



Universidad de La Laguna

FACULTAD DE FÍSICA

DEPARTAMENTO DE ASTROFÍSICA

**Estudio detallado de algunos efectos potencialmente
relevantes para la determinación de espectros de
materia oscura**

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Bárbara Pérez Pérez

Supervisado por:

Dr. Juan Betancort Rijo

4 de septiembre de 2018

Abstract

The cosmological principle says that the universe is homogeneous and isotropic at large scale. However, we can not deny the existence of structures at smaller scales in the universe, which lead us to study the inhomogeneities that formed this structures and the equations that govern the density fluctuations.

We have focused on the detailed study of some potentially relevant effects for the treatment of baryonic density fluctuations, which are very important for the determination of dark matter spectra. In order to do this, we have considered a purely baryonic universe and another one with an added dark matter background. We have set the parameters for our cosmological model and proceeded by finding a convenient way to characterize the evolution of matter and radiation densities, which have been introduced into the equations that govern density fluctuations.

To continue, we have developed the expressions for baryonic and radiation oscillations, first with gravity and radiation pressure and later we have added photon diffusion, for which the equations are coupled. Our work here is based on a previous study, but some changes have been introduced such as the calculation of the recombination rate and the improvement of the F factor that measures the coupling between matter and radiation.

After the obtention of the results of these equations, we have proceeded studying the effect of the factors and their importance for the treatment. In addition, we have studied the Silk damping in a purely baryonic universe in order to check the validity of these expressions at the time of recombination.

Finally, relativistic corrections due to the 'horizon effect' have been added to the equations that govern density fluctuations. These corrected expressions are also valid outside the horizon. Their impact on the treatment and the importance for the determination of dark matter power spectra have been one of the main goals of this study.

Resumen

El principio cosmológico afirma que el Universo es homogéneo e isótropo a gran escala. Sin embargo, no podemos negar la existencia de estructuras a escalas más pequeñas, lo cual nos lleva a estudiar las inhomogeneidades que formaron estas estructuras y, por consiguiente, las ecuaciones que rigen las fluctuaciones de densidad.

En este trabajo, nos hemos centrado en el estudio detallado de algunos efectos potencialmente relevantes para el tratamiento de las fluctuaciones de densidad bariónicas, las cuales influyen de manera directa en la determinación de los espectros de materia oscura. Para ello, vamos a considerar un universo puramente bariónico y otro al que hemos añadido un *background* de materia oscura. Se han definido los parámetros necesarios para nuestro modelo cosmológico y, también, se ha hallado una forma conveniente para caracterizar la evolución de las densidades de materia y radiación que, posteriormente, se han introducido en las ecuaciones que rigen las fluctuaciones de densidad.

Para continuar, hemos desarrollado las expresiones para las oscilaciones de materia bariónica y de radiación, considerando el caso solo con gravedad y presión de radiación y, además, el caso con adición de difusión de fotones, para el cual las ecuaciones se encuentran acopladas. Nuestro trabajo está basado un estudio anterior, pero se han introducido algunos cambios como, por ejemplo, el cálculo de la evolución para la fracción de ionización y la mejora del factor F que mide el grado de acoplamiento entre materia y radiación.

Después de obtener los resultados para estas ecuaciones, se ha procedido a estudiar el efecto de estos factores y su importancia para el tratamiento. Además, se ha hecho un estudio del amortiguamiento de Silk para un universo puramente bariónico para comprobar la validez de estas expresiones en el momento de la recombinación.

Por último, hemos añadido correcciones relativistas, debidas al 'efecto horizonte', a las ecuaciones que gobiernan las fluctuaciones de densidad. Estas expresiones corregidas son válidas también fuera del horizonte y, en este trabajo, hemos estudiado su impacto sobre el tratamiento y posterior determinación de los espectros de materia oscura.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Abstract

The assumption that the universe is homogeneous and isotropic will lead us to choose the spacetime coordinate system so that the metric takes a simple form, first worked out by Friedmann as a solution of the Einstein field equations, and then derived on the basis of homogeneity and isotropy alone by Robertson and Walker. But this treatment of the Universe is just an approximation, which ignores many of the most interesting things in it: galaxy clusters, galaxies, stars. . . In this chapter, we will also analyze these departures from homogeneity and isotropy, by setting the equations that govern small fluctuations.

1.1. Un universo casi homogéneo

En sus primeros instantes, el universo era caliente y denso y las interacciones entre partículas eran frecuentes y muy energéticas. La materia estaba en forma de electrones libres y núcleos atómicos en colisión. Cuando este plasma primordial empezó a enfriarse, los elementos ligeros (hidrógeno, helio y litio) comenzaron a formarse (?), y una vez la temperatura había caído lo suficiente ($T \sim 3000K$), el plasma ionizado comenzó a formar átomos neutros. Esto permitió que los fotones viajaran libremente, provocando así el desacoplamiento entre materia y radiación ($z \sim 1100$). Hoy, billones de años después, observamos este momento como una radiación de fondo en el rango de las microondas (?). Esta radiación, conocida como **Fondo Cósmico de Microondas** (CMB por su siglas en inglés), tiene una temperatura actual de aproximadamente $2.725K$ (?) y es casi completamente uniforme en todas las direcciones, aunque presenta pequeñas variaciones que reflejan las perturbaciones en la densidad de materia primordial. Estas fluctuaciones crecieron bajo la influencia de la gravedad y, finalmente, formaron

estructuras. Esta imagen del universo, desde poco después del Big Bang hasta hoy, es un hecho científico. No obstante, la mayoría del universo hoy en día consiste en formas de materia y energía que no podemos observar, por ejemplo, la materia oscura es necesaria para explicar la estabilidad de las galaxias y el ritmo de formación de estructuras a gran escala (?). Por otra parte, existe una evidencia creciente de que las **perturbaciones de densidad primordiales** se originaron a partir de fluctuaciones cuánticas microscópicas, "estiradas" a tamaños cósmicos durante la inflación (?).

1.2. Modelo Cosmológico

1.2.1. El universo de Friedmann-Robertson-Walker

Uno de los principios básicos en los que se basa nuestro modelo es el **Principio Cosmológico** (?). Bajo las condiciones de homogeneidad e isotropía, se deduce que la métrica que describe el universo viene dada por la forma simétrica de **Robertson-Walker** (?):

$$ds^2 = -cdt^2 + a(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (1.1)$$

donde k caracteriza la curvatura espacial y puede valer $+1$, 0 o -1 , según se considere el universo espacialmente cerrado, plano o abierto, respectivamente. En el estudio del universo primitivo el valor de este factor suele tomarse como cero, ya que la curvatura no desempeña un papel significativo (?).

El **factor de escala** $a(t)$ describe la expansión cosmológica y da medida física a la coordenada comóvil r . La expansión es, entonces, un cambio de escala en el curso del tiempo:

$$x(t) = a(t)r \quad (1.2)$$

También se puede definir la relación del factor de escala con el *redshift*, z , donde se toma $a(t) = a$ y se introduce $a(t_0) = a_0 = 1$ como el valor actual del factor de escala:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{1 + z} \quad (1.3)$$

La función que se utiliza habitualmente para caracterizar esta expansión del universo es el **parámetro de expansión de Hubble**, que tiene su definición natural a partir de la ley de Hubble (?) y el factor de escala:

$$H(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.4)$$

de la cual se obtiene la **constante de Hubble** cuyo valor en la actualidad es $H_0 = 100h_0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ con $h_0 \sim 0.7$ (?), y que permite estimar la edad del universo ($t_0 \sim H_0^{-1}$). Esta escala de tiempo corresponde a una escala de distancias que se denomina **radio de Hubble** (?)

$$r_H = cH^{-1} \quad (1.5)$$

y se define como la distancia a la que la velocidad de recesión de un objeto es igual a la velocidad de la luz (c). En consecuencia, la distancia a los objetos más lejanos que se pueden observar debido al viaje finito de la luz es:

$$r_p = \int_0^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} \quad (1.6)$$

Esta distancia se denomina **horizonte de partículas** y representa el radio del universo observable (?).

Hasta el momento no se ha dependido de la dinámica de expansión debida a los componentes del universo. Para encontrar esta evolución es necesario utilizar las **ecuaciones de Einstein** (?).

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \quad (1.7)$$

Para ser consistente con las condiciones de homogeneidad e isotropía impuestas anteriormente, el tensor de energía-momento ($T^{\mu\nu}$) tiene que tomar la forma de un fluido perfecto (?) caracterizado por una densidad de energía y una presión que dependen del tiempo (ρ y p). Aplicando la métrica de Robertson-Walker (??) a las ecuaciones de Einstein (??) se obtienen las **ecuaciones de Friedmann** (?):

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.9)$$

La ecuación (??) es de gran importancia, ya que relaciona la evolución del factor de escala con el contenido del universo. Además puede utilizarse para definir, en cualquier instante, una **densidad crítica**:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.10)$$

para la cual la curvatura y la constante cosmológica son nulas ($k = 0$, $\Lambda = 0$). Un universo con densidad mayor a este valor crítico será cerrado ($k = 1$), mientras que uno con menor densidad será abierto ($k = -1$) (?).

La densidad de energía total del universo será la suma de todas las energías (materia, radiación, vacío...), es decir, $\rho = \sum_i \rho_i$ donde ρ_i representa cualquier tipo de energía. Es conveniente, por tanto, definir el **parámetro de densidad** para cada componente:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad (1.11)$$

que también cumple $\Omega = \sum_i \Omega_i$. El valor actual de este parámetro para cualquier tipo de densidad se denotará $\Omega_{0,i}$ (?).

1.2.2. Ecuación de estado

Las ecuaciones de Friedmann (??) y (??) relacionan tres variables: $a(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$. Para resolver estas ecuaciones y encontrar una función para el factor de escala, se necesita una ecuación adicional que relaciona la presión con la densidad de energía: **la ecuación de estado**. Esta ecuación es válida para cualquier componente del universo y puede representarse como una relación lineal:

$$p = \omega \rho c^2 \quad (1.12)$$

donde ω es una constante cuyo valor es $\omega = 0$ para el caso de la materia no relativista, mientras que para un gas de radiación $\omega = \frac{1}{3}$ (?). Teniendo en cuenta una única ecuación de estado (??) y las ecuaciones de Friedmann (??) y (??), se obtiene la evolución de la densidad de energía respecto al factor de escala:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\omega)} \quad (1.13)$$

Para el caso particular de un universo compuesto por materia no relativista ($\omega = 0$) se obtiene que $\rho \propto a^{-3}$. En el caso de un universo compuesto por radiación ($\omega = \frac{1}{3}$) esta evolución es $\rho \propto a^{-4}$. La expresión (??) también permite interpretar la constante cosmológica (Λ) y la curvatura (k) como densidades de energía que corresponden a ecuaciones de estado con $\omega = -1$ y $\omega = \frac{-1}{3}$, respectivamente, pero con presiones negativas. Si se considera $k = 0$ podemos hacer uso de (??) y de la relación $t \sim H^{-1}$ en la ecuación (??), lo que proporciona la evolución del factor de escala con el tiempo para un **universo euclídeo** (es decir, plano):

$$a(t) \propto t^{2/3(1+\omega)} \quad (1.14)$$

de lo cual se obtiene que $a(t) \propto t^{2/3}$ para el caso de materia no relativista y $a(t) \propto t^{1/2}$ para el caso de radiación.

1.2.3. Fluctuaciones de densidad

Debido al Principio Cosmológico, el universo dado por Friedmann, Robertson y Walker tiene una densidad media uniforme $\bar{\rho}(t)$. En un universo no perturbado la densidad tendría el mismo valor en cada punto local del mismo, pero este no es el caso. Las **fluctuaciones de densidad a una cierta escala comóvil** r se definen, convenientemente, como la desviación relativa respecto a la densidad media del universo:

$$\delta(r, t) = \frac{\rho(r, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)} \quad (1.15)$$

donde, mientras se verifique que las desviaciones sobre la densidad media sean pequeñas, $\delta \ll 1$, el proceso de crecimiento de estas fluctuaciones puede considerarse lineal y, por tanto, tratarlas como perturbaciones de primer orden usando una **aproximación newtoniana** dentro del horizonte (?). Por tanto, las oscilaciones con longitudes de onda menores que la escala de Hubble, $\lambda < cH^{-1}$, serán descritas de la siguiente manera:

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k = 4\pi G\rho\delta_k - \frac{c_s^2 k^2}{a^2}\delta_k \quad (1.16)$$

donde $c_s^2 = \partial p / \partial \rho$ es la velocidad del sonido, $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda asociado a la escala y el subíndice k denota la transformada de Fourier de las fluctuaciones (?). El primer y el segundo término del miembro derecho de esta igualdad (??) expresan la acción de la gravedad y de la presión, respectivamente, y se oponen entre sí. Este fenómeno se puede caracterizar mediante la **longitud de onda de Jeans** (?):

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi c^2}{G\rho}} \quad (1.17)$$

Fluctuaciones con longitudes de onda menores que λ_J tendrán soluciones oscilantes y estables. Por el contrario, para longitudes de onda mayores, tendrán soluciones inestables que generarán que estas inhomogeneidades colapsen gravitatoriamente, aumenten su tamaño y, en consecuencia, den lugar a la formación de estructuras. Es conveniente definir, por tanto, la **masa de Jeans** como la masa de materia no relativista contenida en una esfera de diámetro igual a la longitud de Jeans:

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi\rho\lambda_J^3 \quad (1.18)$$

la cual, en régimen lineal, es equivalente a la masa no relativista contenida en la fluctuación (?).

1.3. Motivación y objetivos

En anteriores trabajos (?), se han realizado aproximaciones para las fluctuaciones de densidad primordiales de materia y radiación. Su motivación principal, es que no existe un tratamiento manejable de estas inhomogeneidades que permita comprender, de manera aproximada y didáctica, su evolución hasta formar estructuras. En este trabajo, si bien la motivación es la misma, se pretende mejorar los procedimientos y resultados obtenidos de manera que puedan utilizarse para determinar la dependencia, en los parámetros cosmológicos, del espectro lineal de fluctuaciones de densidad con una precisión suficiente para permitir su uso efectivo en la investigación en el campo en cuestión. A este fin, se han de alcanzar los siguientes objetivos:

- Hallar una buena aproximación a la evolución de la **fracción de ionización**. Anteriormente se ha utilizado como una constante de valor la unidad, lo cual no se corresponde con la realidad y puede afectar a la validez del tratamiento realizado.
- Estudiar con precisión el **amortiguamiento de Silk**, comparándolo con el factor aproximado.
- Utilizar **correcciones relativistas, debidas al 'efecto horizonte'**, en las ecuaciones que rigen las fluctuaciones de densidad para que sean válidas en la proximidad de entrada al horizonte. Determinar el impacto de este efecto en el cálculo del espectro de potencias.

Capítulo 2

Metodología

Abstract

In this chapter, we will introduce the steps taken in order to solve the equations that rule the density fluctuations of baryonic matter and radiation. First, we will set the parameters of our cosmological model and proceed to calculate the evolution of the scale factor. To continue, we will focus on the obtention of the approximate newtonian equations we want to solve. Finally, we will introduce a new relativistic term that will allow us to obtain the behaviour of the fluctuations outside the horizon.

2.1. Consideraciones

Para comenzar, es conveniente fijar los **parámetros cosmológicos** que se van a utilizar. Se empieza calculando el factor de escala para diferentes épocas, cuyo valor inicial se ha fijado en $a_{in} = 10^{-6}$. De la primera **ecuación de Friedmann** (??) se obtiene:

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{0,m} a^{-3} + \Omega_{0,r} a^{-4} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{0,k} a^{-2}} \quad (2.1)$$

donde, como se ha comentado en el capítulo ??, se va a tomar la constante de Hubble $H_0 = 100h_0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ con $h_0 = 0.7$. No obstante, haciendo un cambio de unidades para facilitar el cálculo posterior se tiene:

$$H_0 \sim 7.164 \times 10^{-11} \text{ y}^{-1} \quad (2.2)$$

Para un universo puramente bariónico, el parámetro de densidad actual de materia toma el valor $\Omega_{0,m} = \Omega_{0,b} = 0.04$, mientras que si se introduce un *background* de materia oscura se tiene $\Omega_{0,m} =$

$\Omega_{0,b} + \Omega_{0,DM} = 0.3$ (?). Como se va a trabajar con fotones como única componente de la radiación, se toma $\Omega_{0,r} = \Omega_{0,\gamma} = 5.043 \times 10^{-5}$. Además, no tendremos en cuenta el término de constante cosmológica ($\Omega_\Lambda = 0$) y, como $\sum_i \Omega_i = 1$, se introduce también una densidad de curvatura:

$$\Omega_{0,k} = 1 - \Omega_{0,m} - \Omega_{0,\gamma} \quad (2.3)$$

cuya contribución será prácticamente irrelevante en la época estudiada. Aplicando estas consideraciones a la ecuación (?), resulta una ecuación diferencial que proporciona el valor del factor de escala para cualquier tiempo:

$$\dot{a} = aH_0 \sqrt{\Omega_{0,m}a^{-3} + \Omega_{0,r}a^{-4} + \Omega_{0,k}a^{-2}} \quad (2.4)$$

de la cual se comprueba que $a \propto t^{1/2}$ en la época dominada por la radiación y que $a \propto t^{2/3}$ en la dominada por la materia (Figura ??).

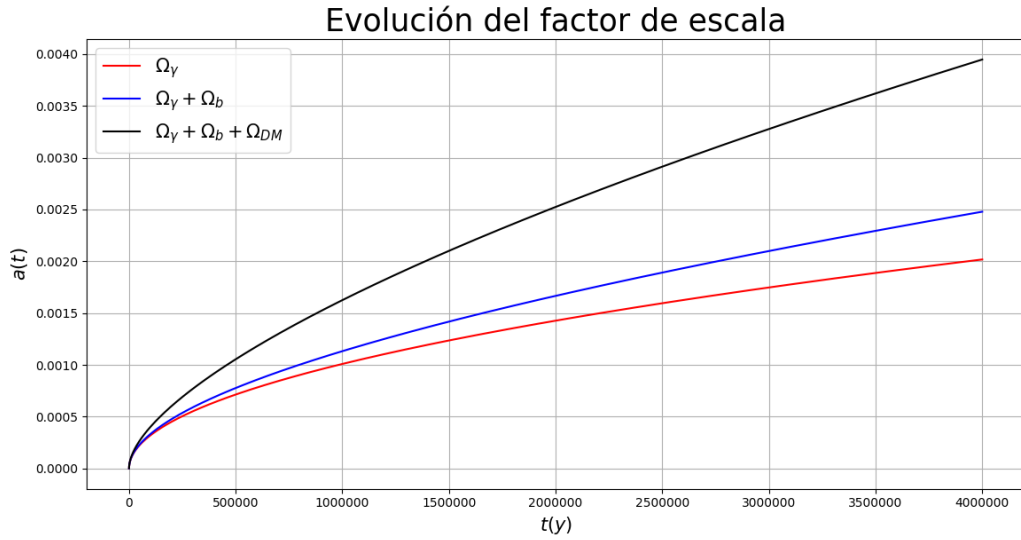


Figura 2.1: Evolución del factor de escala con el tiempo cuando solo hay radiación, cuando hay radiación y materia bariónica y cuando se existe un *background* de materia oscura.

Se establecen, por tanto, los valores del factor de escala que van a utilizarse para los objetivos de este trabajo. Para continuar, es posible determinar la **distancia comóvil** R asociada a una cierta escala de masa M mediante la siguiente expresión (?):

$$M(R) = 3.465 \times 10^{11} h^{-1} \left(\frac{R}{h^{-1} Mpc} \right)^3 \frac{\Omega_m}{0.3} \quad (2.5)$$

con $h = 0.7$ y $\Omega_m = \Omega_b = 0.04$. Cuando $R = \lambda/2$, esta distancia es la del **horizonte** y, debido a que cuando domina la radiación $a \propto t^{1/2}$, la integral en la ecuación (??) converge dando como resultado la siguiente relación:

$$R_{hor} = \frac{\lambda}{2} = \int_0^{t_{hor}} \frac{c dt}{a(t)} \simeq \frac{2c t_{hor}}{a_{hor}} \quad (2.6)$$

donde c es la velocidad de la luz y su valor ya se conoce, aunque es necesario expresarlo en las unidades adecuadas:

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \sim 3.066 \times 10^{-7} \text{ Mpc y}^{-1} \quad (2.7)$$

En cuanto a las escalas que van a utilizarse, se toma como referencia el **cúmulo de Virgo**, con una masa $M \sim 10^{15} M_\odot$. Para observar el comportamiento de las fluctuaciones de densidad se tratará, entonces, con escalas alrededor de este valor: $10^{13} M_\odot \leq M \leq 10^{17} M_\odot$.

2.2. Desarrollo de expresiones

Se consideran distribuciones uniformes de materia no relativista y radiación. Partiendo de la ecuación (??) (válida para un único componente) y asumiendo un universo solo con materia bariónica y fotones, es posible llegar a una expresión que defina las **fluctuaciones de densidad de los bariones** (?):

$$\ddot{\delta}_{b,k} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{b,k} = 4\pi G(\rho_b\delta_{b,k} + 2\rho_\gamma\delta_{\gamma,k}) - \frac{1}{3}\frac{k^2}{a^2}\frac{c^2}{\frac{4}{3} + \frac{a}{a'_{eq}}}\delta_{\gamma,k} \quad (2.8)$$

donde, como se ha dicho anteriormente en el capítulo ??, el primer término del miembro derecho expresa la acción de la gravedad y el segundo la presión de radiación, con $a'_{eq} = \Omega_{0,\gamma}/\Omega_{0,b}$. Aunque es básicamente newtoniana, la ecuación (??) incluye efectos no newtonianos como el efecto gravitatorio de la presión y la contribución de ésta a la inercia efectiva ($\rho + P$). De esta relación (??) no se detallará su obtención pero sí se comprobará si produce los resultados esperados. Para hacer esta ecuación manejable (no se conocen las densidades de materia bariónica y radiación para cualquier instante de tiempo), es necesario introducir la primera ecuación de Friedmann (??), que en el modelo en consideración tiene $\Lambda = 0$ y $k = 0$, en una de sus formas:

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 4\pi G\rho \quad (2.9)$$

donde $\rho = \rho_b + \rho_\gamma$. Es posible, entonces, definir unos **ratios** (que por comodidad se denotan Ω'_i) haciendo uso de los parámetros de densidad conocidos ($\Omega_{0,b}$ y $\Omega_{0,\gamma}$):

$$\Omega'_b = \frac{\rho_b}{\rho_b + \rho_\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a} \frac{\Omega_{0,\gamma}}{\Omega_{0,b}}} \quad (2.10)$$

$$\Omega'_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_b + \rho_\gamma} = \frac{1}{1 + a \frac{\Omega_{0,b}}{\Omega_{0,\gamma}}} \quad (2.11)$$

Estos ratios (??) y (??) proporcionan la evolución de las densidades de materia y radiación con el tiempo (Figura ??).

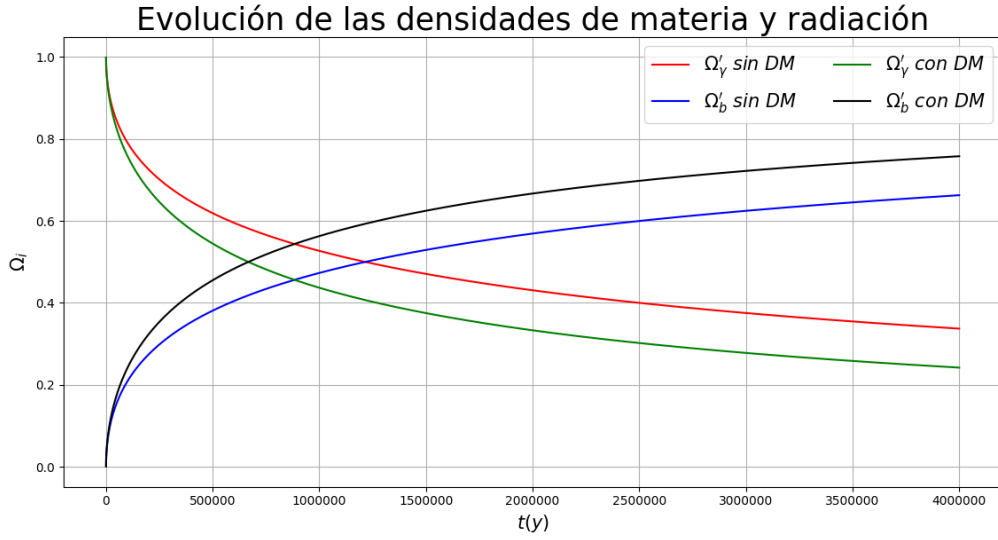


Figura 2.2: Se observa que la igualdad entre densidades de materia y radiación se produce antes cuando hay un *background* de materia oscura.

Haciendo uso de (??) y (??) la ecuación (??) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\ddot{\delta}_{b,k} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{b,k} = \frac{3}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 (\Omega'_b \delta_{b,k} + 2\Omega'_\gamma \delta_{\gamma,k}) - \frac{1}{3} \frac{k^2}{a^2} \frac{c^2}{\frac{4}{3} + \frac{a}{a'_{eq}}} \delta_{\gamma,k} \quad (2.12)$$

La manera más simple de perturbar la densidad es comprimir o expandir un conjunto de elementos de volumen adiabáticamente. La densidad de energía de ambos responderá de manera diferente ante un cambio en el factor de escala ($\rho_b \propto a^{-3}$ y $\rho_\gamma \propto a^{-4}$) y, por tanto, cuando materia y radiación están firmemente acopladas, se puede establecer una relación entre ellas para el **modo adiabático** (?)

$$\dot{\delta}_{\gamma,k} = \frac{4}{3}\dot{\delta}_{b,k} \implies \delta_{\gamma,k} = \frac{4}{3}\delta_{b,k} \quad (2.13)$$

A esta relación (??), se le puede añadir un término nuevo si se tiene en cuenta la **difusión de fotones** (?) debida a los cambios de entropía local en el universo, los cuales son causados por las oscilaciones de densidad de materia y radiación. Este análisis difusivo es extremadamente complicado. No obstante, puede encontrarse una expresión aproximada (?):

$$\dot{\delta}_{\gamma,k} = \frac{4}{3}F\dot{\delta}_{b,k} - \frac{\mu k^2}{a^2}\delta_{\gamma,k} \quad (2.14)$$

donde F es un factor que mide el **grado de acoplamiento** entre materia y radiación y tiene la siguiente forma (?):

$$F = \left(\frac{2}{\sqrt{1 + 4 \left(\frac{1.93 \times 10^6 ka^2 Mpc}{\chi_e \left(\frac{4}{3} + \frac{a}{a_{eq}} \right)} \right)^2} + 1} \right)^{0.9} \quad (2.15)$$

En la Figura ?? puede comprobarse que el valor de este factor es aproximadamente la unidad hasta el momento del desacople entre materia y radiación. En el apartado ?? se comprobará si puede considerarse un factor corrección a tener en cuenta.

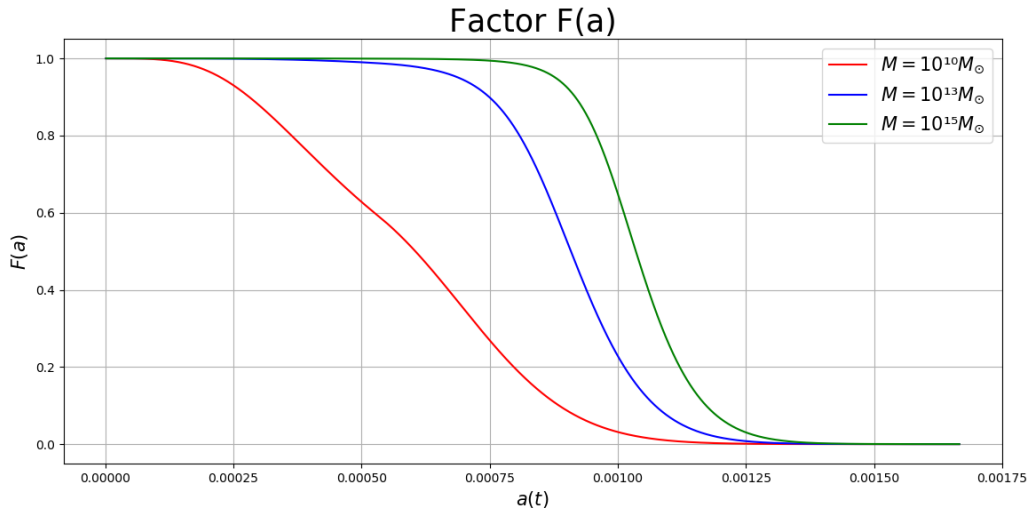


Figura 2.3: Ejemplos del comportamiento del factor F. Se observa que, para diferentes escalas, la materia y la radiación empiezan a desacoplarse a tiempos distintos.

El segundo término del miembro derecho en (??) introduce entonces la difusión de fotones, que amortiguará las oscilaciones inducidas por la presión de radiación. Estas oscilaciones se verán detenidas en el momento en que la expansión impide que se produzcan interacciones entre radiación y materia, las cuales ya no formarán un fluido conjunto y, por tanto, evolucionarán de forma independiente (?). Para escalas pequeñas, el desacople llegará muy tarde y el efecto de amortiguación será tan importante que las fluctuaciones se disiparán. Este proceso se denomina **Silk damping** (amortiguación por difusión) y las escalas menores que la de Silk no sobrevivirán (?). Es necesario definir el coeficiente del término disipativo:

$$\mu = \frac{1}{3} \frac{1}{n_e(a) \sigma_T} c \quad (2.16)$$

donde $\sigma_T \sim 6.9863 \times 10^{-74} \text{ Mpc}^2$ es la sección eficaz de Thompson y $n_e(a)$ es la densidad de electrones, dada por la expresión:

$$n_e(a) \simeq 5.1856 \times 10^{66} \chi_e(a) a^{-3} \left(\frac{\Omega_{0,b}}{0.04} \right) \left(\frac{h}{0.7} \right)^2 \text{ Mpc}^{-3} \quad (2.17)$$

siendo $\chi_e(a)$ la **fracción de ionización** (?). Antes de la recombinación los átomos de hidrógeno se encuentran en equilibrio termodinámico con los fotones, pero cuando éstos no tienen la energía suficiente para ionizar el hidrógeno el universo se vuelve transparente a la luz. Por tanto, es posible ver cómo evoluciona la fracción de hidrógeno ionizado con el tiempo.

En anteriores trabajos (?) se ha usado $\chi_e(a) = 1$, pero es interesante obtener una expresión aproximada para su evolución en lugar de tratarla como una constante. Para ello, se han utilizado datos del **CAMB**¹ para los parámetros cosmológicos especificados en (??). Estos datos permiten calcular la fracción de ionización² para el rango $3000 \geq z \geq 10$. Anteriormente, el hidrógeno se encuentra totalmente ionizado y, por tanto, la fracción será constante.

El ajuste realizado para la obtención de una expresión que, de manera aproximada, proporcione la evolución de la fracción de ionización, parte de la forma hallada por ?. Se ha procedido mediante la función '*curvefit*', la cual devuelve los parámetros que mejor se ajustan a los datos introducidos, y se han realizado pequeños cambios hasta hallar, finalmente, la mejor aproximación posible para la evolución de χ_e :

¹Code for Anisotropies in the Microwave Background by Antony Lewis and Anthony Challinor (<https://camb.info/>).

²Los cálculos han sido realizados por J. A. Rubiño (Instituto de Astrofísica de Canarias). En este trabajo se han utilizado los resultados obtenidos para el redshift y la fracción de ionización.

$$\chi_e(a) = \begin{cases} A & \text{para } a < 5.33 \times 10^{-4} \\ A e^{-\frac{\left(\frac{a}{1-a} - B\right)^2}{2C^2}} & \text{para } a > 5.33 \times 10^{-4} \end{cases} \quad (2.18)$$

con los parámetros de ajuste $A = 1.079$, $B = 5.33 \times 10^{-4}$ y $C = 2.055 \times 10^{-4}$.

Este ajuste devuelve también una matriz de error que da, para este caso, una desviación en el rango $\sim 10^{-13} - 10^{-6}$. En la expresión (??) y la Figura ?? se observa que a partir de $z \sim 1875$, un poco antes de la recombinación, χ_e comienza a disminuir hasta que solo queda un residuo muy pequeño de hidrógeno ionizado: $\chi_e \sim 8.957 \times 10^{-6}$.

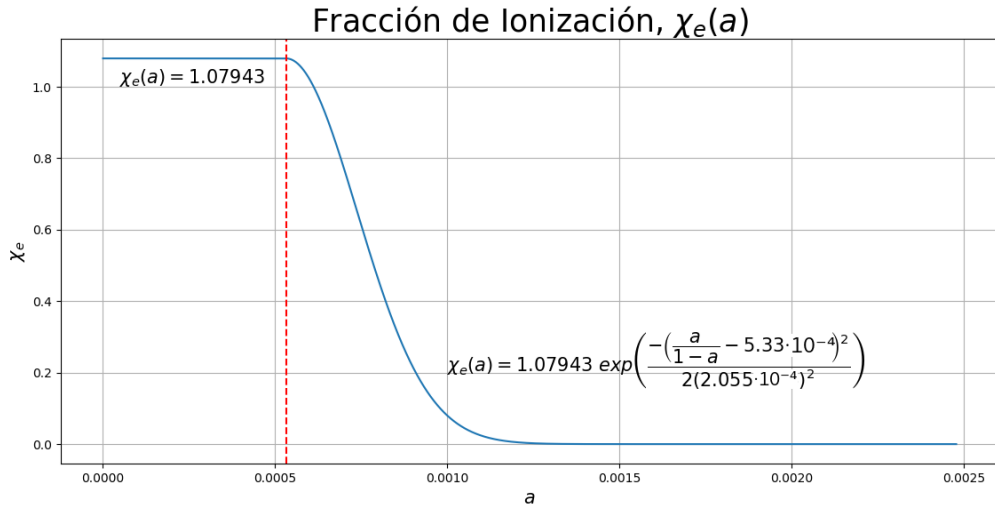


Figura 2.4: La fracción de ionización comienza a disminuir poco antes de la recombinación y solo queda un residuo constante después de ella.

El efecto de la fracción de ionización (??) y su importancia en las fluctuaciones de densidad de bariones se comprobará en el capítulo ??.

2.2.1. Ecuaciones relativistas

Hasta ahora, se ha utilizado la aproximación newtoniana para las oscilaciones bariónicas, la cual solo es válida dentro del horizonte. Cuando las perturbaciones están **fuera del horizonte**, es decir, cuando su radio es mucho mayor que el de Hubble (??), no puede existir el crecimiento en las fluctuaciones de densidad que se observa en las ecuaciones newtonianas y sería necesario usar teoría de perturba-

ciones relativistas. No obstante, una posible aproximación se encuentra añadiendo un nuevo **término relativista** (?) a las expresiones (??) y (??):

$$\ddot{\delta}_{b,k} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{b,k} = \frac{3}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 (\Omega'_b\delta_{b,k} + 2\Omega'_\gamma\delta_{\gamma,k}) - \frac{1}{3}\frac{k^2}{a^2}\frac{c^2}{\frac{4}{3} + \frac{a}{a_{eq}}}(\delta_{\gamma,k} + \delta''_{\gamma,k}) \quad (2.19)$$

$$\dot{\delta}_{\gamma,k} = \frac{4}{3}F\dot{\delta}_{b,k} - \frac{\mu k^2}{a^2}(\delta_{\gamma,k} + \delta''_{\gamma,k}) \quad (2.20)$$

donde el término relativista $\delta''_{\gamma,k}$ se expresa de la siguiente manera (?):

$$\delta''_{\gamma,k} = 6\frac{H_0^3\Omega_{0,\gamma}}{c^2k^2}\frac{t}{a^2}\sqrt{\Omega_{0,b}a^{-3} + \Omega_{0,\gamma}a^{-4}}\left(\frac{a}{a_{eq}}\delta_{b,k} + 2\delta_{\gamma,k}\right) \quad (2.21)$$

Una vez añadido $\delta''_{\gamma,k}$, se obtienen las expresiones para las oscilaciones bariónicas y la radiación válidas también en la proximidad de entrada en el horizonte. Las ecuaciones exactas para tiempos muy anteriores a la entrada en el horizonte no son necesarias, ya que se conoce que en esta fase las fluctuaciones son constantes. A estas **fluctuaciones de densidad de materia bariónica y radiación con el término relativista** se denotan $\delta'_{b,k}$ y $\delta'_{\gamma,k}$, respectivamente, y se expresan en función de las ecuaciones definidas anteriormente, (??), (??) y (??), de la siguiente forma:

$$\delta'_{b,k} = \delta_{b,k} + \frac{3}{4}\delta''_{\gamma,k} \quad (2.22)$$

$$\delta'_{\gamma,k} = \delta_{\gamma,k} + \delta''_{\gamma,k} \quad (2.23)$$

donde se ha hecho uso de la ecuación (??). Estas expresiones, (??) y (??), tienen su base física en el hecho de que, debido a las perturbaciones, g_{00} no es exactamente igual a 1 y las fluctuaciones de densidad a un mismo tiempo coordinado no coinciden con las definidas a un tiempo propio fijo. Estas últimas siguen exactamente las ecuaciones de evolución que se han denominado newtonianas, pero son las anteriores las que son relevantes.

En la sección ?? se discutirá el efecto que tiene este nuevo término relativista sobre las fluctuaciones de densidad y su validez.

Capítulo 3

Resultados y discusión

Abstract

In this chapter, we will detail the results obtained and discuss their validity. First of all, we will analyze the effect of the recombination rate, the F factor and dark matter on the baryon density fluctuations. To continue, we are going to study the results for the Silk damping and the precision of the treatment. Finally, we will proceed to evaluate the effect of the relativistic term and the accuracy of the relativistic equations.

3.1. Resolución de ecuaciones

En primer lugar, se obtienen los **parámetros asociados a cada escala de masa** (Tabla ??).

$M [M_{\odot}]$	$R [Mpc]$	$\lambda [Mpc]$	$k [Mpc^{-1}]$
10^{13}	7.62	15.23	4.13×10^{-1}
10^{14}	16.41	32.82	1.91×10^{-1}
4.74×10^{14}	27.56	55.12	1.14×10^{-1}
10^{15}	35.35	70.70	8.89×10^{-2}
10^{16}	76.16	152.32	4.13×10^{-2}
10^{17}	164.08	328.16	1.91×10^{-2}

Tabla 3.1: Resultados para el radio comóvil, la longitud y el número de onda asociados a cada escala de masas.

Además de las ya mencionadas en el capítulo ??, desde $10^{13}M_{\odot}$ hasta $10^{17}M_{\odot}$, se va a considerar

una escala que se corresponde, aproximadamente, con la **masa de Silk para un universo puramente bariónico**: $M_{Silk} \sim 4.74 \times 10^{14} M_{\odot}$ (?).

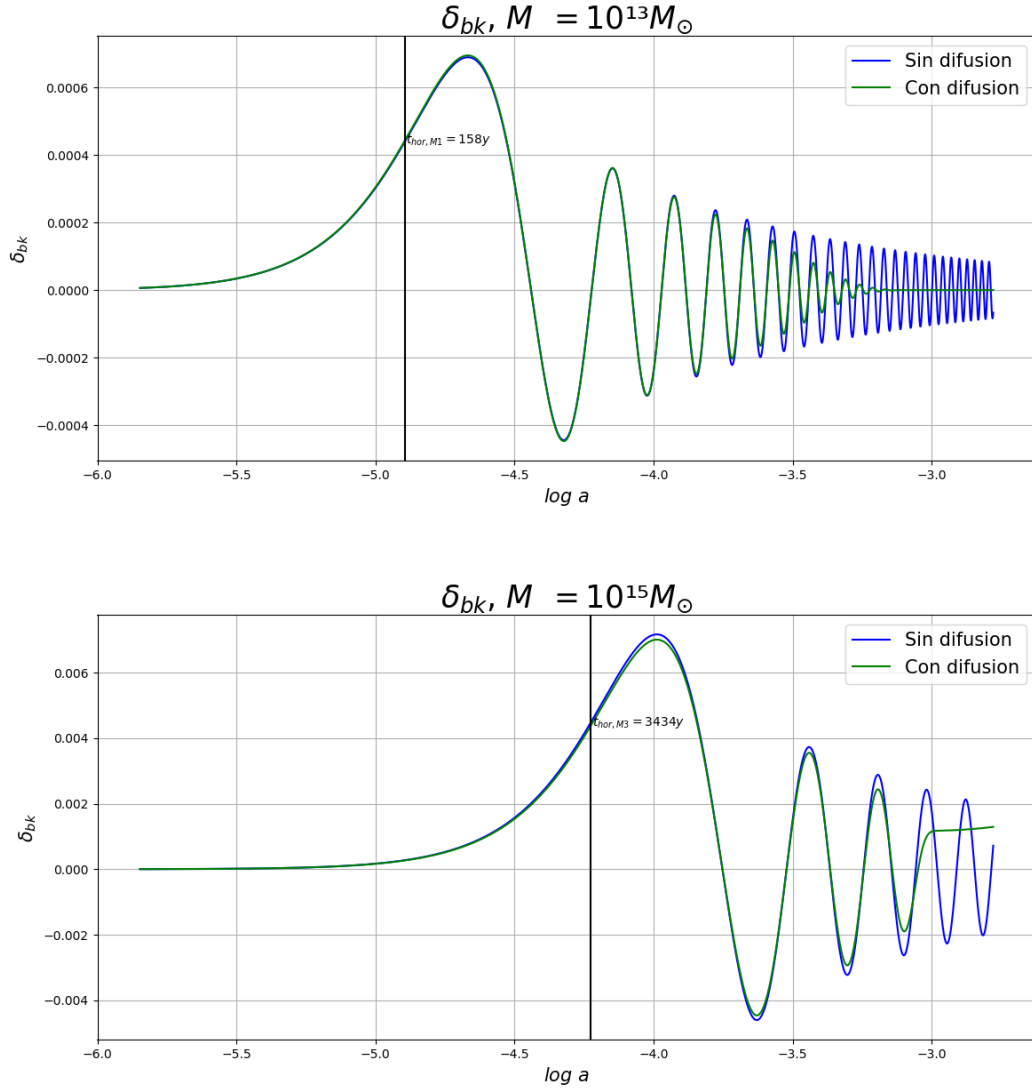


Figura 3.1: Oscilaciones bariónicas para $M = 10^{13} M_{\odot}$ y $M = 10^{15} M_{\odot}$ en un **universo puramente bariónico**.

Haciendo uso de la ecuación (??) para un **universo puramente bariónico**, se obtienen las fluctuaciones de densidad bariónicas solo con presión de radiación (??) y añadiendo difusión de fotones (??). El valor inicial para las fluctuaciones se ha fijado en la unidad y, posteriormente, se han integrado las expresiones respecto al tiempo, desde 5 hasta 2×10^6 años, con un paso de 1 año. El error de esta integración es 1.49×10^{-8} , aproximadamente.

En la Figura ??, se observa que las fluctuaciones continúan si no se tiene en cuenta la difusión de fotones. Al añadir difusión, por el contrario, éstas se amortiguan haciéndose cero para las escalas más pequeñas y creciendo en amplitud para escalas mayores.

Si ahora se añade un **background de materia oscura**, es decir, se utiliza $\Omega_{0,m} = 0.3$ en (?), las perturbaciones tendrán una evolución diferente y las diferentes escalas entrarán en el horizonte más tarde.

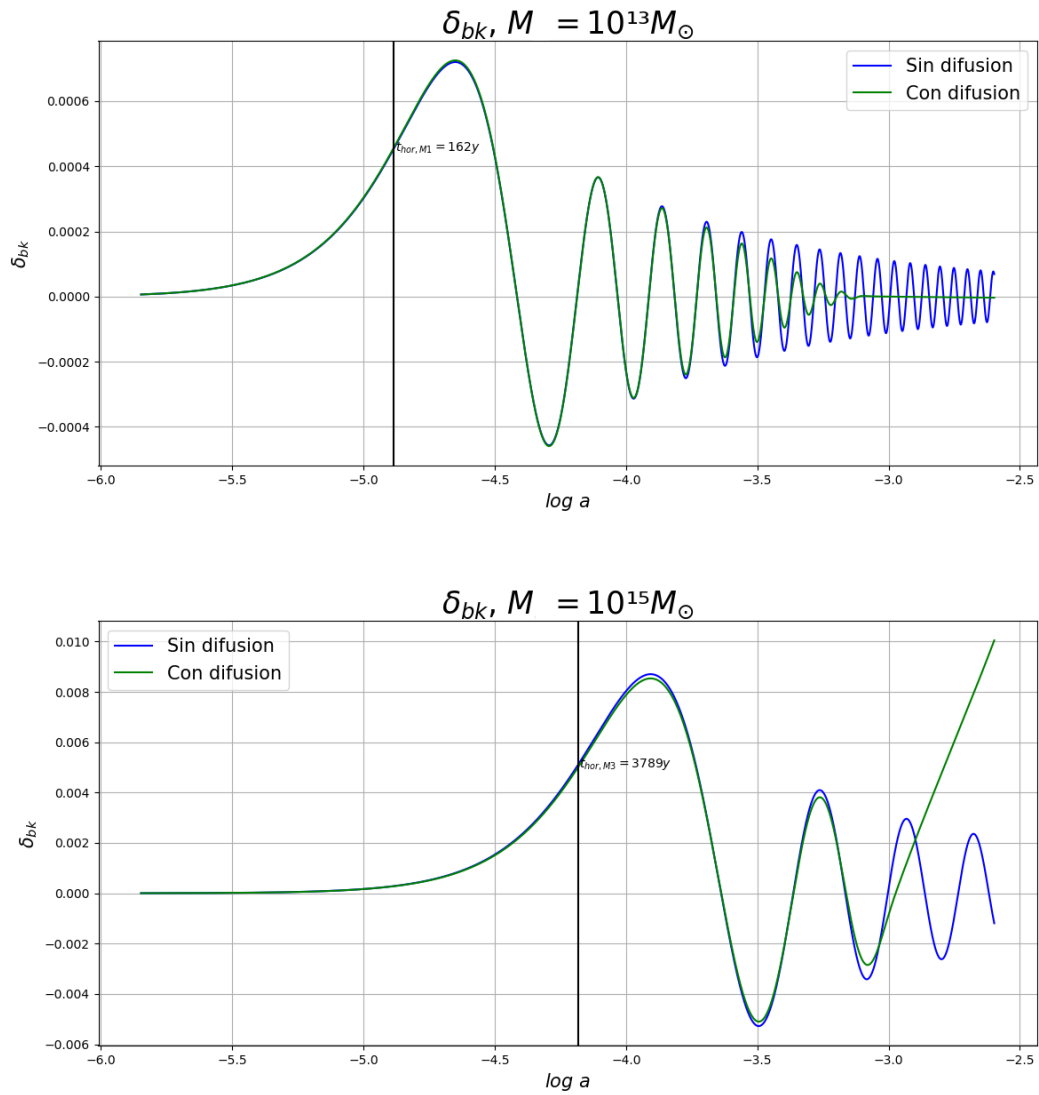


Figura 3.2: Oscilaciones bariónicas para $M = 10^{13} M_{\odot}$ y $M = 10^{15} M_{\odot}$ con **background de materia oscura**.

En la Figura ?? para el caso con difusión se vuelve a observar cómo, para la escala más pequeña, la

perturbación es completamente disipada, mientras que para escalas más grandes la amplitud crece.

3.1.1. Efecto de la fracción de ionización

En el capítulo ?? se ha obtenido una evolución aproximada para la **fracción de ionización**, $\chi_e(a)$, la cual puede verse en la expresión (?). Anteriormente, como ya se ha comentado, se había usado esta fracción de ionización con valor constante la unidad. Ahora, se va a comprobar el efecto que causa la nueva expresión sobre las perturbaciones de densidad bariónica y su validez.

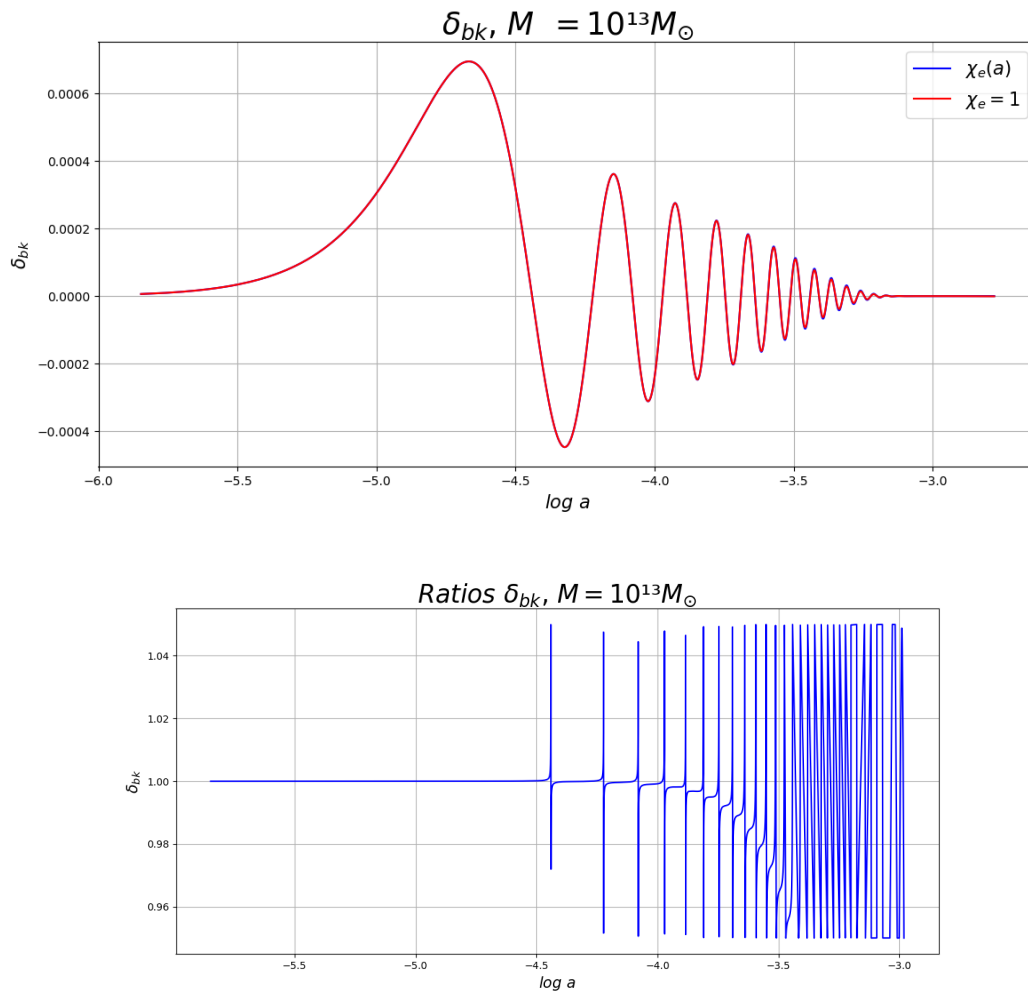


Figura 3.3: Comparación entre las oscilaciones bariónicas, $\delta_{b,k}$, utilizando la expresión calculada para $\chi_e(a)$ y con $\chi_e = 1$ para la escala $M = 10^{13}M_{\odot}$. Debajo se muestra el cociente entre ambas.

En las Figuras ?? y ?? se hace una comparación de cómo cambian las oscilaciones para diferentes

escalas al usar $\chi_e = 1$ y la expresión calculada (??). Se observa que, para las escalas más pequeñas, a pesar de que las inhomogeneidades se disipan mucho antes, el efecto de la fracción de ionización es más importante que en las escalas más grandes, donde la contribución de $\chi_e(a)$ comienza más adelante.

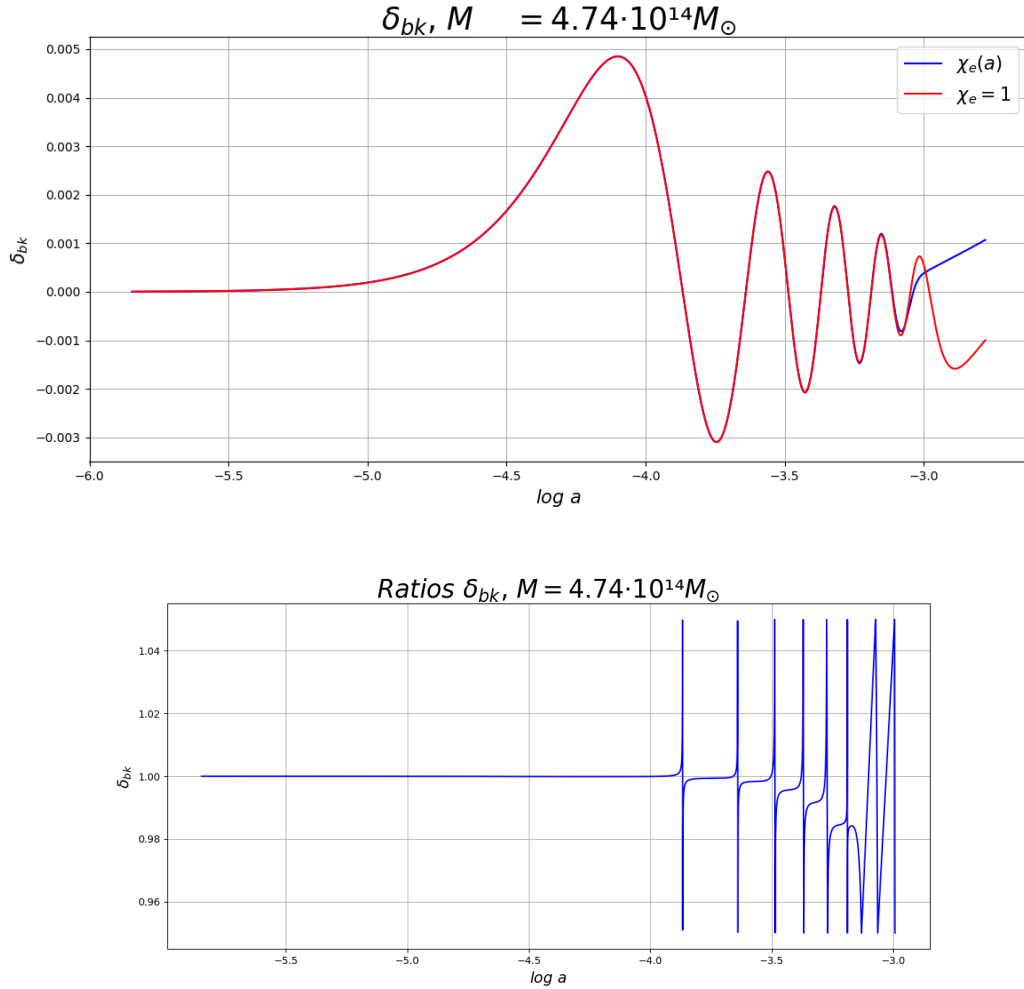


Figura 3.4: Comparación entre las oscilaciones bariónicas, $\delta_{b,k}$, utilizando la expresión calculada para $\chi_e(a)$ y con $\chi_e = 1$ para la escala $M = 4.74 \times 10^{14} M_\odot$. Debajo se muestra el cociente entre ambas.

Ésto ocurre debido a que, como se ha comentado en el capítulo ??, el hidrógeno no permanece completamente ionizado sino que, cuando la materia y la radiación comienzan a desacoplarse, empiezan a formarse átomos neutros. Se observa, por tanto, que el efecto de la expresión (??) es **muy importante para el tratamiento, ya que provoca variaciones un orden de magnitud en las fluctuaciones de densidad**. Además, se considera una aproximación válida para la evolución de la fracción de

ionización por lo que se utilizará para los cálculos posteriores en este trabajo.

3.1.2. Efecto del factor F

Como se ha explicado anteriormente en el capítulo ??, en este trabajo se ha introducido un **factor F** que mide el grado de acoplamiento entre materia y radiación. Éste se debe al movimiento de los fotones entre colisiones, es decir, materia y radiación comienzan a desacoplarse cuando el recorrido libre medio de los fotones es comparable a la longitud de onda de la escala. Lo que se pretende comprobar ahora es si se trata de un factor correctivo de importancia para este tratamiento.

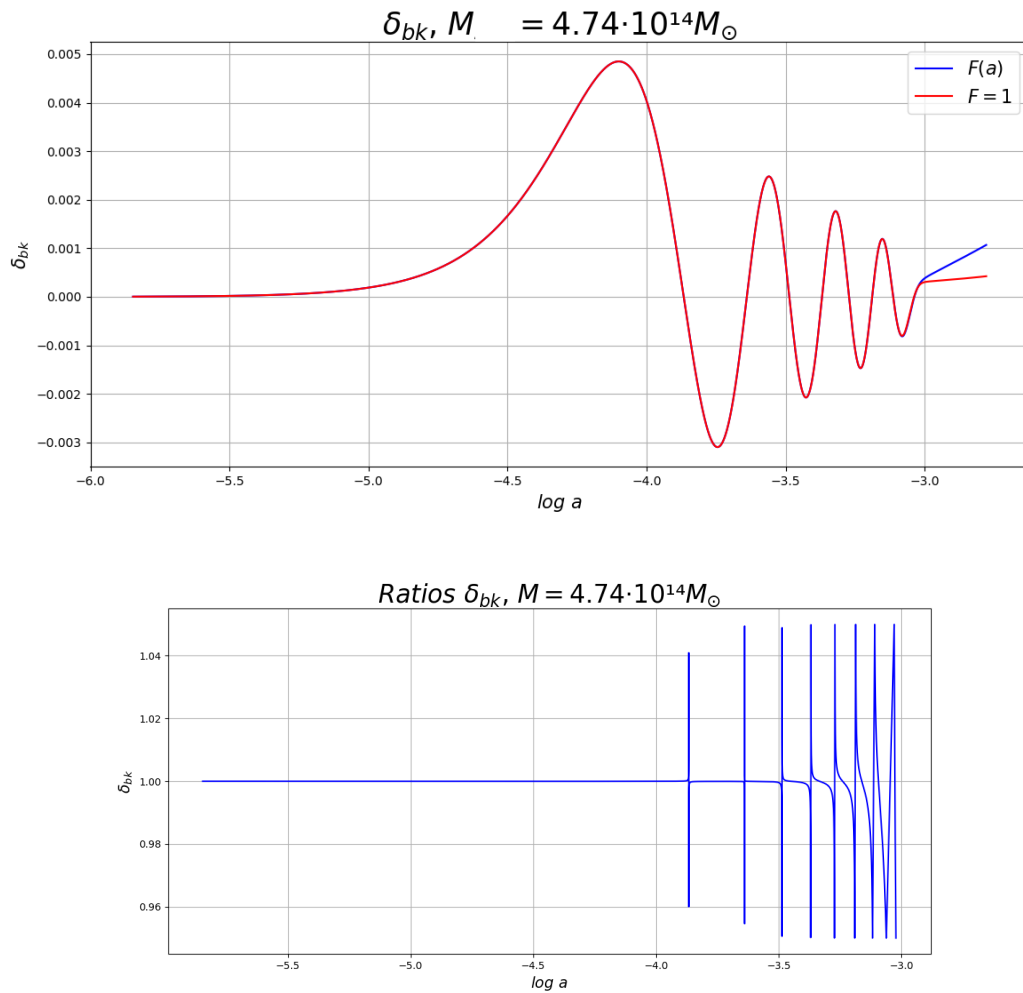


Figura 3.5: Comparación entre las oscilaciones bariónicas con $F = 1$ y con la expresión $F(a)$ para $M = 4.74 \times 10^{14}$. Debajo se muestra el cociente entre ambas.

En la Figura ?? se observa un ejemplo de cómo, al añadir este factor, las fluctuaciones de densidad crecen más rápidamente justo después del desacople. No obstante, no se aprecia bien esta variación hasta que se hace el cociente entre ambos casos, como puede verse en la imagen inferior de la Figura ?. Se comprueba, entonces, que la diferencia entre usar $F = 1$ y la expresión (??) es de un orden de magnitud, aproximadamente, lo cual implica que este factor F es importante para la precisión del tratamiento.

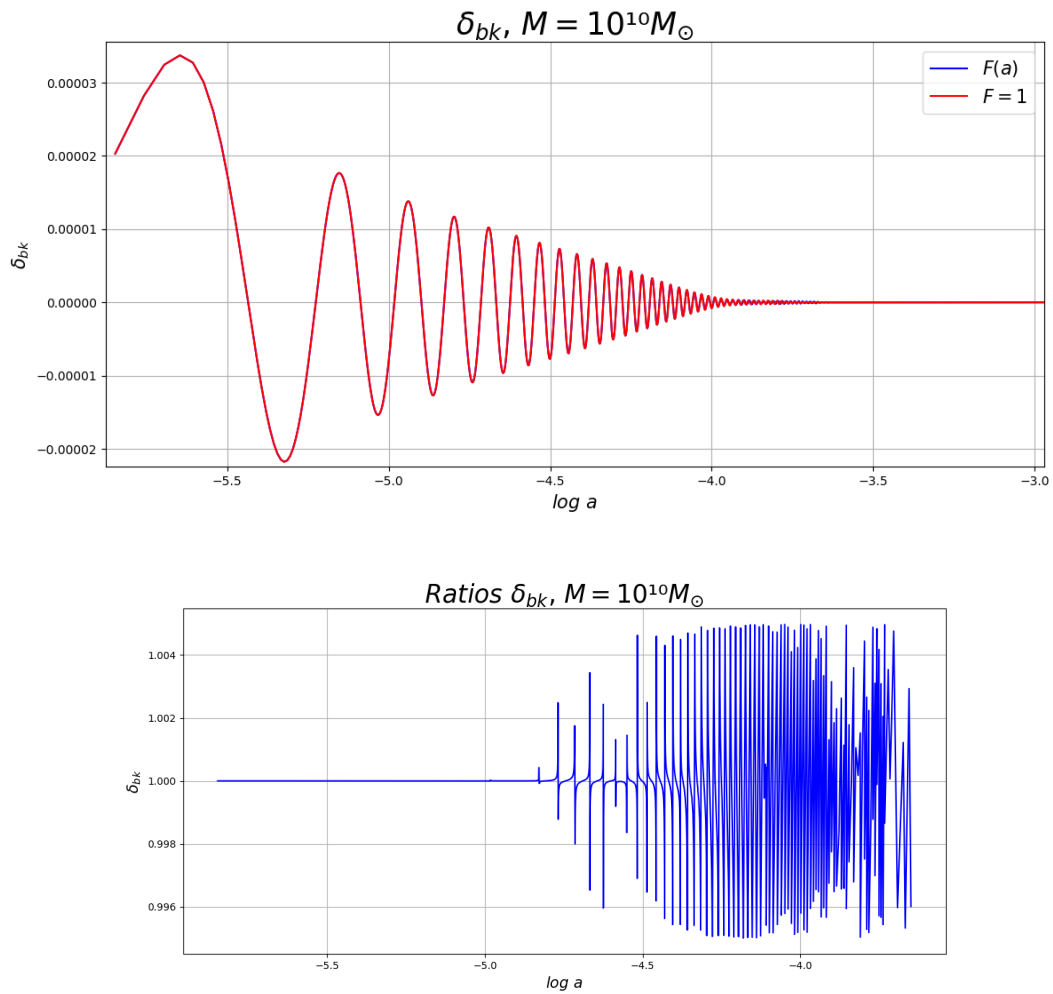


Figura 3.6: Comparación entre las oscilaciones bariónicas con $F = 1$ y con la expresión $F(a)$ para $M = 10^{10}$. Debajo se muestra el cociente entre ambas.

Por otro lado, si se analiza la oscilación justo en la recombinación, se obtiene que al usar este factor se produce un cambio del 1%, el cual no será de gran importancia para el cálculo del *damping* de Silk que se verá en la sección ??.

Para hacer un análisis más detallado y fiable, se ha comprobado el efecto de este factor F para una escala más pequeña que las usadas en este trabajo: $10^{10} M_{\odot}$. Esto es importante debido a que, cuanto menor es la escala, antes comienzan a desacoplarse materia y radiación y, por tanto, la contribución de este factor debería ser mayor. Los resultados obtenidos para esta escala difieren en un factor 10^2 , aproximadamente, al utilizar la expresión (??), con lo que se concluye que **la corrección del factor F es muy grande y es importante si se quiere trabajar con precisión.**

3.1.3. Efecto de la materia oscura

Como se ha comentado anteriormente, si además de la materia bariónica se tiene en cuenta un **background de materia oscura** ($\Omega_{0,m} = 0.3$), el factor de escala crece más rápido que en el caso puramente bariónico. Por tanto, a partir de la expresión (??), es fácil observar que el momento de entrada en el horizonte aumenta para cada escala (Tabla ??).

$M [M_{\odot}]$	$t_{hor} [y]$	
	<i>Solo Bariones</i>	<i>Con DM</i>
10^{13}	158	162
10^{14}	735	770
4.74×10^{14}	2081	2248
10^{15}	3434	3789
10^{16}	16223	19916
10^{17}	78224	118016

Tabla 3.2: Entrada en el horizonte para las diferentes escalas: comparación entre un universo puramente bariónico y uno con un *background* de materia oscura.

En la Figura ??, se puede ver una comparación entre el comportamiento de las oscilaciones bariónicas sin y con materia oscura. En ella se observa cómo, además de que la entrada en el horizonte se produzca más tarde, **las fluctuaciones se detienen antes**, y más cerca, por tanto, del momento del desacople (tomado como $t_{dec} \sim 380.000$ años).

Este efecto de la materia oscura es despreciable para las escalas más pequeñas, cuyas oscilaciones se ven amortiguadas mucho antes y prácticamente han desaparecido antes del *decoupling*. Para escalas del orden de la masa de Silk y superiores, sin embargo, la adición de materia oscura es significativa y se aprecia cómo el carácter oscilatorio se detiene y las inhomogeneidades crecen mientras que, para un universo solo con materia bariónica, esto ocurre más adelante.

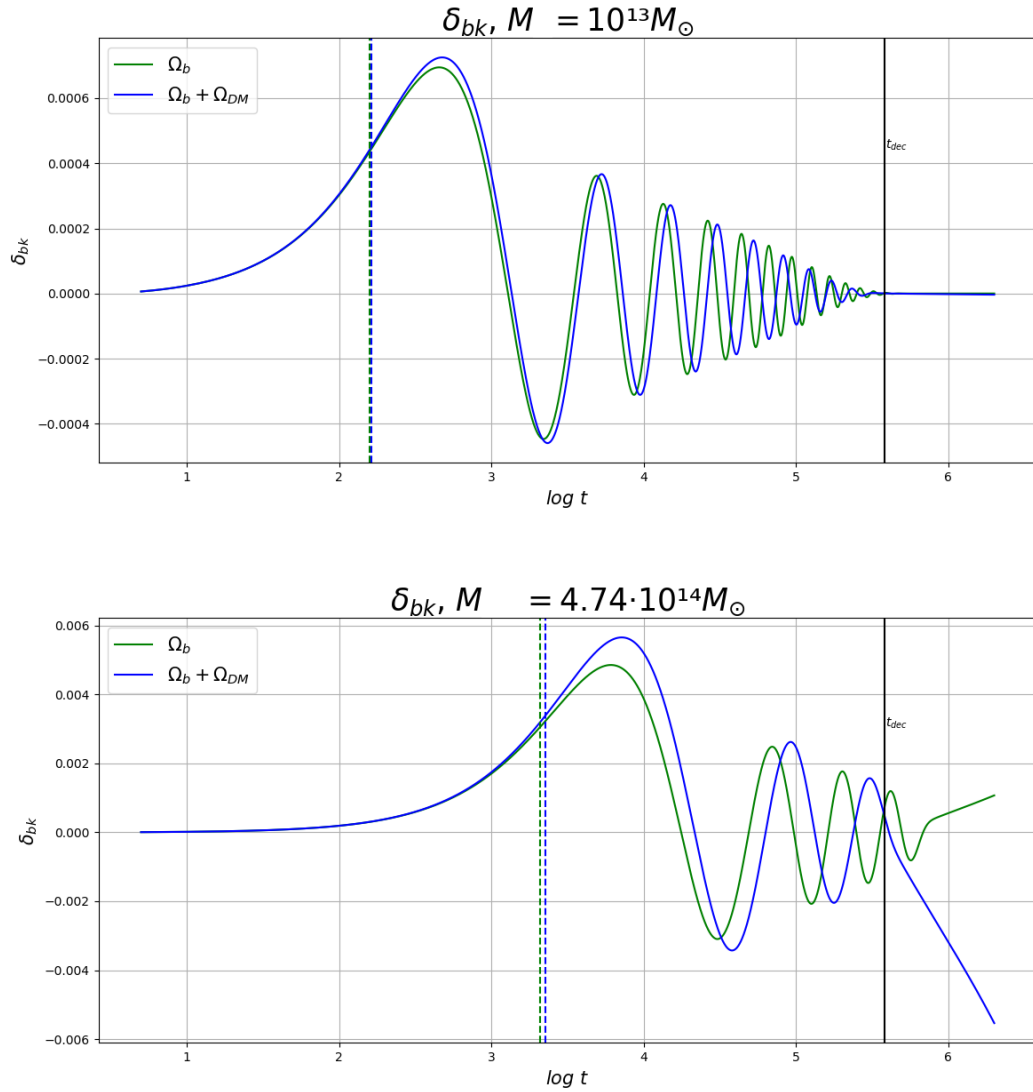


Figura 3.7: Comparación de la evolución de $\delta_{b,k}$ en un universo puramente bariónico y en uno con *background* de materia oscura para las escalas $M = 10^{13}M_{\odot}$ y $M = 4.74 \times 10^{14}M_{\odot}$ (se ha representado $\delta_{b,k}$ frente al tiempo por conveniencia).

3.2. Estudio del amortiguamiento de Silk

Como se ha explicado en el capítulo ??, durante la fase oscilatoria, que será más larga para las escalas más pequeñas por haber entrado antes en el horizonte, se experimenta un amortiguamiento denominado *Silk damping*. Se va a proceder, por tanto, a analizar este amortiguamiento por difusión tanto para un universo puramente bariónico como para uno con *background* de materia oscura.

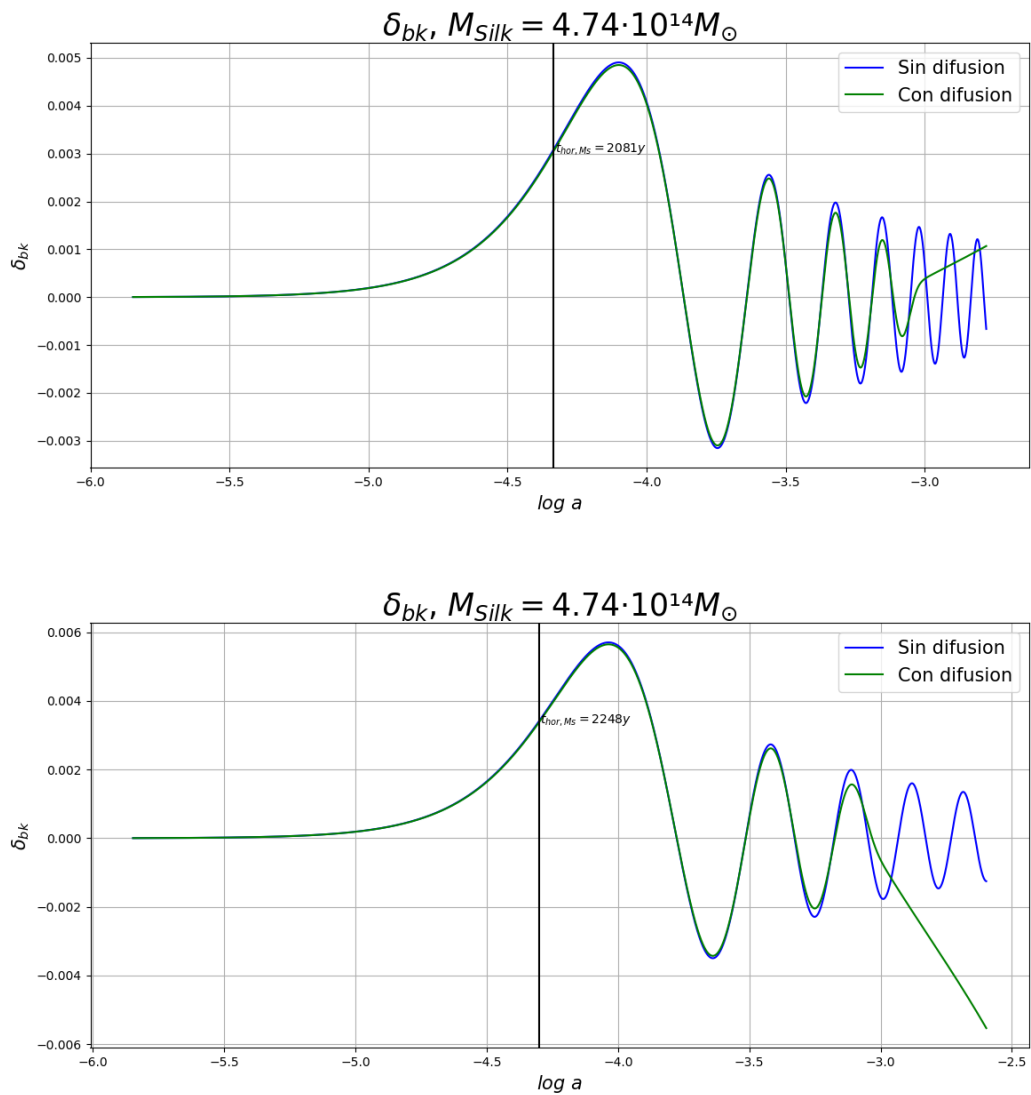


Figura 3.8: $\delta_{b,k}$ con y sin difusión para M_{Silk} en un universo puramente bariónico (arriba) y con *background* de materia oscura (abajo).

Cabe aclarar que, si el modelo incluyera fluctuaciones de materia oscura, este efecto perdería importancia dado que los bariones caerían dentro de los pozos de potencial gravitatorios que ésta provoca.

Por debajo de la masa de Silk el efecto de difusión es muy grande y el **factor de Silk**, $e^{-\left(\frac{M_{\text{Silk}}}{M}\right)^2}$, muy pequeño (?). Para las masas mayores que la de Silk, sin embargo, este factor aproximado será mas grande y, por tanto, el efecto de amortiguamiento es menor. Se observa también que, para esta escala de masa, el factor difusivo será aproximadamente $1/e$. Este proceso, por tanto, borra las fluctuaciones en escalas menores o similares a la de Silk, mientras que para escalas mayores estas inhomogeneidades mostrarán todavía un carácter oscilatorio con una amortiguación variable hasta la recombinación, donde las oscilaciones desaparecerán y seguirán un régimen creciente en amplitud.

Esto ocurre en el **momento del desacople**, por tanto, se va a comprobar para un **factor de escala aproximado: $a \sim 9.9 \times 10^{-4}$** . Se calcula haciendo el cociente, en ese momento, entre las amplitudes de oscilación con difusión y solo con presión de radiación, las cuales están representadas en la Figura ??.

$M [M_{\odot}]$	<i>Solo bariones</i>		<i>ConDM</i>
	$e^{-\left(\frac{M_{\text{Silk}}}{M}\right)^2}$	$\delta_{b,k_{\text{dif}}}/\delta_{b,k_{\text{pres}}}$	$\delta_{b,k_{\text{dif}}}/\delta_{b,k_{\text{pres}}}$
10^{14}	1.748×10^{-10}	1.323×10^{-7}	9.601×10^{-8}
4.74×10^{14}	0.368	0.298	0.310
10^{15}	0.799	0.548	0.989

Tabla 3.3: Silk damping: Comparación entre el factor teórico y el obtenido para un universo puramente bariónico y amortiguamiento aproximado para un universo con *background* de materia oscura.

En la Tabla ??, se muestra el valor teórico aproximado para factor de Silk para un universo puramente bariónico y el calculado con el cociente entre $\delta_{b,k}$ con y sin difusión. Por otra parte, también se ha calculado el amortiguamiento para un universo con *background* de materia oscura aunque, para este caso, la masa de Silk sería diferente. Para el caso puramente bariónico, se observa que los factores de *damping* calculados tienen un error significativo para escalas menores que la de Silk, ya que se trata de números muy pequeños y, por tanto, despreciables. Para la masa de Silk, sin embargo, el error entre el factor calculado y el teórico está por debajo del 20% y, en el caso de $10^{15}M_{\odot}$, este error no supera el 30%. Teniendo en cuenta que se trata de un procedimiento aproximado en el que influyen muchos factores, la precisión de los resultados obtenidos se puede considerar aceptable para este trabajo.

Es interesante, también, hacer una **comparación entre las oscilaciones bariónicas y las de radiación** para la masa de Silk. En la Figura ?? se observa que, al principio, se cumple que $\delta_{\gamma,k}$ es

cuatro tercios de $\delta_{b,k}$ (??), pero a partir del momento de desacople el tratamiento para la radiación ya no es válido, ya que habría que tener en cuenta el *free-streaming*.

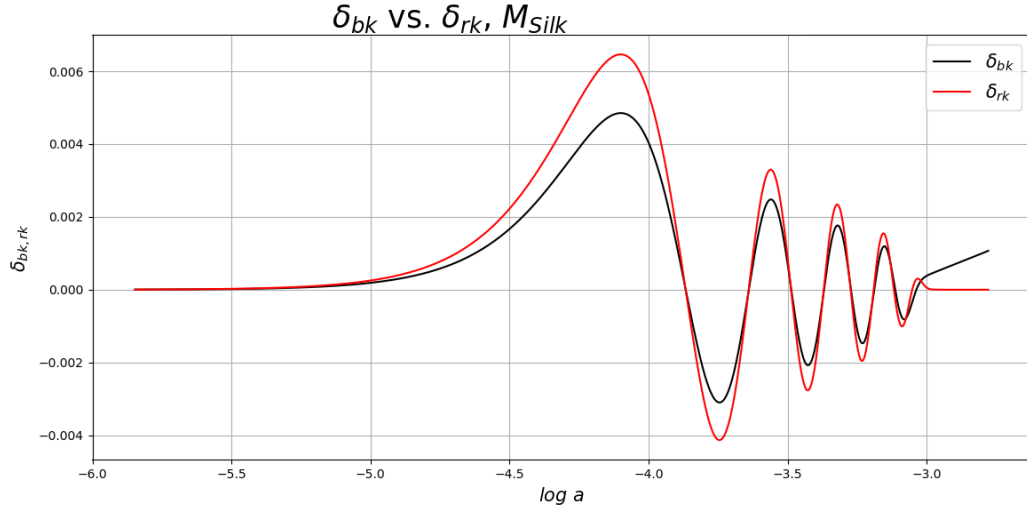


Figura 3.9: Comparación entre las fluctuaciones de densidad de bariones, $\delta_{b,k}$, y las de radiación, $\delta_{\gamma,k}$, para M_{Silk} .

3.3. Resolución de ecuaciones relativistas

Si ahora se añade el término relativista, $\delta''_{\gamma,k}$, y se resuelven las expresiones (??) y (??), se obtienen las **fluctuaciones de densidad de bariones para las ecuaciones relativistas**, (??) y (??), válidas también en las proximidades de entrada al horizonte. Obtenidos los resultados, se va a comprobar la precisión de estas ecuaciones y si, por consiguiente, resultan válidas para su uso.

En la Figura ?? se puede ver la evolución de las fluctuaciones con el término relativista para los casos sin y con materia oscura. Se puede observar cómo varían las amplitudes de entrada en el horizonte al usar las ecuaciones relativistas. Este cambio se produce porque, al añadir el término $\delta''_{\gamma,k}$, la perturbación no crece fuera del horizonte sino que prácticamente permanece constante y, una vez dentro de él, comienza a oscilar. A esto se le llama '**efecto horizonte**' y es debido a que fuera del horizonte el tiempo propio y el universal no coinciden, es decir, no existe conexión causal. Este cambio en la amplitud no es de importancia (varía según las condiciones iniciales utilizadas) siempre y cuando el ratio entre oscilaciones para cada escala permanezca aproximadamente constante.

Cabe destacar que el momento de entrada en el horizonte es el mismo que para las ecuaciones no

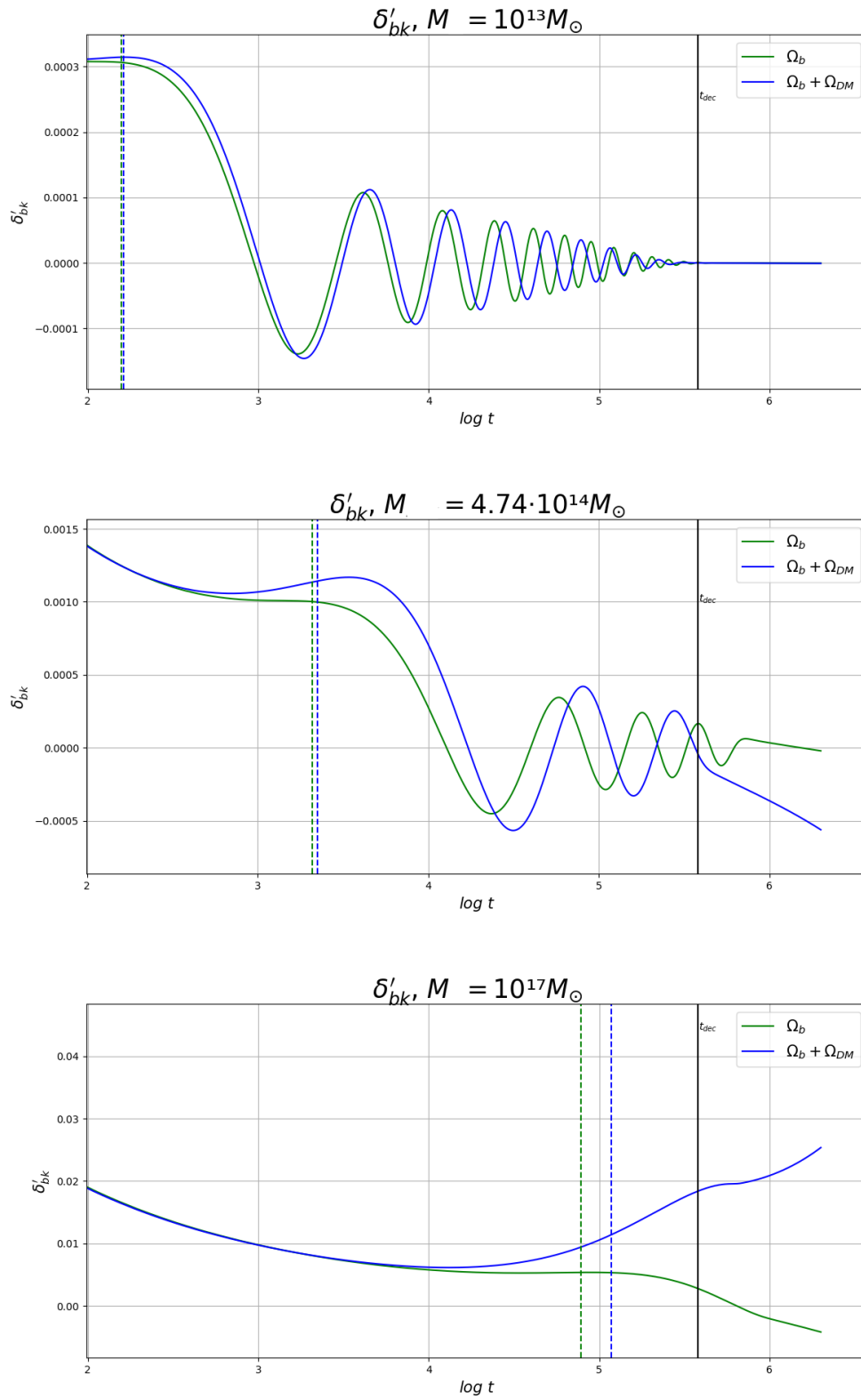


Figura 3.10: Oscilaciones bariónicas utilizando **ecuaciones relativistas** para las escalas $M = 10^{13}M_{\odot}$, $M = 4.74 \times 10^{14}M_{\odot}$ y $M = 10^{15}M_{\odot}$ sin y con *background* de materia oscura.

relativistas. Se observa, por otra parte, que mucho antes de la entrada al horizonte las oscilaciones no permanecen constantes. Esto se debe a que el término relativista utilizado tiende a infinito cuando el tiempo se hace cero, pero este "error" no es de mayor importancia para este trabajo mientras sea válido en las proximidades de entrada al horizonte.

Como se ha dicho anteriormente, para comprobar la precisión de las ecuaciones relativistas es necesario estudiar la proporción entre las amplitudes de los máximos y el tiempo al cual se producen. Para ello, basta con tener en cuenta los valores en el momento de entrada al horizonte y los del primer pico de oscilación ya que, posteriormente, la frecuencia a la que se producen estos máximos permanece constante. Es importante aclarar que, para el caso no relativista, el primer pico se omite, ya que es un falso máximo debido al crecimiento fuera del horizonte.

$M [M_{\odot}]$	<i>No relativista</i>		<i>Relativista</i>	
	t_{hor}/t_{pico}	$\delta_{b,k_{hor}}/\delta_{b,k_{pico}}$	t_{hor}/t_{pico}	$\delta'_{b,k_{hor}}/\delta'_{b,k_{pico}}$
10^{13}	3.228×10^{-2}	1.203	3.831×10^{-2}	2.848
10^{14}	3.120×10^{-2}	1.220	3.723×10^{-2}	2.879
4.74×10^{14}	2.986×10^{-2}	1.228	3.573×10^{-2}	2.899
10^{15}	2.896×10^{-2}	1.234	3.471×10^{-2}	2.911
10^{16}	2.427×10^{-2}	1.271	2.954×10^{-2}	2.989

Tabla 3.4: Relación entre los tiempos y amplitudes en el horizonte y el primer pico: Resultados para ecuaciones no relativistas y relativistas en un **universo puramente bariónico**.

En la Tabla ?? se muestran los ratios obtenidos entre los resultados de las amplitudes, $\delta_{b,k}$, y los tiempos en el horizonte y en el primer pico (real) de oscilación para un **universo puramente bariónico**. Lo primero que se observa es que la primera fluctuación se produce antes para el caso relativista. Esto ocurre debido a que, al contrario que para las ecuaciones sin término relativista, la perturbación no tiene un carácter creciente previo a la entrada en el horizonte y, por tanto, la presión de radiación actúa antes comprimiendo el fluido materia-radiación y provocando las fluctuaciones de densidad bariónicas. Por esta misma razón, la relación entre la amplitud en el horizonte y la del primer pico varía bastante al usar ecuaciones relativistas.

Si se hace un estudio de cómo varían de estos ratios para los dos casos, se comprueba que van aumentando un poco con la escala, concretamente un 6% para el caso no relativista y un 5% para el relativista. Haciendo una comparación de estas variaciones entre ambos casos, se observa que esta es bastante parecida y es posible obtener que **la precisión al añadir este nuevo término relativis-**

ta es del 1% aproximadamente. Por tanto, la importancia de las correcciones relativistas para el tratamiento dependerá de la precisión con la que se quiera trabajar.

Es interesante, también, representar las oscilaciones acústicas de bariones para los dos casos, no relativista y relativista, y así poder comparar su evolución de forma más sencilla. En la Figura ??, se puede observar cómo el comportamiento es similar en ambos casos una vez comienzan las fluctuaciones.

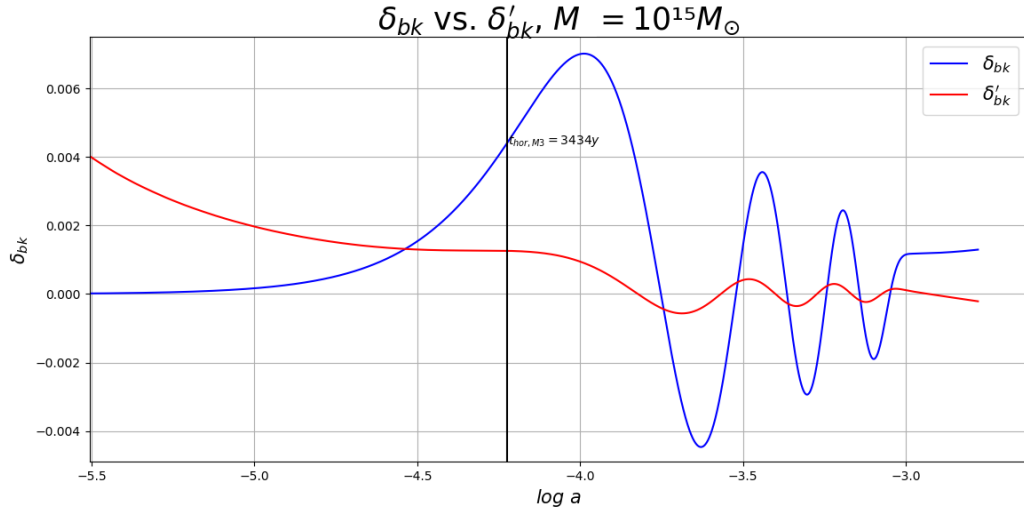


Figura 3.11: Oscilaciones bariónicas de $M = 10^{15}M_{\odot}$ con ecuaciones no relativistas y relativistas para un universo puramente bariónico.

Si ahora se analizan los resultados obtenidos con *background* de materia oscura, se observa que, en general, ocurre algo parecido al calcular los ratios para las ecuaciones no relativistas y relativistas. En la Tabla ?? se ha omitido la escala más grande, $10^{16}M_{\odot}$, debido a que, como la materia oscura provoca que las escalas entren más tarde en el horizonte, el primer pico de oscilación no es apreciable.

$M [M_{\odot}]$	<i>No relativista</i>		<i>Relativista</i>	
	t_{hor}/t_{pico}	$\delta_{b,k_{hor}}/\delta_{b,k_{pico}}$	t_{hor}/t_{pico}	$\delta'_{b,k_{hor}}/\delta'_{b,k_{pico}}$
10^{13}	3.066×10^{-2}	1.226	3.588×10^{-2}	2.793
10^{14}	2.772×10^{-2}	1.229	3.209×10^{-2}	2.718
4.74×10^{14}	2.443×10^{-2}	1.233	2.785×10^{-2}	2.615
10^{15}	2.234×10^{-2}	1.220	2.522×10^{-2}	2.508

Tabla 3.5: Relación entre los tiempos y amplitudes en el horizonte y el primer pico: Resultados para ecuaciones no relativistas y relativistas con *background* de materia oscura.

En este caso, sin embargo, la variación entre los ratios para las ecuaciones no relativistas es menor del 1% mientras que, para el caso relativista, es del 10%. Por consiguiente, **para un universo con materia oscura, la precisión al añadir correcciones relativistas es del 10% aproximadamente** y, por tanto, sí que serán de importancia para el tratamiento.

En la Figura ??, por último, se observa la evolución de las oscilaciones bariónicas con *background* de materia oscura para ambos casos. Es fácil comprobar, como se ha comentado anteriormente, que en las proximidades de entrada al horizonte la fluctuación de densidad con correcciones relativistas permanece prácticamente constante, en lugar de aumentar su amplitud debido al crecimiento fuera del horizonte.

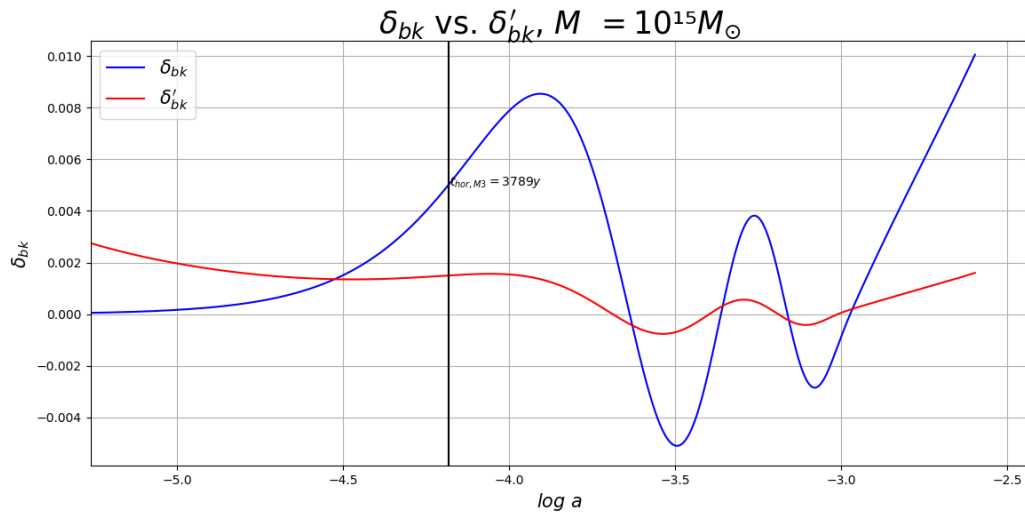


Figura 3.12: Oscilaciones bariónicas de $M = 10^{15} M_{\odot}$ con ecuaciones no relativistas y relativistas para un universo con *background* de materia oscura.

Capítulo 4

Conclusiones y líneas futuras de investigación

Abstract

In this chapter, we will discuss the conclusions we have reached after studying the effects and their importance on baryonic density fluctuations. The study is not finished, so, we will discuss possible improvements of the treatment in order to characterize dark matter spectra with more accuracy.

4.1. Conclusiones

El presente trabajo ha consistido en el estudio computacional de efectos potencialmente relevantes para la evolución de las fluctuaciones de densidad bariónicas y, por consiguiente, para la posterior determinación de espectros de materia oscura. A partir del análisis de estos factores, hemos obtenido las siguientes conclusiones:

- El efecto de **la fracción de ionización** sobre las oscilaciones bariónicas es importante para la precisión del tratamiento, ya que los resultados varían un orden de magnitud. Además, se comprueba que esta fracción de hidrógeno ionizado comienza a contribuir antes a las fluctuaciones de densidad de escalas más pequeñas.
- El **factor de corrección F** resulta ser de mayor importancia cuanto menor es la escala: los resultados para las oscilaciones bariónicas difieren hasta un factor 10^2 para la escala de $10^{10}M_{\odot}$.

Para escalas mayores, tendrá mayor importancia después del desacople, donde el tratamiento utilizado en este trabajo no es válido.

- La adición de un **background de materia oscura** produce el efecto esperado sobre las fluctuaciones de densidad de bariones, provocando que las escalas entren en el horizonte más tarde y que el desacople se produzca a un tiempo menor. Además, se comprueba que esta aproximación proporciona los resultados deseados sobre el estudio de las ecuaciones relativistas.
- El **amortiguamiento de Silk** obtenido para un universo puramente bariónico presenta un error que no supera el 20 % en comparación con el factor de *damping* aproximado, por lo que se concluye que el estudio es bastante preciso. Se comprueba, por tanto, la validez de las ecuaciones para las oscilaciones bariónicas en la época de la recombinación.
- Las **correcciones relativistas, debidas al 'efecto horizonte'**, sobre las ecuaciones muestran el comportamiento deseado en la proximidad de entrada al horizonte. Por otra parte, se obtiene que su impacto sobre la evolución de las fluctuaciones de densidad es del 1 % para un universo puramente bariónico y del 10 % si añadimos materia oscura, por lo que se comprueba que el término relativista es importante para el posterior cálculo del espectro de potencias.

4.2. Lineas futuras

Para la futura mejora de la precisión del trabajo realizado, se plantea añadir un par de factores que pueden ser de importancia para el tratamiento:

- La radiación no está compuesta solo de fotones. Por tanto, sería necesario **añadir neutrinos y sus fluctuaciones** a la componente radiativa.
- En este trabajo se ha utilizado un *background* constante de materia oscura a pesar de que el interés residía en el caso puramente bariónico. Se ha hecho de esta manera para estudiar, de manera aproximada, la repercusión de las correcciones relativistas en el "caso real". Para el tratamiento correcto, sería necesario añadir también las expresiones que rigen las **fluctuaciones de materia oscura**.
- Por último, sería de interés utilizar una integración con paso logarítmico, en vez de fijo, para optimizar el tratamiento.

Referencias

- Alpher, R. A., Bethe, H., & Gamow, G. 1948, *Physical Review*, 73, 803
- Bennett, C. L., Larson, D., Weiland, J. L., et al. 2013, NINE-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS: FINAL MAPS AND RESULTS, *ApJS*, 208, 20
- Betancort, J. E. 2018, Comunicación Personal
- Cepa, J. 2007, *Cosmología Física*, by J. Cepa. Ediciones Akal, S. A., 2007. ISBN: 978-84-460-2533-7
- De Armas, S. 2017, Obtention of the Baryonic and Dark Matter power spectrum using certain approximations on the equations that rule the evolution of Baryonic Acoustic Oscillations. Universidad de La Laguna: Trabajo de Fin de Grado, Septiembre 2017
- Einstein, A. 1916, *Annalen der Physik*, 354, 769
- Einstein, A., & de Sitter, W. 1932, *Contributions from the Mount Wilson Observatory*, vol. 3, pp.51-52, 3, 51
- Friedmann, A. 1999, *General Relativity and Gravitation*, 31, 1991
- Hubble, E. 1929, *Proceedings of the National Academy of Science*, 15, 168
- Longair, M. S. 1998, *Galaxy formation / Malcolm S. Longair*. New York : Springer, 1998. (Astronomy and astrophysics library) QB981 .L846 1998,
- Lyth, D. H., & Liddle, A. R. 2009, *The Primordial Density Perturbation*, by David H. Lyth , Andrew R. Liddle, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2009,
- Padmanabhan, T. 1993, *Structure Formation in the Universe*, by T. Padmanabhan, pp. 499. ISBN 0521424860. Cambridge, UK: Cambridge University Press, June 1993., 499

- Peacock, J. A. 1999, *Cosmological Physics*, by John A. Peacock, pp. 704. ISBN 052141072X. Cambridge, UK: Cambridge University Press, January 1999., 704
- Peebles, P. J. E. 1980, Research supported by the National Science Foundation. Princeton, N.J., Princeton University Press, 1980. 435 p.,
- Penzias, A. A., & Wilson, R. W. 1965, *ApJ*, 142, 419
- Ryden, B. 2003, *Introduction to cosmology* / Barbara Ryden. San Francisco, CA, USA: Addison Wesley, ISBN 0-8053-8912-1, 2003, IX + 244 pp.,
- Silk, J. 1968, *ApJ*, 151, 459
- Sunyaev, R. A., & Zeldovich, Y. B. 1970, *Ap&SS*, 7, 3
- Walker, A. G. 1937, *Proceedings of the London Mathematical Society*, (Series 2) volume 42, p. 90-127, 42, 90
- Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, by Steven Weinberg, pp. 688. ISBN 0-471-92567-5. Wiley-VCH , July 1972., 688
- Weinberg, S. 2008, *Cosmology*, by Steven Weinberg. ISBN 978-0-19-852682-7. Published by Oxford University Press, Oxford, UK, 2008.,