios cuando se utilizan los métodos de la covarianza y la covarianza modificada. Por tanto, en el caso de señales reales, estos criterios deben ser tomados sólo como guías para una selección inicial del orden puesto que pueden no funcionar correctamente si los datos no quedan perfectamente modelados por un proceso AR.

Una discusión más extensa sobre la elección del orden del modelo puede encontrarse en Marple (1987) y Kay (1988).

## 6 MÉTODOS NO ESTACIONARIOS Y NO LINEALES

### 6.1 INTRODUCCIÓN

Los métodos clásicos de análisis de series temporales están basados en dos suposiciones cruciales:

a) Todas las series son estacionarias, o pueden ser convertidas en estacionarias por medio de transformaciones simples como la diferenciación (en el caso de modelos ARIMA), etc...

b) Todos los modelos son lineales ( las series observadas pueden ser puestas como una función lineal de valores presentes y pasados de un proceso independiente de ruido blanco).

Sin embargo, la *estacionariedad* y la *linealidad* son idealizaciones matemáticas que en algunos casos pueden ser válidas sólo como aproximaciones a la situación real. A continuación describiremos una aproximación al análisis espectral de procesos no-estacionarios basada en la teoría de espectros evolutivos desarrollada por Priestley (1965, 1966, 1967).

### 6.2 ANÁLISIS ESPECTRAL DE PROCESOS NO-ESTACIONARIOS

La teoría de espectros evolutivos tiene la misma interpretación física que en el caso de procesos estacionarios, diferenciándose de este caso en que describe la distribución frecuencial de potencia en cada instante de tiempo.

#### 6.2.1 LA NOCIÓN DE FRECUENCIA

Si queremos definir un espectro que depende del tiempo, debemos plantearnos cual es el significado de *frecuencia*. En el caso de un proceso estacionario, este puede ser representado por una suma de ondas seno y coseno con frecuencia variable y amplitudes y fases aleatorias. Pero un proceso no estacionario no puede ser representado como una suma de senos y cosenos. En su lugar será representado por una suma de senos y cosenos modulados en amplitud. Por tanto, la señal tendrá que tener un comportamiento *oscilatorio* y la transformada de Fourier de dicha función estará concentrada alrededor de un valor  $\omega_0$  que denominaremos frecuencia.

#### 6.2.2 TEORÍA DE ESPECTROS EVOLUTIVOS

Consideremos un proceso estocástico de parámetro continuo,  $\{X(t)\}$ ,  $-\infty < t < \infty$  que tenga media cero y varianza finita para todo  $t$ .

$$E\{X(t)\} = 0; \quad E\{X(t)^2\} < \infty$$

Se define el núcleo de la covarianza como:

$$R(s,t) = E\{X^*(s)X(t)\} \quad \text{I.248}$$

Restringiremos nuestra atención a la clase de procesos para los cuales existe una familia  $\mathcal{F}$  de funciones  $\{\phi_t(\omega)\}$  definidas para todo  $\mathbb{R}$ , e indexadas por el parámetro  $t$ , y una medida  $\mu(\omega)$ , tal que para cada  $s, t$  el núcleo de la covarianza  $R(s, t)$  admita una representación de la forma:

$$R(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_s^*(\omega)\phi_t(\omega)d\mu(\omega) \quad \text{I.249}$$

Cuando el espacio del parámetro está limitado a un intervalo finito, digamos  $0 \leq t \leq T$ , siempre es posible obtener una representación de la forma (I.249) en términos de las autofunciones del núcleo de covarianza  $\{R(s,t)\}$  [Parzen, 1959 [97]]. Debe notarse que  $\mathcal{F}$  puede ser considerada también como una familia de funciones  $\phi_\omega(t)$  indexadas por el parámetro  $\omega$ .

Para que  $\text{var}\{X(t)\}$  sea finita para cada  $t$ ,  $\phi_t(\omega)$  debe ser integrable cuadráticamente con respecto a la medida  $\mu$ , para cada  $t$ . Entonces, cualquiera que sea  $R(s,t)$ , el proceso  $X(t)$  admite una representación de la forma:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\omega)dZ(\omega) \quad \text{I.250}$$

donde  $Z(\omega)$  es un proceso ortogonal, con:

$$E\{|dZ(\omega)|^2\} = d\mu(\omega) \quad \text{I.251}$$

La medida  $\mu(\omega)$  juega aquí el mismo papel, que el espectro integrado en el caso de un proceso estacionario.

Parzen (1959) mostró que si existe una representación de la forma

(I.250), entonces hay una multitud de representaciones diferentes del proceso, dependiendo de la familia de funciones en las que nos basemos.

Una de las posibles familias de funciones es la de ondas sinusoidales con amplitud modulada de frecuencia  $\theta(\omega)$ , de la forma:

$$\phi_t(\omega) = A_t(\omega) e^{j\theta(\omega)t} \tag{I.252}$$

Se dice que la función  $\phi_t(\omega)$  es una función oscilatoria si para algún  $\theta(\omega)$  (necesariamente único) puede ser escrita en la forma (I.252) donde  $A_t(\omega)$  es de la forma:

$$A_t(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\theta t} dK_{\omega}(\theta) \tag{I.253}$$

donde  $|dK_{\omega}(\theta)|$  tiene un máximo absoluto en  $\theta = 0$ .

La función  $A_t(\omega)$  puede ser considerada como la envolvente de  $\phi_t(\omega)$ . Si además, la familia  $\{\phi_t(\omega)\}$  es tal que  $\theta(\omega)$  puede considerarse una función univaluada de  $\omega$ , entonces podemos transformar la variable  $\theta(\omega)$  en  $\omega$  y escribir:

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_s^*(\omega) A_t(\omega) e^{j\omega(t-s)} d\mu(\omega) \tag{I.254}$$

y correspondientemente:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_t(\omega) e^{j\omega t} dZ(\omega) \quad E\{|dZ(\omega)|^2\} = d\mu(\omega) \tag{I.255}$$

Puesto que  $e^{j\omega t}$  es un caso particular de (I.254), esta clase de procesos oscilatorios incluye a todos los procesos estacionarios de segundo orden.

Se define el espectro de potencia evolutivo en el instante  $t$  con respecto a la familia  $\mathcal{F}$ , como:

$$dH_t(\omega) = |A_t(\omega)|^2 d\mu(\omega) \tag{I.256}$$

Hay que notar que si  $x(t)$  es estacionario, y  $\mathcal{F}$  es la familia de

exponenciales complejas,  $dH_t(\omega)$  se reduce a la definición estandar de espectro integrado. La interpretación física es la de una distribución frecuencial de potencia, pero mientras que en el caso estacionario determina el comportamiento del proceso para todo  $t$ , en nuestro caso indica el contenido espectral del proceso en las cercanías del instante de tiempo  $t$ .

Aunque de acuerdo a la definición (I.13), el espectro evolutivo,  $dH_t(\omega)$  depende de la familia elegida  $\mathcal{F}$ , de la ecuación (I.254) se sigue que:

$$\text{var}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |A_t(\omega)|^2 d\mu(\omega) \quad \text{I.257}$$

y de ambas:

$$\text{var}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dH_t(\omega) \quad \text{I.258}$$

por lo que el valor de la integral de  $H_t(\omega)$  es independiente de la familia particular  $\mathcal{F}$ , y, para todas las familias, representa la potencia total del proceso en el instante  $t$ .

### 6.2.3 PROCESOS SEMI-ESTACIONARIOS

Sea  $x(t)$  un proceso oscilatorio cuya no-estacionariedad característica es un cambio lento con el tiempo. Entonces podemos esperar que exista una familia  $\mathcal{F}$  de funciones oscilatorias  $\phi_t(\omega) = A_t(\omega) e^{j\omega t}$  para la cual  $x(t)$  tenga una representación de la forma (I.255) y tal que para cada  $\omega$ ,  $A_t(\omega)$  sea una función lentamente variable con  $t$  (su transformada de Fourier debe estar altamente concentrada en la región de frecuencia cero).

Se dice que una familia  $\mathcal{F}$  de funciones oscilatorias es semi-estacionaria si la función  $B_{\mathcal{F}}(\omega)$  está acotada para toda  $\omega$ , y la constante  $B_{\mathcal{F}}$  definida por:

$$B_{\mathcal{F}} = \left[ \sup_{\omega} \{B_{\mathcal{F}}(\omega)\} \right]^{-1} \quad \text{I.259}$$

se denomina ancho característico de la familia  $\mathcal{F}$ .

Se dice que un proceso  $x(t)$  es semi-estacionario si existe una familia semi-estacionaria  $\mathcal{F}$  en términos de la cual  $x(t)$  tenga una representación de la forma (I.255).

Para un proceso semi-estacionario particular  $x(t)$ , consideremos la clase

$\mathcal{E}$  de familias semi-estacionarias, en términos de las cuales el proceso  $x(t)$  admite una representación espectral. Definimos el ancho característico  $B_x$ , del proceso  $x(t)$  como:

$$B_x = \sup_{F \in \mathcal{E}} \{B_F\} \tag{I.260}$$

$B_x$  puede ser interpretado como el máximo intervalo sobre el cual el proceso puede ser tratado como "aproximadamente estacionario". Hay que notar que para procesos estacionarios el ancho característico es  $\infty$ .

Sea  $\mathcal{E}^* \subset \mathcal{E}$  una subclase de familias cuyo ancho característico es igual a  $B_x$  y  $\mathcal{F}^*$  una familia perteneciente a  $\mathcal{E}^*$ . La representación espectral de  $x(t)$  en términos de la familia  $\mathcal{F}^*$  viene dada por:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_t^*(\omega) e^{j\omega t} dZ^*(\omega) \tag{I.261}$$

Diremos que  $u(y)$  es una pseudo función  $\delta$  de orden  $\varepsilon$  con respecto a  $v(y)$ , si para cualquier  $k$ ,  $\exists \varepsilon \ll 1$  independiente de  $k$ , tal que:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x+k)dx - v(k) \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx \right| < \varepsilon \tag{I.262}$$

Supongamos ahora que  $\{g(u)\}$  es un filtro cuadrado integrable y normalizado, por lo que:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 d\omega = 1 \tag{I.263}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u| |g(u)| du = B_g \tag{I.264}$$

donde  $\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-j\omega u} du$

Sea  $\mathcal{F}$  una familia estacionaria con ancho característico  $B_F$ . Entonces, para cada  $t, \omega$ ,  $\{e^{j\omega t} dK_{\omega}(\theta)\}$  es una pseudo-función  $\delta$  de orden  $(B_g/B_F)$  con respecto a  $\Gamma(\theta)$ .

#### 6.2.4 DETERMINACIÓN DEL ESPECTRO EVOLUTIVO

Sea  $x(t)$  un proceso semiestacionario con ancho característico  $B_x$  y  $\{g(u)\}$  un filtro que satisface (I.263) y (I.264), con ancho  $B_g$ . Para cualquier frecuencia  $\omega_0$ , definimos el proceso  $y(t)$  como una transformación lineal del proceso estacionario  $x(t)$ .

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) X(t-u) du \quad \text{I.265}$$

Por tanto, los espectros de  $\{x(t)\}$  e  $\{y(t)\}$  estarán relacionados por:

$$dH^Y(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2 dH^X(\omega) \quad \text{I.266}$$

donde:

$$\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-ju\omega} du \quad \text{I.267}$$

Suponiendo que  $\{x(t)\}$  satisface un modelo de la forma (I.254) y considerando una forma ligeramente más general de la transformación (I.265):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) x(t-u) e^{-j\omega_0(t-u)} du \quad \text{I.268}$$

donde  $\omega_0$  es una frecuencia constante, el espectro evolutivo de  $x(t)$  con respecto a la familia  $\mathcal{F}^*$  viene dado por:

$$E\{|y(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 dH_t^*(\omega+\omega_0) + O(\epsilon) \quad \text{I.269}$$

donde  $O(\epsilon)$  es un término que se puede hacer arbitrariamente pequeño eligiendo  $B_g$  mucho menor que  $B_x$  y :

$$dH_t^*(\omega) = |A_t^*(\omega)| d\mu^*(\omega) \quad \text{I.270}$$

Consideremos ahora el caso en que la medida  $\mu^*(\omega)$  es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, por lo que para cada  $t$  podemos escribir:

$$dH_t^*(\omega) = h_t^*(\omega)d\omega \quad \text{I.271}$$

donde  $h_t^*(\omega)$ , la función densidad espectral evolutiva, existe para todo  $\omega$ . Entonces, reescribiendo (I.269) en términos de  $h_t^*(\omega)$ , tenemos, hasta  $O(\epsilon)$ :

$$E\{|y(t)|^2\} \doteq \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)| h_t^*(\omega + \omega_0) d\omega \quad \text{I.272}$$

Hasta ahora hemos trabajado con una representación de  $x(t)$  en términos de la familia  $\mathcal{F}^*$ . Sin embargo, puesto que (I.272) es válida siempre que  $B_{\mathcal{F}} \ll B_{\mathcal{F}^*}$ , está claro que para un  $B_{\mathcal{F}}$  determinado, (I.272) seguirá siendo válido si utilizamos cualquier otra familia semiestacionaria  $\mathcal{F}$  cuyo ancho característico sea  $B_{\mathcal{F}} \gg B_{\mathcal{F}^*}$ . Por tanto, si  $dH_t(\omega) = h_t(\omega)d\omega$  es el espectro evolutivo de  $x(t)$  con respecto a dicha familia, entonces (I.272) continuará siendo válida si sustituimos  $h_t^*(\omega)$  por  $h_t(\omega)$ .

Sin embargo, (I.272) es sólo una aproximación. De hecho, si trabajamos en términos de una familia general  $\mathcal{F}$ , el valor exacto de  $E\{|y(t)|^2\}$  está dado por:

$$E\{|y(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{t, \omega + \omega_0}(\omega)|^2 dH_t(\omega + \omega_0) \quad \text{I.273}$$

Por tanto, el valor exacto de  $E\{|y(t)|^2\}$  es un promedio de  $dH_t(\omega)$  tanto sobre el tiempo, como sobre la frecuencia. Puesto que  $E\{|y(t)|^2\}$  es independiente de la elección de  $\mathcal{F}$ , el valor de este promedio de  $dH_t(\omega)$  debe ser también independiente de  $\mathcal{F}$ . Por tanto, el miembro derecho de (I.273) tiene una interpretación clara como el promedio de la potencia total del proceso contenida dentro de una banda de frecuencias en la región de  $\omega_0$  y en un intervalo de tiempo en las cercanías de  $t$ .

Al escribir (I.272) hemos asumido que el efecto de promediado en el tiempo es despreciable. Sin embargo, el grado de precisión de dicha fórmula,

depende del cociente  $B_G/B_F$ . Veámoslo con dos ejemplos:

a)  $B_G = 0 \Rightarrow g(u) = \delta(u)$

En este caso, (I.272) es exacta y se reduce a:

$$E\{|y(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} dH_t(\omega) \tag{I.274}$$

b)  $g(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \{g_T(u)\}$  donde  $g_T(u) = \begin{cases} 0 & |u| \geq T/2 \\ \sqrt{(1/T)} & |u| < T/2 \end{cases}$

por lo que  $B_G = \infty$ . En este caso se puede demostrar:

$$E\{|y(t)|^2\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |G_{T,\omega_0}(\omega)|^2 d\mu(\omega + \omega_0) \tag{I.275}$$

donde  $G_{T,\omega_0}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A_u(\omega + \omega_0) e^{ju\omega} du$

Hay que notar que  $E\{|y(t)|^2\}$  es independiente de  $t$ , y se reduce a la definición clásica del espectro de  $x(t)$  ( si  $x(t)$  fuera estacionario), pero (I.272) no es válida para todas las familias.

El miembro derecho de (I.274) es una función sólo del espectro evolutivo en el instante  $t$  y no involucra sus valores en otros instantes de tiempo, pero no da información acerca de la distribución de  $dH_t(\omega)$  con respecto a la frecuencia, pues es totalmente independiente de  $\omega_0$ . Suponiendo que para cada  $T$ ,  $|G_{T,\omega_0}(\omega)|^2$  está altamente concentrada en la región de  $\omega = 0$  (para que sea una función lentamente variable en el tiempo), el miembro derecho de (I.275) será aproximadamente igual a:

$$d\mu(\omega_0) = \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |G_{T,\omega_0}(\omega)|^2 d\omega \right\} \tag{I.276}$$

y esta cantidad, completamente independiente de  $t$ , puede ser interpretada como una forma de promediar sobre  $t$  los valores de  $dH_t(\omega_0)$  para  $-\infty \leq t \leq \infty$ . Por tanto vemos que *cuanta más precisamente queremos determinar  $dH_t(\omega)$  como una función del tiempo, con menos precisión podemos determinarla*

como función de la frecuencia y vice-versa. Esta característica sugiere una forma del PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE: *Al determinar el espectro evolutivo, no se puede obtener simultáneamente un alto grado de resolución a la vez en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.* Daniells (1965) apuntó que este principio de incertidumbre es completamente análogo al principio de incertidumbre de Heisenberg en la mecánica cuántica.

Nos centraremos a continuación en la estimación del espectro evolutivo para procesos discretos:

### 6.2.5 PROCESOS DISCRETOS

Un proceso discreto oscilatorio tiene la forma:

$$x_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} A_n(\omega) dZ(\omega) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad I.277$$

donde, para cada  $\omega$ , la serie  $\{A_n(\omega)\}$  tiene una transformada generalizada de Fourier cuyo módulo tiene un máximo absoluto en el origen, y  $Z(\omega)$  es un proceso ortogonal en el intervalo  $(-\pi, \pi)$ , con  $E\{|dZ(\omega)|^2\} = d\mu(\omega)$ . El espectro evolutivo en el tiempo  $t$  con respecto a la familia de series  $\mathcal{F} \equiv \{e^{j\omega n} A_n(\omega)\}$  se define como:

$$dH_n(\omega) = |A_n(\omega)|^2 d\mu(\omega) \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad I.278$$

La función densidad espectral evolutiva  $h_n(\omega)$  (con respecto a la familia con el ancho característico máximo) puede ser estimada por el siguiente método.

Sea :

$$U_n = \sum_{u=-\infty}^{\infty} g_u x_{t-u} e^{-j\omega_0(n-u)} \quad I.279$$

$$V_n = \sum_{v=-\infty}^{\infty} w_{T',v} |U_{n-v}|^2 \quad I.280$$

y se puede demostrar que:

$$E\{V_n\} \approx \int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}_n(\omega + \omega_0) |\Gamma(\omega)|^2 d\omega \quad \text{I.281}$$

donde:

$$\bar{h}_t(\omega + \omega_0) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} w_{T',v} h_{t-v}(\omega + \omega_0) \quad \text{I.282}$$

y:

$$\Gamma(\omega) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} g_u e^{-j\omega u} \quad \text{I.283}$$

Además se puede ver que:

$$\text{var}\{V_t\} \approx \{\tilde{h}_t^2(\omega_0)\} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |W_{T'}(\omega)|^2 d\omega \right\} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\Gamma(\omega)|^4 d\omega \right\} (1 + \delta_0, \pm\pi, \omega_0) \quad \text{I.284}$$

donde

$$\tilde{h}_t^2(\omega_0) = \frac{\sum_{v=-\infty}^{\infty} h_{t-v}^2(\omega_0) \{w_{T',v}\}^2}{\sum_{v=-\infty}^{\infty} \{w_{T',v}\}^2} \quad W_{T',v}(\omega) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} w_{T',v} e^{-j\omega v}$$

Si se conociera exactamente el núcleo de la covarianza  $R(s,t)$ , entonces en principio se podría determinar la medida  $d\mu(\omega)$  correspondiente a una familia dada  $\{A_t(\omega)\}$  invirtiendo (I.254). Una vez hecho esto,  $dH_n(\omega)$  vendría dada por  $dH_t(\omega) = |A_t(\omega)| d\mu(\omega)$ .

Al evaluar la estimación del espectro evolutivo tenemos que elegir valores adecuados para los parámetros asociados con las funciones  $g(u)$  y  $w_{T'}(u)$  (correspondientes al *ancho de banda en el dominio de frecuencia* y el *ancho de banda en el dominio del tiempo*). Las relaciones de diseño que gobiernan la elección de estos parámetros son discutidas por Priestley (1966).

Priestley y Subba Rao propusieron en 1969 una prueba para determinar la estacionariedad de una señal.

## 6.3 OTRAS DEFINICIONES DE ESPECTRO DEPENDIENTE DEL TIEMPO

## 6.3.1 ESPECTRO DE POTENCIA INSTANTÁNEA

El primer intento de definir un espectro dependiente del tiempo se debe a Page (1952), que introdujo la cantidad:

$$g_T^*(\omega) = \left| \int_0^T x(t) e^{-j\omega t} dt \right| \quad \text{I.285}$$

$g_T^*(\omega)$  es proporcional al periodograma de las observaciones en el intervalo  $(0, T)$ , y definió el espectro  $f^*(\omega)$  del proceso como:

$$f^*(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E\{g_T^*(\omega)\} \quad \text{I.286}$$

El espectro de potencia instantánea  $\rho_t(\omega)$  lo definió como:

$$E\{g_T^*(\omega)\} = \int_0^T \rho_t(\omega) dt \quad \text{I.287}$$

por lo que:

$$\rho_t(\omega) = \frac{d}{dt} E\{g_T^*(\omega)\} \quad \text{I.288}$$

y:

$$f(\omega) = \int_0^{\infty} \rho_t(\omega) dt \quad \text{I.289}$$

Por tanto, el espectro de potencia instantáneo  $\{\rho_t(\omega)dt\}$  representa, la diferencia entre la distribución de potencia del proceso sobre el intervalo  $(0, t)$  y la del intervalo  $(0, t+dt)$ . Sin embargo, esto es, en general, muy diferente del espectro evolutivo que representa la distribución de potencia dentro del intervalo  $(t, t+dt)$ . Algunas ventajas son:

- La imparcialidad de características para diferentes dinámicas de la señal

- Posibilidad de aplicación directa a señales reales muestreadas a la frecuencia de Nyquist.

- Capacidad de analizar señales multicomponente.
- Mantenimiento de la resolución espectral en los punto finales.

### 6.3.2 EL ESPECTRO DE WIGNER

El espectro de un proceso no estacionario no puede ser definido simplemente generalizando el espectro estacionario ordinario. Como se sabe, las propiedades deseables de los espectros de procesos no estacionarios son contradictorias. En particular, el tener un espectro con valores no negativos excluye la compatibilidad con el filtrado lineal y la modulación.

Sin embargo, se puede intentar estimar un tipo de espectro variable en el tiempo llevando a cabo un análisis espectral estacionario localmente. La técnica más popular es la del periodograma de tiempo corto. Esta aproximación tiene la dificultad de que depende de la ventana de datos elegida. Priestley intentó evitar este problema por medio de sus espectros evolutivos. Estos mantienen la no negatividad del espectro ordinario, pero para un proceso no-estacionario, el espectro evolutivo no es único y la variable "frecuencia" puede perder en algunos casos su significado físico.

La otra aproximación posible consiste en sacrificar la propiedad de no-negatividad de un espectro variable en el tiempo para obtener una representación conjunta tiempo-frecuencia para señales deterministas y procesos aleatorios armonizables.

Sea  $x(t)$  un proceso no-estacionario continuo, con un núcleo de covarianza  $R(s,t)$ . El espectro de Wigner  $\psi_t(\omega)$  se define como la transformada de Fourier de  $R(t-\tau/2, t+\tau/2)$ , considerada como una función de  $\tau$  con  $t$  fijo, es decir:

$$\psi_t(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(t-\tau/2, t+\tau/2) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \text{I.290}$$

La función  $\psi_t(\omega)$  se reduce a la definición clásica del espectro cuando el proceso es estacionario. Sin embargo,  $\psi_t(\omega)$  carece completamente de interpretación física. Esta definición de espectro dependiente del tiempo fue discutida por Mark (1970), que apuntó que  $\psi_t(\omega)$  puede tomar valores negativos para ciertos procesos e introdujo el denominado **espectro físico**  $s(\omega, t, W)$  definido como sigue. Sea  $W(t)$  una función valuada real tal que  $W(0) > 0$  y  $W(t)$  es pequeño fuera de los alrededores de  $t=0$ , y  $\int_{-\infty}^{\infty} W^2(t) dt = 1$ .

Entonces  $S(\omega, t, W)$  está definido por:

$$S(\omega, t, W) = E \left\{ \left| \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u) x(u) e^{-j\omega u} du \right|^2 \right\} \quad \text{I.291}$$

Desgraciadamente,  $S(\omega, t, W)$  es de poco uso como definición de espectro dependiente del tiempo puesto que implica una función arbitraria  $W(t)$ . Por tanto, cada posible elección de  $W(t)$  conduce a una expresión diferente para  $S(\omega, t, W)$ .

Algunas desventajas son:

- Interferencia al usar señales reales
- Existencia de términos cruzados cuando la señal es multicomponente.
- Características empobrecidas cuando se presenta más de un desplazamiento lineal de frecuencias
- Pérdida de información espectral en los extremos del segmento de análisis.

### 6.3.3 APROXIMACIÓN DE TJØSTHEIM

Tjostheim (1976) propuso la siguiente definición de espectro dependiente del tiempo. Sea  $x(t)$  un proceso no-estacionario discreto. Cramer (1961) mostró que si  $x(t)$  es puramente no-determinista, puede ser expresado de la siguiente forma:

$$x(t) = \sum_{u=0}^{\infty} a_t(u) \epsilon_{t-u} \quad \text{I.292}$$

donde  $\epsilon_t$  es un proceso estacionario de ruido blanco. Tjostheim define el espectro en el instante  $t$  como:

$$p_t(\omega) = \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{2\pi} \left| \sum_{u=0}^{\infty} a_t(u) e^{-j\omega u} \right|^2 \quad \text{I.293}$$

Se puede demostrar que  $p_t(\omega)$  es exactamente el espectro evolutivo de  $x(t)$  con respecto a la familia  $\{A_t^1(\omega) = \sum_{u=0}^{\infty} a_t(u) e^{-j\omega u}\}$  y con  $d\mu(\omega) \cong d\omega$ .

Por tanto, la definición de Tjostheim es un caso especial de la definición del espectro evolutivo. El mayor inconveniente de esta definición yace en el hecho de que a menos que la familia  $\{A_t^1(\omega)\}$  sea oscilatoria, la variable  $\omega$ , no posee una interpretación física en términos de frecuencia y consecuentemente  $p_t(\omega)$  no representa una distribución "potencia/frecuencia".

## 6.4 MÉTODOS NO LINEALES DE ANÁLISIS ESPECTRAL

### 6.4.1 SERIES DE VOLTERRA

El primer estudio sistemático de modelos no lineales se debe a Wiener (1958) que consideró relaciones no lineales entre una entrada  $u[t]$  y una salida  $x[t]$  de un sistema físico. El modelo de Wiener para el caso discreto toma la forma:

$$x[n] = \sum_{m=0}^{\infty} g[m] u[n-m] + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g[l,m] u[n-l] u[n-m] + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} g[l,m,q] u[n-l] u[n-m] u[n-q] + \dots \quad \text{I.294}$$

El miembro derecho se conoce normalmente con el nombre de desarrollo en serie de Volterra (1959). Wiener trabajó principalmente con el caso en el cual tanto la entrada como la salida eran observables, pero en el contexto de modelado de series temporales podemos tomar  $u[n]$  como un proceso independiente no observable. Si  $u[n] \equiv \varepsilon[n]$ , el primer término de (I.294) es idéntico al modelo general lineal y los sucesivos términos se denominan componentes cuadráticas, cúbicas, etc... Desde el punto de vista de la estimación estadística estos modelos son extremadamente difíciles de tratar.

La dificultad básica es que (I.294) contiene demasiados parámetros, por lo que no es posible estimarlos eficientemente a partir de un grupo de observaciones finitas a menos que las series  $\{g[m]\}, \{g[l,m]\}, \dots$  posean alguna propiedad que permita expresarlas en función de un número relativamente pequeño de parámetros.

Por otra parte la aproximación paramétrica en el caso lineal se alcanza normalmente suponiendo que  $\Gamma_1(\omega)$  es una función racional que conduce a un

modelo de tipo ARMA. En el caso no lineal, no existe una función simple que caracterice el modelo de la misma forma que la función de transferencia. En su lugar tenemos que considerar una secuencia infinita de funciones de transferencia generalizadas definidas por:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\omega_1) &= \sum_{l=0}^{\infty} g[l] e^{-j\omega_1 l} \\ \Gamma_2(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g[l, m] e^{-j\omega_1 l - j\omega_2 m} \\ \Gamma_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} g[l, m, q] e^{-j\omega_1 l - j\omega_2 m - j\omega_3 q} \end{aligned} \tag{I.295}$$

Supongamos que  $u[n]$  es un proceso estacionario con representación espectral:

$$u[n] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} dZ_u(\omega) \tag{I.296}$$

Entonces (I.294) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} x[n] &= \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_1(\omega_1) e^{j\omega_1 n} dZ_u(\omega_1) \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_2(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1 + \omega_2)n} dZ_u(\omega_1) dZ_u(\omega_2) \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)n} dZ_u(\omega_1) dZ_u(\omega_2) dZ_u(\omega_3) \end{aligned} \tag{I.297}$$

De esta manera  $\Gamma_1(\omega_1)$  tiene una interpretación similar a la de la función de transferencia de un modelo lineal, mientras  $\{\Gamma_2(\omega_1, \omega_2) dZ_u(\omega_1) dZ_u(\omega_2)\}$  representa la contribución de las componentes con frecuencias  $\omega_1, \omega_2$  en  $u[n]$  a la componente con frecuencia  $(\omega_1 + \omega_2)$  en  $x[n]$ . Hay que notar aquí la diferencia importante entre sistemas lineales y no-lineales:

*En el caso lineal a una entrada con frecuencia  $\omega_0$  le corresponde una*

salida con frecuencia  $\omega_0$ .

En el caso no-lineal a una entrada con frecuencia  $\omega_0$  le corresponde una salida con frecuencias  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ . Este fenómeno se conoce como distorsión armónica en los amplificadores de audio.

#### 6.4.2 POLIESPECTROS

Si pensamos en la ecuación (I.294) por analogía con un modelo de regresión polinomial, está claro que no podemos determinar todas las funciones de transferencia generalizadas usando solamente las propiedades de segundo orden de  $u[n]$  y  $x[n]$ . De hecho, si queremos ajustar los primeros  $p$  términos de (I.294), tendremos que considerar los momentos conjuntos hasta el orden  $m+1$  de  $u[n]$  y  $x[n]$ , lo cual sugiere que podría ser útil introducir la transformada de Fourier de estos momentos de mayor orden denominadas poliespectros y definidas como sigue:

Sea  $x[n]$  un proceso estacionario hasta el orden  $k$ .

Sea  $M(t)$  la función generatriz de momentos definida por:

$$M(t) = \sum_i p_i e^{t x[i]} \quad \text{I.298}$$

donde  $p_i = p\{x=x_i\}$  es la función distribución de probabilidad.

Sea  $K(t)$  la función generatriz de cúmulos dada por:

$$K(t) = \ln\{M(t)\}$$

Sea  $C(s_1, s_2, \dots, s_{k-1})$  el cúmulo conjunto de orden  $k$  del conjunto de variables aleatorias  $\{x[n], x[n+s_1], \dots, x[n+s_{k-1}]\}$ .

El poliespectro de orden  $k$  se define por:

$$h_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{s_{k-1}=-\infty}^{\infty} C(s_1, s_2, \dots, s_{k-1}) e^{-j(\omega_1 s_1 + \dots + \omega_{k-1} s_{k-1})} \quad \text{I.299}$$

suponiendo que dicha transformada exista. Puesto que el cúmulo de segundo orden  $C(s_1)$  es simplemente  $\text{cov}(x[n], x[n+s_1])$ , de ello se sigue que el poliespectro de segundo orden es exactamente el mismo que el espectro de potencia convencional. Asimismo, el cúmulo de tercer orden coincide con el tercer momento alrededor de la media:

$$C(s_1, s_2) = E\{(x[n]-\mu_x)(x[n+s_1]-\mu_x)(x[n+s_2]-\mu_x)\} = \mu(s_1, s_2)$$

por lo que el poliespectro de tercer orden puede ser escrito como:

$$h_k(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{s_{k-1}=-\infty}^{\infty} \mu(s_1, s_2) e^{-j(\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2)} \quad \text{I.300}$$

e invirtiendo esta transformada:

$$\mu(s_1, s_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2)} h_3(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad \text{I.301}$$

La función  $h_3(\omega_1, \omega_2)$  se suele conocer con el nombre de **biespectro**. (Esta terminología se debe a Tukey (1959) y el poliespectro de cuarto orden se denomina **triespectro**). Si escribimos:

$$x[n] - \mu_x = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega t} dZ_x(\omega) \quad \text{I.302}$$

entonces  $\mu(s_1, s_2)$  puede escribirse como:

$$\mu(s_1, s_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jt(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)} e^{j(s_1\omega_1 + s_2\omega_2)} E\{dZ_x(\omega_1)dZ_x(\omega_2)dZ_x(\omega_3)\} \quad \text{I.303}$$

Puesto que el miembro izquierdo es sólo una función de  $s_1, s_2$ , también debe serlo el miembro derecho, por lo que  $E\{dZ_x(\omega_1)dZ_x(\omega_2)dZ_x(\omega_3)\}$  debe anularse excepto sobre la línea  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ . Por tanto el biespectro puede ser escrito en forma alternativa:

$$h_3(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = E\{dZ_x(\omega_1)dZ_x(\omega_2)dZ_x(-\omega_1 - \omega_2)\} \quad \text{I.304}$$

La propiedad relevante de los poliespectros es que todos los poliespectros de orden mayor que el segundo se anulan cuando el proceso  $x[n]$  es gaussiano y por tanto estos espectros de mayor orden pueden tomarse como una medida del alejamiento de la gaussianidad del proceso.

Igualmente se pueden definir los poliespectros cruzados de dos procesos

$x[n]$ ,  $y[n]$

La idea de construir transformadas de Fourier de cúmulos de mayor orden fue sugerida por Kolmogorov, y los poliespectros fueron introducidos por Shiryaev (1960), Brillinger (1965) y Brillinger y Rosenblatt (1967) profundizaron en las propiedades teóricas de los poliespectros y discutieron también la estimación de poliespectros a partir de muestras. Los biespectros fueron discutidos por Tukey (1959) y Akaike (1966). Una aplicación de los biespectros al estudio de las olas oceánicas fue descrita por Hasselman, Munk y MacDonald (1963), una aplicación a las mareas por Cartwright (1968) y aplicaciones a turbulencias por Lii, Rosenblat y Van Atta (1976) y Helland, Lii, Rosenblat (1979).

#### 6.4.3 MODELO BILINEAL

La principal dificultad al tratar modelos no-lineales en el dominio del tiempo ha sido la falta de una representación suficientemente general que sólo contenga un número finito de parámetros. Los modelos bilineales parecen ofrecer buenas posibilidades. Estos han sido introducidos por teóricos de control y se describen en la forma de espacio de estados:

$$x[n+1] = A x[n] + B \varepsilon[n+1] + \varepsilon[n]Cx[n] \quad \text{I.305}$$

$$y[n] = H x[n] \quad \text{I.306}$$

Si  $C=0$ , la ecuación (I.305) se reduce a la descripción en el espacio de estados de un modelo lineal, mientras que de lo contrario es un modelo no-lineal. La ventaja más importante del modelo bilineal es que implica solamente a un número finito de parámetros y por tanto el problema de ajustar dicho modelo a los datos se hace plausible. En este sentido el modelo bilineal puede ser considerado como una extensión natural no-lineal de un modelo ARMA.

#### 6.4.4 MODELOS UMBRAL

Una clase diferente de modelos no-lineales con un número finito de parámetros son los modelos umbral. La idea básica es comenzar con un modelo lineal para un proceso  $x[n]$  y a continuación permitir que estos parámetros varíen de acuerdo con los valores de un número finito de muestras del pasado de  $x[n]$  o un número finito de muestras del pasado de un proceso asociado

$y[n]$ . Por tanto, un modelo umbral autoregresivo de primer orden (TAR(1)) queda descrito por:

$$x[n] = \begin{cases} a^1 x[n-1] + \varepsilon^1[n] & \text{si } x[n-1] < d \\ a^2 x[n-1] + \varepsilon^2[n] & \text{si } x[n-1] \geq d \end{cases} \quad \text{I.307}$$

#### 6.4.5 MODELOS AUTOREGRESIVOS EXPONENCIALES

Los modelos autoregresivos exponenciales fueron introducidos por Ozaki (1978) y Haggan y Ozaki (1978) para reproducir ciertas características de la teoría de vibraciones aleatorias no-lineales. Las vibraciones aleatorias no-lineales son descritas típicamente por ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma:

$$\ddot{x}(t) + f\{\dot{x}(t)\} + g\{x(t)\} = y(t) \quad \text{I.308}$$

donde  $f\{\}$  (la "fuerza de amortiguamiento") y  $g\{\}$  (La "fuerza excitadora") son funciones no-lineales e  $y(t)$  es una entrada estocástica. Dos ejemplos bien conocidos son la ecuación de Duffin:

$$\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t)^3 = y(t) \quad \text{I.309}$$

y la ecuación de Van der Pol:

$$\ddot{x}(t) + f\{\dot{x}(t)\} + ax(t) = y(t) \quad \text{I.310}$$

Si tanto  $f\{\}$  como  $g\{\}$  son funciones lineales, la ecuación (I.308) se reduce a un modelo AR(2).

Sin embargo, si el sistema es no-lineal, al tener ruido blanco a la entrada se generará una salida oscilatoria aproximada a la frecuencia  $\omega_1$  de oscilación del sistema lineal, pero que podrá variar con la amplitud local de la oscilación. Esto se conoce como **frecuencia dependiente de la amplitud**. Además si un sistema no-lineal está conducido por una entrada periódica, la salida será también aproximadamente periódica con la misma frecuencia que la entrada pero cuya amplitud será una función discontinua de la frecuencia. Esto se conoce como el fenómeno de salto y aparece en la solución de la ecuación de Duffin.

## 7 PROCESOS ALEATORIOS

## 7.1 INTRODUCCIÓN

Un proceso aleatorio discreto se puede ver como un conjunto de series discretas, reales o complejas, del tiempo o el espacio, cada una de las cuales se puede considerar como el resultado de un experimento.

El conjunto de series se denominará:

$x[n, i]$        $i \Rightarrow$  salida  $i$ -ésima del conjunto  
 $n \Rightarrow$  índice del tiempo

Para un  $i$  dado, se utilizará la notación  $x[n]$

Para un índice de tiempo fijo  $n$ , el valor del elemento observado sobre todas las series será una variable aleatoria. En la siguiente tabla se presentan algunas definiciones de utilidad para el estudio de procesos aleatorios.

Tabla 1.8 *Conceptos importantes en probabilidad*

Función Distribución de Probabilidad	$F(\alpha, n) = P(x[n] \leq \alpha)$
Función Densidad de Probabilidad	$p(\alpha, n) = \frac{dF(\alpha, n)}{d\alpha}$
Valor Esperado	$\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$ $\bar{x}[n] = E\{x[n]\}$ $\sum_i x_i p_i$
Valor cuadrático medio 2° momento	$E\{ x ^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty}  x ^2 p(x) dx$
Esperanza de $g(x)$	$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p(x) dx$
Varianza	$\text{var}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}  x - E\{x\} ^2 p(x) dx = E\{ x ^2\} - (E\{x\})^2$ <p>2° momento alrededor de la media</p>

Covarianza	$cov(x,y) = E\{(x - E\{x\})(y-E\{y\})\}$
Sesgo	$S(\hat{\alpha}) = \alpha - E\{\hat{\alpha}\}$ Estimador insesgado $\Rightarrow S(\alpha)=0$
Error cuadrático medio	$ecm(\hat{\alpha})=E\{ \alpha-\hat{\alpha} ^2\} = var(\hat{\alpha}) +  S(\hat{\alpha}) ^2$
Autocorrelación	$r_{xx}[n_1,n_2] = E\{x[n_1] x^*[n_2]\}$
Autocovarianza	$c_{xx}[n_1,n_2] = E\{ (x[n_1]-\bar{x}[n_1]) (x^*[n_2]-\bar{x}^*[n_2]) \}$ $c_{xx}[n_1,n_2] = r_{xx}[n_1,n_2] - \bar{x}[n_1] \bar{x}^*[n_2]$

Se dice que un estimador es consistente si, según aumenta el número de observaciones, el sesgo y la varianza tienden a cero. Si tenemos dos procesos aleatorios entonces podemos definir las siguientes cantidades.

Correlación cruzada	$r_{xy}[n_1,n_2] = E\{x[n_1] y^*[n_2]\}$
Covarianza cruzada	$c_{xy}[n_1,n_2] = E\{ (x[n_1] - \bar{x}[n_1]) (y^*[n_2] - \bar{y}^*[n_2]) \}$ $r_{xy}[n_1,n_2] - \bar{x}[n_1] \bar{y}^*[n_2]$

Las definiciones que hemos visto hasta este punto muestran una dependencia explícita del índice temporal (las propiedades estadísticas varían generalmente con el tiempo). A continuación presentamos algunas definiciones para un conjunto de procesos aleatorios.

Tabla I.9 Definiciones importantes para procesos aleatorios

P. A. Estacionario en sentido amplio	$\bar{x}[n]=\bar{x}$ $r_{xx}[m]=E\{x[n+m] x[n]\}$
P. A. Conjuntamente Estacionarios en sentido amplio	Ambos estacionarios $r_{xy}[m]=E\{x[n+m]y^*[n]\}$
Densidad de Potencia Espectral (DPE)	$P_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_{xx}[m] e^{(-j2\pi f m t)}$
Densidad de Potencia Espectral cruzada	P. conjuntamente estacionarios $P_{xy}(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_{xy}[m] e^{(-j2\pi f m t)}$

La Densidad de Potencia Espectral (DPE), que se supone limitada a  $\pm 1/(2T)$  Hz es periódica en frecuencia con periodo  $1/T$  Hz y describe como se distribuye con la frecuencia la varianza de un proceso aleatorio. Si tomamos la inversa:

$$r_{xx}[m] = \int_{-1/2 T}^{+1/2 T} P_{xx}(f) e^{(j2\pi f m T)} df \quad I.311$$

$$r_{xx}[0] = \int_{-1/2 T}^{+1/2 T} P_{xx}(f) df \quad I.312$$

$r_{xx}[0]$  representa la potencia promedio del proceso aleatorio. El área bajo la curva  $P_{xx}(f)$  debe representar también la potencia promedio. Por tanto  $P_{xx}(f)$  es una función densidad (Potencia por unidad de frecuencia). Dado que la autocorrelación cumple la propiedad:

$$r_{xx}[m] = r_{xx}^*[-m] \quad I.313$$

la DPE debe ser una función positiva estrictamente real. Debido a que  $r_{xy}[-m] \neq r_{xy}^*[m]$ , esta función, en general, será compleja. Sin embargo, se mantiene la propiedad:

$$P_{xy}(f) = P_{yx}^*(f) \quad I.314$$

## 7.2 ERGODICIDAD

Hasta este momento, sólo se ha utilizado el promedio estadístico de conjuntos para definir la media, correlación, covarianza y densidad de potencia espectral de procesos aleatorios. Sin embargo, en la práctica, uno no tiene un conjunto de señales a partir de las cuales evaluar estos descriptores estadísticos.

Es deseable estimar estas propiedades estadísticas, a partir de una sola señal  $x(t)$ , utilizando promedios temporales en lugar de promedios de conjunto. La propiedad requerida para cumplir esto es la ergodicidad. Un proceso aleatorio se dice *ergódico* si, con probabilidad 1, todos sus estadísticos pueden ser predichas a partir de una sola señal del conjunto por media del promediado temporal. Es decir, los promedios temporales de todas las posibles señales simples son iguales a la misma constante (el promedio de

conjunto).

El concepto de ergodicidad requiere la suposición de que los datos son estacionarios hasta el cuarto momento. Para que un proceso sea estacionario, los momentos estadísticos deben ser independientes del origen de tiempos seleccionados. Esto parece apropiado intuitivamente puesto que una cantidad promediada temporalmente es independiente del tiempo. Por tanto, si uno promedia temporalmente debe obtener  $\bar{x}$ .

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x[n] = E\{x[n]\} = \bar{x} \quad I.315$$

Se puede demostrar que el límite, si existe, es cierto si y sólo si la varianza del promedio temporal tiende a cero.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-2M}^{2M} \left( 1 - \frac{|m|}{2M+1} \right) c_{xx}[m] = 0 \quad I.316$$

donde  $c_{xx}[m]$  es la covarianza verdadera de conjunto del proceso aleatorio  $x[n]$

En este caso se dice que  $x[n]$  es ergódico en la media. De forma similar, si uno mira en varios lugares al producto de los valores muestrales en dos instantes de tiempo que estén separados por un desplazamiento  $m$ :

$$\begin{aligned} &x[n_1+m] x[n_1] \\ &x[n_2+m] x[n_2] \end{aligned}$$

Entonces, promediando para un proceso estacionario, el producto debe dar el valor de  $r_{xx}[m]$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x[n+m] x^*[n] = r_{xx}[m] \quad I.317$$

Se puede demostrar que esto es cierto, si y sólo si, la varianza del promedio temporal tiende a cero en el límite.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-2M}^{2M} \left( 1 - \frac{|m|}{2M+1} \right) c_{zz}[m] = 0 \quad \text{I.318}$$

donde  $c_{zz}[m]$  es la covarianza de conjunto verdadera de la autocorrelación del proceso aleatorio  $z_m[n] = x[n+m] x^*[n]$ . Hay que notar que  $c_{zz}[m]$  implica un momento estadístico de cuarto orden del proceso  $x[n]$ . Si lo anterior es cierto, se dice que  $x[n]$  es ergódico para la autocorrelación. Si el proceso estacionario  $x[n]$  es Gaussiano de media cero, entonces es sencillo demostrar que  $x[n]$  es ergódico en la media y en la autocorrelación (Papoulis (1977)). Aunque es más difícil probar la ergodicidad de procesos no Gaussianos, es suficiente decir que casi todos los procesos que son estacionarios, son también ergódicos. *Es necesario suponer que un proceso es estacionario para que los promedios de la media y la autocorrelación puedan reemplazar a los promedios de conjunto.*

La suposición de ergodicidad no sólo permite definiciones promediadas en el tiempo para la media y la autocorrelación, sino también para la densidad de potencia espectral.

$$P_{xx}(f) = E \left\{ \frac{1}{2M+1} \left| \sum_{n=-M}^M x[n] e^{(-j2\pi n f T)} \right|^2 \right\} \quad \text{I.319}$$

Esta DPE equivalente se obtiene por un promediado estadístico del cuadrado de la magnitud de la TDF de un conjunto de datos modificados por una ventana dividido por la longitud de los datos. Eliminando el operador esperanza tenemos el estimador de la DPE:

$$\hat{P}_{xx}(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \left| \sum_{n=-M}^M x[n] e^{(-j2\pi n f T)} \right|^2 \quad \text{I.320}$$

Este estimador se conoce como espectro muestral (o periodograma, tal como lo denominó Schuster). Este es un estimador inconsistente de la verdadera DPE. Aunque la media del espectro muestral tiende al valor correcto en el límite, la varianza no tiende a cero en el límite para infinitos datos, aunque será comparable en magnitud al valor medio del espectro muestral. *Este fue una de los fallos de los primeros usuarios del periodograma que obtenían estimaciones espectrales incorrectas*

## 7.3 SESGO Y VARIANZA DEL ESPECTRO MUESTRAL

Un análisis estadístico del periodograma para el caso general es complicado matemáticamente. El análisis que vamos a hacer a continuación es para el caso especial de un proceso Gaussiano de media cero. Este resultado puede usarse como referencia del comportamiento del estimador del periodograma en situaciones más generales (Jenkins & Watts (1968)).

El espectro muestral de una serie  $x[n]$  de longitud finita es:

$$\hat{P}_{xx}(f) = \frac{1}{N} |X(f)|^2 \quad \text{I.321}$$

donde  $X(f)$  es la transformada de Fourier de tiempo discreto

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi f n} \quad \text{I.322}$$

Esto es idéntico a la TDF del estimador de la secuencia de autocorrelación:

$$\hat{P}_{xx}(f) = \sum_{n=-(N-1)}^{(N-1)} \hat{r}_{xx}[m] e^{-j2\pi f n} \quad \text{I.323}$$

donde el estimador sesgado de la autocorrelación viene dado por:

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-M-1} x[n+m] x^*[n] \quad \text{I.324}$$

La media de este espectro es:

$$E\{\hat{P}_{xx}(f)\} = \sum_{n=-(N-1)}^{(N-1)} E\{\hat{r}_{xx}[m] e^{-j2\pi f n}\} =$$

$$\sum_{n=-(N-1)}^{(N-1)} \left[ \frac{N-|m|}{N} \right] \hat{r}_{xx}[m] e^{-j2\pi fn} = W(f) S_{xx}(f) \quad \text{I.325}$$

donde  $W(f)$  es la ventana de Bartlet cuya representación en el dominio temporal viene dada por:

$$W[m] = \begin{cases} 1 - \frac{|m|}{N} & |m| < N-1 \\ 0 & |m| > N-1 \end{cases} \quad \text{I.326}$$

La media del espectra muestral es la convolución de la verdadera DPE con la TDF de la ventana de Bartlet. El espectro muestral es, por tanto, sesgado para  $N$  finito pero insesgado para  $N$  infinito.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{P}_{xx}(f)\} = P_{xx}(f) \quad \text{I.327}$$

Para la varianza se obtiene la siguiente expresión:

$$\text{var}\{\hat{P}_{xx}(f)\} \approx |H(f)|^4 \rho^2 \left[ 1 + \left( \frac{\text{sen}(\omega N)}{N \text{sen}(\omega)} \right)^2 \right] \geq E\{\hat{P}_{xx}(f)\}^2 \quad \text{I.328}$$

A medida que  $N$  aumenta, la varianza muestral no tiende a cero, pero se hace proporcional al cuadrado del valor esperado de la DPE. Por tanto, un periodograma sin modificar es un estimador inconsistente de la DPE. Es decir,  $\hat{P}_{xx}(f)$  no converge en la media a  $P_{xx}(f)$  para cualquier valor de  $f$  si  $P_{xx}(f) > 0$ .

## 8 CONVERSORES ANALÓGICO/DIGITALES Y DIGITALES/ANALÓGICOS

Para el procesamiento digital de datos es necesario convertir una señal analógica a un número digital preciso, proporcional a su amplitud y viceversa. Esto es esencial en cualquier aplicación en la cual un computador o un procesador estén conectados o controlando un experimento o proceso, o cuando se usan técnicas digitales para llevar a cabo un trabajo analógico. También es necesario en los instrumentos de medida, de generación de señales, sintetizadores de formas de onda digitales y para controlar pantallas analógicas por un computador. En nuestro caso concreto, la aplicación más importante de los mismos es, obviamente, la conversión a números digitales de la amplitud de las señales proporcionadas por el electroencefalógrafo.

La captura de un valor analógico implica 4 operaciones:

- 1) Muestreo
- 2) Mantenimiento
- 3) Discretización
- 4) Codificación

De las dos primeras se encargan los muestreadores/retenedores, mientras que los conversores A/D realizan las dos últimas.

### 8.1 CIRCUITOS DE MUESTREO Y MANTENIMIENTO

Los circuitos de muestreo y mantenimiento se utilizan para *muestrear* una señal analógica en un instante dado y *mantener* el valor de dicha muestra durante tanto tiempo como sea necesario. Los instantes de muestreo y la duración del mantenimiento están determinados por una señal lógica de control, y el intervalo de mantenimiento depende de la aplicación a la que se destine el circuito.

La mayoría de los circuitos de muestreo y mantenimiento utilizan un condensador para mantener la tensión de la muestra. Un interruptor controlado electrónicamente provee un medio para cargar rápidamente el condensador hasta la tensión de muestra y luego suprimir la entrada de modo que el condensador pueda retener la tensión deseada.

En la práctica, los interruptores electrónicos y los condensadores no son perfectos y en ellos ocurren varias discrepancias respecto a los valores o estados ideales. Entre las especificaciones más importantes están las de tiempo de apertura y tiempo de adquisición. El tiempo de apertura es el *máximo retardo entre el instante en que la lógica de control ordena al*

*interruptor que se abra y el instante en que realmente ocurre la apertura.* El tiempo de apertura de un sistema determina esencialmente el tipo de interruptor que se debe utilizar.

Tabla I.10 *Tiempo de apertura de los distintos dispositivos.*

Interruptor	Tiempo de apertura
relé	milisegundos
Interruptores FET	50-100 ns
Interruptores diodo	1 ns

Como la señal de entrada cambia durante el intervalo de muestreo, transcurre un tiempo finito antes de que la salida sea idéntica a la entrada. El tiempo de adquisición es el *intervalo más corto transcurrido desde que se da la orden de muestra hasta que se pueda dar la orden de mantenimiento* y se obtenga como resultado una tensión de salida que sea aproximadamente la tensión de entrada con la exactitud necesaria.

## 8.2 CIRCUITOS CONVERSORES D/A y A/D

Los circuitos conversores D/A se encargan de transformar un valor digital en una tensión o voltaje analógico, mientras que los conversores A/D obtienen un valor digital a partir de una señal analógica.

### 8.2.1 ESPECIFICACIONES DE LOS CONVERSORES D/A

#### Resolución

Esta es una especificación importante de un conversor D/A y se define como el *menor incremento de tensión que puede ser discriminado por el circuito* y depende principalmente del número de bits de la palabra digital.

#### Precisión

La precisión de conversión depende de la diferencia entre la tensión real de salida analógica y la salida teórica. En la práctica un conversor debe tener una precisión mayor de  $\pm 1/2$  LSB para que precisión y resolución sean compatibles.

### Linealidad

La linealidad es una especificación de la máxima desviación de la salida medida con respecto a la línea recta que se extiende en todo el margen de la región de trabajo. Puede ser expresada como porcentaje de la tensión total de la escala o como fracción de la tensión equivalente del LSB (bit menos significativo) y debe ser menor que  $\pm 1/2$  LSB.

### Tiempo de establecimiento

Es el tiempo transcurrido hasta que la tensión de salida se ha estabilizado o aproximado a su valor final dentro de un límite especificado de precisión. Típicamente la especificación del tiempo de establecimiento indica cuando puede ser considerada como fiable la salida después de aplicado el impulso de entrada dentro de  $1/2$  LSB

### Sensibilidad a la temperatura

Para una entrada digital fija dada, la salida analógica varía con la temperatura a causa de que las fuentes de la tensión de referencia y de los resistores son sensibles a la temperatura. La sensibilidad a la temperatura de la tensión offset y la corriente de polarización del operacional afectan también a la tensión de salida. Las sensibilidades típicas están comprendidas entre los límites de  $\pm 50$  y  $\pm 1.5$  ppm/ $^{\circ}$ C en los conversores de alta calidad.

## 8.2.2 CONVERSORES DIGITAL/ANALÓGICO

Tabla I.11 *Conversores digital/Analógico*

Resistor ponderado	Resistencias $\frac{R_N}{R_0} = 2^{n-1}$	poco preciso	aplicaciones de baja resolución
Escalera R-2R	R, 2R	Mayor precisión	

## 8.2.3 CONMUTADORES UTILIZADOS EN LOS CONVERSORES D/A

Tabla I.12 Conmutadores utilizados en los conversores D/A

excitado por	velocidad	resolución	conmutador
Voltaje	baja	baja	FET, BJT
Intensidad	alta		ECL

## 8.2.4 CONVERSORES ANALÓGICO/DIGITALES

Se dispone de varios métodos para este tipo de conversión en función de las especificaciones requeridas. La siguiente tabla resume las principales características de los diferentes tipos.

Tabla I.13 Principales características de los conversores A/D

Controlado	Velocidad	Pasos	Elementos	bits	tiempo conv.	Precio
por contador	lento	$2^{n-1}$	contador CD/A comparador	4-10		Bajo
Comparadores en paralelo "Flash"	rápido 15-30 Mm/s	1	n comp.	4-10 normal <8	10-60 ns	Alto
en paralelo de dos etapas		2				Inter medio
Por aproximaciones sucesivas.	100-100 Km/s	n	+muest/ret	8 12	1-100 $\mu$ s	
Integración pendiente simple	3-50 m/s		gen. rampa cont. pulso comparador	12 14 16		
Integración pendiente doble	3-50 m/s			12 14 16		

m/s = muestras por segundo.

## 8.2.5 AMPLIFICADORES

Las señales analógicas pueden variar en un amplio rango de amplitudes.

Sin embargo, el conversor A/D requiere una señal de alto nivel para trabajar lo mejor posible. En muchos sistemas se proporciona un amplificador para elevar el nivel de las señales de baja amplitud. Idealmente, el amplificador de entrada tendrá varias ganancias disponibles, todas bajo control de programación. Este dispositivo es denominado **amplificador de ganancia programable**.

#### 8.2.6 MULTIPLEXOR

El multiplexor permite que muchos canales de entrada sean servidos por el mismo CA/D. El canal que se atiende debe ser controlado por programación. Puesto que se comparte el amplificador y el CA/D, el ritmo de adquisición disminuye al menos en ( $1/(\text{número de canales})$ ).

#### 8.2.7 ESPECIFICACIONES DE LOS CA/D

##### a Señal de entrada

Es el máximo margen de tensión de entrada analógica permisible y puede ser unipolar, es decir de 0-5 V, 0-10 V, o bipolar, es decir  $\pm 5$  V,  $\pm 10$  V, etc.

##### b Tiempo de conversión

Depende del tipo de conversor. Los conversores más rápidos en paralelo tienen tiempo de conversión comprendidos en el margen de 10 a 60 ns. Los conversores por aproximaciones sucesivas varían de 1 a 100  $\mu$ s.

##### c Formato de salida

Se dispone de una variedad de formatos, incluyendo el binario unipolar, binario offset, complemento a 1, complemento a 2 y varios códigos standard. Los circuitos de salida pueden ser diseñados para acoplarlos directamente a TTL, ECL o CMOS.

##### d Precisión

La precisión incluye errores provenientes de ambas partes analógica y digital del sistema. El error digital suele deberse al error en la cuantificación y es del orden de  $\pm 1/2$  LSB. La principal fuente de error analógico es el comparador. Otras fuentes son la tensión de alimentación, los resistores en escalera, etc. La precisión necesaria y el número de bits deben ser compatibles.

#### 8.3 SUBSISTEMAS COMPLETOS DE ADQUISICIÓN DE DATOS

Si se necesita una precisión alta en el conversor A/D, particularmente con un multiplexor a la entrada y un muestreador mantenedor es más conveniente buscar en los "subsistemas de A/D" ofertados por varios fabricantes. Estos módulos suelen ser suministrados con un tablero de conexiones robusto. En el apéndice A se ofrece una tabla de características de los sistemas de adquisición de datos de algunas de las marcas más conocidas.

## 8.4 ADQUISICIÓN DE DATOS

### 8.4.1 DIFERENTES TIPOS DE SISTEMAS

#### a Productos de Bus externo:

La comunicación mediante un RS-232, RS-422 ó IEEE-488 requiere que el sistema de adquisición de datos tenga su propio microprocesador interno, fuente de potencia y hardware digital de entrada/salida. Las ventajas de este tipo de sistema son:

- 1) Se puede configurar un sistema de cualquier tamaño
- 2) El sistema de adquisición de datos puede encontrarse lejos del ordenador principal.
- 3) El sistema tiene la posibilidad de descargar al ordenador principal de algunas de las tareas de reunión de datos.
- 4) En principio, podría conectarse a cualquier ordenador.

#### b Productos de Bus interno:

Si el hardware de adquisición de datos reside dentro del ordenador principal, se obtienen importantes ventajas:

- 1) Un tamaño menor
- 2) La potencia se obtiene del computador, por lo que su coste se abarata
- 3) Al eliminar los protocolos de comunicación externos, relativamente lentos se puede conseguir una velocidad de adquisición de datos mucho mayor.

Existen dos tipos de productos de bus interno

- 1) Tarjetas de configuración fija:

No podrán ser modificadas en el futuro

- 2) Tarjetas de configuración modular:

Permiten al usuario seleccionar la cantidad y configuración de funciones de E/S deseadas. Para ello es necesaria la capacidad de expansión y la de selección por el usuario de las funciones de E/S.

Las tarjetas de conexión pueden ser diseñadas para ser direccionadas de dos formas diferentes, de acuerdo con la forma en que los tipos de microprocesadores tratan la unidad de E/S:

- a) Como puertos de E/S
- b) Como direcciones de memoria

Para sincronizar la comunicación entre el procesador y sus dispositivos, existen tres técnicas que pueden ser usadas:

a) **Transferencia programada:** El procesador puede preguntar al dispositivo, periódicamente leyendo su registro de estado para determinar cuando debe prestarle atención.

b) **Interrupción:** El dispositivo puede producir una señal de interrupción cuando necesite del procesador:

- c) **Acceso directo a memoria (DMA)**

#### Transferencia programada

El procesador pregunta periódicamente al dispositivo, leyendo uno o más registros de estado o posiciones de memoria o E/S, cuyos valores permiten determinar al procesador cuando precisa atención el dispositivo. Si éste precisara atención, se ejecutaría la subrutina adecuada. En caso contrario continúa con su labor.

#### Interrupción

Con esta técnica los dispositivos indican al procesador que precisan su atención generando interrupciones. La atención a los dispositivos queda así asegurada, en tanto en cuanto las demandas al sistema sean razonables y el programador no necesita intercalar bucles de pregunta con otras operaciones. Este método está particularmente recomendado cuando se requiere precisión en el tiempo en el que se lleva a cabo la captura de datos.

#### c TÉCNICAS DE ACCESO DIRECTO A MEMORIA

Es la forma más eficiente de adquirir grandes cantidades de datos. La

cantidad de tiempo necesaria para atender una petición de acceso directo a memoria es infinitesimal en comparación con la de transferencia programada o interrupciones. Esto permite conseguir la velocidad más alta posible (360 Kbytes/s son fácilmente conseguibles en un PC y varios Mbytes por segundo en minicomputadores).

El controlador de DMA necesita conocer:

1) **La Dirección base:** Dirección de la memoria en la que va a comenzar a almacenar los datos.

2) **La cuenta de bytes:** Número de bytes que van a ser transferidos.

Cada vez que el controlador de DMA lleva a cabo una petición, "roba" un ciclo de bus al procesador, emite la dirección apropiada de memoria y envía una señal de reconocimiento al dispositivo para que este pueda mandar su dato por el bus del computador. El controlador aumenta entonces la dirección base y decrementa la cuenta de bytes. Puesto que esto ocurre sin ninguna intervención de software, el computador es libre de llevar a cabo cualquier tarea, mientras tanto.

### Limitaciones

La principal pega es que, típicamente, sólo se puede transferir un tipo de dato por canal de DMA. La razón es que los chips controladores de DMA disponibles están diseñados para transferir datos eficientemente de un único periférico, o "conducirlos" a una gran zona de memoria del ordenador.

Una nueva técnica de DMA pendiente de patente se ha desarrollado en el portador de altas prestaciones PCI-20041C-3. Usando este sistema, cualquier tipo de dato (digital, contador, etc...) puede ser puesto bajo control de DMA simultáneamente con cualquier otro.

### Acondicionamiento de la señal

Normalmente suele ser necesario preprocesar la señal. Esta tarea se divide a menudo en dos categorías:

1) Activa: Incluye amplificación y aislamiento

2) Pasiva: División de voltaje, conversión de voltaje a intensidad y filtrado.

La máxima amplitud que puede ser aplicada a un amplificador o conversor A/D es, normalmente, de  $\pm 10$  Voltios. Si el voltaje de la señal a medir es mayor, entonces hay que usar divisores resistivos para escalar cualquier

nivel de voltaje dentro de este rango.

Por otra parte, algunas veces es deseable preamplificar señales de bajo nivel (1 mV a 1 V) para mantener la máxima relación señal/ruido.

El filtrado de la señal es el acondicionamiento más necesitado, más usado y peor comprendido. De una forma simple, el filtrado consiste en separar las señales deseadas de señales indeseables. Estas últimas incluyen:

- 1) Ruido
- 2) Frecuencia de red de corriente alterna
- 3) Interferencias de radio/TV
- 4) Frecuencias de la señal por arriba de  $1/2$  de la frecuencia de muestreo.

### Señales diferenciales frente a referenciales

Las señales analógicas pueden ser configuradas como entradas referenciales o diferenciales

**Entradas referenciales:** Las entradas referenciales o monopolares comparten una tierra común. Sólo el extremo de alta de la señal se conecta al amplificador. Las terminaciones de baja vuelven al amplificador a través de las conexiones a tierra del sistema. Es decir, tanto la señal fuente como la entrada al amplificador están referenciadas a tierra. Esta disposición trabaja bien mientras la diferencia de potencial de tierra sea muy pequeña. Si existe una gran diferencia en los potenciales a tierra entonces generará errores.

**Entrada diferencial:** En esta disposición se permite tanto la entrada invertida como sin invertir al amplificador para conectar ambos extremos de la fuente de la señal. De esta forma cualquier voltaje inducido en bucle de tierra es rechazado por las propiedades diferenciales del amplificador. Sin embargo, se necesitan dos multiplexores por canal. Por tanto un sistema con 32 entradas referenciales sólo puede manipular 16 entradas diferenciales.

**Entrada pseudo-diferencial:** Consiste en una conexión referencial en la cual una de las entradas es conectada al punto de retorno de la tierra común de las señales de entrada. Por tanto, este canal mide los posibles voltajes en bucle de tierra y podrán ser corregidos por medio de software.

Para un mayor detalle de los puntos anteriores ver "The Handbook of Personal Computer Instrumentation for Data Acquisition, Test, Measurement and Control", Burr-Brown, 1987 y "A/D and D/A Conversion Manual", Motorola (1984).

## 8.5 PROCESADORES DE SEÑALES DIGITALES

### 8.5.1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Los procesadores de señales digitales (PSD) comenzaron a aparecer hace unos 13 años con el DSP1 de los laboratorios AT&T Bell y el NEC  $\mu$ PD7720. Aunque AMI anunció su S2811 antes que cualquier otra compañía, los problemas con la tecnología VMOS (Semiconductor de Metal-Oxido con estrías en forma de V) retrasaron su aparición hasta 1982. Intel Corp. prometía su 2920, que estaría disponible antes de 1979, como un DSP (disponía de conversores A/D D/A en el chip). Pero debido a su falta de multiplicador hardware, el 2920, no podría calificarse como un DSP programable moderno. En 1982, Texas Instruments introdujo el TMS32010 como el primer miembro de lo que se ha convertido en la familia de PSD más popular. Aproximadamente en la misma época Hitachi Ltd. introdujo el primer PSD CMOS (MOS Complementario), el HD61810. Este fue también el primer PSD en usar un formato de punto flotante (una mantisa de 12 bits y un exponente de 4 bits). Un año más tarde, Fujitsu incrementó bastante la velocidad de los PSD programables disponibles comercialmente con el MB8764 que contenía una operación de multiplicación-acumulación de 120-nanosegundos.

En 1984 apareció en el mercado el AT&T DSP32. Este fue el primer PSD que la compañía comercializó y el primer PSD de punto flotante de 32 bits en un solo chip. Poco después, NEC introdujo el  $\mu$ PD77230, un procesador de punto flotante de 32 bits con un tiempo de Mac de 150-ns.

El primer procesador en usar el formato standard IEEE754 es el Fujitsu MB86232, que apareció en 1987. Motorola lanzó su primer PSD en 1987. El DSP56001 es de punto fijo de 24 bits.

Los más recientes PSD incluye a los dos mas rápidos de punto fijo, el TI TMS320c50 y el AT&T DSP16A y cinco de punto flotante, el AT&T DSP32C, Fujitsu MB86232, Motorola DSP96002, TI TMS320C30 y Zoran 35325. Los MB86232, DSP96002 y 35325 usan el standard IEEE de punto flotante internamente.

Últimamente han empezado a aparecer los núcleos de PSD. Estos núcleos son PSD programables, rodeados por una circuitería de tipo específico. Otros desarrollos importantes incluyen numerosos sistemas multiprocesador basados en PSD y desarrollo de entornos de software de muy alto nivel como el SPW (Signal Processing Worksystem) de Comdisco. Además, algunos fabricantes como Zoran, están trabajando en conjuntos de chips de arseniuro de galio.

## 8.5.2 ARQUITECTURA DE PROCESADORES DE SEÑALES DIGITALES

La mayoría de los algoritmos de procesamiento de señales requieren transformaciones de datos caracterizadas por sumas de productos. Por tanto, un elemento clave en un circuito procesador de señales digitales (PSD) típico es un multiplicador y acumulador rápido que permita realizar una operación de multiplicación y acumulación en un sólo ciclo de reloj. En la figura 22 se muestran los elementos típicos de la unidad aritmética del PSD, donde el multiplicador acumulador, es capaz de multiplicar dos números (O1 y O2) y añadir el producto al resultado acumulado previo (R) en un sólo periodo de reloj

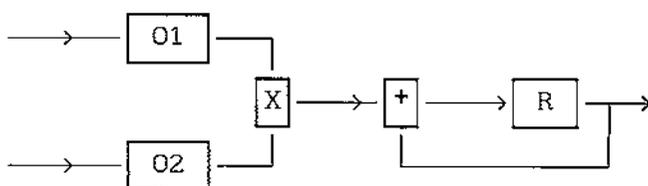


Fig. 22. Elementos de una unidad aritmética de PSD típica.

Al contrario que los microprocesadores de propósito general que usan la denominada arquitectura de Von Neumann donde las instrucciones y los datos son almacenados en la misma memoria, la mayoría de los circuitos de PSD emplean la denominada arquitectura de Harvard en la cual existe una memoria de programa separada de la memoria de datos.

La velocidad de procesamiento de datos de la unidad multiplicadora-acumuladora sólo puede ser explotada si se puede acceder y transferir datos a las memorias a la misma velocidad. Por tanto, si se desea un rendimiento numérico alto, es necesario disponer de una estructura de bus flexible y de un generador de direcciones sofisticado. Un chip PSD típico tiene al menos dos memorias (o accede a dos memorias externas) y dos buses de datos. Un PSD reciente (TEXAS TMS320C30), utiliza siete buses internos de alta velocidad para acceso en paralelo independiente a una memoria cache de programa, dos bloques de RAM y un bloque de ROM.

## TEXAS INSTRUMENTS

La Texas Instruments ha sido una de las pioneras en el desarrollo de PSD. Por ello vamos a comentar las características más importantes de sus modelos. Al tener memoria RAM en el chip, estos PSD son capaces de ejecutar algoritmos complejos como puedan ser filtros complicados y FFT, incrementando la flexibilidad del algoritmo. El coste y las limitaciones de la memoria externa son eliminadas de esta manera en muchas de las aplicaciones. En la tabla siguiente se presenta un resumen de las mismas para las placas PSD de esta firma:

Tabla I.14 Características más importantes de las placas PSD de Texas Inst.

PLACA TMS320	Ciclo ns	RAM CHIP Byte	ROM CHIP KB	EPROM CHIP KB	Mem. ext. PGM/DATOS KB KB	PAR E/S	SER E/S	Cop I/F	Versión Militar
-16	250	144	---		4 -	8x16			si
10	200	144	1.5		4 -	8x16			
10-25	160	144	1.5		4 -	8x16			
C10+	200	256	1.5		4 -	8x16			Planea- do
C10-25	160	256	1.5		4 -	8x16			
C15	200	256	4		4 -	8x16			Planea- do
E15	200	256	---	4	4 -	8x16			
C15-25	160	256	4		4 -	8x16			
C17	200	256	4			6x16	2	si	Planea- do
E17	200	256	---	4		6x16	2	si	
C17-25	160	256	4			6x16	2	si	
20	200	544	---		64 64	16x16	1		Planea- do
C25	100	544	4		64 64	16x16	1		
C30	60	2kx32	4kx32		16M x 32	8Kx32	2	si	Planea- do
C30-27	74	2kx32	4kx32		16M x 32	?			
C31	60				16M x 32	?			
C31-27	74				16M x 32	?			

La primera generación de la familia TMS320 alcanza 6.4 MIPS, la segunda generación (TMS32020 y TMS320C25) llega a los 10 MIPS, mientras que la tercera generación (TMS320C30) logra un ritmo de cálculo de 33 MFLOPS.

Por otra parte, esta tercera generación trabaja con 32 bits en punto flotante. Los modelos C30-27 y C31-27 son versiones de menor coste y más lentas pero totalmente compatibles con las C30 y C31 respectivamente.

## DATA TRANSLATION

En la siguiente tabla se pueden observar las características más importantes de las placas PSD comercializadas por DATA-TRANSLATION

Tabla I.15 Características más importantes de las placas PSD de D.T.

PLACA DSP	Desc	ncr ncd	Res	Pre	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
2841	ver +	16 r 8 d	12			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5 0-10	1 2 4 8		40  15 $\mu$ s
2841- F-16SE		16 r -- d	12			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5 0-10	1 2 4 8		150  4 $\mu$ s
F-8DI		-- r 8 d							
2841- G-16SE		16 r -- d	12			$\pm .625, 1.25, 2.5$ $\pm 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5 0-10	1 2 4 8		250  2.5 $\mu$ s
G-8DI		-- r 8 d							
2841- L		-- r 4 d	12			$\pm 5$	1		750  1 $\mu$ s
2847		-- r 4 d	16			$\pm 10$	1		100  6 $\mu$ s
2848 M/R		4 r -- d	12			$\pm 10$ 0-10	1		100  4 $\mu$ s

La serie DT2841 consiste en tarjetas de muy alta velocidad que permiten conseguir velocidades de muestreo de hasta 750 KHz. La transferencia de datos se lleva a cabo mediante el conector incorporado DT-Connect (Cada tarjeta requiere un procesador DT-Connect). Este se conecta directamente a la tarjeta del procesador para operaciones simultáneas de alta velocidad de A/D, D/A, DIO, así como procesamiento de señales digitales en tiempo real. También se puede realizar mediante transferencia programada.

CYBER

Tabla I.16 Características más importantes de las placas PSD de Cyber

PLACA	Desc	ncr ncd	Res bit	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
DAP 801	128 KB,MRS Disparo: Pretrigger Pte. analógica Pulso Externo Programa Interno	8 r 8 d	12			±2.5, 5, 10 0-5	1 10 100 1000		60  13 μs
DAP 802	128 KB,MRS Disparo: Pt,PA PE,Prog,Int	8 r 8 d	12			±2.5, 5, 10 0-5	1 10 100 1000		100  7 μs
DAP 811	128 KB,MRS Disparo: Pt,PA PE,Prog,Int	8 r 8 d	12			±2.5, 5, 10 0-5	1 10 100 1000		60  13 μs
DAP 1202	64 KB,DMA,MRS Disparo: Pt,PA PE,Prog,Int	16 r 8 d	12			±2.5, 5, 10 0-5	1 10 100 1000		50  14 μs
DAP 1204	256 KB,DMA,MRS Disparo: Pt,PA PE,Prog,Int	16 r 8 d	12			±2.5, 5, 10 0-5	1 10 100 1000		156  5 μs
DAP 2404	256 KB,DMA,MRS Disparo: Pt,PA PE,Prog,Int DSP56001 + 96 KB 20 MHz, 10 MIPS	16 r 8 d	12			±2.5, 5, 10 0-5	1 10 100 1000		156  5 μs
DAP 2405	256 KB,DMA,MRS Disparo: Pt,PA PE,Prog,Int DSP56001 + 96 KB 20 MHz, 10 MIPS	16 r 8 d	12			±2.5, 5, 10 0-5	1 10 100 1000		235  3 μs
DAP 2406	256 KB,DMA,MRS Disparo: Pt,PA PE,Prog,Int DSP56001 + 96 KB 20 MHz, 10 MIPS	16 r 8 d	12			±2.5, 5, 10 0-5	1 10 100 1000		235  3 μs

9 FILTROS

9.1 INTRODUCCIÓN

En primer lugar vamos a definir algunos términos necesarios.

Dominio de la frecuencia

La característica más obvia de un filtro es la de su ganancia frente a la frecuencia, tipificada en la siguiente figura para el caso de un filtro paso-bajo.

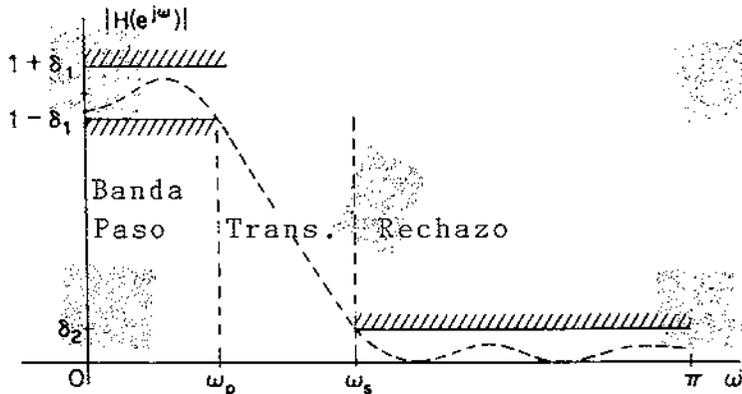


Fig. 23 Características del filtro en el dominio de la frecuencia.

La banda pasante es la región de frecuencias que apenas se ven afectadas por el filtro ( $0-\omega_p$ ). A menudo se suele considerar que la banda pasante llega hasta el límite de  $-3\text{dB}$ . Dentro de la banda pasante la respuesta puede mostrar variaciones o rizados, definiendo una banda de rizo. La frecuencia de corte es el fin de la banda pasante ( $\omega_p$ ). Fuera de esta banda, la respuesta del filtro cae a través de una región de transición ( $\omega_p-\omega_s$ ) hasta llegar a la banda de rechazo ( $\omega_s-\pi$ ), la región de atenuación significativa.

Junto con la respuesta de la ganancia, el otro parámetro de importancia en el dominio frecuencial es el desplazamiento de fase de la señal de salida respecto a la señal de entrada. El desplazamiento de fase es importante porque si el retardo de tiempo para cada frecuencia no es constante la señal de salida estará distorsionada respecto a la señal de entrada. Un retardo de tiempo constante para todas las frecuencias equivale a un desplazamiento de fase que se incrementa linealmente con la frecuencia. El término Filtro de fase lineal se aplica a un filtro ideal en este sentido.

dominio del tiempo

Los filtros también pueden ser descritos por sus propiedades en el

dominio del tiempo. Esto tiene particular importancia cuando se trabaja con pulsos o escalones. El tiempo de elevación es el *tiempo necesario para alcanzar el 90% del valor final*. El tiempo de establecimiento es el *tiempo requerido para alcanzar un valor estacionario*. La *sobreelongación* es el *máximo valor que alcanza la respuesta en amplitud del filtro respecto al valor estacionario*.

## 9.2 TIPOS DE FILTRO

El diseño del filtro puede optimizarse para una máxima llanura en la banda pasante, a expensas de una transición más lenta de la banda pasante a la banda de rechazo. Alternativamente, permitiendo algunos rizados en la banda pasante, se puede conseguir una región de transición más pequeña. Otro criterio es la capacidad de un filtro para no distorsionar señales que se encuentren dentro de la banda pasante.

Existen filtros diseñados para optimizar cada una de estas características, o combinaciones de ellas. La selección de un filtro normalmente comienza con un conjunto de requerimientos en la llanura de la banda pasante, atenuación a alguna frecuencia fuera de la banda pasante y cualquier otra característica que se considere importante. Entonces se elige el mejor diseño, usando el número de polos necesarios para alcanzar los requerimientos. A continuación introduciremos los tres más conocidos:

- Filtro de Butterworth: *máxima planicie en la banda pasante.*
- Filtro de Chebyshev: *transición más brusca de la banda pasante a la banda de rechazo.*
- Filtro de Bessel: *retardo temporal máximamente plano*

## 9.3 FILTROS RC

Combinando resistencias con condensadores es posible hacer divisores de voltaje dependientes de la frecuencia. Dichos circuitos tienen la interesante propiedad de dejar pasar las frecuencias de interés de la señal, mientras que se rechazan las frecuencias de la señal no deseada y se conocen como filtros pasivos. Es posible también llevar a cabo el filtrado mediante circuitos activos aunque no se detallarán en este trabajo.

### 9.3.1 FILTROS PASO-ALTA

La respuesta en amplitud viene dada por:

$$V_{out} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}} \quad V_{in} = \frac{2\pi fRC}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}} V_{in} \quad I.329$$

como se puede ver en la siguiente figura 24

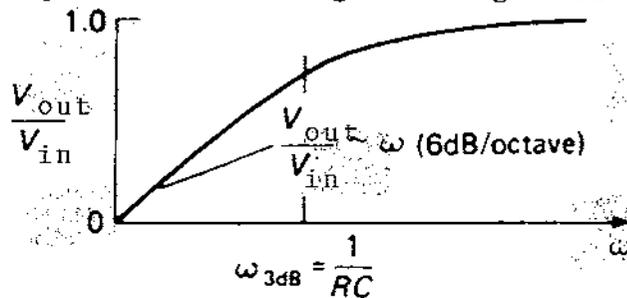


Fig. 24 Respuesta en frecuencia de un filtro Pasa-Alta.

La salida es aproximadamente igual a la entrada para frecuencias altas, y tiende a cero para frecuencias bajas. Por este motivo se denomina filtro pasa-alta. Para caracterizar al filtro se suele referenciar la frecuencia de corte de -3 dB del filtro, que en este caso está dado por:

$$f_{3dB} = 1/2\pi RC \quad I.330$$

### 9.3.2 FILTRO PASO BAJO

Se puede obtener el comportamiento en frecuencia contrario intercambiando R y C, con lo que se obtendrá una respuesta en amplitud dada por (como se puede ver en la figura 25):

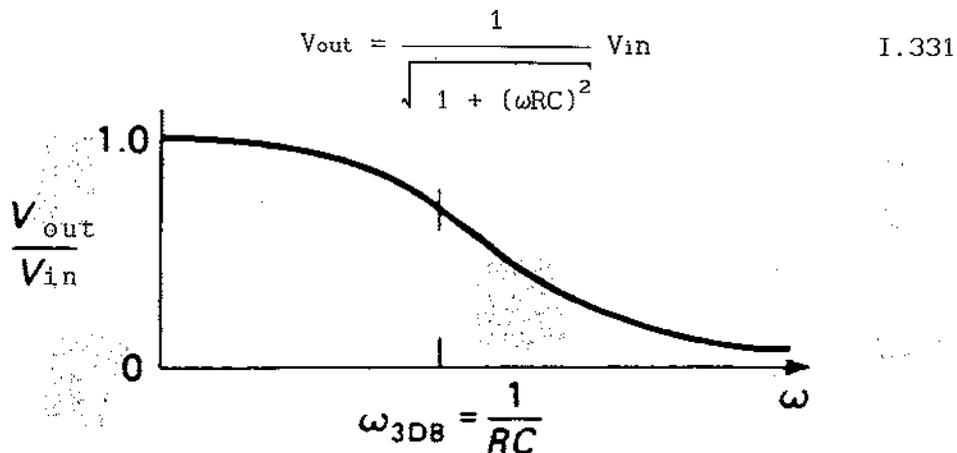


Fig. 25 Respuesta en frecuencia de un filtro Pasa-Baja.

Por tanto, se denomina filtro paso-bajo y la frecuencia de corte a 3dB se encuentra nuevamente en la frecuencia:

$$f_{3dB} = 1/2\pi RC$$

I.332

### 9.3.3 FILTRO DE BUTTERWORTH

El filtro de Butterworth produce la respuesta más plana posible en la banda pasante, a expensas de la brusquedad en la región de transición. Sin embargo, tiene pobres características en cuanto a la fase.

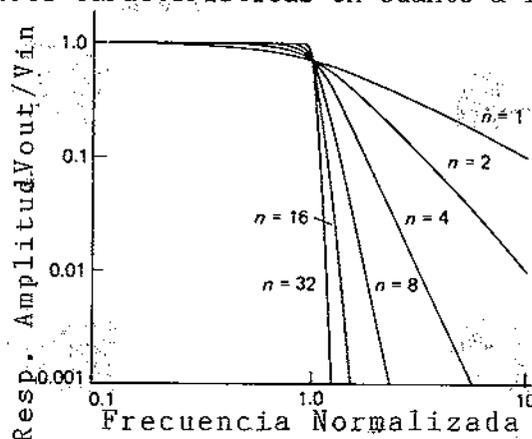


Fig. 26 Curvas normalizadas de respuesta de un filtro Paso-Bajo Butterworth.

La respuesta en amplitud está dada por:

$$\frac{V_{sal}}{V_{ent}} = \frac{1}{[1 + (f/f_c)^{2n}]^{1/2}} \quad \text{I.333}$$

donde  $n$  es el orden del filtro (número de polos). Incrementando el número de polos se consigue una mayor planicie en la banda pasante y una mayor brusquedad en la región de transición como se puede ver en la figura 26. La pendiente comienza a cambiar muy cerca de la frecuencia de corte  $f_c$ .

### 9.3.4 FILTRO DE CHEBYSHEV

En la mayoría de las aplicaciones, lo que se pide es que los rizados en la banda pasante se mantengan menores que alguna cantidad, por ejemplo 1 dB. El filtro de Chebyshev responde a esta realidad permitiendo algunos rizados dentro de la banda pasante pero con una región de transición más abrupta. Un filtro

de Chebyshev se suele especificar en términos de su número de polos y los rizados de su banda pasante. La amplitud está dada por:

$$\frac{V_{sal}}{V_{ent}} = \frac{1}{[1 + \varepsilon^2 C_n^2(f/f_c)]^{1/2}} \quad \text{I.334}$$

donde  $C_n$  es el polinomio de Chebyshev del primer tipo de grado  $n$  y  $\varepsilon$  es una constante que ajusta los rizados. Al igual que el anterior su respuesta en fase no es muy buena.

### 9.3.5 FILTRO DE BESSEL

Como ya hemos visto, la respuesta en amplitud de un filtro no lo dice todo. Un filtro caracterizado por una banda pasante plana puede tener grandes desplazamientos de fase. El resultado es que cualquier señal en la banda pasante sufrirá distorsión en su forma. En aquellas situaciones en las cuales la forma de la señal es importante, es deseable tener un filtro de fase lineal. El filtro de Bessel tiene el retardo en tiempos máximamente plano.

### 9.4 FILTROS DE CORTE EN DOBLE T

La red pasiva RC de la figura 27 tiene una atenuación infinita en la frecuencia  $f_c = 1/2\pi RC$ . La atenuación infinita no es característica de los filtros RC en general. Éste trabaja añadiendo dos señales que han sido desplazadas  $180^\circ$  en fase en la frecuencia de corte. Ello requiere un buen ajuste de los componentes para conseguir un nulo perfecto en  $f_c$ . Se denomina de doble T y puede usarse para eliminar una señal que interfiera, como la señal de la red. El problema es que tiene las mismas características de corte suaves que todas las redes pasivas RC, excepto por supuesto cerca de  $f_c$ .

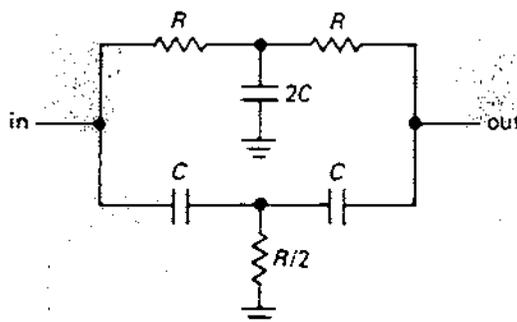


Fig. 27 Filtro pasivo en doble T

EL filtro de doble T trabaja bien como corte de una frecuencia fija, pero no es bueno si se trata de hacerlo sintonizable, puesto que hay que ajustar simultáneamente 3 resistencias mientras se mantiene constante el cociente.

Un explicación más detallada sobre filtros analógicos puede encontrarse en Horowitz (1990).

## 9.5 FILTROS DIGITALES

### 9.5.1 INTRODUCCIÓN

En el caso más general, un filtro digital es un sistema de tiempo discreto que ha sido realizado usando una aritmética de precisión finita. El diseño de un filtro digital involucra tres pasos básicos:

- 1) Especificación de las propiedades deseadas del sistema
- 2) Aproximación de estas especificaciones usando un sistema de tiempo discreto causal
- 3) Realización del sistema usando aritmética de precisión finita.

Las especificaciones tanto para filtros analógicos como digitales suelen darse en el dominio de la frecuencia. Dado un conjunto de especificaciones, el siguiente paso es encontrar un sistema lineal de tiempo discreto cuya respuesta en frecuencia caiga dentro de las tolerancias prescritas. Un sistema lineal causal viene dado por una ecuación en diferencias que relaciona la salida  $y[n]$  del mismo en un instante dado  $n$ , con los valores de la entrada  $x[n-r]$  y la salida  $y[n-k]$  anteriores de la siguiente forma.

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x[n-r] \quad \text{I.335}$$

En general, un sistema lineal e invariante en el tiempo puede tener una respuesta al impulso unitario que sea de duración finita o infinita. En el primer caso se denomina sistema con Respuesta al Impulso Finita (FIR), mientras que en el segundo caso se denomina sistema con Respuesta al Impulso Infinita (IIR). Si  $N = 0$  (la salida no depende de los valores anteriores de la misma) estamos ante un sistema FIR. Por el contrario, si  $N \neq 0$  el sistema es de tipo IIR. En el caso de sistemas IIR aproximaremos la respuesta en frecuencia deseada por una función racional. En el caso de sistemas FIR dicha aproximación será por medio de una función polinomial.

### 9.5.2 DISEÑO DE FILTROS IIR A PARTIR DE FILTROS ANALÓGICOS

La aproximación tradicional al diseño de filtros IIR, involucra la transformación de un filtro analógico en un filtro digital cumpliendo con unas especificaciones prescritas. Esta es una aproximación razonable porque:

1 El diseño de filtros analógicos está muy avanzado y, puesto que se pueden alcanzar resultados útiles, es ventajoso utilizar procedimientos de diseño ya desarrollados para filtros analógicos.

2 Muchos métodos de diseño analógicos útiles tienen fórmulas relativamente simples. Por tanto, los métodos de diseño de filtros digitales que se basan en dichas fórmulas son más fáciles de implementar.

3 En muchas aplicaciones es interesante usar un filtro digital para simular las características de un filtro lineal invariante en el tiempo.

Consideremos una función analógica del sistema:

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M d_k s^k}{\sum_{k=0}^N c_k s^k} = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} \quad \text{I.336}$$

donde  $x_a(t)$  es la entrada e  $y_a(t)$  es la salida y  $X_a(s)$  e  $Y_a(s)$  son sus transformadas de Laplace respectivas. Un sistema analógico que tenga una función del sistema de  $H_a(s)$  puede ser descrito por la ecuación diferencial:

$$\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M d_k \frac{d^k x_a(t)}{dt^k} \quad \text{I.337}$$

La correspondiente función racional del sistema para filtros digitales tiene la forma:

$$H_a(z) = \frac{\sum_{k=0}^M d_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N c_k z^{-k}} = \frac{Y_a(z)}{X_a(z)} \quad \text{I.338}$$

donde la entrada y la salida están relacionadas por la ecuación en diferencias:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad \text{I.339}$$

Al transformar un sistema analógico en uno digital debemos preservar las cualidades esenciales de respuesta en frecuencia en la respuesta en frecuencia del filtro digital resultante. Esto implica que el eje imaginario del plano  $s$  debe transformarse en el círculo unitario del plano  $z$ . Una segunda condición es que un filtro analógico estable debe transformarse en un filtro digital estable.

#### a DISEÑO POR INVARIANCIA DEL IMPULSO

Un procedimiento para transformar un filtro analógico en un filtro digital consiste en elegir la respuesta al impulso del filtro digital como muestras equidistantes de la respuesta al impulso del filtro analógico. Es decir:

$$h(n) = h_a(nT) \quad \text{I.340}$$

donde  $T$  es el periodo de muestreo.

La mitad izquierda del plano  $s$ , se transforma en el interior del círculo unitario, la mitad derecha en el exterior y el eje imaginario en el círculo unitario, de forma que cada segmento de longitud  $2\pi/T$  se aplica una vez en el círculo unitario. Por tanto cada tira horizontal del plano  $s$  se superpone en el plano  $z$ . La respuesta en frecuencia del filtro digital viene dada por:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega}{T} + j\frac{2\pi}{T}k) \quad \text{I.341}$$

Considerando el teorema del muestreo, está claro que si y sólo si (ec. I.342):

$$H_a(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| \geq \pi/T \quad \text{I.342.a}$$

entonces:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a(j\frac{\omega}{T}) \quad |\omega| \leq \pi \quad \text{I.342.b}$$

Desgraciadamente, cualquier filtro analógico práctico no es de banda limitada y por tanto se produce interferencia entre los términos sucesivos de la ecuación (I.341), por lo que el filtro digital resultante no tendrá una respuesta en frecuencia idéntica a la analógica original.

#### b DISEÑO BASADO EN LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Una segunda aproximación para obtener un filtro digital es aproximar las derivadas de la ecuación (I.337) por diferencias finitas. Éste es el procedimiento estándar en análisis numérico y simulaciones digitales de sistemas analógicos. Este procedimiento puede justificarse por el hecho de que la derivada temporal de una función analógica puede ser aproximada por la diferencia entre muestras consecutivas de la función que es diferenciada. Debemos esperar que a medida que se incrementa la frecuencia de muestreo, la aproximación a la derivada incrementa su precisión. Utilizando el operador diferencia a la ecuación (I.337) se puede obtener:

$$\sum_{k=0}^N c_k \nabla^k [y[n]] = \sum_{k=0}^M d_k \nabla^k [x[n]] \quad \text{I.343}$$

donde  $y(n) = y_a(nT)$ ,  $x[n] = x_a(nT)$  y  $\nabla^0 [y[n]] = y[n]$ . Se puede demostrar que la transformada z del operador diferencia k - ésima es:

$$Z\{V^k[y[n]]\} = \left[ \frac{1 - z^{-1}}{T} \right]^k X(z) \quad \text{I.344}$$

Tomando la transformada z a cada miembro de la ecuación obtenemos:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M d_k \left[ \frac{1 - z^{-1}}{T} \right]^k}{\sum_{k=0}^N c_k \left[ \frac{1 - z^{-1}}{T} \right]^k} \quad \text{I.345}$$

Comparando la ecuación (I.345) con la (I.329), observamos que la función de transferencia digital puede obtenerse de la función de transferencia analógica por medio de la siguiente sustitución de variables:

$$s = \left[ \frac{1 - z^{-1}}{T} \right] \quad \text{I.346}$$

por lo que el proceso de reemplazar derivadas por diferencias realmente corresponde a aplicar el plano-s en el plano-z, de acuerdo a la ecuación (I.346). Se puede comprobar que con esta aproximación el eje imaginario se transforma en un círculo cuyo centro está en  $z=1/2$  y de radio  $1/2$ . Por tanto, la mitad izquierda del plano-s se transforma en el interior del círculo pequeño y la mitad derecha en el exterior de dicho círculo. Sin embargo, esta transformación satisface la condición de estabilidad puesto que los polos situados en la mitad izquierda del plano-s caen dentro del círculo pequeño, que está contenido dentro del círculo grande.

#### c TRANSFORMACIÓN BILINEAL

Un procedimiento alternativo consiste en integrar la ecuación diferencial y usar una aproximación numérica a la integral. Por ejemplo, consideremos la ecuación de primer orden:

$$c_1 y'(t) + c_0 y(t) = d_0 x(t) \quad \text{I.347}$$

donde  $y_a'$  es la primera derivada de  $y_a(t)$ . La función del sistema analógico correspondiente es:

$$H_a(s) = \frac{d_0}{c_1 s + c_0} \quad \text{I.348}$$

Podemos escribir  $y_a(t)$  como una integral de  $y_a'(t)$ . Si suponemos  $t=nT$  y  $t_0=(n-1)T$

$$y_a(nT) = \int_{(n-1)T}^{nT} y_a'(\tau) d\tau + y_a((n-1)T) \quad \text{I.349}$$

Aproximando la integral por la regla trapezoidal, y teniendo en cuenta la ecuación I.347 obtenemos:

$$[y[n] - y[n-1]] = \frac{T}{2} \left[ -\frac{c_0}{c_1} (y[n] + y[n-1]) + \frac{d_0}{c_1} (x[n] + x[n-1]) \right] \quad \text{I.350}$$

Tomando la transformada  $z$  y resolviendo para  $H(z)$  se obtiene:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{d_0}{c_1 \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + c_0} \quad \text{I.351}$$

De esta ecuación, está claro que  $H(z)$  se obtiene de  $H_a(s)$  por medio de la sustitución:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad \text{I.352}$$

La transformación invertible de la ecuación (I.352) se reconoce como una transformación bilineal. Se comprueba que el eje imaginario se transforma en el círculo unitario, por lo que se verifica que la mitad izquierda del plano- $s$  se transforma en el interior del círculo unitario y la mitad derecha, en el exterior.

## d DISEÑO POR COMPUTADOR DE FILTROS IIR

Hasta ahora hemos diseñado los filtros digitales transformando un diseño de filtro analógico apropiado. Esta aproximación es razonable cuando tomamos ventaja de diseños analógicos que están dados en términos de fórmulas o tablas de diseño extensiva (filtros selectivos en frecuencia como Butterworth, Chebyshev o elípticos, por ejemplo). Sin embargo, en general, no existen procedimientos analíticos para diseñar tanto filtros analógicos como digitales que tengan unas especificaciones de respuesta en frecuencia arbitrarias. En estos casos más generales que son de naturaleza algorítmica, generalmente se requiere un ordenador para resolver un conjunto de ecuaciones no-lineales. Existen varias técnicas para diseño por computador de filtros IIR digitales

## d.1 MINIMIZACIÓN DEL ERROR CUADRÁTICO MEDIO

Steiglitz (1970, (Rabiner and Steiglitz (1970))) propuso un procedimiento de diseño de filtros IIR basado en la minimización del error cuadrático medio en el dominio de la frecuencia. El procedimiento requiere que la respuesta en frecuencia deseada  $H_d(e^{j\omega_i})$  pueda ser prescrita en un conjunto discreto de frecuencias  $\{\omega_i\}$ ,  $i=1,2,\dots,M$ . El error cuadrático medio en estas frecuencias se define como:

$$E = \sum_{i=1}^M [ |H(e^{j\omega_i})| - |H_d(e^{j\omega_i})| ]^2 \quad \text{I.353}$$

Se supone que la función de transferencia del filtro es de la forma:

$$H(z) = A \prod_{k=1}^K \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}} = AG(z) \quad \text{I.354}$$

Se ha elegido esta forma debido a su relativamente baja sensibilidad a los coeficientes y por conveniencia en el cálculo de las derivadas requeridas en el procedimiento de optimización.

El error, expresado por la ecuación (I.353) puede ser visto como una función de los parámetros  $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, \dots, d_k, A)$ . Puesto que deseamos encontrar el valor de estos parámetros que minimizan el error  $E$ , tomaremos

derivadas parciales de E, respecto a cada parámetro e igualaremos estas derivadas a cero, con lo que se obtienen 4K+1 ecuaciones de 4K+1 incógnitas.

La ecuación para A, es particularmente simple:

$$\frac{\partial E}{\partial |A|} = \sum_{i=1}^M \{2|A| |G(e^{j\omega_i})| - |H_d(e^{j\omega_i})| |G(e^{j\omega_i})|\} = 0 \quad \text{I.355}$$

de la que se obtiene:

$$|A| = \frac{\sum_{i=1}^M |G(e^{j\omega_i})| |H_d(e^{j\omega_i})|}{\sum_{i=1}^M |G(e^{j\omega_i})|^2} \quad \text{I.356}$$

Diferenciando con respecto a las 4K incógnitas restantes dadas por el vector  $\phi = [a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, d_k]$  obtenemos 4K ecuaciones no-lineales:

$$\frac{\partial E(\phi, A)}{\partial \phi_n} = 0 \quad n=1, 2, \dots, 4K \quad \text{I.357}$$

Hay que notar, que este procedimiento, tiene que ver únicamente con la respuesta en amplitud. Como resultado del algoritmo de optimización se pueden obtener valores correspondientes a un filtro inestable. En lugar de imponer restricciones a los parámetros, Steiglitz testeó las raíces de cada factor de segundo orden después de la minimización, y si un polo estaba fuera del círculo unitario, lo reemplazaba por su recíproco, permaneciendo por tanto inalterada la función de magnitud.

#### d.2 MINIMIZACIÓN DE UN CRITERIO DE P-ERROR

Deckzy (1972) generalizó el procedimiento de la sección anterior en cierto número de formas. En lugar de minimizar el error cuadrático promedio, minimizó un promedio del error elevado a la potencia p-ésima. Además, aplicó esta técnica tanto al módulo como al retardo del grupo. La expresión del error minimizado fue una aproximación a:

$$E_p = \int_0^{\pi} W(\omega) [|H(e^{j\omega})| - |H_d(e^{j\omega})|]^p d\omega \quad \text{I.358}$$

$$E_p = \int_0^{\pi} W(\omega) [\tau(\omega) - \tau_d(\omega)]^p d\omega \quad \text{I.359}$$

donde el retardo del grupo  $\tau$  se define como:

$$\tau(\omega) = - \frac{d}{d\omega} \{\arg[H(e^{j\omega})]\} \quad \text{I.360}$$

El filtro digital deseado, se supone que está representado por la ecuación (I.354) Al llevar a cabo la minimización de (I.358) y (I.359), obtenemos la solución de  $4K+1$  ecuaciones no-lineales con  $4K+1$  incógnitas. Se puede demostrar que si uno comienza con una aproximación estable, entonces existe un mínimo local de la función de error para  $p \geq 2$  tal que los parámetros óptimos corresponden a una función de transferencia estable.

#### d.3 DISEÑO DEL INVERSO POR MÍNIMOS CUADRADOS

En los dos procedimientos discutidos anteriormente, se ha especificado el filtro en el dominio de la frecuencia y el conjunto resultante de ecuaciones era no-lineal en los parámetros del filtro. Un procedimiento alternativo, basado en una aproximación de mínimos cuadrados al inverso del filtro deseado, nos conduce a un conjunto de ecuaciones lineales. Se supone que el filtro está especificado en términos de las primeras  $L$  muestras de la respuesta al impulso deseada.

$$\{h_d[n]\}, n=0,1,\dots,L-1 \quad \text{I.361}$$

Se asume también que la función de transferencia al impulso es de la forma:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad \text{I.362}$$

Una generalización de este procedimiento permitiendo ceros y polos puede encontrarse en Shanks (1967) y Burrus & Parks (1970).

### 9.5.3 DISEÑO DE FILTROS FIR

Aunque los filtros IIR tienen muchas ventajas, también tienen muchos inconvenientes. Por ejemplo, si uno desea aprovecharse de la velocidad computacional de la FFT e implementar un filtro, es esencial una respuesta al impulso de duración finita. Además, aunque los filtros IIR tienen una respuesta en amplitud excelente, esto es a costa de una fase no-lineal. Por el contrario, los filtros FIR tienen una fase exactamente lineal, lo que los hace de considerable interés.

La función del sistema de un filtro causal FIR, es de la forma:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad \text{I.363}$$

Por tanto,  $H(z)$  tiene  $N-1$  ceros que pueden ser ubicados en cualquier parte del plano- $z$  y  $N-1$  polos en  $z=0$ . La respuesta en frecuencias  $H(e^{j\omega})$  es el polinomio trigonométrico:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \quad \text{I.364}$$

Cualquier serie de duración finita queda completamente especificada por  $N$  muestras de su transformada de Fourier, por lo que el diseño de un filtro FIR puede llevarse a cabo tanto encontrando los coeficientes de su respuesta al impulso como  $N$  muestras de su respuesta en frecuencia. Si la respuesta al impulso satisface la condición:

$$h(n) = h(N-1-n) \quad \text{I.365}$$

entonces el filtro tiene una fase lineal.

#### a DISEÑO DE FILTROS FIR USANDO VENTANAS

La aproximación más sencilla al diseño de filtros FIR es la obtención de

una respuesta al impulso de longitud finita truncando una serie de una respuesta al impulso de longitud infinita. Si suponemos que  $H_d(e^{j\omega})$  es la respuesta en frecuencia deseada ideal, entonces se obtiene la ecuación I.366:

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n} \quad \text{I.366.a}$$

donde  $h(n)$  es la correspondiente serie de respuesta al impulso:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{I.366.b}$$

En general,  $H_d(e^{j\omega})$  para un filtro selectivo en frecuencias puede ser lineal por tramos con discontinuidades en las fronteras entre bandas. En dichos casos la serie  $h_d(n)$  es de duración infinita y puede ser truncada para obtener una respuesta al impulso de duración finita. Las ecuaciones (I.366) pueden ser vistas como una representación en serie de Fourier de la respuesta en frecuencia periódica  $H_d(e^{j\omega})$ , con la serie  $h_d(n)$  jugando el papel de "coeficientes de Fourier". Por tanto, la aproximación de especificar un filtro ideal mediante el truncado de la respuesta al impulso ideal, es idéntico al estudio de la convergencia de las series de Fourier.

Si  $h_d(n)$  tiene una duración infinita, una forma de obtener una respuesta al impulso causal de duración finita, es simplemente truncar:

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad \text{I.367}$$

En general, podemos representar  $h(n)$  como el producto de la respuesta al impulso deseada y una ventana de duración finita  $w(n)$ :

$$h(n) = h_d(n) w(n) \quad \text{I.368}$$

donde en el ejemplo (I.367)  $w(n)$  es la ventana rectangular de longitud  $N$ . Usando el teorema de convolución compleja se obtiene que:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad \text{I.369}$$

Es decir,  $H(e^{j\omega})$  es la convolución periódica continua de la respuesta en frecuencia deseada con la transformada de Fourier de la ventana. Por tanto, la respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega})$  será una versión distorsionada de la respuesta en frecuencia ideal  $H_d(e^{j\omega})$ . De la ecuación (I.369) se ve que si  $W(e^{j\omega})$  es estrecha comparada con las variaciones en  $H_d(e^{j\omega})$ , entonces  $H(e^{j\omega})$  se "parecerá" a  $H_d(e^{j\omega})$ . Por tanto, la elección de la ventana está gobernada por el deseo de que  $w(n)$  sea tan corta en duración como sea posible para minimizar la computación en la implementación del filtro, mientras se mantiene  $W(e^{j\omega})$  tan estrecho como sea posible en frecuencia para reproducir la respuesta en frecuencia deseada. Estos dos requerimientos son conflictivos entre sí. Por tanto, la elección de una ventana adecuada es importante.

## b DISEÑO DE FILTROS FIR AYUDADO POR COMPUTADOR

La técnica de ventana es sencilla de aplicar y en cierto sentido bastante general. Sin embargo, a menudo se desea diseñar un filtro que sea "el mejor" que se puede conseguir para un valor dado de  $N$ . A continuación veremos varios procedimientos de diseño iterativos para filtros FIR, lo que en general da mejores filtros que el método de la ventana a expensas de una mayor complejidad en el procedimiento de diseño.

### b.1 DISEÑO POR MUESTREO EN FRECUENCIA

Una serie de duración finita puede ser representada por su transformada discreta de Fourier. Por tanto, un filtro FIR tiene una representación en términos de las "muestras en frecuencia":

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{j(2\pi/N)k}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j(2\pi/N)kn} \quad k=0,1,\dots,N-1$$

I.370

$H(z)$  puede representarse en términos de las muestras  $H(k)$  por la expresión:

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-e^{j(2\pi/N)k} z^{-1}} \quad \text{I.371}$$

Esta ecuación sirve como base para la realización de muestreo en frecuencia de un filtro FIR. Una aproximación simple al diseño del filtro consiste en especificarlo en términos de las muestras de un periodo de la respuesta en frecuencia deseada:

$$H(k) = H_d(e^{j(2\pi/N)k}) \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad \text{I.372}$$

De la ecuación (I.371) se puede ver que  $H(e^{j\omega})$  es una función lineal de los parámetros  $H(k)$ . Por tanto se pueden usar las técnicas de optimización lineal para variar estos parámetros de forma que den la mejor aproximación al filtro deseado. Esta aproximación, propuesta en principio por Gold y Jordan (1969), y desarrollada por Rabiner and Steiglitz (1970), ha sido usada para diseñar una gran variedad de filtros.

Los diseños por muestreo en frecuencia son particularmente atractivos para filtros selectivos en frecuencia de banda estrecha donde sólo unas pocas de las muestras de la respuesta en frecuencia son distintas de cero. En dichos casos pueden ser considerablemente más eficientes que la convolución directa o la convolución usando la TDF. En general, incluso si más de unas pocas muestras son distintas de cero, el método de diseño por muestreo en frecuencias todavía mantiene resultados excelentes. Sin embargo, el método carece de flexibilidad al especificar las frecuencias de corte de la banda pasante y banda de rechazo puesto que el posicionamiento de unos y ceros y muestras de transición están restringidas a múltiplos enteros de  $2\pi/N$ . Haciendo  $N$  suficientemente grande, se pueden obtener muestras arbitrariamente cercanas a cualquier frecuencia dada. Sin embargo esta es una aproximación poco eficiente. Por esta razón, particularmente si el filtro no se va a realizar usando la estructura de muestreo en frecuencia, se han desarrollado otras técnicas de diseño algorítmico con características más atractivas en general.

## b.2 APROXIMACIÓN DE LÓBULOS IGUALES PARA FILTROS FIR

La técnica de diseño de muestreo en frecuencia usa un procedimiento iterativo para llegar a un filtro FIR cuyo error máximo de aproximación a la

parámetros.

Herrmann y Schuessler (1970a, 1970b) desarrollaron la siguiente aproximación. Supongamos que queremos obtener una aproximación de lóbulos iguales a un filtro paso-bajo selectivo en frecuencias como se muestra en la figura 28.

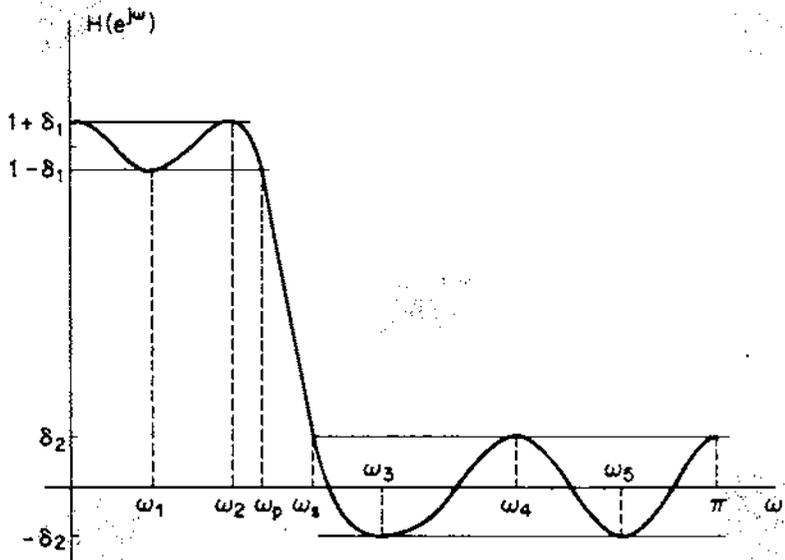


Fig. 28 Aproximación de lóbulos iguales para un filtro Pasa-Baja.

El número de máximos y mínimos locales en el rango de frecuencias  $0 \leq \omega \leq \pi$  es un parámetro importante de las aproximaciones de lóbulos iguales. Para examinar la dependencia de este parámetro en la longitud de la respuesta al impulso usaremos el hecho de que  $\cos(\omega k)$  puede ser expresado como una suma de potencias de  $\cos \omega$  para escribir la ec. (I.375) como:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M a_k (\cos \omega)^k \quad \text{I.376}$$

donde las  $a_k$  son constantes que están relacionados con los valores de la respuesta al impulso unitario. La ecuación (I.376) pone de manifiesto el hecho de que  $H(e^{j\omega})$  es un polinomio trigonométrico de orden  $M$ . Por tanto, puede haber como mucho  $M-1$  máximos y mínimos locales en el intervalo  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Además si diferenciamos (I.376) con respecto a  $\omega$  obtenemos:

$$\frac{dH(e^{j\omega})}{d\omega} = -\sin \omega \left[ \sum_{k=1}^M k a_k (\cos \omega)^{k-1} \right] \quad \text{I.377}$$

banda de rechazo sea mínimo para una duración  $N$  dada, un conjunto prescrito de muestras en frecuencia, y un conjunto dado de muestras en frecuencia variables. En el caso de los filtros selectivos en frecuencia diseñados por esta técnica, existe una limitación indeseable en la elección de las frecuencias de corte. Además el error de aproximación tiende a ser mayor alrededor de la región de transición y más pequeño a medida que nos alejamos de esta región. Parece intuitivamente razonable que si el error de aproximación se dispersa uniformemente en frecuencia, una especificación de diseño dada podría conseguirse con un filtro de orden más bajo que si la especificación sólo se cumple en una frecuencia y es muy diferente en el resto.

A continuación nos concernirán los filtros FIR de fase cero con respuesta en frecuencia de la forma:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M h(n) e^{-j\omega n} \quad \text{I.373}$$

La duración de la respuesta al impulso es  $N = 2M + 1$ , y para fase cero requeriremos:

$$h(n) = h(-n) \quad \text{I.374}$$

Hay que notar que un sistema causal puede obtenerse simplemente retardando  $h(n)$   $M$  muestras. Debido a la simetría de  $h(n)$ , podemos escribir  $H(e^{j\omega})$  como:

$$H(e^{j\omega}) = h(0) + \sum_{n=1}^M 2h(n)\cos(\omega n) \quad \text{I.375}$$

De la ecuación (I.375) se observa que  $H(e^{j\omega})$  es puramente real. Supongamos que deseamos diseñar un filtro paso-bajo de acuerdo al esquema de tolerancia de la figura 23.

Por supuesto, no es posible especificar independientemente cada uno de los parámetros  $M$  (número de muestras),  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\omega_p$  y  $\omega_s$ . Sin embargo, se han diseñado algoritmos en los cuales algunos de estos parámetros son fijos y se usa un procedimiento iterativo para obtener un ajuste óptimo de los restantes

De esta ecuación se puede ver que  $H(e^{j\omega})$  tendrá siempre, o bien un máximo, o bien un mínimo en  $\omega=0$  y  $\omega=\pi$ . Por tanto, habrá como mucho  $M+1$  extremos locales en el intervalo cerrado  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Usando este hecho, Herrmann y Schuessler (1970a, 1970b) mostraron como escribir un conjunto de ecuaciones que garanticen el comportamiento de lóbulos iguales.

En lugar de escribir un conjunto de ecuaciones no-lineales, Hofstetter et al. (1971a, 1971b) y Siegel (1972) usaron una técnica iterativa para producir un polinomio trigonométrico que tiene extremos del valor deseado. El procedimiento comienza eligiendo  $N_p$  y  $N_s$  y entonces estimando las frecuencias en las cuales ocurren los extremos. Entonces se usan los métodos estándar de interpolación de Lagrange para calcular un polinomio que tome los valores extremos prescritos en las frecuencias estimadas

Parks and McClellan (1972a, 1972b) mostraron que con  $M$ ,  $\omega_p$  y  $\omega_s$  fijos, el problema de diseño de un filtro selectivo en frecuencias se convierte en un problema de aproximación de Chebyshev sobre conjuntos disjuntos.

Rabiner (1972a, 1972b) discutió una formulación del problema de diseño de lóbulos iguales que es equivalente a la de Parks-McClellan pero estructurada especialmente para ser resuelta por técnicas de programación dinámica.

#### 9.5.4 COMPARACIÓN DE FILTROS DIGITALES IIR Y FIR

La elección entre un filtro FIR y un filtro IIR depende del valor relativo que uno le de a las ventajas y desventajas de cada tipo de filtro. Los filtros IIR por ejemplo, tienen la ventaja de que se pueden diseñar una gran variedad de filtros selectivos en frecuencia usando fórmulas cerradas. Es decir, una vez que se ha especificado el problema en términos apropiados para un tipo determinado de filtro (Butterworth, Chebyshev, elíptico), entonces los coeficientes (o polos y ceros) del filtro digital deseado se obtienen sustituyendo en un conjunto de ecuaciones de diseño. Este tipo de simplicidad del procedimiento de diseño es atractivo si se van a diseñar sólo unos pocos filtros o si las facilidades de computación son limitadas.

En el caso de los filtros FIR, no existen ecuaciones de diseño de forma cerrada. Aunque el método de la ventana se puede aplicar bastante sencillamente, puede ser necesaria alguna iteración para alcanzar las especificaciones prescritas. La mayoría del resto de los métodos FIR son procedimientos iterativos que requieren mayor potencia de computación para su

implementación. Por el contrario, a menudo es posible diseñar filtros digitales IIR selectivos en frecuencia usando sólo una calculadora de mano y una tabla de parámetros de diseño de filtros analógicos. Sin embargo, el precio pagado por esta simplicidad en el proceso de diseño puede medirse en términos de una pérdida de flexibilidad en la respuesta del filtro obtenible. Los diseños IIR de forma cerrada se limitan principalmente a filtros paso-bajo, paso-alto y paso-banda. Además estos diseños no suelen tener en cuenta la respuesta en fase del filtro. Por tanto, aunque podamos obtener un filtro paso-bajo elíptico con unas características de respuesta en amplitud excelentes por un procedimiento de cálculo relativamente simple, su respuesta en fase será bastante no-lineal.

Por el contrario, los filtros FIR tendrán una fase exactamente lineal. Además, el método de la ventana y la mayoría de los métodos algorítmicos permiten la posibilidad de aproximarse a cualquier respuesta en frecuencia arbitraria con poca más dificultad que la necesaria para diseñar un filtro paso-bajo. Además parece que el problema de diseño de filtros FIR está más controlado que el problema de diseño IIR porque existe un teorema de optimización para los filtros FIR que es significativo en un amplio rango de situaciones prácticas.

Por último hay que tener en cuenta ciertas cuestiones de economía (en términos de complejidad hardware o velocidad computacional) en la implementación de un filtro digital. Normalmente, una especificación de respuesta en amplitud dada se consigue más eficientemente con un filtro IIR. Sin embargo, en algunos casos (Schaffer and Rabiner (1973) y Rabiner et al. (1974)), la linealidad de la fase de los filtros FIR bien vale el coste extra.

## 10 PAQUETES DE SOFTWARE UTILIZADOS

### 10.1 INTRODUCCIÓN

Debido a la amplia variedad de paquetes de software con propósitos concretos, dentro de los campos de procesamiento de señales, análisis estadístico de datos, gráficos, etc..., que existen en el mercado y su versatilidad, se han incorporado estos a nuestro trabajo de la siguiente forma:

- 1- Dada la gran diversidad de estos paquetes, se comprueban cuales de aquellas rutinas que poseen, son de interés para los datos de que se dispone.
- 2- Una vez elegidas, se obtienen resultados iniciales utilizando estos paquetes para comprobar la conveniencia o no de utilizarlas en el desarrollo final.
- 3- Cuando se ha determinado cuales son todos los pasos a seguir para la obtención de determinados resultados, entonces estos son programados como una combinación de los siguientes elementos:
  - a) Software desarrollado por nosotros mismos
  - b) Utilización de rutinas ya incorporadas en determinadas librerías de funciones en aquellos casos en los que la programación directa de la misma no supusiera una mejora en el tiempo de ejecución y si un mayor coste no justificado en tiempo de programación y depuración.

Los paquetes de software utilizados han sido:

- 1) SPD de Tektronix: Utilizando sus rutinas de procesamiento de señales y presentación gráficas para desarrollar nuestro programa.
- 2) MATLAB de Mathworks: Ha tenido fundamentalmente tres niveles de utilización:
  - a) Diseño de programas que después se implementarán en un lenguaje de propósito general.
  - b) Comprobación de los resultados de las rutinas. Por ejemplo, se ha utilizado para verificar la rutina de coherencia, la rutina de DPE, etc...
  - c) Como entorno en el cual se puede llevar a cabo el análisis de los datos resultantes.

Los criterios seguidos para la elección de cada uno de estos paquetes han sido:

- 1) Facilidad de programación y modificación, tanto por la entrada directa de

ecuaciones matemáticas en el caso del matlab como por la facilidad de uso del entorno del SPSS o la potencia de las operaciones programadas en todos ellos.

- 2) Entrada y modificación de los parámetros sin necesidad de reprogramar.
- 3) Diversidad en la salida de los datos, obtención de resultados numéricos, gráficas de unas variables frente a otras, etc...

## 10.2 TIPOS DE PROGRAMAS USADOS EN PROCESAMIENTO DE SEÑALES Y DATOS

Cuando se va a programar en procesamiento de señales y datos hay que hacer una primera elección entre utilizar programas de propósito general o programas específicos en este tema.

### 10.2.1 ELECCIÓN DE LENGUAJES DE ALTO NIVEL

Muchos programadores tienden a seleccionar lenguajes de propósito general como FORTRAN, PASCAL, C, etc... Esto es debido a la amplia difusión de estos lenguajes, lo que redundo en la transportabilidad de los programas, aunque tengan algunos problemas a la hora de realizar ciertas funciones.

### 10.2.2 PAQUETES DE SOFTWARE DE TEMAS CONCRETOS

Su utilización es cada día más frecuente debido a que tienen implementadas gran cantidad de funciones, cuyo uso suele ser habitual en el tema que abarcan. Esto produce un ahorro importante de tiempo en la etapa de desarrollo y programación.

#### 1) SPD de Tektronix

El paquete de Procesamiento y visualización de señales de Tektronix proporciona un amplio rango de capacidades incluyendo funciones matemáticas, funciones de visualización de gráficos, funciones de manipulación de formas de onda y utilidades de E/S. El paquete consiste en lo siguiente:

##### 1) Funciones de SPD

Librerías de procesamiento de señales y visualización gráfica de señales.

##### 2) Programa SPDMENU

Es un programa que proporciona un fácil acceso basado en menús para la mayoría de las funciones del SPD.

##### 3) Interface BASIC de las librerías del SPD para un programa BASIC

compilado.

#### 4) Interface C de las librerías del SPD.

Las funciones del SPD operan sobre representaciones matriciales de datos o formas de onda. Las funciones de procesamiento de formas de onda dan cuenta de las operaciones matemáticas usadas en el procesamiento de señales, entre las que se incluyen

##### a) Operaciones aritméticas

Adición, substracción, multiplicación y división compleja o real de vectores, así como de un vector por un número. Logaritmo, exponencial, potencia y raíz cuadrada de un vector de datos, conversión de coordenadas polares a rectangulares y viceversa, obtención del mínimo y máximo al comparar dos vectores o un vector y un escalar.

##### b) Conversión al dominio de la frecuencia

FFT, IFFT, RFFT, IRFFT (transformada rápida de Fourier e inversa para datos reales ), Multiplicación del vector de datos por una ventana.

##### c) Convolución/correlación

Convolución, convolución no circular y correlación no circular entre dos vectores usando FFT, integración y diferenciación de un vector de datos, interpolación y decimación de un vector de datos

##### f) Generación de números aleatorios

##### g) Generación de señales

##### h) Generación de filtros FIR (calcula los coeficientes para un filtro de fase lineal).

##### i) Medidas estadísticas

Calcula la media, la desviación típica, la varianza y la raíz cuadrática media de un vector, encuentra el mínimo y el máximo de un vector de datos, suma o promedia las dimensiones de un vector de n dimensiones.

##### j) Medidas de parámetros de pulsos y senos

##### k) Medidas de valores puntuales sobre la onda

##### l) Manipulación de errores

Las funciones de visualización gráfica permiten presentar las formas de onda y datos asociados en un periférico de salida, que puede ser pantalla, impresora o plotter, de una gran variedad de marcas comerciales. Estas funciones incluyen

##### a) El control sobre el periférico de salida

Apertura, cierre e inicialización del dispositivo gráfico. Borra la información del periférico, asigna tamaño de título, subtítulo y etiquetas, redibuja el gráfico, define el área de la superficie de

salida que se utilizará en modo gráfico.

b) La definición de datos y curvas

c) Funciones de entorno gráfico

Define el tipo, color, rango, espaciado de las marcas, color de fondo e indentación de los ejes, dibuja un marco alrededor del dibujo, dibuja una rejilla.

d) Presentación de etiquetas y texto

Presenta de forma centrada el título , subtítulo , etiqueta para el eje x y para el eje y , una cadena de texto en el dibujo, ajusta el origen del modo texto.

Un elemento esencial en el paquete SPD es la estructura de datos que contiene las formas de onda y datos asociados. Esta estructura permite gran flexibilidad en la variedad de formas en que los datos de las señales pueden ser almacenados, modificados o pasados de una función a otra. En general, esta estructura de datos es transparente al usuario. Las utilidades de manipulación de formas de onda consisten en funciones y macros que acceden y manipulan el contenido de las estructuras de datos de las formas de onda. Estas utilidades están agrupadas en las siguientes categorías:

a) E/S de ficheros

b) Manipulación de formas de onda y vectores

c) Acceso a las cadenas y etiquetas

d) Elementos de lectura/escritura

e) Crea, copia y desubica formas de onda.

f) Creación de formas de onda subordinadas que pueden contener un subconjunto de los datos originales.

g) Manipulación de la memoria para su utilización de forma dinámica.

h) Acceso al bloque de descripción cabecera de la forma de onda

i) Acceso al bloque de descripción de las dimensiones

j) Acceso al bloque de descripción de las tuplas

k) Acceso a la estructura de las dimensiones

l) Acceso a la estructura de las tuplas

Descripción de la estructura de forma de onda

La estructura de datos de forma de onda de SPD está organizada para que los datos puedan ser particionados en subsecciones que puedan ser procesadas individualmente. Cada valor en un punto dado es una tupla. En cada punto de una dimensión se puede tomar más de una medida. Si se toman n medidas, la colección de datos tomados en cada instante se denomina una n-tupla. Los datos

almacenados en una n-tupla pueden ser de las mismas dimensiones o no. Cada dimensión representa un eje de medida separado. El número de dimensiones, el número de muestras en cada dimensión, y el número de tuplas en cada muestra determina el tamaño del vector necesario para almacenar los datos.

## 2) MATLAB

MATLAB es un paquete de software interactivo de altas prestaciones para el cálculo científico y/o de ingeniería.

El nombre de MATLAB proviene de MATrix LABoratory. Escrito originalmente en FORTRAN provee fácil acceso al software matricial desarrollado por los proyectos LINPACK y EISPACK. MATLAB es un sistema interactivo cuyo elemento básico de datos es una matriz que no requiere dimensionamiento. Esto permite resolver muchos problemas numéricos en una fracción del tiempo que llevaría en un lenguaje como FORTRAN, BASIC o C.

MATLAB ha evolucionado durante años con la aportación de muchos usuarios. En entornos universitarios, se ha convertido en una herramienta de instrucción típica para cursos introductorios en álgebra lineal aplicada, así como en cursos avanzados de otras materias. En el campo de la industria, se ha usado para investigación y para resolver problemas prácticos de ingeniería y matemáticas. Algunos usos típicos son cálculo numérico de propósito general, prototipos de algoritmos, resolución de problemas de propósito especial con formulaciones matriciales en disciplinas tales como teoría de control, estadística y procesamiento digital de señales.

De él se han hecho varias versiones posteriores (PC-MATLAB para ordenadores personales con MS-DOS, AT-MATLAB para PC-AT, MATLAB para el 80386, PRO-MATLAB para estaciones de trabajo, etc.). Estas están completamente reescritas en C. El MATLAB es un sistema integrado completo incluyendo gráficos, macros programables, aritmética IEEE, un intérprete rápido y muchos comando analíticos nuevos. Probablemente la característica más importante del MATLAB es su fácil extensibilidad, lo que permite crear nuestras propias aplicaciones. El programa consta de las siguientes secciones:

### 1) Sección de referencia

La sección de referencia contiene:

#### 1) Comandos de tipo general:

#### 2) Operadores matriciales

Adición, substracción, multiplicación, división derecha (/),  
División izquierda (\), potencia y conjugada traspuesta.

- 3) Operadores de vectores  
Adición, substracción, multiplicación, división derecha (/),  
División izquierda (\), potencia y conjugada traspuesta.
- 4) Operadores relacionales y lógicos  
Menor que, menor o igual que, igual que, mayor o igual que, mayor  
que, distinto. AND, OR y NOT.
- 5) Funciones relacionales y lógicas  
Encuentra los índices de un vector que cumplen una determinada  
condición lógica, detecta infinitos, valores NAN ("not a number"),  
y matrices vacías.
- 6) Instrucciones de control de flujo  
If, elseif, else, end, for, while, break, return, pause.
- 7) Instrucciones de programación de ficheros .m
- 8) Instrucciones para gráficos  
Dibujo en escala lineal-lineal, logarítmico-logarítmico,  
logarítmico-lineal, lineal-logarítmico, en coordenadas polares, en  
3 dimensiones, de contorno, diagrama de barras, histograma.  
Título, etiqueta de eje x, etiqueta de eje y, texto posicionado  
arbitrariamente, texto posicionado con el ratón, rejilla. Escalado  
manual de ejes, mantenimiento de un dibujo para poder sobreponer  
otro, mostrar pantalla gráfica, limpiar pantalla gráfica, división  
de la ventana en varios dibujos diferentes. Enviar gráfico a la  
impresora, volcado de pantalla, fichero gráfico de tipo meta.
- 9) Ficheros de disco
- 10) Funciones matemáticas elementales
- 11) Funciones trigonométricas
- 12) Funciones especiales
- 13) Polinomios
- 14) Spline cúbico, interpolación en 1-D y 2-D.
- 15) Soluciones de ecuaciones diferenciales
- 16) Integración numérica
- 17) Ecuaciones no lineales y optimización:
- 18) Análisis de datos  
Máximo, mínimo, media, mediana, desviación típica, ordenación,  
suma de los elementos, producto de los elementos, suma acumulada  
de los elementos, producto acumulado de los elementos. Derivada  
aproximada, coeficiente de correlación, matriz de covarianza.
- 19) Procesamiento de señales  
Módulo complejo, ángulo de fase, convolución, coeficientes de

correlación, deconvolución, transformada rápida de Fourier y su inversa, transformada rápida bidimensional y su inversa.

20) Manipulación de matrices:

## 2) Control System Toolbox

Contiene un conjunto de funciones que proporcionan las herramientas básicas de análisis en el dominio del tiempo y frecuencia que se necesitan en ingeniería de sistemas de control. Las más importantes son:

- a) Respuesta temporal:
- b) Respuesta frecuencial
- c) Propiedades del modelo:
- d) Modelado del sistema
- e) Diseño de un estimador/controlador LQG.
- f) Reducción del orden del modelo.
- g) Transformación de un sistema de espacio de estados en varias realizaciones.
- h) Funciones de diseño por medio del lugar de las raíces y selección de ganancia.
- i) Conversión de modelos a diferentes representaciones (espacio de estados a función de transferencia, a polos y ceros y viceversa).

## 3) Robust Control Toolbox

Añade 35 comandos para diseño de sistemas de control robusto que incluyen:

Síntesis de control óptimo basado en LQG, de control óptimo  $H_2$  y  $H_\infty$ .  
Reducción del modelo basado en valores singulares para control robusto.  
Diseño de sistemas de control digital multivariables.

## 4) System identification Toolbox

Desarrollado por Lennart Jung, añade más de 40 comandos para modelado paramétrico e identificación de sistemas. Está especializado en estimar modelos de sistemas basados en datos de entrada-salida, o en series temporales. Se puede dividir en las siguientes partes:

Análisis espectral, de correlación y estimación de modelos AR y ARX.  
Selección de órdenes y retardos, así como estimación de estructuras de modelos de entrada-salida más complejos (ARMA y ARMAX).  
Transformaciones entre tiempo continuo y discreto y funciones para estimar estructuras de modelos multientrada completamente generales.  
Identificación recursiva. Construcción de modelos en forma de espacio

de estados.

#### 5) Signal Processing Toolbox

Añade 50 comandos para procesamiento de señales digitales unidimensionales y bidimensionales (análisis de series temporales).

Incluye funciones para:

Análisis de filtros e implementación, incluyendo respuesta en frecuencia, retardos e implementación del filtro usando técnicas directas y basadas en frecuencia. Diseño de filtros IIR (Butterworth, Chebyshev tipos I y II, elípticos) y fórmula de selección del orden. Diseño de filtros FIR usando métodos basados en ventanas por medio del algoritmo óptimo de Parks-McClellan. Modelado paramétrico, incluyendo el modelo de Prony y resolviendo el problema de respuesta en frecuencia inverso (encuentra una función de transferencia continua que corresponde a una respuesta en frecuencias dada). Procesamiento FFT, incluyendo la transformada base 2 y su inversa, transformada para número de puntos que no sean potencia de dos y FFT bidimensional. Estimación de la densidad de potencia espectral, función de transferencia, coherencia y función de correlación. Análisis Cepstral, cepstrum realm, cepstrum complejo y reconstrucción de fase mínima. Interpolación y decimación. Procesamiento de señales 2-D.

#### 6) Optimization toolbox

Contiene bastantes comandos para la optimización de funciones lineales y no-lineales en general. Para optimización no-lineal posee funciones para minimización con y sin restricciones, minimax, mínimos cuadrados no-lineales, multi-objetivo y optimización semi-infinita. También posee funciones para programación lineal y cuadrática y para la solución de ecuaciones no-lineales.

#### 7) Spline toolbox

Añade 50 comandos para la construcción y manipulación de splines.

CAPÍTULO II

ANÁLISIS ESTADÍSTICO

## II ANÁLISIS ESTADÍSTICO

## 1 CONCEPTOS BÁSICOS

En este capítulo tratamos de exponer de forma breve y concisa aquellas herramientas del análisis estadístico que puedan ser de utilidad para el estudio de una población de sujetos. Estas herramientas incluyen desde el análisis univariante (Mendenhall et al. (1986), Barlow (1989)), para el estudio de variables individuales, hasta el análisis multivariante (Chatfield and Collins (1980), Escudero (1977), Cuadras (1981)), cuando se pretende obtener información global acerca del estado del sujeto considerando un conjunto de variables. A continuación se presentan unas tablas que resumen los estimadores (tanto de promedios como de dispersión) y las distribuciones de probabilidad más importantes. Se supondrá una población de tamaño  $N$ , de la cual se toma una muestra de tamaño  $n$ .

Tabla II.1: Promedios

Media : Aritmética	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
Geométrica	$mg = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$
Armónica	$ma = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$
Raíz media de los cuadrados	$rms = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$
Moda	Valor más repetido en un conjunto de datos
Mediana	Valor tal que la mitad de los datos tienen Valores superiores y la otra mitad inferiores Preferible a la media cuando el orden o rango sea más importante que su valor numérico.

Tabla II.2: Medidas de Dispersión

Varianza	$V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$							
Desviación absoluta media	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n  x_i - \bar{x} $							
Desviación mediana	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n  x_i - me $	me=mediana						
Desviación típica	$\sigma = \sqrt{V(x)}$	<table border="1"> <tr> <td><math display="block">\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}</math></td> <td>Desviación rms de la media de los datos</td> </tr> <tr> <td><math display="block">\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}</math></td> <td>Desviación rms de la media de la población</td> </tr> <tr> <td><math display="block">s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}</math></td> <td>Estimación no sesgada de la <math>\sigma</math> de la población.</td> </tr> </table>	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$	Desviación rms de la media de los datos	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$	Desviación rms de la media de la población	$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$	Estimación no sesgada de la $\sigma$ de la población.
	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$	Desviación rms de la media de los datos						
	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$	Desviación rms de la media de la población						
$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$	Estimación no sesgada de la $\sigma$ de la población.							
Rango	$\max(x_i) - \min(x_i)$							
Rango entre cuartos	<table border="1"> <tr> <td>cuarto más alto</td> <td>75% de datos con menos valor 25% de datos con mayor valor</td> </tr> <tr> <td>cuarto más bajo</td> <td>75% de datos con mayor valor 25% de datos con menos valor</td> </tr> </table>		cuarto más alto	75% de datos con menos valor 25% de datos con mayor valor	cuarto más bajo	75% de datos con mayor valor 25% de datos con menos valor		
cuarto más alto	75% de datos con menos valor 25% de datos con mayor valor							
cuarto más bajo	75% de datos con mayor valor 25% de datos con menos valor							
Décimas	Cada décima contiene un 10% de los datos							
Percentiles	Contiene un porcentaje dado de los datos							
Anchura a altura mitad	Se mide la altura del pico, se dibuja una recta horizontal a mitad de altura y se lee la distancia entre los dos puntos donde corta al histograma. Independiente de los datos de las colas.							

Tabla II.3: Momentos de mayor orden

Skew	$\gamma = \frac{1}{n\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$	$\gamma < 0$	cola izquierda mayor
		$\gamma = 0$	colas simétricas
		$\gamma > 0$	cola derecha mayor
Alternativa de Pearson	$\gamma = \frac{\text{media-modas}}{\sigma}$		
Curtosis	$c = \frac{1}{n\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 - 3$	$c < 0$	pico más debil colas más cortas
		$c = 0$	gausiana
		$c > 0$	pico más alto colas más anchas

Tabla II.4: Estimación

Estimador	Consistencia	Sesgo	Varianza
$\hat{\mu} = \bar{x}$	si	no	$\frac{\sigma^2}{n}$
con media conocida $\hat{V}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$	si	no	$\frac{2\sigma^4}{N}$
$\hat{V}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	si	si	$\frac{2\sigma^4}{n}$
$\hat{V}(x) = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	si	no	$\frac{2\sigma^4}{n-1}$
$\hat{\sigma} = s$	si	si	$\frac{\sigma^2}{2(n-1)}$

Tabla II.5: Distribuciones de probabilidad univariantes

Nombre	Definición	Distribución
Gausiana		$P(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ media= $\mu$ varza= $\sigma^2$
Chi cuadrada	$\chi^2 = \sum_i \frac{[y_i - f(x_i)]^2}{\sigma_i^2}$ $\sqrt{2\chi^2}$ aprox. gaus. n=30	$P(\chi^2, n) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)} \chi^{n-2} e^{-\chi^2/2}$ media=n varza=2n gl=n
T-Student	$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma}}$ Importante si n pequeño o $\sigma$ grande	$f(t, n) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi} \Gamma(n/2)} \frac{1}{(1+(t/n))^2}$ media=0 gl=n ó n-1
F de Snedecor	$F = \frac{\frac{1}{(n_1-1)} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x}_1)^2}{\frac{1}{(n_2-1)} \sum_{j=1}^{n_2} (x_j - \bar{x}_2)^2}$	$P(F) = \frac{\Gamma((f_1+f_2)/2)}{\Gamma(f_1/2)\Gamma(f_2/2)} * \frac{(F^{(f_1/2)-1})}{(f_2+f_1F)^{(f_1+f_2)/2}}$

Tabla II.6: Distribuciones de probabilidad multivariantes

Nombre	Definición
Normal multivariante ( $\mu, V$ )	$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{ V }} e^{[-(1/2)(\mathbf{x}-\mu)V^{-1}(\mathbf{x}-\mu)]}$
Wishart	$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{Nn} \end{pmatrix}$ <p>filas <math>\rightarrow N(0, C)</math>  <math>W_n(0, N) \equiv Z' Z</math></p>
A de Wilks	$\Lambda(n, s, t) = \frac{ A }{ A+B }$ <p><math>A \equiv W_n(C, s)</math>  <math>B \equiv W_n(C, t)</math></p> $\Lambda(n, s, t) = \frac{ A }{ A+B } =  I + A^{-1}B ^{-1} = \prod_{i=1}^m (1 + \lambda_i)^{-1}$ <p><math>\lambda_1, \dots, \lambda_m</math>: valores propios no nulos de <math>A^{-1}B</math>.  Se utiliza en A. M. de varianza para contraste de hipótesis lineales. <math>t \rightarrow</math> g.l. hipótesis  <math>n \rightarrow</math> número de variables observables  <math>s \rightarrow</math> g.l. de matriz de dispersión residual</p>

### 1.1 PRUEBA DE HIPÓTESIS

Si queremos hacer una afirmación sobre unos resultados de tipo estadístico tenemos que probar que dicha afirmación es correcta. En general se tendrá una teoría, no necesariamente de tipo estadístico, la hipótesis de investigación, acerca de los parámetros que queremos defender. Para la comprobación de esta hipótesis de estudio, se parte de la hipótesis nula, que es la que se tratará de aceptar o rechazar en términos estadísticos. En muchos casos se concluye que no hay suficiente información para rechazarla. Los distintos elementos de una prueba estadística son:

- 1) La hipótesis nula  $H_0$
- 2) La hipótesis alternativa  $H_a$
- 3) El estadístico de la prueba o función de decisión
- 4) La región de aceptación
- 5) La región de rechazo

El estadístico de la prueba es una función de las mediciones muestrales en la cual se fundamenta la decisión estadística. La región de rechazo o crítica, que se denotará por RR, especifica los valores del estadístico de la prueba para los cuales se rechaza la hipótesis nula  $H_0$ . La región de aceptación especifica los valores del estadístico de la prueba para los cuales se acepta la hipótesis nula. La Hipótesis alternativa,  $H_a$ , será la contraria de la hipótesis nula.

Para cualquier región de rechazo fija podemos cometer dos errores al llegar a una decisión:

	Aceptar $H_0$	Rechazar $H_0$
$H_0$ Cierta Probabilidad	Correcto $1-\alpha$	Error de tipo I $\alpha$
$H_0$ Falsa Probabilidad	Error de tipo II $\beta$	Correcto $1-\beta$

La probabilidad de un error de tipo I,  $\alpha$ , suele denominarse nivel de significación de la prueba. La elección de  $\alpha$  podría ser por tanto arbitraria. Sin embargo, una vez elegido el estadístico de la prueba que se va a utilizar, muchas veces es posible determinar el valor de  $p$ , es decir, el nivel de significación alcanzado en una prueba. Esta cantidad es un estadístico que representa el mínimo valor de  $\alpha$  para el cual se rechaza la hipótesis nula.

Si  $W$  es un estadístico de una prueba, el valor de  $p$  o nivel de significación alcanzado es el mínima nivel de significación  $\alpha$ , para el cual los datos observados indican que se tendría que rechazar la hipótesis nula.

Si la selección de  $\alpha$  en un experimento es mayor o igual que  $p$ , se rechaza la hipótesis nula. De otra manera, si  $\alpha$  es menor que  $p$ , no se puede rechazar la hipótesis nula.

La probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es falsa ( $1-\beta$ ) se denomina Potencia del contraste. El problema es que cuanto más pequeño es  $\alpha$ , mayor es  $\beta$ . Por eso hay que escoger aquel contraste con región crítica prepotente.

En definitiva, si el valor del estadístico, para una muestra concreta, se encuentra en la región de aceptación, se acepta la hipótesis nula, mientras que si se encuentra en la región de rechazo se rechaza.

## 1.2 LA PRUEBA CHI-CUADRADO

Si realizamos un experimento multinomial con las siguientes características:

- 1) El experimento consta de  $k$  pruebas idénticas
- 2) El resultado del experimento cae en una de  $r$  clases
- 3) La probabilidad de que el resultado de una prueba caiga en una clase en particular  $i$  es  $p_i$ , y permanece constante de prueba a prueba. Además  $\sum p_i = 1$ .
- 4) Las pruebas son independientes
- 5) Estamos interesados en los valores  $k_1, k_2, \dots, k_r$  en donde  $k_i$  es igual al número de pruebas cuyo resultado cae en la  $i$ -ésima clase

Por tanto, el número esperado de resultados que caen en la clase  $i$  se pueden calcular por la fórmula.

$$E\{n_i\} = kp_i \quad i=1,2,\dots,r \quad \text{II.1}$$

Si nuestra hipótesis es verdadera, los resultados de cada clase no deberían desviarse mucho de sus valores esperados  $kp_i$ . En 1900 Karl Pearson propuso el siguiente estadístico de prueba, que es una función de los cuadrados de las desviaciones de los números observados con respecto a sus valores esperados, ponderados por el recíproco de sus valores esperados:

$$X^2 = \sum_{i=1}^r \frac{[k_i - E(k_i)]^2}{E(k_i)} = \sum_{i=1}^r \frac{[k_i - kp_i]^2}{kp_i} \quad \text{II.2}$$

Se puede demostrar que  $X^2$  tendrá aproximadamente una distribución de probabilidad chi-cuadrada en un muestreo repetitivo, para  $r$  grande. El número de grados de libertad es igual al número de clases menos un grado de libertad por cada restricción lineal impuesta sobre los resultados (una restricción siempre presente es que  $\sum k_i = k$ ).

### 1.3 ANÁLISIS DE VARIANZA

Supongamos que tenemos una serie de muestras que se supone que son gaussianas, de la misma varianza (desconocida) y queremos verificar si sus medias son iguales o no.

Los  $n$  elementos de los datos son divididos en  $r$  grupos o muestras, de forma que el grupo  $g$  tiene  $r_g$  miembros, media  $\bar{x}_g$  y varianza medida  $V_g$ . Cada

grupo tiene presumiblemente una media verdadera  $\mu_g$  de la cual  $\bar{x}_g$  es una estimación y también hay una media total  $\mu$ . La hipótesis nula es que todas las medias  $\mu_g$  son iguales entre si e iguales a  $\mu$ . La hipótesis alternativa es que realmente existe una diferencia entre las  $\mu_g$ .

Las diferencias en la  $\mu_g$  causarán que las  $\bar{x}_g$  difieran de la media total  $\bar{x}$ , pero dichas diferencias podrían ser debidas a fluctuaciones estadísticas. El problema es decidir cuando la dispersión de las  $\mu_g$  alrededor de  $\bar{x}$  es lo suficientemente pequeña como para ser compatible con la hipótesis nula.

Bajo la hipótesis nula esta dispersión de los  $\bar{x}_g$  entre grupos proviene de la naturaleza aleatoria de las medidas debida a la verdadera desviación estandard  $\sigma$ . El análisis por tanto consiste en estimar la varianza de las medidas de dos formas:

- entre grupos
- dentro de grupos

Entonces se lleva a cabo un test usando la distribución F de Snedecor y si la varianza estimada entre grupos es significativamente mayor que la estimada dentro de los grupos, esto nos permite rechazar la hipótesis nula.

El numerador usado en el test F, la estimación de la varianza entre grupos proviene del hecho de que el error esperado para  $\bar{x}_g$  es  $\sigma/\sqrt{r_g}$ , por lo que:

$$\sum_g \frac{(\bar{x}_g - \bar{x})^2}{\sigma^2/r_g} = \sum_g \frac{r_g(\bar{x}_g - \bar{x})^2}{\sigma^2} \tag{II.3}$$

está distribuido como una  $\chi^2$  y:

$$\frac{1}{r-1} \sum_g r_g(\bar{x}_g - \bar{x})^2 \tag{II.4}$$

es el numerador apropiado para F. Hay  $r-1$  grados de libertad.

El denominador es la estimación de  $\sigma$  y está dada por:

$$\frac{1}{n-r} \sum_g \sum_{i \in g} (\bar{x}_i - \bar{x}_g)^2 \tag{II.5}$$

Cuando se divide por  $\sigma^2$  la doble suma se distribuye como  $\chi^2$  con  $n-r$  grados de libertad. Para probar la hipótesis nula:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r$$

II.6

frente a la alternativa de que al menos una de las igualdades no se cumpla, se compara el cociente con una distribución F de  $(r-1)$  y  $(n-r)$  grados de libertad. La hipótesis nula se rechazará si:

$$F > F_\alpha$$

II.7

donde  $F_\alpha$  es el valor crítico de F para la probabilidad de un error de tipo I de valor  $\alpha$ .

## 2 ANÁLISIS MULTIVARIANTE

### 2.1 INTRODUCCIÓN

Consideraremos datos multivariantes a la observación de varias variables para cierto número de individuos u objetos. El análisis multivariante es el *conjunto de métodos estadísticos y matemáticos para analizar, describir e interpretar dichos datos multivariantes.*

El objetivo que subyace a todos los métodos de análisis multivariantes es la simplificación. Es decir, la obtención de unos, relativamente pocos, parámetros a partir de una gran cantidad de datos.

Una distinción fundamental entre las diferentes técnicas es que algunos análisis conciernen principalmente a las relaciones entre las distintas variables (*orientados a variables*) y otros a las relaciones entre los individuos (*orientados a individuos*).

**Análisis de interdependencia.** Si nuestro interés primordial se concentra en las variables, tenemos que analizar la interdependencia entre las diferentes variables. Si sólo utilizamos dos variables esto se puede hacer observando la correlación entre ellas. Cuando trabajamos con más de dos variables, entonces lo más apropiado es utilizar alguna técnica que reduzca la dimensionalidad del problema. El análisis factorial intenta explicar, según un modelo lineal, un conjunto extenso de variables observables mediante un número reducido de variables hipotéticas llamadas factores. El Análisis de componentes principales permite transformar las variables observadas en un nuevo conjunto de variables que están incorreladas y reordenadas en orden decreciente de importancia. El principal objetivo es *reducir la dimensionalidad* del problema y encontrar nuevas variables, combinación lineal de las antiguas, que hagan más fácil la comprensión de los datos. Es un caso particular del análisis factorial.

**Clasificación.** Un problema dirigido hacia individuos es preguntarnos si los individuos se encuentran en grupos, o si por el contrario están dispersados aleatoriamente por el dominio de variación. Las técnicas para formar grupos de individuos se suelen denominar Análisis de grupos (o Análisis de clusters). Otro problema de clasificación diferente aparece en el Análisis discriminante, en su acepción como técnica de clasificación. Si tenemos una muestra aleatoria de individuos de la población A y otra muestra aleatoria de la población B. ¿ Como construir una regla para ubicar a los nuevos individuos, cuyo origen es desconocido, en la población correcta con

la mayor probabilidad de haber acertado?. Otras técnicas orientadas a individuos son el ordenamiento, donde el propósito principal es clasificar a los individuos según algún tipo de orden y el escalado, que es apropiada cuando los datos están en la forma de similaridades o disimilaridades. Por otra parte, se puede utilizar el análisis de varianza para determinar la diferencia entre las medias de los diferentes grupos. La extensión al caso multivariante requiere la sustitución de las medias individuales por un vector de medias y la exigencia de que los grupos deben ser muestras aleatorias de poblaciones normales con la misma matriz de covarianzas. Aunque el test de la varianza univariante puede calcularse para cada una de las variables dependientes, este no da cuenta de la relación entre estas variables. Sólo cuando las variables son incorreladas coinciden ambos resultados.

## 2.2 PARÁMETROS ESTADÍSTICOS FUNDAMENTALES

En el caso univariante, la función de distribución de probabilidad viene dada por la media y la varianza. En el caso de distribuciones multivariantes, necesitamos encontrar la media y la varianza de cada una de las  $p$  variables, junto con una medida de la forma en que cada par de variables está relacionado. Esto último viene dado por las covarianzas.

La media de un conjunto de variables  $x = [x_1, \dots, x_p]$  es  $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_p]$ , donde  $\mu_i$  es la media de la variable  $i$ -ésima.

La varianza de la componente  $i$ -ésima de  $x$  está dada por:

$$\text{Var}(x_i) = E\{(x_i - \mu_i)^2\} \quad \text{II.8}$$

La covarianza de dos variables  $x_i$  y  $x_j$  está definida por:

$$\text{cov}(x_i, x_j) = E\{(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\} = \sigma_{ij} \quad \text{II.9}$$

Se puede observar que la covarianza de una variable consigo misma es la varianza. La matriz de covarianzas para  $p$  variables viene dada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \quad \text{II.10}$$

Los términos diagonales de  $\Sigma$  son las varianzas, mientras que los términos fuera de la diagonal, las covarianzas, son tales que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Por tanto, la matriz es simétrica.

La covarianza suele ser estandarizada dividiendo por el producto de las desviaciones estándar de las dos variables para dar el coeficiente de correlación lineal:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii} \sigma_{jj}}} \quad \text{II.11}$$

donde  $\sigma_{ii}$  denota la varianza de  $x_i$ . El coeficiente de correlación lineal da una medida de la combinación lineal de las dos variables. El coeficiente es positivo si la relación entre las dos variables tiene una pendiente positiva (covarianza positiva) y negativo si la relación tiene una pendiente negativa (covarianza negativa).

*Si las dos variables son independientes entonces su covarianza, y por tanto su correlación, será cero. Sin embargo, la inversa no es cierta. Es posible construir ejemplos con dos variables que tengan correlación cero y exista una dependencia funcional entre ambas.*

### 2.3 DISTANCIAS ESTADÍSTICAS

Sea  $\Omega$  un conjunto formado por  $r$  objetos (especies, razas, enfermedades, etc...)  $\{1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots, r\}$ . Se da el nombre de distancia o disimilaridad entre  $i$  y  $j$ , a una medida, indicada por  $D(i, j)$ , que mide el grado de semejanza o desemejanza de ambos objetos, en relación a cierto número de características cualitativas y cuantitativas. Cuanto mayor es la diferencia entre  $i, j$  mayor es el valor positivo de  $D(i, j)$ . Una gran semejanza entre  $i, j$  implica un valor pequeño para  $D(i, j)$ . La distancia euclídea, la de Mahalanobis, la de Gower y la chi-cuadrado son ejemplos de distancias utilizadas en relación a diferentes métodos de representación de datos. Tales distancias tienen la propiedad de poder obtener una representación euclídea de los objetos, aunque existen otras distancias que no cumplen esta condición.

Las propiedades que puede tener una distancia son todas o algunas de las siguientes:

Tabla II.7 Propiedades que puede tener una distancia.

p.1)	$D(i, j) \geq 0$
p.2)	$D(i, i) = 0$
p.3) (simetría)	$D(i, j) = D(j, i) \forall i, j$
p.4) (desigualdad triangular)	$D(i, j) \leq D(i, t) + D(t, j)$
p.5)	$D(i, j) = 0 \iff i \equiv j$
p.6) (desigualdad ultramétrica)	$D(i, j) \leq \max\{D(i, t), D(t, j)\}$
p.7)	$D(i, j)$ es euclídea

Esta última propiedad significa que existe un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^m$  y dos puntos,  $P_i, P_j \in \mathbb{R}^m$  de coordenadas:

$$P_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}) \quad P_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm})$$

verificando:

$$D(i, j) = d_2(P_i, P_j) = \sqrt{\sum_{h=1}^m (x_{ih} - x_{jh})^2} \quad \text{II.12}$$

Llamaremos a  $d_2(P_i, P_j)$  la distancia euclídea fundamental

Una distancia recibe diferentes denominaciones según las propiedades que verifica como se puede ver en la tabla (II.8). En la tabla (II.9) se da la definición y propiedades de dos de las distancias más conocidas.

Tabla II.8 Denominación de las distancias según las propiedades que verifique

Denominación	Propiedades
<i>Disimilaridad</i>	p.1 p.2 p.3
<i>Distancia métrica</i>	p.1 p.2 p.3 p.4 p.5
<i>Distancia ultramétrica</i>	p.1 p.2 p.3 p.6
<i>Distancia euclídea</i>	p.1 p.2 p.3 p.4 p.7

Tabla II.9 Definición y propiedades de las distancias más usadas.

DEFINICION	PROPIEDADES
<p>DISTANCIA EUCLÍDEA</p> $D(i, j) = \sqrt{\sum_{h=1}^p (x_{ih} - x_{jh})^2}$ $D^2(i, j) = (P_i - P_j)' (P_i - P_j)$	<p>Sensible a cambios de escala.</p>
<p>DISTANCIA DE MAHALANOBIS</p> $D(i, j) = \frac{ x_i - x_j }{\sigma}$ $D^2(i, j) = (P_i - P_j)' C^{-1} (P_i - P_j)$	<p> <math>D_{ij}^2 = D_{ji}^2</math>  <math>D_{ij}^2 \geq 0</math>  <math>D_{ij}^2 = 0 \Leftrightarrow w_i = w_j</math>  <math>D_{ij}^2 \leq D_{ik}^2 + D_{kj}^2</math>                      Invariante por transformaciones lineales no singulares de las variables. (en particular por cambio de escala).                 </p>

## 2.4 ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

### 2.4.1 INTRODUCCIÓN

Para observar las relaciones entre un conjunto de  $p$  variables correladas, puede ser útil transformar el conjunto original de variables en un nuevo conjunto de variables incorreladas denominadas **componentes principales**. Estas nuevas variables son combinación lineal de las variables originales y se obtienen en orden decreciente de importancia. *La transformación es, de hecho, una rotación en el espacio  $p$ -dimensional.*

El objetivo usual del análisis es comprobar si las primeras componentes dan cuenta de la mayor parte de la variación de los datos. Si algunas de las variables originales están altamente correladas, entonces debe haber una relación casi lineal entre dichas variables. Al calcular las nuevas variables, sólo precisaremos las más significativas y por tanto habremos reducido la dimensionalidad del problema.

Dado un vector de variables  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_p]$  las componentes principales son las nuevas variables  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]$  tales que:

$$y_i = a_{i1} x_1 + \dots + a_{ip} x_p \quad i = 1, \dots, p \quad \text{II.13}$$

y tienen las siguientes propiedades:

1) Los vectores  $(a_{i1}, \dots, a_{ip})$  son ortonormales, es decir:

$$\sum_{h=1}^p a_{hi}^2 = 1 \quad \sum_{h=1}^p a_{hi} a_{hj} = 0 \quad i \neq j \quad \text{II.14}$$

2) Son los vectores propios de la matriz de covarianzas C, es decir:

$$\begin{aligned} V_i &= (a_{i1}, \dots, a_{ip}) & \text{II.15} \\ C V_i &= \lambda_i V_i \end{aligned}$$

siendo  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  los valores propios de C.

3) Las componentes principales  $y_1, \dots, y_p$  son variables aleatorias incorrelacionadas, cuyas varianzas son respectivamente máximas.

$$\text{var}(Y_1) = \lambda_1 \geq \text{var}(Y_2) = \lambda_2 \geq \dots \geq \text{var}(Y_p) = \lambda_p \quad \text{II.16}$$

Las componentes principales se obtienen diagonalizando la matriz de covarianzas C.

$$C = a D \lambda a' \quad \text{II.17}$$

siendo  $D \lambda$  la matriz diagonal que contiene los valores propios de C.

#### 2.4.2 CASO DE AUTOVALORES CERO

Si algunas de las variables originales son linealmente dependientes, entonces algunos de los autovalores de  $\Sigma$  serán cero. La dimensión del espacio que contiene a las observaciones es igual al rango de  $\Sigma$ , y está dada por  $(p - n_{ac})$ , donde  $p$  es la dimensión original y  $n_{ac}$  el número de autovalores cero.

#### 2.4.3 CASO DE AUTOVALORES PEQUEÑOS

La existencia de una dependencia lineal exacta es rara, excepto cuando se introducen variables redundantes. Un problema práctico más importante es

detectar dependencias aproximadamente lineales. Si el autovalor más pequeño  $\lambda_p$  es muy cercano a cero, entonces la  $p$ -ésima componente principal es casi constante y la dimensión de  $x$  se puede suponer  $p-1$ . Si los últimos autovalores son considerados pequeños, entonces la eficiencia de restringir la dimensión a, por ejemplo,  $m$  viene dada por:

$$\frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i} \quad \text{II.18}$$

Las componentes principales correspondientes a autovalores pequeños son variables para las cuales todos los miembros de la población tienen valores casi iguales. Estas componentes pueden tomarse como estimaciones de relaciones lineales subyacentes.

#### 2.4.4 USO DE LAS COMPONENTES EN ANÁLISIS

Los objetivos del ACP son tres:

- a) Identificación de nuevas variables significativas
- b) Reducción de la dimensionalidad del problema
- c) Eliminación de las variables originales que contribuyan con poca información extra.

Si las primeras componentes dan cuenta de la mayor parte de la variación de los datos originales, se pueden usar estas primeras componentes en los análisis posteriores en lugar de las variables originales. En particular, si las dos primeras componentes dan cuenta de una parte importante de la varianza esto permite que sean dibujadas para la localización de grupos de individuos.

#### 2.4.5 DETERMINACIÓN DE LA DIMENSIÓN

La manera más cómoda de representar los  $n$  individuos es, evidentemente en un plano. Sin embargo, es necesario estudiar la pérdida de información cuando reducimos la dimensión. Se puede, por ejemplo, comparar la dispersión en dimensión  $d$  con la dispersión global calculando el porcentaje:

$$p = 100 \left( \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_d}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p} \right) \quad d \leq p \quad \text{II.19}$$

Cuando  $d=p$ ,  $P = 100$  y la representación canónica absorbe el 100% de la dispersión total. Si con  $d=2$ , obtenemos  $p=75\%$ , con la representación en un plano sólo perderemos un 25% de la dispersión. Si  $P$  es un valor bajo (menos del 50%) resulta aconsejable aumentar  $d$ .

### 2.5 ANÁLISIS CANÓNICO DE POBLACIONES

La dificultad de aplicar la distancia de Mahalanobis  $D$  se debe a que, en general, la matriz de covarianzas  $C$  es desconocida. El análisis canónico de poblaciones (ACPL) es un método de representación de grupos, a lo largo de ejes con máximo poder de discriminación, en relación a la distancia  $D$ .

Supongamos que una población general  $\Omega$  es reunión de  $r$  subpoblaciones o grupos.

$$\Omega = \Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_r \quad \Pi_i \cap \Pi_j = 0 \quad \text{II.20}$$

Sean  $x_1, \dots, x_p$  variables observables sobre  $\Omega$ . Si sobre la población  $\Pi_i$  obtenemos  $p_i$  observaciones ( $i=1,2,\dots,r$ ) de las  $p$  variables observables, nuestros datos formarán una tabla  $n \times p$  siendo  $n = \sum p_i$

		Variables			
		x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>p</sub>	
Poblaciones	Π <sub>1</sub>	x <sub>111</sub>	x <sub>121</sub>	... x <sub>1p1</sub>	}
	⋮	⋮	⋮	⋮	
	⋮	x <sub>11p<sub>1</sub></sub>	x <sub>12p<sub>1</sub></sub>	... x <sub>1pp<sub>1</sub></sub>	}
	⋮	⋮	⋮	⋮	
	⋮	x <sub>r11</sub>	x <sub>r21</sub>	x <sub>rp1</sub>	}
	Π <sub>r</sub>	⋮	⋮	⋮	
		x <sub>r1p<sub>r</sub></sub>	x <sub>r2p<sub>r</sub></sub>	x <sub>rpp<sub>r</sub></sub>	}
		⋮	⋮	⋮	

donde  $x_{tih}$  es la  $h$ -ésima observación de la variable  $x_i$  en la población  $\Pi_t$ . Sea:

$$\bar{x}_{ti} = \frac{1}{n_t} \sum_{h=1}^{n_t} x_{tih} \quad \text{II.21}$$

la media de la variable  $x_i$  en la población  $\Pi_t$ . Es razonable describir cada población  $\Pi_t$  por el individuo medio de  $\Pi_t$  representado por el punto de coordenadas:

$$\bar{x}_t = (\bar{x}_{t1}, \bar{x}_{t2}, \dots, \bar{x}_{tp}) \quad t=1, \dots, r \quad \text{II.22}$$

Sea ahora  $C_t$  la matriz de covarianzas poblacionales de las variables para la población  $\Pi_t$ . Supongamos ahora que se verifica la condición de homogeneidad de covarianzas entre las  $r$  poblaciones.

$$C_1 = C_2 = \dots = C_r = C \quad \text{II.23}$$

Una estimación de la matriz  $C_t$  es la matriz de covarianzas muestrales  $S_t = (s_{ij}^t)$ , siendo:

$$s_{ij}^t = \frac{1}{n_t} \sum_{h=1}^{n_t} (x_{tjh} - \bar{x}_{tj})(x_{tjh} - \bar{x}_{ti}) \quad i, j = 1, \dots, p \quad \text{II.24}$$

Se puede demostrar fácilmente que una estimación insesgada de  $C$  es la matriz:

$$\hat{S} = \frac{1}{n-r} \sum_{t=1}^r n_t S_t \quad \text{II.25}$$

La distancia de Mahalanobis entre las poblaciones  $\Pi_i$  y  $\Pi_j$  es la distancia estadística entre sus individuos medios respectivos. El ACPL es un método multivariante que nos permite pasar de la matriz de datos  $x$

		Variables		
		x1	x2	xp
Poblaciones	$\Pi_1$	$\bar{x}_{11}$	$\bar{x}_{12}$	$\bar{x}_{1p}$
	$\Pi_2$	$\bar{x}_{21}$	$\bar{x}_{22}$	$\bar{x}_{2p}$
	⋮			
	$\Pi_r$	$\bar{x}_{r1}$	$\bar{x}_{r2}$	$\bar{x}_{rp}$

a la matriz de datos  $Y$ , referida a las variables canónicas  $V_i$ ,

		Variables			
		V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>p</sub>	
Poblaciones	Π <sub>1</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>1p</sub>	Y = X V
	Π <sub>2</sub>	y <sub>21</sub>	y <sub>22</sub>	y <sub>2p</sub>	
	⋮				
	Π <sub>r</sub>	y <sub>r1</sub>	y <sub>r2</sub>	y <sub>rp</sub>	

Con las siguientes propiedades:

1) La distancia euclídea entre dos puntos coincide con la distancia de Mahalanobis.

2) Las variables canónicas son unitarias e incorrelacionadas respecto a la covarianza  $\hat{S}$ .

### 2.5.1 OBTENCIÓN DE LAS COORDENADAS CANÓNICAS

Consideremos las medias generales de las variables:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{r} \sum_{t=1}^r \bar{x}_{ti} \quad i=1, \dots, p \quad \text{II.26}$$

y las matrices:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{11}-\bar{x}_1 & \bar{x}_{12}-\bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_{1p}-\bar{x}_p \\ \bar{x}_{21}-\bar{x}_1 & \bar{x}_{22}-\bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_{2p}-\bar{x}_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_{r1}-\bar{x}_1 & \bar{x}_{r2}-\bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_{rp}-\bar{x}_p \end{pmatrix} \quad \text{II.27}$$

$$A = \bar{X}' \bar{X} \quad \text{II.28}$$

La matriz A es proporcional a la matriz de covarianzas muestrales entre las variables, tomando como muestras las r medias de las poblaciones. La matriz A mide la covariabilidad entre poblaciones.

La segunda matriz de covarianzas es la matriz de covarianzas C dentro de cada población, común para las r poblaciones. Sustituimos C por su estimación insesgada.

### 2.5.2 PROYECCIÓN Y REPRESENTACIÓN CANÓNICA

La tabla de datos  $\bar{X}$  contiene las coordenadas de los individuos medios de las poblaciones, entre los que se define la distancia de Mahalanobis. La proyección canónica es la transformación de  $\bar{X}$  en la tabla Y, la cual contiene las coordenadas de una configuración euclídea en dimensión  $m=\min(p,r-1)$ . La representación geométrica de esta configuración euclídea tomando las d primeras coordenadas constituye la representación canónica en dimensión d.

Un aspecto interesante del ACPL es la posibilidad de representar regiones confidenciales para los individuos medios de las diferentes poblaciones. Si  $a=(a_1, \dots, a_n)$  es un punto del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , C es una matriz definida positiva y b es una constante, el conjunto de puntos  $x=(x_1, \dots, x_n)$  tales que:

$$(x-a) C^{-1} (x-a) \leq b \tag{II.29}$$

constituyen un elipsoide en  $\mathbb{R}^n$  con centro en a denominado elipsoide de concentración.

En el caso de que la distribución de las variables  $\{X_i\}$  sea  $N(M_t, C)$  en la población  $\Pi_t$ , ( $t=1, \dots, r$ ). Sean  $R_\alpha$  y  $F_\alpha$  tales que:

$$R_\alpha^2 = F_\alpha \frac{(n-r)p}{(n-r-p+1)} \tag{II.30}$$

$$P(F > F_\alpha) = \alpha \tag{II.31}$$

para la distribución F de Fisher-Snedecor con p y (n-r-p+1) grados de libertad. Consideremos las proyecciones canónicas de los individuos medios, en dimensión d, cuyas coordenadas canónicas son:

$$\bar{Y}_t = V' \bar{X}_t \quad t=1, \dots, r \tag{II.32}$$

Se verifica entonces que las r esferas d-dimensionales, con centros en  $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_r$ , y radios,

$$\frac{R_\alpha}{\sqrt{nt}} \quad t=1, \dots, r \tag{II.33}$$

definen regiones confidenciales para  $M_1^*, \dots, M_r^*$  con coeficientes de confianza  $1-\alpha$ , es decir,

$$P(\|M_t^* - \bar{Y}_t\| \leq \frac{R\alpha}{\sqrt{nt}}) = 1-\alpha \quad t=1, \dots, r \quad \text{II.34}$$

La utilización de estas esferas confidenciales permite dar una visión precisa del grado de separación o confusión entre las diferentes poblaciones. Obsérvese que cuanto mayor es  $nt$  menor es el radio de la esfera. Normalmente se utiliza el nivel de confianza  $1-\alpha = 0.90$

Las principales características de la representación canónica son:

1) Las variables canónicas son incorrelacionadas y de varianza unidad. Por tanto, trazaremos los ejes canónicos como ejes ortogonales.

2) Las distancias geométricas euclídeas de las representaciones canónicas de las poblaciones, coinciden con las distancias de Mahalanobis, salvo la pérdida debida a la reducción de la dimensión.

3) En el caso de normalidad multivariante y homogeneidad de covarianzas, las proyecciones de los vectores de medias teóricas  $M_1, \dots, M_r$  están contenidos en regiones confidenciales esféricas de radios  $R\alpha/\sqrt{nt}$   $t=1, \dots, r$

### 2.5.3 ANÁLISIS DE LA DIMENSIÓN

Si se realiza una representación canónica en dimensión  $d$ , el porcentaje de dispersión explicada por los  $d$  primeros ejes es:

$$P = 100 \left( \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_d}{\lambda_1 + \dots + \lambda_m} \right) \quad d \leq m = \min(r-1, p) \quad \text{II.35}$$

En caso de normalidad, es útil aplicar el test de Bartlett de significación de los ejes canónicos, que permite testear la hipótesis nula de que los ejes  $V_{d+1}, \dots, V_m$  no son significativos.

Sean  $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m$  los valores propios de  $A = \bar{X}' \bar{X}$  respecto a  $\hat{S}$ . Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  los valores propios poblacionales. Se verifica:

$$\text{var}_A(V_i) = \hat{\lambda}_i \quad \text{II.36}$$

Si  $\lambda_i = 0$ , la variable  $V_i$  no tiene variabilidad respecto a la covarianza entre poblaciones, es decir, no hay discriminación a lo largo de este eje. Planteemos entonces la hipótesis:

$$H_0^d : \lambda_d > \lambda_{d+1} = \dots = \lambda_m = 0 \quad \text{II.37}$$

que equivale a afirmar que los vectores de medias  $M_1, \dots, M_r$  están contenidos en un hiperplano de dimensión  $d$ . El procedimiento más utilizado para analizar la dimensionalidad se basa en el test de Bartlett (1947).

$$\chi_d^2 = (n - 1 - \frac{p+r}{2}) [ \log(1+\theta_{d+1}) + \dots + \log(1+\theta_m) ] \quad \text{II.38}$$

Siendo  $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_m$  los valores propios de  $B$  (matriz de dispersión entre grupos) respecto de  $W$  (matriz de dispersión dentro de grupos), ambas utilizadas en el análisis multivariante de la varianza. Si  $\text{rango}(B) = d$  y  $n$  es grande,  $\chi_d^2$  sigue la distribución chi-cuadrado con  $(p-d)(r-d-1)$  grados de libertad. Este test se suele aplicar secuencialmente. Si  $\chi_i$  es significativa para  $i=0, 1, \dots, d-1$  pero  $\chi_d$  no es significativa, se acepta entonces que la dimensión efectiva es  $d$ .

Sin embargo, este test no contrasta exactamente  $H_0^d$ , salvo que  $n_1=n_2=\dots=n_r$ , porque sólo en este caso:

$$B = n_1 A \quad \text{II.39}$$

y como además:

$$\hat{S} = \frac{1}{n-r} W \quad \text{II.40}$$

resulta que  $AV_i = \lambda_i \hat{S}V_i$  implica  $BV_i = \theta_i WV_i$  siendo

$$\theta_i = \frac{n_1 \lambda_i}{n-r} \quad \text{II.41}$$

y el test de significación de  $\theta_i$ , lo es también de  $\lambda_i$ .

#### 2.5.4 DOS HIPÓTESIS BÁSICAS EN EL ANÁLISIS CANÓNICO

Para una aplicación correcta del ACPL es necesario verificar las dos hipótesis siguientes:

- 1) Hipótesis de Homogeneidad de matrices de covarianzas:

$$H_0^a: C_1 = \dots = C_r \quad \text{II.42}$$

Esta hipótesis se puede contrastar utilizando el test de razón de verosimilitud. La región paramétrica  $\Omega$  está formada por los  $r$  vectores de medias  $M_t$  y covarianzas  $C_t$ :

$$\Omega = \{(M_t, C_t) \mid C_t \text{ def. positiva, } t=1, \dots, r\} \quad \text{II.43}$$

$$\dim(\Omega) = rp + r \frac{p(p+1)}{2}$$

Los estimadores máximo-verosímiles de  $M_t$  y  $C_t$  son  $\bar{X}_t$  y  $S_t$ , y el máximo de la función de verosimilitud es:

$$L(\hat{\Omega}) = (2\pi)^{-1/2pn} \prod_{t=1}^r |S_t|^{-nt/2} e^{-(1/2)pn} \quad \text{II.44}$$

siendo  $|S_t|$  el determinante de la matriz de covarianzas muestrales  $S_t$ .

La región paramétrica  $\omega$  está formada por los  $r$  vectores de medias  $M_t$  y matriz de covarianzas común  $C$ :

$$\omega = \{M_t \mid t=1, \dots, r, C \text{ def. positiva}\} \quad \text{II.45}$$

$$\dim(\omega) = rp + \frac{p(p+1)}{2}$$

Los estimadores máximo verosímiles de  $M_t$  y  $C$  son  $\bar{X}_t$  y  $S = (n - r)/n \hat{S}$ . El máximo de la función de verosimilitud es:

$$L(\hat{\omega}) = (2\pi)^{-1/2pn} \prod_{t=1}^r |S|^{-n/2} e^{-(1/2)pn} \quad \text{II.46}$$

La razón de verosimilitud es:

$$\lambda = \frac{\prod_{t=1}^r |S_t|^{nt/2}}{|S|^{n/2}} \quad \text{II.47}$$

y el test se resuelve utilizando el estadístico:

$$V = -2 \log \lambda = n \log |s| - \sum_{t=1}^r nt \log |St| \quad \text{II.48}$$

cuya distribución asintótica es una chi-cuadrado con  $(r-1)p(p+1)/2$  grados de libertad. Se acepta la hipótesis  $H_0^a$  si  $V$  no es significativa.

2) La segunda hipótesis que se debe estudiar es:

$$H_0^b: M_1 = \dots = M_r \quad \text{II.49}$$

la cual, al contrario que  $H_0^a$ , debe ser rechazada para que tenga sentido la aplicación del ACPL. Si  $H_0^b$  es cierta, las  $r$  poblaciones se confunden en una sola y la representación canónica se reduce a un punto, salvo las diferencias atribuidas al muestreo.

Para contrastar esta hipótesis se puede utilizar la llamada distancia<sup>2</sup> generalizada de Mahalanobis

$$D^2 = \sum_{i,j=1}^p s^{ij} \sum_{t=1}^r nt (\bar{x}_{ti} - \bar{x}_i)(\bar{x}_{tj} - \bar{x}_j) \quad \text{II.50}$$

siendo  $s^{ij} = S^{-1}$ , cuya distribución asintótica es una chi-cuadrado con  $p(r-1)$  grados de libertad.

Otro criterio, más preciso, se basa en la razón  $\Lambda$  de Wilks:

$$\Lambda = \frac{|W|}{|W+B|} \quad \text{II.51}$$

siendo  $W$  la matriz de dispersión *dentro de grupos* y  $B$  la matriz de dispersión *entre grupos*.

## 2.6 ANÁLISIS DE PROXIMIDADES

El análisis de proximidades o escalado multidimensional (EMD) es un

método muy general de representación de datos que consiste en construir una configuración de puntos, conocida una determinada información sobre las distancias o disimilaridades entre  $n$  individuos.

Si bien algunas primeras ideas parten de trabajos publicados en 1927 y 1936, la historia del EMD comienza con un trabajo publicado por Togerson (1952), quien introdujo el término y elaboró las principales ideas del método. Sin embargo, el EMD sería formulado de manera más precisa por Shepard (1962a, 1962b) quien demostró empíricamente, pero con rigor, que conocida una ordenación entre las distancias  $D(i,j)$ :

$$D(i_1, i_2) \leq D(i_3, i_4) \dots \leq D(i_{p-1}, i_p) \quad p=r(r-1)/2 \quad \text{II.52}$$

podría encontrarse una configuración de puntos en un espacio euclídeo, de pequeña dimensión cuyas interdistancias euclídeas reproducían prácticamente la ordenación original.

Como precedente del método de Shepard, se puede considerar la observación que hace Kendall (1957) de que el análisis de componentes principales sufre poca alteración si se sustituye el coeficiente de correlación de Pearson por el coeficiente de correlación por rangos de Kendall. La idea de Shepard sería posteriormente desarrollada por Kruskal, Guttman, Lingoes, Young, Benzecri, Carroll y otros. Tales métodos reciben el nombre de escalado multidimensional no-métrico o escalado ordinal.

### 2.6.1 SOLUCIÓN DEL EMD PARA UNA DISTANCIA EUCLÍDEA

Consideremos una colección finita de objetos que abreviadamente indicaremos por:

$$\Omega = \{1, 2, \dots, r\} \quad \text{II.53}$$

Supongamos conocida una distancia o disimilaridad  $d_{ij}=D(i,j)$  entre cada par de objetos  $i,j$ . Si la distancia es euclídea o procede de un producto escalar, es posible construir una configuración de puntos en un espacio euclídeo, cuyas distancias euclídeas coincidan con las distancias  $D(i,j)$

Sea  $(d_{ij})$  una matriz de disimilaridades. Consideremos:

$$B = H A H \quad \text{II.54}$$

donde

$$H = I_r - \frac{1}{r} E E' \quad , \quad A=(a_{ij}) \quad a_{ij} = -\frac{1}{2} d_{ij}^2$$

$I_r$  = matriz identidad de orden  $r$

$E=[1, \dots, 1]'$  (vector columna formado por  $r$  unos)

Supongamos que  $B$  es semidefinida positiva de rango  $m$  ( $m \leq r - 1$ ). Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  los valores propios no nulos de  $B$  y las columnas de la matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rm} \end{pmatrix} \quad \lambda_i = \sum_{h=1}^r x_{hi}^2 \quad \text{II.55}$$

Los correspondientes vectores propios  $\lambda$ -normalizados. Entonces, los puntos  $P_i$  con coordenadas las filas de  $x$ , definen una configuración de puntos en  $\mathbb{R}^m$ , con centroide en el origen, cuyas interdistancias euclídeas coinciden con las disimilaridades  $d_{ij}$ .

Las coordenadas II.55 reciben el nombre de coordenadas principales o solución EMD en dimensión  $m$  para la distancia  $d_{ij}$ .

No es posible construir una solución EMD si ocurre alguna de las siguientes situaciones:

a)  $d_{ij}$  es una disimilaridad no asimilable a una distancia euclídea. Por ejemplo, una distancia de Minkowski con  $q \neq 2$ .

b) Cuando se deforma una distancia euclídea mediante una función monótona creciente

c) Cuando  $d_{ij}$  es una distancia euclídea cuya obtención está afectada por un error de redondeo o una desviación aleatoria.

Existe entonces el problema de que  $B$  puede tener valores propios negativos, a los cuales están asociados autovectores imaginarios, por lo que no serían representables en un espacio euclídeo real.

### 2.6.2 RELACIÓN CON EL ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

El escalado clásico concierne principalmente a una matriz ( $n \times n$ ) de disimilaridades que se supone son distancias euclídeas. A continuación veremos la conexión del escalado clásico y el análisis de componentes principales suponiendo que tenemos una matriz  $X$  ( $n \times p$ ) de datos corregidos de la media.

Para llevar a cabo el escalado clásico deberíamos calcular la matriz

$n \times n$  de distancias euclídeas y entonces llevar a cabo el análisis descrito anteriormente. Si  $X$  es de rango  $o$ , donde  $o < \min(n,p)$ , esto nos llevará a una nueva matriz de configuración  $X^*$  de orden  $(n \times r)$ . El análisis consiste esencialmente en encontrar los autovalores y autovectores de  $XX'$ .

Para llevar a cabo un ACP, encontraremos los autovalores y autovectores de la matriz de covarianzas muestrales que es proporcional a  $X'X$ . Es natural, por tanto, preguntarse si existe alguna conexión entre los autovalores y autovectores de  $X'X$  y los de  $XX'$ . Si existiera dicha conexión, habría un punto de unión entre las dos técnicas.

Sean  $\lambda_i$  y  $a_i$  los autovalores y autovectores de  $X'X$ . Entonces:

$$(X'X) a_i = \lambda_i a_i \quad \text{II.56}$$

Premultiplicando por  $X$ , tenemos:

$$(XX') X a_i = \lambda_i X a_i \quad \text{II.57}$$

A partir de esta ecuación, podemos ver que los autovalores de  $X'X$  son los mismos que los de  $XX'$ , mientras que los autovectores de  $XX'$  denotados por  $e_i$  están relacionados con los de  $X'X$  por una transformación lineal. Notemos que  $e_i$  es de orden  $n \times 1$ , mientras que  $a_i$  es de orden  $p \times 1$ . Si normalizamos los autovectores para que la suma de sus cuadrados sea 1. La suma de los cuadrados de  $X a_i$  es  $\lambda_i$ . Por tanto, tenemos:

$$\sqrt{\lambda_i} e_i = X a_i \quad \text{II.58}$$

Por tanto en lugar de calcular los autovectores de  $X'X$ , los podemos obtener directamente a partir de los de  $XX'$  por:

$$f_i = \sqrt{\lambda_i} e_i \quad \text{II.59}$$

Por tanto, los resultados del ACP son exactamente equivalentes a los del escalado clásico si las distancias calculadas a partir de la matriz de datos son euclídeas. Esto significa que si llevamos a cabo un análisis de autovectores de  $XX'$  obtendremos una configuración cuyos ejes coordenados son los ejes principales resultantes de un ACP.

La equivalencia entre el ACP y el escalado clásico significa que si queremos reducir la dimensionalidad efectiva de una matriz de datos dada para

transformarla a unos nuevos ejes coordenados, no importa cual de los dos métodos utilicemos. Si  $n > p$ , entonces el ACP suele ser preferible porque es más fácil encontrar los autovectores de la matriz  $p \times p$   $X'X$  que los de la matriz  $n \times n$   $XX'$ .

### 2.6.3 SOLUCIÓN EMD EXACTA PARA UNA DISIMILARIDAD NO EUCLÍDEA

Se llama preordenación sobre el conjunto  $\Omega = \{1, \dots, r\}$  asociada a la disimilaridad  $d_{ij}$  a la relación binaria definida en el conjunto producto  $\Omega \times \Omega$ :

$$(i, j) \leq (i', j') \text{ si y sólo si } D(i, j) \leq D(i', j') \quad \text{II.60}$$

Sea  $\delta_{ij}$  una disimilaridad no euclídea. Nos proponemos encontrar una configuración euclídea que realice exactamente la preordenación asociada a  $\delta_{ij}$ .

Shepard (1962) demostró que esta configuración existía al menos en dimensión  $r-2$ .

Para toda matriz real simétrica  $C$  de orden  $r \times r$  existe una configuración euclídea en dimensión  $m \leq r-2$  cuyas interdistancias euclídeas  $d_{ij}^*$  verifican:

$$\begin{aligned} d_{ij}^{*2} &= 2(c_{ij} - a) & i \neq j \\ &= 0 & i = j \end{aligned} \quad \text{II.61}$$

para algún número real  $a$ .

Si consideramos  $c_{ij} = (1/2) \delta_{ij}^2$ , entonces:

$$\begin{aligned} d_{ij}^{*2} &= \delta_{ij}^2 - 2a & i \neq j \\ &= 0 & i = j \end{aligned} \quad \text{II.62}$$

para una cierta constante  $a$ . Esta configuración realiza la preordenación asociada a  $\delta_{ij}$ , pues:

$$d_{ij}^* \leq d_{i'j'}^* \implies \delta_{ij} \leq \delta_{i'j'} \quad \text{II.63}$$

## 2.7 ANÁLISIS DISCRIMINANTE

### 2.7.1 INTRODUCCIÓN

El análisis discriminante tiene su origen en el trabajo clásico de Fisher (1936). Las siguientes contribuciones están influidas por los trabajos pioneros de Neyman y Pearson sobre el contraste de hipótesis simples frente a alternativas simples. Welch (1939) dedujo, para distribuciones conocidas, las reglas de máxima verosimilitud y de Bayes, que ilustró en el caso de normalidad e igualdad de matrices de covarianzas. Este caso fue tratado también por Wald (1944), que estudió la distribución del clasificador lineal. El problema de la clasificación cuadrática fue estudiado primeramente por Cavalli (1945) y Penrose (1947) en el caso  $p=1$  y por Smith (1947) en el caso  $p>1$ . La clasificación en  $r>1$  poblaciones fue estudiada por Von Mises (1945), Rao (1948) y Bryan (1951), entre otros. Se han desarrollado también técnicas de clasificación no paramétricas entre las que destacan las regla basadas en la estimación no-paramétrica de la función de densidad (Rosenblatt (1956), Parzen (1962)), del entorno más próximo (Fix y Hodges (1951)) y basadas sobre distancias entre funciones de distribución empíricas (Das Gupta (1964)). Kendall (1966) propone un interesante método no paramétrico que ilustra con los datos de Fisher (1936).

### 2.7.2 EL PROBLEMA DE LA CLASIFICACIÓN

Supongamos que un individuo  $\omega$  puede pertenecer a una de varias posibles poblaciones  $H_1, \dots, H_r$ . El problema de la clasificación consta de los elementos siguientes:

- 1)  $p$  variables  $x_1, \dots, x_p$
- 2) Una observación multidimensional  $x=(x_1, \dots, x_p)$ , siendo  $x_i = X_i(\omega)$ ,  $i=1, 2, \dots, p$
- 3) Una regla apropiada de decisión que permita asignar  $\omega$  a una de las poblaciones  $H_j$  partiendo de la información  $x$ .

En general, la clasificación se resuelve construyendo ciertas funciones de las variables:

$$F=g(x_1, \dots, x_p)$$

II.64

denominadas **funciones discriminantes**. La decisión se toma a partir del

valor  $f=g(x_1, \dots, x_p)$ . En algunos casos, tales funciones definen regiones  $R_1, \dots, R_p$  del espacio euclídeo  $R^p$ , de modo que el criterio de decisión es  $\omega$  pertenece a  $H_i$  si  $(x_1, \dots, x_p) \in R_i$ .

Supongamos la matriz de covarianzas  $C$  común a las  $r$  poblaciones. La distancia de Mahalanobis del individuo  $\omega$  de coordenadas  $x=(x_1, \dots, x_p)$  a la población  $H_i$  es

$$D^2(\omega, H_i) = (x - M_i)' C^{-1} (x - M_i) \quad \text{II.65}$$

El criterio geométrico consiste en asignar  $\omega$  a la población más próxima. La regla de decisión es:

$$\omega \text{ es de } H_i \text{ si } D^2(\omega, H_i) = \min_j \{D^2(\omega, H_j)\} \quad \text{II.66}$$

Introduciendo las funciones discriminantes:

$$W_{ij}(x) = \left\{ (M_i - M_j)' C^{-1} x \right\} - \left\{ \frac{1}{2} (M_i - M_j)' C^{-1} (M_i + M_j) \right\} \quad \text{II.67}$$

es fácil ver que II.66 es equivalente a:

$$\omega \text{ es de } H_i \text{ si } W_{ij} > 0 \text{ para todo } j \neq i \quad \text{II.68}$$

Las funciones  $W_{ij}$  verifican las propiedades siguientes:

$$1) W_{ij} = \frac{1}{2} [D^2(\omega, H_j) - D^2(\omega, H_i)]$$

$$2) W_{ij} = -W_{ji}$$

$$3) W_{th} = W_{ih} - W_{it}$$

La regla II.68 divide al espacio  $R^p$  en  $r$  regiones disjuntas separadas linealmente (Análisis Discriminante Lineal).

La regla de máxima verosimilitud consiste en asignar  $\omega$  a la población tal que la verosimilitud de  $(x_1, \dots, x_p)$  es mayor. El criterio de decisión es:

$$\omega \text{ es de } H_i \text{ si } L_i(x) = \max_j \{L_j(x)\} \quad \text{II.69}$$

y está asociada a la función discriminante:

$$V_{ij}(x) = \log(L_i(x)) - \log(L_j(x)) \quad \text{II.70}$$

este criterio tiene más generalidad que el criterio geométrico. En el caso de normalidad multivariante y matriz de covarianzas común, se verifica  $V_{ij} = W_{ij}$  y ambos criterios coinciden. Si no existe homogeneidad en las matrices de covarianzas intervienen entonces los discriminadores cuadráticos (Análisis Discriminante Cuadrático):

$$Q_{ij}(x) = \frac{1}{2} x' (C_j^{-1} - C_i^{-1}) x + x' (C_i^{-1} M_i - C_j^{-1} M_j) x + \frac{1}{2} M_j' C_j^{-1} M_j - \frac{1}{2} M_i' C_i^{-1} M_i \\ + \frac{1}{2} \log |c_j| - \frac{1}{2} \log |c_i| \quad \text{II.71}$$

Finalmente, si la probabilidad de que  $\omega$  proceda de  $H_i$  es  $q_i$ , la regla de Bayes está asociada a las funciones discriminantes:

$$B_{ij}(x) = \log(L_i(x)) - \log(L_j(x)) + \log(q_i/q_j) \quad \text{II.72}$$

Si  $P(j/i)$  representa la probabilidad de asignar  $\omega$  a  $H_j$  cuando es de  $H_i$ , se demuestra entonces que la regla de Bayes minimiza la probabilidad esperada de clasificación errónea.

$$pce = \sum_{i=1}^r q_i \left( \sum_{i \neq j} p(j/i) \right) \quad \text{II.73}$$

### 2.7.3 ANÁLISIS DISCRIMINANTE

Basándonos en una colección de variables, que han sido medidas para cada individuo de la muestra queremos distinguir entre varios grupos mutuamente exclusivos. Los datos disponibles son los valores de las variables para aquellos casos cuya pertenencia a un grupo se conoce. Además queremos identificar las variables que son importantes para distinguir entre grupos y un procedimiento para predecir la pertenencia a un grupo para nuevos casos sobre los que no tengamos información.

El concepto subyacente al análisis discriminante es formar una combinación lineal de variables independientes que sirvan como base para clasificar a los nuevos sujetos en grupos.

Para que la función discriminante lineal sea óptima (es decir, que minimice la probabilidad de error en la clasificación) hay que hacer ciertas suposiciones en los datos.

- 1- Cada grupo debe ser una muestra de una población normal multivariante
- 2- Las matrices de covarianza de población deben ser todas iguales.

La matriz de correlación dentro de grupos se obtiene promediando las matrices de covarianzas separadas para todos los grupos y calculando entonces la matriz de correlación.

La matriz de correlación total se obtiene cuando se consideran todos los casos como si fueran de una sola muestra.

En análisis discriminante se forma una combinación lineal de variables independientes que sirve como base para asignar los casos a los grupos. Por tanto, la información contenida en múltiples variables independientes se resume en un sólo índice.

Si tenemos  $p$  variables independientes  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  la ecuación discriminante lineal viene dada por:

$$D = B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + \dots + B_p x_p \quad \text{II.74}$$

donde los coeficientes  $B_i$  son estimados a partir de los datos, de forma que los valores de la función discriminante difieran tanto como sea posible entre grupos diferentes. Es decir, el cociente:

$$\frac{\text{suma de cuadrados entre grupos}}{\text{suma de cuadrados dentro de grupos}}$$

será máximo. Cualquier otra combinación lineal de las variables tendrá un valor del cociente más pequeño.

La puntuación discriminante para cada caso será calculada multiplicando los valores de cada variable por su coeficiente respectivo y añadiendo la constante  $B_0$ .

Usando la puntuación discriminante, es posible obtener una regla para clasificar los casos en un grupo dado basándonos en la regla de Bayes. La probabilidad de que un caso con un valor discriminante  $D$  pertenezca al grupo  $i$  es estimada por:

$$P(G_i/D) = \frac{P(D/G_i)P(G_i)}{\sum_{j=1}^r P(D/G_j)P(G_j)} \quad \text{II.75}$$

La probabilidad a priori representada por  $P(G_i)$  es una estimación de la verosimilitud de que un caso pertenezca a un grupo dado cuando no hay información disponible.

La probabilidad condicional de que tenga el valor discriminante  $D$ , sabiendo que pertenece al grupo  $G_i$  se denota por  $P(D/G_i)$  y se calcula suponiendo que pertenece a un grupo particular y calculando a continuación la probabilidad de que ese valor pertenezca a ese grupo.

Cuando lo que se necesita conocer es el grupo al que pertenece hay que usar la probabilidad a posteriori  $P(G_i/D)$ . Esta probabilidad se puede estimar a partir de la regla de Bayes. Un caso dado se clasificará en aquel grupo en el cual la probabilidad a posteriori sea mayor.

El porcentaje de casos clasificados correctamente se toma a menudo como un índice de la efectividad de la función discriminante. Cuando se evalúa esta medida es importante comparar este valor con la probabilidad de clasificación correcta debida al azar. Por ejemplo, si sólo tuviéramos dos grupos un porcentaje de bien clasificados del 50% indicaría que no se consigue una mayor efectividad que clasificándolos al azar.

Otro indicador de la efectividad de la función son los valores discriminantes en cada grupo. Una buena función discriminante es aquella que tenga una variabilidad entre grupos mucho mayor que la variabilidad dentro de cada grupo.

La correlación canónica es una medida del grado de asociación entre valores discriminantes y grupos. Es equivalente a

Si se define:

$$\eta^2 = \frac{\text{suma de cuadrados entre grupos}}{\text{suma de cuadrados total}} \quad \text{II.76}$$

La correlación canónica es una medida del grado de asociación entre valores discriminantes y grupos. Es equivalente a  $\eta^2$ . En la situación de dos grupos, el coeficiente de correlación canónica es simplemente el coeficiente de correlación de Pearson entre el valor discriminante y la variable de grupo codificada como 0 y 1.

Para el caso de dos grupos, la lambda de Wilks es:

$$\lambda = \frac{\text{suma de cuadrados dentro de grupos}}{\text{suma de cuadrados total}} \quad \text{II.77}$$

Una  $\lambda=1$  ocurre cuando las medias de los grupos son iguales. Valores cercanos a cero se dan cuando la variabilidad dentro del grupo es pequeña frente a la variabilidad entre grupos. La lambda de Wilks se suele transformar a una variable con una distribución chi-cuadrado.

Es importante recordar que incluso aunque la lambda de Wilks sea estadísticamente significativa da poca información acerca de la efectividad de la función discriminante en la clasificación. Sólo da un test para comprobar la hipótesis nula de que las medias de la población son iguales.

Se suelen interpretar las magnitudes de los coeficientes como indicadores de la importancia relativa de las variables ya que una variable con un coeficiente mayor contribuirá más al valor discriminante. Esto sólo puede hacerse cuando todas las variables tengan las mismas unidades.

Otra forma de comprobar la contribución de una variable a la función discriminante es examinar la correlación entre los valores de la función y los de la variable.

En el caso de tener tres grupos pueden calcularse dos funciones discriminantes. La primera función tiene el mayor cociente suma de cuadrados entre grupos a suma de cuadrados dentro de grupos. La segunda función no está correlada con la primera y tiene el siguiente cociente más grande.

En este caso la lambda de Wilks se define ahora como (II.78):

$$\lambda = \left( \frac{\text{suma cuadrados dentro grupos}}{\text{suma de cuadrados total}} \right)_{f1} \left( \frac{\text{suma cuadrados dentro grupos}}{\text{suma de cuadrados total}} \right)_{f2}$$

donde  $f1$  y  $f2$  significan evaluado para la función discriminante 1 y para la función discriminante 2 respectivamente.

En general si existen  $r$  grupos, se pueden formar  $r-1$  funciones discriminantes.

## 2.8 ANÁLISIS DE GRUPOS

### 2.8.1 INTRODUCCIÓN

El propósito básico del análisis de grupos es encontrar, si existen, agrupamientos naturales de un conjunto de individuos u objetos que sean mutuamente exclusivos. El conjunto de individuos puede formar la población total, o ser una muestra de una población mayor. El conjunto de grupos se suele denominar **partición**.

Los grupos que forman una partición pueden ser subdivididos en grupos más pequeños o agrupados en conjuntos más grandes, de forma que se puede tener la estructura jerárquica completa del grupo. Esta estructura suele denominarse un **árbol jerárquico**.

Muchos métodos de agrupamiento tienen más que ver con encontrar la estructura jerárquica de un conjunto de individuos, que con encontrar una partición únicamente, por lo que hay que tener en cuenta la distinción entre estos dos objetivos.

Para llevar a cabo un análisis de grupos necesitamos medir la **similitud** o **disimilitud** entre cada par de sujetos. La distancia euclídea es una de las medidas más comunes de disimilitud.

### 2.8.2 OBJETIVOS

Los objetivos de un análisis de grupos pueden ser variados:

- a) exploración de los datos
- b) reducción de los datos
- c) generación de hipótesis
- d) predicción basada en los grupos

De la misma forma que se pueden agrupar individuos, también se pueden agrupar variables.

Una primera dificultad que aparece en el análisis de grupos es que no hay una forma completamente satisfactoria de definir un grupo. Por otra parte, el uso de un método diferente puede producir un agrupamiento completamente diferente.

Si sólo estamos considerando dos variables, entonces, la mejor manera de encontrar agrupamientos es realizar una inspección visual, ya que los métodos normales suelen detectar bien agrupamiento en forma esférica, pero pueden fallar si estos no tienen dicha forma.

### 2.8.3 ÁRBOLES JERÁRQUICOS

Un árbol puede ser considerado como una serie anidada de particiones de

los individuos en  $g$  grupos, donde  $g$  varía de 1 a  $n$ , con la propiedad de que las particiones en  $g$  y  $(g+1)$  grupos son tales que  $(g-1)$  grupos son idénticos mientras que los individuos restantes forman un grupo en el primer caso y dos en el segundo. Por tanto, un árbol es una familia de grupos para el cual dados dos grupos, o bien son disjuntos, o bien uno incluye al otro. El diagrama de árbol implica también un nuevo conjunto de distancias entre los individuos que se pueden encontrar a partir del nivel más bajo en que dos individuos pasan a pertenecer al mismo grupo. Estas distancias suelen denominarse **distancia umbral**. Estas distancias satisfacen las condiciones de coeficiente de disimilaridad métrica y la desigualdad **ultramétrica**

$$d_{rs} \leq \max(d_{rt}, d_{ts})$$

#### 2.8.4 AGRUPAMIENTO DE UNA UNIÓN

Para cualquier distancia umbral  $d$ , el conjunto de individuos se divide en  $g(\leq n)$  grupos, de forma que los individuos  $r$  y  $s$  están en el mismo grupo si existe un conjunto de individuos  $r, a, b, \dots, q, s$  tales que las disimilaridades observadas son todas menores o iguales que  $d$ .

Existen muchos métodos numéricos para encontrar dicho árbol. El más fácil es el siguiente:

- 1) Se comienza con  $n$  grupos, cada uno conteniendo un individuo.
- 2) Se unen los dos individuos más cercanos ( $r, s$ ) en un solo grupo, de forma que queden  $(n-1)$  grupos.
- 3) La disimilaridad entre este nuevo grupo y cualquier otro individuo  $t$  está definida por  $\min(d_{rt}, d_{st})$ .
- 4) Se unen los dos grupos más cercanos, que serán o dos individuos o un individuo y el grupo formado en 3).
- 5) Se construyen las nuevas disimilaridades entre los  $(n-2)$  grupos. Se continúa combinando los grupos, de forma que en cada etapa el número de grupos se reduzca en uno y la disimilaridad entre dos grupos se define como la disimilaridad entre sus miembros más cercanos.

Este tipo de algoritmo se denomina **aglomerativo** porque opera por una serie de uniones, comenzando con  $n$  grupos de sólo un individuo y finalizando con un grupo de  $n$  individuos.

Existen muchos algoritmos alternativos para un árbol de una unión. Por ejemplo, se puede encontrar un algoritmo **divisivo**, que comienza con un grupo de  $n$  individuos y lo va dividiendo en cada etapa hasta finalizar con  $n$  grupos de 1 individuo. La desventaja es que existen  $2^{n-1}$  formas de hacer la primera

subdivisión, mientras que en los aglomerativos sólo hay  $C_2^n$  formas de combinar dos individuos.

Un algoritmo alternativo es el **árbol de mínima extensión (AME)**. Este no es un árbol jerárquico sino una red que se extiende a todos los puntos (o individuos) por un conjunto de líneas rectas, que unen pares de puntos, cuyas longitudes son iguales a las disimilaridades entre puntos apropiadas. El AME se elige de forma que:

- (i) Todos los pares de puntos estén conectados
- (ii) La suma de las longitudes de las líneas rectas sea mínima

Es fácil ver que el AME no contendrá lazos cerrados y que cada punto será visitado por al menos una línea recta. Si hay ligaduras en las disimilaridades, el AME puede no ser único. Robin Sibson sugirió que sería más efectivo definir un gráfico de extensión invariante como el conjunto de uniones tales que las disimilaridades observadas son iguales a las distancias ultramétricas. El gráfico es el mismo que el AME si no existen ligaduras, pero también da un gráfico único si hay ligaduras, aunque puede contener uno o más lazos cerrados y entonces no será de longitud total mínima.

El árbol de mínima extensión puede ser útil en la identificación de clusters, y también para reconocer sujetos excesivamente alejados de la media.

#### 2.8.5 OTROS PROCEDIMIENTOS DE AGRUPAMIENTO

Aparte de las uniones simples, existen otros procedimientos de agrupamientos. En el agrupamiento por uniones simples, la distancia entre dos grupos se definía como la disimilaridad entre sus miembros más cercanos.

En la **unión-completa** o método del **vecino más lejano**, la distancia entre dos grupos se define como la disimilaridad entre el par más remoto de individuos (en cierto sentido es el opuesto del método de unión simple).

En el método del **centroide**, la distancia entre dos grupos se define como la distancia entre los centroides de los grupos (o vectores media del grupo).

En el método de **promediado de grupo** la distancia entre dos grupos se define como el promedio de las disimilaridades entre todos los pares de individuos.

El **agrupamiento jerárquico de Ward** es un algoritmo aglomerativo. En cada etapa el número de grupos se reduce en uno, combinando los dos grupos que dan el incremento más pequeño posible en la suma de cuadrados dentro de grupos total. Por supuesto cuando comenzamos con  $n$  grupos de un individuo la suma de

cuadrados dentro de grupos es cero.

El método de **Wishart**, también denominado **análisis de modos**, busca *puntos densos* donde  $r$  o más puntos o individuos estén contenidos en una hiperesfera de radio  $R$ . Comenzando con un valor pequeño de  $R$ , el método busca en una hiperesfera de radio  $R$  alrededor de cada punto y cuenta el número de puntos que hay dentro de esta hiperesfera. Si el número de puntos es al menos  $r$ , entonces el punto central es denominado un **punto denso**. El parámetro  $R$  se incrementa gradualmente para que dos o más puntos se vuelvan densos, hasta que todos los puntos queden contenidos dentro de una simple hiperesfera. Si  $r=1$  es equivalente al agrupamiento por unión simple.

Una clase de métodos, denominados de **división binaria**, operan normalmente por medio de un algoritmo divisivo y es apropiado cuando la mayoría de las variables tienen atributos binarios. En este tipo de casos los algoritmos divisivos pueden ser más eficientes que los aglomerativos. El **análisis de asociación** es un procedimiento de este tipo que es apropiado cuando uno tiene varias variables binarias y quiere elegir aquella cuya presencia o ausencia dividirá la muestra en dos subconjuntos en la *mejor* forma posible. El **detector de interacción automático** (DIA) es un método de división binaria que es apropiado cuando uno tiene una variable dependiente, así como varias variables *controladas* de tipo discreto. En cada etapa la división del grupo en dos partes se define por una de las variables controladas, con un subconjunto de sus posibles categorías definiendo una de las partes y las restantes categorías definiendo la otra parte.

Sin embargo, si lo que se desea es encontrar particiones, entonces es mejor usar técnicas de partición en lugar de árboles jerárquicos. Estas técnicas involucran un método para inicializar un número predeterminado de grupos. Todos los individuos son ubicados en uno u otro de los grupos. Algunos de los individuos serán reubicados en otros grupos. Esta reubicación iterativa continuará hasta que se optimice algún criterio.

Se han propuesto varios métodos para inicializar los grupos. Por ejemplo, si queremos  $g$  grupos, podemos elegir los  $g$  puntos que estén más separados entre sí y a continuación los restantes puntos se ubican a aquel grupo que le quede más cercano. En cuanto al criterio a optimizar para terminar la reubicación, el más popular es minimizar el criterio de Wilks, o equivalentemente el determinante de la matriz de sumas de cuadrados y productos dentro de grupos.

### 3 PAQUETES DE SOFTWARE UTILIZADOS

En lo concerniente a la parte estadística del trabajo se ha utilizado el paquete de software SPSS de SPSS.Inc para la obtención de resultados de análisis discriminante lineal y análisis de clusters. A continuación se da una descripción de las principales características del mismo.

#### SPSS

El SPSS es un potente programa de análisis estadístico que durante años ha sido utilizado ampliamente por estudiantes e investigadores. El SPSS está dotado de un entorno fácil de usar por medio de menús o bien tecleando directamente los comandos. Un comando es simplemente una palabra, o grupo de palabras que el SPSS es capaz de reconocer y ejecutar. A continuación se muestran algunas de sus principales características. La ejecución puede ser interactiva o en modo batch y se pueden construir nuevos comandos a partir de los ya existentes por medio de las macros. A continuación se muestra una lista de sus funciones más importantes:

#### 1) ANÁLISIS UNIVARIANTE

Obtención de frecuencias relativas y porcentajes. Estadística descriptiva (media aritmética, moda, mediana, desviación estandar, varianza, skew , curtosis y percentiles, etc..). Presentación de histogramas

#### 2) COMBINACIONES DE VARIABLES

Tablas de frecuencia, de clasificación cruzada, comparación de medias. Modificación de valores (cálculo, expresiones condicionales, etc...). Medias muestrales. Cálculo del error estandar en la media, intervalos de confianza, etc... para distribuciones normales. Comprobación de hipótesis sobre dos medias independientes o dependientes (Test de la T de Student, distribución T de Student), acerca de la independencia (Hipótesis nula, Estadística Chi-cuadrado, etc...). Comparación de varias medias (Análisis univariante de la varianza). Dibujo de las variables. Cálculo de los coeficientes de correlación, de rectas de

regresión. Análisis de residuos

### 3) ANÁLISIS MULTIVARIABLE

Regresión lineal múltiple por medio de algoritmos de inclusión hacia adelante, eliminación hacia atrás y algoritmos de selección paso a paso. Análisis de regresión no-lineal. Análisis discriminante Lineal. Modelos Log-lineales para tablas de contingencia multivariantes. Análisis factorial. Análisis de Grupos (Clusters). Comprobación de hipótesis sobre muchas medias. Estadística no paramétrica ( test sign, el test run, el de Wilcoxon, McNemar, Kruskal-Wallis y Kolmogorov-Smirnov). Análisis de series temporales (Ajuste de curvas, suavizado exponencial, espectro y modelos ARIMA).

Este paquete ha sido utilizado fundamentalmente para llevar a cabo tareas de clasificación de una población de individuos en diferentes grupos (como se verá en el capítulo V). De todas las posibles herramientas de análisis estadístico que ofrece hemos utilizado básicamente dos:

- a) El Análisis Discriminante Lineal
- b) El Análisis de Grupos (Clusters)

Los datos son suministrados a partir de ficheros ASCII generados con la función `fprintf` de MATLAB. Una vez leídos son almacenados en formato SPSS. A continuación se crea una variable que va a definir que elementos pertenecen a cada grupo. Con esta información el análisis Discriminante da como resultado una lista de los sujetos con el grupo asignado de partida y el grupo al que le correspondería pertenecer. Además da los porcentajes de pertenencia a los dos grupos que más se acerque. Por último presenta un cuadro de porcentajes de clasificación correcta en cada uno de los grupos.

Por su parte el análisis de grupos requiere aparte de los datos de entrada, las posiciones de los centros de los grupos que se quieren formar. Esta restricción es útil, ya que evita que se formen grupos de un sólo individuo que se encuentre relativamente alejado de los demás. En caso contrario el procede a agrupar a los individuos por la distancia más cercana tratando de que cada cluster se encuentre lo más alejado posible de los otros en su posición inicial.

CAPITULO III

FUNDAMENTOS DEL ELECTROENCEFALOGRAMA

### III FUNDAMENTOS DEL ELECTROENCEFALOGRAMA

Aunque las técnicas de procesamiento de señales sean completamente generales, es conveniente tener ciertas nociones del problema particular que nos ocupa. El estudio del mecanismo biológico que genera las señales EEG nos permite un mejor conocimiento de las señales que se pueden producir. Este mecanismo se describe a grandes rasgos en la primera sección. En la segunda se lleva a cabo una clasificación de la actividad EEG, tal como es entendida en medicina. De esta forma tratamos de exponer cuales son los mecanismos que emplea un médico en el diagnóstico de un EEG y cuales son las variables que debemos considerar. Por último, la tercera sección consiste en una breve descripción de aquellos aspectos considerados más importantes en el registro del EEG (electrodos, montajes, etc.).

#### 1 BASES NEUROFISIOLÓGICAS DEL EEG Y RITMOS CEREBRALES

Un electroencefalograma, abreviado EEG, es un registro visible de la actividad eléctrica generada por las células nerviosas, neuronas, del cerebro. El primer electroencefalografista clínico fue Hans Berger [1873-1941]. El 6 de Julio de 1924 practica el primer EEG en un niño con un defecto cerebral que había sido sometido a una trepanación.

##### 1.1 FENÓMENOS ELECTROQUÍMICOS

Los dos papeles principales del sistema nervioso son la regulación (p.e., el mantenimiento de la temperatura corporal) y la actuación para alterar el estado actual.

El sistema nervioso central (SNC) contiene el núcleo de neuronas que inervan los músculos (células motoras) y el núcleo de neuronas que conectan las células sensoriales a las motoras. El sistema nervioso periférico (SNP) contiene la mayoría de las células nerviosas sensoriales más una maraña difusa de células nerviosas y fibras, ganglios (agrupamientos locales de neuronas) y los axones o fibras periféricos (prolongaciones de las neuronas que transmiten las señales de salida) que constituyen los nervios (haz de axones).

Las neuronas tienen una o más terminaciones que se pueden ramificar profusamente y forman contactos con otras neuronas, con células receptoras o con células actuadoras. El cuerpo de la neurona a partir del cual parten las

terminaciones se denomina soma. Existen dos tipos de terminaciones diferentes:

**dendritas:** se considera que están especializadas en la recepción.

**axones:** se piensa que sólo intervienen en la transmisión.

Este esquema sigue siendo válido hoy día, aunque se sabe que algunas partes de las dendritas pueden transmitir y algunos axones tienen uniones receptoras. La figura 1 nos presenta tres neuronas con sus dendritas y axones correspondientes. En este caso el contacto es de tipo axón-dendrita.

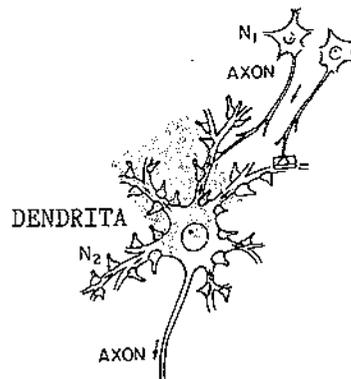


Fig. 1 Las señales pasan de unas neuronas a otras a través de las uniones sinápticas (recuadro pequeño).

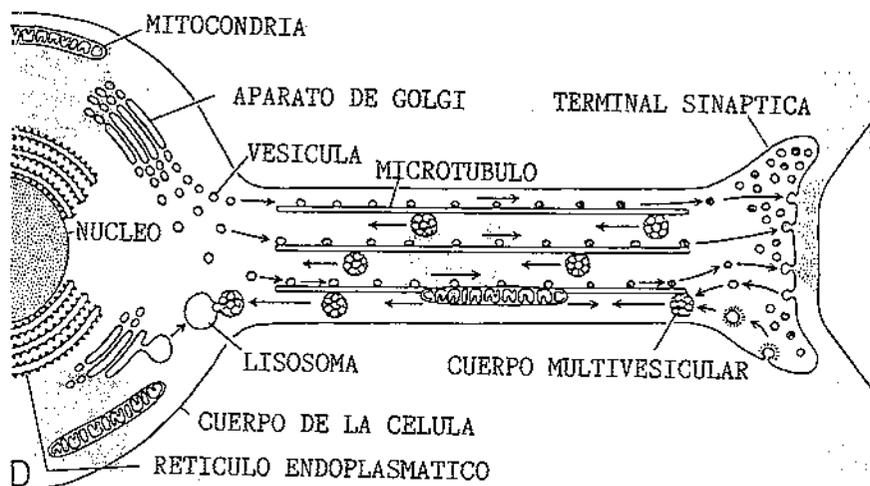


Fig. 2 Dibujo ampliado de una neurona.

Una neurona recibe su entrada en las uniones sinápticas. La figura 2 muestra una unión sináptica ampliada con las principales partes de la neurona señaladas.

## 1.2 LA MEMBRANA NEURONAL Y EL POTENCIAL DE MEMBRANA

La membrana que rodea a una célula nerviosa presenta una barrera formidable al movimiento libre de los iones entre el fluido dentro y fuera de la célula. La membrana distingue entre diferentes iones, permitiendo a algunos pasar más fácilmente que a otros. *La mayoría de las señales eléctricas en el sistema nervioso central se producen por cambios en la permeabilidad relativa de la membrana a varios iones, en particular al Na, K, Cl y Ca.*

El término canal se usa a menudo para denominar las vías a través de las cuales se mueven los iones por la membrana sináptica. Los canales del sodio y el potasio parecen estar separados y ser independientes. Es la apertura o el cierre de los canales de permeabilidad lo que subyace a los sucesos de tipo electroquímico en la membrana sináptica durante la transmisión.

En estado en reposo, el interior de una neurona tiene 70 mV negativos aproximadamente con respecto al exterior. La idea clave para comprender esto es que, en reposo, la membrana es alrededor de 50 veces más permeable a los iones de potasio que a los de sodio. La célula mantiene la concentración de iones de potasio alrededor de 20 veces más alta y la de iones de sodio alrededor de 9 veces más bajo dentro que fuera de la célula. Los iones de potasio se difunden hacia afuera donde la concentración es menor, eliminando por tanto una carga neta positiva de dentro de la célula, y esta carga positiva no es reemplazada por una difusión hacia dentro de los iones de sodio debido a que están bloqueados por la membrana. Debido al gran gradiente de concentración los iones de potasio continúan difundiéndose hacia afuera hasta alcanzar un balance que ocurre aproximadamente a una diferencia de potencial de 70 mV. Variaciones en la permeabilidad de la membrana a unos u otros iones dan lugar a cambios de potencial en la misma. La despolarización de la neurona da lugar a que el denominado potencial de acción se propague a lo largo del axón.

Es importante tener en cuenta que estos cambios en la diferencia de potencial requieren el movimiento de muy pocas moléculas por lo que las concentraciones iónicas iniciales apenas son alteradas. Sin embargo, cada potencial de acción disipa energía y está asociada con el transporte neto de unos pocos iones de sodio dentro de la célula y unos pocos iones de potasio fuera de la célula. Se necesita un suministro de energía externo para restaurar a la célula a su estado normal.

### 1.3 PROPAGACIÓN DEL POTENCIAL DE ACCIÓN A LO LARGO DEL AXON

El mecanismo de propagación es el siguiente. Cuando la membrana en la unión del axón y el cuerpo de la célula se despolariza, una corriente fluye a través de la región activa de la membrana, la rodea, y pasa a través de la membrana, todavía en reposo, delante de la región activa, creando por tanto un voltaje alrededor de la membrana que altera la permeabilidad del sodio hasta que pasa el umbral y se crea una despolarización explosiva. El impulso no se atenúa al propagarse, debido a que la membrana le suministra energía a medida que pasa.

En el sistema nervioso central el axón está envuelto por células gliales que envuelven al mismo en capas hasta la de mielina que lo rodea. A intervalos, la cubierta de mielina se adelgaza exponiendo el axón. Estas zonas no envueltas se denominan nodos de Ranvier. La corriente puede entrar y dejar el axón sólo en estos nodos, por lo que el potencial de acción se propaga como una serie de saltos de un nodo al siguiente. Esta conducción por saltos es mucho más eficiente que la conducción por propagación continua.

La acción regenerativa del axón, equivalente al efecto de un repetidor en comunicaciones telefónicas, traduce la punta del potencial de acción en una forma rápida de comunicación neuronal a grandes distancias.

#### 1.4 INTERACCIONES ENTRE NEURONAS

Las interacciones entre neuronas tienen lugar mediante diferentes tipos de sucesos incluyendo:

- 1 - El potencial de acción axonal punta o todo-nada.
- 2 - Un potencial postsináptico analógico.
- 3 - Emisión de productos químicos que se difunden a través de las pequeñas distancias que separan una neurona de otra en una sinapsis química.
- 4 - Activación eléctrica de una membrana sináptica en la sinapsis eléctrica.
- 5 - Emisión de productos químicos que son transportados a grandes distancias.

#### 1.5 REGISTRO SUPERFICIAL DE LOS POTENCIALES DE ACCIÓN DE LOS NERVIOS PERIFÉRICOS

Como ya se ha descrito, la despolarización de la membrana se dispersa sobre el cuerpo de la célula y al alcanzar el axón dispara un potencial de acción que se propaga por el mismo pudiendo iniciar potenciales de acción en

otras neuronas.

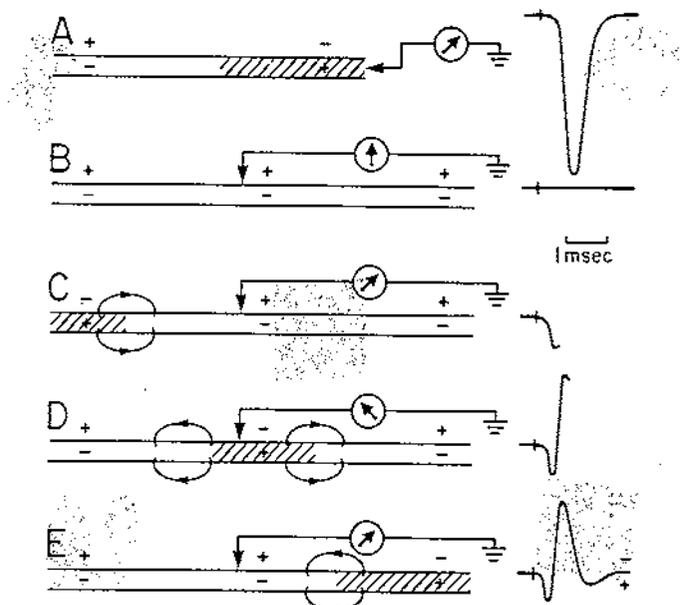


Fig. 3 A) Potencial de acción registrado en el axón. b), c) y d) Potencial de acción registrado fuera de la neurona.

La figura 3 ilustra como un potencial de acción que se propague genera la característica "punta de potencial" al pasar a un electrodo. Un electrodo dentro del axón, vería que el potencial inicial negativo en reposo cambia rápidamente a un valor positivo y entonces recobra el valor en reposo. Un electrodo, justo fuera de la célula, inicialmente registra el potencial del espacio extracelular (convencionalmente considerado como cero). A medida que la región de despolarización de la membrana se aproxima, el flujo de corriente que le precede causa que el electrodo registre un voltaje positivo. Cuando la región de despolarización está justo debajo del electrodo, se registra un potencial negativo que es sucedido por un potencial positivo inmediatamente que ha pasado la región despolarizadora, volviendo al voltaje cero.

Cuando muchos axones paralelos se disparan sincrónicamente, las corrientes extracelulares se suman y el potencial de acción puede ser registrado por un electrodo relativamente distante. Los nervios periféricos humanos contienen muchos axones paralelos y el potencial de acción puede ser registrado por un electrodo situado en la piel sobre el nervio periférico.

#### 1.6 CORRIENTES EXTRACELULARES Y POTENCIALES EVOCADOS REGISTRADOS EN EL CUERO CABELLUDO

A continuación pasaremos del caso simple de nervios periféricos a las situaciones más complejas que existen en el sistema nervioso central. Las neuronas pueden formar, o no, una matriz ordenada. Además la conexión entre las neuronas es a menudo compleja. Lorente de Nó describió el efecto de la configuración geométrica de poblaciones de neuronas a las corrientes extracelulares generadas por esta población de neuronas.

El flujo iónico a través de la membrana de las neuronas es una corriente eléctrica cuyo camino de retorno a través del espacio exterior a la célula crea un campo de potencial extracelular. Debido a que el cerebro, el cráneo, y el cuero cabelludo son conductores eléctricos, los flujos de corriente y los campos de potencial extracelulares quedan gobernados por las leyes de la física, aplicada al flujo de una corriente a través de un volumen conductor.

Una explicación más extensa de los puntos anteriores puede encontrarse en Regan (1981).

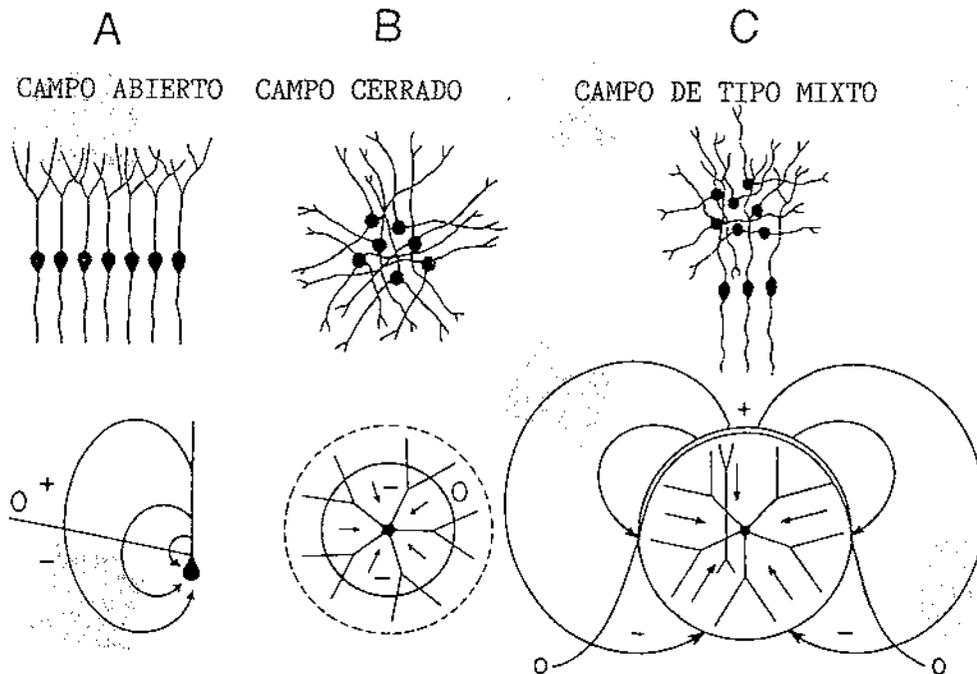


Fig. 4 Campos de potencial producidos por Neuronas con: A) orientación paralela, B) orientación radial y C) combinación de ambas.

Si la matriz de neuronas ocupa solamente una pequeña área, y si ésta yace en un plano que no sea una superficie curva, entonces el campo de potencial externo producido por el conjunto de neuronas se aproximará a un campo dipolar y el potencial del dipolo equivalente será la suma de los potenciales de los dipolos constituyentes. Esta situación se muestra en la figura 4 A.

Las neuronas en muchos núcleos subcorticales no están dispuestas en una

forma tan regular. Consideremos por ejemplo el caso de la figura 4 B donde la población de células está dispuesta de forma que las dendritas de las células individuales son radiales hacia afuera de un núcleo interior de cuerpos celulares. Cuando los cuerpos celulares son despolarizados por una descarga, la corriente extracelular resultante es radial y restringida a una esfera cuya superficie está a potencial cero. Fuera de esta esfera no se genera ningún campo de potencial. Esta situación ha sido denominada "campo cerrado" por Allison, Wood y como un "agujero negro neurofisiológico, invisible desde el exterior" por McCarthy. La figura 4 C muestra una situación intermedia, con una estructura que contiene una mezcla de células cuyas terminaciones tienen a la vez estructura paralela y radial. En realidad, esta es una disposición común en el núcleo subcortical del cerebro.

## 2 CLASIFICACIÓN DE LA ACTIVIDAD EEG

### 2.1 ACTIVIDAD NORMAL Y ANORMAL DEL EEG

Un registro EEG puede contener gran cantidad de patrones diferentes. Para el diagnóstico de enfermedades es necesario comparar los patrones que aparecen en individuos saludables con los que aparecen en los enfermos. Se entiende por individuo saludable aquel que no tienen síntomas, ni historial neurológico o de otro tipo, ni ninguna complicación relacionada con problemas neurológicos. Si un registro EEG contiene algún patrón que únicamente se produce en grupos de pacientes con una complicación específica, se habla de que existe actividad anormal en el EEG. Por el contrario, si no aparece ninguno de estos patrones se habla entonces de actividad normal del EEG. Las figuras 5a y 5b muestran algunas de los tipos de señales que suelen aparecer en el EEG.

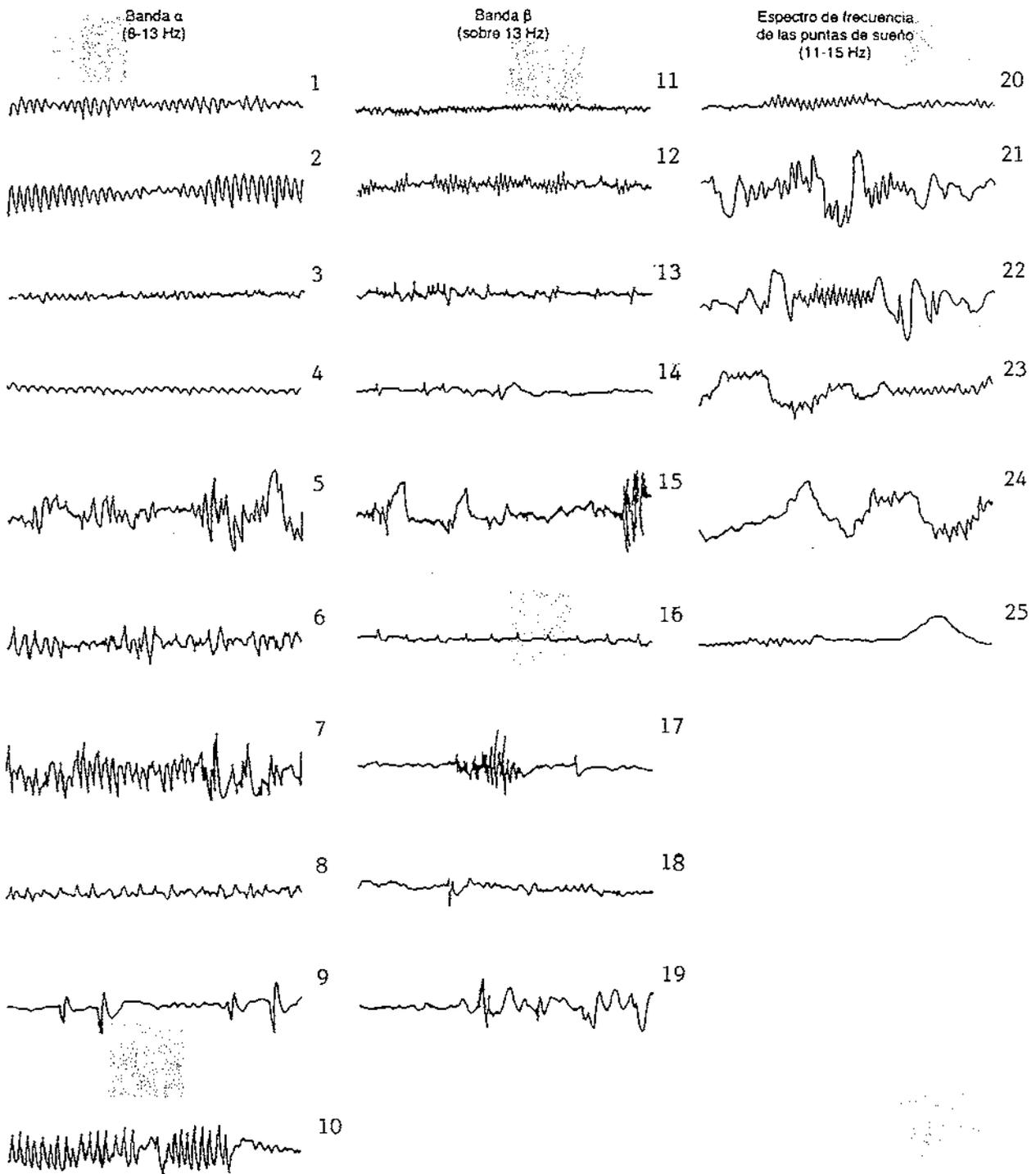


Fig. 5 A) Ejemplos de ondas de diversas amplitudes, frecuencias y formas, típicas en registros del EEG.

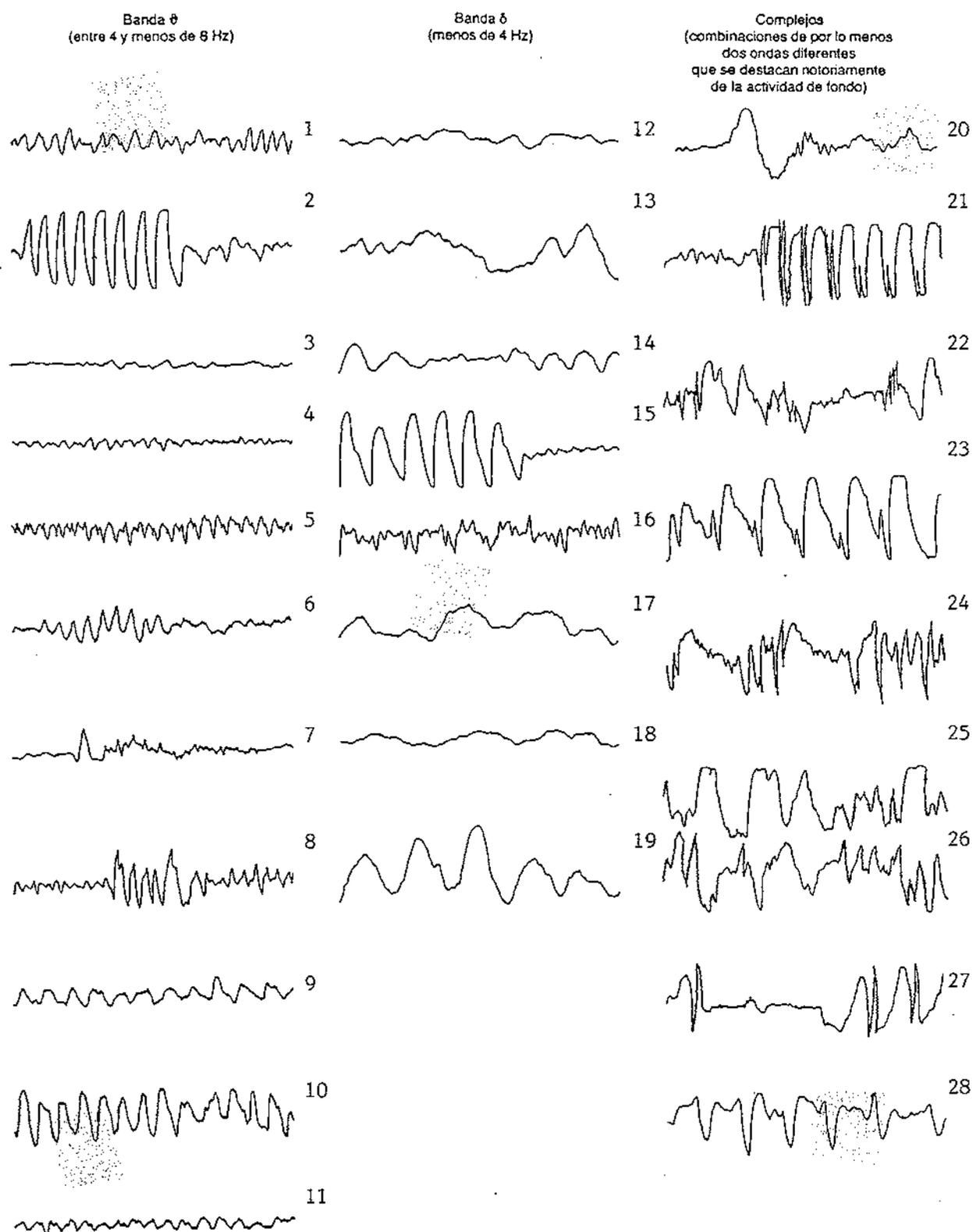


Fig. 5 B) Ejemplos de ondas de diversas amplitudes, frecuencias y formas, típicas en registros del EEG.

## 2.2 VARIABLES USADAS EN LA CLASIFICACIÓN DE LA ACTIVIDAD EEG

La actividad EEG queda descrita en términos de varias variables, cada una de las cuales puede ser considerada en relación a la edad y estado del paciente. Aunque las variables de las que se habla a continuación son las utilizadas frecuentemente por los médicos, muchas de ellas no tienen una traducción fácil a variables numéricas. Por tanto, es importante conocerlas para tratar de aproximarnos al diagnóstico que daría un médico.

### 2.2.1 Frecuencia

La frecuencia se refiere tanto a actividad EEG repetitiva (en Hz) o a la frecuencia equivalente de ondas simples aisladas (inversa de la duración). Se suelen considerar tres tipos de actividad según la frecuencia: Rítmica (ondas de frecuencia aproximadamente constante. Ver figura 5a-1 y 5a-2 ), Arrítmica (no se encuentran presentes ritmos estables. Ver figura 5a-17) y Disrítmica (actividad característica de ciertos grupos de pacientes (figura 5b-27)).

### 2.2.2 Voltaje

Los voltajes se refieren al voltaje promedio o al voltaje pico a pico de la actividad EEG. Los valores del voltaje dependen, en parte, de la técnica de registro. Las derivaciones bipolares estrechamente espaciadas dan voltajes más bajos que las derivaciones referenciales con espaciados más grandes. Tres términos relativos al voltaje son la **Atenuación** (reducción de la amplitud), **Hipersincronía** (incremento del voltaje y regularidad (figura 5b-2)) y **Paroxismos** (actividad de alto voltaje y corta duración (figura 5b-20 a 5b-27)).

### 2.2.3 Morfología

La morfología se refiere a la forma de la onda. Esta está determinada por las frecuencias que se combinan y por sus relaciones de fase y voltaje. La actividad EEG se puede clasificar según la forma de la onda en: **Monomórfica**, **Polymórfica**, **Sinusoidal** (figura 5a-2), **Transitoria** (figuras 5a-9 y 5b-27), **Compleja**, **Bifásica** (figura 5b-15) y **Trifásica** (figura 5b-20).

### 2.2.4 Duración

Se refiere a la cantidad de un tipo particular de actividad EEG con respecto al porcentaje de tiempo presente y/o el voltaje y puede ser: Continua (figura 5a-1 y 5a-2), Discontinua (figura 5a-9), Regular (figura 5a-1 y 5a-2) e Irregular (figura 5a-21 y 5a-22).

#### 2.2.5 Localización

La localización hace referencia a la distribución de los ritmos o patrones del EEG sobre el cuero cabelludo. Los términos más usuales son: Generalizado, Lateralizado, Bilateral, Focal, Simétrico y Asimétrico.

#### 2.2.6 Sincronía

La sincronía es la aparición simultánea de distintos patrones en diferentes regiones de la cabeza.

#### 2.2.7 Periodicidad

La periodicidad se suele referir a la distribución de patrones en el tiempo

### 2.3 ACTIVIDAD CEREBRAL NORMAL

Los conceptos de *sincronización* y *desincronización* de la actividad eléctrica cerebral son el resultado de la suma tempoespacial de los estímulos emanados de una población neuronal. Se denomina trazado sincronizado al registro que reúne características de actividad lenta y alto voltaje, que se traduce clínicamente por el estado de reposo del sujeto, mientras que la actividad rápida y de bajo voltaje es propia del trazado desincronizado que se corresponde con el estado de vigilia (alerta, actividad mental, etc...).

Los ritmos cerebrales básicos del EEG son cuatro y se conocen por las letras griegas: *delta*, *theta*, *alfa* y *beta*

*Ritmo delta* ( $\delta$ ): Comprende las frecuencias inferiores a 4 Hz. Es siempre un ritmo patológico en el estado de vigilia, tanto en el niño como en el adulto, indicando sufrimiento neuronal. En el sueño fisiológico, en sus fases de sueño profundo, es el ritmo predominante. Walter (Castells (1982)) lo

describió en el año 1936 (figuras 5b-12 a 5a-19).

*Ritmo theta ( $\theta$ ):* Es muy frecuente en los niños y muy raro en los adultos en estado de vigilia. Junto con el ritmo delta, son las actividades normales en los estadios de sueño. Comprende las frecuencias entre 4 y 7 Hz. Hacia los 10 años de edad las frecuencias theta tienden a desaparecer, mientras que en los niños pequeños (alrededor de 2 años) es el ritmo preponderante y aumenta de voltaje en situaciones emocionales. Fue descubierto en 1944 por Walter y Dovey (figuras 5b-1 a 5b-10).

*Ritmo alfa ( $\alpha$ ):* Incluye las frecuencias entre 8 y 13 Hz (figuras 5a-1 a 5a-10). Su máxima amplitud raras veces excede de los 100  $\mu$ V, y normalmente oscila entre 20 y 60  $\mu$ V. La amplitud tiende a crecer y disminuir en periodos de duración de 1 a 2 segundos, adquiriendo la forma de huso (fusiforme). En el niño mayor y en el adulto, la actividad alfa se recoge preferentemente en las regiones posteriores del cerebro (constituyéndose así la denominada diferenciación topográfica de los ritmos cerebrales).

En el niño pequeño no existe un ritmo alfa estable en los registros EEG y no se puede apreciar diferenciación topográfica de los ritmos. El ritmo alfa lo adquiere el niño a los 6 años de edad aproximadamente, aunque la actividad estable del adulto (cuya frecuencia media es de 10 Hz) no la alcanza hasta después de los 8 años, pudiendo estar plenamente establecida entre los 11 y los 12 años.

No se ha podido establecer de manera cierta si existe una diferencia interhemisférica del ritmo alfa dependiente del hemisferio dominante, aunque sin ser la regla acostumbra a encontrarse amplitudes mayores en el hemisferio no-dominante, lo cual podría explicarse por un mayor "reposo" de este hemisferio en relación al dominante, que siempre presentaría un mayor grado de actividad incluso durante el reposo voluntario.

El ritmo alfa desaparece (bloqueo del ritmo alfa) al realizar alguna actividad mental (cálculo, etc...) o se estimulan las vías ópticas (apertura ocular, destellos luminosos, etc...), apareciendo en estas situaciones de vigilia el ritmo beta.

*Ritmo Beta ( $\beta$ ):* Comprende las frecuencias superiores a 13 Hz y presenta una amplitud baja que no excede de los 20  $\mu$ V. En las regiones centrales del cuero cabelludo el promedio es de 18-24 Hz (figuras 5a-11 a 5a-19). El ritmo beta es la actividad cerebral que corresponde a la situación de vigilia, alerta y atención. Este ritmo suplanta al ritmo alfa cuando se desincroniza. Predomina en los registros de individuos ansiosos que tienen dificultades para relajarse. Tanto el ritmo alfa como el beta fueron descritos por Berger

en 1930.

#### 2.4 DIFERENCIACIÓN TOPOGRÁFICA DE LOS RITMOS

Una de las principales características de la actividad cerebral normal es la similitud de los ritmos registrados en áreas homólogas de ambos hemisferios con respecto a su morfología y frecuencia (sincronía de los ritmos).

*Región Frontal:* Predominan las frecuencias rápidas (beta) de bajo voltaje y con poca ritmicidad en sus ondas. Puede aparecer interferencia del ritmo alfa.

*Región Temporal:* Presenta un trazado irregular, con amplitudes algo elevadas, pero inferiores a las de la región occipital. Predomina el ritmo alfa, aunque admite una interferencia theta.

*Área Rolándica:* Evidencia frecuencias rápidas con amplitudes bajas, pero con gran ritmicidad, con una mezcla de bandas de frecuencias beta y alfa.

*Región occipital:* Es la única región capaz de alcanzar un reposo absoluto, bloqueando la llegada de estímulos (mediante el cierre ocular y reposo), por lo que se considera que no existe una actividad propia de esta región.

Se observan variabilidades individuales de reactividad del ritmo alfa occipital, así hay sujetos:

1- de tipo P (permanente): Presentan una frecuencia regular y abundante que no se bloquea completamente con la apertura ocular o cuando se eleva el nivel de atención.

2- de tipo R (reactivo): Tienen una frecuencia bastante regular pero fácilmente bloqueable por la apertura ocular u otros estímulos.

3- de tipo M (mínimo): tienen un ritmo de pequeña amplitud, muy inestable.

#### 2.5 ACTIVIDAD CEREBRAL ANORMAL

Las desviaciones de la normalidad en el EEG pueden afectar a todas las regiones cerebrales y se califican entonces de alteraciones generales, o bien, limitarse tan sólo a determinadas áreas cerebrales, hablándose en este caso de anomalías focales. Tanto en uno como en otro caso la actividad cerebral anormal puede presentarse en dos formas esenciales: lentificación o paroxismo.

*Lentificación difusa:* incluíble dentro de las alteraciones generales y constituida por frecuencias lentas (delta y theta), con amplitudes variables que pueden ir desde ondas hipervoltadas (superiores a 200 o 300  $\mu\text{V}$ ) hasta registros de muy pobre actividad con voltajes prácticamente imperceptibles (inferiores a los 10 o 20  $\mu\text{V}$ ).

*Lentificación focal:* Indica una zona localizada de sufrimiento neuronal, correspondiendo a un proceso focalizado en una determinada área cerebral. A veces una lentificación focal únicamente se hace evidente mediante técnicas de activación, como en el caso de la hiperventilación o hiperpnea.

*Elementos paroxísticos:* cuyo principal representante es la punta u onda de aspecto puntiforme. Morfológicamente la punta se compone de tres fases:

- a) un primer trazo ascendente
- b) un segundo trazo descendente
- c) y por último otra vez ascendente

La aparición de elementos paroxísticos se explica por la pérdida del equilibrio bioeléctrico de la actividad cerebral normal. Este desequilibrio sucede en el momento que una población neuronal se "despolariza" apareciendo una respuesta "reclutante" de puntas, que implica un progresivo arrastre de neuronas relacionadas funcionalmente.

Las puntas pueden presentarse aisladamente o bien acompañadas de ondas lentas (ondas de inhibición) dando distintas imágenes EEG ( punta-onda, polipunta-onda, etc..) que se traducen por diferentes manifestaciones clínicas.

Los elementos paroxísticos pueden presentarse en el EEG de manera localizada (focal) o generalizada en todo el manto cortical.

## 2.6 ARTEFACTOS

Se asume normalmente que el registro EEG representa solamente actividad cerebral. En realidad incluye otras actividades eléctricas que no son de origen cerebral. Estas son denominadas *ruido* o *artefactos*. Sus orígenes son múltiples.

Los artefactos fisiológicos son señales eléctricas generadas por el paciente pero no en el cerebro. Esto incluye los potenciales de los músculos, de los ojos, de la piel, etc...

Los artefactos no fisiológicos pueden originarse en los electrodos o bien en el instrumento EEG o por señales externas como la señal de 50 Hz en la etapa de amplificación o interferencias de sistemas emisores de radio o

televisión. El ruido del instrumento es inherente a los circuitos electrónicos del sistema de amplificación y es un factor constante.

A veces es difícil, incluso para electroencefalografistas experimentados distinguir entre la señal EEG y el artefacto.

### 2.6.1 ARTEFACTOS FISOLÓGICOS

#### a Artefacto muscular

El paciente puede parecer tranquilo y relajado, mientras algunas derivaciones pueden estar más o menos oscurecidas por la actividad continua electromiográfica (EMG) con un voltaje mayor que el EEG.

#### b Artefacto electrocardiográfico

Otro artefacto fisiológico común es el producido por la actividad eléctrica del corazón (EKG o ECG). Normalmente este voltaje es pequeño (1 a 2  $\mu\text{V}$ ) y está enmascarado por la mayoría de la actividad del EEG (20-100  $\mu\text{V}$ )

#### c Artefacto del pulso

El movimiento mecánico causado por la pulsación de una arteria puede dar lugar a una onda lenta que algunas veces simula la actividad EEG.

#### d Movimiento ocular

El movimiento ocular puede simular una onda lenta de EEG que tiene un origen frontal. La órbita del ojo es una batería cuyo frente es electropositivo y cuya parte posterior es electronegativa. Este potencial es denominado potencial corneoretinal.

Si el ojo se mueve, el campo creado por este potencial se distribuirá sobre el frente de la cabeza de forma diferente que cuando el ojo estaba en su posición original.

#### e Movimiento de la lengua

La lengua, como el ojo, está eléctricamente cargada. La punta de la lengua es más positiva que la raíz. Estas cargas se comportan como un

batería. El movimiento de un polo de la batería respecto a la cara cambiará el campo eléctrico alrededor de la boca y dentadura. Este campo puede algunas veces dispersarse a la parte superior de la cara.

#### f Respiración

La respiración puede dar lugar a dos tipos de artefactos. Uno puede ser en la forma de una actividad lenta completamente rítmica, que es sincrónica con el movimiento corporal relacionado con la respiración. El movimiento causa cambios inducidos mecánicamente en la impedancia de un electrodo. También puede presentarse como una onda lenta que ocurre sincrónicamente con la inhalación y la exhalación.

#### g Temblor

El temblor y la actividad muscular pueden inducir una mezcla de artefactos de movimientos que ocurren a una frecuencia de entre 3 y 6 Hz.

#### h Electroretinograma

El electroretinograma es un artefacto fisiológico que es generado en la retina por la luz y ocurre durante la estimulación luminosa.

#### i Potenciales de la piel

Los potenciales de la piel pueden causar artefactos de baja frecuencia. Las áreas de la piel con muchas glándulas sudoríparas son eléctricamente negativas con respecto a las áreas con menos glándulas. La diferencia de voltaje puede ser de hasta 50  $\mu\text{V}$  (unas 100 veces el voltaje del EEG). Las glándulas sudoríparas generan potenciales negativos cuando están activas. En segundo lugar la producción de sudor cambia la concentración de electrolitos entre el electrodo y la piel, provocando un efecto batería que produce un artefacto de ondas lentas. También hay cambios asociados en la resistencia de la piel, y el efecto interactivo de estas variables puede tenerse en cuenta al considerar la piel como una fuente de ruido del EEG.

### 2.6.2 ARTEFACTOS NO FISOLÓGICOS

### a Artefacto de 50 Hz

La mayor contribución a ruido no fisiológico en el EEG proviene de la corriente alterna de 50 Hz. Hay dos formas en que esta corriente puede producir interferencias en el registro EEG. La primera es por medio de efectos electrostáticos, causados por la capacitancia entre los conductores de 50 Hz y otros conductores que actúan como la segunda placa de un capacitor. Cualquier voltaje inducido de esta forma que alcance las entradas de los amplificadores del EEG, si es distinto en la entrada 1 que en la 2, será amplificado y será registrado como un artefacto de 50 Hz.

La segunda fuente de artefactos es el efecto electromagnético, causado por aparatos tales como transformadores, motores, lámparas de alta intensidad, fuentes de potencia de TV o el equipo EEG. El campo eléctrico generado se acopla inductivamente a los cables del electrodo, que actúa como el secundario de un transformador.

### b Artefactos originados en los electrodos

Los electrodos pueden dar lugar a muchos tipos de ruido. Un artefacto común es el que simula una punta o una onda. Está causado por un electrodo eléctricamente inestable, por un electrolito, o por una inestabilidad mecánica que cambia el área superficial del electrodo en contacto con la piel.

## 2.7 POTENCIALES EVOCADOS MEDIOS

La suma de las fluctuaciones eléctricas siguientes a sucesivos estímulos, permite objetivar mucho mejor las respuestas cerebrales evocadas. Los potenciales evocados que tienen utilidad en la clínica son: visuales, auditivos y somatosensoriales. Dawson, en 1951, fue el primero que utilizó la superposición de los potenciales evocados.

### 2.7.1 Potencial evocado visual

Los potenciales evocados pueden registrarse en toda la superficie cerebral, presentando una morfología específica para cada región. El potencial evocado presenta una morfología específica para cada región. Presenta un aspecto polifásico que puede descomponerse en tres partes:

precoz, tardía y posdescarga. Interesa en EEG infantil considerar las posibilidades de los potenciales evocados como determinantes del grado de maduración cerebral de los niños.

### 2.7.2 Potencial evocado auditivo

Acostumbra a realizarse conjuntamente con el visual, con unos tiempos de latencia extremadamente breves (6-20 mseg.), dependiendo de la amplitud de la intensidad del estímulo sonoro.

### 2.7.3 Potencial evocado somatosensorial

Los potenciales se provocan estimulando la piel que recubre el nervio mediano recogiendo las respuestas en la región de las terminaciones corticales de las vías somatosensoriales. Se obtiene después de un corto periodo de latencia (16-24 mseg), una primera onda negativa, seguida de otra positiva.

## 2.8 EEG EN TRASTORNOS ENDOCRINOMETABÓLICOS

El EEG puede verse alterado en mayor o menor medida por ciertos trastornos endocrinometabólicos como pueden ser:

- a) Niveles de glucemia
- b) Niveles de calcemia
- c) Niveles de hidroelectrolitos
- d) Equilibrio acido-base
- e) Afecciones de tiroides
- f) Afecciones de riñón
- g) Afecciones de la hipófisis
- h) Afecciones de hígado
- i) Afecciones de las glándulas suprarrenales

No se da una descripción detallada de como afecta cada una de estas situaciones por ser algo de carácter eminentemente médico que se sale del ámbito de este texto.

## 2.9 EEG EN NEUROPSIQUIATRÍA

### 2.9.1 LOS ESTADOS DE VIGILANCIA, ALERTA Y ATENCIÓN

Es de interés para comprender algunos mecanismos psicológicos conocer la expresión EEG de los mismos.

*Alerta:* es un estado de vigilancia producido por una señal y se traduce en el EEG por una desincronización del trazado. Cuando el estímulo se repite cierto número de veces, la respuesta desincronizadora desaparece y el estímulo fracasa en producir alerta.

*Atención:* representa un estado más avanzado de vigilancia que la alerta, persistiendo el EEG desincronizado, por una activación selectiva del sistema reticular talámico.

### 2.9.2 CONCEPTO DE INMADUREZ EEG

Alrededor de este término se han suscitado múltiples polémicas interpretativas, que se iniciaron con Pond en 1950 y Ellingson en 1954 (Castells (1982)), cuando ambos autores criticaron la hipótesis de que los cambios lentos en el EEG estuvieran relacionados con una inmadurez psicológica. Posteriores estudios contradecían estas afirmaciones, ya que la presencia de actividades lentas en adolescentes y jóvenes, estaban frecuentemente asociadas a trastornos emocionales como agresividad, delincuencia e inmadurez afectiva. También, en los niños en edad escolar, la presencia de actividad lenta posterior, se observa en un alto porcentaje de trastornos del aprendizaje como dislexia o disfasia, o bien se asocia a trastornos psicosomáticos tales como dolores de cabeza, desvanecimientos, etc...

La dificultad estriba en la correcta valoración de estas anomalías lentas, ya que en la mayoría de los casos no son la expresión de un substrato orgánico de daño cerebral, sino de dificultades emocionales de adaptación. Esta aclaración interpretativa de la inmadurez bioeléctrica es ratificada cuando se manifiesta que la actividad lenta en las áreas posteriores no es indicativo de un defecto primario, sino resultado de dificultades en la esfera del aprendizaje y de las relaciones sociales, correspondiendo estas ondas lentas a ciertos momentos del normal desarrollo psicológico, momentos de modificación y crisis de transición entre periodos de estabilidad y armonía.

Aparte de las consideraciones anteriormente citadas, se puede definir la inmadurez EEG por los siguientes signos:

- 1) ritmo theta predominante

2) ritmo alfa variante

3) ondas lentas aisladas en las áreas temporales posteriores

Hasta aquí, lo que se conoce a partir del EEG registrado sobre papel. Sin embargo, la introducción de los ordenadores en este campo ha dado lugar a la aparición de lo que se conoce como EEG cuantitativo (John et al. (1980, 1982), Katada (1981), Gasser et al. (1982, 1987, 1988a, 1988b), Bronzino (1984), Mocks and Gasser (1984), Nuwer (1988), Van der Worp (1991), etc.). En este caso se trabaja con variables cuantitativas que son medidas a partir del registro EEG. La definición de madurez o inmadurez ya no está tan clara en este caso, puesto que la variabilidad estadística interindividual de los parámetros que se miden es tan grande que puede ocultar la evolución de los mismos con la edad (Benninger et al. (1984), Gasser et al (1988), Matsuura et al (1985)). Algunos de los resultados que se han podido establecer son:

a) Los cambios más rápidos se producen en los 5 primeros años de vida (John et al. (1980)).

b) Entre los 17 y 21 años se produce una estabilización del EEG (John et al. (1980)).

c) La potencia relativa en  $\theta$  disminuye con la edad mientras que en  $\alpha_2$  aumenta (Benninger (1984), Gasser (1988)).

d) Los cambios son más grandes en los canales occipitales (Benninger (1984), Gasser (1984), Matsuura et al. (1985))

e) El espectro de un adolescente, en condiciones de reposo, es estable en periodos entre 1 y 3 años (Fein et al. (1984)).

Un extenso resumen de los métodos matemáticos a utilizar para el análisis de señales biomédicas puede encontrarse en Cohen (1986 vol. I y II). Si se desea ampliar conocimientos respecto a la actividad EEG se pueden consultar Simon (1983) y Tyner (1983).

### 3 TÉCNICA DEL REGISTRO ELECTROENCEFALOGRÁFICO

#### 3.1 DESCRIPCIÓN DEL ELECTROENCEFALÓGRAFO

Los aparatos usados en electroencefalografía tienen la misión de captar las diferencias de potencial creadas por las neuronas cerebrales, recoger los estímulos eléctricos por medio de unos electrodos situados sobre el cuero cabelludo y amplificar estas señales hasta que adquieran el voltaje suficiente para hacer oscilar unas plumillas que se mueven por la acción de un galvanómetro.

Existen en el comercio aparatos de distinto tamaño que pueden utilizarse como fijos en un laboratorio EEG, o si son de dimensiones reducidas desplazarse como portátiles. Asimismo, pueden conectarse con computadoras que permitan el almacenamiento de datos y el posterior análisis de los mismos.

#### 3.2 ELECTRODOS

Son pequeñas piezas metálicas de unos 10 mm de diámetro, de forma circular o cuadrangular con muy poco espesor y una superficie de contacto que puede ser acanalada o con pequeñas púas para asegurar el máximo contacto con el cuero cabelludo. Suelen fabricarse de plata, sometiéndolas a un baño clorurado para evitar su deterioro en contacto con las pastas conductoras y evitar su "polarización" (un electrodo en malas condiciones, junto con una piel con sudor, puede actuar como una pila produciendo un voltaje de hasta 300 mV) que es frecuente causa de artefactos, (siendo el más común la superposición de la señal de la red).

Antes de colocar los electrodos es necesario desengrasar la piel del cuero cabelludo con un disolvente (alcohol, acetona) y luego aplicar sobre la superficie de contacto del electrodo una pasta conductora (a base de cloruro sódico) para disminuir al máximo las resistencias que no deben sobrepasar los 10 K $\Omega$  y conseguir en todos los electrodos una resistencia homogénea que permita la captación uniforme de los potenciales bioeléctricos.

Los electrodos se sujetan y mantienen fijos mediante unas gomas (casco) que rodean la cabeza y deben ejercer el mínimo de presión para que no resulten molestas.

Existen otros tipos especiales de electrodos, que no se suelen utilizar en la práctica infantil como son "de aguja" (fina aguja de platino que se introduce debajo del cuero cabelludo) "faringeal", "esfenoidal", "timpánico"

y "nasoetmoidal" (todos ellos con el nombre de la región anatómica en donde son introducidos, bien por el conducto auditivo o por las fosas nasales, con el objetivo de captar la actividad eléctrica profunda y de la base cerebral.

### 3.3 POSICIONAMIENTO DE LOS ELECTRODOS

El desarrollo de la técnica electroencefalográfica ha evolucionado a través del intercambio de información e ideas entre muchos laboratorios diferentes. Pronto se reconoció que este proceso se facilitaría si se pudiera alcanzar un acuerdo general sobre la ubicación de los electrodos. El trabajo básico para formular las líneas maestras fue establecido en el primer congreso internacional de EEG en 1947. En el segundo congreso, en 1949, se hizo un trabajo preliminar que se adjuntó de manera formal en el cuarto congreso (1957). El sistema de ubicación de electrodos fue denominado **sistema de electrodos diez-veinte**. Los principios básicos son:

1) La posición de los electrodos deben determinarse por medidas de puntos destacados del cerebro. Las medidas deben ser proporcionales al tamaño de la cabeza y a la forma.

2) Las posiciones estándar designadas deberán cubrir todas las partes de la cabeza.

3) La designación de las posiciones se hará en términos de las áreas cerebrales (Frontal, parietal, etc...) y no sólo por números.

4) Deberán llevarse a cabo estudios anatómicos para determinar las áreas corticales más apropiadas para situar los electrodos en el sujeto promedio.

Las posiciones de los electrodos en el sistema 10-20 se muestran esquemáticamente en la figura 6 donde se puede apreciar como la separación entre ellos es de un 10% o un 20% de la distancia total en cada dirección (de ahí el nombre). Cada electrodo tiene una abreviación estándar basada en el área cerebral que representa. Los electrodos numerados impar están situados en la izquierda y los numerados par en la derecha.

Los amplificadores usados para el registro EEG son amplificadores diferenciales. Cada canal es un registro de la diferencia de voltaje entre el electrodo seleccionado para la entrada 1 y el electrodo seleccionado para la entrada 2.

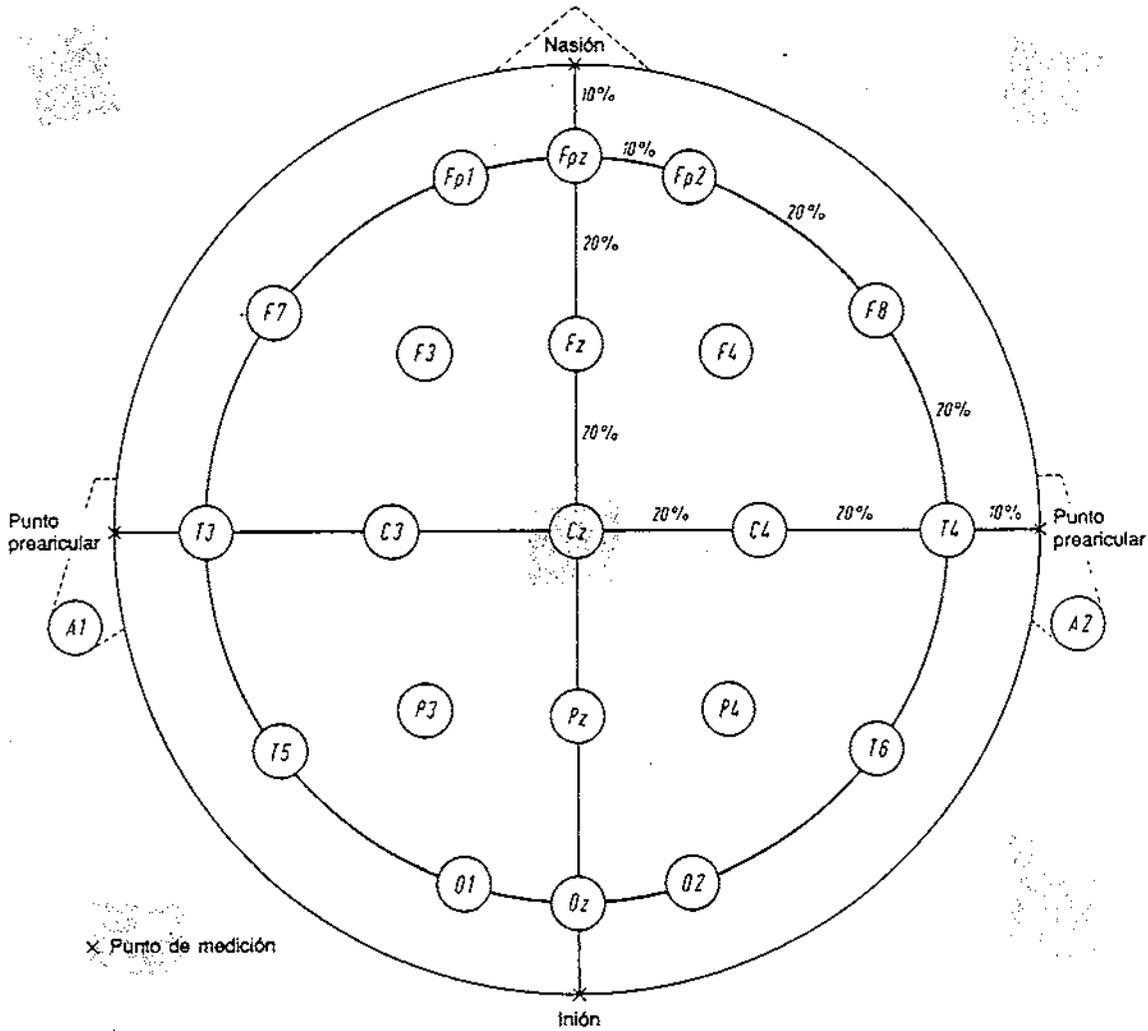


Fig. 6 Disposición de los electrodos según el sistema 10-20.

### 3.4 REGISTRO BIPOLAR

El registro bipolar utiliza múltiples derivaciones de los electrodos (una derivación es un par de electrodos) sin tener ningún electrodo común a la entrada de todos los canales. Usualmente, los electrodos son combinados de forma que los mismos estén en línea recta, y canales adyacentes tengan un electrodo en común.

En la figura 7 podemos ver un ejemplo para dos canales. El electrodo compartido es C3. Cuando un suceso negativo ocurre cerca de C3 la salida es negativa en el canal A y positiva en el B. Si por el contrario C3 se hace más positivo, la salida es positiva en el canal A y negativa en el B.

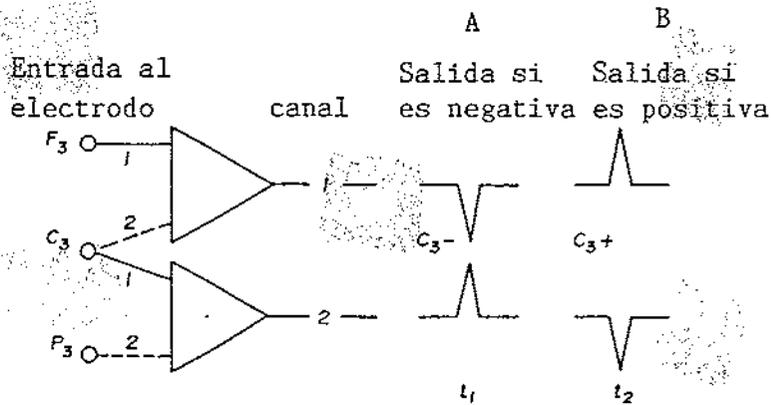


Fig. 7 Registro bipolar de dos canales. Cuando ocurre un evento, puede ser localizado y determinada su polaridad. A: C3 negativo. B: C3 positivo.

### 3.5 INVERSIÓN DE FASE

En ambos ejemplos, uno y otro picos están desfasados en 180°. Esto se denomina *inversión de fase*. Cuando la inversión de fase implica a canales adyacentes es porque el electrodo compartido, al estar conectado a una entrada diferente de cada amplificador hace que el signo de ambas señales sea opuesto. Esta inversión de fase da una indicación importante que ayuda a identificar el área sobre la cual ocurre la actividad EEG.

### 3.6 REGISTRO REFERENCIAL

El registro referencial del mismo suceso del EEG requiere tres amplificadores.

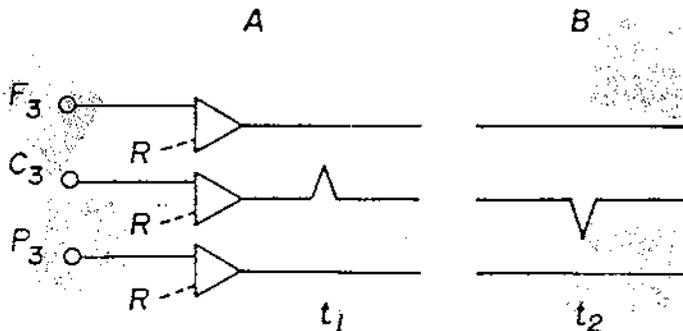


Fig. 8 Registro Referencial. A: C3 negativo. B: C3 positivo.

En un registro referencial (normalmente denominado monopolar), se conecta un electrodo diferente a la entrada 1 de cada amplificador y un sólo electrodo de referencia común se conecta a la entrada 2 de cada amplificador. En este caso, si en el electrodo C3 ocurre un suceso negativo esto producirá un voltaje negativo en el canal 2, mientras que los otros dos canales no muestran cambios. De la misma forma, si ocurriera un suceso positivo obtendríamos un voltaje positivo en el canal 2 sin cambios en los otros canales (figura 8).

### 3.7 MONTAJES

Un par de electrodos conectados a un amplificador forman una derivación. Una derivación da una información muy limitada del EEG. Sin embargo, si se combinan varias derivaciones de una manera lógica, se puede obtener gran cantidad de información.

Los primeros electroencefalógrafos tenían instrumentos de un sólo canal. Esta limitación llevó a Berger a creer que la actividad alfa era generada de forma difusa en el cerebro. Su derivación simple era del área frontal a la occipital. Aunque pronto dispuso de dos canales para registrar, usó la misma derivación en ambos hemisferios. Esto le daba un punto de vista limitado de la actividad cerebral, aunque le permitió comparar la actividad de los dos hemisferios simultáneamente.

Al disponerse de registros de más de dos canales se hizo evidente que se podían mostrar múltiples derivaciones en un equipo multicanal para conseguir una representación ordenada del cerebro dentro del registro. Todo lo que se requería era que se combinaran las derivaciones de forma que canales adyacentes del EEG representen zonas adyacentes del cerebro.

Los *requerimientos técnicos mínimos para realizar electroencefalografía clínica* establecen que "se recomienda el registro simultáneo de 16 canales del EEG" y que "no deben usarse menos de 8 canales". Asimismo, indica que "para encontrar la distribución de la actividad EEG debe registrarse simultáneamente de tantas regiones del cuero cabelludo como sea posible. El registro simultáneo inadecuado puede llevar a una interpretación errónea de las áreas cerebrales que producen la anormalidad".

CAPÍTULO IV

ADQUISICIÓN Y PROCESAMIENTO DE SEÑALES

A continuación se muestra el montaje utilizado para la toma de datos.

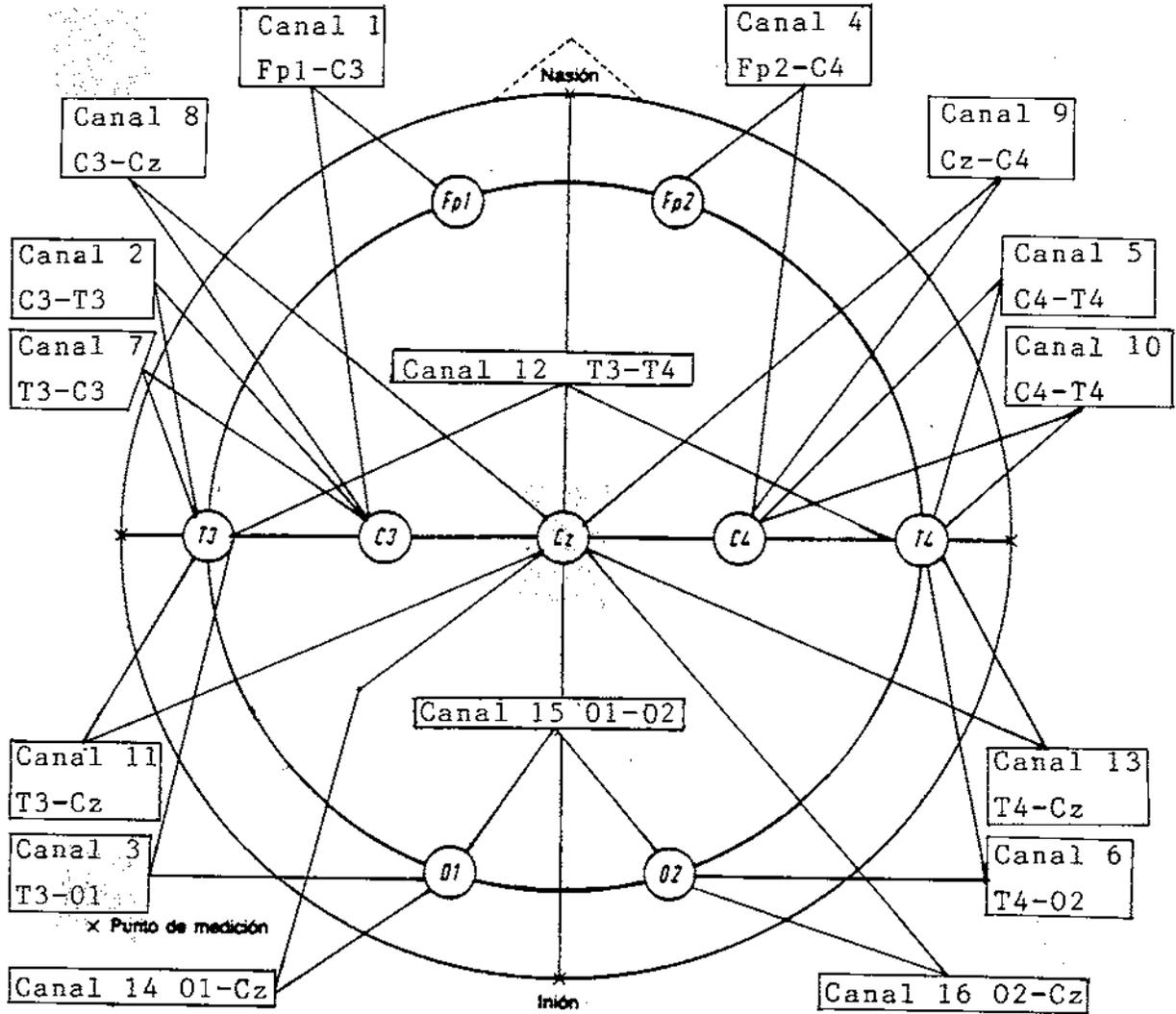


Fig. 9 Disposición de los electrodos utilizada.

## IV ADQUISICIÓN Y PROCESAMIENTO DE SEÑALES

En este capítulo, se presenta la aplicación de las técnicas mencionadas en los capítulos anteriores a la adquisición y procesamiento de las señales de los 16 canales del EEG. En primer lugar se definirán las características de las señales a ser adquiridas y las condiciones que debe verificar la tarjeta de adquisición de datos. A continuación se lleva a cabo una descripción del programa de adquisición de datos, pormenorizando cada una de las funciones que lleva a cabo. En tercer lugar se presentan los métodos utilizados para calcular la DPE. El problema de la eliminación de diferentes tipos de artefactos que contaminan las señales del EEG es objeto de estudio en el siguiente apartado. Por último, se describe el programa de procesamiento interactivo en tres etapas:

- 1) Descripción funcional del programa.
- 2) Descripción detallada de los diferentes módulos del programa.
- 3) Organigrama en "pseudo-código de alto nivel" del programa realizado.

### 1 ADQUISICIÓN DE LAS SEÑALES

El rango de frecuencias de las señales suministradas por el electroencefalógrafo está limitada entre 0 y 40 Hz, ya que esas son las frecuencias más rápidas que se encuentran en un EEG libre de interferencias de otro tipo de señales. Además, en el primer electroencefalógrafo que se utilizó, se introducía la señal de red de 50 Hz. Por tanto, teniendo en cuenta el teorema del muestreo de Shanon, la frecuencia de muestreo seleccionada para cada canal ha sido de 100 Hz. Antes de fijar esta frecuencia de muestreo se hicieron pruebas a 200 Hz y 300 Hz en sujetos en los que el experto médico pudiera sospechar que existieran frecuencias más altas ( por contaminación debida a artefactos de distintos tipos ) y en ningún caso se encontraron componentes significativas de más de 30 Hz. Por tanto, se justifica la elección de dicha frecuencia de muestreo (puesto que para el filtrado de la señal de red también es suficiente). Esta frecuencia es prácticamente la misma que suelen utilizar otros autores como se puede ver en la siguiente tabla:

Tabla IV.1 Frecuencia de muestreo utilizada por distintos autores.

Frec. muestreo Hz	Autor	Año	País
100	Van der Worp	1991	Holanda
102.4	Benninger et al Oken and Chiappa Mocks and Gasser Gasser et al Matthis et al	1984 1988 1984 1982 1987 1988 1981	Alemania U.S.A. Alemania Alemania " " Alemania
128	Sande Lemos and Fisch Bronzino	1991 1984	U.S.A. U.S.A.
200	Pollock et al Panet-Raymond and Gotman Lesser et al Lemieux et al	1990 1990 1992 1984	U.S.A. Canadá U.S.A. Canadá
500	Hilfiker Tucker et al	1992 1986	Suiza U.S.A.

Se puede observar que gran cantidad de autores elige una frecuencia de muestreo igual o ligeramente superior al doble de la frecuencia de red (60 Hz en América).

La adquisición de un trazado de EEG ausente de perturbaciones es de gran importancia para poder sacar conclusiones válidas acerca del mismo. Sin embargo, existen muchas fuentes que pueden perturbar la señal adquirida como movimientos del sujeto, etc... Esto nos llevó a considerar la necesidad de presentar la señal de los 16 canales en pantalla para que el especialista pudiera decidir cual era el mejor momento de almacenar los datos. Por supuesto, esta operación debe llevarse a cabo en tiempo real para que sea efectiva. Esto implica que el sistema de adquisición de datos tiene que operar en modo de Acceso Directo a Memoria (DMA), para liberar a la CPU de los procesos de Entrada/Salida. Otros parámetros que se consideraron fundamentales en el sistema de adquisición fueron:

1) Compatibilidad: Ya que dicha tarjeta tendría que operar en un entorno de ordenador compatible PC - AT

2) Número de canales de una sola entrada: Puesto que los requerimientos por parte del especialista médico situaban esta necesidad en 16 canales.

3) Ganancia programable: Esto permite, según el valor máximo de amplitud de la señal de entrada, trabajar siempre con la máxima resolución posible de la tarjeta conversora.

4) Resolución: Para poder obtener una buena descripción de los datos.

5) Rango Bipolar: Ya que esta es la forma en la que salen del electroencefalógrafo.

6) Entrada por disparo: De importancia vital para poder llevar a cabo adquisición de potenciales evocados, al ser activada por un pulso en el momento que se produce el estímulo cuya respuesta se quiere medir.

En un primer momento se utilizó el material disponible en el Departamento de Neurofisiología. Este consistía en una tarjeta de bajo coste ADDA CARD de 12 bit (versión IBM PC) y un acondicionador de señal a la salida del electroencefalógrafo. Sin embargo, este sistema presentaba varios defectos:

1) La entrada de la tarjeta era unipolar, mientras que la salida del electroencefalógrafo era bipolar (por lo que era imprescindible el acondicionador de señal).

2) La tarjeta funcionaba por transferencia programada, teniendo que temporizar por programa cada una de las 7 fases (método de aproximaciones sucesivas).

3) La impedancia de entrada era demasiado pequeña. Cuando se adquirían uno o dos canales, el resultado era satisfactorio. Sin embargo, si se pretendía adquirir los 16 canales simultáneamente la señal era altamente atenuada.

4) Además no ofrecía adquisición por DMA, lo cual nos impedía estar seguros de que las muestras se tomaran en los instantes correctos.

Debido a tantas desventajas, nos vimos obligados a adoptar una solución drástica que consistió en desechar el material existente y buscar una tarjeta con mejores prestaciones. Una tarjeta como la DATA TRANSLATION DT-2801, con el panel terminal DT707 verifica las especificaciones requeridas. Además presenta una gran impedancia de entrada, lo que permite una buena medida de las señales.

El número de bytes en el buffer de DMA está dado por:

$$20.48 \text{ seg.} \times 100 \text{ muestras/s.} \times 16 \text{ canales} \times 2 \text{ bytes} = 65536 \text{ bytes}$$

Estos 64 KB de memoria corresponden a una página de memoria, que debe ser preservada del DOS, programas, etc... El software de adquisición básico consta de las siguientes funciones.

- Activación del DMA. Este bloque lleva a cabo la lectura del conversor analógico/Digital en modo DMA. La operación termina cuando se llena el espacio reservado en memoria para datos. En el caso de la DT-2801, no lleva incorporado el DMA, por lo que utiliza el que queda libre en el PC-AT.

- Transferencia de los datos a fichero.

La versión original del programa fue programada en BASIC y permitía la captura sin visualización en tiempo real. Este programa fue reescrito completamente en C y ensamblador, siendo actualizado de forma que simultáneamente se pueda estar capturando datos y observándolos por la pantalla en tiempo real. Además se amplió el tiempo de captura a un número arbitrario de múltiplos de 20.48 seg. con la única limitación de que exista memoria disponible. Este estudio dio lugar a una Tesina de Licenciatura (Piñeiro (1991)).

La elección de tal tiempo de adquisición de datos no es caprichosa, sino que se encuentra dentro de los valores más utilizados. Gasser et al. (1982) da dos razones para la elección de épocas de 20 s.:

a) La variabilidad estadística interindividual para 20 s. es suficientemente buena.

b) Las desviaciones del nivel deseado de vigilancia para el EEG en reposo son menos frecuentes que si se toman épocas de 60 s.

Mocks and Gasser (1984) reafirman que el uso de épocas de 40 o 60 s. no mejoran la variabilidad estadística conseguida con épocas de 20 s.

En la siguiente tabla se muestran los valores más usados como duración de las épocas de estudio:

Tabla IV.2 *Duración de tiempos de análisis más comunes*

Tabla IV.2 Duración de tiempos de análisis más comunes

Tiempo Total Adquisición s.	Duración 1 época s.	Autor	Año
64	1	Bronzino	1984
36	2	Benninger Hilfiker	1983 1992
180	2.5	Pollock et al	1991
120	4	Oken and Chiappa	1988
102.4	5.12	Van der Worp	1991
	8	Sande Lemos and Fisch	1991
300	10	Katada et al	1981
120	20	Benninger et al.	1984
120		Mocks and Gasser	1984
180		Gasser et al.	1982
		Gasser et al	1987
	30	Tucker et al	1986
	50	Nakamura et al	1992
60	60	John et al	1980
		Baird et al	1982
		Matsuura et al	1979
			1985

Comentaremos a continuación la primera versión del programa de adquisición de datos y daremos algunas pautas del programa de adquisición y visualización en tiempo real.

### 1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS

El listado completo de este programa se muestra en el apéndice B. En esta primera versión los ficheros se escribían en modo ASCII y se utilizaba uno para cada canal. Puesto que la tarjeta de adquisición tiene 12 bits de resolución, es necesario almacenar 2 bytes por cada muestra tomada. Para guardar los 64 KB de registro son necesarios 16 ficheros de unos 13500 bytes cada uno, lo que significa 216.000 bytes en total.

El programa permite las siguientes opciones:

- 1) Visualizar ficheros: Muestra el listado ordenado de los ficheros del directorio en que nos encontremos (tanto en disco duro como en discos flexibles).
- 2) Copiar ficheros: Esta opción nos permitía copiar los 16 ficheros con una sola orden, tanto de disco duro a disco flexible como viceversa.

3) Borrar ficheros: Esta opción borra los 16 ficheros correspondientes a un registro de una sola vez.

4) Adquirir datos: Se explica a continuación.

5) Salir al sistema: Desactiva la lectura de teclas de cursor, ajusta nuevamente los colores, limpia la memoria y termina la ejecución.

Seguidamente comentaremos aquellas instrucciones del programa que hacen referencia a la adquisición de los datos.

Se limpia la pantalla, se ajustan los colores y se activa la detección de teclas de cursor y retorno de carro.

A continuación se definen las constantes más importantes en hexadecimal:

a) Dirección Base, Registro de Estado, Registro de Comandos, Registro de Datos.

b) Comandos de la tarjeta utilizados

c) Asignación del número mínimo y máximo de conversiones, número sin significado (no tiene efecto en modo DMA) y frecuencia base del reloj.

d) Asignación de los parámetros constantes del CA/D (Los valores de las ganancias si estamos con una tarjeta PGH (1, 2, 4 y 8), PGL (1, 10, 100 y 500) o una PGX (1), el número de canales referenciales y diferenciales, así como los rangos y offset unipolares y bipolares.

e) Definición de las constantes del DMA para el canal 1 de DMA.

f) Comprobación del espacio en disco duro. Si este espacio es menor de 300000 bytes (para que se puedan escribir los 16 ficheros) presenta el mensaje de "DISCO LLENO" y "Pulse cualquier tecla", tras lo cual regresa al menú principal. En caso contrario pregunta el nombre del fichero en el que vamos a guardar los datos y comprueba si su longitud es correcta. A continuación comienza las operaciones con la tarjeta:

a) Escribe el comando STOP en el registro de comandos, con lo que detiene la tarjeta.

b) Lee el registro de datos para limpiarlo

c) Espera hasta que el bit 1 del registro de estado se encuentre a 0. Esto indica que la entrada de datos no está ocupada.

d) Espera hasta que el bit 2 del registro de estado esté a 1, lo cual significa que la tarjeta está PREPARADA.

e) Escribe el comando clear en el registro de comandos (Limpia el error).

g) Pregunta si se va a trabajar en modo bipolar o unipolar.

h) Pregunta si se va a trabajar con los canales en forma referencial

(Single-ended) o diferencial.

- i) Se asigna el valor de la ganancia.
- j) Asigna valores a las variables correspondientes a primer y último canal. Comprueba que sus valores estén dentro del rango permitido y que el primer canal no sea mayor que el último (el primer canal debe ser el cero).
- k) Asigna el número de conversiones a realizar. Si este número fuera menor que el mínimo o mayor que el máximo vuelve al comienzo de la línea. Si el valor está dentro del rango entonces continúa.
- l) Actualiza el conversor A/D. Escribe el byte de ganancia, el byte del primer canal, el byte del último canal y el número de conversiones (Número sin significado) en el registro de datos. Ajusta el ritmo del reloj interno. Escribe en el registro de datos los bytes bajo y alto del registro de datos. Actualiza el contador de DMA.
- m) Asigna el modo DMA para transferencia de datos, limpia el byte flip-flop, asigna el byte de cuenta, la página de memoria y la máscara de canales del DMA.
- n) Pregunta si se quiere un activación por disparo externo o no.
- o) Escribe en el registro de comandos el valor del comando más el valor para que se active el DMA y el valor para que empiece la conversión A/D.
- p) Lee el registro de estado y comprueba si hay error.  
Imprime el mensaje "ADQUISICION FINALIZADA"  
"Grabando en disco. Por favor espere ..."
- q) Define el valor del segmento. Activa la condición de error. Asigna el número de conversiones, así como el primer canal y el último.  
Si no se quiere otra adquisición desactiva la lectura de teclas de cursor, ajusta color, limpia la memoria y sale al sistema, finalizando la ejecución del programa.

El programa actualizado, ya mencionado anteriormente, cumple las siguientes especificaciones:

- 1) Captura y visualización simultáneas del EEG.
- 2) Visualización de EEGs previamente adquiridos.
- 3) Grabación y recuperación de EEGs. Esta se lleva a cabo por medio de ficheros escritos en binario. Por tanto para un registro de 20.48 s. se necesitarán únicamente 64 KB. Esto permite el almacenamiento de 20 registros en un disco flexibles de 1.2 MB.

4) Mantenimiento de datos asociados al EEG (Nombre, edad, fecha, etc...)

Para la presentación gráfica:

a) Se ha elegido la tarjeta gráfica EGA (Enhanced Graphics Adapter) con 256 KB de memoria, lo que permite una resolución de 640x350 pixels (puntos individualmente seleccionables en la pantalla). Para la obtención de una mejor resolución en cada canal se ha permitido el solape entre unos y otros, utilizando colores para distinguir canales vecinos.

b) En cada pantalla se visualizan aproximadamente 6 segundos de registro. Para la presentación completa del EEG (tanto cuando se está capturando como cuando se está visualizando un EEG ya capturado) es necesario disponer de un sistema de desplazamiento de los datos presentados en pantalla. Este ha consistido en producir un desplazamiento cada 8 muestras de datos.

c) La adquisición del EEG se rige por las mismas normas que en el caso anteriormente discutido.

## 1.2 FILTRADO DE LAS SEÑALES EEG

Debido al hecho de que el equipo de amplificación del primer electroencefalógrafo utilizado introducía una componente espuria de 50 Hz en las señales nos vimos en la necesidad de introducir un programa de filtrado (Moreno et al. (1990a)) previo al análisis de señales (cuyo listado se puede ver en el apéndice C).

Los coeficientes del filtro digital IIR no causal correspondiente fueron obtenidos por medio de las herramientas de procesamiento de señales del paquete de MATLAB y están dados por:

$$y(n) = -0.8784 y(n-1) + 0.9103 x(n) + 0.9086 x(n-1) \\ + 0.0003 x(n-2) - 0.0003 x(n-3)$$

Donde  $x(n)$  representa el valor de la señal e  $y(n)$  el valor de la señal filtrada en el instante  $nT$ . La respuesta del filtro con estos coeficientes nos permite eliminar una banda muy estrecha de frecuencias alrededor de los 50 Hz como se puede observar en las figuras 1 y 2.

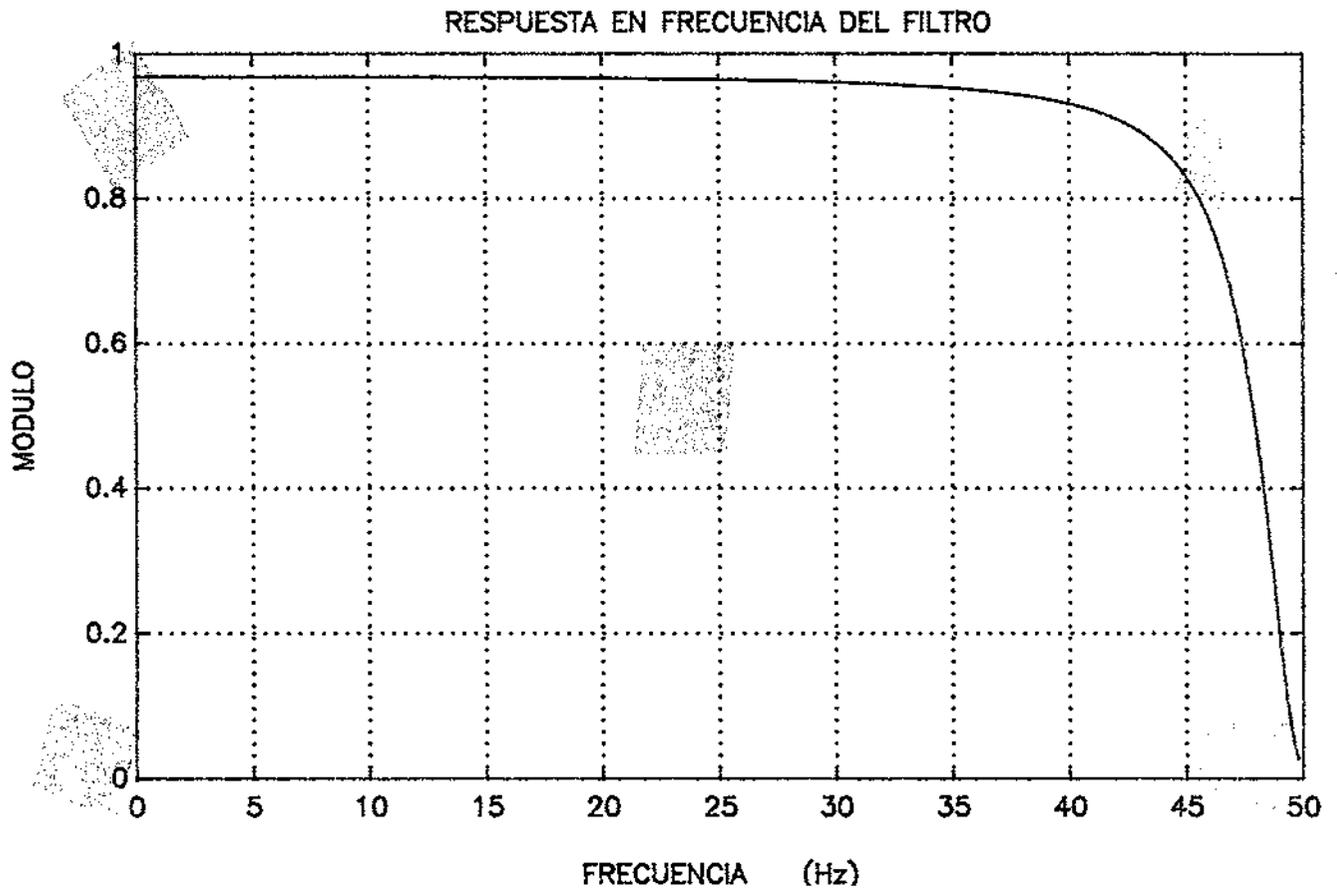


Fig. 1 Respuesta en Amplitud del filtro diseñado.

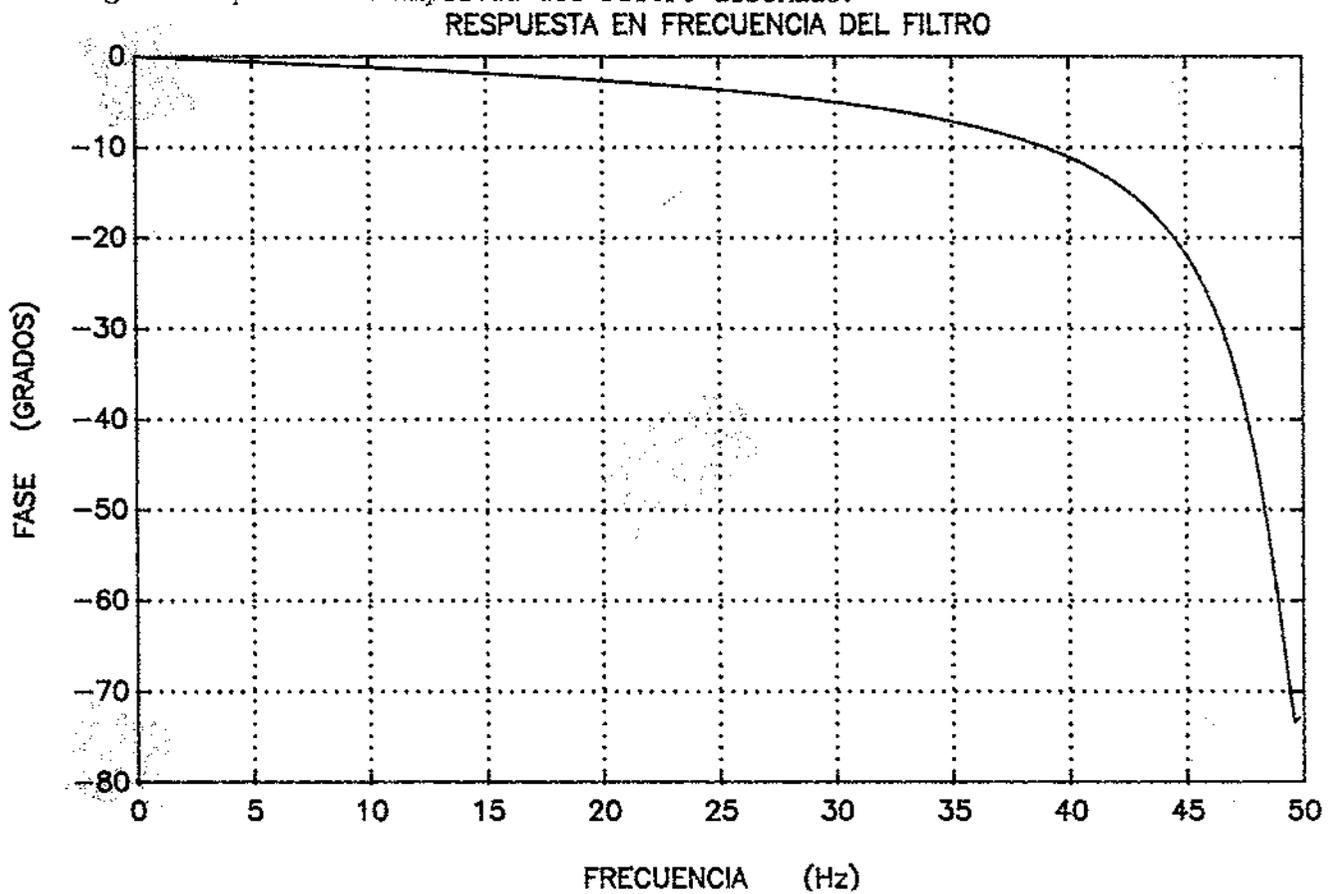


Fig. 2 Respuesta en fase del filtro diseñado.

La primera nos muestra la respuesta en frecuencia del módulo del filtro. Como se ve, la zona pasabanda es bastante plana no comenzando la caída brusca hasta los 40 Hz. Por lo que se refiere a la fase esta se modifica ligeramente en la zona pasabanda no llegando a variar en más de 10 grados entre 0 y 40 Hz. A partir de los 40 Hz se observa un cambio importante en la fase que llega casi a -80 grados en solo 10 Hz. Esto permite que pasen todas las frecuencias de interés médico sin apenas sufrir modificación.

El programa de filtrado genera un nuevo conjunto de ficheros en modo ASCII con los valores filtrados de la señal de los 16 canales. El nuevo electroencefalógrafo no introduce esta componente espuria, por lo que no es necesario llevar a cabo el filtrado con los datos tomados en el mismo.

Además hemos tenido que filtrar la banda subdelta (0-1.5 Hz), porque proviene de artefactos que no son de interés médico. Se hicieron intentos de definir un filtro adecuado para esta banda, como se hizo para la anterior; tanto por medio de filtros FIR como IIR. Este desarrollo se llevó a cabo sobre MATLAB, aprovechando la facilidad para el diseño de filtros. Sin embargo, debido al requerimiento de una zona de transición muy corta en frecuencias (de forma que la banda delta se viera poco modificada) se obtenían filtros con órdenes muy altos, lo que da lugar a un excesivo tiempo de cálculo para el filtrado de cada uno de los ficheros. Puesto que el único interés del filtrado se centra en la consideración de la potencia en cada banda de frecuencia (ya que no se precisa la señal filtrada en el dominio del tiempo) se recurrió a no considerar la potencia de dicha banda en la potencia total.

## 2 MÉTODOS UTILIZADOS PARA CALCULAR LA DPE

Para el análisis espectral de señales se han usado tanto los métodos paramétricos (AR) como los no-paramétricos (FFT) (Moreno et al. (1990b)). Para la implementación final en el programa nos hemos decidido por la FFT debido a las siguientes razones.

a) El método AR requiere grandes cantidades de memoria y tiempo de CPU si se quieren analizar segmentos grandes de señal. Los coeficientes del modelo (I.134) son calculados por medio del método de la covarianza de predicción lineal. El método de la covarianza corresponde al caso que no utiliza ventana para los datos, ya que se usan únicamente las muestras disponibles para un método de predicción lineal por mínimos cuadrados (como ya se ha visto en el apartado I.5.3.7.c). El consumo de tiempo y memoria es debido a que para calcular los coeficientes del modelo hay que construir una matriz de Toeplitz con tantas columnas como datos y tantas filas como orden del modelo, que al ser multiplicada por el vector de los coeficientes produce el error cometido en la predicción. Para poder despejar el valor de estos coeficientes es necesario invertir esta matriz. En nuestro caso se llegó a utilizar matrices  $80 \times 512$  (40960 elementos). Teniendo en cuenta que se trata de números en doble precisión (8 bytes) ocupan 320 KB.

b) Los polos asignados por el método no tienen por qué coincidir con los reales del sistema ya que se utiliza un método de mínimos cuadrados para conseguir el mejor ajuste.

c) Una vez que se han calculado los coeficientes hay que volver a hacer cálculos para obtener la Densidad de Potencia Espectral. Esta viene dada por la ecuación I.203.

d) Con señales tan complicadas como las que utilizamos el orden del modelo puede ser prohibitivamente alto en tiempo de cálculo (un orden 50 para 500 puntos) y en cuanto a la reducción de la información necesaria. Hablamos en este punto de que las señales son complicadas. Con ello lo que queremos dar a entender es que en ellas no existe una periodicidad marcadamente definida que permita describirlas con un modelo de orden bajo. Cuando existe esta periodicidad, normalmente se produce durante tiempos no excesivamente prolongados (del orden de 1 ó 2 segundos) y se combina con periodos intermedios en los que las frecuencias que intervienen, y las amplitudes suelen cambiar. De esta forma, es necesario aumentar el orden del modelo para poder describir a la señal.

e) El modelo AR suele ser utilizado fundamentalmente para el análisis de

potenciales evocados o para segmentos cortos de la señal EEG (Franaszuck (1985), Burillo y del Pozo (1983), Jansen et al. (1981), Kwok and Leung (1980)), pero no para segmentos relativamente largos.

## 2.1 SELECCIÓN DEL ORDEN DEL MODELO

La selección del orden del modelo se llevó a cabo estudiando los siguientes criterios:

- 1) Error de Predicción Final (EPF)
- 2) Criterio de Información de Akaike (CIA)
- 3) Longitud de Descripción Mínima (LDM)
- 4) El error cuadrático

en un rango amplio de órdenes (10-80 para una longitud de 500 muestras y 10-50 para 250).

Como ejemplo vamos a ver lo que sucede al comparar la Densidad de Potencia Espectral calculada a partir del modelo con distintos ordenes y la calculada a partir de la FFT, así como con los distintos criterios para seleccionar el orden del modelo.

En la figura 3 puede verse la D.P.E calculada a partir de un modelo de orden 20 y a partir de la FFT. Este segmento de registro corresponde a una niña de 5 años de edad y al estar fuertemente artefactado contiene gran cantidad de componentes de baja frecuencia. Con este orden la DPE calculada a partir del modelo da cuenta únicamente de una gran cantidad de frecuencias muy bajas (tendiendo a cero) y de un pico en frecuencias de aproximadamente 4 Hz (donde se encuentra la componente más fuerte de la FFT).

En la figura 4 tenemos el mismo caso para un orden 30. La DPE tiene en cuenta no sólo el pico en 4 Hz sino también, aunque con menor importancia, los picos en 9 Hz y 18 Hz.

Al aumentar el orden del modelo a 50, como se puede ver en la figura 5 la DPE logra resolver el pico de bajas frecuencias en dos componentes, una a 2.5 Hz y otra en 4 Hz, y detecta mejor los pequeños picos en 7 Hz, 9 Hz y 18 Hz.

Aumentando el orden hasta 80 (figura 6) no conseguimos ya mejorar la resolución en frecuencias sino aumentar la amplitud de los picos ya existentes.

En la figura 7 puede verse la variación del valor cuadrático del error con el orden del modelo. Este error cuadrático disminuye monótonamente al principio hasta llegar a un orden 48 a partir del cual permanece constante.

En la figura 8 se muestra la evolución del valor del criterio LDM. Este, como ya se vio en el apartado I.5.3.8.b trata de penalizar la excesiva longitud en el orden y por tanto aumenta monótonamente hasta alcanzar el orden 48, momento en el cual se produce un mínimo local, para después continuar su tendencia alcista.

En la figura 9 se observa la evolución del criterio AIC con el orden del modelo. Al principio, el criterio aumenta hasta llegar al orden 16, a partir del cual se mantiene en un valor casi constante hasta llegar al orden 30, donde muestra otra zona de mínimo local. A partir del orden 40 aumenta hasta el 46 y en el orden 48 tiene un nuevo mínimo que se mantiene estable hasta el orden 54. Este mínimo es el mínimo absoluto de la función en el rango representado. Por otra parte, el criterio EPF sigue la misma evolución aunque con valores diferentes como se muestra en la figura 10.

Por tanto, el valor en el que los 4 criterios coinciden en dar un mínimo (el orden 48) es el elegido como orden apropiado del modelo. Esto tiene un gran inconveniente:

1) Por un lado, un orden tan alto requiere una buena capacidad de cálculo y memoria ya que hay que trabajar con matrices  $500 \times 48$  para calcular los parámetros y una vez obtenidos hay que calcular la DPE.

2) Por otro lado, un orden tan alto no contribuye a representar a la señal mediante un conjunto reducido de parámetros, por lo que tampoco se puede aprovechar esta facilidad para la comparación de distintas señales ni para un ahorro sustancioso en el almacenamiento de las mismas.

Para comprender mejor si el motivo de un orden tan alto era un número excesivo de puntos redujimos los mismos a 250 y a continuación se muestran los resultados.

En la figura 11 se muestra la DPE debida a la FFT y la DPE debida al modelo AR. La primera tiene menor complejidad que en el caso de 500 puntos. La DPE obtenida por el modelo da cuenta para un orden 20 únicamente del pico máximo en 4 Hz y de las frecuencias muy bajas.

Para un orden de 30 la DPE da cuenta del hecho de que la potencia está repartida en una banda ancha entre los 2 y los 5 Hz, así como del pico en 10 Hz como nos muestra la figura 12.

Únicamente al aumentar el orden hasta 50 se observa (figura 13) como la zona de bajas frecuencias se desdobra en dos picos, uno entre 4 y 5 Hz y otro sobre 2.5 Hz, el pico de 10 Hz y el de 18 son debidamente detectados.

El comportamiento de los criterios de error son prácticamente idénticos a los de 500 puntos volviéndose a obtener el mínimo en el orden 48 como se

puede observar en las figuras 14, 15, 16 y 17.

Así pues una reducción del número de puntos a la mitad no ha reducido el orden del modelo lo que hace más desfavorable la elección del modelo AR para representar este tipo de señales.

En este punto se podría argumentar la no bondad de la señal para ser tratada por este tipo de métodos. Por ello decidimos utilizar dos señales, representativas de dos grupos de edad diferente. Por un lado, la de un niño de 6 años y por otro la de uno de 9 años. Comenzaremos en primer lugar con el niño de 6 años. Esta puede considerarse una señal típica en un niño de esta edad y no tiene artefactos. Su DPE es bastante compleja como puede verse a partir de la FFT y tiene una gran cantidad de componentes de baja frecuencia (0-5 Hz). Vamos a analizar lo que sucede al ir aumentando el orden desde 2 hasta 50.

En las figuras 18 a 26 se puede observar como:

- a) Para órdenes muy bajos la frecuencia del pico no coincide con el de la FFT.
- b) Para un orden 8 la posición del pico coincide por ambos métodos.
- c) Se necesita un orden 50 para realzar de la forma adecuada aquellas componentes distintas de las del pico principal.

En cuanto al niño de 9 años se pasa a describir a continuación. El registro es bastante sinusoidal (27 a 35).

- a) Para órdenes muy bajos la frecuencia del pico no coincide con el de la FFT.
- b) Para un orden 6 la posición del pico de la D.P.E. AR coincide con el pico secundario en el método FFT.
- c) La coincidencia del pico obtenido por el método AR con el principal de la FFT se obtiene para un orden 20.
- c) Se necesita un orden 50 para realzar de la forma adecuada aquellas componentes distintas de las del pico principal.

El software usado para los cálculos fue desarrollado en los lenguajes C y PASCAL en una estación de trabajo HP-9000/340. Los datos utilizados fueron transferidos desde un PC\_AT usando el programa Advancelink. Posteriormente se usó también el MATLAB en su versión para dicha estación de trabajo. Los programas utilizados para estudiar los modelos AR (cuyos listados se encuentran en el apéndice D son:

- 1) Programa Mincua7.p

Dicho programa es el más importante, puesto que es el que obtiene los

coeficientes del modelo AR a partir de la ecuación (método de la covarianza).

$$X'X C = X'Y$$

donde C es el vector de los coeficientes, Y el vector de datos y X la matriz de Toeplitz formada a partir de los mismos.

El flujo del programa es el siguiente:

- a) Lectura del fichero de datos y almacenamiento de los mismos en un vector  $y[i,1]$ .
- b) Genera una matriz de Toeplitz a partir de los datos
- c) Lleva a cabo las operaciones:

$$C = (X'X)^{-1} (X'Y)$$

- d) Escribe en fichero los valores de los coeficientes.

## 2) Programa Predice.c

Este programa lee el fichero de coeficientes y el fichero de datos y a partir de ambos obtiene la señal predicha por el modelo AR en el dominio temporal y el error cometido. El resultado es almacenado en un fichero.

## 3) Programa Estimad.p

A partir del error cometido en la predicción calcula:

- a) El error cuadrático.
- b) El valor del criterio EPF.
- c) El valor del criterio CIA.
- d) El valor del criterio LDM.

## 4) Programa Convt2b.p

Convierte ficheros de texto ASCII en binarios.

D. P. E. FFT frente a modelo AR de orden 20

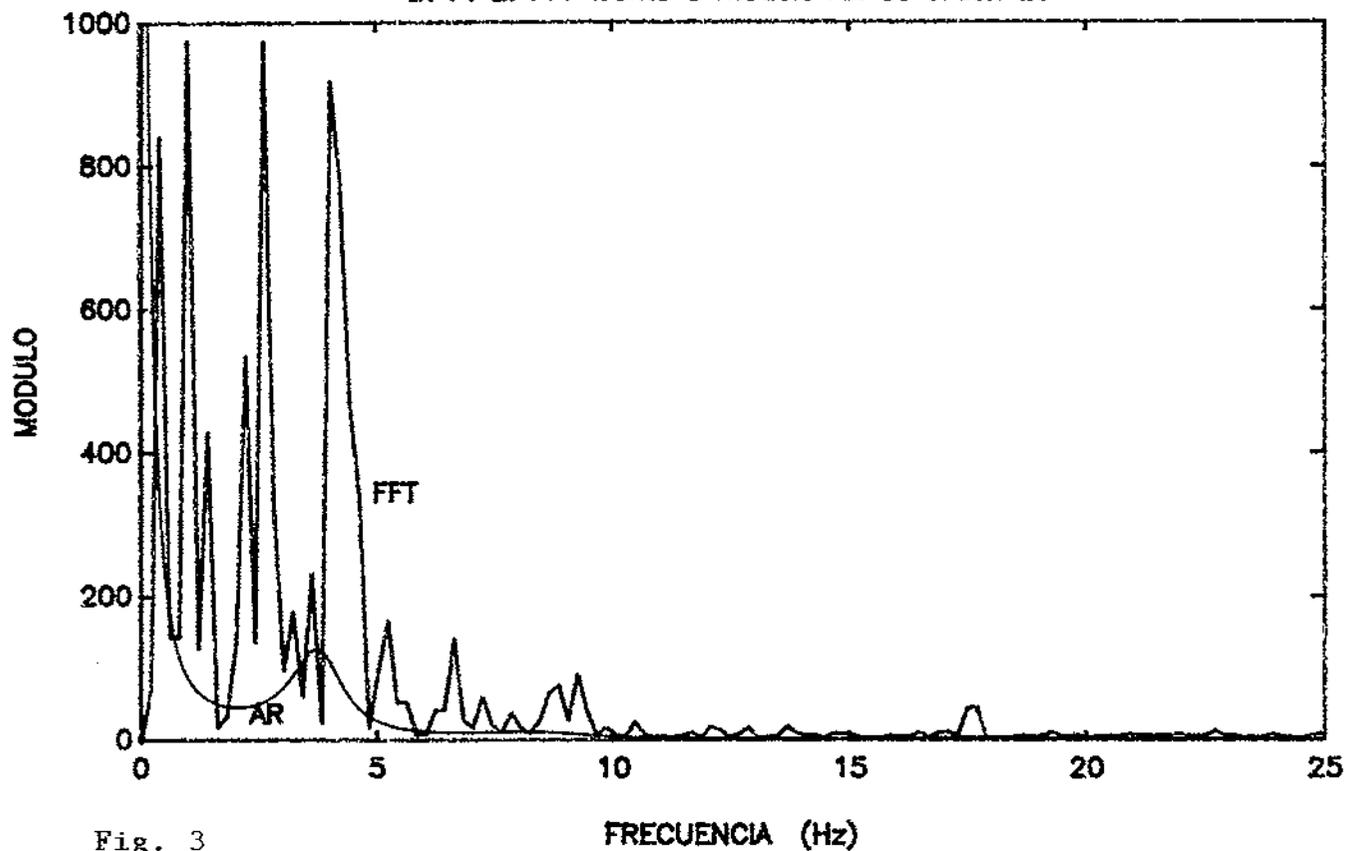


Fig. 3

D. P. E. FFT frente a modelo AR de orden 30

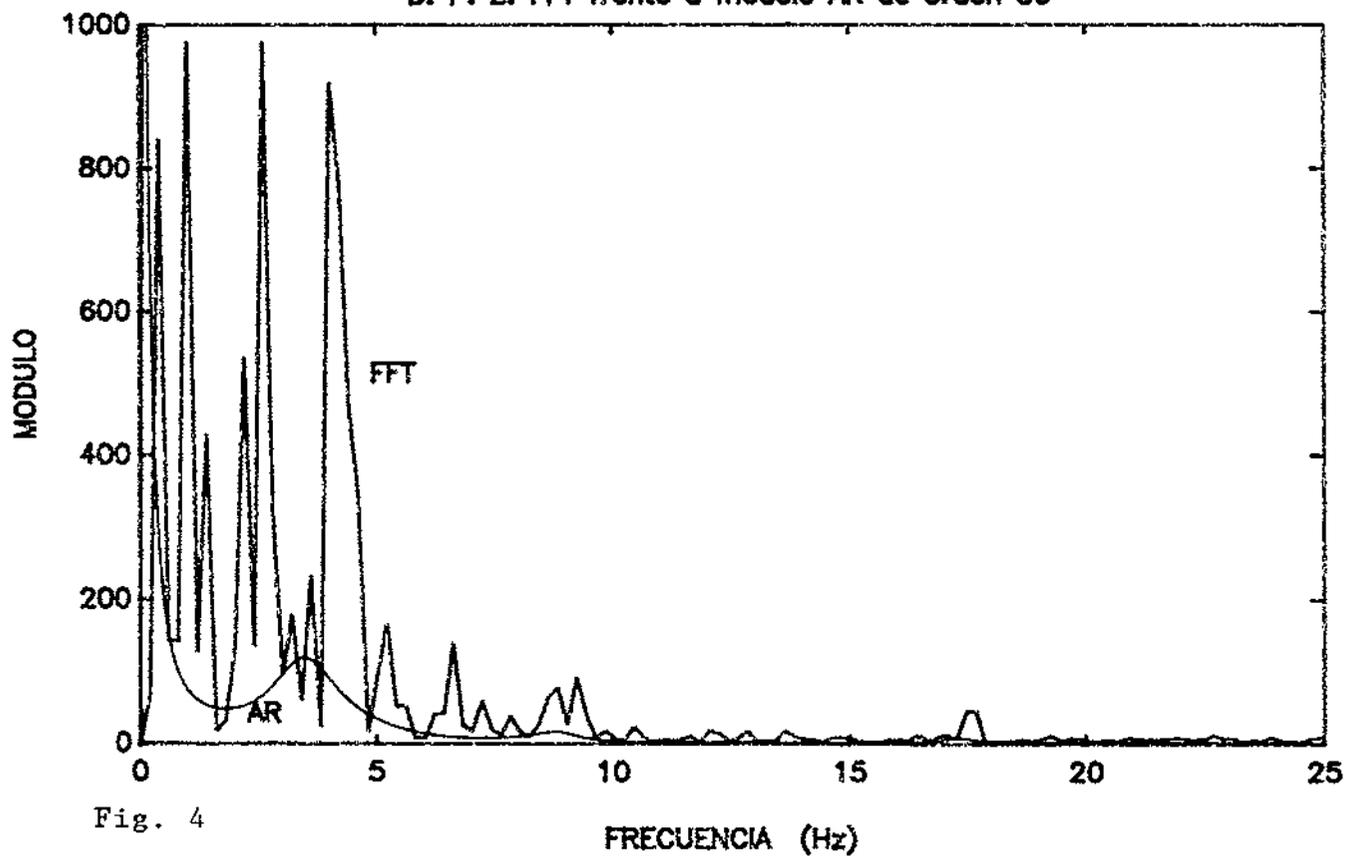
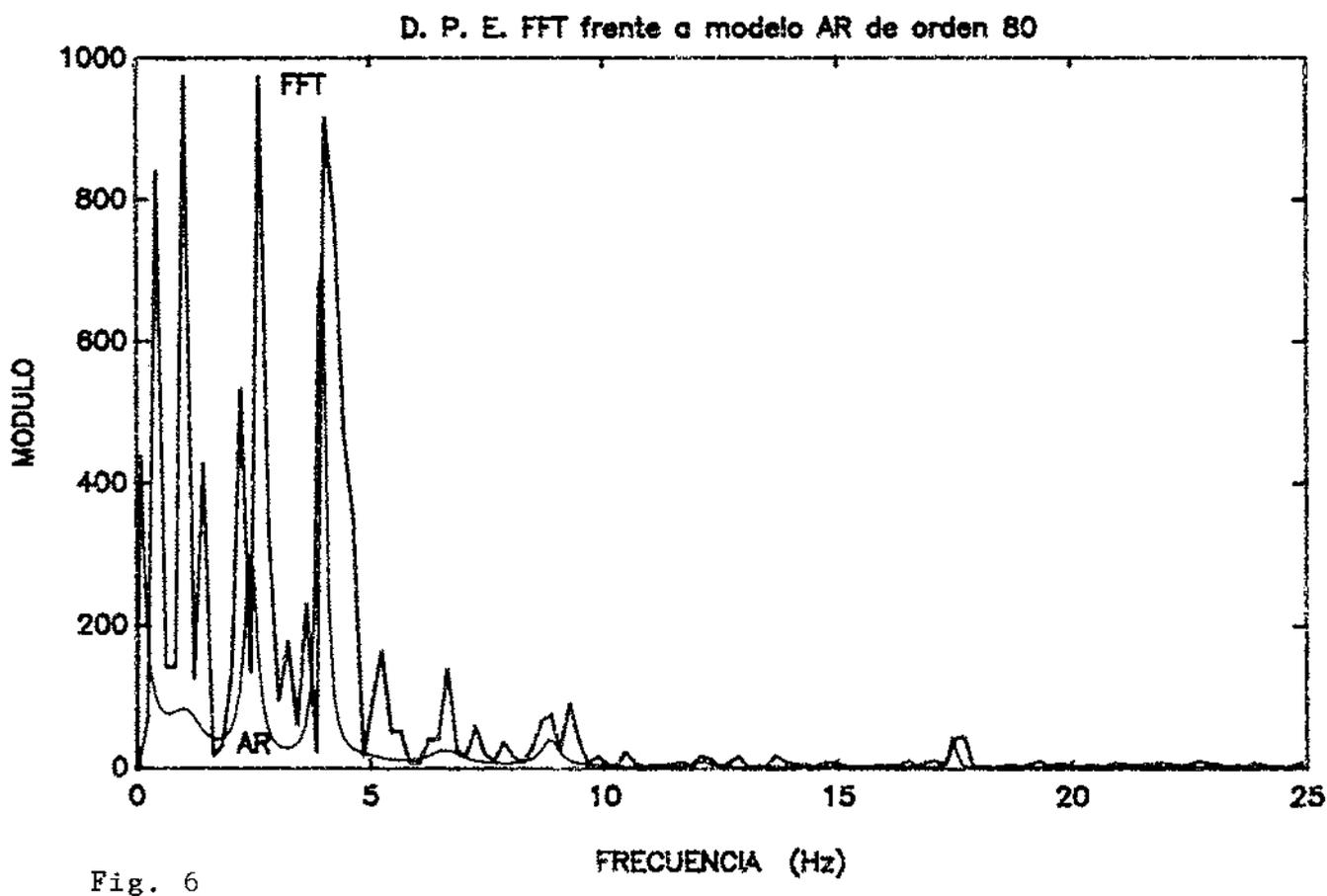
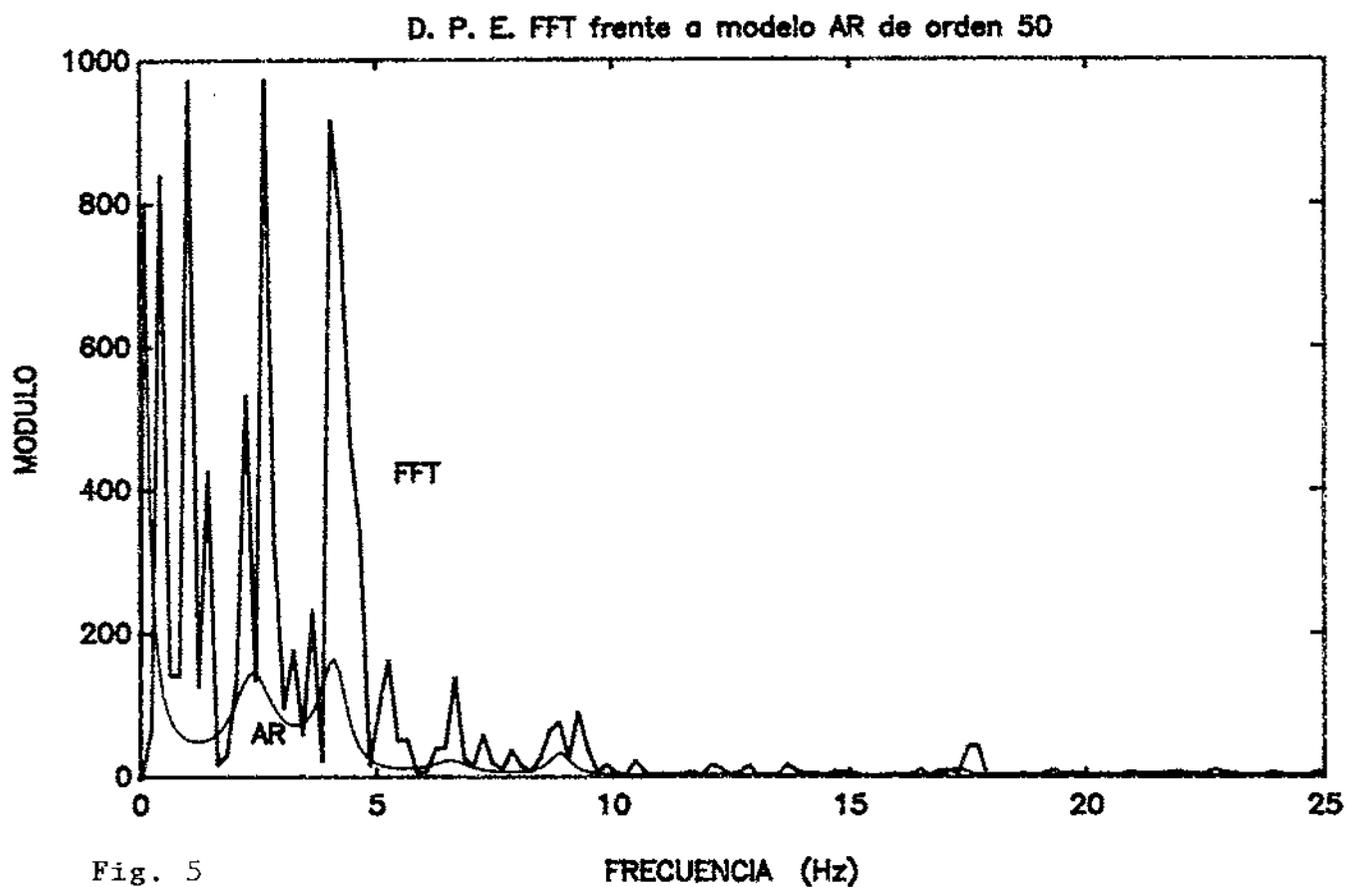


Fig. 4



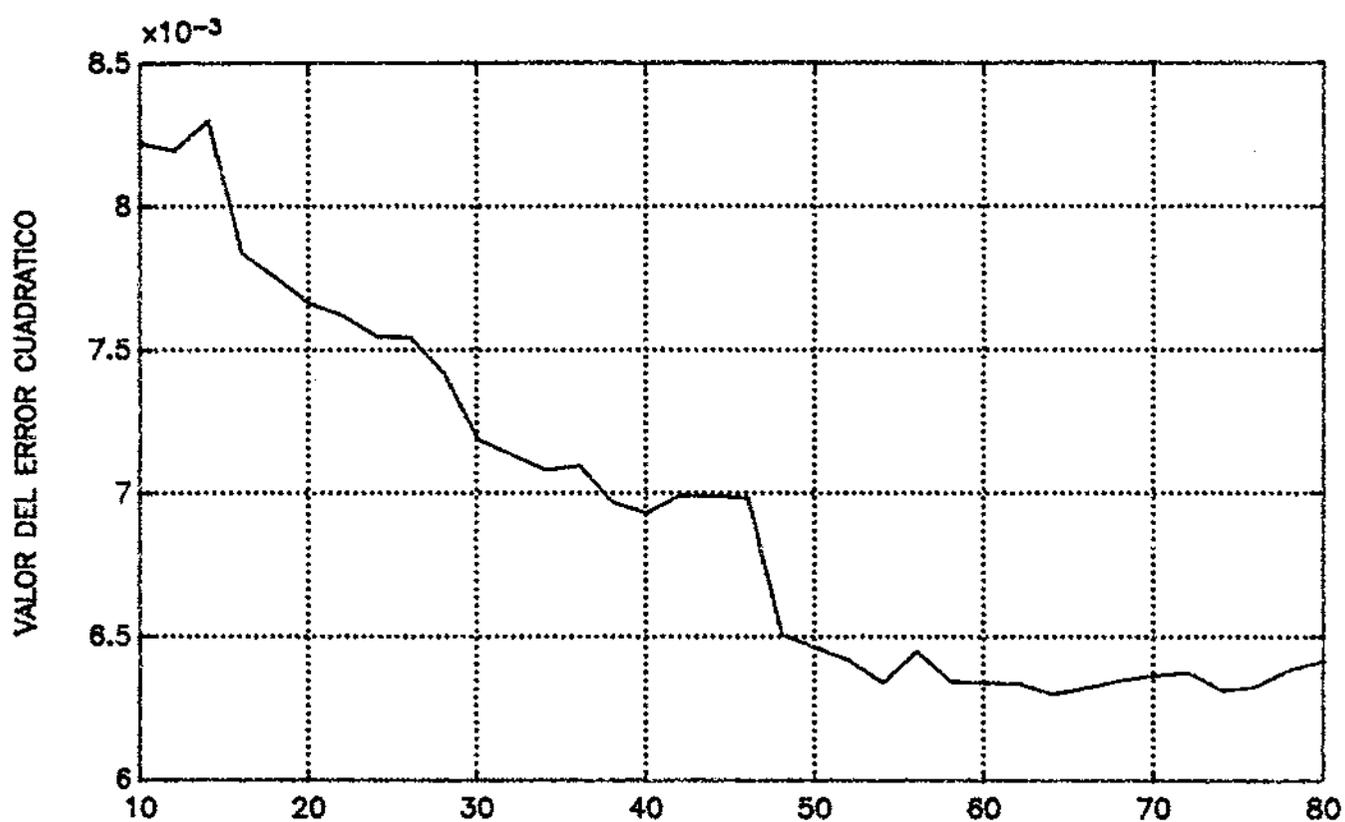


Fig. 7

ORDEN DEL MODELO AR

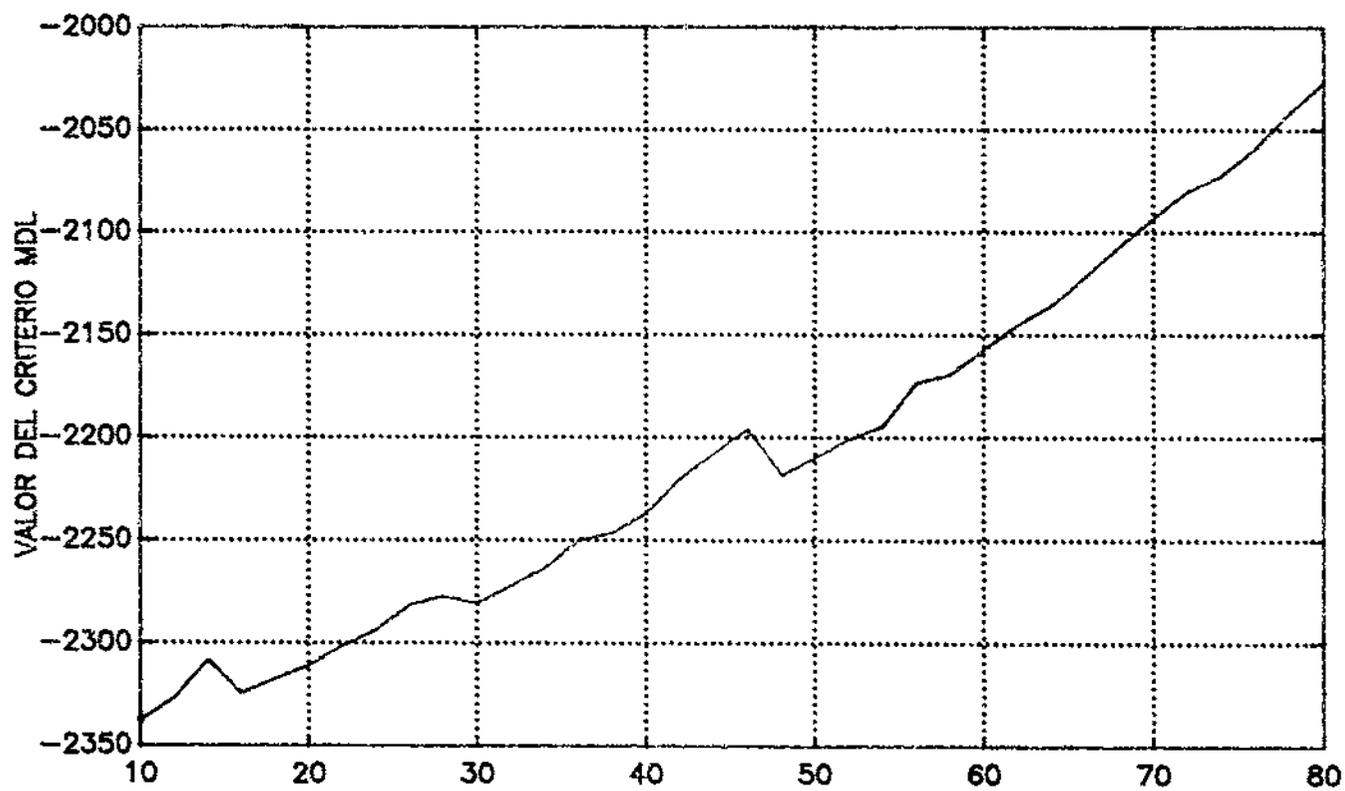


Fig. 8

ORDEN DEL MODELO AR

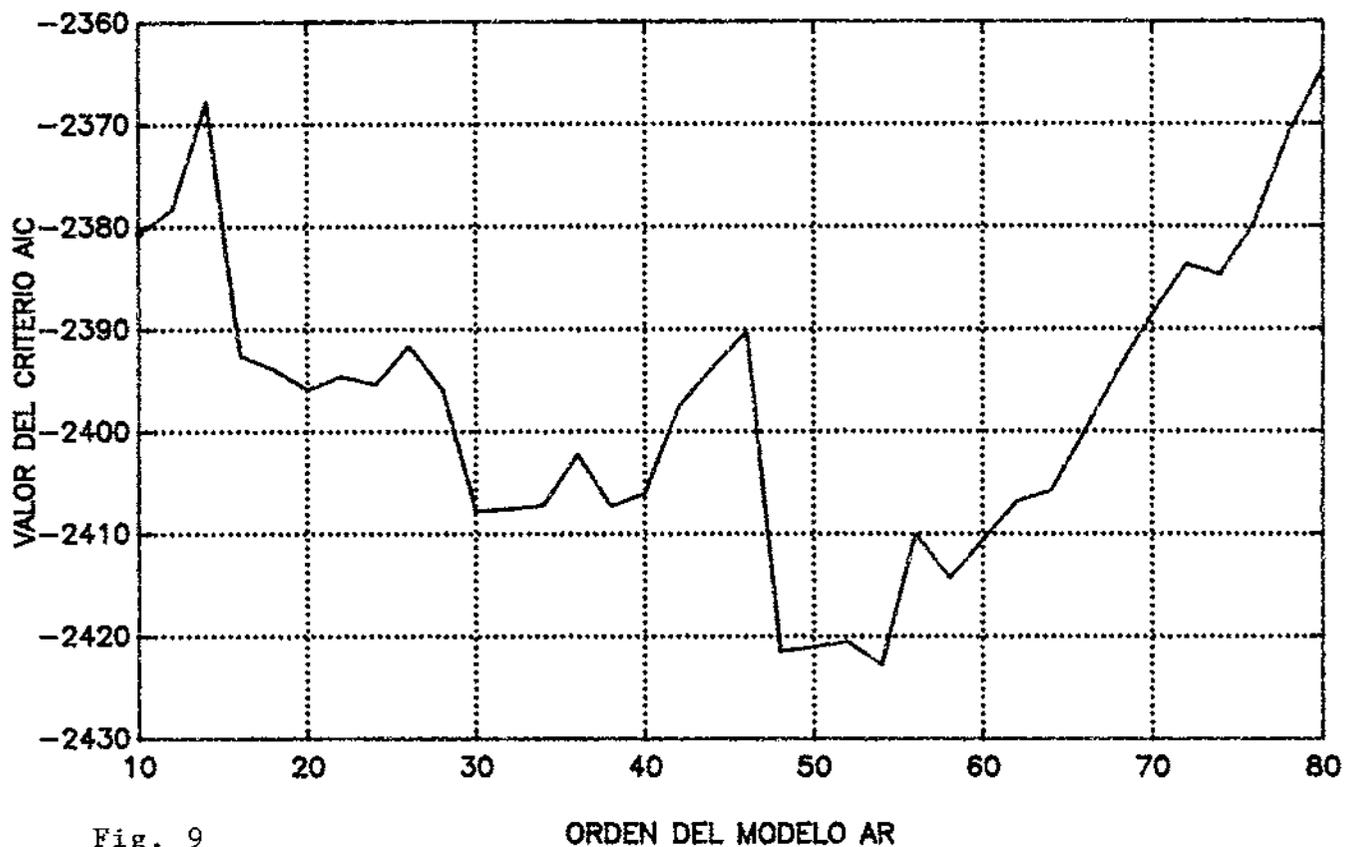


Fig. 9

ORDEN DEL MODELO AR

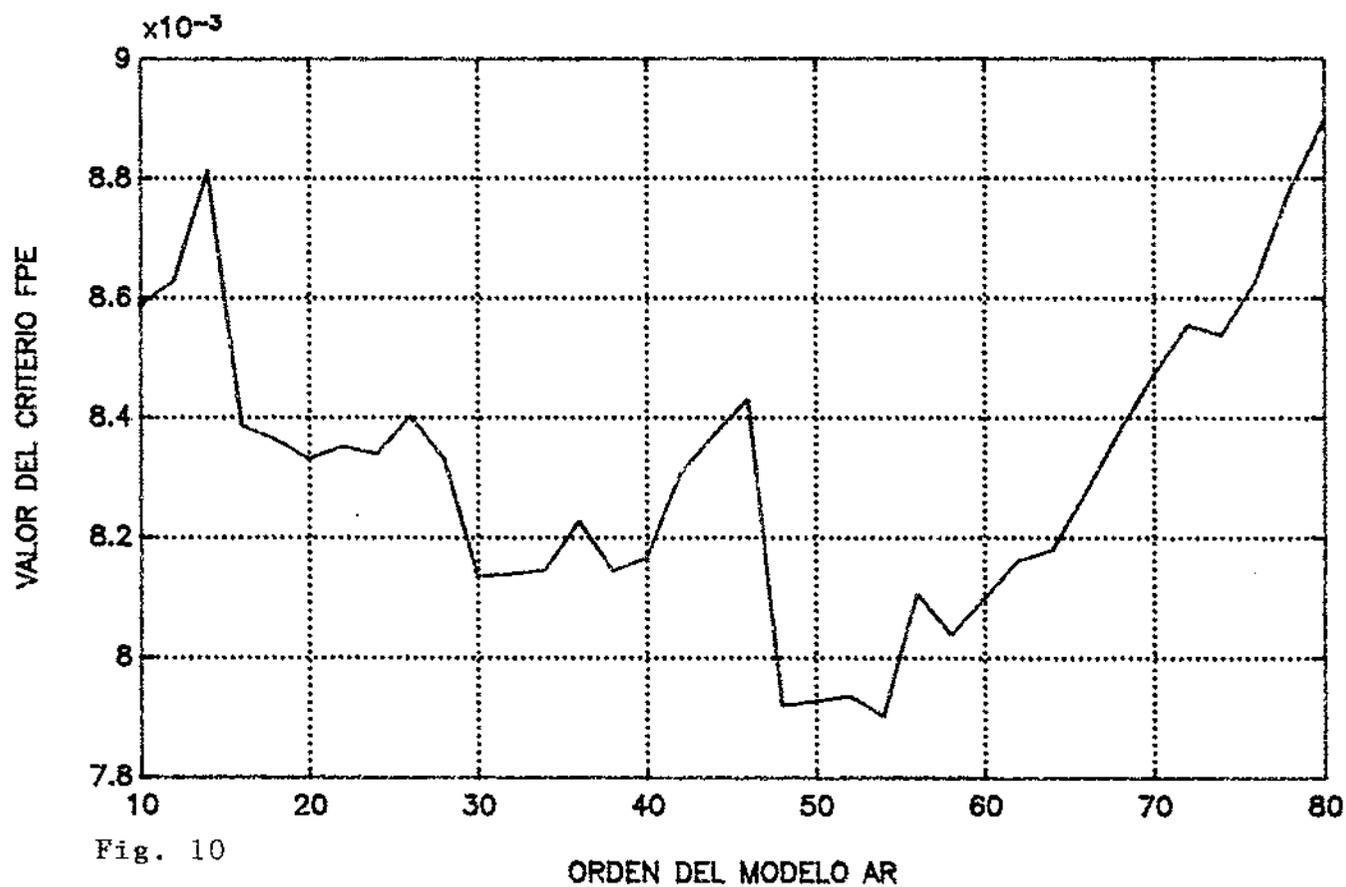
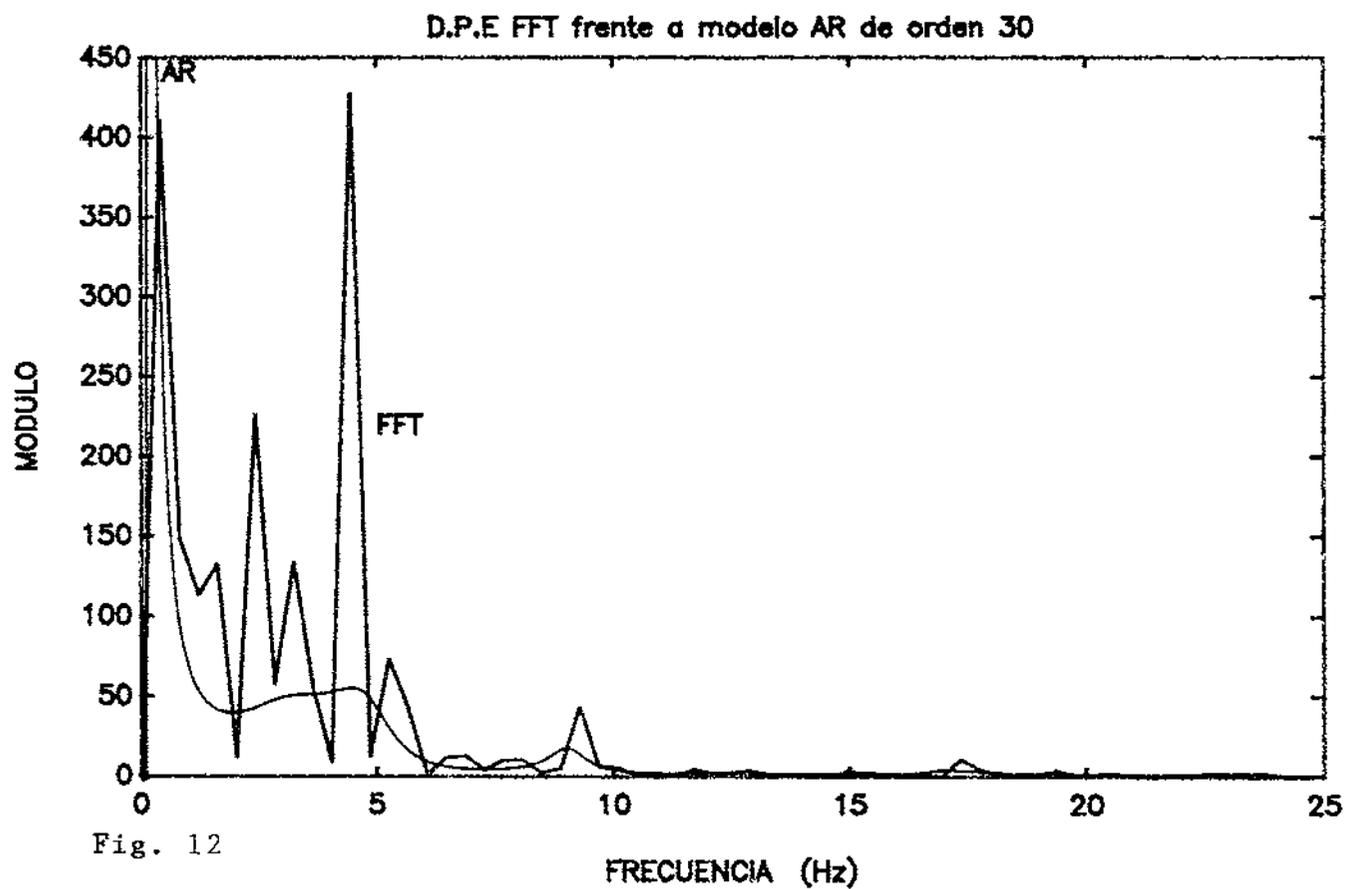
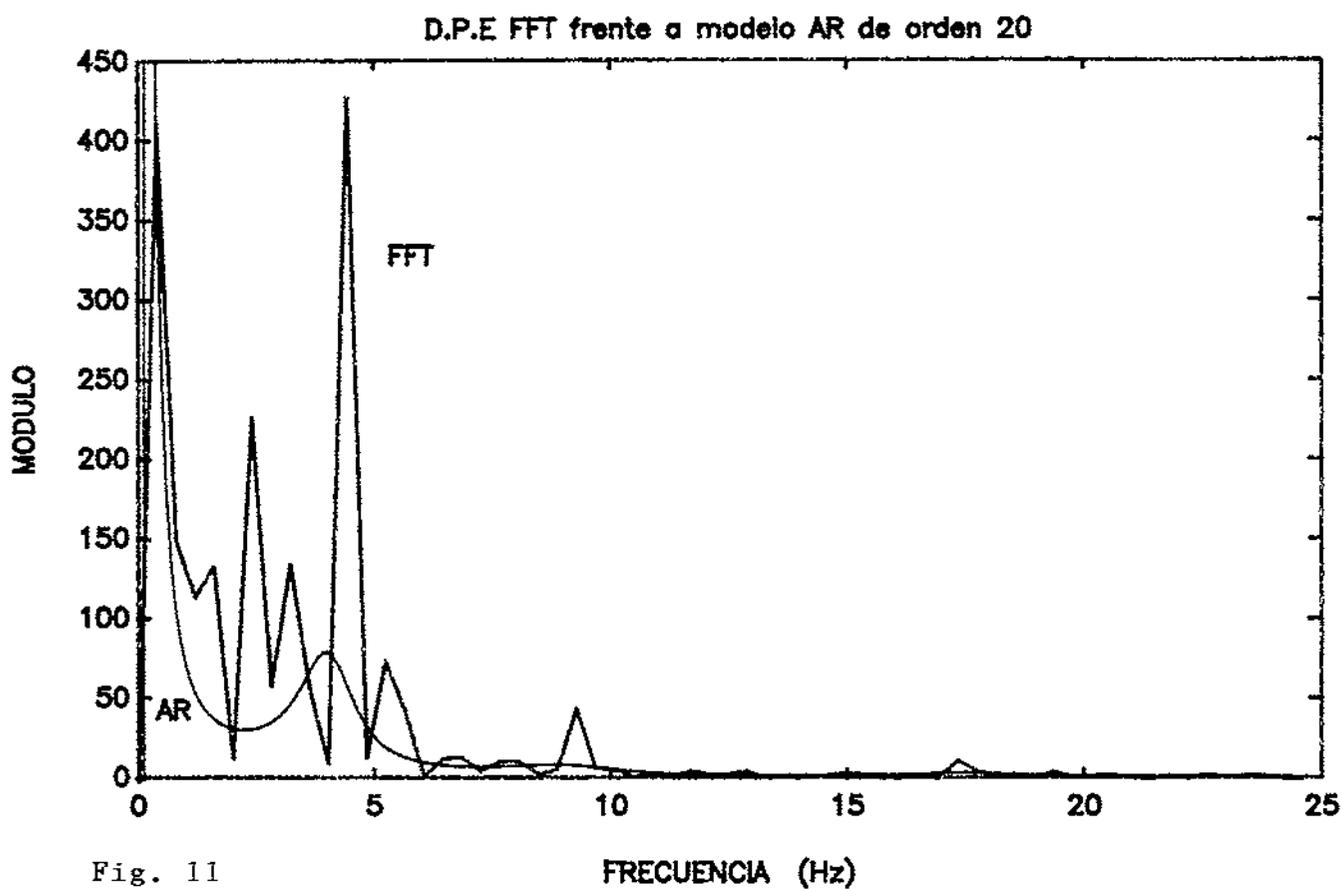


Fig. 10

ORDEN DEL MODELO AR



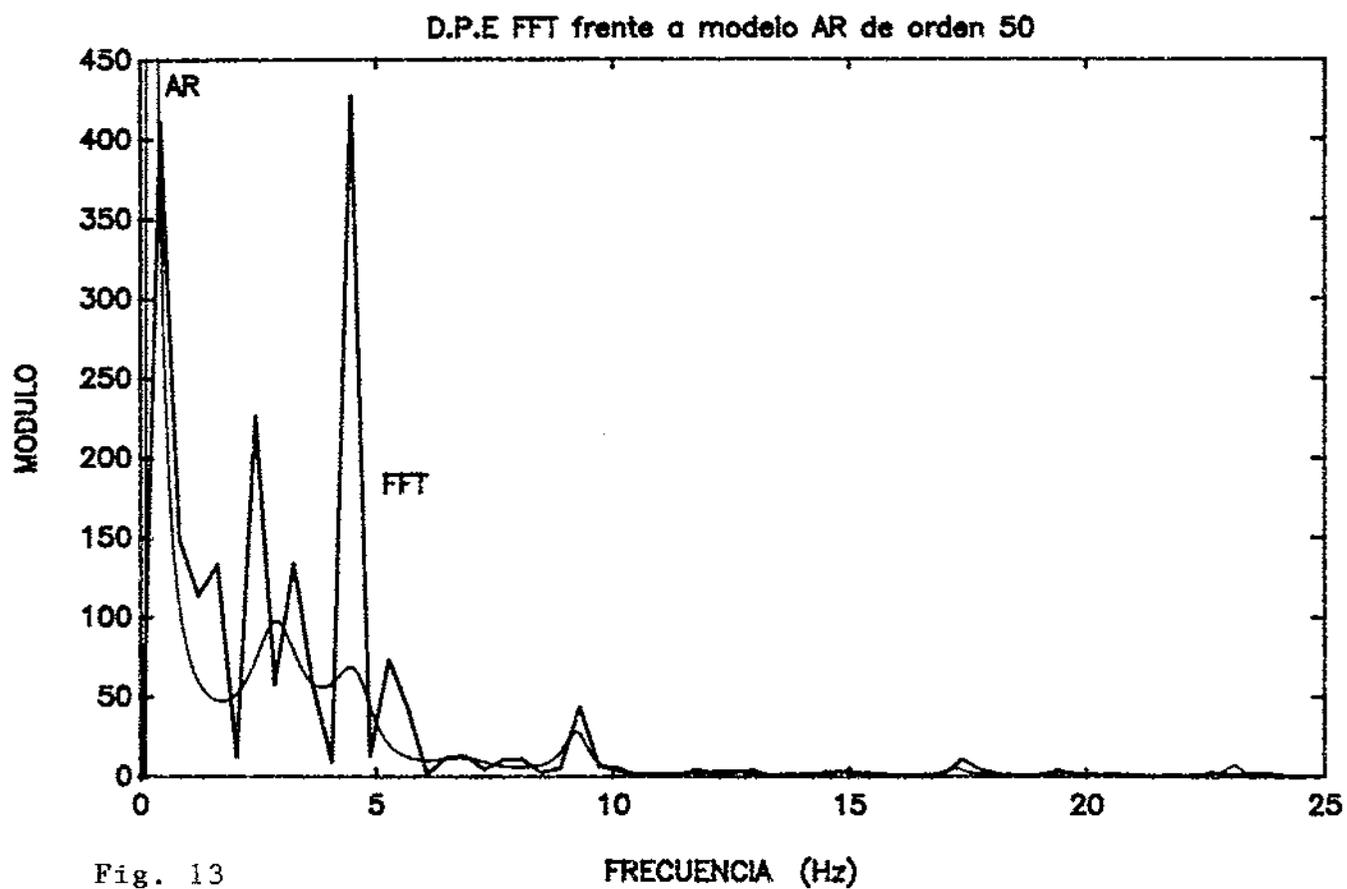
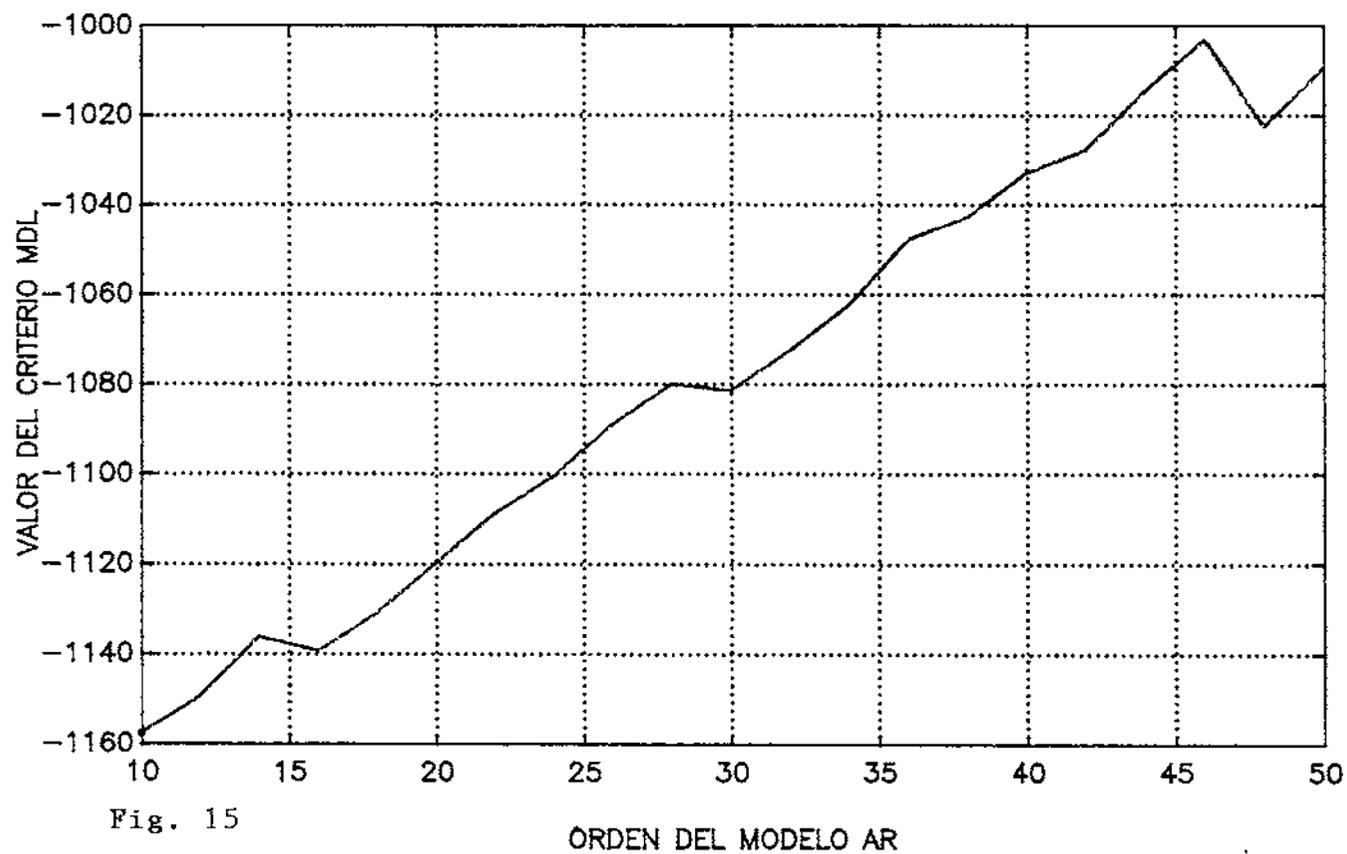
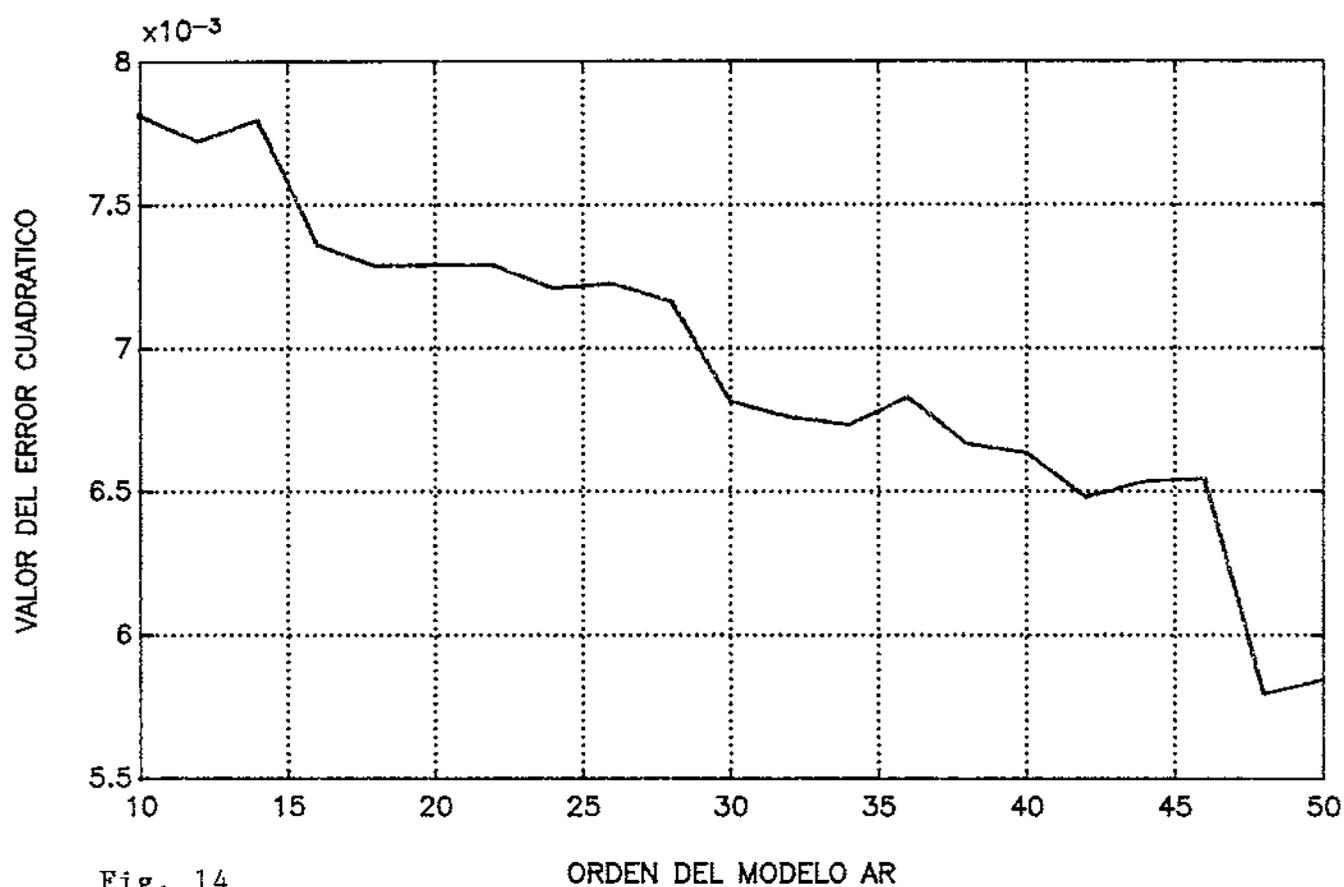
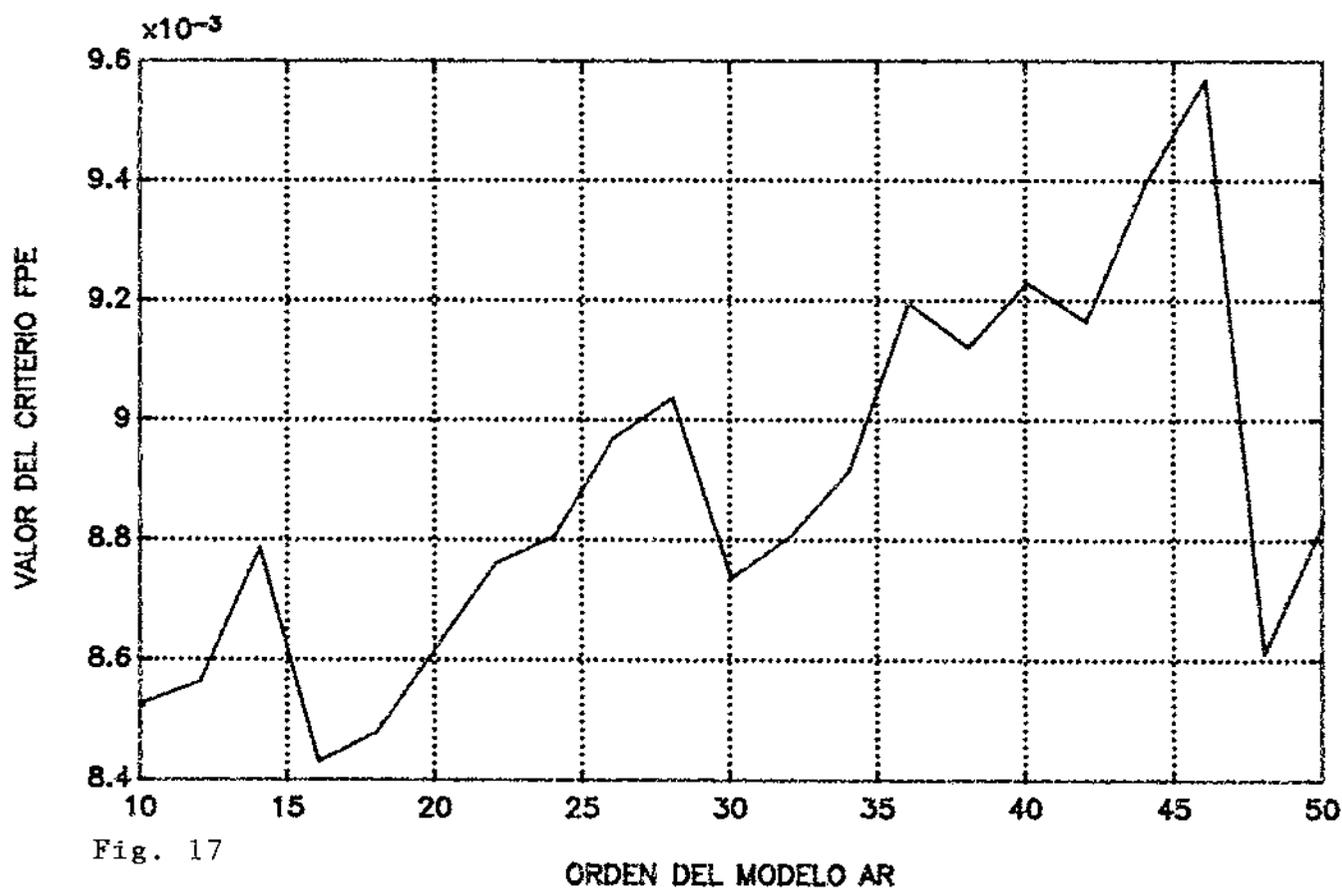
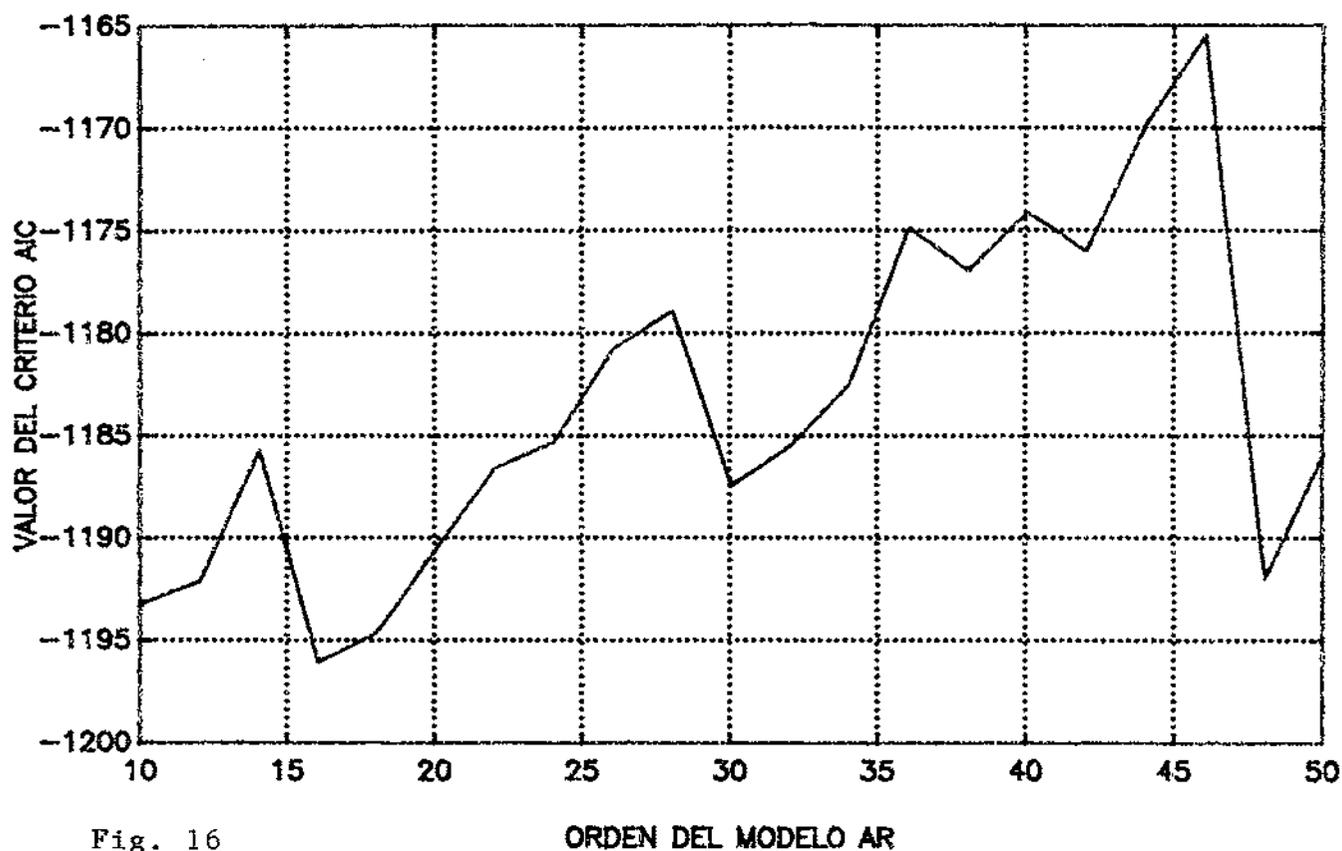
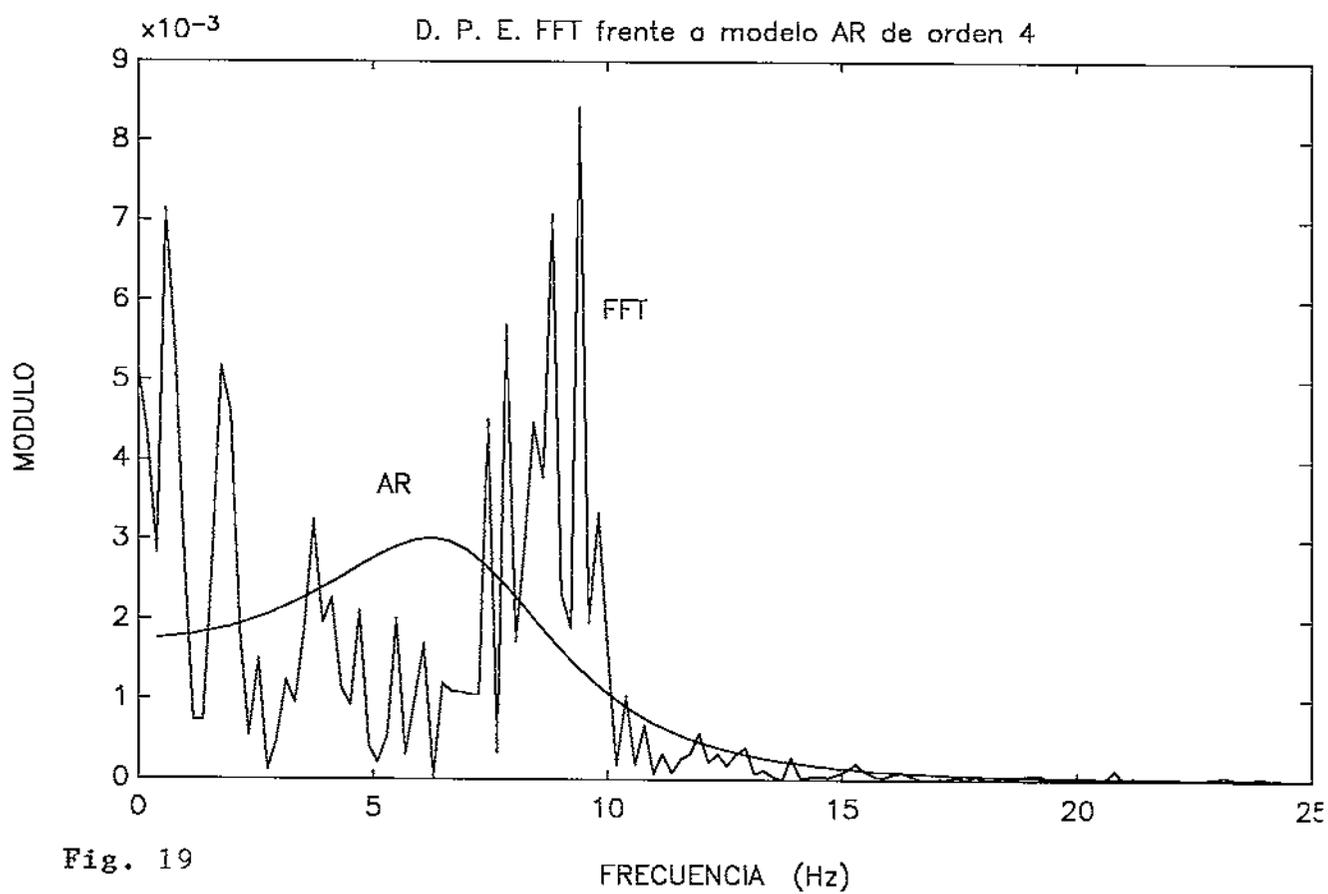
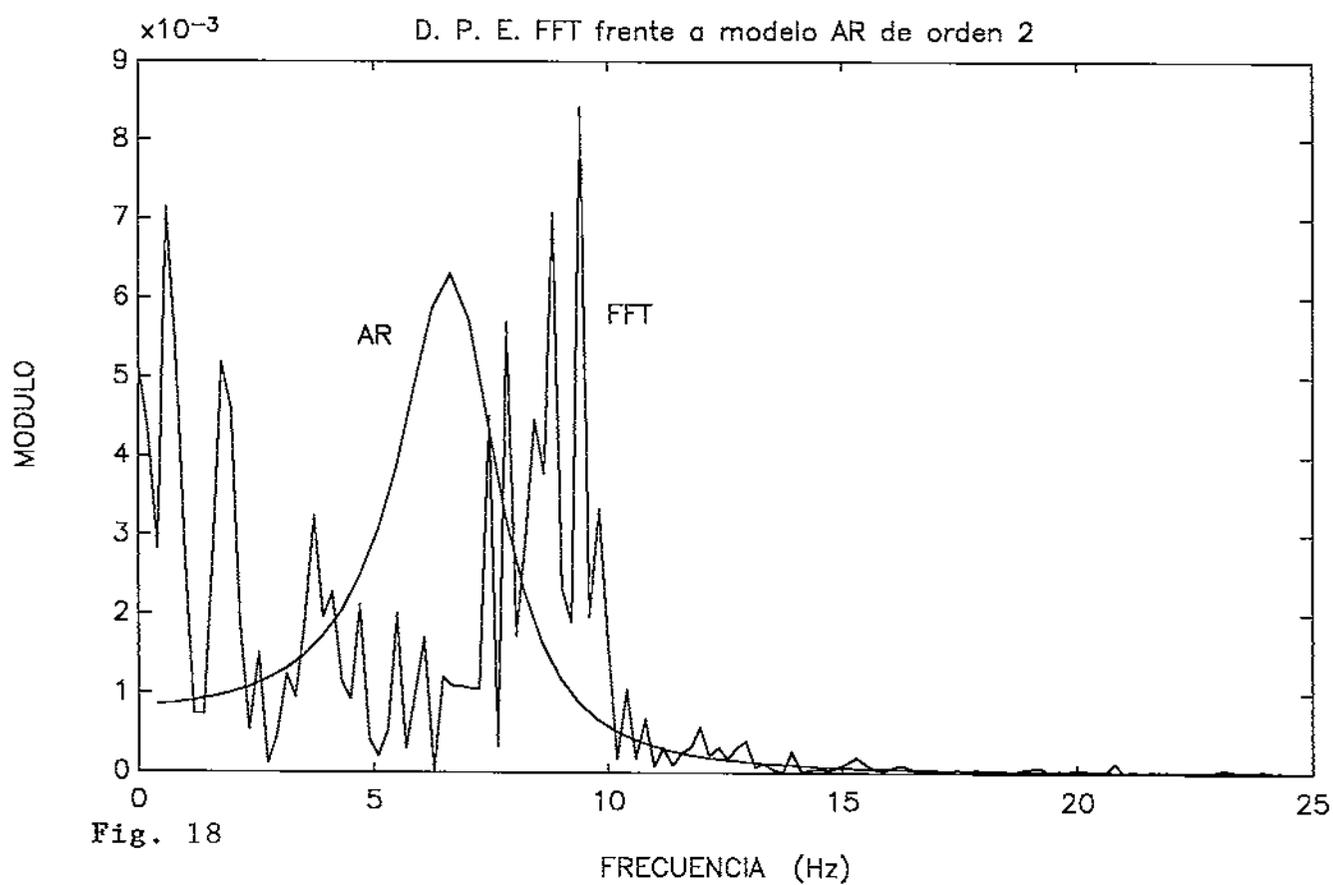


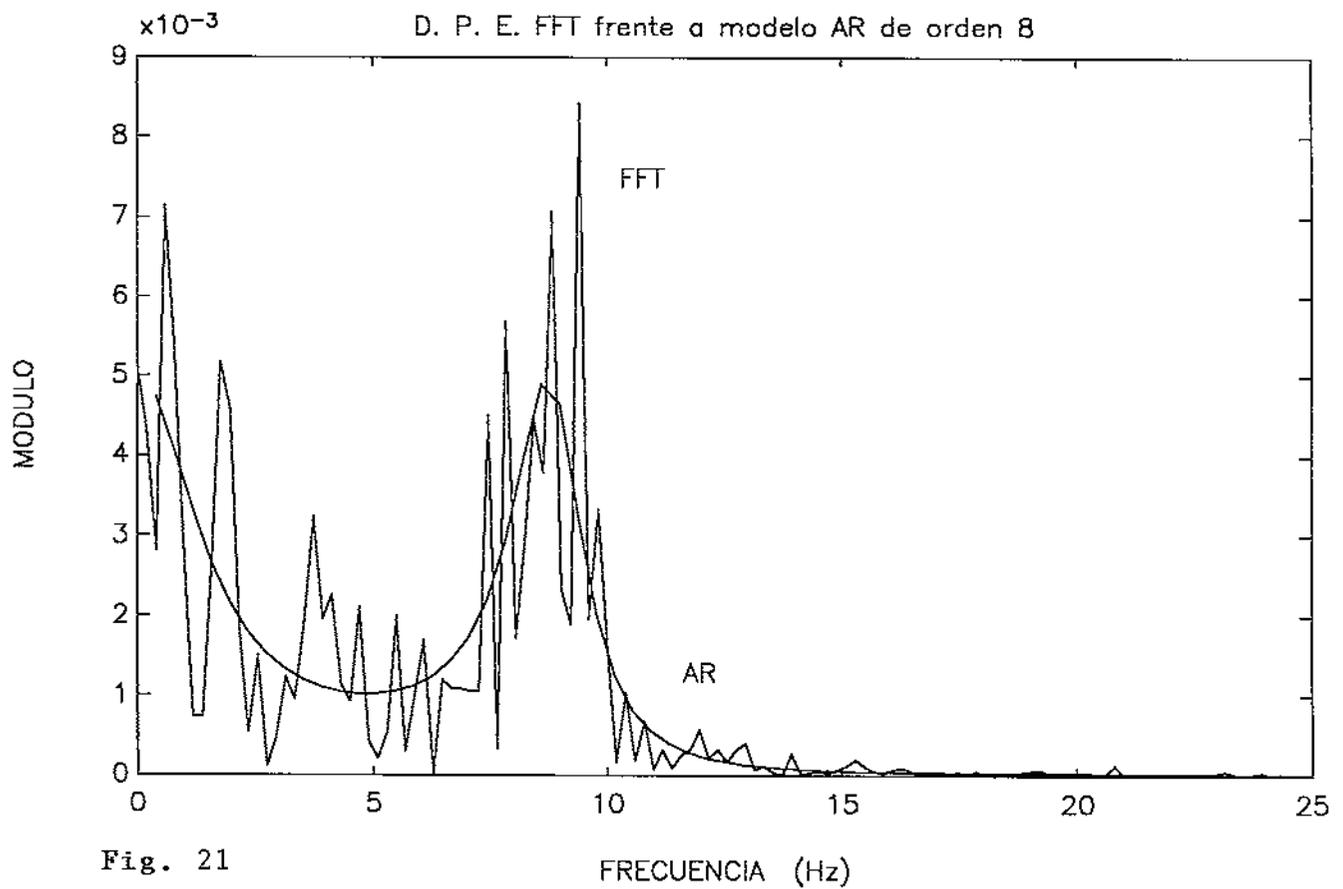
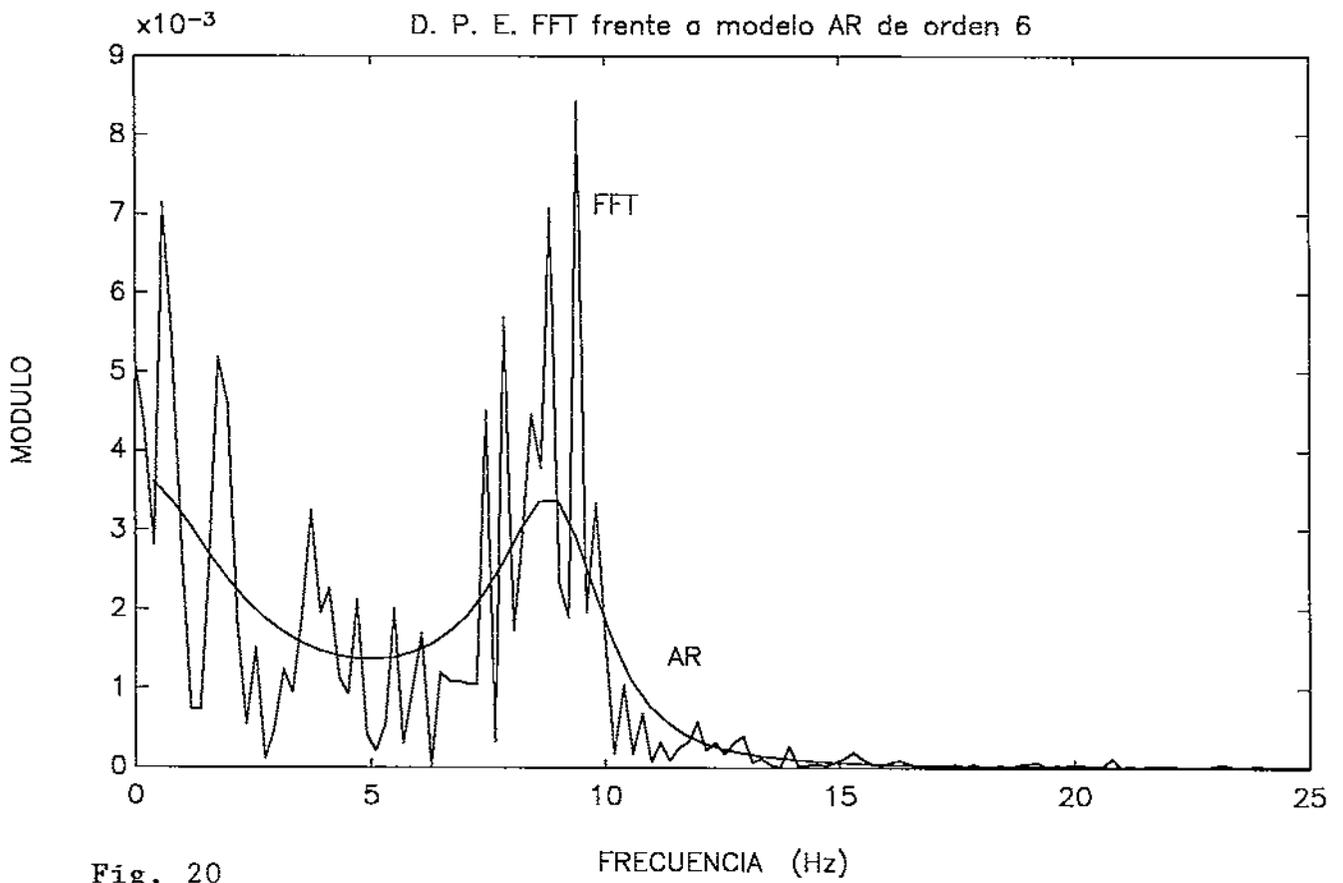
Fig. 13

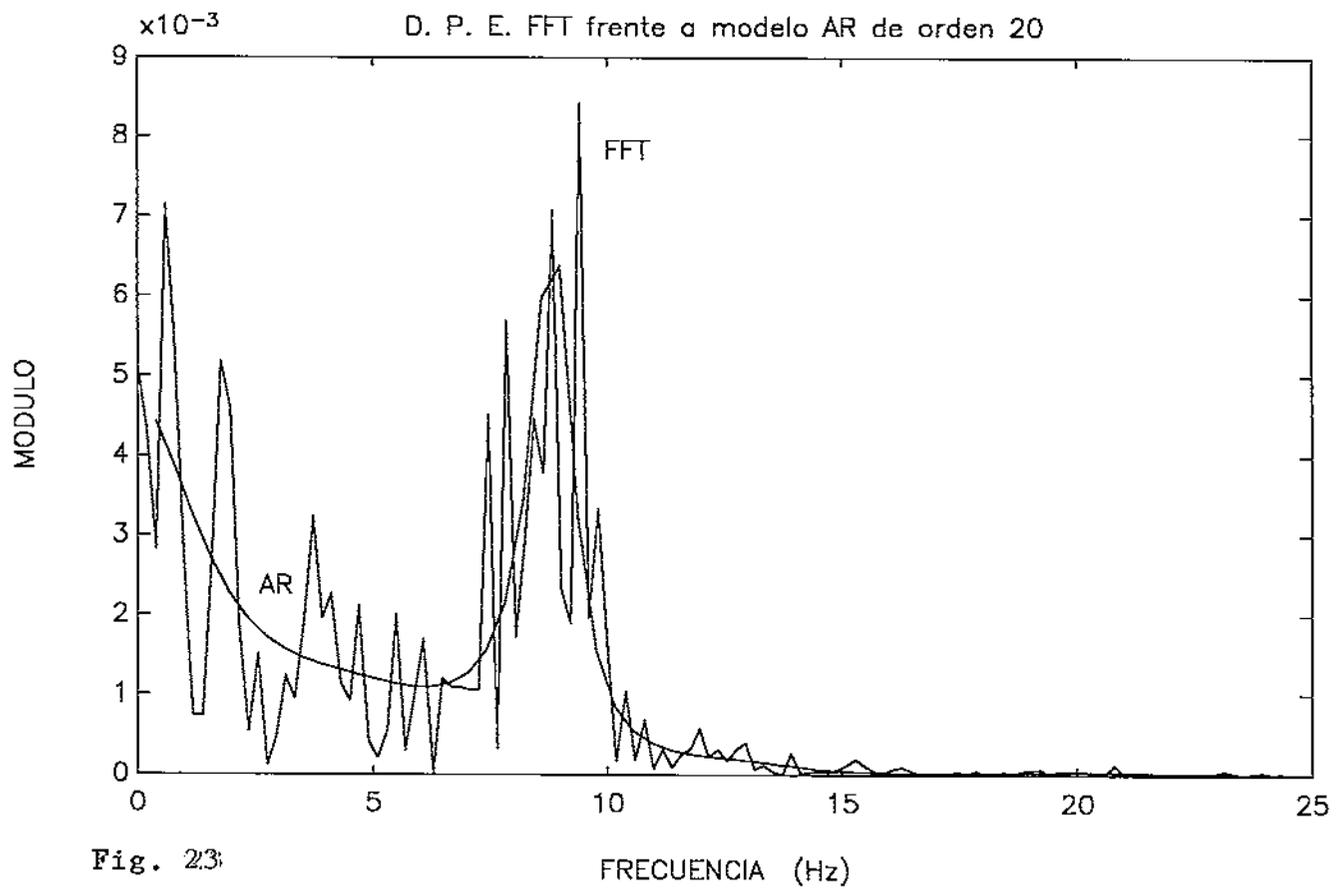
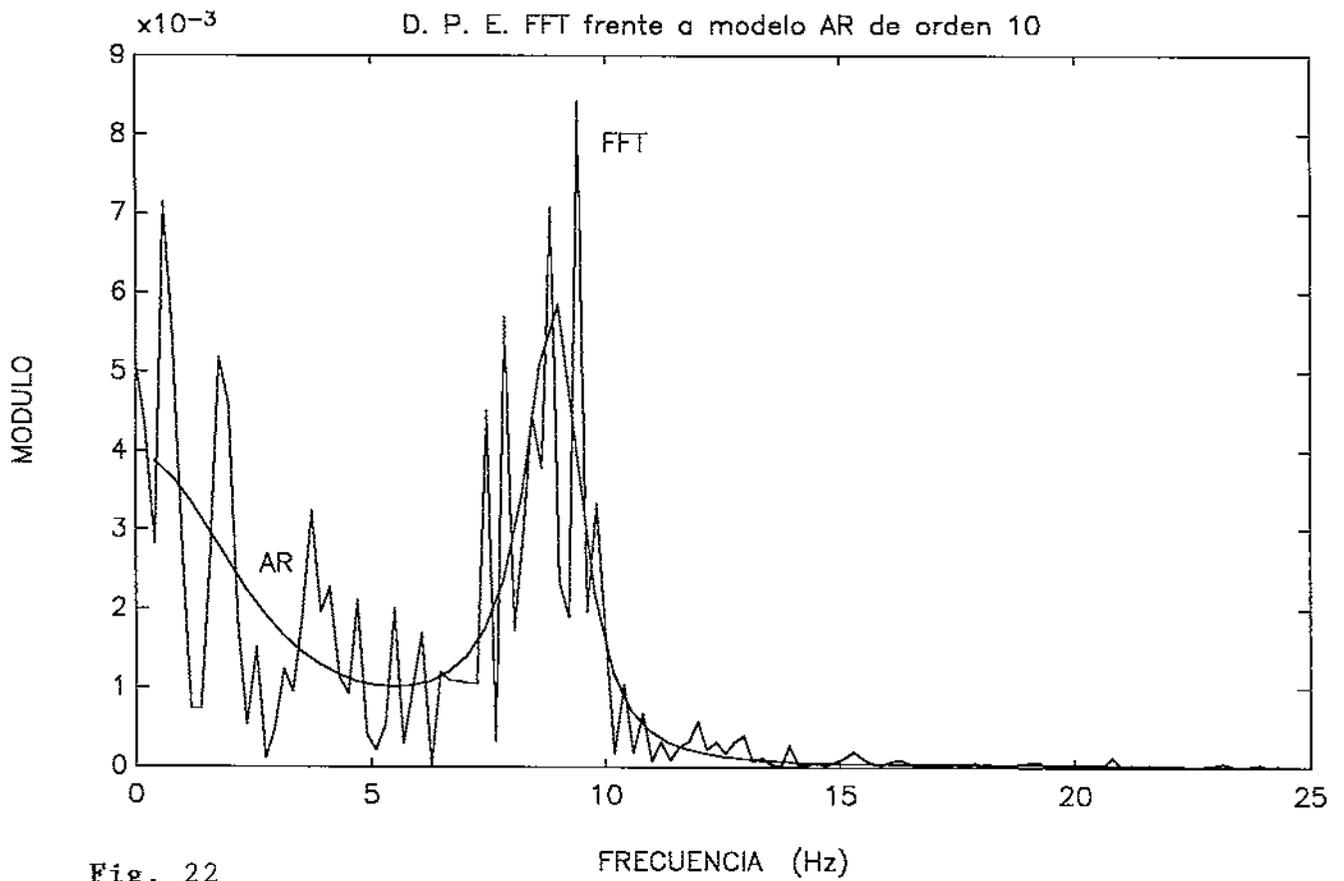
FRECUENCIA (Hz)



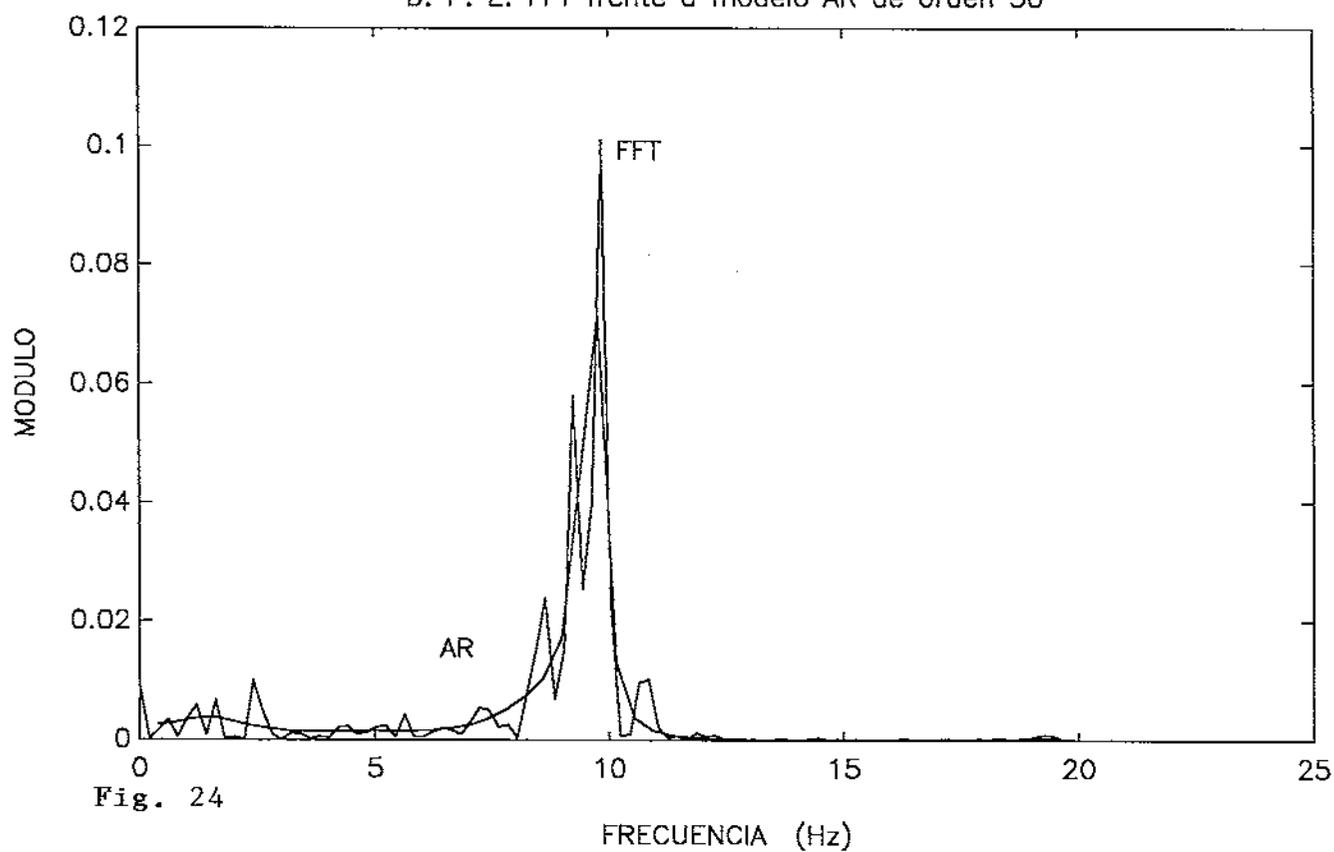




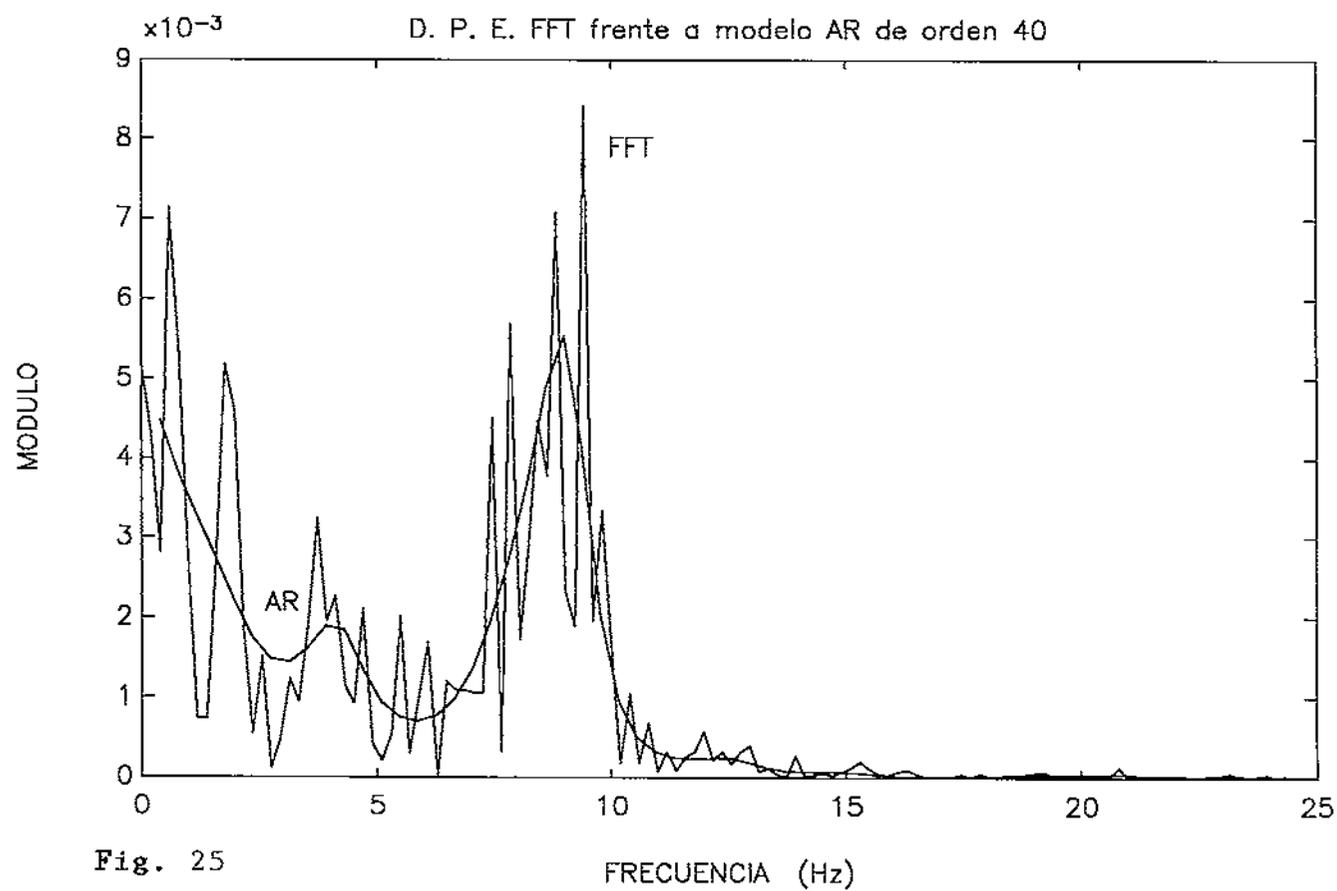




D. P. E. FFT frente a modelo AR de orden 30



D. P. E. FFT frente a modelo AR de orden 40



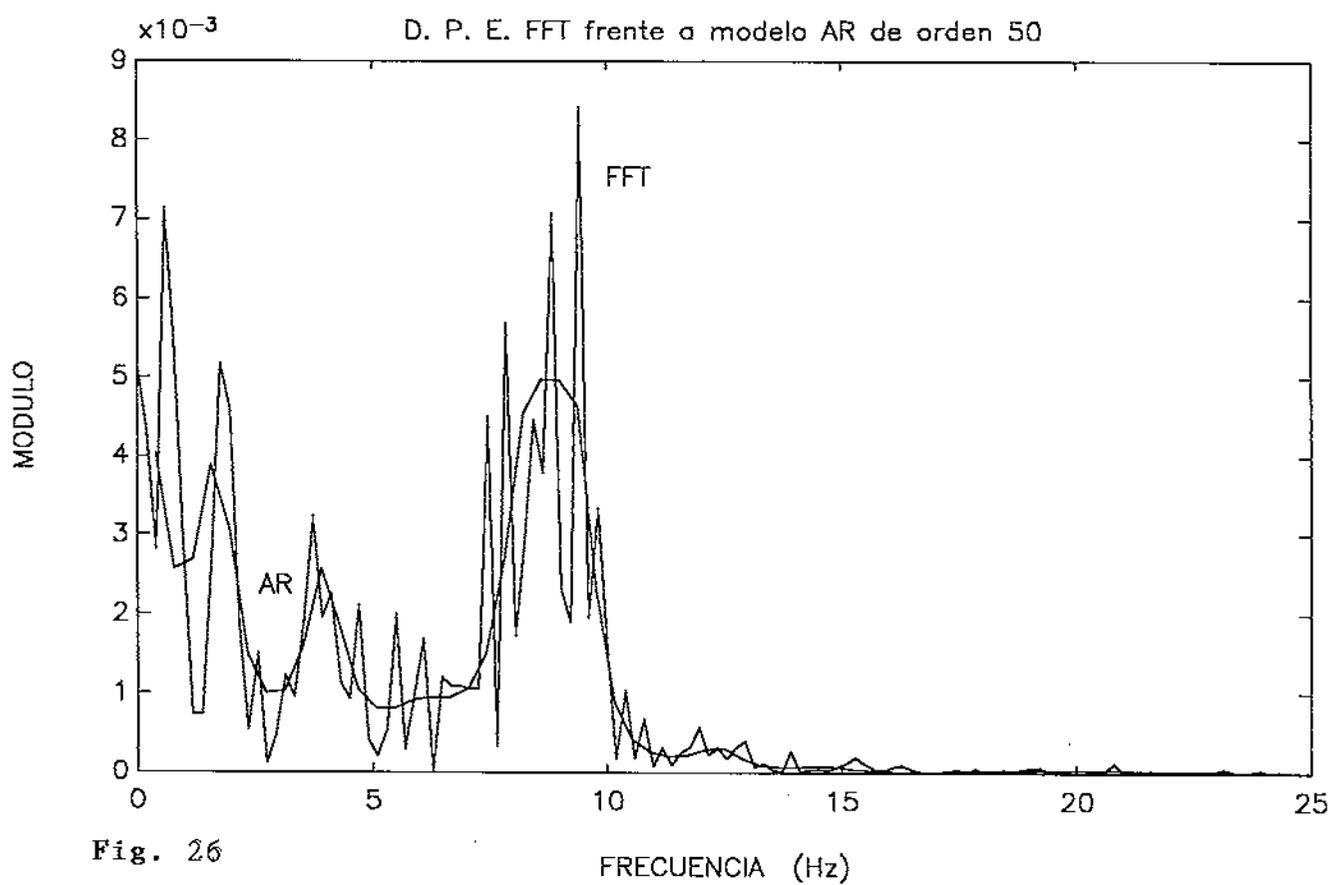
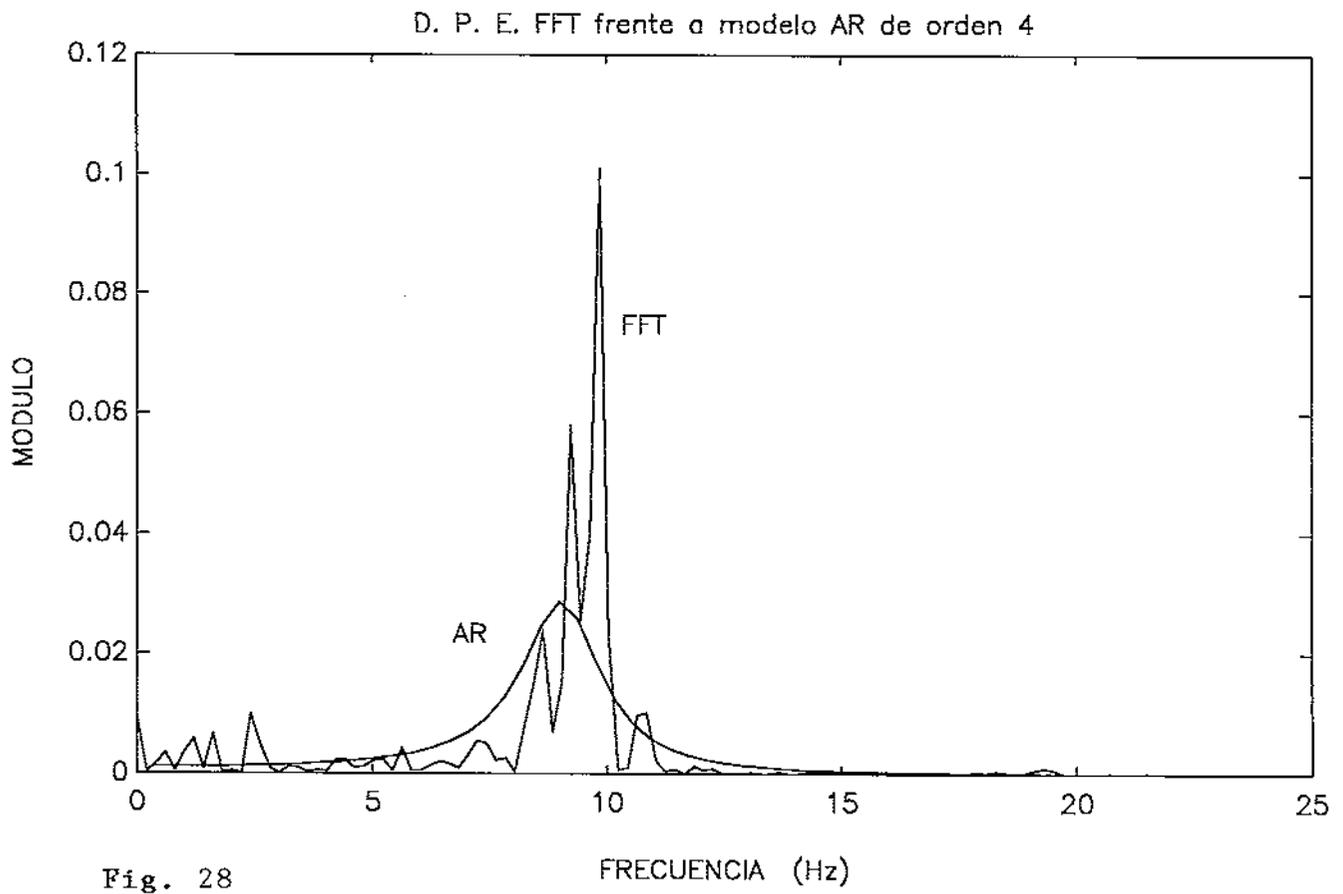
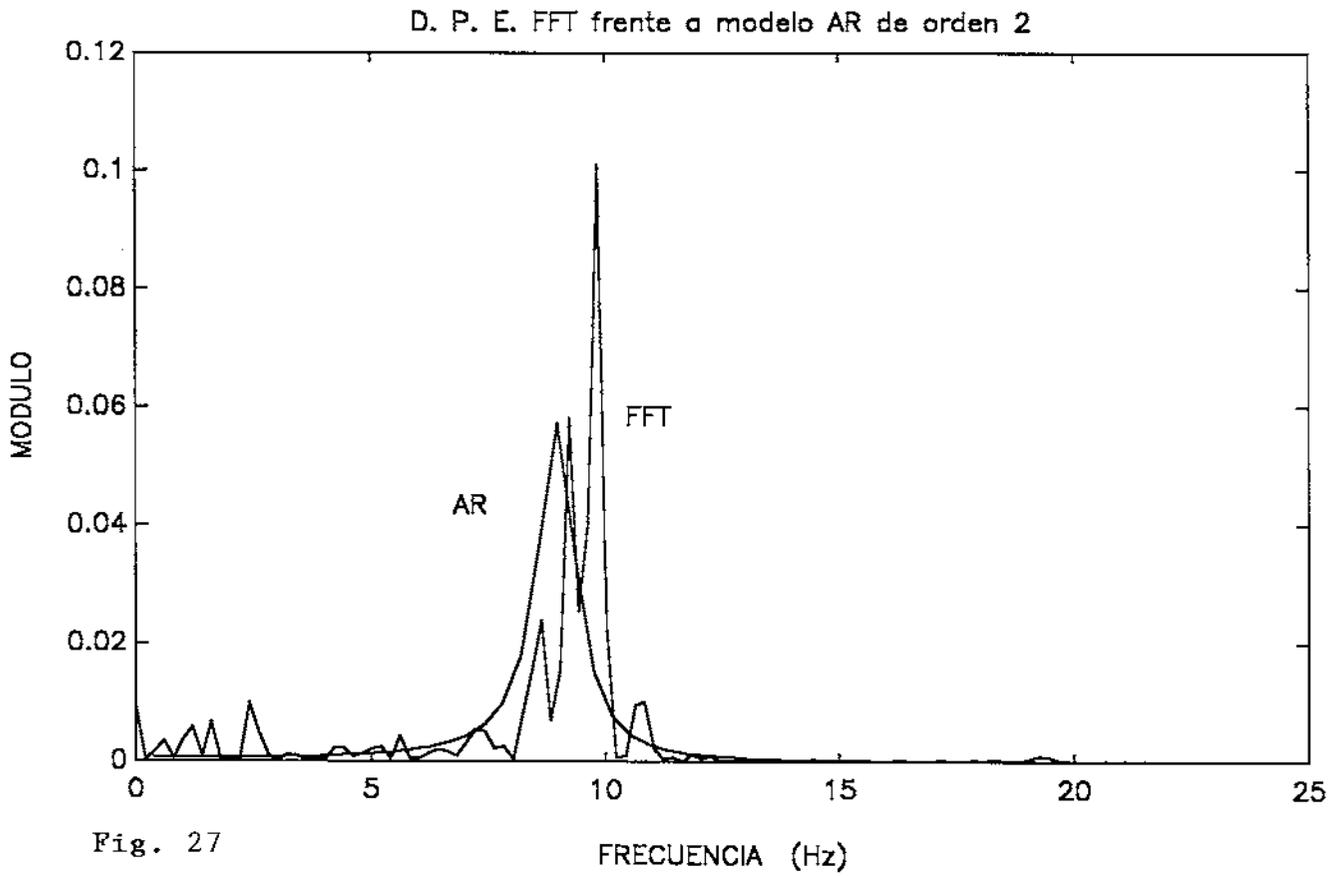
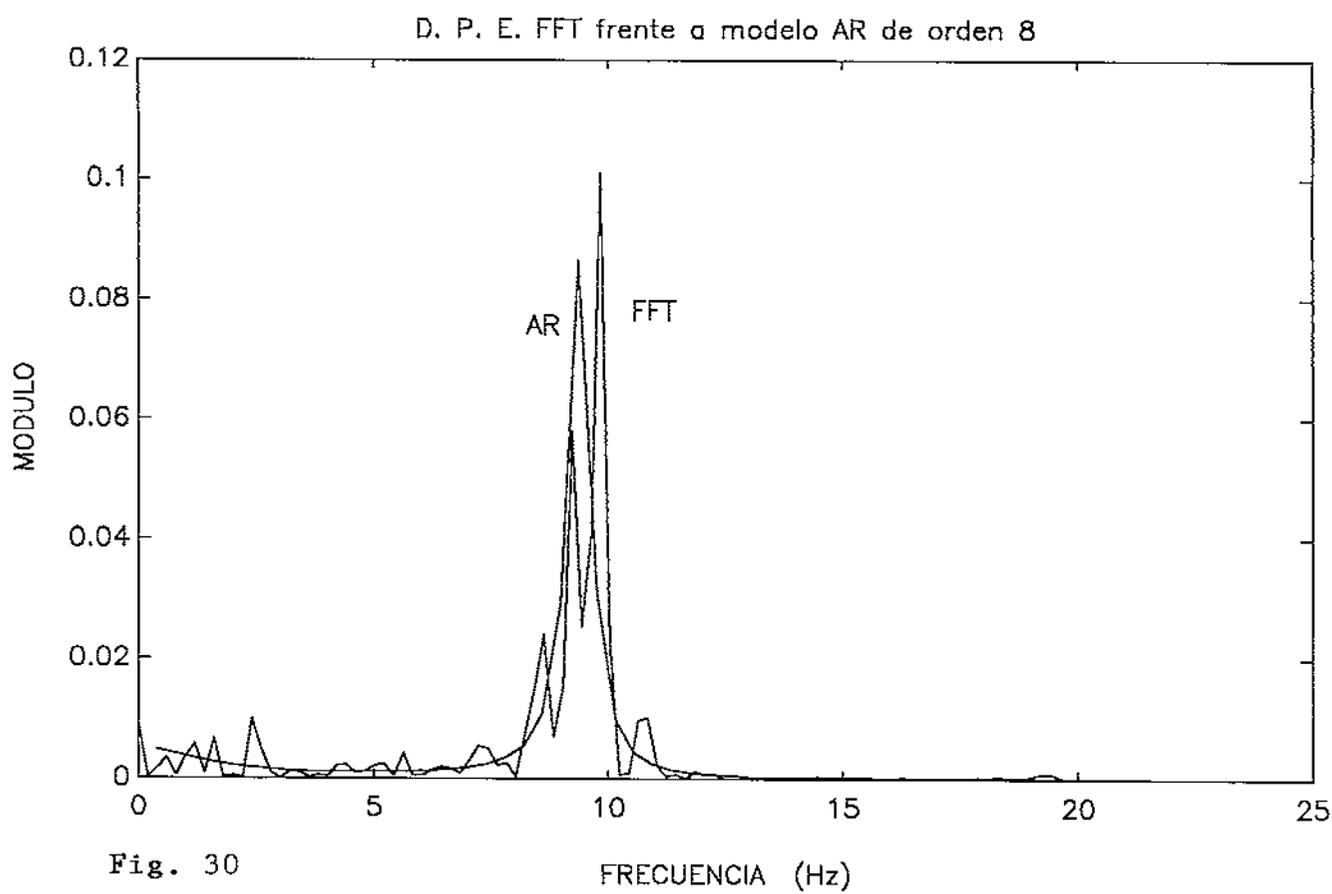
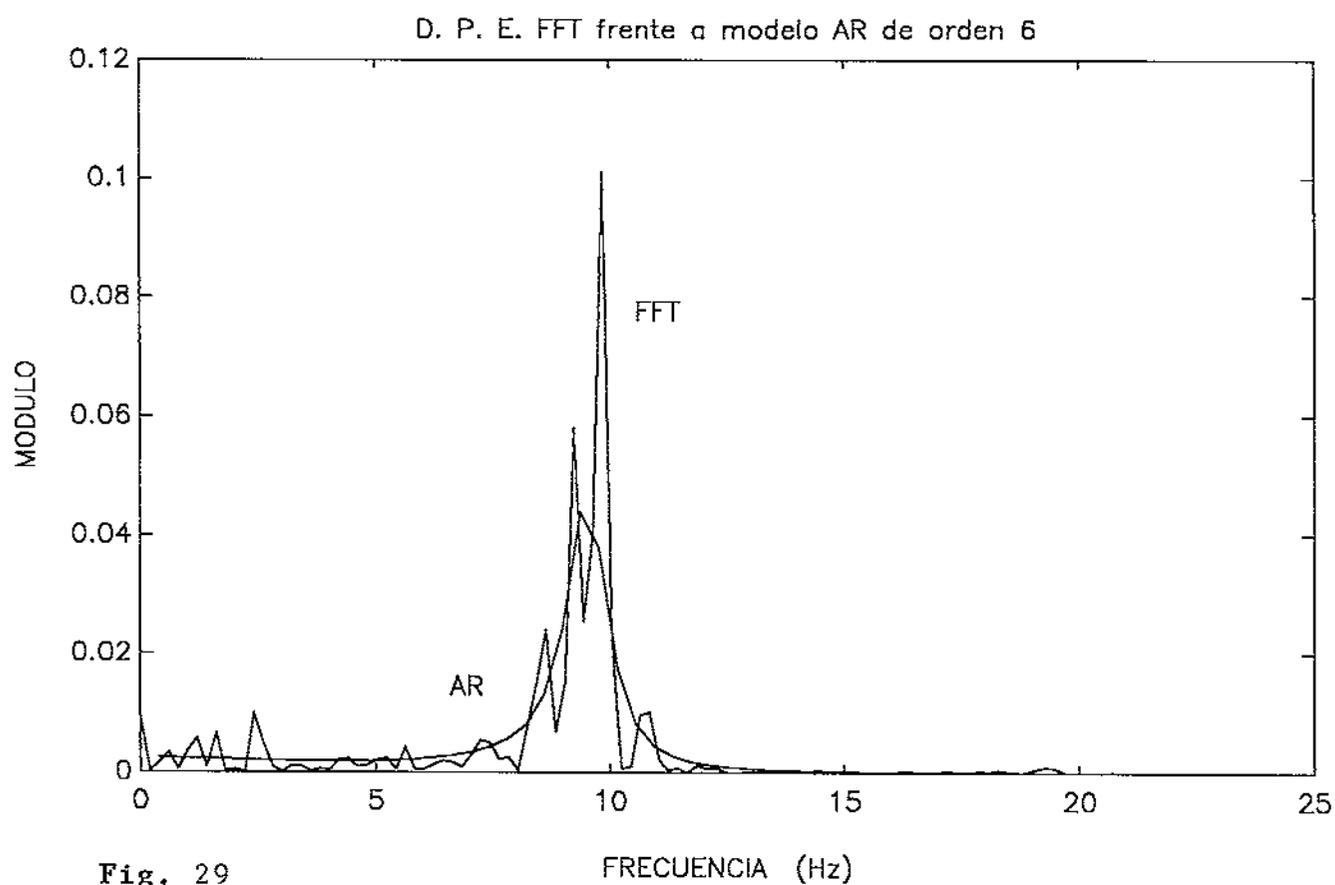
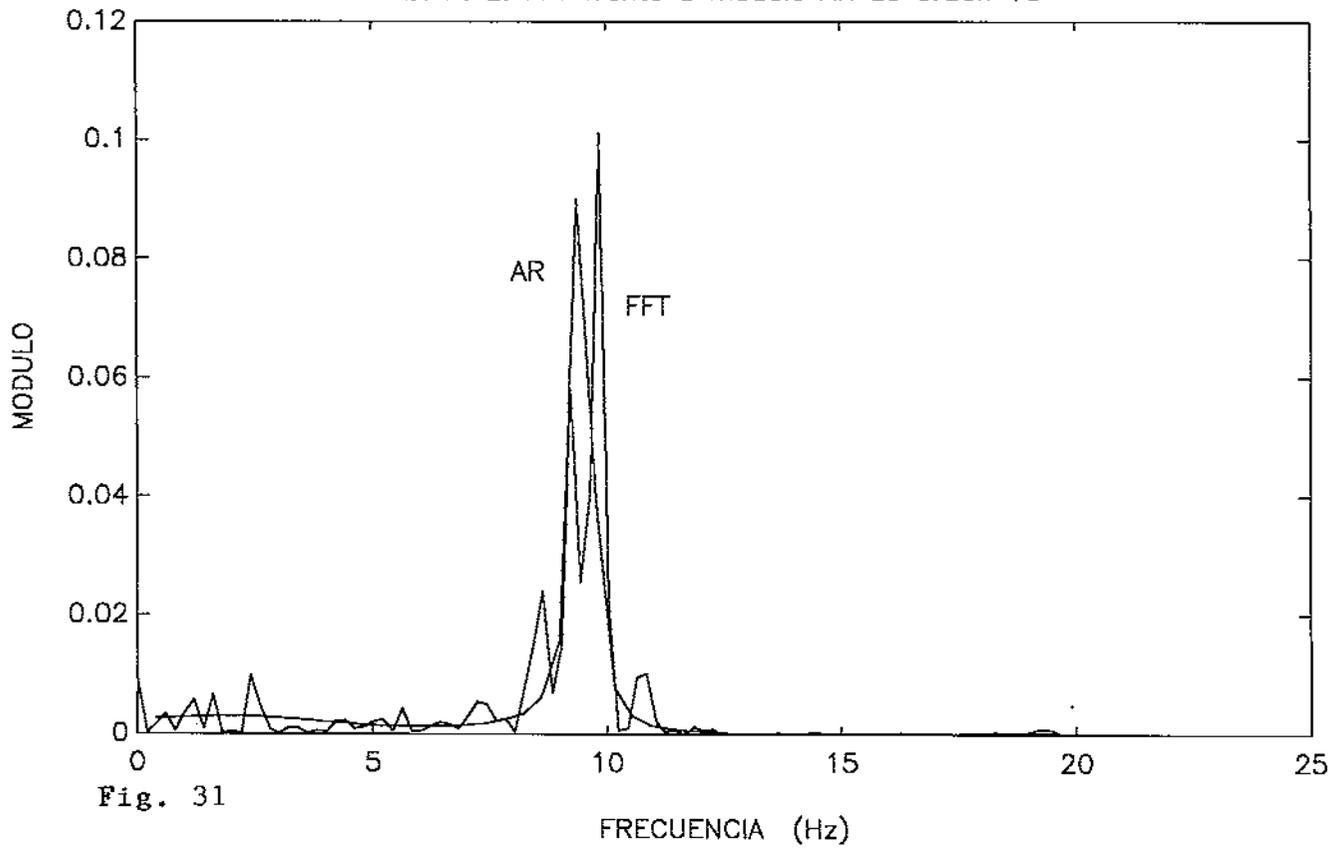


Fig. 26

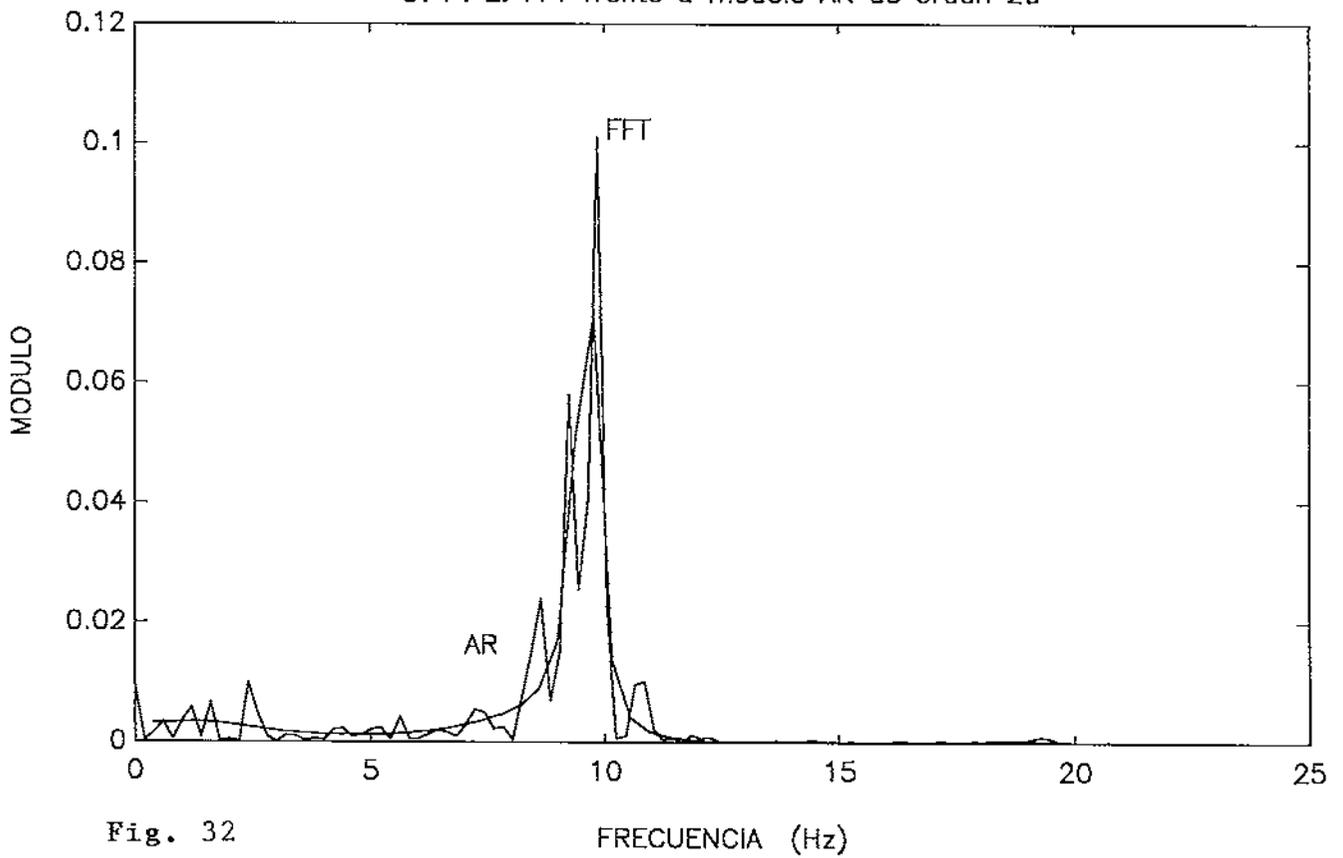


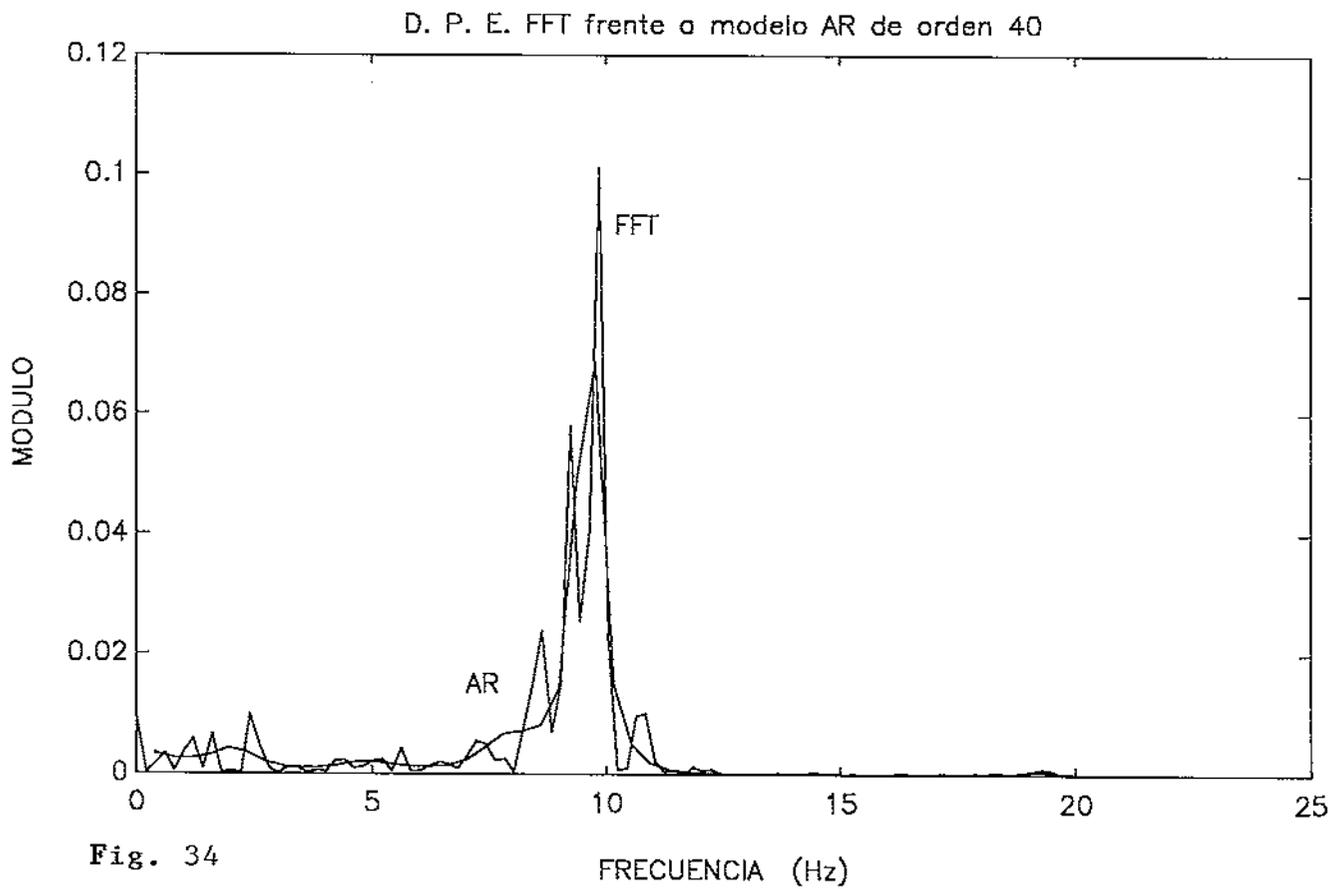
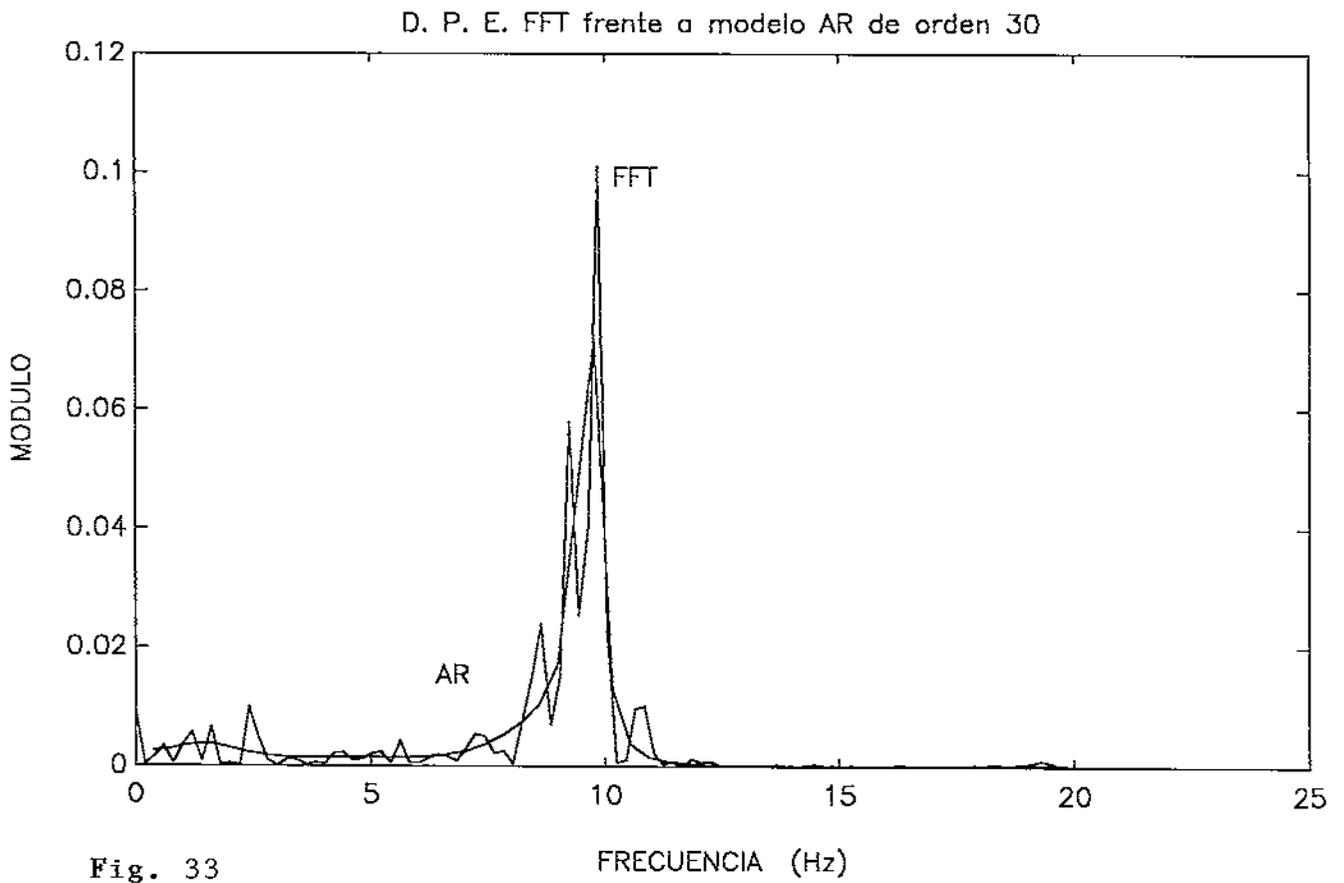


D. P. E. FFT frente a modelo AR de orden 10



D. P. E. FFT frente a modelo AR de orden 20





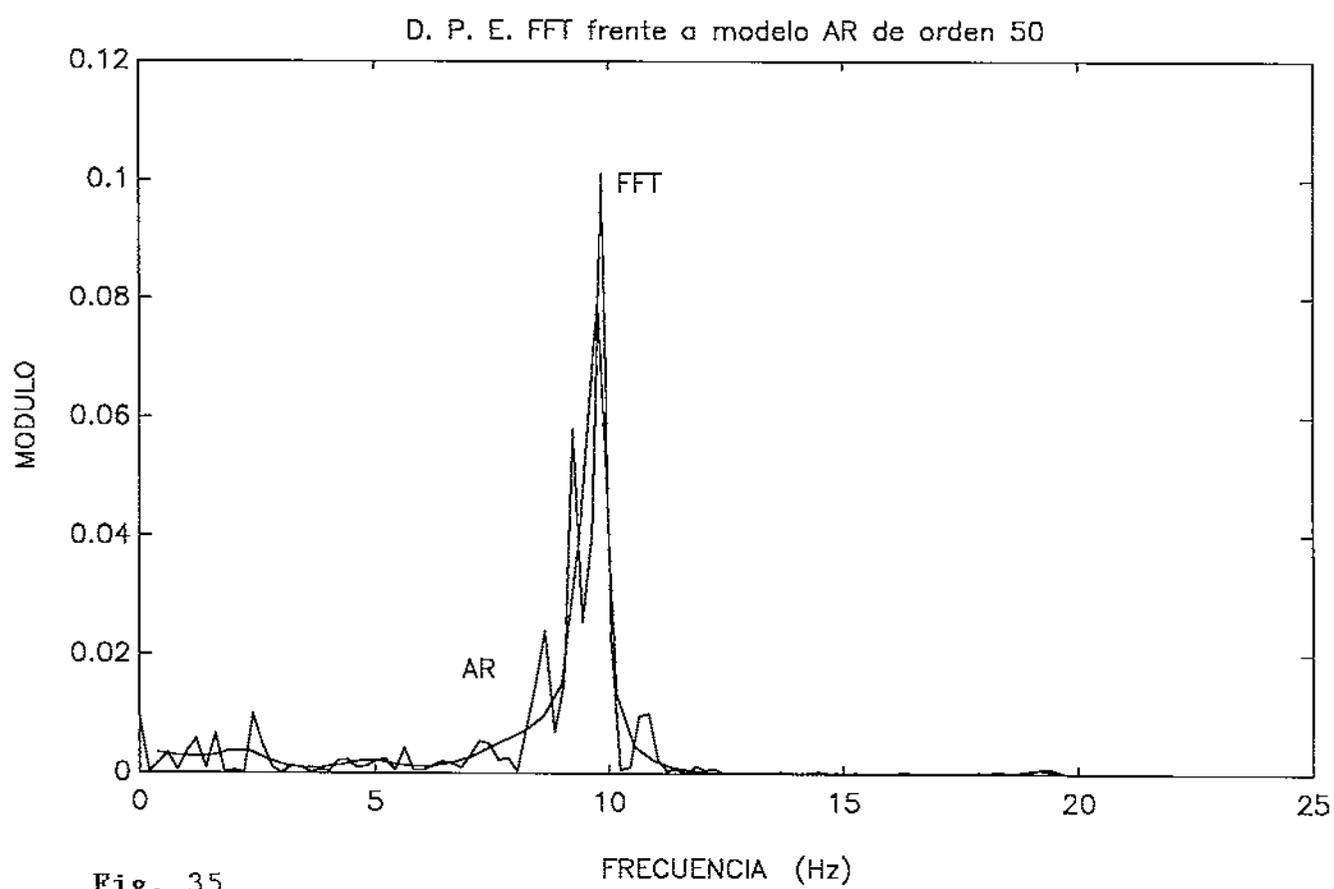


Fig. 35

### 3 PROGRAMA DE ANÁLISIS INTERACTIVO

El programa de análisis interactivo (Moreno et al. (1991)) permite el procesamiento de las señales capturadas con el programa de adquisición. El propósito es obtener información, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Un listado completo del mismo puede verse en el apéndice F.

Las señales pueden ser leídas de fichero en dos formatos diferentes:

1) Formato ASCII: fue el primer formato empleado en la adquisición de las señales. Este precisaba un gran espacio de almacenamiento para los ficheros como se comentó en 1.1. Por ello y por obtener una mayor rapidez en la lectura de los datos se hizo necesario cambiar de formato.

2) Formato Binario: Todos los datos se almacenan en un único fichero de 64 KB en el cual las muestras de cada canal se encuentran agrupadas y los canales ordenados por su número. Se guardan igualmente los dos bytes capturados por la tarjeta pero en forma binaria. Esto produce un ahorro en espacio para datos considerable y permite que los datos sean leídos más rápidamente. En el caso de que el fichero sea tomado en modo binario se nos pregunta en cual de los dos electroencefalógrafos fue tomado:

- 1) Alvar
- 2) Medelec

Esto es importante porque el factor de amplificación de la señal medida por el electrodo a la señal de salida del electroencefalógrafo (entrada a la tarjeta de adquisición) en ambos aparatos difiere en un factor 2. Además se nos pregunta el número de segundos a analizar (5.12, 2.56 ó 1.28), el instante inicial en segundos, el número de canales (1 ó 2) y el número de cada canal.

Puesto que lo que se almacena no son voltajes sino los valores cuantificados entre 0 y 4096 dados por la tarjeta, es importante almacenar la información acerca de la ganancia con la que se ha obtenido el fichero para poder reconstruir la señal con sus unidades correctas. La tarjeta de adquisición permite cuatro ganancias:

- 1) Código de ganancia 0: Se está muestreando entre  $\pm 10$  V
- 2) Código de ganancia 1: Se está muestreando entre  $\pm 5$  V
- 3) Código de ganancia 2: Se está muestreando entre  $\pm 2.5$  V
- 4) Código de ganancia 3: Se está muestreando entre  $\pm 1.25$  V

Así pues se vio la necesidad de generar una pequeña base de datos en la que se almacenara el valor de la ganancia, así como información médica relativa al paciente. Para ello en el momento de la escritura en disco de los

datos muestreados se nos pregunta:

- 1) Nombre del paciente
- 2) Edad
- 3) Fecha
- 4) Diagnóstico
- 5) Comentarios

Esta información junto con el código de ganancia se almacena en otro fichero con el mismo nombre que el que vamos a grabar pero con la extensión .INF.

Aunque las señales son capturadas en voltios, son presentadas en escala de milivoltios por dos razones:

1- Las amplitudes de las señales originales en el cerebro son del orden de  $50 \mu\text{V}$  a  $200 \mu\text{V}$ . Lo lógico parece entonces representar las señales en escala de  $\mu\text{V}$  teniendo en cuenta el factor de amplificación introducido por el electroencefalógrafo y que a una amplitud de  $50 \mu\text{V}$  le hace corresponder a la salida (entrada de la tarjeta de adquisición)  $0.5 \text{ V}$ .

2- El problema de utilizar las unidades en  $\mu\text{V}$  aparece al llevar a cabo cálculos de potencias de la señal. Teniendo en cuenta que la energía de la señal (I.36) es la suma de los cuadrados de las amplitudes, cuanto mayor sea el rango de amplitudes, las potencias bajas se diferencian de las altas en más órdenes de magnitud. Por tanto, las primeras serán menos apreciables en el espectro.

A continuación describimos las funciones disponibles para analizar los datos.

#### REPRESENTACIÓN GRÁFICA TEMPORAL

La observación de la señal en el dominio temporal es fundamental para el diagnóstico médico ya que este se suele basar en un porcentaje muy importante en la morfología de la señal cerebral en cada canal y en la relación de simultaneidad que pueda existir en la aparición de ciertos elementos en varios canales. Por ello nuestro programa permite visualizar la señal en el dominio temporal de uno o dos canales del EEG, pudiéndose variar el instante inicial y la duración de la señal a representar (1.28 seg., 2.56 seg. o 5.12 seg.). En las figuras 36 y 37 se presentan dos ejemplos de señales en el dominio temporal. En ambos casos se muestran los dos canales occipitales (El canal 16 representa el occipital derecho y el 14 el izquierdo). La primera figura corresponde a un niño de 6 años de edad y la segunda a

Se puede observar como mientras en el segundo caso, que corresponde a un niño con un mayor nivel de madurez cerebral, el aspecto de la onda es prácticamente sinusoidal con cambios en la amplitud de la señal pero manteniendo la frecuencia de casi 10 Hz durante la mayor parte del registro, en el caso del primero la morfología de la onda alterna tramos sinusoidales con tramos totalmente irregulares que involucran una mayor cantidad de frecuencias (La mayor parte de ellas en la banda alfa-1 y una cantidad no despreciable en las bandas delta y theta).

#### REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DENSIDAD DE POTENCIA ESPECTRAL

La DPE tiene una gran importancia ya que en los registros con ojos cerrados uno de los parámetros más importantes a considerar por el médico es la frecuencia de aquellos segmentos que tengan un aspecto cuasi-sinusoidal. Esto es debido a que se considera que dicho régimen sinusoidal es síntoma de relajación en el sujeto y por tanto la señal que se está midiendo no está siendo modificada por artefactos de ningún tipo. El valor de la frecuencia sinusoidal es de por sí un elemento de diagnóstico tanto de madurez cerebral como de patologías. Con esta función podemos observar la respuesta gráfica de la densidad de potencia espectral para uno o dos canales de un paciente. En la misma se puede elegir:

1) El rango a representar de entre los siguientes valores :

a) 0 - 50 Hz. Dado que la frecuencia de muestreo por canal es de 100 Hz, este rango nos permite visualizar todas las posibles componentes de la señal. Su aplicación más usual es la de detectar si se ha introducido la frecuencia de la red (50 Hz) en la señal.

b) 0 - 40 Hz. Este rango cubre todas las frecuencias de interés médico. Su aplicación más importante es para detectar si las frecuencias en las 3 bandas beta tienen alguna importancia o no.

c) 0 - 20 Hz. Este rango es el más usual, ya que la mayoría de las frecuencias importantes se concentran en las bajas frecuencias hasta los 12 Hz como máximo, siendo normalmente despreciable la contribución de frecuencias superiores.

2) El tipo de ventana a aplicar a los datos de entre los siguientes:

Rectangular, Triangular, Hamming, Hanning, Blackman, Flattop:

Las figuras 38, 39 y 40 corresponden a la representación de la densidad de potencia espectral para los dos niños mencionados anteriormente. Las dos primeras se refieren al paciente de 6 años y reflejan la diferencia entre

utilizar una u otra ventana. La figura 38 se ha obtenido aplicando la ventana Rectangular, mientras que en la 39 se ha hecho uso de la Flattop. Se puede observar fácilmente la mejor resolución de la rectangular y el mayor suavizado proporcionado por la Flattop. La figura 40 se refiere al paciente de 9 años y muestra como el carácter prácticamente sinusoidal observado en la gráfica temporal se corresponde con una única contribución muy importante en la frecuencia de 10 Hz, estando prácticamente todas las demás a cero.

#### REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA POTENCIA ESPECTRAL EN BANDAS DE FRECUENCIA

Tradicionalmente los médicos han dividido el espectro de frecuencias en varias regiones a las que se ha denominado con letras griegas. Aunque la definición de las bandas puede variar según unos autores u otros inicialmente elegimos la siguiente definición de bandas:

- a) Subdelta: 0 - 0.5 Hz
- b) Delta : 0.5 - 4 Hz
- c) Theta : 4 - 8 Hz
- d) Alfa : 8 - 12 Hz
- e) Beta 1 : 12 - 16 Hz
- f) Beta 2 : 16 - 30 Hz
- g) Beta 3 : 30 - 40 Hz

La mayor parte de la energía se encuentra concentrada en las bandas delta, theta y alfa (aunque la banda subdelta puede tener contribuciones importantes, se debe a artefactos sin interés médico). Por ello cuando nos refiramos en adelante a resultados obtenidos con este convenio, los mencionaremos como "*resultados para tres bandas*".

Sin embargo, tras unas primeras pruebas elegimos como definitivo el siguiente convenio (por ser uno de los más referenciados y por permitir extraer mayor información de evolución con respecto a la edad):

- a) Subdelta: 0.0 - 1.5 Hz
- b) Delta : 1.5 - 3.5 Hz
- c) Theta : 3.5 - 7.5 Hz
- d) Alfa-1 : 7.5 - 9.5 Hz
- e) Alfa-2 : 9.5 - 12.5 Hz
- f) Beta-1 : 12.5 - 17.5 Hz
- g) Beta-2 : 17.5 - 25 Hz
- h) Beta-3 : 25 - 40 Hz

Cuando en adelante utilizemos la expresión "*resultados para cuatro bandas*" significará que los mismos habrán sido obtenidos con este convenio.

Para cada una de las bandas hemos presentado el valor de la potencia absoluta. El rango de visualización está fijo entre 0 y 40 Hz ya que debido a la gran longitud de los segmentos Beta, pueden producir una pequeña contribución a la potencia total. En la figura 41 se muestra dicha gráfica para el niño de 6 años. Se puede observar que los canales 14 y 16 tienen aproximadamente la misma composición de frecuencias pero la banda subdelta es mucho más importante en el canal 14 que en el 16. Por otra parte queda claro (eliminando subdeltas y betas) que el máximo de la potencia se concentra en la banda alfa 1, seguida por la banda theta y por último las bandas delta y alfa 2.

#### REPRESENTACIÓN NUMÉRICA DE LA POTENCIA ESPECTRAL EN BANDAS DE FRECUENCIAS

Opcionalmente se puede elegir, en lugar de la representación gráfica, la respuesta numérica que para cada banda de frecuencia muestra los siguientes parámetros:

- a) La Potencia Absoluta
- b) La Potencia Relativa
- c) La Potencia Relativa filtrada de subdelta
- d) La Media de la Densidad de Potencia espectral

#### REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN DE CORRELACIÓN DE DOS CANALES

La función de correlación de dos canales permite mostrar si existe alguna frecuencia para la cual los dos canales estén altamente relacionados y si alguno de los canales está retardado con respecto al otro. Esto es de gran interés para el médico pues le permite determinar hasta que punto está observando un fenómeno localizado en un canal o un fenómeno que afecta a toda una región del cerebro.

En la figura 42 se puede ver la función de correlación para los dos canales occipitales del paciente de 6 años. Dado que todos los picos de esta función están prácticamente equiespaciados a  $1/8$  de segundo se puede deducir que las dos señales tienen una buena coincidencia a la frecuencia de 8 Hz. El hecho de que a desplazamiento cero el pico sea negativo da un indicio de que ambas señales están en oposición de fase. Por otra parte no existe ningún

desplazamiento de una señal sobre la otra para el que se obtenga un valor del mismo orden que para el origen.

En la figura 43 se observa algo completamente diferente. Puesto que los picos están equiespaciados a 1/9 seg. se puede deducir que ambas señales tienen una componente de frecuencia muy importante en 9 Hz. Al igual que en el caso anterior el valor en el origen es negativo, lo que indica oposición de fase entre ambos canales. Pero la diferencia con la figura 42 se centra en el hecho de que el nivel de la correlación no disminuye al alejarnos del origen sino que se mantiene e incluso supera al valor del origen en varias ocasiones. Esto significa que ambas señales tienen que ser bastante periódicas y de forma tal que su correlación presenta máximos relativos a los 0.8, 1.36, 2.33 y 3.42 seg. del origen. Esto indica que existe un patrón básico común a ambos canales que se repite en esos instantes de tiempo

#### REPRESENTACIÓN NUMÉRICA DE LOS PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

Esta opción nos permite visualizar los valores numéricos de los principales parámetros estadísticos del rango elegido de ambos canales. Estos son:

- a) La media de la señal
- b) La desviación estandard
- c) La varianza
- d) El coeficiente de variabilidad (desv. estandard/media)

#### REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN MÓDULO CUADRADO DE LA COHERENCIA

Al igual que con la correlación, la función módulo cuadrado de la coherencia muestra el grado de semejanza de dos canales pero para todas las frecuencias. Valores cercanos a cero indican poca coincidencia, mientras que valores cercanos a uno apuntan a un gran parecido entre ambos canales para dicha frecuencia. La figura 44. nos muestra la función módulo cuadrado de la coherencia tanto en forma continua como en valor medio para cada banda de frecuencia. Como es bien conocido la matriz de coherencia viene dada por la expresión:

$$\begin{pmatrix} DPE_{xx}(f) & DPE_{xy}(f) \\ DPE_{yx}(f) & DPE_{yy}(f) \end{pmatrix}$$

donde  $DPE_{xx}(f)$  = Densidad de Potencia Espectral de un canal

$DPE_{yy}(f)$  = Densidad de Potencia espectral del otro canal

$DPE_{xy}(f)$  = Densidad de potencia espectral cruzada de ambos canales.

Así como la densidad de potencia espectral de un canal se define como la transformada de Fourier de su secuencia de autocorrelación, la densidad de potencia espectral cruzada se define como la transformada de Fourier de la secuencia de correlación cruzada de ambos canales.

Se puede demostrar que el espectro cruzado es menor o igual que la media geométrica de los espectros individuales:

$$|DPE_{xy}(f)|^2 \leq DPE_{xx}(f) DPE_{yy}(f)$$

Debido a esta propiedad, esta matriz 2 x 2 tiene un determinante positivo para todas las frecuencias. La expresión adimensional:

$$Coh(f) = \frac{DPE_{xy}(f)}{\sqrt{DPE_{xx}(f) DPE_{yy}(f)}}$$

se denomina función de coherencia. Una función asociada con ella es la función módulo cuadrado de la coherencia:

$$MCC(f) = \frac{|DPE_{xy}(f)|^2}{DPE_{xx}(f) DPE_{yy}(f)}$$

Es de notar que la función anterior toma valores entre 0 (para frecuencias en las que no hay coherencia) y 1 (para frecuencias donde los canales son perfectamente coherentes).

Se puede comprobar fácilmente desarrollando la fórmula anterior que si se hace a partir de un solo tramo de la señal el resultado será la unidad para todas las frecuencias. Por tanto, para que el cálculo sea válido hay que hacerlo de forma que las Densidades de Potencia espectral hayan sido calculadas a partir de un promedio de varios segmentos de la señal. Puesto que estamos trabajando con transformadas de 512 puntos y un registro tiene 2048 puntos, el promediado se hace a partir de cuatro transformadas sin solape. Como se puede ver en la figura 44 el resultado es una función con una gran varianza. Esta se puede disminuir aumentando el número de segmentos a promediar, pero ello requiere la captura de más de 20 segundos. Esta posibilidad no estaba contemplada en el primer programa de adquisición de datos por lo que la mayor parte de los registros tomados se corresponden a 20 segundos de duración. Actualmente se pueden capturar ya registros de

múltiplos de 20 segundos. En la función hay que distinguir dos zonas.

a) La zona del espectro donde ambas señales tienen contribuciones importantes. En este caso entre las bandas subdelta y alfa-2.

b) La zona del espectro donde ambas señales apenas tienen componentes.

Puesto que la coherencia da una medida del parecido entre ambas señales, no sólo se producirán picos importantes en la zona a) sino también en la zona b).

#### MAPA TOPOGRÁFICO CEREBRAL DEL VALOR DE UNA MAGNITUD POR MEDIO DE INTERPOLACIÓN

Un mapa topográfico cerebral consiste en una representación de la distribución espacial sobre el cuero cabelludo de alguna magnitud. Esto permite detectar anomalías en la distribución de dicha variable (detección de focalidades, por ejemplo). No sólo se aplica al registro EEG sino también al de potenciales evocados (Respuesta del cerebro ante un estímulo externo) (Liberati et al. (1992), Thickbroom et al. (1984)).

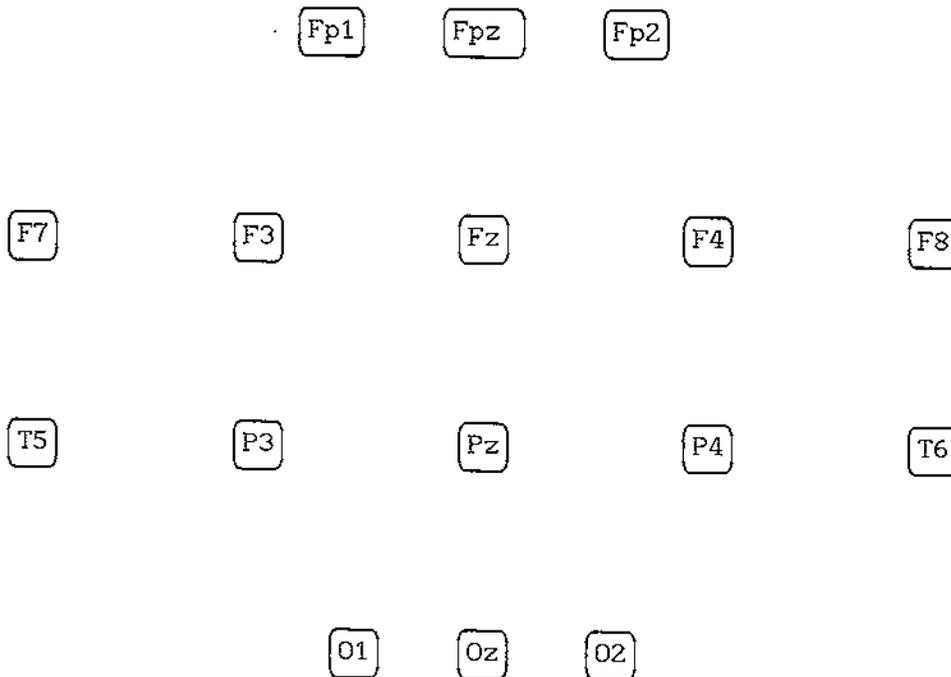
Se ha estudiado el problema en modo off-line (Piñeiro (1991), Moreno et al. (1991), Moreno et al. (1992a)) como un primer paso para su aplicación en tiempo real.

Para llevar a cabo el mismo se parte del conocimiento que se tiene de una magnitud dada en las posiciones de los electrodos. La disposición de los electrodos debe ser de referencia común. A continuación se crea una rejilla del cuero cabelludo en la cual se calculan los valores de la magnitud por medio de la interpolación del valor en los tres o cuatro electrodos circundantes. La interpolación es de tipo bilineal de acuerdo con la fórmula:

$$z1 = a + bx + cy + dxy \quad \text{para 4 electrodos}$$

$$z2 = a + bx + cy \quad \text{para 3 electrodos}$$

A partir del montaje del sistema 10/20 nos hemos quedado con las siguientes posiciones:



Como se puede ver existen:

a) regiones limitadas por 3 electrodos: (Fp1-F7-F3), (Fp2-F4-F8), (T5-P3-O1) y (T6-P4-O2).

b) regiones limitadas por 4 electrodos: (Fp1-Fpz-Fz-F3), (Fp2-Fpz-Fz-F4), (F7-F3-P3-T5), (F3-Fz-Pz-P3), (Fz-F4-P4-Pz), (F4-F8-T6-P4), (P3-Pz-Oz-O1) y (Pz-P4-O2-Oz).

Los datos obtenidos son representados mediante las herramientas de dibujo 3-D de MATLAB, tanto en forma de superficie tridimensional como en forma de líneas de contorno.

Esta rutina está en fase de realización en tiempo real.

En ella se presentará un dibujo de la cabeza en el cual se verá mediante una escala de colores el valor de la variable que se desee. Esta podrá ser, tanto el voltaje en el dominio temporal como las potencias absolutas o relativas en cada banda de frecuencia. Para ello se utilizará un Procesador de Señales Digitales cuya tarea fundamental consistirá en llevar a cabo los cálculos para que la CPU pueda representar el dibujo en pantalla.

#### EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA POTENCIA DE LAS BANDAS ESPECTRALES

Debido a la no-estacionariedad de las señales biomédicas el valor de la potencia espectral en un registro puede tener fluctuaciones muy importantes que al ser promediadas producen una mayor confusión en los valores de estos parámetros. El estudio de señales no estacionarias lleva aparejado

representaciones más complejas que la transformada de Fourier (Boashash (1992), Hlawatsch (1991), Hippenstiel (1990), Pei (1991)). Para evitar este problema sin recurrir a soluciones tan complicadas se optó por utilizar una representación tiempo-frecuencia basada en la transformada corta de Fourier. Para ello se tomó como valor de la potencia no el valor promedio a lo largo del segmento, como suelen hacer la mayoría de los autores, sino el valor de la misma en 25 instantes de tiempo separados 0.64 segundos unos de otros y con una longitud total de 5.12 segundos cada uno (lo que da lugar a un solape de 4.88 s. entre un segmento y otro). Esto nos permite seguir la evolución de las potencias a lo largo del registro y nos da información acerca de la estabilidad y regularidad del EEG. A la hora de utilizar estos datos para estudios estadísticos, en lugar de tomar el valor de las potencias en el mismo instante de tiempo tomamos el valor de las mismas en puntos que tengan similares características en los diferentes pacientes. Por ejemplo, en nuestro caso hemos explorado nuestras matrices de 25 elementos en cada una de las bandas hasta encontrar el valor máximo de esa banda en ese registro. El instante de tiempo en el que se ha producido dicho máximo se guarda en una variable auxiliar. Una vez hecho este proceso tomamos el valor de todos los parámetros en el instante en que las bandas delta, theta, alfa-1 y alfa-2 tenían su máximo tanto en potencia absoluta como en potencia relativa. Esto nos permite tener a todos los pacientes en una situación de igualdad respecto a su estado para poder ser comparados. Por ejemplo, se hará el análisis estadístico de todos los parámetros de los 133 pacientes cuando tienen el máximo en delta, theta, alfa-1 y alfa-2 respectivamente. Esto hace que la varianza de los parámetros disminuya y permite una mejor clasificación de los mismos.

El resultado se muestra en las figuras 45 a 48.

Las figuras 45 y 46 muestran la evolución con el tiempo de la Potencia absoluta y la Potencia relativa respectivamente en cada una de las bandas de frecuencias para el niño de 6 años. A partir de ellas se puede observar:

- 1) La banda alfa-2 es en todo momento la de menor potencia
- 2) La banda alfa-1 predomina durante la mayor parte del registro alternándose con la theta en algunas ocasiones. Ambas muestran un gran rango de valores, lo que indica la no estacionariedad de la señal.
- 3) El canal 14 muestra una mayor variación en la potencia absoluta debida fundamentalmente a la presencia de artefactos de baja frecuencia.

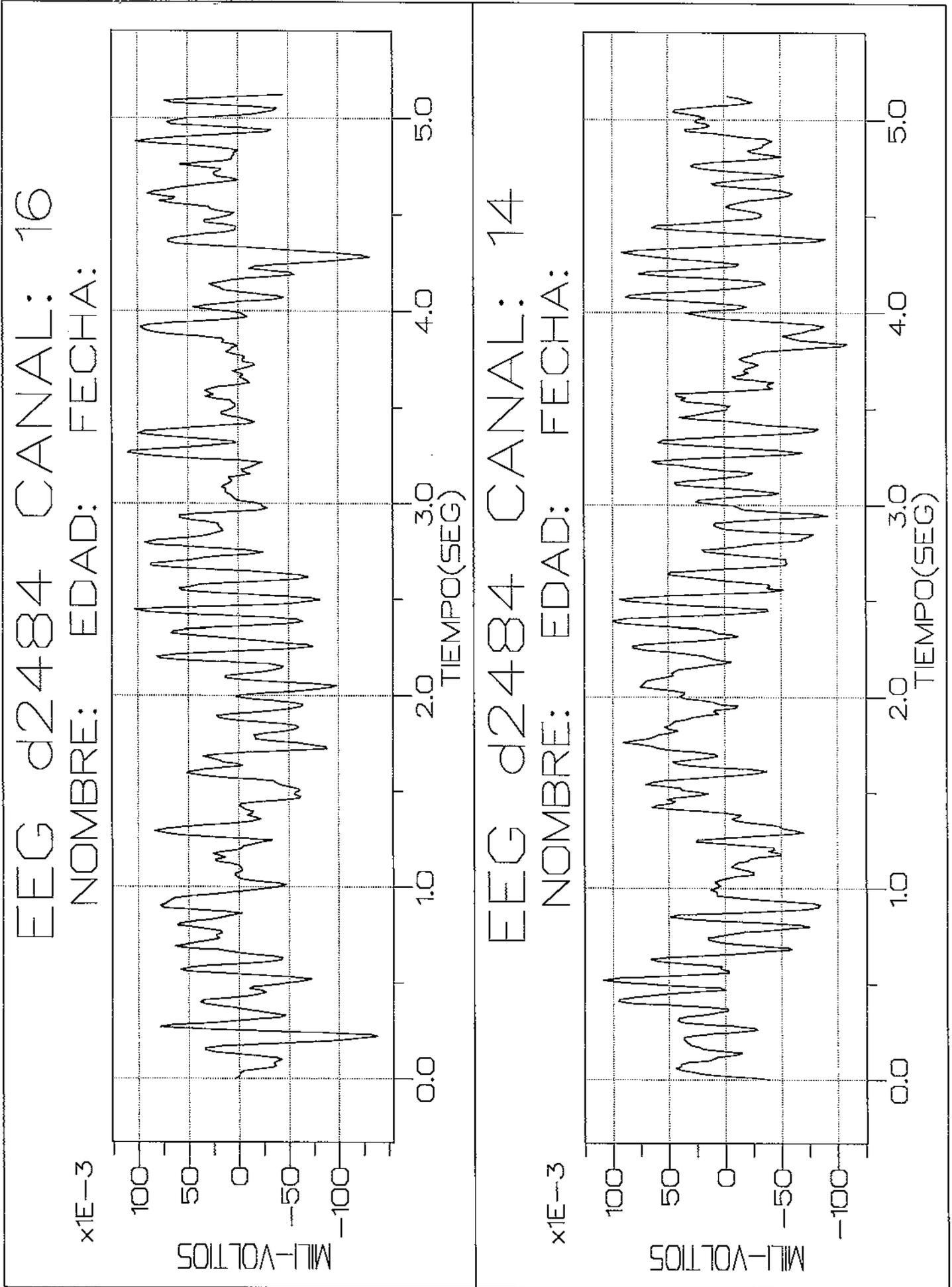
Las figuras 47 y 48 muestran la evolución de la potencia absoluta y relativa para el niño de 9 años. En ellas se puede ver que:

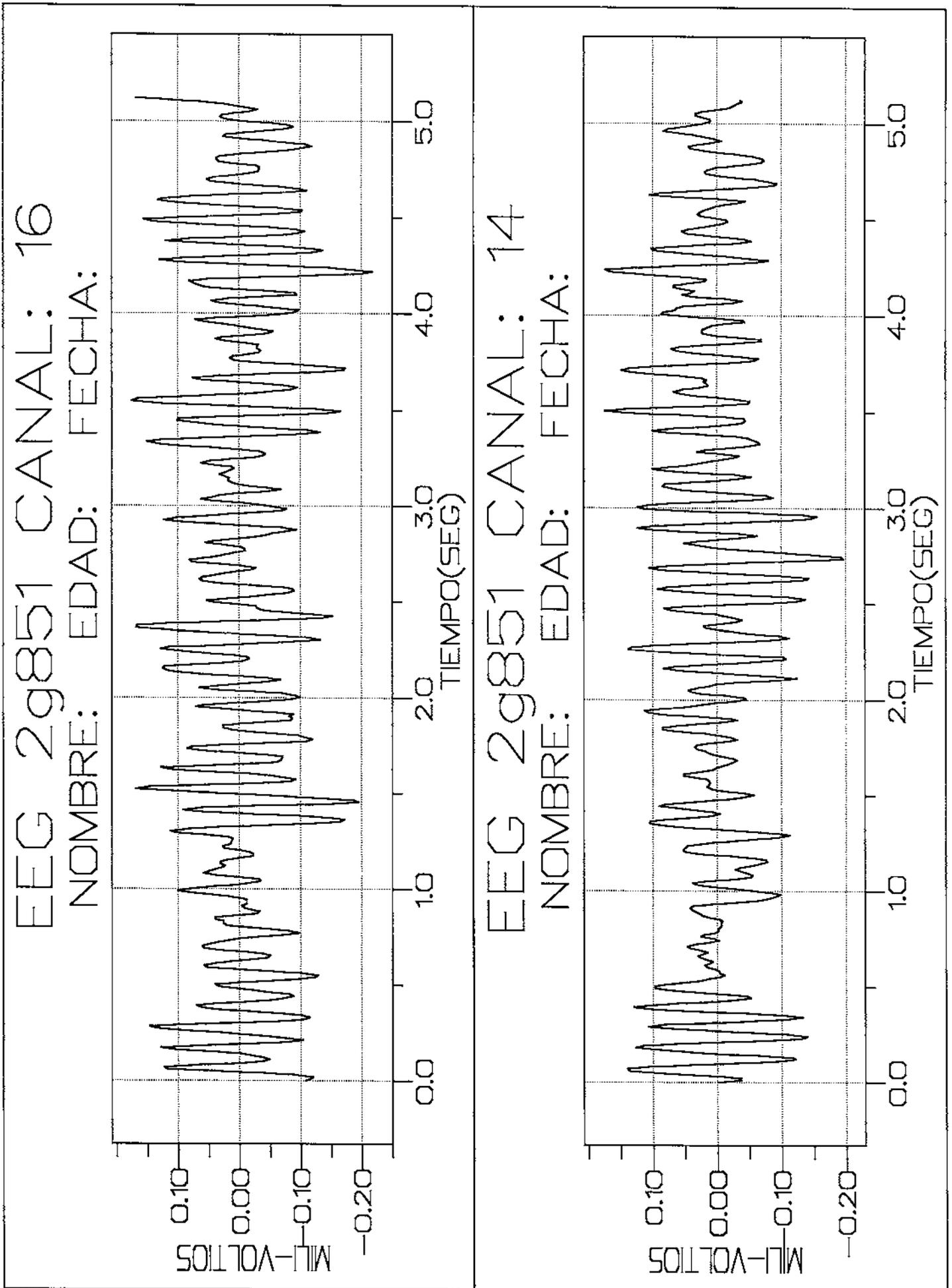
- 1) La banda alfa-2 es la que predomina durante la mayor parte del trazado alternándose en algunos tramos con la banda alfa-1, tomando un gran rango de valores. La no estacionariedad es más acentuada ahora que en el caso anterior.
- 2) La potencia total sufre un incremento importante cuando aumenta la actividad alfa-2.
- 3) La banda alfa-1 ocupa el segundo lugar en importancia. Sus valores máximos coinciden con los de mayor actividad alfa-2 en el canal 16.

#### ANÁLISIS AUTOMATIZADO DE TODOS LOS CANALES DE UN PACIENTE

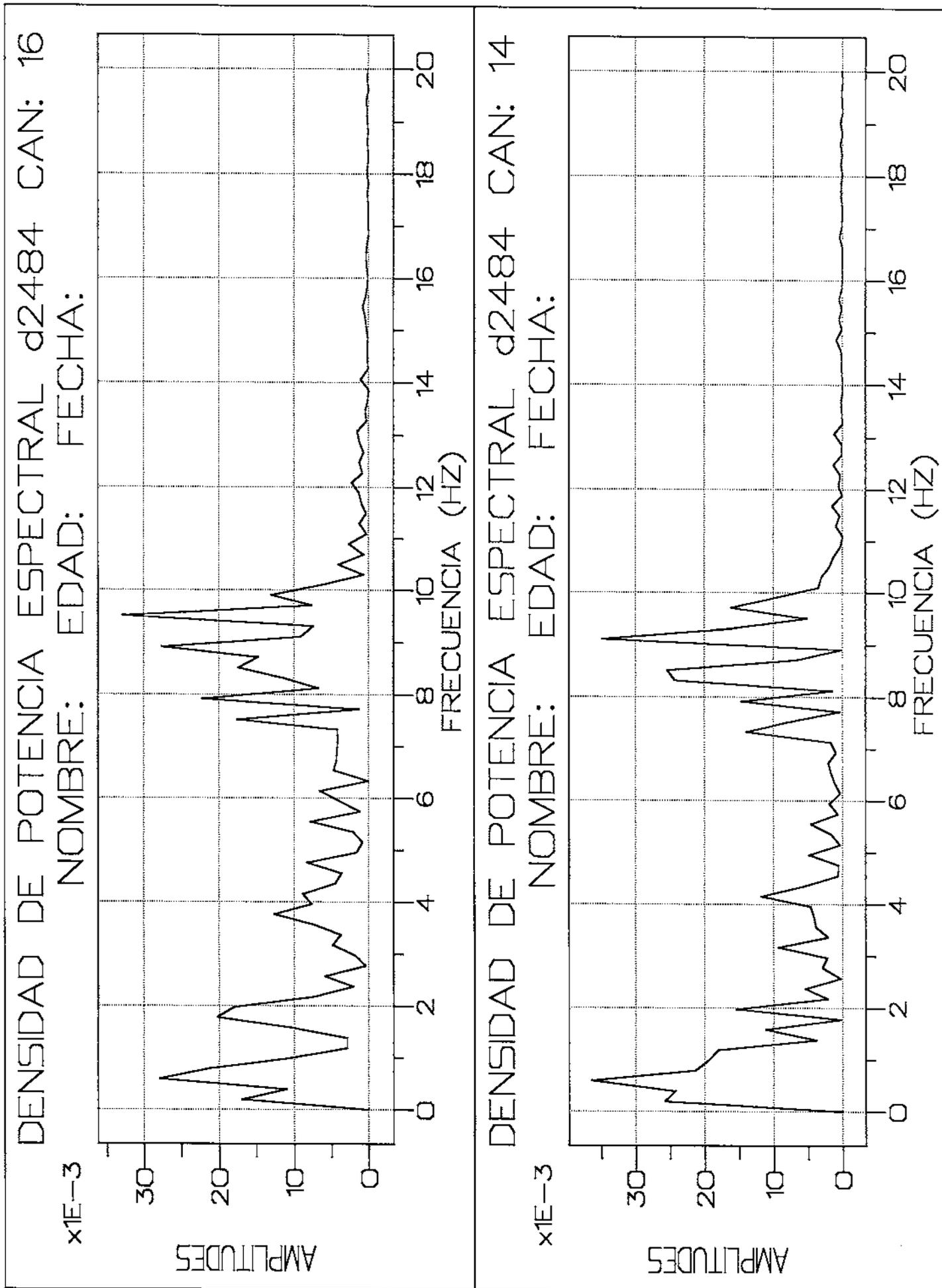
Este procedimiento evalúa los parámetros de los 16 canales en cada banda de frecuencia y después los escribe en fichero. Esto nos permite disponer de los valores de la Potencia Absoluta, la Potencia Relativa, Asimetría y Coherencia para cada banda de frecuencia en los 16 canales de cada individuo y para cada uno de los 25 instantes preseleccionados. De esta manera se posibilita el subsiguiente estudio estadístico de estos parámetros para todos los pacientes.

Fig. 36 Diagrama

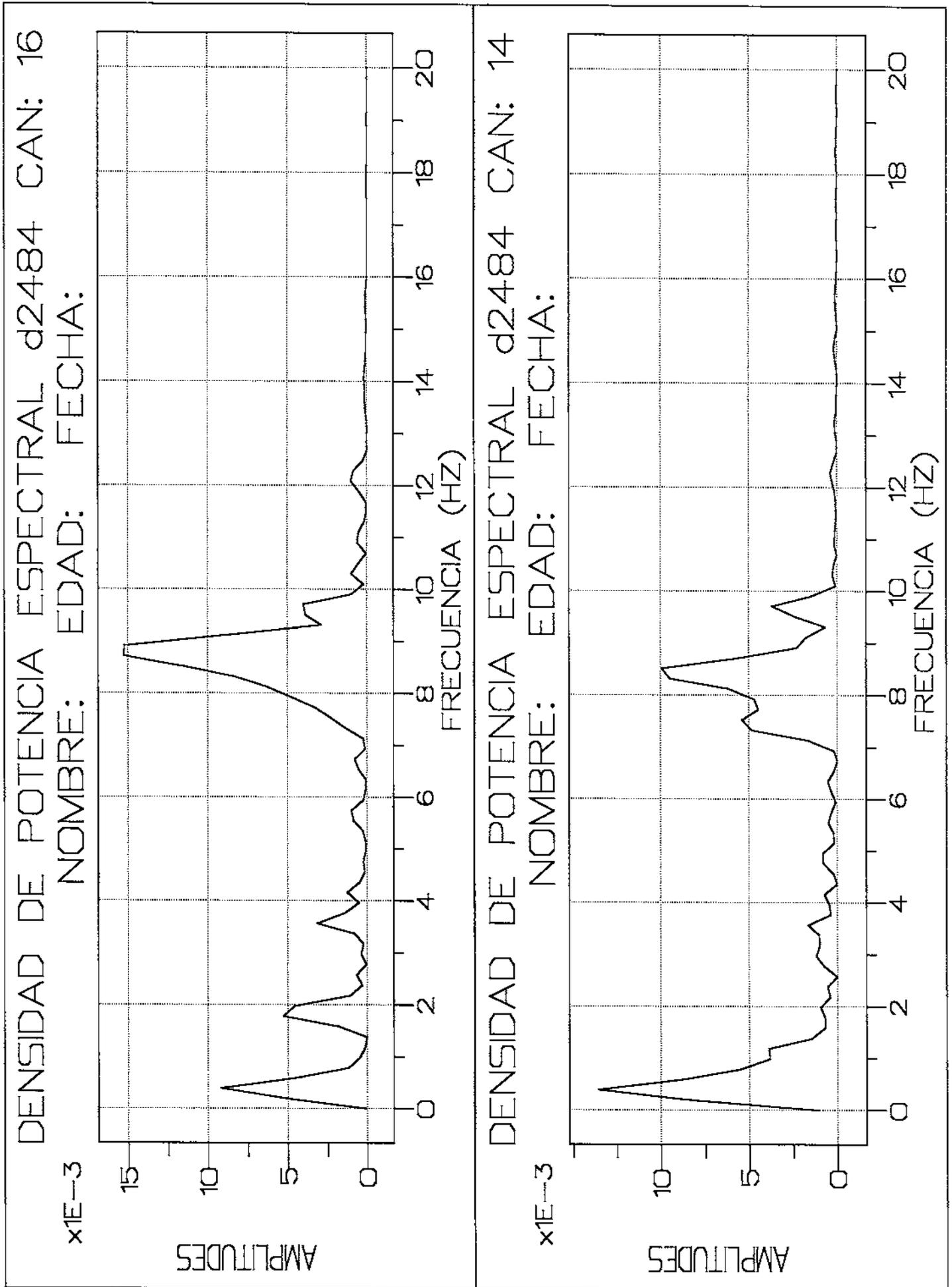




Ventana rectangular



Ventana Flattop



Ventana rectangular

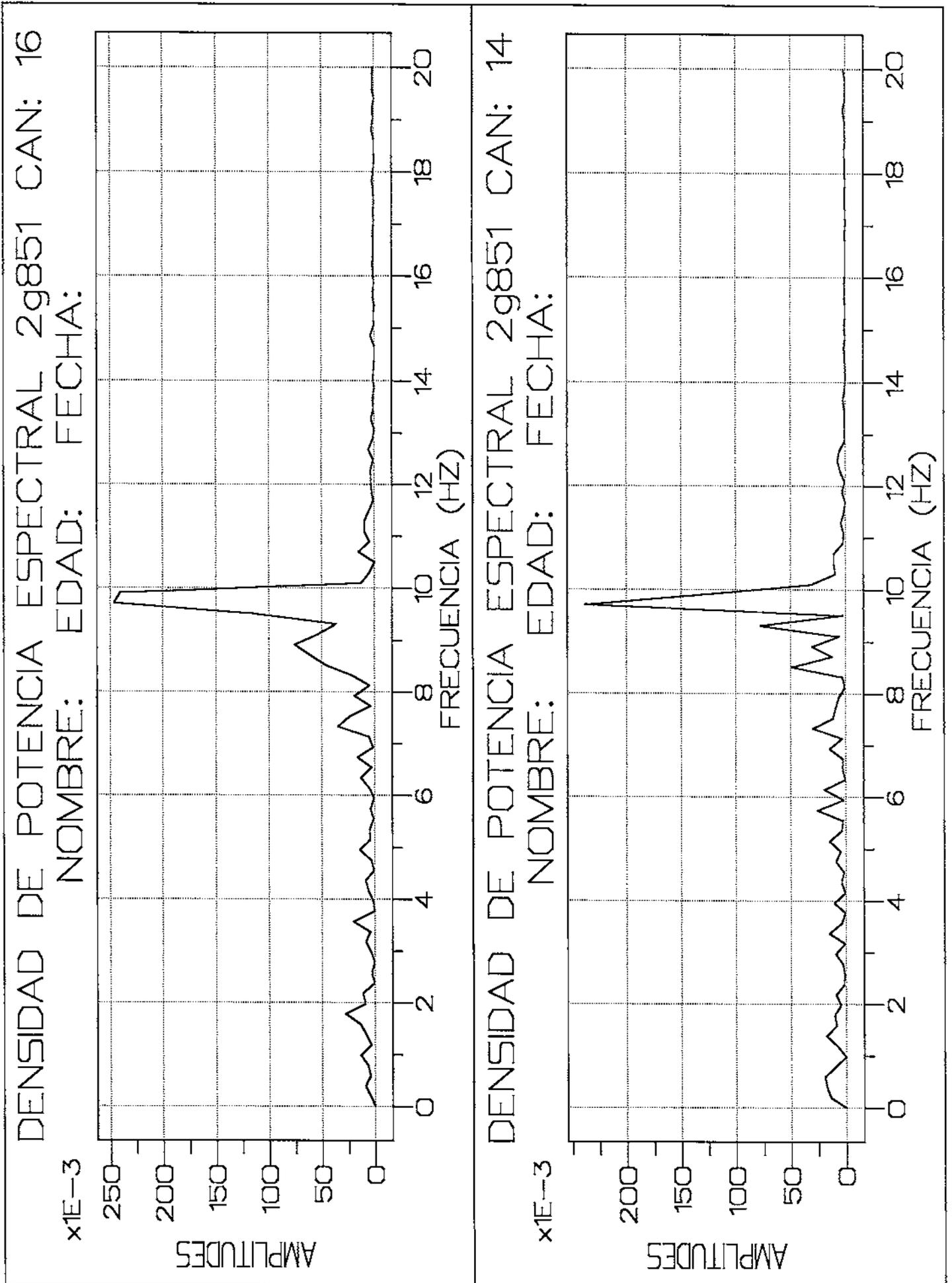
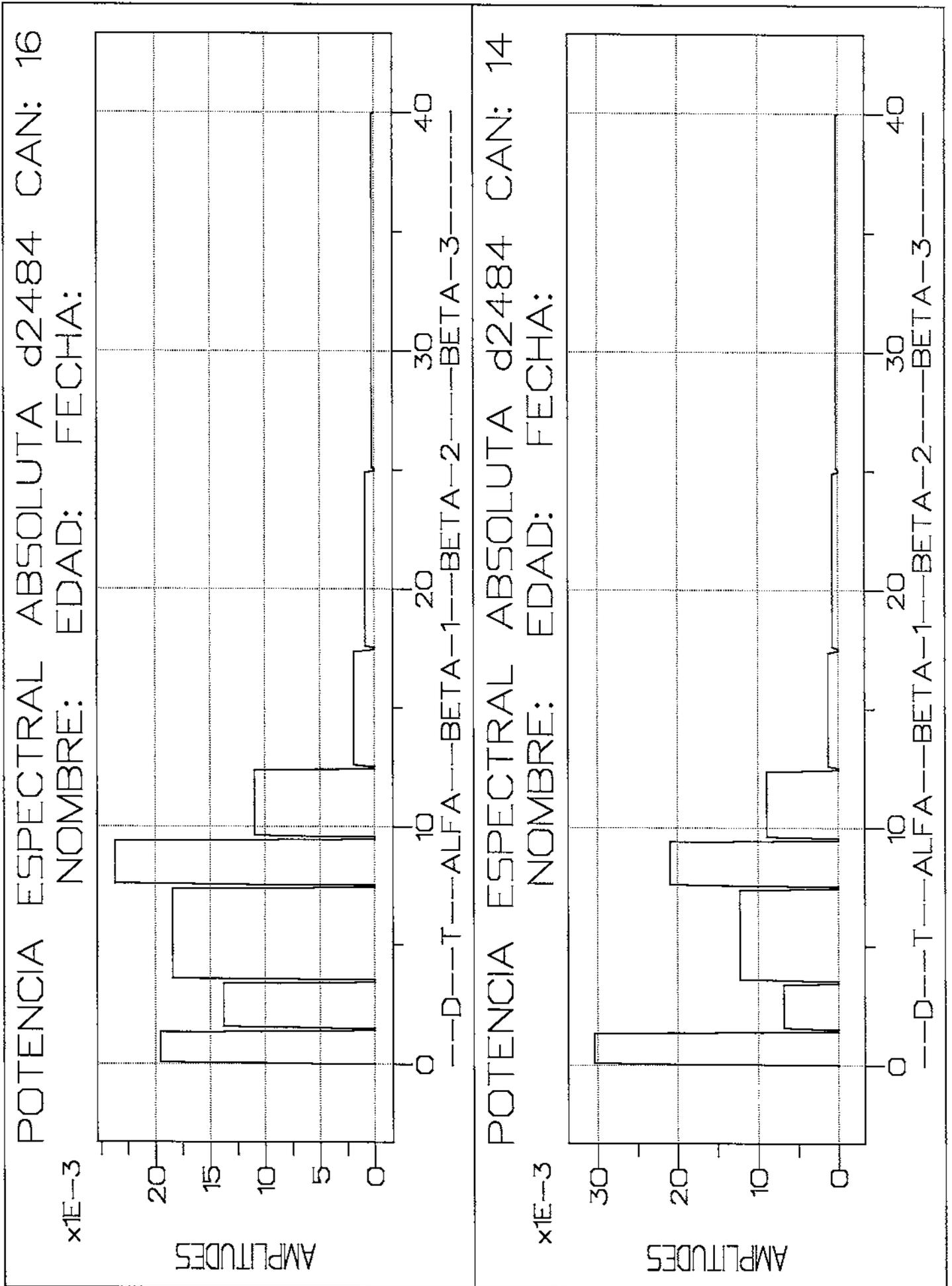
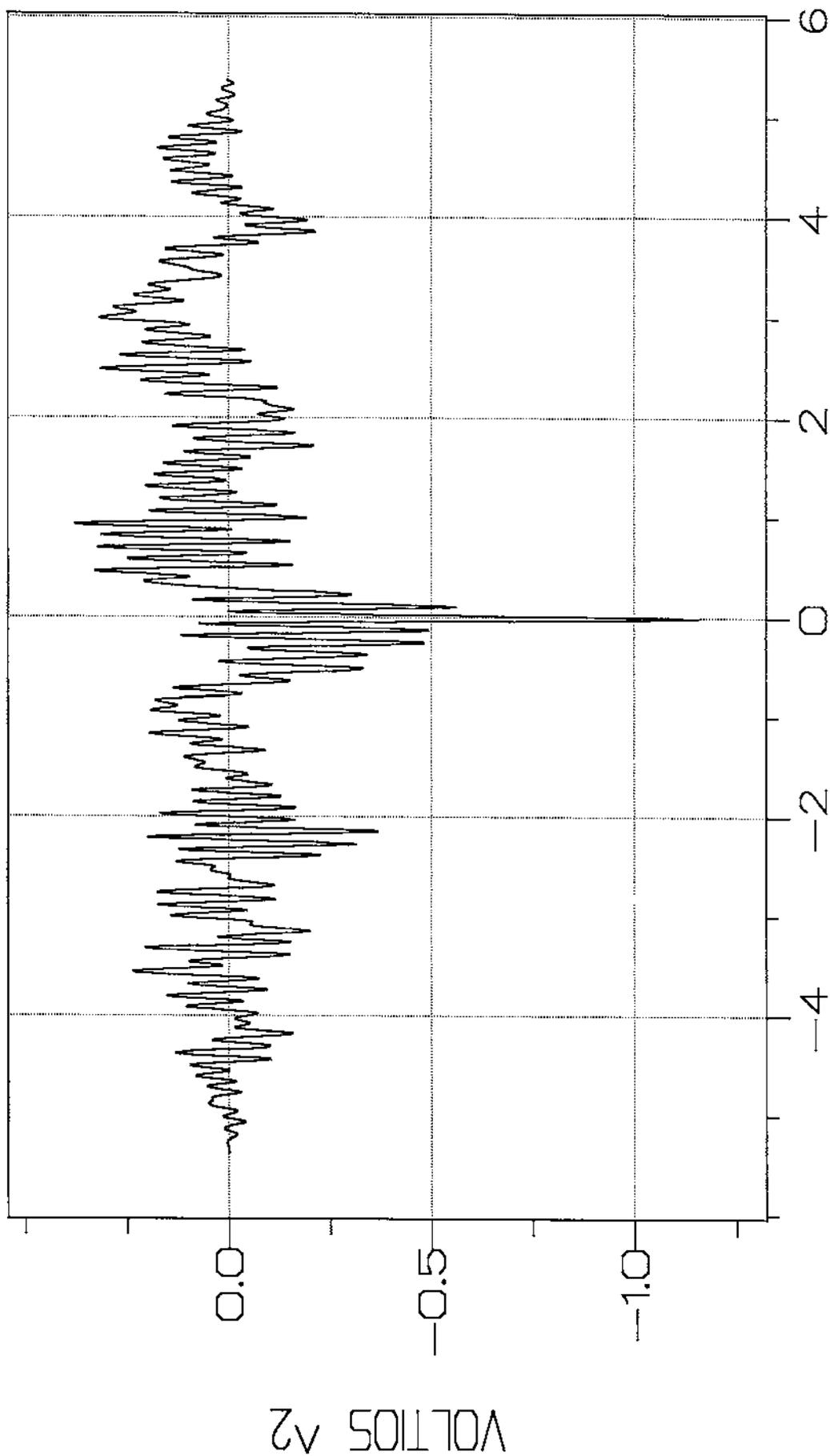


Fig. 41 Potencia espectral en bandas de frecuencia:  
sujeto de 6 años



CORRELACION d2484 CANALES: 14 & 16

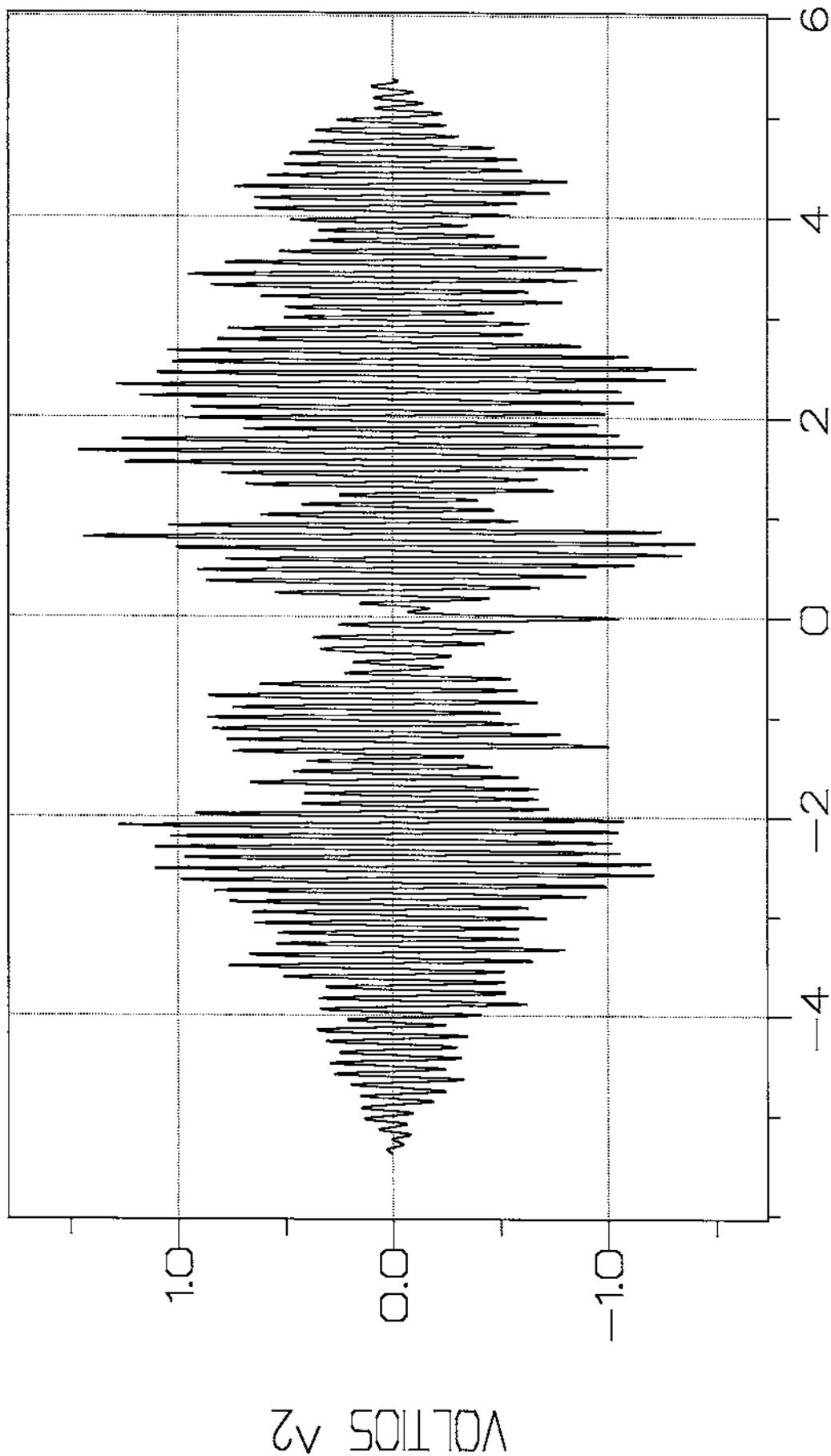
x1E-3 NOMBRE: EDAD: FECHA:



DESPLAZAMIENTO

CORRELACION 2g851 CANALES: 14 & 16

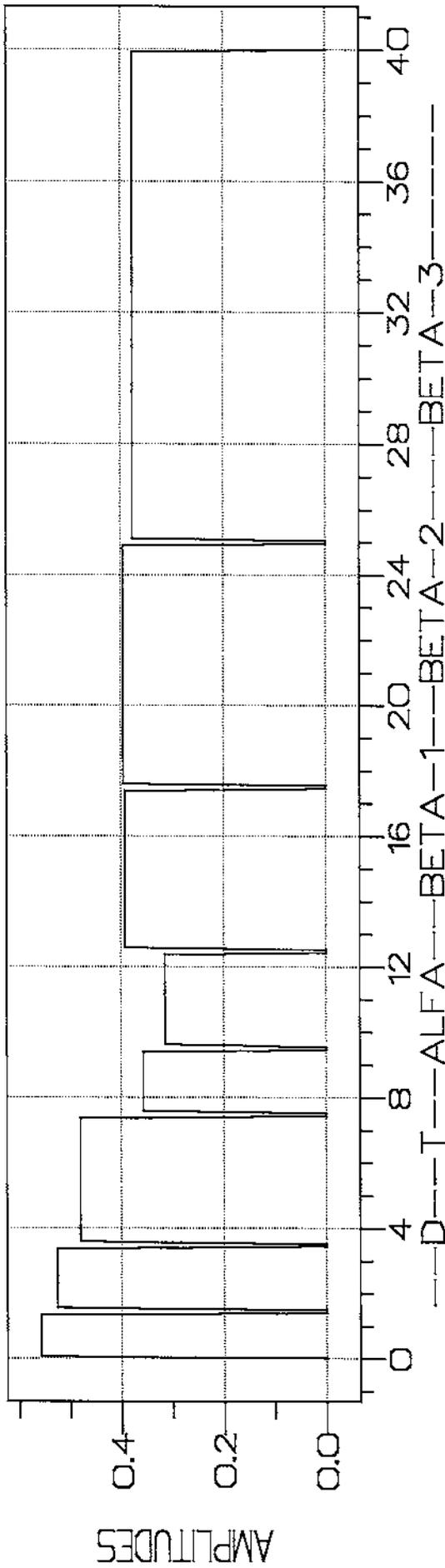
x1E-3 NOMBRE: EDAD: FECHA:



DESPLAZAMIENTO

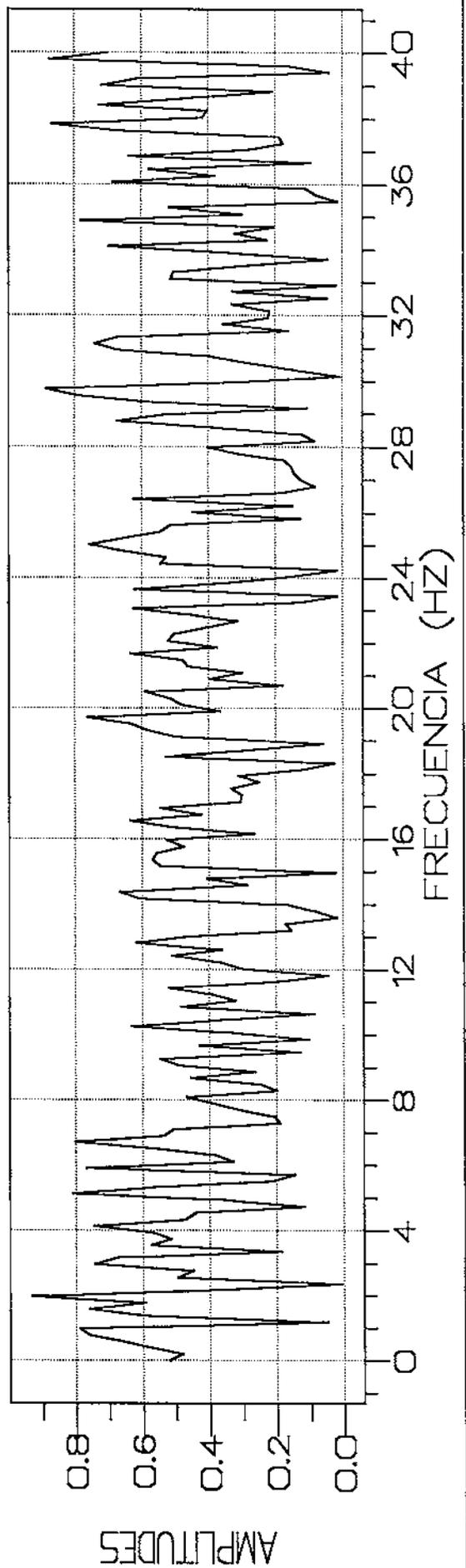
COHERENCIA d2484 CANALES: 14 & 16

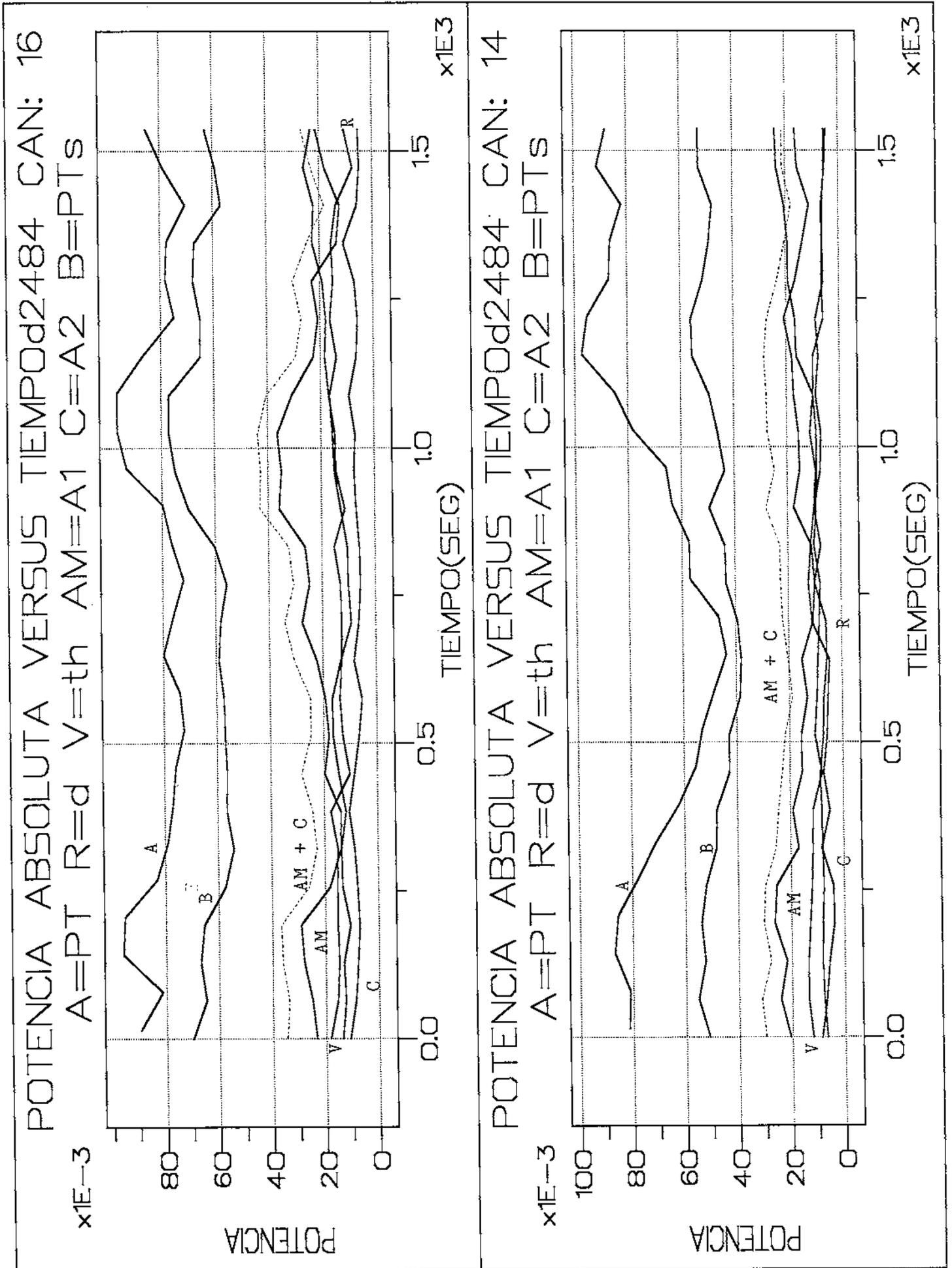
NOMBRE: EDAD: FECHA:

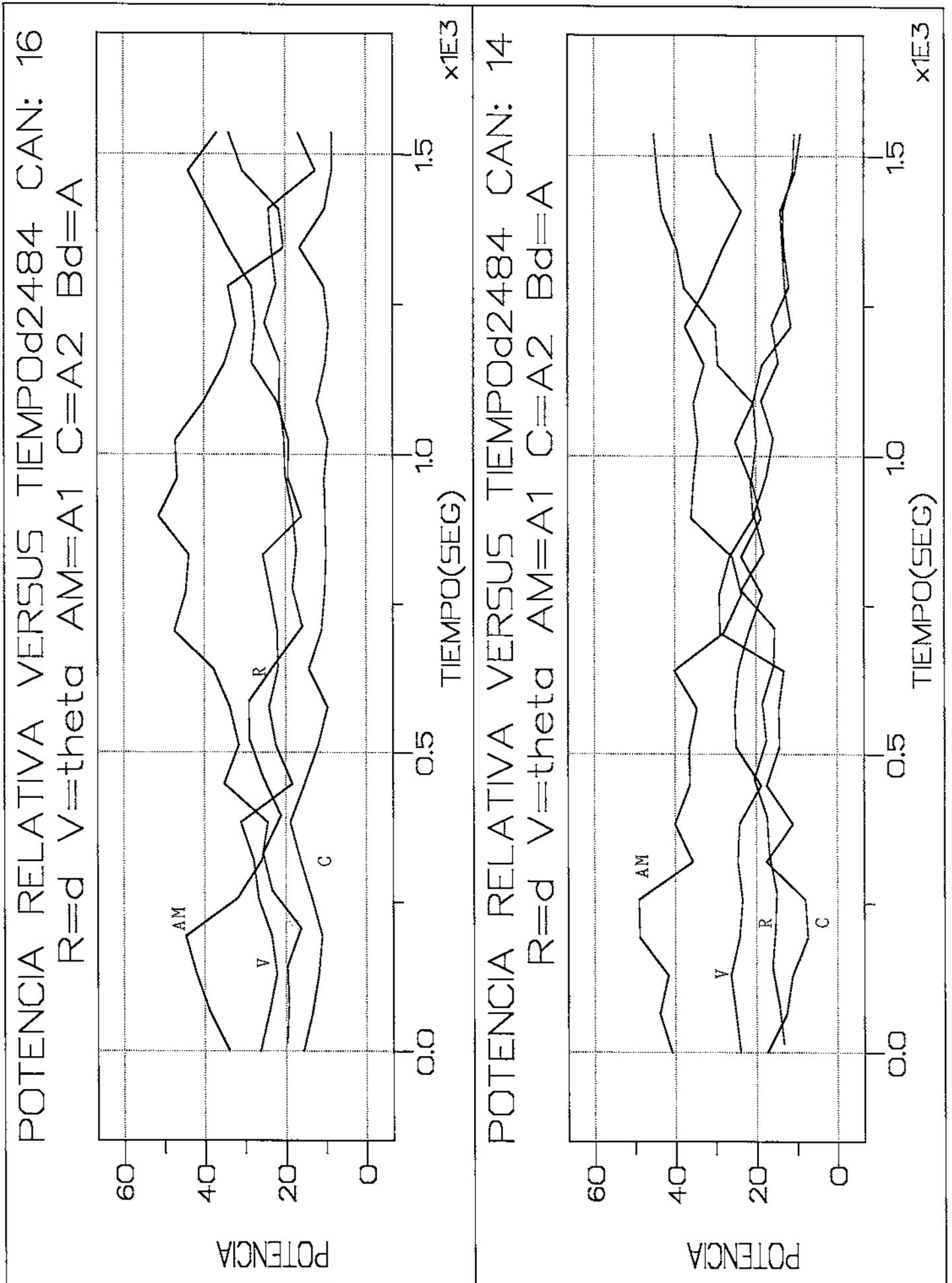


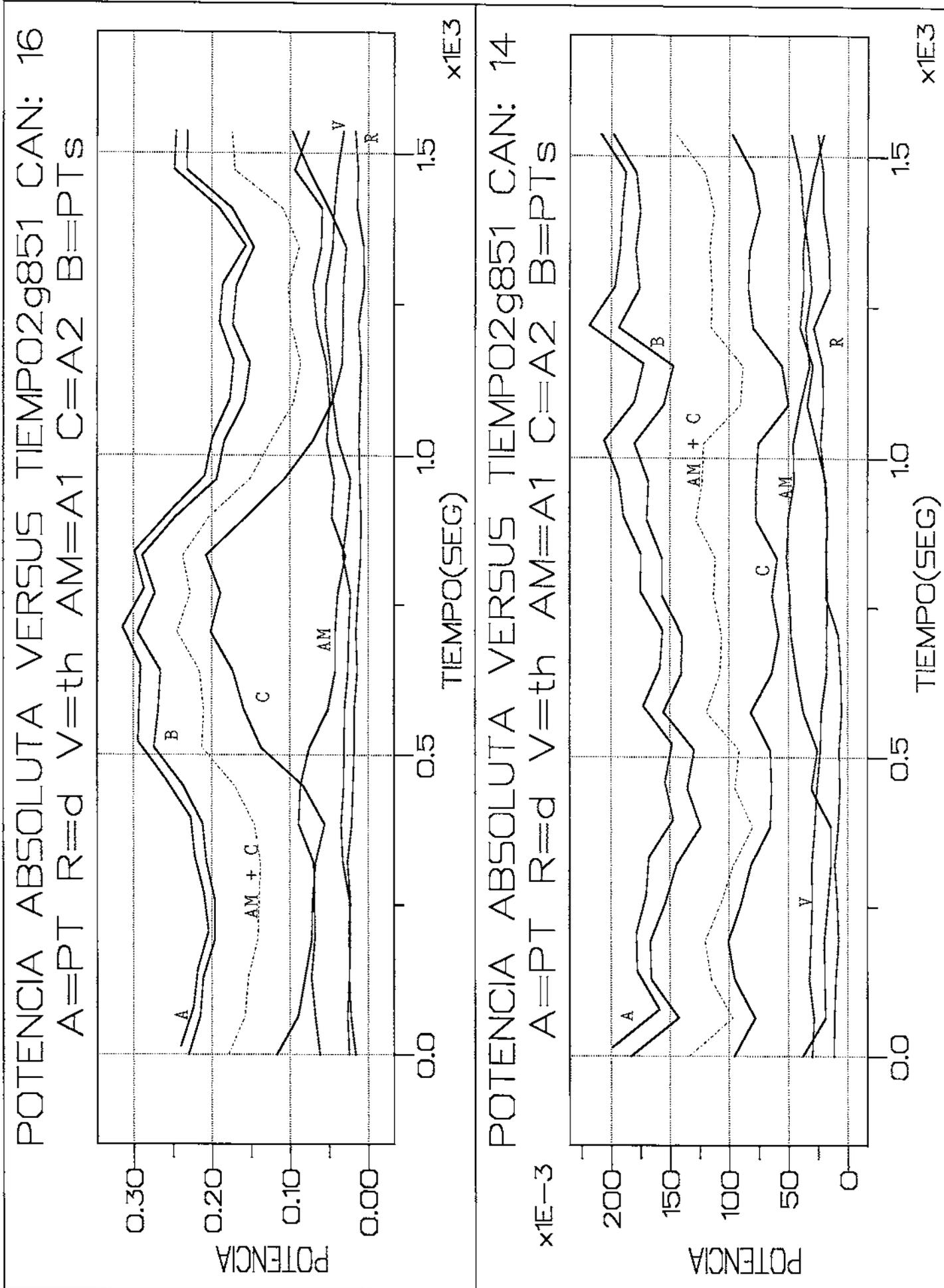
COHERENCIA d2484 CANALES: 14 & 16

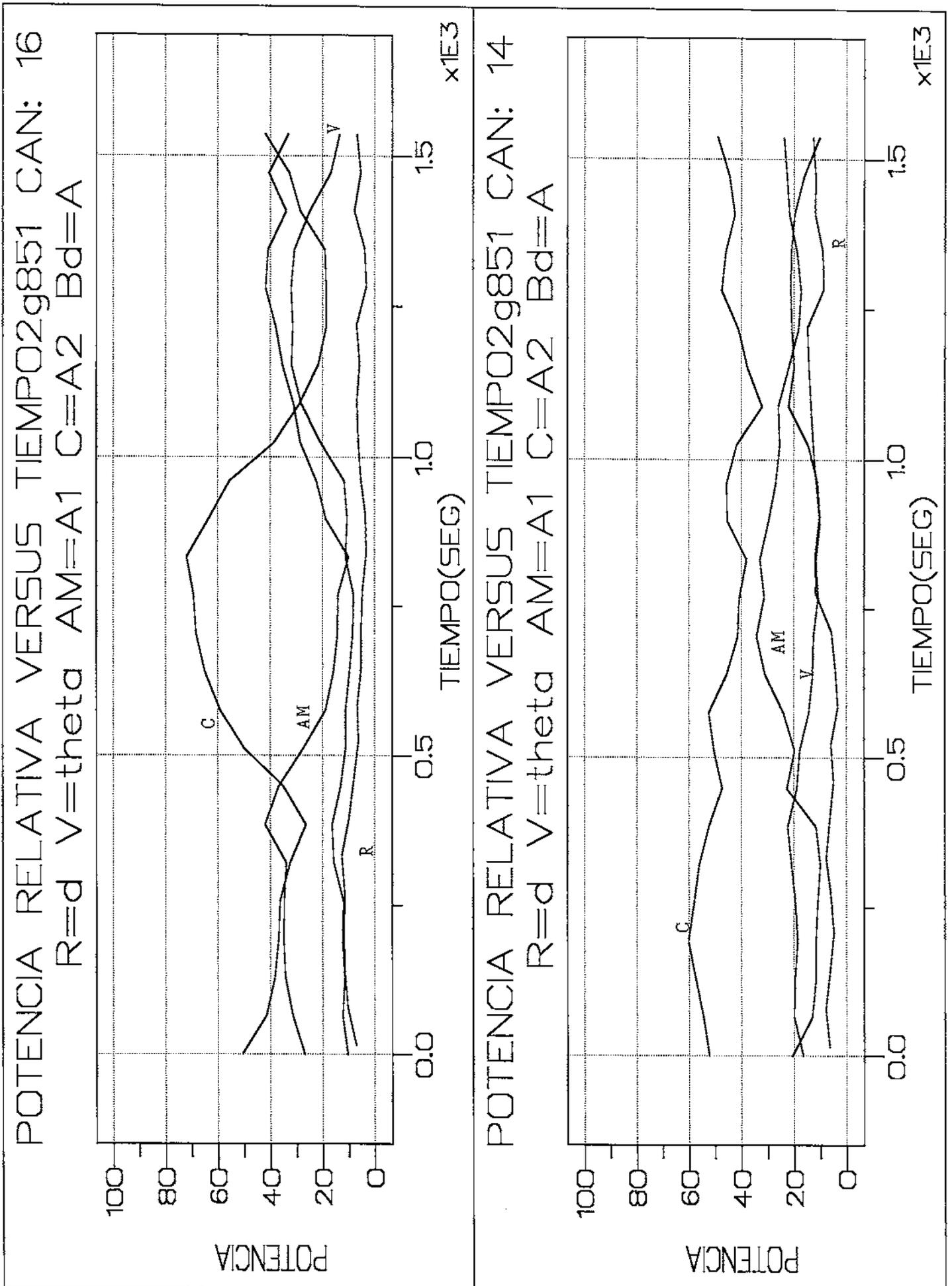
NOMBRE: EDAD: FECHA:











### 3.1 DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA DEL PROGRAMA DE PROCESAMIENTO

El programa se ha diseñado en forma modular, en base a funciones y con una estructura de overlays que maximiza la cantidad de memoria disponible para datos en el momento en que se están ejecutando las funciones de cálculo. Esto y la longitud del mismo (más 500 llamadas a funciones de librerías, bien para cálculos matemáticos o bien para representación gráfica) han obligado a particionarlo en varios ficheros. La primera división que se hizo fue entre funciones de gestión y funciones de cálculo. Pero incluso esta primera división fue demasiado simplista y pronto se requirió la división de cada una de estas partes en otras más simples. Esto garantiza que en los momentos de utilización de mayor cantidad de datos sólo estén en memoria las funciones imprescindibles. Además la gestión de la misma es totalmente dinámica ubicando y desubicando zonas de memoria constantemente según las necesidades. Esta fase de la programación requirió un trabajo largo y tedioso para poder asegurar que ninguna función dejaba memoria ocupada después de ser ejecutada. El control de la misma se llevó a cabo con las funciones heapdump y nheapdump que se describen más adelante y que permiten recorrer toda la memoria para saber que partes están ocupadas y cuales no. De esta manera se evita la fragmentación de memoria que podría impedir la correcta ejecución del programa. Con estas consideraciones la estructura final del programa es la siguiente:

- 1) Fichero include "variables.h".
- 2) Fichero include "Macros.h".
- 3) Fichero "Hosp\_i\_90.c".
- 4) Fichero "Inficha.c"
- 5) Fichero "Rutina.c"
- 6) Fichero "Menu.c"
- 7) Fichero "Tempo.c"
- 8) Fichero "Procesa4.c"

Seguidamente se describirán los contenidos de los mismos.

- 1) Fichero include "variables.h". En él se encuentra la declaración de tipo externa de todas las variables globales del programa.
- 2) Fichero include "Macros.h". Contiene la definición de todas las macros utilizadas en el resto de los programas para hacerlos más legibles.
- 3) Fichero "Hosp\_i\_90.c". Este programa es el primero de los que se encargan de la gestión y contiene:

- a) La declaración de todas las variables globales
- b) Funciones dedicadas a la generación de menús:

- **opciones**

Esta función copia en la matriz de caracteres *opcions* el nombre de las distintas opciones que se van a presentar en todos los menús. Actúa sobre la variable global *num\_menu* que es la que permite seleccionar un menú u otro.

- **eleccion**

Esta función contiene las posibles elecciones que se pueden hacer dentro de cada menú. Utiliza la variable *num\_menu* para saber en cual se encuentra y la variable *e* para seleccionar la opción elegida.

- **tecla1\_ansi**

Permanece a la espera de que se pulse una tecla de cursor o la tecla *<enter>*.

- **cursor**

Esta va cambiando el número de la opción de acuerdo con el movimiento del cursor y lo almacena en la variable *pf*.

- **pintamenu\_ansi**

Su objetivo es el imprimir el menú en los colores deseados y señalando en un color diferente la opción que saldría elegida si se pulsara la tecla *<enter>*. Esto se hace aprovechando las características del controlador ANSI.SYS

- **genera\_menu**

El propósito con el que se creó esta función fue únicamente el de ahorrar líneas de programa ya que la secuencia de ordenes que contiene se repetían muy a menudo.

- **general**

Esta función tiene el mismo propósito que la anterior sólo que es más general ya que contiene absolutamente toda la secuencia necesaria para generar un menú y elegir una de sus opciones. Como se ve, la función anterior forma parte de esta.

- c) Llamadas a 3 de los menús posibles

- **menudispositivo**

Nos permite elegir entre Pantalla, Impresora o Ploter.

- **menu\_vent**

Nos permite elegir entre las diferentes ventanas que se pueden aplicar al calcular la FFT.

- `menu_frec`

Nos permite elegir entre las diferentes representaciones en el dominio de la frecuencia.

d) Funciones gráficas

- `ini_graf`

Asigna el periférico elegido en `menudispositivo`

- `abre_graf`

Resetea el periférico elegido y asigna el color de los ejes

4) Fichero "Inficha.c"

Este fichero contiene una sola función, `introficha`, que permite crear la ficha de un paciente si esta no se hubiera generado en el momento de la adquisición. Como ya se ha comentado, se almacena el código de ganancia, el nombre del paciente, la edad, la fecha de toma del registro, el diagnóstico y comentarios al mismo.

5) Fichero "Rutina.c"

Este fichero contiene una serie de funciones que son poco utilizadas. El hecho de colocarlas a todas juntas obedece a la política de overlays con la que está hecho el programa. De esta manera, estas funciones sólo se encontrarán en memoria cuando se necesiten permitiendo obtener una mejora en las prestaciones al disponer durante el resto del tiempo de más memoria libre para datos.

- `inicializa`

Esta función inicializa variables y punteros globales.

- `asigna_modos`

Asume el modo `DISPLAY` para inicializar los gráficos (aunque luego se pueda modificar con `menudispositivo`).

- `desactiva`

Libera los punteros correspondientes a los datos de los dos canales que se suelen utilizar, desactiva el emulador de punto flotante y sale del programa

- `notecia2`

Caso de que se produzca un error de no existencia de fichero da el mensaje de error correspondiente.

- `password`

Pregunta el password de entrada al programa

- `mensaje`

Mensaje de que no se ha realizado la operación de lectura de datos

- `mensaje2`

Mensaje de que no se puede calcular la correlación para un único canal

- mensaje3

Mensaje de que no se pueden calcular histogramas para menos de 5.12 segundos. Esto está motivado por la poca cantidad de puntos que tendrían algunas bandas y por tanto su dificultad para calcularles la integral.

- mensaje4

Mensaje de que no se puede calcular la coherencia para menos de 5.12 segundos. Las razones son idénticas al caso anterior.

- mensajepro

Mensaje de "Procesando. Por favor espere..."

- cambio\_dir

Rutina para cambiar el directorio de trabajo

- num\_can

Rutina que se encarga de preguntar:

- 1) Comienzo del procesamiento en segundos
- 2) Número de canales (1 ó 2)
- 3) Número de cada canal que se vaya a leer

#### 6) Fichero "menu.c"

- setcursor

Con esta pequeña rutina se puede ocultar el cursor parpadeante cuando se espera por un movimiento del cursor o por una tecla.

- heapdump

Esta rutina permite explorar todo el espacio de memoria destinado a datos y comprobar que zonas de la memoria se encuentran ocupadas y cuales no.

- nheapdump

Su misión es la misma que la de la anterior pero se limita únicamente a un espacio de trabajo de 64 KB. Ambas funciones no están disponibles para el usuario pero están presentes en el programa a efectos de depuración cuando se añaden rutinas nuevas.

- leefichero

Permite la lectura de uno o dos ficheros (según el número de canales seleccionados) en código ASCII, lo asigna a las variables *matrix* y *matrix2* y a su vez crea a partir de estas matrices lo que se denomina una *forma de onda* y que no es más que una estructura en la que aparte de los datos se puede encontrar el título dado a

dicha forma de onda, el tamaño, el número de dimensiones, etc...

- **leebinario**

Realiza la misma misión que la rutina anterior pero leyendo uno o dos tramos diferentes de un mismo fichero escrito en forma binaria.

- **leetodo**

Esta función realiza la lectura del registro completo de cada canal, en lugar de estar limitado únicamente al número de segundos establecidos en la entrada del programa.

- **leebintodo**

El objetivo es el mismo que en el caso anterior pero para ficheros escritos en binario. Ambas rutinas son usadas por aquellas funciones que hacen referencia al registro completo como puedan ser la coherencia y la potencia por tramos.

- **setmatriz**

Esta rutina actúa siempre después que leetodo o leebintodo y permite extraer una submatriz de menor tamaño fijado el punto a partir del cual empieza a leer datos. Su utilidad se centra tanto en la coherencia como en la potencia por tramos. En estos casos se lee el registro completo y después se va desplazando el puntero y leyendo un número dado de datos en cada operación hasta llegar al final del registro.

- **leeficha**

Se limita a leer de fichero el contenido de las variables de ficha (ya explicadas anteriormente).

- **miraficha**

Presenta el contenido de una ficha por pantalla.

- **menugrafico**

Esta rutina contiene todas las posibles opciones de realización de cálculos por parte del programa. A continuación pasaremos a describir cada una de las opciones que lo configuran.

La primera opción es, naturalmente, la representación en el dominio temporal de las señales seleccionadas. Con este fin se llama al menú número 3 que es el que contiene las posibles escalas de representación de la señal y a continuación se llama a la rutina *temporal* que se encarga de llevar a cabo esta tarea.

La segunda opción constituye la representación en el dominio frecuencial de dichas señales. Por ello se llama a la rutina *frecuencia* que contiene todas las posibles opciones dentro de este

marco.

Si se elige la tercera opción se podrán conocer los parámetros estadísticos más importantes de la señal.

En cuarto lugar nos encontramos con la función que se encarga de representar la correlación de dos canales.

La quinta elección consiste en una llamada a la función *coherencia* tras la cual se vuelven a leer los datos originales pues como ya se ha visto dicha función opera sobre el registro completo.

La llamada a la función *potenciaxtramas* que representa la evolución de la potencia en cada una de las bandas a lo largo de todo el registro es la siguiente opción de este menú.

La penúltima elección es un retorno al menú principal y la última es la salida del programa.

- main

Esta rutina es la que conforma el programa principal y se ha preferido dejar el resultado de la elección dentro del menú en la misma en lugar de en la rutina *eleccion* ya que consta de llamadas a rutinas y de esta manera es más sencilla su depuración.

Se comienza inicializando variables y punteros. A continuación se asigna el modo gráfico a pantalla y se comprueba si en la llamada al programa se han introducido parámetros. Si así fuera se asigna el primer parámetro al nombre de fichero, el segundo al tipo de fichero (binario o ascii) y el tercero al código de ganancia. El programa pasa entonces a ejecutar directamente la rutina *prmcen*, que se comentará más adelante, en modo no interactivo y una vez finalizado se saldrá automáticamente del entorno. En caso de no haber entrado con parámetros el programa comenzará pidiendo el password. Si este es correcto entonces se muestra el menú principal que consta de las siguientes opciones:

- 1) SELECCION DE DATOS
- 2) LECTURA DE DATOS
- 3) ANALISIS T/F
- 4) INTRODUCIR FICHA
- 5) VISUALIZAR FICHA
- 6) RETORNO AL SISTEMA
- 7) CAMBIO DE DIRECTORIO
- 8) MULTICANAL

Si se elige la primera opción *nombrefichero* nos preguntará el

nombre y tipo de fichero. Si existe la ficha se nos preguntará que electroencefalógrafo fue usado ,*leeficha* extraerá el contenido de la misma y se ajustará el valor de la ganancia. Caso de que no exista ficha se nos preguntará, por menú, el código de ganancia. En cualquiera de los casos el siguiente paso es preguntar por menú el intervalo de tiempo a leer.

Si se elige la segunda opción *numcan* nos preguntará el instante inicial, el número de canales y el número de los canales a leer. A continuación se procederá a la lectura de los mismos bien en ascii o en binario.

El tercer caso nos llevará al menugrafico ya comentado

La cuarta opción nos permitirá la introducción de datos en una ficha.

La quinta elección nos dejará ver el contenido de la ficha de un paciente.

La sexta opción activará el cursor parpadeante, llamará a la función *desactiva* y saldrá del programa.

El séptimo lugar corresponde a la función *cambio\_dir* que permite cambiarnos de directorio.

Por último está la llamada a la rutina *prumcan* que permite el análisis no interactivo de todos los canales.

## 7) Fichero "tempo.c"

### a) Funciones de representación gráficas

En todas ellas se comienza inicializando los gráficos, a continuación se abre el periférico deseado (Pantalla, impresora o ploter) y se llama a las rutinas encargadas de hacer los cálculos y dibujar el resultado. Se hace una pausa que termina al pulsar una tecla y entonces se cierran los gráficos y se resetea el dispositivo usado.

#### - temporal

Esta función es la encargada de dibujar en el dominio temporal las gráficas del (o los) canales especificados.

#### - fo\_correla

Esta es la rutina encargada de hacer los cálculos de la función de correlación de los dos canales.

#### - correlacion

Esta función llama a la anterior y a continuación a la función que dibujará los resultados.

#### - dibuja

Esta rutina es la que se encarga de la representación de la mayoría de las gráficas. Antes de su llamada es preciso asignar un valor a la variable global *moda*. De esta manera la gráfica tendrá las etiquetas y el rango de representación adecuados. A continuación y según el número de canales a representar se establecerán las coordenadas de pantalla en las que aparecerá cada gráfica. El siguiente paso consiste en definir el conjunto de datos que representa al eje "x" y el conjunto de datos que representa al eje "y" a partir de los datos de la curva, se asignan los colores de las curvas, se escalan los ejes, se etiquetan, se pone el título y subtítulo a la gráfica, se dibujan los bordes y las marcas para la definición de escalas, se pinta la rejilla y después de enmarcar el gráfico se le da salida al dispositivo seleccionado.

- *dib\_2*

El modo de trabajo es el mismo que en el caso anterior sólo que al utilizarse únicamente para una sola tarea, no es necesario tener en cuenta tantos casos especiales. La diferencia consiste en la posibilidad de dibujar más de una curva, en un color diferente, en el mismo gráfico.

b) Funciones de cálculo únicamente.

- *estadistica*

Esta rutina calcula los parámetros estadísticos de las señales en consideración.

- *param\_estad*

Esta función es la que presenta en pantalla los resultados de la anterior.

c) Funciones de gestión de datos

Estas funciones se han creado únicamente para una mayor legibilidad del programa ya que la presentación de las mismas es algo más simple y clara que en las funciones originales y debido a la gran cantidad de veces con que son llamadas era preciso tener una forma simple de no cometer errores en las llamadas a las mismas.

- *crea*

Crea una estructura de datos de *forma de onda*.

- *copia*

Copia el contenido de una estructura a otra.

- *libera*

Libera la memoria ocupada por una estructura para que pueda

disponerse de la misma.

En estas tres funciones se basa la gestión dinámica de memoria del programa. Las estructuras de datos se crean en el momento que se necesitan, se opera con ellas y se copian los resultados a unas pocas formas de onda que están declaradas como variables globales. A medida que un estructura de datos deja de ser útil, es liberada de la memoria, lo que permite una mayor capacidad operativa del programa al evitar la fragmentación de memoria.

#### 8) Fichero "Procesa4.c"

En este fichero se encuentran todas las funciones relativas al análisis frecuencial de las señales.

##### - frecuencia

La misión de esta función consiste en llamar a *menu\_vent* para elegir el tipo de ventana a aplicar y a *menu\_frec* para decidir que tipo de operación se va a realizar.

##### - espectro

Esta rutina controla que tipo de representación en frecuencias se va a llevar a cabo. Si la variable de texto *modos* está vacía se llevará a cabo una representación de la densidad de potencia espectral, mientras que si contiene el texto "histo" se presentará un histograma de potencias absolutas por bandas de frecuencia. En el caso de representación continua el rango vendrá dado en la función elección.

##### - transforma

Esta función es la encargada de realizar los cálculos de la fft. En primer lugar crea las formas de ondas *real*, *invas*, *imag* y *fase*. Los datos de la señal de entrada se encuentran en la forma de onda *x* que se le pasa a la rutina como un parámetro. Se calcula la media y se le resta a la señal, almacenando el resultado en *invas*. A continuación se aplica la ventana sobre *invas* y el resultado se guarda en *real*, liberando la forma de onda *invas*. El siguiente paso consiste en aplicar la FFT a *real* e *invas* y almacenar el resultado en las formas de onda *re* e *im* que contienen la parte real y la imaginaria de la función transformada. A continuación se llama a la rutina *polar* para calcular el módulo (que se almacena en *real*) y la fase (que se almacena en *fase*). El módulo se eleva al cuadrado y se almacena en *real3*, liberando *real* e *imag*. Se extrae del módulo la parte de la primera hoja que se desea representar y se coloca en

*zona*, se copia *zona* a *subwave*, liberando *zona* y *real3*, se divide por el número de puntos que contiene la onda y se copia el resultado en *subwave*. Por último se vuelve a liberar *zona*. Aquellas formas de onda que no se ha liberado es porque son necesitadas en alguna rutina, siendo liberadas después de usarse.

- **bandas**

Esta rutina se encarga del cálculo de las potencias por bandas de frecuencia. Se comienza estableciendo los nombres, número de puntos en el gráfico de salida y número de Hz de cada banda. En principio estos valores se han puesto fijos ya que esta es una definición bastante estándar de las bandas de frecuencia en las que opera el cerebro. Sin embargo la estructura del programa permite el cambio de las mismas sin más que preguntar el ancho de cada banda en Hz y entonces calcular el número de puntos que contiene cada banda. A continuación se calcula la integral bajo toda la curva, lo que nos da la potencia total. Después se entra en un bucle en el cual se calcula, en la variable *x*, el número de puntos de la señal de entrada que corresponden a cada banda, su punto de inicio y su punto de final. En el siguiente bucle se calcula la media y la integral en cada una de las bandas.

- **bandas\_num**

Esta es una función cuyo objetivo no es pintar un gráfico sino presentar de forma numérica los valores de la media, la potencia absoluta, la potencia relativa y la potencia relativa después de filtrada la banda subdelta. Por ello en primer lugar hace una llamada a *transforma* para calcular la transformada de la función original. A continuación se llama a la rutina *bandas* explicada anteriormente y se presentan en pantalla los resultados.

- **coherencia**

Puesto que esta función está diseñada para operar con 512 puntos, si se eligiera un tamaño menor se daría un mensaje de error. A continuación se presenta el mensaje de procesando y comienza el cálculo. Dado que la primera versión del programa de adquisición sólo capturaba 20 segundos, esto permitía la partición de la señal en cuatro tramos únicamente. De ahí los límites del primer bucle que controla la parte del registro que estamos leyendo. Se ajusta la variable *inicia* al punto inicial de esa zona y se procede a la lectura de esa parte del fichero. El cálculo propiamente dicho se

lleva a cabo en cuatro etapas:

- 1) Cálculo de la DPE del primer canal y copia de las formas de ondas *re* e *im* a *reac* e *imac*.
- 2) Cálculo de la DPE del segundo canal y copia de las formas de onda *re* e *im* a *rey* e *imy*.
- 3) Cálculo de la DPE cruzada de ambas señales de la siguiente forma:

$$reca = reac\ rey + imac\ imy$$

$$imca = imac\ rey - reac\ imy$$

Es decir, *reca* contiene la parte real de la coherencia e *imca* la parte imaginaria.

- 4) Se suma la DPE actual con la anterior de la siguiente manera. En la primera etapa se crean las formas de onda *onda6*, *onda8*, *onda9* y *ondaim*.
  - a) Se suman *onda6* con *reca* y se almacena el resultado en *wd10*.
  - b) Se suman *onda8* con *wd5* y se almacena el resultado en *wd11*.
  - c) Se suman *onda9* con *wd6* y se almacena el resultado en *wd14*.
  - d) Se suman *imca* con *ondaim* y se almacena el resultado en *wd14*.
  - e) Se liberan las ondas que se han utilizado como intermediarias y se copia el contenido de *wd10* en *onda6* y se libera *wd10*.
  - f) El mismo proceso se lleva a cabo con *wd8* y *onda11*, *wd12* y *onda9* y *wd14* y *ondaim*.

Se procede de la misma manera en cada ejecución del bucle que controla la etapa y en la última se llevan a cabo las operaciones definitivas que consisten en:

- a) Multiplicar la DPE del primer canal (*onda8*) por la DPE del segundo (*onda9*).
- b) Calcular el cuadrado de la DPE cruzada entre ambos canales mediante la expresión:

$$pxy = \frac{1}{N^2} (onda6^2 + ondaim^2)$$

- c) Dividir el cuadrado de la DPE cruzada (*pxy*) por el producto de las DPE de cada canal (*wd7*)

En este punto ya sólo queda el pintar el resultado en forma continua y en forma de histograma.

- **potenciaxtramos**

Se comienza leyendo todo el registro correspondiente a los dos canales. El siguiente paso consiste en crear las principales formas

de onda que se van a utilizar. Una vez hecho esto comienza el cálculo propiamente dicho. El bucle exterior lleva la cuenta del número de tramos que se van a analizar. En principio se toman 25 etapas que corresponden a una longitud de 512 puntos por etapa y a un desplazamiento del origen de 64 puntos. El siguiente bucle asigna, mediante la rutina *set\_matrix*, los 512 puntos a las formas de onda correspondientes. A continuación, y como en el caso anterior, se calcula la DPE de cada uno de los canales y se crean las siguientes variables:

```
potx_delta    : Potencia total en la banda delta
potrelx_delta : Potencia relativa en la banda delta
potx_theta    : Potencia total en la banda theta
potrelx_theta : Potencia relativa en la banda theta
potx_alfa1    : Potencia total en la banda alfa1
potrelx_alfa1 : Potencia relativa en la banda alfa1
potx_alfa2    : Potencia total en la banda alfa2
potrelx_alfa2 : Potencia relativa en la banda alfa2
alfa_12       : Potencia total en alfa (alfa1+alfa2)
potx_total    : Potencia total
pot2to_sa     : Potencia total filtrada de subdelta
```

La *x* toma el valor 1 o 2 según se esté calculando sobre el primer o el segundo canal. Estas variables son vectores que toman un valor en cada una de las etapas. Una vez calculadas se pasa a dibujarlas en dos gráficas. Una de ellas representa la potencia total en ambos canales y la otra la potencia relativa.

- *prmcn*

Esta rutina realiza las mismas funciones que la anterior excepto que en lugar de dibujar los datos en pantalla los escribe en un fichero con formato *.m* legible por el MATLAB.

### 3.2 ORGANIGRAMA

A continuación mostramos el programa en forma de un pseudo-código. Básicamente se han puesto las llamadas a funciones y lo que contiene cada una de ellas. De esta forma, al estar completamente desarrolladas, el programa se puede ver como se ejecutaría en línea a partir de las opciones del menú principal o del menú gráfico. Esto permite una mejor comprensión del mismo,

al hacerlo más legible.

```

MAIN {
Inicializacion de variables y punteros
setcursor(_G_CURSOROFF)
si hay parámetros de entrada
    llama a prmcan
en caso contrario
    password
comienzo del programa
ajuste de variables
menuprincipal:
num_menu=1
genera_menu();
    opciones();
        "SELECCION DE DATOS  "
        "LECTURA DE DATOS  "
        "ANALISIS T/F      "
        "INTRODUCIR FICHA  "
        "VISUALIZAR FICHA  "
        "RETORNO AL SISTEMA "
        "CAMBIO DE DIRECTORIO "
        "MULTICANAL       "
pintamenu_ansi();
teclal_ansi();
switch(ch1)
casa 0:
    cursor();
        si cursor arriba
            pf=pf-1;
            pintamenu_ansi();
        si cursor abajo
            pf=pf+1
            pintamenu_ansi();
casa 1:
    pif = 1
    return(pif)
eligemp

```

```
si pif=0
    tecla1_ansi();
en caso contrario
    switch(el)
    caso 1:
        nombrefichero();
        "fichero en ASCII (a) o BINARIO (b)"
        pregunta tipo
        "NOMBRE DEL FICHERO"
        pregunta NFS
setcursor(_G_CURSOROFF);
si existe ficha
    lectura de ficha
en caso contrario
    num_menu=5;
    general();
    genera_menu();
    opciones();
    "± 10 VOLTIOS"
    "± 5 VOLTIOS"
    "± 2.5 VOLTIOS"
    "± 1.25 VOLTIOS"
    pintamenu_ansi();
    tecla1_ansi();
    switch(ch1)
    caso 0:
        cursor();
        si cursor arriba
            pf=pf-1;
            pintamenu_ansi();
        si cursor abajo
            pf=pf+1
            pintamenu_ansi();
    caso 1:
        pif = 1
        return(pif)
eligemv:
    si pif=0
```

```

    tecla1_ansi();
    switch(ch1)
    caso 0:
        cursor();
        si cursor arriba
            pf=pf-1;
            pintamenu_ansi();
        si cursor abajo
            pf=pf+1
            pintamenu_ansi();
    caso 1:
        pif = 1
        return(pif)
    en caso contrario
        eleccion();
        switch(e)
        caso 1:
            escala = 10;
        caso 2:
            escala = 5;
        caso 3:
            escala = 2.5;
        caso 4:
            escala = 1.25;
num_menu=4;
general();
    genera_menu();
    opciones();
        "5.12 SEGUNDOS "
        "2.56 SEGUNDOS "
        "1.28 SEGUNDOS "
    pintamenu_ansi();
    tecla1_ansi();
    switch(ch1)
    caso 0:
        cursor();
        si cursor arriba
            pf=pf-1;

```

```

        pintamenu_ansi();
    si cursor abajo
        pf=pf+1
        pintamenu_ansi();
    caso 1:
        pif = 1
        return(pif)
    eligemv:
        si pif=0
            tecla1_ansi();
            switch(ch1)
                caso 0:
                    cursor();
                    si cursor arriba
                        pf=pf-1;
                        pintamenu_ansi();
                    si cursor abajo
                        pf=pf+1
                        pintamenu_ansi();
                caso 1:
                    pif = 1
                    return(pif)
            en caso contrario
                eleccion();
                switch(e):
                    caso 1:
                        v=512
                    caso 2:
                        v=256
                    caso 3:
                        v=128
    num_menu=1;
    caso 2:
        num_can();
        "COMIENZO DE PROCESAMIENTO (SEG) "
        pregunta LI
        "NUMERO DE CANALES (1/2) "
        pregunta cer

```

```

"PRIMER CANAL"
pregunta VC[1]
"SEGUNDO CANAL"
pregunta VC[2]
setcursor(_GURSOROFF);
switch(tipo)
  caso 'a':
    leefichero(LI,v);
      Construye nombre con número de canal
      Busca en el entorno dado por DIR
      Abre fichero para lectura
      Lee datos hasta comienzo-1
      Lee datos hasta num_datos-1
      Convierte los dos bytes a cuentas
      Convierte cuentas en milivoltios
      Cierra fichero
      Convierte matriz a forma de onda
  caso 'b':
    leebinario(LI,v);
      Construye nombre con extensión .eeg
      Abre fichero en binario
      fstat del fichero
      si resultado !=0
        "Mala apertura de fichero"
      en caso contrario
        Determina tamaño fichero
        Determina número de puntos que
        corresponden a cada canal
        Calcula inicio del canal a
        representar
      Cierra el fichero
      Abre el fichero en modo lectura binario
      Desplaza puntero hasta posición inicio
      Lee datos hasta comienzo-1
      Lee datos hasta num_datos-1
      Convierte los dos bytes a cuentas
      Convierte cuentas en milivoltios
      Cierra fichero

```

*Convierte matriz a forma de onda*

caso 3:

goto menugrafico;

caso 4:

introficha();

"Nombre Fichero"

pregunta nombrefich

"GANANCIA 0-(±10) 1-(±5) 2-(±2.5) 3-(±1.25) "

pregunta codigo

"Edad "

pregunta edad

"Fecha"

pregunta fecha

"Diagnostico"

pregunta diagnostico

"Comentarios"

pregunta comentarios

escribe respuestas a fichero

caso 5:

mira\_ficha();

*Construye nombre con extensión ".inf"*

leeficha();

*lee código**lee nombre**lee edad**lee fecha**lee diagnostica**lee comentarios*

"FECHA DE ADQUISICION DE EEG", fecha

"NOMBRE DEL FICHERO", file

"NOMBRE DEL PACIENTE", nombre

"EDAD", edad

"DIAGNOSTICO", diagnostico

"COMENTARIOS", comentarios

"GANANCIA : ±", 10/(2<sup>codgain</sup>)

caso 6:

setcursor(\_G\_CURSORON);

desactiva();

```

    libera las formas de onda
    de los dos canales
    dsabl_fpe();
    _exit(0);
caso 7:
    cambio_dir();
    "Nuevo directorio > "
    pregunta dir
    putenv dir
caso 8:
    prmcan();
    si se entró con argumentos
        setcursor(_G_CURSORON);
        desactiva();
        libera las formas de onda
        de los dos canales
        dsabl_fpe();
        _exit(0);
    fin del switch
goto menuprincipal;
menugráfico:
si no se han leído datos
    goto menuprincipal
num_menu=2;
genera_menu();
    opciones();
        "REPRESENTACION TEMPORAL      "
        "REPRESENTACION FRECUENCIAL  "
        "PARAMETROS ESTADISTICOS      "
        "CORRELACION                   "
        "COHERENCIA                     "
        "POTENCIA POR TRAMOS           "
        "RETORNO AL MENU PRINCIPAL    "
        "RETORNO AL SISTEMA            "
    pintamenu_ansi();
    teclal_ansi();
    switch(ch1)
    caso 0:

```

```

        cursor();
        si cursor arriba
            pf=pf-1;
            pintamenu_ansi();
        si cursor abajo
            pf=pf+1
            pintamenu_ansi();
    caso 1:
        pif = 1
        return(pif)
si pif=0
    tecla1_ansi();
en caso contrario
    switch(e)
    caso 1:
        num_menu=3;
        general();
        genera_menu();
        opciones();
        "± .025 M-VOLTIOS"
        "± .5 M-VOLTIOS"
        "± .1 M-VOLTIOS"
        "± .25 M-VOLTIOS"
        "± .5 M-VOLTIOS"
        "± 1.0 M-VOLTIOS"
        " AUTOESCALADO"
    pintamenu_ansi();
    tecla1_ansi();
    switch(ch1)
    caso 0:
        cursor();
        si cursor arriba
            pf=pf-1;
            pintamenu_ansi();
        si cursor abajo
            pf=pf+1
            pintamenu_ansi();
    caso 1:

```

```
pif = 1
return(pif)
eligemv:
  si pif=0
    tecla1_ansi();
    switch(ch1)
      caso 0:
        cursor();
        si cursor arriba
          pf=pf-1;
          pintamenu_ansi();
        si cursor abajo
          pf=pf+1
          pintamenu_ansi();
      caso 1:
        pif = 1
        return(pif)
  en caso contrario
    eleccion();
    switch (e)
      casa 1:
        maxey=0.025
        miney=-0.025
        ee=1;
      casa 2:
        maxey=0.05
        miney=-0.05
        ee=1;
      casa 3:
        maxey=0.1
        miney=-0.1
        ee=1;
      casa 4:
        maxey=0.250
        miney=-0.250
        ee=1;
      casa 5:
        maxey=0.500
```

```

        miney=-0.500
        ee=1;
    caso 6:
        maxey=1
        miney=-1
        ee=1;
    caso 7:
        ee=1;
temporal();
ini_graf();
gr_init();
menudispositivo();
switch(adf)
    caso 0:
        devs="DISPLAY"
    caso 1:
        devs="PRINTER"
    asigna el periférico devs
mensajepro();
    "Procesando. Por favor espere..."
modo=2;
Desde primer_canal hasta_ultimo_canal
switch(canal)
    caso 1:
        abre_graf();
        mensajepro();
        "Procesando. Por favor espere..."
        dibuja(primer canal);
    caso 2:
        dibuja(segundo canal);
    pausa
    cerrar grafico
    reset de dispositivo
setcursor(_G_CURSOROFF);
caso 2:
frecuencia();
    menu_vent()
    num_menu=7

```

```

general();
genera_menu();
opciones();
    " VENTANA RECTANGULAR "
    " VENTANA TRIANGULAR "
    " VENTANA HANNING      "
    " VENTANA HAMMING     "
    " VENTANA BLACKMAN    "
    " VENTANA FLATTOP     "
pintamenu ansi();
tecla1_ansi();
    switch(ch1)
    caso 0:
        cursor();
        si cursor arriba
            pf=pf-1;
            pintamenu_ansi();
        si cursor abajo
            pf=pf+1
            pintamenu_ansi();
    caso 1:
        pif = 1
        return(pif)
eligemv:
    si pif=0
        tecla1_ansi();
        switch(ch1)
        caso 0:
            cursor();
            si cursor arriba
                pf=pf-1;
                pintamenu_ansi();
            si cursor abajo
                pf=pf+1
                pintamenu_ansi();
        caso 1:
            pif = 1
            return(pif)

```

```

en caso contrario
    eleccion();
    eko=e-1;
menu_frec();
num_menu=8
general();
genera_menu();
opciones();
    " REPRESENTACION ESPECTRAL CONTINUA [40 Hz]    "
    " REPRESENTACION ESPECTRAL CONTINUA [50 Hz]    "
    " REPRESENTACION ESPECTRAL CONTINUA [20 Hz]    "
    " REPRESENTACION ESPECTRAL POR BANDAS GRAFICA  "
    " REPRESENTACION ESPECTRAL POR BANDAS NUMERICA "
pintamenu ansi();
tecla1_ansi();
switch(ch1)
    caso 0:
        cursor();
        si cursor arriba
            pf=pf-1;
            pintamenu_ansi();
        si cursor abajo
            pf=pf+1
            pintamenu_ansi();
    caso 1:
        pif = 1
        return(pif)
eligemv:
    si pif=0
        tecla1_ansi();
        switch(ch1)
            caso 0:
                cursor();
                si cursor arriba
                    pf=pf-1;
                    pintamenu_ansi();
                si cursor abajo
                    pf=pf+1

```

```

        pintamenu_ansi();
    caso 1:
        pif = 1
        return(pif)
en caso contrario
    eleccion();
    switch (e)
    caso 1:
        modos="";
        DIVISION=2.5;
        f=40;
        espectro();
        si modos="histo" y VV < 512
            mensaje3();
            "IMPOSIBLE CALCULAR BANDAS PARA
            MENOS DE 5.12 SEG."
            "PULSAR CUALQUIER TECLA"
        en caso contrario
            ini_graf();
            gr_init();
            menudispositivo();
            switch(adf)
            caso 0:
                devs="DISPLAY"
            caso 1:
                devs="PRINTER"
            asigna el periférico devs
        transforma(canal)
            crear formas de onda
            restar media a la señal
            aplicar la ventana
            calcular la FFT
            determinar módulo y fase
            elevar módulo al cuadrado
            led=(v/DIVISION)
            extraer led puntos de la transformada.
            dividir por el número de puntos
        abre_graf();

```

```

si modos="histo" y v = 512
  bandas(transformada)
  nombre de las bandas
  ancho en puntos para gráfico
  ancho en Hertz de cada banda
  Integra toda la transformada
  Asigna el valor a It (Pot total)
  Para cada banda
    calcula su comienzo y su fin
  Para cada banda
    Extrae la curva entre comienzo y fin.
    Calcula la media de la subzona
    Calcula la integral de la subzona.
    Construye el histograma con los valores
    calculados
    Construye la forma de onda resultante
  dibuja(histograma)
en caso contrario
  dibuja(transformada)
pausa
cerrar gráfico
reset de dispositivo

```

*caso 2:*

```

modos="";
DIVISION=2;
f=50;
espectro();
  si modos="histo" y VV < 512
    mensaje3();
    "IMPOSIBLE CALCULAR BANDAS PARA
    MENOS DE 5.12 SEG."
    "PULSAR CUALQUIER TECLA"
  en caso contrario
    ini_graf();
    gr_init();
    menudispositiva();
    switch(adf)
  caso 0:

```

```

        devs="DISPLAY"
    casa 1:
        devs="PRINTER"
        asigna el periférico devs
transforma(canal)
    crear formas de onda
    restar media a la señal
    aplicar la ventana
    calcular la FFT
    determinar módulo y fase
    elevar módulo al cuadrado
    led=(v/DIVISION)
    extraer led puntos de la transformada.
    dividir por el número de puntos
abre_graf();
si modos="histo" y v = 512
    bandas(transformada)
    nombre de las bandas
    ancho en puntos para gráfico
    ancho en Hertz de cada banda
    Integra toda la transformada
    Asigna el valor a It (Pot total)
    Para cada banda
        calcula su comienzo y su fin
    Para cada banda
        Extrae la curva entre comienzo y fin.
        Calcula la media de la subzona
        Calcula la integral de la subzona.
        Construye el histograma con los valores
        calculados
        Construye la forma de onda resultante
    dibuja(histograma)
en caso contrario
    dibuja(transformada)
pausa
cerrar gráfico
reset de dispositivo
casa 3:

```

```

modos="";
DIVISION=5;
f=20;
espectro();
  si modos="histo" y VW < 512
    mensaje3();
    "IMPOSIBLE CALCULAR BANDAS PARA
    MENOS DE 5.12 SEG."
    "PULSAR CUALQUIER TECLA"
  en caso contrario
    ini_graf();
    gr_init();
    menudispositiva();
    switch(adf)
      caso 0:
        devs="DISPLAY"
      caso 1:
        devs="PRINTER"
        asigna el periferico devs
    transforma(canal)
      crear formas de onda
      restar media a la señal
      aplicar la ventana
      calcular la FFT
      determinar módulo y fase
      elevar módulo al cuadrado
      led=(v/DIVISION)
      extraer led puntos de la transformada.
      dividir por el número de puntos
    abre_graf();
  si modos="histo" y v = 512
    bandas(transformada)
    nombre de las bandas
    ancho en puntos para gráfico
    ancho en Hertz de cada banda
    Integra toda la transformada
    Asigna el valor a It (Pot total)
    Para cada banda

```

```

        calcula su comienzo y su fin
    Para cada banda
        Extrae la curva entre comienzo y fin.
        Calcula la media de la subzona
        Calcula la integral de la subzona.
        Construye el histograma con los valores
        calculados
        Construye la forma de onda resultante
    dibuja(histograma)
en caso contrario
    dibuja(transformada)
pausa
cerrar gráfico
reset de dispositivo

```

*caso 4:*

```

modos="histo";
DIVISION=2.5;
f=40;
espectro();
    si modos="histo" y VV < 512
        mensaje3();
        "IMPOSIBLE CALCULAR BANDAS PARA
        MENOS DE 5.12 SEG."
        "PULSAR CUALQUIER TECLA"
en caso contrario
    ini_graf();
        gr_init();
        menudispositiva();
        switch(adf)
        caso 0:
            devs="DISPLAY"
        caso 1:
            devs="PRINTER"
            asigna el periférico devs
transforma(canal)
    crear formas de onda
    restar media a la señal

```

```

    aplicar la ventana
    calcular la FFT
    determinar módulo y fase
    elevar módulo al cuadrado
    led=(v/DIVISION)
    extraer led puntos de la transformada.
    dividir por el número de puntos
abre_graf();
si modos="histo" y v = 512
    bandas(transformada)
    nombre de las bandas
    ancho en puntos para gráfico
    ancho en Hertz de cada banda
    Integra toda la transformada
    Asigna el valor a It (Pot total)
    Para cada banda
        calcula su comienzo y su fin
    Para cada banda
        Extrae la curva entre comienzo y fin.
        Calcula la media de la subzona
        Calcula la integral de la subzona.
        Construye el histograma con los valores
        calculados
        Construye la forma de onda resultante
    dibuja(histograma)
en caso contrario
    dibuja(transformada)
pausa
cerrar gráfico
reset de dispositivo

```

*caso 5:*

```

bandas_num();
DIVISION=2.5;
mensajepro();
    "Procesando. Por favor espere..."
transforma();
    crear formas de onda
    restar media a la señal

```

```

    aplicar la ventana
    calcular la FFT
    determinar módulo y fase
    elevar módulo al cuadrado
    led=(v/DIVISION)
    extraer led puntos de la transformada.
    dividir por el número de puntos
bandas();
    nombre de las bandas
    ancho en puntos para gráfico
    ancho en Hertz de cada banda
    Integra toda la transformada
    Asigna el valor a It (Pot total)
    Para cada banda
        calcula su comienzo y su fin
    Para cada banda
        Extrae la curva entre comienzo y fin.
        Calcula la media de la subzona
        Calcula la integral de la subzona.
        Construye el histograma con los valores
        calculados
    Construye la forma de onda resultante

```

```
"BANDA  MEDIA POTENCIA ABS POTENCIA REL POTREL FILT"
```

```
nombrebanda,media2,In,100*In/It,100*pot/(It-pot[0])
```

```
setcursor(_G_CURSOROFF);
```

caso 3:

```
estadística();
```

```
Para cada canal
```

```
calcula media, desv. std, varianza y cof. de variab.
```

```
param_estad();
```

```
"CANAL = ",VC[j]
```

```
"MEDIA = ",mean1
```

```
"DESVIACION ESTANDARD = ",std1
```

```
"VARIANZA = ",var1
```

```
"VALOR CUADRATICO MEDIO = ",rms1
```

```
"COEFICIENTE DE VARIABILIDAD = ",mean1/std1
```

```
setcursor(_G_CURSOROFF);
```

caso 4:

```
correlacion();
modo=1;
si sólo hay un canal
    mensaje2();
ini_graf();
mensajepro();
    "Procesando. Por favor espere..."
fo_correla(primer canal, segundo canal);
abre_graf
mensajepro();
    "Procesando. Por favor espere..."
dibuja(resultado);
pausa
cerrar graficos
liberar forma de onda resultado
reset de dispositivo
setcursor(_G_CURSOROFF);
caso 5:
coherencia();
switch(tipo)
caso 'a'
    leefichero(LI,V);
        Construye nombre con número de canal
        Busca en el entorno dado por DIR
        Abre fichero para lectura
        Lee datos hasta comienzo-1
        Lee datos hasta num_datos-1
        Convierte los dos bytes a cuentas
        Convierte cuentas en milivoltios
        Cierra fichero
        Convierte matriz a forma de onda
caso 'b'
    leebinario(LI,V);
        leebinario(LI,v);
        Construye nombre con extensión .eeg
        Abre fichero en binario
        fstat del fichero
        si resultado !=0
```

"Mala apertura de fichero"  
 en caso contrario  
 Determina tamaño fichero  
 Determina número de puntos que  
 corresponden a cada canal  
 Calcula inicio del canal a  
 representar  
 Cierra el fichero  
 Abre el fichero en modo lectura binario  
 Desplaza puntero hasta posición inicio  
 Lee datos hasta comienzo-1  
 Lee datos hasta num\_datos-1  
 Convierte los dos bytes a cuentas  
 Convierte cuentas en milivoltios  
 Cierra fichero  
 Convierte matriz a forma de onda

caso 6:

```
potenciaxtramos();
switch(tipo)
caso 'a'
  leefichero(LI,V);
    Construye nombre con número de canal
    Busca en el entorno dado por DIR
    Abre fichero para lectura
    Lee datos hasta comienzo-1
    Lee datos hasta num_datos-1
    Convierte los dos bytes a cuentas
    Convierte cuentas en milivoltios
    Cierra fichero
    Convierte matriz a forma de onda
```

caso 'b'

```
leebinario(LI,V);
  Construye nombre con extensión .eeg
  Abre fichero en binario
  fstat del fichero
  si resultado !=0
    "Mala apertura de fichero"
  en caso contrario
```

*Determina tamaño fichero*  
*Determina número de puntos que*  
*corresponden a cada canal*  
*Calcula inicio del canal a*  
*representar*  
*Cierra el fichero*  
*Abre el fichero en modo lectura binario*  
*Desplaza puntero hasta posición inicio*  
*Lee datos hasta comienzo-1*  
*Lee datos hasta num\_datos-1*  
*Convierte los dos bytes a cuentas*  
*Convierte cuentas en milivoltios*  
*Cierra fichero*  
*Convierte matriz a forma de onda*

caso 7:

goto start;

caso 8:

setcursor(\_G\_CURSORON);

desactiva();

*libera las formas de onda*

*de los dos canales*

dsabl\_fpe();

\_exit(0);

goto menugrafico

}

#### 4 PROGRAMA DE EDICIÓN DE SEÑALES

La utilización continuada del programa descrito anteriormente, por parte del usuario (experto médico), ha dado lugar al planteamiento de nuevas necesidades, no cubiertas en el mismo. Estas se concretan en:

1) Imposibilidad de ver todo el registro simultáneamente en los 16 canales (ya que trabaja con sólo uno o dos). Inicialmente se consideró como una ventaja, ya que de esta manera se podía aprovechar mejor la resolución de la pantalla para observar con el máximo detalle la señal. Sin embargo, de cara al experto médico, se debería disponer de una panorámica general de los 16 canales del EEG que le permitiera una visión global del estado del individuo en un instante dado.

2) Poca flexibilidad para hacer zoom de las señales, dado que para cada gráfica que se realizaba había que comenzar el proceso desde cero (no existía una función que redibujase la gráfica con sólo cambiar un parámetro).

3) Poca flexibilidad para visualizar el número de canales deseados.

4) Otras como, disponer de segmentos de sólo 1.28, 2.56 ó 5.12 segundos (dado que la FFT sólo admite potencias de 2), etc...

Estas posibilidades no fueron tenidas en cuenta inicialmente. Sin embargo, dado el estado actual de la investigación, nos hemos planteado su incorporación en este momento. Para ello, hemos diseñado dos proyectos que incorporan las especificaciones anteriores de la siguiente forma:

##### PROYECTO 1

1) Presentación simultánea de los 16 canales en pantalla en toda su extensión.

2) Visualización de un número arbitrario de canales.

3) Posibilidad de hacer un zoom de cualquier parte de la señal (tanto en el eje x como en el eje y).

4) Creación de un sistema gráfico que permita:

a) Situar dos barras (verticales u horizontales) móviles que permitan medir distancias entre puntos elegidos con las mismas.

b) Definir un segmento de señal como aquella parte de la misma que se delimite con estas barras, almacenar en disco la información del punto de comienzo y duración del mismo.

c) Aplicación de las técnicas de procesamiento desarrolladas hasta ahora a los segmentos individuales.

Fig. 49 Presentación simultánea de 8 canales.

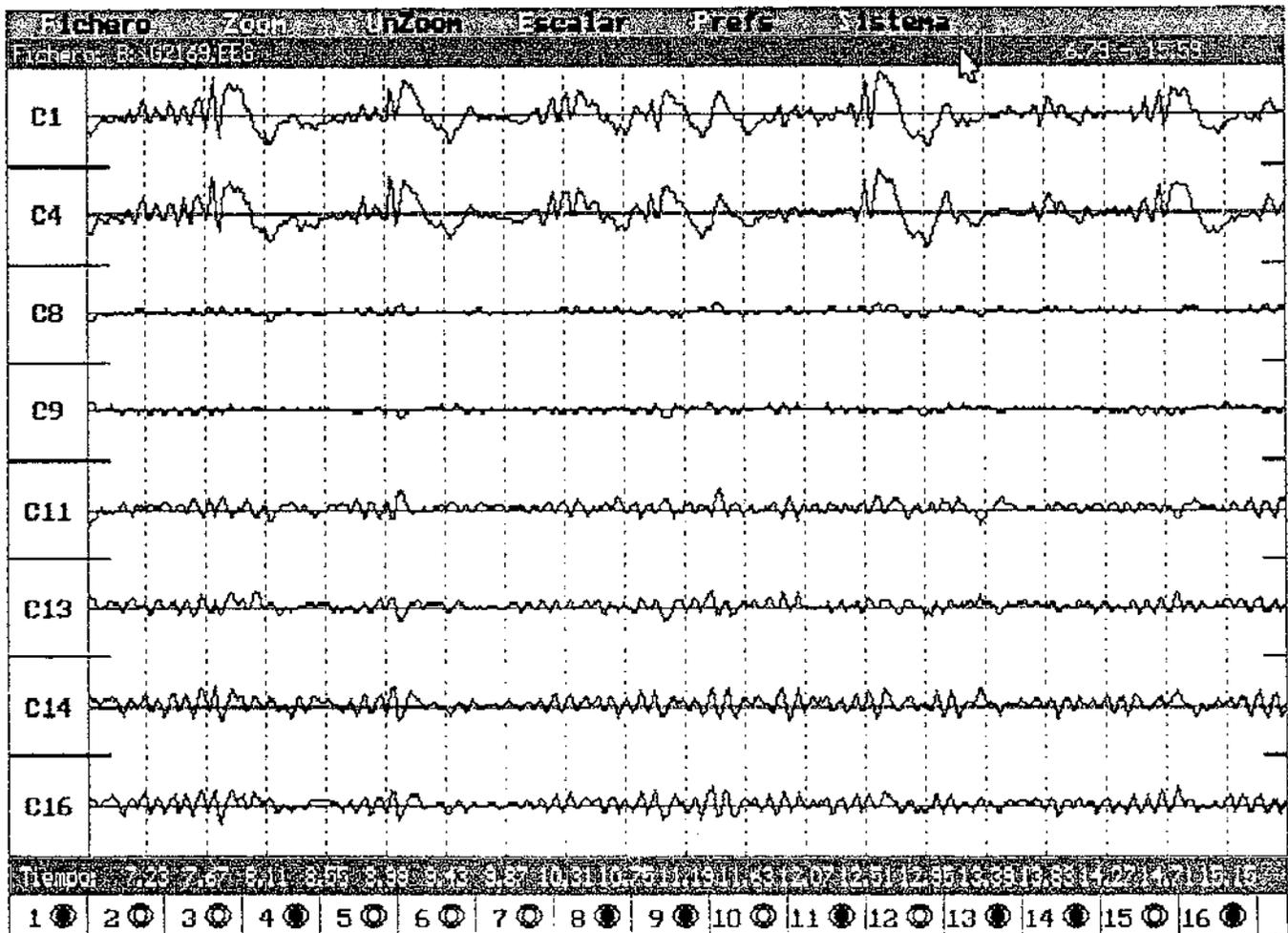
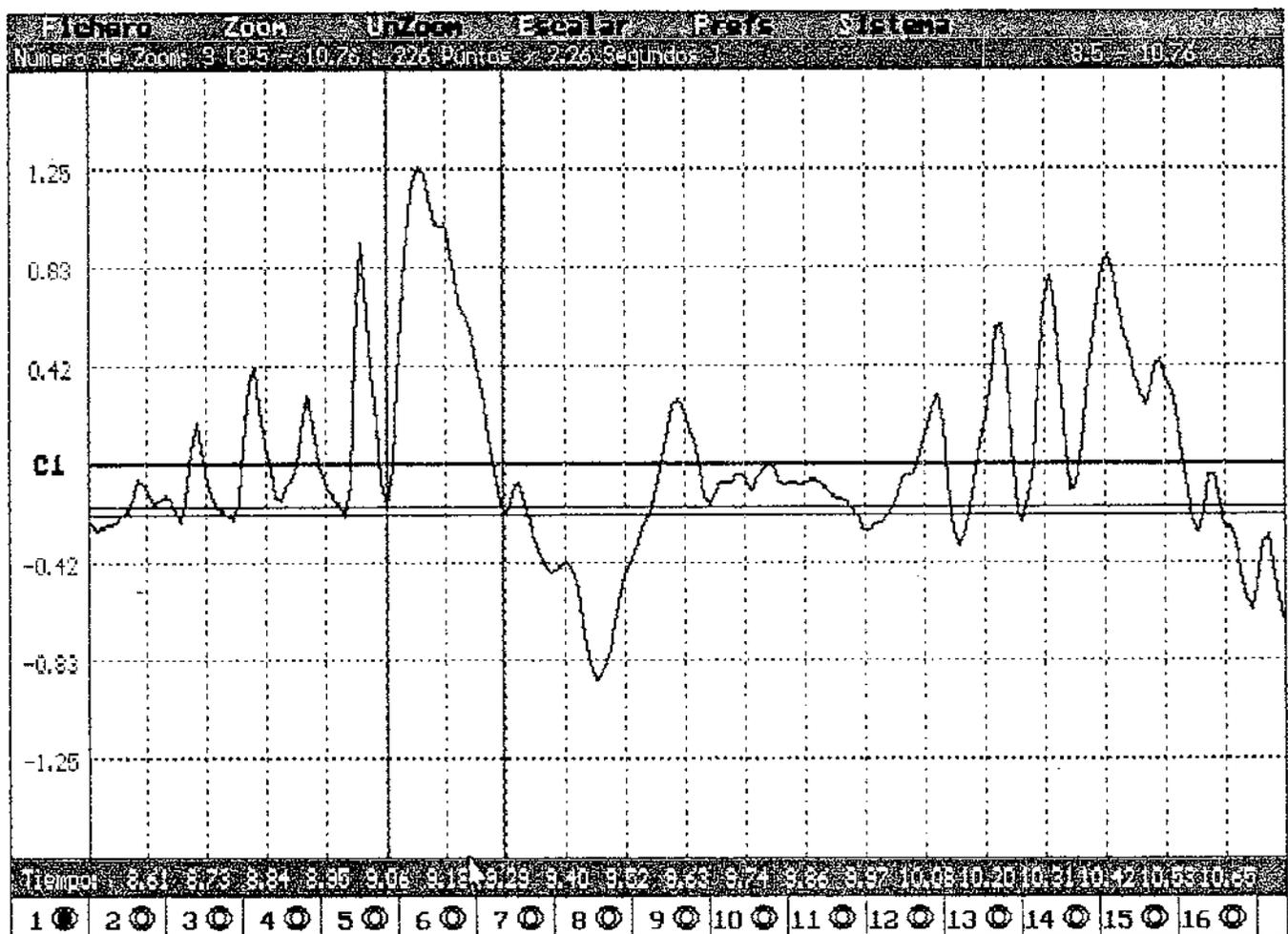


Fig. 50 Patrón seleccionado de una onda.



El objetivo es poder segmentar cada canal en tantas partes como comportamientos diferentes se observen y así poder caracterizar cada segmento y su duración. De esta forma se conseguiría una descripción del EEG en términos de los distintos patrones que pueden aparecer, duraciones de los mismos, etc...

Este proyecto se encuentra finalizado a falta únicamente de completar la captura de patrones. Las figuras 49 y 50 presentan respectivamente 8 canales del EEG y un patrón seleccionado de una onda (unidades en décimas de milivoltio).

## PROYECTO 2

1) Implementación de algoritmos de FFT para número de datos que no sean potencia de dos. Esto permite cubrir dos objetivos:

a) Análisis en modo batch del EEG con transformadas de 50 y 100 puntos. De esta manera conseguimos, en el dominio de frecuencia, bandas de 2 Hz y 1 Hz de ancho respectivamente. Esto permite una mayor resolución tanto en el dominio de la frecuencia como en el del tiempo (la distancia entre dos segmentos de análisis se ha fijado en 0.5 s.).

b) Análisis frecuencial de los patrones extraídos por medio del proyecto anterior independientemente del número de puntos que contengan (ya no existe la limitación de que tenga que ser una potencia de dos).

2) Reconocimiento de patrones por medio de la aplicación de la función de correlación. Esta función esta orientada a la detección de patrones que sólo puedan ser reconocidos por su morfología.

3) Implementación de modelos AR para la caracterización de los segmentos extraídos.

4) Integración de ambos proyectos en un solo programa.

La delimitación del EEG en segmentos de diferentes características está pensada con vistas a la realización de un paquete inteligente de ayuda al diagnóstico (Moreno et al. (1992c)). Al poder reconocer patrones diferentes nos acercaremos a la forma de valoración del EEG que utilizan los médicos. Esto requerirá la creación de una base de conocimientos para procesar la información obtenida. De esta forma el diagnóstico emitido por el sistema ganará en fiabilidad.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS ESTADÍSTICO

DE LOS

PARÁMETROS DEL EEG

## V ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LOS PARÁMETROS DEL EEG

El análisis cuantitativo del EEG está imponiéndose cada vez más en neurofisiología, donde tradicionalmente el diagnóstico se lleva a cabo por medio de exploración visual. Aunque no permite la sustitución total de los métodos clásicos de diagnóstico, sí que constituye una ayuda para el médico. Matousek y Petersen (1973) estudiaron 401 niños de 1 a 15 años y 160 adolescentes de 16 a 21 años, usando las potencias absolutas y relativas en 6 bandas de frecuencia. Estos parámetros variaban fuertemente con la edad, siendo diferente según las bandas y derivaciones, mientras que no encontraron diferencias significativas entre los dos sexos. John et al. (1980) cuantificaron cambios en las potencias relativas de 6 a 16 años utilizando funciones lineales, después de aplicarles una transformación adecuada a los datos. Matthis et al. (1981) estudiaron las potencias relativas en las bandas  $\theta$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en las derivaciones central y occipital en niños de 4-11 años. Sus resultados estaban de acuerdo con otros estudio excepto porque encontraron algunas diferencias entre sexos. Katada et al. (1981) estudiaron la frecuencia dominante de niños entre 3 y 15 años en un análisis longitudinal (Observación de un mismo sujeto a diferentes edades). Matsuura et al. (1985) estudiaron 1416 sujetos de 6 a 39 años. Puesto que usaron un método heurístico para cuantificar la frecuencia y la amplitud, la comparación de sus resultados con los de otros trabajos es difícil. Pero el análisis cuantitativo del EEG no se aplica sólo a la maduración o a cambios con la edad, sino que sirve también para la detección de enfermedades (Panet-Raymond and Gotman (1990), Satterfield and Schell (1984), Van der Worp et al. (1991), Yingling et al. (1986)). Los mencionados anteriormente son algunos de los autores que han trabajado en estos temas, ya que una lista exhaustiva se haría demasiado tediosa.

Para la correcta aplicación del análisis cuantitativo del EEG es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

- 1) Especificaciones previas.
- 2) Presentación de resultados.
- 3) Conclusiones.
- 4) Posibles mejoras.

En las especificaciones previas hay que tener en cuenta los siguientes aspectos:

- a) Definición de la población: La utilización de una muestra elegida correctamente puede evitar la aparición de sesgos o tendencias que no

sean de carácter general.

b) Procedimientos de adquisición de datos: Es importante conocer como se han adquirido los datos, ya que de lo contrario estos no podrían ser comparados con los de otros autores.

c) Procesamiento de datos: La historia temporal de cada canal del EEG, tal como son adquiridas, no son apropiadas para el análisis cuantitativo del mismo, debido a la gran cantidad de datos que contienen. En su lugar, se hace necesario obtener un número más reducido de parámetros que caractericen estas señales.

d) Métodos de análisis estadísticos utilizados: Los parámetros obtenidos por los métodos de procesamiento deben ser analizados estadísticamente para poder extraer conclusiones de carácter general. Es necesario, por tanto, una descripción de los métodos utilizados para su posterior comparación con los resultados obtenidos por otros métodos y autores.

e) Diagnóstico médico previo: Se ha utilizado éste como hipótesis para la formación de grupos, que podrá ser rechazada o aceptada en los casos individuales a la vista de los resultados. Asimismo, podrá usarse para ser comparada con la clasificación obtenida a partir de los métodos estadísticos.

Por otra parte la presentación de resultados se lleva a cabo de alguna de las dos maneras que se expresan a continuación:

a) En forma de tablas en las que se presentan:

- El valor de la media, desviación estándar y coeficiente de variabilidad para cada una de las edades.
- Los valores de los intervalos del 95% y 99% de confianza para cada una de las edades.
- Una tabla de comparación de medias para cada experimento.
- Una tabla de comparación de varianzas.

b) En forma de gráficos bidimensionales que permiten visualizar, tanto la evolución de las medias de cada parámetro con la edad como los agrupamientos de individuos cuyos parámetros sean parecidos.

## 0.1 ESPECIFICACIONES PREVIAS

### 0.1.1 DEFINICIÓN DE LA POBLACIÓN

Se ha utilizado un conjunto de niños con edades comprendidas entre los 3 y los 14 años que cumplen las siguientes condiciones:

- a) Escolaridad normal
- b) Ausencia de medicación activa cerebralmente.
- c) No existencia de enfermedades neurológicas o daño cerebral.
- d) EEG ausente de anomalías.

Un primer estudio se llevó a cabo con 100 sujetos cuya distribución por edades era la siguiente:

edad	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
número	2	6	6	10	7	11	12	7	17	10	6	6

El estudio realizado fue el análisis para el caso de tres bandas. La existencia de edades con muy pocos sujetos (lo que no permite obtener conclusiones estadísticas aprovechables) planteó la necesidad de aumentar el número de adquisiciones en las mismas, de forma que ninguna edad tuviera menos de 8 sujetos. La nueva distribución de niños por edades es la siguiente:

edad	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
número	8	10	9	13	12	9	12	12	17	13	9	8

La edad media de la muestra resulta ser de 8.7 años con una desviación típica de 3.3.

Es necesario destacar, en el primer estudio realizado, que en las tablas de datos se ha incluido la información relativa a la edad de dos años únicamente a efectos de tener el mismo rango de edades en ambos estudios. Esto es debido a que, como se puede observar en el apéndice H, el intervalo de confianza utilizando la t de Student es mayor que el rango de valores que puede tomar la variable (0-100). Por tanto, este dato carece de significado estadístico alguno.

Además, en la edad de 8 años ha sido necesario rechazar a dos sujetos por presentar anomalías en la adquisición de los canales frontales (en el primer estudio sólo se estudió el canal occipital).

Pese a que el número de sujetos para el estudio pueda parecer pequeño, es del orden de los que suelen utilizar otros autores en este campo. Como se puede observar en la tabla abundan trabajos con un número de sujetos inferior al que hemos tomado.

Tabla V.1 Número de sujetos y edades en estudio de algunos trabajos en el mismo área.

No. de sujetos control	No. de sujetos comparación	Objetivo	Edades	Autor	Año	
750	2500	Maduración	5 - 21	John et al.	1980	
1416		Maduración	6 - 39	Matsuura et al.	1985	
306		Maduración	6 - 16	John et al.	1982	
200		Mad. Adultos	56 - 76	Pollock et al.	1990	
158		Maduración	6 - 17	Gasser et al.	1988	
96		Maduración	4 - 17	Benninger et al.	1984	
77		Clasif. Pat.		Creutzfeld et al.	1985	
75		110	Delincuencia	6 - 12	Satterfield and Schell	1984
				14 - 20		
58		63	Maduración	3 - 15	Katada et al	1981
50	50	Dislexia	20 - 80	Kopruner and Pforstcheller	1984	
42			10 - 13			
41	23	Mad. Escol.	7 - 13	Baird et al.	1979	
38	38	Dislexia	10 - 16	Yingling et al.	1986	
34	34	Estabil. EEG	9 - 13	Fein et al.	1984	
33		Param. EEG	9	Mathis et al.	1981	
31	25	Mad. Retraso	10 - 13	Gasser et al.	1987	
31			10 - 13	Gasser et al.	1982	
26		Variabilidad	17 - 75	Oken and Chiappa	1988	
14		Mad. Adultos	20 - 64	Nakamura	1992	
12		Hipoxia	21 - 25	Van der Worp	1991	

#### 0.1.2 PROCEDIMIENTOS DE ADQUISICIÓN

Se ha utilizado el sistema 10/20 para la colocación de los electrodos, descrito en el apartado (III.3.3), registrándose 20.48 s. de EEG en reposo con ojos cerrados. Esta es la técnica estándar en la mayor parte de los trabajos relacionados con maduración. Normalmente sólo se registran con ojos abiertos o realizando una cierta tarea mental si se quiere definir alguna patología. La elección del tiempo de registro (20.48 s.) ya se ha comentado en IV.

#### 0.1.3 PROCESAMIENTO DE DATOS.

El procesamiento para análisis estadístico de las señales ha consistido en el cálculo y almacenamiento de potencias absolutas, relativas, coherencias y asimetrías en ficheros individuales calculadas a partir del promedio de los 20.48 s. en el caso de 3 bandas (delta, theta y alfa) y sin promediar en el de 4 bandas (delta, theta, alfa 1 y alfa 2). En este último caso se almacenan los valores de los parámetros en 25 instantes de tiempo diferentes.

#### 0.1.4 MÉTODOS DE ANÁLISIS

Para el análisis de los parámetros obtenidos se han empleado los métodos de análisis univariante y multivariante (Moreno et al. (1991c)) que se expresan a continuación.

a) Métodos univariantes y bivariantes.

- Curvas de regresión de las variables con la edad.
- Valores de medias e intervalos de confianza del 95% y el 99% para cada edad. Estos valores han sido calculados con el programa CALCU\_4A.M que se muestra en el apéndice G.
- Comparación de medias y varianzas de los parámetros por edades.

Para estudiar la homogeneidad de dos medias será preciso contrastar si la diferencia  $d = m_1 - m_2$  supera o no la atribuible al azar. Partiremos de la hipótesis nula *Las medias poblacionales, de las cuales se han extraído las muestras, son iguales.*

Se han realizado contrastes de igualdad de medias para niveles de significación  $\alpha = 1\%$  y  $\alpha = 5\%$ , recordando que el nivel de significación es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula (hipótesis de igualdad de medias).

Hemos supuesto que la distribución de los datos en cada edad es gaussiana.

El programa CALCU\_4B.M que se muestra en el apéndice G se ha utilizado para la comparación de medias y varianzas. En primer lugar (para cada banda) calcula la diferencia entre ambas medias, el error típico y los intervalos de confianza del 95% y del 99%. En segundo lugar almacena el valor del cociente de las varianzas junto con un indicador de cual de las dos era mayor. Posteriormente se aplicó el programa MIRA\_F.M que traducía a código 0 (no existe diferencia para un nivel de significación dado) o 1 (El valor es significativo a ese nivel) los valores obtenidos de la F de Snedecor en la comparación de varianzas.

Las tablas de comparación de medias nos permiten saber qué edades pueden considerarse agrupadas. Para agruparlas, se ha seguido el criterio de considerar un grupo a un conjunto de edades consecutivas en las cuales sus medias no han podido ser diferenciadas al 5% ni al 1% de significación y sus varianzas son homogéneas dos a dos. Esto puede producir ciertas situaciones como el que una edad actúe de separador entre dos grupos que por lo demás no se diferencien en ninguna otra edad. Por ello se han presentado además, qué

edades presentan diferencias estadísticamente significativas para dos grupos dados (sustituyéndose por "sí" cuando la mayor parte de las combinaciones de edades son diferentes estadísticamente o por "no" cuando sólo hay unas pocas combinaciones de edades que se diferencian entre sí).

Las tablas de comparación de varianzas muestran, para cada uno de los grupos formados en la tabla anterior, qué edades poseen unas varianzas en sus parámetros que no pueden considerarse homogéneas al compararlas mediante la F de Snedecor.

- Comparación de medias y varianzas de los parámetros por grupos.

Las tablas son del mismo tipo que las ya presentadas pero con la particularidad de que en lugar de mostrar los valores de los parámetros para cada edad, se presentan para cada uno de los grupos que se pueden formar (cuya definición se verá en las conclusiones del apartado "Evolución de parámetros univariantes con la edad").

#### b) Métodos multivariantes

- Análisis canónico de poblaciones para reducir la dimensión del problema.
- Clasificación de los individuos en diferentes grupos de maduración cerebral. Con este objeto se han empleado:
  - El análisis discriminante cuadrático.
  - El análisis discriminante lineal.
  - El análisis de agrupamientos (cluster).

Posteriormente se lleva a cabo la comparación del porcentaje de clasificación correcta entre los tres métodos anteriores.

### 0.1.5 DIAGNÓSTICO MÉDICO PREVIO

Puesto que el grupo considerado era de niños normales, el diagnóstico, más que una patología, revela el grado de maduración del individuo con respecto a los de su grupo de edad. Por tanto, se han clasificado a los individuos respecto a su grupo de edad en Bajos (poco maduros para su edad), Normales y Altos (muy maduros para su edad).

## 1 ANÁLISIS UNIVARIANTE Y BIVARIANTE

En esta sección se van a analizar los resultados obtenidos con el análisis univariante y habrá que distinguir cuatro casos:

- 1) Análisis de las variables originales cuando se toman tres bandas.
- 2) Análisis de las variables originales cuando se toman cuatro bandas.
- 3) Análisis de las variables canónicas cuando se toman tres bandas, por grupos de maduración.
- 4) Análisis de las variables canónicas cuando se toman cuatro bandas, por grupos de maduración.

En los dos últimos casos, en lugar de tomar los parámetros en cada una de las edades, se toman en cada uno de los 9 grupos posibles de maduración que se pueden formar.

### 1.1 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos. Estos pueden verse en el apéndice H y en los gráficos de las curvas de regresión. En estas, las dos curvas continuas representan, la evolución de la media y el ajuste a recta o parábola según el caso. A continuación y por orden de lejanía respecto a la curva de medias se muestran en línea quebrada el error en el cálculo de la media y la desviación típica. Antes de describir pormenorizadamente los detalles es necesario hacer una observación. A partir de los datos muestrales tomados se tiene que para la edad de 10 años se produce una reducción importante en el valor de la potencia relativa de las bandas delta y theta, acompañada de unos valores bastante dispersos en las bandas alfa 1 y alfa 2. Esto produce unos cambios en la evolución de las medias que pueden ser fácilmente detectados. Creemos que es tarea del especialista médico el determinar si existe alguna causa que explique este cambio en la tendencia o si es debido al azar.

Además de las curvas de regresión se presentan (apéndice H) el valor de los intervalos del 95% y 99% de confianza considerando la distribución Gausiana y la  $t$  de Student. La presentación de los intervalos por ambas distribuciones se hace a título comparativo (ya que debido al pequeño número de muestras en cada edad, el que debe utilizarse es el de la  $t$  de Student). Por otra parte, se presentan tablas de comparación de medias para determinar si se producen grandes variaciones de un año a otro, o por el contrario hay que considerar grupos de edad de dos o tres años durante los cuales hay una cierta estabilidad en los parámetros obtenidos. Por último las tablas de comparación de varianzas permitirán saber si las varianzas de los parámetros en distintas edades son homogéneas.

### 1.1.1 RESULTADOS CUANDO SE CONSIDERAN TRES BANDAS DE FRECUENCIA

Recordemos, por lo dicho en la representación gráfica de la potencia espectral en bandas de frecuencia (IV.3), que hemos tomado dos definiciones diferentes de las bandas de frecuencia. Esta corresponde a la primera de ellas. Como ya se expresó en ese apartado, ni la banda subdelta, ni las bandas beta son de interés, por lo que centraremos nuestra atención en el comportamiento de las bandas delta, theta y alfa.

#### a CARACTERÍSTICAS UNIVARIANTES CANAL 16

La banda delta tiene un comportamiento decreciente con la edad, así como la banda theta. La banda alfa muestra, por el contrario, una tendencia creciente. Las figuras 1 y 2 nos permiten visualizar el comportamiento de estas tres bandas en los canales 14 y 16 de un modo gráfico. Se observa en ella como la evolución de las medias queda rota por los cambios de tendencia en 7 y 10 años para las bandas delta y alfa.

#### a.1 COMPARACIÓN DE MEDIAS

A continuación exponemos los resultados de la comparación de las medias de los parámetros en distintas edades.

En todas las bandas se pueden encontrar tres grupos (hablamos de grupos ya que las medias de cada una de las edades que los forman no se diferencian significativamente entre si) formados por:

- a) Niños de 3 a 7 años
- b) Niños de 8 a 10 años
- c) Niños de 11 a 14 años.

Las bandas delta y theta nos permiten ver que:

- a) el primer grupo se diferencia del segundo en las edades de 4 y 7 años (banda delta) o 3, 4 y 6 años (banda theta).
- b) el primer grupo se diferencia del tercero claramente.
- c) el segundo grupo se diferencia del tercero en las edades de 8 y 10 años.

La situación es muy parecida en la banda alfa, sólo que las diferencias del primero con el segundo son en 3, 4 y 7 años. Por su parte el segundo y tercer grupo sólo se diferencia en la edad de 10 años.

Estos datos se presentan en forma de tabla en el apéndice H (tabla H.2).

## a.2 COMPARACIÓN DE VARIANZAS

En cuanto a las varianzas todos los grupos obtenidos resultan homogéneos como se puede ver en la tabla H.3 del apéndice H.

### 1.1.2 RESULTADOS CUANDO SE CONSIDERAN CUATRO BANDAS DE FRECUENCIA

Una vez vistos los resultados anteriores se decidió que quizás un desdoblamiento de la banda alfa en dos, pudiera aportar más información que en forma aislada. Debido a esto se eligieron las siguientes bandas de frecuencia:

- 1) Subdelta : 0 - 1.5 Hz
- 2) Delta : 1.5 - 3.5 Hz
- 3) Theta : 3.5 - 7.5 Hz
- 4) Alfa 1 : 7.5 - 9.5 Hz
- 5) Alfa 2 : 9.5 - 12.5 Hz
- 6) Beta 1 : 12.5 - 17.5 Hz
- 7) Beta 2 : 17.5 - 25 Hz
- 8) Beta 3 : 25 - 40 Hz

La contribución a la potencia total de la banda subdelta, pese a ser importante en algunos casos, no tiene interés desde el punto de vista médico, por lo que se filtra antes de llevar a cabo el estudio. Tampoco se consideran las bandas beta porque no tienen efectos significativos sobre la maduración en niños (representan menos del 5% de la potencia total). Esto hace que nos quedemos únicamente con las bandas delta, theta, alfa 1 y alfa 2. Con ellas se cubre más del 85 % de la potencia total en el peor de los casos y más del 90 % normalmente.

Cuando se llama al programa en modo batch se ejecuta la rutina de análisis multicanal y el resultado se almacena en un fichero con extensión .m compatible con el paquete de software MATLAB. Una vez procesados todos los pacientes a analizar en un momento dado, los ficheros de resultado son transmitidos a la estación de trabajo HP 9000 /340 donde serán manipulados (mediante los programas que se encuentran en el apéndice E) para extraer la mayor cantidad de información posible. El proceso a seguir es el siguiente:

a) Transferir los ficheros de resultados a la estación de trabajo. En un primer momento, se hizo mediante el programa de comunicaciones ADVANCELINK

trabajando en modo de transferencia de ficheros. Posteriormente se instaló la red Ethernet con la cual esta comunicación es inmediata y únicamente hay que mover los ficheros del directorio de acceso al directorio de trabajo.

b) Una vez hecho esto se introduce la declaración de global al comienzo del fichero, para que el MATLAB acepte dichas variables como globales, mediante el programa GLOBAL.

c) Se pone en funcionamiento el MATLAB y se ejecuta la función MTOMAT que convierte cada fichero .m en un fichero .mat con la misma información. Esto proporciona un gran ahorro de tiempo en el acceso a dichos datos posteriormente. Mediante otro programa .m se llama a MTOMAT pasándole el nombre de cada uno de los ficheros de datos.

d) EL siguiente paso consiste en ejecutar, nuevamente para todos los ficheros, la función MATTOMAX cuyo cometido es examinar los parámetros de cada sujeto para encontrar el máximo de la potencia absoluta en las bandas delta, theta, alfa 1 y alfa 2, así como el máximo de la potencia relativa en las bandas alfa 1 y alfa 2. A continuación los parámetros son almacenados en las variables pal6 y prl6 y posteriormente guardados en un fichero para cada paciente en cada una de las situaciones anteriores.

e) Una vez hecho esto se llama a la función MAXIMOS que se encarga de leer los ficheros generados anteriormente y extrae los valores de las potencias absolutas y relativas en el canal correspondiente (el 16 en el caso del programa que se presenta en el apéndice).

f) TOPOG

Uno de los problemas que se producen al tomar los datos es asegurarse de que todos los individuos se encuentran en las mismas circunstancias. Idealmente si todos los individuos se encontraran en un estado idéntico en el momento de tomar el EEG, la dispersión de los datos sería la menor posible. En base a esta idea hemos querido llevar el análisis de los datos en aquellos momentos en los cuales se pudiera afirmar con cierta seguridad que todos los pacientes están en circunstancias los más parecidas posibles. Esto creemos que se puede asegurar cuando una de las bandas de frecuencias es máxima, bien en su potencia absoluta, bien en su potencia relativa. Por ello, el programa TOPOD.m y sus variantes (TOPOT.m, TOPO.m y TOPOA2.m) leen los valores correspondientes al canal y extraen los parámetros cuando alguna de las cuatro bandas es máxima, grabándolos en uno de los cuatro ficheros siguientes:

TOPOGD.mat, TOPOGT.mat, TOPOGA1.mat y TOPOGA2.mat

que contienen el valor de los parámetros en las bandas delta, theta, alfa 1 y alfa 2 cuando el máximo de la potencia absoluta se encuentra en las bandas delta, theta, alfa 1 y alfa 2 respectivamente.

Pasaremos a continuación a hacer un análisis detallado de los resultados.

a) Estudio univariante de los datos

Se presentan para cada canal y para cada uno de los cuatro máximos los intervalos del 95 % y 99 % de confianza suponiendo gaussianidad y utilizando la *t* de Student respectivamente.

b) Comparación de las medias para diferentes edades

c) Comparación de la varianza para diferentes edades

#### a EVOLUCIÓN DE PARÁMETROS UNIVARIANTES CON LA EDAD

Estos datos se encuentran recogidos en la tabla H.4 del apéndice H y a continuación son comentadas las características principales. El estudio se ha llevado a cabo sobre cuatro canales:

- 1) Canal 1: Frontal izquierdo.
- 2) Canal 4: Frontal derecho.
- 3) Canal 14: Occipital Izquierdo.
- 4) Canal 16: Occipital derecho.

La elección de estos cuatro canales viene dada por el siguiente razonamiento. Los canales occipitales son los más apropiados para un estudio de maduración, ya que con el sujeto en reposo y ojos cerrados presentan únicamente la actividad de base (puesto que no están desarrollando ninguna tarea). En el resto de los canales la diferencia de actividad entre ojos abiertos y cerrados no es tan clara. Por ello era imprescindible tomar al menos un canal occipital (preferentemente el 16). Una característica importante en la maduración cerebral es la diferenciación topográfica. Es decir, a medida que aumenta la maduración, cada región del cerebro toma unos ritmos propios y diferentes de las demás áreas; A menor maduración, más parecida será la actividad en todas las regiones del cerebro. Puesto que nuestro objetivo no es hacer un estudio exhaustivo de todos los canales (tarea que corresponde al experto médico) hemos tomado los canales frontales por ser los más alejados de los occipitales y por tanto, los que pueden tener una actividad más diferenciada. El tomar canales derecho e izquierdo se debe al hecho de tener en cuenta la diferencia de actividad en ambos hemisferios (asimetría). Además, para cada canal se presenta el estudio de cada banda de

frecuencia en los puntos donde alguna banda alcanzaba su valor máximo. Esto es:

- 1) En el instante en que la banda delta alcanza su máximo.
- 2) En el instante en que la banda theta alcanza su máximo.
- 3) En el instante en que la banda alfa1 alcanza su máximo.
- 4) En el instante en que la banda alfa2 alcanza su máximo.

#### a.1 CANAL 1

##### a.1.1 MÁXIMO EN BANDA DELTA

Las bandas delta y alfa 1 no muestran evolución de sus medias con la edad. Por otra parte, la banda delta se caracteriza por una reducción de la media con la edad de 30 puntos (diferencia entre el valor máximo y mínimo) mientras la banda alfa 2 aumenta 14 puntos. La figura 3 nos muestra un ajuste a parábola no excesivamente malo para la banda theta y otro a recta para la banda alfa 2 que aunque no es malo presenta una pendiente relativamente pequeña.

##### a.1.2 MÁXIMO EN BANDA THETA

Las bandas delta y alfa 1 oscilan alrededor de su valor medio mostrando una evolución nula con la edad. Por otro lado, la media de la banda theta disminuye progresivamente en 28 puntos y la banda alfa 2 crece en 14 puntos entre los 3 y los 13 años (14 puntos). La figura 4 nos permite observar como la evolución de las medias y el ajuste a parábola coinciden de forma bastante apreciable para la banda theta. En cuanto a la banda alfa 2 sigue existiendo el inconveniente de la poca variación entre los extremos.

##### a.1.3 MÁXIMO EN BANDA ALFA 1

Las bandas delta y alfa 1 no evolucionan de forma clara con la edad. La banda theta exhibe un patrón que disminuye 27 puntos entre los 3 y los 14 años, mientras la banda alfa 2 aumenta 14 puntos. La figura 5 nos muestra una situación muy parecida a la ya descrita.

##### a.1.4 MÁXIMO EN BANDA ALFA 2

Las bandas delta y alfa 1 muestran poca importancia como indicadores evolutivos con la edad. No así las bandas theta y alfa 2, reduciendo la primera su potencia relativa en 20 puntos, entre los tres años y los 14 años. La segunda aumenta 15 puntos entre los 4 y 11 años para disminuir a continuación. La figura 6 nos enseña una situación que apenas ha variado con respecto a las situaciones anteriores.

## a.2 CANAL 4

### a.2.1 MÁXIMO EN BANDA DELTA

La banda delta calculada en el máximo en la misma banda presenta un comportamiento no monótono. La banda theta muestra una disminución gradual entre los 3 y los 13 años (31 puntos). La banda alfa 1 muestra un carácter estable alrededor de un 11 % o 12 %. La banda alfa 2 posee un pendiente creciente aumentando 18 puntos, no sin algunos cambios en la tendencia como los registrados a 9, 10 y 12 años respectivamente. El ajuste a parábola de la banda theta y a recta de la banda alfa 2 no son tan buenos como en los canales occipitales, como nos muestra la figura 7.

### a.2.2 MÁXIMO EN BANDA THETA

La banda delta sigue mostrando una evolución poco clara en su media con la edad. La banda theta disminuye 32 puntos entre los 3 y 13 años. La banda alfa 1 se muestra estable entre un 9 y un 15 % y la banda alfa 2 crece 20 puntos. La figura 8 muestra una parábola de curvatura casi nula para ajustar algo mejor a la banda theta y una recta muy similar a la del máximo en la banda delta para la banda alfa 2.

### a.2.3 MÁXIMO EN BANDA ALFA 1

La banda delta mantiene su comportamiento irregular así como la banda alfa 1 permanece estable entre un 9 % y un 15 %. Por otra parte la banda theta muestra su típico comportamiento decreciente variando 28 puntos y la banda alfa 2 su pauta creciente entre un 4 % a los 3 años y un 25 % a los 13 años (21 puntos). En esta situación vuelven a empeorar los ajustes como podemos ver por la figura 9.

#### a.2.4 MÁXIMO EN BANDA ALFA 2

Las bandas delta y alfa 1 continúan comportándose de forma poco clara al evolucionar con la edad mientras la banda theta acusa una disminución progresiva con la edad variando en 27 puntos y la banda alfa 2 asciende 20 entre los 3 y los 13 años, como se ve en la figura 10. El máximo en la banda alfa 2 proporciona una recta de ajuste para la banda theta, así como para la banda alfa 2, no existiendo diferencias excesivamente grandes con respecto a la curva de evolución de medias.

#### a.3 CANAL 14

##### a.3.1 MÁXIMO EN BANDA DELTA

La banda delta presenta un comportamiento irregular. La banda theta disminuye 34 puntos progresivamente entre los 4 y los 13 años y continúa ajustando bien a parábola como se puede ver en la fig. 11. La banda alfa 1 muestra un carácter irregular y manteniéndose en cifras próximas al 20 %. La banda alfa 2, por su parte, multiplica por 7 su valor en ese mismo rango de edades. La bondad del ajuste puede verse en dicha figura. La diferencia entre el intervalo de confianza gaussiano y el calculado por la *t* de Student no es muy grande.

##### a.3.2 MÁXIMO EN BANDA THETA

La banda delta presenta un patrón que se atenúa con la edad, aunque con altibajos, disminuyendo 12 puntos entre los 4 y los 13 años. La banda theta sigue un curso marcadamente decreciente aumentando 33 puntos siendo el ajuste a parábola menos pronunciado (más lineal). La banda alfa 1 muestra un comportamiento estable alrededor del 20 %. Por contra, la banda alfa 2 aumenta 19 puntos entre los 4 y los 8 años, disminuye 10 puntos hasta los 10 años y entre los 11 y los 13 vuelve a aumentar su valor. Sin embargo, el cambio de tendencia en 10 años es bastante acusado como muestra la figura 12.

##### a.3.3 MÁXIMO EN BANDA ALFA 1

La banda delta muestra un carácter irregular. Por su parte la banda

theta se decrementa 32 puntos entre los 4 y los 13 años. La banda alfa 1 muestra un carácter irregular, mientras la banda alfa 2 sostiene un claro crecimiento pasando de un 5 % a los 4 años al 38 % a los 13 años, aunque con cambios de tendencia en 9, 10 y 12 años. La figura 13 nos permite observar una situación parecida a las anteriores.

#### a.3.4 MÁXIMO EN BANDA ALFA 2

La banda delta muestra un carácter irregular. La banda theta es proclive a una disminución en su valor de 29 puntos. La banda alfa 1 tiene una evolución irregular, mientras la banda alfa 2 sigue un curso ascendente creciendo 40 puntos entre los 4 y los 13 años. La figura 14 muestra una banda theta que ajusta mejor a una recta y a una banda alfa 2 cuya recta de ajuste es la más pronunciada del canal.

#### a.4 CANAL 16

##### a.4.1 MÁXIMO BANDA DELTA

Se observa como la banda delta tiene una ligera tendencia a disminuir con la edad siendo su rango de variación de 8 puntos entre los 4 y los 13 años. La banda theta muestra esta tendencia en forma más acusada con un rango de variación de 27 puntos. La banda alfa 1 muestra un comportamiento totalmente irregular. Sin embargo la banda alfa 2 muestra una pauta claramente creciente variando entre un 5 % en 4 años y un 32 % en los 13 años (27 puntos). La figura 15 muestra que la curva de regresión que ajusta a las bandas delta y alfa 1 posee una pendiente casi nula. Esto confirma su poca importancia desde el punto de vista evolutivo. Así mismo, se observa el buen ajuste a una parábola decreciente de la evolución de medias de la banda theta y algo peor, debido a la gran dispersión, el ajuste a recta de la banda alfa 2. En este último caso se observa como los valores extremos condicionan el valor de la desviación típica. El hecho de que las desviaciones sean grandes de por sí y la falta de sujetos contribuyen a ello. Es por esto por lo que es imperativo en siguientes revisiones contar con un número de sujetos muy superior. Los intervalos de confianza del 95 % y el 99 % calculados por medio de la *t* de Student son bastante parecidos a los gaussianos, siendo más patente la diferencia cuanto mayor es el valor, como se puede ver en las tablas H.4.

#### a.4.2 MÁXIMO BANDA THETA

La banda delta exhibe un patrón que disminuye 8 puntos entre los 4 y los 13 años (8 puntos). En la banda theta la variación es de 35 puntos. La banda alfa 1 vuelve a tener un carácter irregular. La banda alfa 2 vuelve a mostrar un excelente comportamiento ascendente en media pasando de un 3.8 % a un 38.3% en el rango de edades ya mencionado. Estas evoluciones pueden ser comparadas con la gráfica RG-4. La banda theta continúa ajustando bien a parábola y la alfa 2 a recta (acercándose más a la curva de evolución de medias). Como era de esperar, en esta situación se obtiene la parábola con mayor rango de variación posible para esta banda como se ve en la figura 16. Al igual que en el caso anterior los intervalos del 95 % y del 99 % de confianza calculados por la t de Student y a partir de la gaussiana difieren en poco, siendo importante únicamente en los valores más grandes.

#### a.4.3 MÁXIMO BANDA ALFA 1

En esta ocasión, la banda delta presenta un comportamiento más irregular que en las ya mencionadas para este canal. La banda theta disminuye progresivamente 23 puntos entre los 3 y los 13 años. La banda alfa 1 sigue manteniendo un comportamiento sinuoso. La banda alfa 2 por su parte mantiene un claro crecimiento de 31 puntos. La figura 17 muestra una banda theta cuyo ajuste a parábola sigue siendo bueno (aunque el factor cuadrático tiene menos peso y el ajuste a recta no sería despreciable) y una banda alfa 2 cuya recta de regresión se acerca aún más a la curva de evolución de medias. Los intervalos de confianza calculados por ambos métodos son aproximadamente iguales aunque se nota una mayor longitud en los calculados por la t que por los gaussianos.

#### a.4.4 MÁXIMO BANDA ALFA 2

En este caso la banda delta se caracteriza por una ligera reducción de 15 puntos en su valor entre los 4 y los 13 años. La banda theta decrece con la edad variando 30 puntos. La banda alfa 1 sigue manteniendo un carácter irregular. La banda alfa 2 por su parte ostenta un carácter claramente creciente entre los 4 y los 14 años pasando de un 7 % a un 48 % a los 13

años. En este caso la figura 18 nos muestra que la banda theta ajusta a parábola de forma muy parecida a los casos anteriores y que la banda alfa 2, como se podía prever, posee el mayor rango de variación en este canal. En cuanto a los intervalos de confianza, siguen la misma tónica de los casos anteriores.

## b COMPARACIÓN DE MEDIAS

A continuación exponemos los resultados de la comparación de las medias de los parámetros en distintas edades. Estos datos se presentan en forma de tabla en el apéndice H (tabla H.5).

### b.1 CANAL 1

#### b.1.1 BANDA DELTA

Con cualquiera de los cuatro máximos la banda delta en este canal no nos permite discriminar en absoluto evolución con la edad ya que no existen diferencias significativas entre las edades más bajas y las más altas.

#### b.1.2 BANDA THETA

El máximo en la banda delta nos permite distinguir tres grupos de edad (3 años, de 4 a 10 años y de 11 a 14 años). El primer grupo se diferencia claramente de los otros dos y el segundo se diferencia del tercero en aquellas edades más elevadas como son 6, 8, 9 y 10 años.

Al tomar el máximo en la banda theta se obtienen nuevamente tres grupos de edades 3 a 4, 5 a 10 y 11 a 14 años. Al igual que en el caso anterior el primer grupo se diferencia claramente de los otros dos y el segundo se diferencia del tercero en las edades mayores (6, 7, 8 y 10 años)

Los grupos que se pueden observar con el máximo en la banda alfa 1 son los mismos que con el máximo en la banda delta con la particularidad de que no existen diferencias significativas entre el segundo y tercer grupos.

Por otra parte, con el máximo en la banda alfa 2 se detectan tres grupos de edad que son los de 3 a 5 años, 6 a 10 años y 11 a 14 años. En este caso el primero de ellos se diferencia claramente de los otros dos y el segundo se diferencia del tercero en las edades de 6, 9 y 10 años.

### b.1.3 BANDA ALFA 1

El conjunto de todos los sujetos forman un solo grupo al considerar la banda alfa 1, por lo que no se puede considerar como indicativa de evolución con la edad.

### b.1.4 BANDA ALFA 2

El máximo en la banda delta permite distinguir entre tres grupos que son los de 3 a 5, 6 a 10 y 11 a 14 años.

El máximo en el resto de las bandas únicamente permite distinguir entre dos grupos diferenciados entre sí. El primero formado por las edades de 3 a 5 años y el segundo por las de 6 a 14.

## b.2 CANAL 4

### b.2.1 BANDA DELTA

En esta banda no se pueden apreciar cambios con la edad en ninguno de los cuatro máximos, ya que se forma un sólo grupo para todas las edades en consideración.

### b.2.2 BANDA THETA

El máximo en la banda delta nos permite distinguir tres grupos de edad (3 a 5, 6 a 10 y 11 a 14 años). El primero de ellos se distingue claramente de los otros dos mientras que el segundo se diferencia del tercero en las edades de 12 y 13 años.

El máximo en la banda theta nos permite distinguir los mismos grupos, aunque el primero sólo se diferencia del segundo en la edad de tres años.

Esta mismo sucede también con el máximo en la banda alfa 1.

El máximo en la banda alfa 2 permite distinguir únicamente dos grupos. El de 3 a 5 años por un lado y el de 6 a 14 por otro.

### b.2.3 BANDA ALFA 1

En este caso es imposible observar una evolución con la edad, ya que se forma un solo grupo que contiene a todas las edades bajo estudio.

#### b.2.4 BANDA ALFA 2

El máximo en la banda delta permite apreciar sólo dos grupos (de 3 a 5 años y de 7 a 14) diferenciados.

El máximo en el resto de las bandas proporciona tres grupos de edad (de 3 a 5 años, de 6 a 10 y de 11 a 14 años) bien diferenciados entre sí.

#### b.3 CANAL 14

##### b.3.1 BANDA DELTA

Esta banda distingue únicamente un grupo, por lo que no es útil como indicadora de evolución con la edad. Sólo el máximo en la banda alfa 1 permite observar dos grupos (de 3 a 10 años y de 11 a 13) bien diferenciados.

##### b.3.2 BANDA THETA

Esta banda permite distinguir tres grupos de edad (de 3 a 5 años, de 6 a 10 y de 11 a 14). El primero se diferencia claramente de los otros mientras que el segundo y el tercero se diferencian básicamente en las edades de 6, 10, 11 y 13 años.

##### b.3.3 BANDA ALFA 1

Esta banda no permite observar una evolución con la edad ya que se forma un solo grupo para las edades de 3 a 14 años.

##### b.3.4 BANDA ALFA 2

En esta banda se puede observar la existencia de tres grupos en todos sus máximos (de 3 a 5, de 6 a 10 y de 11 a 14 años). El primero se distingue claramente de los otros dos, mientras que el segundo se diferencia del tercero en las edades de 6, 7 y 10 años fundamentalmente.

#### b.4 CANAL 16

##### b.4.1 BANDA DELTA

Esta banda permite distinguir un solo grupo que abarca todas las edades pero con una diferenciación clara de las edades de 4, 6 y 11 años respecto al resto.

#### b.4.2 BANDA THETA

Esta banda permite distinguir entre tres grupos de edad (3 a 5 años, 6 a 10 y 11 a 14 años). En los máximos en las bandas delta y theta estos grupos están claramente diferenciados. Con el máximo en la banda alfa 1 el primer grupo se diferencia del segundo en las edades más altas (8, 9 y 10 años) y correctamente del tercero. Así mismo el segundo y tercer grupo se diferencian en las edades de 6, 7 y 10 años.

Con el máximo en la banda alfa 2 el primer grupo se distingue claramente del resto, mientras que el segundo se diferencia del tercero en las edades de 11 y 13 años.

#### b.4.3 BANDA ALFA 1

Esta banda, al igual que la delta, sólo forma un grupo homogéneo, por lo que no se puede observar ninguna evolución con la edad.

#### b.4.4 BANDA ALFA 2

En esta banda se distinguen tres grupos para todos los máximos (de 3 a 5, de 6 a 10 y de 11 a 14 años). El primero se diferencia claramente de los otros dos y el segundo y el tercero se diferencian fundamentalmente en las edades de 6, 7 y 10 años.

### c COMPARACIÓN DE VARIANZAS

A continuación exponemos los resultados de la comparación de las varianzas de los parámetros en distintas edades. Estos datos se presentan en forma de tabla en el apéndice H (tabla H.6).

#### c.1 CANAL 1

##### c.1.1 BANDA DELTA

El único grupo formado con esta banda es homogéneo en varianzas salvo:

- Las edades de 10 y 13 años para el máximo en la banda delta
- Las edades de 5 y 7 años para el máximo en la banda theta
- La edad de 8 años para los máximos en alfa 1 y alfa 2.

#### c.1.2 BANDA THETA

Los tres grupos formados con esta banda resultan homogéneos con las siguientes salvedades:

- Las edades de 4 y 5 años para el máximo en la banda delta.
- Las edades de 8 y 14 años para el máximo en la banda theta.
- Las edades de 5 y 11 años para el máximo en alfa 1.

#### c.1.3 BANDA ALFA 1

En el máximo en la banda delta los tres grupos obtenidos son homogéneos excepto para las edades de 3, 4, 8, 13 y 14 años.

Si consideramos el máximo en la banda theta, los dos grupos formados son homogéneos a excepción de las edades de 8 y 14 años.

El máximo en la banda alfa 1 da lugar a un primer grupo homogéneo y a un segundo en el cual la varianza de las edades de 3, 4, 6, 8 y 10 años es diferente del resto.

Por otra parte, el máximo en alfa 2 da lugar a una situación en la que la varianza de todas las edades es homogénea excepto la de 5 años.

#### c.1.4 BANDA ALFA 2

Los tres grupos formados con el máximo en la banda delta resultan homogéneos salvo la edad de 5 años.

En el máximo en la banda theta, las dos excepciones a la homogeneidad son las edades de 5 y 10 años.

Considerando el máximo en la banda alfa 1, el primer grupo resulta homogéneo mientras que en el segundo las edades de 12 y 13 años tienen varianzas diferentes a las del resto de su grupo.

Por último, con el máximo en alfa 2 se obtiene un resultado similar donde las excepciones son las edades de 6, 7, 9 y 10 años.

## c.2 CANAL 4

### c.2.1 BANDA DELTA

El único grupo formado con esta banda resulta homogéneo en varianzas con las siguientes excepciones:

- Las edades de 3, 6, 10 y 11 años para el máximo en delta.
- La edad de 7 años para el máximo en theta.
- Las edades de 6, 8 y 14 años para el máximo en alfa 1.
- Las edades de 6, 9 y 11 años para el máximo en alfa 2.

### c.2.2 BANDA THETA

Los tres grupos formados con esta banda resultan homogéneos en varianzas con la excepción de las edades de 3, 8 y 12 años.

### c.2.3 BANDA ALFA 1

El grupo formado con esta banda es homogéneo con las siguientes excepciones:

- Las edades de 5, 8, 13 y 14 años para el máximo en la banda delta.
- Las edades de 3, 5, 6, 8 y 10 años para el máximo en la banda theta.
- Las edades de 3, 4, 5, 7, 11, 13 y 14 años para el máximo en la banda alfa 1.
- Las edades de 11 a 14 años para el máximo en la banda alfa 2.

### c.2.4 BANDA ALFA 2

Por su parte los grupos formados con esta banda resultan bastante homogéneos teniendo por excepciones solamente las edades de 5, 9, 13 y 14 años fundamentalmente.

## c.3 CANAL 14

### c.3.1 BANDA DELTA

El único grupo que se puede formar con esta banda resulta homogéneo en varianzas con las siguientes excepciones:

- Las edades de 5 y 11 años con el máximo en delta
- La edad de 12 años con el máximo en theta
- Las edades de 3, 4 y 5 años con el máximo en alfa 1 y
- Las edades de 3, 5, 6 y 13 años con el máximo en alfa 2.

### c.3.2 BANDA THETA

Los tres grupos formados en esta banda son homogéneos en varianzas con la excepción de la edad de 8 años en tres de los máximos y las de 6, 10, 11 y 14 en alguno de los máximos.

### c.3.3 BANDA ALFA 1

El único grupo que se puede formar con esta banda resulta homogéneo con las siguientes excepciones:

- Las edades de 4, 6 y 7 años para los máximos en las bandas delta y alfa 1.
- Las edades de 4, 7 y 9 años para el máximo en la banda theta
- Las edades de 3 a 7 y 11 a 12 años.

### c.3.4 BANDA ALFA 2

Los tres grupos formados en esta banda resultan completamente homogéneos para todos los máximos.

## c.4 CANAL 16

### c.4.1 BANDA DELTA

Con el máximo en la banda delta el único grupo formado es homogéneo en varianzas en cualquiera de los cuatro máximo excepto en las edades de 5 y 11 años preferentemente.

### c.4.2 BANDA THETA

La banda theta muestra tres grupos homogéneos en varianzas a excepción de la edad de 8 años ( en tres de los máximos) y de las de 6 y 7 para el

máximo en la banda delta.

#### c.4.3 BANDA ALFA 1

El único grupo que se puede formar en esta banda resulta homogéneo excepto para las siguientes edades:

- De 3 a 8 para el máximo en la banda delta
- 3 y 9 años para el máximo en theta
- 7 años para el máximo en alfa 1 y
- 8 años para el máximo en alfa 2

#### c.4.4 BANDA ALFA 2

Los tres grupos formados con esta banda resultan homogéneos en sus varianzas excepto el primer grupo con las bandas delta y theta. En este caso la edad de 4 años se diferencia de la del resto de su grupo.

### CONCLUSIONES

Los resultados del análisis univariante anterior nos muestran que:

a) Si se comparan las gráficas de evolución de medias tomadas en cada máximo con respecto a la calculada a partir del promedio se observa una mejor evolución con la edad de las primeras frente a la segunda. Esto se debe a que en el caso del promediado la evolución presenta cambios en la tendencia en edades intermedias bastante bruscos, mientras que en el primer caso estos cambios de tendencia, pese a existir, no tienen la misma amplitud. Esto proporciona una mejor base para poder distinguir unas edades de otras en base a su media.

b) Parece existir unos grupos de edad que son homogéneos en sus varianzas y medias. Estos son los de edades de 3 a 5, 6 a 10 y 11 a 14 años. Por tanto, parece lógico que en lugar de comparar cada edad con las demás se compare cada grupo con los demás.

c) Por otro lado sería bueno reducir la dimensión del problema para no tener que utilizar cuatro variables cada vez, ya que esto imposibilita su representación gráfica

d) Por último, nos planteamos que además de la edad pudiera estar influyendo el nivel madurativo de cada individuo. Por ello pedimos al experto médico que emitiera un diagnóstico simple sobre cada sujeto que sólo pudiera

ser:

- 1) Nivel de maduración bajo para su edad.
- 2) Nivel de maduración normal para su edad.
- 3) Nivel de maduración alto para su edad.

Una vez hecho esto, formamos tres subgrupos dentro de cada grupo de edad (definidos en c) ) que reflejaran este diagnóstico y son denominados por:

Bp: Nivel madurativo bajo para el grupo de los pequeños (3 a 5 años).

Np: Nivel madurativo normal para el grupo de los pequeños.

Ap: Nivel madurativo alto para el grupo de los pequeños.

Bi: Nivel madurativo bajo para el grupo de los intermedios (6 a 10 años).

Ni: Nivel madurativo normal para el grupo de los intermedios.

Ai: Nivel madurativo alto para el grupo de los intermedios.

Bg: Nivel madurativo bajo para el grupo de los grandes (6 a 14 años).

Ng: Nivel madurativo normal para el grupo de los grandes.

Ag: Nivel madurativo alto para el grupo de los grandes.

Por tanto lo que a continuación vamos a estudiar es si existen diferencias entre unos subgrupos y otros o por el contrario hay que considerar únicamente el grupo de la edad (p, i, g) para cada uno de los 4 canales y si con las variables canónicas se mejora la discriminación en grupos de los pacientes.

e) Se observa también que las bandas delta y alfa1 no permiten discriminación alguna de subgrupos en ninguno de los canales por lo que no aportan información acerca de la edad o maduración.

f) La mejor discriminación se consigue en las bandas theta y alfa2 de cualquier canal.

### 1.1.3 RESULTADOS UNIVARIANTES CUANDO SE TOMAN VARIABLES CANÓNICAS

Como se comentó en el apartado II.2.4.4, suele ser conveniente utilizar las variables canónicas en lugar de las variables originales para los análisis subsiguientes. Pese a que el Análisis de Componentes Principales es un método multivariante cuya utilización se comentará más profusamente en la sección siguiente, en este apartado nos vamos a centrar en las características univariantes de dichas variables. Estas han sido obtenidas con el programa CALCU\_VC.M, como se puede ver en el apéndice G. Esto satiface lo comentado en el punto c) de las conclusiones anteriores. Además, en lugar de referirnos a los valores de los parámetros para diferentes edades, nos referiremos a los valores de los mismos para cada uno de los grupos (tal como se explicó en el punto d) de las conclusiones ya mencionadas) de maduración.

#### a EVOLUCIÓN DE PARÁMETROS UNIVARIANTES PARA TRES BANDAS POR GRUPOS DE MADURACIÓN

En la tabla H.7 del apéndice H se puede observar como la primera variable canónica disminuye en 18 puntos y la segunda en 14 puntos entre los dos grupos extremos de maduración.

#### b COMPARACIÓN DE MEDIAS

El máximo en la banda delta muestra como diferentes a los grupos Bg y Ag. El máximo en la banda theta distingue entre Np, Ai y Ag, mientras que en la banda alfa diferencia el grupo Bp del grupo Np, como se puede ver en la tabla H.8 del apéndice H.

#### c EVOLUCIÓN DE PARÁMETROS UNIVARIANTES PARA CUATRO BANDAS POR GRUPOS DE MADURACIÓN

##### c.1 CANAL 1

##### c.1.1 MÁXIMO EN BANDA DELTA

Las medias de los diferentes grupos ocupan un rango pequeño de valores (41 a 44 para la primera variable canónica y de -8 a 4 para la segunda, es

decir, un rango de 3 unidades en la primera y de 12 en la segunda). Los intervalos de confianza no son excesivamente diferentes.

#### c.1.2 MÁXIMO EN BANDA THETA

El rango es algo menor que en el caso anterior ( 3 unidades en la primera variable y 14 en la segunda), siendo la tendencia la de disminuir el valor de la primera variable al aumentar la maduración y algo más fluctuante la de la segunda.

#### c.1.3 MÁXIMO EN BANDA ALFA 1

El rango sigue disminuyendo ( menos de 3 unidades para la primera variable y 10 en la segunda). La tendencia general de las medias de la primera variable canónica es la de disminuir con la maduración.

#### c.1.4 MÁXIMO EN BANDA ALFA 2

El rango es mínimo (algo más de 2 unidades para la primera variable y algo menos de 10 para la segunda). La tendencia de la primera variable es la de aumentar con la maduración (ya que es negativa).

### c.2 CANAL 4

#### c.2.1 MÁXIMO EN BANDA DELTA

Con el máximo en la banda delta el rango es de 2 unidades para la primera variable canónica y de 10 para la segunda.

#### c.2.2 MÁXIMO EN BANDA THETA

El rango en medias es de 2 unidades para la primera variable canónica (p.v.c.) y de 8 para la segunda (s.v.c.). Las tendencia de la primera variable canónica es a disminuir al ir aumentando el grado de madurez, mientras que la segunda es oscilante.

#### c.2.3 MÁXIMO EN BANDA ALFA 1

El rango de la p.v.c. es de 3 unidades y el de la s.v.c. de 11. La tendencia de la p.v.c. es a disminuir con la maduración.

#### c.2.4 MÁXIMO EN BANDA ALFA 2

El rango es de sólo 2 unidades para la p.v.c. y de 10 para la s.v.c. La tendencia de las medias es a disminuir con la p.v.c.

#### c.3 CANAL 14

##### c.3.1 MÁXIMO EN BANDA DELTA

El comportamiento de las variables canónicas cambia completamente al pasar de los canales frontales a los occipitales. El rango de la p.v.c. pasa a ser ahora de 49 unidades y el de la s.v.c. de 3 unidades. La tendencia de la p.v.c. es la de aumentar con la maduración.

##### c.3.2 MÁXIMO EN BANDA THETA

El rango para la p.v.c. es de 51 unidades, y para la s.v.c. de 36. La tendencia de la p.v.c. es la de crecer con el grado de maduración cerebral.

##### c.3.3 MÁXIMO EN BANDA ALFA 1

El rango para la p.v.c. es de 42 unidades, mientras que para la s.v.c. es de sólo 4. La evolución de las medias de la p.v.c. es ascendente con el grado de madurez cerebral.

##### c.3.4 MÁXIMO EN BANDA ALFA 2

El rango de la p.v.c. es de 52 unidades frente a 4 para la s.v.c. La tendencia de la p.v.c. es la de aumentar con el grado de maduración cerebral.

#### c.4 CANAL 16

##### c.4.1 MÁXIMO EN BANDA DELTA

El rango de la p.v.c. es de 48 unidades frente a 3 de la segunda. La tendencia de la p.v.c. es la de aumentar con la maduración.

#### c.4.2 MÁXIMO EN BANDA THETA

El rango de la p.v.c. es de 47 unidades para la p.v.c. frente a 33 de la segunda. La tendencia de la p.v.c. es la de aumentar con el grado de maduración.

#### c.4.3 MÁXIMO EN BANDA ALFA 1

En este caso el rango de la primera variable canónica es sólo de 28 unidades frente a 44 de la s.v.c.. La tendencia de la media de la p.v.c. es la de aumentar con la madurez.

#### c.4.4 MÁXIMO EN BANDA ALFA 2

El rango para la p.v.c. es de 58 unidades y de sólo 3 para la s.v.c. La tendencia de la p.v.c. es la de aumentar con la madurez.

### d COMPARACIÓN DE MEDIAS

#### d.1 CANAL 1

El máximo en la banda delta resalta únicamente al grupo Bg del resto en la primera variable canónica y al grupo Ap en la segunda.

Considerando el máximo en la banda theta se pueden diferenciar el grupo Bp en ambas variables canónicas y el Np en la primera.

El máximo en la banda alfa 1 sólo nos permite distinguir al grupo Bg en ambas variables canónicas.

El único grupo que se puede aislar del resto con el máximo en la banda alfa 2 es el Bp en la primera variable canónica.

#### d.2 CANAL 4

El máximo en la banda delta discrimina los grupos Ap y Ng únicamente.

Tomando el máximo en la banda theta se diferencia el grupo Ai en ambas variables canónicas y el Ap en la segunda.

El máximo en la banda alfa 1 permite distinguir los grupos Bp y Np con la primera variable canónica y los grupos Bi y Ng con la segunda.

El máximo en la banda alfa 2 resalta únicamente el grupo Bp con la segunda variable canónica.

#### d.3 CANAL 14

Considerando el máximo en la banda delta podemos distinguir los grupos Bp, Np, Ng y Ag con la primera variable canónica y el grupo Bg con la segunda.

El máximo en la banda theta permite distinguir además de los mismos grupos que en el caso anterior al grupo Bi en ambas variables canónicas.

Tomando el máximo en la banda alfa 1 se pueden discriminar con la primera variable canónica los grupos Bp, Np, Ng y Ag mientras que con la segunda se pueden distinguir Bp, Bg y Ag.

Por otra parte el máximo en la banda alfa 2 destaca los grupos Bp, Np, Bi y Ng con la primera variable canónica y los grupos Bp y Ni con la segunda.

#### d.4 CANAL 16

En este canal se consigue la mejor discriminación entre unos grupos y otros como veremos a continuación.

El máximo en la banda delta permite distinguir los grupos Bp, Np, Bi, Ni y Ng con la primera variable canónica mientras que con la segunda sólo se puede destacar el grupo Bg.

Considerando el máximo en la banda theta se pueden observar los grupos Bp, Np, Bi, Ng y Ag con la primera variable canónica y los grupos Bp y Ap con la segunda.

El máximo en la banda alfa 1 es uno de los pocos casos en los que la segunda variable canónica discrimina más grupos (Bp, Np, Bi, Ng) que la primera (Np, Bg, Ng).

Tomando el máximo en la banda alfa 2 se puede ver que la primera variable canónica diferencia los grupos Bp, Np, Bi y Ng mientras que la segunda diferencia los grupos Bp, Ni, Bg.

#### CONCLUSIONES

A partir de los resultados anteriores se puede concluir:

- a) Los resultados obtenidos para el caso de cuatro bandas mejoran a los de tres bandas claramente en cuanto al rango de evolución de las medias. En el primer caso se puede discriminar mejor a los pequeños de los grandes por la diferencia en el signo de la media.
- b) La primera variable canónica es la más importante a la hora de diferenciar grupos.
- c) Los canales frontales muestran un peor comportamiento en el rango de variación de las medias (sólo 3 ó 4 puntos en la p.v.c.) frente a los canales occipitales (más de 40 unidades en la p.v.c.). Esto da lugar a que se distingan sólo uno o dos grupos en los canales frontales frente a 3 ó 4 en los occipitales.
- d) La conclusión más importante es que, pese a haber reducido el número de variables en estudio, no se pierde información importante para la clasificación (Con dos variables canónicas se explica entre el 70% y el 90% de la varianza original). Por tanto, en adelante utilizaremos únicamente variables canónicas.
- e) La primera variable canónica suele explicar entre el 50% y el 70% de la varianza original, mientras que la segunda explica entre un 10% y un 30% de la varianza original.
- f) La primera variable canónica tiende a poner de manifiesto la diferencia entre las bandas theta y alfa 2 y la segunda entre alfa 1 y alfa 2. Esto tiene que ver con la maduración, ya que si predomina la potencia relativa en banda theta frente a alfa 2 el sujeto se considera que pertenece a un grupo de poca edad o poco maduro. Igual sucede con la diferencia entre alfa 1 y alfa 2.

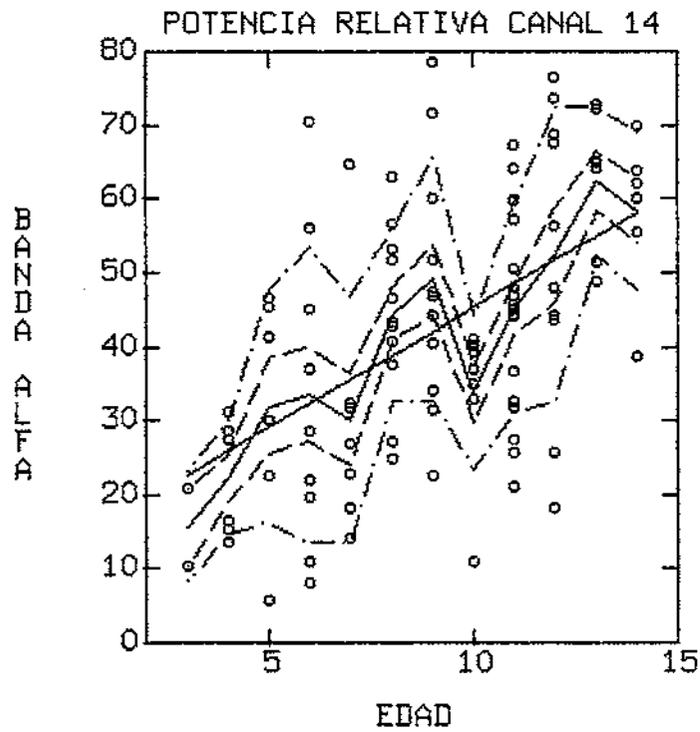
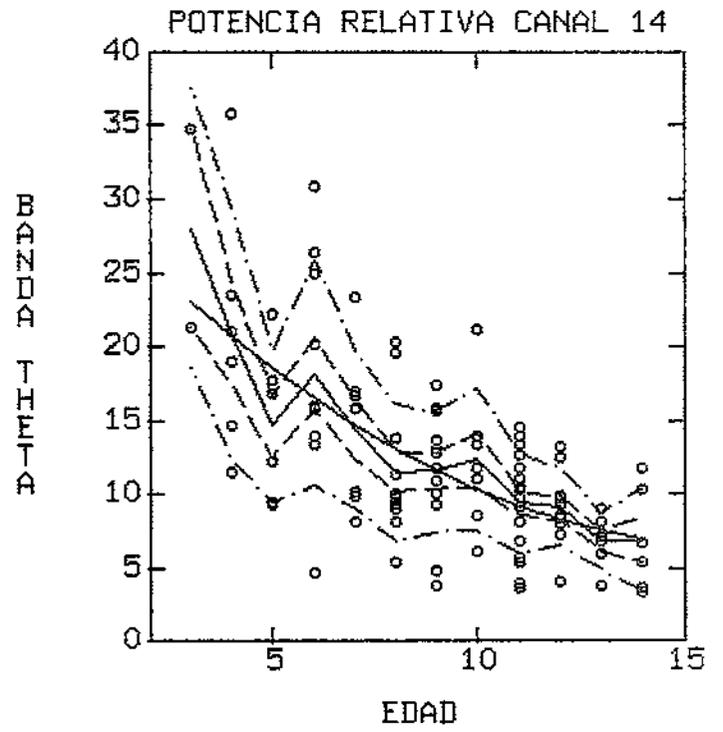
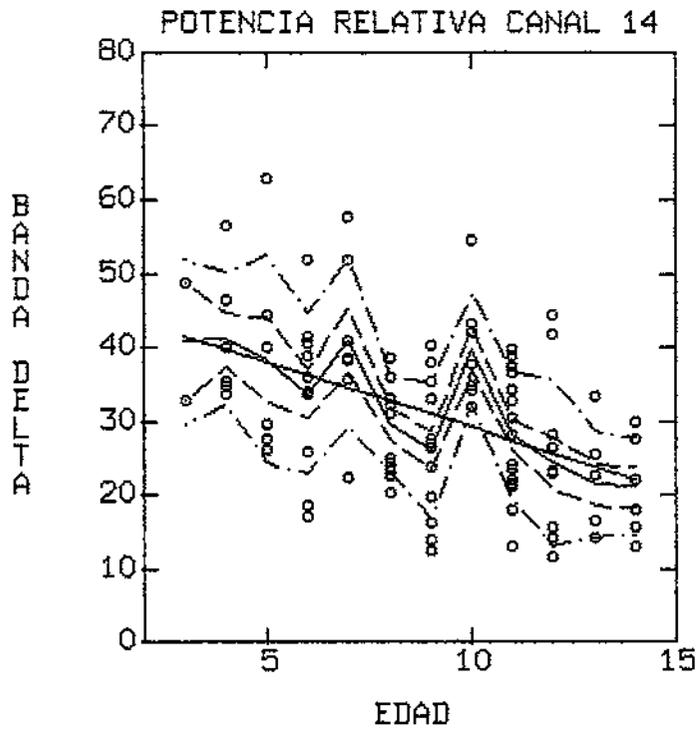


Fig. 1 Curvas de regresión. Caso de tres bandas.

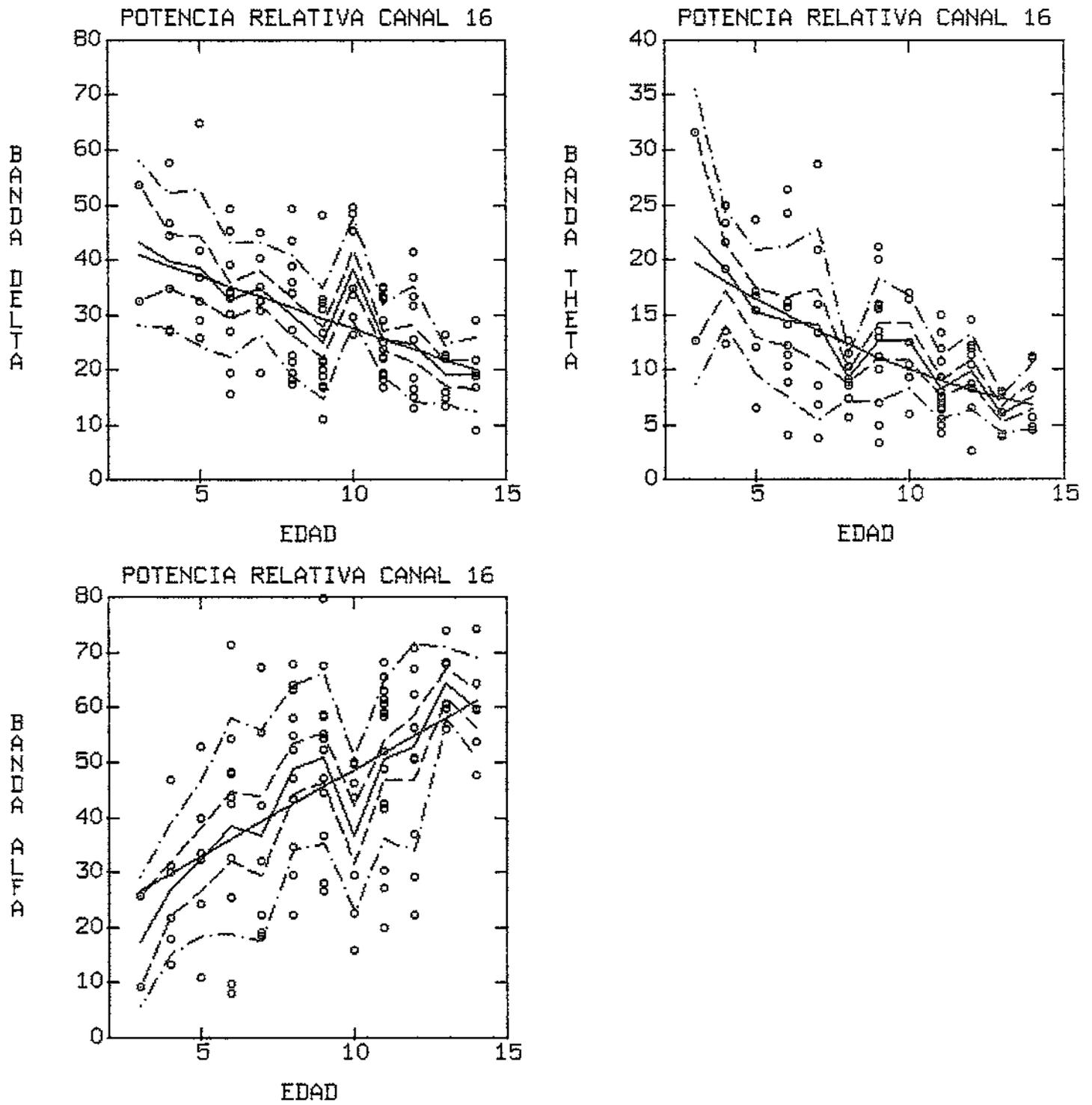


Fig. 2 Curvas de regresión. Caso de tres bandas.

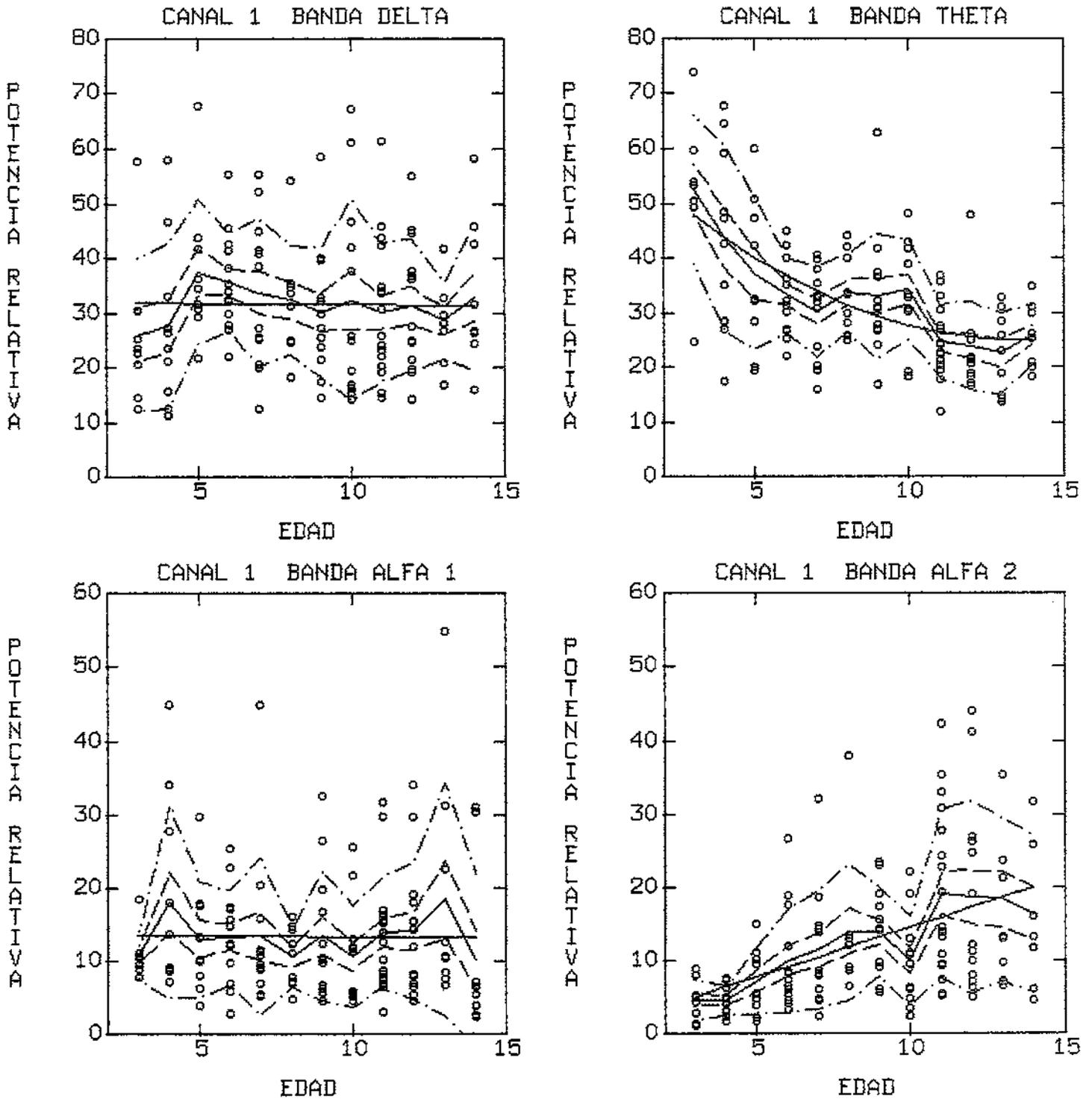


Fig. 3 Curvas de regresión. Máximo en banda Delta.

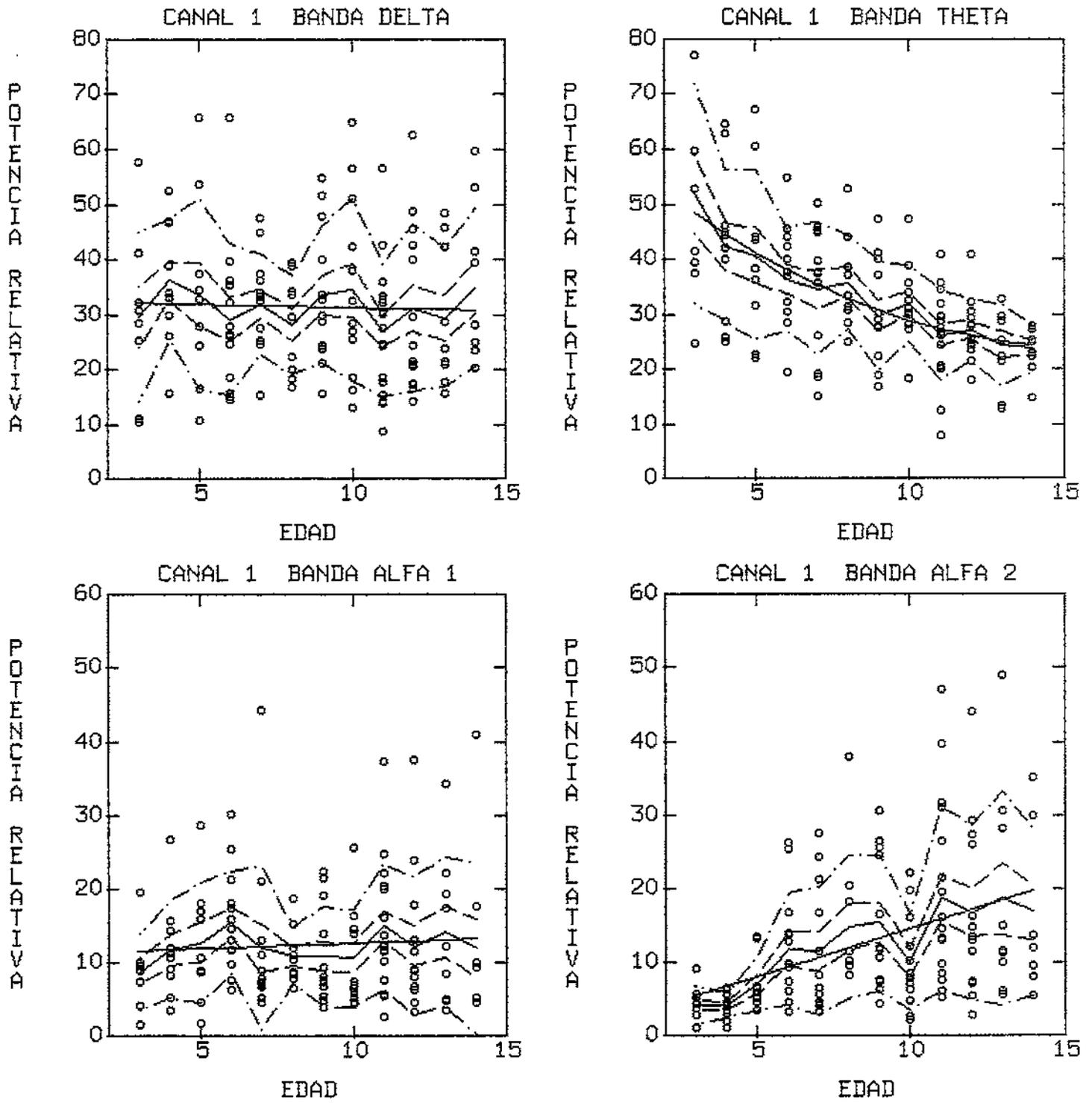


Fig. 4 Curvas de regresión. Máximo en banda Theta.

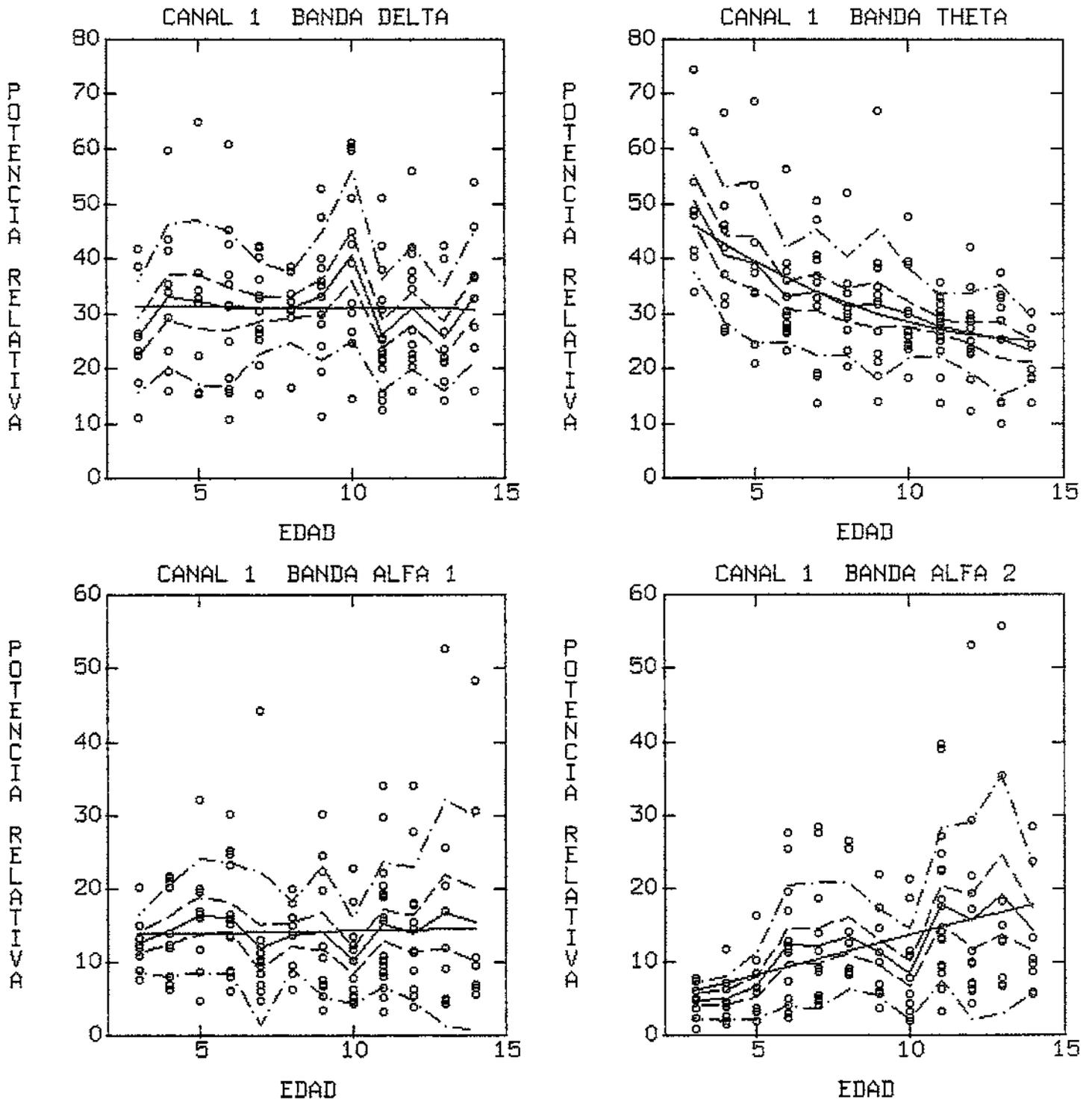


Fig. 5 Curvas de regresión. Máximo en banda Alfa 1.

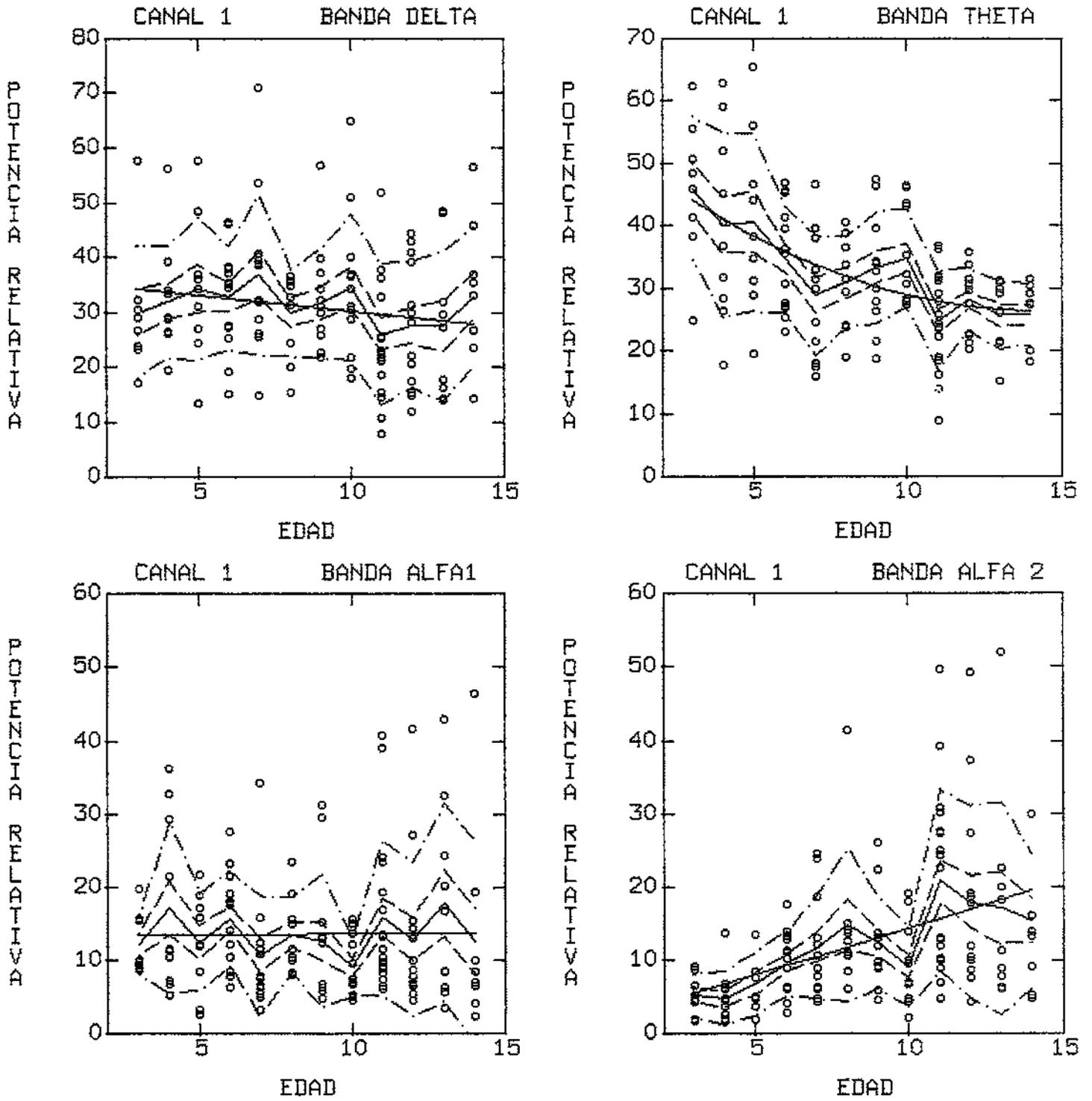


Fig. 6 Curvas de regresión. Máximo en banda Alfa 2.

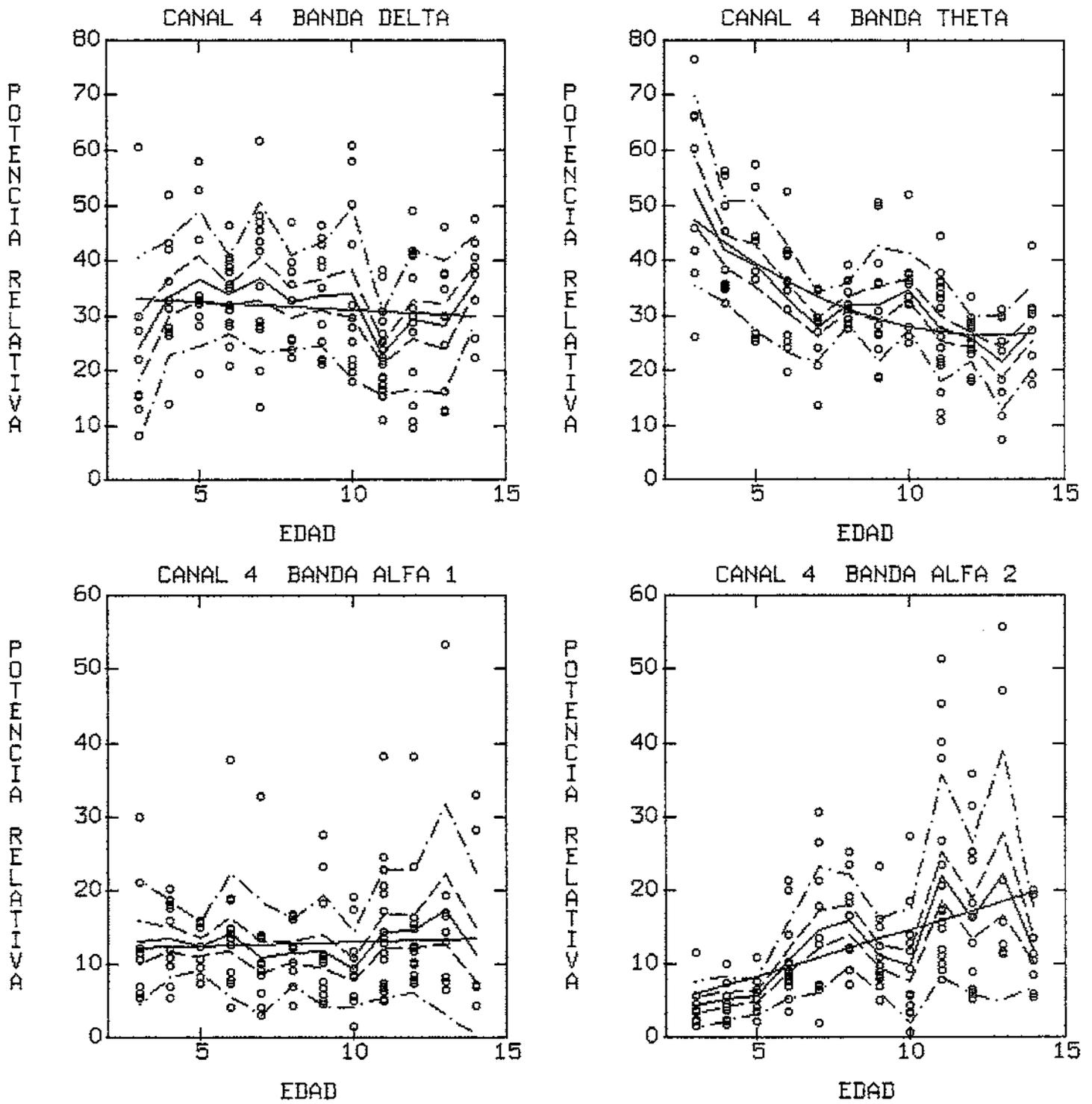


Fig. 7 Curvas de regresión. Máximo en banda Delta.

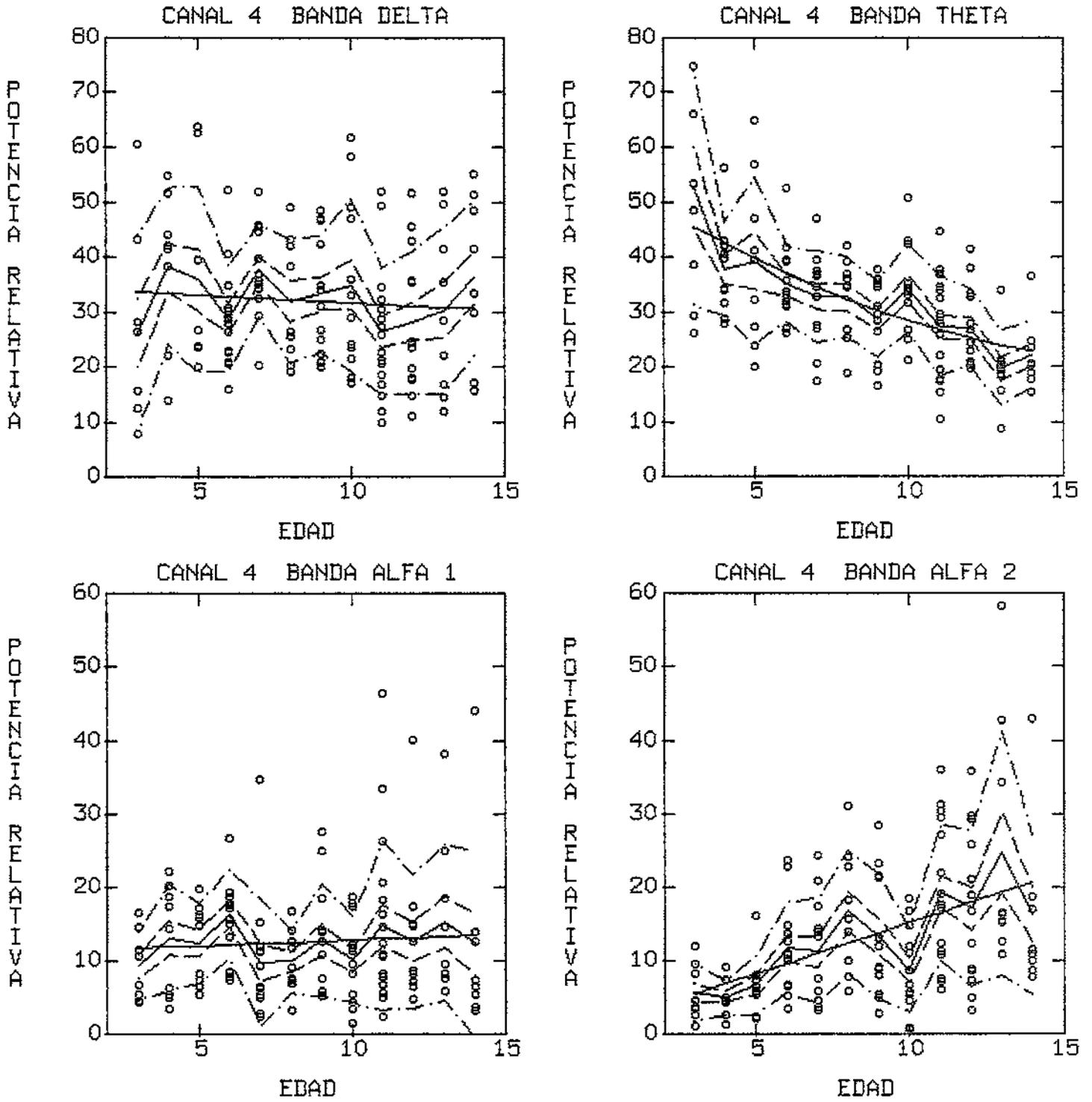


Fig. 8 Curvas de regresión. Máximo en banda Theta.

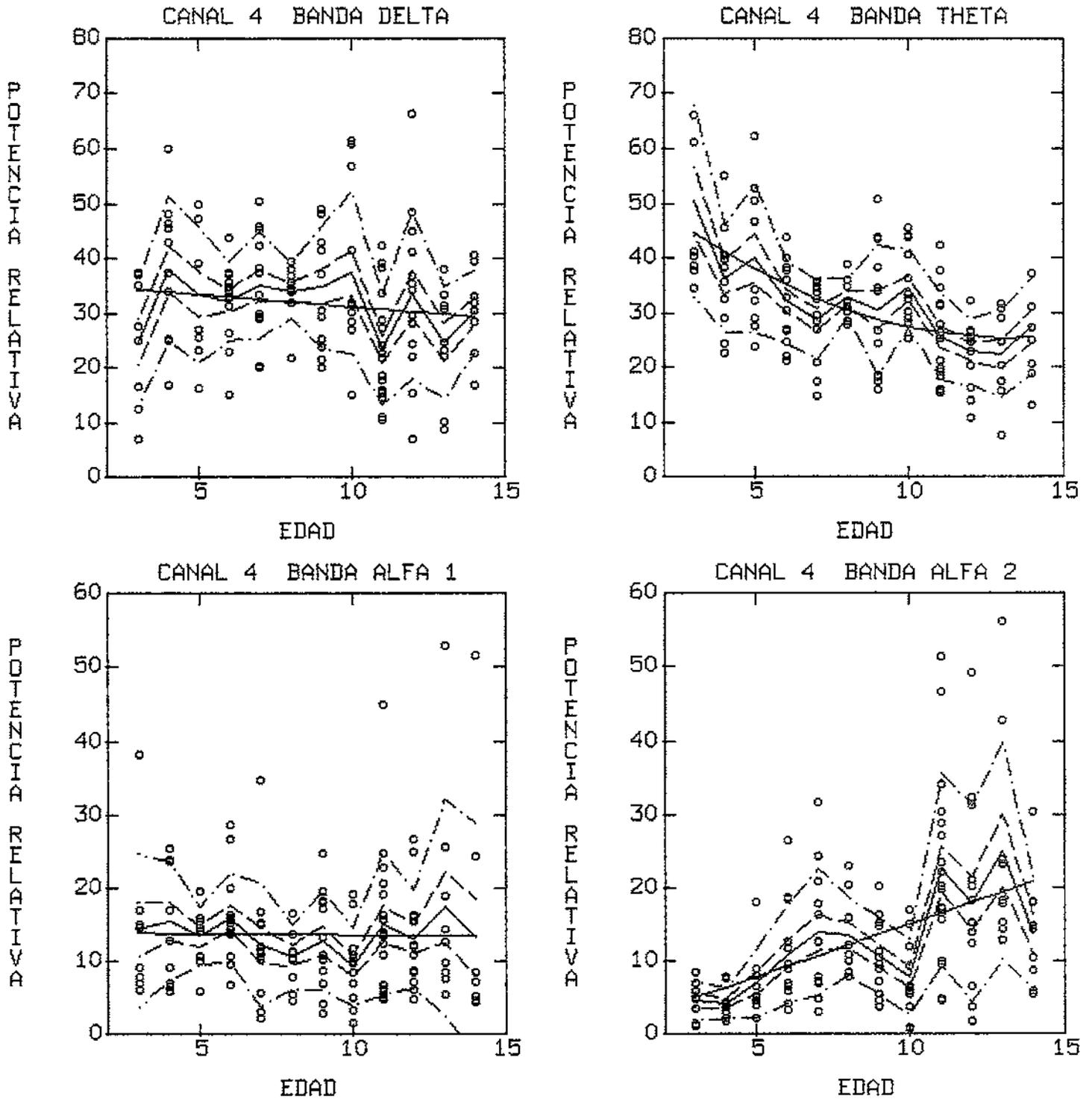


Fig. 9 Curvas de regresión. Máximo en banda Alfa 1.

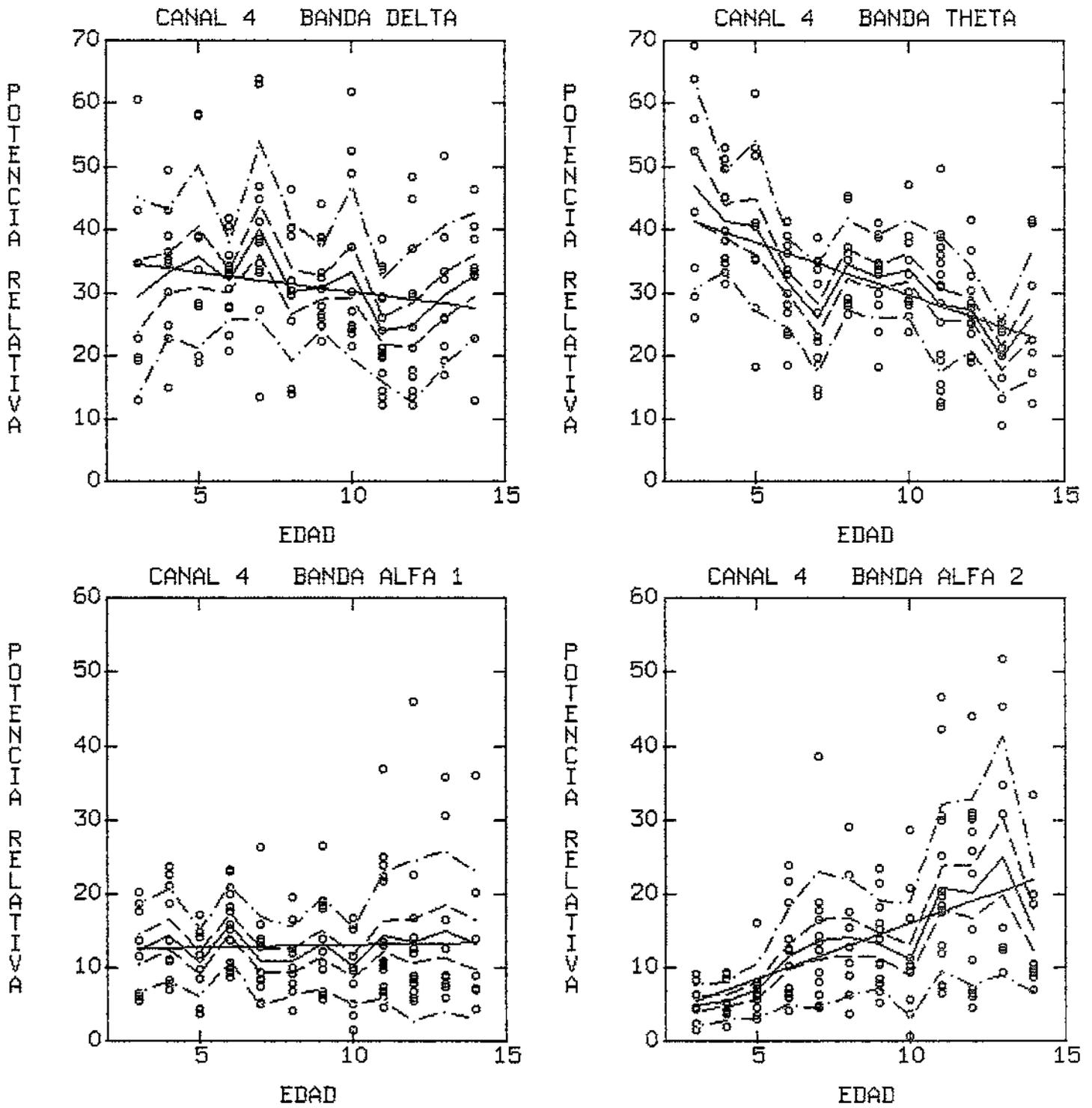


Fig. 10 Curvas de regresión. Máximo en banda Alfa 2.

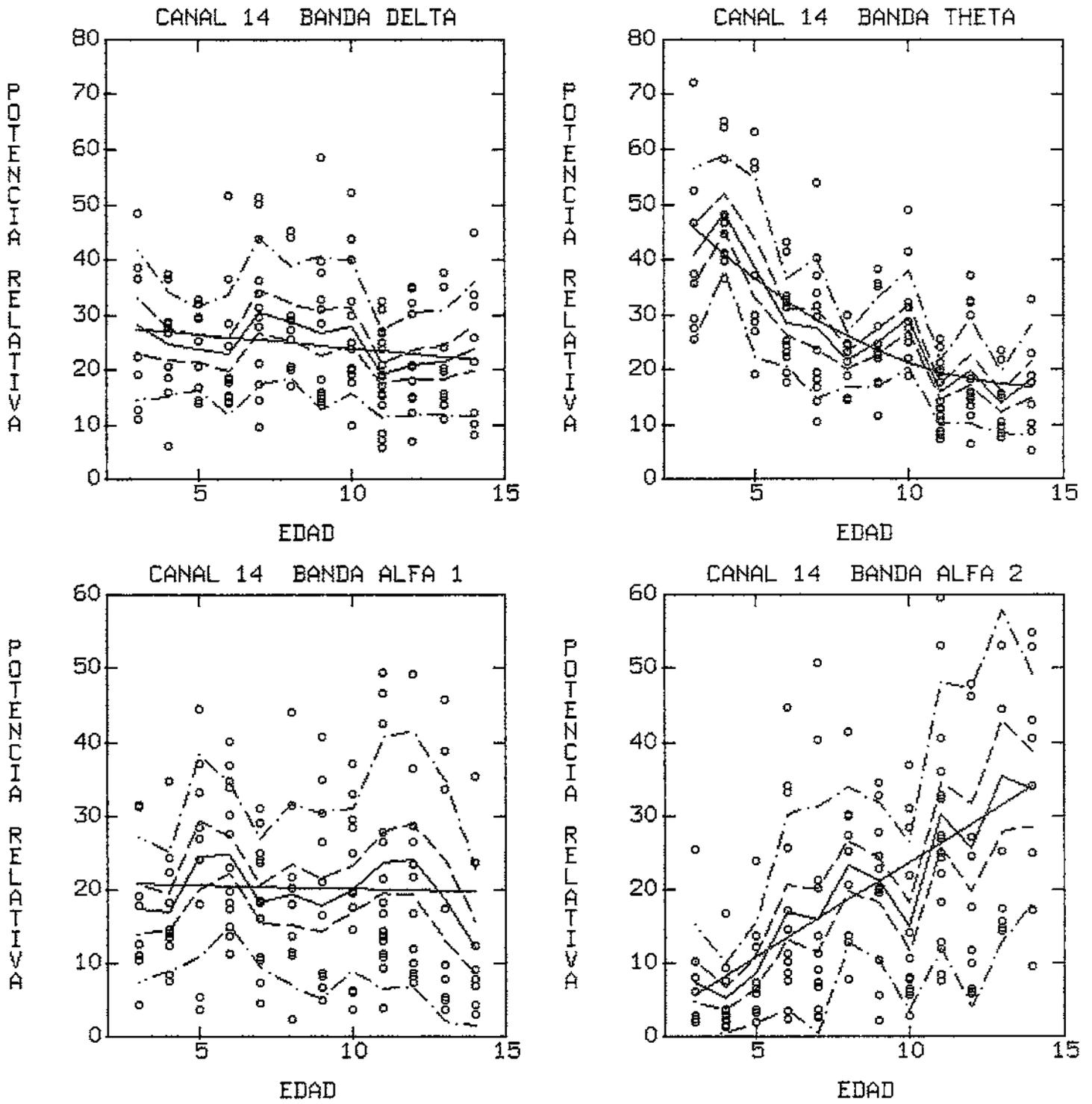


Fig. 11 Curvas de regresión. Máximo en banda Delta.

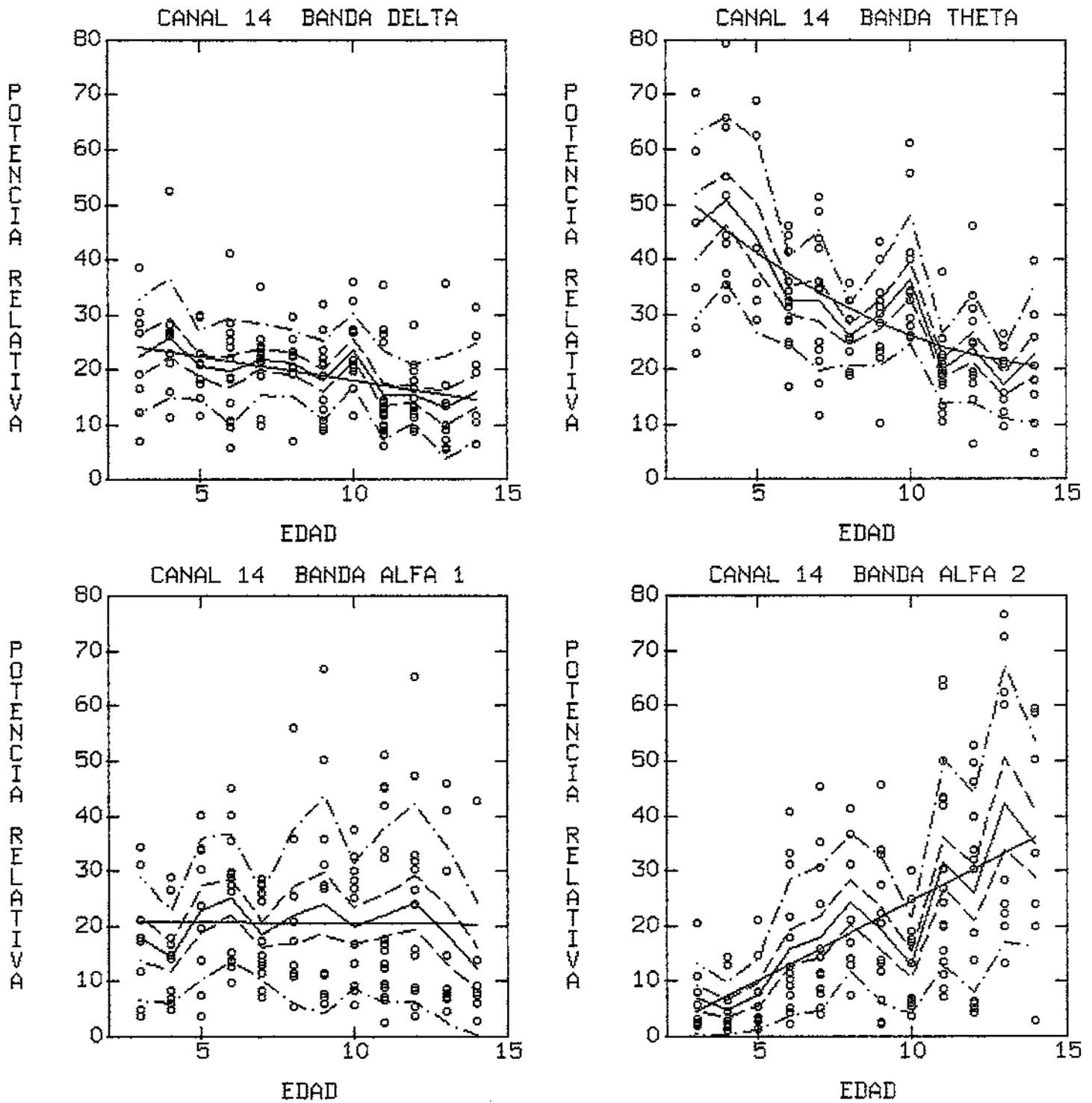


Fig. 12 Curvas de regresión. Máximo en banda Theta.

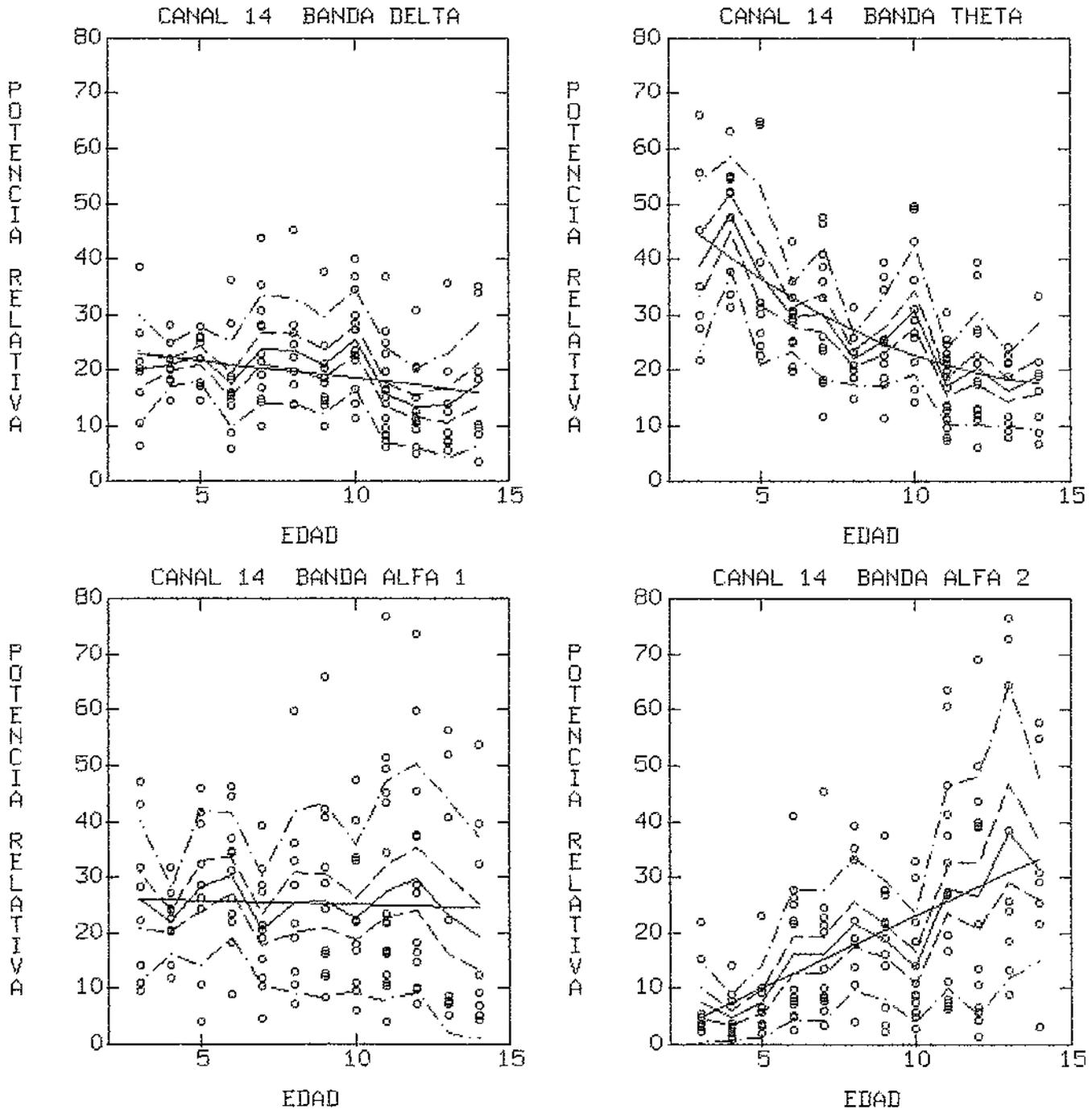


Fig. 13 Curvas de regresión. Máximo en banda Alfa 1.

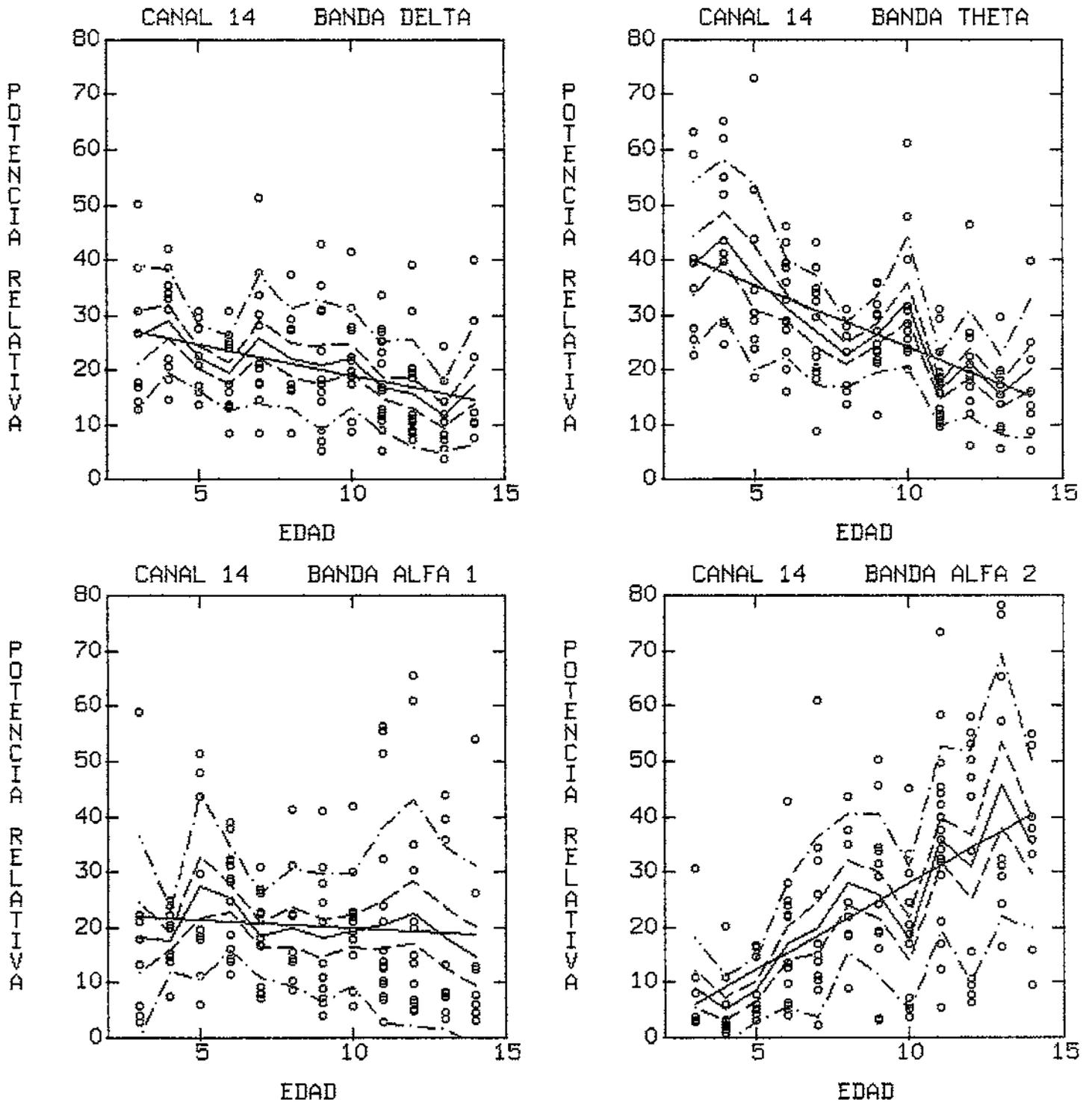


Fig. 14 Curvas de regresión. Máximo en banda Alfa 2.

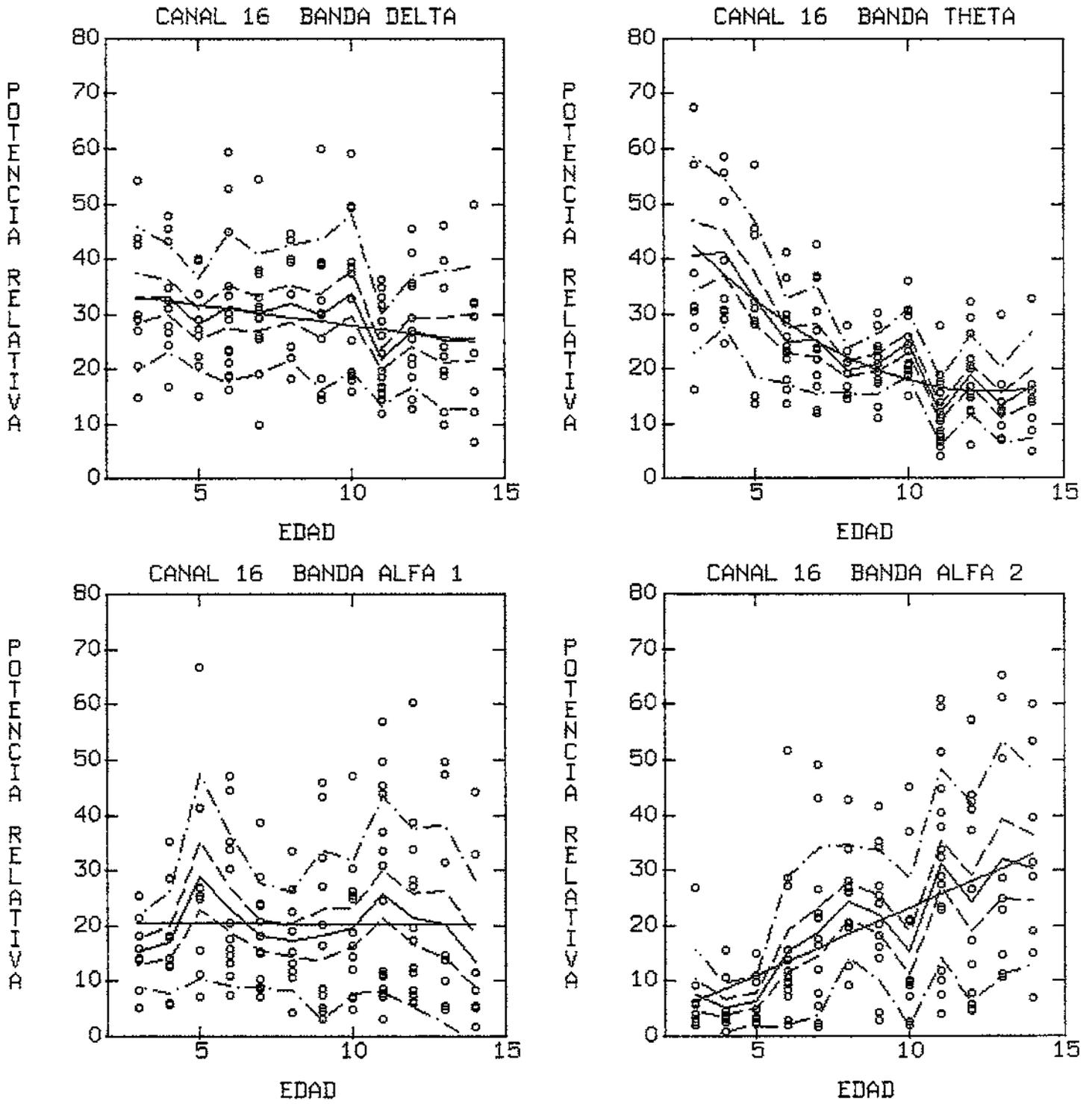


Fig. 15 Curvas de regresión. Máximo en banda Delta.

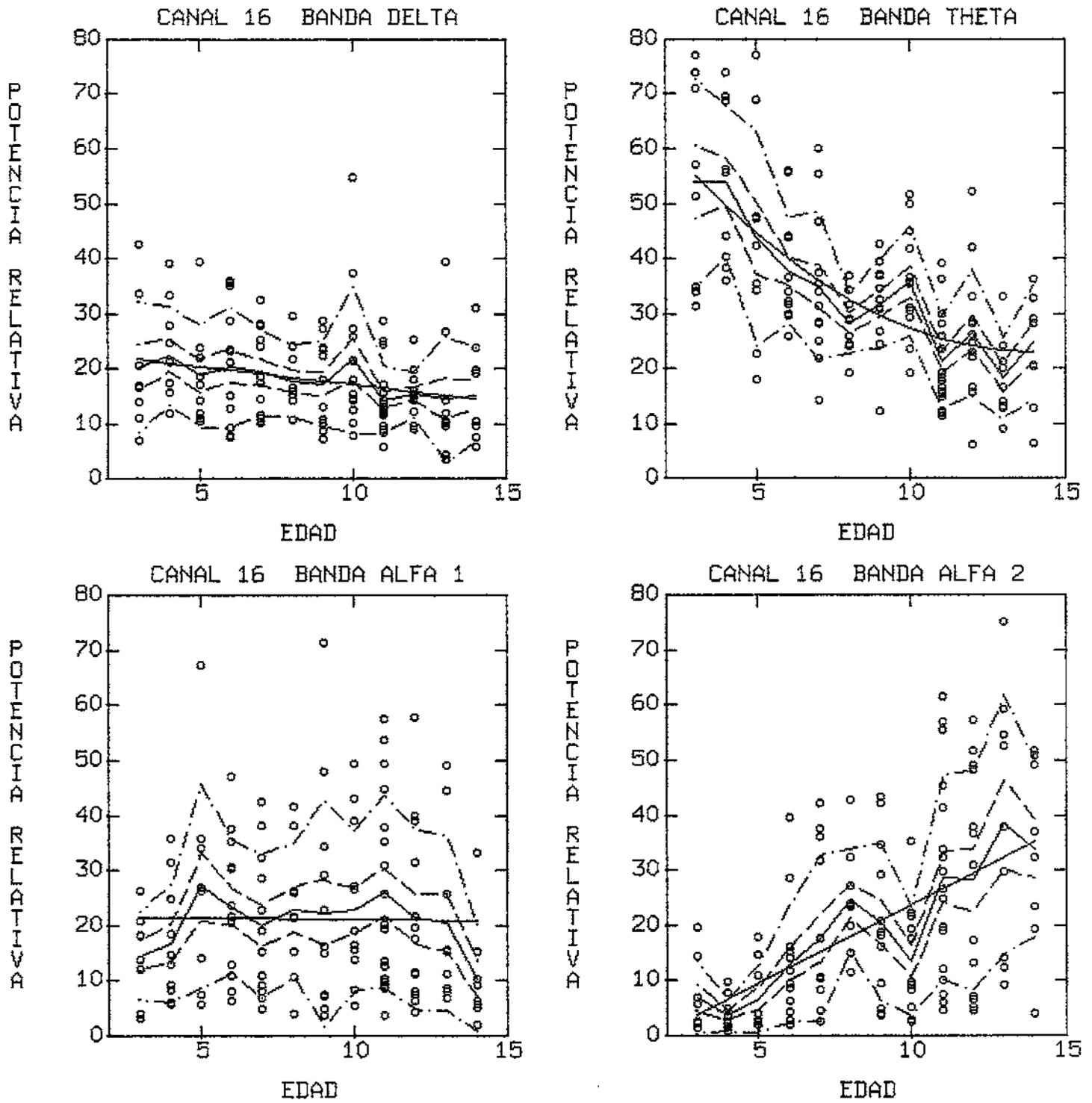


Fig. 16 Curvas de regresión. Máximo en banda Theta.

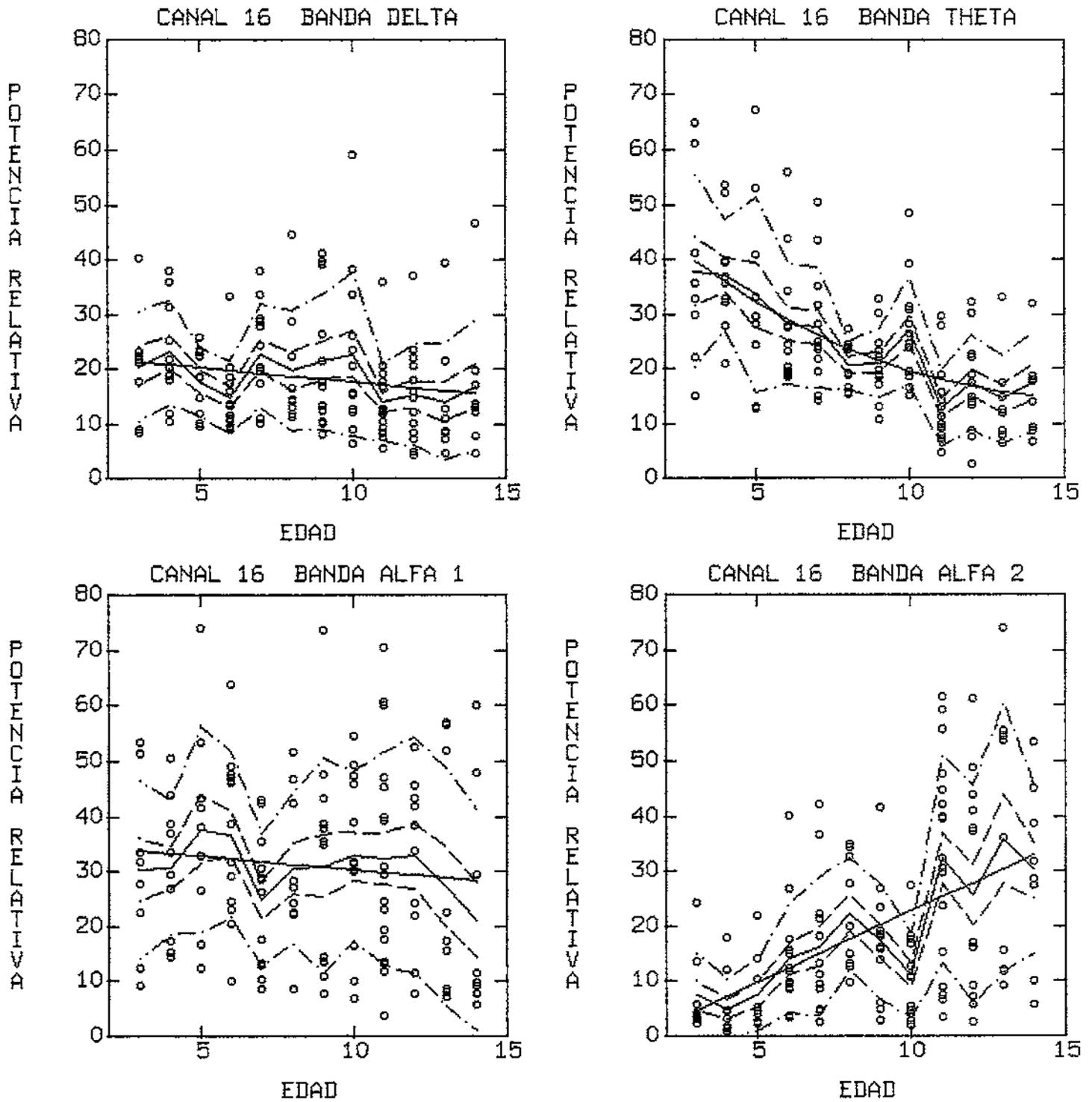


Fig. 17 Curvas de regresión. Máximo en banda Alfa 1.

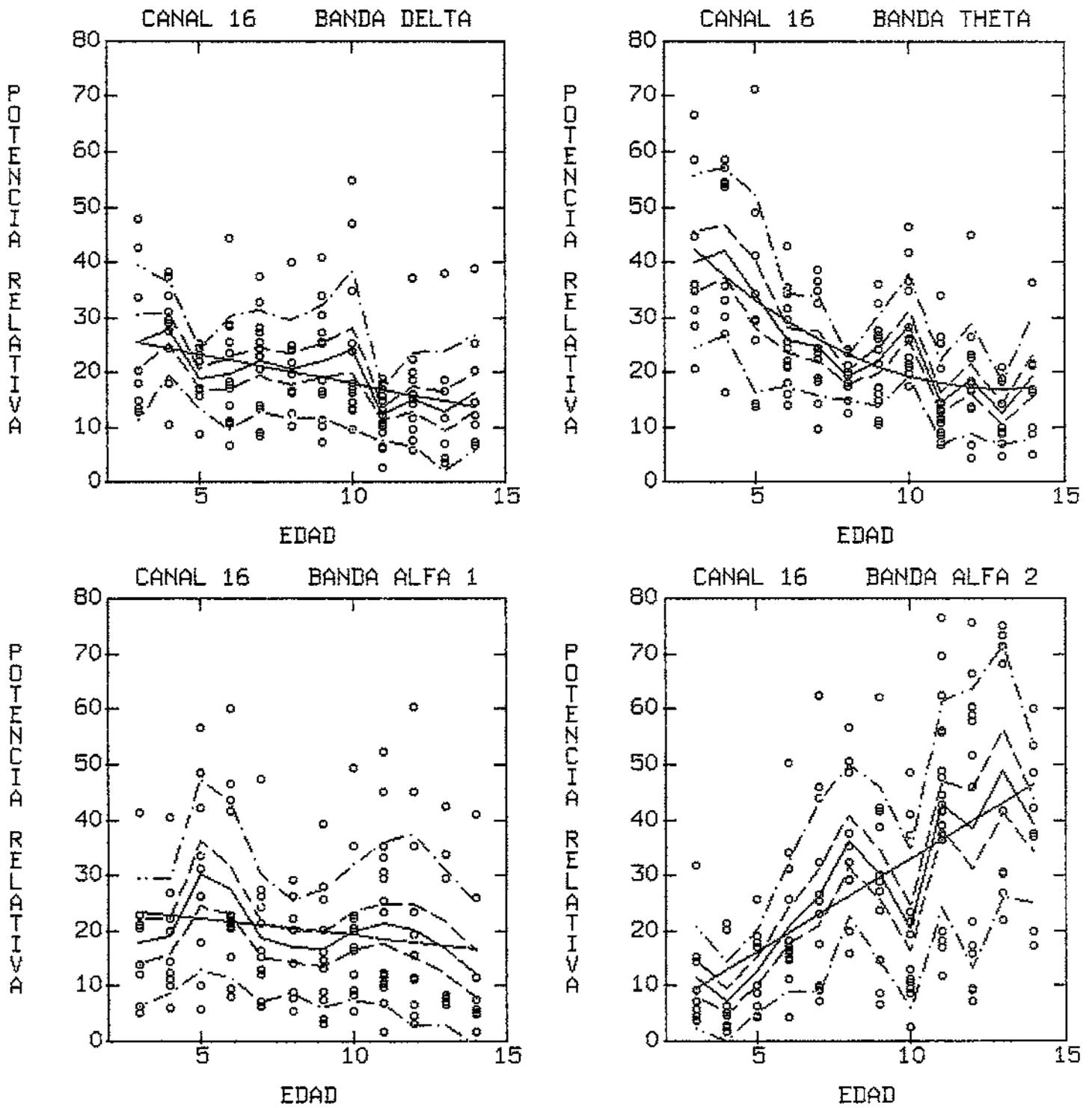


Fig. 18 Curvas de regresión. Máximo en banda Alfa 2.

## 2 ANÁLISIS MULTIVARIANTE

Una vez aplicada una técnica de análisis multivariante para la reducción de la dimensión del problema, sin pérdida apreciable de información (como comentamos en el apartado e) de las conclusiones anteriores), es necesario utilizar otras técnicas para clasificar a los individuos en cada uno de los grupos. Estas técnicas han sido:

- a) Análisis de Grupos (Cluster): Visto en el apartado II.2.8.
- b) Análisis Discriminante Lineal: Visto en el apartado II.2.7 y definido por las ecuaciones II.67 y II.68. Para su aplicación requiere:
  - 1) La probabilidad a priori de pertenencia a cualquier grupo debe ser idéntica.
  - 2) La matriz de covarianzas debe ser idéntica para todos los grupos.
- c) Análisis Discriminante Cuadrático: Visto en el apartado II.2.7 y definido por las ecuaciones II.71 y II.72. Su aplicación no requiere que la matriz de covarianzas sea idéntica para todos los grupos ya que tiene en cuenta no solo los valores de la varianza sino también los de las covarianzas. La condición de que la probabilidad de pertenencia a priori sea igual para todos los grupos sigue siendo deseable.

Aunque en nuestro caso, no tenemos un número igual de sujetos para cada edad o grupo hemos supuesto que se cumplía condición de probabilidades a priori iguales. Esto se debe a que la diferencia en número de sujetos es completamente circunstancial y no obedece a ninguna razón del tipo "existen menos sujetos del grupo A que del grupo B".

Estas técnicas se han aplicado a tres conjuntos de variables para comprobar la bondad de las mismas con respecto a la maduración:

- 1) Variables canónicas resultado de las *potencias relativas y la potencia total tipificadas en los cuatro máximos* (20 variables originales). La dimensión se puede reducir a dos sin pérdida apreciable de información. La primera variable canónica es la que mayor poder de discriminación tiene aunque, como veremos a continuación, la segunda puede añadir algunos matices.
- 2) Variables canónicas resultado de las *diferencias entre las bandas theta y alfa2 por un lado y alfa1 y alfa2 por otro* (8 variables) en cada uno de los cuatro máximos.
- 3) Variables canónicas resultado de considerar conjuntamente las *potencias relativas, la duración de cada banda como máxima y el número de veces que cada banda ha sido máxima*.

Además se incluye el análisis para las combinaciones de canales occipitales por un lado y frontales por el otro, así como para la de los cuatro en conjunto.

Más adelante se comparan los resultados obtenidos por cada uno de los métodos. Además se presentará la comparación entre los resultados obtenidos en cada canal y también según el grupo de variables utilizado.

## 2.1 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS DEL ANÁLISIS DISCRIMINANTE CUADRÁTICO

En base al análisis discriminante cuadrático se calcula el nivel de probabilidad de pertenencia a cada uno de los grupos. Para que esto tuviese una presentación más clara se presentan las curvas de nivel de probabilidad de pertenencia a cada grupo en las cotas del 90 %, 70 % y 50 %. Los programas que se han utilizado para el cálculo de estos niveles de probabilidad son los siguientes:

- a) `dbinar.m`: Dadas las coordenadas  $x, y$  de un punto bidimensional, las coordenadas de las medias de un grupo, así como los valores de varianzas y covarianzas, calcula la Densidad de Probabilidad de pertenencia a ese grupo.
- b) `Prob_2g.m`, `Prob_3g.m`, `Prob_4g.m`: Según se considere que cada sujeto pueda pertenecer a dos, tres o cuatro grupos se utilizará el programa correspondiente. La filosofía de todos es la misma, calcular las medias y varianzas de cada grupo y posteriormente llamar a `dbinar` (Algunos implementan la fórmula directamente). Una vez calculada la densidad de probabilidad de pertenencia a cada grupo, se divide cada una de ellas por la suma de las densidades de probabilidad de todos los grupos. De esta manera tenemos una estimación de la probabilidad de pertenencia a cada grupo (suponiendo que los datos fueran gaussianos, que los valores calculados de las medias y las covarianzas coincidieran con los reales de cada población y que la probabilidad a priori de pertenencia a cada grupo fuera la misma).
- c) `Niv4pro_1.m`: Este programa permite calcular las fronteras de los diferentes grupos de la siguiente manera. Se crea un reticulado sobre el plano de las variables canónicas dado por  $r_x$  y  $r_y$ . En cada uno de estos puntos se calcula el nivel de probabilidad de pertenencia a cada grupo. Posteriormente, con el comando `CONTOUR` de MATLAB se dibujan las curvas de nivel de probabilidad deseadas.

## a PRIMER GRUPO DE VARIABLES

A nivel global, en los canales occipitales (canal 14 = occipital izquierdo, canal 16 = occipital derecho) se distinguen los grupos Bp, Np, Ni y Ng, mientras que en los frontales (canal 1 = frontal izquierdo, canal 4 = frontal derecho) sólo se distinguen Bp, Ni y Ng. Los resultados muestran lo siguiente:

## 1a) Grupo de los pequeños (3-5 años)

Los resultados pueden observarse en la figura 19.

1a1) Canal frontal izquierdo:

El único grupo que se puede discriminar de los pequeños es el de los de bajo nivel de maduración, que como se puede apreciar sólo muestra 3 candidatos en el grupo de los normales para edad intermedia frente a 7 bien clasificados. Por otra parte, los de un nivel de maduración normal aparecen predominantemente en la frontera entre ambos grupos.

1a2) Canal frontal derecho:

En este caso la discriminación es algo más confusa. Los de nivel madurativo bajo aparecen predominantemente con más de un 70 % de probabilidad de pertenencia al grupo de los Bp, mientras que los de un nivel madurativo normal aparecen se encuentran a caballo de los grupos Bp y Ni.

1a3) Canal occipital izquierdo:

Continuamos distinguiendo únicamente entre Bp y Ni. Los pertenecientes al grupo Bp aparecen perfectamente encuadrados, con 9 miembros dentro y sólo 1 en las cercanías de la frontera. Los de nivel de maduración normal se encuentran equidistribuidos. Por otra parte se comienza a ver que los Ap se encuentran en posiciones de mayor cercanía al grupo de los grandes.

1a4) Canal occipital derecho:

Al contrario que en los casos anteriores, se pueden distinguir en este

canal los pertenecientes a Bp, Np y Ni. En el grupo Bp se encuentran 9 de los mismos. El grupo Np acoge a 11 de los correspondientes y solamente uno queda mal clasificado. Así mismo se observa que al igual que en el caso anterior, los más desarrollados ocupan posiciones más cercanas al grupo de los grandes.

#### 1b) Grupo de los intermedios (6-10 años)

Se puede observar fácilmente en la figura 20 que en los cuatro canales la confusión entre los niveles de maduración bajo, normal y alto es total para este grupo de edad, situándose todos en la región de Ni con algunas pocas excepciones. Esto puede ser debido a dos causas:

- Esta elección de variables no permite distinguir dichos niveles en estas edades

- El rango de edades es demasiado grande y si se tuvieran los suficientes sujetos, podrían formarse dos grupos de edad a partir de este.

#### 1c) Grupo de los grandes (11-14 años)

Los gráficos correspondientes pueden encontrarse en la figura 21.

##### 1c1) Canal frontal izquierdo

Los gráficos no permiten distinguir unos niveles de maduración de otros, aunque sí una ligera tendencia. De los Bg 13 se encuentran en el grupo intermedio y 9 en el Ng. Por otra parte, 10 Ng se encuentran bien clasificados frente a 9 mal clasificados.

##### 1c2) Canal frontal derecho

En éste, la confusión aumenta pasando a tener 12 Bp bien clasificados frente a 10 incorrectamente clasificados y 10 Np bien clasificados frente a 9.

##### 1c3) Canal occipital izquierdo

Los de nivel madurativo más bajo se concentran preferentemente en el grupo Ni (16 frente a 6 exteriores), mientras que los normales aparecen en el grupo Ng preponderantemente (17 frente a 2).

#### 1c4) Canal occipital derecho

El resultado es muy similar al caso anterior (16 frente a 3 para los Ng y 15 frente a 7 para los Bg).

#### b SEGUNDO GRUPO DE VARIABLES

La observación de que variables originales eran afectadas por un mayor peso a la hora de obtener las variables canónicas nos puso sobre la pista de que existían dos relaciones entre las potencias relativas de gran peso. Por un lado la diferencia  $\theta - \alpha_2$  y por otro  $\alpha_1 - \alpha_2$ . Estas dos relaciones eran las más importantes de las obtenidas con el análisis factorial. Las variables canónicas obtenidas se denominaron var1\_XXNC donde NC representa el número del canal y var2\_XXNC respectivamente. A nivel global se pueden distinguir los grupos Bp, i (no considerando diferencias en el nivel de maduración) y g (al igual que en el caso anterior) en todos los canales. Los resultados obtenidos son los siguientes:

##### a) Grupo de los pequeños (3-5 años)

Los resultados del análisis pueden verse en la figura 22.

#### 2a1) Canal frontal izquierdo

El grupo Bp aparece claramente diferenciado con 7 dentro de su grupo y sólo 3 fuera de él. Los Np aparecen a caballo entre Bp e i pero concentrados mayormente entre las cotas del 70 %.

#### 2a2) Canal frontal derecho

La situación es prácticamente la misma que en el caso anterior.

#### 2a3) Canal occipital izquierdo

Todos los Bp aparecen perfectamente clasificados (sólo uno se encuentra sobre la curva del 50 % de probabilidad). Por otra parte los Np aparecen a caballo entre ambos grupos.

#### 2a4) Canal occipital derecho

El grupo Ep aparece perfectamente clasificado. El grupo Np se encuentra solapado a este pero con una mayor tendencia al grupo intermedio. Por último el grupo Ap se observa como se sitúa en posiciones de normales de los intermedios o de los grandes.

#### b) Grupo de los intermedios (6-10 años)

En los cuatro canales se produce una confusión que impide un diagnóstico claro acerca de la maduración en este grupo como se puede ver en la figura 23.

#### c) Grupo de los grandes (11-14 años)

En la figura 24 se muestran los siguientes resultados.

#### 2c1) Canal frontal izquierdo

El grupo Ng aparece con un buen grado de clasificación correcta (13 frente a 6 mal clasificados), mientras que los Bg se concentran en las regiones de menor probabilidad de pertenencia a cada grupo.

#### 2c2) Canal frontal derecho

La confusión en este canal impide que se puedan distinguir los diferentes grados de maduración.

#### 2c3) Canal occipital izquierdo

El grupo Ng aparece con un buen grado de aciertos (17 correctos frente a sólo 2 mal clasificados). Por su parte el grupo Bg aparece mas desplazado hacia el grupo de los intermedios.

#### 2c4) Canal occipital derecho

El grupo Ng mantiene un buen grado de clasificación (16 correctos frente a 3 mal clasificados) mientras que el de los Bg se encuentra a caballo entre

el grupo de los grandes y el de los intermedios.

### c TERCER GRUPO DE VARIABLES

La inclusión en el análisis de las variables:

- Número de intervalos durante los cuales cada banda ha sido la máxima de las cuatro a lo largo de todo el registro.

- Número de veces que cada banda ha sido máxima en todo el registro. ha venido motivada por la intención de cuantificar la estabilidad y regularidad del registro EEG.

El siguiente paso ha sido la obtención de variables canónicas por medio del análisis de componentes principales. En este punto hay que destacar la necesidad de utilizar las tres primeras variables canónicas en lugar de sólo las dos primeras. En los canales frontales se pueden diferenciar los grupos Np y Ng, mientras que en los occipitales se distinguen Bp, Np y Ng. Los resultados obtenidos han sido:

#### a) Grupo de los pequeños (3-5 años)

En las figuras 25 (segunda variable canónica frente a la primera) y 26 (tercera variable canónica frente a la primera) se observa que:

##### 3a1) Canales frontales

En ellos es imposible distinguir entre el grupo de Bp y Np y casi todos se encuentran dentro de las fronteras del grupo de los pequeños (sólo se escapan tres en el hemisferio izquierdo y uno en el derecho). Esto sucede tanto para la gráfica de var1 frente a var2 como la de var1 frente a var3.

##### 3a2) Canal occipital izquierdo

El grupo Bp está perfectamente definido, no cayendo ninguno de ellos fuera de la frontera del 50 %. Por contra el grupo Np muestra una dispersión mucho mayor (sobre todo en el eje y) solapándose con el Bp. La representación de var1 frente a var3 arroja un resultado similar con sólo uno de los Bp fuera de su grupo. Por otro lado los Ap se encuentran próximos a la zona de los mayores.

### 3a3) Canal occipital derecho

En esta ocasión se distinguen claramente los grupos Bp, Np y Ap. El grupo Bp mantiene a todos sus integrantes dentro del mismo. El grupo Np tiene solamente a dos componentes que caen dentro del grupo Bp y por último los tres Ap caen en el grupo de los grandes. La situación para la representación de var1 frente a var3 es prácticamente idéntica.

#### b) Grupo intermedio (6-10 años)

Como se puede ver en las figuras 27 (segunda variable canónica frente a la primera) y 28 (tercera variable canónica frente a la primera):

### 3b1) Canales frontales

En esta situación no se pueden diferenciar los diferentes niveles madurativos, debido a la mezcla que se produce entre ambos grupos tanto en la representación de var1 frente a var2 como en la de var1 frente a la de var3.

### 3b2) Canal frontal izquierdo

Los Bi caen mayoritariamente en la zona de Np y Bp (17 frente a 7 en la zona Ng). Los Ni muestran un comportamiento parecido (17 frente a 10). En la representación de var1 frente a var3 los Ni muestran una mayoría en la zona Np (15) frente a la zona Bp (1) y la Ng (11). Algo similar ocurre con los Bi.

### 3b3) Canal frontal derecho

En este canal es donde mejor se aprecia la distinción entre los grupos de distinta maduración cerebral. En la representación de var1 frente a var2 se tiene que el grupo Bi tiene la mayoría de sus componentes en la zona Bp y Np (18 frente a 8 en la zona Ng), mientras que el grupo Ni incide fundamentalmente en la zona Ng (19 frente a 7 en la zona Bp y Np). En la representación de var1 frente a var3 se tiene una situación similar. El grupo Bi tiene a la mayoría de sus componentes en la zona Bp-Np (20 frente a 6 en la zona Ng) mientras el grupo Ni cae mayoritariamente dentro de la zona Ng (20 frente a 6 en la zona Bp-Np).

### c) Grupo de los grandes (11-14 años)

En las figuras 29 (segunda variable canónica frente a la primera) y 30 (tercera variable canónica frente a la primera).

#### 3c1) Canales frontales

Los grupos Bp y Np se encuentran totalmente solapados, de forma que no pueden distinguirse uno de otro siendo la dispersión bastante grande.

#### 3c2) Canal occipital izquierdo

En ambas representaciones el grupo Ng se encuentra perfectamente confinado dentro de sus fronteras. Por el contrario el grupo Bg se encuentra más repartido (9 en la zona Bp-Np frente a 12 en la zona Ng en ambas representaciones).

#### 3c3) Canal occipital derecho

La tendencia es la misma que la descrita anteriormente con la excepción de un Ng que se encuentra en la zona Bp-Np y de 7 Bg en la misma zona.

## 2.2 ANÁLISIS DE GRUPOS (CLUSTER)

Para el mismo se ha hecho uso del paquete estadístico SPSS +. De entre las dos posibilidades que permite dicho programa (CLUSTER o QUICK CLUSTER) se ha utilizado la segunda por permitir definir un número prefijado de grupos y por la posibilidad de establecer como condiciones iniciales los centros de estos grupos. Esto permitirá que los agrupamientos no salgan excesivamente diferentes de los obtenidos por otros métodos y la comparación entre los otros métodos estadísticos y el análisis de grupos.

Este estudio se ha llevado a cabo porque al contrario que el análisis discriminante (lineal o cuadrático) no se requiere suponer ningún tipo de distribución estadística para los datos. Por tanto se evita el posible error cometido si se supone que los datos siguen una distribución Gausiana y esta hipótesis no es correcta. Debemos averiguar, si para nuestro problema concreto, ofrecen mejores prestaciones los métodos basados en distribuciones estadísticas o los que no hacen ninguna suposición sobre la distribución

estadística de los datos.

### 2.2.1 MÉTODO

Cada caso se asigna al grupo con respecto a cuyo centro se encuentre a una distancia más cercana. Las posiciones de estos centros se tienen que indicar de forma manual, ya que de lo contrario los crearía en posiciones tales que la distancia entre ellos fuera la máxima posible. En nuestro caso hemos hecho coincidir los centros de los grupos con la media de los grupos obtenidos por el análisis discriminante cuadrático.

### 2.3 ANÁLISIS DISCRIMINANTE LINEAL

Como ya se comentó en el apartado II.3 éste se lleva a cabo mediante el paquete de software SPSS (comando DSCRIMINANT). En base a los grupos definidos anteriormente se asignaba a cada sujeto un código que expresaba el grupo al que pertenecía. Dicha variable se utilizaba como control y el comando devolvía un listado completo de cada sujeto, el grupo al que pertenecía inicialmente y el grupo al cual, según la regla de clasificación, debería pertenecer, junto con el nivel de probabilidad de pertenencia a cada grupo. Además mostraba los resultados de clasificación correcta para cada grupo y los totales.

Este análisis se ha llevado a cabo para tratar de demostrar que las covarianzas de nuestros grupos son lo suficientemente homogéneas. Si esta hipótesis fuera cierta sería innecesario el uso del Discriminante Cuadrático.

### 2.4 ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS MÉTODOS DE ANÁLISIS MULTIVARIANTE UTILIZADOS

A continuación expondremos los resultados de la comparación de los distintos métodos de análisis multivariante (Moreno et al. (1992b)) para cada uno de los tres grupos de variables. La comparación de los resultados entre unos grupos y otros no es posible por las diferencias existentes entre los grupos elegidos como particiones fundamentales. Aunque como se ha reseñado anteriormente, se pueden construir 9 subgrupos a partir de tres grupos de edad y tres niveles de maduración, no todos están igual de concentrados, ni pueden ser separados de otros. Por ello, se han cogido para cada uno de los conjuntos de variables los siguientes grupos (Por ser los mejor discriminados):

1) Variables de Potencias absolutas y total:

a) Bp, Np, Ni y Ng

2) Variables de diferencias de potencias relativas:

a) grupo Bp, i y g

3) Variables de potencias relativas, duración como banda máxima y número de veces que ha alcanzado el máximo:

a) grupo Bp, Np y Ng

Una vez elegidos los grupos (atendiendo a sus propiedades estadísticas) que pueden ser discriminados se ha hecho una clasificación supervisada de todos los sujetos teniendo en cuenta las siguiente regla:

1) El sujeto se considera correctamente clasificado si:

a) el grupo al que es asignado coincide con el propuesto por el experto médico.

b) En caso de que el grupo al que fue asignado por el experto médico no se encuentre entre los que se pueden discriminar se adoptará el siguiente criterio. Si el grupo diagnosticado es de nivel madurativo bajo, deberá encontrarse clasificado en grupo de menor edad de la que le corresponde cronológicamente. Por el contrario, si el grupo diagnosticado fuera de nivel madurativo alto, deberá encontrarse clasificado en un grupo de edad superior a la que le corresponde por su edad.

2) El sujeto se considerará mal clasificado si no se cumplen las condiciones anteriores.

El resultado de esta clasificación se ha comprobado para cada uno de los 9 grupos que pueden formarse y arrojan los siguientes resultados (En caso de empate a igual número de casos bien clasificados se considera que ambos métodos han sido los mejores. Por ello es posible que la suma de los números que se dan a continuación no siempre sume 9).

#### Grupo 1 de variables

En la siguiente tabla se presentan los porcentajes de clasificación correcta para el primer grupo de variables en todos los canales analizados.

	Bp	Np	Ap	Bi	Ni	Ai	Bg	Ng	Ag	CANALES
A. Grupos	40	54	50	62	59	0	100	0	0	1
A. Disc. Lin.	80	46	75	35	67	25	64	52	0	1
A. Disc. Cuad.	70	38	75	27	63	25	59	52	0	1
A. Grupos	50	69	0	53	44	0	100	0	0	4
A. Disc. Lin.	60	69	50	38	59	0	54	58	0	4
A. Disc. Cuad.	80	62	50	34	67	25	54	52	0	4
A. Grupos	90	54	25	64	56	0	100	0	0	14
A. Disc. Lin.	90	77	75	50	59	25	68	79	0	14
A. Disc. Cuad.	90	54	75	50	63	50	73	84	0	14
A. Grupos	80	69	75	50	48	25	55	68	0	16
A. Disc. Lin.	90	85	75	62	63	0	68	84	0	16
A. Disc. Cuad.	90	92	75	50	63	25	64	84	0	16
A. Grupos	40	69	0	62	52	0	100	0	0	1, 4
A. Disc. Lin.	40	62	75	38	67	25	50	63	0	1, 4
A. Disc. Cuad.	70	77	25	31	63	0	59	68	0	1, 4
A. Grupos	90	46	75	54	52	25	64	68	0	14, 16
A. Disc. Lin.	90	69	75	58	74	25	64	79	0	14, 16
A. Disc. Cuad.	100	77	75	50	81	50	73	84	0	14, 16
A. Grupos	90	77	75	42	81	25	64	74	0	1, 4, 14, 16
A. Disc. Lin.	100	85	75	46	81	0	64	84	0	1, 4, 14, 16
A. Disc. Cuad.	100	100	100	35	96	25	73	90	0	1, 4, 14, 16

Para el canal 1 el análisis discriminante lineal es superior tanto al análisis de cluster como al discriminante cuadrático. Esto lo da el hecho de que en 5 de las ocasiones es el que más sujetos ha clasificado correctamente, mientras que el análisis cluster sólo sobresale en dos y el discriminante cuadrático en tres ocasiones.

En el canal 4 el análisis discriminante cuadrático es ligeramente superior (4 subgrupos en los que ha clasificado el mayor número de sujetos correctamente) a los otros dos métodos, que empatan a 3 subgrupos cada uno.

La ventaja del análisis discriminante cuadrático aumenta, en el canal 14, al ser el mejor clasificador en 6 ocasiones frente a 3 de los otros dos métodos.

En el canal 16 se produce una disminución de los resultados del análisis cluster (en sólo 2 grupos es el mejor) a la par que un empate entre análisis discriminante lineal y discriminante cuadrático (6 grupos en los que cada uno ha sido el mejor).

Para el grupo de canales frontales se mantiene la misma cantidad de aciertos del análisis cluster, al mismo tiempo que el empate entre ambos análisis discriminantes (aunque ahora sólo le corresponden tres grupos a cada uno).

Sin embargo, en el grupo de los canales occipitales, el dominio del análisis discriminante cuadrático se hace más patente, al ser el mejor clasificador en siete grupos frente a dos del análisis discriminante lineal y uno del análisis cluster.

En el conjunto de los cuatro canales se mantiene la misma proporción que en el caso anterior.

Como conclusión, para el grupo 1 de variables, se puede extraer que el análisis discriminante cuadrático ha sido el mejor clasificador al ser el que más subgrupos ha podido clasificar correctamente en 6 de las pruebas frente a 3 del discriminante lineal y ninguna del cuadrático.

#### Grupo 2 de variables

	Bp	Np	Ap	Bi	Ni	Ai	Bg	Ng	Ag	CANALES
A. Grupos	70	46	75	73	77	25	59	58	50	1
A. Disc. Lin.	70	38	50	62	67	50	36	68	67	1
A. Disc. Cuad.	70	31	50	62	67	75	45	68	67	1
A. Grupos	60	62	100	81	63	50	54	79	67	4
A. Disc. Lin.	80	54	100	65	59	50	36	89	83	4
A. Disc. Cuad.	80	31	75	77	67	50	50	53	67	4
A. Grupos	90	62	75	54	55	75	45	74	67	14
A. Disc. Lin.	90	69	25	77	52	75	41	89	100	14
A. Disc. Cuad.	100	69	50	69	63	75	32	95	100	14
A. Grupos	80	54	75	81	78	50	50	74	67	1, 4
A. Disc. Lin.	70	38	50	58	74	75	36	68	67	1, 4
A. Disc. Cuad.	90	23	75	73	78	75	41	63	67	1, 4
A. Grupos	90	54	100	54	59	75	41	79	67	14, 16
A. Disc. Lin.	90	69	75	69	67	50	41	95	100	14, 16
A. Disc. Cuad.	100	77	75	73	70	50	32	84	83	14, 16
A. Grupos	100	46	100	62	67	75	50	74	67	1, 4, 14, 16
A. Disc. Lin.	90	69	75	73	70	50	36	95	83	1, 4, 14, 16
A. Disc. Cuad.	100	92	25	15	7	0	0	89	100	1, 4, 14, 16

En el canal 1 el mejor clasificador ha sido el análisis cluster al

obtener el mejor resultado en 6 subgrupos frente a 3 del análisis discriminante lineal y 4 del análisis discriminante cuadrático.

El análisis discriminante lineal se revela, en el canal 4, tan efectivo como el análisis cluster al obtener ambos el mejor resultado en 5 ocasiones. Por su parte el análisis discriminante cuadrático ha obtenido el mejor resultado en tres ocasiones.

El análisis discriminante cuadrático vuelve a recuperar el protagonismo, en el canal 14, al ser junto con el discriminante lineal el mejor clasificador en 5 de los grupos. El análisis cluster sólo consigue ser el mejor en 3 ocasiones.

En el canal 16 el análisis discriminante cuadrático aumenta su ventaja siendo el mejor clasificador en 6 subgrupos frente a 4 del discriminante lineal y 3 del análisis cluster.

En el grupo de canales frontales el análisis cluster obtiene su mejor marca de todos los grupos de variables al ser el mejor clasificador en 7 ocasiones frente a 5 del discriminante cuadrático y 2 del discriminante lineal.

Para el grupo de canales occipitales el análisis discriminante cuadrático toma ligera ventaja (el mejor clasificador de 4 subgrupos) frente a los otros dos métodos (3 subgrupos cada uno de ellos).

El análisis cluster vuelve a ser el mejor clasificador al obtener los mejores resultados en 4 subgrupos frente a 3 de los otros métodos cuando se considera el conjunto de los 4 canales.

Como conclusión, para el grupo 2 de variables, se puede decir que el análisis cluster ha resultado en esta ocasión un buen clasificador ya que en cuatro de las 7 experiencias anteriores ha sido el que ha tenido mejores porcentajes de clasificación correcta frente a 3 del discriminante cuadrático y sólo dos del discriminante lineal.

### Grupo 3 de variables

	Bp	Np	Ap	Bi	Ni	Ai	Bg	Ng	Ag	CANALES
A. Grupos	70	62	0	19	19	0	9	0	16	1
A. Disc. Lin.	70	54	0	35	26	75	32	16	33	1
A. Disc. Cuad.	80	92	75	77	89	100	91	100	100	1
A. Grupos	50	31	75	54	37	50	27	16	33	4
A. Disc. Lin.	80	46	50	34	11	25	41	32	50	4
A. Disc. Cuad.	90	92	75	96	89	75	95	95	83	4
A. Grupos	90	77	50	46	56	50	50	79	83	14
A. Disc. Lin.	100	92	100	100	93	75	82	100	100	14
A. Disc. Cuad.	90	77	75	77	85	50	64	100	100	14
A. Grupos	100	69	0	50	52	75	55	79	67	16
A. Disc. Lin.	100	100	100	73	89	50	95	100	100	16
A. Disc. Cuad.	100	92	100	84	89	75	86	100	100	16
A. Grupos	60	31	0	46	26	50	32	21	17	1, 4
A. Disc. Lin.	50	62	50	38	22	50	32	16	17	1, 4
A. Disc. Cuad.	70	100	75	73	78	75	82	100	67	1, 4
A. Grupos	100	69	0	46	70	50	59	79	83	14, 16
A. Disc. Lin.	100	92	100	81	74	50	91	95	100	14, 16
A. Disc. Cuad.	100	84	75	77	93	100	100	100	100	14, 16
A. Grupos	90	62	0	62	70	100	73	89	83	1, 4, 14, 16
A. Disc. Lin.	100	77	50	65	67	75	86	100	100	1, 4, 14, 16
A. Disc. Cuad.	100	92	75	65	70	100	95	100	100	1, 4, 14, 16

En el canal 1 el análisis discriminante cuadrático obtiene su mejor resultado al dar el porcentaje más alto de bien clasificados en los 9 grupos. Por su parte, ni el análisis cluster ni el discriminante lineal han igualado al anterior en ninguno de los grupos.

La situación en el canal 4 es muy parecida al canal anterior, con la única excepción de que el análisis cluster iguala al cuadrático en uno de los subgrupos.

En el canal 14 cambia la tendencia anterior y es el análisis discriminante lineal el que obtiene su mejor resultado clasificatorio al ser el mejor también en los 9 grupos siendo igualado por el cuadrático únicamente en dos de ellos.

La situación en el canal 16 es ahora algo más parecida ya que tanto el análisis discriminante lineal como el cuadrático están igualados al clasificar correctamente el mismo porcentaje de sujetos en 7 de los grupos y el análisis cluster sólo los iguala en dos de ellos.

Para el grupo de canales frontales se obtienen unos resultados acordes con sus resultados individuales. El análisis discriminante cuadrático vuelve a alcanzar el nivel de ser el mejor clasificador en los 9 grupos sin ser igualado en ninguno de ellos por alguno de los otros dos métodos.

El análisis discriminante cuadrático continúa siendo el mejor clasificador, en el grupo de canales occipitales, aunque de forma más modesta ( el mejor clasificador en 6 de los grupos frente a 4 del discriminante lineal y 1 del cluster.

El análisis discriminante cuadrático es, para este conjunto de todos los canales, el mejor clasificador en todos los grupos, siendo igualado en cuatro de ellos por el discriminante lineal y en dos por el análisis cluster.

Se puede observar que, para el grupo 3 de variables, de las 7 experiencias realizadas, en 6 de ellas el discriminante cuadrático ha sido el mejor clasificador, en sólo dos el discriminante lineal y en ninguna el análisis cluster.

## CONCLUSIONES

### 1) Respecto al estudio comparativo.

De las 21 experiencias que se han probado, el análisis discriminante cuadrático ha sido el mejor en 15 de ellas. Por contra, el análisis discriminante lineal ha obtenido unos porcentajes iguales o superiores sólo en 7 de los casos y el análisis cluster en cuatro ocasiones.

De esta forma, queda patente la potencia del análisis discriminante cuadrático como clasificador frente a los otros dos métodos. Esto trae consigo las observaciones siguientes:

a) No podemos despreciar las covarianzas de los grupos al construir las fronteras discriminantes (motivo por el cual el discriminante cuadrático es superior al lineal).

b) La suposición de Normalidad Multivariante no es una hipótesis rechazable, ya que los métodos basados en esta suposición resultan superiores en cuanto al porcentaje de clasificación correcta al análisis de grupos.

c) Los métodos basados en distribuciones estadísticas resultan superiores en cuanto al porcentaje de éxitos.

d) El análisis de grupos ha resultado superior a los otros únicamente en el grupo 2 de variables.

## 2) Respecto a los canales en estudio.

a) El canal frontal izquierdo es el que permite una clasificación más pobre al detectar un solo grupo.

b) El canal frontal derecho mejora su resolución y permite la distinción de dos grupos en casi todas las bandas de frecuencia.

c) El canal occipital izquierdo a un mínimo de cuatro grupos diferenciados por la primera variable canónica y entre uno y tres por la segunda.

d) El canal occipital derecho ofrece la mejor discriminación al poder distinguir cuatro subgrupos o más con la primera variable canónica, así como entre uno y cuatro con la segunda variable canónica.

e) Cuando se toman los cuatro canales, el porcentaje de clasificación correcta aumenta en comparación con la clasificación en base a canales individuales.

## 3) Respecto a las variables canónicas.

a) La primera (la que contiene mayor porcentaje de varianza de las variables originales) es la que da lugar a unos mejores resultados. La segunda variable canónica permite la distinción de algún grupo aislado. El efecto de las variables canónicas a partir de la tercera (sólo tiene importancia para el primer grupo de variables) es muy pequeño sobre la clasificación y pueden ser despreciadas.

## 3) Respecto al máximo en el que se han tomado los parámetros.

El máximo en la banda theta es el que permite una mayor discriminación, seguido por el máximo en alfa 2, en alfa 1 y por último el máximo en delta.

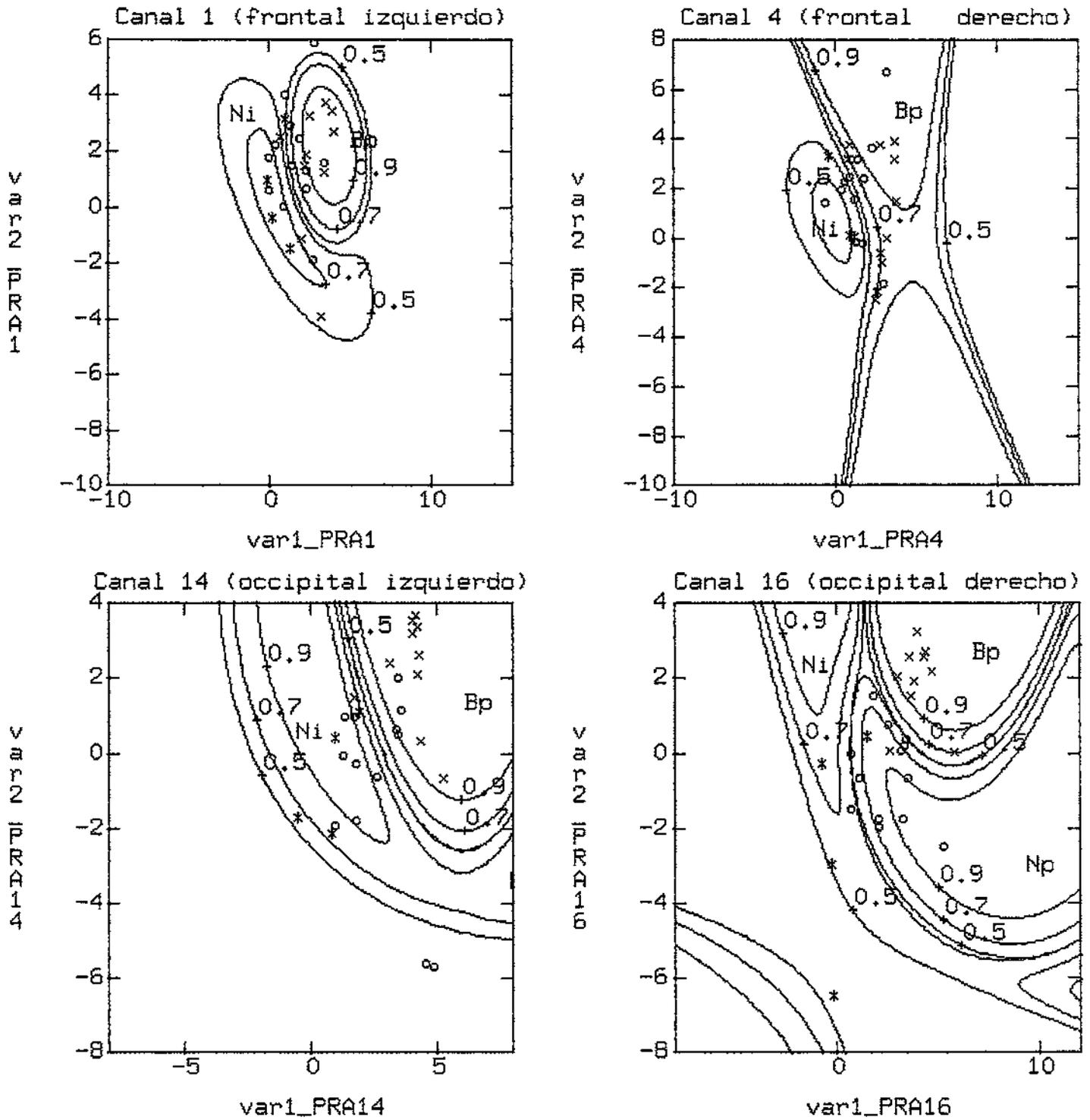


Fig. 19 Clasificación cuadrática para el primer grupo de variables. Sujetos de 3 a 5 años. x=Bajo o=Normal \*=Alto (maduración).

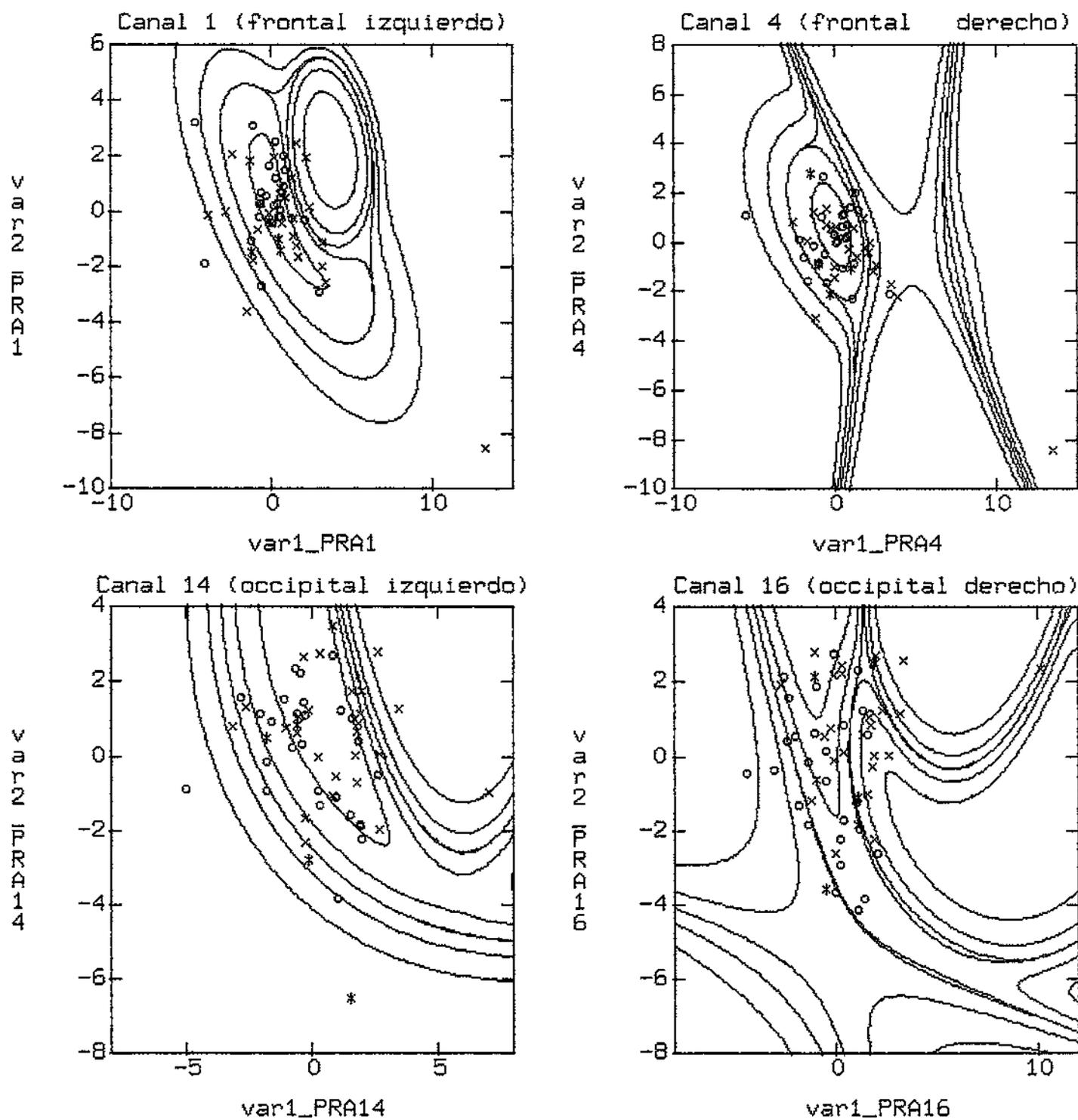


Fig. 20 Clasificación cuadrática para el primer grupo de variables.  
Sujetos de 6 a 10 años. x=Bajo o=Normal \*=Alto (maduración)

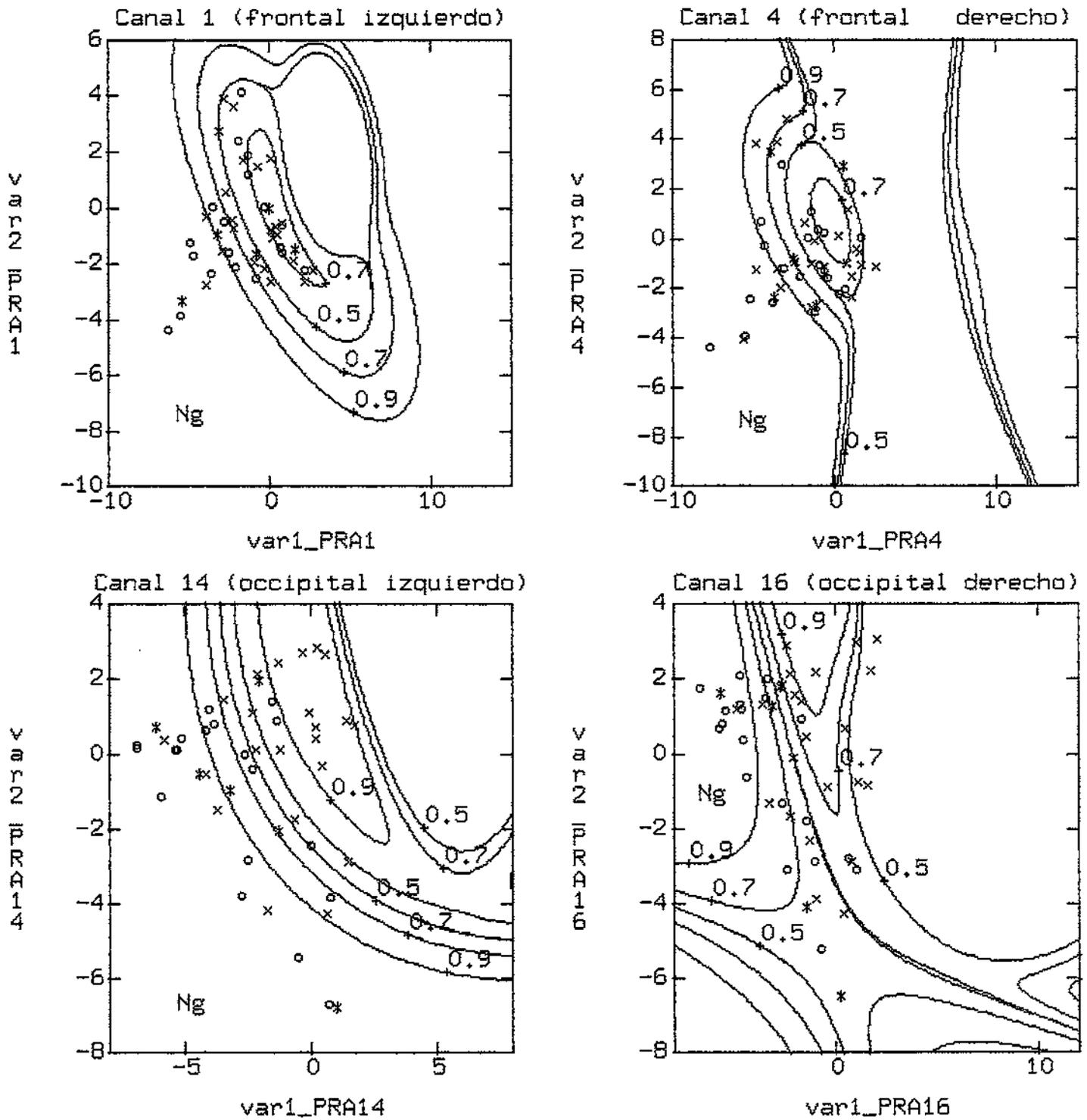


Fig. 21 Clasificación cuadrática para el primer grupo de variables. Sujetos de 11 a 14 años. x=Bajo o=Normal \*=Alto (maduración)

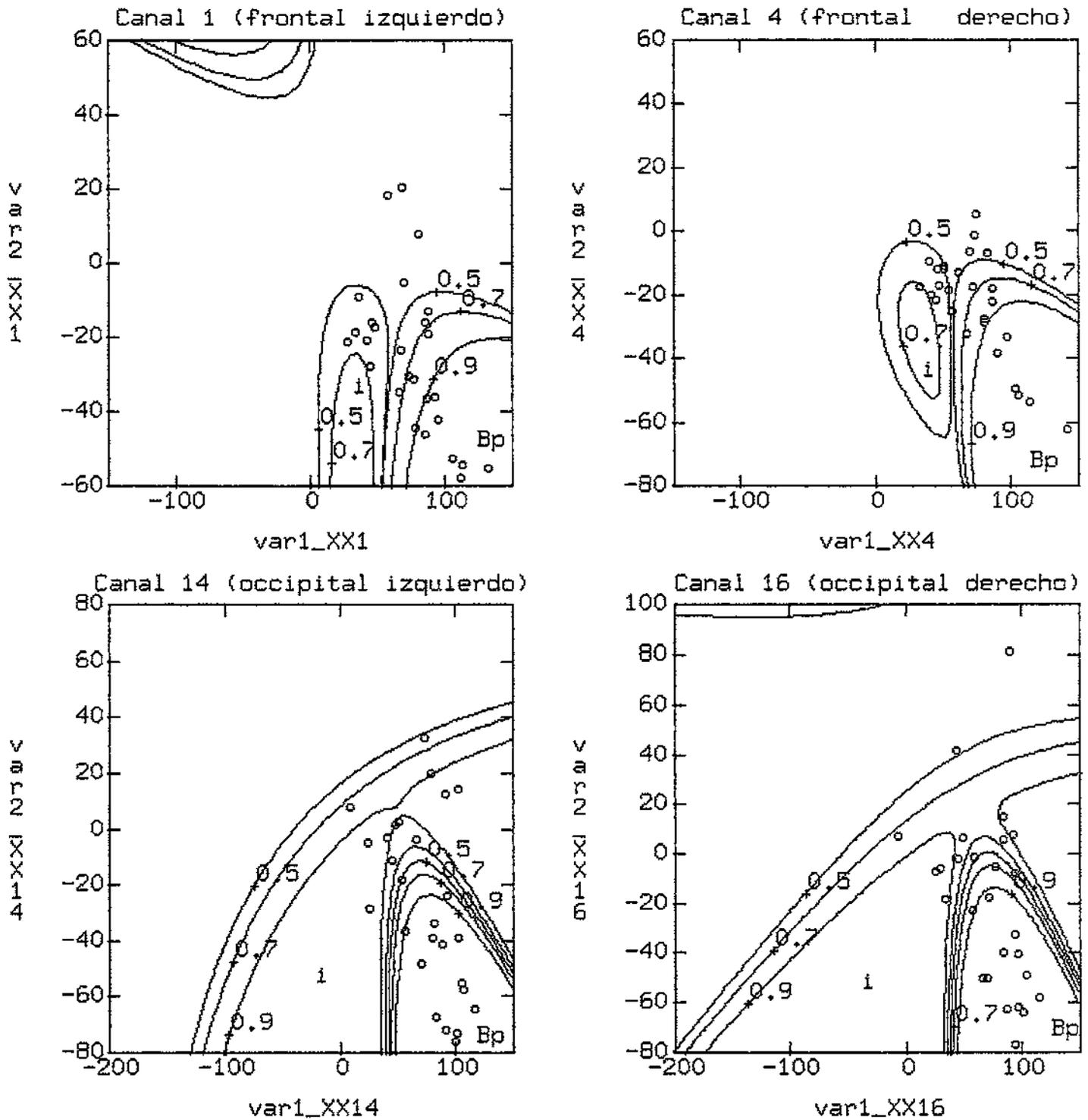


Fig. 22 Clasificación cuadrática para el segundo grupo de variables. Sujetos de 3 a 5 años. x=Bajo o=Normal \*=Alto (maduración).

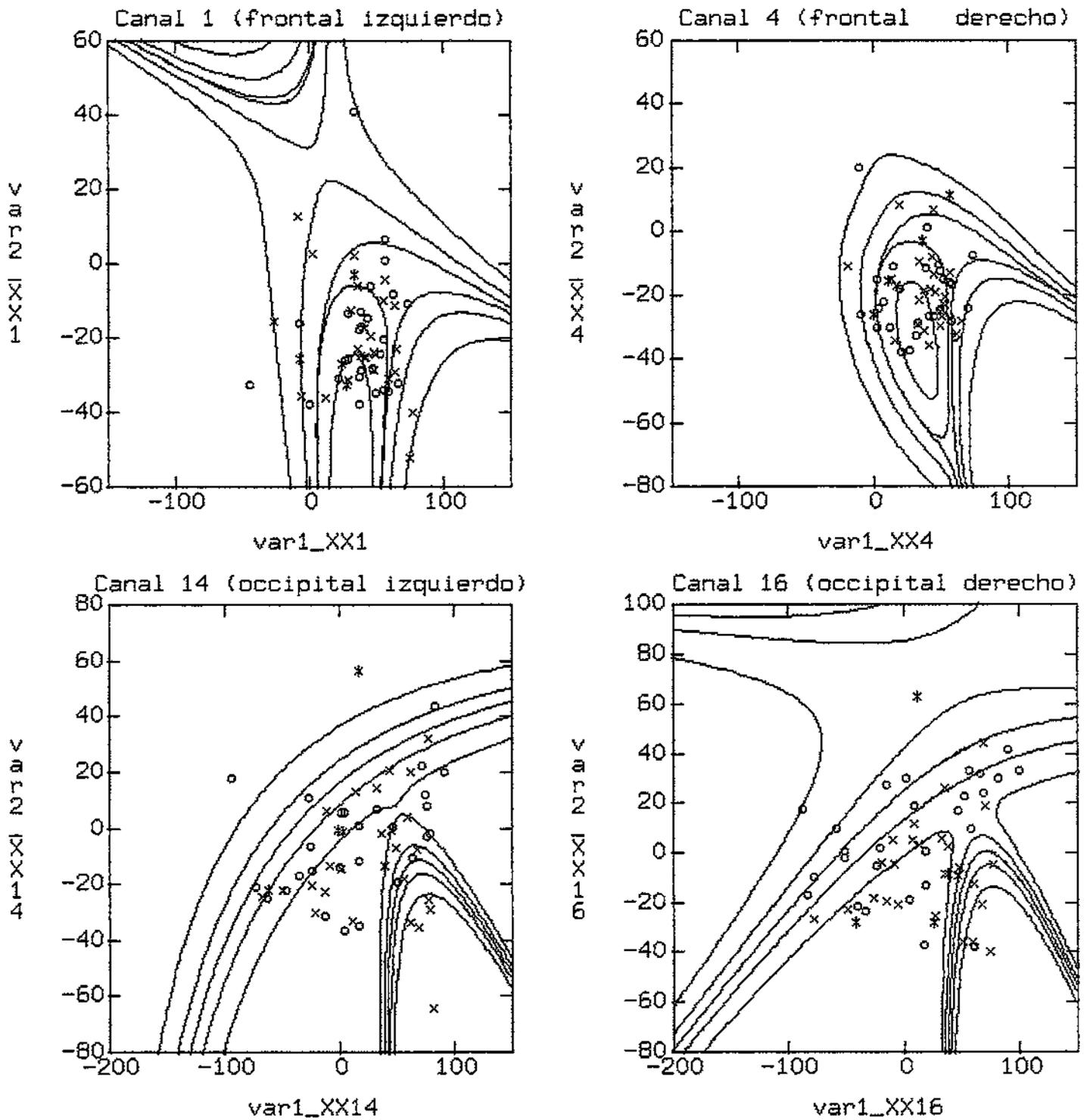


Fig. 23 Clasificación cuadrática para el segundo grupo de variables. Sujetos de 6 a 10 años. x=Bajo o=Normal \*=Alto (maduración).

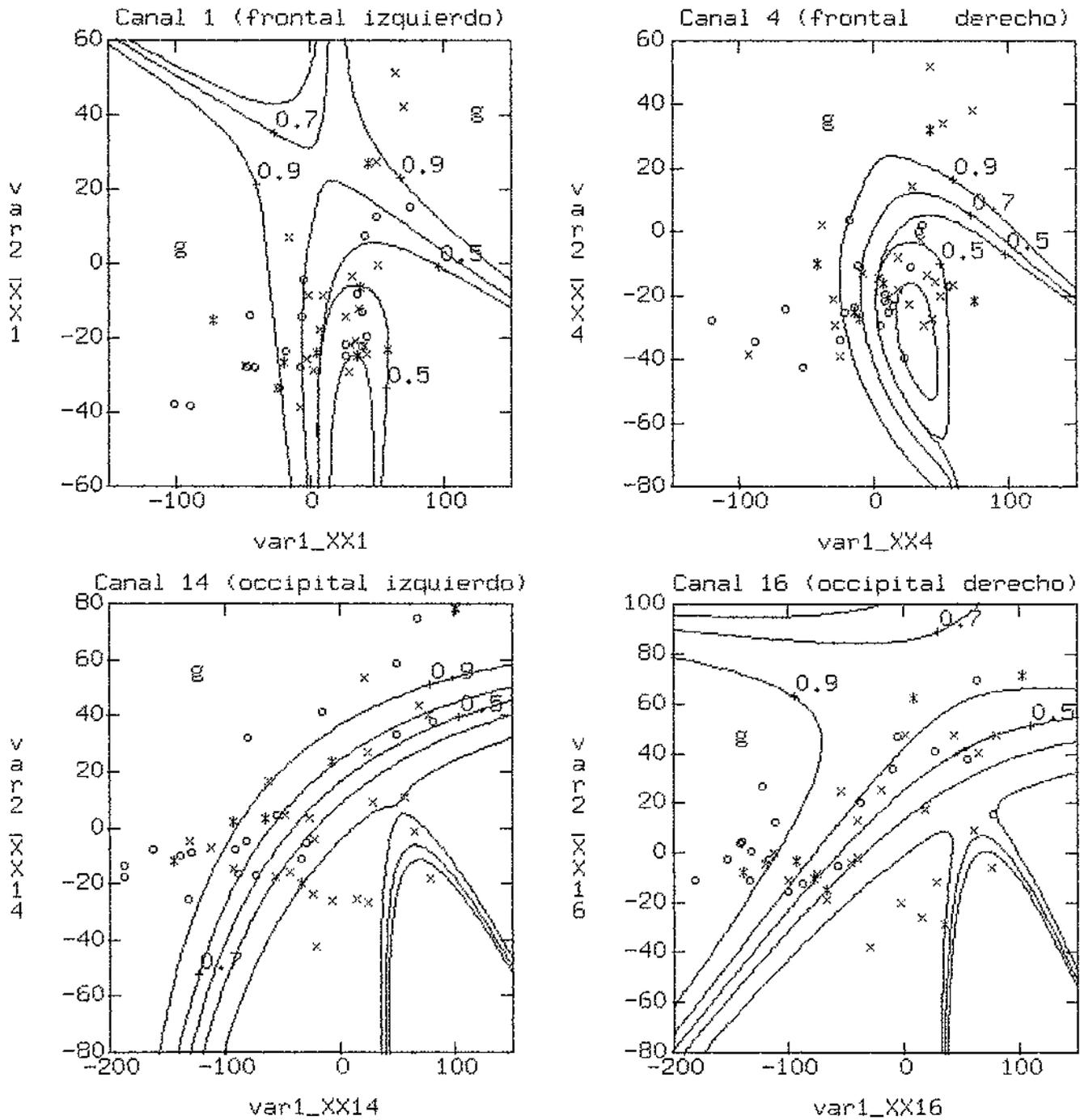


Fig. 24 Clasificación cuadrática para el segundo grupo de variables. Sujetos de 11 a 14 años. x=Bajo o=Normal \*=Alto (maduración).

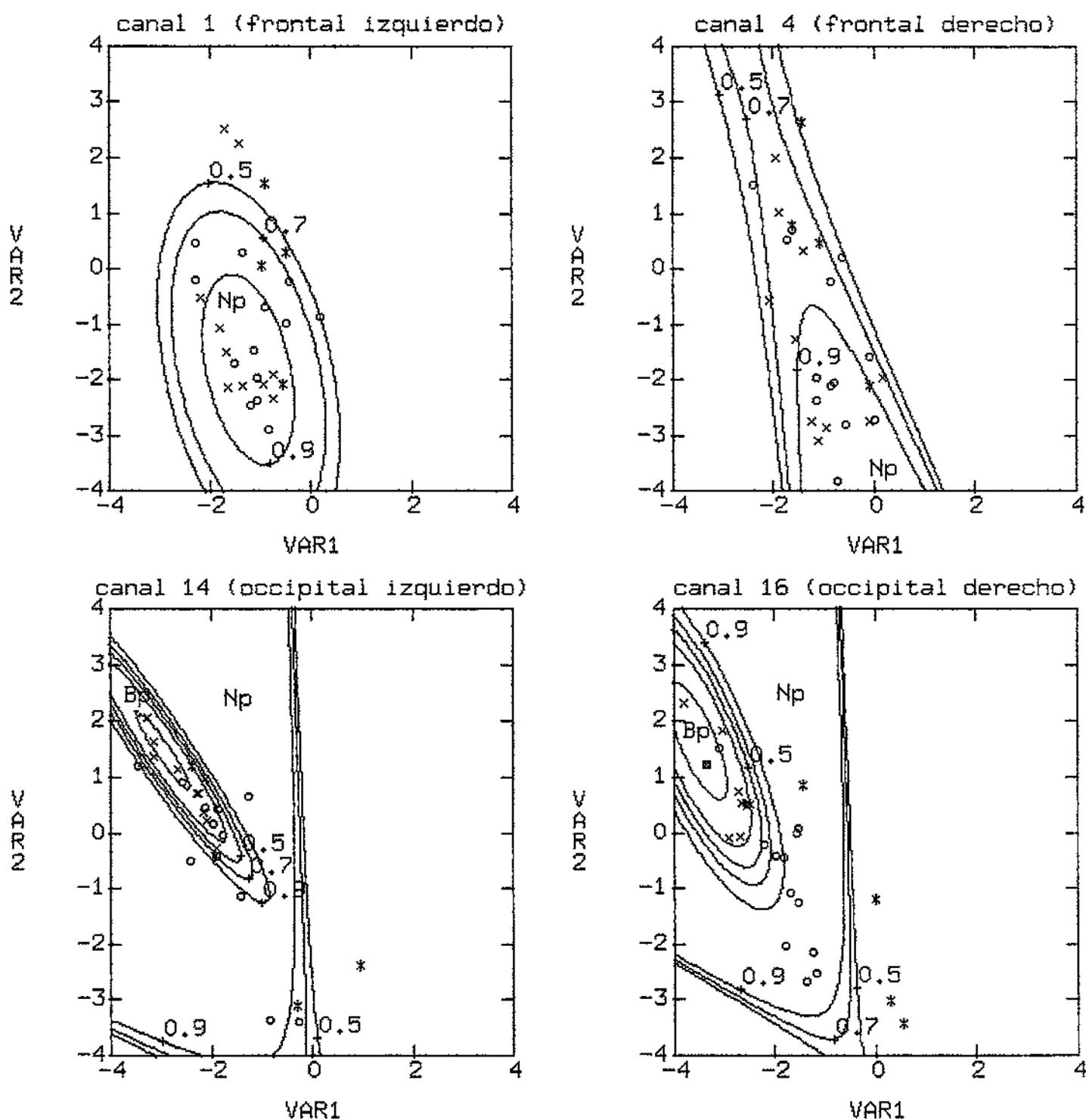


Fig. 25 Clasificación cuadrática para el tercer grupo de variables. Sujetos de 3 a 5 años. x=Bajo o=Normal \*=Alto (maduración).

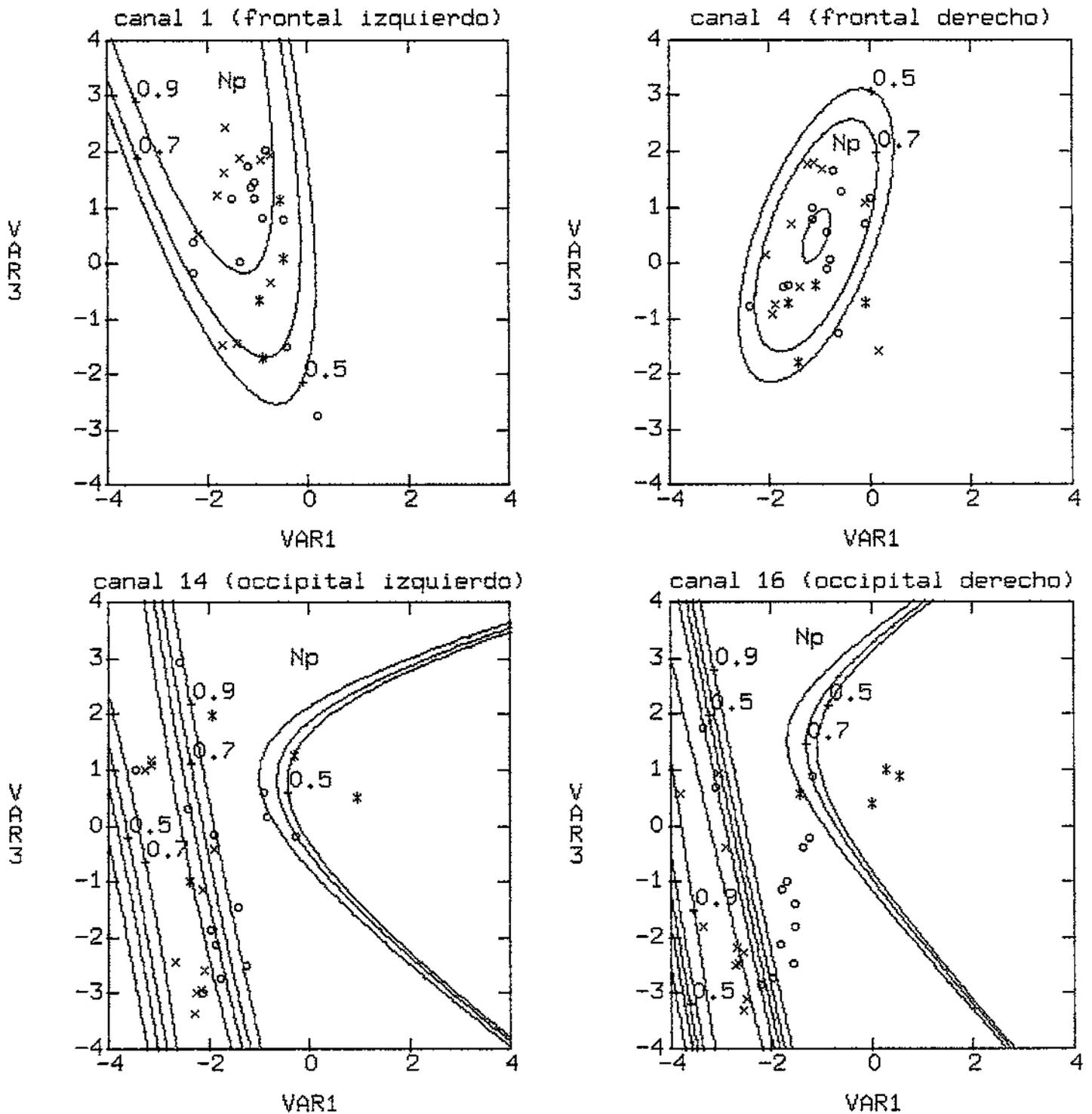


Fig. 26 Clasificación cuadrática para el tercer grupo de variables. Sujetos de 3 a 5 años. x=Bajo o=Normal \*=Alto (maduración).

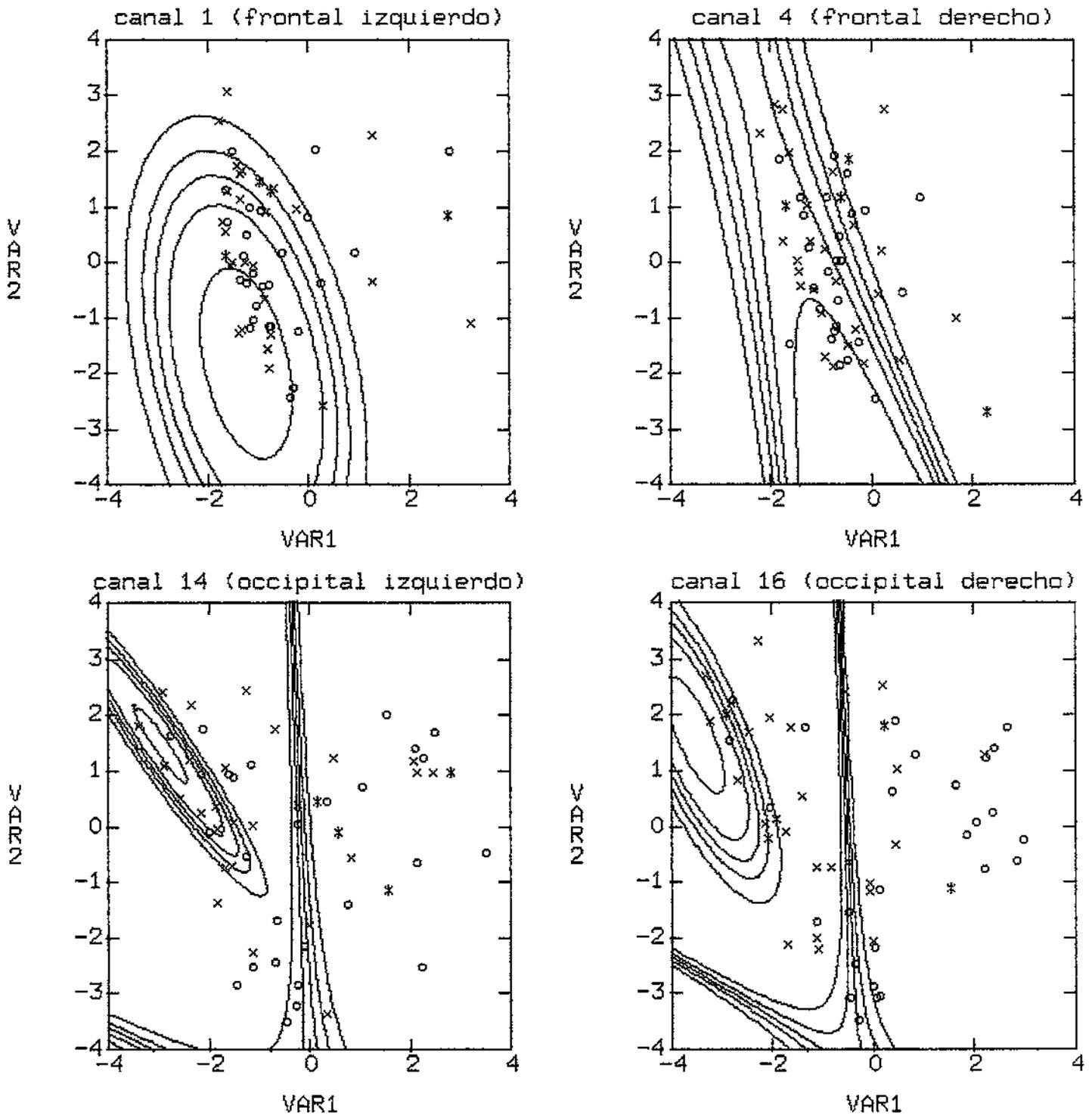


Fig. 27 Clasificación cuadrática para el tercer grupo de variables. Sujetos de 6 a 10 años. x=Bajo o=Normal \*=Alto (maduración).

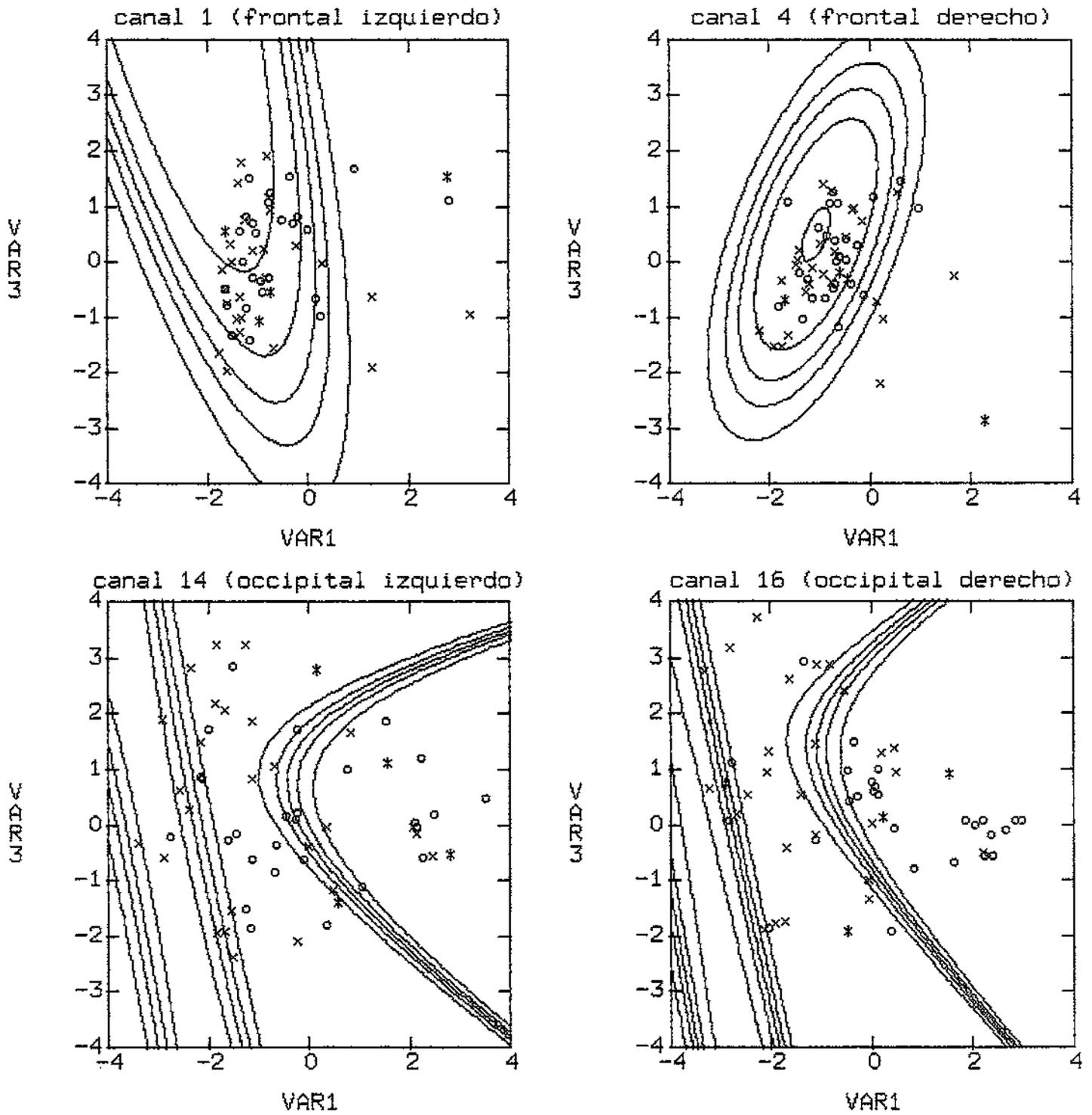


Fig. 28 Clasificación cuadrática para el tercer grupo de variables. Sujetos de 6 a 10 años. x=Bajo o=Normal \*=Alto (maduración).

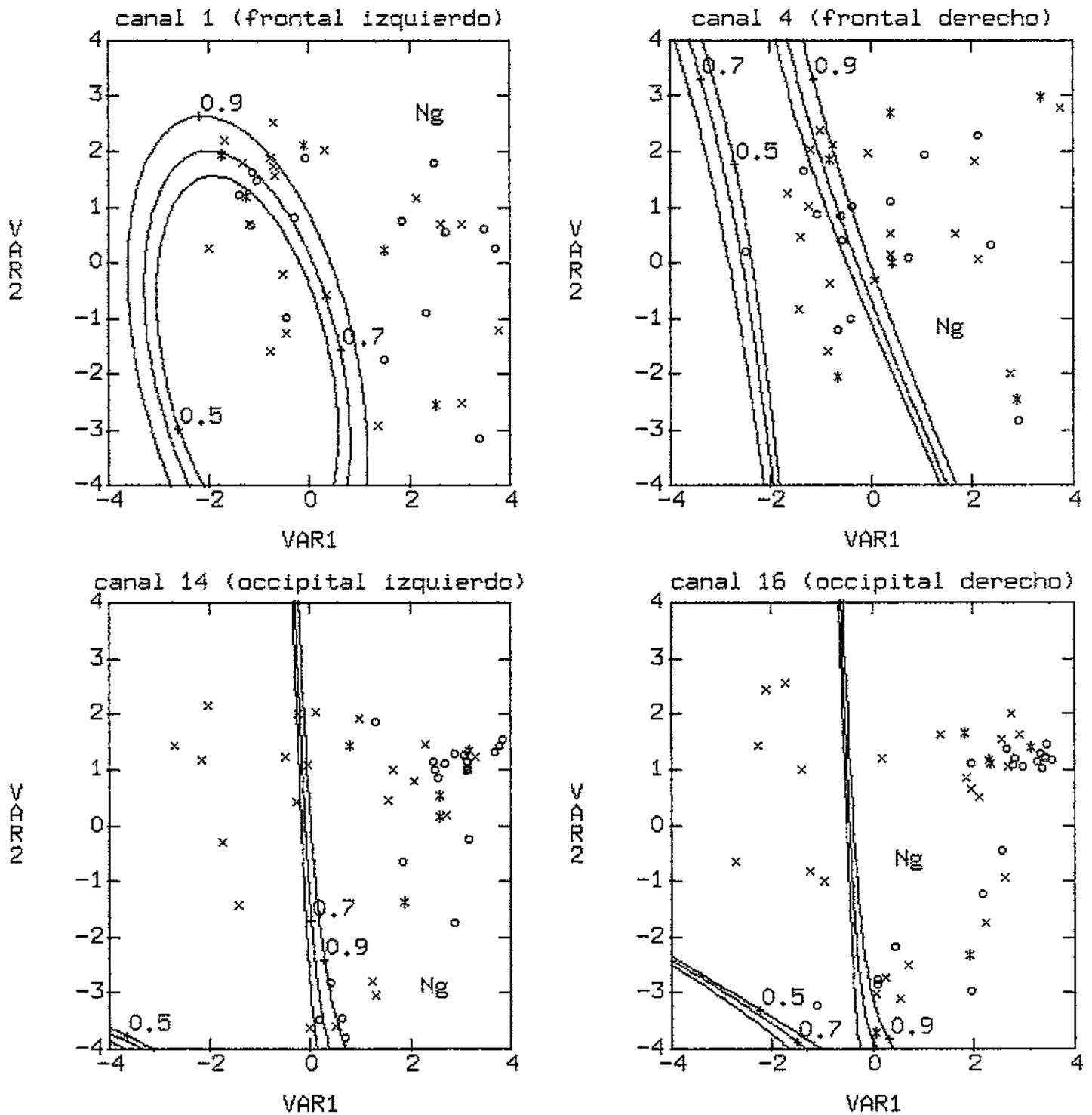


Fig. 29 Clasificación cuadrática para el tercer grupo de variables. Sujetos de 11 a 14 años. x=Bajo o=Normal \*=Alto (maduración).

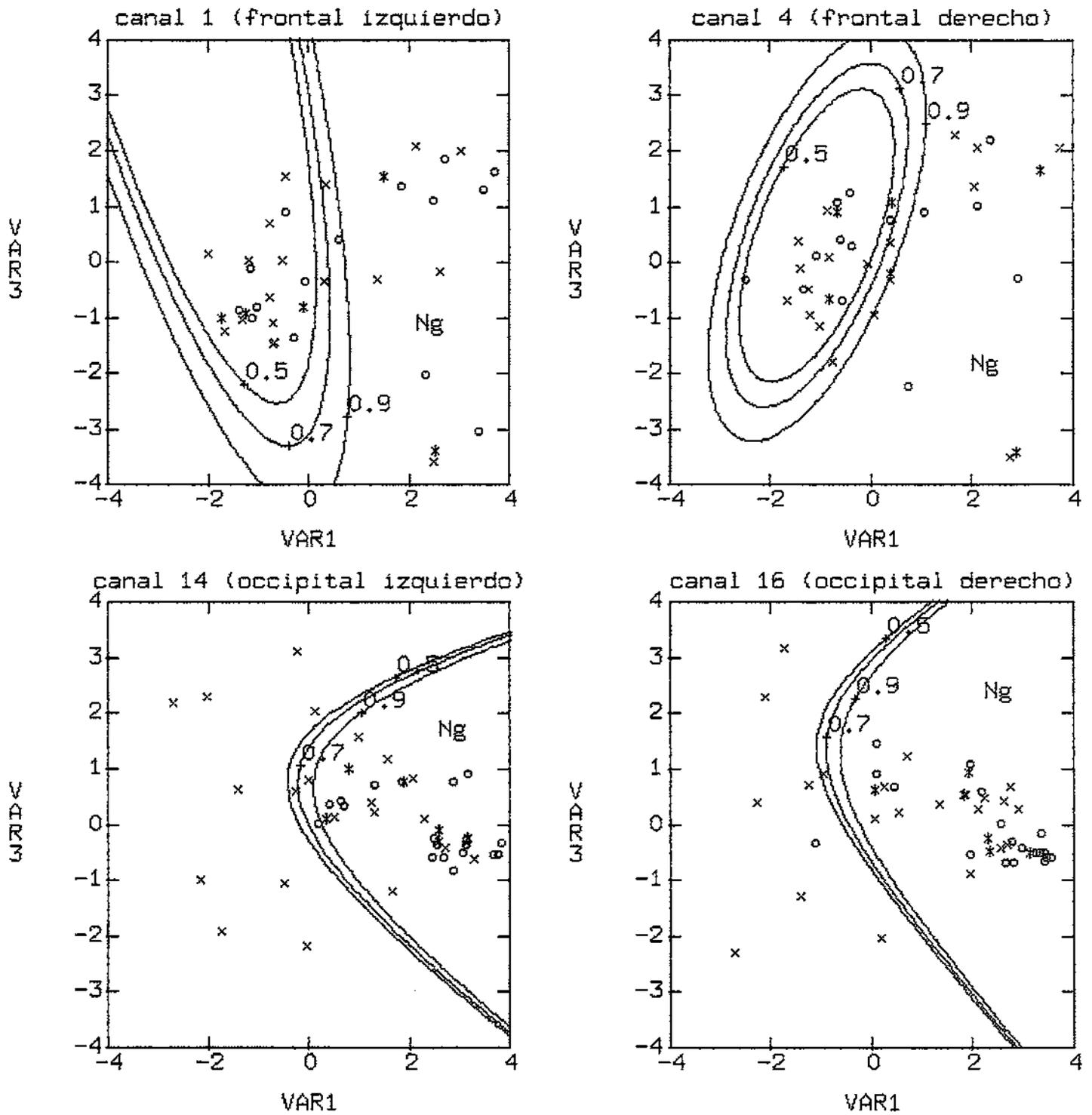


Fig. 30 Clasificación cuadrática para el tercer grupo de variables. Sujetos de 11 a 14 años. x=Bajo o=Normal \*=Alto (maduración).

CONCLUSIONES

## CONCLUSIONES

En esta memoria hemos presentado un conjunto de programas para la adquisición y procesamiento de señales EEG, las principales técnicas utilizadas (tanto de procesamiento de señales como de análisis estadístico) y su aplicación a un problema concreto de maduración cerebral.

El primer paso dado fue, lógicamente, el desarrollo de un programa de adquisición de datos. Dicho programa ha sido actualizado para permitir la monitorización en tiempo real de las señales que están siendo capturadas. A continuación se presenta el programa de filtrado que hubo que desarrollar para eliminar componentes de ruido.

Un segundo paso consistió en decidir con qué tipo de técnicas se iban a analizar las señales: métodos paramétricos (AR) o por métodos no paramétricos (FFT). Las ventajas y desventajas de cada método han sido analizadas.

El desarrollo del programa de análisis de señales fue el siguiente paso abordado, implementando todas aquellas funciones necesarias para el análisis en el dominio temporal y frecuencial de las señales individuales o agrupadas de dos en dos (correlación, coherencia) etc.... Dicho programa está en fase de modificación actualmente para incluirle diferentes tipos de mejoras referidas a la edición de señales, captura y análisis de patrones.

Se ha realizado, utilizando los parámetros obtenidos con los programas de análisis, un estudio de maduración cerebral en una muestra de sujetos normales con edades comprendidas entre 3 y 14 años. Para dicho estudio se han utilizado técnicas de análisis univariante y multivariante tales como curvas de regresión, análisis de componentes principales y comparación de distintos clasificadores estadísticos (análisis discriminante lineal, cuadrático y análisis de agrupamientos (cluster)).

Las principales aportaciones de este trabajo han sido:

1) La experiencia obtenida en la formación de grupos de investigación interdisciplinarios para la resolución de problemas con aspectos que interesen a ambas partes. Esto requiere un gran esfuerzo de adaptación en un principio, ya que el "lenguaje" que utiliza cada equipo suele ser prácticamente desconocido para el otro. Por tanto, una de las principales dificultades consiste en conseguir que ambos equipos de trabajo hablen el mismo "lenguaje".

2) Abordar un tema de I+D con un alto número de materias disciplinas involucradas como son:

a) Electrónica (Necesaria para poder conectar el electroencefalógrafo al

ordenador y capturar los datos).

b) Acondicionamiento de señales (Hay que asegurar que la señal llega a la tarjeta de adquisición en las condiciones adecuadas).

c) Procesamiento de señales (Para la extracción de información de las señales capturadas)

d) Programación (Para la realización de los programas utilizados)

e) Estadística (Una vez extraída la información de un sujeto es necesario comparar valores de grupos de sujetos para sacar conclusiones más generales)

f) Conocimiento del problema médico, para determinar la mejor forma de abordar el problema.

3) Estudio de las señales teniendo en cuenta la no-estacionariedad de las mismas. En esta memoria se propone un esquema sencillo de tratamiento de la no estacionariedad basado en la transformada corta de Fourier. En lugar de quedarnos con la evolución temporal de todas las frecuencias obtenidas por la FFT, almacenamos únicamente los valores de las potencias en cada banda de frecuencia en distintos instantes de tiempo. Esto nos permite una gran reducción en el número de datos a tratar. Sin embargo, el número es todavía elevado (8 variables x 25 instantes de tiempo = 400 parámetros). Está claro que una posible "buena solución" tendría que pasar por comparar los parámetros de los diferentes individuos en la situación más parecida posible. Proponemos, en esta memoria, la elección de los parámetros en el máximo de alguna de las bandas de frecuencia para solventar este problema. Con ello reducimos el número de parámetros a estudiar (8 variables x 4 instantes de tiempo = 32). Creemos que la elección de este criterio es afortunada para la comparación de diferentes sujetos.

4) Utilización de las variables canónicas para la reducción de la dimensión. Dado que las distintas variables están correlacionadas entre si, no podemos decir que estemos en un espacio cuyos ejes sean ortogonales. Por tanto, para calcular la distancia entre dos puntos hay que aplicar una corrección que tiene en cuenta esta correlación (distancia de Mahalanobis). Por el contrario, podemos optar por transformar nuestro espacio en uno cuyos ejes sean ortogonales. De esta forma, no existe información redundante, ya que todas las variables son independientes y podemos medir distancias con la métrica euclídea. Esta transformación se lleva a cabo por el método de las variables canónicas. Además las nuevas variables se ordenan en el sentido de mayor a menor varianza. Se comprueba que las dos o tres primeras variables explican entre el 70% y el 90% de la varianza original, por lo que despreciar

el resto apenas tendrá consecuencias. De esta forma se consigue reducir la dimensión del problema a una que se puede representar gráficamente.

5) Consideración de variables diferentes de las potencias absolutas y relativas. En el tercer grupo de variables hemos considerado además la duración de cada banda como máximo y el número de veces que cada banda ha sido máxima. Aunque el resultado no ha mejorado el del primer grupo de variables, creemos que debe seguir investigándose en la línea de conseguir nuevos parámetros que den cuenta de la estabilidad y regularidad del EEG, ya que estos son dos factores que los médicos tienen muy en cuenta a la hora de emitir un diagnóstico.

6) Aprovechamiento adecuado de las diferentes herramientas que disponíamos:

a) a nivel de hardware:

1) Procesamiento de los datos en PC (dada lo asequible, económica y universal de esta plataforma informática) o en estación de trabajo (para estudios posteriores o de desarrollo de nuevos programas).

2) Adquisición de datos basada en transferencia DMA

b) a nivel de software

1) Programación en lenguajes PASCAL y C.

2) Utilización de paquetes de software como MATLAB, SPD y SPSS. Estos nos han permitido el desarrollo de los programas previamente a su implementación en plataforma tipo PC. El método de trabajo consiste en aprovechar las herramientas que nos ofrecen a alto nivel y conocer cuales de ellas se utilizarán en el programa final. De esta forma sólo se programará en lenguajes de propósito general aquello que vaya a ser implementado. Esto nos produce un gran ahorro de tiempo, al no tener que programar rutinas que, posteriormente, no sean usadas.

7) Estudio de la maduración cerebral mediante la agrupación de sujetos en grupos de edades con similares características.

#### LÍNEAS ABIERTAS DE INVESTIGACIÓN

Este trabajo ha abierto, estando actualmente en fase de desarrollo, las siguientes líneas de investigación:

a) Hardware: Procesamiento de señales en tiempo real utilizando arquitecturas paralelas tales como:

- Procesadores de Señales Digitales

- Transputers
- b) Redes Neuronales:
- Estudio de clasificadores por medio de redes neuronales (Moreno et al. (1993)).
  - Reconocimiento de patrones por medio de redes neuronales
- c) Inteligencia Artificial: Desarrollo a medio plazo de un sistema experto que sirva de ayuda al diagnóstico de enfermedades al experto médico.
- d) Otros tipos de trabajo de menor entidad como:
- Programa de edición de señales para la segmentación del EEG y la extracción de patrones.
  - Caracterización de los patrones que se observen.
- e) Quedan por abordar algunas líneas más, que serán estudiadas a más largo plazo como:
- Procesamiento de señales por métodos no estacionarios y no lineales como puedan ser las Wavelets, Biespectros, Triespectros, etc...El objetivo de este estudio consiste en mejorar la descripción no estacionaria de la señal.
  - Utilización de la transformada chirp-z para estudiar la transformada-z de la señal en contornos distintos del círculo unitario. El objetivo es localizar empíricamente los polos y los ceros de la señal, con lo cual se obtendría un modelo paramétrico de la señal cuyos parámetros serían más significativos que los del modelo AR.
- f) Desde el punto de vista médico-estadístico es necesario progresar en los siguientes aspectos:
- El número de pacientes es insuficiente para conseguir una buena precisión en la media y desviaciones estándar de cada edad. Por tanto se impone la consecución de un mayor número de registros (al menos 16 para cada edad).
  - El rango de edades debe ser ampliado por su cota superior e inferior para permitir seguir una evolución más amplia que la estudiada actualmente.
  - Puesto que existen gran cantidad de variables fisiológicas que influyen en el estado interno del paciente, y por tanto en su EEG, sería conveniente el registro de todas aquellas variables que pudieran permitir definir un estado interno del sujeto. Por ejemplo:
    - a) Concentraciones de Iones Ca, Cl, Na, K
    - b) Glucemia y pulso.
    - c) Concentración de las principales hormonas.
    - d) EOG.
  - Adquisición de segmentos de mayor duración (hasta 3 ó 4 minutos cada uno) para tratar de promediar aquellos que tengan iguales características.

- Cálculo de las potencias en base a un número menor de puntos. De esta manera se puede seguir mejor la evolución temporal de las distintas bandas de frecuencia.

- Mayor resolución en las bandas de frecuencia (estudios con bandas de 1 Hz de ancho y centrados en cada Hz) y determinación de cuales son las que presentan un buen comportamiento evolutivo con la edad o la madurez cerebral.

## REFERENCIAS

## REFERENCIAS

Adams, J.W., A New Optimal Window, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 8, August 1991

Akaike, H., Note on higher order spectra, *Ann. Inst. Statist. Math.*, vol. 21, pp. 407-419, 1966

Akaike, H., Power Spectrum Estimation through Autoregression Model Fitting, *Ann. Inst. Stat. Math.*, vol. 21, pp. 407-419, 1969

Allen, J.B., Short Time Spectral Analysis, Synthesis, and Modification by Discrete Fourier Transform, *IEEE Trans. Acoust. Speech, Sig. Proc.*, vol ASSP-25, pp. 235-238, June 1977

Allen, J.B. and Rabiner, L. R., A Unified Approach to STFT Analysis and Synthesis, *Proc. IEEE*, vol 65, pp. 1558-1564, Nov 1977

Allen, J.B., Corrections to 'Short Term Spectral Analysis, Synthesis and Modification by Discrete Fourier Transform, *Sig. Proc.*, vol ASSP-25, p. 589, Dec. 1977

Allison, T., Wood, C.C., McCarthy, G., Somatosensory Evoked Potentials following surgical excision of somatosensory or motor cortex in the monkey, *Soc. Neurosci. Abstr*, 1986

Auslander, L. and Tolimieri, R., Radar Ambiguity Function and Group Theory, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 165, no. 3, pp. 577-601, 1985

Baird, H.W., E.R. John, H. Ahn and E. Maisel, Neurometric Evaluation of Epileptic Children who do well and poorly in School, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 48, pp. 683-693, 1980

Bartlett, M.S., Multivariate Analysis, *J. Royal Stat. Soc.*, B, 9, pp. 176-197, 1947

Bastiaans, M. J., Gabor's Expansion of a Signal into Gaussian Elementary Signals, *Proc. IEEE*, vol 68, no. 4, pp. 538-539, 1980

Benninger, C., P. Matthis and D. Scheffner, EEG Development of Healthy Boys and Girls. Results of a Longitudinal Study, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 57, pp. 1-12, 1984

Berger, H., Über das Elektrenkephalogramm des Menschen. Zweite Mitteilung, *J. Psychol. Neurol.*, no. 40, pp. 160-179, 1930

Bernouilli, Daniel, *Hidrodynamicas*, Basel, Switzerland, 1738

Berryman, J. G., Choice of Operator Length for Maximum Entropy Spectral Analysis, *Geophysics*, vol. 43, pp. 1384-1391, December 1978.

Bingham, C., Godfrey, M.D. and Tukey, J.W., Modern Techniques of Power Spectrum Estimation, *IEEE Trans. on Audio and Electroacustics*, vol AU-15, no.2, pp. 56-66, 1967

Boashash, B., Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal - Part 2: Algorithms and Applications, *Proceedings of the IEEE*, vol. 80, no. 4, April 1992

Bogert, B.P., Healy, M.J.R., and Tukey, J.W., The Quefreny Analysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-autocovariance, Cross-Cepstrum, and Shape Cracking, *Proc. Symp. Time Series Analysis*, M. Rosenblat Ed., New York, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963, pp. 209-243

Box, G.E.P. and G.M. Jenkins, *Time Series Analysis: forecasting and control*, Holden Day Inc., California, 1976

Bracewell, R.N., *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw Hill Kogakusha, Ltd., 1978

Brillinger, D. R., An introduction to polyspectra, *Ann. Math. Statist.*, vol. 36, pp. 1351-1374, 1965

Brillinger, D.R. and Rosenblatt, M., Asymptotic theory of k-th order spectra, In "*Spectral Analysis of Time Series*" (Ed. B. Harris), pp. 153-188, Wiley, New York, 1967

Bronzino, J.D., Quantitative Analysis of the EEG - General Concepts and Animal Studies, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. BME-31, no. 12, Dec. 1984

Bryan, J.G., The Generalized Discriminant Function: Mathematical Foundation and Computational Routine, *Harvard Educ. Rev.*, 21 (2), 90-95, 1951

Burg, John P., Maximum Entropy Spectral Analysis, in *Proceedings 37 Meeting of Society of Exploration Geophysicist*, Oklahoma City, Okla., October 1967

Burg, J.P., Maximum Entropy Spectral Analysis, Ph. D. Dissertation, Dpt. of Geophysics, Standford Univ., Standford, Calif., 1975

Burillo, V. y del Pozo, F., Parametrización de Señales Electrofisiológicas, *Actas del II Simp. Ins. Biomed. Madrid 5-7 oct.* 1983

Burr-Brown, The Handbook of Personal Computer Instrumentation for Data Acquisition, Test, Measurement and Control, *Burr Brown Intelligent Instrumentation Products*, U.S.A., 1987

Burrus, C.S. and Parks, T.W., Time Domain Design of Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, vol. AU-18, no. 2, pp. 137-141, 1970

Cartwright, D.E., A unified Analysis of Tides and Surges round North and East Britain, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, vol. 263, pp. 1-55, 1968

Cavalli, L.L., Alumni problemi della analisi biometrica di popolazioni naturali., *Mem. Ist. Idrobiol.*, 2, pp. 301-323, 1945

Chatfield, C. and A.J. Collins, Introduction to Multivariate Analysis, *Chapman and Holl Ltd.*, 1980

Chen, N. Y. and C. R. Stegen, Experiments with Maximum Entropy Power Spectra of Sinusoids, *J. Geophys. Res.*, vol. 79, pp. 3019-3022, July 1974

Claasen, T.A.C.M. and Mecklenbrauker, W.F.G., The Wigner Distribution - A Tool for Time-Frequency Signal Analysis- Part I: Continuous-Time Signals, *Philips J. Res.*, vol 35, pp. 217-250, 1980

Claasen, T.A.C.M. and Mecklenbrauker, W.F.G., The Wigner Distribution - A Tool for Time-Frequency Signal Analysis- Part II: Discrete-Time Signals, *Philips J. Res.*, vol 35, no. 4/5, pp. 276-300, 1980

Claasen, T.A.C.M. and Mecklenbrauker, W.F.G., The Wigner Distribution - A Tool for Time-Frequency Signal Analysis- Part III: Relations with other Time-Frequency Signal Transformations, *Philips J. Res.*, vol 35, no 6, pp. 372-389, 1980

Cohen, A., Biomedical Signal Processing, volume I: Time and Frequency domain Analysis, *CRC Press*, 1986

Cohen, A., Biomedical Signal Processing, volume II: Compression and Automatic Recognition, *CRC Press*, 1986

Coifman, R.R., Meyer, Y. & Wickerhauser, V., Wavelet Analysis and Signal Processing, Yale University, 1991

Cooley, J. W. and J. W. Tukey, An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, *Math. Comput.*, vol 19, pp. 297-301, April 1965.

Cramer, H., On some classes of non-stationary processes, *Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.*, pp. 329-339. University of California Press, 1961

Creutzfeld, O.D., G. Bodenstern and J.S. Barlow, Computerized EEG Pattern Classification by Adaptive Segmentation and Probability Density Function Classification. Clinical Evaluation, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 60, pp.

373-393, 1985

Crochiere, R. E. and Rabiner, L. R., *Multivariate Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ. 1983

Cuadras, C.M., *Métodos de Análisis Multivariante*, Eunibar S.A., 1981

Das Gupta, Nonparametric classification rules, *Sankhya*, A, 26, pp. 25-30, 1964

Daubechies, I., The Wavelet Transform, Time Frequency Localization and Signal Analysis, *IEEE, Transf. Info. Th.*, vol 36, no 5, pp. 961-1005, Sept 1990

2Daubechies, I., The Wavelet Transform: A method for Time-Frequency Localization, Chapter 8 of *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing. vol I*, S. Hay Kin Ed., pp. 346-417, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 1991

Dawson, G.D., A summation technique for detecting small signals in a large irregular background, *J. Physiol.*, no. 115, pp. 2-3 , 1951

DeBrujin, N.G., A Theory of Generalized Functions with Applications to Wigner Distribution and Weyl Correspondence, *Nieuw Arch. Wiskunde*, vol 21, pp. 205-280, 1973

Deczky, A.G., Synthesis of Recursive Digital Filters Using the Minimum P-Error Criterion, *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, vol. AU-20, pp. 257-263, Oct. 1972

Duhamel, P. and Hollman, H., Split Radix FFT Algorithm, *Electronic Letters*, vol. 20, pp. 14-16, Jan. 5, 1984

Duhamel, P. Implementation of 'Split Radix' FFT Algorithms for Complex, Real and Real-Symmetric Data, *IEEE Trans. on ASSP*, vol 34, pp. 285-295, April 1986

Enochson, L. and Otnes, R.K., *Applied Time Series Analysis*, volume 1, Basic Techniques, John Wiley & Sons Inc., New York, 1978

Escudero, L.F., Reconocimiento de Patronos, *Paraninfo S.A.*, 1977

- Euler, L., *Institutionis Calculi Differentialis*, St. Petersburg, Russia, 1755
- Fein, G., D. Galin, C.D. Yingling, J. Johnstone, and M. A. Nelson, EEG Spectra in 9-13 Years Old Boys are Stable over 1-3 years, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 58, pp. 517-518, 1984
- Feller, W., *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, Ed. Limusa, Mexico, 1978
- Fisher, R.A., , The use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems, *Ann. Eugen.*, 7, pp. 179-188, 1936
- Fix, E. and Hodges, J.L., Discriminatory Analysis, nonparametric Discrimination: Consistency Properties. Report no. 4, Project no. 21-49-004, *USAF School of Aviation Medicine*, Brooks Air Force Base, Texas, 1951
- Fougere, P.F., E.J. Zawalick and H.R. Radoski, Spontaneous Line Splitting in Maximum Entropy Power Spectrum Analysis, *Phys. Earth Planet., Inter.*, vol. 12, pp. 201-207, Aug. 1976
- Fourier, Jean Baptiste Joseph, *Théorie Analytique de la chaleur*, Paris, France, 1822
- Franaszczuk, P.J., and K.J. Blinowska, Linear Model of Brain Electrical Activity-- EEG As A Superposition of Damped Oscillatory Modes, *Biol. Cybern.*, 53,19-25, 1985
- Gabor, D. Theory of Communication, *J. IEE (London)*, vol 93 (III), pp. 429-457, Nov. 1946
- Gasser, T., P. Bacher and J. Mochs, Transformations towards the Normal Distribution of Broad Band Spectral Parameters of the EEG, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 53, pp.119-124, 1982
- Gasser, T., C. Jennen-Steinmetz and R. Verleger, EEG Coherence at Rest and

during a Visual Task in two Groups of Childrens, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 67, pp. 151-158, 1987

Gasser, T., R. Verleger, P. Bacher and L. Sroka, Developement of the EEG of School Age Children and Adolescents. I. Analysis of Band Power, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, vol. 69, pp. 91-99, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., 1988

Gasser, T., C. Jennen-Steinmetz, L. Sroka, R. Verleger, and J. Mocks, Developement of the EEG of School Age Children and Adolescents. II. Topography, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 69, pp. 91-99, 1988

Gold, B. and Jordan, K.L., Jr., A Direct Search Procedure for Designing Finite Duration Impulse Response Filters, *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, vol. AU-17, no. 1, pp. 33-36, Mar. 1969

Haggan, V. and Ozaki, T., Amplitude-Dependent AR model fitting for non-linear random vibrations., *Proc. International Time Series Meeting*, University of Nottingham, England, March 1979, (Ed. O.D. Anderson), North-Holland, The Netherlands.

Hasselmann, K., Munk, W. and MacDonald, G., Bispectrum of ocean waves. In *Time Series Analysis* (Ed. M. Rosenblatt), pp. 125-139, Wiley, New York, 1963

Helland, K.N., Lii, K.S. and Rosenblatt, M., Bispectra and Energy Transfer in grid-generated turbulence. In *Developments in Statistics* (Ed. P. R. Krishnaiah), vol. 2, pp. 125-155, Academic Press, New York, 1979

Helstrom, C.W., An Expansion of a Signal in Gaussian Elementary Signals, *IEEE Trans. Info. Th.* vol. IT-12, pp. 81-82, Jan 1966

Henrici, O., On a New Harmonic Analyser, *Philos. Mag.*, vol 38, pp. 110-121, 1894

Herring, R. W., The Cause of Line Splitting in Burg Maximum-Entropy Spectral

Analysis, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. ASSP28, pp. 692-701, Dec. 1980

Herrman, O., On the Design of Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase, *Elec. Lett.*, vol. 6, no. 11, pp. 328-329, 1970

Herrman, O. and Schuessler, H.W., Design of Nonrecursive Digital Filters with Minimum Phase, *Elec. Lett.*, vol. 6, no. 11, pp. 329-330, 1970

Hilfiker, P. and M. Egli, Detection and evolution of rhythmic components in ictal EEG using Short Segment Spectra and Discriminant Analysis, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 82, pp. 255-265, 1992.

Hippenstiel, R.D. and P. M. de Oliveira, Time-Varying Spectral Estimation Using the Instantaneous Power Spectrum (IPS), *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 18, no. 10, 1990

Hlawatsch, F., Duality and Classification of Bilinear Time-Frequency Signal Representations, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 7, July 1991

Hofstetter, Oppenheim, A.V., Siegel, J., A New Technique for the Design of Nonrecursive Digital Filters, *Proc. Fifth Annual Princeton Conf. Inform. Sci. Systems*, pp. 64-72, 1971

Hofstetter, Oppenheim, A.V., Siegel, J., On Optimum Nonrecursive Digital Filters, *Proc. 9th Allerton Conf. Circuit System Theory*, Oct. 1971

Horowitz, P. and W. Hill, *The Art of Electronics*, Cambridge University Press, New York, 1990

Janssen, A.J.E.M., The Zak Transform: A signal Transform for sampled Time-Continuous Signals, *Phillips J. Res.*, vol 43, pp. 23-69, 1988

Jansen, B.H., J.R. Bourne and J.W. Ward, Autoregressive Estimation of Short Segment Spectra for Computerized EEG Analysis, *IEE Transactions on Biomedical*

*Engineering*, vol. BME-28, no. 9, sep. 1981

Jenkins, G.M. and Watts, D.G., *Spectral Analysis and its Applications*, Holden-Day Inc., San Francisco, 1968

John, E.R., H. Ahn, L. Prichep, M. Trepetin, D. Brown, H. Kaye, *Developmental Equations for the Electroencephalogram*, *Science*, vol. 210, pp. 1255-1258, 1980

John, E.R., H. Kaye, J. Friedman, L. Prichep and H. Ahn, *Validity, Utility and Limitations of Neurometric Evaluations in Children*, *Proceedings of the Symposium on Event Related Potentials in Children in Essen, F.R.G.*, 1982

Johnsen, S.J. and N. Andersen, *On Power Estimation in Maximum Entropy Spectral Analysis*, *Geophysics*, vol. 43, pp. 681-690, June 1978

Jones, R.H., *Autoregression Order Selection*, *Geophysics*, vol. 41, pp. 771-773, August 1976

Katada, A., H. Ozaki, H. Suzuki and K. Suhara, *Developmental Characteristics of Normal and Mentally Retarded Children EEGs*, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 52, pp. 192-201, 1981

Kay, S.M., *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*, *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988

Kay, S.M. and S.L. Marple, Jr., *Sources of and Remedies for Spectral Line Splitting in Autoregressive Spectrum Analysis*, *Rec. 1979 IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process*, pp. 151-154

Kayshap, R.L., *Inconsistency of the AIC Rule for Estimating the Order of Autoregressive Models*, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-25, pp. 996-998, October 1980

Kendall, M.G., *A course in Multivariate Analysis*, Griffin, London, 1957

- Kendal, M.G., Discrimination and classification. En *Multivariate Analysis*, pp. 165-185, (P.R. Krshnaiah Ed.), Academic Press, New York, 1966
- Kolmogoroff, Andrei N., Sur l'interpolation et l'extrapolation des suites stationnaires, *C. R. Acad. Sci.*, vol 208, p 2043, 1939
- Kopruner, V., and G. Pfurstcheller, Multiparametric Asymmetry Score (MAS) -- Distinction Between Normal and Ischaemic Brains, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 57, pp. 343-346, 1984
- Kronland Martinet, R., Morlet, J. & Grossman, A., Analysis of Sound Patterns Through Wavelet Transform, *Int. J. Pattern Recog. and Art. Intell.*, vol 1. pp. 273-301, 1987
- Kwok, H.L. , C. T. Leung, R. Smallwood and D.A. Linkens, Autoregressive Model Order Selection Applied to Physiological Signals, *automédica* vol. 3 pp. 197-206, 1980
- Lacoss, R.T., Data Adaptive Spectral Analysis Methods, *Geophysics*, vol. 36, pp. 661-675, Aug. 1971
- Lemieux, J.F., R.S. Vera and W.T. Blume, Technique To Display Topographical Evolution of EEG Events, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 58, pp. 565-568, 1984
- Lesser, R.P., W.R.S. Webber an R.S. Fisher, Design Principles for Computerized EEG Monitoring, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 82, pp.239-247, 1992
- Liberati, D., S. DiCorrado and S. Mandelli, Topographic Mapping of Single Sweep Evoked Potentials in the Brain, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 39, no. 9, sept. 1992
- Lii, K.S., Rosenblat, M. and Van Atta, C., Bispectral measurements in turbulence, *J. Fluid. Mech.*, vol. 77, pp. 45-62 ,1976

Lim, J.S., A.V. Oppenheim, Advanced Topics in Signal Processing, *Prentice Hall, inc.*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988

Livingstone, I.R., Mastaglia, F.L., Edis, R. and Howe, J.W., Visual involvement in Friedrich's ataxia and hereditary spastic ataxia: A clinical and visual evoked response study., *Arch. Neurol.*, no. 38, pp. 75-79, 1981.

Livingstone, I.R., Mastaglia, F.L., Edis, R. and Howe, J.W., Pattern evoked responses in hereditary spastic paraplegia, *J. Neurol. Neurosurg. Psychiatr.*, no. 44, pp. 176-178, 1981.

Lorente de No, R., Action Potential of the Motoneurons of the Hypoglossus nucleus, *J. Cell. Comp. Physiol.*, no. 29, pp.207-287, 1947

Lorente de No, R., A Study of Nerve Physiology, in *Studies of Rockefeller Institute* 132, chap. 16, 1947

Mallat, S., A Theory of Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation, *IEEE Trans. Pat. Anal., Machine Intell.*, vol 11, no. 7, pp. 674-693, July 1989

Mallat, S., Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelets Models, *IEEE Trans. Acoust. Speech, Sig. Proc.*, vol 37, no. 12, pp. 2091-2110, Dec. 1989

Mark, W.D., Spectral Analysis of the Convolution and filtering of non-stationary stochastic processes, *J. Sound. Vib.*, vol. 11, p. 19,1970

Marple, S.L.,Jr., Conventional Fourier, Autoregressive, and Special ARMA Methods of Spectrum Analysis, Engineer's dissertation, Stanford University, 1976

Marple, S.L.,Jr., A New Autoregressive Spectrum Analysis Algorithm, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. ASSP28, pp. 441-454, Aug. 1980

Marple, S.L.,Jr., Frequency Resolution of Fourier and Maximum Entropy

Spectral Estimates, *Geophysics*, vol 47, pp. 1303-1307, Sept. 1982

Marple, S.L., Jr., *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987

Martens, J.B., Recursive Cyclotomic Factorization: A New Algorithm for calculating the Discrete Fourier Transform, *IEEE Trans. on ASSP*, vol 32, pp. 750-762, Aug. 1984

Matsuura, M., K. Yamamoto, H. Fukuzawa, Y. Okubo, H. Uesegui, M. Moriiwa, T. Kojima and Y. Shimazono, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 60, pp. 394-406, 1985

Matthis, P., D. Schefner and C. Benninger, Spectral Analysis of the EEG: Comparison of various Spectral Parameters, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 52, pp. 218-221, 1981

Mendenhall, W., R.L. Scheaffer, D.D. Wackerly, *Estadística Matemática con Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1986

Meyer, Y., Orthonormal Wavelets in Combes J.M., Grossman, A. and Tchamitchian, P. Eds. "Wavelets Time-Frequency Methods and Phase Space", *Proc. of Int. Conf. on Wavelets, Time Frequency Mehtods and Phase Space: Inverse Problems and Theroretical Imaging*, Marseille France, Dec. 14-18, 1987, pp. 21-37, Springer Verlag, Berlin, 1989

Michelson, Albert Abraham and S. W. Stratton, A New Harmonic Analyser, *Philos. Mag.*, vol 45, pp. 85-91, 1898

Mocks, J., and T. Gasser, How to Select Epochs of the EEG at Rest for Quantitative Analysis, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 58, pp. 89-92, 1984

Montgomery, L. K. and Reed, I. S., A Generalization of the Gabor-Helstrom Transform, *IEEE Transf. Info. Th.*, vol IT-13, pp. 344-345, Apr. 1967

Moreno, L., J.L. Sánchez, L. Acosta and G. Vera, A software package for signal processing: Application to EEG signals, *Proceedings of the ISMM International Conference MICRO'90*, Montreal, 1990

Moreno, L., S. Mañas, J.L. Sánchez, L. Acosta and G. Vera, A software package for computerized EEG Analysis, *Proceedings of the IASTED international conference ARTIFICIAL INTELLIGENCE APPLICATIONS AND NEURAL NETWORKS*, Zurich, 1990

Moreno, L., J.L. Sánchez, L. Acosta, J.D. Piñeiro, J.L. Ichaso and S. Mañas, Multichannel Digital Processing for EEG Analysis, *Proceedings of the IASTED International Symposium CIRCUITS AND SYSTEMS- CS'91*, Zurich, 1991

Moreno, L., J.L. Sánchez, S. Mañas, J.D. Piñeiro, L. Acosta y J.L. Ichaso, Programas para Análisis Computerizado del EEG, *IV Reunion de la Sociedad Canaria de Neurociencias*, Tenerife, 1991.

Moreno, L., J.L. Sánchez, S. Mañas, J.D. Piñeiro, L. Acosta y J.L. Ichaso, Análisis Multivariante del EEG en el estudio de la Maduración cerebral, *IV Reunion de la Sociedad Canaria de Neurociencias*, Tenerife, 1991.

Moreno, L., J.L. Sánchez, S. Mañas, J.D. Piñeiro, J. Merino, L. Acosta, A. Hamilton, Multivariate Analysis and Mapping of EEG, *Clinical Neurophysiology*, Vol. 22/Suppl. 1, 1992 *6th European Congress of Clinical Neurophysiology*, Lisboa, 1992

Moreno, L., J.L. Sánchez, J.D. Piñeiro, J. Merino, L. Acosta y A. Hamilton, Estudio Comparativo de Clasificadores Multivariantes en Maduración Cerebral, *V Reunión de la Sociedad Canaria de Neurociencias*, Las Palmas, 1992

Moreno, L., J.L. Sánchez, J.D. Piñeiro, J. Merino, L. Acosta y A. Hamilton, Estructura de un Sistema Inteligente para el Análisis de Señales Cerebrales, *V Reunión de la Sociedad Canaria de Neurociencias*, Las Palmas, 1992

Moreno, L., J.D. Piñeiro, J.L. Sánchez, S. Mañas, J. Merino, L. Acosta and A. Hamilton, Application of Neural Networks to Automated Brain Maturation Study,

in *Artificial Neural Nets and Genetic Algorithms*, R.F. Albrecht, C.R. Reeves, N.C. Steele (Eds). Springer Verlag 1993, pp. 125-130

Motorola Semiconductors, A/D and D/A Conversion Manual, *Motorola Inc.*, 1984

Nakamura, M., H. Shibasaki, K. Imajoh, S. Nishida, R. Neshige and A. Ikeda, Automatic EEG interpretation: A new computer-asisted system for the automatic integrative interpretation of awake backgroun EEG, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 82, pp. 423-431, 1992

Nawab, S.N. and Quatieri, T. F., Short Time Fourier Transform, chapter in *Advanced Topics in Signal Processing*, J. S. Lim and A. V. Oppenheim, eds. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1988

Nelson, G. A., Signal Analysis in Time and Frequency using Gaussian Wavefunctions, in *NATO Advanced Studies Institute on Network and Signal Theory*, J. O. Scanlan, ed., pp. 454-460, 1972

Newton, Isaac, *Phil. Trans.*, Vol VI, 1671, pp. 3076

Newton, Isaac, *Principia*, London, England, 1687

Nuttall, A.H., Spectral Analysis of a Univariate Process with Bad Data Points, via Maximum Entropy and Linear Predictive Techniques, *Tech. Rep. TR-5303*, Naval Underwater Systems Center, New London, Conn., Mar. 26, 1976

Oken, B.S. and K. H. Chiappa, Short Term Variability in EEG Frecuency Analysis, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 69, pp. 191-198, 1988

Oppenheim, Alan V. and Ronald W. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975

Oppenheim, A.V., A.S. Willsky with I.T. Young, *Signals and Systems*, Prentice Hall, Inc., 1983

Ozaki, T., Non-linear Model for non-linear Random Vibrations., *Technical Report no. 92, Department of Mathematics (Statistics), University of Manchester, Institute of Science and Technology, England, 1978*

Otnes, R.K., Enochson, L., Applied Time Series Analysis, volume 1: Basic Techniques, *John Wiley and Sons,*

Page, C.H., Instantaneous Power Spectra, *J. Appl. Phys.*, vol. 23, pp. 103-106, 1952

Panet-Raymond, D. and J. Gotman, Asymetry in Delta Activity in Patients with Focal Epilepsy, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 75, pp. 474-481, 1990

Papoulis, A., Ambiguity Function in Fourier Optics, *J. Opt. Soc. Am.*, vol 64, pp. 779-788, 1974.

Papoulis, A., Signal Analysis, *McGraw Hill Book Co.*, New York, 1977

Papoulis, A., Sistemas Digitales y Analógicos, Transformadas de Fourier, Estimación Espectral, *Marcombo Boixareu Editores*, 1978

Parks, T.W. and McClellan, J.H., Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase, *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-19, pp. 189-194, Mar. 1972

Parks, T.W. and McClellan, J.H., A program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Filters, *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, vol. AU-20, no. 3, pp. 195-199, Aug. 1972

Parzen, Statistical Inference on Time Series by Hilbert Space Methods: I, *Technical Report no. 23, Department of Statistics, Standford University*, 1959, (Published in *Time Series Analysis Papers*, by E. Parzen, Holden-Day, San Francisco)

Parzen, E., On the estimation of a probability density function and the mode, *Annals of Mathem. Stat.*, 33, pp. 1065-1076, 1962

Parzen, E., Some Recent Advances in Time Series Modelling, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-19, pp. 723-730, December 1974

Pei, S.C. and I.I. Yang, High Resolution Wigner Distribution Using Chirp z Transform Analysis., *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 7, July 1991

Penrose, L.S., Some notes on discrimination, *Ann. Eugen.*, 13, pp. 228-237, 1947

Pollock, V., V.E., L. S. Schneider and S. A. Lyness, EEG Amplitudes in Healthy, Late-middle-aged and Elderly Adults: Normality of the Distributions and Correlations with Age, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 75, pp. 276-288, 1990

Portnoff, M. R., Time-Frequency Representations of Digital Signals and Systems based on a Short Time Fourier Analysis, *IEEE Trans. Acoust. Speech, Sig. Proc.*, vol 28, pp. 55-69, Feb. 1980

de Prony, Baron (Gaspard Riche), Essai expérimental et analytique: celles de la force expansiva de la vapeur de léau et de la vapeur de l'alkool, a différentes températures, *J. Ec. Polytech.*, vol 1 cahier 2, pp 24-76, 1795

Priestley, M.B., Evolutionary Spectra and non-stationarity Process, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, vol. 27, pp. 204-237, 1965

Priestley, M.B., Design relations for non-stationary processes, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, vol 28, pp. 228-240, 1966

Priestley, M.B., Power Spectral Analysis of non-stationary random processes, *J. Sound Vib.*, vol. 6, pp. 86-97, 1967

Priestley, M.B. and Subba Rao, T., A test for Stationarity of Time Series, *J. Roy., Statist. Soc. Ser. B*, vol. 31, pp. 140-149, 1969

- Priestley, M.B., Spectral Analysis and Time Series, *Academic Press*, 1981
- Rabiner, L.R., The Design of Finite Impulse Response Digital Filters Using Linear Programming Techniques, *Bell System Tech. J.*, pp. 1177-1198, July-Aug. 1972
- Rabiner, L.R., Linear Program Design of Finite Impulse Response (FIR) Digital Filters, *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, vol. 20, no.4, pp. 280-288, Oct. 1972
- Rabiner, L.R. and Schaffer, R. W., Digital Processing of Speech Signals, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1978
- Rabiner, L.R., Gold, B. and McGonegal, C.A., An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters, *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, vol. AU-18, no. 2, pp. 83-106, June 1970
- Rabiner, L.R. and Steiglitz, K., The Design of Wide Band Recursive and Non-Recursive Digital Differentiators, *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, vol. 18, no. 2, pp. 204-209, June 1970
- Rao, C.R., The utilization of multiple measurements in problems of biological classification, *J. Roy. Stat. Soc.*, B10 (2), pp. 159-203, 1948
- Regan, D., Human Brain Electrophysiology: Evoked Potentials and Evoked Magnetic Fields in Science and Medicine, *Elsevier*, New York, 1981
- Rioul, O. and Vetterli, M., Wavelets and Signal Processing, *IEEE Sign. Process. Magazine*, pp. 14-38, Oct. 1991
- Rissanen, J., A Universal Prior for the Integers and Estimation by Minimum Description Length, *Ann. Stat.*, vol. 11, pp. 417-431, 1983
- Rosenblatt, M., Remark on some nonparametric estimates of a density function, *Ann. Math. Stat.*, 27, pp. 832-837, 1956
- Sande Lemos, M. and B.J. Fisch, The Weighted Average Reference Montage,

*Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 79, pp. 361-370, 1991

Satterfield, J.H., and A. M. Schell, Childhood Brain Function Differences in Delinquent and Non Delinquent Hyperactive Boys, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 57, pp. 199-207, 1984

Schuster, Sir Arthur, On Interference Phenomenon, *Philos. Mag.*, vol 37, pp. 509-545, June 1894

Schuster, Sir Arthur, On Lunar and Solar Periodicities of Earthquakes, *Proc. R. Soc. Londond*, vol 61, pp. 455-465, 1897

Schuster, Sir Arthur, On the Investigation of Hidden Periodicities with Application to a Supposed Twenty-six-Day Period of Meteorological Phenomena, *Terr. Mag.*, vol 3, no. 1, pp. 13-41, March 1898.

Schuster, Sir Arthur, The Periodogram of Magnetic Declination as obtained from the records of the Greenwich Observatory during the years 1871 - 1895., *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, vol 18, pp. 107-135, April 1900

Schuster, Sir Arthur, The Theory of Optics, Cambridge University Press, London, 1904

Schuster, Sir Arthur, The Periodogram and its Optical Analogy., *Proc. R. Soc. London, ser A*, vol 77, pp. 136-140, 1905

Schuster, Sir Arthur, On the Periodicities of Sunspots, *Philos. Trans. R. Soc. London, ser A*, vol 206, pp. 69-100, 1906

Shanks, J.L., Recursion filters for digital Processing, *Geophys.*, vol. 32, no. 1, pp. 33-51, 1967

Sharp, Archibald, Harmonic Analyser, Given Direct Readings of the Amplitude and Epoch of the Various Constituent Simple Harmonic Terms, *Philos. Mag.*, vol 38, pp. 121-125, 1894

- Shephard, R.N., The Analysis of Proximities: Multidimensional Scaling with an unknown distance function. I, *Psychometrika*, 27, pp. 125-140, 1962
- Shephard, R.N., The Analysis of Proximities: Multidimensional Scaling with an unknown distance function. II, *Psychometrika*, 27, pp. 219-246, 1962
- Shiryayev, A. N., Some problems in the spectral theory of higher order moments, *I. Theor. Probability Appl.*, vol. 5, pp. 265-284, 1960
- Siebert, W.M., Studies of Woodward's Uncertainty Function, *Quart. Progress Rep.*, pp. 90-94, Res. Lab. of Electronics, MIT, Apr. 1958.
- Siegel, J., Design of Nonrecursive Approximations to Digital Filters with Discontinuous Frequency Responses, Ph. D. Thesis, MIT, June 1972
- Skolnik, M. I., *Introducción to Radar Systems*, Mcgraw Hill, NY, 1962
- Sloane, E.A., Comparision of Linearly and Quadratically Modified Spectral Estimates of Gaussian Signals, *IEEE Trans. on Audio and Electroacustics*, col AU-17, no. 2, 1969
- Smith, C.A.B., Some examples of Discrimination, *Ann. Eugen.*, 13, pp. 272-282, 1947
- Sorensen, H. V., Heideman, M.T. and Burrus, C.S., On Calculating the Split-Radix FFT, *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 34, pp. 152-156, Feb. 1986
- Steiglitz, K., Computer-Aided Design of Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, vol. AU-18, June 1970
- Stutt, C.A., Some Results on Real-Part/Imaginary-Part and Magnitude-Phase Relations in Ambiguity Functions, *IEEE Trans. Info.*, pp. 321-327, Oct. 1964
- Swingler, D.N., A comparison between Burg's Maximum Entropy Method and a Non-Recursive Technique for the Spectral Analysis of Deterministic Signals, *J. Geophys. Res.*, vol. 84, pp. 679-685, Feb. 1979

Thickbroom, G.W., F.L. Mastaglia, W.M. Carroll and H.D. Davies, Source Derivation: Application to Topographic Mapping of Visual Evoked Potentials, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 59, pp. 279-285, 1984

Thickbroom, G.W., F.L. Mastaglia and W.M. Carroll, Spatio-temporal Mapping of Evoked Cerebral Activity, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 59, pp. 425-431, 1984

Thomson, Sir William, On an instrument for calculating the integral of the product of two given functions, *Proc. R. Soc. London*, vol 24, pp. 266-268, 1876

Thomson, Sir William, Harmonic Analyser, *Proc. R. Soc. London*, vol 27, pp. 371-373, 1878

Titebaum, E.L. and Declaris, N., Linear Transformations of the Ambiguity Function, *IEEE Trans. Info. Th.*, vol. 12, no. 2, pp. 120-125, Apr. 1966.

Tjostheim, D., Spectral Generating Operators for non-stationary processes., *SIAM J. Appl. Math.*, vol 30., pp. 115-122, 1976

Togerson, W.S., Multidimensional Escaling: I. Theory and Method, *Psychometrika*, 17, pp. 401-419, 1952

Tucker, D.M., D. L. Roth and T.B. Bair, Functional Connections among Cortical Regions: Topography of EEG Coherence, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 63, pp. 242-250, 1986

Tukey, John W., The Sampling Theory of Power Spectrum Estimates, *Proceeding Symposium on Applied Autocorrelation Analysis of Physical Problems*, U. S. Office of Naval Research (NAVEXOS-P-725), pp. 47-67, 1949. Reprinted in *J. Cycle Res.*, vol 6, pp 31-52, 1957

Tukey, John W., An Introduction to the Measurement of Spectra, In *Probability and Statistics*, Ed. U. Grenander, pp. 300-330, Wiley, New York, 1959

Tyner, F.S., J.R. Knott and W. B. Mayer, Jr, Fundamentals of EEG Technology, volume 1: Basic Concepts and Methods, *Raven Press*, New York, 1983

Ulrych, T.J. and R. N. Clayton, Time Series Modelling and Maximum Entropy, *Phys. Earth Planet. Inter.*, vol. 12, pp. 188-200, Aug. 1976

Ulrych, T.J. and M. Ooe, Autoregressive and Mixed ARMA Models and Spectra, Chapter 3 in *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, 2nd ed., S. Haykin, ed., Springer-Verlag, New York, 1983

Van der Worp, V. Kraaier, G.H. Wieneke and A.C. Van Huffelen, Quantitative EEG during Progressive Hypocarbica and Hypoxia. Hiperventilation-induced EEG changes reconsidered, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 79, pp. 335-341, 1991

Ville, J., Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique, *Câbles et Transmission*, vol. 2 A, pp. 61-74, 1948.

Van Trees, H.L., Detection, Estimation and Modulation Theory, Part III, J. Wiley & Sons Publ., New York, 1971

Vetterly, M. and Nusbaumer, H.J., Simple FFT and DCT Algorithms with Reduced Number of Operations, *Signal Processing*, vol. 6, pp. 267-278, Aug. 1984

Volterra, V., Theory of Functionals and of Integro-differential Equations, Dover, New York, 1959

Von Mises, R., On the classification of observation data into distinct groups, *Ann. Math. Statist.*, 16, pp. 68-73, 1945

Wald, A., On a Statistical Problem arising in the clasification of an individual into one of two groups, *Analns of Math. Statistics*, 15, pp. 145-162, 1944

- Walter, W.G. and Dovey, V.J., Electroencephalography in cases of subcortical tumour, *J. Neurol. Neurosurg. Psychiatry*, no. 7, pp. 57-67, 1944
- Welch, B.L., Note on Discriminant Functions, *Biometrika*, 31, pp. 218-220, 1939
- Wexler, J. and Raz, S. Discrete Gabor Expansions, *Sig. Proc.*, vol 21, pp 207-220, 1990
- Wiener, Norbert, Generalized Harmonic Analysis, *Acta Math.*, vol 55, pp. 117-258, 1930
- Wiener, N., Non-linear Problems in Random Theory, M.I.T. Press, Cambridge, Mass ,1958
- Wigner, E. P., On The Quantum Correction to the Thermodynamic Equilibrium, *Phys. Review*, vol. 40, pp. 749-759, 1932
- Wigner, E. P., Quantum Mechanical Distribution Functions Revisited, in *Perspectives in Quantum Theory*, W. Yourgrau and A. Van der Merwe, eds. New York: Dover Publ., 1971
- Wold, Herman O. A., A Study in the Analysis of Stationary Time Series, dissertation, Upsala University, 1938; Reprinted by Almqvist & Wiksell Forlag, Stockholm, 1954
- Woodward, P. M., Probability and Information Theory with Application to Radar, Pergamon Press, London, 1953
- Winograd, S., On Computing the Discrete Fourier Transform, *Proc. National Academy of Science, USA*, vol 73, pp. 1005-1006, April 1976
- Yingling, C., D. Galin, G. Fein, D. Peltzman and L. Davenport, Neurometric does not detect 'Pure' Dislexics, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishers Ireland, Ltd., vol. 63, pp. 426-430, 1986

Yule, George Udny, On a Simple Form of Harmonic Analyses, *Philos. Mag.*, vol. 39, pp. 367-374, 1895

Yule, George Udny, On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to the Wolfer's Sunspot Numbers, *Philos. Trans. R. Soc. London, ser A*, vol 226, pp. 267-298, July 1927

Yavne, R., An Economical Method for Calculating the Discrete Fourier Transform, *Proc. Fall Joint Computer Conference*, pp. 115-125, 1968

APÉNDICE A

SISTEMAS DE ADQUISICIÓN DE DATOS

## A SISTEMAS DE ADQUISICIÓN DE DATOS

## 1 BURR -BROWN

## Sistema de Interfaz de Computadores Personales PCI-2000

Está diseñado para conectarse directamente dentro de un IBM PC XT, AT u otros ordenadores personales compatibles. El sistema es modular, por lo que se pueden construir sistemas mayores mediante el uso de múltiples placas. El rango de temperaturas en las que puede operar es entre 0 y 70° C.

PLACA PCI-	ncr ncd	res bit	Prec	Imp	Rango V	AGP	Lin LSB	T. c. $\mu$ s	vel. m/s
20002M-1  1 canal	16 r 8 d	12		10 G $\Omega$ a 40 pF	$\pm$ 5 $\pm$ 10 0-10	1 10 100 1000	1.6 1.6 2 2.7	74.5 75.5 114.5 704.5 31	26316
20017M-1 Muestr. retenedor	4 r 4 d			10 G $\Omega$ a 20 pF		1 10 100 1000		6	
20019M-1	8 r -- d	12		1 M $\Omega$ a 35 pF	$\pm$ 2.5 $\pm$ 5 $\pm$ 10 0-5 0-10		0.5	11.25	89000

## 2 PCI-3000

El PCI-3000 es un terminal inteligente diseñado para convertir un ordenador en un sistema de adquisición de datos. Puede trabajar con computadores personales como IBM PC, IBM XT, DEC, HP, Compaq, Apple y otros. La comunicación con los mismos tiene lugar a través de canales seriales (RS-232 o RS-422) u opcionalmente, vía IEEE-488. El corazón del sistema es una tarjeta basada en el microprocesador Z-80A. El rango de temperaturas a las que puede trabajar es de 0 a 50° C.

PLACA PCI	ncr ncd	res bit	Prec	Imp	Rango V	AGP	Lin	T. conv. datos/s
3002	16 r 8 d	12	±0.1%		±2.5 ±5 ±10 0 - 5 0 - 10	A1 1 A2 40k $1 + \frac{40k}{R}$ k= 1000		2000 a m.i. 30 a host  (9600 baud)
3301	16 r 8 d	12	±0.1%	$10^9 \Omega$		1-250		30
3302-1								
3303	64 r 32 d	12	±0.1%	$10^{10} \Omega$	±10 ±5 0-10	1 10 100 1000		2000 a m.i. 30 a host
3307	16 r 8 d	12	±0.1%		±5 ±2.5 0-5 0-10	A1 1 A2 40k $1 + \frac{40k}{R}$		2000 a m.i. 30 a host

3 MOTOROLA

Convertor	res	Rango	Imp	Lin	T. conv.	Tipo
MC10319	8	-3 a -6 +5	130 $\Omega$ 50 pF	0.19	40 ns	flash
MC6108	8	-5.2	2.5 k $\Omega$ 2.0 pF	0.10	1.8 $\mu$ s	MPU
MC14442	8	4.5 a 5.5		0.19	32 $\mu$ s	MPU
MC14443	8-10	4.5 a 18		0.5	300 $\mu$ s	MPU
MC14447	8-10	4.5 a 18		0.5	300 $\mu$ s	MPU
MC145040	8	4.5 a 5.5		0.19	10 $\mu$ s	11 c.
MC145041	8	4.5 a 5.5		0.19	20 ms	11 c. apr. suc.
MC145042	8	4.5 a 5.5				19 c. apr. suc.

## 4 METRABYTE

PLACA DAS-	Desc.	ncr ncd	res	Prec LSB	Imp	rango	AGP	Lin ± %	Veloc. m/s
50	Extrem. Alta vel. 1 MB Memoria Disparo: Programa Canal 0 Externo TTL	4 r -- d	12	2	100 kΩ 10 pF	±2.5 ±5 0-5 0-10			10 <sup>6</sup>
HRES	16 bit Alta resolución Ap. suc. Disparo: Programa Temporizador Externo	-- r 8 d	16	1	> 100 MΩ	±10,5,2.5 1.25,0-10 0-5,2.5, 0-1.25	1 2 4 8	0.003	47600
20       EXP20	Alta vel. entrada programable Ap. suc. Expandible Trnsf. prog Interrup.  DMA Disparo: Programa Temporizador Externo	16 r 8 d      128	12	1		±10,5,0.5 ±0.05, 0-10,5,1, 0-0.1		±1 LSB	10 <sup>5</sup>  8.5 μs  4000 4000 10 <sup>5</sup>
16F	Alta vel. Ap. suc. Disparo: Program Temporizador Externo Trnsf. prog Interrup.  DMA	16 r 8 d	12	±1		±10,5,2.5 ±1,0.5 0-10,5,2 0-1	0.5 1 2 5 10		10 <sup>5</sup> 8.5 μs  4000 4000 10 <sup>5</sup>
16	Alta vel. entrada programable DMA (+1) Disparo (+1)	16 r 8 d	12	±1		±10,5,2.5 ±1,0.5 0-10,5,2 0-1			50000 12 μs

+ Diferente ganancia para cada canal vía hardware

16G	Alta vel. Propósito general DMA Disparo (+1)	16 r 8 d	12			1,2,4,8, 10,100, 500	70000 15 $\mu$ s
8	Media vel. Disparo: Interrupción externa	8 r -- d	12		$\pm 5$		20000
8pga	Velocidad media Entr. prog. Ap. suc. Disparo: Programa Temporizador Externa	-- r 8 d	12		progra- mable		20000
con-1	Baja veloci- dad. Propó- sito gral. Integral do- ble pendte. Disparo: Int. ext.	-- r 8 d	12 + sgn		$\pm 2.0475$	10 100 1000	30
4	Bajo Coste Propósito gral. Aprox. suc. Disparo: Int. ext.	8 r -- d	8		$\pm 5$		4000 30 $\mu$ s
CHROM -1	Alta preci- sión. A/D integrando	2 r -- d	*		0-10,5,2 0-1		350 30 $\mu$ s

+1 ver especificaciones de DAS-16F

Macintosh II, plus, SE u otros productos Nubus compatibles. Apple.

PLACA	ncr	res bit	Prec	Imp	rango	AGP	Lin LSB	Vel. KHz	T. conv.
MBC-625	16 r 8 d	12	$\pm 0.02\%$	>100 M $\Omega$	$\pm 10$	1	$\pm 1$	142	5.0 $\mu$ s
Expandi- ble HAD, GAD MBC-MHZ	112 r 56 d	16		3 pF	0-10	10 100		833	

PLACA	ncr		Prec	Imp	rango	AGP	Lin LSB	Vel. KHz	T. conv.
MACADIOS -JR No expan dible Coste B.	16 r 8 d	12	±0.02%	>100 MΩ 3 pF	±10	1 10 100 200 500	±1	40	12.5 μs
APM-08 A. vel Ap. suc	8 r	12	±0.01%		±5		±1	30	25 μs 15 μs MR

## 5 DATA TRANSLATION

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
2812	Bajo coste DMA Disparo: Programa Interrup. Externo	16 r 8 d	12			±0.625,5 ±1.25,2.5 0-1.25,2.5 0-5,10	1 2 4 8		60  12.5 μs
2812A	Bajo coste DMA Disparo: Programa Interrup. Externo	16 r 8 d	12			±0.625,5 ±1.25,2.5 0-1.25,2.5 0-5,10	1 2 4 8		100  8 μs
2811 PGH	Bajo coste PIO	16 r 8 d	12			±.31, .625 ±1.25,2.5,5 0-.625,1.25 0-2.5,5	1 2 4 8		20  30 μs
2811 PGL	Bajo coste PIO	16 r 8 d	12			±.005, .01, ±.05, .5,5 0-.01, .05 0-.5,5	1 10 100 500		20  30 μs
2814	Bajo coste	16 r -- d	12		> 10 MΩ	±2.5,5 0-5	1		40  15 μs
2808	Bajo coste DMA	16 r --d	10	0.12	100 MΩ 10 pF	0-5	1		3.3

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
2801	PIO DMA Disparo: Interno Externo Micropro. Propósito gral	16 r 8 d	12	0.05	100 MΩ 10 pF	±1.25, 2.5 ±5, 10 0-1.25, 2.5 0-5, 0-10	1 2 4 8	.5	13.7  10 μs
2801A	Alta velo cidad DMA	16 r 8 d	12	0.05	100 MΩ 10 pF	±1.25, 2.5 ±5, 10 0-1.25, 2.5 0-5, 0-10	1 2 4 8	.5	27.5  10 μs
2801/ 5716A	Alta reso lución DMA	-- r 8 d	16	0.01	100 MΩ 10 pF	±1.25, 2.5 ±5, 10	1 2 4 8	1	7.5
2809 M/R	Muestreador retenedor simultáneo	8 r -- d	16	4 LSB	100 MΩ	±10	1	.75	16
2805	Bajo volt. entrada DMA	-- r 8 d	12	.1	100 MΩ 10 pF	±.02, .1, 1, 10 0-.02, .1, 1, 10	1 10 100 500	.5	G ≤ 10 13.7 G > 10 2.5
2805/ 5716A	Bajo volt. entrada alta resolución DMA	-- r 8 d	16	.05	100 MΩ 10 pF	±.02, .1, 1, 10 0-.02, .1, 1, 10	1 10 100 500	1	G ≤ 10 7.5 G > 10 2.4
2818 M/R	Muestreador retenedor simultáneo DMA	4 r -- d	12	.04	100 MΩ	±10, 0-10	1	.5	27.5
2824 PGH  PGL	Alta velo cidad Doble DMA	16 r 8 d	12			±1.25, 2.5, 5, 10 0-1.25, 2.5, 5 0-10  ±.02, .1, 1, 10 0-.02, .1, 1, 10	1 2 4 8  1 10 100 500		50

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Pre	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
2821	Velocidad media Doble DMA	16 r 8 d	12			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5 0-10	1 2 4 8		50  10 $\mu s$
2821- F-16SE  F-8DI	Alta velo- cidad Doble DMA	16 r -- d  --r 8 d	12			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5 0-10	1 2 4 8		150  4 $\mu s$
2821- G-16SE  G-8DI	Doble DMA	16 r -- d  -- r 8 d	12			$\pm .625, 1.25, 2.5$ $\pm 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5	1 2 4 8		250  2.5 $\mu s$
2823	Alta reso- lución Doble DMA	-- r 4 d	16			$\pm 10$	1		100  6 $\mu s$
2825	Doble DMA	16 r 8 d	12			$\pm .02, .1, 1, 10$ 0-.02, .1, 1, 10	1 10 100 500		50  10 $\mu s$
2827	Doble DMA Alta reso- lución	-- r 4 d	16			$\pm 10$	1		100  6 $\mu s$
2828 M/R	Muestreador Retenedor Simultáneo Doble DMA	4 r -- d	12			$\pm 10, 0-10$	1		100  4 $\mu s$
2829 M/R	Muestreador Retenedor Simultáneo Doble DMA	8 r -- d	16			$\pm 10$	1		30  30 $\mu s$
2831	Doble DMA	16 r 8 d	12			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5 0-10	1 2 4 8		50  11 $\mu s$
2831G	Doble DMA	16 r 8 d	12			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5 0-10	1 2 4 8		250  2 $\mu s$

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Pre	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
2835	Bajo volt. Doble DMA	16 r 8 d	12			$\pm 0.02, .1, 1, 10$ $0-.02, .1, 1, 10$	1 10 100 500		$G \leq 10$ 50 $G > 10$ 2.5 11 $\mu s$
2836	Alta reso- lución Doble DMA	16 r 8 d	16			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ $0-1.25, 2.5, 5$ 0-10	1 2 4 8		33 25 $\mu s$
2837	Bajo volt. Alta reso- lución Doble DMA	16 r 8 d	16			$\pm 0.02, .1, 1, 10$ $0-.02, .1, 1, 10$	1 10 100 500		$G \leq 10$ 33 $G > 10$ 2.6 25 $\mu s$
2838 M/R	Alta reso- lución Doble DMA Muestreador Retenedor Simultáneo	-- r 8 d	16			$\pm 10, 0-10$	1		160 6.25 $\mu s$

IBM PS/2

PLACA	Desc	ncr	Res	Pre	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
2901	Doble DMA	16 r 8 d	12			$\pm .156, .3125$ $\pm .625, 1.25, 2.5$ $\pm 5, 0-.3125,$ $0-.625, 1.25, 2.5$ 0-5	1 2 4 8		50 15 $\mu s$
2905	Bajo volt. Doble DMA	16 r 8 d	12			$\pm .0025, .005, .01$ $\pm .0125, .05, .125$ $\pm .25, .5, 1.25, 2.5$ $\pm 5, 0-.005, .01,$ $0-.025, .05, .25, .5$ 0-2.5, 5	1 10 100 500		50 15 $\mu s$
2914	Bajo coste PIO	16 r 8 d	12			$\pm .625, 1.25, 2.5, 5$ $0-.625, 1.25, 2.5, 5$	1 2 4 8		20 25 $\mu s$

## BUS VME

Placa DT	Desc	ncr ncd	Res	Pre	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel
1492	PIO	16 r 8 d	12			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5 0-10	1 2 4 8		40  15 $\mu$ s
1492- F-16SE	PIO	16 r -- d	12			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5 0-10	1 2 4 8		150  4 $\mu$ s
F-8DI		8 d	12						
1492- G-16SE	PIO	16 r -- d	12			$\pm 0.625, 1.25, 2.5$ $\pm 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5 0-10	1 2 4 8		250  2.5 $\mu$ s
G-8DI		8 d	12						
1492- L	PIO	-- r 4 d	12			$\pm 5$	1		750  1 $\mu$ s
1495	PIO	16 r 8 d	12			$\pm 0.02, .1, 1, 10$ 0-.02, .1, 1, 10	1 10 100 500		40  15 $\mu$ s
1497	Alta reso- lución. Alta vel. PIO	-- r 4 d	16			$\pm 10$	1		100  6 $\mu$ s
1498 M/R	PIO	4 r -- d	12			$\pm 10, 0-10$	1		100  4 $\mu$ s
1401	PIO	32 r 16 d	12			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5	1 2 4 8		50  10 $\mu$ s
1401/ 5716A- DI-B- PGH	PIO	-- r 8 d	16			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5	1 2 4 8		20  20 $\mu$ s
SE-B- PGH		16 r -- d	16						

PLACA DT	Desc	ncr ncd	Res	Pres	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel
1402- F16-SE		16r --d	12			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5 0-10	1 2 4 8		150  4 $\mu$ s
F8-DI		8d	12						
1405		32 r 16 d	12			$\pm .02, .1, 1, 10$ 0-.02, .1, 1, 10	1 10 100 500		G $\leq$ 10 50 G > 10 6.7  10 $\mu$ s
1405/ 5716A- DI-B- PGL		-- r 8 d	16			$\pm .02, .1, 1, 10$	1 10 100 500		G $\leq$ 10 20 G > 10 2.5  20 $\mu$ s
1407		-- r 4 d	16			$\pm 10$	1		100  6 $\mu$ s
1408 M/R		4 r -- d	12			$\pm 10, 0-10$	1		100 - 4 $\mu$ s

ISBX

PLACA DTX	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
311		16 r 8 d	12			$\pm .0025, .005, .025$ $\pm .05, .25, .5, 2.5, 5$ 0-.005, .05, .5, 5	1 10 100 1000		20 50 $\mu$ s

MÓDULOS DE ADQUISICIÓN DE DATOS

Sus principales características son:

- a) Se pueden configurar y calibrar digitalmente.
- b) El subsistema completo de adquisición de datos contiene multiplexor, muestreador y retenedor, amplificador, conversor A/D, controles digitales y referencia.
- c) La DT5751 posee un filtro anti-aliasing en cada entrada y Prevención de Error en Tiempo Real patentada.
- d) El encapsulado en acero provee de inmunidad al ruido de RF y EM.

PLACA DT	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
5751		-- r 8 d	12	.05	20 k $\Omega$ 1 pF	$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5, 10	1 2 4 8	.02	50  10 $\mu$ s
5753		-- r 8 d	12	.05	20 k $\Omega$ 1 pF	$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5, 10	1 2 4 8	.02	250  2.5 $\mu$ s
5741- PGH  PGL		16 r 8 d	12	.05	100 M $\Omega$ 10 pF	$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5, 10  $\pm .02, .1, 1, 10$ 0-.02, .1, 1, 10	1 2 4 8 1 10 100 500	.02	50  11 $\mu$ s
5743		16 r 8 d	12	.1	560 $\Omega$	$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5, 10	1 2 4 8	.01	250  2 $\mu$ s
5742- PGH  PGL		16 r 8 d	16	.002	100 M $\Omega$ 10 pF	$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5, 10  $\pm .02, .1, 1, 10$ 0-.02, .1, 1, 10	1 2 4 8 1 10 100 500	.002	33  25 $\mu$ s
5744		16 r 8 d	12	.09	100 M $\Omega$ 10 pF	$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5, 10	1 2 4 8	.002	1000  1 $\mu$ s
5747  M/R		-- r 8 d	16	.02	100 k $\Omega$ 10 pF	$\pm 10, 0-10$	1		160  6.25 $\mu$ s
5713- PGH  PGL		16 r -- d	12			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5, 10  $\pm .02, .1, 1, 10$ 0-.02, .1, 1, 10	1 2 4 8 1 10 100 500		50
5725- 16SE- PGH  8DI- PGH		16 r -- d  -- r 8 d	12			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$ 0-1.25, 2.5, 5, 10	1 2 4 8		150

PLACA DT	Desc	ncr ncd	Res	Pre	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
5727- 16SE- PGH		16 r -- d	12			$\pm 0.625, 1.25, 2.5, 5$ $\pm 10, 0-1.25, 2.5, 5$ 0-10	1 2 4 8		250
8DI- PGH		-- r 8 d							
5716a DI-B- PGH		-- r 8 d	16			$\pm 1.25, 2.5, 5, 10$	1 2 4 8		20
5726		-- r 4 d	16			$\pm 10$	1		100

6 CYBER

PLACA	Desc.	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel KHz
ACJR 12	Disparo: Programa Interno	-- r 8 d	12			$\pm 5, 0-10$	1 20 200		2  400 $\mu s$
ACPC 1216	Disparo: Programa Interno	-- r 16 d	12			$\pm 5, 0-10$	1 20 200		2  400 $\mu s$
ACJR 16	Disparo: Programa Interno	-- r 8 d	16			$\pm 5, 0-10$	1 20 200		0.2  4000 $\mu s$
ACPC 1616	Disparo: Programa Interno	-- r 16 d	16			$\pm 5, 0-10$	1 20 200		0.2  4000 $\mu s$
CYDAS 8	Disparo: Programa Interno	8 r -- d	12			$\pm 5, 10$ 0-10	1		20  15 $\mu s$
CYDAS 8PG	Disparo: Programa Interno Pulso ext.	8 r 8 d	12			$\pm 5, 0-10$	.5 1,2 5 10		20  15 $\mu s$
CYDAS 16	Disparo: Programa Interno Pulso ext. DMA, MRS*	16 r 8 d	12			$\pm 5, 0-10$	.5 1,2 5 10		50  15 $\mu s$

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
CYDAS 16F	Disparo: Programa Interno Pulso ext. DMA, MRS	16 r 8 d	12			±5,0-10	.5 1,2 5 10		100  8.5 μs
CYDAS 16JR	Disparo: Programa Interno Pulso ext. DMA, MRS FIFO 1 KB	16 r 8 d	12			±5,0-10	.5 1,2 5 10		120  3 μs
CYDAS 16AT	Disparo: Programa Interno Pulso ext. DMA, MRS FIFO 1 KB	16 r 8 d	12			±5,0-10	.5 1,2 5 10		330  3 μs
DAS 20	DMA, MRS Disparo: Pt, PA PE, prog.	16 r 8 d	12			±5, 0-10	.5 1 10 100		100  9 μs
DAS 50x	MRS ±1 μs Disparo: PE, Prog Int.	4 r -- d	12			±2.5, 5, 10 0-5, 10			1000  1 μs

DAS 50x están basadas en la DAS 500 de Keithley/Metrabyte  
Pt=Pretrigger, PA= Pendiente analógica, PE= Pulso externo  
Progr= Programa, Int = Interno por contador o temporizador.

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
EISA 2000	FIFO 512 B Doble DMA Disparo: Pt, PA,PE,Prog, Int	-- r 4 d	12			±5			1000  < 1 μs
FAST 141x	1024-8192 KB DMA Disparo: Pt, PA,PE,Prog, Int	-- r 4 d	14			±2.5,5,10 0-2.5,5,10			1000  1 μs
FAST 161x	1024-8192 KB DMA Disparo: Pt, PA,PE,Prog, Int	-- r 4 d	16			±2.5,5,10 0-2.5,5,10			1000  1 μs
FLPC 1000	64 KB Disparo: Pt, PA,PE,Prog, Int	16 r 8 d	12			±5,0-10	.5,1 2,5, 10,20 50, 100		1000  1 μs
FLPC 400	64 KB Disparo: Pt, PA,PE,Prog, Int	16 r 8 d	12			±5			400  1 μs
WMPC 200	Disparo: Pt, PA,PE,Prog, Int	16 r 8 d	12			±5,0-10	.5,1, 2,5, 10,20 50		1 can 200 >1 c. 100 5 μs
HSDAS 12	FIFO 128 B. 4 can. MRS DMA,Disparo: Pt,PA,PE,Prog Int	16 r 8 d	12			±2.5,5,10 0-2.5,5,10	1		400  2 μs
HSDAS 16	FIFO 128 B. DMA,Disparo: Pt,PA,PE,Prog Int	16 r 8 d	16			±2.5,5,10 0-2.5,5,10	1		200  5 μs
LSDAS 16	FIFO 128 B. DMA,Disparo: Pt,PA,PE,Prog Int	16 r 8 d	16			±2.5,5,10 0-2.5,5,10	1		50  20 μs
INST 601	64 KB, Disparo: Pt, PA,PE,Prog	16 r -- d	12			±10	1		1000  1 μs

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
LCDAS 50	DMA, Disparo: PE, Prog, Int	16 r 8 d	12			$\pm 2.5, 5, 10$			50 8 $\mu$ s
LCDAS 125	DMA, Disparo: PE, Prog, Int	16 r 8 d	12			$\pm 2.5, 5, 10$			125 8 $\mu$ s
LPM 1216	FIFO 16 B. Doble DMA Disparo: PE, Prog, Int	16 r -- d	12			$\pm 2.5, 5$			50 20 $\mu$ s
MIO 16F5	FIFO 256 B. Doble DMA Disparo: Pt, PE, Prog, Int	16 r 8 d	12			$\pm 5$	.5, 1 2, 5 10, 20 50 100		200 5 $\mu$ s
MIO 16L9 16H9	FIFO 16 B. Doble DMA Disparo: Pt, PE, Prog, Int	16 r 8 d	12			$\pm 5, 10, 0-10$	1, 10, 100, 500  1, 2, 4 8		100 9 $\mu$ s
MIO 16L25 H25	FIFO 16 B. Doble DMA Disparo: Pt, PE, Prog, Int	16 r 8 d	12			$\pm 5, 10, 0-10$	1, 10, 100, 500  1, 2, 4 8		45 25 $\mu$ s
MCMIO 16L9 H9	FIFO 16 B. DMA, Disparo: Pt, PE, Prog, Int	16 r 8 d	12			$\pm 5, 10, 0-10$	1, 10, 100, 500  1, 2, 4 8		100 9 $\mu$ s
MCMIO 16L25 H25	FIFO 16 B. DMA, Disparo: Pt, PE, Prog, Int	16 r 8 d	12			$\pm 5, 10, 0-10$	1, 10, 100, 500  1, 2, 4 8		45 25 $\mu$ s
PC 26	Disparo: Prog.	16 r -- d	12			$\pm 5, 10, 0-10$	1		20 40 $\mu$ s
PC 60	Disparo: Prog.	-- r 16 d	12			$\pm 4.095$	1		.03 30 ms
PC 61		-- r 8 d	12			0-20 mA	1		.03 30 ms

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
PC 73	Disparo: Prog.	-- r 8 d	12			±4.095	1 100 200 500		.03  30 ms
PC 30C	DMA, Disparo: PE,Prog,Int	16 r -- d	12			±5,10 0-10			100  10 µs
PC 30D	FIFO 16 B. Doble DMA Disparo: PE,Prog,Int	16 r -- d	12			±5,0-10			200  5 µs
PC 30DS4	FIFO 16 B. Doble DMA, 4 MRS,Disparo: PE,Prog,Int	16 r -- d	12			±5,0-5			200  5 µs
PC 30DS16	FIFO 16 B. Doble DMA, MRS PE,Prog,Int	16 r -- d	12			±5,0-5			200  5 µs
PC 30PGL  30PGH	FIFO 16 B. Doble DMA PE,Prog,Int	16 r 8 d	12			±5,0-10	1,10 100, 1000  1, 2 4, 8		200  5 µs
PCL 812	DMA, Disparo: PE,Prog,Int	16 r -- d	12			±10	1, 2 5, 10		30  25 µs
PCL 812G	DMA, Disparo: PE,Prog,Int	16 r -- d	12			±5,10	1, 2 4, 8 16		30  25 µs
PCLAB 128	FIFO 16 B. DMA, Disparo: Pt,PE,Prog,Int	8 r -- d	12			±5,0-10	1,2,5 10,20 50, 100		62.5  16 µs
RTI 870	Disparo: PA,PE,Prog,Int	-- r 4 d	22			±5	5,50		.02  50 ms



PLACA DM	Desc	ncr ncd	Res	Pre	Imp	Rango	AGP	Lin bit	vel kHz
P011		16 r -- d	12			±10 ±40 mA	1 2 10 20		15 µs/can 25 µs/can
P076		8 r -- d	12			±5 ±20 mA			25 µs/can
P063		16 r -- d	12			±10 ±40 mA	1 2 10 20		30 µs
P045	DMA Disparo: Programa Interno Externo	16 r 8 d	12			±.5, 1, 2.5 ±5, 10 0-1, 2, 5, 10			60
P046	DMA Disparo: Programa Interno Externo	16 r 8 d	12			±.5, 1, 2.5 ±5, 10 0-1, 2, 5, 10	*		100

\* Es posible seleccionar una ganancia diferente para cada canal

8 AXIOM

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Prec %	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
AX5621	Alta re- solución	-- r 8 d	16				1 2 4 8		50
AX5210	Bajo coste Disparo: Programa Interno Externo	16 r	12				1 2 4 8 16		30
AX5411 -HG  -LG		16 r 8 d	12				1, 2, 4, 8  1, 10 100, 500		90

## 9 PCLAB

PLACA PCL	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
718		16 r 8 d	12			$\pm 5, 1, 2.5$ $\pm 5, 10$ 0-.5, 1, 2.5 0-, 5, 10			60 100
8		16 r 8 d	12			$\pm 5, 1, 2.5$ $\pm 5, 10$ 0-.5, 1, 2.5 0-5, 10			100
711S		8 r	12	.015		$\pm 5$		1	1000 25 $\mu s$
812		16 r	12	.015		0-1, 2, 5, 10		1	1000 25 $\mu s$

## 10 NATIONAL INSTRUMENTS

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
Lab-PC	DMA	8	12						62.5
PC-LPM -16		16	12						
AT-MIO -16		16 r 8 d	12						100
AT-MIO -16F-5		16 r 8 d	12						200
EISA- A2000		4							1000

## IBM PS/2 Micro channel

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
MC-MIO -16	DMA	16 r 8 d							100



PLACA CIO-	Desc	ncr ncd	Res	Prec %	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
SSH16	Muestreador Retenedor simultáneo de los 16 canales. Disparo: Programa Interno Externo	-- r 16 d	12				1 10 100 200 300 500 700 800		10 $\mu$ s
AD08*3	Velocidad media Disparo: Programa Interno Externo	8 r	12	.01		$\pm 5, 10, 0-10$		$\pm 1$ LSB	20
AD08-PGH*2		-- r 8 d	12			$\pm .005, .01$ $\pm .05, .1, .5$ $\pm 1, 5, 10$ $0-.01, .02$ $0-.1, .2, 1$ $0-2, 10$	.5 1 5 10 50 100 500 1000		20
AD16Jr*1	Transf. prog. Interrupción DMA Ap. suc.	16 r 8 d	12	.01		$\pm .625, 1.25$ $\pm 2.5, 5, 10$ $0-1.25, 2.5$ $0-5, 10$	1 2 4 8	$\pm 1$ LSB	130  3 $\mu$ s
AD16Jr-AT*1	Transf. Prog. Interrupción DMA Ap. suc	16 r 8 d	12	.01		$\pm .625, 1.25$ $\pm 2.5, 5, 10$ $0-1.25, 2.5$ $0-5, 10$	1 2 4 8	$\pm 1$ LSB	330  3 $\mu$ s

\* Totalmente compatible con la tarjeta indicada. Se ofrece a menor precio que la original.

\*1 100% compatible con DAS-16 y DAS-16/F de Metrabyte

AIO16P y AIO16F de Industrial Computer Source. ICS compra y revende DAS16 de Metrabyte.

DAS-16 y DAS-16/F de OMEGA. Omega compra y revende DAS-16 de Metrabyte.

PCL718 de Advantech (Conectores diferentes).

\*2 100% compatible con DAS-08-PGA de Metrabyte

AIO8P de Industrial Computer Source. ICS compra y revende tarjetas de Metrabyte.

DAS-08PGA de OMEGA. Omega compra y revende tarjetas de Metrabyte.

\*3 100% compatible con DAS-08 de Metrabyte

AI08 de Industrial Computer Source. ICS compra y revende tarjetas de Metrabyte.

DAS-08 de OMEGA. Omega compra y revende tarjetas de Metrabyte.

ADC-308 de COUNTEC (Conectores de salida diferentes)

13 ADAC

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango V	AGP	Lin %	Vel kHz
5508HR	Alta vel. Alto vol. Disparo: Reloj int. Externo	16 r 8 d	16		100 MΩ 100 pF	±2.5, ±5 ±10, 0-5 0-10	si	±.003	50  20 μs 60 μs
5508MF	Disparo: Interno Externo Bajo coste	16 r 8 d	12		10 MΩ 100 pF	±10, 0-5 0-10	1 2 4 8	±.5 LSB	25  40 μs
5500MF	Disparo: Interno Externo	8 r	12		10 MΩ 100 pF	±5, 10 0-10		± 1 LSB	25
5525MF	Disparo: Interno Externo	16 r 8 d	12		10 MΩ 100 pF	±5, 10 0-10	1 2 4 8	±.5 LSB	40 μs  20 μs
5526MF	Disparo: Programa Interno Externo	16 r 8 d	12		10 MΩ 100 pF	±5, 10 0-10	1 2 4 8	±.5 LSB	40 μs  20 μs
5000  5010, 15 5020, 25 5040, 45	Disparo: Interno Externo Expandible a 128 r 120 d	16 r 8 d	12	±.035	20 MΩ 100 pF	±5, 10 0-10	1 2 4 8		30 μs 10 μs 65 μs

## BUS VME

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
7010MF	Interr. por programa Disparo: Interno Externo	32 r 16 d	12		20 M $\Omega$ 100 pF	$\pm 10,0-10$	1 2 4 8		33 30 $\mu$ s
7020MF	Interr. por programa Disparo: Interno Externo	32 r 16 d	12		20 M $\Omega$ 100 pF	$\pm 10,0-10$	1 2 4 8		100 10 $\mu$ s
7040MF	Interr. por programa Disparo: Interno Externo	32 r 16 d	16		20 M $\Omega$ 100 pF	$\pm 10,0-10$	1		15 65 s

## 14 STRUCK

PLACA	Desc	nc	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel MHz
STR750	Flash CA/D Expandible a 152 can. 2048 Byte/can Lógica TTL/CMOS	8	8						40

## 15 ADDA

PLACA	Desc	ncr ncd	Res	Prec	Imp	Rango	AGP	Lin	Vel kHz
ADDA CARD	Unipolar Ap. suc.	16	12			0-9			60 $\mu$ s/can

## 16 NOTACIÓN

Desc = Descripción

ncr = Número de canales referenciales

ncd = Número de canales diferenciales

Res = Resolución

Prec = Precisión

Imp = Impedancia

AGP = Amplificador de Ganancia Programable

Lin = Linealidad

Vel = Velocidad

Los datos no presentes en las tablas, no estaban disponibles en las fuentes consultadas.

APÉNDICE B

PROGRAMA DE ADQUISICIÓN DE SEÑALES

## B PROGRAMA DE ADQUISICIÓN DE SEÑALES

```

'*****
' * PROGRAMA: ADQUIRIR.BAS *
' * FECHA : OCTUBRE 1989 *
'*****
,
,
CLEAR , 2000
DEFINT A-Y
,
SCREEN 0
CLS
COLOR 5, 0, 5
KEY 15, CHR$(&H8) + CHR$(&H1C)
KEY(11) ON
KEY(14) ON
KEY(15) ON
LOCATE 12, 23
,
'***** DEFINICION DE CONSTANTES *****
BASE.ADDRESS = &H2EC
COMMAND.REGISTER = BASE.ADDRESS + 1
STATUS.REGISTER = BASE.ADDRESS + 1
DATA.REGISTER = BASE.ADDRESS
,
'*****
' * Comandos de la Tarjeta DT2801 a utilizar
COMMAND.WAIT = &H4 ''
WRITE.WAIT = &H2 ''
READ.WAIT = &H5 ''
EXT.CLOCK = &H40 '' 64 ---> Reloj externo
EXT.TRIGGER = &H80 '' 128 ---> Disparo externo
CSTOP = &HF '' 16 ---> Parar
CCLEAR = &H1 '' 1 ---> Limpia error
CERROR = &H2 '' 2 ---> Lee registro de error
CCLOCK = &H3 '' 3 ---> Ajusta periodo reloj interno
CSAD = &HD '' 14 ---> Ajusta parámetros CA/D
CRAD = &HE '' 15 ---> Lee CA/D
CDMA = &H10 '' 16 ---> Transferencia de datos en
, modo DMA
,
'*****
MIN.CONV = 3 '' Mínimo número de conversiones
MAX.CONV = 32767 '' Máximo número de conversiones
DUMMY = 5 '' Número de conversiones mudas
BASE.FREQUENCY# = 64000! ''
PERIOD.DT2801# = 40 ''
'*****
,
'*****
' Parámetros constantes del CA/D
PGH(0) = 1: PGH(1) = 2: PGH(2) = 4: PGH(3) = 8
PGL(0) = 1: PGL(1) = 10: PGL(2) = 100: PGL(3) = 500
PGX(0) = 1: PGX(1) = 1: PGX(2) = 1: PGX(3) = 1
,
SE.CHANNELS = 16: DI.CHANNELS = 8 '' Número de canales

```

```

DT2818.CHANNELS = 4
,,
FACTOR.10# = 1024: FACTOR.12# = 4096
FACTOR.16# = 32768!
,,
UNI.RANGE = 10: UNI.OFFSET = 0      ''Rango y offset unip.
BIP.RANGE = 20: BIP.OFFSET = 10    ''Rango y offset bip.
BIP16.RANGE = 10: BIP16.OFFSET = 0
UNI8.RANGE = 5: UNI8.OFFSET = 0
100  '' *****
    y = 1
    ,,
    IF y = 1 THEN GOTO 110
    IF y = 3 THEN GOTO 120
    ,,
    PRINT "Por favor, responda con un '1' o un '3' solamente."
    GOTO 100
110  ''
    '' Define las constantes del DMA para el canal de DMA 1.
    ''
    '' El valor DMAMODE se ajusta para programar el canal 1
    '' para transferencia de bytes con escritura en memoria.
    ''
    '' La memoria usada por el DMA comienza en la dirección
    '' &HF800 en la página 0 de memoria.
    ''
    DMACHANNEL = 1
    DMAMODE     = &H45
    BASEREG     = 2
    COUNTREG    = 3
    PAGEREG     = &H83
    DMABASEL    = 0
    DMABASEH    = 0
    DMAPAGE     = &H6
    '' *****
    ''
    af$ = "COLOR 5"
GOSUB 10
    '' *****
120  CLS
    PUT "CONECTAR SONIDO(S/N) ", dfg$
    IF dfg$ <> "S" AND dfg$ <> "s" AND dfg$ <> "N" AND dfg$ <> "n" THEN
GOTO 120
    IF dfg$ = "s" OR dfg$ = "S" THEN SWT = 0
    IF dfg$ = "n" OR dfg$ = "N" THEN SWT = 1
    '' *****
    ''
    '' *****
    '' MENU DE RANGO DE AMPLITUDES A MEDIR
51  CLS
    PRINT "  RANGO -/+ 10 V."
    PRINT "  RANGO -/+  5 V."
    PRINT "  RANGO -/+ 2.5 V."
    PRINT "  RANGO -/+ 1.5 V."
    pf% = 1
    LOCATE 1, 1
    PRINT "x"

```

```

lm% = 4
pif = 0
52  ON KEY(11) GOSUB 80
    ON KEY(14) GOSUB 81
    ON KEY(15) GOSUB 53
    IF pif = 1 THEN GOTO 54
    GOTO 52
53  pif = 1
RETURN
54  IF pf% < 1 OR pf% > 4 THEN GOTO 51
    y = 2 ^ (pf% - 1)
    ' *****
    '
    ' *****
    '
                                MENU PRINCIPAL
200  CLS
    PRINT "    VISUALIZAR FICHEROS"
    PRINT "    COPIAR FICHEROS"
    PRINT "    BORRAR FICHEROS"
    PRINT "    CONTINUAR"
    PRINT "    SALIR AL SISTEMA"
    pf% = 1
    LOCATE 1, 1
    PRINT "x"
    lm% = 5
    pif = 0
83  ON KEY(11) GOSUB 80
    ON KEY(14) GOSUB 81
    ON KEY(15) GOSUB 84
    IF pif = 1 THEN GOTO 85
    GOTO 83
84  pif = 1
RETURN
85  E% = pf%
    IF ((E% < 1) OR (E% > 5)) THEN GOTO 200
    CLS
    IF E% = 4 THEN GOTO 4
    ON E% GOSUB 1, 2, 3
    IF E% = 5 THEN GOTO 1100
    GOTO 200
    ' *****
    '
    ' *****
    '
                                VISUALIZAR FICHEROS
1    CLS
    PRINT "    DISCO DURO"
    PRINT "    DISKETTE"
    pf% = 1
    LOCATE 1, 1
    PRINT "x"
    lm% = 2
    pif = 0
70  ON KEY(11) GOSUB 80
    ON KEY(14) GOSUB 81
    ON KEY(15) GOSUB 71
    IF pif = 1 THEN GOTO 72
    GOTO 70

```

```

71     pif = 1
RETURN
72     E% = pf%
      CLS
      IF E% = 1 THEN SHELL "DIR/W/P!SORT"
      IF E% = 2 THEN
        CLS
        af$ = "a:": GOSUB 10
        af$ = "dir/w/p!sort": GOSUB 10
        af$ = "c:": GOSUB 10
      END IF
      KEY(15) OFF
30     dfg$ = INKEY$
      IF dfg$ = "" THEN GOTO 30
      KEY(15) ON
RETURN
      ' *****
      '
      ' *****
      '
                                COPIAR FICHEROS
2     CLS
      LOCATE 1, 1
      INPUT "N MOMBRE(8 caracteres máximo) ", nf$
      IF ((LEN(nf$) > 8) OR (LEN(nf$) < 2)) THEN GOTO 2
      CLS
      LOCATE 1, 1
      PRINT "   DISCO DURO --> DISKETTE"
      PRINT "   DISKETTE --> DISCO DURO"
      pf% = 1
      LOCATE 1, 1
      PRINT "x"
      lm% = 2
      pif = 0
60     ON KEY(11) GOSUB 80
      ON KEY(14) GOSUB 81
      ON KEY(15) GOSUB 61
      IF pif = 1 THEN GOTO 62
      GOTO 60
61     pif = 1
RETURN
62     E% = pf%
      IF (E% < 1) OR (E% > 2) THEN GOTO 60
      CLS
      IF E% = 1 THEN
        CLS
        af$ = "a:": GOSUB 10      ' Directorio diskette
        af$ = "dir": GOSUB 10
        af$ = "cls": GOSUB 10
        CALL espa(z1%, z2%, z3%) ' comprueba espacio
        af$ = "C:": GOSUB 10
        z1 = z1%
        z2 = z2%
        z3 = z3%
        z4 = z1 * z2 * z3
        IF z4 < 300000 THEN      ' Error si no hay espacio
          CLS
          LOCATE 12, 23

```

```

                PRINT "DISKETTE LLENO"
                LOCATE 14, 23
                PRINT "Pulsar cualquier tecla"
21             dfg$ = INKEY$
                IF dfg$ = "" THEN GOTO 21
                CLS
                GOTO 200
            END IF
        ' ' genera los nombres de los 16 canales y los copia de
        ' ' disco duro a diskette
        FOR I% = 1 TO 16
            vf$ = STR$(I%)
            vf$ = MID$(vf$, 2, LEN(vf$))
            vf$ = nf$ + vf$
            af$ = "copy " + vf$ + " a:" + ">" + "nulo.dat"
            GOSUB 10
            af$ = "del nulo.dat"
            GOSUB 10
        NEXT I%
    ELSE
        CALL espa(z1%, z2%, z3%) ' ' Comprueba espacio
        z1 = z1%
        z2 = z2%
        z3 = z3%
        z4 = z1 * z2 * z3
        IF z4 < 300000 THEN ' ' Error si no hay espacio
            CLS
            LOCATE 12, 23
            PRINT "DISCO LLENO"
            LOCATE 14, 23
            PRINT "Pulse cualquier tecla"
11         dfg$ = INKEY$
            IF dfg$ = "" THEN GOTO 11
            CLS
            GOTO 200
        END IF
        ' ' Genera los nombres de los 16 ficheros y los copia de
        ' ' diskette a disco duro.
        FOR I% = 1 TO 16
            vf$ = STR$(I%)
            vf$ = MID$(vf$, 2, LEN(vf$))
            vf$ = nf$ + vf$
            af$ = "copy " + "a:" + vf$ + ">" + "nulo.dat"
            GOSUB 10
            af$ = "del nulo.dat"
            GOSUB 10
        NEXT I%
    END IF
    GOTO 200
RETURN
' ' *****
' '
' ' *****
' '
3         CLS
        LOCATE 1, 1
        INPUT "NOMBRE(8 caracteres máximo) ", nf$

```

```

IF ((LEN(nf$) > 8) OR (LEN(nf$) < 2)) THEN GOTO 3
FOR I% = 1 TO 16
    vf$ = STR$(I%)
    vf$ = MID$(vf$, 2, LEN(vf$))
    vf$ = nf$ + vf$
    af$ = "del " + vf$ + ">" + "nulo.dat"
    GOSUB 10
    af$ = "del nulo.dat"
    GOSUB 10
NEXT I%
RETURN
' *****
'
' *****
'
' CONTINUAR
4 CALL espa(z1%, z2%, z3%)
z1 = z1%: z2 = z2%: z3 = z3%
z4 = z1 * z2 * z3
IF z4 < 300000 THEN
    CLS
    LOCATE 12, 23
    PRINT "DISCO LLENO"
    LOCATE 14, 23
    PRINT "Pulse cualquier tecla"
20 dfg$ = INKEY$
IF dfg$ = "" THEN GOTO 20
CLS
GOTO 200
END IF
CLS
LOCATE 12, 23
INPUT "NOMBRE DEL FICHERO(8 caracteres máximo) ", nf$
IF ((LEN(nf$) > 8) OR (LEN(nf$) < 1)) THEN GOTO 200
' Chequeo del Registro de estado.
'
' *****
' Escribe el byte del comando en el registro de comandos.
' Esto para la tarjeta DT2801
OUT COMMAND.REGISTER, CSTOP
' *****
'
' *****
' Lee el registro de datos para limpiarlo.
TEMP = INP(DATA.REGISTER)
'
' Sentencia de espera hasta que el bit 1 del registro de
estado esté limpio (Entrada de datos ocupada)
WAIT STATUS.REGISTER, WRITE.WAIT, WRITE.WAIT
'
' Sentencia de espera hasta que el bit 2 esté a 1
' Tarjeta en estado de "Preparada"
WAIT STATUS.REGISTER, COMMAND.WAIT
'
' Sentencia de salida que escribe el comando CCLEAR en el
registro de comandos (Limpia error)
OUT COMMAND.REGISTER, CCLEAR
' *****

```

```

210   y$ = "Y"
      IF y$ = "N" OR y$ = "n" THEN GOTO 220
      IF NOT (y$ = "Y" OR y$ = "y") THEN GOSUB 800
      IF NOT (y$ = "Y" OR y$ = "y") THEN GOTO 210
      ,,
      FACTOR# = FACTOR.12#
      PERIOD# = PERIOD.DT2801#
      FREQUENCY# = BASE.FREQUENCY#
      GAIN(0) = PGH(0): GAIN(1) = PGH(1)
      GAIN(2) = PGH(2): GAIN(3) = PGH(3)
      GOSUB 700: GOSUB 730: GOTO 400
220   ,,
300   ,, Tipo de Tarjeta no encontrado
      ,,
      GOTO 1000
      IF NOT (y$ = "Y" OR y$ = "y") THEN GOTO 300
      ,,
      ' Imprime el ritmo de conversión
      ,,
      ' Pide la ganancia A/D
      ,,
      'PRINT " Asigna ganancia, primer canal, último canal y"
      'PRINT "número de conversiones a ser usados como parámetros"
      'PRINT "A/D"
      'PRINT " conversions values to be used for A/D parameters."
      'PRINT " ";
      'PRINT "Los valores de ganancia son"; GAIN(0); ", "; GAIN(1);
      'PRINT ", "; GAIN(2); ", and "; GAIN(3); "."
      'Y = 8
      ,,
400   FOR GAIN.CODE = 0 TO 3: IF GAIN(GAIN.CODE) = y THEN GOTO 420
      NEXT GAIN.CODE
      ,,
      PRINT "          Por favor, usar valores correctos."
      GOTO 400
      ,,
      ' Pide el canal A/D
      ,,
420   start.channel = 0
      end.channel = 15
      ,,
      IF start.channel < 0 THEN GOTO 430
      IF start.channel > (number.channels - 1) THEN GOTO 430
      IF end.channel < 0 THEN GOTO 430
      IF end.channel > (number.channels - 1) THEN GOTO 430
      IF NOT (number.channels = DT2818.CHANNELS) THEN GOTO 440
      IF start.channel = 0 THEN GOTO 440
      ,,
430   PRINT : PRINT "El primer canal de la DT2801 debe ser el 0"
      PRINT : PRINT "Por favor, use valores correctos de canal"
      GOTO 420
      ,,
      ' Asigna el número de conversiones a realizar
      ,,

```

```
440    num.conv = 32767
    ,,
    IF (num.conv >= MIN.CONV AND num.conv <= MAX.CONV) THEN GOTO 450
    ,,
    PRINT "Por favor, use valores correctos de conversiones"
    GOTO 440
    ,,
    ,, Actualiza el conversor A/D.
    ,, Escribe el conjunto de parámetros A/D.
    ,,
450    WAIT STATUS.REGISTER, COMMAND.WAIT
    OUT COMMAND.REGISTER, CSAD
    ,,
    ,, Escribe el byte de ganancia.
    ,,
    WAIT STATUS.REGISTER, WRITE.WAIT, WRITE.WAIT
    OUT DATA.REGISTER, GAIN.CODE
    ,,
    ,, Escribe el byte de primer canal.
    ,,
    WAIT STATUS.REGISTER, WRITE.WAIT, WRITE.WAIT
    OUT DATA.REGISTER, start.channel
    ,,
    ,, Escribe el byte de último canal.
    ,,
    WAIT STATUS.REGISTER, WRITE.WAIT, WRITE.WAIT
    OUT DATA.REGISTER, end.channel
    ,,
    ,, Escribe dos bytes. Número de conversiones mudas
    ,,
    WAIT STATUS.REGISTER, WRITE.WAIT, WRITE.WAIT
    OUT DATA.REGISTER, DUMMY
    WAIT STATUS.REGISTER, WRITE.WAIT, WRITE.WAIT
    OUT DATA.REGISTER, DUMMY
    ,,
    ,, Ajusta el ritmo del reloj interno
    ,, Escribe el comando SET CLOCK PERIOD.
    ,,
    WAIT STATUS.REGISTER, COMMAND.WAIT
    OUT COMMAND.REGISTER, CCLOCK
    ,,
    ,, Escribe los bytes alto y bajo de PERIOD#.
    ,,
    PERIODH = 0
    PERIODL = 250
    WAIT STATUS.REGISTER, WRITE.WAIT, WRITE.WAIT
    OUT DATA.REGISTER, PERIODL
    WAIT STATUS.REGISTER, WRITE.WAIT, WRITE.WAIT
    OUT DATA.REGISTER, PERIODH
    ,,
    ,, Actualiza el controlador de DMA
    ,,
    DMACOUNTH = 255
    DMACOUNTL = 255
    ,,
    OUT 11, DMAMODE          ' Asigna el modo DMA
```

```

OUT 12, 0          ' Limpia el byte flip-flop
OUT BASEREG, DMABASEL ' Asigna la dirección de memoria
                   ' base del DMA

OUT BASEREG, DMABASEH '
OUT COUNTREG, DMACOUNTL ' Asigna el byte de cuenta del
                   ' DMA

OUT COUNTREG, DMACOUNTH '
OUT PAGEREG, DMAPAGE ' Asigna la página de memoria
                   ' del DMA

OUT 10, DMACHANNEL ' Activa la máscara de canales
                   ' del DMA

,,
,, Chequea si existe ERROR.
,,
500  WAIT STATUS.REGISTER, COMMAND.WAIT
      STATUS = INP(STATUS.REGISTER)
      IF (STATUS AND &H80) THEN GOTO 900
      ,,
510  y$ = "N"
      ,,
      COMMAND = 0
      IF y$ = "Y" OR y$ = "y" THEN COMMAND = EXT.CLOCK
      IF y$ = "Y" OR y$ = "y" THEN GOTO 520
      IF y$ = "N" OR y$ = "n" THEN GOTO 520
      ,,
      GOSUB 800: GOTO 510: GOTO 500
      ,,
520  PRINT
      y$ = "N"
      ,,
      IF y$ = "Y" OR y$ = "y" THEN COMMAND = COMMAND + EXT.TRIGGER
      IF y$ = "Y" OR y$ = "y" THEN GOTO 600
      IF y$ = "N" OR y$ = "n" THEN GOTO 600
      ,,
      GOSUB 800: GOTO 520
      ,,
      ' Escribe el comando READ A/D WITH DMA.
      ,,
600  IF y$ = "N" OR y$ = "n" THEN GOTO 610
      ,,
      PRINT : PRINT "Aplicar Disparo externo, entonces esperar."
      PRINT : GOTO 620
610  LOCATE 14, 23
      PRINT "Procesando. Por favor espere ...": PRINT
      ,,
620  WAIT STATUS.REGISTER, COMMAND.WAIT
      OUT COMMAND.REGISTER, CRAD + CDMA + COMMAND
      ,,
      ' Chequea si existe ERROR.
      ,,
      WAIT STATUS.REGISTER, COMMAND.WAIT
      STATUS = INP(STATUS.REGISTER)
      IF (STATUS AND &H80) THEN GOTO 900
      ,,
      ' Calcula e imprime las lecturas A/D en voltios.
      ,,
      nchan = end.channel - start.channel + 1

```

```

    IF nchan <= 0 THEN nchan = nchan + number.channels
    SWT = 0 THEN SOUND 262, 15
    LOCATE 16, 23: PRINT "ADQUISICION FINALIZADA"
LOCATE 18, 23: PRINT "Grabando en disco. Por favor espere ..."
,,
630  DEF SEG = &H6000
    '' on error goto 40
    zum.conv& = 32768
    start.channel = 0
    end.channel = 15
    FOR gum% = 1 TO 16
        vf$ = STR$(gum%)
        vf$ = MID$(vf$, 2, LEN(vf$))
        vf$ = nf$ + vf$
        OPEN vf$ FOR OUTPUT AS #gum%
        FOR zlazo& = gum% TO zum.conv& STEP 16
            GOS% = PEEK((zlazo& - 1) * 2)
            GOR% = PEEK((zlazo& - 1) * 2 + 1)
            CHANNEL = start.channel + ((zlazo& - 1) MOD nchan)
            IF CHANNEL >= number.channels THEN CHANNEL = CHANNEL -
number.channels
                WRITE #(CHANNEL + 1), GOS%, GOR%
            NEXT zlazo&
        CLOSE #gum%
    NEXT gum%
640  y$ = "N"
    ''
    IF y$ = "N" OR y$ = "n" THEN GOTO 650
    IF y$ = "Y" OR y$ = "y" THEN GOTO 400
    ''
    GOSUB 800: GOTO 640
650  IF SWT = 0 THEN SOUND 494, 15
    LOCATE 20, 23
    PRINT "PROCESO FINALIZADO"
    GOTO 1000
    '' *****
    '' *****
700  ''
    '' Pide el rango de la Tarjeta.
    ''
    PRINT
    y$ = "B"
    IF y$ = "B" OR y$ = "b" THEN GOTO 710
    IF y$ = "U" OR y$ = "u" THEN GOTO 720
    ''
    PRINT : PRINT "Por favor, responda sólo con 'B' o 'U'."
    GOTO 700
710 ''
    '' Rango bipolar y offset
    ''
    RANGE = BIP.RANGE: OFFSET = BIP.OFFSET: RETURN
720 ''
    '' Rango unipolar y offset.
    ''
    RANGE = UNI.RANGE: OFFSET = UNI.OFFSET: RETURN
    ''

```

```

'' Pide la configuración de canales.
'',
730  y$ = "S"
     IF y$ = "S" OR y$ = "s" THEN GOTO 740
     IF y$ = "D" OR y$ = "d" THEN GOTO 750
     PRINT : PRINT "Por favor, responda con 'S' o 'D'."
     GOTO 730
'',
'' Número de canales referenciales.
'',
740  number.channels = SE.CHANNELS: RETURN
'',
'' Numero de canales diferenciales..
'',
750  number.channels = DI.CHANNELS: RETURN
'',
'' Responda 'Y' or 'N'.
'',
800  PRINT : PRINT "Por favor, responda 'Y' or 'N'."
     RETURN
'',
'' Error Fatal en la tarjeta.
'',
900  PRINT
     PRINT "ERROR EN LA TARJETA DE ADQUISICION"
     PRINT "EL VALOR DEL REGISTRO DE ESTADOS ES "; HEX$(STATUS); "
HEXADECIMAL"
     PRINT : BEEP: BEEP: GOSUB 910
     PRINT "LOS VALORES DE LOS REGISTROS DE ERROR SON:"
     PRINT "      BYTE 1 - "; HEX$(ERROR1); " HEXADECIMAL"
     PRINT "      BYTE 2 - "; HEX$(ERROR2); " HEXADECIMAL"
     PRINT : GOTO 1000
910  ''
     '' Lee el registro de error
     ''
     OUT COMMAND.REGISTER, CSTOP: TEMP = INP(DATA.REGISTER)
     ''
     WAIT STATUS.REGISTER, COMMAND.WAIT
     OUT COMMAND.REGISTER, CERROR
     ''
     WAIT STATUS.REGISTER, READ.WAIT
     ERROR1 = INP(DATA.REGISTER)
     WAIT STATUS.REGISTER, READ.WAIT
     ERROR2 = INP(DATA.REGISTER)
     RETURN
     '' *****
     ''
     '' *****
     '' Regresa al menú principal si se quiere otra adquisición
     ''
1000 LOCATE 22, 23
     INPUT "DESEA OTRA ADQUISICION(S/N)", dfg$
     IF dfg$ = "S" OR dfg$ = "s" THEN GOTO 200
     '' *****
     ''
     '' *****

```

```

    ' ' Desactiva la lectura de teclas de cursor, ajusta color
    ' ' Limpia la memoria y sale al sistema.
    ' '
1100  KEY(11) OFF
      KEY(14) OFF
      KEY(15) OFF
      af$ = "COLOR 7"
      GOSUB 10
      CLEAR
      SYSTEM
END
    ' ' *****
    ' ' FIN DE LA EJECUCION DEL PROGRAMA
    ' ' *****
y$ = "N"
IF y$ = "Y" OR y$ = "y" THEN RUN
IF y$ = "N" OR y$ = "n" THEN GOTO 1200
' '
PRINT : PRINT "Por favor, responda 'Y' or 'N'."
GOTO 1000
1200  ' '
      y$ = "N"
      IF y$ = "Y" OR y$ = "y" THEN RUN MENU$
      IF y$ = "N" OR y$ = "n" THEN GOTO 1300
      ' '
      PRINT : PRINT "Por favor responda 'Y' or 'N'."
      GOTO 1200
1300  END
    ' ' *****
    ' '
    ' ' *****
    ' ' Detecta si se intenta sobrescribir un fichero existente
    ' '
40    IF ERR = 58 THEN
      IF (xrx > .5) THEN RESUME
      BEEP: BEEP
      CLS
      LOCATE 12, 23
      PRINT "FICHERO YA EXISTE"
      LOCATE 14, 23
41    INPUT "SOBREESCRIBIR (S/N)", dfg$
      IF dfg$ <> "s" AND dfg$ <> "S" AND dfg$ <> "N" AND dfg$ <> "n"
THEN GOTO 41
      IF dfg$ = "S" OR dfg$ = "s" THEN
        RESUME
      END IF
      IF dfg$ = "N" OR dfg$ = "n" THEN
50    CLS
      LOCATE 12, 23
      INPUT "NOMBRE DEL FICHERO(8 caracteres maximo) ", nf$
      IF ((LEN(nf$) > 8) OR (LEN(nf$) < 1)) THEN GOTO 50
      GOTO 630
      END IF
      ELSE
      CLS
      LOCATE 12, 23
      PRINT "ERROR"

```

```

        COLOR 7, 0, 0
    END IF
END
', *****
',
', *****
', Nueva posición cuando se sube con el cursor
',
80     IF pf% > 1 THEN
        pf% = pf% - 1
    END IF
    GOTO 82
', *****
',
', *****
', Nueva posición cuando se baja con el cursor
',
81     IF pf% < lm% THEN
        pf% = pf% + 1
    END IF
', *****
',
', *****
', Visualización del menú con la x marcando la opción elegida
',
82     LOCATE 1, 1
        FOR T% = 1 TO pf% - 1
            PRINT " "
        NEXT T%
        PRINT "x"
        FOR T% = pf% + 1 TO lm%
            PRINT " "
        NEXT T%
RETURN
', *****
',
', *****
', Llamada a comandos del dos
',
10     SHELL af$
RETURN
', *****

```

APÉNDICE C

PROGRAMA DE FILTRADO

## C PROGRAMA DE FILTRADO

```

REM *****
REM PROGRAMA : FILTRO50.BAS
REM FECHA    : 2-2-1990
REM PROPOSITO: Filtrar la componente de 50 Hz de la red de las señales
REM          a analizar. Elimina espacios en blancos entre numeros
REM *****

```

```

DIM cy(2048), y(2048)
CLS
COLOR 14, 0, 0
REM *****
REM ***** PREGUNTA DATOS DEL FICHERO A FILTRAR *****
REM *****
INPUT "nombre del fichero sin filtrar      ="; nf$
INPUT "nombre del fichero filtrado        ="; nff$
10 INPUT "escala (a= 1.25,b= 2.5,c= 5,d= 10 ) "; escal$
    SELECT CASE escal$
    CASE "a", "A"
        escala = 1.25
    CASE "b", "B"
        escala = 2.5
    CASE "c", "C"
        escala = 5
    CASE "d", "D"
        escala = 10
    CASE ELSE
        GOTO 10
    END SELECT
IF nff$ = "" THEN nff$ = nf$

```

```

REM *****
REM ***** PROGRAMA PRINCIPAL *****
REM *****
FOR canal = 1 TO 16
    c$ = STR$(canal)
    c$ = LTRIM$(c$)
    fichero$ = nf$ + c$
    filtrado$ = nff$ + c$
    GOSUB filtro
    PRINT "filtrado canal :"; canal
NEXT
REM *****
END

```

```

filtro:
REM *****
REM ***** LECTURA DE FICHERO *****
REM *****
OPEN fichero$ FOR INPUT AS #1
i = 0
WHILE NOT EOF(1)

    INPUT #1, bytebajo%, bytealto%
    configuracion = bytealto% * 256 + bytebajo%

```

```

    voltaje = (bytealto% - 16 * (INT(bytealto% / 16))) * 256 + bytebajo%
    voltaje = escala * voltaje / 2048 - escala
    cy(i) = voltaje
    i = i + 1
WEND
CLOSE #1
npuntos = i - 1

REM *****
REM ***** OPERACIÓN DE FILTRADO *****
REM *****
y(0) = .9103 * cy(0)
y(1) = .9103 * cy(1) + .9086 * cy(0) - .8784 * y(0)
y(2) = .9103 * cy(2) + .9086 * cy(1) + .0003 * cy(0) - .8784 * y(1)

FOR j = 3 TO npuntos
y(j) = .9103 * cy(j) + .9086 * cy(j - 1) + .0003 * cy(j - 2) - .0003 * cy(j -
3) - .8784 * y(j - 1)
NEXT

REM *****
REM ***** GUARDAR DATOS FILTRADOS *****
REM *****
OPEN filtrado$ FOR OUTPUT AS #2
FOR j = 0 TO npuntos
    d = INT((y(j) + escala) * 2048 / escala)
    b = INT(d / 256)
    c = d - b * 256
    REM PRINT y(j), d, b, c
    REM INPUT z$
    PRINT #2, MID$(STR$(c), 2); ", "; MID$(STR$(b), 2)
NEXT
CLOSE
REM ***** FIN DEL FILTRADO *****
RETURN

```

APÉNDICE D

PROGRAMAS PARA MODELOS AR

## D PROGRAMAS PARA MODELOS AR

```

(*****)
(* FECHA      : 5 ABRIL 1990      *)
(* PROGRAMA  : MINCUAD.P          *)
(* PROPOSITO: Obtener los coeficientes de un modelo AR *)
(*****)

program mincuad(input,output,fichero,fichcoef);
type
  matriz=array[1..2048,1..100] of real;
  vector1=array[1..100] of real;
  vector2=array[1..2048] of real;
var
  c,b,d,npuntos,orden,p,i,j,k,n11,n22,n33: integer;
  x,y,yy: array[1..2048,1..100] of real;
  xt: array[1..100,1..2048] of real;
  escala,factor,voltaje: real;
  aa,bb,cc,dd: matriz;
  ch: array[1..3] of char;
  fichero,fichcoef: text;
(*****)

procedure inv(n: integer;var a1,a2:matriz);
(*****)
(** procedimiento para invertir matrices **)
(** que sean SIMETRICAS **)
(*****)
label
  10;
type
  alo=array[1..100] of real;
  elo=array[1..2048,1..100] of real;
var
  i,j,k: integer;
  t: real;
  a,b: elo;
begin
  for i:=1 to n do
    for k:=1 to n do
      begin
        a[i,k]:=a1[i,k];
        if i=k
          then b[i,k]:=1;
        if i<>k
          then b[i,k]:=0;
      end;
    for k:=1 to n-1 do
      begin
        if a[k,k]=0 then
          begin
            for i:=k+1 to n do
              if a[i,i]<>0 then
                begin
                  for j:=k to n do
                    begin

```

```

                                t:=a[i,j];
                                a[i,j]:=a[k,j];
                                a[k,j]:=t;
                                t:=b[i,j];
                                b[i,j]:=b[k,j];
                                b[k,j]:=t;
                                end;
                                goto 10;
                                end;
                                end;
10:   for j:=k+1 to n do
        begin
            t:=a[j,k]/a[k,k];
            for i:=n downto 1 do
                begin
                    a[j,i]:=a[j,i]-a[k,i]*t;
                    b[j,i]:=b[j,i]-b[k,i]*t;
                end;
            end;
            end;
            for i:=n downto 2 do
                for j:=i-1 downto 1 do
                    for k:=1 to n do
                        b[j,k]:=b[j,k]-b[i,k]*a[j,i]/a[i,i];
                    end;
                end;
            end;
            for i:=1 to n do
                for j:=1 to n do
                    a2[i,j]:=b[i,j]/a[i,i];
                end;
            end;
        end;
end;

```

```

(*****
(***** PROGRAMA PRINCIPAL *****)
(*****
begin
write('orden=');
readln(orden);
write('npuntos=');
readln(npuntos);
write('n3=');
readln(n3);
write('escala = ');
readln(escala);
factor:=escala/2048;

(*****
(***** LECTURA DE FICHERO *****)
reset(fichero);
for i:=1 to npuntos+1 do
begin
    readln(fichero,c,ch[1],ch[2],ch[3],b);
    d:=(b-16*trunc(b/16))*256+c;
    voltaje:=factor*d-escala;
    y[i,1]:=voltaje;
end;
(*****
(*****

```

```

(** FORMACION DE LA MATRIZ X A PARTIR DEL ***)
(** VECTOR DE DATOS Y ***)
n22:=npuntos-orden+1;
n11:=orden;
for i:=orden+1 to npuntos+1 do
begin
  voltaje:=y[i,1];
  yy[i-orden,1]:=voltaje;
  for j:=1 to orden do
  begin
    voltaje:=y[i-j,1];
    x[i-orden,j]:=voltaje;
  end;
end;
(*****
(***** TRASPUESTA DE LA MATRIZ X *****)
(*****
for i:=1 to n11 do
  for j:=1 to n22 do
  begin
    xt[i,j]:=x[j,i];
  end;

(*****
(***** MULTIPLICAR XT * X *****)
(*****
for i:=1 to n11 do
  for j:=1 to n11 do
  begin
    aa[i,j]:=0;
    for k:=1 to n22 do
      aa[i,j]:=aa[i,j]+xt[i,k]*x[k,j];
      (* writeln('aa =',aa[i,j],i,j); *)
    end;
  end;
writeln('multiplicado xt*x');

(*****
(***** MULTIPLICAR XT * Y *****)
(*****
for i:=1 to n11 do
  for j:=1 to n33 do
  begin
    bb[i,j]:=0;
    for k:=1 to n22 do
      bb[i,j]:=bb[i,j]+xt[i,k]*yy[k,j];
      (* writeln('bb =',bb[i,j]); *)
    end;
  end;
writeln('multiplicado xt * yy');
inv(n11,aa,cc);
writeln('hallada la inversa');

(*for i:=1 to n11 do *)
(*for j:=1 to n11 do *)
(*  writeln('cc =',cc[i,j]); *)

```

```

(*****
(***** MULTIPLICAR A-1 * B *****)
(*****
rewrite(fichcoef);
for i:=1 to n11 do
  for j:=1 to n33 do
    begin
      dd[i,j]:=0;
      for k:=1 to n11 do
        dd[i,j]:=dd[i,j]+cc[i,k]*bb[k,j];
        writeln(fichcoef,dd[i,j]);
      end;
    end;
close(fichcoef,'save');
end.
(*****
(*****      FIN DEL PROGRAMA      *****)
(*****

```

---

```

/*****

```

```

PROGRAMA : PREDICE.C

```

```

FECHA   : 14 FEBRERO 1990

```

```

PROPOSITO: Este programa predice el valor que toma la señal
           en cada momento, a partir de los coeficientes de
           de un modelo AUTOREGRESIVO ( que se leen del
           fichero fich2) y de los primeros valores de la
           la señal (que se leen del fichero fich1).

```

```

*****/

```

```

#include <stdio.h>

```

```

main()

```

```

{

```

```

int b,c,d,i,p,j;

```

```

float B[20],y[2048],yp[2048],voltaje,escala,suma,e[2048],factor,xx,yy;

```

```

float *t;

```

```

char fich1[13],fich2[13],fich3[13],fich4[13],fich5[13],fich6[13];

```

```

FILE *ifp,*ofp1,*ofp2,*ofp3,*ofp4,*fopen();

```

```

/*****

```

```

/***** ENTRADA DE DATOS POR TECLADO *****/

```

```

/*****

```

```

printf("\ntamaño de int  = %d bytes",sizeof(int));

```

```

printf("\ntamaño de float= %d bytes",sizeof(float));

```

```

printf("\nfichero      de      datos      = ");

```

```

scanf("%s",fich1);

```

```

printf("\nfichero      de      coeficientes      = ");

```

```

scanf("%s",fich2);

```

```

printf("\nfichero      predicho      -eje x- = ");

```

```

scanf("%s",fich3);

```

```

printf("\nfichero      predicho      -eje y- = ");

```

```

scanf("%s",fich4);

```

```

printf("\nfichero      valores      reales      -eje x- = ");

```

```
scanf("%s",fich5);
printf("\nfichero      valores      reales      -eje y- = ");
scanf("%s",fich6);
printf("\nescala (+/- 10, +/- 5, +/- 2.5, +/- 1.25) = ");
scanf("%f",&escala);
printf("\norden      del      modelo      = ");
scanf("%d",&p);
factor=(escala/2048);
```

```
/*
/***** LECTURA DE FICHEROS *****/
*/
```

```
ifp=fopen(fich1,"r");
for (i=1;i<=2048;i++) {
    fscanf(ifp,"%d , %d",&c,&b);
    d=(b-16*(b/16))*256+c;
    voltaje=factor*d-escala;
    y[i]=voltaje;
```

```
}
fclose(ifp);
ifp=fopen(fich2,"r");
for (i=1;i<=p;i++) {
    fscanf(ifp,"%f",&B[i]);
}
fclose(ifp);
```

```
/*
/**** ASIGNACIÓN DE LOS PRIMEROS PUNTOS ****/
*/
```

```
ofp1=fopen(fich3,"w");
ofp2=fopen(fich4,"w");
ofp3=fopen(fich5,"w");
ofp4=fopen(fich6,"w");
for (i=1;i<=p;i++) {
    yp[i]=y[i];
    e[i]=0;
    xx=i;
    t=&xx;
    for (i=0;i<sizeof(float);i++) {
       putc(t[i],ofp1);
        putc(t[i],ofp3);
    }
    yy=yp[i];
    t=&yy;
    for (i=0;i<sizeof(float);i++) {
        putc(t[i],ofp2);
    }
    yy=y[i];
    t=&yy;
    for (i=0;i<sizeof(float);i++) {
        putc(t[i],ofp4);
    }
}
```

```
/*
/***** PREDICCIÓN DE LA SEÑAL *****/
*/
```

```

/*****/
for (i=p+1;i<=2048;i++) {
    suma=0;
    for (j=1;j<=p;j++) {
        suma=suma-yp[i-j]*B[j];
    }
    yp[i]=suma;
    e[i]=y[i]-yp[i];
    xx=i;
    t=&xx;
    for (i=0;i<sizeof(float);i++) {
        putc(t[i],ofp1);
        putc(t[i],ofp3);
    }
    yy=yp[i];
    t=&yy;
    for (i=0;i<sizeof(float);i++) {
        putc(t[i],ofp2);
    }
    yy=y[i];
    t=&yy;
    for (i=0;i<sizeof(float);i++) {
        putc(t[i],ofp4);
    }
}
fclose(ofp1);
fclose(ofp2);
fclose(ofp3);
fclose(ofp4);
}
/*****/
/*****      FIN DEL PROGRAMA      *****/
/*****/

```

---

```

(*****)
(* FECHA      : 14 FEBRERO 1990      *)
(* PROGRAMA  : ESTIMAD.P            *)
(* PROPOSITO: Calcula los criterios de error
              AIC, FPE, MDL y Error cuadrático*)
(*****)
program estimad(input,output,file1,file2);
var
    N,i,j : integer;
    ep,rp3,fpe,aic,mdl : real;
    file1,file2 : text;

(*****)
(*****      LECTURA DE FICHERO DE ERROR      *****)
(*****)
begin
write('orden = ');

```

```

readln(j);
write('npuntos = ');
readln(N);
reset(file1);
rewrite(file2);
rp3:=0;
i:=0;
while (i < N) do
begin
    read(file1,ep);
    rp3:=rp3+ep*ep;
    i:=i+1;
end;
close(file1);
(*****
(*****
(** cálculo de los criterios de error **)
(*****
N:=i;
rp3:=rp3/N;
fpe:=rp3*(N+j+1)/(N-(j+1));
aic:=N*ln(rp3)+2*j;
mdl:=N*ln(rp3)+j*ln(N);

(*****
(** ESCRITURA DE LOS FICHEROS CON LOS **)
(** CRITERIOS DE ERROR **)
(*****
writeln(file2,'1',rp3);
writeln(file2,'2',fpe);
writeln(file2,'3',aic);
writeln(file2,'4',mdl);
close(file2,'save');
end.
(*****
(***** FIN DEL PROGRAMA *****)
(*****

```

---

```

(*****
(* FECHA : 14 FEBRERO 1990 *)
(* PROGRAMA : CONV2B.P *)
(* PROPOSITO: Convierte un fichero en modo
ASCII en un fichero en BINARIO *)
(*****
program convt2b(input,output,fich1,fich2);
var
    x : real;
    nombre1 : string[12];
    nombre2 : string[12];
    fich1 : text;

```

```

    fich2 : file of real;
begin
    reset(fich1);
    rewrite(fich2);
    while not eof(fich1) do
        begin
            readln(fich1,x);
            write(fich2,x);
        end;
    close(fich1);
    close(fich2,'save');
end.
(*****
*****          FIN DEL PROGRAMA          *****
*****)

```

---

```

(*****
(* FECHA      : 14 FEBRERO 1990          *)
(* PROGRAMA  : CONVBT2T.P              *)
(* PROPOSITO: Convierte un fichero de datos
  ASCII con formato Bytel,Byte2 a un fichero
  con Voltaje                          *)
*****)
program convbt2t(input,output,fichero,fichsal);
var
    c,b,d,npuntos,i:integer;
    voltaje,factor,escala:real;
    ch:array[1..3] of char;
    fichero,fichsal:text;

(*****
***** PROGRAMA PRINCIPAL *****
*****)
begin
    escala:=10;
    factor:=escala/2048;
    write('npuntos=');
    readln(npuntos);
    reset(fichero);
    rewrite(fichsal);

    for i:=1 to npuntos do
        begin
            readln(fichero,c,ch[1],ch[2],ch[3],b);
            d:=(b-16*trunc(b/16))*256+c;
            voltaje:=factor*d-escala;
            writeln(fichsal,voltaje);
        end;

    close(fichsal,'save');
end.

```

APÉNDICE E

PROGRAMAS PARA EXTRACCIÓN DE

PARÁMETROS DE UNA MUESTRA

## E PROGRAMAS PARA EXTRACCIÓN DE PARÁMETROS DE UNA MUESTRA

```
# PROGRAMA : GLOBAL #
# FECHA : 7 DICIEMBRE 1990 #
# PROPOSITO: Añadir el prefijo global a los #
# ficheros .m para que el MATLAB #
# considere las variables como #
# globales. #
```

```
for i in `ls x*.m`
do
```

```
    b="$i"2
    echo $i
    echo $b
    cat global $i > $b;
    rm $i
    mv $b $i
```

```
done
```

```
# #
# FIN DEL PROGRAMA #
# #
```

```
% PROGRAMA : MTOMAT.M
% FECHA : 7 DICIEMBRE 1990
% PROPOSITO: Convertir los ficheros de datos .m
% en ficheros de datos .MAT
```

```
function y=mtomat(x)
```

```
    x
    a=['x' x]
    b=['0' x]
    eval(a)
    c=[ 'save ' a ' pa pr' ]
    eval(c)
    occi
    d=[ 'save ' b ' PA14 PR14 PA16 PR16' ]
    eval(d)
    clear
```

```
%
% FIN DEL PROGRAMA
%
```

```
% PROGRAMA : MATTOMAX.M
% FECHA : 7 DICIEMBRE 1990
% PROPOSITO: Extrae del fichero .MAT el valor de las
```

```
%          potencias absolutas y relativas del canal
%          16 en los máximos de la potencia absoluta
%          en las bandas DELTA, THETA, ALFA1 y ALFA2
%          y en los máximos de la potencia relativa
%          en las bandas ALFA1 y ALFA2.

function mattomax(x)
    b=['O' x]
    c=['load ' b]
    eval(c)

    % Potencias Absolutas y relativas en el máximo de la potencia
    % absoluta en la banda DELTA
    [Y,I]=max(PA16(:,3));
    pa16=PA16(I,:);
    pr16=PR16(I,:);
    d=['save ' 'md16' x ' pa16 pr16 I']
    eval(d)

    % Potencias Absolutas y relativas en el máximo de la potencia
    % absoluta en la banda THETA
    [Y,I]=max(PA16(:,4));
    pa16=PA16(I,:);
    pr16=PR16(I,:);
    d=['save ' 'mt16' x ' pa16 pr16 I']
    eval(d)

    % Potencias Absolutas y relativas en el máximo de la potencia
    % absoluta en la banda ALFA1
    [Y,I]=max(PA16(:,5));
    pa16=PA16(I,:);
    pr16=PR16(I,:);
    d=['save ' 'ma116' x ' pa16 pr16 I']
    eval(d)

    % Potencias Absolutas y relativas en el máximo de la potencia
    % absoluta en la banda ALFA2
    [Y,I]=max(PA16(:,6));
    pa16=PA16(I,:);
    pr16=PR16(I,:);
    d=['save ' 'ma216' x ' pa16 pr16 I']
    eval(d)

    % Potencias Absolutas y relativas en el máximo de la potencia
    % relativa en la banda ALFA1
    [Y,I]=max(PR16(:,3));
    pa16=PA16(I,:);
    pr16=PR16(I,:);
    d=['save ' 'mar116' x ' pa16 pr16 I']
    eval(d)

    % Potencias Absolutas y relativas en el máximo de la potencia
    % relativa en la banda ALFA2
    [Y,I]=max(PR16(:,4));
    pa16=PA16(I,:);
    pr16=PR16(I,:);
    d=['save ' 'mar216' x ' pa16 pr16 I']
```

```

eval(d)
%
%           FIN DEL PROGRAMA
%

```

---

```

% PROGRAMA : MAXIMOS.M
% FECHA    : 7 DICIEMBRE 1990
% PROPOSITO: Extrae de los ficheros de máximos generados por
%           MATTOMAX los valores correspondientes al canal
%           16 (Occipital Derecho).

```

```

function maximos(x)

%*****
d=['load ' 'MABD16' ]
eval(d)
d=['load ' 'md16' x ]
eval(d)
OAT=[OAT
pa16 I];
ORT=[ORT
pr16 I];
clear pa16 pr16 I d
d=['save ' 'MABD16 OAT ORT' ]
eval(d)
clear OAT ORT

%*****
d=['load ' 'MABT16' ]
eval(d)
d=['load ' 'mt16' x ]
eval(d)
OAT=[OAT
pa16 I];
ORT=[ORT
pr16 I];
clear pa16 pr16 I
d=['save ' 'MABT16 OAT ORT' ]
eval(d)
clear OAT ORT

%*****
d=['load ' 'MABA116' ]
eval(d)
d=['load ' 'ma116' x ]
eval(d)
OAT=[OAT
pa16 I];
ORT=[ORT
pr16 I];
clear pa16 pr16 I

```

```
d=['save ' 'MABA116 OAT ORT' ]
eval(d)
clear OAT ORT

%*****
d=['load ' 'MABA216' ]
eval(d)
d=['load ' 'ma216' x ]
eval(d)
OAT=[OAT
pa16 I];
ORT=[ORT
pr16 I];
clear pa16 pr16 I
d=['save ' 'MABA216 OAT ORT' ]
eval(d)
clear OAT ORT

%*****
d=['load ' 'MARA116' ]
eval(d)
d=['load ' 'mar116' x ]
eval(d)
OAT=[OAT
pa16 I];
ORT=[ORT
pr16 I];
clear pa16 pr16 I
d=['save ' 'MARA116 OAT ORT' ]
eval(d)
clear OAT ORT

%*****
d=['load ' 'MARA216' ]
eval(d)
d=['load ' 'mar216' x ]
eval(d)
OAT=[OAT
pa16 I];
ORT=[ORT
pr16 I];
clear pa16 pr16 I
d=['save ' 'MARA216 OAT ORT' ]
eval(d)
clear
%*****
%
%           FIN DEL PROGRAMA
%
```

---

```
% PROGRAMA : TOPOD.M
```

```

% FECHA      : 7 DICIEMBRE 1990
% PROPOSITO: Lee los ficheros generados por MTOMAT y extrae
%            los valores de las potencias absolutas y rela-
%            tivas de los canales 14 y 16 cuando la banda
%            DELTA es máxima (su potencia absoluta)

function topod(nombre)

    b=['load O' nombre];
    c=['load x' nombre]
    bb=['load TOPOGD'];
    eval(b);

    [Y,I]=max(PA16(:,3));
    clear Y PA16 PA14 PR16 PR14
    eval(c);

    for k=0:15
        fila=k*25+I;
        PATG1(k+1)=pa(fila,3);
        PRIG1(k+1)=pr(fila,1);
        PATG2(k+1)=pa(fila,4);
        PRIG2(k+1)=pr(fila,2);
        PATG3(k+1)=pa(fila,5);
        PRIG3(k+1)=pr(fila,3);
        PATG4(k+1)=pa(fila,6);
        PRIG4(k+1)=pr(fila,4);
    end
    eval(bb)

    OAT1=[OAT1; PATG1];
    OAT2=[OAT2; PATG2];
    OAT3=[OAT3; PATG3];
    OAT4=[OAT4; PATG4];
    ORT1=[ORT1; PRIG1];
    ORT2=[ORT2; PRIG2];
    ORT3=[ORT3; PRIG3];
    ORT4=[ORT4; PRIG4];
    d=['save TOPOGD OAT1 OAT2 OAT3 OAT4 ORT1 ORT2 ORT3 ORT4']
    eval(d);

%
%           FIN DEL PROGRAMA
%

```

---

```

% PROGRAMA : TOPOT
% FECHA    : 7 DICIEMBRE 1990
% PROPOSITO: Lee los ficheros generados por MTOMAT y extrae
%            los valores de las potencias absolutas y rela-
%            tivas de los canales 14 y 16 cuando la banda
%            THETA es máxima (su potencia absoluta)
% PROPOSITO:

```

```

%
function topot(nombre)

    b=['load O' nombre];
    c=['load x' nombre];
    bb=['load TOPOGT'];
    eval(b);

    [Y,I]=max(PA16(:,4));
    clear Y PA16 PA14 PR16 PR14
    eval(c);

    for k=0:15
        fila=k*25+1;
        PATG1(k+1)=pa(fila,3);
        PRTG1(k+1)=pr(fila,1);
        PATG2(k+1)=pa(fila,4);
        PRTG2(k+1)=pr(fila,2);
        PATG3(k+1)=pa(fila,5);
        PRTG3(k+1)=pr(fila,3);
        PATG4(k+1)=pa(fila,6);
        PRTG4(k+1)=pr(fila,4);
    end
    eval(bb)

    OAT1=[OAT1; PATG1];
    OAT2=[OAT2; PATG2];
    OAT3=[OAT3; PATG3];
    OAT4=[OAT4; PATG4];
    ORT1=[ORT1; PRTG1];
    ORT2=[ORT2; PRTG2];
    ORT3=[ORT3; PRTG3];
    ORT4=[ORT4; PRTG4];
    d=['save TOPOGT OAT1 OAT2 OAT3 OAT4 ORT1 ORT2 ORT3 ORT4'];
    eval(d);

%
%           FIN DEL PROGRAMA
%

```

---

```

% PROGRAMA : TOPO.M
% FECHA    : 7 DICIEMBRE 1990
% PROPOSITO: Lee los ficheros generados por MTOMAT y extrae
%           los valores de las potencias absolutas y rela-
%           tivas de los canales 14 y 16 cuando la banda
%           ALFA1 es máxima (su potencia absoluta)

```

```

function topo(nombre)

    b=['load O' nombre];
    c=['load x' nombre];

```

```

bb=['load TOPOGRAFIA'];
eval(b);

[Y,I]=max(PA16(:,5));
clear Y PA16 PA14 PR16 PR14
eval(c);

for k=0:15
    fila=k*25+1;
    PATG1(k+1)=pa(fila,3);
    PRTG1(k+1)=pr(fila,1);
    PATG2(k+1)=pa(fila,4);
    PRTG2(k+1)=pr(fila,2);
    PATG3(k+1)=pa(fila,5);
    PRTG3(k+1)=pr(fila,3);
    PATG4(k+1)=pa(fila,6);
    PRTG4(k+1)=pr(fila,4);
end
eval(bb)

OAT1=[OAT1; PATG1];
OAT2=[OAT2; PATG2];
OAT3=[OAT3; PATG3];
OAT4=[OAT4; PATG4];
ORT1=[ORT1; PRTG1];
ORT2=[ORT2; PRTG2];
ORT3=[ORT3; PRTG3];
ORT4=[ORT4; PRTG4];
d=['save TOPOGRAFIA OAT1 OAT2 OAT3 OAT4 ORT1 ORT2 ORT3 ORT4']
eval(d);

%
%           FIN DEL PROGRAMA
%
```

---

```

% PROGRAMA : TOPOA2.M
% FECHA    : 7 DICIEMBRE 1990
% PROPOSITO: Lee los ficheros generados por MTOMAT y extrae
%            los valores de las potencias absolutas y rela-
%            tivas de los canales 14 y 16 cuando la banda
%            ALFA2 es máxima (su potencia absoluta)
```

```

function topoa2(nombre)

b=['load O' nombre];
c=['load x' nombre];
bb=['load TOPOGA2'];
eval(b);

[Y,I]=max(PA16(:,6));
clear Y PA16 PA14 PR16 PR14
eval(c);
```

```
for k=0:15
    fila=k*25+I;
    PATG1(k+1)=pa(fila,3);
    PRTG1(k+1)=pr(fila,1);
    PATG2(k+1)=pa(fila,4);
    PRTG2(k+1)=pr(fila,2);
    PATG3(k+1)=pa(fila,5);
    PRTG3(k+1)=pr(fila,3);
    PATG4(k+1)=pa(fila,6);
    PRTG4(k+1)=pr(fila,4);
end
eval(bb)

OAT1=[OAT1; PATG1];
OAT2=[OAT2; PATG2];
OAT3=[OAT3; PATG3];
OAT4=[OAT4; PATG4];
ORT1=[ORT1; PRTG1];
ORT2=[ORT2; PRTG2];
ORT3=[ORT3; PRTG3];
ORT4=[ORT4; PRTG4];
d=['save TOPOGA2 OAT1 OAT2 OAT3 OAT4 ORT1 ORT2 ORT3 ORT4']
eval(d);

%
%           FIN DEL PROGRAMA
%
```

APÉNDICE F

PROGRAMA DE PROCESAMIENTO INTERACTIVO

## F PROGRAMA DE PROCESAMIENTO INTERACTIVO

```

/* PROGRAMA : VARIABLE.H
FECHA      : 7-MARZO-1991
PROPOSITO: declaraciones de variables */

#define NUM OPCIONES 10
#define LARGO CADENA 50
extern short VC[3],LI,v,notenum,c1[512],b1[512],t;
extern int txt_color,cc,bb,d,ERR,num_menu,per,dexp;
extern char
opcions[NUM OPCIONES][LARGO CADENA],devs[20],dev1s[20],hs[1],controls[10],adx
s[7],dfgs,NFs[13];
extern char
existes[2],marcas[2],cadena[LARGO CADENA],a1[2],cs[3],vfs[3],file[13];
extern double
matriz1[2048],matriz2[2048],matriz3[512],matriz4[512],matriz5[512],matriz6[51
2];
extern double escala,DIVISION,lii;

/***** variables de control *****/
extern int
el,pf,lm,qx,cer,pif,conta,opcion,i,j,e,ec,ee,status,punto_retorno,adf;
extern int ch,ch1,ch2,count,*dec,*sign,modo,eko;

/***** variables de forma de onda *****/
extern int tuptype,lim,delkeep;
extern long dimlen,dimenco,led,largo,begin,comienzo,fin;
extern double *mean1,*std1,*var1,*rms1,media;
extern double desv_std,varianza,variabilidad,media2[10];

/***** variables de la rutina de GRAFICOS *****/
extern char modos[30];
extern int axis;
extern double f,maxey,miney;

/***** variables de FFT *****/
extern int aa[10];
extern char nombrebandas[10][20];

extern int setno,xsetno,ysetno,curvno,xstyle,ystyle,clr,border,ltype;
extern int lcolor,xcolor,ycolor;
extern char nombre[81],edad[3],fecha[10],diagnostico[81];
extern char
comentarios[81],term[3],*dirvar,path_buffer[40],string[40],dir[40];
extern long *maxloc,*minloc,maxpos,minpos,VV;
extern double *maxval,*minval,minvalor,maxvalor;
extern short LI2,v2,lii2;
extern int cer2,ll,NL;
extern double In[10],It;
extern FILE *fp;
extern WAVEFORM *wave,*wd1,*wd2,*wd3,*subwave,*histonda,*re,*im,*integ;
extern WAVEFORM *fase,*fase1,*fase2;

```

```

/* PROGRAMA : macros.H
FECHA      : 07-MARZO-1990
PROPOSITO: Directivas, Pragmas y declaración de variables
           para el programa procesa4.c
*/

#include <stdio.h>
#include <tekspd.h>
#include <graph.h>
#include <conio.h>
#include <ctype.h>
#include <string.h>
#include <process.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <malloc.h>
#include <fcntl.h>
#include <sys/types.h>
#include <sys/stat.h>
#include <io.h>

#define LARGO_CADENA          50
#define NUM OPCIONES         10
#define TEXTO_AMARILLO      14
#define FONDO_NEGRO         (long)0
#define FONDO_AZUL          (long)1
#define ES_CORRELACION      (ec==4)
#define ES_UN_CANAL         (cer==1)
#define SON_DOS_CANALES     (cer==2)
#define PRIMER_CANAL        j=1
#define SEGUNDO_CANAL       j=2
#define HASTA_ULTIMO_CANAL  j<=cer
#define INCREMENTA_CANAL    j++
#define CANAL_1              (j==1)
#define CANAL_2              (j==2)
#define PULSA_UNA_TECLA     chl=getch();
#define ABRE_FICHERO_LECTURA fp=fopen(path_buffer,"r");
#define LEE_DATOS_ASCII     fscanf(fp,"%d,%d",&cc,&bb);
#define CIERRA_FICHERO      fclose(fp);
#define ES_AUTOESCALADO     (ee==7)
#define OPCION_FUERA_DE_RANGO ((e<1);;(e>lm))
#define LIMPIA_PANTALLA     printf("\x1b[2;37;44m\x1b[2J");
#define COLOR_OPCION_ELEGIDA printf("\x1b[2;37;41m");
#define COLOR_OPCION        printf("\x1b[2;30;46m");
#define COLOR_SISTEMA       printf("\x1b[2;37;40m\x1b[2J");
#define CURSOR_12_23        printf("\x1b[12;23H");
#define CURSOR_13_37        printf("\x1b[13;37H");
#define CURSOR_13_38        printf("\x1b[13;38H");
#define CURSOR_16_23        printf("\x1b[16;23H");
#define CURSOR_17_23        printf("\x1b[17;23H");
#define CURSOR_8_25         printf("\x1b[8;25H");
#define CURSOR_6_23         printf("\x1b[6;23H");
#define CURSOR_8_23         printf("\x1b[8;23H");
#define CURSOR_11_23        printf("\x1b[11;23H");
#define CURSOR_13_23        printf("\x1b[13;23H");
#define CURSOR_15_23        printf("\x1b[15;23H");
#define CURSOR_17_23        printf("\x1b[17;23H");
#define CURSOR_19_23        printf("\x1b[19;23H");

```

```

/* PROGRAMA   : HOSPI_90.C                               */
/* FECHA      : 07-MARZO-1991                             */
/* PROPOSITO  : Definición de funciones para el programa Procesa4.c */

#include "macros.h"

short VC[3],LI,v,notenum,c1[512],b1[512],t;
int txt_color,cc,bb,d,ERR,num_menu,per,dexp;
char
opciones[NUM OPCIONES][LARGO_CADENA],devs[20],dev1s[20],hs[1],controls[10],adx
s[7],dfgs,NFs[13];
char existes[2],marcas[2],cadena[LARGO_CADENA],a1[2],cs[3],vfs[3],file[13];
double
matriz1[2048],matriz2[2048],matriz3[512],matriz4[512],matriz5[512],matriz6[51
2];
double escala,DIVISION,lii;

/***** variables de control *****/
int el,pf,lm,qx,cer,pif,conta,opcion,i,j,e,ec,ee,status,adf;
int ch,ch1,ch2,count,*dec,*sign,modo,eko,extension,ll;
int existe_ficha,amplificacion;
/***** variables de forma de onda *****/
int tuptype,lim,delkeep;
long dimlen,dimlenco,led,largo,begin,comienzo,fin;
double *mean1,*std1,*var1,*rms1,media;
double desv_std,varianza,variabilidad,media2[10];
WAVEFORM *wave,*wd1,*wd2,*wd3,*fase,*fase1,*fase2;

/***** variables de la rutina de GRAFICOS *****/
char modos[30];
int axis,ejescolor;
double f,maxey,miney;

/***** variables de FFT *****/
int aa[10];
char nombrebandas[10][20];

FILE *fopen(),*fp;
int setno,xsetno,ysetno,curvno,xstyle,ystyle,clr,border,ltype;
int lcolor,xcolor,ycolor;
char nombre[81],edad[3],fecha[10],diagnostico[81];
char comentarios[81],term[3],*dirvar,path_buffer[40],string[40],dir[40];
long *maxloc,*minloc,maxpos,minpos,VV;
double *maxval,*minval,minvalor,maxvalor;
WAVEFORM *subwave,*histonda,*re,*im,*integ;
short LI2,v2;
int cer2,ll,BANDA,NL;
double In[10],It;

/*****/
genera_menu() {
    pif=0;
    pf=1;
    opciones();
    LIMPIA_PANTALLA
    pintamenu_ansi();
}

```

```

    teclal_ansi();
}
/*****

/***** menu *****/
general() {
principio:
    genera_menu();
    eligemv: if (pif==0)
        teclal_ansi();
    else {
        e = pf;
        if OPCION_FUERA_DE_RANGO
            goto principio;
        eleccion();
    }
}
/* *****/

opciones() {
    switch(num_menu) {
    case 1:
        extension=22;
        lm=8;
        strcpy(opciones[1], " SELECCION DE DATOS  ");
        strcpy(opciones[2], " LECTURA DE DATOS  ");
        strcpy(opciones[3], " ANALISIS T/F  ");
        strcpy(opciones[4], " INTRODUCIR FICHA  ");
        strcpy(opciones[5], " VISUALIZAR FICHA  ");
        strcpy(opciones[6], " RETORNO AL SISTEMA  ");
        strcpy(opciones[7], " CAMBIO DE DIRECTORIO ");
        strcpy(opciones[8], " MULTICANAL  ");
        break;
    case 2:
        extension=28;
        lm=8;
        strcpy(opciones[1], " REPRESENTACION TEMPORAL  ");
        strcpy(opciones[2], " REPRESENTACION FRECUENCIAL ");
        strcpy(opciones[3], " PARAMETROS ESTADISTICOS  ");
        strcpy(opciones[4], " CORRELACION  ");
        strcpy(opciones[5], " COHERENCIA  ");
        strcpy(opciones[6], " POTENCIA POR TRAMOS  ");
        strcpy(opciones[7], " RETORNO AL MENU PRINCIPAL ");
        strcpy(opciones[8], " RETORNO AL SISTEMA  ");
        break;
    case 3:
        extension=20;
        lm=7;
        strcpy(opciones[1], "+/- .025 M-VOLTIOS");
        strcpy(opciones[2], "+/- .05 M-VOLTIOS");
        strcpy(opciones[3], "+/- .1 M-VOLTIOS");
        strcpy(opciones[4], "+/- .25 M-VOLTIOS");
        strcpy(opciones[5], "+/- .5 M-VOLTIOS");
        strcpy(opciones[6], "+/- 1.0 M-VOLTIOS");
        strcpy(opciones[7], " AUTOESCALADO");
        break;
    case 4:

```

```
extension=16;
lm=3;
strcpy(opcions[1]," 5.12 segundos ");
strcpy(opcions[2]," 2.56 segundos ");
strcpy(opcions[3]," 1.28 segundos ");
break;
case 5:
extension=17;
lm=4;
strcpy(opcions[1]," +/- 10 VOLTIOS");
strcpy(opcions[2]," +/- 5 VOLTIOS");
strcpy(opcions[3]," +/- 2.5 VOLTIOS");
strcpy(opcions[4]," +/- 1.25 VOLTIOS");
break;
case 6:
extension=22;
lm=2;
strcpy(opcions[1]," SALIDA POR PANTALLA ");
strcpy(opcions[2]," SALIDA POR IMPRESORA ");
break;
case 7:
extension=21;
lm=6;
strcpy(opcions[1], " VENTANA RECTANGULAR ");
strcpy(opcions[2], " VENTANA TRIANGULAR ");
strcpy(opcions[3], " VENTANA HANNING ");
strcpy(opcions[4], " VENTANA HAMMING ");
strcpy(opcions[5], " VENTANA BLACKMAN ");
strcpy(opcions[6], " VENTANA FLATTOP ");
break;
case 8:
extension=46;
lm=5;
strcpy(opcions[1], " REPRESENTACION ESPECTRAL CONTINUA [40 Hz] ");
strcpy(opcions[2], " REPRESENTACION ESPECTRAL CONTINUA [50 Hz] ");
strcpy(opcions[3], " REPRESENTACION ESPECTRAL CONTINUA [20 Hz] ");
strcpy(opcions[4], " REPRESENTACION ESPECTRAL POR BANDAS GRAFICA ");
strcpy(opcions[5], " REPRESENTACION ESPECTRAL POR BANDAS NUMERICA ");
break;

case 9:
extension=10;
lm=2;
strcpy(opcions[1]," ALVAR ");
strcpy(opcions[2]," MEDELEC ");
break;
case 10:
extension=20;
lm=3;
strcpy(opcions[1]," POTENCIAS ABSOLUTAS");
strcpy(opcions[2]," POTENCIAS RELATIVAS");
strcpy(opcions[3]," RETORNO A MENU GRAF");
break;
case 11:
extension=13;
lm=5;
strcpy(opcions[1]," 0 - 1 ");
```

```

        strcpy(opcions[2]," 0 - 0.6 ");
        strcpy(opcions[3]," 0 - 0.4 ");
        strcpy(opcions[4]," 0 - 0.2 ");
        strcpy(opcions[5]," AUTOESCALADO");
        break;
    case 12:
        extension=11;
        lm=3;
        strcpy(opcions[1]," 0 - 100 % ");
        strcpy(opcions[2]," 0 - 60 % ");
        strcpy(opcions[3]," 0 - 40 % ");
        break;
    }
    for ( opcion =lm+1;opcion<= NUM OPCIONES; opcion++ ) {
        strcpy(opcions[opcion],"");
    }
}
/*****/

/*****/
eleccion() {
    switch(num_menu) {
    case 3:
        switch (e) {
            case 1:
                maxey = 0.025;
                miney = -0.025;
                ee = 1;
                break;
            case 2:
                maxey = 0.05;
                miney = -0.05;
                ee = 1;
                break;
            case 3:
                maxey = 0.1;
                miney = -0.1;
                ee = 1;
                break;
            case 4:
                maxey = 0.250;
                miney = -0.250;
                ee = 1;
                break;
            case 5:
                maxey = 0.500;
                miney = -0.500;
                ee = 1;
                break;
            case 6:
                maxey = 1;
                miney = -1;
                ee = 1;
                break;
            case 7:
                ee=7;

```

```

        break;
    }
    break;
case 4:
    switch (e) {
        case 1:
            v = 512;
            break;
        case 2:
            v = 256;
            break;
        case 3:
            v = 128;
            break;
    }
    break;
case 5:
    switch (e) {
        case 1:
            escala = 10;
            break;
        case 2:
            escala = 5;
            break;
        case 3:
            escala = 2.5;
            break;
        case 4:
            escala = 1.25;
            break;
    }
    break;
case 6:
    adf=e-1;
    break;
case 7:
    eko=e-1;
    break;
case 8:
    el=e;
    switch(el) {
        case 1:
            strcpy(modos, "");
            DIVISION=2.5;
            /*se toma algo menos de la mitad del espectro*/
            f=40;
            /*para explorar hasta 40 Hz*/
            espectro();
            break;
        case 2:
            strcpy(modos, "");
            DIVISION=2;
            /*se toma la mitad del espectro*/
            f=50;
            /*para explorar hasta 50 Hz*/
            espectro();
    }

```

```
        break;
    case 3:
        strcpy(modos, "");
        DIVISION=5;
        /*se toma la quinta parte          del espectro*/
        f=20;
        /*para explorar hasta 20 Hz*/
        espectro();
        break;
    case 4:
        strcpy(modos, "histo");
        DIVISION=2.5;
        f=40;
        espectro();
        break;
    case 5:
        bandas_num();
        break;
    }
    break;
case 9:
    switch(e) {
        case 1:
            amplificacion=1;
            break;
        case 2:
            amplificacion=2;
            break;
    }
    break;
case 11:
    switch(e) {
        case 1:
            miney=0;
            maxey=1;
            ee=1;
            break;
        case 2:
            miney=0;
            maxey=0.6;
            ee=1;
            break;
        case 3:
            miney=0;
            maxey=0.4;
            ee=1;
            break;
        case 4:
            miney=0;
            maxey=0.2;
            ee=1;
            break;
        case 5:
            ee=7;
            break;
    }
    break;
```

```

case 12:
    switch(e) {
        case 1:
            miney=0;
            maxey=100;
            ee=1;
            break;
        case 2:
            miney=0;
            maxey=60;
            ee=1;
            break;
        case 3:
            miney=0;
            maxey=40;
            ee=1;
            break;
    }
    break;
}
}
}
/*****
/*****

/*****
/*****
pintamenu_ansi()
{
    pif=0;
    COLOR_OPCION

    printf("\x1b[8B");
    printf("\x1b[25C\x09");
    for (ll=1;ll<=extension+4;ll++)
        printf("\xcd");
    printf("\xbb\n");

    if (pf>1) {
        for (opcion=1;opcion<pf;opcion++)
            printf("\x1b[25C\xba %s \xba\n",opcions[opcion]);
    }

    printf("\x1b[25C\xba ");
    COLOR_OPCION_ELEGIDA
    opcion=pf;
    printf("%s",opcions[opcion]);
    COLOR_OPCION
    printf(" \xba\n");
    if (pf <= lm) {
        for (opcion =pf + 1;opcion<= lm; opcion++) {
            printf("\x1b[25C\xba %s \xba\n",opcions[opcion]);
        }
    }
    printf("\x1b[25C\x08");
    for (ll=1;ll<=extension+4;ll++)
        printf("\xcd");
    printf("\xbc");
}

```

```

}
/*****/

/*****/
tecla1_ansi()
{
pregunta:
    PULSA_UNA_TECLA
    switch (ch1) {
    case 0:
        ch2=getch();
        cursor();
        break;
    case 13:
        pif=1;
        return(pif);
        break;
    }
    V6: goto pregunta;
}
/*****/
cursor() {
    switch (ch2) {
    case 72:
        /*** cursor arriba ***/
        if (pf>1) {
            pf=pf-1;
        }
        else {
            pf=pf+lm-1;
        }
        printf("\x1b[H");
        pintamenu_ansi();

        break;
    case 80:
        /*** cursor abajo ***/
        if (pf<lm)
            pf=pf+1;
        else {
            if (pf>lm || pf==lm)
                pf=1;
        }
        printf("\x1b[H");
        pintamenu_ansi();
        break;
    }
}
/*****/

/*****/
menudispositivo(){
    pif=0;
    LIMPIA_PANTALLA
    pf=1;
    num_menu=6;
}

```

```

    general();
}
/*****

/***** Inicializacion de graficos *****/
ini_graf() {
    status=gr_init();
    pregunta2:
    menudispositivo();
    if (adf != 0 && adf != 1)
        goto pregunta2;
    switch (adf) {
        case 0:
            strcpy(devs,"DISPLAY");
            break;
        case 1:
            strcpy(devs,"PRINTER");
            break;
    }
    status=gr_dev(devs);
    if (status !=NOERROR) {
        printf("%d dispositivo de salida 56, %d, %s",status,adf,devs);
        _exit(0); }
    mensajepro();
}
/*****

/*****
abre_graf() {
    gr_reset();
    ejescolor = 1;
    status=gr_axclr(WHITE);
}
/*****

/***** menu Tipo de Ventana *****/
menu_vent() {
prf1:  num_menu=7;
    general();
    if ((eko<0);;(eko>lm-1))
        goto prf1;
}
/* *****/

/* ***** TIPO DE INFORMACION FRECUENCIAL *****/
menu_frec() {
    num_menu=8;
    general();
}
/* *****/

```

```

/* PROGRAMA : INFICHA.C
FECHA      : 7 - Marzo - 1991
PROPOSITO: Lectura de la ficha de datos de un sujeto */

#include "macros.h"

#define ON 1

extern unsigned int codgain;
extern char nombre[81];
extern char edad[3];
extern char fecha[10];
extern char diagnostico[81];
extern char comentarios[81];

void introficha(void){
    int resultado;
    char enter,codigo[3],nombrefich[13],preg[3];
    FILE *fich;

    setcursor(ON);
    resultado=0;
do {
    LIMPIA_PANTALLA
    scanf("%c",&enter);
    printf("Nombre Fichero: ");
    scanf("%[^\n]c",nombrefich,&enter);

    printf("\nGANANCIA : 0- (+/- 10) 1- (+/-5) 2- (+/-2.5) 3- (+/-1.25) ");
    scanf("%[^\n]c",codigo,&enter);

    printf("\nNombre      : ");
    scanf("%[^\n]c",nombre,&enter);

    printf("\nEdad        : ");
    scanf("%[^\n]c",edad,&enter);

    printf("\nFecha       : ");
    scanf("%[^\n]c",fecha,&enter);

    printf("\nDiagnóstico : ");
    scanf("%[^\n]c",diagnostico,&enter);

    printf("\nComentarios : ");
    scanf("%[^\n]c",comentarios,&enter);
    printf("\n¿Está correcta la ficha? (0- no) (1- si) : ");
    scanf("%d",&resultado);
    } while (resultado!=ON);

/*    getch();*/

    strcat(nombrefich, ".inf");
    fich=fopen(nombrefich,"w");
    fprintf(fich,"%s\n",codigo);
    fprintf(fich,"%s\n",nombre);
    fprintf(fich,"%s\n",edad);
    fprintf(fich,"%s\n",fecha);

```

```

    fprintf(fich,"%s\n",diagnostico);
    fprintf(fich,"%s\n",comentarios);
    fclose(fich);

    setcursor(_GCURSOROFF);
}

/* PROGRAMA   : RUTINA.C                               */
/* FECHA      : 7-MARZO-1991                           */
/* PROPOSITO  : Definición de funciones para el programa Procesa4.c
                Directivas, Pragmas y declaración de variables */

#include "macros.h"
#include "variable.h"

char tipo;

inicializa() {
    txt_color=14;
    count=15;
    mean1=&media;
    std1=&desv_std;
    var1=&varianza;
    rms1=&variabilidad;
    notenum=1;
}

/*****/

/*****/
asigna_modos() {
    strcpy(dev1s,"DISPLAY");
    enabl_fpe(ON);
    status=gr_init();
    if (status !=NOERROR) {
        rpt_err(status,": inicializacion de graficos");
        _exit(0); }
}

/*****/
desactiva() {
    free_wf(wd2);
    free_wf(wd1);
    /*Desactivar punto flotante */
    dsabl_fpe();
    COLOR_SISTEMA
    /*heapdump();*/
    pif=0;
    _exit(0);
}

/*****/

notecla2() {
    gr_close();
    if (ERR == 53) {
        CURSOR_16_23
    }
}

```

```

        puts ( "FICHERO NO EXISTE");
    }
    CURSOR_17_23
    puts ( "PULSAR CUALQUIER TECLA");
    qx = 0;
    ch=getch();
}
/**** RESUME menuprincipal****/
/* **** */

/**** */
password() {
    LIMPIA_PANTALLA
    puts( "POR FAVOR, INTRODUCZA EL PASSWORD");
    strcpy(adxs,"");
    strcpy(controls,"");
    for( i = 1;i<= 7;i++) {
        ch1 = getch();
        strnset(a1,ch1,1);
        strcat(adxs,a1);
    }
    if (strcmp(adxs, "4ALFARS")!=0){
        COLOR_SISTEMA
        setcursor(_G_CURSORON);
        puts(" password erroneo");
        _exit(0);
    }
}
/**** */

/**** */
mensaje() {
    CURSOR_12_23
    puts( "NO SE HA REALIZADO OPERACION DE LECTURA DE DATOS");
    CURSOR_13_37
    puts( "PULSAR CUALQUIER TECLA");
    PULSA_UNA_TECLA
}

mensaje2() {
    CURSOR_12_23
    puts( "IMPOSIBLE CALCULAR CORRELACION PARA UN UNICO CANAL");
    CURSOR_13_38
    puts( "PULSAR CUALQUIER TECLA");
    PULSA_UNA_TECLA
}

mensaje3() {
    CURSOR_12_23
    puts( "IMPOSIBLE CALCULAR BANDAS PARA MENOS DE 5.12 SEG. ");
    CURSOR_13_38
    puts( "PULSAR CUALQUIER TECLA");
    PULSA_UNA_TECLA
}

mensaje4() {
    CURSOR_12_23
    puts( "IMPOSIBLE CALCULAR COHERENCIA PARA MENOS DE 5.12 SEG.");
    CURSOR_13_38
}

```

```

    puts( "PULSAR CUALQUIER TECLA");
    PULSA_UNA_TECLA
}
/*****
/*****
num_can() {
    inicio:
    printf("COMIENZO PROCESAMIENTO(SEG) ");
    scanf("%lf", &lil);
    /* Se ha quitado el (;; lil>15 para que permita */
    /* leer tramos que comiencen despues de 20 seg. */
    if (lil < 0 )
        goto inicio;
    LI = (int)(100 * lil);

pr1:    qx = 1;
    printf("NUMERO DE CANALES (1/2): ");
    scanf("%d",&cer);
    if ((cer != 1) && (cer != 2))
        goto pr1;
    canal1:
    printf("PRIMER CANAL:");
    scanf("%d", &VC[1]);

    if (VC[1] < 0 ;; VC[1] > 16)
        goto canal1;
    if (cer == 2) {
        canal2:
        printf("SEGUNDO CANAL: ");
        scanf("%d", &VC[2]);
        if (VC[2] < 0 ;; VC[2] > 16)
            goto canal2;
    }
    puts("\x1b[2;37;44m \x1b[2J");
}
/* *****/

/* ***** menu tipo fichero ***** */
nombrefichero() {
pr2:    pif=0;
    LIMPIA_PANTALLA
    printf("fichero en ASCII (a) o BINARIO (b)");
    scanf("%c",&tipo);
    if (tipo!='a' && tipo!='b')
        goto pr2;
pr2a:    printf("NOMBRE DEL FICHERO ");
    scanf("%s", NFs);
    strcpy(file,NFs);
    if (tipo=='a') {
        if (strlen(NFs) > 6 ;; strlen(NFs) < 2)
            goto pr2a;
    }
    else {
        if (tipo=='b') {
            if (strlen(NFs) > 8 ;; strlen(NFs) < 2)
                goto pr2a;
        }
    }
}

```

```

    }
}

}
/*****/

/*****/
mensajepro() {
CURSOR_12_23
puts( "Procesando. Por favor espere...");
}
/*****/

/***** CAMBIO DE DIRECTORIO *****/
cambio_dir() {
printf("Nuevo directorio > ");
scanf(" %s",string);
strcpy(dir,"DIR=");
strcat(dir,string);
if (putenv(dir) == -1)
    printf(" no se ha podido realizar el cambio de directorio");
else
    {
    dirvar=getenv("DIR");
    printf("nuevo directorio = %s \n",dirvar);
    PULSA_UNA_TECLA
    }
}

/* PROGRAMA : MENU.C */
/* FECHA : 21-MAYO-1991 */
/* PROPOSITO : Procesar las senales tomadas con el adquirir.bas */

#include "macros.h"
#include <types.h>
#include <stat.h>
#include <bios.h>
#include "variable.h"

extern char tipo;
extern int amplificacion,existe_ficha;
unsigned int codgain;

#define VERDAD 1
#define FALSO 0

void setcursor(short modo){
    union REGS reg ;

```

```

if (modo==_GCURSOROFF)
    reg.h.ch = 0x20;
else{
    reg.h.ch = 6;
    reg.h.cl = 7;
}
reg.h.ah = 1;
int86(0x10, &reg, &reg);
}

heapdump() {
    struct _heapinfo hinfo;
    int heapstatus;
    hinfo._pentry = NULL;
    while((heapstatus = _heapwalk(&hinfo)) == _HEAPOK) {
        printf("%6s bloque en %p de tamaño %4.4X\n",
            (hinfo._useflag == _USEDENTRY ? "USADO" : "LIBRE"),
            hinfo._pentry, hinfo._size);
    }
    switch(heapstatus) {
    case _HEAPEMPTY:
        printf("OK - heap vacío\n\n");
        break;
    case _HEAPEND:
        printf("OK - fin de heap\n\n");
        break;
    case __HEAPBADPTR:
        printf("ERROR - puntero malo a heap \n\n");
        break;
    case _HEAPBADBEGIN:
        printf("ERROR - mal comienzo de heap\n\n");
        break;
    case _HEAPBADNODE:
        printf("ERROR - mal nodo en heap\n\n");
        break;
    }
    PULSA_UNA_TECLA
}
nheapdump() {
    struct _heapinfo hinfo;
    int heapstatus;
    hinfo._pentry = NULL;
    while((heapstatus = _nheapwalk(&hinfo)) == _HEAPOK) {
        printf("%6s bloque en %p de tamaño %4.4X\n",
            (hinfo._useflag == _USEDENTRY ? "USADO" : "LIBRE"),
            hinfo._pentry, hinfo._size);
    }
    switch(heapstatus) {
    case _HEAPEMPTY:
        printf("OK - heap vacío\n\n");
        break;
    case _HEAPEND:
        printf("OK - fin de heap\n\n");
        break;
    case _HEAPBADPTR:
        printf("ERROR - puntero malo a heap \n\n");

```

```

        break;
    case _HEAPBADBEGIN:
        printf("ERROR - mal comienzo de heap\n\n");
        break;
    case _HEAPBADNODE:
        printf("ERROR - mal nodo en heap\n\n");
        break;
    }
PULSA_UNA_TECLA

}

/*****
leefichero(short comienzo,short num_datos) {

    pif=0;
    /*printf("lectura de un fichero en ASCII");*/

        itoa(VC[j],vfs,10);
        strcpy(NFs,file);
        strcat(NFs,vfs);
        __searchenv(NFs,"DIR",path_buffer);
ABRE_FICHERO_Lectura
    if (fp!=NULL){
        for ( i = 0;i<= comienzo - 1;i++) {
            LEE_DATOS_ASCII
        }
        switch(j) {
        case 1:
            for ( i = 0;i<= num_datos - 1;i++) {
                LEE_DATOS_ASCII
                d = (bb - 16 * (int)(bb / 16)) * 256 + cc;
                matriz1[i] = ( escala * d / 2048 - escala)/10;
            }
            break;
        case 2:
            for ( i = 0;i<= num_datos - 1;i++) {
                LEE_DATOS_ASCII
                d = (bb - 16 * (int)(bb / 16)) * 256 + cc;
                matriz2[i] = ( escala * d / 2048 - escala)/10;
            }
            break;
        }

        CIERRA_FICHERO
    }
    else {
        ERR=53;
        notecia2();
    }
}
/* *****/
/* *****/
switch(j) {
case 1:
    dimlen = num_datos;
    tuptype=4;
    status=arr1_to_wf(matriz1, dimlen, tuptype, &wd1);

```

```

    if (status !=NOERROR) {
    rpt_err(status,": en forma de onda fichero");
        _exit(0); }
    if (wd1==NULL )
        puts("forma de onda wave=NIL\n");
    break;
case 2:
    dimlen = num_datos;
    tuptype=4;
    status=arr1_to_wf(matriz2, dimlen, tuptype, &wd2);
    if (status !=NOERROR) {
    rpt_err(status, ": en forma de onda fichero");
        _exit(0); }
    if (wd2==NULL )
        puts("forma de onda wave=NIL\n");
    break;
}

}
/* ***** */

/*****/
leebinario(short comienzo,short num_datos) {
int fh,result;
long tamaño,puntos_x_canal,inicio;
struct stat buffer;

/*printf("lectura de un fichero en binario");*/
pif=0;

    itoa(VC[j],vfs,10);
    strcpy(NFs,file);
    strcat(NFs,".eeg");
    fh=open(NFs,O_BINARY | O_RDONLY);
    result=fstat(fh,&buffer);
    if (result!=0)
        printf("MALA APERTURA DEL FICHERO");
    else {
        tamaño=buffer.st_size;
        puntos_x_canal=tamaño/16;
        inicio=(VC[j]-1)*puntos_x_canal;
        /*printf("tamaño del fichero= %ld \
        puntos por canal =%ld,inicio=%ld\
        \n",tamaño,puntos_x_canal,inicio);*/
    }
    close(fh);
    fp=fopen(NFs,"rb");
    fseek(fp,inicio,SEEK_SET);
    if (fp!=NULL){
        for ( i = 0;i<= comienzo - 1;i++) {
            fread(&d,2,1,fp);
        }
        switch(j) {
        case 1:
            for ( i = 0;i<= num_datos - 1;i++) {
                fread(&d,2,1,fp);
            }

```

```

        matriz1[i] = (escala * d / 2048 - escala)/10;
    }
    break;
case 2:
    for ( i = 0; i<= num_datos - 1; i++) {
        fread(&d, 2, 1, fp);
        matriz2[i] = (escala * d / 2048 - escala)/10;
    }
    break;
}

CIERRA_FICHERO
}
else {
    ERR=53;
    notecia2();
}
/* ***** */
/* ***** crear forma de onda ***** */
switch(j) {
case 1:
    dimlen = num_datos;
    tuptype=4;
    status=arr1_to_wf(matriz1, dimlen, tuptype, &wd1);
    if (status !=NOERROR) {
        rpt_err(status, ": en forma de onda fichero");
        _exit(0); }
    if (wd1==NULL )
        puts("forma de onda wave=NIL\n");
    break;
case 2:
    dimlen = num_datos;
    tuptype=4;
    status=arr1_to_wf(matriz2, dimlen, tuptype, &wd2);
    if (status !=NOERROR) {
        rpt_err(status, ": en forma de onda fichero");
        _exit(0); }
    if (wd2==NULL )
        puts("forma de onda wave=NIL\n");
    break;
}
}

leeficha() {
    fscanf(fp, "%u\n", &codgain);
    fscanf(fp, "%[^\\n]\\n", nombre);
    fscanf(fp, "%[^\\n]\\n", edad);
    fscanf(fp, "%[^\\n]\\n", fecha);
    fscanf(fp, "%[^\\n]\\n", diagnostico);
    fscanf(fp, "%[^\\n]\\n", comentarios);
    fclose(fp);
    existe_ficha=VERDAD;
    escala=(amplificacion*10)/(pow(2, codgain));
}

mira_ficha() {

```

```

strcpy(NFs,file);
strcat(NFs, ".inf");
if ((fp=fopen(NFs,"r"))!=NULL) {
    leeficha();
    LIMPIA_PANTALLA
    COLOR_OPCION_ELEGIDA
    CURSOR_6_23
    printf("FECHA DE ADQUISICION DE EEG : %s",fecha);
    CURSOR_8_23
    printf("NOMBRE DEL FICHERO : %s \n\n\n",file);
    CURSOR_11_23
    printf("NOMBRE DEL PACIENTE: %s \n\n",nombre);
    CURSOR_13_23
    printf("EDAD                : %s \n\n",edad);
    CURSOR_15_23
    printf("DIAGNOSTICO          : %s \n\n",diagnostico);
    CURSOR_17_23
    printf("COMENTARIOS           : %s \n",comentarios);
    CURSOR_19_23
    printf("GANANCIA : +/- %2.3f",10/(pow(2,codgain)));
    getch();
}
}
leetodo() {

    pif=0;
    /*printf("lectura de un fichero en ASCII");*/

    itoa(VC[j],vfs,10);
    strcpy(NFs,file);
    strcat(NFs,vfs);
    _searchenv(NFs,"DIR",path_buffer);
ABRE_FICHERO_LECTURA
if (fp!=NULL){
    switch(j) {
    case 1:
        for ( i = 0;i<= 2048 - 1;i++) {
            LEE_DATOS_ASCII
            d = (bb - 16 * (int)(bb / 16)) * 256 + cc;
            matriz1[i] = ( escala * d / 2048 - escala)/10;
        }
        break;
    case 2:
        for ( i = 0;i<= 2048 - 1;i++) {
            LEE_DATOS_ASCII
            d = (bb - 16 * (int)(bb / 16)) * 256 + cc;
            matriz2[i] = ( escala * d / 2048 - escala)/10;
        }
        break;
    }

    CIERRA_FICHERO
}
else {
    ERR=53;
    noteccla2();
}
}

```

```

}
/* ***** */

/*****
leebintodo() {
int fh,result;
long tamano,puntos_x_canal,inicio;
struct stat buffer;

/*printf("lectura de un fichero en binario");*/
pif=0;

    itoa(VC[j],vfs,10);
    strcpy(NFs,file);
    strcat(NFs,".eeg");
    fh=open(NFs,O_BINARY | O_RDONLY);
    result=fstat(fh,&buffer);
    if (result!=0)
        printf("MALA APERTURA DEL FICHERO");
    else {
        tamano=buffer.st_size;
        puntos_x_canal=tamano/16;
        inicio=(VC[j]-1)*puntos_x_canal;
        /*printf("tamano del fichero= %ld \
        puntos por canal =%ld,inicio=%ld\
        \n",tamano,puntos_x_canal,inicio);*/
    }
    close(fh);
    fp=fopen(NFs,"rb");
    fseek(fp,inicio,SEEK_SET);
    if (fp!=NULL){
        switch(j) {
        case 1:
            for ( i = 0;i<= puntos_x_canal - 1;i++) {
                fread(&d,2,1,fp);
                matriz1[i] = (escala * d / 2048 - escala)/10;
            }
            break;
        case 2:
            for ( i = 0;i<= puntos_x_canal - 1;i++) {
                fread(&d,2,1,fp);
                matriz2[i] = (escala * d / 2048 - escala)/10;
            }
            break;
        }

        CIERRA_FICHERO
    }
    else {
        ERR=53;
        notecia2();
    }
}
/*****
set_matriz(short comienzo,short num_datos) {

```

```

pif=0;
for (i=0;i<=num_datos-1;i++) {
    matriz5[i]=matriz1[i+comienzo];
    matriz6[i]=matriz2[i+comienzo];
}
/* ***** */
/* ***** crear forma de onda ***** */
switch(j) {
case 1:
    dimlen = num_datos;
    tuptype=4;
    status=arr1_to_wf(matriz5, dimlen, tuptype, &wd1);
    if (status !=NOERROR) {
        rpt_err(status,": en forma de onda fichero");
        _exit(0); }
    if (wd1==NULL )
        puts("forma de onda wave=NIL\n");
    break;
case 2:
    dimlen = num_datos;
    tuptype=4;
    status=arr1_to_wf(matriz6, dimlen, tuptype, &wd2);
    if (status !=NOERROR) {
        rpt_err(status, ": en forma de onda fichero");
        _exit(0); }
    if (wd2==NULL )
        puts("forma de onda wave=NIL\n");
    break;
}

}
/* ***** */

void main (int argc,char *argv[]) {
char gain;

/****** Inicializacion de variables y punteros ******/
dimlen=512;
tuptype=4;
setcursor(_G_CURSOROFF);
inicializa();
minval=&minvalor;
maxval=&maxvalor;
minloc=&minpos;
maxloc=&maxpos;
/*matriz1=(double *)calloc(512,sizeof(double));*/
if (matriz1==NULL)
    printf("fallo calloc");
asigna_modos();
LIMPIA_PANTALLA

/****** */
comienzo:

```

```

lil = 0;
qx = 0;
/*****

/* ***** MENU principal ***** */
/*NUMERO DE MUESTRAS */
v = 512;
pf = 1;
pif = 0;
if (argc!=1) {
    printf("parametros");
    pif=1;
    pf=8;
    strcpy(file,argv[1]);
    strcpy(NFs,file);
    tipo=argv[2][0];
    gain=argv[3][0];
    switch(gain) {
        case '0':
            escala=10;
            break;
        case '1':
            escala=5;
            break;
        case '2':
            escala=2.5;
            break;
        case '3':
            escala=1.25;
            break;
    }
    lil=0;
    lm=8;
    LI=0;
    v=512;
    goto eligemp;
}
else{
    password();
}

start:
lil = 0;
qx = 0;
v = 512;
pf = 1;
pif = 0;
menuprincipal:
num_menu=1;
genera_menu();
eligemp: if (pif==0)
        tecla1_ansi();
else {
    el = pf;
    if ((el<1)!!(el>lm))
        goto menuprincipal;
}

```

```

LIMPIA_PANTALLA
switch (el) {
  case 1:
    nombrefichero();
    setcursor(_G_CURSOROFF);
    strcpy(NFs,file);
    strcat(NFs, ".inf");
    if ((fp=fopen(NFs,"r"))!=NULL) {
      num_menu=9;
      general();
      /*printf("lectura de ficha");
      PULSA_UNA_TECLA*/
      leeficha();

      /*fscanf(fp,"%u",codgain);
      fscanf(fp,"%[^\\n]",nombre);
      fscanf(fp,"%[^\\n]",edad);
      fscanf(fp,"%[^\\n]",fecha);
      fscanf(fp,"%[^\\n]",diagnostico);
      fscanf(fp,"%[^\\n]",comentarios);
      fclose(fp);
      existe_ficha=VERDAD;
      escala=(amplificacion*10)/(pow(2,codgain));*/

      /*printf("escala=%f",escala);
      printf("codgain=%u",codgain);
      printf("pow  =%f",pow(2,codgain));
      printf("amplif=%f",amplificacion);
      PULSA_UNA_TECLA*/
    }
    else {
      existe_ficha=FALSO;
    }
    /*printf("existe_ficha=%d",existe_ficha);
    PULSA_UNA_TECLA*/
    if (existe_ficha==FALSO) {
      num_menu=5;
      general();
    }
    LIMPIA_PANTALLA
    num_menu=4;
    general();
    LIMPIA_PANTALLA
    num_menu=1;
    break;
  case 2:
    num_can();
    setcursor(_G_CURSOROFF);
    PRIMER_CANAL;
    switch(tipo) {
      case 'a':
        leefichero(LI,v);
        break;
      case 'b':
        leebinario(LI,v);
        break;
    }
}

```

```

        if SON_DOS_CANALES {
            SEGUNDO_CANAL;
            switch(tipo) {
                case 'a':
                    leefichero(LI,v);
                    break;
                case 'b':
                    leebinario(LI,v);
                    break;
            }
        }
        break;
    case 3:
        goto menugrafico;
        break;
    case 4:
        introficha();
        PULSA_UNA_TECLA
        break;
    case 5:
        mira_ficha();
        break;
    case 6:
        free(matriz1);
        /*libera(&wd1);*/
        /*printf(" puntero wd1 = %Fp",wd1);
        printf(" puntero wd2 = %Fp",wd2);*/
        setcursor(_G_CURSORON);
        desactiva();
        break;
    case 7:
        cambio_dir();
        break;
    case 8:
        prmcn();
        if (argc!=1){
            free(matriz1);
            /*libera(&wd1);*/
            /*printf(" puntero wd1 = %Fp",wd1);
            printf(" puntero wd2 = %Fp",wd2);*/
            setcursor(_G_CURSORON);
            desactiva();
        }
        break;
    }
}
goto menuprincipal;
/* ***** */

/* ***** Tipo de representacion ***** */
menugrafico:
strcpy(controls, "");
if ( qx == 0) {
    mensaje();
    goto menuprincipal;
}

```

```

}
num_menu=2;
strcpy(marcas, "");
genera_menu();

eligemg: if (pif==0)
    tecla1_ansi();
else {
    e = pf;
    if ((e<1) || (e>lm))
        goto menugrafico;
    LIMPIA_PANTALLA
    ec = e;
    switch (e) {
        case 1:
            num_menu=3;
            strcpy(marcas, "");
            general();
            temporal();
            LIMPIA_PANTALLA
            setcursor(_G_CURSOROFF);
            break;
        case 2:
            strcpy(marcas, "si");
            /*heapdump();*/
            frecuencia();
            LIMPIA_PANTALLA
            setcursor(_G_CURSOROFF);
            /*heapdump();*/
            break;
        case 3:
            strcpy(marcas, "");
            estadistica();
            LIMPIA_PANTALLA
            setcursor(_G_CURSOROFF);
            break;
        case 4:
            strcpy(marcas, "");
            correlacion();
            LIMPIA_PANTALLA
            setcursor(_G_CURSOROFF);
            break;
        case 5:
            strcpy(marcas, "si");
            LI2=LI;
            v2=v;
            cer2=cer;
            eko=2;
            /*heapdump();*/
            coherencia();
            LIMPIA_PANTALLA
            setcursor(_G_CURSOROFF);
            /*heapdump();*/
            LI=LI2;
            v=v2;
            cer=cer2;
            PRIMER_CANAL;
    }
}

```

```

/*printf("%s %d %d %s",NFs,LI,v,tipo);
PULSA_UNA_TECLA*/
switch(tipo) {
case 'a':
    leefichero(LI,v);
    break;
case 'b':
    leebinario(LI,v);
    break;
}

if SON_DOS_CANALES {
    SEGUNDO_CANAL;
    switch(tipo) {
case 'a':
        leefichero(LI,v);
        break;
case 'b':
        leebinario(LI,v);
        break;
    }
}
break;
case 6:
LI2=LI;
v2=v;
cer2=cer;
eko=0;
potenciaxtramos();
LIMPIA_PANTALLA
setcursor(_G_CURSOROFF);
/*heapdump();*/
LI=LI2;
v=v2;
cer=cer2;
PRIMER_CANAL;
/*printf("%s %d %d %s",NFs,LI,v,tipo);
PULSA_UNA_TECLA*/
switch(tipo) {
case 'a':
    leefichero(LI,v);
    break;
case 'b':
    leebinario(LI,v);
    break;
}

if SON_DOS_CANALES {
    SEGUNDO_CANAL;
    switch(tipo) {
case 'a':
        leefichero(LI,v);
        break;
case 'b':
        leebinario(LI,v);
        break;
    }
}

```

```

        }
    }

    break;
case 7:
    qx = 0;
    goto start;
    break;
case 8:
    free(matriz1);
    /*libera(&wd1);
    printf(" puntero wd1 = %Fp",wd1);
    printf(" puntero wd2 = %Fp",wd2);
    nheapdump();*/
    setcursor(_G_CURSORON);
    desactiva();
    break;
}
}
goto menugrafico;

}
/***** FIN DEL PROGRAMA PRINCIPAL *****/

/* PROGRAMA : TEMPO.C
/* FECHA : 7-MARZO-1991 */
/* PROPOSITO : FUNCIONES QUE INVOLUCRAN FORMAS DE ONDA Y ESTAN OK*/

#include "macros.h"
#include "variable.h"

extern int BANDA;

temporal() {
    ini_graf();
    mensajepro();
    modo=2;
    for ( PRIMER_CANAL;HASTA_ULTIMO_CANAL;INCREMENTA_CANAL) {
        switch(j) {
            case 1:
                abre_graf();
                mensajepro();
                dibuja(&wd1);
                break;
            case 2:
                dibuja(&wd2);
                break;
        }
    }
    status=gr_pause();
    status=gr_close();
    status=gr_reset();
}

```

```

}
/* ***** */

/* ***** CALCULO DE LA CORRELACION ***** */
correlacion() {
    puts("\x1b[2;37;44m \x1b[2J");
    modo=1;
    if ES_UN_CANAL {
        mensaje2();
        return(cer);
    }
    ini_graf();
    mensajepro();
    fo_correla(&wd1,&wd2);
    abre_graf();
    mensajepro();
    ec=4;
    PRIMER_CANAL;
    dibuja(&wd3);
    status=gr_pause();
    status=gr_close();
    status=libera(&wd3);
    status=gr_reset();
}
/* ***** */
fo_correla(WAVEFORM **x,WAVEFORM** y){

/*WAVEFORM *wd4;*/

    dimlen= 2 * v -1;
    tuptype=4;
    status=crea(&wd3);
    /*status=crea(&wd4);*/
    status=fcorr(*x, *y, wd3);
    if (status !=NOERROR) {
        rpt_err(status,": en fcorr ");
        _exit(0); }

    /*wc_mult(wd4,v,wd3);
    status=libera(&wd4);*/

}

/* ***** RUTINA DE GRAFICOS ***** */
dibuja(WAVEFORM** x)
{
WAVEFORM *onda;
char titles[80],subtitles[30],xlabels[60],ylabels[30],titulo[80];
char etiqueta1s[60],etiqueta2s[60];
double startpt,endpt,ymax,ymin,ymayor,ymenor,xmayor,xmenor,xmax,xmin;
double *arrayptr2;
onda=*x;
    if (*x==NULL){
        puts("puntero nulo en minmax");
        _exit(0);
    }
    status=minmax(*x, minval, maxval, minloc, maxloc);

```

```

if (status !=NOERROR) {
    rpt_err(status,": en minmax");
    _exit(0); }

switch(modo) {
    case 1:
        strcpy(xlabels,"DESPLAZAMIENTO");
        strcpy(ylabels,"VOLTIOS ^2");
        strcpy(titles," CORRELACION ");
        strcat(titles,file);
        strcat(titles," CANALES: ");
        itoa(VC[1],vfs,10);
        strcat(titles,vfs);
        strcat(titles," & ");
        itoa(VC[2],vfs,10);
        strcat(titles,vfs);
        f = v * 10.5 / 1000;
        break;
    case 2:
        strcpy(xlabels,"TIEMPO(SEG)");
        strcpy(ylabels,"MILI-VOLTIOS");
        strcpy(titles," EEG ");
        strcat(titles,file);
        strcat(titles," CANAL: ");
        itoa(VC[j],vfs,10);
        strcat(titles,vfs);
        f =(double)(v + LI) / 100;
        break;
    case 3:
        strcpy(xlabels , "FRECUENCIA (HZ)");
        strcpy(ylabels , "AMPLITUDES");
        strcpy(titles,"DENSIDAD DE POTENCIA ESPECTRAL ");
        strcat(titles,file);
        strcat(titles," CAN: ");
        itoa(VC[j],vfs,10);
        strcat(titles,vfs);
        gr_size((double)7,(double)7,(double)5,(double)4.5);

        break;
    case 4:
strcpy(etiqueta2s , "--D--T--ALFA--BETA-1--BETA-2---BETA-3-----");
        strcpy(xlabels,etiqueta2s);
        switch(j) {
            case 1:
                strcpy(xlabels , "FRECUENCIA (HZ) ");
                break;
            case 2:
                strcpy(xlabels,etiqueta2s);
                break;
        }

        strcpy(ylabels , "AMPLITUDES");
        strcpy(titles," COHERENCIA ");
        strcat(titles,file);
        strcat(titles," CANALES: ");
        itoa(VC[1],vfs,10);
        strcat(titles,vfs);

```

```

        strcat(titles," & ");
        itoa(VC[2],vfs,10);
        strcat(titles,vfs);
        break;
    case 5:
        strcpy(xlabels , "FRECUENCIA (HZ) ");
        strcpy(ylabels , "AMPLITUDES");
        strcpy(etiqueta2s , "--D--T--ALFA--BETA-1--BETA-2---BETA-3-----");
        strcpy(etiqueta1s , "----D--T--ALFA--BETA1-BETA2----BETA-3-----");
        if (strcmp(modos,"histo")==0) {
            switch(cer) {
                case 1:
                    strcpy(xlabels,etiqueta1s);
                    break;
                case 2:
                    strcpy(xlabels,etiqueta2s);
                    break;
            }
        }
        strcpy(titles,"POTENCIA ESPECTRAL ABSOLUTA ");
        strcat(titles,file);
        strcat(titles," CAN: ");
        itoa(VC[j],vfs,10);
        strcat(titles,vfs);
        gr_size((double)7,(double)7,(double)5,(double)4.5);
        break;
    case 6:
        strcpy(xlabels,"TIEMPO(SEG)");
        strcpy(ylabels,"POTENCIA ");
        strcpy(titles,"POTENCIA ABSOLUTA VERSUS TIEMPO");
        strcat(titles,file);
        strcat(titles," CAN: ");
        if (j<8)
            itoa(VC[1],vfs,10);
        else
            itoa(VC[2],vfs,10);
        strcat(titles,vfs);
        strcpy(subtitles,"A=PT R=d V=th AM=A1 C=A2 B=PTsa Bd=A");
        gr_size((double)7,(double)7,(double)5,(double)4.5);
        f =(double)(24*64);
        break;
    case 7:
        strcpy(xlabels,"TIEMPO(SEG)");
        strcpy(ylabels,"POTENCIA ");
        strcpy(titles,"POTENCIA RELATIVA VERSUS TIEMPO");
        strcat(titles,file);
        strcat(titles," CAN: ");
        if (j<8)
            itoa(VC[1],vfs,10);
        else
            itoa(VC[2],vfs,10);
        strcat(titles,vfs);
        strcpy(subtitles," R=d V=theta AM=A1 C=A2 Bd=A");
        gr_size((double)7,(double)7,(double)5,(double)4.5);
        f =(double)(24*64);
        break;

```

```

}

/* Seleccionar formato de pantalla */
xmin = 0;
xmax = 32767;
if ((ES_UN_CANAL) || (CANAL_1 && ES_CORRELACION)) {
    ymin = 0;
    ymax = 32767;
    if (ES_AUTOESCALADO || ES_CORRELACION) {
        ymayor = (*maxval - *minval) / 10;
        ymenor = (*maxval - *minval) / 20;
    }
    else {
        ymayor = (maxey - miney) / 10;
        ymenor = (maxey - miney) / 20;
    }
}
else {
    if ES_AUTOESCALADO {
        ymayor = (*maxval - *minval) / 4;
        ymenor = (*maxval - *minval) / 8;
    }
    else {
        ymayor = (maxey - miney) / 5;
        ymenor = (maxey - miney) / 10;
    }
    if (j==1 || j==3) {
        ymin = 0;
        ymax = 16374;
    }
    else {
        ymin = 16394;
        ymax = 32767;
    }
}
}
if (modo==6 || modo==7) {
    switch(j) {
        case 1:
        case 2:
        case 3:
        case 4:
        case 5:
        case 6:
        case 7:
            xmin=0;
            xmax=32767;
            ymin=0;
            ymax=16384;
            break;
        case 8:
        case 9:
        case 10:
        case 11:
        case 12:
        case 13:
        case 14:
            xmin=0;

```

```

        xmax=32767;
        ymin=16384;
        ymax=32767;
        break;
    }
}
if (modo==5) {
    switch(j){
        case 1:
            ymin=0;
            ymax=16384;
            xmin=0;
            xmax=32767;
            break;
        case 2:
            ymin=16384;
            ymax=32767;
            xmin=0;
            xmax=32767;
            break;
    }
}
if (modo!=6 || modo!=7 || ((modo==6 || modo==7) && (j==1 || j==8))) {
    status=gr_vwpt(xmin, ymin, xmax, ymax);
    if (status !=NOERROR) {
        rpt_err(status,": VIEWPORT");
        _exit(0); }
}

/* Asocia onda con conjunto de datos 1.( datos eje y) */
if (modo!=6 || modo!=7)
    ysetno = 1;
else
    ysetno =j;

status=gr_defw(ysetno, *x);
if (status !=NOERROR) {
    rpt_err(status,": creacion fallida eje y");
    _exit(0); }

/* Asocia onda con conjunto de datos 0 (eje x) */
xsetno = 0;
startpt = 0;
/* comienzo en representacion -----> frecuencial */
if (strcmp(xlabels, "TIEMPO(SEG)")==0)
    startpt = l1i; /* -> temporal */
endpt = f;
if (ES_CORRELACION && CANAL_1)
    startpt = -f; /* -> correlacion */
if (BANDA==1) {
    startpt=comienzo;
    endpt=fin;
}
status=gr_defa(xsetno, startpt, endpt);

```

```

if (status !=NOERROR) {
    gr_close();
    printf("%d : creacion fallida eje x",status);
    _exit(0);}

/* Genera la curva1 */
curvno = 1;
lcolor=2;
ltype=-1;
if ((modo==6 ) && (j==1 !! j==8))
    status=gr_curv(curvno,xsetno,ysetno,BLUE,DEJAG);
else
    status=gr_curv(curvno, xsetno, ysetno ,RED,DEJAG);
if (status !=NOERROR) {
    rpt_err(status,": generacion de curva fallida");
    _exit(0);}

if (ES_AUTOESCALADO !! ES_CORRELACION) {
    axis = 1;
    status=gr_autoscale(axis);
    if (status !=NOERROR) {
        rpt_err(status,": autoscale(y) fallido ");
        _exit(0);}
    }
else {
    status=gr_yrang(miney, maxey);
}
if (modo==6 && ee==7 ) {
    miney=0;
    maxey=*maxval;
    status=gr_yrang(miney,maxey);
}

/* Etiqueta eje Y */
ycolor=5;
status=gr_ylabl(ylabels, YELLOW);
if (status !=NOERROR) {
    rpt_err(status,": etiqueta eje Y");
    _exit(0);}

/*Etiqueta eje X */
xcolor=5;

/*if (strcmp(modos,"histo")==0) {
    switch(cer) {
        gr_txorg(XY_VWPORT_RELATIVE);

```

```
        case 1:
            gr_text(1,etiquetas,5000,1000,1200,YELLOW,LEFT_JUST,0,0)
            ;
            break;
        case 2:
            gr_text(1,etiqueta2s,5000,1000,1200,YELLOW,LEFT_JUST,0,0)
            ;
            break;
    }
    strcpy(xlabels , " ");

}*/
status=gr_xlabel(xlabels,YELLOW);
if (status !=NOERROR) {
    rpt_err(status,": etiqueta eje X");
    _exit(0); }

clr=6;

status=gr_title(titles,CYAN);
if (status !=NOERROR) {
    rpt_err(status,": titulo fallido");
    _exit(0);}

/* Subtitulo */
clr=3;
if (modo!=6 && modo!=7) {
    strcpy(subtitles," NOMBRE: ");
    strcat(subtitles,nombre);
    strcat(subtitles," EDAD: ");
    strcat(subtitles,edad);
    strcat(subtitles," FECHA: ");
    strcat(subtitles,fecha);
}

status=gr_stitl(subtitles,GREEN);
if (status !=NOERROR) {
    rpt_err(status,": subtítulo fallido");
    _exit(0);}

/* Enmarcado */
border=1;
status=gr_box(WHITE);
if (status !=NOERROR) {
    rpt_err(status,": enmarcado fallido!");
    _exit(0);}

/* Marcas en eje x para respuesta frecuencial*/
switch(cer) {
case 1:
    xmayor=10;
    break;
case 2:
    if (DIVISION==2)
```

```

        xmayor =5;
    else if (DIVISION==2.5)
        xmayor= 4;
    else if (DIVISION==5)
        xmayor= 2;
    break;
}
xmenor = 1;
if (strcmp(marcas, "si")== 0) {
    status=gr_xrang(startpt,endpt);
    if (status != NOERROR) {
        rpt_err(status,": rangos eje x fallido");
        _exit(0);}

    /*status=gr_ytics(ymayor, ymenor);*/
    status=gr_xtics(xmayor, xmenor);
    if (status != NOERROR) {
        rpt_err(status,": marcas eje x fallidas");
        _exit(0);}

    /* Marcas en eje y para respuesta frecuencial*/
    /*printf("\nymayor=%lf ymenor=%lf\n",ymayor,ymenor);
    printf("\nxmayor=%lf xmenor=%lf\n",xmayor,xmenor);
    printf("comienzo=%lf fin=%lf",startpt,endpt);
    printf("\nMAXVAL=%lf MINAVL=%lf\n",*maxval,*minval);*/
    /*if (status != NOERROR) {
        rpt_err(status,": marcas eje y fallidas");
        _exit(0);}*/
}

/* Rejilla */
xcolor=6;
ycolor=6;
xstyle = 2;
ystyle = 2;
status=gr_grid(CYAN,xstyle,CYAN,ystyle);
if (status !=NOERROR) {
    rpt_err(status,": rejilla fallida!");
    _exit(0);}

/* Estructura del grafico */
clr=1;
status=gr_frame(WHITE);
if (status !=NOERROR) {
    rpt_err(status,": estructura fallida");
    _exit(0);}

/* Dibujo real del grafico */
status=gr_dsply();
if (status !=NOERROR) {
    printf("\n%d: dibujo fallido",status);
    _exit(0);}
if (modo!=6 || modo!=7 || ((modo==6 || modo==7) && (j==1 || j==8))) {
    gr_uncurv(-1);
}

```

```

        gr_undef(-1);
    }

/* ***** */
}

/* ***** CALCULO DE PARAMETROS ESTADISTICOS ***** */
estadistica() {
    j=0;
    puts("\x1b[2;37;44m \x1b[2J");
    for ( PRIMER_CANAL;HASTA_ULTIMO_CANAL;INCREMENTA_CANAL) {
        /*mensajepro();*/
        switch(j) {
            case 1:
                status=meanstd(wd1, mean1, std1, var1, rms1);
                if (status!=NOERROR)
                    rpt_err(status,": en meanstd");
                break;
            case 2:
                status=meanstd(wd2, mean1, std1, var1, rms1);
                if (status!=NOERROR)
                    rpt_err(status,": en meanstd");
                puts("\n");
                break;
        }
        param_estad();
    }
    PULSA_UNA_TECLA
}
/* ***** */

/*****/
param_estad() {
    printf("CANAL = %d\n\n",VC[j]);
    printf("MEDIA                = %lf\n",*mean1);
    printf("DESVIACION ESTANDAR    = %lf\n",*std1);
    printf("VARIANZA                = %lf\n",*var1);
    printf("VALOR CUADRATICO MEDIO    = %lf\n",*rms1);
    if (std1 != 0) {
        printf("COEFICIENTE DE VARIABILIDAD = %lf\n",*mean1/(*std1));
    }
}
/*****/

crea(WAVEFORM** x) {
    tuptype=4;
    status= create1_wf(dimlen, tuptype, x);
    if (status!=NOERROR) {
        printf("%d: en crear forma de onda en linea %d",status,NL);
        _exit(0);
    }
}

libera(WAVEFORM** x){
    status= free_wf(*x);
    if (status!=NOERROR) {

```

```

        printf("%d: en LIBERAR ONDA en linea %d",status,NL);
        _exit(0);
    }
}
copia(WAVEFORM** x,WAVEFORM** y) {
    status=copy_wf(*x,y);
    if (status!=NOERROR) {
        rpt_err(status,"en copia de formas de onda");
        _exit(0);
    }
}

/* ***** RUTINA DE GRAFICOS ***** */
dib_2(WAVEFORM** x)
{
    WAVEFORM *onda;
    char titles[80],subtitles[30],xlabel[60],ylabel[30],titulo[80];
    char etiqueta1s[60],etiqueta2s[60];
    double startpt,endpt,ymax,ymin,ymayor,ymenor,xmayor,xmenor,xmax,xmin;
    /*double *arrayptr2;*/
    onda=*x;
    if (*x==NULL){
        puts("puntero nulo en minmax");
        _exit(0);
    }
    status=minmax(*x, minval, maxval, minloc, maxloc);
    if (status !=NOERROR) {
        rpt_err(status,": en minmax");
        _exit(0); }

    /* Asocia onda con conjunto de datos 1.( datos eje y) */
    ysetno =2*j+1;

    status=gr_defw(ysetno, *x);
    if (status !=NOERROR) {
        rpt_err(status,": creacion fallida eje y");
        _exit(0); }

    /* Asocia onda con conjunto de datos 0 (eje x) */
    xsetno = 2*j;
    startpt = 0;
    /* comienzo en representacion -----> frecuencial */
    if (strcmp(xlabel, "TIEMPO(SEG)")==0)
        startpt = l1i; /* -> temporal */
    endpt = f;
    status=gr_defa(xsetno, startpt, endpt);
    if (status !=NOERROR) {
        gr_close();
        printf("%d : creacion fallida eje x",status);
        _exit(0);}

    /* Genera la curva1 */

```

```

curvno = j;
lcolor=2;
ltype=-1;
if (modo==6 &&(j==1 || j==8))
    status=gr_addev(curvno,xsetno,ysetno,BLUE,DEJAG);
if (modo==6 &&(j==2 || j==9) || (modo==7 && (j==1 || j==8)))
    status=gr_addev(curvno,xsetno,ysetno,RED,DEJAG);
if (modo==6 && (j==3 || j==10) || (modo==7 && (j==2 || j==9)))
    status=gr_addev(curvno,xsetno,ysetno,GREEN,DEJAG);
if (modo==6 && (j==4 || j==11) || (modo==7 && (j==3 || j==10)))
    status=gr_addev(curvno,xsetno,ysetno,YELLOW,DEJAG);
if (modo==6 && (j==5 || j==12) || (modo==7 && (j==4 || j==11)))
    status=gr_addev(curvno,xsetno,ysetno,CYAN,DEJAG);
if (j==6 || j==13)
    status=gr_addev(curvno,xsetno,ysetno,WHITE,DEJAG);
if (j==7 || j==14)
    status=gr_addev(curvno,xsetno,ysetno,WHITE,DASH_DOTTED);

if (modo==6 && ee==7) {
    axis = 1;
    status=gr_autoscale(axis);
    if (status !=NOERROR) {
        rpt_err(status,": autoscale(y) fallido      ");
        _exit(0);}
    }
/*if (modo==7)    {
    miney=0;
    maxey=100;
    status=gr_yrang(miney, maxey);
} */

/* Dibujo real del grafico */
/*status=gr_dsply();
if (status !=NOERROR) {
    printf("\n%d: dibujo fallido",status);
    _exit(0);}*/

/* ***** */
}

/* PROGRAMA   : PROCESA4.C
/* FECHA      : 10-julio-1991
/* PROPOSITO  : Procesar las senales tomadas con el adquirir.bas */

#include "macros.h"
#include <types.h>
#include <stat.h>
#include <bios.h>
#include "variable.h"

```

```

extern char tipo;
extern int amplificacion, existe_ficha;
unsigned int codgain;
int servicio;
long begin_tick, end_tick, elapsed_tick;

#define VERDAD 1
#define FALSO 0

/* ***** RESPUESTA FRECUENCIAL ***** */
frecuencia() {
    j=0;
    menu_vent();
    LIMPIA_PANTALLA
    menu_frec();
    LIMPIA_PANTALLA
}
/* ***** */

/*****/
espectro() {
if (strcmp(modos, "histo")==0 && v<512) {
    LIMPIA_PANTALLA
    mensaje3();
}
else {

modo=3;
ini_graf();
    PRIMER_CANAL;
    ee=7;
    VV=(long)v;
    dimlen=VV;
    crea(&fase1);
    crea(&fase2);
    NL=218;
    crea(&re);
    NL=220;
    crea(&im);
    transforma(&wd1, VV);
    copia(&fase, &fase1);
    libera(&fase);
    abre_graf();
    if (strcmp(modos, "histo")==0 && v==512) {
        modo=5;
        bandas(&subwave);
        j=1;
        /*dibuja(&histonda);
        j=2;*/
        dibuja(&integ);
        NL=231;
    }
}
}

```

```

        libera(&histonda);
        libera(&integ);
        libera(&subwave);
    }
    else {
        dibuja(&subwave);
        NL=239;
        libera(&subwave);
    }
    NL=242;
    libera(&re);
    libera(&im);
    if SON_DOS_CANALES {
        SEGUNDO_CANAL;
        VV=(long)v;
        dimlen=v;
        NL=246;
        crea(&re);
        NL=248;
        crea(&im);
        transforma(&wd2,VV);
        copia(&fase,&fase2);
        libera(&fase);
        if (strcmp(modos, "histo")==0 && v==512) {
            modo=5;
            abre_graf();
            bandas(&subwave);
            /*j=3;
            dibuja(&histonda);*/
            j=2;
            dibuja(&integ);
            NL=262;
            libera(&histonda);
            libera(&integ);
            libera(&subwave);
        }
        else {
            dibuja(&subwave);
            NL=269;
            libera(&subwave);
        }
    }
    NL=273;
    libera(&re);
    libera(&im);
}
gr_pause();
gr_reset();
j=1;
/*dibuja(&fase1);*/
if SON_DOS_CANALES {
    j=2;
    /*dibuja(&fase2);*/
}
PULSA_UNA_TECLA
libera(&fase1);
libera(&fase2);

```

```

    status=gr_close();
    status=gr_reset();
}
}
/* *****/

/* ***** REP. ESPECTRAL POR BANDAS NUMERICA *****/
bandas_num() {
double pot[10];

    int numbandas;
    numbandas = 8;
    DIVISION=2.5;
    LIMPIA_PANTALLA
    mensajepro();
    PRIMER_CANAL;
    VV=(long)v;
    dimlen=v;
    NL=289;
    crea(&re);
    NL=291;
    crea(&im);
    transforma(&wd1,VV);
    bandas(&subwave);
    libera(&fase);
    LIMPIA_PANTALLA
    printf("\nCANAL = %d\n", VC[j]);
    puts("  BANDA      MEDIA  POTENCIA ABS    POTENCIA REL  POTREL
    FILT\n");
    for (i = 0;i<=numbandas - 1;i++) {
        pot[i]=In[i];
        pot[0]=0;
        printf(" %s =  %8.2lf  %8.2lf          %05.2f
        %05.2f\n",nombrebandas[i],
        media2[i],In[i],100*In[i]/It,100*pot[i]/(It-In[0]));
    }

    NL=307;
    libera(&histonda);
    libera(&integ);
    libera(&re);
    libera(&im);
    if (cer==2) {
        SEGUNDO_CANAL;
        VV=(long)v;
        dimlen=v;
        NL=307;
        crea(&re);
        NL=309;
        crea(&im);
        transforma(&wd2,VV);
        bandas(&subwave);
        printf("\nCANAL = %d\n", VC[j]);
        puts("  BANDA      MEDIA  POTENCIA ABS    POTENCIA REL  POTREL
        FILT\n");
        for (i = 0;i<=numbandas - 1;i++) {
            pot[i]=In[i];

```

```

        pot[0]=0;
        printf(" %s =  %8.2lf  %8.2lf          %05.2f
        %05.2f\n",nombrebandas[i],
        media2[i],In[i],100*In[i]/It,100*pot[i]/(It-In[0]));
    }
    NL=325;
    libera(&re);
    libera(&im);
    libera(&fase);
}
NL=331;
libera(&histonda);
libera(&integ);
PULSA_UNA_TECLA
}

transforma(WAVEFORM** x,long dimension) {
WAVEFORM *real,*real3,*imag,*inwav,*zona;
char ffo[13];
    /***** CREA LAS FORMAS DE ONDA NECESARIAS *****/
    dimlen = dimension;
    tuptype=4;
    NL=336;
    crea(&real);
    NL=338;
    crea(&imag);
    NL=340;
    crea(&inwav);
    crea(&fase);
    per = 1;
    if (eko==0)
        per = 0;

    /* **** ELIMINAR LA MEDIA *****/
    /* -----*/
    status= meanstd(*x, mean1, std1, var1, rms1);
    if (status!=NOERROR) {
        rpt_err(status,": en calculo de media");
        _exit(0);
    }
    *mean1= (-1)>(*mean1);

    if (inwav==NULL)
        puts("onda inwav con puntero nulo");
    if (*x==NULL)
        puts("onda *x con puntero nulo");

    status= wc_add(*x, *mean1, inwav);
    if (status!=NOERROR) {
        rpt_err(status,": en resta");
        _exit(0);
    }
    /* *****/
}

```

```

/* ***** APLICACION DE LA VENTANA ***** */
status=taper(inwav, eko, per,real);
if (status!=NOERROR) {
    rpt_err(status,": en taper");
    _exit(0);
}
NL=385;
libera(&inwav);

/* ***** */

/* ***** CALCULA LA FFT ***** */
status=fft(real,imag, re, im);
if (status!=NOERROR) {
    printf("%d : en fft",status);
    _exit(0);
}

/*_bios_timeofday(_TIME_GETCLOCK,&end_tick);
fp=fopen("tiempo.tic","a");
fprintf(fp,"status=%d ticks transcurridos =%lu\n",status,end_tick-
begin_tick);
fclose(fp);*/
/*strcpy(ffo,"wfre");
wf_to_afile(re,ffo);
strcpy(ffo,"wfim");
wf_to_afile(im,ffo);*/
/* ***** */

/***** RAIZ CUADRADA DE LA SUMA DE LOS *****
***** CUADRADOS DE LA PARTE REAL Y LA *****
***** IMAGINARIA. ***** */
dexp = 2;
crea(&real3);
polar(re, im, GRAD, TRUE, (long)0, real, fase);
status= w_power(real, dexp, real3);

/*status= w_power(re, dexp, real);
if (status!=NOERROR) {
    rpt_err(status,": en w_power real --> real2");
    _exit(0);
}
status= w_power(im, dexp, imag);
if (status!=NOERROR) {
    rpt_err(status,": en w_power imag --> imag2");
    _exit(0);
}

NL=406;
status= w_add(real, imag, real3);
if (status!=NOERROR) {
    rpt_err(status,": en w_add real+imag--> real3");
    _exit(0);
}*/

```

```

/*strcpy(ffo,"wfre3");
wf_to_afile(real3,ffo);*/
NL=423;
status= libera(&real);
status= libera(&imag);

/* *****/
lim = 0;
delkeep = 1;
begin = 0;
led = (int)(v /DIVISION);
status= zone_dim(real3, lim, begin, led, delkeep, &zona);
if (status!=NOERROR) {
    rpt_err(status,": en bzonedim fft");
    _exit(0);
}
dimlen=led;
status=copia(&zona,&subwave);
NL=439;
libera(&zona);
libera(&real3);
NL=429;
/*strcpy(ffo,"wfsub");
wf_to_afile(subwave,ffo);*/

status=crea(&zona);
wc_div(subwave,v,zona);
NL=444;
libera(&subwave);
copia(&zona,&subwave);
NL=447;
libera(&zona);
/*bios_timeofday(_TIME_GETCLOCK,&begin_tick);
_bios_timeofday(_TIME_GETCLOCK,&end_tick);
fp=fopen("tiempo.tic","w");
fprintf(fp,"ticks transcurridos =%lu\n",end_tick-begin_tick);
fclose(fp);*/

}
/* *****/

/* ***** HISTOGRAMA *****/
bandas(WAVEFORM** xx) {
int numbandas, numpuntos, anchobanda[10], anchofbanda[10], finfbanda[10];
int comzofbanda[10], comienzobanda[10], finbanda[10], tipo, dim1, keep, eoaa;
int flag, kk, sumdim, longitud;
double anchohertz[10], x, z, f, integral[10], *arrayptr, *arrayptr2;
WAVEFORM *numonda, *onda, *in1, *in2;

if (v<512)
    mensaje3();

```

```

else {
  numbandas = 8;
  numpuntos = 204; /*(int)(v / 2.5);*/
  /* **** nombre de las bandas *****/
  strcpy(nombrebandas[0] , "0-1.5 Hz");
  strcpy(nombrebandas[1] , "DELTA  ");
  strcpy(nombrebandas[2] , "THETA  ");
  strcpy(nombrebandas[3] , "ALFA 1  ");
  strcpy(nombrebandas[4] , "ALFA 2  ");
  strcpy(nombrebandas[5] , "BETA1  ");
  strcpy(nombrebandas[6] , "BETA2  ");
  strcpy(nombrebandas[7] , "BETA3  ");

  /* **** ancho de las bandas de salida para grafico *****/
  anchobanda[0] = 19;
  anchobanda[1] = 26;
  anchobanda[2] = 51;
  anchobanda[3] = 26;
  anchobanda[4] = 38;
  anchobanda[5] = 64;
  anchobanda[6] = 96;
  anchobanda[7] = 192;
  /* *****/
  /* *** ancho de las bandas en hertz *****/
  anchohertz[0] = 1.5;
  anchohertz[1] = 2;
  anchohertz[2] = 4;
  anchohertz[3] = 2;
  anchohertz[4] = 3;
  anchohertz[5] = 5;
  anchohertz[6] = 7.5;
  anchohertz[7] = 15;
  /* *****/
  comzofbanda[0] = 0;
  largo = 0;
  dimlen=204;
  NL=486;
  crea(&in2);
  status=integrate(*xx,EA_ZERO,in2);
  wf_to_arr(in2,&arrayptr);
  It=arrayptr[203]*.1960784314;
  /*printf("It=%lf",It);*/
  NL=505;
  /*printf("puntero in2 = %Fp",in2);*/
  libera(&in2);

  /******/
  for(i = 0;i<=numbandas - 1;i++) {
    x = (anchohertz[i]*numpuntos/40);
    f=x-(int)x;
    z=(f>=.5) ? (ceil(x)) : (floor(x));
    anchofbanda[i]=(int)z;
    largo = largo + anchofbanda[i];

    if (i > 0)
      comzofbanda[i] = comzofbanda[i - 1] + anchofbanda[i - 1];
  }
}

```

```

    finbanda[i] = comzofbanda[i] + anchofbanda[i] - 1;
    /*printf("i=%d comzo=%d fin=%d",i,comzofbanda[i],finbanda[i]);
    PULSA_UNA_TECLA*/
}
/*****/

finbanda[numbandas - 1] = finbanda[numbandas - 1] - 1;
largo = largo - 1;

/***** BUCLE FOR *****/
for(i = 0; i<=numbandas - 1; i++) {

    /*** subzona de la onda de entrada *****/
    longitud=anchofbanda[i];
    tipo = 4;
    comienzo = (long)comzofbanda[i];
    fin = (long)finbanda[i];
    dim1 = 0;
    keep = 0;
    status= zone_dim(*xx, dim1, comienzo, fin, keep, &numonda);
    if (status!=NOERROR) {
        rpt_err(status,": en seleccion de zona");
        _exit(0);
    }
    /*printf("puntero numonda = %Fp",numonda);
    printf("puntero xx      = %Fp",xx);*/
    /*****/

    /******* media de la subzona *****/
    eoaa = 4;
    flag = 0;
    sumdim = 1;
    status= meanstd(numonda, mean1, std1, var1, rms1);
    if (status!=NOERROR) {
        rpt_err(status,": en hallar media");
        _exit(0);
    }
    media2[i] = *mean1;
    /*****/

    /******* cálculo de la integral de la subzona *****/
    if (i>=0) {
        dimlen=fin-comienzo+1;
        if((status=create1_wf(dimlen,W_DOUBLE,&in2))!=NOERROR) {
            gr_close();
            printf("%d: en crear in2  ",status);
            _exit(0);
        }
        dimlen=204;
        /*printf("puntero in1 = %Fp",in1);
        printf("puntero in2 = %Fp",in2);*/

        copia(&numonda,&in1);
        status=integrate(in1,EA_ZERO,in2);
        wf_to_arr(in2,&arrayptr2);
    }
}

```

```

    In[i]=arrayptr2[fin-comienzo]*.1960784314;
    /*printf("i=%d In=%lf",i,In[i]);*/
    NL=575;
    libera(&in2);
    libera(&in1);

}
/*PULSA_UNA_TECLA*/
fr_array(arrayptr);
fr_array(arrayptr2);
/*****

/***** CONSTRUCCION DEL ARRAY DE SALIDA *****/
comienzobanda[0] = 0;

if (i > 0)
    comienzobanda[i] = comienzobanda[i - 1] + anchobanda[i - 1];

finbanda[i] = comienzobanda[i] + anchobanda[i];
for(kk = (comienzobanda[i] + 1);kk<=(finbanda[i] - 2);kk++) {
    matriz3[kk] = *mean1;
    matriz4[kk] = In[i];
}

    matriz3[comienzobanda[i]] = 0;
    matriz3[finbanda[i] - 1] = 0;
    matriz4[comienzobanda[i]] = 0;
    matriz4[finbanda[i] - 1] = 0;
NL=596;
libera(&numonda);

/*****

}
It=(In[0]+In[1]+In[2]+In[3]+In[4]+In[5]+In[6]+In[7]);
/***** fin del bucle for *****/
/*In[0]=It-(In[1]+In[2]+In[3]+In[4]+In[5]+In[6]);*/
/*matriz3[1]=media2[0];*/
matriz3[511]=0;
/*matriz4[1]=In[0];*/
matriz4[511]=0;

/***** CONSTRUCCION DE LA FORMA DE ONDA RESULTANTE *****/
largo = 512;
tuptype=4;
status= arr1_to_wf(matriz3, largo, tuptype, &histonda);
if (status!=NOERROR) {
    rpt_err(status,": en arr1_to_wf");
    _exit(0);
}
status= arr1_to_wf(matriz4, largo, tuptype, &integ);
if (status!=NOERROR) {
    rpt_err(status,": en arr1_to_wf");
    _exit(0);
}
/*printf("puntero histonda = %Fp",histonda);
printf("puntero integ      = %Fp",integ);

```

```

PULSA_UNA_TECLA*/
/*****/

NL=626;
libera(xx);
f=40;
}
}

coherencia() {
short inicio,num_datos;
int diml,keep,k;
WAVEFORM *wd4,*wd5,*wd6,*wd7,*wd8,*onda6,*onda8,*wd10,*wd11;
WAVEFORM *onda9,*wd12,*rex,*rey,*imx,*imy,*rere,*imim,*imre,*reim;
WAVEFORM *reco,*imco,*pxy,*wd14,*ondaim;
if (v<512)
    mensaje4();
else {
mensajepro();
NL=652;
libera(&wd1);
libera(&wd2);
inicio=0;
num_datos=512;
for (k=0;k<=3;k++) {
    dimlen=num_datos;
    NL=627;
    crea(&re);
    NL=629;
    crea(&im);
    inicio=k*512;
    for(j=1;j<=2;j++)
        switch(tipo) {
            case 'a':
                leefichero(inicio,num_datos);
                break;
            case 'b':
                leebinario(inicio,num_datos);
                break;
        }

modo=4;
j=1;
DIVISION=2.5;
f=40;
strcpy(modos,"");
dimlen=204;

/***** CALCULO DE PSD CANAL 1 *****/
DIVISION=2.5;

```

```

f=40;
VV=(long)(num_datos);
transforma(&wd1,VV);
copia(&subwave,&wd5);
copia(&re,&rex);
copia(&im,&imx);
NL=678;
status=libera(&wd1);
status=libera(&subwave);
libera(&fase);
/*****/

/***** CALCULO DE PSD CANAL 2 *****/
DIVISION=2.5;
f=40;
VV=(long)(num_datos);
transforma(&wd2,VV);
status=copia(&subwave,&wd6);
copia(&re,&rey);
copia(&im,&imy);
NL=691;
status=libera(&wd2);
status=libera(&subwave);
libera(&re);
libera(&im);
libera(&fase);
/*****/

/***** CALCULO PSD CRUZADA *****/
NL=676;
crea(&rere);
w_mult(rex,rey,rere);
crea(&reim);
w_mult(rex,imy,reim);
libera(&rex);
crea(&imim);
w_mult(imx,imy,imim);
libera(&imy);
crea(&imre);
w_mult(imx,rey,imre);
libera(&rey);
libera(&imx);
crea(&reco);
w_add(rere,imim,reco);
NL=712;
libera(&rere);
libera(&imim);
crea(&imco);
w_sub(imre,reim,imco);
libera(&reim);
libera(&imre);
/*****/

/**** SUMA PSD CON ANTERIORES *****/
dimlen=204;
if (k==0) {

```

```

        NL=701;
        crea(&onda6);
        crea(&onda8);
        crea(&onda9);
        crea(&ondaim);
    }
    NL=707;
    crea(&wd10);
    w_add(reco,onda6,wd10);
    libera(&reco);
    libera(&onda6);
    crea(&wd11);
    w_add(wd5,onda8,wd11);
    libera(&onda8);
    libera(&wd5);
    crea(&wd12);
    w_add(wd6,onda9,wd12);
    libera(&wd6);
    libera(&onda9);
    crea(&wd14);
    w_add(imco,ondaim,wd14);
    NL=739;
    libera(&imco);
    libera(&ondaim);

    copia(&wd10,&onda6);
    libera(&wd10);
    copia(&wd11,&onda8);
    libera(&wd11);
    copia(&wd12,&onda9);
    libera(&wd12);
    copia(&wd14,&ondaim);
    NL=751;
    libera(&wd14);
    /*****

if (k==3) {
    NL=759;
    libera(&rex);
    libera(&rey);
    libera(&imx);
    libera(&imy);
    dimlen=204;
    /**** MULTIPLICACION PSD CANAL 1 POR PSD CANAL 2 **/
    NL=747;
    crea(&wd7);
    status=w_mult(onda8,onda9,wd7);
    if (status!=NOERROR) {
        rpt_err(status,"en multiplicar onda8 por onda9");
        _exit(0);
    }
    NL=779;
    status=libera(&onda8);
    status=libera(&onda9);
    /****

```

```

/**** CUADRADO PSD CRUZADA *****/
status=w_power(onda6, (double)2, onda6);
status=w_power(onda6, (double)2, onda6);
crea(&wd4);
status=w_add(onda6, onda6, wd4);
crea(&pxy);
status=wc_div(wd4, VV*VV, pxy);
NL=789;
libera(&onda6);
libera(&onda6);
libera(&wd4);
NL=766;
crea(&wd8);
if ((w_div(pxy, wd7, wd8))!=NOERROR){
    rpt_err(status, "en dividir    pxy por wd7");
    _exit(0);
}
NL=799;
libera(&wd7);
libera(&pxy);

/*****/
}

/***** PARTE DE DIBUJO *****/
if (k==3) {
    ini_graf();
    abre_graf();
    modo=4;
    cer=2;
    DIVISION=2.5;
    f=40;
    ee=7;
    j=1;
    dibuja(&wd8);
    j=2;
    bandas(&wd8);
    dibuja(&histonda);
    NL=817;
    libera(&histonda);
    libera(&wd8);
    libera(&integ);
    status=gr_pause();
    status=gr_reset();
}
}
status=gr_close();
LIMPIA_PANTALLA
/*****/
}
}

```

```

potenciaxtramos(){
short inicio,num_datos;
int diml,keep,k;
WAVEFORM *pot1alfa1,*pot1alfa2,*pot1theta,*pot1delta,*pot1total;
WAVEFORM *pot2alfa1,*pot2alfa2,*pot2theta,*pot2delta,*pot2total;
WAVEFORM *potrel1alfa1,*potrel1alfa2,*potrel1theta,*potrel1delta;
WAVEFORM *potrel2alfa1,*potrel2alfa2,*potrel2theta,*potrel2delta;
WAVEFORM *pot1tosa,*pot2tosa,*alfa112,*alfa212;
/* WAVEFORM *alfa1rel,*alfa2rel;*/

double
pot1_alfa1[30],pot1_alfa2[30],pot1_theta[30],pot1_delta[30],pot1_total[30];
double
pot2_alfa1[30],pot2_alfa2[30],pot2_theta[30],pot2_delta[30],pot2_total[30];
double
potrel1_alfa1[30],potrel1_alfa2[30],potrel1_theta[30],potrel1_delta[30];
double
potrel2_alfa1[30],potrel2_alfa2[30],potrel2_theta[30],potrel2_delta[30];
double pot1to_sa[30],pot2to_sa[30],alfa1_12[30],alfa2_12[30];
double ma1tr=0,ma1dr=0,ma1a1r=0,ma1a2r=0,ma1a1=0;
/*double alfa1_rel[30],alfa2_rel[30];*/

/*_bios_timeofday(_TIME_GETCLOCK,&begin_tick);*/
LI2=LI;
v2=v;
if (v<512)
    mensaje4();
else {

    mensajepro();
    NL=652;
    libera(&wd1);
    libera(&wd2);
    inicio=0;
    j=1;
    switch(tipo) {
        case 'a':
            leetodo();
            break;
        case 'b':
            leebintodo();
            printf("nombre= %s",NFs);
            break;
    }
    j=2;
    switch(tipo) {
        case 'a':
            leetodo();
            break;
        case 'b':
            leebintodo();
            break;
    }

    dimlen=25;
    crea(&pot1alfa1);

```

```

    crea(&pot1alfa2);
    crea(&pot2alfa1);
    crea(&pot2alfa2);
    crea(&pot1delta);
    crea(&pot2delta);
    crea(&pot1theta);
    crea(&pot2theta);
    crea(&pot1total);
    crea(&pot2total);
    crea(&potrel1alfa1);
    crea(&potrel1alfa2);
    crea(&potrel2alfa1);
    crea(&potrel2alfa2);
    crea(&potrel1delta);
    crea(&potrel2delta);
    crea(&potrel1theta);
    crea(&potrel2theta);
    crea(&pot1tosa);
    crea(&pot2tosa);
    crea(&alfa112);
    crea(&alfa212);
    /*crea(&alfa1rel);
    crea(&alfa2rel);*/

num_datos=512;
dimlen=num_datos;
for (k=0;k<=24;k++) {
    dimlen=num_datos;
    inicio=k*64;
    lii=inicio/100;
    LI=inicio;
    v=512;
    for(j=1;j<=2;j++)
        switch(tipo) {
            case 'a':

                set_matriz(LI,v);
                /*leefichero(LI,v);*/
/*_bios_timeofday(_TIME_GETCLOCK,&end_tick);
fp=fopen("tiempo.tic","w");
fprintf(fp,"ticks transcurridos =%lu\n",end_tick-begin_tick);
fclose(fp);*/

                break;
            case 'b':
                set_matriz(LI,v);
                /*leebinario(LI,v);*/
                break;
        }

modo=3;
j=1;
DIVISION=2.5;
f=40;
strcpy(modos,"");
/*dimlen=204;*/

```

```

/***** CALCULO DE PSD CANAL 1 *****/
DIVISION=2.5;
f=40;
VV=(long)(num_datos);
dimlen=v;
j=1;
crea(&re);
crea(&im);
transforma(&wd1,VV);

bandas(&subwave);
libera(&histonda);
libera(&integ);
libera(&re);
libera(&im);
libera(&fase);
pot1_delta[k]=In[1];
potrel1_delta[k]=100*In[1]/(It-In[0]);

pot1_theta[k]=In[2];
potrel1_theta[k]=100*In[2]/(It-In[0]);

pot1_alfa1[k]=In[3];
potrel1_alfa1[k]=100*In[3]/(It-In[0]);

pot1_alfa2[k]=In[4];
potrel1_alfa2[k]=100*In[4]/(It-In[0]);

alfa1_12[k]=In[3]+In[4];

pot1_total[k]=It;
pot1to_sa[k]=It-In[0];
/*alfa1_rel[k]=potrel1_alfa1[k]+potrel1_alfa2[k];*/

/*copia(&re,&rex);
copia(&im,&imx);*/
NL=678;
status=libera(&wd1);
/*****

/***** CALCULO DE PSD CANAL 2 *****/
DIVISION=2.5;
f=40;
VV=(long)(num_datos);
dimlen=v;
crea(&re);
crea(&im);
transforma(&wd2,VV);

bandas(&subwave);
libera(&histonda);
libera(&integ);
libera(&fase);
pot2_delta[k]=In[1];
potrel2_delta[k]=100*In[1]/(It-In[0]);

```

```

pot2_theta[k]=In[2];
potrel2_theta[k]=100*In[2]/(It-In[0]);

pot2_alfa1[k]=In[3];
potrel2_alfa1[k]=100*In[3]/(It-In[0]);

pot2_alfa2[k]=In[4];
potrel2_alfa2[k]=100*In[4]/(It-In[0]);

alfa2_12[k]=In[3]+In[4];

pot2_total[k]=It;
pot2to_sa[k]=It-In[0];
/*alfa2_rel[k]=potrel2_alfa1[k]+potrel2_alfa2[k];*/
if (VC[2]==16){
    if (pot2_alfa1[k] > mala1){
        mala1=pot2_alfa1[k];
        ma1dr=potrel2_delta[k];
        ma1tr=potrel2_theta[k];
        mala1r=potrel2_alfa1[k];
        mala2r=potrel2_alfa2[k];
        /*printf("maximos %d= %lf %lf %lf %lf
        %lf\n",k,ma1dr,ma1tr,mala1r,mala2r,mala1);*/
        /*PULSA_UNA_TECLA*/
    }
}

NL=691;
status=libera(&wd2);
libera(&re);
libera(&im);
/*****

/***** PARTE DE DIBUJO *****/
if (k==24) {
    arr1_to_wf(pot1_total, (double)25,4,&pot1total);
    arr1_to_wf(pot2_total, (double)25,4,&pot2total);
    arr1_to_wf(pot1_alfa1, (double)25,4,&pot1alfa1);
    arr1_to_wf(pot1_alfa2, (double)25,4,&pot1alfa2);
    arr1_to_wf(pot2_alfa1, (double)25,4,&pot2alfa1);
    arr1_to_wf(pot2_alfa2, (double)25,4,&pot2alfa2);
    arr1_to_wf(pot1_delta, (double)25,4,&pot1delta);
    arr1_to_wf(pot2_delta, (double)25,4,&pot2delta);
    arr1_to_wf(pot1_theta, (double)25,4,&pot1theta);
    arr1_to_wf(pot2_theta, (double)25,4,&pot2theta);
    arr1_to_wf(pot1to_sa, (double)25,4,&pot1tosa);
    arr1_to_wf(pot2to_sa, (double)25,4,&pot2tosa);
    arr1_to_wf(alfa1_12, (double)25,4,&alfa112);
    arr1_to_wf(alfa2_12, (double)25,4,&alfa212);
/*_bios_timeofday(_TIME_GETCLOCK,&end_tick);
fp=fopen("tiempo.tic","w");
fprintf(fp,"ticks transcurridos =%lu\n",end_tick-begin_tick);
fclose(fp);*/
    ee=0;
    num_menu=11;
    general();
    ini_graf();

```

```

abre_graf();
modo=6;
cer=2;
DIVISION=2.5;
f=40;
j=1;
dibuja(&pot1total);
j=2;
dib_2(&pot1delta);
j=3;
dib_2(&pot1theta);
j=4;
dib_2(&pot1alfa1);
j=5;
dib_2(&pot1alfa2);
j=6;
dib_2(&pot1tosa);
j=7;
dib_2(&alfa112);

gr_uncurv(-1);
gr_undef(-1);
j=8;
dibuja(&pot2total);
j=9;
dib_2(&pot2delta);
j=10;
dib_2(&pot2theta);
j=11;
dib_2(&pot2alfa1);
j=12;
dib_2(&pot2alfa2);
j=13;
dib_2(&pot2tosa);
j=14;
dib_2(&alfa212);

NL=817;
/*libera(&wd8);*/
status=gr_pause();
status=gr_reset();
/*libera(&pot1alfa1);
libera(&pot1alfa2);
libera(&pot2alfa1);
libera(&pot2alfa2);
libera(&pot1delta);
libera(&pot2delta);
libera(&pot1theta);
libera(&pot2theta);
libera(&pot1total);
libera(&pot2total);
libera(&pot1tosa);
libera(&alfa112);
libera(&alfa212);*/
status=gr_close();
LIMPIA_PANTALLA
ee=0;

```

```

num_menu=12;
general();
arr1_to_wf(potrel1_alfa1, (double)25,4,&potrel1alfa1);
arr1_to_wf(potrel1_alfa2, (double)25,4,&potrel1alfa2);
arr1_to_wf(potrel2_alfa1, (double)25,4,&potrel2alfa1);
arr1_to_wf(potrel2_alfa2, (double)25,4,&potrel2alfa2);
arr1_to_wf(potrel1_delta, (double)25,4,&potrel1delta);
arr1_to_wf(potrel2_delta, (double)25,4,&potrel2delta);
arr1_to_wf(potrel1_theta, (double)25,4,&potrel1theta);
arr1_to_wf(potrel2_theta, (double)25,4,&potrel2theta);
/*arr1_to_wf(alfa1_rel, (double)25,4,&alfa1rel);
arr1_to_wf(alfa2_rel, (double)25,4,&alfa2rel);*/

ini_graf();
abre_graf();
modo=7;
cer=2;
DIVISION=2.5;
f=40;
j=1;
dibuja(&potrel1delta);
j=2;
dib_2(&potrel1theta);
j=3;
dib_2(&potrel1alfa1);
j=4;
dib_2(&potrel1alfa2);
/*j=5;
dib_2(&alfa1rel);*/
gr_uncurv(-1);
gr_undef(-1);
j=8;
dibuja(&potrel2delta);
j=9;
dib_2(&potrel2theta);
j=10;
dib_2(&potrel2alfa1);
j=11;
dib_2(&potrel2alfa2);
/*j=12;
dib_2(&alfa2rel);*/
NL=817;
/*libera(&wd8);*/
status=gr_pause();
status=gr_reset();
libera(&pot1alfa1);
libera(&pot1alfa2);
libera(&pot2alfa1);
libera(&pot2alfa2);
libera(&pot1delta);
libera(&pot2delta);
libera(&pot1theta);
libera(&pot2theta);
libera(&pot1total);
libera(&pot2total);
libera(&pot1tosa);
libera(&alfa112);

```

```

        libera(&alfa212);
        libera(&potrel1alfa1);
        libera(&potrel1alfa2);
        libera(&potrel2alfa1);
        libera(&potrel2alfa2);
        libera(&potrel1delta);
        libera(&potrel2delta);
        libera(&potrel1theta);
        libera(&potrel2theta);
        /*libera(&alfa1rel);
        libera(&alfa2rel);*/
status=gr_close();
LIMPIA_PANTALLA
if (VC[2]==16){
    printf("DIAGNOSTICO\n\n\n");
    if(maltr>30 && mala2r<10) {
        printf("este paciente parece estar incluido en el grupo de 3-6
años\n");
    }
    else {
        if(maltr<30 && maltr>15 && mala2r<35 && mala2r>5) {
            printf("este paciente parece estar incluido en el grupo de 7-
10 años\n");
        }
        else {
            if(maltr<15 && mala2r>30) {
                printf("este paciente parece estar incluido en el grupo
de 11-14 años\n");
            }
            else {
                printf("Este paciente no puede ser bien
clasificado\n");
            }
        }
    }
}

printf("Los parametros tomados en el máximo de alfa1 absoluta
son:\n\n");
printf("Potencia Relativa en DELTA = %lf\n",maldr);
printf("Potencia Relativa en THETA = %lf\n",maltr);
printf("Potencia Relativa en ALFA1 = %lf\n",ma1a1r);
printf("Potencia Relativa en ALFA2 = %lf\n",ma1a2r);
PULSA_UNA_TECLA
}

}
/* FIN DE IF(K==24)*/
}
/* FIN DE FOR K=1:24*/

/*****/
}
/* FIN DEL ELSE */
LI=LI2;
v=v2;

```

```

}
/* FIN DE FUNCION */
prmcan(){
short inicio,num_datos,canal;
int diml,keep,k;
double
pot1_alfa1[30],pot1_alfa2[30],pot1_theta[30],pot1_delta[30],pot1_total[30];
double
pot2_alfa1[30],pot2_alfa2[30],pot2_theta[30],pot2_delta[30],pot2_total[30];
double
potrel1_alfa1[30],potrel1_alfa2[30],potrel1_theta[30],potrel1_delta[30];
double
potrel2_alfa1[30],potrel2_alfa2[30],potrel2_theta[30],potrel2_delta[30];
double pot1to_sa[30],pot2to_sa[30],alfa1_12[30],alfa2_12[30];
/*double alfa1_rel[30],alfa2_rel[30];*/

/*_bios_timeofday(_TIME_GETCLOCK,&begin_tick);*/
LI2=LI;
v2=v;
if (v<512)
    mensaje4();
else {

    mensajepro();
    for(canal=1;canal<=16;canal+=2){
    printf("canal=%d",canal);
    VC[1]=canal;
    VC[2]=canal+1;
    NL=1171;
    inicio=0;
    j=1;
    switch(tipo) {
        case 'a':
            itoa(VC[j],vfs,10);
            strcpy(NFs,file);
            strcat(NFs,vfs);
            _searchenv(NFs,"DIR",path_buffer);
            leetodo();
            break;
        case 'b':
            strcpy(NFs,file);
            strcat(NFs,".eeg");
            _searchenv(NFs,"DIR",path_buffer);
            leebintodo();
            break;
    }
    j=2;
    switch(tipo) {
        case 'a':
            itoa(VC[j],vfs,10);
            strcpy(NFs,file);
            strcat(NFs,vfs);
            _searchenv(NFs,"DIR",path_buffer);
            leetodo();
            break;
        case 'b':
            strcpy(NFs,file);

```

```

        strcat(NFs, ".eeg");
        _searchenv(NFs, "DIR", path_buffer);
        leebintodo();
        break;
    }
    num_datos=512;
    dimlen=num_datos;
    for (k=0;k<=24;k++) {
        dimlen=num_datos;
        inicio=k*64;
        lii=inicio/100;
        LI=inicio;
        v=512;
        for(j=1;j<=2;j++)
            switch(tipo) {
                case 'a':

                    set_matriz(LI,v);
                    /*leefichero(LI,v);*/
                    /*_bios_timeofday(_TIME_GETCLOCK,&end_tick);
                    fp=fopen("tiempo.tic","w");
                    fprintf(fp,"ticks transcurridos =%lu\n",end_tick-begin_tick);
                    fclose(fp);*/

                    break;
                case 'b':
                    set_matriz(LI,v);
                    /*leebinario(LI,v);*/
                    break;
            }
    }

    modo=3;
    j=1;
    DIVISION=2.5;
    f=40;
    strcpy(modos, "");

    /****** CALCULO DE PSD CANAL 1 *****/
    DIVISION=2.5;
    f=40;
    VV=(long)(num_datos);
    dimlen=v;
    j=1;
    crea(&re);
    crea(&im);
    transforma(&wd1,VV);

    bandas(&subwave);
    libera(&histonda);
    libera(&integ);
    libera(&re);
    libera(&im);
    libera(&fase);
    pot1_delta[k]=In[1];
    potrel1_delta[k]=100*In[1]/(It-In[0]);

    pot1_theta[k]=In[2];

```

```

potrel1_theta[k]=100*In[2]/(It-In[0]);

pot1_alfa1[k]=In[3];
potrel1_alfa1[k]=100*In[3]/(It-In[0]);

pot1_alfa2[k]=In[4];
potrel1_alfa2[k]=100*In[4]/(It-In[0]);

alfa1_12[k]=In[3]+In[4];

pot1_total[k]=It;
pot1to_sa[k]=It-In[0];
/*alfa1_rel[k]=potrel1_alfa1[k]+potrel1_alfa2[k];*/

NL=1272;
status=libera(&wd1);
/*****

/***** CALCULO DE PSD CANAL 2 *****/
DIVISION=2.5;
f=40;
VV=(long)(num_datos);
dimlen=v;
crea(&re);
crea(&im);
transforma(&wd2,VV);

bandas(&subwave);
libera(&histonda);
libera(&integ);
libera(&fase);
pot2_delta[k]=In[1];
potrel2_delta[k]=100*In[1]/(It-In[0]);

pot2_theta[k]=In[2];
potrel2_theta[k]=100*In[2]/(It-In[0]);

pot2_alfa1[k]=In[3];
potrel2_alfa1[k]=100*In[3]/(It-In[0]);

pot2_alfa2[k]=In[4];
potrel2_alfa2[k]=100*In[4]/(It-In[0]);

alfa2_12[k]=In[3]+In[4];

pot2_total[k]=It;
pot2to_sa[k]=It-In[0];
/*alfa2_rel[k]=potrel2_alfa1[k]+potrel2_alfa2[k];*/

NL=1308;
status=libera(&wd2);
libera(&re);
libera(&im);
/*****

```

```

        /***** PARTE DE DIBUJO *****/
/*_bios_timeofday(_TIME_GETCLOCK,&end_tick);
fp=fopen("tiempo.tic","w");
fprintf(fp,"ticks transcurridos =%lu\n",end_tick-begin_tick);
fclose(fp);*/
        NL=1319;
    }
/* FIN DE FOR K=1:24*/
strcpy(vfs, ".m");
strcpy(NFs, "X");
strcat(NFs, file);
strcat(NFs, vfs);

fp=fopen(NFs, "a");
for(k=0;k<=24;k++) {
    fprintf(fp,"pa(%d,.)=[%1f %1f %1f %1f %1f %1f];\n", (canal-
        1)*25+k+1,pot1_total[k],pot1to_sa[k],pot1_delta[k],pot1_theta[k],po
        t1_alfa1[k],pot1_alfa2[k]);
    fprintf(fp,"pr(%d,.)=[%1f %1f %1f %1f];\n", (canal-
        1)*25+k+1,potrel1_delta[k],potrel1_theta[k],potrel1_alfa1[k],potrel
        1_alfa2[k]);
    fprintf(fp,"pa(%d,.)=[%1f %1f %1f %1f %1f
        %1f];\n", canal*25+k+1,pot2_total[k],pot2to_sa[k],pot2_delta[k],pot2
        _theta[k],pot2_alfa1[k],pot2_alfa2[k]);
    fprintf(fp,"pr(%d,.)=[%1f %1f %1f
        %1f];\n", canal*25+k+1,potrel2_delta[k],potrel2_theta[k],potrel2_alf
        a1[k],potrel2_alfa2[k]);
}
fclose(fp);
}

/* fin de for canal*/

/*****/
}
/* FIN DEL ELSE */
LI=LI2;
v=v2;
}

```

APÉNDICE G

PROGRAMAS PARA ANÁLISIS ESTADÍSTICO

## G PROGRAMAS PARA ANÁLISIS ESTADÍSTICO

## CALCU\_VC.M

```
function [var1,var2]=calcu_vc(T);
[v,Av]=eig(cov(T));
[Y,I]=sort(diag(Av));
n=length(I);
size(v);
var1=T*v(:,n);
var2=T*v(:,n-1);
```

---

## CALCU\_4A.M

```
function [CV,errtip,I95,I99,IT95,IT99]=calcu_A(media,desviacion,NUM,t_s)
for i=1:12
    for j=1:4
        CV(i,j)=100*desviacion(i,j)./media(i,j);
        errtip(i,j)=desviacion(i,j)/sqrt(NUM(i)-1);
        I95(i,j)=2*errtip(i,j);
        I99(i,j)=2.6*errtip(i,j);
        IT95(i,j)=t_s(NUM(i)-1,1)*errtip(i,j);
        IT99(i,j)=t_s(NUM(i)-1,2)*errtip(i,j);
    end
end
```

---

## CALCU\_4B.M

```
function [dif,errtip,it95,it99,F,ss]=calcu_2B(NUM,media,desvtip,t_s)
for i=1:12
    for j=i+1:12
        GRAD_LIB=NUM(i)+NUM(j)-2;
        if (GRAD_LIB>30)
            GRAD_LIB=31;
        end
        dif1(i,j)=media(j,1)-media(i,1);
        dif2(i,j)=media(j,2)-media(i,2);
        dif3(i,j)=media(j,3)-media(i,3);
        dif4(i,j)=media(j,4)-media(i,4);
        sig1(i,j)=sqrt((NUM(i)*desvtip(i,1)^2+NUM(j)*desvtip(j,1)^2)/(GRAD_LIB));
        ;
        sig2(i,j)=sqrt((NUM(i)*desvtip(i,2)^2+NUM(j)*desvtip(j,2)^2)/(GRAD_LIB));
        ;
        sig3(i,j)=sqrt((NUM(i)*desvtip(i,3)^2+NUM(j)*desvtip(j,3)^2)/(GRAD_LIB));
        ;
        sig4(i,j)=sqrt((NUM(i)*desvtip(i,4)^2+NUM(j)*desvtip(j,4)^2)/(GRAD_LIB));
        ;
        errtip1(i,j)=sig1(i,j)*sqrt((1/NUM(i))+(1/NUM(j)));
        errtip2(i,j)=sig2(i,j)*sqrt((1/NUM(i))+(1/NUM(j)));
        errtip3(i,j)=sig3(i,j)*sqrt((1/NUM(i))+(1/NUM(j)));
        errtip4(i,j)=sig4(i,j)*sqrt((1/NUM(i))+(1/NUM(j)));
        it951(i,j)=t_s(GRAD_LIB,1)*errtip1(i,j);
        it991(i,j)=t_s(GRAD_LIB,2)*errtip1(i,j);
        it952(i,j)=t_s(GRAD_LIB,1)*errtip2(i,j);
        it992(i,j)=t_s(GRAD_LIB,2)*errtip2(i,j);
```

```

it953(i,j)=t_s(GRAD_LIB,1)*errtip3(i,j);
it993(i,j)=t_s(GRAD_LIB,2)*errtip3(i,j);
it954(i,j)=t_s(GRAD_LIB,1)*errtip4(i,j);
it994(i,j)=t_s(GRAD_LIB,2)*errtip4(i,j);
if (desvtip(i,1)> desvtip(j,1))
    F1(i,j)=desvtip(i,1)^2/desvtip(j,1)^2;
    ss1(i,1)=1;
else
    F1(i,j)=desvtip(j,1)^2/desvtip(i,1)^2;
    ss1(i,j)=0;
end
if (desvtip(i,2)> desvtip(j,2))
    F2(i,j)=desvtip(i,2)^2/desvtip(j,2)^2;
    ss2(i,j)=1;
else
    F2(i,j)=desvtip(j,2)^2/desvtip(i,2)^2;
    ss2(i,j)=0;
end
if (desvtip(i,3)> desvtip(j,3))
    F3(i,j)=desvtip(i,3)^2/desvtip(j,3)^2;
    ss3(i,j)=1;
else
    F3(i,j)=desvtip(j,3)^2/desvtip(i,3)^2;
    ss3(i,j)=0;
end
if (desvtip(i,4)> desvtip(j,4))
    F4(i,j)=desvtip(i,4)^2/desvtip(j,4)^2;
    ss4(i,j)=1;
else
    F4(i,j)=desvtip(j,4)^2/desvtip(i,4)^2;
    ss4(i,j)=0;
end
end
end
dif=[dif1 dif2 dif3 dif4];
errtip=[errtip1 errtip2 errtip3 errtip4];
it95=[it951 it952 it953 it954];
it99=[it991 it992 it993 it994];
F=[F1 F2 F3 F4];
ss=[ss1 ss2 ss3 ss4];

```

---

MIRA\_F.M

```

function [res95,res99]=mira_f(valor,gln,gld,F95,F99)
if (gln<=11 ; gln==13 ; gln==16 ; gln==21 ; gln==25 ; gln==31 ; gln==41)
    FS95=F95(gld-1,gln-1);
    FS99=F99(gld-1,gln-1);
    if (valor<FS95)
        res95=0;
    else
        res95=1;
    end
    if (valor > FS99)
        res99=1;
    else
        res99=0;
    end
end

```

```
end
else
  if (gln==12)
    FS95A=F95(gld-1,10);
    FS95B=F95(gld-1,12);
    FS99A=F99(gld-1,10);
    FS99B=F99(gld-1,12);
  elseif (gln>13 & gln < 16)
    FS95A=F95(gld-1,12);
    FS95B=F95(gld-1,13);
    FS99A=F99(gld-1,12);
    FS99B=F99(gld-1,13);
  elseif (gln>16 & gln < 21)
    FS95A=F95(gld-1,13);
    FS95B=F95(gld-1,14);
    FS99A=F99(gld-1,13);
    FS99B=F99(gld-1,14);
  elseif (gln>21 & gln < 25)
    FS95A=F95(gld-1,14);
    FS95B=F95(gld-1,15);
    FS99A=F99(gld-1,14);
    FS99B=F99(gld-1,15);
  elseif (gln>25 & gln < 31)
    FS95A=F95(gld-1,15);
    FS95B=F95(gld-1,16);
    FS99A=F99(gld-1,15);
    FS99B=F99(gld-1,16);
  elseif (gln>31 & gln < 41)
    FS95A=F95(gld-1,16);
    FS95B=F95(gld-1,17);
    FS99A=F99(gld-1,16);
    FS99B=F99(gld-1,17);
  elseif (gln>41 & gln < 61)
    FS95A=F95(gld-1,17);
    FS95B=F95(gld-1,17);
    FS99A=F99(gld-1,17);
    FS99B=F99(gld-1,17);
  end
  if (valor<FS95A & valor <FS95B)
    res95=0;
  elseif (valor> FS95A & valor > FS95B)
    res95=1;
  else
    res95=0.5;
  end
  if (valor > FS99A & valor > FS99B)
    res99=1;
  elseif (valor < FS99A & valor < FS99B)
    res99=0;
  else
    res99=0.5;
  end
end
end
```

---

```

function dp = dbinar(x,y,mx,my,sx2,sy2,sxy)
% DP=DBINAR(X,Y,varx,vary,covxy)
%
% Devuelve la prob. de P(X,Y) en distribución binormal con
% los parámetros anteriores

sx=sqrt(sx2);
sy=sqrt(sy2);
ro=sxy./(sx*sy);
fn=1/(2*pi*sx*sy*sqrt(1-ro^2));
xn=((x-mx)/sx);
yn=((y-my)/sy);
vec= xn.^2 + yn.^2 - 2*ro*(xn.* yn);
dp= fn * exp( -vec/(2*(1-ro^2)) );

```

---

NIV4PRO\_1.M

```

function
[ssp2,ssp1,ssi1,ssg1]=ni4pro_1(M1_4,M1_1,M1_2,M1_3,C1_4,C1_1,C1_2,C1_3)
% Dibuja la densidad de prob. con líneas de contorno.
% nivelpro
% Datos de cada gaussiana
c1x=M1_1(1);
c1y=M1_1(2);
s1x2=C1_1(1,1);
s1y2=C1_1(2,2);
s1xy=C1_1(1,2);
c2x=M1_3(1);
c2y=M1_3(2);
s2x2=C1_3(1,1);
s2y2=C1_3(2,2);
s2xy=C1_3(1,2);
c1z=M1_2(1);
c2z=M1_2(2);
s3x2=C1_2(1,1);
s3y2=C1_2(2,2);
s3xy=C1_2(1,2);
c1u=M1_4(1);
c2u=M1_4(2);
s4x2=C1_4(1,1);
s4y2=C1_4(2,2);
s4xy=C1_4(1,2);
l1=zeros(60,100);
l2=zeros(60,100);
rx=linspace(-8,12,100);
ry=linspace(-8,4,60);
[x,y]=meshdom(rx,ry);
l1=dbinar(x,y,c1x,c1y,s1x2,s1y2,s1xy);
l2=dbinar(x,y,c2x,c2y,s2x2,s2y2,s2xy);
l3=dbinar(x,y,c1z,c2z,s3x2,s3y2,s3xy);
l4=dbinar(x,y,c1u,c2u,s4x2,s4y2,s4xy);
ssp1=l1./(l1+l2+l3+l4);
ssp2=l2./(l1+l2+l3+l4);
ssi1=l3./(l1+l2+l3+l4);
ssp2=l4./(l1+l2+l3+l4);

```

## PROB\_2G.M

---

```

MXX_1=[mean(var1can(grupo1,:)) mean(var2can(grupo1,:))];
MXX_2=[mean(var1can(grupo2,:)) mean(var2can(grupo2,:))];
CXX_1=cov([var1can(grupo1,:) var2can(grupo1,:)]);
CXX_2=cov([var1can(grupo2,:) var2can(grupo2,:)]);
for i=1:133
x=[var1can(i,:) var2can(i,:)];
L(i,1)=(1/(2*pi*sqrt(det(CXX_1))))*exp(-0.5*(x-MXX_1)*inv(CXX_1)*(x-MXX_1)');
L(i,2)=(1/(2*pi*sqrt(det(CXX_2))))*exp(-0.5*(x-MXX_2)*inv(CXX_2)*(x-MXX_2)');
end
for i=1:133
for j=1:2
Probxx(i,j)=L(i,j)/(L(i,1)+L(i,2));
end
end
clear L;

```

---

## PROB\_3G.M

```

MXX_1=[mean(var1can(grupo1,:)) mean(var2can(grupo1,:))];
MXX_2=[mean(var1can(grupo2,:)) mean(var2can(grupo2,:))];
MXX_3=[mean(var1can(grupo3,:)) mean(var2can(grupo3,:))];
CXX_1=cov([var1can(grupo1,:) var2can(grupo1,:)]);
CXX_2=cov([var1can(grupo2,:) var2can(grupo2,:)]);
CXX_3=cov([var1can(grupo3,:) var2can(grupo3,:)]);
for i=1:133
x=[var1can(i,:) var2can(i,:)];
L(i,1)=(1/(2*pi*sqrt(det(CXX_1))))*exp(-0.5*(x-MXX_1)*inv(CXX_1)*(x-MXX_1)');
L(i,2)=(1/(2*pi*sqrt(det(CXX_2))))*exp(-0.5*(x-MXX_2)*inv(CXX_2)*(x-MXX_2)');
L(i,3)=(1/(2*pi*sqrt(det(CXX_3))))*exp(-0.5*(x-MXX_3)*inv(CXX_3)*(x-MXX_3)');
end
for i=1:133
for j=1:3
Probxx(i,j)=L(i,j)/(L(i,1)+L(i,2)+L(i,3));
end
end
clear L;

```

---

## PROB\_4G.M

```

MXX_1=[mean(var1can(grupo1,:)) mean(var2can(grupo1,:))];
MXX_2=[mean(var1can(grupo2,:)) mean(var2can(grupo2,:))];
MXX_3=[mean(var1can(grupo3,:)) mean(var2can(grupo3,:))];
MXX_4=[mean(var1can(grupo4,:)) mean(var2can(grupo4,:))];
CXX_1=cov([var1can(grupo1,:) var2can(grupo1,:)]);
CXX_2=cov([var1can(grupo2,:) var2can(grupo2,:)]);
CXX_3=cov([var1can(grupo3,:) var2can(grupo3,:)]);
CXX_4=cov([var1can(grupo4,:) var2can(grupo4,:)]);
for i=1:133
x=[var1can(i,:) var2can(i,:)];
L(i,1)=(1/(2*pi*sqrt(det(CXX_1))))*exp(-0.5*(x-MXX_1)*inv(CXX_1)*(x-MXX_1)');
L(i,2)=(1/(2*pi*sqrt(det(CXX_2))))*exp(-0.5*(x-MXX_2)*inv(CXX_2)*(x-MXX_2)');

```

```
L(i,3)=(1/(2*pi*sqrt(det(CXX_3))))*exp(-0.5*(x-MXX_3)*inv(CXX_3)*(x-MXX_3)');
L(i,4)=(1/(2*pi*sqrt(det(CXX_4))))*exp(-0.5*(x-MXX_4)*inv(CXX_4)*(x-MXX_4)');
end
for i=1:133
for j=1:4
Probxx(i,j)=L(i,j)/(L(i,1)+L(i,2)+L(i,3)+L(i,4));
end
end
clear L;
```

APÉNDICE H

TABLAS DE RESULTADOS ESTADÍSTICOS

**H TABLAS DE RESULTADOS ESTADÍSTICOS**

**Tabla H.1** Características univariantes

**1 CASO DE 3 BANDAS: INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA**

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa Gausiano	Banda alfa t de Student	Numero
3	40.8 ± 22.2	40.8 ± 141.0	28.0 ± 19.0	28.0 ± 120.5	15.6 ± 14.8	15.6 ± 93.9	2 *
4	41.2 ± 8.0	41.2 ± 10.2	20.9 ± 7.6	20.9 ± 9.7	22.1 ± 7.0	22.1 ± 9.0	6
5	38.4 ± 12.5	38.4 ± 16.2	14.6 ± 4.6	14.6 ± 5.9	31.9 ± 14.2	31.9 ± 18.2	6
6	33.8 ± 7.2	33.8 ± 8.1	18.2 ± 5.1	18.2 ± 5.7	33.5 ± 13.3	33.5 ± 15.0	10
7	40.8 ± 9.3	40.8 ± 11.4	14.4 ± 4.4	14.4 ± 5.4	30.1 ± 13.6	30.1 ± 16.7	7
8	29.6 ± 4.2	29.6 ± 4.7	11.5 ± 2.9	11.5 ± 3.3	44.3 ± 7.4	44.3 ± 8.3	11
9	26.2 ± 5.6	26.2 ± 6.2	11.6 ± 2.5	11.6 ± 2.8	49.1 ± 9.9	49.1 ± 10.9	12
10	39.8 ± 6.2	39.8 ± 7.6	12.3 ± 3.9	12.3 ± 4.8	33.7 ± 8.5	33.7 ± 10.4	7
11	28.2 ± 4.4	28.2 ± 4.6	9.4 ± 1.7	9.4 ± 1.8	45.2 ± 7.2	45.2 ± 7.6	17
12	24.4 ± 7.5	24.4 ± 8.5	9.1 ± 1.7	9.1 ± 2.0	52.3 ± 13.4	52.3 ± 15.1	10
13	21.5 ± 6.5	21.5 ± 8.3	6.8 ± 1.6	6.8 ± 2.1	62.5 ± 9.2	62.5 ± 11.7	6
14	21.1 ± 6.0	21.1 ± 7.7	6.9 ± 3.1	6.9 ± 4.0	58.4 ± 9.7	58.4 ± 12.4	6

**INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA**

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa Gausiano	Banda alfa t de Student	Numero
3	40.8 ± 28.9	40.8 ± 706.3	28.0 ± 24.7	28.0 ± 603.9	15.6 ± 19.2	15.6 ± 470.4	2 *
4	41.2 ± 10.4	41.2 ± 16.0	20.9 ± 9.9	20.9 ± 15.3	22.1 ± 9.1	22.1 ± 14.2	6
5	38.4 ± 16.3	38.4 ± 25.3	14.6 ± 6.0	14.6 ± 9.3	31.9 ± 18.4	31.9 ± 28.5	6
6	33.8 ± 9.3	33.8 ± 11.6	18.2 ± 6.6	18.2 ± 8.2	33.5 ± 17.2	33.5 ± 21.6	10
7	40.8 ± 12.1	40.8 ± 17.3	14.4 ± 5.7	14.4 ± 8.1	30.1 ± 17.7	30.1 ± 25.2	7
8	29.6 ± 5.5	29.6 ± 6.7	11.5 ± 3.8	11.5 ± 4.7	44.3 ± 9.6	44.3 ± 11.7	11
9	26.2 ± 7.3	26.2 ± 8.7	11.6 ± 3.3	11.6 ± 3.9	49.1 ± 12.9	49.1 ± 15.5	12
10	39.8 ± 8.1	39.8 ± 11.5	12.3 ± 5.1	12.3 ± 7.2	33.7 ± 11.0	33.7 ± 15.8	7
11	28.2 ± 5.7	28.2 ± 6.4	9.4 ± 2.2	9.4 ± 2.5	45.2 ± 9.3	45.2 ± 10.5	17
12	24.4 ± 9.8	24.4 ± 12.2	9.1 ± 2.2	9.1 ± 2.8	52.3 ± 17.4	52.3 ± 21.7	10
13	21.5 ± 8.4	21.5 ± 13.1	6.8 ± 2.1	6.8 ± 3.3	62.5 ± 11.9	62.5 ± 18.5	6
14	21.1 ± 7.8	21.1 ± 12.0	6.9 ± 4.1	6.9 ± 6.3	58.4 ± 12.6	58.4 ± 19.5	6

Tabla H.2 Comparación de medias.

variable	edades grupo1	edades grupo2	edades grupo3	g1 <> g2	g1 <> g3	g2 <> g3
b: delta c: 16	3 - 7	8 - 10	11 - 14	4, 7	si	8, 10
b: theta c: 16	3 - 7	8 - 10	11 - 14	3, 4, 6	si 11	8, 10
b: alfa c: 16	3 - 7	8 - 10	11 - 14	3, 4, 7	si	10

Tabla H.3 Comparación de varianzas.

variable	edades grupo1	edades grupo2	edades grupo3	g1	g2	g3
b: delta c: 16	3 - 7	8 - 10	11 - 14	si	si	si
b: theta c: 16	3 - 7	8 - 10	11 - 14	si	si	si
b: alfa c: 16	3 - 7	8 - 10	11 - 14	si	si	si

**2 CASO DE 4 BANDAS:**

**Tabla H.4** Características univariantes

**CANAL I MÁXIMO EN BANDA DELTA: INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA**

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	25.9 ± 10.6	25.9 ± 12.5	52.3 ± 10.3	52.3 ± 12.2	10.9 ± 2.4	10.9 ± 2.9	4.5 ± 2.1	4.5 ± 2.5	8
4	27.5 ± 10.0	27.5 ± 11.3	43.7 ± 11.3	43.7 ± 12.7	17.9 ± 8.8	17.9 ± 10.0	4.4 ± 1.4	4.4 ± 1.6	10
5	37.5 ± 9.3	37.5 ± 10.7	37.0 ± 9.9	37.0 ± 11.4	12.9 ± 5.5	12.9 ± 6.4	7.0 ± 3.2	7.0 ± 3.7	9
6	35.7 ± 5.2	35.7 ± 5.6	33.3 ± 4.1	33.3 ± 4.5	13.3 ± 3.8	13.3 ± 4.1	9.9 ± 4.1	9.9 ± 4.4	13
7	33.7 ± 8.2	33.7 ± 9.1	30.1 ± 5.0	30.1 ± 5.5	13.3 ± 6.5	13.3 ± 7.2	11.3 ± 5.0	11.3 ± 5.5	12
8	32.3 ± 6.4	32.3 ± 7.1	33.5 ± 4.5	33.5 ± 5.0	10.5 ± 2.6	10.5 ± 2.9	13.9 ± 5.9	13.9 ± 6.5	9
9	30.2 ± 7.2	30.2 ± 7.9	32.9 ± 6.9	32.9 ± 7.6	13.4 ± 5.3	13.4 ± 5.9	13.9 ± 3.7	13.9 ± 4.0	12
10	32.3 ± 11.1	32.3 ± 12.3	34.2 ± 5.6	34.2 ± 6.2	10.5 ± 4.2	10.5 ± 4.6	9.9 ± 3.6	9.9 ± 4.0	12
11	30.1 ± 6.3	30.1 ± 6.7	24.6 ± 3.3	24.6 ± 3.5	13.8 ± 3.8	13.8 ± 4.0	19.1 ± 5.7	19.1 ± 6.1	17
12	31.3 ± 7.1	31.3 ± 7.7	23.8 ± 4.6	23.8 ± 5.0	14.0 ± 5.4	14.0 ± 5.9	18.6 ± 7.6	18.6 ± 8.3	13
13	28.6 ± 5.0	28.6 ± 5.8	22.5 ± 5.3	22.5 ± 6.1	18.3 ± 11.2	18.3 ± 13.0	18.3 ± 7.9	18.3 ± 9.2	9
14	32.9 ± 9.4	32.9 ± 10.8	25.9 ± 3.9	25.9 ± 4.5	10.2 ± 8.3	10.2 ± 9.6	16.3 ± 7.6	16.3 ± 8.8	8

**INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA**

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	25.9 ± 13.8	25.9 ± 18.6	52.3 ± 13.4	52.3 ± 18.0	10.9 ± 3.2	10.9 ± 4.3	4.5 ± 2.8	4.5 ± 3.8	8
4	27.5 ± 13.0	27.5 ± 16.2	43.7 ± 14.7	43.7 ± 18.3	17.9 ± 11.5	17.9 ± 14.4	4.4 ± 1.8	4.4 ± 2.3	10
5	37.5 ± 12.0	37.5 ± 15.5	37.0 ± 12.8	37.0 ± 16.5	12.9 ± 7.3	12.9 ± 9.3	7.0 ± 4.2	7.0 ± 5.4	9
6	35.7 ± 6.7	35.7 ± 7.9	33.3 ± 5.4	33.3 ± 6.3	13.3 ± 4.9	13.3 ± 5.7	9.9 ± 5.3	9.9 ± 6.2	13
7	33.7 ± 10.7	33.7 ± 12.8	30.1 ± 6.5	30.1 ± 7.7	13.3 ± 8.5	13.3 ± 10.1	11.3 ± 6.5	11.3 ± 7.7	12
8	32.3 ± 8.3	32.3 ± 10.1	33.5 ± 5.8	33.5 ± 7.1	10.5 ± 3.4	10.5 ± 4.1	13.9 ± 7.7	13.9 ± 9.3	9
9	30.2 ± 9.3	30.2 ± 11.2	32.9 ± 9.0	32.9 ± 10.8	13.4 ± 6.9	13.4 ± 8.3	13.9 ± 4.8	13.9 ± 5.7	12
10	32.3 ± 14.5	32.3 ± 17.3	34.2 ± 7.3	34.2 ± 8.7	10.5 ± 5.4	10.5 ± 6.5	9.9 ± 4.7	9.9 ± 5.6	12
11	30.1 ± 8.2	30.1 ± 9.2	24.6 ± 4.3	24.6 ± 4.8	13.8 ± 4.9	13.8 ± 5.6	19.1 ± 7.5	19.1 ± 8.4	17
12	31.3 ± 9.2	31.3 ± 10.8	23.8 ± 6.0	23.8 ± 7.0	14.0 ± 7.0	14.0 ± 8.2	18.6 ± 9.9	18.6 ± 11.6	13
13	28.6 ± 6.5	28.6 ± 8.5	22.5 ± 6.8	22.5 ± 8.8	18.3 ± 14.6	18.3 ± 18.8	18.3 ± 10.3	18.3 ± 13.3	9
14	32.9 ± 12.2	32.9 ± 15.7	25.9 ± 5.0	25.9 ± 6.5	10.2 ± 10.8	10.2 ± 13.9	16.3 ± 9.9	16.3 ± 12.8	8

CANAL 1 MÁXIMO EN BANDA THETA

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	29.6 ± 11.7	29.6 ± 13.8	51.9 ± 15.2	51.9 ± 17.9	8.7 ± 4.0	8.7 ± 4.7	4.1 ± 2.0	4.1 ± 2.4	8
4	36.2 ± 7.3	36.2 ± 8.3	42.4 ± 9.2	42.4 ± 10.4	11.6 ± 4.3	11.6 ± 4.9	4.0 ± 1.2	4.0 ± 1.4	10
5	33.7 ± 12.2	33.7 ± 14.1	40.7 ± 10.9	40.7 ± 12.5	12.6 ± 5.7	12.6 ± 6.7	6.9 ± 2.7	6.9 ± 3.1	9
6	29.1 ± 8.0	29.1 ± 8.7	36.2 ± 5.4	36.2 ± 5.9	15.4 ± 4.0	15.4 ± 4.4	11.7 ± 4.4	11.7 ± 4.8	13
7	32.0 ± 5.5	32.0 ± 6.0	34.6 ± 7.2	34.6 ± 7.9	11.9 ± 6.7	11.9 ± 7.4	11.5 ± 5.3	11.5 ± 5.8	12
8	28.2 ± 5.7	28.2 ± 6.3	35.7 ± 5.4	35.7 ± 6.0	10.9 ± 2.5	10.9 ± 2.7	14.7 ± 6.2	14.7 ± 6.9	9
9	33.7 ± 7.5	33.7 ± 8.3	29.7 ± 6.0	29.7 ± 6.5	10.8 ± 4.0	10.8 ± 4.4	15.3 ± 5.5	15.3 ± 6.1	12
10	34.5 ± 9.9	34.5 ± 10.9	31.9 ± 4.2	31.9 ± 4.7	10.5 ± 4.0	10.5 ± 4.4	9.9 ± 3.9	9.9 ± 4.3	12
11	27.0 ± 6.0	27.0 ± 6.4	26.2 ± 4.1	26.2 ± 4.4	14.9 ± 4.3	14.9 ± 4.5	18.6 ± 6.3	18.6 ± 6.7	17
12	31.1 ± 8.7	31.1 ± 9.5	27.0 ± 3.3	27.0 ± 3.6	12.2 ± 5.4	12.2 ± 5.9	16.7 ± 6.8	16.7 ± 7.4	13
13	29.4 ± 8.9	29.4 ± 10.3	24.4 ± 5.3	24.4 ± 6.2	14.0 ± 7.2	14.0 ± 8.3	18.5 ± 10.3	18.5 ± 11.9	9
14	34.9 ± 10.1	34.9 ± 11.7	23.7 ± 3.0	23.7 ± 3.4	11.9 ± 8.3	11.9 ± 9.6	16.7 ± 8.1	16.7 ± 9.4	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	29.6 ± 15.2	29.6 ± 20.4	51.9 ± 19.7	51.9 ± 26.5	8.7 ± 5.2	8.7 ± 6.9	4.1 ± 2.6	4.1 ± 3.5	8
4	36.2 ± 9.5	36.2 ± 11.9	42.4 ± 12.0	42.4 ± 14.9	11.6 ± 5.6	11.6 ± 7.0	4.0 ± 1.6	4.0 ± 1.9	10
5	33.7 ± 15.9	33.7 ± 20.4	40.7 ± 14.1	40.7 ± 18.2	12.6 ± 7.5	12.6 ± 9.7	6.9 ± 3.5	6.9 ± 4.5	9
6	29.1 ± 10.4	29.1 ± 12.2	36.2 ± 7.0	36.2 ± 8.2	15.4 ± 5.3	15.4 ± 6.2	11.7 ± 5.7	11.7 ± 6.7	13
7	32.0 ± 7.1	32.0 ± 8.5	34.6 ± 9.4	34.6 ± 11.2	11.9 ± 8.7	11.9 ± 10.4	11.5 ± 6.9	11.5 ± 8.2	12
8	28.2 ± 7.4	28.2 ± 9.0	35.7 ± 7.0	35.7 ± 8.5	10.9 ± 3.2	10.9 ± 3.9	14.7 ± 8.1	14.7 ± 9.8	9
9	33.7 ± 9.7	33.7 ± 11.7	29.7 ± 7.7	29.7 ± 9.3	10.8 ± 5.2	10.8 ± 6.3	15.3 ± 7.2	15.3 ± 8.6	12
10	34.5 ± 12.9	34.5 ± 15.4	31.9 ± 5.5	31.9 ± 6.5	10.5 ± 5.2	10.5 ± 6.2	9.9 ± 5.0	9.9 ± 6.0	12
11	27.0 ± 7.8	27.0 ± 8.8	26.2 ± 5.4	26.2 ± 6.0	14.9 ± 5.6	14.9 ± 6.3	18.6 ± 8.2	18.6 ± 9.2	17
12	31.1 ± 11.4	31.1 ± 13.3	27.0 ± 4.2	27.0 ± 5.0	12.2 ± 7.1	12.2 ± 8.3	16.7 ± 8.9	16.7 ± 10.4	13
13	29.4 ± 11.6	29.4 ± 15.0	24.4 ± 6.9	24.4 ± 8.9	14.0 ± 9.4	14.0 ± 12.1	18.5 ± 13.4	18.5 ± 17.2	9
14	34.9 ± 13.1	34.9 ± 16.9	23.7 ± 3.9	23.7 ± 5.0	11.9 ± 10.8	11.9 ± 13.9	16.7 ± 10.5	16.7 ± 13.5	8

CANAL I MÁXIMO EN BANDA ALFA I

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	25.8 ± 7.7	25.8 ± 9.1	50.5 ± 10.0	50.5 ± 11.7	12.4 ± 2.9	12.4 ± 3.5	4.7 ± 1.8	4.7 ± 2.1	8
4	33.1 ± 8.6	33.1 ± 9.7	40.5 ± 8.1	40.5 ± 9.2	14.3 ± 4.2	14.3 ± 4.7	5.0 ± 2.0	5.0 ± 2.3	10
5	32.1 ± 10.5	32.1 ± 12.1	39.3 ± 10.3	39.3 ± 11.9	16.2 ± 5.5	16.2 ± 6.4	6.6 ± 3.2	6.6 ± 3.7	9
6	30.9 ± 8.1	30.9 ± 8.8	33.2 ± 5.0	33.2 ± 5.4	16.1 ± 4.4	16.1 ± 4.7	12.2 ± 4.7	12.2 ± 5.2	13
7	31.0 ± 5.1	31.0 ± 5.6	33.9 ± 6.9	33.9 ± 7.6	11.9 ± 6.3	11.9 ± 7.0	12.1 ± 5.1	12.1 ± 5.7	12
8	31.1 ± 4.0	31.1 ± 4.4	31.3 ± 5.7	31.3 ± 6.4	13.7 ± 2.9	13.7 ± 3.3	13.5 ± 4.7	13.5 ± 5.2	9
9	33.0 ± 6.9	33.0 ± 7.6	31.6 ± 8.3	31.6 ± 9.1	14.1 ± 5.3	14.1 ± 5.8	11.2 ± 3.5	11.2 ± 3.9	12
10	40.5 ± 9.3	40.5 ± 10.3	30.0 ± 5.0	30.0 ± 5.5	10.2 ± 3.5	10.2 ± 3.9	8.4 ± 3.7	8.4 ± 4.1	12
11	26.1 ± 5.0	26.1 ± 5.4	27.7 ± 2.8	27.7 ± 2.9	15.1 ± 4.3	15.1 ± 4.6	17.7 ± 5.2	17.7 ± 5.6	17
12	30.9 ± 6.5	30.9 ± 7.1	26.4 ± 4.2	26.4 ± 4.6	13.8 ± 5.2	13.8 ± 5.7	15.5 ± 7.8	15.5 ± 8.5	13
13	25.4 ± 6.7	25.4 ± 7.8	25.2 ± 7.1	25.2 ± 8.2	16.7 ± 10.9	16.7 ± 12.6	19.0 ± 1.5	19.0 ± 13.4	9
14	33.0 ± 8.4	33.0 ± 9.7	23.3 ± 4.3	23.3 ± 4.9	15.3 ± 10.3	15.3 ± 11.9	14.4 ± 6.1	14.4 ± 7.0	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	25.8 ± 10.0	25.8 ± 13.5	50.5 ± 12.9	50.5 ± 17.4	12.4 ± 3.8	12.4 ± 5.2	4.7 ± 2.3	4.7 ± 3.1	8
4	33.1 ± 11.2	33.1 ± 13.9	40.5 ± 10.5	40.5 ± 13.2	14.3 ± 5.5	14.3 ± 6.8	5.0 ± 2.6	5.0 ± 3.3	10
5	32.1 ± 13.6	32.1 ± 17.6	39.3 ± 13.4	39.3 ± 17.2	16.2 ± 7.2	16.2 ± 9.2	6.6 ± 4.1	6.6 ± 5.3	9
6	30.9 ± 10.5	30.9 ± 12.3	33.2 ± 6.4	33.2 ± 7.5	16.1 ± 5.7	16.1 ± 6.7	12.2 ± 6.2	12.2 ± 7.2	13
7	31.0 ± 6.7	31.0 ± 8.0	33.9 ± 9.0	33.9 ± 10.7	11.9 ± 8.2	11.9 ± 9.9	12.1 ± 6.7	12.1 ± 8.0	12
8	31.1 ± 5.2	31.1 ± 6.3	31.3 ± 7.4	31.3 ± 9.0	13.7 ± 3.8	13.7 ± 4.6	13.5 ± 6.0	13.5 ± 7.4	9
9	33.0 ± 9.0	33.0 ± 10.8	31.6 ± 10.7	31.6 ± 12.8	14.1 ± 6.9	14.1 ± 8.2	11.2 ± 4.6	11.2 ± 5.5	12
10	40.5 ± 12.1	40.5 ± 14.5	30.0 ± 6.5	30.0 ± 7.7	10.2 ± 4.6	10.2 ± 5.5	8.4 ± 4.9	8.4 ± 5.8	12
11	26.1 ± 6.5	26.1 ± 7.4	27.7 ± 3.6	27.7 ± 4.0	15.1 ± 5.5	15.1 ± 6.3	17.7 ± 6.8	17.7 ± 7.7	17
12	30.9 ± 8.5	30.9 ± 9.9	26.4 ± 5.5	26.4 ± 6.5	13.8 ± 6.8	13.8 ± 8.0	15.5 ± 10.1	15.5 ± 11.9	13
13	25.4 ± 8.8	25.4 ± 11.3	25.2 ± 9.2	25.2 ± 11.9	16.7 ± 14.2	16.7 ± 18.3	19.0 ± 15.0	19.0 ± 19.4	9
14	33.0 ± 10.9	33.0 ± 14.0	23.3 ± 5.5	23.3 ± 7.1	15.3 ± 13.4	15.3 ± 17.2	14.4 ± 7.9	14.4 ± 10.2	8

CANAL I MÁXIMO EN BANDA ALFA 2

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	30.0 ± 9.2	30.0 ± 10.8	46.0 ± 8.7	46.0 ± 10.2	12.1 ± 3.1	12.1 ± 3.7	5.2 ± 2.1	5.2 ± 2.5	8
4	31.9 ± 6.8	31.9 ± 7.6	40.1 ± 9.8	40.1 ± 11.1	17.2 ± 7.8	17.2 ± 8.8	4.7 ± 2.4	4.7 ± 2.7	10
5	34.3 ± 9.2	34.3 ± 10.6	40.5 ± 10.0	40.5 ± 11.6	12.4 ± 4.7	12.4 ± 5.5	6.7 ± 3.1	6.7 ± 3.6	9
6	32.7 ± 5.4	32.7 ± 5.9	34.8 ± 4.9	34.8 ± 5.3	15.6 ± 3.7	15.6 ± 4.1	9.5 ± 2.5	9.5 ± 2.7	13
7	36.8 ± 8.8	36.8 ± 9.6	29.0 ± 5.8	29.0 ± 6.4	10.5 ± 5.0	10.5 ± 5.5	11.7 ± 4.3	11.7 ± 4.7	12
8	29.8 ± 5.0	29.8 ± 5.5	30.9 ± 4.7	30.9 ± 5.2	13.4 ± 3.3	13.4 ± 3.7	14.8 ± 6.6	14.8 ± 7.3	9
9	31.7 ± 5.9	31.7 ± 6.5	33.2 ± 5.4	33.2 ± 5.9	12.5 ± 5.5	12.5 ± 6.0	12.3 ± 3.7	12.3 ± 4.2	12
10	34.4 ± 8.0	34.4 ± 8.8	34.7 ± 4.7	34.7 ± 5.2	9.0 ± 2.4	9.0 ± 2.7	9.1 ± 3.3	9.1 ± 3.6	12
11	25.9 ± 6.3	25.9 ± 6.7	24.8 ± 3.9	24.8 ± 4.1	15.7 ± 5.3	15.7 ± 5.7	20.8 ± 6.3	20.8 ± 6.6	17
12	27.6 ± 6.6	27.6 ± 7.2	28.2 ± 2.9	28.2 ± 3.1	12.9 ± 6.1	12.9 ± 6.6	17.8 ± 7.5	17.8 ± 8.2	13
13	27.4 ± 9.6	27.4 ± 11.1	25.8 ± 3.8	25.8 ± 4.4	17.8 ± 9.6	17.8 ± 11.1	17.0 ± 10.3	17.0 ± 11.9	9
14	32.9 ± 9.0	32.9 ± 10.4	25.8 ± 3.5	25.8 ± 4.0	12.6 ± 9.6	12.6 ± 11.1	15.3 ± 6.5	15.3 ± 7.6	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	30.0 ± 11.9	30.0 ± 16.1	46.0 ± 11.3	46.0 ± 15.2	12.1 ± 4.1	12.1 ± 5.5	5.2 ± 2.7	5.2 ± 3.7	8
4	31.9 ± 8.8	31.9 ± 11.0	40.1 ± 12.7	40.1 ± 15.9	17.2 ± 10.2	17.2 ± 12.7	4.7 ± 3.1	4.7 ± 3.9	10
5	34.3 ± 11.9	34.3 ± 15.4	40.5 ± 13.0	40.5 ± 16.8	12.4 ± 6.2	12.4 ± 8.0	6.7 ± 4.0	6.7 ± 5.2	9
6	32.7 ± 7.1	32.7 ± 8.3	34.8 ± 6.4	34.8 ± 7.5	15.6 ± 4.9	15.6 ± 5.7	9.5 ± 3.2	9.5 ± 3.8	13
7	36.8 ± 11.4	36.8 ± 13.6	29.0 ± 7.5	29.0 ± 9.0	10.5 ± 6.5	10.5 ± 7.7	11.7 ± 5.5	11.7 ± 6.6	12
8	29.8 ± 6.5	29.8 ± 7.9	30.9 ± 6.0	30.9 ± 7.4	13.4 ± 4.3	13.4 ± 5.3	14.8 ± 8.5	14.8 ± 10.4	9
9	31.7 ± 7.7	31.7 ± 9.2	33.2 ± 7.0	33.2 ± 8.4	12.5 ± 7.1	12.5 ± 8.5	12.3 ± 4.9	12.3 ± 5.9	12
10	34.4 ± 10.4	34.4 ± 12.5	34.7 ± 6.1	34.7 ± 7.3	9.0 ± 3.2	9.0 ± 3.7	9.1 ± 4.3	9.1 ± 5.1	12
11	25.9 ± 8.2	25.9 ± 9.3	24.8 ± 5.0	24.8 ± 5.7	15.7 ± 6.9	15.7 ± 7.8	20.8 ± 8.1	20.8 ± 9.2	17
12	27.6 ± 8.6	27.6 ± 10.1	28.2 ± 3.7	28.2 ± 4.4	12.9 ± 7.9	12.9 ± 9.3	17.8 ± 9.8	17.8 ± 11.5	13
13	27.4 ± 12.5	27.4 ± 16.0	25.8 ± 5.0	25.8 ± 6.4	17.8 ± 12.5	17.8 ± 16.0	17.0 ± 13.4	17.0 ± 17.2	9
14	32.9 ± 11.7	32.9 ± 15.1	25.8 ± 4.6	25.8 ± 5.9	12.6 ± 12.5	12.6 ± 16.0	15.3 ± 8.5	15.3 ± 11.0	8

CANAL 4 MÁXIMO BANDA DELTA  
INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	24.0 ± 12.5	24.0 ± 14.7	52.6 ± 13.1	52.6 ± 15.4	12.9 ± 6.4	12.9 ± 7.6	4.3 ± 2.4	4.3 ± 2.9	8
4	33.3 ± 7.1	33.3 ± 8.0	41.8 ± 6.1	41.8 ± 6.9	13.4 ± 3.5	13.4 ± 3.9	5.1 ± 2.0	5.1 ± 2.3	10
5	36.7 ± 8.7	36.7 ± 10.1	39.0 ± 8.3	39.0 ± 9.6	12.2 ± 2.4	12.2 ± 2.7	5.5 ± 1.8	5.5 ± 2.1	9
6	33.8 ± 4.1	33.8 ± 4.5	33.0 ± 5.7	33.0 ± 6.2	14.0 ± 4.9	14.0 ± 5.3	10.3 ± 3.0	10.3 ± 3.3	13
7	36.7 ± 8.2	36.7 ± 9.1	27.9 ± 3.7	27.9 ± 4.0	10.8 ± 4.7	10.8 ± 5.2	14.6 ± 5.2	14.6 ± 5.7	12
8	32.4 ± 5.4	32.4 ± 6.0	32.0 ± 2.4	32.0 ± 2.7	11.5 ± 2.8	11.5 ± 3.1	15.8 ± 4.0	15.8 ± 4.4	9
9	33.8 ± 5.7	33.8 ± 6.3	32.0 ± 6.4	32.0 ± 7.0	11.8 ± 4.5	11.8 ± 4.9	11.0 ± 3.0	11.0 ± 3.3	12
10	33.9 ± 9.2	33.9 ± 10.1	34.4 ± 4.3	34.4 ± 4.7	9.2 ± 3.1	9.2 ± 3.4	9.7 ± 4.6	9.7 ± 5.1	12
11	22.9 ± 3.8	22.9 ± 4.0	27.6 ± 4.8	27.6 ± 5.0	14.3 ± 4.4	14.3 ± 4.7	21.9 ± 6.9	21.9 ± 7.3	17
12	29.3 ± 7.4	29.3 ± 8.0	25.7 ± 2.5	25.7 ± 2.7	14.4 ± 4.8	14.4 ± 5.3	16.0 ± 5.9	16.0 ± 6.5	13
13	28.0 ± 8.6	28.0 ± 9.9	21.4 ± 6.0	21.4 ± 7.0	17.3 ± 10.1	17.3 ± 11.7	22.1 ± 12.1	22.1 ± 13.9	9
14	36.4 ± 5.7	36.4 ± 6.6	27.7 ± 5.4	27.7 ± 6.2	11.3 ± 7.8	11.3 ± 9.0	11.9 ± 3.7	11.9 ± 4.3	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	24.0 ± 16.2	24.0 ± 21.8	52.6 ± 17.0	52.6 ± 22.9	12.9 ± 8.4	12.9 ± 11.2	4.3 ± 3.2	4.3 ± 4.3	8
4	33.3 ± 9.3	33.3 ± 11.5	41.8 ± 8.0	41.8 ± 10.0	13.4 ± 4.5	13.4 ± 5.6	5.1 ± 2.7	5.1 ± 3.3	10
5	36.7 ± 11.4	36.7 ± 14.6	39.0 ± 10.8	39.0 ± 14.0	12.2 ± 3.1	12.2 ± 4.0	5.5 ± 2.4	5.5 ± 3.0	9
6	33.8 ± 5.4	33.8 ± 6.3	33.0 ± 7.4	33.0 ± 8.6	14.0 ± 6.3	14.0 ± 7.4	10.3 ± 3.9	10.3 ± 4.6	13
7	36.7 ± 10.7	36.7 ± 12.8	27.9 ± 4.8	27.9 ± 5.7	10.8 ± 6.1	10.8 ± 7.3	14.6 ± 6.7	14.6 ± 8.0	12
8	32.4 ± 7.0	32.4 ± 8.5	32.0 ± 3.1	32.0 ± 3.8	11.5 ± 3.6	11.5 ± 4.4	15.8 ± 5.1	15.8 ± 6.3	9
9	33.8 ± 7.4	33.8 ± 8.9	32.0 ± 8.3	32.0 ± 10.0	11.8 ± 5.8	11.8 ± 7.0	11.0 ± 3.9	11.0 ± 4.7	12
10	33.9 ± 11.9	33.9 ± 14.3	34.4 ± 5.5	34.4 ± 6.7	9.2 ± 4.0	9.2 ± 4.8	9.7 ± 6.0	9.7 ± 7.2	12
11	22.9 ± 4.9	22.9 ± 5.5	27.6 ± 6.2	27.6 ± 7.0	14.3 ± 5.7	14.3 ± 6.4	21.9 ± 8.9	21.9 ± 10.0	17
12	29.3 ± 9.6	29.3 ± 11.3	25.7 ± 3.2	25.7 ± 3.8	14.4 ± 6.3	14.4 ± 7.3	16.0 ± 7.7	16.0 ± 9.0	13
13	28.0 ± 11.2	28.0 ± 14.4	21.4 ± 7.9	21.4 ± 10.1	17.3 ± 13.1	17.3 ± 16.9	22.1 ± 15.7	22.1 ± 20.2	9
14	36.4 ± 7.4	36.4 ± 9.5	27.7 ± 7.0	27.7 ± 9.0	11.3 ± 10.2	11.3 ± 13.1	11.9 ± 4.8	11.9 ± 6.2	8

CANAL 4 MÁXIMO BANDA THETA  
INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	26.3 ± 13.5	26.3 ± 15.9	52.6 ± 16.0	52.6 ± 18.9	9.2 ± 3.5	9.2 ± 4.2	5.6 ± 2.9	5.6 ± 3.4	8
4	38.2 ± 9.5	38.2 ± 10.7	37.8 ± 5.7	37.8 ± 6.4	13.1 ± 4.9	13.1 ± 5.5	5.0 ± 1.6	5.0 ± 1.8	10
5	36.0 ± 12.0	36.0 ± 13.8	39.2 ± 10.7	39.2 ± 12.4	12.4 ± 3.8	12.4 ± 4.4	6.6 ± 2.9	6.6 ± 3.3	9
6	28.9 ± 5.5	28.9 ± 6.0	35.0 ± 4.0	35.0 ± 4.4	16.2 ± 3.5	16.2 ± 3.9	11.6 ± 3.5	11.6 ± 3.8	13
7	37.6 ± 5.2	37.6 ± 5.7	32.8 ± 5.0	32.8 ± 5.5	9.7 ± 5.3	9.7 ± 5.8	11.2 ± 4.3	11.2 ± 4.7	12
8	31.9 ± 7.1	31.9 ± 7.9	32.7 ± 4.7	32.7 ± 5.3	9.9 ± 2.7	9.9 ± 3.0	16.5 ± 5.2	16.5 ± 5.9	9
9	33.3 ± 6.4	33.3 ± 7.0	28.7 ± 4.2	28.7 ± 4.6	12.7 ± 4.5	12.7 ± 5.0	13.2 ± 5.1	13.2 ± 5.5	12
10	34.8 ± 9.4	34.8 ± 10.4	34.2 ± 4.9	34.2 ± 5.4	10.1 ± 3.5	10.1 ± 3.9	8.7 ± 3.5	8.7 ± 3.9	12
11	26.4 ± 5.8	26.4 ± 6.2	27.3 ± 4.5	27.3 ± 4.8	14.8 ± 5.8	14.8 ± 6.1	19.3 ± 4.6	19.3 ± 4.9	17
12	28.1 ± 7.4	28.1 ± 8.1	27.1 ± 4.1	27.1 ± 4.5	12.5 ± 5.3	12.5 ± 5.7	17.1 ± 6.1	17.1 ± 6.7	13
13	30.3 ± 10.6	30.3 ± 12.3	19.7 ± 4.7	19.7 ± 5.4	15.2 ± 7.5	15.2 ± 8.6	24.6 ± 11.7	24.6 ± 13.6	9
14	36.2 ± 10.0	36.2 ± 11.5	22.0 ± 4.3	22.0 ± 5.0	12.3 ± 8.9	12.3 ± 10.3	16.2 ± 7.7	16.2 ± 8.9	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	26.3 ± 17.5	26.3 ± 23.6	52.6 ± 20.8	52.6 ± 28.0	9.2 ± 4.6	9.2 ± 6.2	5.6 ± 3.8	5.6 ± 5.0	8
4	38.2 ± 12.3	38.2 ± 15.4	37.8 ± 7.4	37.8 ± 9.2	13.1 ± 6.3	13.1 ± 7.9	5.0 ± 2.0	5.0 ± 2.5	10
5	36.0 ± 15.5	36.0 ± 20.1	39.2 ± 14.0	39.2 ± 18.0	12.4 ± 5.0	12.4 ± 6.4	6.6 ± 3.7	6.6 ± 4.8	9
6	28.9 ± 7.2	28.9 ± 8.4	35.0 ± 5.2	35.0 ± 6.1	16.2 ± 4.6	16.2 ± 5.4	11.6 ± 4.6	11.6 ± 5.3	13
7	37.6 ± 6.7	37.6 ± 8.0	32.8 ± 6.5	32.8 ± 7.8	9.7 ± 6.8	9.7 ± 8.2	11.2 ± 5.5	11.2 ± 6.7	12
8	31.9 ± 9.2	31.9 ± 11.3	32.7 ± 6.2	32.7 ± 7.5	9.9 ± 3.5	9.9 ± 4.2	16.5 ± 6.8	16.5 ± 8.3	9
9	33.3 ± 8.3	33.3 ± 9.9	28.7 ± 5.4	28.7 ± 6.5	12.7 ± 5.9	12.7 ± 7.1	13.2 ± 6.6	13.2 ± 7.9	12
10	34.8 ± 12.3	34.8 ± 14.7	34.2 ± 6.4	34.2 ± 7.6	10.1 ± 4.5	10.1 ± 5.5	8.7 ± 4.6	8.7 ± 5.5	12
11	26.4 ± 7.5	26.4 ± 8.5	27.3 ± 5.9	27.3 ± 6.7	14.8 ± 7.5	14.8 ± 8.4	19.3 ± 6.0	19.3 ± 6.8	17
12	28.1 ± 9.7	28.1 ± 11.3	27.1 ± 5.4	27.1 ± 6.3	12.5 ± 6.9	12.5 ± 8.0	17.1 ± 7.9	17.1 ± 9.3	13
13	30.3 ± 13.8	30.3 ± 17.8	19.7 ± 6.1	19.7 ± 7.8	15.2 ± 9.7	15.2 ± 12.5	24.6 ± 15.3	24.6 ± 19.7	9
14	36.2 ± 13.0	36.2 ± 16.7	22.0 ± 5.6	22.0 ± 7.2	12.3 ± 11.6	12.3 ± 14.9	16.2 ± 10.0	16.2 ± 12.9	8

CANAL 4 MÁXIMO BANDA ALFA 1

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	24.8 ± 8.8	24.8 ± 10.4	50.3 ± 13.3	50.3 ± 15.7	14.3 ± 8.0	14.3 ± 9.4	4.5 ± 1.9	4.5 ± 2.3	8
4	38.1 ± 8.7	38.1 ± 9.8	36.4 ± 6.5	36.4 ± 7.4	15.4 ± 5.4	15.4 ± 6.1	4.1 ± 1.4	4.1 ± 1.5	10
5	33.4 ± 8.9	33.4 ± 10.2	39.9 ± 9.5	39.9 ± 11.0	13.3 ± 2.8	13.3 ± 3.3	6.9 ± 3.3	6.9 ± 3.8	9
6	32.2 ± 4.1	32.2 ± 4.5	32.2 ± 4.3	32.2 ± 4.6	15.9 ± 3.5	15.9 ± 3.9	10.8 ± 3.9	10.8 ± 4.2	13
7	35.1 ± 5.9	35.1 ± 6.5	28.7 ± 4.4	28.7 ± 4.9	12.2 ± 5.1	12.2 ± 5.6	13.7 ± 5.2	13.7 ± 5.7	12
8	34.0 ± 3.3	34.0 ± 3.6	32.7 ± 2.3	32.7 ± 2.6	10.7 ± 2.8	10.7 ± 3.1	13.4 ± 3.3	13.4 ± 3.7	9
9	34.7 ± 6.6	34.7 ± 7.3	30.5 ± 7.2	30.5 ± 7.9	12.8 ± 4.1	12.8 ± 4.5	10.5 ± 3.1	10.5 ± 3.4	12
10	37.3 ± 8.9	37.3 ± 9.8	34.5 ± 4.5	34.5 ± 4.9	9.2 ± 3.2	9.2 ± 3.5	7.8 ± 3.1	7.8 ± 3.5	12
11	23.4 ± 5.0	23.4 ± 5.3	25.5 ± 4.0	25.5 ± 4.2	15.0 ± 5.0	15.0 ± 5.3	22.4 ± 6.6	22.4 ± 7.0	17
12	33.4 ± 8.8	33.4 ± 9.6	22.8 ± 3.4	22.8 ± 3.7	13.0 ± 3.9	13.0 ± 4.3	17.8 ± 7.8	17.8 ± 8.5	13
13	24.7 ± 7.1	24.7 ± 8.2	22.4 ± 5.6	22.4 ± 6.5	17.3 ± 10.5	17.3 ± 12.1	24.9 ± 10.5	24.9 ± 12.1	9
14	30.2 ± 5.3	30.2 ± 6.1	27.5 ± 6.2	27.5 ± 7.2	13.2 ± 11.1	13.2 ± 12.8	13.6 ± 5.4	13.6 ± 6.2	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	24.8 ± 11.5	24.8 ± 15.5	50.3 ± 17.3	50.3 ± 23.3	14.3 ± 10.3	14.3 ± 13.9	4.5 ± 2.5	4.5 ± 3.4	8
4	38.1 ± 11.3	38.1 ± 14.1	36.4 ± 8.5	36.4 ± 10.6	15.4 ± 7.0	15.4 ± 8.8	4.1 ± 1.8	4.1 ± 2.3	10
5	33.4 ± 11.5	33.4 ± 14.8	39.9 ± 12.3	39.9 ± 15.9	13.3 ± 3.7	13.3 ± 4.7	6.9 ± 4.3	6.9 ± 5.5	9
6	32.2 ± 5.4	32.2 ± 6.3	32.2 ± 5.5	32.2 ± 6.5	15.9 ± 4.6	15.9 ± 5.4	10.8 ± 5.0	10.8 ± 5.9	13
7	35.1 ± 7.7	35.1 ± 9.2	28.7 ± 5.7	28.7 ± 6.9	12.2 ± 6.6	12.2 ± 7.9	13.7 ± 6.8	13.7 ± 8.2	12
8	34.0 ± 4.2	34.0 ± 5.2	32.7 ± 3.0	32.7 ± 3.7	10.7 ± 3.5	10.7 ± 4.4	13.4 ± 4.3	13.4 ± 5.3	9
9	34.7 ± 8.6	34.7 ± 10.3	30.5 ± 9.4	30.5 ± 11.2	12.8 ± 5.3	12.8 ± 6.4	10.5 ± 4.0	10.5 ± 4.8	12
10	37.3 ± 11.6	37.3 ± 13.8	34.5 ± 5.8	34.5 ± 6.9	9.2 ± 4.2	9.2 ± 5.0	7.8 ± 4.1	7.8 ± 4.9	12
11	23.4 ± 6.5	23.4 ± 7.3	25.5 ± 5.2	25.5 ± 5.8	15.0 ± 6.4	15.0 ± 7.2	22.4 ± 8.5	22.4 ± 9.6	17
12	33.4 ± 11.5	33.4 ± 13.4	22.8 ± 4.5	22.8 ± 5.2	13.0 ± 5.1	13.0 ± 6.0	17.8 ± 10.1	17.8 ± 11.8	13
13	24.7 ± 9.2	24.7 ± 11.9	22.4 ± 7.3	22.4 ± 9.4	17.3 ± 13.6	17.3 ± 17.6	24.9 ± 13.6	24.9 ± 17.6	9
14	30.2 ± 6.9	30.2 ± 8.9	27.5 ± 8.1	27.5 ± 10.4	13.2 ± 14.4	13.2 ± 18.6	13.6 ± 7.0	13.6 ± 9.0	8

CANAL 4 MÁXIMO BANDA ALFA 2

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	29.5 ± 11.9	29.5 ± 14.0	47.0 ± 12.3	47.0 ± 14.5	12.4 ± 4.5	12.4 ± 5.4	4.8 ± 2.1	4.8 ± 2.5	8
4	33.1 ± 6.8	33.1 ± 7.6	41.3 ± 5.3	41.3 ± 6.0	14.4 ± 4.3	14.4 ± 4.9	5.3 ± 1.8	5.3 ± 2.0	10
5	35.9 ± 10.2	35.9 ± 11.8	40.5 ± 9.5	40.5 ± 10.9	10.5 ± 3.3	10.5 ± 3.8	6.8 ± 2.7	6.8 ± 3.2	9
6	32.0 ± 3.5	32.0 ± 3.8	31.6 ± 4.1	31.6 ± 4.5	15.8 ± 3.0	15.8 ± 3.2	11.5 ± 3.8	11.5 ± 4.1	13
7	40.0 ± 8.4	40.0 ± 9.3	26.1 ± 5.2	26.1 ± 5.7	10.9 ± 3.7	10.9 ± 4.0	13.7 ± 5.6	13.7 ± 6.2	12
8	30.3 ± 7.0	30.3 ± 7.7	34.6 ± 4.5	34.6 ± 5.0	10.9 ± 3.0	10.9 ± 3.4	14.0 ± 5.1	14.0 ± 5.7	9
9	30.9 ± 4.0	30.9 ± 4.4	32.5 ± 4.0	32.5 ± 4.4	13.1 ± 3.8	13.1 ± 4.2	13.1 ± 3.6	13.1 ± 3.9	12
10	33.3 ± 8.3	33.3 ± 9.1	33.9 ± 4.6	33.9 ± 5.1	10.2 ± 3.1	10.2 ± 3.5	11.0 ± 4.7	11.0 ± 5.1	12
11	24.1 ± 4.0	24.1 ± 4.3	28.2 ± 5.5	28.2 ± 5.8	14.2 ± 4.4	14.2 ± 4.6	20.8 ± 5.7	20.8 ± 6.0	17
12	25.0 ± 7.0	25.0 ± 7.7	27.5 ± 3.9	27.5 ± 4.2	13.5 ± 6.3	13.5 ± 6.8	20.2 ± 7.3	20.2 ± 7.9	13
13	29.6 ± 7.7	29.6 ± 8.9	19.7 ± 4.0	19.7 ± 4.6	14.8 ± 7.7	14.8 ± 8.9	25.0 ± 11.4	25.0 ± 13.2	9
14	32.8 ± 7.0	32.8 ± 8.1	26.5 ± 7.3	26.5 ± 8.4	13.1 ± 7.0	13.1 ± 8.1	15.1 ± 6.0	15.1 ± 6.9	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	29.5 ± 15.5	29.5 ± 20.8	47.0 ± 16.0	47.0 ± 21.5	12.4 ± 5.9	12.4 ± 7.9	4.8 ± 2.8	4.8 ± 3.7	± 8
4	33.1 ± 8.8	33.1 ± 11.0	41.3 ± 6.9	41.3 ± 8.7	14.4 ± 5.6	14.4 ± 7.0	5.3 ± 2.3	5.3 ± 2.9	± 10
5	35.9 ± 13.3	35.9 ± 17.1	40.5 ± 12.3	40.5 ± 15.9	10.5 ± 4.2	10.5 ± 5.4	6.8 ± 3.6	6.8 ± 4.6	± 9
6	32.0 ± 4.5	32.0 ± 5.3	31.6 ± 5.3	31.6 ± 6.2	15.8 ± 3.8	15.8 ± 4.5	11.5 ± 4.9	11.5 ± 5.7	± 13
7	40.0 ± 11.0	40.0 ± 13.1	26.1 ± 6.7	26.1 ± 8.0	10.9 ± 4.8	10.9 ± 5.7	13.7 ± 7.3	13.7 ± 8.7	± 12
8	30.3 ± 9.1	30.3 ± 11.0	34.6 ± 5.9	34.6 ± 7.2	10.9 ± 4.0	10.9 ± 4.8	14.0 ± 6.7	14.0 ± 8.1	± 9
9	30.9 ± 5.2	30.9 ± 6.3	32.5 ± 5.2	32.5 ± 6.2	13.1 ± 4.9	13.1 ± 5.9	13.1 ± 4.7	13.1 ± 5.5	± 12
10	33.3 ± 10.8	33.3 ± 12.9	33.9 ± 6.0	33.9 ± 7.2	10.2 ± 4.1	10.2 ± 4.9	11.0 ± 6.1	11.0 ± 7.3	± 12
11	24.1 ± 5.2	24.1 ± 5.9	28.2 ± 7.1	28.2 ± 8.0	14.2 ± 5.7	14.2 ± 6.4	20.8 ± 7.4	20.8 ± 8.3	± 17
12	25.0 ± 9.1	25.0 ± 10.7	27.5 ± 5.0	27.5 ± 5.9	13.5 ± 8.2	13.5 ± 9.6	20.2 ± 9.5	20.2 ± 11.1	± 13
13	29.6 ± 10.0	29.6 ± 13.0	19.7 ± 5.2	19.7 ± 6.7	14.8 ± 10.0	14.8 ± 12.9	25.0 ± 14.8	25.0 ± 19.1	± 9
14	32.8 ± 9.1	32.8 ± 11.7	26.5 ± 9.5	26.5 ± 12.2	13.1 ± 9.1	13.1 ± 11.7	15.1 ± 7.8	15.1 ± 10.0	± 8

CANAL 14 MÁXIMO BANDA DELTA

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	28.1 ± 10.3	28.1 ± 12.2	40.9 ± 11.9	40.9 ± 14.0	17.2 ± 7.4	17.2 ± 8.8	7.4 ± 5.9	7.4 ± 7.0	8
4	24.7 ± 6.3	24.7 ± 7.2	48.5 ± 6.9	48.5 ± 7.8	17.0 ± 5.5	17.0 ± 6.2	5.1 ± 3.2	5.1 ± 3.6	10
5	23.9 ± 5.3	23.9 ± 6.2	38.5 ± 11.5	38.5 ± 13.3	24.5 ± 9.7	24.5 ± 11.2	8.7 ± 4.9	8.7 ± 5.6	9
6	22.9 ± 6.3	22.9 ± 6.8	28.5 ± 4.5	28.5 ± 5.0	24.7 ± 5.6	24.7 ± 6.1	17.0 ± 7.7	17.0 ± 8.3	13
7	30.5 ± 8.1	30.5 ± 8.9	27.5 ± 7.6	27.5 ± 8.4	18.2 ± 5.2	18.2 ± 5.7	15.7 ± 9.3	15.7 ± 10.2	12
8	28.7 ± 7.1	28.7 ± 8.2	21.8 ± 3.5	21.8 ± 4.1	19.3 ± 8.8	19.3 ± 10.1	23.2 ± 7.5	23.2 ± 8.6	9
9	26.8 ± 8.4	26.8 ± 9.2	25.0 ± 4.8	25.0 ± 5.3	17.8 ± 7.5	17.8 ± 8.3	21.2 ± 6.5	21.2 ± 7.1	12
10	27.9 ± 7.4	27.9 ± 8.1	29.2 ± 5.3	29.2 ± 5.8	20.0 ± 6.6	20.0 ± 7.3	14.9 ± 7.0	14.9 ± 7.7	12
11	19.3 ± 3.9	19.3 ± 4.2	15.9 ± 3.0	15.9 ± 3.2	23.5 ± 8.5	23.5 ± 9.0	30.0 ± 9.0	30.0 ± 9.6	17
12	20.9 ± 5.3	20.9 ± 5.8	19.9 ± 5.5	19.9 ± 6.0	24.0 ± 10.0	24.0 ± 10.9	25.6 ± 12.5	25.6 ± 13.6	13
13	21.4 ± 6.6	21.4 ± 7.6	14.1 ± 4.1	14.1 ± 4.7	18.5 ± 11.6	18.5 ± 13.4	35.4 ± 16.0	35.4 ± 18.5	9
14	23.8 ± 8.6	23.8 ± 9.9	18.2 ± 7.0	18.2 ± 8.1	12.1 ± 7.5	12.1 ± 8.7	33.5 ± 11.1	33.5 ± 12.8	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	28.1 ± 13.4	28.1 ± 18.1	40.9 ± 15.4	40.9 ± 20.8	17.2 ± 9.6	17.2 ± 13.0	7.4 ± 7.7	7.4 ± 10.4	± 8
4	24.7 ± 8.2	24.7 ± 10.3	48.5 ± 9.0	48.5 ± 11.2	17.0 ± 7.1	17.0 ± 8.9	5.1 ± 4.2	5.1 ± 5.2	± 10
5	23.9 ± 6.9	23.9 ± 8.9	38.5 ± 15.0	38.5 ± 19.3	24.5 ± 12.6	24.5 ± 16.3	8.7 ± 6.4	8.7 ± 8.2	± 9
6	22.9 ± 8.1	22.9 ± 9.5	28.5 ± 5.9	28.5 ± 7.0	24.7 ± 7.3	24.7 ± 8.5	17.0 ± 10.0	17.0 ± 11.7	± 13
7	30.5 ± 10.5	30.5 ± 12.6	27.5 ± 9.9	27.5 ± 11.9	18.2 ± 6.8	18.2 ± 8.1	15.7 ± 12.0	15.7 ± 14.4	± 12
8	28.7 ± 9.2	28.7 ± 11.9	21.8 ± 4.6	21.8 ± 6.0	19.3 ± 11.4	19.3 ± 14.7	23.2 ± 9.7	23.2 ± 12.5	± 9
9	26.8 ± 10.9	26.8 ± 13.1	25.0 ± 6.3	25.0 ± 7.5	17.8 ± 9.8	17.8 ± 11.7	21.2 ± 8.4	21.2 ± 10.1	± 12
10	27.9 ± 9.6	27.9 ± 11.5	29.2 ± 6.9	29.2 ± 8.3	20.0 ± 8.6	20.0 ± 10.3	14.9 ± 9.1	14.9 ± 10.9	± 12
11	19.3 ± 5.1	19.3 ± 5.7	15.9 ± 3.9	15.9 ± 4.4	23.5 ± 11.1	23.5 ± 12.5	30.0 ± 11.8	30.0 ± 13.2	± 17
12	20.9 ± 6.9	20.9 ± 8.1	19.9 ± 7.2	19.9 ± 8.4	24.0 ± 13.0	24.0 ± 15.3	25.6 ± 16.2	25.6 ± 19.0	± 13
13	21.4 ± 8.6	21.4 ± 11.1	14.1 ± 5.3	14.1 ± 6.8	18.5 ± 15.1	18.5 ± 19.5	35.4 ± 20.8	35.4 ± 26.7	± 9
14	23.8 ± 11.2	23.8 ± 14.4	18.2 ± 9.2	18.2 ± 11.8	12.1 ± 9.7	12.1 ± 12.6	33.5 ± 14.4	33.5 ± 18.6	± 8

CANAL 14 MÁXIMO BANDA THETA  
INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	22.4 ± 7.9	22.4 ± 9.4	46.1 ± 12.7	46.1 ± 15.0	17.8 ± 8.4	17.8 ± 9.9	6.9 ± 4.8	6.9 ± 5.7	8
4	25.8 ± 7.2	25.8 ± 8.2	50.9 ± 10.1	50.9 ± 11.5	14.5 ± 5.6	14.5 ± 6.3	5.0 ± 3.2	5.0 ± 3.7	10
5	20.7 ± 4.4	20.7 ± 5.0	44.2 ± 12.5	44.2 ± 14.4	22.9 ± 9.0	22.9 ± 10.4	7.5 ± 4.6	7.5 ± 5.3	9
6	19.7 ± 5.6	19.7 ± 6.1	32.5 ± 4.8	32.5 ± 5.2	25.2 ± 6.6	25.2 ± 7.1	16.0 ± 7.1	16.0 ± 7.7	13
7	21.8 ± 3.9	21.8 ± 4.3	32.5 ± 7.7	32.5 ± 8.4	18.3 ± 4.8	18.3 ± 5.3	17.7 ± 7.9	17.7 ± 8.7	12
8	21.2 ± 4.3	21.2 ± 5.0	26.2 ± 4.0	26.2 ± 4.5	21.8 ± 11.1	21.8 ± 12.8	24.3 ± 8.8	24.3 ± 10.1	9
9	18.0 ± 4.4	18.0 ± 4.8	29.9 ± 5.5	29.9 ± 6.1	24.0 ± 11.9	24.0 ± 13.0	19.4 ± 8.2	19.4 ± 9.0	12
10	23.5 ± 4.0	23.5 ± 4.5	36.2 ± 7.0	36.2 ± 7.7	20.0 ± 6.9	20.0 ± 7.5	13.0 ± 5.2	13.0 ± 5.7	12
11	15.4 ± 4.0	15.4 ± 4.3	20.1 ± 3.2	20.1 ± 3.4	21.9 ± 8.0	21.9 ± 8.5	31.4 ± 9.4	31.4 ± 10.0	17
12	15.5 ± 3.1	15.5 ± 3.4	23.9 ± 5.7	23.9 ± 6.2	24.2 ± 10.3	24.2 ± 11.2	26.1 ± 10.4	26.1 ± 11.4	13
13	13.1 ± 6.6	13.1 ± 7.7	17.2 ± 4.4	17.2 ± 5.1	18.5 ± 11.4	18.5 ± 13.2	42.2 ± 17.9	42.2 ± 20.6	9
14	15.9 ± 6.3	15.9 ± 7.2	22.7 ± 8.7	22.7 ± 10.0	12.2 ± 8.5	12.2 ± 9.8	35.0 ± 13.2	35.0 ± 15.3	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	22.4 ± 10.3	22.4 ± 13.9	46.1 ± 16.5	46.1 ± 22.2	17.8 ± 10.9	17.8 ± 14.7	6.9 ± 6.3	6.9 ± 8.5	8
4	25.8 ± 9.4	25.8 ± 11.7	50.9 ± 13.2	50.9 ± 16.5	14.5 ± 7.3	14.5 ± 9.1	5.0 ± 4.2	5.0 ± 5.3	10
5	20.7 ± 5.7	20.7 ± 7.3	44.2 ± 16.2	44.2 ± 20.9	22.9 ± 11.7	22.9 ± 15.1	7.5 ± 6.0	7.5 ± 7.7	9
6	19.7 ± 7.3	19.7 ± 8.5	32.5 ± 6.2	32.5 ± 7.3	25.2 ± 8.5	25.2 ± 10.0	16.0 ± 9.2	16.0 ± 10.7	13
7	21.8 ± 5.1	21.8 ± 6.1	32.5 ± 10.0	32.5 ± 11.9	18.3 ± 6.3	18.3 ± 7.5	17.7 ± 10.3	17.7 ± 12.3	12
8	21.2 ± 5.6	21.2 ± 7.3	26.2 ± 5.1	26.2 ± 6.6	21.8 ± 14.4	21.8 ± 18.6	24.3 ± 11.4	24.3 ± 14.7	9
9	18.0 ± 5.7	18.0 ± 6.8	29.9 ± 7.2	29.9 ± 8.7	24.0 ± 15.4	24.0 ± 18.4	19.4 ± 10.6	19.4 ± 12.7	12
10	23.5 ± 5.3	23.5 ± 6.3	36.2 ± 9.1	36.2 ± 10.9	20.0 ± 9.0	20.0 ± 10.7	13.0 ± 6.8	13.0 ± 8.1	12
11	15.4 ± 5.2	15.4 ± 5.9	20.1 ± 4.2	20.1 ± 4.7	21.9 ± 10.4	21.9 ± 11.7	31.4 ± 12.2	31.4 ± 13.7	17
12	15.5 ± 4.0	15.5 ± 4.7	23.9 ± 7.4	23.9 ± 8.7	24.2 ± 13.4	24.2 ± 15.7	26.1 ± 13.5	26.1 ± 15.9	13
13	13.1 ± 8.6	13.1 ± 11.1	17.2 ± 5.8	17.2 ± 7.4	18.5 ± 14.8	18.5 ± 19.1	42.2 ± 23.2	42.2 ± 29.9	9
14	15.9 ± 8.2	15.9 ± 10.5	22.7 ± 11.3	22.7 ± 14.5	12.2 ± 11.0	12.2 ± 14.2	35.0 ± 17.2	35.0 ± 22.1	8

CANAL 14 MÁXIMO BANDA ALFA 1  
INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	20.0 ± 7.5	20.0 ± 8.8	38.9 ± 11.6	38.9 ± 13.7	25.9 ± 10.8	25.9 ± 12.7	7.5 ± 5.4	7.5 ± 6.4	8
4	21.0 ± 2.5	21.0 ± 2.9	48.2 ± 7.0	48.2 ± 7.9	22.0 ± 3.9	22.0 ± 4.5	4.7 ± 2.7	4.7 ± 3.1	10
5	22.7 ± 3.5	22.7 ± 4.1	37.3 ± 11.5	37.3 ± 13.2	28.2 ± 9.9	28.2 ± 11.4	7.5 ± 4.6	7.5 ± 5.3	9
6	17.4 ± 4.5	17.4 ± 4.9	29.5 ± 3.5	29.5 ± 3.9	30.4 ± 6.5	30.4 ± 7.1	16.1 ± 6.9	16.1 ± 7.5	13
7	23.7 ± 5.9	23.7 ± 6.5	30.3 ± 7.1	30.3 ± 7.8	20.4 ± 6.0	20.4 ± 6.5	16.0 ± 7.0	16.0 ± 7.7	12
8	23.5 ± 6.8	23.5 ± 7.9	22.1 ± 3.3	22.1 ± 3.8	25.4 ± 11.5	25.4 ± 13.3	21.7 ± 8.5	21.7 ± 9.8	9
9	20.9 ± 5.3	20.9 ± 5.7	25.3 ± 5.0	25.3 ± 5.4	25.7 ± 10.4	25.7 ± 11.5	18.7 ± 6.5	18.7 ± 7.1	12
10	25.6 ± 5.4	25.6 ± 6.0	30.8 ± 7.0	30.8 ± 7.7	22.5 ± 8.0	22.5 ± 8.8	13.9 ± 6.0	13.9 ± 6.5	12
11	15.6 ± 4.2	15.6 ± 4.5	17.0 ± 3.4	17.0 ± 3.6	27.3 ± 9.9	27.3 ± 10.4	28.1 ± 9.1	28.1 ± 9.6	17
12	13.5 ± 4.0	13.5 ± 4.3	20.4 ± 5.8	20.4 ± 6.4	29.7 ± 11.8	29.7 ± 12.9	26.6 ± 12.4	26.6 ± 13.5	13
13	13.6 ± 6.7	13.6 ± 7.7	16.3 ± 4.5	16.3 ± 5.3	23.0 ± 14.8	23.0 ± 17.1	38.1 ± 18.7	38.1 ± 21.6	9
14	17.5 ± 7.8	17.5 ± 9.0	18.9 ± 6.8	18.9 ± 7.9	19.2 ± 12.7	19.2 ± 14.7	31.4 ± 11.7	31.4 ± 13.5	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	20.0 ± 9.7	20.0 ± 13.1	38.9 ± 15.1	38.9 ± 20.3	25.9 ± 14.0	25.9 ± 18.9	7.5 ± 7.1	7.5 ± 9.5	8
4	21.0 ± 3.3	21.0 ± 4.1	48.2 ± 9.1	48.2 ± 11.4	22.0 ± 5.1	22.0 ± 6.4	4.7 ± 3.6	4.7 ± 4.5	10
5	22.7 ± 4.6	22.7 ± 6.0	37.3 ± 14.9	37.3 ± 19.2	28.2 ± 12.8	28.2 ± 16.5	7.5 ± 6.0	7.5 ± 7.7	9
6	17.4 ± 5.8	17.4 ± 6.8	29.5 ± 4.6	29.5 ± 5.5	30.4 ± 8.4	30.4 ± 9.9	16.1 ± 8.9	16.1 ± 10.5	13
7	23.7 ± 7.7	23.7 ± 9.2	30.3 ± 9.2	30.3 ± 11.1	20.4 ± 7.8	20.4 ± 9.3	16.0 ± 9.2	16.0 ± 10.9	12
8	23.5 ± 8.9	23.5 ± 11.5	22.1 ± 4.3	22.1 ± 5.5	25.4 ± 15.0	25.4 ± 19.3	21.7 ± 11.0	21.7 ± 14.2	9
9	20.9 ± 6.8	20.9 ± 8.2	25.3 ± 6.4	25.3 ± 7.7	25.7 ± 13.6	25.7 ± 16.2	18.7 ± 8.4	18.7 ± 10.1	12
10	25.6 ± 7.1	25.6 ± 8.5	30.8 ± 9.1	30.8 ± 10.9	22.5 ± 10.4	22.5 ± 12.4	13.9 ± 7.8	13.9 ± 9.3	12
11	15.6 ± 5.5	15.6 ± 6.2	17.0 ± 4.4	17.0 ± 5.0	27.3 ± 12.8	27.3 ± 14.4	28.1 ± 11.8	28.1 ± 13.3	17
12	13.5 ± 5.2	13.5 ± 6.1	20.4 ± 7.6	20.4 ± 8.9	29.7 ± 15.4	29.7 ± 18.1	26.6 ± 16.1	26.6 ± 18.9	13
13	13.6 ± 8.7	13.6 ± 11.2	16.3 ± 5.9	16.3 ± 7.7	23.0 ± 19.3	23.0 ± 24.8	38.1 ± 24.3	38.1 ± 31.3	9
14	17.5 ± 10.2	17.5 ± 13.1	18.9 ± 8.8	18.9 ± 11.4	19.2 ± 16.6	19.2 ± 21.3	31.4 ± 15.2	31.4 ± 19.6	8

CANAL 14 MÁXIMO BANDA ALFA 2  
INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Número
3	26.0 ± 10.0	26.0 ± 11.8	39.1 ± 11.4	39.1 ± 13.5	18.2 ± 13.7	18.2 ± 16.2	8.8 ± 7.1	8.8 ± 8.4	8
4	28.9 ± 6.2	28.9 ± 7.0	44.1 ± 9.5	44.1 ± 10.7	17.7 ± 3.7	17.7 ± 4.1	5.1 ± 4.0	5.1 ± 4.5	10
5	22.4 ± 4.3	22.4 ± 5.0	36.8 ± 12.1	36.8 ± 14.0	27.3 ± 11.8	27.3 ± 13.6	8.5 ± 4.1	8.5 ± 4.7	9
6	19.5 ± 4.0	19.5 ± 4.4	31.4 ± 5.2	31.4 ± 5.7	25.3 ± 5.5	25.3 ± 6.0	17.0 ± 6.6	17.0 ± 7.2	13
7	25.7 ± 7.0	25.7 ± 7.8	27.1 ± 6.0	27.1 ± 6.6	18.5 ± 4.6	18.5 ± 5.1	20.0 ± 9.8	20.0 ± 10.8	12
8	22.0 ± 6.4	22.0 ± 7.3	22.7 ± 4.2	22.7 ± 4.8	20.0 ± 7.5	20.0 ± 8.7	28.0 ± 8.7	28.0 ± 10.1	9
9	20.9 ± 7.2	20.9 ± 7.9	26.4 ± 4.1	26.4 ± 4.6	18.1 ± 6.9	18.1 ± 7.6	25.9 ± 8.9	25.9 ± 9.8	12
10	22.2 ± 5.4	22.2 ± 6.0	32.2 ± 7.2	32.2 ± 7.9	19.4 ± 6.2	19.4 ± 6.8	18.0 ± 8.0	18.0 ± 8.8	12
11	16.8 ± 4.0	16.8 ± 4.3	16.2 ± 3.3	16.2 ± 3.5	20.5 ± 8.8	20.5 ± 9.4	35.9 ± 8.4	35.9 ± 8.9	17
12	15.8 ± 5.6	15.8 ± 6.1	21.1 ± 5.5	21.1 ± 6.1	22.6 ± 11.7	22.6 ± 12.8	30.9 ± 12.1	30.9 ± 13.2	13
13	11.6 ± 4.6	11.6 ± 5.4	15.4 ± 5.1	15.4 ± 5.9	18.2 ± 11.7	18.2 ± 13.5	45.6 ± 16.8	45.6 ± 19.4	9
14	17.2 ± 7.8	17.2 ± 9.0	20.2 ± 9.0	20.2 ± 10.4	14.8 ± 11.5	14.8 ± 13.3	34.8 ± 10.6	34.8 ± 12.2	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Número
3	26.0 ± 13.0	26.0 ± 17.5	39.1 ± 14.8	39.1 ± 20.0	18.2 ± 17.8	18.2 ± 24.0	8.8 ± 9.2	8.8 ± 12.4	8
4	28.9 ± 8.1	28.9 ± 10.1	44.1 ± 12.4	44.1 ± 15.4	17.7 ± 4.8	17.7 ± 5.9	5.1 ± 5.3	5.1 ± 6.5	10
5	22.4 ± 5.5	22.4 ± 7.2	36.8 ± 15.7	36.8 ± 20.3	27.3 ± 15.4	27.3 ± 19.8	8.5 ± 5.3	8.5 ± 6.8	9
6	19.5 ± 5.2	19.5 ± 6.1	31.4 ± 6.7	31.4 ± 7.9	25.3 ± 7.1	25.3 ± 8.3	17.0 ± 8.6	17.0 ± 10.1	13
7	25.7 ± 9.2	25.7 ± 11.0	27.1 ± 7.8	27.1 ± 9.3	18.5 ± 6.0	18.5 ± 7.2	20.0 ± 12.7	20.0 ± 15.2	12
8	22.0 ± 8.3	22.0 ± 10.6	22.7 ± 5.4	22.7 ± 7.0	20.0 ± 9.8	20.0 ± 12.6	28.0 ± 11.4	28.0 ± 14.6	9
9	20.9 ± 9.3	20.9 ± 11.2	26.4 ± 5.4	26.4 ± 6.4	18.1 ± 9.0	18.1 ± 10.8	25.9 ± 11.5	25.9 ± 13.8	12
10	22.2 ± 7.0	22.2 ± 8.4	32.2 ± 9.3	32.2 ± 11.2	19.4 ± 8.1	19.4 ± 9.7	18.0 ± 10.4	18.0 ± 12.5	12
11	16.8 ± 5.2	16.8 ± 5.9	16.2 ± 4.3	16.2 ± 4.9	20.5 ± 11.5	20.5 ± 12.9	35.9 ± 10.9	35.9 ± 12.2	17
12	15.8 ± 7.3	15.8 ± 8.6	21.1 ± 7.2	21.1 ± 8.5	22.6 ± 15.3	22.6 ± 18.0	30.9 ± 15.7	30.9 ± 18.5	13
13	11.6 ± 6.0	11.6 ± 7.8	15.4 ± 6.6	15.4 ± 8.5	18.2 ± 15.2	18.2 ± 19.6	45.6 ± 21.9	45.6 ± 28.2	9
14	17.2 ± 10.1	17.2 ± 13.0	20.2 ± 11.7	20.2 ± 15.0	14.8 ± 15.0	14.8 ± 19.3	34.8 ± 13.7	34.8 ± 17.7	8

CANAL 16 MÁXIMO BANDA DELTA  
INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Número
3	32.7 ± 9.9	32.7 ± 11.7	40.7 ± 13.5	40.7 ± 15.9	15.3 ± 4.9	15.3 ± 5.8	7.4 ± 6.2	7.4 ± 7.4	8
4	33.0 ± 6.6	33.0 ± 7.5	41.0 ± 8.9	41.0 ± 10.1	16.9 ± 6.1	16.9 ± 6.9	5.0 ± 3.0	5.0 ± 3.4	10
5	28.2 ± 6.0	28.2 ± 6.9	32.9 ± 10.0	32.9 ± 11.6	29.0 ± 13.1	29.0 ± 15.1	6.3 ± 3.2	6.3 ± 3.7	9
6	31.3 ± 7.9	31.3 ± 8.5	25.1 ± 4.4	25.1 ± 4.8	23.0 ± 7.9	23.0 ± 8.6	15.2 ± 7.8	15.2 ± 8.5	13
7	30.1 ± 6.6	30.1 ± 7.2	25.3 ± 5.9	25.3 ± 6.5	18.3 ± 5.7	18.3 ± 6.3	18.7 ± 9.1	18.7 ± 10.0	12
8	32.0 ± 7.4	32.0 ± 8.5	19.9 ± 2.9	19.9 ± 3.3	17.4 ± 6.4	17.4 ± 7.3	24.4 ± 7.3	24.4 ± 8.4	9
9	29.9 ± 8.2	29.9 ± 9.0	20.9 ± 3.4	20.9 ± 3.7	18.3 ± 9.4	18.3 ± 10.3	21.9 ± 7.2	21.9 ± 7.9	12
10	33.7 ± 8.7	33.7 ± 9.5	24.6 ± 3.7	24.6 ± 4.1	19.6 ± 7.3	19.6 ± 8.0	15.1 ± 8.2	15.1 ± 9.0	12
11	21.8 ± 4.2	21.8 ± 4.4	12.0 ± 3.0	12.0 ± 3.2	25.8 ± 8.9	25.8 ± 9.5	31.1 ± 8.5	31.1 ± 9.1	17
12	26.9 ± 5.8	26.9 ± 6.3	18.9 ± 4.2	18.9 ± 4.6	21.3 ± 9.2	21.3 ± 10.1	24.1 ± 10.4	24.1 ± 11.4	13
13	25.3 ± 8.8	25.3 ± 10.2	13.5 ± 4.9	13.5 ± 5.7	20.2 ± 12.7	20.2 ± 14.7	32.2 ± 15.1	32.2 ± 17.4	9
14	25.7 ± 9.2	25.7 ± 10.6	16.9 ± 6.9	16.9 ± 8.0	13.6 ± 10.3	13.6 ± 11.9	30.4 ± 12.6	30.4 ± 14.6	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Número
3	32.7 ± 12.8	32.7 ± 17.3	40.7 ± 17.5	40.7 ± 23.5	15.3 ± 6.4	15.3 ± 8.6	7.4 ± 8.1	7.4 ± 10.9	8
4	33.0 ± 8.6	33.0 ± 10.7	41.0 ± 11.6	41.0 ± 14.5	16.9 ± 8.0	16.9 ± 10.0	5.0 ± 3.9	5.0 ± 4.9	10
5	28.2 ± 7.8	28.2 ± 10.0	32.9 ± 13.0	32.9 ± 16.8	29.0 ± 17.0	29.0 ± 21.9	6.3 ± 4.1	6.3 ± 5.3	9
6	31.3 ± 10.2	31.3 ± 12.0	25.1 ± 5.8	25.1 ± 6.8	23.0 ± 10.3	23.0 ± 12.0	15.2 ± 0.2	15.2 ± 11.9	13
7	30.1 ± 8.5	30.1 ± 10.2	25.3 ± 7.7	25.3 ± 9.2	18.3 ± 7.4	18.3 ± 8.9	18.7 ± 1.9	18.7 ± 14.2	12
8	32.0 ± 9.5	32.0 ± 12.3	19.9 ± 3.8	19.9 ± 4.8	17.4 ± 8.3	17.4 ± 10.6	24.4 ± 9.5	24.4 ± 12.2	9
9	29.9 ± 10.6	29.9 ± 12.7	20.9 ± 4.4	20.9 ± 5.2	18.3 ± 12.2	18.3 ± 14.5	21.9 ± 9.3	21.9 ± 11.1	12
10	33.7 ± 11.2	33.7 ± 13.5	24.6 ± 4.8	24.6 ± 5.8	19.6 ± 9.5	19.6 ± 11.4	15.1 ± 10.6	15.1 ± 12.7	12
11	21.8 ± 5.4	21.8 ± 6.1	12.0 ± 3.9	12.0 ± 4.4	25.8 ± 11.6	25.8 ± 13.0	31.1 ± 11.2	31.1 ± 12.5	17
12	26.9 ± 7.5	26.9 ± 8.8	18.9 ± 5.5	18.9 ± 6.4	21.3 ± 12.0	21.3 ± 14.1	24.1 ± 13.5	24.1 ± 15.9	13
13	25.3 ± 11.4	25.3 ± 14.7	13.5 ± 6.4	13.5 ± 8.2	20.2 ± 16.5	20.2 ± 21.3	32.2 ± 19.6	32.2 ± 25.2	9
14	25.7 ± 11.9	25.7 ± 15.4	16.9 ± 9.0	16.9 ± 11.5	13.6 ± 13.4	13.6 ± 17.3	30.4 ± 16.4	30.4 ± 21.1	8

CANAL 16 MÁXIMO BANDA THETA  
INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	20.3 ± 9.0	20.3 ± 10.7	53.9 ± 14.3	53.9 ± 16.9	14.5 ± 6.1	14.5 ± 7.2	6.9 ± 5.1	6.9 ± 6.0	8
4	22.4 ± 6.0	22.4 ± 6.8	53.9 ± 9.2	53.9 ± 10.4	16.7 ± 7.2	16.7 ± 8.1	3.8 ± 1.9	3.8 ± 2.1	10
5	18.7 ± 6.4	18.7 ± 7.4	43.7 ± 13.8	43.7 ± 15.9	27.1 ± 13.1	27.1 ± 15.1	6.5 ± 4.4	6.5 ± 5.0	9
6	20.4 ± 6.3	20.4 ± 6.9	37.6 ± 5.5	37.6 ± 6.0	23.5 ± 7.1	23.5 ± 7.7	12.9 ± 6.1	12.9 ± 6.7	13
7	19.3 ± 4.8	19.3 ± 5.3	34.8 ± 8.1	34.8 ± 8.9	19.9 ± 7.8	19.9 ± 8.6	17.6 ± 9.0	17.6 ± 10.0	12
8	17.7 ± 4.5	17.7 ± 5.2	28.2 ± 3.9	28.2 ± 4.5	22.7 ± 8.6	22.7 ± 9.9	24.4 ± 6.5	24.4 ± 7.5	9
9	17.2 ± 4.6	17.2 ± 5.1	31.5 ± 4.8	31.5 ± 5.3	22.3 ± 12.5	22.3 ± 13.7	20.4 ± 8.5	20.4 ± 9.4	12
10	21.6 ± 8.0	21.6 ± 8.8	35.8 ± 6.0	35.8 ± 6.6	22.7 ± 8.8	22.7 ± 9.7	13.6 ± 5.9	13.6 ± 6.5	12
11	14.4 ± 3.1	14.4 ± 3.3	21.1 ± 4.2	21.1 ± 4.4	26.0 ± 8.7	26.0 ± 9.3	28.6 ± 9.2	28.6 ± 9.7	17
12	15.3 ± 2.4	15.3 ± 2.6	26.4 ± 6.7	26.4 ± 7.3	21.2 ± 9.4	21.2 ± 10.3	28.2 ± 11.5	28.2 ± 12.5	13
13	14.5 ± 8.1	14.5 ± 9.4	18.2 ± 5.2	18.2 ± 6.0	20.5 ± 11.3	20.5 ± 13.1	38.3 ± 16.7	38.3 ± 19.3	9
14	15.3 ± 6.0	15.3 ± 7.0	24.7 ± 7.4	24.7 ± 8.5	10.3 ± 6.7	10.3 ± 7.7	33.8 ± 11.4	33.8 ± 13.2	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	20.3 ± 11.7	20.3 ± 15.8	53.9 ± 18.6	53.9 ± 25.1	14.5 ± 7.9	14.5 ± 10.6	6.9 ± 6.6	6.9 ± 8.9	
4	22.4 ± 7.8	22.4 ± 9.8	53.9 ± 12.0	53.9 ± 15.0	16.7 ± 9.3	16.7 ± 11.7	3.8 ± 2.5	3.8 ± 3.1	10
5	18.7 ± 8.4	18.7 ± 10.8	43.7 ± 17.9	43.7 ± 23.1	27.1 ± 17.0	27.1 ± 22.0	6.5 ± 5.7	6.5 ± 7.3	8
6	20.4 ± 8.2	20.4 ± 9.7	37.6 ± 7.2	37.6 ± 8.4	23.5 ± 9.2	23.5 ± 10.8	12.9 ± 8.0	12.9 ± 9.4	13
7	19.3 ± 6.3	19.3 ± 7.5	34.8 ± 10.5	34.8 ± 12.6	19.9 ± 10.1	19.9 ± 12.1	17.6 ± 11.8	17.6 ± 14.1	12
8	17.7 ± 5.8	17.7 ± 7.5	28.2 ± 5.0	28.2 ± 6.5	22.7 ± 11.2	22.7 ± 14.4	24.4 ± 8.5	24.4 ± 11.0	9
9	17.2 ± 6.0	17.2 ± 7.2	31.5 ± 6.3	31.5 ± 7.5	22.3 ± 16.2	22.3 ± 19.4	20.4 ± 11.1	20.4 ± 13.3	12
10	21.6 ± 10.4	21.6 ± 12.5	35.8 ± 7.8	35.8 ± 9.3	22.7 ± 11.4	22.7 ± 13.7	13.6 ± 7.7	13.6 ± 9.2	12
11	14.4 ± 4.0	14.4 ± 4.6	21.1 ± 5.4	21.1 ± 6.1	26.0 ± 11.4	26.0 ± 12.8	28.6 ± 12.0	28.6 ± 13.5	17
12	15.3 ± 3.2	15.3 ± 3.7	26.4 ± 8.7	26.4 ± 10.2	21.2 ± 12.2	21.2 ± 14.4	28.2 ± 14.9	28.2 ± 17.5	13
13	14.5 ± 10.5	14.5 ± 13.5	18.2 ± 6.8	18.2 ± 8.7	20.5 ± 14.7	20.5 ± 19.0	38.3 ± 21.7	38.3 ± 28.0	9
14	15.3 ± 7.9	15.3 ± 10.1	24.7 ± 9.6	24.7 ± 12.4	10.3 ± 8.7	10.3 ± 11.1	33.8 ± 14.8	33.8 ± 19.1	8

CANAL 16 MÁXIMO BANDA ALFA I  
INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	20.5 ± 7.5	20.5 ± 8.9	37.8 ± 13.3	37.8 ± 15.6	30.2 ± 12.3	30.2 ± 14.5	7.5 ± 5.8	7.5 ± 6.8	8
4	23.2 ± 6.3	23.2 ± 7.1	37.1 ± 6.7	37.1 ± 7.5	30.7 ± 8.2	30.7 ± 9.3	4.9 ± 3.7	4.9 ± 4.2	10
5	17.8 ± 4.5	17.8 ± 5.2	33.5 ± 12.6	33.5 ± 14.5	37.7 ± 13.3	37.7 ± 15.4	7.5 ± 4.8	7.5 ± 5.5	9
6	15.0 ± 3.8	15.0 ± 4.2	28.3 ± 6.5	28.3 ± 7.1	36.8 ± 8.7	36.8 ± 9.5	14.1 ± 5.7	14.1 ± 6.2	13
7	22.5 ± 5.6	22.5 ± 6.2	27.7 ± 6.6	27.7 ± 7.3	24.8 ± 7.3	24.8 ± 8.0	16.3 ± 7.6	16.3 ± 8.4	12
8	19.7 ± 7.7	19.7 ± 8.9	20.5 ± 3.1	20.5 ± 3.6	30.5 ± 9.8	30.5 ± 11.3	22.3 ± 7.2	22.3 ± 8.3	9
9	21.5 ± 7.4	21.5 ± 8.2	21.0 ± 3.8	21.0 ± 4.2	31.0 ± 11.8	31.0 ± 13.0	17.3 ± 6.4	17.3 ± 7.0	12
10	22.8 ± 9.0	22.8 ± 10.0	26.9 ± 5.9	26.9 ± 6.4	32.8 ± 9.4	32.8 ± 10.3	11.1 ± 4.7	11.1 ± 5.2	12
11	13.9 ± 3.5	13.9 ± 3.7	12.8 ± 3.5	12.8 ± 3.7	32.4 ± 9.7	32.4 ± 10.3	32.3 ± 9.5	32.3 ± 10.1	17
12	15.3 ± 5.3	15.3 ± 5.7	17.5 ± 5.0	17.5 ± 5.4	32.9 ± 12.4	32.9 ± 13.5	25.7 ± 11.5	25.7 ± 12.6	13
13	14.1 ± 7.5	14.1 ± 8.7	14.5 ± 5.7	14.5 ± 6.5	27.2 ± 15.3	27.2 ± 17.7	35.8 ± 17.3	35.8 ± 20.0	9
14	17.0 ± 8.5	17.0 ± 9.9	17.4 ± 6.6	17.4 ± 7.6	21.2 ± 14.3	21.2 ± 16.5	30.3 ± 10.8	30.3 ± 12.5	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	20.5 ± 9.8	20.5 ± 13.2	37.8 ± 17.2	37.8 ± 23.2	30.2 ± 16.0	30.2 ± 21.5	7.5 ± 7.5	7.5 ± 10.1	8
4	23.2 ± 8.2	23.2 ± 10.2	37.1 ± 8.7	37.1 ± 10.9	30.7 ± 10.7	30.7 ± 13.4	4.9 ± 4.8	4.9 ± 6.0	10
5	17.8 ± 5.8	17.8 ± 7.5	33.5 ± 16.4	33.5 ± 21.1	37.7 ± 17.4	37.7 ± 22.4	7.5 ± 6.2	7.5 ± 8.0	9
6	15.0 ± 5.0	15.0 ± 5.9	28.3 ± 8.5	28.3 ± 9.9	36.8 ± 11.3	36.8 ± 13.2	14.1 ± 7.4	14.1 ± 8.7	13
7	22.5 ± 7.3	22.5 ± 8.7	27.7 ± 8.6	27.7 ± 10.3	24.8 ± 9.5	24.8 ± 11.4	16.3 ± 9.9	16.3 ± 11.8	12
8	19.7 ± 10.0	19.7 ± 12.9	20.5 ± 4.0	20.5 ± 5.2	30.5 ± 12.7	30.5 ± 16.3	22.3 ± 9.3	22.3 ± 12.0	9
9	21.5 ± 9.7	21.5 ± 11.5	21.0 ± 5.0	21.0 ± 5.9	31.0 ± 15.4	31.0 ± 18.4	17.3 ± 8.3	17.3 ± 9.9	12
10	22.8 ± 11.7	22.8 ± 14.1	26.9 ± 7.6	26.9 ± 9.1	32.8 ± 12.2	32.8 ± 14.5	11.1 ± 6.1	11.1 ± 7.3	12
11	13.9 ± 4.5	13.9 ± 5.1	12.8 ± 4.5	12.8 ± 5.0	32.4 ± 12.6	32.4 ± 14.2	32.31 ± 2.3	32.3 ± 13.9	17
12	15.3 ± 6.9	15.3 ± 8.0	17.5 ± 6.4	17.5 ± 7.5	32.9 ± 16.1	32.9 ± 18.9	25.71 ± 5.0	25.7 ± 17.5	13
13	14.1 ± 9.7	14.1 ± 12.5	14.5 ± 7.4	14.5 ± 9.5	27.2 ± 19.9	27.2 ± 25.6	35.82 ± 2.5	35.8 ± 29.0	9
14	17.0 ± 11.1	17.0 ± 14.3	17.4 ± 8.6	17.4 ± 11.1	21.2 ± 18.5	21.2 ± 23.9	30.31 ± 4.0	30.3 ± 18.1	8

CANAL 16 MÁXIMO BANDA ALFA 2  
INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	25.4 ± 10.5	25.4 ± 12.5	40.1 ± 11.8	40.1 ± 13.9	17.8 ± 8.7	17.8 ± 10.3	11.5 ± 7.0	11.5 ± 8.2	8
4	27.9 ± 5.7	27.9 ± 6.5	42.0 ± 10.1	42.0 ± 11.5	19.0 ± 6.9	19.0 ± 7.8	7.2 ± 4.8	7.2 ± 5.4	10
5	18.7 ± 3.7	18.7 ± 4.3	34.3 ± 12.7	34.3 ± 14.7	30.3 ± 12.2	30.3 ± 14.1	12.6 ± 5.3	12.6 ± 6.2	9
6	19.8 ± 5.9	19.8 ± 6.5	25.8 ± 4.9	25.8 ± 5.3	27.3 ± 9.0	27.3 ± 9.9	20.8 ± 6.8	20.8 ± 7.5	13
7	22.0 ± 5.6	22.0 ± 6.1	24.8 ± 5.5	24.8 ± 6.1	18.7 ± 7.0	18.7 ± 7.8	26.1 ± 10.5	26.1 ± 11.5	12
8	20.7 ± 6.2	20.7 ± 7.2	19.0 ± 2.7	19.0 ± 3.1	17.1 ± 6.0	17.1 ± 6.9	36.2 ± 9.8	36.2 ± 11.3	9
9	22.0 ± 6.2	22.0 ± 6.9	22.0 ± 5.0	22.0 ± 5.4	16.7 ± 6.5	16.7 ± 7.1	30.2 ± 9.6	30.2 ± 10.5	12
10	24.0 ± 8.7	24.0 ± 9.5	28.5 ± 5.6	28.5 ± 6.2	19.9 ± 7.4	19.9 ± 8.2	20.6 ± 8.7	20.6 ± 9.6	12
11	12.2 ± 2.3	12.2 ± 2.4	14.4 ± 3.9	14.4 ± 4.1	21.2 ± 7.3	21.2 ± 7.7	42.7 ± 9.3	42.7 ± 9.9	17
12	15.1 ± 4.8	15.1 ± 5.2	18.6 ± 5.7	18.6 ± 6.3	20.1 ± 9.9	20.1 ± 10.8	38.3 ± 14.6	38.3 ± 15.9	13
13	12.9 ± 7.7	12.9 ± 8.9	12.4 ± 4.1	12.4 ± 4.7	16.8 ± 10.0	16.8 ± 11.5	48.9 ± 16.1	48.9 ± 18.5	9
14	16.2 ± 7.4	16.2 ± 8.5	19.1 ± 7.9	19.1 ± 9.1	12.1 ± 9.2	12.1 ± 10.6	39.2 ± 10.0	39.2 ± 11.6	8

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

EDAD	Banda delta Gausiano	Banda delta t de Student	Banda theta Gausiano	Banda theta t de Student	Banda alfa 1 Gausiano	Banda alfa 1 t de Student	Banda alfa 2 Gausiano	Banda alfa 2 t de Student	Numero
3	25.4 ± 13.7	25.4 ± 18.5	40.1 ± 15.3	40.1 ± 20.6	17.8 ± 11.4	17.8 ± 15.3	11.5 ± 9.1	11.5 ± 12.2	8
4	27.9 ± 7.4	27.9 ± 9.3	42.0 ± 13.2	42.0 ± 16.5	19.0 ± 9.0	19.0 ± 11.3	7.2 ± 6.3	7.2 ± 7.8	10
5	18.7 ± 4.9	18.7 ± 6.3	34.3 ± 16.5	34.3 ± 21.3	30.3 ± 15.8	30.3 ± 20.4	12.6 ± 6.9	12.6 ± 8.9	9
6	19.8 ± 7.7	19.8 ± 9.0	25.8 ± 6.4	25.8 ± 7.5	27.3 ± 11.7	27.3 ± 13.8	20.8 ± 8.9	20.8 ± 10.4	13
7	22.0 ± 7.3	22.0 ± 8.7	24.8 ± 7.2	24.8 ± 8.6	18.7 ± 9.2	18.7 ± 11.0	26.1 ± 13.6	26.1 ± 16.3	12
8	20.7 ± 8.1	20.7 ± 10.5	19.0 ± 3.5	19.0 ± 4.5	17.1 ± 7.8	17.1 ± 10.0	36.2 ± 12.7	36.2 ± 16.4	9
9	22.0 ± 8.1	22.0 ± 9.7	22.0 ± 6.4	22.0 ± 7.7	16.7 ± 8.4	16.7 ± 10.0	30.2 ± 12.4	30.2 ± 14.9	12
10	24.0 ± 11.2	24.0 ± 13.5	28.5 ± 7.3	28.5 ± 8.7	19.9 ± 9.6	19.9 ± 11.5	20.6 ± 11.4	20.6 ± 13.6	12
11	12.2 ± 3.0	12.2 ± 3.3	14.4 ± 5.0	14.4 ± 5.6	21.2 ± 9.4	21.2 ± 10.6	42.7 ± 12.1	42.7 ± 13.5	17
12	15.1 ± 6.3	15.1 ± 7.3	18.6 ± 7.5	18.6 ± 8.8	20.1 ± 12.9	20.1 ± 15.2	38.3 ± 18.9	38.3 ± 22.2	13
13	12.9 ± 10.0	12.9 ± 12.9	12.4 ± 5.3	12.4 ± 6.9	16.8 ± 13.0	16.8 ± 16.7	48.9 ± 20.9	48.9 ± 26.9	9
14	16.2 ± 9.6	16.2 ± 12.4	19.1 ± 10.3	19.1 ± 13.2	12.1 ± 11.9	12.1 ± 15.3	39.2 ± 13.0	39.2 ± 16.8	8

Tabla H.5 : Comparación de medias.

variable	edades	edades	edades	g1<>g2	g1<>g3	g2<>g3	edad dif.
b: delta c: 1 m: delta	3 - 14						
b: delta c: 1 m: theta	3 - 14						
b: delta c: 1 m: alfa1	3 - 14						10
b: delta c: 1 m: alfa2	3 - 14						
b: theta c: 1 m: delta	3	4 - 10	11 - 14	si	si	6, 8 9, 10	
b: theta c: 1 m: theta	3 - 4	5 - 10	11 - 14	si	si	6, 7, 8 10	
b: theta c: 1 m: alfa1	3	4 - 10	11 - 14	si	si	no	
b: theta c: 1 m: alfa2	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 9 10	
b: alfa1 c: 1 m: delta	3 - 14						
b: alfa1 c: 1 m: theta	3 - 14						
b: alfa1 c: 1 m: alfa1	3 - 14						
b: alfa1 c: 1 m: alfa2	3 - 14						10
b: alfa2 c: 1 m: delta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 10	

b: alfa2 c: 1 m: theta	3 - 5	6 - 14		si			
b: alfa2 c: 1 m: alfa1	3 - 5	6 - 14		si			
b: alfa2 c: 1 m: alfa2	3 - 5	6 - 14		si			

CANAL 4

b: delta c: 4 m: delta	3 - 14						11
b: delta c: 4 m: theta	3 - 14						
b: delta c: 4 m: alfa1	3 - 14						11, 13
b: delta c: 4 m: alfa2	3 - 14						11
b: theta c: 4 m: delta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	12, 13	
b: theta c: 4 m: theta	3 - 5	6 - 10		3	si	6, 10 13, 14	
b: theta c: 4 m: alfa1	3 - 5	6 - 10		3	si	12, 13	
b: theta c: 4 m: alfa2	3 - 5	6 - 14		si			7, 12, 13
b: alfa1 c: 4 m: delta	3 - 14						
b: alfa1 c: 4 m: theta	3 - 14						6

b: alfa1 c: 4 m: alfa1	3 - 14						6
b: alfa1 c: 4 m: alfa2	3 - 14						6
b: alfa2 c: 4 m: delta	3 - 5	7 - 14		si			6, 10
b: alfa2 c: 4 m: theta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 7, 10 11, 13	
b: alfa2 c: 4 m: alfa1	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 8 9, 10 11, 13	
b: alfa2 c: 4 m: alfa2	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 9, 10	

CANAL 14

b: delta c: 14 m: delta	3 - 14						11
b: delta c: 14 m: theta	3 - 14						4, 7, 10
b: delta c: 14 m: alfa1	3 - 10 14	11 - 13		si			
b: delta c: 14 m: alfa2	3 - 14						4, 7, 13
b: theta c: 14 m: delta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 10 11, 13	8
b: theta c: 14 m: theta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 10 11, 13	8
b: theta c: 14 m: alfa1	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 7, 10 10, 13	

b: theta c: 14 m: alfa2	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 10 11, 13	
b: alfa1 c: 14 m: delta	3 - 14						
b: alfa1 c: 14 m: theta	3 - 14						
b: alfa1 c: 14 m: alfa1	3 - 14						
b: alfa1 c: 14 m: alfa2	3 - 14						
b: alfa2 c: 14 m: delta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 7, 10	
b: alfa2 c: 14 m: theta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 7 9, 10	
b: alfa2 c: 14 m: alfa1	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 7 9, 10	
b: alfa2 c: 14 m: alfa2	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 10 11, 13	

CANAL 16

b: delta c: 16 m: delta	3 - 10 12 - 14						11
b: delta c: 16 m: theta	3 - 14						
b: delta c: 16 m: alfa1	3 - 5 7 - 10 12 - 14						6, 11
b: delta c: 16 m: alfa2	3 5 - 10 12 - 14						4, 11

b: theta c: 16 m: delta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	si	
b: theta c: 16 m: theta	3 - 5	7 - 10	11 - 14	si	si	si	6
b: theta c: 16 m: alfa1	3 - 5	6 - 10	11 - 14	8, 9, 10	si	6, 7, 10	
b: theta c: 16 m: alfa2	3 - 5	6 - 7 9 - 10	11 - 14	si	si	11, 13	8
b: alfa1 c: 16 m: delta	3 - 14						
b: alfa1 c: 16 m: theta	3 - 13						14
b: alfa1 c: 16 m: alfa1	3 - 14						
b: alfa1 c: 16 m: alfa2	3 - 14						
b: alfa2 c: 16 m: delta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 10	
b: alfa2 c: 16 m: theta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 7, 10	
b: alfa2 c: 16 m: alfa1	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 7 9, 10	
b: alfa2 c: 16 m: alfa2	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	6, 10	

Tabla H.6 : Comparación de varianzas.

variable	edades	edades	edades	g1	g2	g3	edad dif.
b: delta c: 1 m: delta	3 - 14			10 - 13			
b: delta c: 1 m: theta	3 - 14			5 - 7			
b: delta c: 1 m: alfa1	3 - 14			8			
b: delta c: 1 m: alfa2	3 - 14			8			
b: theta c: 1 m: delta	3	4 - 10	11 - 14	si	4, 5	si	
b: theta c: 1 m: theta	3 - 4	5 - 10	11 - 14	si	8	14	
b: theta c: 1 m: alfa1	3	4 - 10	11 - 14	si	5	11	
b: theta c: 1 m: alfa2	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	si	
b: alfa1 c: 1 m: delta	3 - 14			3, 4 8, 13 14			
b: alfa1 c: 1 m: theta	3 - 14			8, 14			
b: alfa1 c: 1 m: alfa1	3 - 14			3, 8 13, 14			
b: alfa1 c: 1 m: alfa2	3 - 14			3, 4, 6 8, 10			
b: alfa2 c: 1 m: delta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	5	si	si	

b: alfa2 c: 1 m: theta	3 - 5	6 - 14		5	10		
b: alfa2 c: 1 m: alfa1	3 - 5	6 - 14		si	12, 13		
b: alfa2 c: 1 m: alfa2	3 - 5	6 - 14		si	6, 7 9, 10		

CANAL 4

b: delta c: 4 m: delta	3 - 14			3, 6, 10, 11			
b: delta c: 4 m: theta	3 - 14			7			
b: delta c: 4 m: alfa1	3 - 14			6, 8, 14			
b: delta c: 4 m: alfa2	3 - 14			6, 9, 11			
b: theta c: 4 m: delta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	3	8	12	
b: theta c: 4 m: theta	3 - 5	6 - 10		3, 5	si	si	
b: theta c: 4 m: alfa1	3 - 5	6 - 10		si	8	si	
b: theta c: 4 m: alfa2	3 - 5	6 - 14		3	si	11	
b: alfa1 c: 4 m: delta	3 - 14			5, 8 13, 14			
b: alfa1 c: 4 m: theta	3 - 14			3, 5, 6 8, 10			

b: alfa1 c: 4 m: alfa1	3 - 14			3, 4, 5 7, 11, 13, 14			
b: alfa1 c: 4 m: alfa2	3 - 14			11, 12 13, 14			
b: alfa2 c: 4 m: delta	3 - 5	7 - 14		si	9	14	
b: alfa2 c: 4 m: theta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	13	
b: alfa2 c: 4 m: alfa1	3 - 5	6 - 10	11 - 14	5	si	14	
b: alfa2 c: 4 m: alfa2	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	14	

CANAL 14

b: delta c: 14 m: delta	3 - 14			5, 11			
b: delta c: 14 m: theta	3 - 14			12			
b: delta c: 14 m: alfa1	3 - 10 14	11 - 13		3, 4, 5			
b: delta c: 14 m: alfa2	3 - 14			3, 5, 6 13			
b: theta c: 14 m: delta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	8	11	
b: theta c: 14 m: theta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	8	14	
b: theta c: 14 m: alfa1	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	6, 8	si	

b: theta c: 14 m: alfa2	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	10	14	
b: alfa1 c: 14 m: delta	3 - 14			4, 6, 7			
b: alfa1 c: 14 m: theta	3 - 14			4, 7, 9			
b: alfa1 c: 14 m: alfa1	3 - 14			4, 6, 7			
b: alfa1 c: 14 m: alfa2	3 - 14			3, 4, 5 6, 7 11, 12			
b: alfa2 c: 14 m: delta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	si	
b: alfa2 c: 14 m: theta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	si	
b: alfa2 c: 14 m: alfa1	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	si	
b: alfa2 c: 14 m: alfa2	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	si	

CANAL 16

b: delta c: 16 m: delta	3 - 10 12 - 14						11
b: delta c: 16 m: theta	3 - 14			6, 10 11, 12 13			
b: delta c: 16 m: alfa1	3 - 5 7 - 10 12 - 14			5			6, 11
b: delta c: 16 m: alfa2	3 5 - 10 12 - 14			5			11

b: theta c: 16 m: delta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	6, 7	si	
b: theta c: 16 m: theta	3 - 5	7 - 10	11 - 14	si	8	si	
b: theta c: 16 m: alfa1	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	8, 9	si	
b: theta c: 16 m: alfa2	3 - 5	6 - 7 9 - 10	11 - 14	si	8	14	
b: alfa1 c: 16 m: delta	3 - 14			3, 4 5, 7 8			
b: alfa1 c: 16 m: theta	3 - 13			3, 9			14
b: alfa1 c: 16 m: alfa1	3 - 14			7			
b: alfa1 c: 16 m: alfa2	3 - 14			8			
b: alfa2 c: 16 m: delta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	4	si	si	
b: alfa2 c: 16 m: theta	3 - 5	6 - 10	11 - 14	4	si	si	
b: alfa2 c: 16 m: alfa1	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	si	
b: alfa2 c: 16 m: alfa2	3 - 5	6 - 10	11 - 14	si	si	si	

## 3 CASO DE TRES BANDAS

Tabla H.7 Características univariantes con variables canónicas.

## INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	43.1 ± 29.5	43.1 ± 188.0	22.1 ± 26.9	22.1 ± 170.8	4*
Np	39.7 ± 10.9	39.7 ± 14.0	19.2 ± 4.7	19.2 ± 6.0	9
Ap	No disponible	No disponible	No disponible	No disponible	1
Bi	32.8 ± 7.0	32.8 ± 7.9	14.3 ± 4.5	14.3 ± 5.1	10
Ni	34.8 ± 6.8	34.8 ± 8.3	14.0 ± 7.1	14.0 ± 8.7	34
Ai	29.8 ± 7.0	29.8 ± 7.8	9.4 ± 1.3	9.4 ± 1.5	3
Bg	24.8 ± 6.0	24.8 ± 6.6	12.6 ± 3.4	12.6 ± 3.7	10
Ng	38.3 ± 7.7	38.3 ± 9.4	12.5 ± 3.5	12.5 ± 4.2	26
Ag	25.5 ± 3.3	25.5 ± 3.5	8.3 ± 1.5	8.3 ± 1.5	3

## EDAD INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	43.1 ± 38.5	43.1 ± 941.4	22.1 ± 34.9	22.1 ± 855.4	4*
Np	39.7 ± 14.2	39.7 ± 21.9	19.2 ± 6.0	19.2 ± 9.4	9
Ap	No disponible	No disponible	No disponible	No disponible.	1
Bi	32.8 ± 9.1	32.8 ± 11.4	14.3 ± 5.9	14.3 ± 7.4	10
Ni	34.8 ± 8.8	34.8 ± 12.6	14.0 ± 9.3	14.0 ± 13.2	34
Ai	29.8 ± 9.1	29.8 ± 11.1	9.4 ± 1.7	9.4 ± 2.1	3
Bg	24.8 ± 7.8	24.8 ± 9.4	12.6 ± 4.4	12.6 ± 5.2	10
Ng	38.3 ± 10.0	38.3 ± 14.2	12.5 ± 4.5	12.5 ± 6.4	26
Ag	25.5 ± 4.2	25.5 ± 4.8	8.3 ± 1.9	8.3 ± 2.1	3

Tabla H.8 Comparación de medias 3 bandas con variables canónicas.

variable	grupos bien diferenciados
b: var1 c: 16 m: delta	Bg, Ag
b: var1 c: 16 m: theta	Np, Ai, Ag
b: var1 c: 16 m: alfa	Bp, Np

## 4 CASO DE CUATRO BANDAS

Tabla H.9 Características univariantes con variables canónicas.

## CANAL 1 MÁXIMO BANDA DELTA:

## INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	44.5 ± 1.0	44.5 ± 1.1	-0.0 ± 7.4	-0.0 ± 8.4	10
Np	44.3 ± 0.9	44.3 ± 1.0	-2.1 ± 4.8	-2.1 ± 5.3	13
Ap	43.7 ± 0.7	43.7 ± 1.1	-8.5 ± 10.0	-8.5 ± 15.9	4
Bi	43.1 ± 0.9	43.1 ± 0.9	-0.2 ± 2.5	-0.2 ± 2.5	26
Ni	43.2 ± 1.1	43.2 ± 1.1	-0.4 ± 3.2	-0.4 ± 3.3	28
Ai	44.2 ± 1.6	44.2 ± 2.6	4.0 ± 5.0	4.0 ± 7.9	4
Bg	42.5 ± 0.9	42.5 ± 1.0	-2.1 ± 5.7	-2.1 ± 5.9	22
Ng	43.6 ± 1.4	43.6 ± 1.5	2.9 ± 5.0	2.9 ± 5.2	20
Ag	41.8 ± 4.6	41.8 ± 5.9	0.6 ± 10.6	0.6 ± 13.6	6

## INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	44.5 ± 1.3	44.5 ± 1.6	-0.0 ± 9.6	-0.0 ± 12.0	10
Np	44.3 ± 1.2	44.3 ± 1.4	-2.1 ± 6.3	-2.1 ± 7.4	13
Ap	43.7 ± 0.9	43.7 ± 2.0	-8.5 ± 13.0	-8.5 ± 29.2	4
Bi	43.1 ± 1.2	43.1 ± 1.3	-0.2 ± 3.2	-0.2 ± 3.5	26
Ni	43.2 ± 1.4	43.2 ± 1.5	-0.4 ± 4.2	-0.4 ± 4.5	28
Ai	44.2 ± 2.1	44.2 ± 4.7	4.0 ± 6.4	4.0 ± 14.5	4
Bg	42.5 ± 1.2	42.5 ± 1.3	-2.1 ± 7.4	-2.1 ± 8.0	22
Ng	43.6 ± 1.8	43.6 ± 2.0	2.9 ± 6.4	2.9 ± 7.1	20
Ag	41.8 ± 6.0	41.8 ± 9.3	0.6 ± 13.8	0.6 ± 21.4	6

CANAL 1 MÁXIMO BANDA THETA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	45.2 ± 0.7	45.2 ± 0.8	-8.9 ± 3.6	-8.9 ± 4.1	10
Np	44.8 ± 0.6	44.8 ± 0.7	-2.5 ± 3.7	-2.5 ± 4.1	13
Ap	44.6 ± 1.5	44.6 ± 2.5	1.7 ± 11.7	1.7 ± 18.6	4
Bi	43.7 ± 0.9	43.7 ± 0.9	-4.5 ± 2.4	-4.5 ± 2.4	26
Ni	43.7 ± 0.9	43.7 ± 0.9	-4.2 ± 3.5	-4.2 ± 3.6	28
Ai	43.6 ± 3.1	43.6 ± 4.9	-5.7 ± 10.2	-5.7 ± 16.2	4
Bg	42.7 ± 1.4	42.7 ± 1.4	-2.8 ± 4.3	-2.8 ± 4.4	22
Ng	42.8 ± 1.4	42.8 ± 1.4	-5.5 ± 4.8	-5.5 ± 5.0	20
Ag	42.8 ± 4.6	42.8 ± 5.9	-3.4 ± 11.2	-3.4 ± 14.4	6

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	45.2 ± 0.9	45.2 ± 1.2	-8.9 ± 4.7	-8.9 ± 5.9	10
Np	44.8 ± 0.8	44.8 ± 1.0	-2.5 ± 4.9	-2.5 ± 5.7	13
Ap	44.6 ± 2.0	44.6 ± 4.5	1.7 ± 15.2	1.7 ± 34.2	4
Bi	43.7 ± 1.1	43.7 ± 1.2	-4.5 ± 3.1	-4.5 ± 3.3	26
Ni	43.7 ± 1.2	43.7 ± 1.2	-4.2 ± 4.6	-4.2 ± 4.9	28
Ai	43.6 ± 4.0	43.6 ± 9.0	-5.7 ± 13.3	-5.7 ± 29.8	4
Bg	42.7 ± 1.8	42.7 ± 1.9	-2.8 ± 5.5	-2.8 ± 6.0	22
Ng	42.8 ± 1.8	42.8 ± 1.9	-5.5 ± 6.2	-5.5 ± 6.9	20
Ag	42.8 ± 6.0	42.8 ± 9.3	-3.4 ± 14.5	-3.4 ± 22.5	6

## CANAL 1 MÁXIMO BANDA ALFA 1

## INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	45.0 ± 1.0	45.0 ± 1.1	2.0 ± 4.1	2.0 ± 4.7	10
Np	44.7 ± 0.8	44.7 ± 0.9	-1.8 ± 2.8	-1.8 ± 3.1	13
Ap	44.0 ± 1.0	44.0 ± 1.5	-6.5 ± 11.7	-6.5 ± 18.6	4
Bi	44.0 ± 0.9	44.0 ± 0.9	0.6 ± 2.6	0.6 ± 2.7	26
Ni	44.0 ± 0.9	44.0 ± 0.9	-0.2 ± 3.4	-0.2 ± 3.5	28
Ai	43.5 ± 3.1	43.5 ± 4.9	3.0 ± 11.5	3.0 ± 18.3	4
Bg	42.3 ± 1.1	42.3 ± 1.2	-3.4 ± 5.9	-3.4 ± 6.1	22
Ng	43.2 ± 1.6	43.2 ± 1.7	4.6 ± 5.2	4.6 ± 5.4	20
Ag	42.4 ± 3.2	42.4 ± 4.1	-1.1 ± 6.7	-1.1 ± 8.6	6

## INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	45.0 ± 1.2	45.0 ± 1.5	2.0 ± 5.4	2.0 ± 6.7	10
Np	44.7 ± 1.1	44.7 ± 1.3	-1.8 ± 3.7	-1.8 ± 4.3	13
Ap	44.0 ± 1.2	44.0 ± 2.8	-6.5 ± 15.2	-6.5 ± 34.2	4
Bi	44.0 ± 1.2	44.0 ± 1.2	0.6 ± 3.4	0.6 ± 3.6	26
Ni	44.0 ± 1.1	44.0 ± 1.2	-0.2 ± 4.4	-0.2 ± 4.7	28
Ai	43.5 ± 4.0	43.5 ± 9.11	3.0 ± 5.0	3.0 ± 33.6	4
Bg	42.3 ± 1.4	42.3 ± 1.5	-3.4 ± 7.6	-3.4 ± 8.3	22
Ng	43.2 ± 2.1	43.2 ± 2.4	4.6 ± 6.7	4.6 ± 7.4	20
Ag	42.4 ± 4.1	42.4 ± 6.4	-1.1 ± 8.7	-1.1 ± 13.5	6

CANAL 1 MÁXIMO BANDA ALFA 2

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-45.1 ± 0.7	-45.1 ± 0.8	-5.9 ± 6.0	-5.9 ± 6.8	10
Np	-44.5 ± 0.9	-44.5 ± 1.0	0.5 ± 5.7	0.5 ± 6.2	13
Ap	-44.0 ± 1.6	-44.0 ± 2.5	3.6 ± 7.9	3.6 ± 12.5	4
Bi	-43.4 ± 1.1	-43.4 ± 1.1	-3.0 ± 2.8	-3.0 ± 2.9	26
Ni	-43.6 ± 1.0	-43.6 ± 1.0	-2.2 ± 3.1	-2.2 ± 3.2	28
Ai	-43.6 ± 2.0	-43.6 ± 3.2	-3.8 ± 5.7	-3.8 ± 9.1	4
Bg	-43.0 ± 1.1	-43.0 ± 1.2	-0.8 ± 5.3	-0.8 ± 5.6	22
Ng	-43.0 ± 1.4	-43.0 ± 1.5	-3.6 ± 5.7	-3.6 ± 6.0	20
Ag	-42.9 ± 5.1	-42.9 ± 6.5	-2.6 ± 12.5	-2.6 ± 16.1	6

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-45.1 ± 0.9	-45.1 ± 1.1	-5.9 ± 7.8	-5.9 ± 9.8	10
Np	-44.5 ± 1.1	-44.5 ± 1.3	0.5 ± 7.4	0.5 ± 8.7	13
Ap	-44.0 ± 2.1	-44.0 ± 4.6	3.6 ± 10.3	3.6 ± 23.1	4
Bi	-43.4 ± 1.4	-43.4 ± 1.5	-3.0 ± 3.6	-3.0 ± 3.9	26
Ni	-43.6 ± 1.3	-43.6 ± 1.4	-2.2 ± 4.1	-2.2 ± 4.3	28
Ai	-43.6 ± 2.6	-43.6 ± 5.9	-3.8 ± 7.4	-3.8 ± 16.7	4
Bg	-43.0 ± 1.5	-43.0 ± 1.5	-0.8 ± 6.9	-0.8 ± 7.5	22
Ng	-43.0 ± 1.9	-43.0 ± 2.1	-3.6 ± 7.4	-3.6 ± 8.2	20
Ag	-42.9 ± 6.6	-42.9 ± 10.3	-2.6 ± 16.3	-2.6 ± 25.2	6

## CANAL 4 MÁXIMO BANDA DELTA

## INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	44.3 ± 0.9	44.3 ± 1.0	7.8 ± 3.5	7.8 ± 3.9	10
Np	43.9 ± 0.7	43.9 ± 0.7	3.8 ± 3.4	3.8 ± 3.7	13
Ap	44.2 ± 1.3	44.2 ± 2.0	-2.3 ± 6.2	-2.3 ± 9.7	4
Bi	43.1 ± 1.0	43.1 ± 1.0	4.1 ± 2.3	4.1 ± 2.3	26
Ni	43.3 ± 1.1	43.3 ± 1.1	6.0 ± 2.5	6.0 ± 2.5	28
Ai	43.9 ± 1.0	43.9 ± 1.6	-1.9 ± 16.0	-1.9 ± 25.5	4
Bg	42.6 ± 1.3	42.6 ± 1.4	0.6 ± 5.5	0.6 ± 5.7	22
Ng	43.1 ± 1.5	43.1 ± 1.6	7.3 ± 3.5	7.3 ± 3.7	20
Ag	42.3 ± 2.6	42.3 ± 3.3	1.4 ± 9.7	1.4 ± 12.5	6

## INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	44.3 ± 1.2	44.3 ± 1.5	7.8 ± 4.5	7.8 ± 5.6	10
Np	43.9 ± 0.8	43.9 ± 1.0	3.8 ± 4.4	3.8 ± 5.1	13
Ap	44.2 ± 1.7	44.2 ± 3.7	-2.3 ± 8.0	-2.3 ± 18.0	4
Bi	43.1 ± 1.3	43.1 ± 1.4	4.1 ± 2.9	4.1 ± 3.1	26
Ni	43.3 ± 1.4	43.3 ± 1.5	6.0 ± 3.2	6.0 ± 3.5	28
Ai	43.9 ± 1.3	43.9 ± 3.0	-1.9 ± 20.8	-1.9 ± 46.8	4
Bg	42.6 ± 1.7	42.6 ± 1.9	0.6 ± 7.1	0.6 ± 7.8	22
Ng	43.1 ± 2.0	43.1 ± 2.2	7.3 ± 4.6	7.3 ± 5.1	20
Ag	42.3 ± 3.4	42.3 ± 5.2	1.4 ± 12.7	1.4 ± 19.6	6

CANAL 4 MÁXIMO BANDA THETA

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	44.8 ± 0.8	44.8 ± 0.9	-4.2 ± 3.6	-4.2 ± 4.1	10
Np	44.5 ± 0.5	44.5 ± 0.6	-1.1 ± 3.8	-1.1 ± 4.1	13
Ap	44.2 ± 1.7	44.2 ± 2.6	3.4 ± 4.7	3.4 ± 7.5	4
Bi	43.5 ± 1.1	43.5 ± 1.2	-2.3 ± 2.4	-2.3 ± 2.5	26
Ni	43.5 ± 1.0	43.5 ± 1.0	-3.2 ± 2.7	-3.2 ± 2.8	28
Ai	43.0 ± 1.5	43.0 ± 2.4	3.4 ± 9.7	3.4 ± 15.4	4
Bg	42.9 ± 1.3	42.9 ± 1.4	-0.9 ± 5.4	-0.9 ± 5.7	22
Ng	43.4 ± 1.5	43.4 ± 1.6	-5.7 ± 3.9	-5.7 ± 4.0	20
Ag	42.4 ± 3.3	42.4 ± 4.2	-1.2 ± 10.5	-1.2 ± 13.5	6

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	44.8 ± 1.0	44.8 ± 1.3	-4.2 ± 4.7	-4.2 ± 5.9	10
Np	44.5 ± 0.7	44.5 ± 0.8	-1.1 ± 4.9	-1.1 ± 5.7	13
Ap	44.2 ± 2.1	44.2 ± 4.8	3.4 ± 6.1	3.4 ± 13.8	4
Bi	43.5 ± 1.5	43.5 ± 1.5	-2.3 ± 3.2	-2.3 ± 3.4	26
Ni	43.5 ± 1.3	43.5 ± 1.4	-3.2 ± 3.5	-3.2 ± 3.8	28
Ai	43.0 ± 2.0	43.0 ± 4.5	3.4 ± 12.5	3.4 ± 28.2	4
Bg	42.9 ± 1.7	42.9 ± 1.9	-0.9 ± 7.1	-0.9 ± 7.7	22
Ng	43.4 ± 2.0	43.4 ± 2.3	-5.7 ± 5.0	-5.7 ± 5.5	20
Ag	42.4 ± 4.3	42.4 ± 6.6	-1.2 ± 13.7	-1.2 ± 21.2	6

## CANAL 4 MÁXIMO BANDA ALFA 1

## INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-45.3 ± 0.7	-45.3 ± 0.7	-3.8 ± 6.5	-3.8 ± 7.4	10
Np	-44.8 ± 0.5	-44.8 ± 0.5	-1.5 ± 4.3	-1.5 ± 4.6	13
Ap	-44.4 ± 1.0	-44.4 ± 1.7	5.0 ± 11.3	5.0 ± 17.9	4
Bi	-43.8 ± 1.2	-43.8 ± 1.2	-2.8 ± 2.2	-2.8 ± 2.3	26
Ni	-43.9 ± 1.1	-43.9 ± 1.1	-2.8 ± 2.6	-2.8 ± 2.7	28
Ai	-43.2 ± 1.3	-43.2 ± 2.0	1.9 ± 11.4	1.9 ± 18.1	4
Bg	-42.8 ± 1.5	-42.8 ± 1.6	1.5 ± 6.1	1.5 ± 6.4	22
Ng	-43.7 ± 1.6	-43.7 ± 1.7	-8.0 ± 3.5	-8.0 ± 3.8	20
Ag	-43.2 ± 3.4	-43.2 ± 4.4	-1.2 ± 7.1	-1.2 ± 9.1	6

## INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-45.3 ± 0.9	-45.3 ± 1.1	-3.8 ± 8.5	-3.8 ± 10.6	10
Np	-44.8 ± 0.6	-44.8 ± 0.7	-1.5 ± 5.5	-1.5 ± 6.5	13
Ap	-44.4 ± 1.4	-44.4 ± 3.1	5.0 ± 14.7	5.0 ± 32.9	4
Bi	-43.8 ± 1.5	-43.8 ± 1.6	-2.8 ± 2.9	-2.8 ± 3.1	26
Ni	-43.9 ± 1.4	-43.9 ± 1.5	-2.8 ± 3.4	-2.8 ± 3.6	28
Ai	-43.2 ± 1.7	-43.2 ± 3.7	1.9 ± 14.8	1.9 ± 33.2	4
Bg	-42.8 ± 1.9	-42.8 ± 2.1	1.5 ± 8.0	1.5 ± 8.7	22
Ng	-43.7 ± 2.1	-43.7 ± 2.3	-8.0 ± 4.6	-8.0 ± 5.1	20
Ag	-43.2 ± 4.4	-43.2 ± 6.9	-1.2 ± 9.2	-1.2 ± 14.3	6

CANAL 4 MÁXIMO BANDA ALFA 2

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-45.0 ± 0.8	-45.0 ± 0.9	-9.2 ± 3.8	-9.2 ± 4.3	10
Np	-44.8 ± 0.6	-44.8 ± 0.7	-4.2 ± 2.8	-4.2 ± 3.0	13
Ap	-43.8 ± 1.4	-43.8 ± 2.2	-0.6 ± 5.0	-0.6 ± 7.9	4
Bi	-43.6 ± 1.0	-43.6 ± 1.0	-5.4 ± 1.9	-5.4 ± 1.9	26
Ni	-43.7 ± 1.0	-43.7 ± 1.1	-4.6 ± 2.2	-4.6 ± 2.3	28
Ai	-43.5 ± 1.4	-43.5 ± 2.2	-5.4 ± 7.4	-5.4 ± 11.8	4
Bg	-43.1 ± 1.6	-43.1 ± 1.7	-3.5 ± 4.7	-3.5 ± 4.9	22
Ng	-43.6 ± 1.2	-43.6 ± 1.3	-8.0 ± 4.2	-8.0 ± 4.4	20
Ag	-43.2 ± 3.1	-43.2 ± 4.0	-3.8 ± 13.9	-3.8 ± 17.8	6

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-45.0 ± 1.1	-45.0 ± 1.3	-9.2 ± 4.9	-9.2 ± 6.2	10
Np	-44.8 ± 0.8	-44.8 ± 0.9	-4.2 ± 3.6	-4.2 ± 4.2	13
Ap	-43.8 ± 1.8	-43.8 ± 4.0	-0.6 ± 6.5	-0.6 ± 14.5	4
Bi	-43.6 ± 1.3	-43.6 ± 1.3	-5.4 ± 2.4	-5.4 ± 2.6	26
Ni	-43.7 ± 1.4	-43.7 ± 1.4	-4.6 ± 2.9	-4.6 ± 3.1	28
Ai	-43.5 ± 1.8	-43.5 ± 4.1	-5.4 ± 9.6	-5.4 ± 21.6	4
Bg	-43.1 ± 2.1	-43.1 ± 2.3	-3.5 ± 6.2	-3.5 ± 6.7	22
Ng	-43.6 ± 1.6	-43.6 ± 1.8	-8.0 ± 5.5	-8.0 ± 6.0	20
Ag	-43.2 ± 4.1	-43.2 ± 6.3	-3.8 ± 18.0	-3.8 ± 27.9	6

CANAL 14 MÁXIMO BANDA DELTA  
INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-32.0 ± 3.1	-32.0 ± 3.5	47.1 ± 0.9	47.1 ± 1.0	10
Np	-23.5 ± 5.4	-23.5 ± 5.9	45.9 ± 1.5	45.9 ± 1.7	13
Ap	-11.9 ± 8.8	-11.9 ± 14.0	45.9 ± 1.7	45.9 ± 2.7	4
Bi	-12.1 ± 5.3	-12.1 ± 5.4	45.9 ± 0.7	45.9 ± 0.7	26
Ni	-6.6 ± 5.9	-6.6 ± 6.0	46.1 ± 0.9	46.1 ± 0.9	28
Ai	6.7 ± 5.5	6.7 ± 8.8	46.4 ± 3.0	46.4 ± 4.8	4
Bg	-1.1 ± 7.3	-1.1 ± 7.6	44.3 ± 1.4	44.3 ± 1.5	22
Ng	16.2 ± 10.0	16.2 ± 10.5	45.6 ± 1.4	45.6 ± 1.5	20
Ag	17.6 ± 21.4	17.6 ± 27.5	44.6 ± 4.6	44.6 ± 5.8	6

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-32.0 ± 4.0	-32.0 ± 5.0	47.1 ± 1.2	47.1 ± 1.5	10
Np	-23.5 ± 7.0	-23.5 ± 8.3	45.9 ± 2.0	45.9 ± 2.4	13
Ap	-11.9 ± 11.5	-11.9 ± 25.7	45.9 ± 2.2	45.9 ± 4.9	4
Bi	-12.1 ± 6.8	-12.1 ± 7.3	45.9 ± 0.9	45.9 ± 0.9	26
Ni	-6.6 ± 7.6	-6.6 ± 8.2	46.1 ± 1.1	46.1 ± 1.2	28
Ai	6.7 ± 7.2	6.7 ± 16.2	46.4 ± 3.9	46.4 ± 8.8	4
Bg	-1.1 ± 9.5	-1.1 ± 10.3	44.3 ± 1.8	44.3 ± 2.0	22
Ng	16.2 ± 13.0	16.2 ± 14.4	45.6 ± 1.9	45.6 ± 2.1	20
Ag	17.6 ± 27.8	17.6 ± 43.2	44.6 ± 5.9	44.6 ± 9.2	6

CANAL 14 MÁXIMO BANDA THETA

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-33.2 ± 4.5	-33.2 ± 5.2	-24.1 ± 5.6	-24.1 ± 6.3	10
Np	-26.2 ± 6.3	-26.2 ± 6.9	-7.5 ± 8.2	-7.5 ± 8.9	13
Ap	-15.6 ± 8.2	-15.6 ± 13.1	1.7 ± 17.7	1.7 ± 28.2	4
Bi	-14.4 ± 5.1	-14.4 ± 5.2	-5.0 ± 5.2	-5.0 ± 5.3	26
Ni	-7.8 ± 5.9	-7.8 ± 6.1	-2.3 ± 5.3	-2.3 ± 5.4	28
Ai	-0.4 ± 14.7	-0.4 ± 23.4	12.7 ± 29.9	12.7 ± 47.6	4
Bg	-0.0 ± 8.4	-0.0 ± 8.7	-2.3 ± 5.9	-2.3 ± 6.2	22
Ng	18.7 ± 10.5	18.7 ± 11.0	0.4 ± 7.3	0.4 ± 7.7	20
Ag	10.8 ± 19.7	10.8 ± 25.3	6.6 ± 18.3	6.6 ± 23.5	6

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-33.2 ± 5.9	-33.2 ± 7.4	-24.1 ± 7.2	-24.1 ± 9.0	10
Np	-26.2 ± 8.2	-26.2 ± 9.6	-7.5 ± 10.6	-7.5 ± 12.5	13
Ap	-15.6 ± 10.7	-15.6 ± 24.0	1.7 ± 23.1	1.7 ± 51.8	4
Bi	-14.4 ± 6.6	-14.4 ± 7.1	-5.0 ± 6.7	-5.0 ± 7.2	26
Ni	-7.8 ± 7.7	-7.8 ± 8.3	-2.3 ± 6.8	-2.3 ± 7.3	28
Ai	-0.4 ± 19.1	-0.4 ± 43.0	12.7 ± 38.9	12.7 ± 87.3	4
Bg	-0.0 ± 10.9	-0.0 ± 11.9	-2.3 ± 7.7	-2.3 ± 8.4	22
Ng	18.7 ± 13.6	18.7 ± 15.1	0.4 ± 9.5	0.4 ± 10.5	20
Ag	10.8 ± 25.6	10.8 ± 39.6	6.6 ± 23.8	6.6 ± 36.9	6

CANAL 14 MÁXIMO BANDA ALFA 1  
INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-27.3 ± 2.2	-27.3 ± 2.5	-46.8 ± 0.7	-46.8 ± 0.8	10
Np	-23.1 ± 4.3	-23.1 ± 4.7	-44.9 ± 2.0	-44.9 ± 2.2	13
Ap	-16.4 ± 8.9	-16.4 ± 14.2	-45.5 ± 2.0	-45.5 ± 3.2	4
Bi	-12.7 ± 4.9	-12.7 ± 5.1	-45.3 ± 0.8	-45.3 ± 0.9	26
Ni	-8.4 ± 5.5	-8.4 ± 5.7	-45.5 ± 0.8	-45.5 ± 0.9	28
Ai	-6.0 ± 21.2	-6.0 ± 33.7	-44.9 ± 1.2	-44.9 ± 1.8	4
Bg	-4.1 ± 7.6	-4.1 ± 7.9	-43.4 ± 1.6	-43.4 ± 1.6	22
Ng	15.5 ± 13.0	15.5 ± 13.6	-45.7 ± 1.4	-45.7 ± 1.4	20
Ag	7.5 ± 24.8	7.5 ± 31.8	-42.1 ± 4.2	-42.1 ± 5.4	6

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-27.3 ± 2.9	-27.3 ± 3.6	-46.8 ± 0.9	-46.8 ± 1.1	10
Np	-23.1 ± 5.7	-23.1 ± 6.6	-44.9 ± 2.6	-44.9 ± 3.0	13
Ap	-16.4 ± 11.6	-16.4 ± 26.0	-45.5 ± 2.6	-45.5 ± 5.9	4
Bi	-12.7 ± 6.4	-12.7 ± 6.9	-45.3 ± 1.1	-45.3 ± 1.2	26
Ni	-8.4 ± 7.2	-8.4 ± 7.7	-45.5 ± 1.1	-45.5 ± 1.2	28
Ai	-6.0 ± 27.6	-6.0 ± 62.0	-44.9 ± 1.5	-44.9 ± 3.4	4
Bg	-4.1 ± 9.8	-4.1 ± 10.7	-43.4 ± 2.0	-43.4 ± 2.2	22
Ng	15.5 ± 16.8	15.5 ± 18.7	-45.7 ± 1.8	-45.7 ± 2.0	20
Ag	7.5 ± 32.2	7.5 ± 49.9	-42.1 ± 5.5	-42.1 ± 8.5	6

CANAL I4 MÁXIMO BANDA ALFA 2

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-29.7 ± 3.0	-29.7 ± 3.4	-47.5 ± 0.9	-47.5 ± 1.0	10
Np	-21.4 ± 3.8	-21.4 ± 4.2	-45.9 ± 2.2	-45.9 ± 2.4	13
Ap	-7.3 ± 11.1	-7.3 ± 17.6	-47.1 ± 2.4	-47.1 ± 3.7	4
Bi	-8.2 ± 6.0	-8.2 ± 6.2	-45.8 ± 0.6	-45.8 ± 0.7	26
Ni	-2.4 ± 6.9	-2.4 ± 7.1	-46.2 ± 0.7	-46.2 ± 0.8	28
Ai	6.7 ± 13.5	6.7 ± 21.5	-46.9 ± 2.3	-46.9 ± 3.7	4
Bg	6.6 ± 8.2	6.6 ± 8.5	-44.6 ± 1.2	-44.6 ± 1.2	22
Ng	23.7 ± 10.9	23.7 ± 11.4	-46.2 ± 1.4	-46.2 ± 1.5	20
Ag	11.8 ± 17.4	11.8 ± 22.4	-43.7 ± 4.6	-43.7 ± 5.9	6

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-29.7 ± 3.9	-29.7 ± 4.9	-47.5 ± 1.2	-47.5 ± 1.5	10
Np	-21.4 ± 5.0	-21.4 ± 5.8	-45.9 ± 2.9	-45.9 ± 3.3	13
Ap	-7.3 ± 14.4	-7.3 ± 32.3	-47.1 ± 3.1	-47.1 ± 6.9	4
Bi	-8.2 ± 7.7	-8.2 ± 8.3	-45.8 ± 0.8	-45.8 ± 0.9	26
Ni	-2.4 ± 8.9	-2.4 ± 9.5	-46.2 ± 1.0	-46.2 ± 1.0	28
Ai	6.7 ± 17.5	6.7 ± 39.5	-46.9 ± 3.0	-46.9 ± 6.8	4
Bg	6.6 ± 10.7	6.6 ± 11.6	-44.6 ± 1.5	-44.6 ± 1.7	22
Ng	23.7 ± 14.1	23.7 ± 15.6	-46.2 ± 1.9	-46.2 ± 2.1	20
Ag	11.8 ± 22.7	11.8 ± 35.1	-43.7 ± 6.0	-43.7 ± 9.3	6

CANAL 16 MÁXIMO BANDA DELTA  
INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-31.6 ± 2.2	-31.6 ± 2.5	-47.4 ± 0.6	-47.4 ± 0.7	10
Np	-24.5 ± 4.5	-24.5 ± 4.9	-46.8 ± 0.4	-46.8 ± 0.4	13
Ap	-11.8 ± 11.4	-11.8 ± 18.2	-46.9 ± 0.5	-46.9 ± 0.7	4
Bi	-12.1 ± 5.5	-12.1 ± 5.7	-46.7 ± 0.7	-46.7 ± 0.7	26
Ni	-5.2 ± 6.1	-5.2 ± 6.3	-46.5 ± 0.7	-46.5 ± 0.7	28
Ai	1.6 ± 16.4	1.6 ± 26.1	-47.4 ± 3.5	-47.4 ± 5.6	4
Bg	-3.4 ± 6.9	-3.4 ± 7.2	-45.1 ± 1.2	-45.1 ± 1.2	22
Ng	17.2 ± 9.1	17.2 ± 9.5	-46.6 ± 1.0	-46.6 ± 1.0	20
Ag	10.6 ± 18.5	10.6 ± 23.7	-44.5 ± 4.1	-44.5 ± 5.3	6

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-31.6 ± 2.9	-31.6 ± 3.5	-47.4 ± 0.7	-47.4 ± 1.0	10
Np	-24.5 ± 5.8	-24.5 ± 6.8	-46.8 ± 0.5	-46.8 ± 0.6	13
Ap	-11.8 ± 14.9	-11.8 ± 33.4	-46.9 ± 0.6	-46.9 ± 1.4	4
Bi	-12.1 ± 7.2	-12.1 ± 7.7	-46.7 ± 0.9	-46.7 ± 1.0	26
Ni	-5.2 ± 8.0	-5.2 ± 8.5	-46.5 ± 0.9	-46.5 ± 0.9	28
Ai	1.6 ± 21.4	1.6 ± 48.0	-47.4 ± 4.5	-47.4 ± 10.3	4
Bg	-3.4 ± 9.0	-3.4 ± 9.7	-45.1 ± 1.5	-45.1 ± 1.6	22
Ng	17.2 ± 11.8	17.2 ± 13.1	-46.6 ± 1.3	-46.6 ± 1.4	20
Ag	10.6 ± 24.0	10.6 ± 37.3	-44.5 ± 5.3	-44.5 ± 8.3	6

CANAL 16 MÁXIMO BANDA THETA

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-38.7 ± 4.8	-38.7 ± 5.4	-20.8 ± 8.1	-20.8 ± 9.1	10
Np	-30.0 ± 6.3	-30.0 ± 6.9	-7.7 ± 7.3	-7.7 ± 7.9	13
Ap	-16.5 ± 9.1	-16.5 ± 14.5	13.8 ± 28.4	13.8 ± 45.1	4
Bi	-16.2 ± 4.9	-16.2 ± 5.0	-5.1 ± 5.1	-5.1 ± 5.2	26
Ni	-7.5 ± 5.8	-7.5 ± 5.9	1.1 ± 5.9	1.1 ± 6.0	28
Ai	-19.5 ± 13.3	-19.5 ± 21.2	1.7 ± 41.0	1.7 ± 65.1	4
Bg	-3.1 ± 8.0	-3.1 ± 8.3	-3.5 ± 6.0	-3.5 ± 6.3	22
Ng	15.2 ± 10.0	15.2 ± 10.5	2.5 ± 7.5	2.5 ± 7.9	20
Ag	10.0 ± 18.4	10.0 ± 23.7	4.5 ± 23.2	4.5 ± 29.8	6

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-38.7 ± 6.2	-38.7 ± 7.7	-20.8 ± 10.5	-20.8 ± 13.1	10
Np	-30.0 ± 8.2	-30.0 ± 9.6	-7.7 ± 9.4	-7.7 ± 11.1	13
Ap	-16.5 ± 11.9	-16.5 ± 26.6	13.8 ± 36.9	13.8 ± 82.8	4
Bi	-16.2 ± 6.4	-16.2 ± 6.8	-5.1 ± 6.5	-5.1 ± 7.0	26
Ni	-7.5 ± 7.5	-7.5 ± 8.0	1.1 ± 7.6	1.1 ± 8.1	28
Ai	-19.5 ± 17.3	-19.5 ± 38.9	1.7 ± 53.2	1.7 ± 119.6	4
Bg	-3.1 ± 10.4	-3.1 ± 11.3	-3.5 ± 7.8	-3.5 ± 8.5	22
Ng	15.2 ± 13.0	15.2 ± 14.4	2.5 ± 9.8	2.5 ± 10.8	20
Ag	10.0 ± 24.0	10.0 ± 37.2	4.5 ± 30.2	4.5 ± 46.7	6

CANAL 16 MÁXIMO BANDA ALFA 1

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-21.9 ± 4.7	-21.9 ± 5.3	22.4 ± 8.9	22.4 ± 10.0	10
Np	-26.9 ± 5.2	-26.9 ± 5.6	0.8 ± 6.5	0.8 ± 7.1	13
Ap	-23.6 ± 22.5	-23.6 ± 35.8	-18.8 ± 16.4	-18.8 ± 26.1	4
Bi	-14.2 ± 4.9	-14.2 ± 5.1	2.5 ± 5.3	2.5 ± 5.5	26
Ni	-14.5 ± 6.4	-14.5 ± 6.5	-8.5 ± 5.1	-8.5 ± 5.3	28
Ai	-17.7 ± 29.1	-17.7 ± 46.2	-7.8 ± 24.4	-7.8 ± 38.7	4
Bg	-6.9 ± 9.4	-6.9 ± 9.7	-9.4 ± 7.1	-9.4 ± 7.4	22
Ng	7.2 ± 12.6	7.2 ± 13.3	-22.0 ± 4.3	-22.0 ± 4.5	20
Ag	-1.0 ± 29.7	-1.0 ± 38.2	-20.3 ± 14.4	-20.3 ± 18.5	6

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-21.9 ± 6.1	-21.9 ± 7.6	22.4 ± 11.5	22.4 ± 14.5	10
Np	-26.9 ± 6.7	-26.9 ± 7.9	0.8 ± 8.5	0.8 ± 9.9	13
Ap	-23.6 ± 29.3	-23.6 ± 65.8	-18.8 ± 21.3	-18.8 ± 47.9	4
Bi	-14.2 ± 6.4	-14.2 ± 6.9	2.5 ± 6.9	2.5 ± 7.4	26
Ni	-14.5 ± 8.3	-14.5 ± 8.8	-8.5 ± 6.6	-8.5 ± 7.1	28
Ai	-17.7 ± 37.8	-17.7 ± 84.9	-7.8 ± 31.7	-7.8 ± 71.1	4
Bg	-6.9 ± 12.2	-6.9 ± 13.2	-9.4 ± 9.3	-9.4 ± 10.1	22
Ng	7.2 ± 16.4	7.2 ± 18.2	-22.0 ± 5.6	-22.0 ± 6.2	20
Ag	-1.0 ± 38.6	-1.0 ± 59.9	-20.3 ± 18.7	-20.3 ± 29.0	6

CANAL 16 MÁXIMO BANDA ALFA 2

INTERVALOS DEL 95 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-27.5 ± 3.2	-27.5 ± 3.7	48.0 ± 0.7	48.0 ± 0.9	10
Np	-17.5 ± 4.9	-17.5 ± 5.4	46.9 ± 0.4	46.9 ± 0.5	13
Ap	-1.2 ± 7.6	-1.2 ± 12.1	46.9 ± 0.5	46.9 ± 0.8	4
Bi	-3.9 ± 5.8	-3.9 ± 6.0	46.3 ± 0.8	46.3 ± 0.9	26
Ni	7.0 ± 7.5	7.0 ± 7.8	46.4 ± 0.7	46.4 ± 0.7	28
Ai	7.7 ± 15.5	7.7 ± 24.7	46.6 ± 4.5	46.6 ± 7.2	4
Bg	12.3 ± 8.4	12.3 ± 8.7	44.8 ± 1.5	44.8 ± 1.5	22
Ng	31.3 ± 11.6	31.3 ± 12.2	46.8 ± 0.9	46.8 ± 0.9	20
Ag	22.4 ± 19.7	22.4 ± 25.3	44.0 ± 4.4	44.0 ± 5.6	6

INTERVALOS DEL 99 % DE CONFIANZA

GRUPO	1ª var. canónica Gausiano	1ª var. canónica t de Student	2ª var. canónica Gausiano	2ª var. canónica t de Student	Número
Bp	-27.5 ± 4.2	-27.5 ± 5.3	48.0 ± 1.0	48.0 ± 1.3	10
Np	-17.5 ± 6.4	-17.5 ± 7.5	46.9 ± 0.5	46.9 ± 0.7	13
Ap	-1.2 ± 9.9	-1.2 ± 22.3	46.9 ± 0.7	46.9 ± 1.6	4
Bi	-3.9 ± 7.5	-3.9 ± 8.1	46.3 ± 1.1	46.3 ± 1.2	26
Ni	7.0 ± 9.8	7.0 ± 10.5	46.4 ± 0.9	46.4 ± 0.9	28
Ai	7.7 ± 20.2	7.7 ± 45.3	46.6 ± 5.9	46.6 ± 13.2	4
Bg	12.3 ± 10.9	12.3 ± 11.9	44.8 ± 1.9	44.8 ± 2.1	22
Ng	31.3 ± 15.1	31.3 ± 16.7	46.8 ± 1.1	46.8 ± 1.3	20
Ag	22.4 ± 25.5	22.4 ± 39.6	44.0 ± 5.7	44.0 ± 8.9	6

Tabla H.10 Comparación de medias CANAL 1

variable	grupos bien diferenciados
b: var1 c: 1 m: delta	Bg
b: var2 c: 1 m: delta	Ap
b: var1 c: 1 m: theta	Bp, Np
b: var2 c: 1 m: theta	Bp
b: var1 c: 1 m: alfa1	Bg
b: var2 c: 1 m: alfa1	Bg
b: var1 c: 1 m: alfa2	Bp
b: var2 c: 1 m: alfa2	

## CANAL 4

b: var1 c: 4 m: delta	
b: var2 c: 4 m: delta	Ap, Ng
b: var1 c: 4 m: theta	Ai
b: var2 c: 4 m: theta	Ai, Ap

b: var1 c: 4 m: alfa1	Bp, Np
b: var2 c: 4 m: alfa1	Bi, Ng
b: var1 c: 4 m: alfa2	
b: var2 c: 4 m: alfa2	Bp

CANAL 14

b: var1 c: 14 m: delta	Bp, Np, Ng, Ag
b: var2 c: 14 m: delta	Bg
b: var1 c: 14 m: theta	Bp, Np, Bi, Ng, Ag
b: var2 c: 14 m: theta	Bp, Bi
b: var1 c: 14 m: alfa1	Bp, Np, Ng, Ag
b: var2 c: 14 m: alfa1	Bp, Bg, Ag
b: var1 c: 14 m: alfa2	Bp, Np, Bi, Ng
b: var2 c: 14 m: alfa2	Bp, Ni

## CANAL 16

b: var1 c: 16 m: delta	Bp, Np, Bi, Ni, Ng
b: var2 c: 16 m: delta	Bg
b: var1 c: 16 m: theta	Bp, Np, Bi, Ng, Ag
b: var2 c: 16 m: theta	Bp, Ap
b: var1 c: 16 m: alfa1	Np, Bg, Ng
b: var2 c: 16 m: alfa1	Bp, Np, Bi, Ng
b: var1 c: 16 m: alfa2	Bp, Np, Bi, Ng
b: var2 c: 16 m: alfa2	Bp, Ni, Bg