

Samanta Belén Lara

# *Teoría Constructiva de Aproximación Racional de Funciones*

Constructive Theory of Rational Approximation  
of Functions

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas  
La Laguna, Septiembre de 2018

DIRIGIDO POR  
*Carlos Javier Díaz Mendoza*

*Carlos Javier Díaz Mendoza*  
*Depto. de Análisis Matemático*  
*Universidad de La Laguna*  
*38271 La Laguna, Tenerife*

---

## **Agradecimientos**

Agradezco a mi familia, en especial a mi madre, por brindarme el apoyo necesario durante el transcurso de mis estudios.

Agradezco el trabajo de mi tutor Carlos Javier Díaz Mendoza, su paciencia y dedicación ha sido esencial durante el desarrollo de la presente memoria.



---

## Resumen · Abstract

### *Resumen*

---

*En esta memoria se analizan algunas de las propiedades de los aproximantes de Padé, la estructura de la Tabla de Padé, así como la convergencia de las filas de la Tabla. Su principal interés radica en la posibilidad de reproducir adecuadamente las funciones meromorfas. Un problema fundamental es el de la convergencia de las filas de la Tabla de Padé, el Teorema de Montessus de Ballore proporciona una respuesta a este problema.*

**Palabras clave:** *Aproximantes de Padé – Determinantes de Hadamard – Montessus de Ballore – Funciones meromorfas – Aproximación.*

### *Abstract*

---

*In this memoir, Padé approximant, the structure of the Padé Table and its algebraic properties, as well as the convergence of the rows of the Table are analyzed in detail. Its main interest is the possibility of reproducing meromorphic functions. The fundamental problem is the convergence of the rows of the Padé Table, and Theorem of Montessus de Ballore provides a general response to this problem.*

**Keywords:** *Padé Approximants – Determinants of Hadamard – Montessus de Ballore – Meromorphic functions – Approximation.*



---

# Contenido

<b>Agradecimientos</b> .....	III
<b>Resumen/Abstract</b> .....	V
<b>1. Aproximación de Padé. Propiedades Algebraicas. Convergencia</b> .....	1
1.1. Introducción .....	1
1.2. Contexto Histórico .....	5
1.3. La Tabla de Padé .....	7
1.4. Convergencia .....	28
<b>2. Aplicación. Experimentos Numéricos</b> .....	35
2.1. Método de Aitken .....	35
2.2. Ejemplos .....	37
2.3. Conclusiones .....	40
<b>Bibliografía</b> .....	41
<b>Lista de Figuras</b> .....	42
<b>Poster</b> .....	45



## Aproximación de Padé. Propiedades Algebraicas. Convergencia

### 1.1. Introducción.

Uno de los problemas fundamentales de la Teoría de Aproximación es aproximar constructivamente funciones cuya expresión analítica es desconocida o, de conocerse, es poco manejable matemáticamente. En este trabajo nos restringiremos al conjunto de las funciones meromorfas en el plano complejo.

Es bien sabido que las funciones holomorfas están determinadas localmente por su valor y el de sus sucesivas derivadas en un punto. Concretamente, sean  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un dominio, abierto y conexo, y  $f$  una función holomorfa en  $\Omega$ ,  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Dado que toda función holomorfa es analítica, si  $a \in \Omega$  se sigue que  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$ ,  $\forall z \in D(a, r)$ , siendo  $r = d(a, \partial\Omega)$ , donde con  $\partial\Omega$  denotamos la frontera de  $\Omega$  y  $d(a, \partial\Omega) = \inf\{|a-t|/t \in \partial\Omega\}$ , distancia entre  $a$  y  $\partial\Omega$ . Es más, la sucesión  $\{P_n(f, a, z)\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida mediante  $P_n(f, a, z) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , denominado polinomio de Taylor de grado  $n$  en el punto  $z = a$ , caracterizado por ser el polinomio de grado  $n$  que mejor interpola a  $f$  en  $z = a$ , verifica que  $P_n(f, a, z) \xrightarrow{c.u.*} f(z)$  en  $D(a, r)$ .

Incluso, la convergencia es geométrica. De hecho,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - P_n(f, a, z)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{|z-a|}{r} < 1, \forall z \in D(a, r).$$

Efectivamente, es inmediato comprobar que:

$$\frac{f(z) - P_n(f, a, z)}{(z-a)^{n+1}} \in \mathcal{H}(D(a, r)),$$

Aplicando el Teorema de Cauchy para  $\Gamma = \partial D(a, \delta)$  siendo  $\delta < r$ , como consecuencia de la holomorfía de  $\frac{f(z) - P_n(f, a, z)}{(z-a)^{n+1}}$ ,

---

\* De ahora en adelante  $\xrightarrow{c.u.}$  denota convergencia uniforme en compactos.

$$\frac{f(z) - P_n(f, a, z)}{(z - a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) - P_n(f, a, t)}{(t - z)(t - a)^{n+1}} dt.$$

Por la linealidad de la integral, obtenemos

$$\frac{f(z) - P_n(f, a, z)}{(z - a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t - z)(t - a)^{n+1}} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{P_n(f, a, t)}{(t - z)(t - a)^{n+1}} dt.$$

Dado que  $h(t) := \frac{P_n(f, a, t)}{(t - z)(t - a)^{n+1}}$  es holomorfa en  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D(a, \delta)$ , y se comporta como  $O(\frac{1}{t^2})^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , se tiene que  $\int_{\gamma} h(t) dt = 0$ , siendo  $\gamma$  la frontera de cualquier disco centrado en  $z = 0$  y de radio lo suficientemente grande y  $\widehat{\mathbb{C}}$  el plano complejo compactificado. Concluimos,

$$\frac{f(z) - P_n(f, a, z)}{(z - a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t - z)(t - a)^{n+1}} dt,$$

tomando módulo,

$$\left| \frac{f(z) - P_n(f, a, z)}{(z - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|f(t)|}{|t - z||t - a|^{n+1}} |dt|$$

teniendo en cuenta la parametrización  $t = a + \delta e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\left| \frac{f(z) - P_n(f, a, z)}{(z - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M_f}{d(z, \Gamma)} \frac{1}{\delta^n}$$

donde  $M_f = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$ . Luego,

$$|f(z) - P_n(f, a, z)| \leq \frac{M_f}{d(z, \Gamma)} \frac{|z - a|^{n+1}}{\delta^n}, \forall z \in D(a, \delta), \forall \delta < r,$$

tomando límite superior a la raíz enésima,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - P_n(f, a, z)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{|z - a|}{\delta}, \forall z \in D(a, \delta), \forall \delta < r,$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - P_n(f, a, z)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{|z - a|}{r}, \forall z \in D(a, r),$$

como queríamos ver.

Observamos que si la función es holomorfa en  $\mathbb{C}$ , los polinomios de Taylor son excelentes aproximantes, ya que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - P_n(f, a, z)|^{\frac{1}{n}} = 0$$

---

\* Denotamos por  $O(\frac{1}{t^2})$ ,  $t \rightarrow \infty$ , a un desarrollo en potencias de  $\frac{1}{t}$  igual o superiores a  $\frac{1}{t^2}$ .

con sólo hacer  $r \rightarrow \infty$ , es decir,  $P_n(f, a, z) \xrightarrow{c.u.} f$  en  $\mathbb{C}$  con velocidad más que geométrica.

Sin embargo, si  $f$  posee polos en  $\mathbb{C}$ , es decir, si es meromorfa en  $\mathbb{C}$ , la convergencia de los polinomios de Taylor se deteriora pues sólo se recupera la función  $f$  en  $D(a, \Delta)$ , siendo  $\Delta$  la distancia del punto  $a$  al primer polo. Esto es evidente dado que los polinomios son incapaces de reproducir singularidades polares y, por ello, es necesario sustituirlos por una familia de aproximantes que si lo permitan. Intuitivamente vemos que esta nueva familia puede ser constituida por las funciones racionales, ya que además de heredar muchas de las propiedades tanto algebraicas como analíticas de los polinomios (fácil evaluación, derivación, integración,...) por tratarse del cociente de polinomios también poseen la capacidad de reproducir la singularidad del infinito además de las singularidades polares, con solo provocar una diferencia de grado entre el numerador y el denominador. En este sentido, planteamos nuestro problema.

Sea  $\mathbb{P}_k$  el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo sumo  $k$ , cabe plantearse el siguiente problema de interpolación. Buscar un elemento  $r_{n,m}$ ,  $r_{n,m} \in R_{n,m}$ , siendo

$$R_{n,m} = \left\{ \frac{P(z)}{Q(z)} : P \in \mathbb{P}_n, Q \in \mathbb{P}_m, Q \neq 0, P \text{ y } Q \text{ primos entre sí} \right\},$$

que verifique el mismo criterio de interpolación que el polinomio de Taylor, a saber,

$$f(z) - r_{n,m}(z) = O((z-a)^\chi), \quad z \rightarrow a,$$

siendo  $\chi \in \mathbb{N}$  lo más grande posible, es decir, buscar la mejor aproximación racional local de  $f$  en un entorno de  $z = a$ . Dado que  $P$  y  $Q$  tienen  $n+1$  y  $m+1$  parámetros, respectivamente, al hacer el cociente  $\frac{P}{Q}$  se pierde un grado de libertad, por tanto, es razonable exigir

$$f(z) - r_{n,m}(z) = O((z-a)^{n+m+1}), \quad z \rightarrow a,$$

siendo  $n+m+1$  los parámetros a determinar. Esta pérdida de grado de libertad nos permitirá normalizar el denominador a nuestra conveniencia durante el estudio de la convergencia.

Dicho problema, conocido como problema fuerte de interpolación, no siempre tiene solución. Efectivamente, si queremos encontrar un aproximante racional en  $R_{1,1}$  a  $f(z) = 1 + z^2 + z^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} = \frac{1}{1-z^2}$ , función holomorfa en  $|z| < 1$ , es decir, encontrar  $r_{1,1}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , tal que  $f(z) - r_{1,1}(z) = O(z^3)$ . Si suponemos que existe, entonces  $r_{1,1}(z) = f(z) + O(z^3) = 1 + z^2 + O(z^3)$ . Observamos que  $r'_{1,1}(0) = 0$ , lo cual es absurdo ya que  $r_{1,1}$  es una *transformación de Möbius* y estas funciones son constantes o inyectivas.

Una técnica usual con el fin de garantizar una solución es linealizar el problema. En nuestro contexto, reformularemos el problema de la siguiente forma. Encontrar una función racional  $\frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}} \in R_{n,m}$  tal que:



polinomio  $Q_{n,m}$  y, a partir de este, construir  $P_{n,m}$  recuperando el desarrollo de Taylor de los  $n+1$  primeros términos de  $Q_{n,m}f$ . Con esto, el par de polinomios  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  verifica las propiedades *i*), *ii*) de (1.1).

Como podemos deducir no hay unicidad en el par  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  por no haberla en  $Q_{n,m}$ , sin embargo el cociente si que lo es. Veámoslo, sea  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  y  $(P'_{n,m}, Q'_{n,m})$  dos soluciones de (1.1). Entonces,

$$\begin{aligned} Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) &= O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0, \\ Q'_{n,m}(z)f(z) - P'_{n,m}(z) &= O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Multiplicando cada igualdad por  $Q'_{n,m}(z)$  y  $Q_{n,m}(z)$ , respectivamente, y restando, obtenemos

$$Q_{n,m}(z)P'_{n,m}(z) - Q'_{n,m}(z)P_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}) = Az^{n+m+1} + \dots, \quad z \rightarrow 0,$$

Dado que  $Q_{n,m}P'_{n,m} - Q'_{n,m}P_{n,m}$  es un polinomio de grado a lo sumo  $n+m$ , necesariamente  $Q_{n,m}(z)P'_{n,m}(z) - Q'_{n,m}(z)P_{n,m}(z) \equiv 0$ , por tanto,

$$\frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)} = \frac{P'_{n,m}(z)}{Q'_{n,m}(z)}.$$

Señalar la trascendencia de la unicidad del cociente a pesar de que no la haya en  $Q_{n,m}$ . Muestra de su importancia es buscar su relación con el problema fuerte de interpolación. Posteriormente veremos en que circunstancias son equivalentes ambos problemas. El cociente  $\frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}}$  que denotaremos por  $[n/m]_f$  recibe el nombre de APROXIMANTE DE PADÉ asociado a  $f$  para el índice  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ .

## 1.2. Contexto Histórico

Los aproximantes de Padé deben su nombre al matemático Henri Padé (1863-1953), ver figura 1.1, quien en su tesis doctoral (1892) realizó el primer estudio sistemático de estos interpolantes racionales. No obstante, Padé no fue el primero en percatarse de su utilidad.

En 1731 el matemático Georges Anderson envió a William Jones una carta donde aparecen unas funciones racionales que son aproximantes de Padé, y poco después, en 1751, en otra correspondencia entre Leonhard Euler y el astrónomo Tobias Mayer, se consideran funciones racionales como aproximantes. Sin embargo, ninguno de ellos fue consciente de la principal propiedad de dichos aproximantes.



Figura 1.1: Henri Padé

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) fue el primero en reparar en la principal propiedad de estos aproximantes. En 1776, hay constancia de unos manuscritos en los que Lagrange resuelve ecuaciones diferenciales mediante fracciones continuas, exigiéndoles a dichas fracciones la coincidencia de su desarrollo en serie de potencias, tanto como sea posible, con el de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Durante el siglo XIX numerosos matemáticos, tales como Carl Gustav Jacob Jacobi, Leopold Kronecker, Bernhard Riemann y Georg Frobenius, contribuyeron al desarrollo de esta teoría, ver [2] y referencias contenidas en él para una visión más completa.

Pero en 1892 bajo la tutorización de Charles Hermite, ver figura 1.2, Padé estudió en profundidad esta clase de funciones racionales clasificándolas en una tabla de doble entrada,  $[n/m]_f$ , conocida hoy en día con el nombre de Tabla de Padé. Obteniendo los primeros resultados sobre la estructura de dicha tabla. A finales del siglo XIX y principios del siglo XX se obtuvieron muchas propiedades algebraicas así como algunos resultados cualitativos relativos a la convergencia, donde destacan Markov y Stieltjes. Pero no fue hasta los años 60 cuando comenzó el verdadero desarrollo del estudio sistemático de la convergencia desde un punto de vista cuantitativo, así como sus primeras extensiones. Debiéndose principalmente al interés generado por sus aplicaciones en Física, Química, Análisis Numérico, etc. y al uso generalizado del ordenador, el cual permite realizar cálculos que anteriormente resultaban tediosos. La interacción de todas estas circunstancias generó un nuevo impulso y renovó el interés por esta teoría, produciéndose durante el último cuarto del siglo XX hasta la actualidad, un buen número de importantes resultados enriqueciendo este tipo de aproximación con varias extensiones entre las más relevantes la Aproximación Padé Multipuntual (interpolación en más de un punto), Aproximación tipo-Padé (fijando polos de antemano), Aproximación Hermite-Padé (interpolación simultáneamente de más de una función) que han contribuido a que hoy podamos contemplar la Teoría de la Interpolación Racional con una estructura coherente, sólida y, en muchos

aspectos, bien acabada, aunque a la par, pujante y llena de expectativas, especialmente en lo relativo a las aplicaciones. A este respecto, cabe citar las importantes aportaciones de matemáticos, algunos de ellos en plena actividad, como J. L. Walsh, T. Bagby, O. Perron, G. Baker, J. Nuttall, H. Wallin, C. Brezinski, A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, H. Stahl, G. López Lagomasino, E. B. Saff o D. S. Lubinsky, A. Bultheel, A. Martínez Finkelshtein, entre muchos otros. Señalar que los aproximantes de Padé están íntimamente relacionados con tópicos relevantes como las fracciones continuas, polinomios ortogonales, fórmulas de cuadratura y métodos de aceleración de convergencia.



Figura 1.2: Charles Hermite

### 1.3. La Tabla de Padé

Sea

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \quad (1.3)$$

una serie de potencias centrada en  $z = 0$ , pudiendo ser formal o convergente. Como hemos visto, podemos encontrar para cada par  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ , una única función racional que hemos denotado por:

$$[n/m]_f = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}},$$

tal que:

$$\begin{aligned} & i) P_{n,m} \in \mathbb{P}_n, Q_{n,m} \in \mathbb{P}_m, Q_{n,m} \neq 0, \\ & ii) Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = A_{n,m}z^{n+m+1} + \dots, z \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

siendo  $A_{n,m}$  una constante, que puede ser nula, y el lado derecho de la igualdad es una serie en potencias crecientes de  $z$ , que denotaremos por  $O(z^{n+m+1})$  cuando sea necesario.

**Definición 1.1.** Llamaremos *Tabla de Padé asociada a  $f$*  a:

$$\begin{array}{cccc} [0/0]_f & [1/0]_f & [2/0]_f & \dots \\ [0/1]_f & [1/1]_f & [2/1]_f & \dots \\ [0/2]_f & [1/2]_f & [2/2]_f & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Cuando no exista confusión con otra función, al aproximante de Padé lo denotaremos por  $[n/m]_f = [n/m]$ .

La sucesión  $\{[n/m_0]\}_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $m_0$  fijo, se conoce como la  $m_0$ -ésima fila de la Tabla de Padé y se denomina diagonal principal de la Tabla de Padé a la sucesión  $\{[n/n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Observar que la primera fila corresponde a los sucesivos polinomios de Taylor de  $f$  en  $z = 0$ .

Debemos señalar algunos fenómenos que surgen al linealizar el problema fuerte de interpolación.  $P_{n,m}$  y  $Q_{n,m}$  pueden no ser primos entre sí y entre sus raíces comunes puede hallarse el origen. Analicemos el caso en el cual las raíces comunes son no nulas, es decir,  $P_{n,m}(z) = t(z)p_{n,m}(z)$ ,  $Q_{n,m}(z) = t(z)q_{n,m}(z)$  con  $t(0) \neq 0$  y  $\partial(t) = k_0$ , donde  $\partial(p)$  denota el grado del polinomio  $p$ .

$$\begin{aligned} t(z)q_{n,m}(z)f(z) - t(z)p_{n,m}(z) &= O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0, \\ q_{n,m}(z)f(z) - p_{n,m}(z) &= O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0, \\ f(z) - [n/m](z) &= O(z^{((n-k_0)+(m-k_0)+1+2k_0)}), \quad z \rightarrow 0, \end{aligned}$$

siendo  $[n/m] = \frac{p_{n,m}}{q_{n,m}}$  con  $p_{n,m} \in \mathbb{P}_{n-k_0}$  y  $q_{n,m} \in \mathbb{P}_{m-k_0}$ . Por lo tanto, la solución buscada en  $R_{n,m}$  en realidad puede estar en  $R_{n-k_0, m-k_0}$ , es decir,  $[n/m] \in R_{n-k_0, m-k_0}$  sin perderse ninguna de las condiciones de interpolación de partida, produciéndose una sobreinterpolación. Ahora bien, si entre sus raíces comunes está  $z = 0$ ,  $Q_{n,m}(z) = z^d q_{n,m}(z)$ ,

$$z^d q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0,$$

entonces  $P_{n,m}(z) = z^d p_{n,m}(z)$ . Por lo tanto,

$$z^d q_{n,m}(z)f(z) - z^d p_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0,$$

se sigue que

$$q_{n,m}(z)f(z) - p_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1-d}), \quad z \rightarrow 0,$$

donde  $[n/m] \in R_{n-d, m-d}$

$$f(z) - [n/m](z) = O(z^{(n-d)+(m-d)+1+d}), \quad z \rightarrow 0,$$

en este caso se han perdido  $d$  condiciones de interpolación pero sigue habiendo una sobreinterpolación. Obsérvese que si  $f_0 \neq 0$ ,  $p_{n,m}(0) \neq 0$ , luego  $[n/m] \neq 0$ . Estas situaciones tendrán su incidencia en el estudio de la Tabla de Padé y en la relación del aproximante de Padé con la solución del problema fuerte de interpolación. Para su análisis necesitamos la siguiente definición.

**Definición 1.2.** Sea  $r = \frac{s}{t}$ , donde  $s$  y  $t$  son polinomios primos entre sí y  $r \neq 0$ . Se llama defecto de  $r$  en  $R_{n,m}$  a la cantidad  $d_f(r) = \min(n - \partial(s), m - \partial(t))$ .

Para todo polinomio  $Q$  con  $\partial(Q) \leq d$ , siendo  $d = d_f(r)$ , se tiene que  $\partial(Qs) \leq n$  y  $\partial(Qt) \leq m$ . Además,  $d$  es el mayor número natural para el cual se verifica esto. Ciertamente, si  $Q(z) = z^d$  entonces  $\partial(z^d s) = n$  o  $\partial(z^d t) = m$ .

Veamos algunas propiedades que ilustran que los aproximantes de Padé heredan propiedades existentes entre las correspondientes funciones, ver [2] para otras muchas más.

*Propiedad 1.3.* Sean  $f, g$  dos funciones con desarrollos del tipo (1.3). Si  $f_0 \neq 0$  y  $f \cdot g = 1$ , entonces para cualquier par de índices  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ , se tiene que

$$[n/m]_f \cdot [m/n]_g = 1.$$

*Demostración.* Sabemos que existen dos polinomios  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  tales que  $[n/m]_f = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}}$ , con  $\partial(P_{n,m}) \leq n$  y  $\partial(Q_{n,m}) \leq m$ , que verifican

$$Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0,$$

obsérvese que  $g_0 \neq 0$ , entonces multiplicando por  $g$  se sigue,

$$Q_{n,m}(z) - g(z)P_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0,$$

entonces el par  $(Q_{n,m}, P_{n,m})$  verifica  $i, ii$  de (1.4) para el índice  $(m, n)$  y para  $g$ . Por la unicidad del aproximante de Padé, se tiene que  $[m/n]_g = \frac{Q_{n,m}}{P_{n,m}}$ . Obsérvese que si  $f_0 \neq 0$ , entonces  $P_{n,m} \neq 0$  y se puede dividir por él.  $\square$

*Propiedad 1.4.*  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ . Sea  $f$  una función con un desarrollo del tipo (1.3). Si  $g(z) = z^k f(z)$ , entonces

$$[n+k/m]_g(z) = z^k [n/m]_f(z). \quad (1.5)$$

*Demostración.* Para cada  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ , existen dos polinomios  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  tales que  $[n/m]_f = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}}$ , con  $\partial(P_{n,m}) \leq n$  y  $\partial(Q_{n,m}) \leq m$ , que verifican

$$Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}),$$

multiplicando por  $z^k$ ,

$$Q_{n,m}(z)g(z) - z^k P_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1+k}),$$

dado que  $z^k P_{n,m}(z) \in \mathbb{P}_{n+k}$ , entonces  $(z^k P_{n,m}, Q_{n,m})$  verifica  $i, ii$  de (1.4) para el índice  $(n+k, m)$  y para  $g$ , concluyendo (1.5).  $\square$

*Propiedad 1.5.* Sea  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ . Sea  $f$  una función dada por (1.3) y  $M_k$  un polinomio de grado  $k$ . Si  $n \geq m + k$ , entonces

$$[n/m]_{f+M_k}(z) = [n/m]_f(z) + M_k(z). \quad (1.6)$$

*Demostración.* Dado que existen dos polinomios  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  tales que  $[n/m]_f = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}}$ , con  $\partial(P_{n,m}) \leq n$  y  $\partial(Q_{n,m}) \leq m$ , verificando

$$Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0,$$

sumando y restando  $Q_{n,m}(z)M_k(z)$ , tras reagrupar, concluimos,

$$Q_{n,m}(z)(f(z) + M_k(z)) - (Q_{n,m}(z)M_k(z) + P_{n,m}(z)) = O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0,$$

observamos que el par  $(Q_{n,m}M_k + P_{n,m}, Q_{n,m})$  verifica *i*, *ii* de (1.4) para el índice  $(n, m)$  y para  $f + M_k$  ya que  $n \geq m + k$ . Por tanto, se da (1.6).  $\square$

*Propiedad 1.6.* Sean  $f, g$  dos funciones con desarrollos del tipo (1.3). Si  $g(z) = \frac{A+Bf(z)}{C+Df(z)}$  donde  $A, B, C, D$  son constantes tales que  $C + Df(0) \neq 0$  y  $AD - BC \neq 0$ . Entonces,

$$[n/n]_g = \frac{A + B[n/n]_f}{C + D[n/n]_f}. \quad (1.7)$$

*Demostración.* Sea  $n \in \mathbb{N}$ , existen dos polinomios  $(P_{n,n}, Q_{n,n})$  con  $\partial(P_{n,n}) \leq n$ ,  $\partial(Q_{n,n}) \leq n$ , tales que  $[n/n]_f = \frac{P_{n,n}}{Q_{n,n}}$ , verificando

$$Q_{n,n}(z)f(z) - P_{n,n}(z) = O(z^{2n+1}), \quad z \rightarrow 0,$$

multiplicando por  $AD - BC$ ,

$$(AD - BC)Q_{n,n}(z)f(z) - (AD - BC)P_{n,n}(z) = O(z^{2n+1}), \quad z \rightarrow 0,$$

$$ADQ_{n,n}(z)f(z) - BCQ_{n,n}(z)f(z) - ADP_{n,n}(z) + BCP_{n,n}(z) = O(z^{2n+1}), \quad z \rightarrow 0,$$

sumando y restando  $ACQ_{n,n}(z)$  y  $BDP_{n,n}(z)f(z)$ , y reagrupando convenientemente,

$$\begin{aligned} & -CQ_{n,n}(z)(A + Bf(z)) - DP_{n,n}(z)(A + Bf(z)) + \\ & Df(z)(AQ_{n,n}(z) + BP_{n,n}(z)) + C(AQ_{n,n}(z) + BP_{n,n}(z)) = O(z^{2n+1}), \quad z \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ya que  $C + Df(0) \neq 0$ , podemos dividir por  $C + Df(z)$ ,

$$(CQ_{n,n}(z) + DP_{n,n}(z)) \frac{A + Bf(z)}{C + Df(z)} - (AQ_{n,n}(z) + BP_{n,n}(z)) = O(z^{2n+1}), \quad z \rightarrow 0,$$

entonces el par  $(AQ_{n,n} + BP_{n,n}, CQ_{n,n} + DP_{n,n})$  verifica *i*, *ii* de (1.4) para el índice  $(n, n)$  y para  $\frac{A + Bf(z)}{C + Df(z)}$ , obteniendo de esto (1.7).  $\square$

Presentadas algunas de las propiedades algebraicas de los aproximantes de Padé, profundizamos en el efecto que tiene en la Tabla de Padé la posible pérdida de condiciones de interpolación.

**Teorema 1.7.** *Supongamos que  $f$  está dada por (1.3). Sean  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ ,  $r \in R_{n,m}$ ,  $r \neq 0$  y  $f_0 \neq 0$ . Una condición necesaria y suficiente para que  $r$  sea el aproximante de Padé, es decir,  $r = [n/m]$ , es que:*

$$f(z) - r(z) = Az^{n+m+1-d} + \dots, z \rightarrow 0,$$

donde  $d = d_f(r)$ .

*Demostración.* Veamos que es suficiente. Sea  $r = \frac{s}{t}$  donde  $s$  y  $t$  son polinomios primos entre sí con  $\partial(s) = \nu \leq n$  y  $\partial(t) = \eta \leq m$ . Dado que el defecto de  $r$  en  $R_{n,m}$  viene dado por  $d = \min(n - \nu, m - \eta)$ , tenemos que  $d + \nu \leq n$  y  $d + \eta \leq m$ . Linealizando el problema, obtenemos:

$$t(z)f(z) - s(z) = Bz^{n+m+1-d} + \dots, z \rightarrow 0,$$

multiplicando la igualdad por  $z^d$ ,

$$z^d t(z)f(z) - z^d s(z) = Bz^{n+m+1} + \dots, z \rightarrow 0,$$

donde  $\partial(z^d s) \leq n$  y  $\partial(z^d t) \leq m$ . Por tanto, el par  $(z^d s, z^d t)$  verifica las condiciones  $i)$ ,  $ii)$  de (1.4) necesarias para definir el aproximante de Padé, entonces  $[n/m] = \frac{z^d s}{z^d t} = \frac{s}{t} = r$ .

Analicemos la necesidad. Sea  $[n/m] = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}}$  donde el par  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  satisface  $i)$ ,  $ii)$  de (1.4). Suponemos sin pérdida de generalidad que  $Q_{n,m}$  y  $P_{n,m}$  no tienen ceros comunes distintos de  $z = 0$ , puesto que de tenerlos, como sabemos, dividir por dichos factores se sigue verificando  $ii)$ , ya que en esas circunstancias no se producen pérdidas en las condiciones de interpolación.

Si  $z = 0$  es un cero de  $Q_{n,m}$  de orden  $\nu$ , sabemos por un análisis anterior

$$q_{n,m}(z)f(z) - p_{n,m}(z) = Az^{n+m+1-\nu} + \dots, z \rightarrow 0,$$

donde  $Q_{n,m}(z) = z^\nu q_{n,m}(z)$ ,  $P_{n,m}(z) = z^\nu p_{n,m}(z)$ , con  $q_{n,m}$  y  $p_{n,m}$  primos entre sí. Se sigue que,

$$f(z) - [n/m](z) = f(z) - \frac{p_{n,m}(z)}{q_{n,m}(z)} = A_1 z^{n+m+1-\nu} + \dots, z \rightarrow 0,$$

dado que  $d = d_f([n/m]) = \min(n - \partial(p_{n,m}), m - \partial(q_{n,m}))$ ,  $d \geq \nu$ , trivialmente

$$f(z) - [n/m](z) = A_2 z^{n+m+1-d} + \dots, z \rightarrow 0,$$

puesto que  $n + m + 1 - d \leq n + m + 1 - \nu$ . □

Observamos que la mejor aproximación local a  $f$  en  $R_{n,m}$  es el aproximante de Padé. De aquí en adelante, denotaremos por  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  al par que define  $[n/m] = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}}$  tal que verifica las relaciones  $i), ii)$  de (1.4) pudiendo tener ceros comunes y por  $(p_{n,m}, q_{n,m})$  al par  $[n/m] = \frac{p_{n,m}}{q_{n,m}}$ , donde  $p_{n,m}, q_{n,m}$  son polinomios primos entre sí y pueden no satisfacer  $ii)$  de (1.4).

**Teorema 1.8 (Teorema de los bloques).** *Supongamos que  $f$  está dada por (1.3) y  $f_0 \neq 0$ . Si el par  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  es tal que existe un par de polinomios  $(p_{n,m}, q_{n,m})$ , primos entre sí, de manera que  $[n/m] = \frac{p_{n,m}}{q_{n,m}}$ ,  $\partial(q_{n,m}) = m$ ,  $\partial(p_{n,m}) = n$  y  $f(z) - [n/m](z) = Az^{n+m+1+l} + \dots$ ,  $A \neq 0$ , con  $l \in \mathbb{N}$ , entonces*

$$[n/m] = [n + i/m + j], \quad i = 0, 1, \dots, l, \quad j = 0, 1, \dots, l.$$

*Demostración.* Por hipótesis,

$$q_{n,m}(z)f(z) - p_{n,m}(z) = Bz^{n+m+1+l} + \dots, \quad z \rightarrow 0, \quad B \neq 0.$$

Como  $\partial(p_{n,m}) = n$  y  $\partial(q_{n,m}) = m$ , sin factores comunes, es obvio que si  $n' < n$  ó  $m' < m$  entonces  $[n'/m'] \neq [n/m]$ , pues  $(p_{n,m}, q_{n,m})$  no verifica la condición  $i)$  de (1.4) con respecto al par  $(n', m') \in \mathbb{N}^2$ .

Consideremos los pares  $(n', m')$  tales que  $n' \geq n$  y  $m' \geq m$ ,  $n', m' \in \mathbb{N}$ . Por el Teorema 1.7, se tiene que  $[n/m] = [n'/m']$  si y sólo si  $n' + m' + 1 - d \leq n + m + l + 1$ .

$$n' + m' + 1 - d \leq n + m + l + 1 \equiv n' + m' \leq n + m + d + l$$

$$n + m + d + l \geq n' + m' = \begin{cases} n' + m + d \Leftrightarrow n + l \geq n' \\ m' + n + d \Leftrightarrow m + l \geq m' \end{cases}$$

Por ello, una condición necesaria y suficiente para que  $[n, m] = [n', m']$  es que  $n \leq n' \leq n + l$  y  $m \leq m' \leq m + l$ .  $\square$

Veamos las consecuencias de que  $f_0 = 0$  en la generalidad del Teorema 1.8. Es más, supongamos que  $f_0 = f_1 = \dots = f_{N-1} = 0$  y  $f_N \neq 0$ . Concretamente, si nuestra serie es tal que  $f(z) = \sum_{k \geq N} f_k z^k$ ,  $f_N \neq 0$ ,  $N \geq 1$ , se tiene que para todo par  $(n, m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ,

$$z^m f(z) = \sum_{k \geq N} f_k z^{k+m},$$

donde  $k + m \geq N$ . Luego, el par de polinomios  $(0, z^m)$  satisface las relaciones  $i), ii)$  de (1.4),

$$z^m f(z) - 0 = Az^{N-1+m+1} + \dots, \quad A \neq 0,$$

y, por tanto,  $[n/m] \equiv 0$  para  $m \in \mathbb{N}$  y  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .

**Corolario 1.9.** *Si  $f(z) = \sum_{v \geq N} f_v z^v$ ,  $f_N \neq 0$  entonces la Tabla de Padé asociada a  $f$  tiene las entradas de las primeras  $N$  columnas idénticamente nulas.*

El resto de la Tabla de Padé de  $f$  se reduce a la de  $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{v+k} z^k$  como se desprende de la Propiedad 1.4. Por lo tanto,  $f_0 \neq 0$  no quita generalidad al Teorema de los bloques (Teorema 1.8). Salvo el de tener un bloque infinito previo.

**Definición 1.10.** Si el par de polinomios  $(p_{n,m}, q_{n,m})$  primos entre sí, definen  $[n/m] = \frac{p_{n,m}}{q_{n,m}}$  y  $\partial(q_{n,m}) = m$ , entonces se dice que el índice  $(n, m)$  es un índice normal de la Tabla de Padé asociada a  $f$ . Si todos los pares  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  son índices normales, entonces se dice que la Tabla es normal.

Que  $q_{n,m}$  no haya perdido el grado garantiza que no tiene factores comunes con  $p_{n,m}$ , por lo tanto no ha habido pérdida de condiciones de interpolación. Es decir, el aproximante de Padé resuelve el problema fuerte de interpolación. Por lo tanto, para todo índice normal la solución del problema de interpolación fuerte y débil coinciden.

En el análisis del sistema (1.2), cuya solución genera el denominador de los aproximantes de Padé, juegan un papel relevante los llamados determinantes de Hadamard. Deben su nombre al matemático francés Jacques Hadamard (1865-1963). Estos determinantes serán esenciales no sólo en el estudio algebraico, como veremos, sino también en el análisis de la convergencia de los aproximantes de Padé.

**Definición 1.11.** Sea  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ , llamaremos determinante de Hadamard de tipo  $(n, m)$  asociado a  $f$  dado por (1.3) a:

$$H_{n,m} = \begin{vmatrix} f_n & f_{n-1} & \cdots & f_{n-m+1} \\ f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n+m-1} & f_{n+m-2} & \cdots & f_n \end{vmatrix}$$

donde  $H_{n,0} = 1$  y  $f_{-v} = 0$  para  $v = 1, 2, \dots$

Obsérvese que  $H_{0,n} = f_0^n$ .

Sea  $Q_{n,m}$  verificando *ii*) de (1.4) tal que  $Q_{n,m}(0) = b_0 = 0$ , necesariamente el determinante de Hadamard  $H_{n,m}$  es nulo. Efectivamente, sabemos que el sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} f_{n+1}b_0 + f_n b_1 + \cdots + f_{n-m+1}b_m &= 0 \\ f_{n+2}b_0 + f_{n+1}b_1 + \cdots + f_{n-m+2}b_m &= 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n+m}b_0 + f_{n+m-1}b_1 + \cdots + f_n b_m &= 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

determina los coeficientes de  $Q_{n,m}$ . Al tener más incógnitas que ecuaciones, sabemos que tiene solución no trivial, por tanto  $H_{n,m} = 0$  para que  $b = (b_1 \dots b_m)^T \neq 0$  proporcione los coeficientes de  $Q_{n,m}$ . Recíprocamente, si  $H_{n,m} = 0$ , como dicho sistema tiene al menos una solución no trivial,  $b = (b_1 \dots b_m)^T \neq 0$  proporciona los



*Demostración.* Sólo falta demostrar (1.10). Al obtener la expresión de  $b_0$  mediante la Regla de Cramer en el sistema (1.9),

$$b_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & f_{n-1} & \cdots & f_{n-m} \\ 0 & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \end{vmatrix}}{H_{n,m+1}} = a_n \frac{\begin{vmatrix} f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n+m-1} & \cdots & f_n \end{vmatrix}}{H_{n,m+1}} = a_n \frac{H_{n,m}}{H_{n,m+1}}$$

□

De los resultados anteriores se sigue,

**Corolario 1.15.** Una condición suficiente para que exista un par  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  verificando i), ii) de (1.4) tal que  $\partial(P_{n,m}) = n$ ,  $\partial(Q_{n,m}) = m$  y  $Q_{n,m}(0) \neq 0$  es que

$$H_{n,m}H_{n+1,m}H_{n,m+1} \neq 0.$$

Obsérvese que aún bajo estas últimas condiciones  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  pueden tener ceros comunes que no sean el origen.

También se disponen de expresiones determinantaes para el numerador y denominador del aproximante de Padé.

**Teorema 1.16.** Sea  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ . Sean  $f$  una función dada por (1.3) y  $[n/m] = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}}$  su aproximante de Padé de índice  $(n, m)$ . Si  $H_{n,m} \neq 0$ ,

$$a) Q_{n,m}(z) = \frac{(-1)^m Q_{n,m}(0)}{H_{n,m}} \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ 1 & z & \cdots & z^m \end{vmatrix}$$

$$b) P_{n,m}(z) = \frac{(-1)^m Q_{n,m}(0)}{H_{n,m}} \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ S_n(z) & zS_{n-1}(z) & \cdots & z^m S_{n-m}(z) \end{vmatrix}$$

donde hemos denotado por  $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k z^k$  la suma parcial de  $f$ .

$$c) Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = (-1)^m Q_{n,m}(0) \frac{H_{n+1,m+1}}{H_{n,m}} z^{n+m+1} + \dots, z \rightarrow 0.$$

*Demostración.* Vamos a demostrar a). Si añadimos la expresión del denominador,  $Q_{n,m}(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m$ , como una nueva ecuación al sistema (1.8), obtenemos

$$\begin{array}{rcccc}
f_{n+1}b_0 + & f_n b_1 & + \cdots + & f_{n-m+1}b_m = & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
f_{n+m}b_0 + & f_{n+m-1}b_{m-1} + \cdots + & f_n b_m & = & 0 \\
b_0 + & b_1 z & + \cdots + & b_m z^m & = Q_{n,m}(z),
\end{array}$$

consideremos los  $z \in \mathbb{C}$  tal que

$$\Delta_m(z) = \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ 1 & z & \cdots & z^m \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1.11)$$

al obtener la expresión de  $b_0$  mediante la regla de Cramer, concluimos

$$b_0 = (-1)^m Q_{n,m}(z) \frac{H_{n,m}}{\begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ 1 & z & \cdots & z^m \end{vmatrix}},$$

para los  $z$  que verifican (1.11). Por lo tanto, hemos demostrado que *a*) es cierto para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\Delta_m(z) \neq 0$ . Se sigue que *a*) es cierto  $\forall z \in \mathbb{C}$  ya que  $Q_{n,m}(z)$  y  $\frac{(-1)^m b_0}{H_{n,m}} \Delta_m(z)$  son dos polinomios a lo sumo de grado  $m$  y basta que coincidan en  $m+1$  puntos para que ambos polinomios sean iguales.

Demostremos *b*). Por el apartado anterior tenemos

$$\begin{aligned}
Q_{n,m}(z)f(z) &= \frac{(-1)^m Q_{n,m}(0)}{H_{n,m}} f(z) \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ 1 & z & \cdots & z^m \end{vmatrix} \\
&= \frac{(-1)^m Q_{n,m}(0)}{H_{n,m}} \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ f(z) & zf(z) & \cdots & z^m f(z) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

dado que  $S_l(z) = \sum_{k=0}^l f_k z^k$  y  $f(z) = S_l(z) + O(z^{l+1})$ , por propiedades del determinante tenemos

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} f_{n+1} & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & \cdots & f_n \\ f(z) & \cdots & z^m f(z) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ S_n(z) & z f(z) & \cdots & z^m f(z) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ O(z^{n+1}) & z f(z) & \cdots & z^m f(z) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ S_n(z) & z f(z) & \cdots & z^m f(z) \end{vmatrix} + O(z^{n+1}), z \rightarrow 0 \\
 &= \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n & f_{n-1} & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} & f_{n+m-2} & \cdots & f_n \\ S_n(z) & z S_{n-1}(z) & z^2 f(z) & \cdots & z^m f(z) \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} f_{n+1} & 0 & f_{n-1} & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & 0 & f_{n+m-2} & \cdots & f_n \\ S_n(z) & O(z^{n+1}) & z^2 f(z) & \cdots & z^m f(z) \end{vmatrix} + O(z^{n+1}), z \rightarrow 0 \\
 &= \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n & f_{n-1} & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} & f_{n+m-2} & \cdots & f_n \\ S_n(z) & z S_{n-1}(z) & z^2 f(z) & \cdots & z^m f(z) \end{vmatrix} + O(z^{n+1}), z \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

Continuando el mismo proceso a lo largo de la última fila para todas y cada una de las columnas, llegamos a:

$$Q_{n,m}(z)f(z) = \frac{(-1)^m Q_{n,m}(0)}{H_{n,m}} \begin{vmatrix} f_{n+1} & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & \cdots & f_n \\ S_n(z) & \cdots & z^m S_{n-m}(z) \end{vmatrix} + O(z^{n+1}), z \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

Sabemos de *ii*) de (1.4) que  $P_{n,m}$  verifica

$$Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}), z \rightarrow 0,$$

restándolo a (1.12), obtenemos

$$0 = P_{n,m}(z) - \frac{(-1)^m Q_{n,m}(0)}{H_{n,m}} \begin{vmatrix} f_{n+1} & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & \cdots & f_n \\ S_n(z) & \cdots & z^m S_{n-m}(z) \end{vmatrix} + O(z^{n+1}), z \rightarrow 0,$$

$$\text{como } \partial \begin{vmatrix} f_{n+1} & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & \cdots & f_n \\ S_n(z) & \cdots & z^m S_{n-m}(z) \end{vmatrix} \leq n, \text{ necesariamente}$$

$$P_{n,m}(z) = \frac{(-1)^m Q_{n,m}(0)}{H_{n,m}} \begin{vmatrix} f_{n+1} & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & \cdots & f_n \\ S_n(z) & \cdots & z^m S_{n-m}(z) \end{vmatrix}.$$

Resta demostrar *c*). Considerando *ii*) de (1.4) vemos que el coeficiente correspondiente a la potencia  $z^{n+m+1}$  del miembro derecho de dicha igualdad es igual al coeficiente que acompaña a  $z^{n+m+1}$  en el desarrollo en serie de potencias de  $z$  de  $Q_{n,m}f$ . Concretamente,

$$f_{n+m+1}b_0 + f_{n+m}b_1 + \cdots + f_{n+2}b_{m-1} + f_{n+1}b_m = A_{n,m},$$

añadiendo esta ecuación después de la última ecuación del sistema (1.8) que verifica  $Q_{n,m}$ , obtenemos un sistema lineal de  $m+1$  ecuaciones con  $m+1$  incógnitas, cuyo determinante de la matriz de los coeficientes es  $H_{n+1,m+1}$ . Por lo tanto, si  $H_{n+1,m+1} = 0$ , necesariamente  $A_{n,m} = 0$  porque de lo contrario, si  $A_{n,m} \neq 0$  el sistema sería incompatible y sabemos que los coeficientes de  $Q_{n,m}$  verifican dicho sistema. En efecto, si  $A_{n,m} \neq 0$  el rango de la matriz ampliada es  $m+1$  ya que

$$\begin{vmatrix} 0 & f_n & \cdots & f_{n+m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ A_{n,m} & f_{n+m} & \cdots & f_{n+1} \end{vmatrix} = (-1)^m A_{n,m} H_{n,m} \neq 0$$

Recíprocamente, si  $A_{n,m} = 0$  entonces  $H_{n+1,m+1} = 0$  para que dicho sistema tenga solución distinta de la trivial. Ahora analicemos el caso en el que  $H_{n+1,m+1} \neq 0$ , si obtenemos  $b_0$  mediante la regla de Cramer,

$$b_0 = (-1)^m \frac{A_{n,m} H_{n,m}}{H_{n+1,m+1}},$$

$$A_{n,m} = \frac{(-1)^m b_0 H_{n+1,m+1}}{H_{n,m}},$$

se sigue que la fórmula es compatible incluso si  $H_{n+1,m+1} = 0$ , por lo tanto, la igualdad se mantiene independientemente del valor que tome  $H_{n+1,m+1}$ .  $\square$

**Corolario 1.17.** Si  $H_{n,m} H_{n+1,m} \neq 0$  entonces

$$\frac{H_{n,m}}{H_{n+1,m}} = \prod_{j=1}^m \zeta_j$$

siendo  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$  los ceros de  $Q_{n,m}$  contando multiplicidades.

*Demostración.* Por hipótesis podemos asegurar que todas las soluciones  $Q_{n,m}$  verifican  $Q_{n,m}(0) \neq 0$  y  $\partial(Q_{n,m}) = m$ . Sean  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$  las raíces de  $Q_{n,m}$ , contando multiplicidades. Usando las relaciones de Cardano-Vieta para  $Q_{n,m}$ ,  $\zeta_1 \cdots \zeta_m = (-1)^m \frac{b_0}{b_m}$ , siendo  $b_0, b_m$  el término independiente y el coeficiente director de  $Q_{n,m}$ , respectivamente. Del apartado a) del Teorema 1.16, considerando el coeficiente director de  $Q_{n,m}$ , obtenemos

$$b_m = (-1)^m \frac{Q_{n,m}(0)}{H_{n,m}} \begin{vmatrix} f_{n+1} & \cdots & f_{n-m+2} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & \cdots & f_{n+1} \end{vmatrix} = (-1)^m b_0 \frac{H_{n+1,m}}{H_{n,m}}$$

por tanto,

$$\zeta_1 \cdots \zeta_m = (-1)^m \frac{b_0}{b_m} = \frac{H_{n,m}}{H_{n+1,m}}$$

□

**Corolario 1.18.** Si  $H_{n,m}H_{n+1,m} \neq 0$  entonces

$$[n+1/m](z) - [n/m](z) = (-1)^m \frac{H_{n+1,m+1}}{H_{n,m}} \frac{z^{n+m+1}}{Q_{n,m}(z)Q_{n+1,m}(z)}, \quad (1.13)$$

donde  $Q_{n,m}$  y  $Q_{n+1,m}$  son los denominadores de  $[n/m]$  y  $[n+1/m]$ , respectivamente, normalizados bajo las condiciones  $Q_{n,m}(0) = Q_{n+1,m}(0) = 1$ .

*Demostración.* Dado que  $H_{n+1,m}$  y  $H_{n,m}$  son distintos de cero podemos asumir  $Q_{n+1,m}(0) = Q_{n,m}(0) = 1$ . Por el apartado c) del Teorema 1.16 tenemos lo siguiente:

$$Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{H_{n+1,m+1}}{H_{n,m}} z^{n+m+1} + \dots,$$

$$Q_{n+1,m}(z)f(z) - P_{n+1,m}(z) = (-1)^m \frac{H_{n+2,m+1}}{H_{n+1,m}} z^{n+m+2} + \dots,$$

multiplicando la primera de las relaciones por  $Q_{n+1,m}$  y la segunda por  $Q_{n,m}$ , y restando una de la otra, dado que  $Q_{n,m}(0) = 1$  y  $Q_{n+1,m}(0) = 1$ , se sigue que

$$Q_{n,m}(z)P_{n+1,m}(z) - Q_{n+1,m}(z)P_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{H_{n+1,m+1}}{H_{n,m}} z^{n+m+1} + O(z^{n+m+2})$$

teniendo en cuenta que  $\partial(Q_{n,m}P_{n+1,m} - Q_{n+1,m}P_{n,m}) \leq n+m+1$  y dividiendo por  $Q_{n,m}Q_{n+1,m}$ , obtenemos que

$$[n+1/m](z) - [n/m](z) = (-1)^m \frac{H_{n+1,m+1}}{H_{n,m}} \frac{z^{n+m+1}}{Q_{n,m}(z)Q_{n+1,m}(z)}.$$

□

Este último corolario nos da información acerca del carácter de sucesión de Cauchy que tienen las entradas de la Tabla de Padé cuando avanzamos por las filas de dicha tabla.

**Corolario 1.19.** Sean  $n, m \in \mathbb{N}$ , si  $H_{n,m}H_{n,m+1}H_{n+1,m+1} \neq 0$ , bajo la normalización  $Q_{n,m}(0) = Q_{n,m+1}(0) = Q_{n+1,m+1}(0) = 1$ , entonces se cumple la siguiente identidad:

$$H_{n+1,m+1}^2 = H_{n,m+1}H_{n+2,m+1} - H_{n+1,m}H_{n+1,m+2} \tag{1.14}$$

conocida como la Identidad de Frobenius.

$$\begin{array}{ccc} & H_{n+1,m} & \\ & \uparrow & \\ H_{n,m+1} & \leftarrow H_{n+1,m+1} \rightarrow & H_{n+2,m+1} \\ & \downarrow & \\ & H_{n+1,m+2} & \end{array} \tag{1.15}$$

*Demostración.* Por el apartado c) del Teorema 1.16 se tiene que

$$Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = A_{n,m}z^{n+m+1} + \dots, z \rightarrow 0,$$

$$Q_{n,m+1}(z)f(z) - P_{n,m+1}(z) = A_{n,m+1}z^{n+m+2} + \dots, z \rightarrow 0,$$

donde  $A_{n,m} = (-1)^m \frac{H_{n+1,m+1}}{H_{n,m}} \neq 0$ . Multiplicando la primera relación por  $\frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}}z$ , y restando la igualdad resultante a la segunda igualdad obtenemos,

$$\begin{aligned} & (Q_{n,m+1}(z) - \frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}}zQ_{n,m}(z))f(z) - \\ & (P_{n,m+1}(z) - \frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}}zP_{n,m}(z)) = O(z^{n+m+3}), z \rightarrow 0, \end{aligned} \tag{1.16}$$

Dado que

$$\partial(Q_{n,m+1}(z) - \frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}}zQ_{n,m}(z)) \leq m + 1,$$

$$\partial(P_{n,m+1}(z) - \frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}}zP_{n,m}(z)) \leq n + 1,$$

teniendo en cuenta (1.16), el par de polinomios  $(P_{n,m+1}(z) - \frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}}zP_{n,m}(z), Q_{n,m+1}(z) - \frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}}zQ_{n,m}(z))$  verifica las condiciones  $i), ii)$  de (1.4) para el par  $(n + 1, m + 1)$ . Se sigue que

$$Q_{n,m+1}(z) - \frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}}zQ_{n,m}(z) = Q_{n+1,m+1}(z),$$

$$P_{n,m+1}(z) - \frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}}zP_{n,m}(z) = P_{n+1,m+1}(z).$$

Identificando los coeficientes de mayor grado en la primera igualdad del apartado a) del Teorema 1.16, obtenemos

$$(-1)^{m+1} \frac{H_{n+1,m+1}}{H_{n,m+1}} - (-1)^m \frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}} \frac{H_{n+1,m}}{H_{n,m}} = (-1)^{m+1} \frac{H_{n+2,m+1}}{H_{n+1,m+1}},$$

tras algunas manipulaciones, donde se ha sustituido el valor de  $\frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}}$  en términos de los determinantes de Hadamard, por el apartado c) del Teorema 1.16,

$$\frac{H_{n+1,m+1}}{H_{n,m+1}} = \frac{H_{n+2,m+1}}{H_{n+1,m+1}} - \frac{H_{n+1,m+2}}{H_{n,m+1}} \frac{H_{n+1,m}}{H_{n+1,m+1}},$$

$$H_{n+1,m+1}^2 = H_{n,m+1}H_{n+2,m+1} - H_{n+1,m+2}H_{n+1,m}.$$

□

Una sinergia entre estas propiedades permite obtener otras de enorme contenido práctico. Por ejemplo, si  $f \cdot g = 1$  con  $f(0) = f_0 \neq 0$ , se sigue que  $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k z^k$ , si  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  es el correspondiente par de polinomios que define  $[n/m]_f$ , por la Propiedad 1.3,  $(Q_{n,m}, P_{n,m})$  es el par que define a  $[m/n]_g = \frac{Q_{n,m}}{P_{n,m}}$ , utilizando el apartado a) del Teorema 1.16 para la función  $g$ ,

$$P_{n,m}(z) = \frac{(-1)^n P_{n,m}(0)}{H'_{m,n}} \begin{vmatrix} f'_{m+1} & f'_m & \cdots & f'_{m-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{m+n} & f'_{m+n-1} & \cdots & f'_m \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix},$$

siendo

$$H'_{m,n} = \begin{vmatrix} f'_m & f'_{m-1} & \cdots & f'_{m-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{m+n-1} & f'_{m+n-2} & \cdots & f'_m \end{vmatrix},$$

junto con el apartado b) del mismo teorema para  $f$ , se tiene lo siguiente,

$$P_{n,m}(z) = \frac{(-1)^m Q_{n,m}(0)}{H_{n,m}} \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ S_n(z) & zS_{n-1}(z) & \cdots & z^m S_{n-m}(z) \end{vmatrix}$$

donde hemos supuesto que  $H_{n,m}H'_{m,n} \neq 0$ . Por lo tanto,

$$\frac{(-1)^m Q_{n,m}(0)}{H_{n,m}} \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ S_n(z) & zS_{n-1}(z) & \cdots & z^m S_{n-m}(z) \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n P_{n,m}(0)}{H'_{m,n}} \begin{vmatrix} f'_{m+1} & f'_m & \cdots & f'_{m-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{m+n} & f'_{m+n-1} & \cdots & f'_m \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}$$

Teniendo en cuenta que dos polinomios son iguales si y sólo si lo son coeficiente a coeficiente. Identificando el coeficiente director,

$$\frac{(-1)^m Q_{n,m}(0)}{H_{n,m}} \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ f_n & f_{n-1} & \cdots & f_{n-m} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n P_{n,m}(0)}{H'_{m,n}} \begin{vmatrix} f'_{m+1} & f'_m & \cdots & f'_{m+2-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{m+n} & f'_{m+n-1} & \cdots & f'_{m+1} \end{vmatrix}$$

teniendo en cuenta que  $P_{n,m}(0) = Q_{n,m}(0)f_0$ ,

$$H'_{m+1,n} = \frac{(-1)^n}{f_0} \frac{H'_{m,n}}{H_{n,m}} H_{n,m+1}$$

**Corolario 1.20.** *Sea  $f$  una función dada por (1.3) con  $f_0 \neq 0$  y  $H_{n,m}$  su determinante de Hadamard para el índice  $(n, m)$ . Sea  $g = \frac{1}{f}$  la función recíproca de  $f$  y  $H'_{m,n}$  el determinante de Hadamard asociado a  $g$  para el índice  $(m, n)$ , si  $H_{n,m}H'_{m,n} \neq 0$ . Entonces*

$$H'_{m+1,n} = \frac{(-1)^n}{f_0} \frac{H'_{m,n}}{H_{n,m}} H_{n,m+1} \tag{1.17}$$

La importancia de los determinantes de Hadamard no acaba en este tipo de propiedades, incluso permite caracterizar la estructura de bloque de la Tabla de Padé, donde juega un papel esencial el Teorema de Sylvester (ver Teorema 1.21) siendo la identidad de Frobenius un caso particular.

**Teorema 1.21 (Teorema de Sylvester).** *Sea  $A$  una matriz y sea  $A_{r,p}$  la matriz que se obtiene al suprimir la fila  $r$  y la columna  $p$  de la matriz  $A$ . Asumiendo que  $r < s$  y  $p < q$ ,*

$$|A||A_{r,s,pq}| = |A_{r,q}||A_{s,p}| - |A_{r,p}||A_{s,q}|$$

siendo  $A_{r,s,pq}$  la matriz obtenida al suprimir las filas  $r$  y  $s$  y las columnas  $p$  y  $q$  de la matriz  $A$ .

Para consultar la demostración de este teorema ver [1, pág 23]. Nótese que aplicando el Teorema de Sylvester a la matriz dada por el determinante  $H_{n+1,m+2}$  y tomando  $p = r = 1$  y  $q = s = m + 2$ , obtenemos

$$H_{n+1,m+1}^2 = H_{n,m+1}H_{n+2,m+1} - H_{n+1,m}H_{n+1,m+2} \tag{1.18}$$

que es la Identidad de Frobenius sin ninguna restricción. Por tanto, la igualdad (1.14) es válida siempre.

Resulta ventajoso disponer a los determinantes de Hadamard en una tabla de doble entrada como la de Padé, a la que llamaremos Tabla de Hadamard

$$\begin{array}{cccc}
H_{0,0} & H_{1,0} & H_{2,0} & \dots \\
H_{0,1} & H_{1,1} & H_{2,1} & \dots \\
H_{0,2} & H_{1,2} & H_{2,2} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

*Observación 1.22.* Es interesante remarcar que en la Tabla de Hadamard se tiene lo siguiente:

1. La primera fila es, por definición,  $H_{n,0} = 1$ .
2. La segunda fila es  $H_{n,1} = f_n$ .
3. La primera columna es  $H_{0,m} = f_0^m$ .

**Teorema 1.23.** *Las entradas iguales a cero en la Tabla de Hadamard se producen en bloques cuadrados que están delimitados, en el borde superior y en el borde izquierdo, por entradas distintas de cero.*

*Demostración.* Identificamos la esquina superior del bloque por  $H_{n,m} = 0$ ,  $H_{n,m-1} \neq 0$  y  $H_{n-1,m} \neq 0$ . Podemos redefinir  $n$  o  $m$  si alguna de las dos condiciones anteriores no se cumple. Obsérvese que  $H_{n,0} = 1$  y  $H_{0,m} = f_0^m \neq 0$ . Tomando la identidad (1.18) para  $(n-1, m)$ ,

$$H_{n-1,m}^2 = H_{n-2,m}H_{n,m} - H_{n-1,m-1}H_{n-1,m+1},$$

se sigue que  $H_{n-1,m-1}H_{n-1,m+1} = -H_{n-1,m}^2$ . Por tanto,  $H_{n-1,m-1} \neq 0$  y  $H_{n-1,m+1} \neq 0$ . Considerando ahora la identidad (1.18) para el par  $(n, m-1)$ ,

$$H_{n,m-1}^2 = H_{n-1,m-1}H_{n+1,m-1} - H_{n,m-2}H_{n,m},$$

obtenemos que  $H_{n+1,m-1}H_{n-1,m-1} = H_{n,m-1}^2$ . Con lo cual  $H_{n-1,m-1} \neq 0$  y  $H_{n+1,m-1} \neq 0$ . Suponiendo que  $H_{n+1,m} \neq 0$ , y aplicando la identidad (1.18) para  $(n+1, m)$ ,

$$H_{n,m+1}^2 = H_{n-1,m+1}H_{n+1,m+1} - H_{n,m}H_{n,m+2},$$

tenemos que  $H_{n+1,m+1} \neq 0$  y aplicando (1.18) a  $(n, m+1)$  establecemos que  $H_{n,m+1} \neq 0$ . Por tanto, el teorema es probado para un bloque cuadrado unitario.

$H_{n-1,m-1} \neq 0$	$H_{n,m-1} \neq 0$	$H_{n+1,m-1} \neq 0$
$H_{n-1,m} \neq 0$	$H_{n,m} = 0$	$H_{n+1,m} \neq 0$
$H_{n-1,m+1} \neq 0$	$H_{n,m+1} \neq 0$	$H_{n+1,m+1} \neq 0$

La única alternativa a la tabla anterior es que  $H_{n+1,m} = 0$ . Es más, supongamos que  $H_{n+k,m} = 0$  para  $k = 0, 1, \dots, K_0 - 1$  y  $H_{n+K_0,m} \neq 0$ , junto con  $H_{n,m-1} \cdot H_{n-1,m} \neq 0$ . Usando la identidad (1.18) iterativamente para  $(n+k, m-1)$ ,  $k = 0, 1, \dots, K_0 - 1$ ,

$$H_{n+k,m-1}^2 = H_{n+k-1,m-1}H_{n+k+1,m-1} - H_{n+k,m-2}H_{n+k,m}$$

podemos establecer que  $H_{n+k-1,m-1} \neq 0$  para  $k = 0, 1, \dots, K_0 + 1$ . Aplicando la identidad (1.18) a  $(n + K_0, m)$  se tiene que  $H_{n+K_0,m+1} \neq 0$ . Aplicándolo ahora al índice  $(n - 1, m)$ , se establece que  $H_{n-1,m+1} \neq 0$ . Por tanto, tenemos una fila de entradas iguales a cero rodeada con entradas distintas de cero en su parte izquierda y derecha así como por una fila de entradas distintas de cero en su fila superior, tal como se muestra en la siguiente tabla para  $K_0 = 4$ .

$\neq 0$					
$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$
$\neq 0$					$\neq 0$

Para ver que el bloque es cuadrado supongamos que es rectangular con  $r$  filas y  $s$  columnas. Primero verifiquemos que tener  $s$  columnas implica tener, al menos,  $s$  filas, es decir,  $r \geq s$ . Para ello veamos un ejemplo sencillo que establece la estrategia para el caso general. Supongamos que  $H_{n,m} = H_{n+1,m} = H_{n+2,m} = H_{n+3,m} = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 H_{n,m+1} &= \begin{vmatrix} f_n & \cdots & f_{n-m} \\ f_{n+1} & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+m} & \cdots & f_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_n & \cdots & f_{n-m+1} & x_1 \\ f_{n+1} & \cdots & f_{n-m+2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{n+m} & \cdots & f_{n+1} & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{m+1} x_1 H_{n+1,m} = 0 \Rightarrow H_{n,m+1} = 0.
 \end{aligned}$$

Obsérvese que se ha usado  $H_{n,m} = 0$ .

$$\begin{aligned}
 H_{n,m+2} &= \begin{vmatrix} f_n & \cdots & f_{n-m-1} \\ f_{n+1} & \cdots & f_{n-m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+m+1} & \cdots & f_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_n & f_{n-1} & \cdots & f_{n-m} & y_1 \\ f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{n+m+1} & f_{n+m} & \cdots & f_{n+1} & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{m+2} y_1 \underbrace{\begin{vmatrix} f_{n+1} & \cdots & f_{n-m+1} \\ f_{n+2} & \cdots & f_{n-m+2} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+m+1} & \cdots & f_{n+1} \end{vmatrix}}_{H_{n+1,m+1}} = (-1)^{m+2} y_1 \begin{vmatrix} f_{n+1} & \cdots & f_{n-m+2} & y_2 \\ f_{n+2} & \cdots & f_{n-m+3} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{n+m+1} & \cdots & f_{n+2} & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{(m+2)(m+1)} y_1 y_2 H_{n+2,m} = 0 \Rightarrow H_{n,m+2} = 0.
 \end{aligned}$$

donde se ha usado convenientemente que  $H_{n,m+1} = 0$  y  $H_{n+1,m} = 0$ . Obsérvese que  $H_{n+1,m+1} = 0$ . Procediendo del mismo modo con  $H_{n,m+3}$ ,

$$\begin{aligned}
 H_{n,m+3} &= \begin{vmatrix} f_n & \cdots & f_{n-m-2} \\ f_{n+1} & \cdots & f_{n-m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+m+2} & \cdots & f_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_n & \cdots & f_{n-m-1} & z_1 \\ f_{n+1} & \cdots & f_{n-m} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{n+m+2} & \cdots & f_{n+1} & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{m+3} z_1 \underbrace{\begin{vmatrix} f_{n+1} & \cdots & f_{n-m} \\ f_{n+2} & \cdots & f_{n-m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+m+2} & \cdots & f_{n+1} \end{vmatrix}}_{H_{n+1,m+2}} = (-1)^{m+3} z_1 \begin{vmatrix} f_{n+1} & \cdots & f_{n-m+1} & z_2 \\ f_{n+2} & \cdots & f_{n-m+2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{n+m+2} & \cdots & f_{n+2} & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{(m+3)(m+2)} z_1 z_2 \underbrace{\begin{vmatrix} f_{n+2} & \cdots & f_{n-m+2} \\ f_{n+3} & \cdots & f_{n-m+3} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+m+2} & \cdots & f_{n+2} \end{vmatrix}}_{H_{n+2,m+1}} \\
 &= (-1)^{(m+3)(m+2)} z_1 z_2 \begin{vmatrix} f_{n+2} & \cdots & f_{n-m+3} & z_3 \\ f_{n+3} & \cdots & f_{n-m+4} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{n+m+2} & \cdots & f_{n+3} & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{(m+3)(m+2)(m+1)} z_1 z_2 z_3 H_{n+3,m} = 0 \Rightarrow H_{n,m+3} = 0.
 \end{aligned}$$

donde se ha utilizado convenientemente que  $H_{n+1,m+1} = H_{n,m+2} = H_{n+2,m} = 0$ . Obsérvese que  $H_{n+2,m+1} = H_{n+1,m+2} = 0$ . Con lo cual,  $r \geq s$ . Nótese que al manipular los determinantes a los que queremos llegar utilizando las hipótesis de partida, nos encontraremos con otros determinantes de la Tabla de Hadamard. El orden de estos viene dado por la siguiente tabla:

$\neq 0$					
$\neq 0$	1	3	6	/	
$\neq 0$	2	5	/		
$\neq 0$	4	/			
$\neq 0$	/				
$\neq 0$					

Sabiendo la relación existente entre el determinante de Hadamard de la función  $f$  para  $(n, m)$  y el de la función recíproca  $g = \frac{1}{f}$  para  $(m, n)$ , consideramos la Tabla de Hadamard para la función  $g$ . Para esta función, si el bloque con  $r'$  ( $s$ ) filas y  $s'$  ( $r$ ) columnas verifica nuestra regla previa, entonces  $r' \geq s'$ , pero  $r' = s$  y  $s' = r$ , por

tanto,  $r = s$ . Con esto queda probado que los bloques son cuadrados y están enteramente bordeados por entradas distintas de cero, salvo los bloques infinitos.

$\neq 0$					
$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$
$\neq 0$	$= 0$				
$\neq 0$	$= 0$				
$\neq 0$	$= 0$				
$\neq 0$	$\neq 0$				

y el resto se completa usando convenientemente la identidad de Frobenius.

□

**Teorema 1.24.** *Sea  $f$  una función dada por (1.3) que no representa una función racional. Entonces, dicha función tiene un número infinito de aproximantes de Padé en:*

1. cualquier fila  $\{\{n, m_0\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,
2. cualquier columna  $\{\{n_0, m\}\}_{m \in \mathbb{N}}$ ,
3. cualquier paradiagonal  $\{\{n + j_0, n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $n + j_0 \geq 0$ .

*Demostración.* Consideremos las filas. Cualquier fila puede formar parte de un número finito o infinito de bloques. Si la fila forma parte de un número finito de bloques entonces tendrá un número infinito de aproximantes de Padé bien definidos. De formar parte de un número infinito de bloques sabemos que en cualquier bloque hay, al menos, un aproximante de Padé. Por lo tanto, existe una cantidad infinita de aproximantes de Padé en cualquier fila de la Tabla. El argumento es el mismo para el caso de las columnas y las paradiagonales. □

**Corolario 1.25.** *Sea  $f$  dada por (1.3) y  $f_0 \neq 0$ . Si el par  $(n_0, m_0) \in \mathbb{N}^2$  verifica las condiciones del Teorema 1.8, es decir, existe un par de polinomios  $(p_{n_0, m_0}, q_{n_0, m_0})$ , primos entre sí, de manera que  $[n_0/m_0] = \frac{p_{n_0, m_0}}{q_{n_0, m_0}}$ ,  $\partial(q_{n_0, m_0}) = m_0$ ,  $\partial(p_{n_0, m_0}) = n_0$  y  $f - [n_0/m_0] = Az^{n_0+m_0+1+l} + \dots$ ,  $A \neq 0$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , entonces*

- a)  $n_0 = n$ ,  $m_0 \leq m \leq m_0 + l$  o  $m_0 = m$ ,  $n_0 \leq n \leq n_0 + l \Leftrightarrow H_{n, m} \neq 0$ ,
- b)  $n_0 < n \leq n_0 + l$ ,  $m_0 < m \leq m_0 + l \Leftrightarrow H_{n, m} = 0$ ,

*Demostración.* Veamos a). Como nos movemos por la fila superior, o por la primera columna, el denominador, o numerador, no tiene pérdida de grado y, por el Lema 1.13 y por el Lema 1.14, se sigue que  $H_{n, m_0} \neq 0$  para  $n_0 < n \leq n_0 + l$ ,  $H_{n_0, m} \neq 0$  para  $m_0 < m \leq m_0 + l$ , respectivamente.

Estudiemos b). Dado que hay una sobreinterpolación, utilizando el apartado c) del Teorema 1.16, para  $(n_0 + k, m_0)$ ,  $k = 0, 1, \dots, l - 1$ , se tiene que  $H_{n_0+k+1, m_0+1} = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, l - 1$ . Nótese que nos encontramos en las condiciones del Teorema 1.23 y, por tanto,  $H_{n_0+k, m_0+j} = 0$ ,  $k, j = 0, 1, \dots, l$ . □

De este teorema obtenemos conclusiones geométricas: el par  $(n, m)$  pertenece a la frontera del bloque  $C$ , considerando la frontera como los pares más a la izquierda y los superiores del bloque, si  $H_{n,m} \neq 0$  y, para todos los pares interiores,  $H_{n,m} = 0$ . Además, todos los pares  $(n, m)$  de la frontera se caracterizan por  $d_f([n/m]) = 0$  y todos los pares interiores  $(n, m)$  por  $d_f([n/m]) > 0$ , respecto a  $R_{n,m}$ .

Todo índice  $(n, m)$  normal tiene asociado un par  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  de polinomios primos tal que  $\partial(Q_{n,m}) = m$ . Esto implica, por el Corolario 1.15, que  $H_{n,m}, H_{n+1,m} \neq 0 \forall n, m \in \mathbb{N}$ .

**Corolario 1.26.** *Una condición necesaria y suficiente para que la Tabla de Padé asociada a  $f$  sea normal es que  $H_{n,m} \neq 0, \forall n, m$ .*

*Demostración.* Supongamos por reducción al absurdo que existe un índice  $(n_0, m_0) \in \mathbb{N}^2$  tal que  $H_{n_0,m_0} = 0$ . Entonces,

$$f(z) - [n_0/m_0] = O(z^{n_0+m_0+1-\nu}),$$

para cierto  $\nu$ . Efectivamente, hemos analizado anteriormente que los factores comunes producidos por el origen afectan al orden de interpolación, si  $H_{n_0,m_0} = 0, Q_{n,m}(0) = 0$ , y existirá  $\nu \in \mathbb{N}$  tal que  $Q_{n_0,m_0}(z) = z^\nu q_{n_0,m_0}(z)$  y  $\partial(q_{n_0,m_0}) \leq m_0 - \nu$ . Por tanto,  $(n_0, m_0)$  no es un índice normal.  $\square$

**Corolario 1.27 (Criterios de Kronecker).** *La función  $f$  representa una función racional si y sólo si se satisface cualquiera de las dos condiciones siguientes:*

- a)  $H_{n,n} = 0$  para todo  $n$  lo suficientemente grande.
- b) Existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $H_{n,m_0} = 0$  para todo  $n$  lo suficientemente grande.

*Demostración.* Por la identidad de Sylvester ambas condiciones se reducen a ver que existe un bloque infinito de ceros en la Tabla de Padé. Si dicho bloque comienza en el índice  $(n_0 + 1, m_0 + 1)$  estará caracterizado por  $H_{n_0,m_0+1} \neq 0, H_{n_0+1,m_0} \neq 0$  y  $H_{n_0+i,m_0+j} = 0, i, j = 1, 2, \dots, \infty$ , es decir,  $[n_0/m_0] = [n_0 + i/m_0 + j]$ . Trabajando cada índice a partir de  $(n_0 + i, m_0 + j)$  obtenemos,

$$Q_{n_0,m_0}(z)f(z) - P_{n_0,m_0}(z) = O(z^{n_0+m_0+1+l}), z \rightarrow 0, \forall l > 0,$$

Por lo tanto,

$$f(z) - \frac{P_{n_0,m_0}(z)}{Q_{n_0,m_0}(z)} = O(z^{n_0+m_0+1+l}), \forall l > 0,$$

tenemos dos funciones holomorfas  $f$  y  $\frac{P_{n_0,m_0}}{Q_{n_0,m_0}}$  con el mismo desarrollo, por el Principio de Identidad, ambas funciones son las mismas, por tanto,  $f$  es una función racional.

Veamos el recíproco. Si suponemos que  $f$  es racional, se generará un bloque infinito una vez que el aproximante de Padé alcance el índice de la función racional, generando a partir de ahí el bloque infinito.  $\square$

## 1.4. Convergencia

Como hemos comentado, dentro de la Tabla de Padé tienen especial relevancia las siguientes sucesiones:

1. La fila  $\{[n/0]_f\}_{n \in \mathbb{N}}$  formada por los polinomios de Taylor de la función  $f$ .
2. La  $m_0$ -ésima fila formada por la sucesión  $\{[n/m_0]_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $m_0$  fija,  $m_0 \geq 1$ .
3. La diagonal principal formada por la sucesión  $\{[n/n]_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ .
4. La  $j_0$ -ésima paradiagonal formada por la sucesión  $\{[n/n + j_0]_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $j_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $n + j_0 \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Del análisis introductorio sabemos que para recuperar una función meromorfa con un número finito de polos debemos usar aproximantes racionales, tomando como candidatos aquellos aproximantes que tengan al menos el mismo número de polos para que emulen los de la función meromorfa  $f$  a aproximar, y el resto de polos sean expulsados del dominio de meromorfía, o bien se acumulen en la frontera. Por lo tanto, una elección adecuada es buscar aproximantes que tengan exactamente el mismo número de polos. En este sentido, nos ocuparemos sólo de la convergencia de la sucesión  $\{[n/m_0]_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $m_0$  fija. Una de las características de estos aproximantes es que el grado del denominador está uniformemente acotado, lo cual facilita enormemente el estudio de su convergencia.

El primer resultado sobre la convergencia relativo a las filas de la Tabla de Padé fue dado por Robert de Montessus de Ballore (1870-1937). Su prueba se basó principalmente en la teoría de Hadamard para localizar singularidades polares, jugando un papel trascendente las propiedades de los determinantes de Hadamard. Sin embargo, nosotros demostraremos dicho resultado usando la teoría clásica de variable compleja. Para afrontar dicho teorema debemos introducir las siguientes definiciones.

Sea  $D_m = D_m(f) = \{z : |z| < R_m\}$  el disco centrado en  $z = 0$  donde  $f$  admite una extensión meromorfa con no más de  $m$  polos, siendo  $R_m$  su radio, conocido como disco de Hadamard. Denotaremos por  $D_\infty(f)$  al máximo disco centrado en  $z = 0$  donde  $f$  admite una extensión meromorfa. Además diremos que  $m \in M(f)$  si hay exactamente  $m$  polos en  $D_m(f)$ .

**Teorema 1.28 (Teorema de Montessus de Ballore).** *Sea  $f$  una función meromorfa con exactamente  $m$  polos no nulos,  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$ , contando multiplicidades, en el disco  $D_m(f)$ , es decir,  $m \in M(f)$ . Sea el par de polinomios  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  que verifica (1.4) y que define al aproximante de Padé para el índice  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ . Sea  $Q(z) = \prod_{k=1}^m (z - \zeta_k)$ . Entonces, para todo  $n$  lo suficientemente grande,  $\delta(Q_{n,m}) = m$ ,  $Q_{n,m}(0) \neq 0$  y los ceros de  $Q_{n,m}$  tienden a los de  $Q$ . Además, se tiene que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}} \right\|_{\mathcal{K}}^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\max\{|z| : z \in \mathcal{K}\}}{R_m} < 1, \quad (1.19)$$

siendo  $\mathcal{K}$  un compacto arbitrario contenido en  $D'_m = D_m \setminus \{z : f(z) = \infty\}$ , donde  $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$  denota la norma uniforme en  $\mathcal{K}$ .

*Demostración.* Sea  $r$  tal que  $0 < r < R_m$ , con  $r$  lo suficientemente próximo a  $R_m$  de manera que todos los ceros de  $Q$  estén contenidos en  $D(0, r)$ . Para cada  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  tenemos

$$Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = A_{n,m}z^{n+m+1} + \dots, \quad z \rightarrow 0,$$

multiplicando por  $Q$ , cancelamos los polos de  $f$ ,

$$Q_{n,m}(z)Q(z)f(z) - Q(z)P_{n,m}(z) = A'_{n,m}z^{n+m+1} + \dots, \quad z \rightarrow 0,$$

de tal forma que  $\frac{Q_{n,m}(z)Q(z)f(z) - Q(z)P_{n,m}(z)}{z^{n+m+1}} \in \mathcal{H}(D_m)$ . Luego, por la fórmula integral de Cauchy para  $D(0, r)$ , se tiene que

$$\frac{(Q_{n,m}Qf - QP_{n,m})(z)}{z^{n+m+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{Q_{n,m}(t)Q(t)f(t) - Q(t)P_{n,m}(t)}{t^{n+m+1}} \frac{dt}{t-z}$$

para todo  $z \in D(0, r)$ , siendo  $\Gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ . Dado que  $h(t) = \frac{Q(t)P_{n,m}(t)}{t^{n+m+1}(t-z)}$  es analítica en  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D(0, r)$  y se comporta como  $O(\frac{1}{t^2})$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , se sigue que  $\int_{\gamma} h(t) dt = 0$ , siendo  $\gamma$  la frontera de cualquier disco centrado en  $z = 0$  y con radio lo suficientemente grande. Luego, la igualdad anterior se reduce a

$$\frac{(Q_{n,m}Qf - QP_{n,m})(z)}{z^{n+m+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{Q_{n,m}(t)Q(t)f(t)}{t^{n+m+1}} \frac{dt}{t-z}, \quad z \in D(0, r),$$

equivalentemente

$$(Q_{n,m}Qf - QP_{n,m})(z) = \frac{z^{n+m+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{Q_{n,m}(t)Q(t)f(t)}{(t-z)t^{n+m+1}} dt, \quad z \in D(0, r). \quad (1.20)$$

Considerando  $Q_{n,m}$  con la normalización del máximo, es decir,  $\max_{0 \leq k \leq m} |q_{n,m}^k| = 1$ ,

donde  $Q_{n,m}(z) = \sum_{k=1}^m q_{n,m}^k z^k$ . Sea  $\mathcal{K}$  un compacto arbitrario en  $\mathbb{C}$ . Entonces,  $\mathcal{K} \subset D(0, \rho)$ ,  $\rho > 0$ ,

$$|Q_{n,m}(z)| \leq \sum_{k=1}^m |q_{n,m}^k| |z|^k \leq \sum_{k=1}^m \rho^k = M_{\mathcal{K}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

por tanto,  $\{Q_{n,m}\}_{n \geq 0}$  está uniformemente acotada en  $\mathbb{C}$ . Teniendo esto en cuenta, acotamos (1.20) usando  $\Gamma_r = \{re^{i\theta} / \theta \in [0, 2\pi]\}$ ,

$$\begin{aligned} |Q_{n,m}(z)Q(z)f(z) - Q(z)P_{n,m}(z)| &= \left| \frac{z^{n+m+1}}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{Q_{n,m}(re^{i\theta})Q(re^{i\theta})f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+m+1}(re^{i\theta} - z)} ire^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{|z|^{n+m+1}}{r^{n+m+1}} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{|Q_{n,m}(re^{i\theta})||Q(re^{i\theta})||f(re^{i\theta})|r}{|re^{i\theta} - z|} \\ &\leq M(z) \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n+m+1}, \quad z \in D(0, r) \end{aligned} \quad (1.21)$$

siendo  $M(z)$  una función continua positiva en  $D(0, r)$ . Entonces,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |Q_{n,m}(z)Q(z)f(z) - Q(z)P_{n,m}(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{|z|}{r}, \quad z \in D(0, r), \quad 0 < r < R_m,$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |Q_{n,m}(z)Q(z)f(z) - Q(z)P_{n,m}(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{|z|}{R_m} < 1, \quad \forall z \in D_m.$$

Por tanto, tenemos que

$$Q_{n,m}(z)Q(z)f(z) - Q(z)P_{n,m}(z) \xrightarrow{c.u.} 0, \quad z \in D_m, \quad (1.22)$$

por el Teorema de Weierstrass (ver [4]),

$$(Q_{n,m}(z)Q(z)f(z) - Q(z)P_{n,m}(z))^k \xrightarrow{c.u.} 0, \quad z \in D_m, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.23)$$

Con el fin de demostrar que  $\{Q_{n,m}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge, al tratarse de una sucesión uniformemente acotada en compactos, por el Teorema de Montel (ver [9, pág 384]), es suficiente ver que todas sus subsucesiones convergentes lo hacen al mismo límite, que en este caso, será un polinomio de grado a lo sumo  $m$ , con sólo aplicar el Teorema de Weierstrass. Consideramos cualquier subsucesión convergente, que por comodidad la denotaremos igual, es decir,  $\{Q_{n,m}\}_{n \geq 0}$ . Sea  $Q(z) = \prod_{s=1}^d (z - \zeta_s)^{m_s}$  con  $m_1 + m_2 + \dots + m_d = m$ ,  $\zeta_i \neq \zeta_j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ . Si  $\zeta_{i_0}$  es un cero simple, utilizando (1.22), obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n,m}(\zeta_{i_0})Q(\zeta_{i_0})f(\zeta_{i_0}) - Q(\zeta_{i_0})P_{n,m}(\zeta_{i_0}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n,m}(\zeta_{i_0}) = 0,$$

dado que  $Q(\zeta_{i_0})f(\zeta_{i_0}) = c_{i_0} \neq 0$ . Supongamos ahora que  $\zeta_{i_0}$  tiene multiplicidad  $m_{i_0} > 1$ . En este caso utilizamos (1.23) para  $k = 0, 1, \dots, m_{i_0} - 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Q_{n,m}(z)Q(z)f(z) - Q(z)P_{n,m}(z))_{z=\zeta_{i_0}}^k = 0,$$

dado que  $Q^k(\zeta_{i_0}) = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, m_{i_0} - 1$ , se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Q_{n,m}(z)Q(z)f(z))_{z=\zeta_{i_0}}^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m_{i_0} - 1.$$

Vamos a demostrar por inducción que  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n,m}^k(\zeta_{i_0}) = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, m_{i_0} - 1$ . Sabemos que es cierto para  $k = 0$ , supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n,m}^k(\zeta_{i_0}) = 0$ ,  $k = 0, \dots, l - 1$ , y demostrémoslo para  $l, l < m_{i_0}$ . Sabemos que  $Qf \in \mathcal{H}(D_m)$ , por lo tanto,  $(Qf)^k(\zeta_{i_0}) = c_{i_0 k} \neq 0$ , sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} Q_{n,m}^{l-i}(\zeta_{i_0})(Q \cdot f)^i(\zeta_{i_0}) = 0$$

⇕

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n,m}^l(\zeta_{i_0}) Q(\zeta_{i_0}) f(\zeta_{i_0}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \binom{l}{i} Q_{n,m}^{l-i}(\zeta_{i_0}) (Q(\zeta_{i_0}) f(\zeta_{i_0}))^i &= 0 \\ \Downarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n,m}^l(\zeta_{i_0}) &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, podemos asegurar que

$$Q_{n,m}(z) \rightrightarrows \lambda Q(z), \lambda \in \mathbb{C}.$$

Por la normalización de  $Q_{n,m}$  que hemos considerado, necesariamente tenemos que  $\lambda \neq 0$ . Puesto que si

$$(q_{n,m}^0, q_{n,m}^1, \dots, q_{n,m}^m) \rightarrow \lambda(q^0, q^1, \dots, q^m),$$

siendo  $\{q^i\}_{i=0}^m$  los coeficientes de  $Q$  y, como  $(q_{n,m}^0, q_{n,m}^1, \dots, q_{n,m}^m)$  tienen módulo 1,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , necesariamente  $\lambda(q^0, q^1, \dots, q^m)$  también lo tiene. Por el Teorema de Hurwitz (ver [9]) tenemos que los ceros de  $Q$  atraen a los ceros de  $Q_{n,m}$ . Llegados a este punto, hemos demostrado que los respectivos ceros de  $Q_{n,m}$  de todas las subsucesiones convergentes, convergen a los ceros de  $Q$ . Ahora cambiemos la normalización de  $Q_{n,m}$  por:

$$Q_{n,m}(z) = \prod_{|\zeta'_i| < R_m} (z - \zeta'_i) \prod_{|\zeta''_i| \geq R_m} \left(1 - \frac{z}{\zeta''_i}\right),$$

como los ceros de  $Q$  están dentro del disco  $D(0, R_m)$  y atraen a los ceros de todas las subsucesiones convergentes, entonces  $Q_{n,m} \rightrightarrows Q$ . Por lo tanto,  $\partial(Q_{n,m}) = m$  y  $Q_{n,m}(0) \neq 0$  para un  $n$  suficientemente grande.

Sea  $\mathcal{K}$  un compacto tal que  $\mathcal{K} \subset D_m^* = D_m \setminus \{\mathcal{P}\}$ , siendo  $\mathcal{P} = \{\zeta_i \mid i = 1, \dots, d\}$ . Entonces de (1.21)

$$\left| f(z) - \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)} \right| \leq \frac{M(z)}{|Q_{n,m}(z)Q(z)|} \left| \frac{z}{R_m} \right|^{n+m+1}, \quad z \in \mathcal{K}, Q_{n,m}(z) \neq 0.$$

Si  $d(\mathcal{K}, \mathcal{P}) = \Delta$  denota la distancia de  $\mathcal{K}$  al polo más cercano. Podemos definir para cada  $\zeta_i$  un disco  $D(\zeta_i, r_i)$  tal que  $\zeta_j \notin D(\zeta_i, r_i)$ ,  $j \neq i$ , con  $r_i < \frac{\Delta}{2}$ . Por el Teorema de Hurwitz,  $\exists n_i$  tal que  $\forall n \geq n_i$ ,  $m_i$  ceros de  $Q_{n,m}$  están en  $D(\zeta_i, r_i)$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Si escogemos  $n_0 = \max(n_1, \dots, n_d)$  podemos asegurar que

$$\left| f(z) - \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)} \right| \leq \frac{M(z)}{|Q_{n,m}(z)Q(z)|} \left| \frac{z}{R_m} \right|^{n+m+1}, \quad z \in \mathcal{K},$$

es fácil ver

$$M_{\mathcal{K}} = \frac{\max_{z \in \mathcal{K}} M(z)}{\min_{z \in \mathcal{K}} |Q_{n,m}(z)Q(z)|} < M,$$

está uniformemente acotado, tomando el límite superior a la raíz enésima,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| f(z) - \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)} \right|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\max_{z \in K} |z|}{R_m} < 1$$

obtenemos (1.19). □

Por lo tanto, según el Teorema de Montessus, la fila  $m$  de los aproximantes de Padé recupera a  $f$  en todo  $D_m$ , cuando  $m \in M(f)$ , con velocidad geométrica, y además sus polos son atraídos por los polos de  $f$ , mejorando al polinomio de Taylor que sólo nos permitiría aproximar en  $D_0$ .

Señalar que este resultado se puede complementar sustancialmente, ver [8], con un resultado cuantitativo del comportamiento de los denominadores, concretamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_{n,m} - Q\|^{\frac{1}{n}} = \frac{\max\{|\zeta_k| : k = 1, \dots, m\}}{R_m}; Q(\zeta_i) = 0$$

siendo  $\|\cdot\|$  cualquier norma en  $\mathbb{P}_m$ , ya que todas las normas son equivalentes por ser  $\mathbb{P}_m$  un espacio finito dimensional.

El Teorema de Montessus de Ballore es lo que se denomina un resultado directo. También existe el correspondiente resultado indirecto. Concretamente, deducir propiedades meromórficas desde el comportamiento de los denominadores  $\{Q_{n,m}\}_{n \geq 0}$ . A modo de ejemplo, enunciemos el Teorema de Fabry, ver [8].

**Teorema 1.29 (Teorema de Fabry).** *Sea  $f$  una función dada por (1.3) tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = s$$

*entonces  $s$  es un punto singular de  $f$ .*

Obsérvese que el límite anterior implica que  $R_0 = |s|$ . Luego, el teorema permite detectar una singularidad sobre la frontera del disco de analiticidad. Puede no ser un polo, ni siquiera una singularidad aislada. En efecto, tenemos el desarrollo de Taylor

$$f_1(z) = \log(1 - z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

para el cual  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$  en el cual  $s = 1$  nos da el punto de rama que tiene la función  $f_1$  sobre la circunferencia unidad.

El teorema de Fabry afirma que si los denominadores de la primera fila de los aproximantes de Padé convergen, el cero del polinomio límite es una singularidad. Nótese que en el ejemplo dado la convergencia no es geométrica y la singularidad no es de tipo polar.

Al pretender extender los resultados a cualquier otra sucesión de la Tabla, surgen varios problemas si perdemos la acotación del grado del denominador, es decir, si nos movemos por diagonales. Como ilustración, el siguiente resultado:

**Teorema 1.30.** *Existe una función  $f$  entera tal que los aproximantes de Padé de la sucesión de la diagonal principal  $\{\frac{P_{n,n}}{Q_{n,n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$  para  $f$  no están acotados en todo el plano complejo, excepto en  $z = 0$*

Obtenido por H. Wallin, ver [2]. Por lo que nos vemos obligados a realizar algún sacrificio con el fin de obtener resultados algo generales. De acuerdo a este resultado, se consideran las siguientes vías:

1. Debilitar la convergencia considerando la convergencia en medida o capacidad
2. Intentar extraer subsucesiones que tengan propiedades de convergencia uniforme.

De la primera afirmación se tiene que los aproximantes de Padé casi diagonales serán buenas aproximaciones de  $f$ , salvo en determinados conjuntos de capacidad nula. Para la demostración de este tipo de resultados, es conveniente tratar con los aproximantes de Padé que interpolan una función analítica en el infinito en lugar de en  $z = 0$ , basta reemplazar  $z$  por  $\frac{1}{z}$ . Para la segunda afirmación, Baker y Graves-Morris (ver [1]) probaron que si  $f$  es analítica en un entorno del origen, entonces es posible encontrar una subsucesión en la segunda o tercera fila de la Tabla de Padé que converja a  $f$ . Albert Edrei extendió estos resultados para el caso de funciones enteras de orden finito, probando la existencia de subsucesiones uniformemente convergentes para ciertas filas de la tabla, dependiendo del orden de  $f$ , ver [5] y referencias contenidas en el.

Una clase de funciones de las cuales se conocen propiedades de convergencia para sus Aproximantes de Padé son las series de Stieltjes.

**Definición 1.31.** *Sea  $f$  una función dada por  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (-z)^i$ .  $f$  es una función de Stieltjes si*

$$c_i = \int_0^{\infty} t^i d\phi(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

siendo  $\phi$  una función acotada, creciente, continua por la izquierda y que toma infinitos valores.

Fue el matemático holandés Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894) interesado en el problema de los momentos, quien obtuvo el siguiente resultado, ver [11]:

**Teorema 1.32.** *Para  $n \geq 1$ ,  $\mu \geq 1$ , cada aproximante de Padé  $[n + \mu, n]$  dado por un par de polinomios  $(P_{n+\mu, n}, Q_{n+\mu, n})$ , para una serie de Stieltjes, tiene todos sus polos en el eje real negativo. Además, la  $\mu$ -ésima paradiagonal  $\{[n + \mu, n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ , converge uniformemente en compactos de  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$*

Nótese que el teorema anterior no hace referencia a que las  $\mu$ -ésima paradiagonales tengan el mismo límite. Esto será cierto solamente cuando el problema del momento de Stieltjes esté determinado. Es decir, cuando exista una única  $\phi$  tal que  $c_n = \int_0^{\infty} t^n d\phi(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . En la prueba de este teorema cobra relevancia el signo de los determinantes de Hadamard.



## Aplicación. Experimentos Numéricos

---

### 2.1. Método de Aitken

Un problema clásico en el análisis numérico es acelerar una sucesión convergente. Concretamente, dada una sucesión de números, en general, complejos  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  tal que  $S_n \rightarrow S$ , el problema es encontrar una nueva sucesión  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  que converja más rápido a  $S$ . Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = 0$$

El método de Aitken es un procedimiento que nos permite acelerar sucesiones que convergen linealmente. Es decir, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = A \neq 0$$

Entonces, para un  $n$  suficientemente grande

$$\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} \approx \frac{S_{n+2} - S}{S_{n+1} - S}$$

equivalentemente

$$(S_{n+1} - S)^2 \approx (S_{n+2} - S)(S_n - S)$$

manipulando algebraicamente

$$\begin{aligned} S_{n+1}^2 - 2SS_{n+1} + S^2 &\approx S_{n+2}S_n - S_{n+2}S - SS_n + S^2 \\ S(S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n) &\approx S_{n+2}S_n - S_{n+1}^2 \\ S(S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n) &\approx (S_nS_{n+2} - 2S_nS_{n+1} + S_n^2) - (S_{n+1}^2 - 2S_nS_{n+1} + S_n^2) \\ S\Delta^2 S_n &\approx S_n\Delta^2 S_n - (\Delta S_n)^2 \end{aligned}$$

entonces

$$S \approx S_n - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}$$

siendo

$$\begin{aligned}\Delta S_n &= S_{n+1} - S_n \\ \Delta^2 S_n &= S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n\end{aligned}$$

las diferencias progresivas usuales. Denotando por

$$T_n = S_n - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}. \quad (2.1)$$

sabemos que, ver [6],

**Teorema 2.1.** *Sea  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión convergente a  $S$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = A, \quad |A| < 1$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = 0.$$

Si nuestro objetivo es sumar la serie convergente  $S = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ,  $f_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  con  $S_n = \sum_{j=0}^n S_j$ . Se verifica  $\Delta S_n = f_{n+1}$ ,  $n \geq 0$ . Si reinterpretemos nuestro problema de la siguiente forma, estimar  $f(1) = S$  con  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$  y, si para ello usamos la segunda fila de la Tabla de Padé  $\{[n/1](1)\}_{n \geq 0}$ . Veamos que obtenemos.

Utilizando los apartados *a)* y *b)* del Teorema 1.16, aplicándolos para  $m = 1$  y evaluando en  $z = 1$ ,

$$\begin{aligned}-\frac{H_{n,1}}{Q_{n,1}(0)} P_{n,1}(1) &= \left| \frac{f_{n+1}}{\sum_{i=0}^n f_i} \frac{f_n}{\sum_{i=0}^{n-1} f_i} \right| = \Delta S_n S_{n-1} - \Delta S_{n-1} S_n \\ &= (\Delta S_n - \Delta S_{n-1}) S_{n-1} + (\Delta_{n-1})^2 \\ &= S_{n-1} \Delta^2 S_{n-1} + (\Delta S_{n-1})^2 \\ -\frac{H_{n,1}}{Q_{n,1}(0)} Q_{n,1}(1) &= \left| \frac{f_{n+1}}{1} \frac{f_n}{1} \right| = (S_{n+1} - S_n) - (S_n - S_{n-1}) \\ &= \Delta^2 S_{n-1}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}[n/1](1) &= \frac{P_{n,1}(1)}{Q_{n,1}(1)} = \frac{\Delta S_n S_{n-1} - \Delta S_{n-1} S_n}{\Delta^2 S_{n-1}} \\ &= S_{n-1} - \frac{(\Delta S_{n-1})^2}{\Delta^2 S_{n-1}}\end{aligned}$$

recuperando el método de Aitken mediante los aproximantes de Padé.

## 2.2. Ejemplos

*Ejemplo 2.2.* Sea la función:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \ln\left(1 - \frac{z}{2}\right), \quad z \in D_\infty = D(0, 2), \quad 1 \in M(f),$$

observamos que

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k, \quad z \in D(0, 2)$$

$$\ln\left(1 - \frac{z}{2}\right) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)2^{k+1}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k2^k}, \quad z \in D(0, 2)$$

por tanto, la función se puede escribir como

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n2^n}\right)z^n, \tag{2.2}$$

Si hiciéramos una aproximación mediante los polinomios de Taylor tendríamos convergencia sólo para  $|z| < 1$ .

Sin embargo, si consideramos  $[n/1]_f$ , utilizando la misma información de  $f$  que el polinomio de Taylor, obtendríamos convergencia en  $D(0, 2)$ , e incluso se podría mejorar la aproximación en las proximidades de  $z = 1$  obtenidas por el polinomio de Taylor.

Sabiendo que la función  $f$  tiene un polo en  $z = 1$ , vamos a comparar algunos errores relativos de la fila  $\{[n/1]\}_{n \in \mathbb{N}}$  en puntos cercanos a dicho polo, y fuera de la región de convergencia de los polinomios de Taylor.

	$z = 0,95$	$z = 0,99$	$z = 1,5$
$f$	20,64435702	100,6831968	-0,613705639
$[2/1]$	10,85990384	15,71635000	-3,258928570
$E_{T_3}$	0,7900922051	0,9543286192	16,14875277
$E_{[2/1]}$	0,4739529146	0,8439029501	4,310247068

	$z = 0,95$	$z = 0,99$	$z = 1,5$
$f$	20,64435702	100,6831968	-0,613705639
$[4/1]$	18,40936412	55,57450310	-1,279204164
$E_{T_5}$	0,7123058163	0,9351343631	36,97765133
$E_{[4/1]}$	0,1082616861	0,4480260374	1,084393694

	$z = 0,95$	$z = 0,99$	$z = 1,5$
$f$	20,64435702	100,6831968	-0,613705639
$[6/1]$	20,27510904	88,83099340	-0,8630455533
$E_{T_7}$	0,6427409043	0,9164913563	83,45806948
$E_{[6/1]}$	0,01788614582	0,1177177898	0,4062858453

	$z = 0,95$	$z = 0,99$	$z = 1,5$
$f$	20,64435702	100,6831968	-0,613705639
$[8/1]$	20,58223572	98,31414727	-0,7196061870
$E_{T_9}$	0,5800540137	0,8982468945	187,8943307
$E_{[8/1]}$	0,003009117694	0,02352974086	0,1725591901

En las tablas anteriores se aprecia que el error relativo de los sucesivos Aproximantes de Padé va disminuyendo a medida que aumentamos el orden de interpolación, mejor cuanto más cerca está del origen el punto donde se desea estimar, como es de esperar.

Comparemos el módulo de los aproximantes de Padé con el de la función  $f$  en un entorno de  $z = 1$ ,

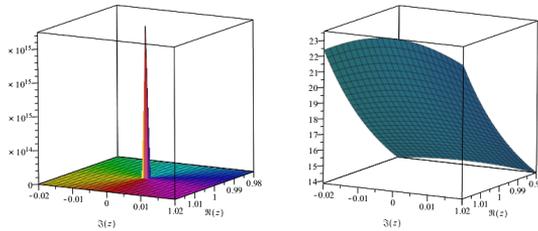


Figura 2.1: Comparación entre  $|f|$  y  $|[2/1]_f|$ .

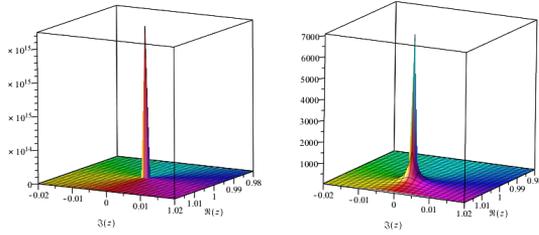


Figura 2.2: Comparación entre  $|f|$  y  $|[4/1]f|$ .

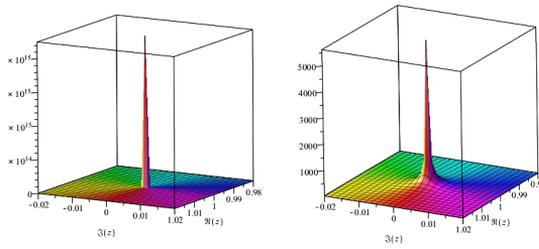


Figura 2.3: Comparación entre  $|f|$  y  $|[6/1]f|$ .

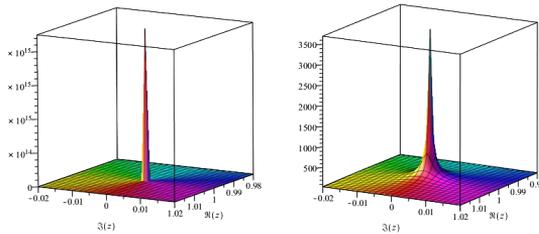


Figura 2.4: Comparación entre  $|f|$  y  $|[8/1]f|$ .

*Observación 2.3.* Las imágenes anteriores se han obtenido con el programa Maple.

Se observa que estos aproximantes de Padé, a medida que se avanza en la fila  $\{[n, 1]\}_{n \in \mathbb{N}}$ , reproducen mejor a la función.

### 2.3. Conclusiones

Como se observa a lo largo de la memoria, el estudio de los aproximantes de Padé incluye el estudio de la aproximación polinómica de Taylor, pues estos son un caso particular de aquellos. Computacionalmente, las dificultades del cálculo de los coeficientes de los polinomios numerador y denominador del aproximante de Padé, no son un obstáculo con el uso del ordenador y los programas matemáticos. Este pequeño esfuerzo computacional extra encuentra su recompensa en la mejora en la aproximación obtenida en comparación con la aproximación de Taylor. La región de convergencia es más amplia y que, en general, converge con mayor rapidez. Desde nuestro punto de vista, con el desarrollo vertiginoso del ordenador y los resultados alcanzados por los investigadores en la teoría de los Aproximantes de Padé, el estudio de este tópico será relevante por las múltiples aplicaciones que ofrece en diversos campos de la ciencia.

---

## Bibliografía

- [1] Baker, George A., Graves-Morris, Peter. *Padé Approximants* Encyclopedia of mathematics and its applications Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [2] Brezinski, C. *Outlines of Padé Approximation*, Computational Aspects of Complex Analysis (Werner H., Wuytack L., Ng E., Bonger H.J.,eds.), NATO Advanced Study Institutes Series (Series C Mathematical and Physical Sciences), vol 102. Springer, Dordrecht, 1983.
- [3] Fabry, E. *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série de Taylor*, An. Ecole Norm. Sup. 13 (1896), 367-399.
- [4] Goluzin, G.M. *Teoría geométrica de las funciones de variable compleja*. Editorial Nauka, Moscú, 1966.
- [5] Edrei, A. *The Padé tables of entire functions*. J. Approx Theory, 28 , 1980
- [6] Henrici, P. *Elements of Numerical Analysis*. John Wiley, Sons Inc, eds, 1964.
- [7] López Lagomasino, G. *Algunas cuestiones de la teoría de aproximación*. Manuscrito, 1984.
- [8] López Lagomasino, G. *Constructive Theory of Approximation. An Introduction to Padé Approximation* Coimbra Lecture Notes on Orthogonal Polynomials, Nova Science Pub., A. Branquinho and A. Foulquié Eds., 101-139, 2008.
- [9] Markushevich, A. *Teoría de las funciones analíticas*. Volumen I. Editorial Mir, Moscú, 1970.
- [10] Saff, E.B. *An Introduction to the Convergence Theory of Padé Approximants*. Aspects of Contemporary Complex Analysis (Brannas, D. A., Clunie, J. G., eds.). Academic Press, New York, 1980, 493-502.
- [11] Stieltjes, T.J. *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sci. Toulouse 8 (1894) J, 1-122 ibid. 9 (1894) A, 1-47.



---

## Lista de Figuras

1.1. Henri Padé .....	6
1.2. Charles Hermite .....	7
2.1. Comparación entre $ f $ y $ [2/1]_f $ .....	38
2.2. Comparación entre $ f $ y $ [4/1]_f $ .....	39
2.3. Comparación entre $ f $ y $ [6/1]_f $ .....	39
2.4. Comparación entre $ f $ y $ [8/1]_f $ .....	39



# Constructive Theory of Rational Approximation of Functions

## Abstract

In this memoir, Padé approximant, the structure of the Padé Table and its algebraic properties, as well as the convergence of the rows of the Table are analyzed in detail. Its main interest is the possibility of reproducing the behavior of meromorphic functions. The fundamental problem is the convergence of the rows of the Padé Table, and Montessus de Ballore theorem provides a general response to this problem.

## 1. Introduction

The Padé approximation method is used to solve many problems of numerical analysis such as the convergence acceleration, analytic continuation of complex functions, moment problems, continuous fractions and, in general, to approximate functions of the complex variable represented by a truncated power series and the detection of their zeros and poles. This method is also commonly applied to solve numerous problems in physical modeling. One of the fundamental problems of the Approximation theory is to approximate constructively functions whose analytic expression is unknown or, if its coefficients are known, is mathematically difficult to manipulate. In this project we focus in the study of the Padé approximants who approximate meromorphic functions with a finite number of poles.

## 2. Padé Approximation

Let  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$  be a formal power series, and  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ . A Padé approximant of type  $(n, m)$  is a pair  $(P_{n,m}, Q_{n,m})$  such that  $\partial(P_{n,m}) \leq n$ ,  $\partial(Q_{n,m}) \leq m$ ,  $Q_{n,m} \neq 0$  and

$$Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}), z \rightarrow 0.$$

We will call Padé Table

$$\begin{array}{cccc} [0/0]_f & [1/0]_f & [2/0]_f & \dots \\ [0/1]_f & [1/1]_f & [2/1]_f & \dots \\ [0/2]_f & [1/2]_f & [2/2]_f & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

and  $[n/m]_f = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}}$ . The aim of this section is to provide an analysis of the algebraic properties of the Padé approximants and Padé Table using the Hadamard Determinants and the Frobenius Identity.

## 3. Convergence

In the study of the convergence of the rows of the Padé Table we will prove Montessus de Ballore theorem which say that the  $m$ -th row of the Padé Table retrieves  $f$  in all  $D_m = \{z : |z| < R_m\}$ , with  $R_m$  radius of convergence, when  $f$  has exactly  $m$  poles in  $D_m$ , with geometric velocity, and their poles imitate the poles of  $f$ .

## References

- [1] Baker, George A., Graves-Morris, Peter. *Padé Approximants* Encyclopedia of mathematics and its applications Cambridge: Cambridge University Press).
- [2] Brezinski, C. *Outlines of Padé Approximation*, Computational Aspects of Complex Analysis (Werner H., Wuytack L., Ng E., Bünger H.J., eds.), NATO Advanced Study Institutes Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences), vol 102. Springer, Dordrecht.
- [3] López Lagomasino, G. *Constructive Theory of Approximation. An Introduction to Padé Approximation* Coimbra Lecture Notes on Orthogonal Polynomials, Nova Science Pub., A. Branquinho and A. Foulquié Eds., 101-139, 2008.
- [4] Saff, E.B. *An Introduction to the Convergence Theory of Padé Approximants*. Aspects of Contemporary Complex Analysis (Brannas, D. A., Clunie, J. G., eds.), Academic Press, New York, 1980, 493-502.