

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

**FACULTAD DE CIENCIAS
SECCIÓN DE FÍSICA**



**Cálculo de órbitas pseudocirculares externas en
el Problema Restringido de los Tres Cuerpos.
Sistemas Binarios**

Director:
Ignacio González Martínez-País

Autor:
Luis García Dorta

Índice general

1. Introducción y objetivos	1
2. Fundamentos teóricos	3
2.1. El Problema de Roche o Problema Restringido Circular de los Tres Cuerpos . . .	3
2.2. El Problema de los Dos Cuerpos en el Sistema de Referencia no Inercial	6
2.3. El concepto de mapa de Poincaré	9
2.4. Existencia de soluciones pseudocirculares	10
2.5. Estabilidad de las órbitas	14
3. Metodología	16
3.1. El método de Runge-Kutta y su aplicación al problema tratado	16
3.2. Condiciones iniciales para órbitas pseudocirculares	19
3.3. Cálculo de la estabilidad	21
4. Resultados y discusión	22
4.1. El Problema de los Dos Cuerpos	22
4.2. El Problema de los Tres Cuerpos Restringido	24
4.2.1. Primera Comprobación	24
4.2.2. Gráficas Δr , Δv_θ , Δv_r vs v_{θ_0}	25
4.2.3. Datos de la interpolación	29
4.2.4. Gráficas de las órbitas pseudocirculares	30
4.2.5. Gráficas C vs r_0	33
4.2.6. Estabilidad de las órbitas	34
4.2.7. Conclusiones	38
5. Trabajos futuros	39
Bibliografía	40

Abstract

The main purpose of this work will be the calculation of external pseudocircular orbits in the Restricted Problem of the Three Bodies (PRTC) that interact gravitationally for their study in the case of possible orbits around binary systems. On the one hand, pseudo-circular orbits means that we are interested in simple, periodic and therefore closed orbits, while external ones means that the size of the orbits is greater than the separation distance of the components that constitute the system.

Before beginning the theoretical development and the methodology carried out in the Problem of the Three Bodies, it is convenient to explain the reason for the study and the way in which it is presented, so, as an introduction, the reasons for it will be exposed in the first chapter.

In the next chapter all the theoretical foundations involved throughout the work will be developed, starting with the Roche Problem or PRTC. We will see the strict definition of the problem and continue its study until obtaining the equations in the orbital plane.

Once this point is reached, the next step will be introduce the Two Body Problem (PDC) into the Corotating Reference System for several reasons. The first one, because it has important direct applications in several problems that are relevant by themselves, such as the movement of a planet around the two components of a binary system. The second, because it serves as a basis for more general or complicated problems in which more bodies are involved. And the third, because it is practically the only problem within the celestial mechanics that has a solution through the method of integral quadratures. This is why, as will be seen in the chapter on results and discussion, we decided to solve analytically the problem of the two bodies with certain initial conditions and then compare it with the same solution, but with another method used, one of numerical integration, and in particular, the Runge-Kutta method. This step will be very important because it will serve as a basis and as a first check for subsequent results.

Following the theory, we will talk about the concept of Poincaré's Map and about the existence of pseudocircular solutions to end with the stability of the orbits.

The next chapter is the methodology, where we will explain in detail all the steps that have been taken during the work to achieve the results. We will start with the description of the Runge-Kutta method and its application to the case in question. In addition, we will analyze the initial conditions that have to be fulfilled to achieve the desired orbits, emphasizing the obtaining of its initial velocity. Likewise, once obtained, the procedure that has been followed to calculate its stability will be detailed.

In chapter 4 the results obtained will be presented and discussed, from the first tests of the correct functioning of the method to the representation of the orbits and their classification in stable or unstable. It is important to highlight that, due to the large number of calculated orbits, it will be impossible to enter all of them, which is why we have decided to analyze the most relevant results, trying to deduce some general conclusion.

Finally some basic ideas will be given about the path that some topics that could not be studied in this work could follow and that be analyzed in future works. The reason for this task would be to expand, together with the work done, the study of the Problem of The Three Bodies for better understanding.

El propósito fundamental de este trabajo consistirá en el cálculo de órbitas pseudocirculares externas en el Problema Restringido de los Tres Cuerpos (PRTC) que interactúan gravitatoriamente para su estudio en el caso de órbitas alrededor de sistemas binarios. Que sean pseudocirculares significa que estamos interesados en órbitas simples, periódicas y por lo tanto cerradas, mientras que sean externas implica que el tamaño de las órbitas es mayor que la distancia de separación de las componentes que constituyen el sistema.

Antes de comenzar el desarrollo teórico y la metodología llevada a cabo en el Problema de los Tres Cuerpos (PTC), conviene explicar el motivo del estudio y la forma en la que se plantea, por lo que, a modo de introducción, se expondrán las razones del mismo en el primer capítulo.

En el siguiente capítulo se desarrollarán todos los fundamentos teóricos involucrados a lo largo del trabajo, empezando por el Problema de Roche o PRTC. Veremos la definición estricta del problema y continuaremos su estudio hasta obtener las ecuaciones en el plano orbital.

Una vez llegados a este punto, el siguiente paso consistirá en introducir también el Problema de los Dos Cuerpos (PDC) en el Sistema de Referencia no Inercial por varias razones. La primera de ellas, porque tiene importantes aplicaciones directas en varios problemas que son relevantes en sí mismos, como por ejemplo el movimiento de un planeta alrededor de las componentes de un sistema binario. La segunda, porque sirve de base a problemas más generales o complicados en los que intervienen más cuerpos. Y la tercera, porque se trata prácticamente del único problema dentro de la mecánica celeste que tiene solución mediante el método de las cuadraturas integrales.

Es por esto por lo que, tal y como se verá en el capítulo de resultados y discusión, hemos decidido resolver analíticamente el problema de los dos cuerpos con unas condiciones iniciales determinadas para, posteriormente, compararlo con la misma solución, pero obtenida mediante un método de integración numérica, el Runge-Kutta. Este paso será de gran importancia puesto que servirá de base y como primera comprobación para los resultados posteriores.

Siguiendo con la teoría, hablaremos del concepto de Mapa de Poincaré y sobre la existencia de soluciones pseudocirculares para finalizar con la estabilidad de las órbitas.

El siguiente capítulo es el de metodología, donde se explicarán detalladamente todos los pasos que se han realizado durante el trabajo para la consecución de los resultados. Empezaremos por la descripción del método Runge-Kutta y su aplicación al caso en cuestión. Además, analizaremos las condiciones iniciales que se han de cumplir para conseguir las órbitas deseadas. Así mismo, una vez obtenidas, se detallará el procedimiento que se ha seguido para el cálculo de su estabilidad.

Finalmente se presentarán y discutirán los resultados obtenidos, desde las primeras comprobaciones del correcto funcionamiento del método hasta la representación de las órbitas y su clasificación en estables o inestables. Además, para finalizar, en el capítulo 5 se darán algunas ideas básicas acerca del camino que podrían seguir algunos temas que no se han analizado en este trabajo y que podrían analizarse en trabajos futuros con el objetivo principal de ampliar el estudio del Problema de Los Tres Cuerpos para su mejor comprensión.

Capítulo 1

Introducción y objetivos

Summary chapter 1

The fundamental objective of our work will be the calculation of external pseudocircular orbits in the Restricted Problem of the Three Bodies (PRTC) for their study in the case of planetary orbits in binary systems. In addition, we are going to discuss as the possibility of the existence of these orbits as well as the analysis of their stability. Among the reasons why the PRTC is a study of great astronomical interest we find the following:

- 1. The astronomical observations show that a considerable percentage of stars are in pairs forming binary systems. These systems, in which planets may exist, play a primordial role in the evolution of star systems*
- 2. It is a novel study from the point of view in which it is posed, since it will not focus on the perturbational theory. The PRTC is based on the study of the movement of a body of negligible mass under the action of two bodies of primary masses that move in circular orbits around the common center of masses.*
- 3. It is the beginning of a much broader study in which non-pseudocircular orbits and / or out of the orbital plane can be included.*

El Problema de los Tres Cuerpos (PTC) ha sido siempre un problema de especial interés en astrofísica. Fue un problema estudiado extensamente por muchos matemáticos y físicos famosos, como Lagrange en el siglo XVIII y Henri Poincaré al final del siglo XIX. Así mismo, más tarde volvería a cobrar bastante importancia con los primeros vuelos espaciales y la necesidad práctica de calcular las órbitas con gran precisión.

Con el avance de la tecnología informática se ha conseguido mejorar enormemente la velocidad de los cálculos de las diferentes órbitas y permitido estudiar el problema de los tres cuerpos que interactúan gravitatoriamente con un nuevo rigor. Sin embargo, en los últimos años ha surgido la necesidad de proporcionar soluciones del problema general de los tres cuerpos en diversas situaciones astrofísicas. Por ejemplo, los sistemas binarios y sus interacciones con estrellas individuales, jugando un papel importante en la evolución de los cúmulos de estrellas, además de muchos otros cuerpos astrofísicos que van desde cuerpos compactos hasta galaxias.

Por este motivo, antes de abordar la discusión del Problema de los Tres Cuerpos Restringido convendría familiarizarse con los sistemas binarios, ya que, en la actualidad, dicho problema está motivado principalmente por la necesidad de comprender el papel de estos sistemas en

la evolución de los sistemas estelares. Un dato bastante interesante es que las observaciones astronómicas nos muestran que, en muchas ocasiones, las estrellas no se encuentran solas, sino que están en parejas, orbitando una alrededor de la otra; de hecho, aproximadamente la mitad de las estrellas en nuestro vecindario galáctico son estrellas binarias. Además, muchas de ellas podrían albergar planetas, motivo por el cual nuestro trabajo cobra especial interés.

Por otro lado, tal y como ya se ha comentado, nuestro trabajo se centrará en el cálculo de órbitas pseudocirculares externas en el Problema Restringido de los Tres Cuerpos (PRTC) que interactúan de forma gravitatoria. Se trata de un estudio novedoso desde el punto de vista en el que se plantea, puesto que no se enfocará en la teoría de las perturbaciones, basada en calcular el movimiento de dos cuerpos y considerar que el tercero perturba la posición de los otros dos. El PRTC consiste en el estudio del movimiento de un cuerpo de masa despreciable bajo la acción de dos cuerpos de masas primarias que se mueven en órbitas circulares alrededor del centro de masas común. Que el tercer cuerpo tenga masa despreciable frente a la de los otros dos indica, en este caso, que su acción gravitatoria no afecta al movimiento de estos últimos. El objetivo fundamental de este trabajo consistirá, por tanto, en analizar dichas órbitas en el caso de planetas alrededor de sistemas binarios, discutiendo su existencia y en qué condiciones son posibles, además de estudiar su estabilidad.

Por último, indicamos que el estudio que se desarrollará a lo largo de este trabajo podría ser una pequeña parte de un estudio mucho más general en el que se podrían incluir tanto el análisis de órbitas retrógradas en el caso también de órbitas pseudocirculares, u órbitas no pseudocirculares y/o no restringidas al plano orbital. En este punto nos detendremos y entraremos con mayor profundidad en el último capítulo.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

Summary chapter 2

We are interested in obtaining simple periodic orbits (and therefore closed orbits) in the restricted circular problem of the three bodies, i.e such that when θ increases 2π , the motion repeats, or what is the same, that close when completing one cycle. And among them, in those that in certain limit become the circular orbits of the problem of the two bodies. We are also interested in external orbits, that is, the size of the orbit is greater than the separation distance of the components that constitute the system. Therefore, as we develop in this chapter the theoretical background involved, we will see that these orbits exist, and that they can be obtained as an analytical continuation of the orbits of the problem of the two bodies. To do this, we will analyze topics such as the Poincaré Map concept. Finally, once demonstrated the existence of them, we will introduce the measurement of its stability.

2.1. El Problema de Roche o Problema Restringido Circular de los Tres Cuerpos

Sea una sistema de dos partículas que se mueven alrededor de su centro de masas (CM) bajo su mutua atracción gravitatoria siendo sus órbitas circulares, y sus masas m_1 y $m_2 (\leq m_1)$. El problema restringido circular de los tres cuerpos (PRTC) o *Problema de Roche*, consiste en el estudio del movimiento de una tercera partícula de masa despreciable frente a m_2 (de manera que su acción gravitatoria no afecte al movimiento de las dos primeras).

Para describir el movimiento de la partícula se definirá un Sistema de Referencia Inercial (SRI), S' centrado en el CM de las dos componentes de masa finita, con el plano $X' Y'$ coincidiendo con el de sus órbitas, y Z' en la dirección del momento angular del sistema. También consideraremos otro SR, S , corrotante con el sistema binario, y por tanto no inercial, centrado igualmente en el CM, con $Z \equiv Z'$ y con el eje X en la línea que une ambas componentes de masa finita y apuntando hacia la componente 2 (la menos masiva). De este modo, el SR S rota respecto al S' con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$, que, según la Tercera Ley de Kepler vale $\omega^2 = G(m_1 + m_2)/a^3$.

Sea \mathbf{R} el vector de posición del cuerpo infinitesimal en el sistema S y \mathbf{R}' el mismo pero en el sistema S' . Por tratarse este último de un SRI, la ecuación de movimiento en él es:

$$\ddot{\mathbf{R}}' = -\frac{Gm_1}{R_1^3} \mathbf{R}'_1 - \frac{Gm_2}{R_2^3} \mathbf{R}'_2 = \mathbf{f} \quad (2.1)$$

siendo \mathbf{R}'_1 el vector que va desde la componente 1 a la partícula de masa infinitesimal, y \mathbf{R}'_2 el

que va de la 2 a esta misma. La fuerza que actúa sobre la partícula medida en S' es conservativa, de la forma:

$$\mathbf{f} = -\nabla\Psi' \quad \text{con} \quad \Psi' = -\frac{Gm_1}{R'_1} - \frac{Gm_2}{R'_2}$$

pero no es central, por lo que no se verifica la conservación del momento angular de la partícula.

Ahora obtendremos la ecuación de movimiento en S , es decir, en el sistema de referencia corrotante. Como este SR rota con velocidad angular constante ω respecto al S' y el origen de ambos es el mismo, la ecuación de movimiento de la partícula en S es:

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{Gm_1}{R_1^3}\mathbf{R}_1 - \frac{Gm_2}{R_2^3}\mathbf{R}_2 - \omega \times (\omega \times R) - 2\omega \times \dot{\mathbf{R}} \quad (2.2)$$

Si analizamos cada uno de los términos de la última ecuación, nos daremos cuenta de que, en primer lugar, la fuerza centrífuga $-\omega \times (\omega \times R)$ es conservativa, con Ψ_c el potencial centrífugo:

$$\Psi_c = -\frac{1}{2}\omega^2 P^2 \quad (2.3)$$

siendo P el módulo del vector proyección sobre el plano orbital del vector de posición $\mathbf{P} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$

En cuanto a la fuerza de Coriolis, $-2\omega \times \dot{\mathbf{R}}$, no es conservativa, pero al ser siempre perpendicular a $\dot{\mathbf{R}}$, no realiza trabajo al actuar sobre la partícula. Su efecto es, en realidad, variar la dirección de movimiento, es decir del vector velocidad, pero no de su módulo.

Podemos definir entonces una función potencial en el sistema S :

$$\Psi = \Psi' + \Psi_c = -\frac{Gm_1}{R_1}\mathbf{R}_1 - \frac{Gm_2}{R_2} - \frac{1}{2}\omega^2 P^2 \quad (2.4)$$

de modo que la ecuación de movimiento de la partícula en S (2.2) queda:

$$\ddot{\mathbf{R}} + 2\omega \times \dot{\mathbf{R}} = -\nabla\Psi \quad (2.5)$$

El siguiente paso será adimensionalizar el problema, es decir, expresar las ecuaciones que lo gobiernan en función de variables y parámetros adimensionales. Entre las ventajas con las que nos encontraremos con este procedimiento, destacamos sobre todo que las magnitudes que se manejen (independientemente de las dimensiones reales del sistema) van a ser del orden de la separación del sistema de cuerpos finitos, las masas del orden de la unidad. Además, conseguiremos reducir el número de parámetros de los que depende el problema, y por tanto, simplificarlo. En concreto, pasaremos de tres (m_1, m_2, a) en el sistema sin adimensionalizar a solo uno (μ) en el adimensionalizado.

Definimos los vectores de posición normalizados a la separación del sistema, a :

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{R}}{a} \quad \boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{P}}{a} \quad \mathbf{r}_i = \frac{\mathbf{R}_i}{a} \quad (2.6)$$

Definimos el parámetro μ :

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.7)$$

y en general dividiremos todas las masas por $m_1 + m_2$. Con ello definiremos la unidad de masa de modo que en este nuevo sistema de unidades $m_1 + m_2 = 1$, y entonces μ es la masa normalizada o adimensionalizada de la secundaria. La de la primaria será:

$$1 - \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Nótese que en el desarrollo teórico de este apartado hemos asumido que $m_2 \leq m_1$ y por tanto, siempre se cumplirá que $\mu \leq 0.5$. Sin embargo, nosotros trabajaremos con valores de $0.05 \leq \mu \leq 0.95$, por lo que para valores superiores de $\mu = 0.5$ consideraremos que la masa primaria es m_2 .

En cuanto a la unidad de tiempo, se va a definir de modo que $\omega = 1$, es decir, de modo que en la escala de tiempo normalizada, el período del sistema constituido por las dos masas finitas sea 2π . Por tanto, el tiempo normalizado o adimensionalizado τ se define:

$$\tau = \omega t \quad (2.8)$$

Teniendo en cuenta la Tercera Ley de Kepler $\omega^2 = G(m_1 + m_2)/a^3$, en este sistema de unidades el valor de la constante de gravitación universal es $G = 1$. Por tanto, la expresión del potencial normalizado o adimensionalizado en dicho sistema será:

$$\Psi = \Psi_R \equiv -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}\rho^2 = \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (2.9)$$

donde Ψ_R es el denominado *Potencial de Roche*, r_1 y r_2 las distancias a la componente primaria (μ) y secundaria ($1 - \mu$), y ρ la distancia al eje perpendicular al plano orbital que pasa por el centro de masas del sistema.

La ecuación del movimiento en coordenadas adimensionales (2.5), después de ordenar los diferentes términos y operar un poco, queda finalmente:

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} = -\nabla\Psi_R \quad (2.10)$$

donde $\ddot{\mathbf{r}}$ se refiere a la derivada con respecto a τ y ∇ va calculado respecto a las coordenadas adimensionales x, y, z .

Para este problema existe una integral de movimiento. Si multiplicamos escalarmente la ecuación de movimiento (2.10) por $d\mathbf{r}$, y luego integramos, entonces obtenemos:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 \equiv v^2 = -2\Psi_R - C = \rho^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C \quad (2.11)$$

donde C es la constante de Jacobi. El valor de esta constante está determinado por las condiciones iniciales. Es similar a la energía, pero está definida en un sistema de referencia no inercial (ya que al ser corrotante, está acelerado). El problema es que la energía (correctamente definida) se conserva en un sistema de referencia inercial, pero no en este que estamos trabajando, ya que está acelerado. A cambio, esta “energía no inercial” que representa la constante de Jacobi, se conserva en el sistema corrotante.

Como a partir de ahora nos restringiremos al estudio de órbitas en el plano orbital del sistema, descrito mediante un sistema de corrotante de coordenadas polares (r, θ) , conviene tener en cuenta las siguientes expresiones:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \rightarrow \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} = -r\dot{\theta}\mathbf{u}_r + r\mathbf{u}_\theta$$

y:

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$

y por último:

$$\nabla\Psi_R = \frac{\partial\Psi_R}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_R}{\partial\theta}\mathbf{u}_\theta$$

Por lo que las componentes de la ecuación de movimiento (2.10) son:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{\partial\Psi_R}{\partial r} \quad (2.12)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + 2\dot{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Psi_R}{\partial\theta} \quad (2.13)$$

Además, si adoptamos como polo del sistema de coordenadas el centro de masas del sistema, y como eje polar el que apunta a la componente de masa μ , entonces:

$$r_1^2 = r^2 + \mu^2 + 2\mu r \cos\theta \quad ; \quad r_2^2 = r^2 + (1-\mu)^2 - 2(1-\mu)r \cos\theta \quad ; \quad \rho = r$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi_R}{\partial r} \frac{1-\mu}{r_1^3} (r + \mu \cos\theta) + \frac{\mu}{r_2^3} [r - (1-\mu) \cos\theta] - r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi_R}{\partial\theta} = \mu(1-\mu) \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) \text{sen}\theta \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento quedan:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - 2r\dot{\theta} - r = -\frac{1-\mu}{r_1^3} (r + \mu \cos\theta) - \frac{\mu}{r_2^3} [r - (1-\mu) \cos\theta] - r \quad (2.14)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + 2\dot{r} = \mu(1-\mu) \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) \text{sen}\theta \quad (2.15)$$

y la expresión de la integral de Jacobi:

$$v^2 = \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} + r^2 - C \quad (2.16)$$

2.2. El Problema de los Dos Cuerpos en el Sistema de Referencia no Inercial

En este apartado vamos a estudiar el caso de $\mu = 0$, es decir, el problema de los dos cuerpos en un Sistema de Referencia Corrotante (SRC) centrado en el CM, y por tanto no inercial, que rota con velocidad angular $\Omega = 1$ con respecto a un Sistema de Referencia Inercial (SRI), centrado también en el CM y en el que la masa de una de las componentes es despreciable. En concreto, deseamos estudiar las órbitas que son cerradas en el SRC. Este problema está resuelto y es bien conocido en un SRI, sin embargo, cuando queramos calcular los puntos x e y del plano, no bastará con realizar el cambio de polares a cartesianas. En este caso, también se tendrán que realizar las transformaciones correspondientes entre ambos sistemas, las cuales vienen dadas por:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta - t) \\ y &= r \text{sen}(\theta - t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Denotaremos como ω el movimiento medio de una órbita periódica, $\omega = 2\pi/T$, siendo T el periodo orbital, y usaremos el subíndice I para indicar que se trata del movimiento medio medido o el periodo medidos en el SRI.

Para que una órbita sea cerrada en el SRC, es condición necesaria que sea cerrada en el SRI, es decir, que sea elíptica o circular. Sin embargo, esta condición no es suficiente, ya que puede

haber órbitas que sean cerradas en el SRI pero no se cierren en el SRC. En concreto, para que una órbita elíptica en el SRI sea cerrada (y por tanto periódica) en el SRC, debe cumplirse que al dar el sistema un número entero de n vueltas completas, la partícula dé un número entero de m vueltas en su órbita en el SRI, es decir, que si T_I es el período de la órbita en el SRI, debe verificarse:

$$mT_I = n2\pi,$$

donde n y m son números enteros, siendo n positivo. La expresión anterior puede escribirse como:

$$w_I = \frac{m}{n}$$

El periodo de la correspondiente órbita en el SRC es mT_I , sin embargo, aunque en el SRI la partícula ha recorrido en ese tiempo un ángulo $2\pi m$, en el SRC habrá recorrido $2\pi m - 2\pi n$, y por tanto el movimiento medio medido en dicho sistema será:

$$w = \frac{2\pi m - 2\pi n}{mT_I} = w_I \frac{m - n}{m}$$

expresión que también podría haberse obtenido de la relación entre las velocidades angulares medidas en uno y otro sistema:

$$w = w_I - 1$$

Debe notarse que, además de periódica, para que una órbita sea simple en el SRC, es decir, que recorra en este sistema un ángulo de 2π hasta cerrarse, debe cumplirse:

$$w = \frac{w_I}{m}$$

es decir, debe verificar $m - n = 1$.

Por otra parte, toda órbita que sea interna ($a < 1$, con a el semieje mayor de la elipse que describe en el SRI) en uno de los dos sistemas de referencia, lo es también en el otro, y lo mismo sucede si es externa ($a > 1$). Por tanto, a partir de la tercera ley de Kepler:

$$\omega_I^2 a^3 = 1 \rightarrow \omega_I = a^{-3/2}$$

resulta que para las órbitas internas: $|\omega_I| > 1$, y para las externas $|\omega_I| < 1$.

En el caso particular de las órbitas circulares es más fácil comprender que a toda órbita circular en el SRI le corresponde una órbita circular en el SRC (salvo que $\omega_I = 1$ ya que al ser $w = w_I - 1$, una partícula en tal órbita estaría en reposo en el SRC).

Teniendo en cuenta algunos de los razonamientos llevados a cabo anteriormente, se deduce que las órbitas circulares externas en el SRC son todas retrógradas, mientras que entre las internas pueden haber tanto directas como retrógradas. En cambio, las órbitas externas en el SRI serán retrógradas si $-1 < w_I < 0$ mientras que lo serán directas si $0 < w_I < 1$.

Lo que haremos ahora será plantearnos cómo son en el SRI las órbitas correspondientes a un valor dado de la constante de Jacobi C . La expresión de la integral de Jacobi, siguiendo la expresión (2.16) es:

$$v^2 = \frac{2}{r} + r^2 - C \quad (2.18)$$

con v el módulo de la velocidad en el SRC. Las superficies de velocidad nula, $v^2 = 0$, que limitan las regiones donde la partícula puede moverse ($C \leq 2/r + r^2$), de las que le están prohibidas porque en ellas sería $v^2 < 0$ ($C > 2/r + r^2$) tiene de ecuación:

$$r^3 - Cr + 2 = 0$$

Vamos a considerar tres casos diferentes en el estudio de las soluciones de esta ecuación:

1. Para $C < 3$, la ecuación no tiene soluciones reales positivas, por tanto no hay cambio de signo de v^2 en ningún punto, y como esta magnitud resulta ser siempre positiva, la partícula puede moverse por todo el plano sin restricciones. Como estamos interesados en órbitas cerradas (circulares o elípticas en un SRI), y por tanto tales que el movimiento de la partícula esté restringido a ciertas zonas del espacio, no es este el caso que nos interesa.
2. Para $C \geq 3$ la ecuación anterior tiene dos raíces reales positivas, r_m y r_M , tales que $0 < r_m < 1 < r_M < C$ (en el caso límite $C = 3$ resulta ser que $r_m = r_M = 1$). En este caso el movimiento es posible dentro de la circunferencia de radio $r = r_m$ y fuera de la de radio $r = r_M$, correspondiendo el primer caso a órbitas internas y el segundo a órbitas alrededor del sistema como conjunto, o sea, externas.

Por tanto, nos restringiremos al caso en que $C > 3$.

La relación entre la velocidad \vec{V} de un partícula en el SRI y la velocidad \vec{v} en el SRC es:

$$\vec{v} = \vec{V} - \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (2.19)$$

con $\vec{\Omega} = \vec{k}$

Consideremos ahora una partícula que sigue en el SRI un órbita elíptica. Su velocidad en el pericentro Q de la órbita medida en el SRI es estrictamente acimutal ($\dot{r} = 0$) y vale:

$$V_Q = \pm \left[\frac{1+e}{a(1-e)} \right]^{1/2}$$

correspondiendo el signo superior a órbitas directas y el inferior a retrógradas.

Pasamos a estudiar la órbita en el sistema rotante, para ello calculamos mediante (2.19) la velocidad de la partícula en dicho sistema a su paso por Q :

$$v_Q = V_Q - r_Q = \pm \left[\frac{1+e}{a(1-e)} \right]^{1/2} - a(1-e)$$

Combinando esta expresión con la de la integral de Jacobi (2.18) evaluada en $r = r_Q$:

$$v_Q^2 = \frac{2}{a(1-e)} + a^2(1-e)^2 - C$$

resulta:

$$\pm a(1-e^2)^{1/2} = \frac{C}{2}a^{1/2} - \frac{1}{2a^{1/2}}$$

o, en función del semieje menor de la elipse: $b = a(1-e^2)^{1/2} > 0$:

$$\pm b = \frac{C}{2}a^{1/2} - \frac{1}{2a^{1/2}}$$

Nótese que b siempre es positivo y menor que a ($0 \leq b \leq a$), por lo que esta expresión son en realidad dos: una con el signo positivo, que corresponde a órbitas directas, y otra con el negativo, que corresponde a retrógradas, y cada una de ellas nos da la relación que existe entre a y b , para un valor dado de la constante de Jacobi, C . El corte de la curva:

$$f(a) = \frac{C}{2}a^{1/2} - \frac{1}{2a^{1/2}}$$

con las rectas $g_+(a) = a$ y $g_-(a) = -a$ nos dan las órbitas circulares (directas y retrógradas respectivamente) posibles para un valor dado de C , y pueden existir órbitas elípticas siempre que $|f(a)| \leq a$, es decir, en las partes de la curva $f(a)$ que se encuentren por debajo de $g_+(a)$

y por encima de $g_-(a)$.

En la Figura 2.1 se representa la función $f(a)$ para $C > 3$. En ella, $f(a)$ es siempre creciente y convexa y se caracteriza por:

$$\lim_{a \rightarrow 0} f(a) = -\infty, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = \infty, \quad f\left(\frac{1}{C}\right) = 0, \quad f(1) = \frac{C-1}{2} > 1$$

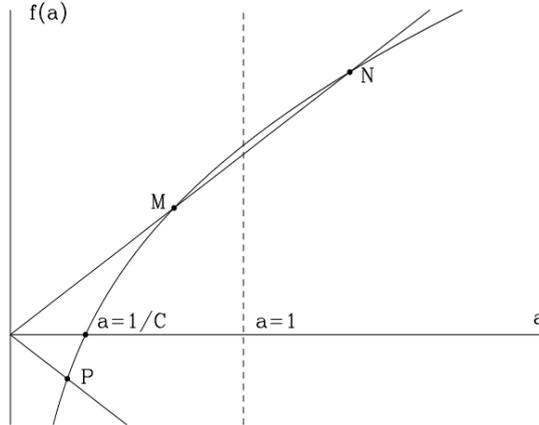


Figura 2.1: La relación entre los semiejes mayor y menor de una órbita que es elíptica en un SRI, para un vakir dado de la constante de Jacobi. Los puntos M y N corresponden a órbitas circulares directas en el SRI, la primera interna y a segunda externa. El punto P corresponde a una órbita retrógrada interna en el SRI.

Así mismo, como puede demostrarse y se observa en la misma figura, para un valor dado de $C > 3$ siempre existen tres órbitas circulares: dos internas, una de ellas directa (punto M) y la otra retrógrada (punto P), y una externa directa (punto N). Los radios r_1 y r_2 de estas órbitas vienen dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{r_2} + 2r_2^{1/2} && \text{(directas en el SRI)} \\ C &= \frac{1}{r_1} - 2r_1^{1/2} && \text{(retrógradas en el SRI)} \end{aligned} \tag{2.20}$$

expresiones que resultan de hacer $b = a = r_2$ y $-b = a = r_1$

Además se deduce también de la figura que pueden existir órbitas elípticas directas, por una parte para valores del semieje mayor comprendidos entre $1/C$ y el valor de la abscisa del punto M (internas directas), por otra entre el valor de la abscisa del punto N e infinito (externas directas) y por último, para valores de a comprendidos entre el valor de la abscisa del punto P y $1/C$.

2.3. El concepto de mapa de Poincaré

El concepto de mapa de Poincaré es simple pero enormemente útil al mismo tiempo. Nos permitirá no solo establecer con exactitud las condiciones iniciales de las órbitas buscadas, sino también estudiar la estabilidad de dichas órbitas como veremos más adelante.

Sea un sistema dinámico de dimensión n :

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$$

Se llama sección de Poincaré a todo subespacio de dimensión $n - 1$ del espacio de fases, Σ , que sea transversal al flujo, es decir, tal que todas las órbitas del sistema lo atraviesan.

Si consideramos una órbita cualquiera, en cierto momento cortará a la sección en el punto \vec{x}_0 . Las siguientes veces que lo corta moviéndose en el mismo sentido lo hará sucesivamente en los puntos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots$. Con esto, el mapa de Poincaré P es un mapa o transformación, definida:

$$P : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

tal que:

$$x_{i+1}^{\vec{}} = P(x_i^{\vec{}})$$

es decir, que transforma el punto \vec{x}_i en el punto $x_{i+1}^{\vec{}}$.

En un mapa de este tipo, las órbitas que cumplen $P(\vec{x}) = \vec{x}$ son órbitas periódicas simples. Las órbitas periódicas en general cumplirán que $P^m(\vec{x}) = \vec{x}$ porque al cabo de m pasos por la sección, la órbita se repite. Por tanto, en general, cada órbita está representada en un mapa de Poincaré por un conjunto de puntos. Si ese punto es único, la órbita es periódica y simple, si es finito, es periódica pero no simple, y si no es periódica, vendrá dada por una infinidad de puntos.

En nuestro caso, nos interesa construir un mapa de Poincaré cuya sección sea el eje que une las dos componentes, es decir $\theta = 0$. Como el sistema es de dimensión 4, la sección de Poincaré, según lo visto, será de dimensión 3, y como ya de entrada estamos interesados en órbitas tales que $\dot{r}_0 = 0$, en realidad es de dimensión 2 ($r, \dot{\theta}$)

Para calcular el mapa de Poincaré, por tanto, habrá que integrar las ecuaciones de movimiento desde $(\theta = 0, r = r_0)$ con $\dot{r}_0 = 0$ hasta $\theta = 2\pi$, probando con distintos valores de $\dot{\theta}(0)$, y ver si el valor obtenido de r, r_1 coincide con r_0 . Si coincide tendremos la órbita buscada, si no, hay que probar con otro valor de $\dot{\theta}(0)$ hasta encontrar el adecuado. Este último apartado lo comentaremos con mayor profundidad en el capítulo de la metodología llevada a cabo.

2.4. Existencia de soluciones pseudocirculares

Las ecuaciones de movimiento escritas como (2.14) y (2.15) pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - 2r\dot{\theta} - r &= -\frac{1}{r^2} + f(\mu, r, \theta) \\ r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta} + 2\dot{r} &= g(\mu, r, \theta) \end{aligned}$$

siendo $f(\mu, r, \theta)$ y $g(\mu, r, \theta)$ funciones con una forma determinada, pero que cumplen que:

$$f(0, r, \theta) = g(0, r, \theta) = 0$$

Igualmente, la expresión de la integral de Jacobi (1.12) puede escribirse como:

$$v^2 = r^2 + \frac{2}{r} - C + h(\mu, r, \theta)$$

siendo también:

$$h(0, r, \theta) = 0$$

Si hacemos $\mu = 0$ obtenemos entonces las ecuaciones de movimiento para el problema de los dos cuerpos en el sistema rotante, de cuyo estudio sabemos que para todo valor de C tal que $C > 3$, existen tres órbitas circulares: una interna directa, otra interna retrógrada y una

tercera, también retrógrada, pero externa. Las condiciones iniciales (en el SRC) para estas órbitas circulares son:

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0 \\ \theta(0) &= 0 \\ \dot{r}(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(0) &= \frac{v}{r_0} = \frac{1}{r_0^{3/2}} - 1 \end{aligned}$$

siendo v la velocidad orbital en el SRC, y con r_0 relacionado con las constante de Jacobi mediante (2.19), es decir:

$$C = \frac{1}{r_0} \pm 2r_0^{1/2},$$

dependiendo el signo de si la órbita es directa (+) o retrógrada (-).

Escribiremos la ecuación en el SRC de éstas órbitas circulares:

$$r = R_0(t)[= r_0], \quad \theta = \Theta_0(t)[= (\omega_I - 1)t = \omega t]$$

con el subíndice 0 indicando que se trata de órbitas para el caso de $\mu = 0$, $\omega_I = 2\pi/T_I$ es el movimiento medio (o velocidad angular media) de la órbita en el SRI, que viene dado por $\omega_I = r_0^{-3/2}$, T_I el correspondiente periodo, y ω la velocidad angular en el SRC.

Consideremos ahora el caso $\mu \neq 0$. La solución general tendrá la forma:

$$r = R(\mu, r(0), \theta(0), \dot{r}(0), \dot{\theta}(0), t); \quad \theta = \Theta(\mu, r(0), \theta(0), \dot{r}(0), \dot{\theta}(0), t)$$

Nos planteamos la siguiente pregunta: ¿cómo y cuales son, en el SRC, las órbitas en que se convierten las circulares del problema de los dos cuerpos al considerar valores de μ distintos de cero? Para empezar, deben ser periódicas y simples. Además deben ser simétricas respecto al eje polar. Esta última condición se debe al hecho de que el potencial de Roche pasa de tener simetría esférica para $\mu = 0$ a ser sólo simétrico respecto a dicho eje para $\mu \neq 0$, por lo que la órbita circular (simetría esférica), al hacer $\mu \neq 0$ perderá la simetría esférica, pero, como el potencial, debe conservar la simetría respecto al eje polar. Por tanto, tomando origen de tiempos en un paso de la partícula por el eje polar, las órbitas buscadas deben satisfacer las siguientes condiciones iniciales:

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{r}(0) = 0 \tag{2.21}$$

por lo que, como $\theta(0)$ y $\dot{r}(0)$ están dados, podemos reescribir la ecuación de la órbita como:

$$r = R(\mu, r(0), \dot{\theta}(0), t); \quad \theta = \Theta(\mu, r(0), \dot{\theta}(0), t)$$

Por otra parte, por ser periódicas, debe verificarse que para un cierto instante $t = T + \tau$ se cumpla:

$$\theta(T + \tau) = 2\pi, \quad \dot{r}(T + \tau) = \dot{r}(0) = 0 \tag{2.22}$$

(dado que la órbita va a ser simétrica respecto al eje polar, igualmente podríamos exigirle que $\theta(T + \tau/2) = \pi$; $\dot{r}(T + \tau/2) = 0$). Hemos expresado el periodo como $T + \tau$ en lugar de como T porque tomaremos T como el periodo de la órbita circular en la que se convierte la búsqueda cuando $\mu \rightarrow 0$. Además de lo anterior, la órbita debe verificar:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} R(\mu, r(0), \dot{\theta}(0), t) = R_0(t) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \Theta(\mu, r(0), \dot{\theta}(0), t) = \Theta_0(t)$$

Si tal solución existe, será la continuación analítica para $\mu \neq 0$ de la órbita circular de referencia, descrita arriba, para el caso $\mu = 0$.

Poincaré trató este problema en un contexto más amplio (Poincaré H.:1993, "New Methods of Celestial Mechanics". Vol 1: Periodic and Asymptotic Solutions). Veamos sus resultados:

Sea un sistema dinámico autónomo de dimensión n :

$$\dot{\vec{x}} = \vec{X}(\mu, \vec{x}); \quad \vec{\xi} = \vec{x}(0) \quad (2.23)$$

Supongamos que para $\mu = 0$ existen soluciones periódicas, de periodo T :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(t), \quad \phi(\vec{T}) = \vec{\phi}(0) = \vec{\xi}$$

Imaginemos una órbita para este mismo problema pero con $\mu \neq 0$ (siendo μ pequeño) y cuyas soluciones iniciales son próximas, pero no idénticas a la periódica del caso $\mu = 0$:

$$\vec{x}(0) = \vec{\phi}(0) + \vec{\beta}$$

Al cabo de un tiempo parecido, pero tampoco idéntico al periodo del caso $\mu = 0$, el estado será próximo al de partida:

$$\vec{x}(T + \tau) = \vec{\phi}(0) + \vec{\beta} + \vec{\Psi}$$

Nos interesa saber si, dado μ , existe alguna elección de $\vec{\beta}$ y τ que den lugar a una órbita periódica simple, es decir, tal que:

$$\vec{\Psi}(\mu, \vec{\beta}, \tau) = \vec{0} \quad (2.24)$$

Para un valor dado de μ , esta expresión es un sistema de n ecuaciones con $n + a$ variables: $\vec{\beta}, \tau$. Por tanto, existirán órbitas periódicas siempre que existan relaciones $\vec{\beta} = \vec{\beta}(\mu, \tau)$ que satisfagan (2.24).

Poincaré demostró que si las Ψ_i son funciones analíticas de μ, β y τ , una condición suficiente para que existan funciones $\vec{\beta} = \vec{\beta}(\mu, \tau)$ que verifiquen (2.24) para valores pequeños de μ , es que no todos los determinantes de la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \beta_n} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \beta_n} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \tau} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \Psi_n}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial \beta_n} & \frac{\partial \Psi_n}{\partial \tau} \end{pmatrix}$$

sean simultáneamente nulos para $\mu = \tau = 0$ y $\vec{\beta} = \vec{0}$. En tal caso existen soluciones periódicas de (2.23). Pero Poincaré demostró también que dichas soluciones pueden escribirse:

$$\vec{x}(\mu, \vec{\beta}, t) - \vec{\phi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{\gamma}_k(t) \mu^k$$

Además, como la solución es periódica de periodo $T + \tau$, puede ser expresada en forma de series de Fourier con argumento $2\pi t / (T + \tau) = \omega t$:

$$\vec{x}(\mu, \vec{\beta}, t) - \vec{\phi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\vec{a}_n \cos(\omega t) + \vec{b}_n \sin(\omega t) \right]$$

Es fácil deducir de la comparación de estas dos expresiones, que los coeficientes \vec{a}_n y \vec{b}_n pueden escribirse como series de potencias de μ :

$$\vec{a}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{a}_{n,k} \mu^k; \quad \vec{b}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{b}_{n,k} \mu^k$$

o bien:

$$\vec{\gamma}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{n,k} \vec{a} \cos(\omega' t) + b_{n,k} \vec{b} \sin(\omega' t) \right]$$

Volviendo al caso del problema restringido circular de los tres cuerpos, vamos a ver que cumple las condiciones exigidas por el teorema de Poincaré. En primer lugar existen órbitas periódicas circulares en el caso de $\mu = 0$, como ya hemos visto para $C > 3$. En general, si fijamos las condiciones iniciales (2.21), el que se cumplan las (2.22) dependerá de los valores que le demos a $r(0)$ y a $\dot{\theta}(0)$ (para un valor de μ dado). Las condiciones (2.22) se pueden expresar:

$$\begin{aligned} \Psi_1(\mu, r_0, \dot{\theta}_0, \tau) &= 0 \\ \Psi_2(\mu, r_0, \dot{\theta}_0, \tau) &= 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde hemos llamado $r_0 = r(0)$ y $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0)$, y siendo:

$$\Psi_1(\mu, r_0, \dot{\theta}_0, \tau) = \left(\frac{dr}{dt} \right)_{t=T+\tau}; \quad \Psi_2(\mu, r_0, \dot{\theta}_0, \tau) = \theta(T + \tau) - 2\pi$$

El teorema de Poincaré nos permite asegurar que existen soluciones periódicas si se cumple la condición:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta_0} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta_0} \end{vmatrix}_{\mu=0} \neq 0$$

es decir, con el determinante calculado para el problema de los dos cuerpos. Puede demostrarse que dicha condición se verifica ver por ejemplo: Sharma R.K.: 1976, A&A, 50, 257).

Por tanto, se sigue que *existe la continuación analítica de la solución del problema de los dos cuerpos al caso en que $\mu \neq 0$.*

Además, dicha órbita puede escribirse:

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 + \sum_j [a_j \cos(j\omega' t) + b_j \sin(j\omega' t)] \\ \theta(t) &= \omega t + \sum_j [d_j \cos(j\omega' t) + e_j \sin(j\omega' t)] \end{aligned}$$

con r_0 y ω el radio y la velocidad angular de la órbita circular de referencia del problema de los dos cuerpos en el sistema rotante, y ω' la nueva velocidad angular orbital (la de la órbita $\mu \neq 0$) en el mismo sistema de referencia. Los a_k, b_k, c_k, d_k estarán expresados como series de potencias de μ , por lo que esta expresión puede también escribirse:

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \sum_j [A_j^{(k)} \cos(j\omega' t) + B_j^{(k)} \sin(j\omega' t)] \\ \theta(t) &= \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \sum_j [D_j^{(k)} \cos(j\omega' t) + E_j^{(k)} \sin(j\omega' t)] \end{aligned}$$

siendo por tanto la relación entre los respectivos coeficientes:

$$a_j = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k A_j^{(k)}; \quad b_j = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k B_j^{(k)}; \quad d_j = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k D_j^{(k)}; \quad e_j = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k E_j^{(k)}$$

2.5. Estabilidad de las órbitas

Una vez encontrada la órbita periódica, resulta interesante también estudiar si se trata de una órbita estable o inestable. Existe un procedimiento que permite hacer este estudio de forma sencilla y aprovechando las propiedades del mapa de Poincaré (Hénon M.: 1965b, Annales d'Astrophysique, 28, 992).

Para verlo, trabajaremos en el sistema rotante habitual, pero en coordenadas cartesianas. El método estudia órbitas próximas a la periódica con el mismo valor de la constante de Jacobi haciendo uso de un teorema que dice que "para que una órbita periódica simple en el problema restringido circular de los tres cuerpos sea estable, es necesario y suficiente que el punto asociado a dicha órbita en el mapa de Poincaré sea estable".

Expresamos la transformación que representa el mapa de Poincaré como:

$$\begin{aligned}x_1 &= f(x_0, \dot{x}_0, C) \\ \dot{x}_1 &= g(x_0, \dot{x}_0, C)\end{aligned}\tag{2.26}$$

con C la constante de Jacobi y $x_1 = x_0$ el punto representante de la órbita periódica.

Las ecuaciones de movimiento tienen la propiedad de que quedan invariantes si se cambian a la vez el signo de y y del tiempo, por lo que:

$$\begin{aligned}x_0 &= f(x_1, -\dot{x}_1, C) \\ -\dot{x}_0 &= g(x_1, -\dot{x}_1, C)\end{aligned}\tag{2.27}$$

Sea el punto representante de la órbita periódica $x_1 = x_0, \dot{x}_1 = \dot{x}_0$. Consideremos ahora un punto muy cercano a (x_0, \dot{x}_0) : $(x_0 + \Delta x_0, \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}_0)$; su transformado será $(x_1 + \Delta x_1, \dot{x}_1 + \Delta \dot{x}_1)$ con:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= a\Delta x_0 + b\Delta \dot{x}_0 \\ \Delta \dot{x}_1 &= c\Delta x_0 + d\Delta \dot{x}_0\end{aligned}\tag{2.28}$$

siendo:

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \quad c = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad d = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}$$

La transformación (Szebehely, V.: 1967, Theory of Orbits, New York, Academic Press) tiene la propiedad de conservar las áreas :

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x_0, \dot{x}_0)} = 1$$

es decir:

$$ad - bc = 1\tag{2.29}$$

Las órbitas que nos interesan son simétricas, por tanto, para ellas $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Diferenciando (2.27):

$$\begin{aligned}\Delta x_0 &= a\Delta x_1 - b\Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_0 &= c\Delta x_1 - d\Delta \dot{x}_1\end{aligned}\tag{2.30}$$

Y por otra parte, invirtiendo (2.28):

$$\begin{aligned}\Delta x_0 &= d\Delta x_1 - b\Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_0 &= -c\Delta x_1 + a\Delta \dot{x}_1\end{aligned}\tag{2.31}$$

De la comparación de ambos sistemas resulta:

$$a = d$$

Pasemos ya a estudiar la estabilidad del punto. Para ello hay que obtener los valores propios de la transformación lineal (2.28): si su parte real tiene valor absoluto menor que 1, la órbita es estable, y si es mayor que 1, es inestable. Sean $(\Delta x_0)_p$ y $(\Delta \dot{x}_0)_p$ los vectores propios de esta transformación, entonces:

$$\begin{aligned} (\Delta x_1)_p &= \lambda(\Delta x_0)_p \\ (\Delta \dot{x}_1)_p &= \lambda(\Delta \dot{x}_0)_p \end{aligned} \tag{2.32}$$

Los valores propios vendrán dados por la ecuación:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

que teniendo en cuenta (2.29) queda:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + 1 = 0$$

Esta ecuación tiene dos raíces reales si $|a + d| > 2$, una de las cuales tiene valor absoluto mayor que 1 (ya que $\lambda_1 \lambda_2 = 1$) mientras que si $|a + d| < 2$, tiene dos raíces complejas conjugadas de módulo 1 (por la misma razón), por lo que sus partes reales tendrán valor absoluto menor que 1. En el primer caso, el punto invariante es inestable, y en el segundo es estable.

Como para el caso de una órbita periódica simple $a = d$, la condición de estabilidad para ellas es:

$$|a| < 1$$

Para calcular numéricamente el valor de a , se calcula una órbita muy próxima a la estudiada con Δx_0 pequeño y $\Delta \dot{x}_0$ nulo, y si Δx_1 es el valor de la desviación para la siguiente intersección con la sección de Poincaré, de (2.28) resulta que:

$$a = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \tag{2.33}$$

Este último apartado se desarrollará con mayor profundidad en el siguiente capítulo, donde se explica la metodología llevada a cabo.

Capítulo 3

Metodología

Summary chapter 3

In this chapter we will see the methodology carried out during the development of the work. In the first place, we will begin by defining the Runge-Kutta method in a general way, to later customize it and apply it to our study. Next we will detail the requirements that have to fulfill the initial conditions for the obtaining of pseudocircular orbits. In addition, this section will mainly develop the obtaining of the initial velocity v_{θ_0} through interpolation to search the desired orbits within a range of μ and r_0 determined. Finally, once the simple, periodic (and therefore closed) orbits are obtained, we will describe the calculation of their stability for later analysis in the results and discussion chapter.

3.1. El método de Runge-Kutta y su aplicación al problema tratado

Una vez estudiados los fundamentos teóricos involucrados en el cálculo de las órbitas en el Problema de los Tres Cuerpos Restringido, continuaremos con la metodología llevada a cabo para el cálculo de las órbitas. Para la integración de las ecuaciones de movimiento usaremos un método numérico puesto que no existe una solución analítica al problema, y en concreto, el método de Runge-Kutta debido a su sencillez y eficiencia. La ventaja de esta técnica es que no tenemos que tener cuidado con lo que ocurre para valores altos de μ , para los que las series estudiadas en la sección *existencia de soluciones pseudocirculares* pueden converger lentamente, o directamente no hacerlo. En cambio, la desventaja principal es que el procedimiento es más complicado porque hay que resolver las ecuaciones diferenciales para cada órbita que se calcule. Ello se debe a que el método sólo permite resolver problemas de valor inicial, es decir, obtener soluciones particulares, ya que para resolver una ecuación diferencial de forma numérica es necesario conocer las condiciones iniciales concretas del caso a integrar. Además, aunque los métodos numéricos son siempre aproximados, tienen la ventaja de que se puede alcanzar la precisión que se desee sin más que disminuir el paso de integración, a costa de que el tiempo de computación aumente considerablemente.

Sea el sistema de N ecuaciones de primer orden:

$$\dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_N)$$

$$\dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_N)$$

...

$$\dot{y}_N = f_N(t, y_1, y_2, \dots, y_N)$$

con condiciones iniciales:

$$y_{i,0} = y_i(t_0), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

donde $y_{i,0}$ y t_0 son valores dados.

Para abreviar, expresaremos el problema como:

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(t, \vec{y}); \quad \vec{y}_0 = \vec{y}(t_0)$$

En general, el problema de la resolución numérica del sistema consiste en, dado un paso h de la variable independiente t , obtener los valores de las soluciones del sistema para valores de t dados por $t_n = t_0 + nh$. El método de Runge-Kutta aproxima los valores reales de $\vec{y}(t_{n+1})$ mediante otros, que denotaremos y_{n+1} , cada uno de los cuales se obtiene a partir de los resultados obtenidos en el paso anterior, y_n , mediante el siguiente esquema:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= \vec{f}(t_n, y_n); & k_2 &= \vec{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= \vec{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right); & k_4 &= \vec{f}(t_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned}$$

El error local, es decir, el error cometido en cada paso es del orden de h^5 , mientras que el error global o acumulado es del orden de h^4 (Cheney, E. and Kincaid, D.: 2013).

Para la aplicación del método en nuestro caso (origen de coordenadas en el centro de masas), lo primero que haremos será reducir las dos ecuaciones de segundo orden (2.14) y (2.15) a un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden, introduciendo dos funciones adicionales, v_r y v_θ :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v_r \\ \dot{\theta} &= v_\theta - 1 \\ \dot{v}_r &= rv_\theta^2 + f_r(r, \theta) \\ \dot{v}_\theta &= \frac{-2v_r v_\theta + f_\theta(r, \theta)}{r} \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde:

$$\begin{aligned} f_r(r, \theta) &= -\frac{1-\mu}{r_1^3}(r + \mu \cos\theta) - \frac{\mu}{r_2^3}[r - (1-\mu)\cos\theta] \\ f_\theta(r, \theta) &= -\mu(1-\mu) \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \text{sen}\theta \end{aligned}$$

siendo:

$$r_1 = (r^2 + \mu^2 + 2\mu r \cos\theta)^{1/2}; \quad r_2 = [r^2 + (1-\mu)^2 - 2(1-\mu)r \cos\theta]^{1/2}$$

Nótese que, por una parte, v_θ es la velocidad angular de la partícula medida en el SRI, y que el sistema de ecuaciones (3.1), por otra, es un sistema autónomo, es decir, que no depende explícitamente del tiempo.

Comparando entonces con el caso general, tenemos:

$$\vec{y} = (r, \theta, v_r, v_\theta); \quad \vec{f} = \left(v_r, v_\theta - 1, rv_\theta^2 + f_r(r, \theta), \frac{-2v_r v_\theta + f_\theta(r, \theta)}{r} \right)$$

y:

$$k_i = (K_i, \vec{L}_i, M_i, N_i)$$

Su esquema de resolución es el siguiente: dados $t(0)$, $r(0)$, $\theta(0)$, $v_r(0)$, $v_\theta(0)$, y un paso h de integración, los sucesivos valores se obtienen:

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (3.2)$$

$$r_{n+1} = (h/6)(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (3.3)$$

$$\theta_{n+1} = (h/6)(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) \quad (3.4)$$

$$v_{r,n+1} = (h/6)(M_1 + 2M_2 + 2M_3 + M_4) \quad (3.5)$$

$$v_{\theta,n+1} = (h/6)(N_1 + 2N_2 + 2N_3 + N_4) \quad (3.6)$$

con:

$$\begin{aligned} K_1 &= v_{r,n}; \\ L_1 &= (v_{\theta,n} - 1); \\ M_1 &= (r_n v_{\theta,n}^2 + f_r(r_n, \theta_n)); \\ N_1 &= \frac{-2v_{r,n}v_{\theta,n} + f_\theta(r_n, \theta_n)}{r_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= v_{r,n} + \frac{h}{2}M_1; \\ L_2 &= (v_{\theta,n} - 1) + \frac{h}{2}N_1; \\ M_2 &= (r_n + \frac{h}{2}K_1)(v_{\theta,n} + \frac{h}{2}N_1)^2 + f_r(r_n + \frac{h}{2}K_1, \theta_n + \frac{h}{2}L_1); \\ N_2 &= \frac{-2(v_{r,n} + M_1(h/2))(v_{\theta,n} + N_1(h/2)) + f_\theta(r_n + K_1(h/2), \theta_n + L_1(h/2))}{r_n + K_1(h/2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3 &= v_{r,n} + \frac{h}{2}M_2; \\ L_3 &= (v_{\theta,n} - 1) + \frac{h}{2}N_2; \\ M_3 &= (r_n + \frac{h}{2}K_2)(v_{\theta,n} + \frac{h}{2}N_2)^2 + f_r(r_n + \frac{h}{2}K_2, \theta_n + \frac{h}{2}L_2); \\ N_3 &= \frac{-2(v_{r,n} + M_2(h/2))(v_{\theta,n} + N_2(h/2)) + f_\theta(r_n + K_2(h/2), \theta_n + L_2(h/2))}{r_n + K_2(h/2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_4 &= v_{r,n} + hM_3; \\ L_4 &= (v_{\theta,n} - 1) + hN_3; \\ M_4 &= (r_n + hK_3)(v_{\theta,n} + hN_3)^2 + f_r(r_n + hK_3, \theta_n + hL_3); \\ N_4 &= \frac{-2(v_{r,n} + hM_3)(v_{\theta,n} + hN_3) + f_\theta(r_n + hK_3, \theta_n + hL_3)}{r_n + hK_3} \end{aligned}$$

3.2. Condiciones iniciales para órbitas pseudocirculares

Como ya lo hemos ido comentando a lo largo del trabajo, estamos interesados en obtener órbitas cerradas, periódicas y simples, de modo que cuando θ aumenta 2π , el movimiento se repite. En esta sección vamos a obtener las condiciones iniciales del problema para obtener las órbitas deseadas. Para empezar, mediremos los ángulos a partir de la línea que une las dos componentes y supondremos que las órbitas son simétricas respecto a dicha línea. Esto nos impone las siguientes condiciones iniciales:

$$\theta(0) = 0 \qquad v_r(0) = 0$$

La segunda de estas condiciones es necesaria, pero no suficiente para que la órbita sea pseudocircular. El que lo sea dependerá de la velocidad inicial, es decir, de $v_\theta(0)$, y no sabemos a priori cual debe ser ésta para que la órbita sea del tipo deseado. Además, ese valor de $v_\theta(0)$ dependerá de $r(0)$.

Lo que se hará, por tanto, es fijar un valor de $r(0)$ y buscar el valor de $v_\theta(0)$ que logre el tipo de órbita deseada. Para ello se tantean valores en torno al correspondiente al caso en que la masa de la otra componente sea nula, es decir, el caso de órbita circular del problema de los dos cuerpos alrededor del centro de masas:

$$v_c = r^{-3/2}(0)$$

Después, a partir de este valor de referencia, v_c , se va variando la velocidad $v_\theta(0)$ hasta obtener la órbita buscada (nosotros, por ejemplo, hemos probado con valores de $v_\theta(0)$ comprendidos entre $0.5v_c$ y $1.5v_c$), ya que aunque el valor buscado de $v_\theta(0)$ no es igual a v_c , tampoco debe ser muy diferente. Para hacer esto con precisión es sumamente útil el concepto de mapa de Poincaré, el cual ya hemos explicado en el capítulo anterior. En nuestro caso concreto interesa construir un mapa de Poincaré cuya sección sea el eje que une las dos componentes. Como el sistema es de dimensión 4, la sección de Poincaré será de dimensión 3, y como ya de entrada estamos interesados en órbitas tales que $v_r(0) = 0$, en realidad es de dimensión 2 (r, θ).

Para calcularlo, por tanto, habrá que integrar las ecuaciones de movimiento desde $\theta = 0, r = r_0$ con $v_r(0) = 0$ hasta $\theta = 2\pi$, probando con distintos valores de $v_\theta(0)$, y ver si el valor obtenido de r tras dar una vuelta, r_1 coincide con r_0 . Si coincide tenemos la órbita buscada, y si no, hay que probar con otro valor de $v_\theta(0)$ hasta encontrar el adecuado.

Como puede verse, es de la máxima importancia calcular con exactitud el valor de r (y del tiempo, como se verá más adelante) para el que la partícula corta al eje al cabo de una vuelta. Pero como el tiempo se va calculando en intervalos de paso h , va a ser prácticamente imposible que el punto correspondiente a algún paso, k , del cálculo coincida exactamente con $\theta = 2\pi$, por lo que una vez se encuentre un punto que sobrepase el eje, habría que interpolar entre los dos últimos puntos para ver qué valor de r corresponde exactamente a $\theta = 2\pi$, añadiendo al error propio del método de integración, el de la interpolación. Sin embargo, existe un procedimiento para hacer este cálculo sin necesidad de interpolar para obtener el último paso, evitando así el error que conlleva el proceso de interpolación (Henon M.: 1982).

El método consiste en lo siguiente: una vez hemos sobrepasado el valor $\theta = 2\pi$, se vuelve al punto anterior, el último para el que $\theta = \theta_k < 2\pi$, y se sustituye el sistema de ecuaciones (3.1) por el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{v_r}{v_\theta - 1} \\ \frac{dv_r}{d\theta} &= \frac{\dot{v}_r}{\dot{\theta}} = \frac{rv_\theta^2 + f_r(r, \theta)}{v_\theta - 1} \\ \frac{dv_\theta}{d\theta} &= \frac{\dot{v}_\theta}{\dot{\theta}} = \frac{-2v_r v_\theta + f_\theta(r, \theta)}{r(v_\theta - 1)} \\ \frac{dt}{d\theta} &= \frac{1}{v_\theta - 1}\end{aligned}$$

es decir, tomando como variable independiente θ en lugar de t , y se resuelve este nuevo sistema, equivalente al anterior, tomando un paso de θ , $\Delta\theta = 2\pi - \theta_k$ el último valor obtenido de θ menor que 2π . De este modo, el último paso da el punto para el que $\theta = 2\pi$ exactamente. Después se continúa trabajando con el sistema inicial.

Una vez obtenidos los mapas de Poincaré para distintos valores de $v_\theta(0)$ hay que seleccionar aquel que origina la órbita periódica. Un modo eficiente y simple de realizar esto consiste en calcular la diferencia de posición Δr entre el último punto de la órbita r_1 y el primer valor de r , $r(0) = r_0$ para sucesivas órbitas con condiciones iniciales fijas $r(0) = r_0$, $\theta(0) = 0$, $v_r(0) = 0$. De este modo, variando ligeramente $v_\theta(0)$, y representando en una gráfica la diferencia de posición frente a los correspondientes valores de $v_\theta(0)$, calculamos el valor de $v_\theta(0)$ que da lugar a $\Delta r = 0$. Para ello, interpolamos la curva con un polinomio de grado 2 entre los puntos en los que existe un cambio de signo de Δr , obteniendo el valor o los valores de $v_\theta(0)$ para el que la órbita es periódica.

En definitiva, los pasos para obtener la velocidad inicial $v_\theta(0)$ que consigue que la órbita sea pseudocircular son los siguientes:

1. Seleccionamos el rango de μ en el que queremos trabajar. En nuestro caso, los valores oscilan entre $0.05 \leq \mu \leq 0.95$, con un paso de $\mu = 0.05$.
2. El siguiente paso consiste en establecer el rango de r_0 en el que vamos a trabajar. Como estamos hablando de órbitas externas ($r_0 > 1$), hemos definido una escala logarítmica con el objetivo de estudiar un mayor número de órbitas con valores de r_0 más pequeños. El rango seleccionado ha sido $\ln r_0 = 0.1$ hasta $\ln r_0 = 3.0$ con un paso intermedio de 0.1, lo que viene a dar valores de r_0 comprendidos entre $1.105 \leq r_0 \leq 20.086$ aproximadamente.
3. Una vez escogido el valor de μ y el valor de r_0 , falta por escoger el rango de velocidad inicial $v_\theta(0)$, a partir del cual trabajaremos. La selección de este intervalo ya se ha explicado anteriormente, por lo que una vez escogidos todos los parámetros mencionados, el programa en Python calcula, para cada valor de $v_\theta(0)$, tanto el primer valor de r , $r(0) = r_0$, como el último r_1 , es decir, el valor de r que corresponde exactamente a $\theta = 2\pi$. Y todo ello mediante el método Runge Kutta aplicado a nuestro problema con un paso de integración $h = 0.005$.
4. Por último, se calculan $\Delta r = r_1 - r_0$, $\Delta v_r = v_{r,1} - v_{r,0}$, $\Delta v_\theta = v_{\theta,1} - v_{\theta,0}$ y se representan dichos valores frente a $v_\theta(0)$ para cada valor de μ y r_0 . Buscamos detectar el valor de $v_\theta(0)$ para el que $\Delta r = 0$, $\Delta v_r = 0$, $\Delta v_\theta = 0$ y por tanto la órbita sea pseudocircular. Para realizar este paso interpolaremos mediante el método de Lagrange la curva Δr frente a $v_\theta(0)$ con un polinomio de grado 2, lo que quiere decir que vamos a calcular un polinomio que pase por tres puntos. Dos de ellos se corresponderán con los puntos existentes antes y después del cambio de signo, mientras que el tercero puede ser un punto contiguo a cualquiera de los dos primeros. El resultado serán los puntos en los que $\Delta r = 0$, a partir de los cuales se podrá deducir el valor o los valores de $v_\theta(0)$ para los que la órbita es cerrada, simple y periódica.

3.3. Cálculo de la estabilidad

Una vez que hemos encontrado la órbita deseada, guardamos en un fichero de texto todos los parámetros que la definen. En concreto, hemos guardado todos los valores de $t, r, \theta, v_r, v_\theta, x, y$ y C , donde C es la media de la constante de Jacobi de dicha órbita, y x e y los valores de las coordenadas cartesianas en el sistema de referencia corrotante (SRC).

El parámetro que mide la estabilidad de la órbita, tal y como se ha visto en el capítulo de fundamentos teóricos, se define de la siguiente manera:

$$a = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}$$

donde Δx_0 representa la pequeña perturbación, y Δx_1 el valor de la desviación para la siguiente intersección con la sección de Poincaré.

Para calcular los valores de cada uno de ellos se han seguido los siguientes pasos:

1. Queremos calcular una órbita muy próxima a la estudiada, por lo que Δx_0 debe tener un valor pequeño. Por este motivo, se ha definido del siguiente modo: $\Delta x_0 = 0,001r_0$, con r_0 el primer punto de la órbita sin perturbar.
2. Para calcular la órbita perturbada, tendremos que imponer unos requisitos. Está claro que las condiciones iniciales $t'(0) = 0$, $\theta'(0) = 0$ y $v_r'(0) = 0$ serán las mismas que en el caso de la órbita pseudocircular no perturbada ya estudiada, según hemos visto en el análisis de las secciones de Poincaré. Sin embargo, tendremos que establecer cuáles serán las condiciones $r'(0)$, $v_\theta'(0)$ de la órbita perturbada.
3. Como ya hemos definido la perturbación, entonces $r'(0)$ de la órbita perturbada será $r'(0) = r(0) + \Delta x_0$. Por otro lado, queremos obtener una órbita con el mismo valor de la constante de Jacobi C . Por tanto, teniendo en cuenta esto, si despejamos $v_\theta'(0)$ de la expresión (2.16), obtenemos que:

$$v_\theta'(0) = -\sqrt{2\frac{1-\mu}{r_1'(0)r'(0)^2} + 2\frac{\mu}{r_2'(0)r'(0)^2} - \frac{C}{r'(0)^2} - \frac{v_r'(0)}{r'(0)^2} + 1 + 1}$$

donde:

$$r_1'(0)^2 = r'(0)^2 + \mu^2 + 2\mu r'(0) \cos \theta'(0); \quad r_2'(0)^2 = r'(0)^2 + (1-\mu)^2 - 2(1-\mu)r'(0) \cos \theta'(0)$$

4. Una vez conocidas las condiciones iniciales de la órbita perturbada a calcular, arrancamos el método Runge Kutta con el mismo paso de integración $h = 0.005$, obteniendo el último valor de r' , r_1' para el que el valor de $\theta' = 2\pi$. De este modo, se define $\Delta x_1 = r_1' - r_0$.

Conviene destacar que todo el desarrollo realizado se basa en cálculos aproximados, porque para poder trabajar numéricamente hemos aproximado todo el desarrollo a primer orden. Por tanto, los resultados obtenidos serán exactos en la medida en que Δx_0 sea suficientemente pequeño, y en nuestro caso, una buena aproximación es definirlo como una milésima de r_0 , ya que hemos trabajado en nuestro programa con un paso de integración del orden de milésimas.

Finalmente, se han clasificado las órbitas en estables o inestables atendiendo al módulo de a :

$$\begin{aligned} |a| < 1, & \quad (\text{estable}) \\ |a| > 1, & \quad (\text{inestable}) \end{aligned}$$

Capítulo 4

Resultados y discusión

Summary chapter 4

In this chapter we will expose the most relevant results of the study. We will begin by presenting the results of the problema of the two bodies, as the analytical solution as well as the one obtained by the Runge-Kutta method. After commenting on the differences between both procedures, we will continue with the problem of the three bodies, where we will carry out, in the first place, a small check for small values of μ in order to verify the correct operation of the method.

Once this is done, we will introduce the $\Delta r, \Delta v_r, \Delta v_\theta$ vs v_{θ_0} graphics for different values of μ and r_0 in order to obtain the initial velocity v_{θ_0} that leads to the desired orbit. Next we will show the representation of some of the calculated orbits with a diagram (C vs r_0) for their analysis. In the last place we will show the diagrams a vs r_0 and a vs C in order to study its stability.

As we will see, the most interesting orbits are among the first values of r_0 , and as we increase this parameter, the orbits seem to begin to behave similarly regardless of the μ value.

4.1. El Problema de los Dos Cuerpos

Empezaremos por presentar y discutir los resultados referidos al Problema de los Dos Cuerpos. Se trata de una buena elección puesto que además de resolver el problema numéricamente mediante el método de Runge-Kutta para $\mu = 0$, también lo hemos resuelto de forma analítica, de manera que nos permitirá comprobar que el programa funciona correctamente para su posterior aplicación al Problema Restringido Circular de los Tres cuerpos (PRTC) ($\mu \neq 0$).

La resolución analítica del Problema de los Dos Cuerpos es bien conocida (véase por ejemplo, González Martínez-País, I.: 2003). Este apartado está ampliamente desarrollado en la citada obra, por lo que nosotros nos limitaremos a incluir directamente los resultados obtenidos.

En nuestro caso, hemos empezado por definir las condiciones iniciales del problema, así como los diferentes parámetros que caracterizan la órbita en el Problema de los Dos Cuerpos. En concreto, el método Runge-Kutta comienza por definir el semieje mayor de la órbita a y su excentricidad e , a partir de los cuales es posible calcular la energía por partícula E_p y el momento angular por partícula l , respectivamente. Con ello se consigue, a su vez, calcular la velocidad angular inicial $v_\theta(0)$, además de la posición inicial $r(0)$ de la partícula de masa reducida $\mu = 0$, siendo las demás condiciones $t(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $v_r(0) = 0$.

Estableciendo un paso de integración $h = 0.01$, $a = 3.0$ (órbita externa), $e = 0.8$, y un periodo $T = 2\pi$ con la adimensionalización del problema, obtenemos el resultado que se muestra

en las Figuras 4.1 a 4.3:

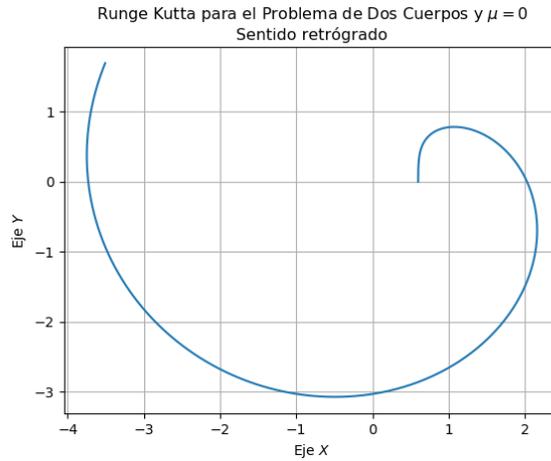


Figura 4.1: Método Runge-Kutta para el Problema de Los Dos Cuerpos con $a = 3.0$, $e = 0.8$, $h = 0.01$, $T = 2\pi$. SRC, sentido retrógrado.

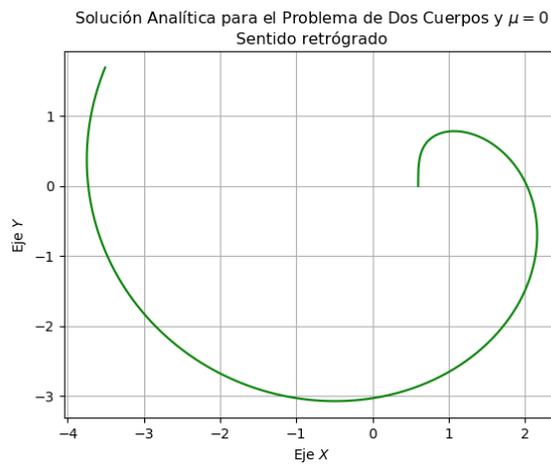


Figura 4.2: Solución analítica para el Problema de Los Dos Cuerpos con $a = 3.0$, $e = 0.8$, y $T = 2\pi$. SRC, sentido retrógrado.

Como podemos observar en las Figuras 4.1 y 4.2 (, la trayectoria de la partícula es prácticamente igual a simple vista, lo que nos da idea del buen funcionamiento del método. No obstante, para tener una visión más clara de las diferencias entre los procedimientos hemos calculado las diferencias de posición entre ambos para un mismo instante de tiempo. Llamando x_{SA} , y_{SA} y x_{RK} , y_{RK} a las posiciones de la partícula correspondientes a la solución analítica y al método Runge-Kutta, respectivamente, obtenemos que el error relativo a lo largo del tiempo es:

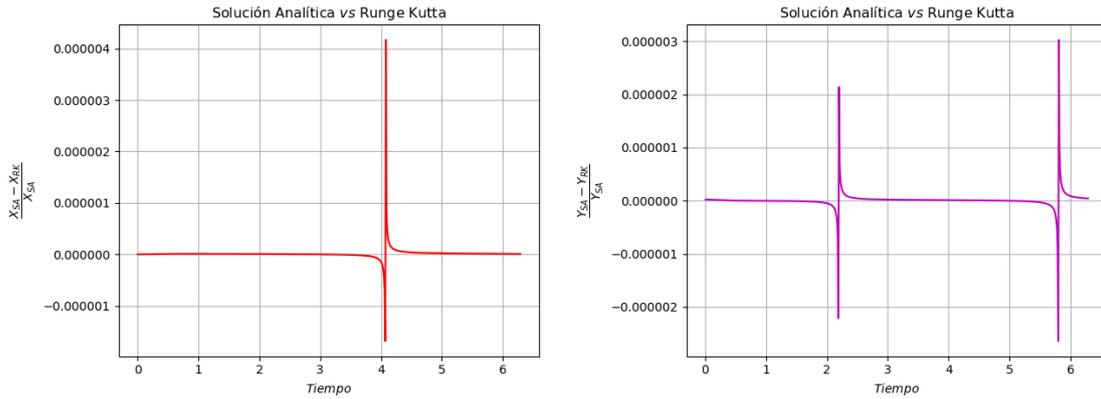


Figura 4.3: $a = 3,0$, $e = 0,8$. A la izquierda se representa el error relativo de la posición en la coordenada cartesiana x frente al tiempo, mientras que a la derecha observamos el error en y . Ello nos da idea acerca de la diferencia entre ambos procedimientos: la solución numérica y el método Runge-Kutta.

En la Figura 4.3 se puede apreciar que la diferencia de posición es mínima, siendo el error relativo siempre menor que $4 \cdot 10^{-6}$.

4.2. El Problema de los Tres Cuerpos Restringido

4.2.1. Primera Comprobación

Una vez resuelto el Problema de los Dos Cuerpos, sí que entraremos de lleno en el estudio del Problema de los Tres Cuerpos. Tal y como se ha visto en el capítulo de *Metodología*, el primer paso de todos consiste en seleccionar el rango de μ y de r_0 en el que vamos a trabajar. No obstante, antes de entrar en dicha cuestión, así como de obtener por interpolación las velocidades iniciales que dan lugar a las órbitas pseudocirculares, hemos querido realizar, en este caso, una nueva comprobación del método Runge-Kutta para valores bajos de μ .

En concreto, hemos fijado un valor de $\mu = 0.2$. De este modo, prefijando unos valores para las condiciones iniciales $r_0 = r(0) = 2.4$, $v_\theta(0) = r_0^{-3/2}$ (el resto de condiciones iniciales $t(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $v_r(0) = 0$ serán las mismas de ahora en adelante), e integrando durante una vuelta $n = 1$ con un paso de integración $h = 0.01$, obtenemos, el resultado que se muestra en la Figura 4.4:

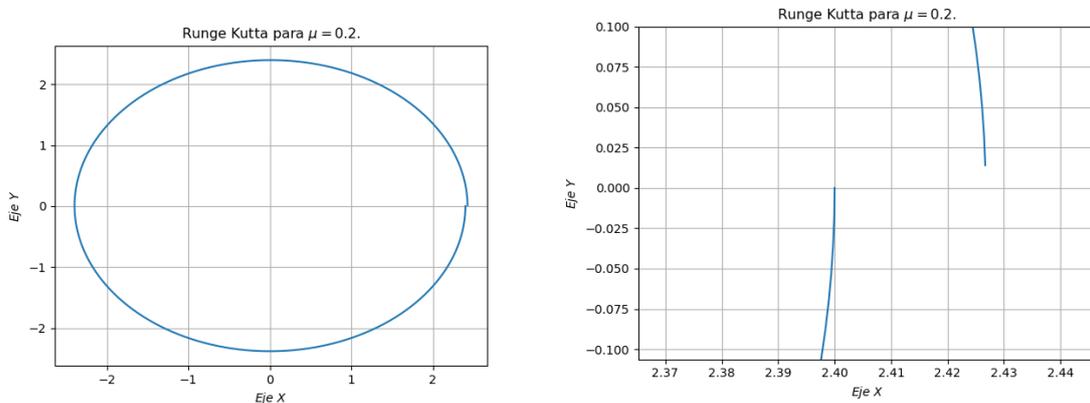


Figura 4.4: Órbita para $\mu = 0.2$, $n = 1$, $h = 0.01$

Tal y como podemos observar en la Figura 4.4, la órbita no llega a cerrarse. Ello se debe precisamente a que no hemos interpolado aún para obtener la velocidad inicial exacta con la que lo hace. Además, también debemos percatarnos de que incluso el último punto calculado de la órbita no llega a 2π . Este problema se resolverá más adelante y se mostrará en los siguientes resultados, aunque ya se ha comentado cómo solucionarlo en el capítulo de *Metodología*. Por otro lado, comprobamos de nuevo que el método Runge-Kutta parece funcionar adecuadamente.

4.2.2. Gráficas Δr , Δv_θ , Δv_r vs v_{θ_0}

En el capítulo de *Metodología*, y en particular en la sección *Condiciones iniciales para órbitas pseudocirculares* se han explicado detalladamente los pasos a seguir para la obtención de este tipo de gráficas. Sin embargo, conviene destacar que llegados a este punto, hemos decidido modificar ligeramente nuestro programa para eliminar y descartar las órbitas en las que existe un paso hacia atrás en el ángulo θ en un cierto instante de tiempo t (puntos de retroceso). El objetivo principal con esta tarea ha sido ganar velocidad de cálculo a la hora de obtener las velocidades iniciales interpoladas puesto que este tipo de órbitas no son simples, y por tanto no nos interesan.

En lo que sigue de apartado nos limitaremos simplemente a presentar los resultados obtenidos para su posterior análisis. Cabe destacar que debido al rango tan amplio de valores en los que hemos trabajado, nos resultará imposible presentar todas las gráficas. Empezaremos por los valores más pequeños de μ y r_0 , y a medida que dichos valores vayan aumentando, intentaremos establecer ciertas similitudes entre los resultados.

A continuación se muestran algunos de ellos:

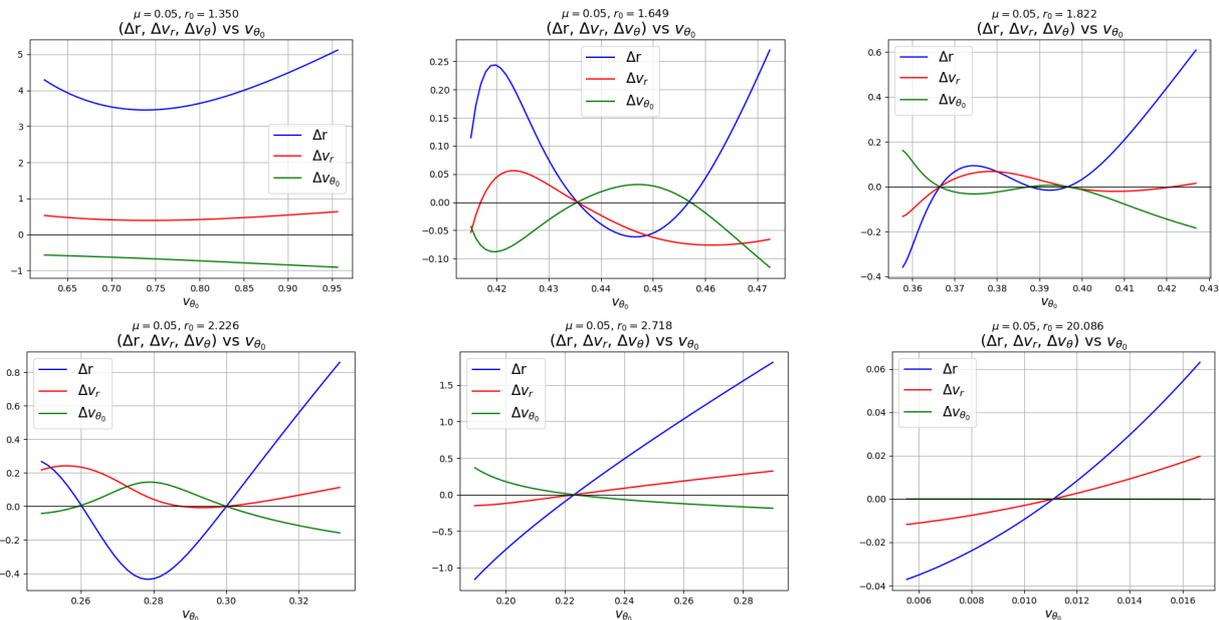


Figura 4.5: Gráficas Δr , Δv_θ , Δv_r vs v_{θ_0} para $\mu = 0.05$

En esta primera figura (Figura 4.5) observamos los primeros resultados. Para valores pequeños de r_0 , como por ejemplo $r_0 = 1.350$, comprobamos que no existe ningún corte de las curvas Δr , Δv_θ , Δv_r con el eje de abscisas v_{θ_0} . Esto quiere decir que para este valor de μ y r_0 no existe ninguna velocidad inicial v_{θ_0} para el que la órbita es cerrada, simple y periódica. A medida que presentemos el resto de gráficas para los demás valores de μ nos percataremos de que, en general, este patrón se repite para los primeros valores de r_0 .

Analizando el resto de gráficas percibimos que sí existen cortes de las curvas con el eje de abscisas. Por ejemplo, nos damos cuenta de que el primer valor de r_0 para el que existen

órbitas pseudocirculares es alrededor de $r_0 = 1.649$. En concreto, observamos que la curva Δr se hace cero en dos puntos a lo largo del eje horizontal. Esto quiere decir que en principio tenemos dos posibles velocidades iniciales que darían lugar a las órbitas pseudocirculares. De hecho, si interpolamos mediante el método de Lagrange obtendríamos con mayor precisión estos dos valores, pero posteriormente sería necesario comprobar si los dos o sólo uno de ellos es válido. Aquí es donde entran en juego el resto de curvas (Δv_θ , Δv_r) puesto que con ellas podemos identificar el valor correcto. En efecto, si volvemos a analizar la gráfica observaremos que, aunque Δr se corta dos veces con el eje de abscisas, sólo existe un punto en el que las tres curvas se cortan con el mismo eje, indicando precisamente el valor correcto de $v_{\theta_0} = 0.436$. El otro no se corresponde con una órbita circular.

Por otro lado, si nos fijamos en la gráfica en la que $r_0 = 1.822$ y seguimos el mismo procedimiento que en el caso anterior, advertiremos que existen dos puntos en los que las curvas Δr , Δv_θ , Δv_r se anulan a la vez. En este ejemplo, existirán, por tanto dos valores de v_{θ_0} para los que la órbita cumple las condiciones buscadas, y que se calcularán con mayor precisión posteriormente mediante interpolación.

En el resto de gráficas observamos que sólo existe un punto de corte entre las curvas, y que a partir de $r_0 = 2.718$ éstas tienen la misma forma. En efecto, hemos considerado también el último valor de $r_0 = 20.086$ para comprobarlo, y efectivamente se cumple lo dicho, aunque las velocidades iniciales sean diferentes en cada caso.

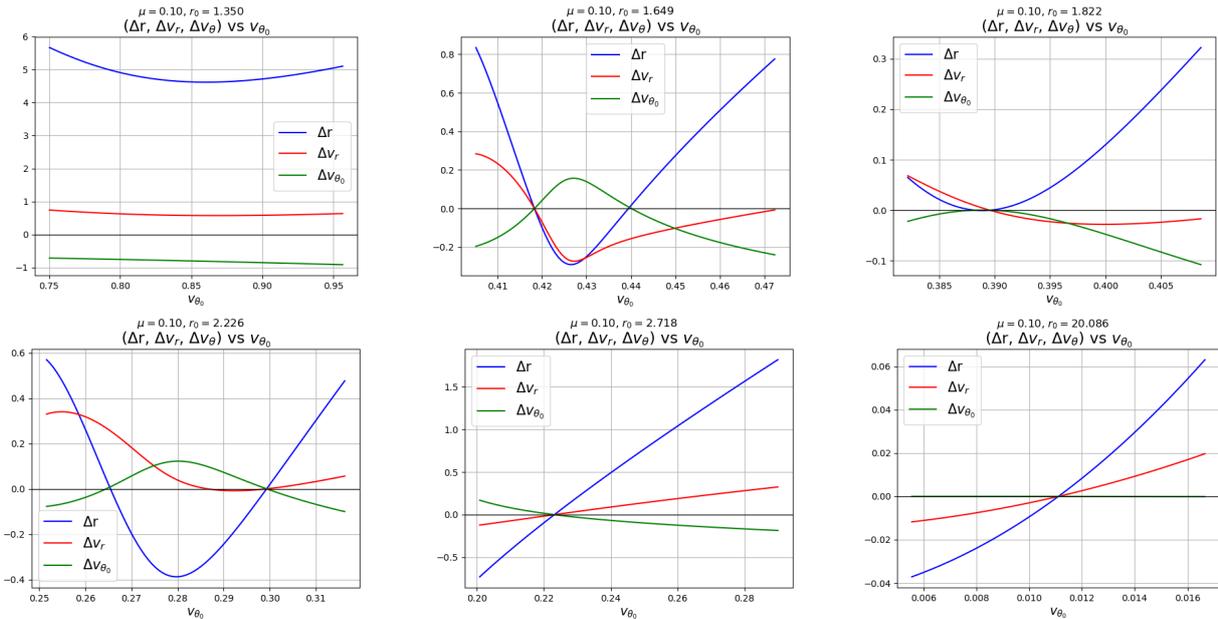


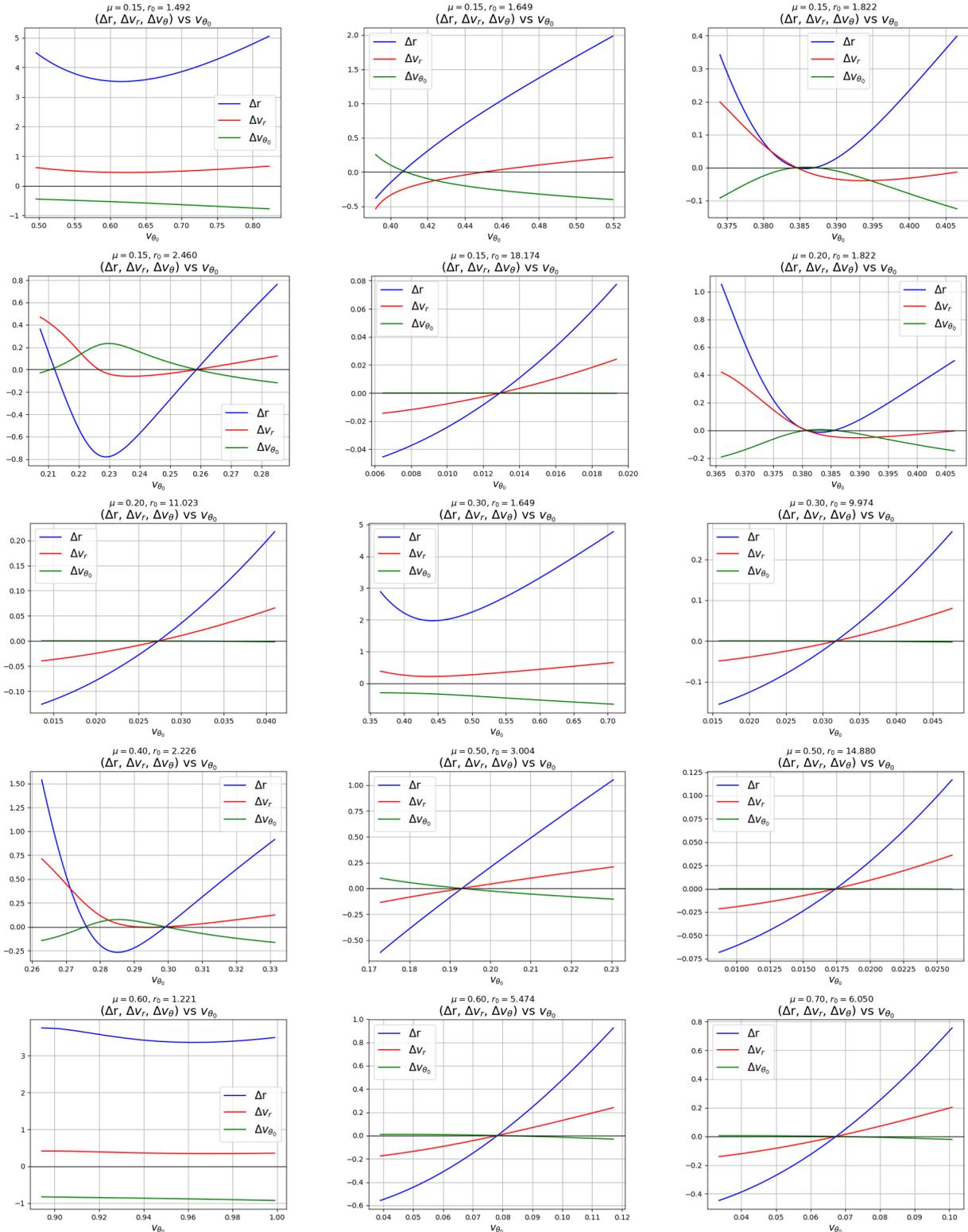
Figura 4.6: Gráficas Δr , Δv_θ , Δv_r vs v_{θ_0} para $\mu = 0.10$ y algunos valores de r_0

En la figura 4.6 se presentan los mismos valores de r_0 pero en este caso para un valor de $\mu = 0.10$. Como podemos apreciar, los resultados son bastante similares. En primer lugar, observamos que las curvas Δr , Δv_θ , Δv_r comienzan a tener cortes con el eje de abscisas v_{θ_0} para un valor alrededor de $r_0 = 1.649$, al igual que en el ejemplo anterior. Así mismo recordamos que, aunque los valores de r_0 oscilan entre $1.105 \leq r_0 \leq 20.086$, no hemos podido incluirlos todos debido a la excesiva extensión que conllevaría. No obstante, sí que vale la pena comentar que para el valor de $\mu = 0.10$ no existe ningún caso en el que se encuentren dos velocidades iniciales válidas como en el caso de $\mu = 0.05$ y $r_0 = 1.822$.

Debido a la similitud de los resultados para valores intermedios de μ , intentaremos ilustrar algunos ejemplos entre muchos en lo que sigue. Analizando las gráficas para valores de μ comprendidos entre $\mu = 0.15$ y $\mu = 0.85$ observamos que, a diferencia de los casos anteriores,

encontramos velocidades v_{θ_0} que dan lugar a órbitas pseudocirculares para valores más altos de r_0 . Es decir, mientras que antes las curvas Δr , Δv_θ , Δv_r empezaban a cortarse con el eje de abscisas a partir de $r_0 = 1.649$, ahora lo hacen a partir de alrededor de $r_0 = 1.822$. Además, no encontramos ningún caso en el que para un valor dado de μ en este rango y de r_0 exista más de una v_{θ_0} válida que de lugar a las órbitas deseadas.

En la Figura 4.7 podemos apreciar cómo, en algunos casos, no existen cortes de las curvas con el eje horizontal, como para $\mu = 0.30$, $r_0 = 1.649$ y $\mu = 0.60$, $r_0 = 1.221$. Por otro lado, observamos gráficas en las que existe el valor de v_{θ_0} buscado para la órbita cerrada, simple y periódica.



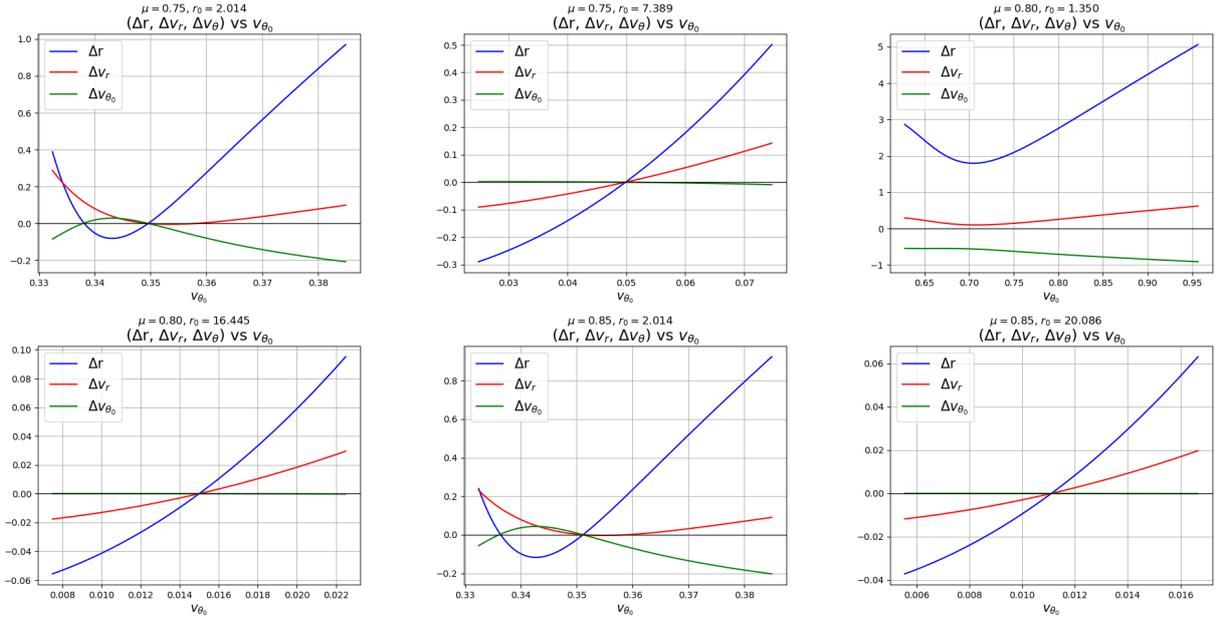
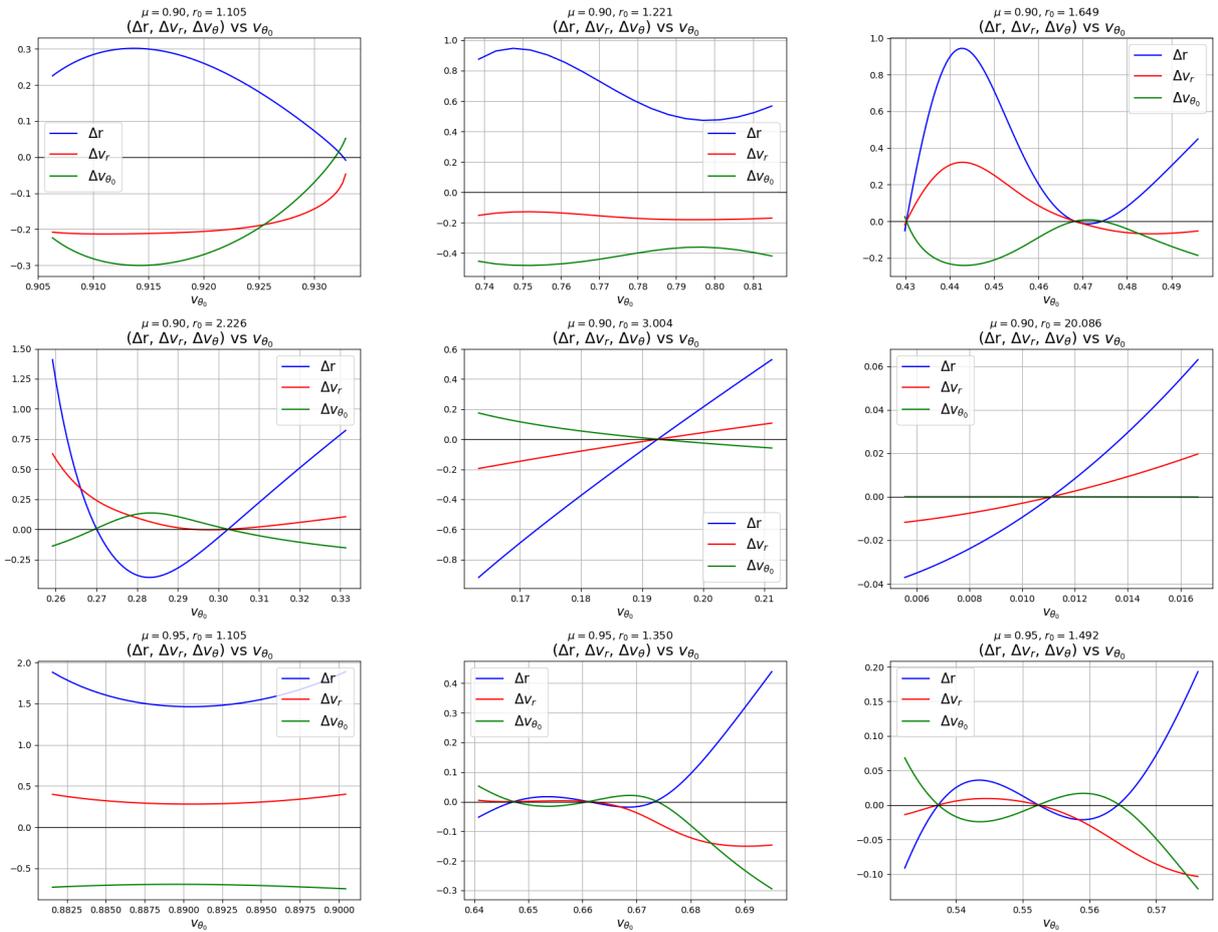


Figura 4.7: Gráficas $\Delta r, \Delta v_{\theta}, \Delta v_r$ vs v_{θ_0} para diferentes valores de μ y r_0 .

Por último, presentamos algunos de los resultados destacados referidos a los últimos valores de μ (Figura 4.8):



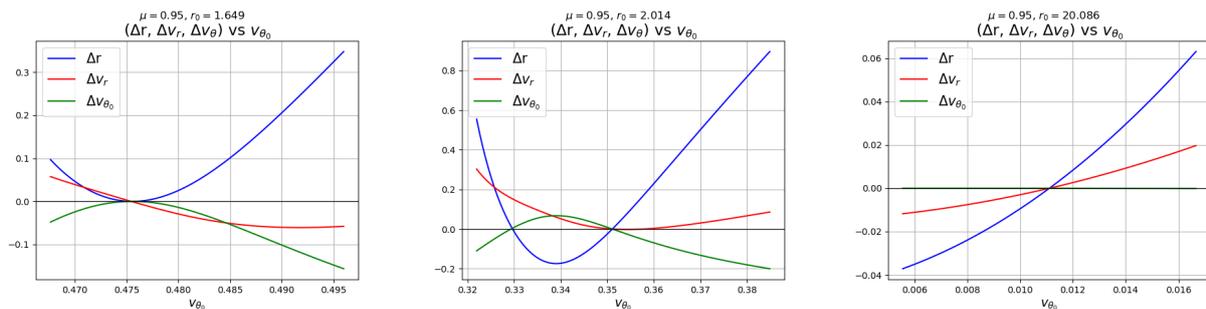


Figura 4.8: Gráficas Δr , Δv_{θ} , Δv_r vs v_{θ_0} para $\mu = 0.90$, $\mu = 0.95$ y algunos valores de r_0 .

Quizás, estos últimos ejemplos sean de los más llamativos por los siguientes motivos. Para empezar, a diferencia de los valores de μ comprendidos entre $\mu = 0.15$ y $\mu = 0.85$, observamos que las velocidades v_{θ_0} deseadas comienzan a obtenerse para $r_0 = 1.649$ en el caso de $\mu = 0.90$, mientras que para $\mu = 0.95$ lo hacen a partir de $r_0 = 1.350$. Así mismo, percibimos ciertas peculiaridades en ambos casos, puesto que para un mismo valor de μ y de r_0 existen dos valores de v_{θ_0} que originan las órbitas pseudocirculares. En efecto, si nos fijamos en la gráfica para $\mu = 0.90$ y $r_0 = 1.649$ observamos que existen dos puntos en los que las curvas Δr , Δv_{θ} , Δv_r cortan con el eje de abscisas, mientras que en el caso de $\mu = 0.95$ también existen dos valores de $r_0 = 1.350$ y $r_0 = 1.492$ y $r_0 = 1.649$ para los que esto ocurre. A partir de estos valores en adelante observamos que sólo existe un punto de corte.

Por tanto, podemos concluir este apartado interpretando que las regiones de mayor interés para el caso de las órbitas pseudocirculares externas en el Problema Restringido Circular de los Tres Cuerpos son aquellas en las que el parámetro r_0 toma valores más pequeños. A medida que éste aumenta, llega un punto en el que, independientemente del valor de μ , parece que las órbitas se comportan de la misma manera puesto que las componentes que forman el sistema se encuentra más alejadas. Es decir, en todos los casos, para valores de r_0 suficientemente pequeños no hay órbitas, para valores intermedios de r_0 pueden existir una o dos órbitas dependiendo del caso, y para r_0 grandes siempre hay una órbita.

4.2.3. Datos de la interpolación

Una vez estudiadas las gráficas Δr , Δv_{θ} , Δv_r frente a v_{θ_0} , podemos conocer *a priori* cuáles son las velocidades iniciales deseadas para obtener las órbitas cerradas, simples y periódicas. Sin embargo, necesitamos interpolar la curva Δr (como ya se ha comentado en el capítulo de *Metodología*) para establecer con mayor exactitud dichos valores de v_{θ_0} .

En este apartado lo que haremos será analizarlas e intentar sacar alguna conclusión general. Además, presentaremos también junto con las velocidades algunos de los resultados de la media de la constante de Jacobi para diferentes valores de μ y r_0 , así como algunas de las órbitas obtenidas a modo de ejemplo.

Al igual que en la subsección anterior, empezaremos por comentar algunos de los aspectos más importantes para los primeros valores de μ . Si tomamos $\mu = 0.05$, entonces observaremos que las velocidades iniciales obtenidas mediante interpolación van en sentido decreciente desde $v_{\theta_0} = 0.436$ para $r_0 = 1.649$ hasta $v_{\theta_0} = 0.011$ para $r_0 = 20.086$. En el caso particular de $r_0 = 1.822$ en el que existen dos valores de la velocidad inicial, tenemos que $v_{\theta_0} = 0.367$ y $v_{\theta_0} = 0.397$, siendo la gráfica de sus órbitas las mostradas en la Figura 4.9:

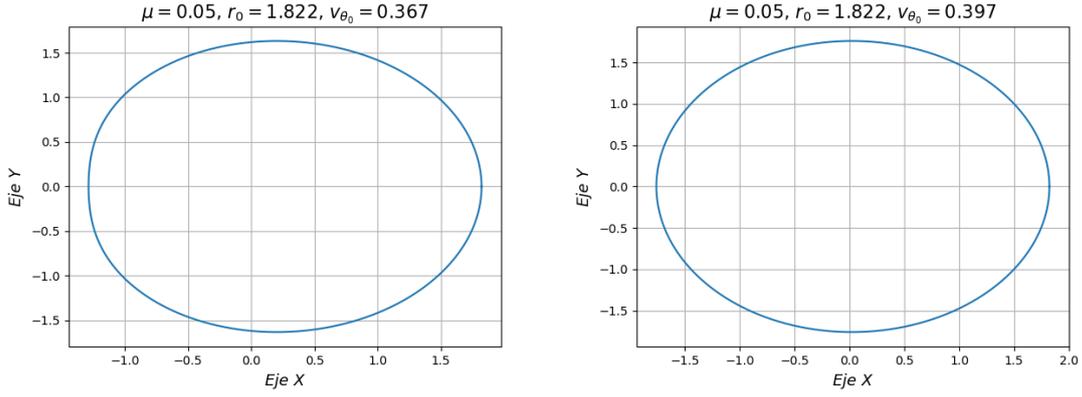


Figura 4.9: Órbitas pseudocirculares para $\mu = 0.05$ y $r_0 = 1.822$.

Por su parte, los valores de la constante de Jacobi aumentan entre $C = 3.114$ para $r_0 = 1.649$ hasta $C = 9.014$ para $r_0 = 20.086$.

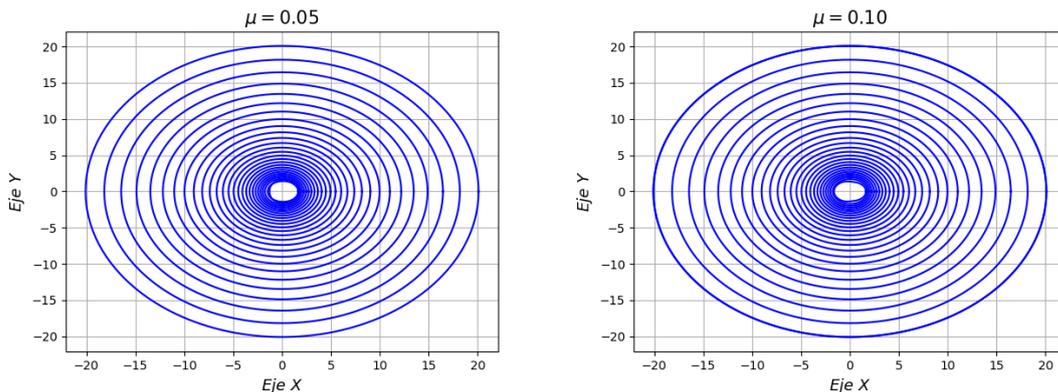
En cuanto a $\mu = 0.10$, los valores de v_{θ_0} abarcan desde $v_{\theta_0} = 0.418$ para $r_0 = 1.649$ hasta $v_{\theta_0} = 0.011$ para $r_0 = 20.086$. La media de la constante de Jacobi se comporta de manera similar.

Para el resto de valores de μ superiores observamos que, de manera general, las velocidades adquieren prácticamente el mismo valor para r_0 grandes. Es decir, éstas empiezan a parecerse cuando r_0 aumenta independientemente del valor de μ . No obstante, para r_0 más pequeños sí que notamos algunas diferencias, lo que se encuentra en consonancia con lo comentado en el apartado anterior. Por ejemplo, mientras que las v_{θ_0} toman valores desde $v_{\theta_0} = 0.385$ para $\mu = 0.15$ hasta $v_{\theta_0} = 0.011$ en sentido decreciente, para $\mu = 0.95$ lo hacen desde $v_{\theta_0} = 0.647$ hasta $v_{\theta_0} = 0.011$. En lo que se refiere a la constante de Jacobi siguen sin existir grandes cambios a pesar de variar μ y r_0 .

4.2.4. Gráficas de las órbitas pseudocirculares

El siguiente paso es mostrar las buscadas órbitas pseudocirculares para el Problema de los Tres Cuerpos. Al igual que se ha comentado en apartados anteriores, será imposible presentar todos los resultados debido a la extensión límite del trabajo. No obstante, se intentarán analizar las órbitas de manera general, exponiendo a continuación algunas de las más relevantes para su posterior estudio.

Comenzaremos por los valores de μ más pequeños. En concreto, trabajaremos con los valores de $\mu = 0.05$, $\mu = 0.10$, $\mu = 0.15$ y $\mu = 0.20$. En la siguiente figura se muestran las órbitas calculadas a partir de las v_{θ_0} obtenidas mediante interpolación para todos los valores de r_0 :



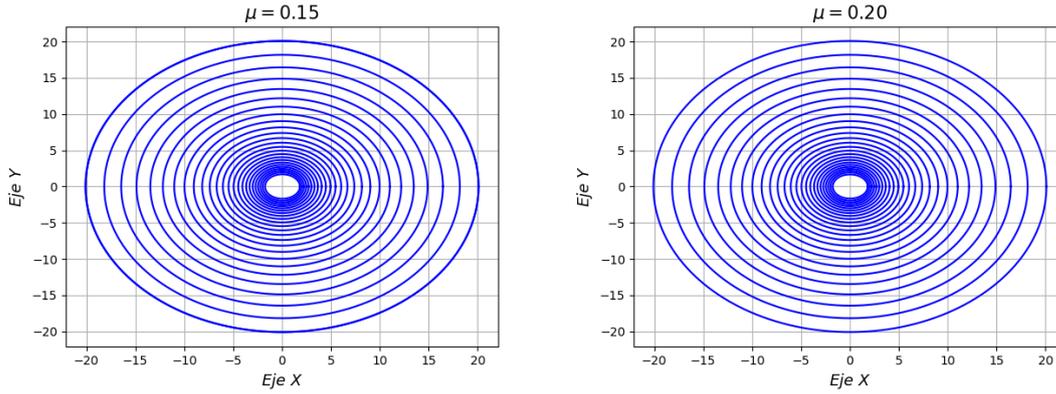


Figura 4.10: Órbitas pseudocirculares para $\mu = 0.05$, $\mu = 0.10$, $\mu = 0.15$ y $\mu = 0.20$

Como podemos observar, las órbitas, por lo general adquieren la misma forma para estos valores de μ , sobre todo a medida que nos vamos desplazando en sentido ascendente por los valores de r_0 . Sin embargo, aunque a primera vista no se aprecian muchas diferencias, sí que existen algunas variaciones entre los diferentes valores de μ para los r_0 más pequeños.

Cuando hablamos sobre la posibilidad de la existencia de varios valores de v_{θ_0} para un r_0 y μ dados, comprobamos que para $\mu = 0.05$ y $r_0 = 1.822$ teníamos dos valores de la velocidad inicial que satisfacían nuestras condiciones para buscar las órbitas deseadas. Si observamos la Figura 4.11, nos percataremos mejor de las diferencias entre los primeros valores de r_0 , y en concreto, de la órbita con el mismo r_0 pero diferente v_{θ_0} . De este modo, a partir de $r_0 = 2.014$ en adelante observamos que las órbitas adquieren la misma forma aunque éstas se van agrandando progresivamente puesto que r_0 , como es evidente, también va incrementando su valor.

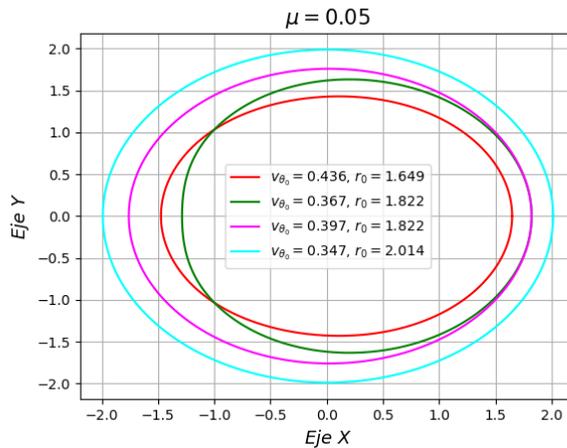


Figura 4.11: Órbitas pseudocirculares para $r_0 = 1.649, r_0 = 1.822$ y $r_0 = 2.014$ con $\mu = 0.05$

Para valores intermedios de μ , como por ejemplo $\mu = 0.50$ y $\mu = 0.70$, el comportamiento de las órbitas es similar. En estos casos, no existen valores de un mismo r_0 para los que hay más de un valor de v_{θ_0} , por lo que, al igual que se ha comentado anteriormente, la órbita se va ensanchando a medida que r_0 aumenta pero sin llegar a cambiar su forma.

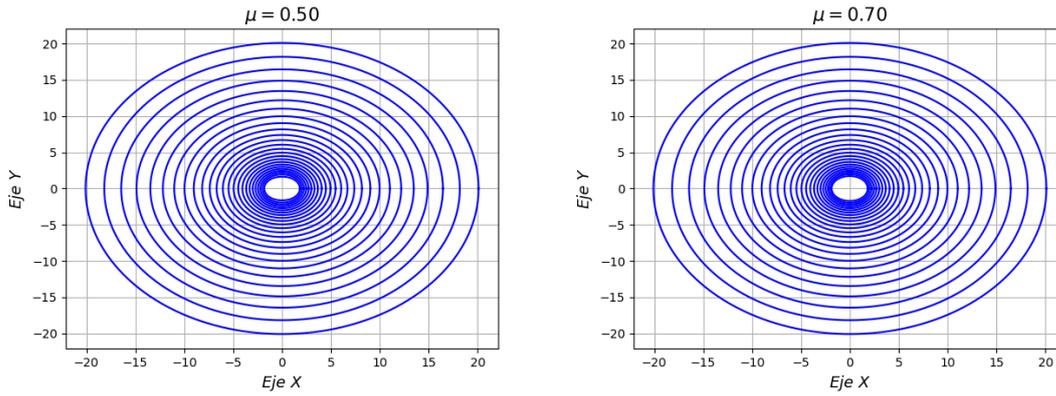


Figura 4.12: Órbitas pseudocirculares para $\mu = 0.50$ y $\mu = 0.70$

Finalmente, en los últimos valores de μ , $\mu = 0.90$ y $\mu = 0.95$, observamos la misma situación que en el caso de $\mu = 0.05$. Esto es esperable puesto que los casos μ y $1 - \mu$ son idénticos si se intercambian las componentes.

Para $\mu = 0.90$ y $r_0 = 1.649$ existen dos valores de la velocidad inicial válidos, mientras que para $\mu = 0.95$ y $r_0 = 1.350$, $r_0 = 1.492$ también ocurre lo mismo. Por tanto, apreciaremos ciertas diferencias entre las órbitas para estos primeros valores, pero luego, éstas empezarán a comportarse y a tener la misma forma, tal y como se muestran en la Figura 4.14.

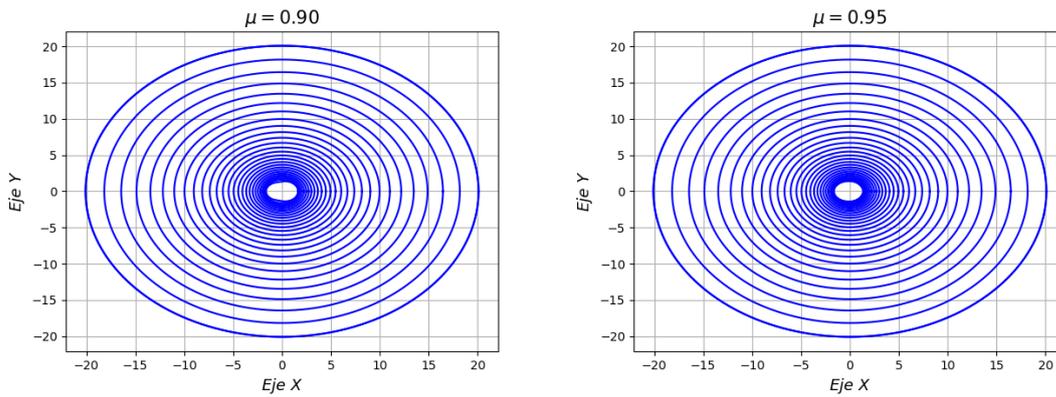


Figura 4.13: Órbitas pseudocirculares para $\mu = 0.90$ y $\mu = 0.95$

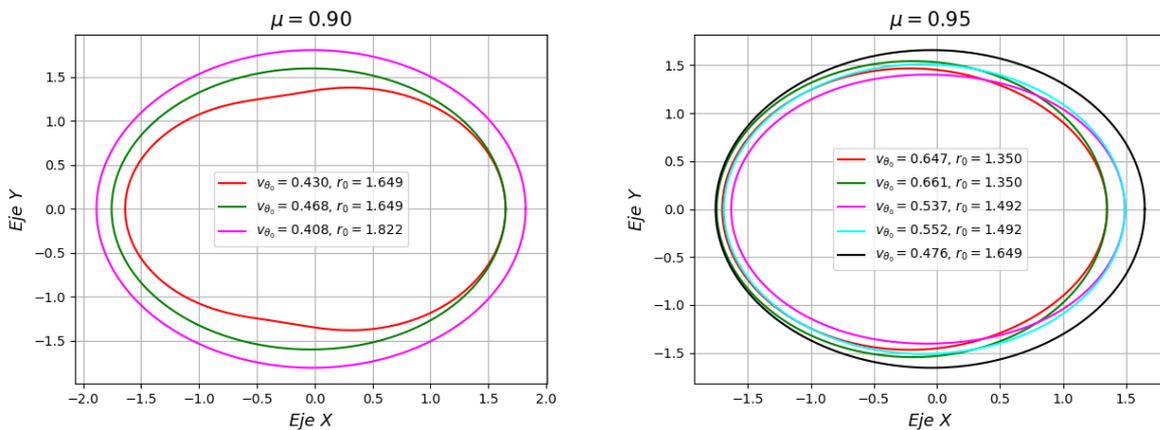


Figura 4.14: Órbitas pseudocirculares para $\mu = 0.90$ y $\mu = 0.95$ con los primeros valores de r_0

4.2.5. Gráficas C vs r_0

Una vez obtenidas las órbitas pseudocirculares, una buena opción sería estudiarlas intentando analizar una serie de diagramas como los que vamos a ver a continuación. Debido a la semejanza entre las órbitas para ciertos valores de μ y r_0 , sobre todo para valores altos de éste último parámetro tal y como hemos visto anteriormente, los diagramas que se muestran a continuación presentarán también ciertas similitudes.

En concreto, vamos a representar la media de la constante de Jacobi (C) de cada órbita frente a r_0 para valor de μ . El objetivo fundamental será distinguir qué posibles familias de curvas existen para un valor de μ dado para luego poder clasificarlas.

Comenzaremos, como en apartados anteriores para los valores de μ más pequeños:

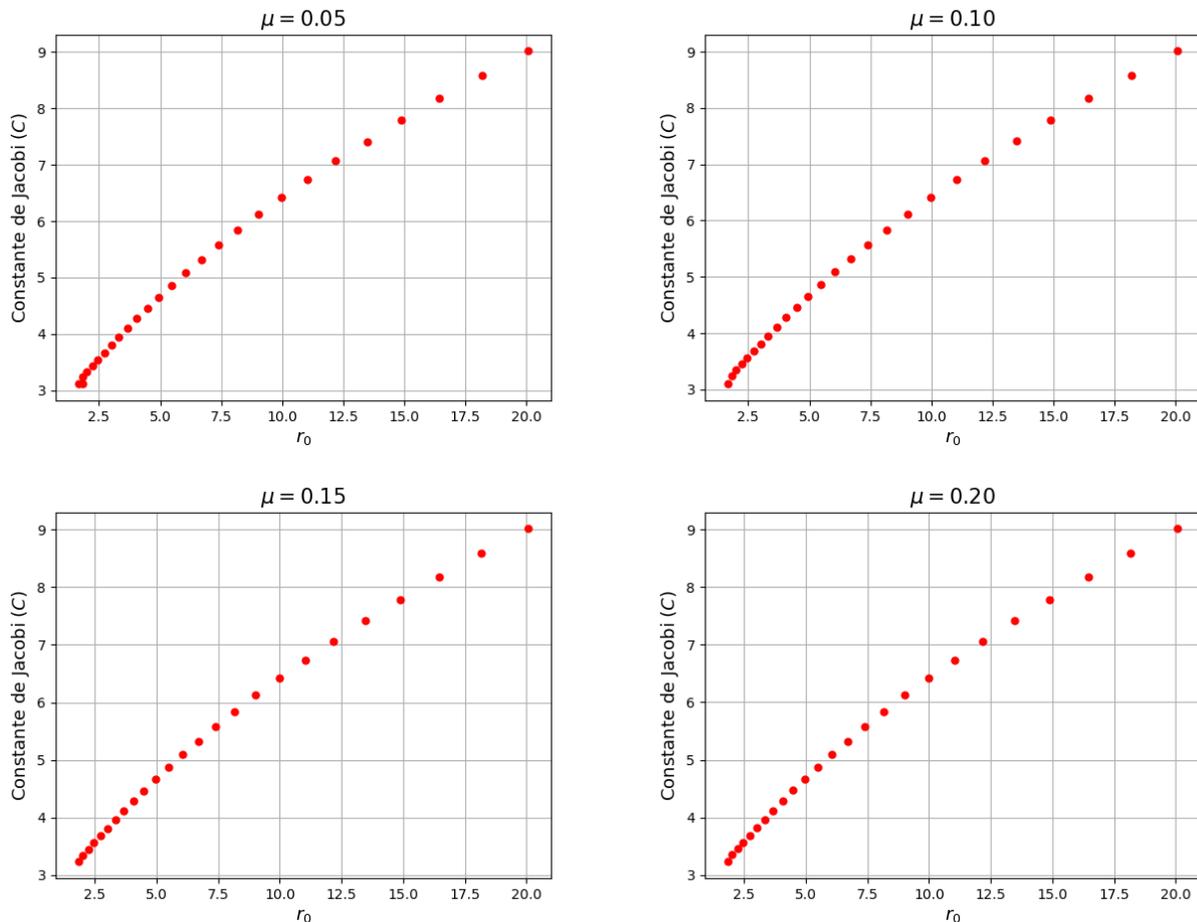


Figura 4.15: Representación de C frente a r_0 para $\mu = 0.05$, $\mu = 0.10$, $\mu = 0.15$ y $\mu = 0.20$

Como podemos observar en la Figura 4.15, las curvas son bastante similares, sobre todo cuando nos movemos para valores de r_0 altos. Por el contrario, apreciamos alguna diferencia en cuanto a r_0 más pequeños, como por ejemplo en el caso de $\mu = 0.05$. En esta gráfica podemos visualizar cómo uno de los puntos parece desplazarse ligeramente de la curva, siendo precisamente éste uno de los valores de r_0 para los que existen dos órbitas pseudocirculares. Recordemos que para $\mu = 0.05$ y $r_0 = 1.822$ habíamos encontrado dos velocidades, $v_{\theta_0} = 0.367$ y $v_{\theta_0} = 0.397$. El punto que parece desviarse es el correspondiente a $v_{\theta_0} = 0.367$, cuyo valor de la constante de Jacobi es $C = 3.117$.

Esto nos indica la presencia de dos familias de órbitas, de una de las cuales solo se ha obtenido una órbita.

Para valores intermedios de μ (Figura 4.16) no existen grandes novedades en el sentido de que no parece que destaque algún punto del resto de la gráfica. Esto concuerda con las órbitas del mismo μ obtenidas en el apartado anterior, donde observamos que las trayectorias seguían el mismo patrón, sin grandes diferencias entre ellas.

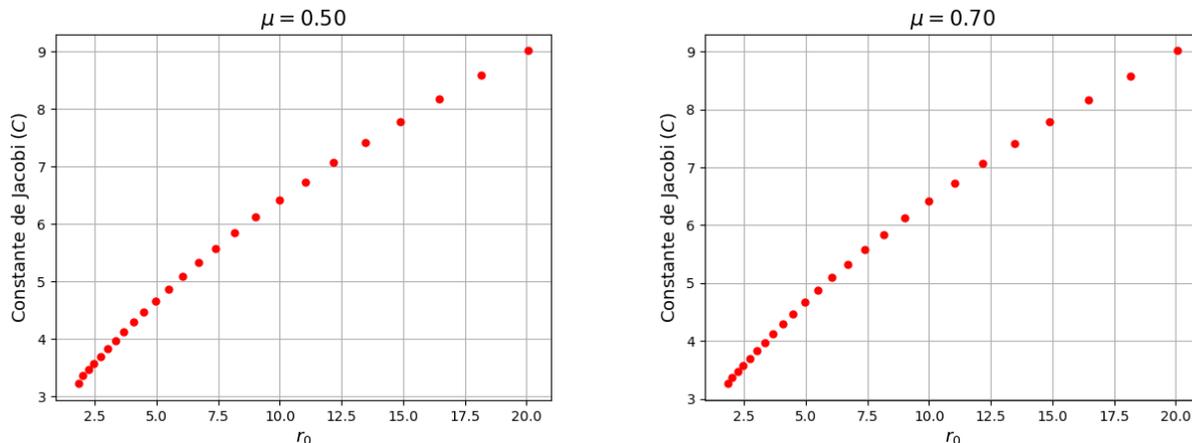


Figura 4.16: Representación de C frente a r_0 para $\mu = 0.50$ y $\mu = 0.70$

Por último, para los valores de $\mu = 0.90$ y $\mu = 0.95$ comprobamos que sucede algo similar con respecto a $\mu = 0.05$. Para valores altos de r_0 apreciamos que no existen prácticamente diferencias en comparación con el resto de gráficas, mientras que para r_0 pequeños observamos mayor dispersión. Esto se debe, de nuevo, a la existencia de más de una órbita pseudocircular para un mismo valor de μ y de r_0 . Recordemos en este caso también, que para $\mu = 0.90$ y $r_0 = 1.649$ se obtuvieron dos velocidades, al igual que para $\mu = 0.95$ y $r_0 = 1.350$, $r_0 = 1.492$. Además, los resultados concuerdan con la equivalencia entre los casos μ y $1 - \mu$ vistos anteriormente.

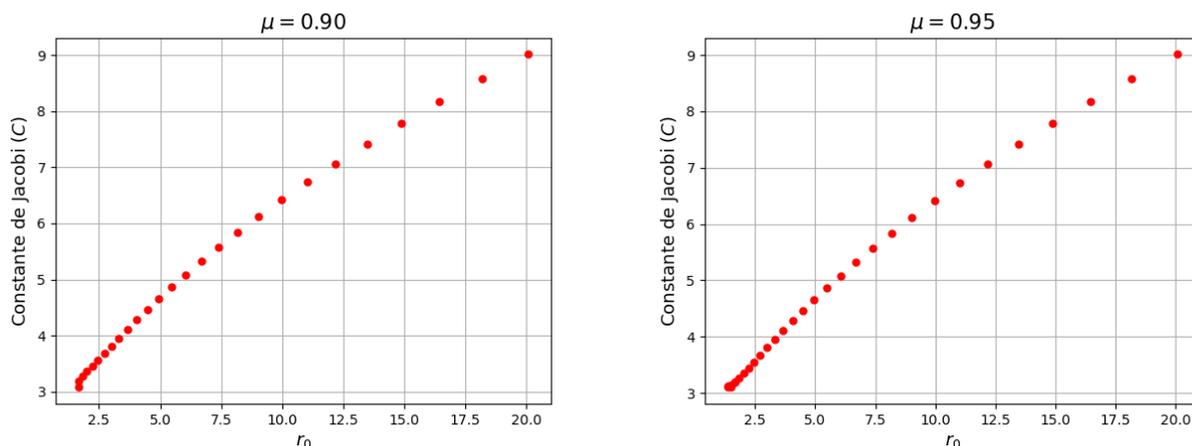


Figura 4.17: Representación de C frente a r_0 para $\mu = 0.90$ y $\mu = 0.95$

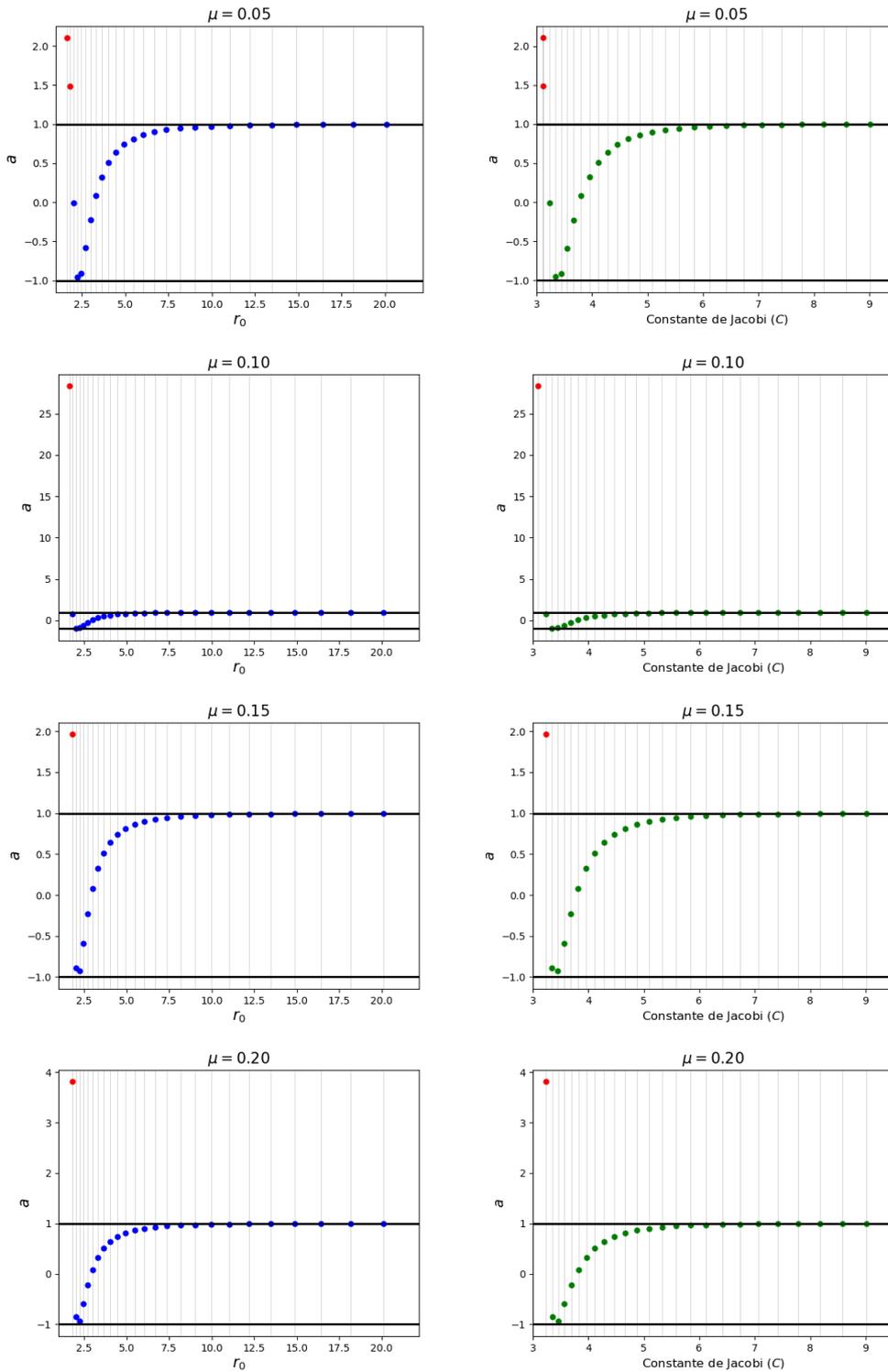
4.2.6. Estabilidad de las órbitas

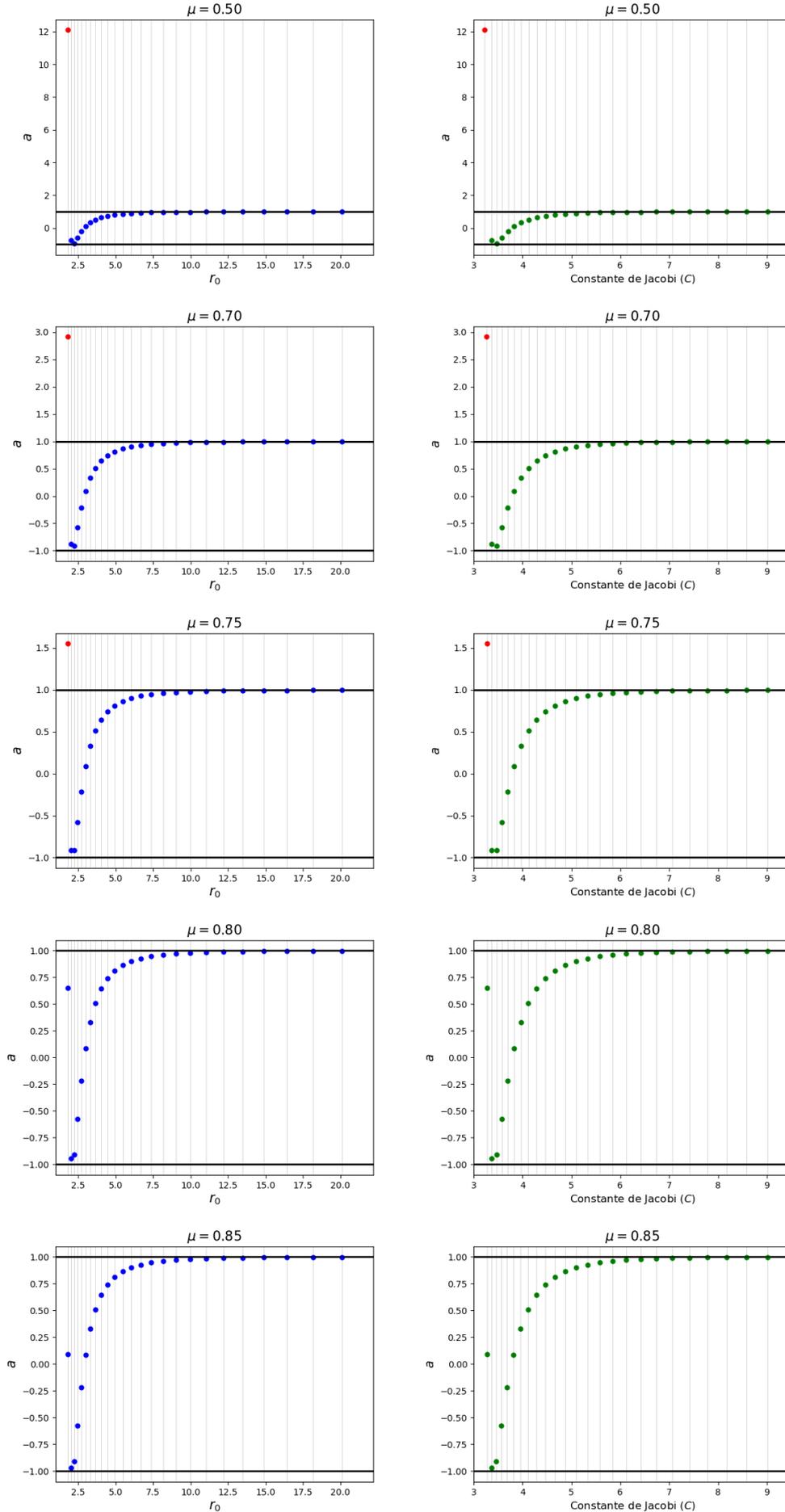
Para el cálculo de la estabilidad se ha llevado a cabo el procedimiento descrito en la sección 3.3 del capítulo *Metodología*. En este apartado intentaremos dar una visión general de la estabilidad de las órbitas, clasificándolas en estables o inestables según sea el módulo del parámetro a . No obstante, a diferencia de apartados anteriores, primero presentaremos los resultados en una serie de diagramas en los que se representan, por una parte, a frente a r_0 , y

por otra, a frente a la constante de Jacobi C .

Debido a la utilidad de estos diagramas podremos comprobar de manera mucho más fácil qué órbitas son estables y qué órbitas son inestables para un valor dado de μ y de r_0 . Además, podremos analizar y sacar alguna conclusión general del comportamiento de las órbitas atendiendo a su estabilidad.

Sin más dilación se presentan algunos de los resultados obtenidos en la Figura 4.18:





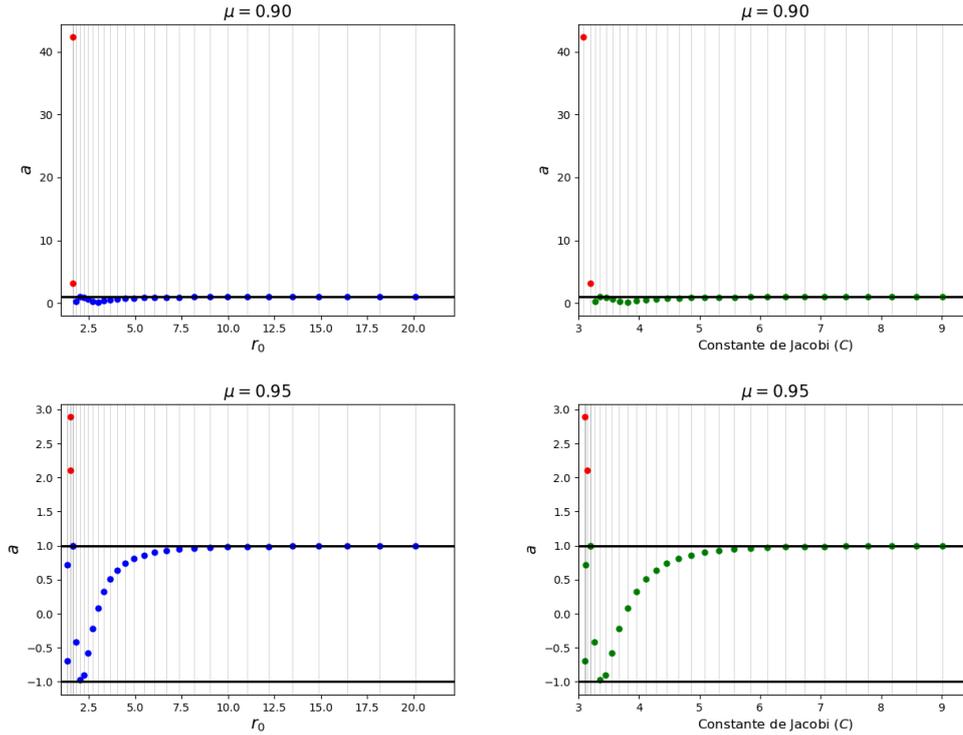


Figura 4.18: Diagramas a vs r_0 , a vs C . Estabilidad de las órbitas. En rojo se indican las órbitas inestables y en verde las estables.

Como podemos observar, para los valores más bajos de μ , como por ejemplo $\mu = 0.05$, $\mu = 0.10$ y $\mu = 0.15$, existen algunas órbitas inestables para los primeros valores de r_0 . En particular, para $\mu = 0.05$ nos fijamos en que, para $r_0 = 1.649$, existe una órbita inestable puesto que $a = 2,103$ ($|a| > 1$), mientras que para $r_0 = 1.822$ nos encontramos con una órbita estable ($v_{\theta_0} = 0.397, C = 3.241$) y otra inestable ($v_{\theta_0} = 0.367, C = 3.117$). De hecho, la órbita inestable se corresponde precisamente con el punto que parecía desviarse de la curva C frente a r_0 cuando estudiamos estos diagramas.

Por otro lado, observamos que a partir de este punto, a medida que r_0 y C aumentan, no existe ninguna otra órbita inestable, aunque percibimos cierta predisposición de la curva a acercarse asintóticamente al valor de $a = 1$.

Para los siguientes valores de μ nos damos cuenta de que el comportamiento de las curvas es bastante similar en general, aunque notamos que dependiendo de éste parámetro, existen ciertos valores de a que parecen alejarse demasiado con respecto a otros para los valores de r_0 más pequeños. Por ejemplo, si examinamos las curvas para $\mu = 0.10$ observamos que existe un valor de a que parece desviarse bastante con respecto al resto de la curva. A partir de dicho valor, las órbitas comienzan a ser estables y la curva comienza a acercarse asintóticamente a $a = 1$, como ya hemos comentado. En este caso, $a = 28.348$ para $r_0 = 1.649$ y $C = 3.095$, mientras que el siguiente punto, correspondiente a $r_0 = 1.822$ y $C = 3.236$ tiene un valor de $a=0.740$, siendo por tanto, estable.

A medida que vamos recorriendo los distintos valores de μ en sentido creciente vemos que las curvas se asemejan, aunque con alguna diferencia en lo que se refiere al primer punto que determina la órbita inestable debido al propio muestreo de los valores de r_0 . Es decir, la única órbita inestable que existe para todo este rango de valores de μ , desde $\mu = 0.015$ hasta $\mu = 0.75$, se corresponde con $r_0 = 1.822$. Para algunas de ellas, a toma valores más pequeños, como para $\mu = 0.75$ con $a = 1.150$, mientras que en otros casos, a toma valores mucho mayores,

como para $\mu = 0.50$ con $a = 12.094$.

Para valores de $\mu = 0.80$ y $\mu = 0.85$, observamos que no existe ninguna órbita inestable, incluso para los valores más pequeños de r_0 y C , pero al igual que en los casos anteriores sí que nos fijamos que la curva se comporta de la misma manera a medida que estos valores van aumentando.

Para finalizar, si analizamos los últimos valores de μ , $\mu = 0.90$ y $\mu = 0.95$, vemos que existen de nuevo algunas órbitas inestables para los primeros valores de r_0 . En efecto, para $\mu = 0.90$ y $r_0 = 1.649$ las dos órbitas obtenidas para estos parámetros son inestables, mientras que el resto vuelven a ser estables. Algo similar ocurre con $\mu = 0.95$, donde nos encontramos con dos órbitas estables para $r_0 = 1.350$, y luego con dos órbitas inestables para $r_0 = 1.492$ para, de nuevo, ser todas estables a partir de este valor de r_0 .

4.2.7. Conclusiones

1. Para los valores de r_0 más pequeños no existen cortes de las curvas Δr , Δv_θ , Δv_r vs v_{θ_0} , lo que nos indica que no existe ninguna velocidad inicial para el que la órbita es pseudocircular. Además, esto ocurre independientemente del valor de μ .
2. A medida que vamos aumentando el valor de r_0 comenzamos a observar las primeras órbitas simples, periódicas y cerradas. Existen casos particulares como para $\mu = 0.05$, $\mu = 0.90$ y $\mu = 0.95$ en los que existen dos órbitas pseudocirculares para un mismo r_0 . Esto es esperable puesto que los casos μ y $1 - \mu$ son idénticos si se intercambian las componentes. Además, el hecho de que existan dos velocidades para un valor dado de μ y r_0 implica la existencia de dos familias de curvas. La existencia de estos dos tipos de familias de curvas solo ocurren para los valores de $\mu = 0.05$ y $r_0 = 1.822$, $\mu = 0.90$ y $r_0 = 1.649$, $\mu = 0.95$ y $r_0 = 1.350$, $r_0 = 1.492$.
Para el resto de valores de μ observamos solo una órbita pseudocircular, y por tanto, solo una familia de curvas.
3. Si seguimos aumentando los valores de r_0 independientemente del valor de μ observamos que sólo existe un punto en el que los valores Δr , Δv_θ , Δv_r se anulan. Por tanto, sólo existe una órbita pseudocircular. Así mismo nos percatamos de cómo las velocidades iniciales que dan lugar a éstas órbitas se van asemejando a medida que r_0 también aumenta, independientemente del valor de μ .
4. En cuanto a la estabilidad observamos cómo las órbitas con valores de r_0 pequeños son, en general, inestables. Este patrón se repite para todos los casos menos para $\mu = 0.80$ y $\mu = 0.85$, donde el muestreo de r_0 nos da órbitas estables. Si tomásemos mayor resolución para r_0 pequeños en estos dos ejemplos, posiblemente aparecerían también algunas órbitas inestables. Sin embargo, a medida que r_0 aumenta sí que comprobamos que todas las órbitas se vuelven estables, independientemente del valor de μ .

Capítulo 5

Trabajos futuros

Summary chapter 5

For a much broader study of the problem of the three bodies it would be necessary to delve into smaller values of r_0 , study the orbits with a range of negative velocities and finally, work with non pseudocircular orbits or directly outside the orbital plane.

A lo largo de este trabajo hemos analizado y discutido los principales resultados obtenidos. El objetivo fundamental ha sido el cálculo y el análisis de órbitas pseudocirculares externas en el Problema Restringido Circular de los Tres Cuerpos (PRTC). Sin embargo, para analizar a fondo el PRTC sería apropiado abordar otra serie de opciones como se exponen a continuación.

Por una parte, hemos visto durante el estudio que las órbitas de mayor interés han sido, por lo general, aquellas con un valor pequeño de r_0 sin dejar de ser externas. En el cálculo de la estabilidad comprobamos, por ejemplo, que las órbitas inestables se encontraban dentro de este rango, por lo que éste punto puede ser uno a tener en cuenta para trabajos futuros. Es decir, en un hipotético estudio más exhaustivo sería conveniente profundizar en las órbitas con valores de r_0 pequeños.

Por otro lado, con el objetivo mismo de ampliar el estudio también sería idóneo trabajar con un rango de velocidades negativas, es decir, buscar las órbitas pseudocirculares que son retrógradas en un SRI.

El siguiente paso consistiría, además, en trabajar con órbitas que no fueran pseudocirculares o directamente que se encontrasen fuera del plano orbital. En este sentido, no sería correcto pronosticar qué cabría esperar puesto que deberíamos profundizar en el tema. Es por este mismo motivo que, para finalizar, simplemente hemos querido apuntar ciertas ideas a modo de qué camino podría tomar este supuesto trabajo futuro.

BIBLIOGRAFÍA

- Cheney, E. and Kincaid, D. (2013).** Numerical mathematics and computing. Boston, MA, Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Echevarría Román, J. (2009).** Estrellas Binarias, Ciencia, Volumen 6, n°1. Retrieved from http://revistaciencia.amc.edu.mx/images/revista/60_1/PDF/06-EstrellaBinaria.pdf Accessed: 25 June 2017.
- González Martínez-País, I. (2003).** Introducción a la mecánica celeste. 1st ed. Santa Cruz de Tenerife, Universidad de La Laguna, Servicio de Publicaciones.
- Hénon, M. (1965a).** Exploration numérique du problème restreint. I. Masses égales, Orbites périodiques. Annales d'Astrophysique, 28, 499.
- Hénon, M. (1965b).** Exploration numérique du problème restreint. II. Masses égales, stabilité des orbites periodiques. Annales d'Astrophysique, 28, 992.
- Hénon, M. (182).** On the numerical computation of Poincaré maps. Physica D: Nonlinear Phenomena, 5, 412-414.
- Huang, S. and Wade, C. (1963).** Preliminary study of periodic orbits of interest for moon probes. II. The Astronomical Journal, 68, 388.
- Poincaré, H. (1967).** New methods of celestial mechanics. Washington, D.C: National Aeronautics and Space Administration.
- Siegel, C., & Moster, J. (1995).** Lectures on celestial mechanics. Berlin, Springer.
- Sundman, K. (1912).** Mémoire sur le problème des trois corps. Acta Mathematica, 36(0), 105.
- Szebehely, V. (1967).** Theory of orbits. New York, Academic Press.
- Valtonen, M. and Karttunen, H (2006).** The Three-Body Problem. 1st ed. Cambridge, Cambridge University Press.