

Patricia Hernández León

Teoría Topológica de Defectos en Medios Ordenados

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2018

DIRIGIDO POR

José Manuel García Calcines

José Manuel García Calcines

Departamento de Matemáticas, Es-
tadística e Investigación Operativa

Universidad de La Laguna

38271 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

Entre las numerosas aplicaciones de las Matemáticas en la Física, una de las más sorprendentes se ha desarrollado en los últimos treinta años: la contribución de la Topología Algebraica al estudio de los materiales. El trabajo presente estudia uno de sus principales hitos: la clasificación topológica de los defectos en medios ordenados. Basándonos en el artículo de N. D. Mermin de igual nombre, "The topological theory of defects in ordered media", realizaremos una revisión matemática general del procedimiento necesario para alcanzar con éxito la clasificación deseada. Dos estructuras matemáticas serán clave para ello: los grupos de homotopía y los grupos de transformaciones topológicas. Culminaremos la memoria describiendo el Teorema Fundamental de los medios ordenados y sus implicaciones, un resultado clave que nos permitirá analizar diversos sistemas físicos.

Palabras clave: *Medio ordenado – Defecto topológico – Espacio del parámetro de orden – Grupos de homotopía – Fibración – Sucesión exacta de homotopía.*

Abstract

Among the numerous applications of mathematics within physics, one of the most astonishing has been developed in the last thirty years: the application of algebraic topology to the study of materials. The present work expounds one of its main milestones: the topological classification of defects in ordered media. Based on N. D. Mermin's review "The topological theory of defects in ordered media", we will perform a general mathematical review of the required procedure for achieving the desired classification. To this end, two mathematical structures are key: homotopy groups and transformation groups. This thesis will finalize with the description of the fundamental theorem of ordered media and its implications. It is a key result which will allow us to analyze diverse physical systems.

Keywords: *Ordered media – Topological defect – Order parameter space – Homotopy groups – Fibration – Exact sequence.*

Contenido

Resumen/Abstract	III
Introducción	VII
1. Motivación y Procedimiento general	1
1.1. Descubriendo los medios ordenados	1
1.1.1. El concepto de orden	1
1.1.2. Medios ordenados	3
1.2. A la caza de los defectos	4
1.2.1. Clasificación topológica	5
1.3. Ejemplo ilustrativo	7
2. Grupos superiores de Homotopía	9
2.1. Preliminares	9
2.1.1. Introducción a la Teoría de Homotopía	10
2.1.2. Homotopía de Parejas de Espacios	11
2.2. Grupos superiores de Homotopía	12
2.2.1. Homomorfismos inducidos	17
2.2.2. Grupos superiores en términos de n-esferas	24
2.2.3. Acción de π_1 sobre π_n	24
3. Medios ordenados como Grupos de transformaciones	26
3.1. Grupos de Transformaciones	27
3.1.1. Introducción a los Grupos Topológicos	27
3.1.2. El Grupo de Transformaciones de un medio ordenado	32
3.2. El Teorema Fundamental de los medios ordenados	35
3.2.1. Grupos relativos de homotopía	36
3.2.2. Sucesión exacta	38
3.2.3. Fibraciones	40

3.2.4. El Teorema Fundamental en dimensiones bajas	45
3.3. Ejemplos	47
Conclusiones	52
Bibliografía	53
Poster	53

Introducción

Es por la lógica que demostramos, pero por la intuición que descubrimos. Saber criticar es bueno, saber crear es mejor.

Science et méthode
Henri Poincaré

Desde el principio de los tiempos, las Matemáticas y la Física han evolucionado de la mano, empujando una las fronteras de la otra en incontables ocasiones. Incluso las abstracciones matemáticas más puras, consideradas alejadas de la intuición usual, han permitido realizar asombrosos avances y descubrimientos en Física. Debido al continuo aumento de la complejidad científica se precisa de contribuciones matemáticas cada vez más innovadoras, desafiantes en su abstracción pero sorprendentemente dóciles en el contexto adecuado. Por ello, estas conexiones inimaginables con las Matemáticas más puras son especialmente abundantes en la Física Moderna, que abarca desde el siglo XX hasta la actualidad. No es de extrañar que una de las épocas más revolucionarias de la Física coincida con una aplicación más imaginativa de las Matemáticas, pues supuso una ampliación tanto de los límites de la Ciencia como del pensamiento. Es en este contexto donde la Topología Algebraica no solo nace, sino que desvela resultados asombrosos más allá de las Matemáticas.

La Topología Algebraica es la rama matemática que tiene como objetivo estudiar los espacios topológicos empleando estructuras del Álgebra, permitiendo asignar así nuevas propiedades diferenciadoras a dichos espacios. Si bien inicialmente demostró tener amplias y fructíferas aplicaciones en otras áreas de las Matemáticas, posteriormente expandiría sus horizontes. Al tratarse de una abstracción de la geometría usual, su primera aparición en el ámbito físico fue en el estudio de las teorías relativistas. Sin embargo, su posterior uso en la Física de la Materia Condensada supuso toda una revolución que ha continuado hasta la actualidad. Este campo de investigación, centrado en el análisis de las características físicas de los materiales, buscaba sin éxito una clasificación general de los defectos usualmente presentes en numerosos sistemas físicos. El concepto de homotopía permitió desarrollar la *clasificación topológica de los defectos en medios ordenados*, basada en los grupos de homotopía. En ella se centra esta

memoria, afrontándose su estudio desde una perspectiva de la Topología Algebraica.

Curiosamente la Topología Algebraica ha estado desde su origen ligada a las clasificaciones. Los primeros estudios realmente profundos en este área fueron realizados por H. Poincaré, debido a su trabajo en la clasificación de superficies algebraicas. Su famosa publicación *Analysis Situs* (1895-1904) marcaría el inicio de esta prometedor especialidad, convirtiéndolo junto con H. Hopf y W. Hurewicz en el padre de la Topología Algebraica. No solo los grupos de homotopía mencionados previamente se desarrollan en ella; a lo largo del trabajo, estudiaremos muchos otros objetos matemáticos embebidos en esta rama [1, 5, 9, 11, 16, 19].

La revisión más completa y detallada de la clasificación topológica de defectos la realizó el físico N. D. Mermin en [12], siendo aún hoy una referencia esencial para aquellos que deseen adentrarse en las profundidades de la Topología aplicada a los materiales. Por esto, nos hemos basado en dicho trabajo para construir la memoria, pertrechados de un punto de vista puramente matemático. Merece especial mención el enfoque que adoptaremos a lo largo de esta: mientras que Mermin prefiere realizar un análisis más pragmático, centrándose en los casos de menor dimensión de los grupos de homotopía, nosotros pretendemos alcanzar una generalización completa del mismo para una dimensión cualquiera n . Así, incluso los ejemplos más exóticos y actuales tienen cabida en esta memoria [8, 15], si bien dejaremos el estudio exhaustivo de estos en manos del lector.

A continuación presentamos la estructura a seguir. En el Capítulo 1 introduciremos la clasificación topológica de los defectos en medios ordenados y justificaremos en detalle la motivación física que impulsó en su momento a Mermin (y ahora a nosotros) a embarcarse en este viaje. Aunque realizaremos exclusivamente un estudio matemático, es de vital importancia conocer su sentido, pues guiará cada uno de nuestros pasos. Ya equipados con cierta intuición procederemos a desarrollar el corazón matemático de la memoria en los Capítulos 2 y 3. El primero consistirá en una descripción de los grupos de homotopía así como toda la teoría relativa a ellos. En particular, haremos especial hincapié en los homomorfismos inducidos y la acción de π_1 sobre π_n . El otro capítulo incluirá la parte más técnica e innovadora realizada por Mermin, el estudio de los medios ordenados como grupos de transformaciones topológicas. Definiremos primero el modelo matemático en base a dichas estructuras para luego alcanzar un resultado clave de esta memoria: *el Teorema Fundamental de los medios ordenados*. Concluiremos con una sección final donde se presentan algunos ejemplos del procedimiento.

Motivación y Procedimiento general

Antes de sumergirse en los detalles matemáticos de esta memoria, tal vez el lector se pregunte por qué, por qué Topología y por qué aplicarla a la Física, más concretamente en el estudio de los materiales. Aunque la respuesta natural sería “y por qué no”, no hace justicia a la gran motivación que se esconde detrás. Este capítulo inicial tiene por objetivo aclarar esas dudas y, con suerte, crear nuevas, que se tratarán de resolver a lo largo de la memoria. Para ello, se desarrollan dos aspectos fundamentales: la motivación física y el contexto matemático-físico que servirá de guía.

1.1. Descubriendo los medios ordenados

1.1.1. El concepto de orden

Una de las propiedades que verdaderamente entusiasman a los físicos a la hora de estudiar cualquier sistema son las simetrías. Prácticamente en todas las áreas de la Física aparecen, siendo de vital importancia en el estudio de las partículas y los materiales. Aunque en parte se deba a la belleza matemática y conceptual que encierran, es indudable su poder para ayudarnos a entender el mundo. No solo su presencia, también su ausencia proporciona información muy valiosa. Como mencionaremos posteriormente, la temperatura influye en cuán simétrico es un conjunto de átomos, dando lugar a distintas estructuras para un mismo material. Aquí entran en juego los estados de la materia, el primer paso en nuestro camino hacia los medios ordenados y sus defectos.

Imaginemos que queremos estudiar un material, ya sea la pantalla LCD del ordenador, un imán de la nevera o incluso el ADN de nuestras células. Para un físico, todos ellos consisten en un conjunto de numerosos átomos ligados por algún tipo de interacción. Este sistema de átomos se distribuirá de maneras muy diversas, dependiendo de las fuerzas entre ellos y su intensidad. Mientras que en un líquido no existe ningún tipo de estructura, solo desorden, en un sólido los átomos se organizan en mayor o menor medida. El máximo exponente del orden son los cristales, con estructuras microscópicas que se repiten en todas direcciones, haciendo gala de su característica simetría traslacional. Sin embargo, en contra de nuestra intuición, a mayor orden de un sistema menor cantidad de simetrías posee [17].

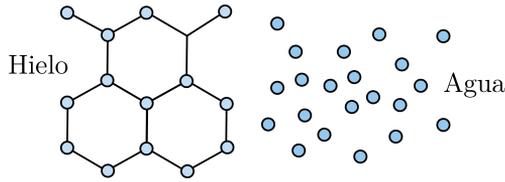


Figura 1.1. En este ejemplo familiar se aprecia cómo el orden supone una pérdida de simetría. Mientras que el agua presenta invariancia rotacional y traslacional, la imagen del hielo solo será idéntica al rotarla con un cierto ángulo. El hielo es un ejemplo de cristal, cuyos átomos aunque vibran están capturados en los vértices de un hexágono.

El orden “obliga” a los átomos a adoptar distribuciones con menos libertad de movimiento, haciendo que el mismo material tenga propiedades muy diferentes (véase la Figura 1.1). Estados con diferentes simetrías u órdenes darán lugar, por tanto, a distintas fases de la materia. Aunque debe tenerse cuidado, pues el recíproco no siempre es cierto; existen otros motivos que justifican que un gas y un líquido sean estados diferentes aún teniendo igual simetría, por ejemplo. El papel clave para pasar de un estado a otro lo juega la temperatura: a mayor temperatura, los átomos se mueven con energías mayores, rebelándose contra el orden.

¿Es este orden al que alude el nombre de medios ordenados? Si bien nos acercamos a dicha noción, existen sutilezas que es preciso tener en mente. Recordemos los materiales que mencionamos antes. Las pantallas LCD están formadas por lo que se denomina cristal líquido [8], material cuyas moléculas preservan ciertas orientaciones típicas de los cristales aun pudiendo fluir como un líquido. Luego no solo sólidos, líquidos y gases son estados de la materia; una vasta variedad de fases se han descubierto hasta la fecha, siendo los cristales líquidos solo una pequeña porción de ellas.

Hasta ahora, las simetrías mencionadas tienen que ver con propiedades estructurales del material. Sin embargo, también pueden relacionarse con propiedades macroscópicas como la magnetización, presente en el imán de nuestra nevera, o la superconductividad, entre otras. Se caracterizan por ser intensivas, es decir que no dependen de la cantidad de material presente. En consecuencia, el orden de un sistema debe ser un concepto mucho más amplio, más allá de una mera disposición espacial. Visualizar el orden presente en estas fases puede ser un reto en ciertos casos, aunque en la Sección 1.3 se presentará un ejemplo.

Podemos concluir que el orden caracteriza a los materiales, siendo tanto de tipo estructural como relacionado con otras propiedades. Además, aunque se manifieste de manera global, queda determinado por las piezas individuales que forman nuestro sistema. De esta forma, nos planteamos caracterizar a cada átomo por un parámetro que refleje cuánto orden hay presente en el material. Encontramos así los medios ordenados.

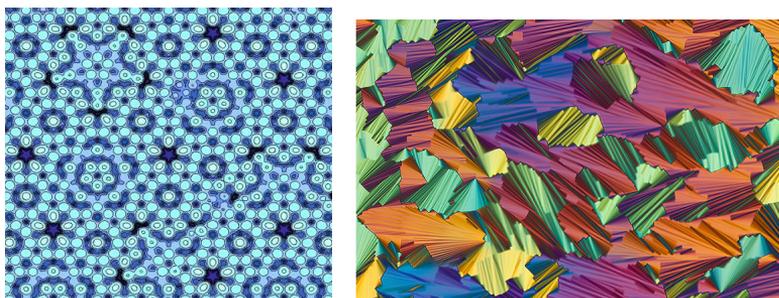


Figura 1.2. Nuevas fases de la materia. A la izquierda, modelo atómico de la superficie de un cuasicristal. Si bien presenta una estructura ordenada, el patrón no se repite como ocurre en los cristales. A la derecha, fotografía de cristales líquidos de moléculas de ADN.

1.1.2. Medios ordenados

Sabemos que un material es una colección de átomos que ocupa una región del espacio $X \subset \mathbb{R}^3$. Ahora es necesario concretar el modelo general con el que trabajaremos. El objetivo es estudiar sus propiedades macroscópicas; por ello, asumimos que cada átomo es puntual y le asociamos un valor $r \in X$ que establece sus coordenadas dentro del sistema físico. Esto es lo que denominaremos *medio*. Realizaremos una generalización del análisis a \mathbb{R}^n , ya que puede darse el caso de que tengan relevancia dimensiones adicionales a las espaciales.

Cuando además se tiene una aplicación $\varphi : X \rightarrow R$, donde a cada átomo le asignamos una magnitud $\varphi(r)$ que pertenece a un conjunto R con estructura de espacio topológico (usualmente de variedad topológica) y que describe en cierto sentido al sistema, se dice que es un *medio ordenado*. Dicha magnitud recibe el nombre de *parámetro de orden*, constituyendo la realización matemática de la descripción del orden descrito en la sección anterior. En consecuencia, denominaremos a R *espacio del parámetro de orden*. En particular se trata del espacio que recoge los estados internos del sistema, es decir todas las configuraciones posibles de los átomos respecto de dicho parámetro en las que la energía del material no varía.

Prácticamente cualquier material puede considerarse un medio ordenado, solo es necesario encontrar el parámetro de orden apropiado. Sin embargo, según el sistema puede convertirse en una tarea nada trivial. Intuitivamente podemos pensar que será una magnitud asociada a la simetría que pierde o gana el sistema. Al final de este capítulo analizaremos un ejemplo sencillo con el que ilustraremos estas cantidades, aunque no será hasta la Sección 3.3 cuando estudiaremos en detalle distintos ejemplos.

Nótese que se estudia el material en general, sin tener en cuenta su forma macroscópica, por lo que tiene sentido suponer que el medio no tiene agujeros (es

simplemente conexo). Esto significa que si quisiéramos analizar las propiedades del queso Gruyère tomaríamos una región sin agujeros, ya que su presencia no aporta información alguna sobre propiedades macroscópicas, como por ejemplo su color. También supondremos que la región es lo suficientemente grande para olvidarnos de los bordes del material, donde múltiples consideraciones adicionales serían necesarias.

1.2. A la caza de los defectos

A pesar de todo lo dicho sobre simetría y orden, en ningún momento hemos tenido en cuenta los llamados defectos. Consisten en rupturas locales de la simetría del medio ordenado, y tienen un papel esencial en la aparición de numerosas propiedades fundamentales. La conductividad eléctrica de un material, la deformación plástica de un sólido o el plegamiento de las proteínas son algunos ejemplos. Si bien no producen un cambio de estado del sistema, pues son fenómenos no globales, están estrechamente relacionados con la fase en la que se encuentra este. Esto significa que diferentes tipos de orden de un material están relacionados con la presencia de distintos defectos, convirtiéndolos en el centro de nuestro estudio. Si somos capaces de determinar qué defectos se encuentran en qué estados de la materia, podremos caracterizarlos y comprender mejor sus propiedades. En la Figura 1.3 se presentan dos ejemplos de defectos en materiales.

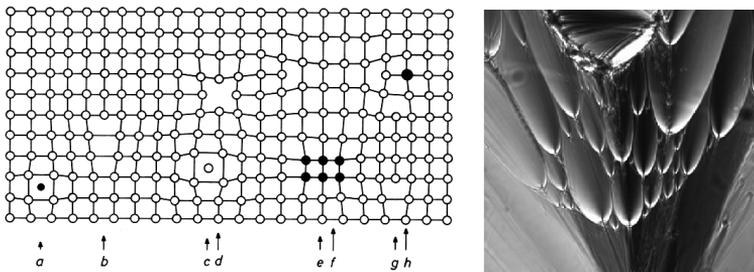


Figura 1.3. A la izquierda, un esquema de los defectos típicos de un cristal bidimensional. A la derecha, fotografía de un cristal líquido esméctico, fase particular de estos. Al ordenarse en capas, aparecen defectos con forma de elipses e hipérbolas.

Sin embargo, no todos los defectos aportan información útil. Como mencionan N. W. Ashcroft y D. N. Mermin en su libro *Solid State Physics* (1976): “los defectos en los materiales son como los defectos humanos: de una inmensa

variedad, muchos son aburridos y deprimentes; solo unos pocos alcanzan a ser fascinantes”. En ellos centraremos toda nuestra atención.

Dentro del formalismo matemático planteado, las coordenadas de los defectos se asocian vía la aplicación φ a los puntos singulares del parámetro de orden, es decir puntos donde se pierde la continuidad. Si denotamos Z al conjunto de dichas coordenadas, se observa que $f := \varphi|_{X \setminus Z}$ es una aplicación continua y $X \setminus Z$ pasa a ser un espacio con agujeros allí donde se localizan los defectos. Precisamos una herramienta que nos permita obtener información sobre $X \setminus Z$ a partir de un espacio conocido, desde el que sea más fácil trabajar. El espacio del parámetro de orden R será el que cumpla esta función, mientras que la homotopía será el puente entre ambos espacios.

Así pues, utilizaremos la homotopía como herramienta para relacionar los tipos de defectos que aparecen en el medio con el orden que lo caracteriza. Según la continuidad del parámetro de orden, la Topología nos proporciona argumentos para determinar qué defectos son estables y cuales no. Aquellos defectos topológicamente inestables se dicen extraíbles, es decir que variaciones continuas y locales del parámetro llevan al sistema a un estado en el que dicho defecto desaparece. Sin embargo, cuando esto no es posible, se dice que el defecto es estable topológicamente, bautizándolo como defecto topológico.

Antes de zambullirnos en el procedimiento general para clasificar los defectos, es necesaria la siguiente aclaración. No todas las inestabilidades topológicas implican necesariamente inestabilidades físicas, ya que pueden existir argumentos energéticos que estabilicen el defecto. Por el contrario, un defecto topológico automáticamente debe ser físicamente estable, pues por definición no puede desaparecer mediante meras fluctuaciones en la configuración local del material.

1.2.1. Clasificación topológica

Para clasificar los defectos en medios ordenados se establece el siguiente procedimiento general [8], permitiendo tener una visión global de las matemáticas a desarrollar en el resto de la memoria:

1. Identificación de los defectos y el parámetro de orden del sistema. Dependiendo del caso concreto de estudio, el punto de partida será diferente. Si se conocen las rupturas de simetrías del material, se identifican a partir de ellas los defectos y en consecuencia se define el parámetro de orden. En caso contrario, se elige una magnitud del material conocida como parámetro y la búsqueda de singularidades nos indicará los posibles defectos. Si el parámetro de orden no depende de las coordenadas, esto es $f(r)$ es constante para todo $r \in X$, se dice que el medio es uniforme. En este caso, existe una única configuración del sistema y ningún defecto podrá ser topológicamente estable.

2. Obtención del espacio del parámetro de orden R .

Las aplicaciones de interés a la hora de determinar este espacio son las denominadas i -lazos cúbicos, aplicaciones continuas del tipo

$$\alpha : I \times \cdots \times I \rightarrow X \setminus Z,$$

tales que rodean a los defectos de dimensión m . Como los defectos constituyen un subespacio del sistema físico de dimensión estrictamente menor, para contenerlos es necesario que los i -lazos sean subespacios de dimensión $i = n - m - 1$, siendo n la dimensión del espacio \mathbb{R}^n donde se encuentra contenido X .

A partir de la siguiente composición de aplicaciones,

$$I \times \cdots \times I \xrightarrow{\alpha} X \setminus Z \xrightarrow{f} R,$$

se obtienen todos los posibles valores del parámetro de orden y en consecuencia, el espacio R .

3. Cálculo del grupo de homotopía $\pi_i(R, *)$.

Este procedimiento se basa en la posibilidad de utilizar un amplio rango de herramientas matemáticas para determinar $\pi_i(R, *)$. Aquí se pone de manifiesto la necesidad de trabajar en un espacio donde los grupos de homotopía sean mucho más fáciles de calcular que en $X \setminus Z$.

Este paso constituye el corazón de la memoria, en la que se desarrollan los dos aspectos matemáticos claves para el posterior estudio físico: los grupos superiores de homotopía y los grupos de transformaciones topológicas. Los primeros ya ha quedado patente por qué constituyen un pilar de nuestra teoría. En el caso de los grupos de transformaciones, las propiedades de los sistemas físicos se asocian siempre a grupos topológicos, en particular grupos de Lie, mientras que las simetrías del sistema están matemáticamente modeladas por acciones de grupos. Dedicaremos una sección completa al estudio de cada aspecto, que concluirán con resultados de vital interés para la obtención de los grupos de homotopía en un amplio abanico de ejemplos físicos.

Una vez $\pi_i(R, *)$ es conocido, la información obtenida sobre el modelo es extrapolada al sistema real. Cada elemento del grupo de homotopía corresponde a una clase de defectos topológicamente estables, que se denomina *carga topológica*. El nombre tiene una justificación: aquellas cantidades inherentes a un objeto físico, esto es que lo caracterizan y son invariantes, reciben el nombre de cargas. Luego cualquier defecto queda definido por su clase, cuya conservación ante variaciones continuas garantiza la estabilidad del defecto. Además nos permiten describir la aparición y desaparición de defectos en un medio, ya que se asocia a operaciones aditivas de sus respectivas cargas.

En particular, si un defecto pertenece a la clase trivial, cualquier i-lazo cúbico que lo rodee se podrá deformar continuamente a un punto y por ello la singularidad será evitable. Estos defectos son los que no nos aportan información alguna, y ahora sabemos con certeza que no pueden ser cazados, porque se desvanecen.

1.3. Ejemplo ilustrativo

Para intentar plasmar de manera intuitiva la conexión entre el problema físico y los elementos matemáticos, consideramos uno de los ejemplos con parámetro de orden más sencillo: un sistema de espines planos.

Sabemos que la masa y la carga eléctrica de una partícula son cantidades discretas inherentes a ella, que ponen de manifiesto cómo reacciona ante un campo gravitatorio o eléctrico respectivamente. La cantidad análoga asociada al campo magnético es lo que conocemos como espín. Sin embargo, a diferencia de los primeros, el espín puede entenderse como un vector de estados, con una magnitud fija para cada partícula y un sentido dado.

Cuando se tiene un sistema de partículas iguales, cada una de ellas tiene asociado un vector no nulo de igual magnitud, dando lugar a un campo de espines. El parámetro de orden de este sistema es el ángulo $\theta(r)$, que caracteriza el sentido de cada espín como se muestra en la Figura 1.3. Por ello podemos suponer que cada vector es unitario, sin pérdida de generalidad.

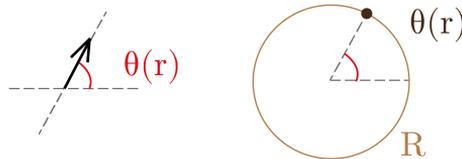


Figura 1.4. Parámetro de orden de un espín plano (izquierda) y su correspondiente representación en el espacio del parámetro de orden (derecha).

Por tanto, el espacio del parámetro de orden contiene todos los posibles valores del ángulo, tratándose de una circunferencia al ser un sistema bidimensional. Así, al considerar un 1-lazo $\alpha : I \rightarrow X$ sobre el sistema físico X obtendremos diferentes imágenes $(\theta \circ \alpha)(r)$ según la configuración de los espines del sistema. Posibles situaciones se presentan en la Figura 1.5.

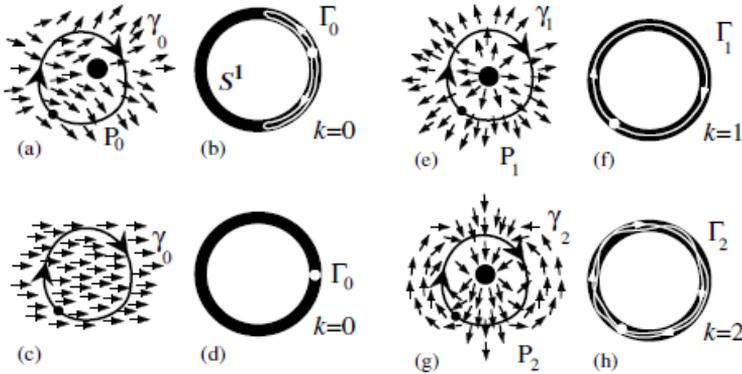


Figura 1.5. Ejemplos de distintas situaciones para un mismo sistema de espines planos. En cada uno se incluye la carga topológica k , que en este caso coincide con el grado.

En particular, sabemos del Grado de Matemáticas que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. El número de vueltas que da un 1-lazo en la circunferencia S^1 nos indicará su clase, coincidiendo en este caso con la carga topológica que asociaremos a cada defecto. Matemáticamente esta cantidad recibe el nombre de *grado*. En la Figura 1.5 se aprecian lazos con diferentes grados y, en consecuencia, distintos defectos. Cuando los grados coinciden, ambos lazos pueden deformarse continuamente uno en el otro y se tratan del mismo tipo de defecto (ver (a),(b),(c),(d)). Sin embargo, lazos con grados diferentes son imposibles de deformar en uno u otro y de igual manera ocurrirá con los defectos asociados (ver (e),(f),(g),(h)).

Si bien en este ejemplo se obtiene un grupo de homotopía sencillo, rápidamente se complica el cálculo para nuevos ejemplos. El procedimiento, sin embargo, será común a todos, dependiendo exclusivamente de las herramientas matemáticas que tengamos para obtener un modelo satisfactorio en cada caso.

Grupos superiores de Homotopía

Este primer capítulo matemático pretende ser no solo un recordatorio de los preliminares topológicos necesarios para la memoria, sino una exposición extensa de los grupos superiores de homotopía. Sin perder de vista la motivación de este trabajo, se presenta una generalización de la asignatura Topología II del Grado de Matemáticas a los grupos superiores de la homotopía. Prestaremos especial atención a aquellos resultados de interés para su posterior aplicación al problema físico planteado en el Capítulo 1.

Si bien este capítulo aspira a ser autocontenido, se ha decidido prescindir de las demostraciones de aquellos resultados impartidos durante el Grado de Matemáticas, a fin de evitar dispersar al lector con cuestiones básicas. No obstante, se anima a aquel que lo desee a consultar la bibliografía relativa tanto a Topología General [14] como a Teoría de Homotopía [11].

2.1. Preliminares

A lo largo de la memoria supondremos que el lector se encuentra familiarizado con las nociones y resultados básicos de la Topología General y Teoría de Homotopía. No obstante se recuerdan a continuación aquellas definiciones de mayor relevancia.

La estructura matemática básica con la que trabajaremos es la de *espacio topológico*. Este consiste en un conjunto X al que se dota de una *topología*, esto es, una colección distinguida de subconjuntos denominados *abiertos* que contiene al vacío y al total y es cerrada respecto a la intersección finita y la unión arbitraria. En general lo denotaremos por X , salvo que sea necesario indicar la topología subyacente.

Recordemos por otro lado que dada una aplicación entre espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$, esta será continua si y solo si la antiimagen de todo abierto es abierto en X . Presentamos un resultado de especial importancia para demostraciones futuras en relación a la continuidad:

Proposición 2.1 (Lema de Continuidad). *Sea X un espacio topológico con un recubrimiento finito de cerrados $\{C_i\}_{i=1}^n$. Dada una colección de aplicaciones continuas $\{f_i : C_i \rightarrow Y\}_{i=1}^n$ tales que $f_i|_{C_i \cap C_j} = f_j|_{C_i \cap C_j}$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la aplicación $h : X \rightarrow Y$ es continua, definida como $h(x) := f_i(x)$ si $x \in C_i$.*

Para otras nociones como homeomorfismos, espacios cocientes, entornos o bases de entornos y de abiertos, así como propiedades del tipo conexidad, compacidad o Hausdorff entre otras, se remite al lector a la amplia literatura existente. Proponemos la siguiente referencia [14] como sugerencia.

2.1.1. Introducción a la Teoría de Homotopía

A lo largo de esta memoria debemos tener siempre en mente el concepto de deformación continua de aplicaciones. La noción matemática básica que determina cómo se produce se denomina *homotopía*, aunque existen nociones más generales que presentaremos posteriormente. Para formalizar estas definiciones, denotaremos por I al intervalo $[0, 1]$ con la topología inducida por la usual de la recta real.

Definición 2.2. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas. Diremos que f es homotopa a g (denotado $f \simeq g$) si existe una aplicación $H : X \times I \rightarrow Y$ continua tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Llamaremos homotopía entre f y g a la aplicación H , teniendo la notación alternativa $H : f \simeq g$.

Se comprueba fácilmente que, dados dos espacios topológicos X, Y , la homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y , denotado por $C(X, Y)$. Entonces, tiene sentido plantearse el siguiente conjunto cociente:

$$[X, Y] := C(X, Y) / \simeq,$$

denominado *corchete de homotopía* de X en Y . Una propiedad interesante es su compatibilidad con la composición por la izquierda y por la derecha, vista en el Grado de Matemáticas.

Nota 2.1. Como vimos en la asignatura Topología II, existe una noción que generaliza la homotopía: la *homotopía relativa*. Decimos que dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son homotopas relativamente a A , con $A \subset X$, cuando existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$ entre f y g tal que $H(a, t) = f(a) = g(a)$, para todo $a \in A$ y $t \in I$. La notación usual es $f \simeq g \text{ rel. } A$. Cuando $A = \emptyset$, recuperamos la Definición 2.2. La homotopía relativa se interpreta, por tanto, como una deformación continua en la que existe un subconjunto cuya imagen permanece invariante; en particular se tiene necesariamente que $f|_A = g|_A$. Al trabajar con ciertas aplicaciones denominadas caminos, el estudio de la homotopía relativa nos permite construir el grupo fundamental. Veremos que existe otra noción más adecuada para ello en el próximo apartado, que será la empleada a lo largo de la memoria.

Puesto que la homotopía caracteriza a los espacios topológicos, es posible extender el concepto a estas estructuras. Diremos que una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es *equivalencia de homotopía* si existe $g : Y \rightarrow X$ continua tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$, denominándose a g el *inverso homotópico* de f . Entonces, dos espacios topológicos X e Y serán *homotópicamente equivalentes* cuando existe una equivalencia de homotopía entre ellos. La notación utilizada para expresar esta relación entre espacios es $X \simeq Y$.

Sin embargo, existe un concepto más general que los espacios topológicos y que se adapta mucho mejor a nuestras necesidades en este trabajo: las *parejas de espacios*. Estas dan lugar a otra noción alternativa relacionada con la homotopía, necesaria para la definición de los grupos superiores de homotopía. Todo ello se desarrolla en el siguiente apartado.

2.1.2. Homotopía de Parejas de Espacios

Como en general trabajaremos no solo con la noción de espacio topológico sino con subespacios distinguidos de este, cobra sentido introducir la siguiente definición:

Definición 2.3. *Una pareja o par de espacios (X, A) consiste en X un espacio topológico y $A \subseteq X$ subespacio topológico.*

En particular, los *espacios punteados* (X, x_0) son parejas de espacios donde el subespacio topológico $A = \{x_0\}$ es unipuntual. Nótese que existe la posibilidad de que los espacios sean discretos, en cuyo caso hablaremos de *conjuntos punteados*. Por otro lado, si tomamos $A = \emptyset$ recuperamos la noción usual de espacio topológico.

Aunque por ahora nos basta con este concepto, más adelante veremos su generalización a tuplas de espacios de dimensión mayor, en concreto triples. Como comprobará el lector, esta será la dinámica de buena parte de la memoria, en especial de este capítulo.

De igual manera podemos generalizar las aplicaciones a parejas de espacios. Una aplicación $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ se dice continua de parejas cuando se trata de una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subseteq B$. Con la homotopía siempre en mente, surge de manera natural la siguiente definición:

Definición 2.4. *Sea $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ continua de parejas. Diremos que f es homótopo a g , y lo denotaremos $f \simeq g$, si existe $H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ continua de parejas tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Esta aplicación se denomina homotopía de parejas.*

Advertencia. Obsérvese que empleamos la misma notación tanto para la homotopía como para la homotopía de parejas, ya que es posible diferenciarlas de manera precisa según el contexto.

Cuando los espacios implicados sean punteados hablaremos en particular de *aplicaciones y homotopías punteadas*. En general, será este tipo de espacios el que se emplee para los grupos de homotopía, por lo que son nociones usuales en ese contexto.

Nota 2.2. Es importante notar que para el caso en el que B es unipuntual, es decir $B = \{y_0\}$ con y_0 punto perteneciente a Y , la homotopía de pares coincide con la homotopía relativa mencionada en la Nota 2.1. Esto nos permite justificar el uso de la homotopía relativa en el cálculo del grupo fundamental, realizado durante el Grado. Igualmente, podríamos expresar los resultados sobre grupos superiores de homotopía utilizando la homotopía relativa, al ser espacios punteados los que intervienen en las definiciones. No obstante, nos hemos decantado por su desarrollo formal en términos de homotopía de pares, si bien en algunos apartados tendremos que usar ineludiblemente la homotopía relativa al no coincidir ambas.

De modo natural se comprueba que la homotopía de parejas es relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas de parejas $C(X, A; Y, B)$, siendo la notación análoga para el corchete de homotopía:

$$[X, A; Y, B] := C(X, A; Y, B) / \simeq .$$

Asimismo es compatible con la composición. Esta analogía se extiende al resto de conceptos característicos de la Teoría de Homotopía básica, sin más que considerar la continuidad de parejas. Así será tanto en el caso de la equivalencia de homotopía de parejas (o más restrictivamente homeomorfismos de parejas), análoga a la equivalencia de homotopía (homeomorfismo de espacios respectivamente), como para los homomorfismos de grupos inducidos. Por supuesto, todo esto es aplicable al caso particular de los espacios punteados, empleando las nociones de equivalencias de homotopía punteadas y homeomorfismos punteados. Todo ello tendrá su relevancia particular en la siguiente sección.

2.2. Grupos superiores de Homotopía

El corazón matemático de nuestra clasificación de defectos físicos se encuentra en esta sección. La teoría de los grupos superiores de homotopía constituye el escenario perfecto para distinguir unos defectos de otros, debido a la conexión que existe entre variaciones continuas del sistema físico y variaciones continuas de los n -lazos cúbicos que podemos considerar en él. Este es solo uno de los muchos conceptos y resultados de los que haremos uso.

Antes de estudiar estos grupos, es necesario primero presentar algunas nociones sobre sus elementos y la operación que los define. Sabemos que la homotopía dota a aquellos objetos que relaciona, sean espacios o sean aplicaciones,

de la noción de deformación continua. Como se ve en el Grado de Matemáticas, un tipo de aplicación con interesantes consecuencias al emplear la homotopía son los lazos. Aunque su nombre nos proporciona una idea bastante acertada de lo que son, matemáticamente se definen como caminos cerrados, esto es, aplicaciones continuas $\alpha : I \rightarrow X$ con X un espacio topológico tales que $\alpha(0) = \alpha(1)$ (recordemos que la noción general de camino no exige que $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ coincidan). Sin embargo, solo los lazos con un punto común fijado llamado *punto base* nos permiten definir una operación con la que luego dotar de estructura de grupo al conjunto de sus clases de homotopía. De esta manera aparece el grupo fundamental, y una generalización del mismo procedimiento dará lugar a los grupos superiores de homotopía.

Consideramos el n -cubo $I^n = I \times \cdots \times I$ para cada número natural $n \geq 1$. Su interior respecto de \mathbb{R}^n viene dado por el producto de n copias de $(0, 1)$, el interior de I , mientras que su frontera es

$$\partial I^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n : t_i \in \{0, 1\} \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Por convenio se considera I^0 un espacio unipuntual, con frontera $\partial I^0 = \emptyset$ (nótese que también consideramos \mathbb{R}^0 como espacio unipuntual). Establecida la notación, podemos presentar la definición de lazo generalizada al caso n -dimensional.

Definición 2.5. Sean (X, x_0) un espacio topológico punteado y $n \geq 1$. Un n -lazo cúbico basado en x_0 consiste en una aplicación $\alpha : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ continua de parejas, esto es, $\alpha \in C(I^n, \partial I^n; X, x_0)$.

A partir de ahora, para abreviar notación denotaremos al conjunto $C(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ de todos los n -lazos cúbicos en X basados en x_0 como $\Omega^n(X, x_0)$. Obsérvese que el concepto de lazo mencionado previamente se corresponde con el 1-lazo cúbico, donde $\alpha(\{0, 1\}) = x_0$.

De manera natural se establece la siguiente operación entre n -lazos cúbicos basados en un mismo punto base. Dados $\alpha, \beta \in \Omega^n(X, x_0)$,

$$(\alpha * \beta)(t_1, \dots, t_n) := \begin{cases} \alpha(t_1, \dots, t_{n-1}, 2t_n), & 0 \leq t_n \leq 1/2 \\ \beta(t_1, \dots, t_{n-1}, 2t_n - 1), & 1/2 \leq t_n \leq 1 \end{cases}$$

El producto de n -lazos cúbicos está bien definido y es continuo, como consecuencia del Lema de Continuidad 2.1. Asimismo, el n -lazo cúbico inverso de un n -lazo cúbico α , denotado por $\bar{\alpha}$, viene dado por

$$\bar{\alpha}(t_1, \dots, t_n) := \alpha(t_1, \dots, t_{n-1}, 1 - t_n),$$

mientras que el n -lazo cúbico neutro se define como la aplicación constante

$$\varepsilon_{x_0} : I^n \rightarrow X, \quad \varepsilon_{x_0}(t_1, \dots, t_n) = x_0.$$

Por otro lado, consideraremos la homotopía de n -lazos cúbicos como la correspondiente homotopía de parejas. Se trata, por tanto, de una relación de equivalencia en el conjunto $\Omega^n(X, x_0)$. A continuación presentamos algunas propiedades relativas a dicha equivalencia, que garantizan que la operación sean compatible con ella. Omitiremos las demostraciones, pues son completamente análogas a las realizadas para la construcción del grupo fundamental en el Grado de Matemáticas.

Proposición 2.6. *Sea (X, x_0) un espacio topológico punteado. Entonces se dan las siguientes propiedades, para todo $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma \in \Omega^n(X, x_0)$:*

- (a) Si $\alpha \simeq \alpha'$ y $\beta \simeq \beta'$ entonces $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$.
- (b) Asociatividad homotópica: $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$.
- (c) Elemento neutro homotópico: $\varepsilon_{x_0} * \alpha \simeq \alpha$, $\alpha * \varepsilon_{x_0} \simeq \alpha$.
- (d) Elemento inverso homotópico: $\alpha * \bar{\alpha} \simeq \varepsilon_{x_0} \simeq \bar{\alpha} * \alpha$.

De igual manera, se obtiene el conjunto cociente

$$\pi_n(X, x_0) := \Omega^n(X, x_0) / \simeq$$

cuyos elementos son las denominadas *clases de homotopía*, denotadas por $[\alpha]$ para cada α de $\Omega^n(X, x_0)$.

De la proposición anterior se deduce de manera directa el siguiente resultado:

Teorema 2.7. *Dados $n \geq 1$ y un punto x_0 del espacio topológico X , $\pi_n(X, x_0)$ tiene estructura de grupo con la operación inducida $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta]$. Se denomina *n-grupo superior de homotopía de X basado en x_0* .*

Obsérvese que el elemento neutro es $1_{\pi_n(X, x_0)} := [\varepsilon_{x_0}]$, mientras que el elemento inverso de la clase $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$ coincide con la clase del n -lazo cúbico inverso $[\alpha]^{-1} := [\bar{\alpha}]$.

Nota 2.3. Como anticipábamos con los 1-lazos cúbicos, el caso de dimensión 1 se corresponde con el grupo fundamental de X basado en x_0 , de ahí el origen de la notación $\pi_1(X, x_0)$ empleada en el grado.

Nota 2.4. El estudio anterior se ha realizado para $n \geq 1$. Sin embargo, existe una noción aparte para el caso $n = 0$. Como $I^0 = \{*\}$, podemos considerar un 0-lazo cúbico como una aplicación $\alpha : \{*\} \rightarrow X$, equivalente a elegir un punto del espacio topológico X . Cuando dos clases de homotopía son equivalentes significa que los puntos $x, y \in X$ correspondientes a sus imágenes están conectados por un camino, denotándose $x \sim y$. Esta relación de equivalencia, previamente estudiada en el Grado de Matemáticas, da lugar al conjunto cociente $\pi_0(X) := X / \sim$. Las clases de homotopía en este caso coinciden con las componentes conexas por caminos de X . Si además consideramos un punto base $x_0 \in X$, llamaremos

$\pi_0(X, x_0)$ al par formado por el conjunto $\pi_0(X)$ y el punto distinguido $[x_0]$. Es importante notar que en este caso hablamos de conjunto para $\pi_0(X)$ (conjunto punteado para $\pi_0(X, x_0)$ respectivamente) y no de grupo. Por ello, en general trabajaremos con el caso $n \geq 1$, incluyendo comentarios sobre el $\pi_0(X)$ cuando sea necesario. Como veremos al finalizar el siguiente capítulo, este conjunto interviene de manera importante a la hora de calcular en algunos ejemplos el grupo fundamental.

Una característica diferenciadora muy importante de los grupos superiores de homotopía con respecto al grupo fundamental es la abelianidad. Mientras que el grupo fundamental puede presentarla o no, es una propiedad intrínseca de los grupos superiores de homotopía.

Teorema 2.8. *Sean X espacio topológico y $x_0 \in X$. Si $n \geq 2$ entonces $\pi_n(X, x_0)$ es un grupo abeliano.*

Demostración. Veamos que $\alpha * \beta \simeq \beta * \alpha$, para $n \geq 2$ y cualquier $\alpha, \beta \in \Omega^n(X, x_0)$. De manera intuitiva, deformamos continuamente $\alpha * \beta$ según el siguiente esquema:

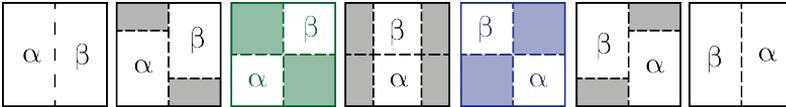


Figura 2.1. Esquema de la homotopía a construir. En verde se indica el Paso 1 y en azul el Paso 2, a los que haremos referencia posteriormente.

Para ello construiremos varias homotopías intermedias siguiendo la secuencia de la Figura 2.1. Nótese que deben intervenir necesariamente al menos dos parámetros de los n -lazos cúbicos en el proceso, que aquí elegimos t_n y t_{n-1} . Por ello debemos prestar especial atención a la operación de n -lazos cúbicos, que puede aplicarse tanto a una componente como a la otra. Utilizaremos $*_i$ para denotar el producto en la componente i -ésima, siendo $*$:= $*_n$ la operación definida originalmente. Esto es,

$$(\alpha *_i \beta)(t_1, \dots, t_n) := \begin{cases} \alpha(t_1, \dots, 2t_i, \dots, t_n), & 0 \leq t_i \leq 1/2 \\ \beta(t_1, \dots, 2t_i - 1, \dots, t_n), & 1/2 \leq t_i \leq 1. \end{cases}$$

Además, para simplificar las expresiones denominaremos

$$\begin{aligned} A &:= [0, 1/2] \times [0, 1/2], & B &:= [1/2, 1] \times [0, 1/2], \\ C &:= [0, 1/2] \times [1/2, 1], & D &:= [1/2, 1] \times [1/2, 1]. \end{aligned}$$

Nótese que para la operación $*_i$ se puede emplear también la Proposición 2.6, pues se demuestra considerando el mismo argumento pero centrado en la coordenada i -ésima.

Partimos de $\alpha *_n \beta$ y definimos $\alpha' := \alpha *_{(n-1)} \varepsilon_{x_0}$, $\beta' := \varepsilon_{x_0} *_{(n-1)} \beta$. Es directo ver que $\alpha' \simeq \alpha$ y $\beta' \simeq \beta$. Aplicando la Proposición 2.6 deducimos que $\alpha' *_n \beta' \simeq \alpha *_n \beta$, donde

$$(\alpha' *_n \beta')(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \alpha(t_1, \dots, 2t_{n-1}, 2t_n), & (t_{n-1}, t_n) \in A \\ x_0, & (t_{n-1}, t_n) \in B \\ x_0, & (t_{n-1}, t_n) \in C \\ \beta(t_1, \dots, 2t_{n-1} - 1, 2t_n - 1), & (t_{n-1}, t_n) \in D. \end{cases}$$

Este se corresponde con el n -lazo cúbico del Paso 1 de la Figura 2.1. Siguiendo un procedimiento análogo, obtenemos la relación de homotopía $\beta' *_n \alpha' \simeq \beta *_n \alpha$ donde $\beta' *_n \alpha'$ se corresponde con (ver el Paso 2 de la Figura 2.1):

$$(\beta' *_n \alpha')(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} x_0, & (t_{n-1}, t_n) \in A \\ \alpha(t_1, \dots, 2t_{n-1}, 2t_n), & (t_{n-1}, t_n) \in B \\ \beta(t_1, \dots, 2t_{n-1} - 1, 2t_n - 1), & (t_{n-1}, t_n) \in C \\ x_0, & (t_{n-1}, t_n) \in D. \end{cases}$$

Basta con encontrar una homotopía $F : \alpha' *_n \beta' \simeq \beta' *_n \alpha'$ para completar la cadena de homotopías y finalizar la demostración. Se comprueba directamente que viene definida de la siguiente manera:

$$F(t_1, \dots, t_n, s) = \begin{cases} \alpha(t_1, \dots, 2t_{n-1}, 2t_n(1-s)), & (t_{n-1}, t_n) \in A \\ \beta(t_1, \dots, 2t_{n-1} - 1, 2t_n s), & (t_{n-1}, t_n) \in B \\ \alpha(t_1, \dots, 2t_{n-1}, 1-s + (2t_n - 1)s), & (t_{n-1}, t_n) \in C \\ \beta(t_1, \dots, 2t_{n-1} - 1, (1-s)(2t_n - 1) + s), & (t_{n-1}, t_n) \in D. \end{cases}$$

El Lema de Continuidad 2.1 nos asegura la continuidad de F , concluyendo la prueba. \blacksquare

Dado que son necesarias al menos dos componentes para realizar la demostración, $\pi_1(X, x_0)$ no tiene por qué ser abeliano en principio. En efecto, hay diversos contraejemplos como la figura ocho o la botella de Klein, vistos en el Grado, cuyos grupos fundamentales no cumplen esta propiedad [9, 14].

Por otro lado, existe un tipo especial de espacios topológicos denominados *grupos topológicos* para los que el grupo fundamental siempre es abeliano. Son de especial interés para esta memoria, al ser las estructuras matemáticas usuales en Física que permiten modelizar los sistemas. Su definición, junto con este y otros múltiples resultados se incluyen en el Capítulo 3, donde veremos esta demostración concreta en detalle.

2.2.1. Homomorfismos inducidos

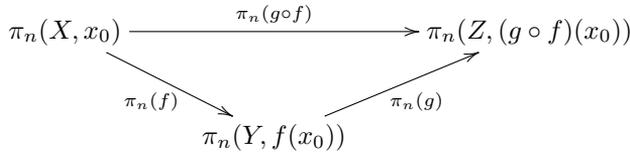
Al igual que una aplicación continua induce un homomorfismo de grupos entre los grupos fundamentales de los espacios topológicos en los que se define, aparece un homomorfismo inducido entre los n -grupos superiores de homotopía. Fijado el espacio topológico punteado (X, x_0) , dada $f : X \rightarrow Y$ continua y $x_0 \in X$ un punto base se define el siguiente homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) &\rightarrow \pi_n(Y, f(x_0)) \\ [\alpha] &\mapsto \pi_n(f)([\alpha]) := [f \circ \alpha]. \end{aligned}$$

Sus propiedades son análogas a las ya estudiadas para el homomorfismo asociado al grupo fundamental $\pi_1(f)$, así como sus respectivas demostraciones.

Proposición 2.9. *La construcción del homomorfismo inducido verifica las siguientes propiedades:*

- (a) $\pi_n(1_X) = 1_{\pi_n(X, x_0)}$.
- (b) Dadas $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ aplicaciones continuas y $x_0 \in X$, el siguiente diagrama es conmutativo:



Teniendo en cuenta estas dos propiedades, es una comprobación directa ver que un homeomorfismo f induce un isomorfismo de grupos $\pi_n(f)$, siendo $\pi_n(f)^{-1} = \pi_n(f^{-1})$.

Corolario 2.10. *Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Entonces para cada $x_0 \in X$ la aplicación $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$ es isomorfismo de grupos, para todo $n \geq 1$.*

Nota 2.5. A consecuencia de la Proposición 2.9, el homomorfismo inducido se trata de un *functor* desde espacios topológicos punteados a grupos. Este consiste en una construcción caracterizada por:

- (a) A cada espacio topológico punteado (X, x_0) se le asocia un grupo: el n -grupo superior de homotopía.
- (b) A cada aplicación continua $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ entre espacios topológicos punteados se le asigna un homomorfismo de grupos

$$\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0).$$

- (c) La composición de dos aplicaciones continuas induce la composición de los homomorfismos inducidos.
- (d) Se induce el homomorfismo identidad a partir de la aplicación identidad.

Gracias a la noción de homomorfismo inducido es posible demostrar el siguiente teorema. Omitiremos dicha demostración, pues es totalmente análoga al caso del grupo fundamental, si bien puede consultarse en [9, 11].

Teorema 2.11. *Sean X, Y espacios topológicos, $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Entonces*

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0),$$

para todo $n \geq 1$.

Hasta ahora, hemos aprovechado la existencia de analogías entre las demostraciones de los grupos superiores de homotopía y las del grupo fundamental para apenas esbozar alguna. En adelante precisaremos de técnicas totalmente diferentes a las empleadas durante el Grado de Matemáticas, por lo que será necesario incluir las demostraciones.

El objetivo de este apartado es esclarecer condiciones suficientes para que, por un lado, el cambio de punto base no afecte los grupos de homotopía y, por otro, los grupos de homotopía de dos espacios topológicos diferentes X e Y sean isomorfos. Para ello será necesario presentar algunos resultados tanto de Teoría de Homotopía como de Teoría de Grupos. La notación y nomenclatura que seguiremos es la empleada por J. J. Rotman en [16].

Al encontrarnos en el caso n -dimensional, cobra sentido introducir una nueva noción relacionada con la homotopía: la *homotopía por nivel*. Esta incluye una condición adicional para la frontera del n -cubo, guardando cierta relación con el concepto usual de homotopía relativa como veremos posteriormente. Debemos tener en cuenta que en este contexto no coincidirá con la homotopía de parejas, como mencionábamos en la Nota 2.2.

Definición 2.12. *Sean $F : I^n \times I \rightarrow X$ homotopía y φ un camino en X . Diremos que F es homotopía por nivel a lo largo de φ si $F(u, t) = \varphi(t)$, para todo $u \in \partial I^n$ y todo $t \in I$.*

Para las demostraciones posteriores será necesario tener en cuenta la *retracción* $r : I^n \times I \rightarrow J^n$, donde denotamos $J^n := (I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)$ (ver Figura 2.2). Recordemos que A se denomina *retracto* de X si existe $r : X \rightarrow A$ una retracción, esto es, una aplicación continua tal que $r|_A = 1_A$.

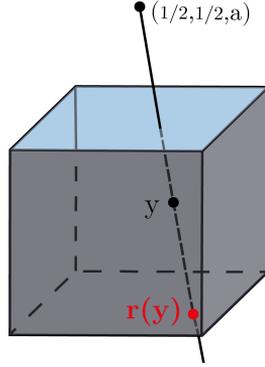


Figura 2.2. Construcción de la retracción para el caso $n = 2$. Tomamos un punto P exterior al cubo con coordenadas $(1/2, 1/2, a)$ cumpliendo $a > 1$. Entonces la intersección de la semirrecta representada en la figura con J^2 (en gris) nos da el valor de la retracción $r(y)$ para cada $y \in I^3$.

Lema 2.13. Sea $\varphi : I \rightarrow X$ lazo en X basado en x_0 tal que $\varphi \simeq \varepsilon_{x_0}$ rel. $\{0, 1\}$, y sean $\alpha, \beta \in \Omega^n(X, x_0)$ tal que existe una homotopía $F : \alpha \simeq \beta$ por nivel a lo largo de φ . Entonces $[\alpha] = [\beta] \in \pi_n(X, x_0)$.

Demostración. Sea $\mu : \varphi \simeq \varepsilon_{x_0}$ rel. $\{0, 1\}$ una homotopía. Buscamos una homotopía de parejas $G : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \rightarrow (X, x_0)$ entre α y β . Para construirla definiremos las siguientes aplicaciones. Sea la aplicación $h : (I^n \times I \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I \times I) \rightarrow X$, dada por

$$\begin{aligned} h(u, t, 0) &:= F(u, t), \text{ para todo } u \in I^n, t \in I, \\ h(u, t, s) &:= \mu(t, s), \text{ para todo } u \in \partial I^n, t, s \in I, \end{aligned}$$

cuya continuidad está garantizada por el Lema de Continuidad 2.1. Sea además $R : I^n \times I \times I \rightarrow (I^n \times I \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I \times I)$ una aplicación definida por

$$R := T \circ (r \times 1_I) \circ T,$$

con r la retracción previa (ver Figura 2.2) y T la aplicación que permuta la segunda y tercera componente. Teniendo en cuenta que r es retracción, se prueba sin dificultad que también lo es R . Entonces definimos $H := h \circ R : I^n \times I \times I \rightarrow X$, que nos permite construir la homotopía que buscábamos:

$$G(u, t) := \begin{cases} H(u, 0, 4t), & 0 \leq t \leq 1/4 \\ H(u, 4t - 1, 1), & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ H(u, 1, 2(1 - t)), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Concluimos la demostración aplicando de nuevo el Lema de Continuidad 2.1. ■

Por otro lado, nos interesa considerar la siguiente definición:

Definición 2.14. Dado X un espacio topológico, un sistema local de grupos T consiste en una familia de grupos $\{T(x)\}_{x \in X}$ junto con una familia de homomorfismos de grupos $\{T(\varphi) : T(\varphi(0)) \rightarrow T(\varphi(1)) / \varphi \text{ camino en } X\}$ verificando las siguientes condiciones:

- (a) Si $\varphi \simeq \varphi'$ rel. $\{0, 1\}$ entonces $T(\varphi) = T(\varphi')$.
- (b) $T(\varepsilon_X) = 1_{T(x)} : T(x) \rightarrow T(x)$.
- (c) Si φ, ψ son caminos en X tal que $\varphi(1) = \psi(0)$, entonces $T(\varphi * \psi) = T(\psi) \circ T(\varphi)$.

Nota 2.6. Si T es un sistema local de grupos en X se deduce de manera inmediata que $T(\bar{\varphi}) \circ T(\varphi) = 1$, como consecuencia de la relación $\varphi * \bar{\varphi} \simeq \varepsilon_{\varphi(x_0)}$ rel. $\{0, 1\}$ junto con las propiedades (a), (b) y (c) que lo definen. Concluimos de ello que $T(\varphi)$ es isomorfismo de grupos para todo camino en X . Además $T(\varphi)^{-1} = T(\bar{\varphi})$.

Dado un un espacio topológico X , veremos que es posible construir un sistema local de grupos al tomar $\pi_n(X, x)$ para cada punto base x de X . Para ello es necesario definir una homotopía por nivel que nos permita deformar los n -lazos cúbicos basados en un punto x_0 hasta tener un nuevo punto base x_1 .

Sean $\varphi : I \rightarrow X$ un camino con $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$ y $\alpha \in \Omega^n(X, x_0)$. Definimos la aplicación $L'_{\varphi, \alpha} : (I^n \times 0) \cup (\partial I^n \times I) \rightarrow X$ como

$$L'_{\varphi, \alpha}(u, 0) := \alpha(u), \quad L'_{\varphi, \alpha}(v, t) := \varphi(t),$$

para todo $u \in I^n$, $v \in \partial I^n$ y $t \in I$. Es fácil comprobar que está bien definida y es continua, como consecuencia de aplicar el Lema de Continuidad 2.1. Entonces denotamos $L_{\varphi, \alpha} := L'_{\varphi, \alpha} \circ r$, con r la retracción previamente introducida. Se trata de una homotopía por nivel a lo largo de φ tal que $L_{\varphi, \alpha}(-, 0) = \alpha$. A su vez denotaremos $L_{\varphi, \alpha}(-, 1) := \varphi_{\#}(\alpha)$, donde $\varphi_{\#} : \Omega^n(X, x_0) \rightarrow \Omega^n(X, x_1)$ y $(\varphi_{\#}(\alpha))(u) = \varphi(1) = x_1$, para todo $u \in \partial I^n$. Veamos el siguiente resultado técnico para $\varphi_{\#}(\alpha)$:

Lema 2.15. Sean $\varphi, \varphi' : I \rightarrow X$ dos caminos en X con $\varphi(0) = x_0 = \varphi'(0)$ y $\varphi(1) = x_1 = \varphi'(1)$ tales que $\varphi \simeq \varphi'$ rel. $\{0, 1\}$. Sea $F : \alpha \simeq \beta$ una homotopía por nivel a lo largo de φ' , con $\alpha \in \Omega^n(X, x_0)$, $\beta \in \Omega^n(X, x_1)$. Entonces $[\varphi_{\#}(\alpha)] = [\beta] \in \pi_n(X, x_1)$.

Demostración. Definimos $G : I^n \times I \rightarrow X$ como

$$G(u, t) := \begin{cases} L_{\varphi, \alpha}(u, 1 - 2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ F(u, 2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se comprueba que es una homotopía por nivel $G : \varphi_{\#}(\alpha) \simeq \beta$ a lo largo de $\bar{\varphi} * \varphi'$. Por la compatibilidad de la homotopía relativa con la composición, tenemos que $\bar{\varphi} * \varphi' \simeq \varepsilon_{x_1}$ rel ∂I^n . Concluimos el resultado aplicando el Lema 2.13. ■

Teorema 2.16. Sean X espacio topológico y $n \geq 1$. Entonces $T(x) := \pi_n(X, x)$ determina un sistema local de grupos en X .

Demostración. Consideramos $T(x) = \pi_n(X, x)$ y buscamos una familia de homomorfismos adecuada. Suponemos un camino φ en X de x_0 a x_1 y definimos $T(\varphi) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$, con $T(\varphi) := [\varphi_{\#}(\alpha)]$. Veamos que está bien definida: dado $[\alpha] = [\beta]$ con $\alpha, \beta \in \Omega^n(X, x_0)$ se tiene una homotopía por nivel F a lo largo de ε_{x_0} que nos permite definir:

$$G(u, t) := \begin{cases} F(u, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ L_{\varphi, \beta}(u, 2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Como $G : \alpha \simeq \varphi_{\#}(\beta)$ homotopía por nivel a lo largo de $\varepsilon_{x_0} * \varphi$, por el Lema 2.15 se tiene $\varphi_{\#}(\alpha) \simeq \varphi_{\#}(\beta)$. Para comprobar que es homomorfismo de grupos nos construimos la siguiente homotopía por nivel a lo largo de φ :

$$H(t_1, \dots, t_n, s) := \begin{cases} L_{\varphi, \alpha}(t_1, \dots, t_{n-1}, 2t_n, s), & 0 \leq t_n \leq 1/2 \\ L_{\varphi, \beta}(t_1, \dots, t_{n-1}, 2t_n - 1, s), & 1/2 \leq t_n \leq 1. \end{cases}$$

Luego $H : \alpha * \beta \simeq \varphi_{\#}(\alpha) * \varphi_{\#}(\beta)$ homotopía por nivel. A consecuencia del Lema 2.15 se verifica $\varphi_{\#}(\alpha * \beta) \simeq \varphi_{\#}(\alpha) * \varphi_{\#}(\beta)$, junto con las propiedades de los sistemas locales de grupos. ■

Como resultado, siguiendo las observaciones de la Nota 2.6 se comprueba el siguiente corolario.

Corolario 2.17. Si X es un espacio topológico y φ un camino en X con $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$, entonces existe un isomorfismo de grupos

$$T(\varphi) : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_1),$$

para todo $n \geq 1$.

Podemos extender este último corolario al caso en el que dos puntos cualesquiera de X puedan conectarse mediante un camino. Esta propiedad se denomina *conexidad por caminos*.

Corolario 2.18. Si X es conexo por caminos entonces $\pi_n(X, x)$ es isomorfo a $\pi_n(X, x')$ para todo $x, x' \in X$.

Nota 2.7. Después de introducir $T(\varphi)$ para los n -grupos de homotopía, es natural preguntarse si para el caso $n = 1$ coincide con el isomorfismo de cambio de punto base, visto en el Grado de Matemáticas. Esto es, nos planteamos si dado φ un camino de x_0 a x_1 ,

$$T(\varphi) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1), \quad T(\varphi)([\alpha]) := [\varphi_{\#}(\alpha)]$$

es una generalización del isomorfismo

$$u_\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1), \quad u_\varphi([\alpha]) := [\bar{\varphi} * \alpha * \varphi].$$

Efectivamente, este hecho se demuestra afirmativamente construyendo una homotopía de pares $F : (\bar{\varphi} * \alpha) * \varphi \simeq \varphi_\#(\alpha)$. La idea para ello se presenta en la siguiente figura:

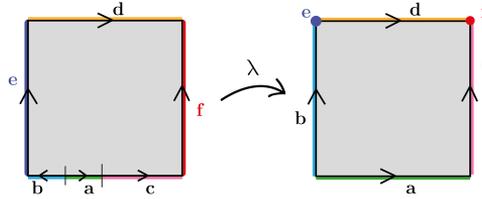


Figura 2.3. Esbozo de la demostración.

En concreto, $F := L_{\varphi, \alpha} \circ \lambda$ donde $\lambda : I \times I \rightarrow I \times I$ es un homeomorfismo que modifica el borde del cuadrado como se muestra en la Figura 2.3.

Veamos ahora el segundo caso que nos ocupa, esto es, qué ocurre cuando se tratan de dos espacios topológicos homotópicamente equivalentes. Para las equivalencias de homotopía punteadas $f : (X, x_0) \xrightarrow{\simeq} (Y, y_0)$ es directo comprobar que conllevan un isomorfismo entre sus grupos superiores de homotopía. Sin embargo, este resultado tan sencillo para equivalencias punteadas se complica para el caso no punteado. Comenzaremos introduciendo el siguiente lema.

Lema 2.19. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ continuas y $F : f \simeq g$ una homotopía. Si $x_0 \in X$, consideramos el camino $\varphi = F(x_0, -)$ de $f(x_0)$ a $g(x_0)$. Entonces existe el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{\pi_n(g)} & \pi_n(Y, g(x_0)) \\ \pi_n(f) \downarrow & \nearrow T(\varphi) & \\ \pi_n(Y, f(x_0)) & & \end{array}$$

Demostración. Dado $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$ vemos que $T(\varphi)(\pi_n(f)([\alpha])) = [\varphi_\#(f \circ \alpha)]$ y $\pi_n(g)([\alpha]) = [g \circ \alpha]$. Si tomamos $G : I^n \times I \rightarrow X$ con $G(u, t) := F(\alpha(u), t)$, se deriva de forma sencilla que $G : f \circ g \simeq g \circ \alpha$ es homotopía por nivel a lo largo de φ . Concluimos por el Lema 2.15 que $[\varphi_\#(f \circ \alpha)] = [g \circ \alpha]$. ■

Teorema 2.20. Sea $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ una equivalencia de homotopía. Entonces,

$$\pi_n(f) : \pi_n(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_n(Y, f(x))$$

es isomorfismo para todo $n \geq 1$ y todo $x \in X$.

Demostración. Sea $g : Y \rightarrow X$ el inverso homotópico de f . Se consideran $F : g \circ f \simeq 1_X$ y $G : f \circ g \simeq 1_Y$ las correspondientes homotopías y tomamos los caminos $\varphi = F(x_0, -)$ y $\psi = G(f(x_0), -)$. Aplicamos el Lema 2.19 para el primer camino, y al tratarse de homomorfismos de grupos se tiene que $\pi_n(g) \circ \pi_n(f) = T(\bar{\varphi})$, donde $T(\bar{\varphi})$ es isomorfismo. De este modo tenemos que $\pi_n(g)$ es epimorfismo. Procedemos con el segundo camino y repetimos el proceso, obteniendo $\pi_n(f) \circ \pi_n(g) = T(\bar{\psi})$ y concluyendo que $\pi_n(g)$ es monomorfismo. Cuidado con la tentación de llegar a la misma conclusión para $\pi_n(f)$: los grupos superiores en cada caso tienen puntos base diferentes, salvo para $\pi_n(g) : \pi_n(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_n(X, (g \circ f)(x_0))$. Por tanto $\pi_n(g)$ es isomorfismo y $\pi_n(f) = \pi_n(g)^{-1} \circ T(\bar{\varphi})$ es isomorfismo también. ■

Como consecuencia, teniendo en cuenta de nuevo la conexidad por caminos:

Corolario 2.21. *Sean X e Y conexos por caminos. Si $X \simeq Y$ son homotópicamente equivalentes, entonces $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0)$ para cualquier $x_0 \in X, y_0 \in Y, n \geq 1$.*

Otro concepto con implicaciones interesantes es el de *retracto por deformación*. Recordemos que dado un subespacio A de un espacio topológico X , se dice que es un retracto por deformación de X si existe una aplicación $r : X \rightarrow A$ continua tal que $r \circ i = 1_A$ e $i \circ r \simeq 1_X$, donde la aplicación $i : A \hookrightarrow X$ denota la inclusión canónica. Se considerará que es un *retracto por deformación fuerte* si además de ser retracto por deformación cumple $i \circ r \simeq 1_X$ rel. A , contexto en el que la homotopía relativa no coincide con la homotopía de parejas (ver Nota 2.2). En estos casos:

Corolario 2.22. *Si A es retracto por deformación (fuerte) de X , entonces $\pi_n(i) : \pi_n(A, a) \rightarrow \pi_n(X, a)$ es isomorfismo de grupos, para todo $a \in A, n \geq 1$.*

Por último consideremos los espacios *contráctiles*, es decir aquellos homotópicamente equivalentes a un espacio unipuntual.

Corolario 2.23. *Si X es contráctil entonces $\pi_n(X, x) \cong 0$, para todo $n \geq 1$ y $x \in X$.*

Nota 2.8. Nótese que todo el análisis se ha realizado para $n \geq 1$. En el caso $n = 0$, dada $f : X \rightarrow Y$ se induce la aplicación

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y), \text{ con } \pi_0(f)([\alpha]) := [f(x)].$$

Se prueba que las propiedades análogas de la Proposición 2.9 se cumplen para esta construcción. Además, dadas $f, g : X \rightarrow Y$ continuas tales que $H : f \simeq g$ se demuestra que $\pi_0(f) = \pi_0(g)$, sin más que considerar el camino $\alpha = H(x_0, -)$ uniendo $f(x_0)$ y $g(x_0)$ para un punto $x_0 \in X$. Finalmente se tiene el resultado análogo al Teorema 2.20: dada $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$, la aplicación inducida $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ es biyectiva. Todo esto se extiende de forma natural para el caso punteado $\pi_0(f) : \pi_0(X, x_0) \rightarrow \pi_0(Y, y_0)$.

2.2.2. Grupos superiores en términos de n -esferas

Hasta ahora hemos presentado todo el formalismo de los grupos de homotopía empleando lazos cúbicos, definidos a partir del n -cubo. Sin embargo, existe una manera alternativa de construir estos grupos, basada en el uso de n -esferas. Ambos formalismos son equivalentes salvo homeomorfismo, como intentaremos justificar brevemente en esta sección. De ahí surge su interés, ya que podremos alternarlos según nos convenga más trabajar en un contexto u otro. En esta memoria hemos decidido utilizar principalmente los lazos cúbicos, aunque los correspondientes lazos esféricos dan lugar a un formalismo muy rico. Por cuestiones de extensión no nos será posible profundizar en él, si bien aparece en numerosas referencias [5, 19].

Para establecer una relación entre en n -cubo y la n -esfera precisamos de la noción de espacio cociente. Diremos que dos elementos $x, y \in I^n$ están relacionados ($x \sim y$) cuando o sean iguales o pertenezcan al borde ∂I^n . Esta relación se demuestra fácilmente que es de equivalencia, permitiéndonos definir el espacio cociente $I^n/\partial I^n := I^n/\sim$. En general se tiene un homeomorfismo puntuado $(I^n/\partial I^n, *) \cong (S^n, s_n)$, siendo $s_n = (1, 0, \dots, 0)$, para todo $n \geq 1$. Veamos cómo nos ayuda esto a establecer los grupos de homotopía en términos de la n -esfera.

Dados un espacio topológico X , un subgrupo $A \subseteq X$ y un espacio puntuado (Y, y_0) , podemos construir, sin ninguna dificultad técnica, una biyección natural $[X, A; Y, y_0] \cong [X/A, *; Y, y_0]$ dada por $[f] \mapsto [\bar{f}]$, siendo $\bar{f}([x]) := f(x)$. Aplicándolo al contexto de los grupos de homotopía, nos permite concluir la existencia de una biyección natural

$$\pi_n(X, x_0) = [I^n, \partial I^n; X, x_0] \cong [I^n/\partial I^n, *; X, x_0] \cong [S^n, s_n; X, x_0]. \quad (2.1)$$

La estructura de grupo del primer corchete de homotopía se traslada a través de la biyección a $[S^n, s_n; X, x_0]$, quedando así definida la operación intrínseca asociada a los n -lazos esféricos.

2.2.3. Acción de π_1 sobre π_n

Existe una complicación que aún no hemos considerado a la hora de modelizar los defectos del sistema físico. En general, dado un n -lazo cúbico que rodee un defecto en el espacio real X obtendremos otro n -lazo cúbico en el espacio del parámetro de orden R , vía la aplicación f definida en la Sección 1.1.2. Así, para un mismo defecto tendremos una familia de n -lazos cúbicos homotópicamente equivalentes, pero en principio estos no tienen por qué compartir un solo punto en R . Por tanto, precisamos hablar de un concepto más general de clases de n -lazos cúbicos que no dependa de un punto base. N. D. Mermin se refiere a esta nueva noción como *clases de n -lazos cúbicos homotópicamente libres* [12], que se identifican con las llamadas *clases de conjugación* cuando $n = 1$. La maquinaria

matemática que nos permitirá en general obtener las familias de n -lazos cúbicos independientes del punto base se corresponde con la denominada *acción* de π_1 sobre π_n .

Comencemos con el caso $n = 1$. Cuando pensamos en comparar lazos con puntos base diferentes, automáticamente nuestra intuición exige la existencia de un camino α entre ellos. Es decir, el isomorfismo de cambio de punto base $u_\alpha : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$, introducido en la Nota 2.7, es un elemento clave a la hora de establecer las clases de homotopías sin depender de dichos puntos. En particular veíamos en el Grado de Matemáticas que, dado X un espacio conexo por caminos, la abelianidad del grupo fundamental garantiza la unicidad del isomorfismo natural canónico, siendo independiente de la elección de punto base. Veremos en el Capítulo 3 que esta condición se cumple para la mayoría de sistemas físicos. Dichos isomorfismos nos permiten definir las clases de 1-lazos homotópicamente libres, resultado que generalizaremos para un n cualquiera.

Dados dos n -lazos α, β basados en $x_0, x_1 \in X$ respectivamente, diremos que son homotópicamente libres ($\alpha \simeq_l \beta$) cuando existe una homotopía no relativa $F : \alpha \simeq \beta$ tal que $F(u, t) = F(u', t)$, para todo $u, u' \in \partial I^n$ y $t \in I$. Denotaremos X^I al conjunto de todos los caminos de X .

Proposición 2.24. *Sean α y β n -lazos basados en x_0 y x_1 respectivamente. Entonces $\alpha \simeq_l \beta$ si y solo si existe un camino $\gamma \in X^I$ con $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ tal que $[\beta] = [\varphi_\#(\alpha)]$.*

Demostración. Para la implicación hacia la izquierda basta percatarse de que $\beta \simeq (\tilde{\gamma} * \alpha) * \gamma$ rel. $\{0, 1\}$ por hipótesis. Deformando el camino γ adecuadamente en ε_{x_0} se tiene $(\tilde{\gamma} * \alpha) * \gamma \simeq \alpha$, concluyendo la demostración. Se dejan los detalles al lector. Sin embargo, en el sentido contrario debemos ir con más delicadeza. Sean las aplicaciones $\tilde{\alpha} : (I^n / \partial I^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ y $\tilde{\beta} : (I^n / \partial I^n, *) \rightarrow (X, x_1)$, correspondientes a los n -lazos cúbicos α y β respectivamente según la biyección $[I^n, \partial I^n; X, x_0] \cong [I^n / \partial I^n, *; X, x_0]$. Definimos una aplicación $\tilde{F} : I^n / \partial I^n \times I \rightarrow X$ con $\tilde{F}([u], t) := F(u, t)$, donde usamos la homotopía $F : \alpha \simeq_l \beta$ dada por hipótesis. Es directo comprobar que a su vez $\tilde{F} : \tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$. Aplicando el Lema 2.19 se tiene que $\pi_n(\tilde{\beta}) = T(\gamma) \circ \pi_n(\tilde{\alpha})$, donde $\gamma(t) := \tilde{F}(*, t)$ es un camino de x_0 a x_1 . Por otro lado, tomamos la aplicación continua de parejas $p : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (I^n / \partial I^n, *)$ relativa a la proyección canónica. Como $\pi_n(\tilde{\alpha})([p]) = [\alpha]$ y $\pi_n(\tilde{\beta})([p]) = [\beta]$, se concluye la prueba. ■

Más formalmente, podemos definir una operación $\cdot : \pi_1(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$, siendo $[\beta] = [\gamma] \cdot [\alpha]$. Esta se denomina *acción* del π_1 sobre el π_n , noción que en el Capítulo 3 trataremos en general. Cuando dicha acción es trivial para un espacio topológico X , diremos que X es n -simple. Un ejemplo clásico es la n -esfera, que se trata de un espacio n -simple para $n \geq 1$, de ahí que este problema no se viera reflejado en el ejemplo de la Sección 1.3.

Medios ordenados como Grupos de transformaciones

Hasta ahora nos hemos limitado a analizar la maquinaria matemática con la que estudiar el espacio del parámetro de orden R . Sin embargo, la clave de este trabajo reside en nuestra habilidad para modelizar el sistema físico empleando un espacio topológico adecuado. No debemos dejar que la sencillez del ejemplo 1.3 inicial nos engañe; obtener R es una tarea nada trivial en la mayoría de los casos, y menos aún el cálculo de sus respectivos grupos de homotopía.

Este capítulo persigue establecer un procedimiento matemático que facilite ambos objetivos, necesarios para la clasificación de los defectos. A pesar de la dificultad para conocer el espacio del parámetro de orden, veremos que puede identificarse con un cociente de espacios topológicos

$$R \cong G/H,$$

empleando una de las estructuras matemáticas más comunes en los modelos físicos: la de grupo de transformaciones topológicas. No es una elección arbitraria, tanto G como H estarán estrechamente relacionados con las simetrías del sistema. Todo ello nos permitirá alcanzar nuestro propósito final: presentar el Teorema Fundamental de los medios ordenados. Bajo ciertas condiciones de los grupos de homotopía de G , este establece la existencia de un isomorfismo entre el n -grupo de homotopía de G/H y el $(n - 1)$ -grupo de homotopía de H , generalmente más sencillo de calcular.

La justificación matemática de dicho “algoritmo”, como lo denomina N. D. Mermin en [12], requiere de tres ingredientes básicos: grupos de homotopía relativos, sucesiones exactas y fibraciones. Junto con los grupos de transformaciones, constituyen las principales construcciones matemáticas que estableceremos a lo largo del capítulo. Tras introducir el Teorema Fundamental analizaremos su aplicación en dimensiones bajas, donde serán necesarios resultados adicionales de espacios recubridores (para $n = 1$) y grupos de Lie (para $n = 2$). Finalmente, concluiremos introduciendo ejemplos de su aplicación en diferentes sistemas físicos. Así, este capítulo consiste no solo en una revisión del artículo [12] sino en una generalización a cualquier dimensión n del procedimiento detallado en él.

Todas aquellas hipótesis necesarias para los resultados que propondremos serán totalmente compatibles con el amplio abanico de sistemas físicos en los que se enfoca esta memoria, como justificaremos en cada caso. Además, el con-

tenido de este capítulo tiene intersección vacía con las asignaturas del Grado de Matemáticas, por lo que incluiremos las demostraciones en su práctica totalidad. Cuando estas contribuyan más al dispersamiento que al enriquecimiento de la memoria, remitiremos al lector a las referencias adecuadas.

3.1. Grupos de Transformaciones

En Física usualmente todo sistema tiene alguna propiedad, objetivo de nuestro estudio, a la cual asociamos un espacio topológico. Sin embargo, sabemos que las características de un medio pueden verse modificadas por parámetros como la temperatura. Por ello necesitamos de una estructura matemática más general que contenga información tanto de la propiedad como de sus posibles variaciones. Los grupos de transformaciones topológicas son los candidatos perfectos, como descubriremos a lo largo de la sección. En consecuencia, veremos que nos permiten expresar R como un cociente de espacios topológicos bajo ciertas condiciones.

Para introducirlos es preciso estudiar primero una noción fundamental en su definición: los denominados grupos topológicos. Estos serán los encargados de reflejar matemáticamente las transformaciones que puede sufrir el parámetro de orden, preservando la estructura del espacio topológico. El porqué de su idoneidad para modelizar problemas físicos lo encontramos en su estrecha relación con las simetrías. Como vimos en el Capítulo 1, el papel de estas es crucial en la elección del espacio del parámetro de orden, de ahí que sea natural trabajar con grupos que recojan esa información.

Antes de empezar prevenimos al lector sobre esta sección y la próxima: realizaremos un estudio puramente matemático, si bien no debemos olvidar la motivación de todo ello. En caso contrario correremos el riesgo de sumergirnos en aguas profundas, perdiéndonos en las inmensidades de la teoría.

3.1.1. Introducción a los Grupos Topológicos

La primera construcción matemática en nuestro viaje por los medios ordenados fue la de espacio topológico. Continuamos el camino introduciendo la noción de *grupo topológico*, más restrictiva que la que hasta ahora manejábamos.

Definición 3.1. *Se dice que G es un grupo topológico cuando es espacio topológico, tiene estructura de grupo y las operaciones del grupo*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G, & (\cdot)^{-1} : G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y & x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

son continuas.

Como vemos, se trata de un concepto que mezcla la estructura de grupo con la de espacio topológico. En consecuencia se tiene la siguiente caracterización, sencilla de comprobar:

Proposición 3.2. *Sea G grupo y espacio topológico. Entonces G es grupo topológico si y solo si la aplicación $\mu : G \times G \rightarrow G$ es continua, con $\mu(g, h) := g \cdot h^{-1}$ para $g, h \in G$.*

Nos interesa establecer un poco de notación y definir algunas aplicaciones relacionadas, que serán de gran utilidad en posteriores demostraciones. En primer lugar, dado G grupo topológico y A, B subconjuntos de G , definimos $A \cdot B := \{a \cdot b / a \in A, b \in B\}$, $A^{-1} := \{a^{-1} / a \in A\}$ y $A^n := \{a_1 \cdots a_n / a_i \in A\}$. Además, denotaremos por e al elemento neutro para la operación del grupo topológico. Por otro lado, llamamos *traslación a la izquierda* de $g \in G$ a la aplicación

$$L_g : G \rightarrow G, \text{ con } L_g(h) := g \cdot h \text{ para todo } h \in G.$$

Asimismo se tiene la aplicación $R_g : G \rightarrow G$ para cada $g \in G$, siendo $R_g(h) := h \cdot g^{-1}$ con $h \in G$. Al estar definidas a partir de la operación del grupo, se tratan de aplicaciones continuas. Se deducen directamente de ello las siguientes propiedades:

- (a) $L_e = id_G = R_e$,
- (b) $L_g L_{g'} = L_{g \cdot g'}$ y $L_g L_{g^{-1}} = id_G = L_{g^{-1}} L_g$, por lo que L_g es homeomorfismo con $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. De igual manera, deducimos que R_g es homeomorfismo.

Esta última propiedad nos permite afirmar que cualquier entorno del elemento g será de la forma $L_g(U) = g \cdot U$, donde U es entorno de e . Podemos ir más allá: dado U entorno de e , serán entornos de este elemento tanto U^{-1} como $U \cap U^{-1}$. En consecuencia, podemos garantizar que el conjunto de entornos simétricos de e forman una base de entornos $\beta(e)$, llamándose *entorno simétrico* a todo entorno V tal que $V^{-1} = V$.

Un resultado inmediato, relativo a los entornos del elemento neutro, se incluye a continuación.

Lema 3.3. *Dados $g \in G$ y U un entorno de g , existe V un entorno de e tal que $V \cdot g \cdot V \subseteq U$.*

Demostración. Definimos $\varphi : G \times G \times G \rightarrow G$ aplicación con $\varphi(g, h, k) := g \cdot h \cdot k$. Teniendo en cuenta su continuidad, y que $\varphi(e, g, e) = g$, podemos encontrar dos entornos V_1, V_2 de e tales que $V_1 \cdot g \cdot V_2 \subseteq U$. Definiendo el entorno simétrico $V = V_1 \cap V_2$ se tiene $V \cdot g \cdot V \subseteq U$. ■

Antes de continuar analizando las propiedades que heredan los grupos topológicos de su estructura de grupo, recuperamos un resultado mencionado en el Capítulo 2: la abelianidad de su grupo fundamental. Aparte de ser un resultado interesante por sí mismo, tiene implicaciones importantes en la modelización de los defectos.

Proposición 3.4. *Para todo G grupo topológico, $\pi_1(G, e)$ es abeliano.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow G$ lazos basados en el elemento neutro. Se comprueba fácilmente que $\alpha \cdot \beta$, definido por $(\alpha \cdot \beta)(t) := \alpha(t) \cdot \beta(t)$, también es un lazo basado en e . Entonces veremos que existen dos homotopías de pares $H : \alpha * \beta \simeq \alpha \cdot \beta$ y $F : \beta * \alpha \simeq \alpha \cdot \beta$. La primera la definimos como sigue:

$$H(t, s) := \begin{cases} \alpha((2-s)t) \cdot \beta(st), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \alpha(1-s+st) \cdot \beta((1-s)(2t-1)+st), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Análogamente se tiene que

$$F(t, s) := \begin{cases} \alpha(st) \cdot \beta((2-s)t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \alpha((1-s)(2t-1)+st) \cdot \beta(1-s+st), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La continuidad de ambas es consecuencia del Lema de Continuidad 2.1. Concluimos que $\alpha * \beta \simeq \beta * \alpha$. ■

Nota 3.1. Este resultado se cumple para una generalización de grupo topológico, el denominado *espacio de Hopf* o *H-espacio*. Se define como el espacio punteado (X, x_0) junto con una aplicación continua punteada (*multiplicación*) $m : X \times X \rightarrow X$ tal que existen homotopías punteadas

$$m \circ (C_{x_0}, 1_X) \simeq 1_X, \quad m \circ (1_X, C_{x_0}) \simeq 1_X.$$

Los grupos topológicos son un tipo particular de H-espacios, en los que este diagrama es estrictamente conmutativo.

Nota 3.2. Cuando el grupo fundamental del espacio de parámetro de orden es abeliano, la adición de clases de homotopía se traduce directamente en una recombinación de defectos y viceversa. Esto es, el defecto final se corresponde con la clase resultante tras la operación. Así, cuando un defecto asociado a una clase $[\alpha]$ se encuentra con otro asociado a la clase inversa $[\bar{\alpha}]$ se obtiene la clase trivial y estos desaparecen. Esta “biyección” entre defectos y clases tiene consecuencias muy interesantes, si bien su estudio se escapa del objetivo de esta memoria.

Una vez presentados los grupos topológicos y algunas de sus propiedades, veremos que dan lugar a un espacio cociente. Al igual que ocurre en Teoría de Grupos existe una relación binaria para los grupos topológicos, definida por uno de sus subgrupos. Esto es, dado G grupo topológico con un subgrupo H se define

$$g_0 \sim g_1 \quad \text{si y solo si} \quad g_0^{-1} \cdot g_1 \in H,$$

para dos elementos g_0, g_1 pertenecientes a G . Se demuestra que es relación de equivalencia, dando lugar al cociente de espacios topológicos

$$G/H := G/\sim .$$

En la siguiente sección lo identificaremos con el espacio cociente que mencionábamos en la introducción del capítulo, de ahí su importancia. Sus elementos son las clases a la izquierda gH , denominadas *cosets*. Como todo espacio cociente tiene asociada una proyección $p : G \rightarrow G/H$, continua debido a la definición de topología cociente. Adicionalmente se trata de una aplicación abierta, puesto que

$$p^{-1}(p(A)) = \{g \in G / p(g) = p(a), a \in A\} = \bigcup_{h \in H} L_h(A)$$

es abierto para todo $A \subseteq G$ abierto, al ser cada L_h homeomorfismo.

Nótese que en general este espacio cociente no tiene por qué ser grupo; para ello, necesariamente H debe ser subgrupo normal.

Proposición 3.5. *Si H es subgrupo normal de G entonces G/H es grupo topológico.*

Demostración. Al ser H normal, G/H posee estructura de grupo con la operación $(g_1H) \cdot (g_2H) = (g_1 \cdot g_2)H$. Veamos que la aplicación siguiente es continua:

$$\eta : G/H \times G/H \rightarrow G/H, \text{ siendo } \eta(g_1, g_2) = (g_1 \cdot g_2^{-1})H.$$

Dado $W \subseteq G/H$ abierto se cumple $p \circ \mu = \eta \circ (p \times p)$, con μ la operación de G . Entonces se tiene que $\eta^{-1}(W) = (p \times p)(\mu^{-1}(p^{-1}(W)))$. Como son aplicaciones continuas y p es abierta, entonces η es continua. La Proposición 3.2 concluye la demostración. ■

Describiremos a continuación otro resultado relacionado con este cociente, según las propiedades que posea el subgrupo distinguido H . A partir de ahora *supondremos que todos los grupos topológicos que consideraremos son espacios de Hausdorff*. Es una hipótesis razonable en el contexto de esta memoria, pues se cumple generalmente para cualquier grupo topológico empleado en Física.

Proposición 3.6. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo topológico G . Entonces G/H es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Consideramos g_1, g_2 elementos de G , tales que $g_1H \neq g_2H$. Luego $g = g_1^{-1} \cdot g_2$ pertenece a la diferencia conjuntista $G \setminus H$ (no confundir con el cociente de espacios) y $G \setminus H$ es entorno g , al ser G cerrado. Aplicando el Lema 3.3, obtenemos $U \cdot g \cdot U \subseteq G \setminus H$ con U entorno simétrico de e . Entonces

$$((g_2 \cdot U)H) \cap ((g_1 \cdot U)H) = \emptyset,$$

con $g_1 \cdot U$ y $g_2 \cdot U$ entornos de g_1 y g_2 respectivamente. Como $(g_i \cdot U)H = p(g_iU)$ para $i = 1, 2$, con $p(g_i \cdot U)$ abierto y entorno de g_iH , concluimos que G/H es de Hausdorff. ■

Nota 3.3. Es posible entender el conjunto $\pi_0(G)$, con G un grupo topológico, como un espacio cociente. Este vendrá dado en términos de la componente conexa G_0 del elemento neutro, de manera que

$$\pi_0(G) = G/G_0.$$

La demostración se deduce directamente de la construcción de dos caminos adecuados. Dadas $g, h \in G$ tales que $gG_0 = hG_0$, existe un camino α de e en $g^{-1} \cdot h$. Definiendo $\beta(t) := g \cdot \alpha(t)$, concluimos que $[g] = [h]$. Para la inclusión contraria, partimos de un camino β tal que $\beta(0) = g$, $\beta(1) = h$. Concluimos definiendo ahora $\alpha := g^{-1} \cdot \beta(t)$. Por otro lado se comprueba fácilmente que G_0 es subgrupo normal de G . Esto junto con la Proposición 3.5 implica que $\pi_0(G)$ es grupo topológico siempre que G lo sea, siendo la operación de grupo en $\pi_0(G)$ la inducida canónicamente por la de G .

Antes de finalizar nuestra inmersión por los grupos topológicos, introduzcamos el análogo a los homomorfismos de grupos: los *homomorfismos de grupos topológicos*.

Definición 3.7. Sean G, G' grupos topológicos. Diremos que $\varphi : G \rightarrow G'$ es homomorfismo de grupos topológicos cuando se trata de una aplicación continua que a su vez es homomorfismo de grupos. Si además existe $\psi : G' \rightarrow G$ homomorfismo de grupos topológicos tal que $\psi \circ \varphi = 1$ y $\varphi \circ \psi = 1$, llamaremos a φ isomorfismo de grupos topológicos.

Directamente de la definición se demuestra la siguiente proposición:

Proposición 3.8. Sea $\varphi : G \rightarrow G'$ un homomorfismo de grupos topológicos. Entonces φ es isomorfismo de grupos topológicos si y solo si φ es homeomorfismo.

Comentábamos en la introducción de esta sección la importancia de los grupos topológicos en los modelos de sistemas físicos. Esto se debe a su capacidad para describir las transformaciones que podrían afectar a sus propiedades. En general, dichas variaciones suelen ser “suaves”, es decir que sus grupos topológicos asociados satisfacen la condición de diferenciabilidad. Hablamos en concreto de los *grupos de Lie*, frecuentemente empleados en Física. Esta noción es un caso especial de las construcciones denominadas *variedades topológicas*.

Diremos que M es variedad topológica de dimensión n cuando se trate de un espacio topológico con la propiedad de ser de Hausdorff, segundo contable (M posee una base contable de abiertos) y localmente euclídeo de dimensión n (todo punto de M tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n). Entonces, un grupo de Lie G se define como una variedad diferenciable (es decir, una variedad topológica dotada de una estructura diferenciable) con estructura de grupo, tal que sus operaciones

$$\cdot : G \times G \rightarrow G, \quad (\cdot)^{-1} : G \rightarrow G$$

son diferenciables. En esta memoria trabajaremos con la vertiente topológica de dichos grupos dejando de lado la diferenciabilidad que los caracteriza, pues no interviene en los resultados que presentaremos.

Los grupos de Lie más usuales en un contexto físico son los grupos unitarios $U(n) := U(n, \mathbb{C})$ y subgrupos cerrados de estos. Estos últimos se corresponden con el grupo ortogonal $O(n) := O(n, \mathbb{R})$, el grupo especial ortogonal $SO(n) := SO(n, \mathbb{R})$ y el grupo especial unitario $SU(n) := SU(n, \mathbb{C})$. Las definiciones específicas de estos grupos pueden encontrarse en [1]. En la Sección 3.3 veremos explícitamente cómo se relacionan algunos de ellos con las simetrías de los medios ordenados.

3.1.2. El Grupo de Transformaciones de un medio ordenado

Los grupos topológicos nos permiten considerar una operación en la estructura de espacio topológico, ¿pero cómo encaja este formalismo matemático en el contexto físico? La respuesta radica en los *grupos de transformaciones topológicas*. No modelizaremos la propiedad física únicamente con un espacio topológico R , además tendremos en cuenta la acción de un grupo topológico sobre este. La elección de dicho grupo no es arbitraria, sus elementos constituirán las posibles transformaciones que podría sufrir el parámetro de orden.

Como veremos al final de esta sección, un cierto tipo de grupos de transformaciones, denominados transitivos, cumplen que su espacio topológico es homeomorfo al cociente de su grupo topológico y un cierto subgrupo cerrado de este. Este resultado es el que adelantábamos en la introducción del capítulo para el espacio del parámetro de orden.

De nuevo, necesitamos establecer diversas nociones así como la terminología que emplearemos. Comenzaremos con la definición de los grupos de transformaciones.

Definición 3.9. *Un grupo de transformaciones topológicas es un triple (G, X, Θ) donde G es un grupo topológico, X es un espacio topológico y $\Theta : G \times X \rightarrow X$ una aplicación continua tal que:*

- (a) $\Theta(e, x) = x$ para todo $x \in X$,
- (b) $\Theta(g, \Theta(h, x)) = \Theta(g \cdot h, x)$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.

El par (X, Θ) recibe el nombre de G -espacio (a la izquierda), mientras que la aplicación Θ se denomina *acción* de G sobre X . Esta es la definición general del concepto de acción que manejábamos en el capítulo anterior (ver Subsección 2.2.3). De aquí en adelante usaremos la notación $\Theta(g, x) := g \cdot x$, siempre que quede claro por el contexto que se trata de la acción. De manera adicional, dados $C \subseteq G$ y $A \subseteq X$ denotaremos $C \cdot A = \{g \cdot x / g \in C, x \in A\}$. Cuando

en particular tengamos $G \cdot A \subseteq A$, con $A \subset X$, diremos que A es G -invariante. Resulta natural trasladar la idea del homeomorfismo L_g , definido anteriormente para grupos topológicos, al caso de los grupos de transformaciones. En efecto, para cualquier elemento g de G existe una aplicación continua $\theta_g : X \rightarrow X$, definida como $\theta_g(x) := g \cdot x$ con $x \in X$. Al cumplir propiedades análogas a las de L_g , es directo comprobar que se trata de un homeomorfismo con $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$.

Las propiedades y resultados que previamente describíamos para los grupos topológicos podemos trasladarlos a los grupos de transformaciones. Al igual que definíamos una relación de equivalencia para los primeros, es posible establecer una para cualquier G -espacio X . Es decir, diremos que x está relacionado con y ($x \sim y$) si existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$, para $x, y \in X$. Análogamente, denotamos por X/G el correspondiente espacio cociente con la topología inducida por la proyección canónica $p : X \rightarrow X/G$. En este caso, llamaremos *espacio de órbitas* a X/G , siendo $[x] = G \cdot x$ la *órbita* de x . La proyección canónica también será continua y abierta. Esto se debe al papel de los homeomorfismos θ_g con $g \in G$, análogo al que realiza L_g con los grupos topológicos.

Por otro lado, la relación binaria para los grupos topológicos nos permite obtener un grupo de transformaciones topológicas por sí misma. En general sabemos que, dado G grupo topológico con H subgrupo, podemos definir el espacio cociente G/H . Este resulta ser un G -espacio con la acción

$$\Theta : G \times G/H \rightarrow G/H, \quad (g, (g'H)) \mapsto g \cdot (g'H) = (g \cdot g')H.$$

Hasta aquí la analogía con los grupos topológicos nos ha permitido introducir intuitivamente la noción de G -espacio. A continuación centraremos nuestro estudio en una nueva noción, las aplicaciones G -equivariantes.

Definición 3.10. Sean X e Y G -espacios. Una aplicación $\varphi : X \rightarrow Y$ se dice G -equivariante cuando es continua y conserva la acción, esto es

$$\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x),$$

para todo $g \in G$ y $x \in X$. Diremos que es homeomorfismo G -equivariante cuando además de aplicación G -equivariante sea homeomorfismo.

A su vez podemos hablar de un subgrupo especial de estos espacios denominado *subgrupo de isotropía*, definido para cada elemento del G -espacio.

Definición 3.11. Sea X un G -espacio y fijamos $x_0 \in X$. Se define el subgrupo de isotropía de G en x_0 como

$$G_{x_0} = \{g \in G / g \cdot x_0 = x_0\}.$$

A partir de ahora supondremos que todo G -espacio es de Hausdorff, hipótesis razonable en el contexto de esta memoria. En este caso, es sencillo demostrar

que G_{x_0} es cerrado en G . Para ello basta definir $\varphi : G \rightarrow X \times X$ aplicación continua tal que $\varphi(g) = (x_0, g \cdot x_0)$. Como X es de Hausdorff, es conocido que $\Delta := \{(x, x) / x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$, concluyendo por la continuidad de φ que $\varphi^{-1}(\Delta) = G_{x_0}$ es cerrado en G .

De las definiciones de subgrupo de isotropía y aplicación G -equivariante se derivan directamente varios resultados. Cuando se tiene que $\varphi : X \rightarrow Y$ es aplicación G -equivariante, automáticamente $G_x \subseteq G_{\varphi(x)}$ para todo x en X . Otro resultado, esencial para caracterizar el espacio del parámetro de orden R , es el que se presenta a continuación.

Proposición 3.12. *Sea X un G -espacio y $x, y \in X$. Si existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$, entonces $G_y = g \cdot G_x \cdot g^{-1}$.*

En efecto, podemos definir el siguiente isomorfismo de grupos, dado por conjugación:

$$\varphi : G_x \rightarrow G_y, \text{ con } \varphi(h) = g \cdot h \cdot g^{-1},$$

donde x, y son elementos de X bajo las condiciones de la proposición. Cuando las hipótesis de la Proposición 3.12 se cumplen para todos los elementos de un G -espacio X , diremos que la acción es *transitiva*. Esto significa que para todo x, y en X existe un elemento g de G tal que $y = g \cdot x$, y por tanto todas las órbitas están en la misma clase de conjugación. A X lo denominaremos *G -espacio homogéneo* en ese caso.

Este tipo de espacios tiene interesante consecuencias. De especial interés para esta memoria es el Teorema 3.13 que estableceremos a continuación. Para ello es necesario introducir la propiedad de ser *polaco*. Se dice que un espacio topológico X es polaco cuando es separable (posee un conjunto denso numerable) y completamente metrizable (puede definirse una métrica completa sobre él). Dicha característica es extensible a un grupo de transformaciones (G, X, Θ) , exigiendo que tanto X como G sean espacios polacos. Unido a la transitividad, se tiene el teorema enunciado por E. G. Effros [6] y G. S. Ungar [20]: si (G, X, Θ) es un grupo de transformaciones transitivo y polaco, para cada $x \in X$ la aplicación $\phi_x : G/G_x \rightarrow X$ definida por $gG_x \mapsto g \cdot x$ es un homeomorfismo. El Teorema 3.13 se trata de un caso particular de este, como veremos en la demostración.

Teorema 3.13. *Sea X un G -espacio homogéneo, con X y G variedades topológicas. Entonces, para cada $x \in X$ existe un homeomorfismo G -equivariante $\varphi : G/G_x \xrightarrow{\cong} X$, definido por $\varphi(gG_x) := g \cdot x$.*

Demostración. Para determinar la G -equivariancia es suficiente remitirnos a las definiciones de subgrupo de isotropía y conjunto cociente. La existencia del homeomorfismo requiere de una prueba más detallada, basada en el Teorema de Effros-Ungar previamente mencionado. Partimos de un grupo de transformaciones transitivo; bastará ver que además es polaco, es decir que X y G lo son. En particular, se cumple que todo espacio métrico localmente compacto (todo

punto del espacio admite una base de entornos compactos) y separable es polaco [20]. Las variedades topológicas se demuestra directamente que son localmente compactas. Adicionalmente serán separables: tomando un punto de cada abierto de la base numerable, podemos formar un subconjunto numerable que interseca a todos los abiertos del espacio. El Teorema de Metrización de Urysohn (ver ref. [14]) garantiza que son metrizable, concluyendo la prueba. ■

Los grupos de transformaciones topológicas asociados al parámetro de orden cumplen la transitividad de la acción para la gran mayoría de los medios ordenados. Por ello, no solo podremos describirlos mediante un triple (G, R, Θ) , además tendremos que R es un G -espacio homogéneo. Usualmente R y G son variedades topológicas por lo que, como consecuencia del Teorema 3.13, concluimos que

$$R \cong G/H$$

donde H será el subgrupo de isotropía de G , único salvo conjugación (ver la Proposición 3.12). En los ejemplos de la Sección 3.3 veremos explícitamente la conexión entre los grupos de transformaciones y las simetrías del parámetro de orden, aclarando por completo el formalismo.

Como curiosidad, incluimos este último resultado bajo una hipótesis alternativa. Sin más que considerar G compacto es posible simplificar significativamente la demostración, si bien preferiremos la condición de variedad topológica no necesariamente compacta al ser más general en nuestro contexto.

Proposición 3.14. *Sea X un G -espacio homogéneo. Si G es compacto, entonces existe un homeomorfismo G -equivariante $\varphi : G/G_x \rightarrow X$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Veamos que φ es homeomorfismo G -equivariante. Como en la prueba anterior, la definición de subgrupo de isotropía y conjunto cociente nos permiten deducir que se tiene una aplicación continua, biyectiva y G -equivariante. Veamos que se trata de un homeomorfismo empleando la hipótesis de compacidad. Al ser G compacto, también lo será el cociente G/G_x . Entonces, tenemos una aplicación continua φ definida de un espacio compacto a uno de Hausdorff, por lo que es cerrada. Concluimos que se trata de un homeomorfismo. ■

3.2. El Teorema Fundamental de los medios ordenados

Una vez establecido el espacio del parámetro de orden, procedemos al tercer paso de la clasificación topológica de los defectos: calcular el grupo de homotopía correspondiente. El Teorema Fundamental de los medios ordenados, gracias al modelo matemático que hemos determinado para dicho parámetro, nos

permitirá realizar ese cálculo con éxito en numerosas ocasiones. Desarrollaremos toda la base teórica necesaria para introducir este teorema a lo largo de la sección. Tras su presentación, concluiremos con un análisis más detallado para los casos del π_1 y π_2 .

3.2.1. Grupos relativos de homotopía

Para poder presentar el Teorema Fundamental precisamos de una última estructura homotópica, los grupos relativos de homotopía. Consisten en una generalización de los grupos de homotopía, tomando un subespacio distinguido adicional aparte del punto base usual. El procedimiento que seguiremos será análogo al del Capítulo 2. Mientras que en él introducíamos el concepto de pareja de espacios, ahora extenderemos esa noción a *triples*.

Definición 3.15. *Un triple de espacios consiste en (X, A, B) , donde X es espacio topológico y $B \subseteq A \subseteq X$ son subespacios.*

Podríamos generalizar esta construcción a una n -tupla de espacios y subespacios; no habría variación alguna en el proceso a seguir, si bien no sería de especial interés para este trabajo. Nos conformaremos pues, con esta nueva estructura de triples, y con un caso particular de ellos, los pares punteados.

A su vez extendemos la noción de aplicación continua. Una aplicación $f : (X, A, B) \rightarrow (X', A', B')$ se dice *continua de triples* cuando se trata de una aplicación continua $f : X \rightarrow X'$ tal que $f(A) \subseteq A'$ y $f(B) \subseteq B'$. Igualmente, podemos definir la *homotopía de triples*:

Definición 3.16. *Dadas $f, g : (X, A, B) \rightarrow (X', A', B')$ aplicaciones continuas de triples, diremos que son homótopas ($f \simeq g$) si existe una aplicación $H : (X \times I, A \times I, B \times I) \rightarrow (X', A', B')$ continua de triples tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. La aplicación H recibe el nombre de homotopía de triples.*

La relación \simeq es una relación de equivalencia, lo que nos permite definir el corchete de homotopía para triples de espacios:

$$[X, A, B; X', A', B'] := C(X, A, B; X', A', B') / \simeq .$$

Además se prueba fácilmente su compatibilidad con la composición de aplicaciones continuas de triples.

Hasta ahora hemos realizado una perfecta analogía con las parejas de espacios. El lector no debe extrañarse entonces con la siguiente generalización del formalismo de los espacios punteados. Denominaremos *par* o *pareja punteada* al triple (X, A, x_0) , con x_0 punto de A . Las aplicaciones continuas de triple sobre estos espacios pasan a ser de la forma $f : (X, A, x_0) \rightarrow (X', A', x'_0)$, conocidas como *aplicaciones de parejas punteadas*.

Esta construcción nos permite generalizar a su vez, la noción de grupo de homotopía. Como adelantábamos al principio, ya no tendremos en cuenta solo un punto distinguido del espacio, también un subespacio de él.

Definición 3.17. *Sea (X, A, x_0) un par punteado y sea $n \geq 1$. Se define el conjunto*

$$\pi_n(X, A, x_0) := [I^n, \partial I^n, J^{n-1}; X, A, x_0],$$

donde denotamos $J^{n-1} := (I^{n-1} \times \{0\}) \cup (\partial I^{n-1} \times I) \subseteq \partial I^n$.

En particular, si $A = \{x_0\}$ entonces recuperamos los grupos de homotopía:

$$\pi_n(X, A, x_0) = \pi_n(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_n(X, x_0).$$

El subconjunto J^{n-1} apareció previamente en la Sección 2.2.1. Recordemos que en ella demostrábamos que J^{n-1} es un retracto de I^n , ver la Figura 2.2. Ahora constituye uno de los subespacios distinguidos del n -cubo I^n ; esto nos permitirá extender todas las nociones relativas a los grupos de homotopía, como veremos a continuación.

A priori solo podemos decir que $\pi_n(X, A, x_0)$ es un conjunto punteado, cuyo punto base es la clase $[\varepsilon_{x_0}]$ de la aplicación constante en x_0 . Si tomamos $n \geq 2$, es posible generalizar las definiciones de los n -lazos cúbicos, de su operación y del inverso a aplicaciones continuas de triples. Esto permite establecer de nuevo una operación inducida

$$[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta],$$

para dos n -lazos cúbicos cualesquiera $\alpha, \beta : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$. La demostración del siguiente resultado es completamente análoga al caso absoluto.

Proposición 3.18. *Para $n \geq 2$, $\pi_n(X, A, x_0)$ tiene estructura de grupo. Se denomina n -grupo relativo de homotopía de (X, A, x_0) .*

Nota 3.4. Nótese que $\pi_1(X, A, x_0)$ es un conjunto punteado, pues no tiene definida una operación para un A general. Esto es, el producto de dos 1-lazos cúbicos $\alpha, \beta : (I, \{0, 1\}, 0) \rightarrow (X, A, x_0)$ no está bien definido, pues $\beta(0) = x_0$ mientras que $\alpha(1) \in A$ no tiene que coincidir necesariamente. Solo podremos garantizar que es grupo para $A = \{x_0\}$, recuperando la definición de grupo fundamental.

Nota 3.5. Para $n \geq 3$, $\pi_n(X, A, x_0)$ es abeliano. Nos remitimos a la demostración del Teorema 2.8. En este caso, tendremos $\alpha, \beta : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$. Se comprueba directamente que $\alpha *_i \beta$ está bien definida para $i = 1, 2, \dots, n - 1$. La inexistencia del producto $\alpha *_n \beta$ para este caso nos indica que solo existe una operación posible para $\pi_2(X, A, x_0)$; recordemos que precisábamos de al menos dos para proceder con la demostración. Luego solo será válida para $n \geq 3$.

Introducimos un resultado de especial relevancia para futuras demostraciones.

Lema 3.19. *Sea $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$, con $n \geq 1$. Entonces $[f] = [\varepsilon_{x_0}]$ si y solo si existe $g : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ con $g(I^n) \subseteq A$ y $f \simeq g$.*

Demostración. Comencemos con la implicación hacia la izquierda. Por hipótesis, $f \simeq \varepsilon_{x_0}$. Concluimos identificando g con la aplicación constante $\varepsilon_{x_0} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$, pues $\varepsilon_{x_0}(I^n) = \{x_0\} \subseteq A$. En el otro sentido, partimos de $f \simeq g$ con $g(I^n) \subseteq A$. Esto nos permite construir una homotopía de triples

$$H : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$$

de la forma $H(t_1, \dots, t_n, t) := g(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n(1-t))$. Se comprueba fácilmente que $H : g \simeq \varepsilon_{x_0}$, como procedíamos en el capítulo anterior. Luego $[f] = [\varepsilon_{x_0}]$. ■

Como ocurría para los n -grupos absolutos de homotopía, aparece un homomorfismo inducido entre los n -grupos relativos de homotopía. Dada una aplicación continua de triples $f : (X, A, x_0) \rightarrow (X', A', x'_0)$ se induce una aplicación $\pi_n(f) : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(X', A', x'_0)$ siendo $\pi_n(f)([\alpha]) := [f \circ \alpha]$. Se trata de una aplicación punteada para $n = 1$ y de un homomorfismo de grupos para $n \geq 2$. Asimismo se demuestra que es compatible con la composición de aplicaciones y que cumple la propiedad $\pi_n(id_{(X,A,x_0)}) = id_{\pi_n(X,A,x_0)}$.

Además, es posible introducir un homomorfismo adicional exclusivo de las parejas punteadas: el *homomorfismo de conexión*.

Definición 3.20. *Sean (X, A, x_0) una pareja punteada y $n \geq 2$. Definimos el homomorfismo de conexión $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$ como se muestra a continuación: Dada $[\alpha] \in \pi_n(X, A, x_0)$, donde $\alpha : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ es un representante, restringimos la aplicación α a $I^{n-1} \times \{1\}$, de manera que obtenemos $\hat{\alpha} : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$ tal que $\hat{\alpha}(t_1, \dots, t_{n-1}) := \alpha(t_1, \dots, t_{n-1}, 1)$. Entonces:*

$$\partial([\alpha]) := [\hat{\alpha}].$$

Al igual que con el homomorfismo inducido, solo se tratará de un homomorfismo de grupos para $n \geq 2$. Para el caso $n = 1$ también está definido y de igual forma, tratándose de una aplicación punteada al no poder garantizar en principio que $\pi_0(A, x_0)$ tenga estructura de grupo. Además, para $f : (X, A, x_0) \rightarrow (X', A', x'_0)$ continua de pares punteados se verifica para $n \geq 1$ la relación $\pi_n(f) \circ \partial = \partial \circ \pi_n(f|_A)$.

3.2.2. Sucesión exacta

Nos interesa conocer las posibles relaciones entre los grupos absolutos de homotopía y los grupos relativos de homotopía. Para agrupar toda esta información de forma concisa recurriremos a las *sucesiones exactas*. Dada la sucesión

de grupos y homomorfismos

$$G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K$$

diremos que es *exacta* en H si $\text{Im} f = \ker g$. Esta noción se puede trasladar sin dificultad a los conjuntos punteados.

Definición 3.21. *Se dice que la sucesión*

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$$

de conjuntos y aplicaciones punteadas es exacta en (Y, y_0) si $\text{Im} f = \ker g$, donde $\ker g = g^{-1}(\{z_0\})$. A su vez, diremos que la sucesión

$$\cdots \rightarrow (X_{n-1}, x_{n-1}) \rightarrow (X_n, x_n) \rightarrow (X_{n+1}, x_{n+1}) \rightarrow \cdots$$

es exacta si lo es para todo par (X_n, x_n) .

Esta noción generaliza claramente a la dada para grupos, tomando el neutro como punto base. Para un par punteado de espacios (X, A, x_0) , podemos definir dos inclusiones diferentes $i : (A, \{x_0\}, x_0) \hookrightarrow (X, \{x_0\}, x_0)$, $j : (X, \{x_0\}, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$. Denotaremos a las correspondientes aplicaciones punteadas inducidas como

$$\pi_n(i) : \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0), \quad \pi_n(j) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0).$$

Obsérvese que serán homomorfismos de grupos para $n \geq 1$ en el caso de $\pi_n(i)$ y para $n \geq 2$ cuando se trate de $\pi_n(j)$, debido a la intervención del n -grupo relativo de homotopía. Estos casos los analizaremos en detalle en la Subsección 3.2.4, pues precisaremos de consideraciones adicionales.

Con estas inclusiones inducidas en mente, junto con la noción de homomorfismo de conexión, obtenemos la siguiente sucesión exacta:

Teorema 3.22. *Sea (X, A, x_0) un par punteado. Entonces existe una sucesión exacta larga natural:*

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\pi_n(j)} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \cdots \\ \rightarrow \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\pi_1(j)} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(X, x_0). \end{aligned}$$

Recibe el nombre de sucesión exacta de homotopía del par punteado (X, A, x_0) .

Demostración. Debemos demostrar la exactitud en $\pi_n(A, x_0)$, $\pi_n(X, A, x_0)$ y $\pi_n(X, x_0)$. Para el primer caso, veamos que $\text{Im}(\partial) = \ker(\pi_n(i))$. Para el contenido \subseteq , construimos la aplicación $H(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) := \alpha(t_1, \dots, t_n, t_{n+1})$, siendo $[\alpha] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$. Se prueba que es una homotopía de pares $H : i \circ \hat{\alpha} \simeq \varepsilon_{x_0}$. Para demostrar el otro contenido, existe una aplicación continua de pares F tal

que $F(t_1, \dots, t_n, 0) = x_0$ y $F(t_1, \dots, t_n, 1) = \alpha(t_1, \dots, t_n)$, con $[\alpha] \in \pi_n(A, x_0)$. Entonces $[F] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$, concluyendo esta primera parte. La siguiente exactitud requiere de $\text{Im}(\pi_n(j)) = \ker(\partial)$. Hacia la derecha se deduce trivialmente de la definición de ∂ . El otro contenido requiere de $K := H' \circ r$, siendo $r : I^{n+1} \rightarrow J^n$ una retracción y $H' : (I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I) \rightarrow X$ definida por:

$$\begin{aligned} H'((t_1, \dots, t_n, 0) &:= \alpha(t_1, \dots, t_n), \text{ con } [\alpha] \in \pi_n(X, A, x_0); \\ H'(t_1, \dots, 1, t) &:= H(t_1, \dots, t_{n-1}, t), \text{ con } H : \hat{\alpha} \simeq \varepsilon_{x_0} \text{ homotopía de pares}; \\ H'((t_1, \dots, t_n, 1) &:= x_0. \end{aligned}$$

Entonces $K : \alpha \simeq j \circ K(-, 1)$ es la homotopía de triples buscada, los detalles los dejamos para el lector. La última prueba que necesitamos es $\text{Im}(\pi_n(i)) = \ker(\pi_n(j))$. El contenido hacia la derecha se deduce directamente del Lema 3.19. Para el otro nos construimos, a partir de la homotopía de triples $F : \alpha \simeq \varepsilon_{x_0}$, la aplicación:

$$G(t_1, \dots, t_n, t) := \begin{cases} F(t_1, \dots, t_{n-1}, 0, 2t_n), & 0 \leq t_n \leq t/2 \\ F(t_1, \dots, t_{n-1}, (2t_n - t)/(2 - t), t), & t/2 \leq t_n \leq 1. \end{cases}$$

Se trata de una homotopía de pares $G : \alpha \simeq i \circ G(-, 1)$. Además $G(I^n \times \{1\}) \subseteq A$, concluyendo la demostración. ■

Nota 3.6. Nótese que la parte final de la sucesión exacta,

$$\pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(X, x_0)$$

está formada en general por conjuntos punteados, no grupos, y por tanto debemos tener cuidado de recordar que no se tratarán de homomorfismos de grupos.

3.2.3. Fibraciones

Precisamos de una última herramienta técnica para alcanzar nuestro objetivo. Hablamos de la noción de *fibración*, generalmente estudiada en el ámbito de la Topología Algebraica y la Geometría Diferencial. Nos limitaremos en este trabajo a considerar sus implicaciones en la primera, más concretamente en el contexto en que nos hallamos, pues su estudio en profundidad constituiría de por sí una memoria.

Definición 3.23. Sean X espacio topológico y $\rho : E \rightarrow B$ una aplicación continua. Se dice que ρ verifica la Propiedad de Elevación de Homotopía (PEH) respecto de X si para todo diagrama conmutativo de aplicaciones continuas

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow & & \downarrow \rho \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & B
 \end{array}$$

existe una aplicación $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$ continua tal que $\tilde{F}|_{X \times \{0\}} = f$ y $\rho \circ \tilde{F} = F$.

Si $\rho : E \rightarrow B$ verifica la PEH respecto de cualquier espacio topológico, diremos que ρ es una *fibración de Hurewicz*. A E se le denomina *espacio total* y a B *espacio base*. Además si $b \in B$, el conjunto $\rho^{-1}(\{b\})$ recibe el nombre de *fibra* de ρ en el punto b . Toda proyección recubridora es un caso particular de fibración de Hurewicz, como se demuestra en [19, pág. 67].

Una construcción conectada con las fibraciones de Hurewicz es el denominado *fibrado*. Un fibrado con fibra F consiste en una cuaterna (E, B, F, ρ) donde E, B, F son espacios topológicos y $\rho : E \rightarrow B$ aplicación continua y sobreyectiva tal que, para todo b de B , existe un entorno abierto U de b y existe un homeomorfismo $\varphi_U : U \times F \xrightarrow{\cong} \rho^{-1}(U)$ que cumple $\rho \circ \varphi_U = pr_1$, siendo pr_1 la proyección sobre el primer factor. Obsérvese que ρ se comporta localmente como una proyección, pues

$$\rho^{-1}(\{b\}) \cong \{b\} \times F \cong F.$$

Bajo ciertas condiciones topológicas sobre el espacio base es posible establecer una relación entre los fibrados y las fibraciones de Hurewicz. Diremos que un espacio topológico X es *paracompacto* si todo recubrimiento por abiertos admite un refinamiento localmente finito. Para más detalles de esta definición, recomendamos [14]. En particular, todas las variedades topológicas poseen esta propiedad, de manera que el siguiente resultado encaja perfectamente en el contexto de esta memoria. Una versión completa de su demostración se puede encontrar en [19, pág. 96].

Teorema 3.24. *Si (E, B, F, ρ) es un fibrado cuyo espacio base B es de Hausdorff y paracompacto, entonces $\rho : E \rightarrow B$ es una fibración de Hurewicz.*

Para nuestros propósitos sin embargo, podemos debilitar un poco las condiciones de la definición de fibración de Hurewicz. En este sentido podemos considerar *fibraciones de Serre*, esto es una aplicación continua $\rho : E \rightarrow B$ tal que verifica la PEH respecto de cada n -cubo I^n , $n \geq 0$. Obviamente toda aplicación de Hurewicz es fibración de Serre.

Si bien ya tenemos todos los ingredientes necesarios para presentar el Teorema Fundamental de los medios ordenados, carecemos de algunos pasos de su receta. Tan importantes como las nociones que intervienen en su enunciado son los resultados que nos permiten demostrarlo. Este será el propósito futuro de los resultados técnicos que presentaremos a continuación.

Recordemos que un *homeomorfismo de parejas* $(X, A) \cong (Y, B)$ consiste en una aplicación de parejas $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ tal que existe $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$ continua de parejas cumpliendo $f \circ g = 1_Y$ y $g \circ f = 1_X$. Nótese que, en particular, $f : X \rightarrow Y$ y la restricción $f|_A : A \rightarrow B$ son homeomorfismos. En relación a este concepto se tiene el siguiente lema:

Lema 3.25. *Sea $\rho : E \rightarrow B$ una aplicación continua con la PEH respecto de un espacio X . Sea (Y, B) par tal que existe un homeomorfismo de parejas $(Y, B) \cong (X \times I, X \times \{0\})$. Entonces existe una aplicación $F : Y \rightarrow E$ continua tal $F|_B = g$, $\rho \circ F = f$, dándose el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{g} & E \\
 \downarrow & \nearrow F & \downarrow \rho \\
 Y & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Demostración. Sea $\Lambda : (X \times I, X \times \{0\}) \rightarrow (Y, B)$ un homeomorfismo de parejas. En particular, $\Lambda : X \times I \rightarrow Y$ y la restricción $\lambda := \Lambda|_{X \times \{0\}}$ son homeomorfismos. Como ρ cumple la PEH tenemos el siguiente diagrama conmutativo de aplicaciones continuas:

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times \{0\} & \xrightarrow{\lambda} & B & \xrightarrow{g} & E \\
 \downarrow & & & \nearrow \tilde{G} & \downarrow \rho \\
 X \times I & \xrightarrow{\Lambda} & Y & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Definimos $F := \tilde{G} \circ \Lambda^{-1} : Y \rightarrow E$ y consideramos la inclusión $i_B : B \hookrightarrow Y$. De la conmutatividad del diagrama se deducen las propiedades buscadas para F . ■

Es posible aplicar este resultado al n -cubo. Para ello necesitamos del homeomorfismo de pares que establece T. t. Dieck en [5, pág. 36],

$$(D^n \times I, (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)) \cong (D^n \times I, D^n \times \{0\}).$$

Como $I^n \cong D^n$ y $S^{n-1} \cong \partial I^n$, es directo comprobar que dicho homeomorfismo implica que $(I^n \times I, I^n \times \{0\}) \cong (I^n \times I, J^n)$. Como consecuencia se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.26. *Sea $\rho : E \rightarrow B$ una aplicación continua. Entonces, ρ es fibración de Serre si y solo si para cada $n \geq 0$ y cada diagrama conmutativo de aplicaciones continuas*

$$\begin{array}{ccc}
 J^n & \xrightarrow{g} & E \\
 \downarrow & & \downarrow \rho \\
 I^n \times I & \xrightarrow{G} & B
 \end{array}$$

existe $\tilde{G} : I^n \times I \rightarrow E$ aplicación continua tal que $\tilde{G}|_{J^n} = g$ y $\rho \circ \tilde{G} = G$.

Por otro lado tenemos el siguiente resultado para las fibraciones de Serre.

Lema 3.27. *Sea $\rho : E \rightarrow B$ fibración de Serre. Consideramos $B_0 \subseteq B$ y E_0 fibra de B_0 , eligiendo $b_0 \in B_0$ y $e_0 \in \rho^{-1}(\{b_0\}) \subseteq E_0$. Entonces ρ induce una biyección $\pi_n(\rho) : \pi_n(E, E_0, e_0) \rightarrow \pi_n(B, B_0, b_0)$, para cada $n \geq 1$.*

Demostración. Comenzamos comprobando la sobreyectividad de $\pi_n(\rho)$. Supongamos $[\alpha] \in \pi_n(B, B_0, b_0)$. Como ρ es fibración de Serre, el Corolario 3.26 garantiza la existencia de una aplicación continua $\tilde{\alpha} : I^n \rightarrow E$ tal que $\tilde{\alpha}|_{J^{n-1}} = C_{e_0}$ y $\rho \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Es fácil ver que $\tilde{\alpha} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, E_0, e_0)$ es aplicación continua de triples. Luego existe $[\tilde{\alpha}] \in \pi_n(E, E_0, e_0)$ tal que $\pi_n(\rho)([\tilde{\alpha}]) = [\alpha]$. Para la inyectividad partimos de $[\alpha], [\beta] \in \pi_n(B, B_0, b_0)$ tales que $\pi_n(\rho)([\alpha]) = \pi_n(\rho)([\beta])$, esto es existe una homotopía $H : \rho \circ \alpha \simeq \rho \circ \beta$. A su vez podemos definir una aplicación $G : T \rightarrow E$, con $T = (I^n \times \partial I) \cup (J^{n-1} \times I)$. Esta será continua debido al Lema de Continuidad 2.1. Teniendo en cuenta la cadena de homeomorfismos de parejas

$$(I^n \times I, T) \cong (I^n \times I, J^n) \cong (I^n \times I, I^n \times \{0\}),$$

podemos aplicar el Lema 3.25. En consecuencia, tenemos la aplicación continua $\tilde{H} : I^n \times I \rightarrow E$ cumpliendo $\tilde{H}|_T = G$ y $\rho \circ \tilde{H} = H$. Es una comprobación directa ver que se trata de una aplicación continua de triples, que constituye una homotopía de triples $\tilde{H} : \alpha \simeq \beta$. ■

De este lema se deduce trivialmente el siguiente resultado para pares puntuados.

Corolario 3.28. *Sean $\rho : E \rightarrow B$ fibración de Serre, $b_0 \in B$ y $e_0 \in F = \rho^{-1}(\{b_0\})$. Entonces, para cada $n \geq 1$, existe una biyección*

$$\pi_n(\rho) : \pi_n(E, F, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0).$$

Nota 3.7. Obsérvese que en particular para $n \geq 2$ será isomorfismo. La aplicación inversa $\pi_n(\rho)^{-1} : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_n(E, F, e_0)$ viene dada por la siguiente construcción. Dada $[\alpha] \in \pi_n(B, b_0)$, con $\alpha : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$ un representante, se tiene por el Corolario 3.26:

$$\begin{array}{ccc}
 J^{n-1} & \xrightarrow{C_{e_0}} & E \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow \rho \\
 I^n & \xrightarrow{\alpha} & B
 \end{array}$$

Nótese que $\tilde{\alpha} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, e_0)$ es aplicación continua de triples, siendo $\pi_n(\rho)^{-1}([\alpha]) = [\tilde{\alpha}]$. La demostración de que es una aplicación bien definida y coincide con la inversa de $\pi_n(\rho)$ está implícita en la prueba del Lema 3.27.

Estos últimos resultados técnicos nos permiten desarrollar el siguiente teorema, concluyendo así la receta que buscábamos. Su relevancia se debe a la conexión que establece entre las fibricaciones de Serre y la sucesión exacta estudiada previamente (ver Subsección 3.2.2).

Teorema 3.29. *Sea $\rho : E \rightarrow B$ una fibricación de Serre, $b_0 \in B$ y $e_0 \in F = \rho^{-1}(\{b_0\})$. Entonces existe una sucesión exacta*

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_n(F, e_0) &\xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{\pi_n(\rho)} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \rightarrow \cdots \\ &\rightarrow \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{\pi_0(\rho)} \pi_0(B, b_0). \end{aligned}$$

Demostración. Partimos de la sucesión exacta de homotopía del par punteado (E, F, e_0) . Por el Corolario 3.28 anterior podemos intercambiar los grupos relativos de homotopía $\pi_n(E, F, e_0)$ por los grupos de homotopía de la dimensión correspondiente $\pi_n(B, n_0)$. Las aplicaciones inducidas $\pi_n(i)$ y $\pi_n(\rho)$ se mantienen, pero es necesario definir un nuevo homomorfismo de conexión. Se demuestra por el Corolario 3.26 que $\bar{\partial} : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, e_0)$ con $\bar{\partial} = \partial \circ \pi_n(\rho)^{-1}$ es el homomorfismo buscado, siendo ∂ el homomorfismo de conexión de la sucesión original. Por abuso del lenguaje usamos la misma notación $\partial : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, e_0)$. ■

Ahora sí estamos equipados para proceder a introducir el deseado Teorema Fundamental de los medios ordenados, pieza importante en el éxito de nuestra clasificación topológica de defectos. Entenderemos su relevancia en los ejemplos de la Sección 3.3.

Teorema 3.30 (Teorema Fundamental). *Sea H subgrupo cerrado de un grupo de Lie G tal que se verifica la condición $\pi_{n-1}(G, e) = 0 = \pi_n(G, e)$, para algún $n \geq 1$. Entonces*

$$\pi_n(G/H, *) \cong \pi_{n-1}(H, e).$$

Demostración. Bajo estas condiciones la cuaterna $(G, G/H, H, p)$ es un fibrado, denominado *fibrado principal* [19, pág. 91], donde $p : G \rightarrow G/H$ es la proyección canónica. Nótese que en particular G/H es variedad topológica, como se demuestra en [2, pág. 33]. Por el Teorema 3.24, la proyección p es una fibricación de Hurewicz, y por tanto de Serre. Aplicando el Teorema 3.29 se obtiene la sucesión exacta

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_n(H, e) &\xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(G, e) \xrightarrow{\pi_n(\rho)} \pi_n(G/H, *) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(H, e) \rightarrow \cdots \\ &\rightarrow \pi_1(G/H, *) \xrightarrow{\partial} \pi_0(H, e) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(G, e) \xrightarrow{\pi_0(\rho)} \pi_0(G/H, *), \end{aligned}$$

donde $*$ es la clase de equivalencia en G/H de cualquier elemento de H . Siempre que $n > 1$, la condición $\pi_{n-1}(G, e) = 0 = \pi_n(G, e)$ implica por exactitud la biyectividad del homomorfismo de conexión ∂ , concluyendo la demostración para estos valores de n . Sin embargo, no podemos garantizar lo mismo a priori para $n = 1$, puesto que $\partial : \pi_1(G/H, *) \rightarrow \pi_0(H, e_0)$ no es homomorfismo de grupos en general. Veamos que en este caso sí que lo es:

Sabemos que $\pi_1(G/H, *)$ es grupo por la Proposición 2.7. Al ser G grupo de Lie H hereda esa misma estructura, siendo $\pi_0(H, e)$ grupo topológico también (ver Nota 3.3). Por otro lado, la aplicación ∂ cuando $n = 1$ viene dada por $\partial([\alpha]) := [\tilde{\alpha}(1)]$, con $[\alpha] \in \pi_1(G/H, *)$. Esta definición se deduce del Corolario 3.26 para $n = 0$, siendo $\tilde{G} = \tilde{\alpha}$. Faltaría comprobar que se trata de un homomorfismo de grupos para concluir la demostración. Dadas $[\alpha_1], [\alpha_2] \in \pi_1(G/H, *)$, tenemos $\partial([\alpha_i]) = [\tilde{\alpha}_i(1)]$, con $i = 1, 2$. Si consideramos el camino producto $f = \alpha_1 * \alpha_2$, como consecuencia del Corolario 3.26 existe $\tilde{f} : I \rightarrow G$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
 \{0\} & \xrightarrow{C_e} & G \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \rho \\
 I & \xrightarrow{f} & G/H
 \end{array}$$

Definimos un nuevo camino en G , $\beta := \tilde{\alpha}_1(1) \cdot \tilde{\alpha}_2$, con $\beta(0) = \tilde{\alpha}_1(1)$. Se comprueba directamente por las propiedades de este camino que $\tilde{f} = \tilde{\alpha}_1 * \beta$. Concluimos que $\partial([\tilde{\alpha}_1] \cdot [\tilde{\alpha}_2]) = [\beta(1)] = [\tilde{\alpha}_1(1) \cdot \tilde{\alpha}_2(1)] = \partial([\tilde{\alpha}_1]) \cdot \partial([\tilde{\alpha}_2])$. ■

Recordemos que bajo condiciones poco restrictivas $R \cong G/H$, con G grupo de Lie y H el subgrupo de isotropía de un cierto elemento $x \in G$ fijado. El Teorema Fundamental de los medios ordenados nos permitirá en general simplificar el cálculo de $\pi_n(R, *)$, siempre que se satisfagan las hipótesis. Esto ocurre para un gran número de defectos y sistemas, en especial cuando trabajamos con dimensiones bajas como estudiaremos en el próximo apartado.

3.2.4. El Teorema Fundamental en dimensiones bajas

Una vez demostrado el Teorema Fundamental de los medios ordenados para un n general, analizaremos cuándo podemos garantizar la hipótesis $\pi_{n-1}(G, e) = 0 = \pi_n(G, e)$ para los casos de menor dimensión. En general, muchos de los defectos habituales en los sistemas físicos pueden describirse empleando $n = 1, 2$, si bien defectos más complejos conceptualmente suelen requerir de dimensiones superiores. Es por ello que merecen una mención especial dentro de esta memoria y constituyen el eje central para N. D. Mermin en [12]. En la próxima sección incluiremos algunos ejemplos explícitos de ambos casos.

Recordemos nuestras suposiciones para el espacio del parámetro de orden: le asociamos un grupo de transformaciones transitivo (G, R, Θ) con G grupo de Lie y R variedad topológica. Comenzamos la discusión detallada para $n = 1$.

Corolario 3.31. *Dado H subgrupo cerrado de un grupo de Lie G simplemente conexo, se tiene que $\pi_1(G/H, *) \cong \pi_0(H, e)$.*

¿Para qué medios ordenados es posible garantizar las hipótesis? Veremos que se darán en todos, sin excepción. La respuesta se encuentra en una herramienta vista en el Grado de Matemáticas: los *espacios recubridores*. De entre todos los espacios recubridores de G , aquel que es simplemente conexo se denomina *el recubridor universal* (\tilde{G}, ρ) , cumpliendo la propiedad de ser único salvo homeomorfismo. Este espacio recubridor tan especial no siempre existe, si bien hay condiciones que garantizan su existencia recogidas en numerosas referencias (por ejemplo [9]). En el caso de las variedades topológicas (como G), es condición suficiente que sean conexas por caminos (o equivalentemente, conexas). Al tratarse de una hipótesis usual en los grupos de Lie empleados en Física, no supone una pérdida de generalidad en nuestro contexto.

Sabemos por tanto que siempre existe \tilde{G} para el grupo de transformaciones del parámetro de orden, ¿pero cómo se traduce esto en nuestro procedimiento? Empleando el Teorema de Elevación general [9, pág. 176], es un simple ejercicio de cálculo ver que el recubridor universal de un grupo topológico hereda dicha estructura. Es más, el recubridor universal de un grupo de Lie es un grupo de Lie (para ver este hecho, véase por ejemplo [1]). Como consecuencia, se deduce que R es un \tilde{G} -espacio con la acción $\tilde{\Theta} = \Theta \circ (\rho \times 1_R)$. Concretamente, X será un espacio \tilde{G} -homogéneo. Las implicaciones de este último resultado son asombrosas: podemos sustituir el grupo de transformaciones originalmente establecido como modelo por $(\tilde{G}, R, \tilde{\Theta})$, de manera que toda la teoría desarrollada para G se traslada al recubridor universal. En efecto, se cumple

$$R \cong \tilde{G}/\tilde{H},$$

donde \tilde{H} es el subgrupo de isotropía asociado a un elemento fijo $\tilde{g} \in \tilde{G}$. Concluimos por el Teorema Fundamental para $n = 1$ que:

$$\pi_1(R, *) \cong \pi_0(\tilde{H}, \tilde{e}) = \tilde{H}/\tilde{H}_0,$$

siendo \tilde{H}_0 la componente conexa por caminos del elemento neutro de \tilde{H} .

Procedemos a estudiar las hipótesis del Teorema Fundamental para $n = 2$.

Corolario 3.32. *Dado H subgrupo cerrado de un grupo de Lie G simplemente conexo. Entonces $\pi_2(G/H, *) \cong \pi_1(H, e)$.*

Demostración. Por definición, $\pi_1(G, e) = 0$, por lo que debemos centrarnos en la condición $\pi_2(G, e) = 0$. E. Cartan demuestra en [4] que todo grupo de Lie G compacto y conexo siempre cumple $\pi_2(G, e) = 0$. No obstante, nos interesa generalizar este resultado para ser lo menos restrictivos posibles, pues en ningún momento asumimos compacidad. Para ello es necesario el siguiente teorema, enunciado por A. Malcev [10] y K. Iwasawa [7]: cualquier grupo de Lie G conexo es homeomorfo al producto topológico $K \times \mathbb{R}^m$, donde K es el subgrupo compacto maximal de G (que es conexo) y \mathbb{R}^m es un espacio euclídeo de dimensión m . En particular, K es grupo de Lie como consecuencia del conocido Teorema de Cartan [3], que establece que todo subgrupo cerrado de un grupo de Lie hereda esta estructura. Entonces se tiene:

$$\pi_2(G, *) \cong \pi_2(K \times \mathbb{R}^m, *) \cong \pi_2(K, *) \times \pi_2(\mathbb{R}^m, *),$$

donde el último homeomorfismo se demuestra en el capítulo anterior (ver Teorema 2.11). Todo espacio euclídeo es contráctil; además, el resultado inicial de Cartan que mencionábamos se aplica a K , al ser compacto y conexo. Concluimos que $\pi_2(G, e) = 0$, siempre que nos hallemos bajo la hipótesis de G un grupo de Lie conexo (o conexo por caminos, al tratarse de una variedad topológica). ■

Para $n = 1$ vimos que siempre se cumple el Teorema Fundamental, pues podemos asociar al espacio del parámetro de orden de todo medio ordenado un grupo de Lie simplemente conexo. Nos preguntamos ahora qué ocurrirá para $n = 2$. A consecuencia del Corolario 3.32, la existencia del recubridor universal \tilde{G} de nuevo garantiza la aplicación del Teorema Fundamental para este caso, concluyendo que:

$$\pi_2(R, *) \cong \pi_1(\tilde{H}, e).$$

3.3. Ejemplos

Concluimos el capítulo ejemplificando el proceso de cálculo que requiere la clasificación topológica de defectos. Hemos desarrollado y justificado la práctica totalidad del formalismo matemático necesario para ello, así que ya tenemos todas las herramientas importantes para poner en práctica la famosa frase de N. D. Mermin “Shut up and calculate!” [13].

Antes de meternos de lleno en los distintos casos, es importante que el lector tenga en mente los defectos a estudiar. Usualmente, hablaremos de defectos puntuales y lineales (estos últimos también llamados disclinaciones). Sus respectivos nombres hacen referencia a las estructuras geométricas con las que se identifican, además de estar relacionados con la dimensión que poseen. Esto significa que existen configuraciones locales de los constituyentes del medio ordenado donde se pierde la simetría, sea en un punto o en una línea. Por otro lado, los solitones constituyen un tipo de defectos más exótico, al estar relacionados

con posibles configuraciones globales de ciertos sistemas. Es por ello que merecen una mención especial al final de esta sección, ya que su modelo matemático será diferente.

Seguiremos la notación presentada a lo largo de todo el Capítulo para el caso físico, en particular en la Subsección 3.2.4. Si bien emplearemos explícitamente varios grupos de Lie, no pretendemos profundizar en el estudio de sus estructuras y propiedades. Simplemente comentaremos lo necesario para nuestros cálculos, pues el único objetivo de esta sección es mostrar como se procede habitualmente y aclarar la conexión entre los formalismos matemático y físico.

Reencuentro con los espines

Comenzamos con un ejemplo introductorio que le resultará familiar al lector. Con el objetivo de ilustrar el procedimiento desarrollado en este capítulo, veamos una forma alternativa de conseguir la misma clasificación de los defectos que presentábamos en la Sección 1.3. Recordemos que se trataba de un ejemplo sobre un sistema de espines planos, donde veíamos que a cada defecto es posible asociarle una carga entera dada por el grado. Dichos defectos solo pueden ser puntuales, al ser un sistema bidimensional.

A través de la aplicación del Teorema Fundamental 3.30 comprobaremos que se llega a un resultado idéntico. El espín se corresponde con un vector unitario en el plano, por lo que sus posibles transformaciones son las rotaciones propias en dos dimensiones. La elección natural entonces para G es el grupo de Lie $SO(2)$, equivalente a S^1 salvo homeomorfismo. Sin embargo, no es un espacio simplemente conexo; necesitamos trabajar con su recubridor universal, $(\mathbb{R}, +)$.

El siguiente paso es identificar su subgrupo de isotropía de \mathbb{R} . Al ser rotaciones en el plano, para cada múltiplo entero de 2π recuperamos el vector inicial, concluyendo que $H = \{2\pi n, n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. Por el Corolario 3.31 tenemos que

$$\pi_1(R, *) \cong H/H_0 \cong \mathbb{Z},$$

donde $H_0 = \{e\}$ al ser H un grupo discreto. Recuperamos así la clasificación para los defectos, en términos de una cantidad discreta.

Nota 3.8. Otra manera de interpretar las transformaciones del sistema y alcanzar el mismo resultado se consigue utilizando el grupo de todas las traslaciones en una dimensión, denominado $T(1)$, con la composición como operación de grupo. Esto se debe a la existencia de un isomorfismo entre $(\mathbb{R}, +)$ y dicho grupo, dado que cada traslación se corresponde con una suma en \mathbb{R} y viceversa.

Defectos de los cristales líquidos

Uno de los nuevos estados de la materia que mencionábamos en el Capítulo 1 lo constituyen los cristales líquidos. En particular, este se subdivide en tres

posibles fases: fase esmética, fase nemática y fase isotrópica, ordenadas de menor a mayor número de simetrías presentes. Centraremos nuestro análisis en la intermedia, si bien podríamos realizarlo para cualquiera de ellas.

En general un cristal líquido se trata de un medio ordenado cuyos constituyentes son moléculas de forma alargada, con un eje distinguido \hat{n} . Esto es, a cada molécula le asociamos un vector unitario sin un sentido asociado, pues los extremos de la molécula son indistinguibles. En particular, el parámetro de orden será el ángulo $\theta(r)$ que forma el vector de la molécula respecto del plano que contiene su centro de masa (ver Figura 3.1).

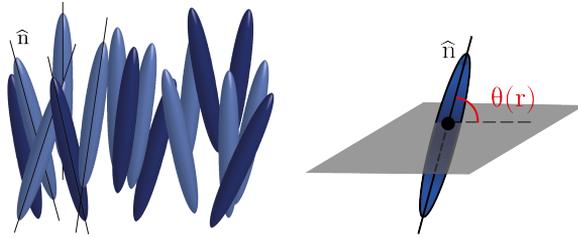


Figura 3.1. Disposición de las moléculas en una fase nemática.

En este ejemplo es posible a priori tanto la presencia de defectos puntuales como lineales, al ser un sistema tridimensional. Los clasificaremos utilizando el π_2 y el π_1 , respectivamente. Primero, establezcamos cuál es el correspondiente grupo de transformaciones. Intuitivamente, podemos adelantar que se tratará del plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 debido a la identificación $\hat{n} = -\hat{n}$, pero veamos una justificación en términos de grupo de Lie. En este ejemplo el parámetro de orden es un vector unitario por lo que pensaríamos en el grupo de las rotaciones propias tridimensionales $SO(3)$ como posible candidato. No obstante, este no es simplemente conexo, por lo que elegimos a su recubridor universal: $G = SU(2)$. El grupo de isotropía asociado no es nada trivial, pues vendrá dado por dos tipos de rotaciones diferentes. Por un lado, las rotaciones en torno al eje distinguido \hat{n} no producen ninguna modificación del parámetro de orden $\theta(r)$, e isomorfas a $SO(2)$. Por otro lado, si giramos una molécula π grados respecto de un eje arbitrario perpendicular a \hat{n} obtenemos $-\hat{n}$, devolviéndonos la misma configuración. Como consecuencia tenemos que el subgrupo de isotropía, salvo clase de conjugación, viene dado por dos tipos de matrices:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta/2} \\ -e^{i\theta/2} & 0 \end{pmatrix} / \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Cada tipo de matriz genera respectivamente un subgrupo conexo por caminos de H . Sin embargo, mientras el subgrupo dado por el primer tipo de matriz

contiene el elemento neutro (la matriz identidad en este caso), el segundo no pertenece a la componente conexa H_0 .

Todo ello nos permite concluir, utilizando los Corolarios 3.31 y 3.32,

$$\pi_1(R, *) \cong \mathbb{Z}_2, \quad \pi_2(R, *) \cong \pi_1(H, e) = \mathbb{Z}.$$

En efecto, existe una única clase de defectos lineales estables denominada disclincación de 180° . Para los defectos puntuales, en contraposición, existe un abanico mucho más amplio. Es importante notar que en este caso la acción de π_1 sobre el π_2 juega un papel fundamental en la clasificación. Como $\pi_1(R, *) \neq 0$, aquellos 2-lazos cúbicos con grado k pertenecerán a la misma clase de lazos homotópicamente libres que los que poseen grado $-k$. Dicho de otra forma, a cada defecto puntual se le puede asignar una carga topológica positiva y negativa debido a la relación $\hat{n} = -\hat{n}$.

Aplicación de los grupos relativos de homotopía: solitones

Hasta ahora el concepto de defecto que hemos manejado es el usual, el que intuitivamente esperaríamos en cualquier material. Sin embargo, existe un tipo de defecto más sutil que aparece como solución de ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales: los solitones. Físicamente se trata de una onda solitaria que se comporta como una partícula y que se propaga por el medio a velocidad constante, manteniendo su forma. No hablamos ya de un defecto localizado, independiente de la configuración del resto de elementos del medio a partir de una determinada distancia. Al no tratarse de un fenómeno estático, los solitones están estrechamente relacionados con la configuración global del sistema.

En concreto, el estudio de estos defectos requiere de uno de los ingredientes que desarrollamos en este capítulo, los grupos relativos de homotopía. Ahora consideramos configuraciones no singulares del sistema (esto es, libres de los defectos “usuales”) e imponemos que el parámetro de orden sea uniforme lejos de un punto concreto (el solitón). Si R es el espacio del parámetro de orden y \bar{R} la región de los posibles valores del parámetro de orden lejos del solitón, tenemos que la única manera de modelar la distribución de este parámetro es por medio de $\pi_3(R, \bar{R}, *)$. Cuando identificamos $\bar{R} = \{*\}$, el solitón está descrito por el grupo absoluto de homotopía $\pi_3(R, *)$, cuyos elementos son las clases de las aplicaciones de parejas $\alpha : (S^3, s_3) \rightarrow (R, *)$. Las denominadas aplicaciones de Hopf, constituyen un caso especial en el que $R = S^2$ o $R = S^2/\mathbb{Z}_2$, obteniéndose:

$$\pi_3(S^2, s_2) = \pi_3(S^2/\mathbb{Z}_2, *) = \mathbb{Z}.$$

Estos peculiares defectos aparecen como soluciones de modelos para una amplia variedad de sistemas, incluyendo el movimiento del agua [21] o el proceso de plegamiento de las proteínas [18]. Versiones conceptualmente más abstractas del solitón aparecen como soluciones de modelos cosmológicos y de partículas [15], si bien no se han observado experimentalmente en estos casos.

Conclusiones

Siguiendo los pasos de N. D. Mermin en [12], hemos realizado a lo largo de este trabajo una revisión matemática de la clasificación topológica de los defectos en medios ordenados. Aunque la motivación de todo ello tiene su origen en la Física, como veíamos en el Capítulo 1, la base es puramente matemática. En concreto, comprobamos que la Topología Algebraica es el escenario donde se desarrolla todo el procedimiento.

El grueso de la memoria lo constituyen, por tanto, las nociones y herramientas matemáticas necesarias en este contexto. Mientras que en el Capítulo 2 estudiábamos los grupos de homotopía, ingrediente esencial para diferenciar los defectos, en el Capítulo 3 construimos el modelo matemático que se asocia al sistema físico. No se trataba de un proceso trivial; la elección de un grupo de transformaciones adecuado, llegado el momento, resultaba clave para el posterior cálculo de los grupos de homotopía necesarios. Asimismo, estaba fuertemente relacionado con las simetrías de cada medio ordenado, como se refleja en la pequeña muestra de ejemplos con la que finalizamos.

El número de ejemplos físicos en los que aplicar la Topología Algebraica podría decirse que ha aumentado exponencialmente tras treinta años. Ello se debe a la posible continuación de este trabajo: el papel de la Topología en el descubrimiento nuevas fases de la materia. Hoy en día constituye toda una rama de la Física de Materiales, que valió el Premio Nobel de Física en 2016 a los físicos D. J. Thoules, F. D. M. Haldane y J. M. Kosterlitz.

A pesar de la diferencia de enfoques y prioridades de matemáticos y físicos, no supone una barrera entre ambas ramas de la ciencia. La abstracción de la Matemática más pura con la intuición de la realidad física conectan de manera asombrosa, inspirándose una en la otra. Ya el físico y matemático E. P. Wigner, uno de los padres de la Física Moderna y pionero en la aplicación de la Teoría de Grupos a la Mecánica Cuántica, recogía esta bella conexión en su libro *Symmetries and Reflections* (1967):

“El milagro de la idoneidad del lenguaje de las Matemáticas para la formulación de las leyes de la Física es un regalo maravilloso que ni comprendemos ni merecemos. Deberíamos estar agradecidos por ello y esperar que siga siendo válido en la investigación futura y que se extienda, para bien o para mal, para nuestro placer o incluso para nuestra confusión, a ramas más amplias del saber.”

Bibliografia

- [1] E. G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press (1972).
- [2] T. Bröcker, T. t. Dieck, *Representations of compact Lie groups*. Graduate Texts in Mathematics 98, Springer-Verlag (1995).
- [3] E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*. Mémoires des sciences mathématiques, Volume 42, 68 (1952).
- [4] E. Cartan, *La topologie des groupes de Lie*. Actualités scientifiques et industrielles, 358, Exposés de géométrie, 8 (1936).
- [5] T. t. Dieck, *Algebraic Topology*. European Mathematical Society (2008).
- [6] E. G. Effros, *Transformations groups and C^* -algebras*. Ann. of Math. (2) 81, p. 38-55 (1965).
- [7] K. Iwasawa, *On some types of topological groups*. Ann. of Math. 50, p. 507-558 (1949).
- [8] M. Kleman, O. D. Lavrentovich, *Soft Matter Physics: An Introduction*. Springer (2003).
- [9] C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*. Cambridge University Press (1980).
- [10] A. Malcev, *On the theory of the Lie groups in the large*. Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. 16(58), p. 163-189 (1945).
- [11] W. S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics 127, Springer-Verlag (1991).
- [12] N. D. Mermin, *The topological theory of defects in ordered media*. Rev. Mod. Phys. 51, 591 (1979).
- [13] N. D. Mermin, *What's Wrong with this Pillow?*. Physics Today 42, 4, 9 (1989).
- [14] J. R. Munkres, *Topología*. Prentice Hall (2002).
- [15] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. CRC Press (2003).
- [16] J. J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics 119, Springer-Verlag (1988).
- [17] J. P. Sethna, *Order Parameters, Broken Symmetry, and Topology*. 1991 Lectures in Complex Systems, Addison Wesley (1992).
- [18] Z. Sinkala, *Soliton/exciton transport in proteins*. J. Theor. Bio. 241, 4, p. 919-927 (2006).
- [19] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*. Springer-Verlag (1966).
- [20] G. S. Ungar, *On all kinds of homogeneous spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 212, p. 393-400 (1975).
- [21] T. Y. Wu, *Nonlinear waves and solitons in water*. Physica D: Nonlinear Phenomena 123, 1-4, p. 48-63 (1998).

The Topological Theory of Defects in Ordered Media

Abstract

Among the numerous applications of mathematics within physics, one of the most astonishing has been developed in the last thirty years: the application of algebraic topology to the study of materials. The present work expounds one of its main milestones: the topological classification of defects in ordered media. Based on N. D. Mermin's paper "The topological theory of defects in ordered media", we will perform a general mathematical review of the required procedure for achieving the desired classification. To this end, two mathematical structures are key: homotopy groups and transformation groups. This thesis will finalize with the description of the fundamental theorem of ordered media and its implications. It is a key result which will allow us to analyze diverse physical systems.

Physical motivation and Classification

Physicists are heavily enthusiastic about the presence (or absence) of symmetries in the system of study. When talking about materials, symmetries are exposed via the distribution of their set of atoms. That is, the order of the physical systems typifies different states of matter, since it changes their properties. For understanding these states, there are some key elements: the defects. An ordered medium is a collection of atoms (supposed point-like) in a region of space $X \subset \mathbb{R}^3$. We associate each atom with both its coordinate $r \in X$ and the additional quantity $\varphi(r)$, given by the map

$$\varphi: X \rightarrow R,$$

where R is a topological manifold. Since $\varphi(r)$ is called the order parameter, R is known as the order-parameter space. The points in X where the order parameter varies discontinuously constitute the defects, being Z the set of their coordinates. Then, $f := \varphi|_{X \setminus Z}$ is the continuous map that will allow us to study the stability of those defects.

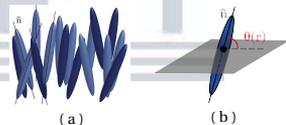


Figure 1: Distribution of molecules in a nematic liquid crystal (a) and representation of their order parameter (b). Their angles characterize the order of the medium, not being neither a liquid nor a solid.

We aim for generalizing Mermin's procedure in [5], therefore we assume $X \subset \mathbb{R}^n$. The general scheme of this classification includes the following steps [3]:

1. Identifying the order parameter $f(r)$ of the system and its defects.
2. Determining the order parameter space R . The i -dimensional loops enclosing defects of dimension m in the physical space are the mappings of interest, satisfying $i = n - m - 1$.
3. Calculating the homotopy group $\pi_i(R, *)$. This step is the mathematical core of this work; we will focus on developing different tools for not only defining the homotopy groups but also facilitating their calculations.

Homotopy groups

We denote the set of n -th cubic loops in X based on x_0 by $\Omega^n(X, x_0)$ and the homotopy of pairs by \simeq . Then, the n -th homotopy group is defined as the quotient set

$$\pi_n(X, x_0) := \Omega^n(X, x_0) / \simeq,$$

which has group structure for $n \geq 1$. The operation is the induced one $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta]$, where $*$ denotes the product of paths. The case $n = 0$ requires a study aside, not always is a group.

There is also a natural generalization of homotopy groups to pointed pairs (X, A, x_0) .

Theorem 1 Let (X, A, x_0) be a pointed pair. Then a large natural exact sequence exists:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(X, x_0) \\ \xrightarrow{\pi_n(j)} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \cdots \rightarrow \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\pi_1(j)} \\ \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(X, x_0). \end{aligned}$$

Ordered media as Transformation groups

The calculation of R and its homotopy groups is a non-trivial task, so we develop a procedure to ease it.

Definition 2 A topological transformation group is a triple (G, X, Θ) where G is a topological group, X is a topological space and $\Theta: G \times X \rightarrow X$ the action of G over X .

The ordered medium is represented by a transitive transformation group (G, R, Θ) , where X is usually a topological manifold and G is a Lie group. In particular,

$$R \cong G/H$$

being H the isotropy group of G . Equipped with this suitable mathematical model, we can face the calculation of the homotopy groups successfully. Using Theorem 1, we prove the fundamental theorem of ordered media, the keystone of our procedure:

Theorem 3 Let H be a closed subgroup of a Lie group G such that verifies $\pi_{n-1}(G, e) = 0 = \pi_n(G, e)$ for some $n \geq 1$. Then,

$$\pi_n(G/H, *) \cong \pi_{n-1}(H, e).$$

Its lower-dimension consequences are notable, since most of physical defects are described by $n = 1, 2$.

Corollary 4 Let H be a closed subgroup of a simply-connected Lie group G . Then

$$\pi_1(G/H, *) \cong \pi_0(H, e)$$

and

$$\pi_2(G/H, *) \cong \pi_1(H, e).$$

We analyze some examples, in order to illustrate the mathematical procedure developed in this work. As an introductory example we present a system of planar spins, whose order parameter corresponds to the angle of the spin. In this case $R = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ and $\pi_1(R, *) \cong \mathbb{Z}$.

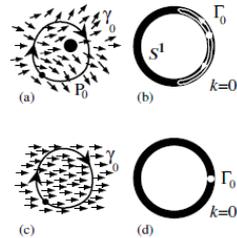


Figure 2: Planar spins with different configurations. In these cases the defect is topologically unstable.

References

- [1] E. G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press (1972).
- [2] T. t. Dieck, *Algebraic Topology*. European Mathematical Society (2008).
- [3] M. Kleman, O. D. Lavrentovich, *Soft Matter Physics: An Introduction*. Springer (2003).
- [4] C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*. Cambridge University Press (1980).
- [5] N. D. Mermin, *The topological theory of defects in ordered media*. Rev. Mod. Phys. 51, 591 (1979)
- [6] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*. Springer-Verlag (1966).