Categoría de Módulos

Category of Modules

Juan Fernando de la Rosa Reyes

Trabajo de Fin de Grado

Sección de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de La Laguna

La Laguna, 14 de julio de 2015

Dra. Dña. **Concepción Mercedes Márquez Hernández**, con N.I.F. 42.030.217-V profesora Titular de Universidad adscrita al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna

C E R T I F I C A

Que la presente memoria titulada:

"*Categoría de Módulos.*"

ha sido realizada bajo su dirección por D. **Juan Fernando de la Rosa Reyes**, con N.I.F. 54.111.182-W.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 14 de julio de 2015

Agradecimientos

A mi tutora Mercedes, por haberme hecho entender las matemáticas más profundamente.
A mi familia y amigos por todo el apoyo que me han dado durante todos estos años.

Resumen

En este trabajo hemos introducido los términos básicos de la Teoría de Categorías para centrarnos en la Categoría de Módulos. En el desarrollo de los distintos capítulos que integran esta memoria, hay que destacar que la vertiente principal, la constituye la presentación de las nociones principales que constituyen la disciplina propuesta, como son el lenguaje de Categorías, haciendo énfasis en la Categoría de Módulos. La introducción en todo el desarrollo del trabajo del concepto de Propiedad Universal que permite desarrollar nuevas técnicas de demostraciones y la unicidad de los objetos matemáticos que así se definen.

Palabras clave: Categoría, Funtor, Transformación Natural, Módulo, A-homomorfismo, Producto Directo, Suma Directa, Propiedad Universal, Sucesión Exacta, Sucesión escindida, Módulo Libre, Producto Tensorial.

Abstract

In this essay we have introduced the basic terms of the Category Theory to focus in the Category of Modules. In the development of the different chapters that conform this paper, there is to emphasize that the main aspect is constituted by the presentation of the principal notions that conform the proposed discipline, such as the Categorical language, emphasizing on the Category of Modules, and the introduction, through all the paper, of the concept of Universal Property that allows to develope new proof techniques and the uniqueness of the mathematical objects defined this way.

Keywords: *Category, Functor, Natural Transformation, Module, A-homomorfism, Direct Product, Direct Sum, Universal Property, Exact Sequence, Split Sequence, Free Module, Tensor Product.*

Índice general

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es el estudio de los conceptos algebraicos básicos y herramientas principales del Álgebra Homológica y su relación con las distintas disciplinas Matemáticas.

El Álgebra Homológica es la rama de las matemáticas que estudia homología en un entorno algebraico general. Es una disciplina relativamente joven, cuyos orígenes se remontan, a finales del siglo XIX, a las investigaciones en la topología combinatoria (precursora de la topología algebraica), el álgebra abstracta y la teoría de módulos, desarrolladas principalmente por Henri Poincaré y David Hilbert.

Desde sus orígenes el Álgebra Homológica ha jugado un papel muy importante en la Topología Algebraica y, en la actualidad, su área de influencias se ha ampliado, gradualmente, al Álgebra Conmutativa, Geometría Algebraica, Teoría de la Representación, Física Matemática, Álgebra de Operadores, Análisis Complejo y Teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales. El Álgebra homológica, además, es una herramienta que se usa en distintas ramas de las matemáticas: Geometría Algebraica, Topología Algebraica, Teoría de Anillos, etc.

Aunque tiene su origen a finales de 1800, sólo es aceptada generalmente después de la publicación en 1956 del libro: Homological Algebra de H. Cartan y S. Eilenberg, que introdujo diversas ideas que determinaron su desarrollo. En 1957 es publicado en la segunda serie de la Revista Matemática de Tohoku un artículo célebre de Alexander Grothendieck, en el que se utiliza el concepto de categoría abeliana. En 1967 nacen las categorías de derivados de Grothendieck y Verdier, que son ejemplos de categorías trianguladas utilizadas en un buen número de teorías modernas, como Teorías de Computabilidad.

En el desarrollo de los distintos capítulos que integran esta memoria, hay que destacar que la vertiente principal, la constituye la presentación de las nociones principales que constituyen la disciplina propuesta, como son el lenguaje de Categorías, haciendo énfasis en la Categoría de Módulos. La introducción en todo el desarrollo del trabajo del concepto de Propiedad Universal que permite desarrollar nuevas técnicas de demostraciones y la unicidad de los objetos matemáticos que así se definen.

El Álgebra Homológica está estrechamente vinculada a la aparición de la Teoría de Categorías, pues el Álgebra Homológica es en esencia el estudio de Funtores y las Estructuras Algebraicas complejas que conllevan. Es por ello que el Primer Capítulo se dedica al estudio de Categorías y Funtores. Las categorías son el contexto para tratar las propiedades generales de sistemas tales como Grupos, Anillos, Módulos, Conjuntos o Espacios Topológicos, junto con sus respectivas transformaciones: homomorfismos, aplicaciones, o aplicaciones continuas. Por otra parte la noción de funtor es muy importante dentro de este desarrollo, pues las categorías son necesarias porque constituyen un elemento esencial en la definición de funtor que hace las veces de homomorfismo entre categorías. Una situación similar surge en álgebra Lineal, el concepto más importante es el de transformación lineal, pero los espacios vectoriales son necesarios para definirlo. Por otra parte nos resulta útil emplear definiciones categóricas: los funtores admiten definiciones categóricas enunciadas simplemente en términos de objeto, morfismo identidad y composición. Uno de los ejemplos más prolíficos de funtores son los funtores Hom que estudiamos de forma general de una categoría cualquiera en la Categoría de Conjuntos y que nos proporciona un funtor covariante y otro contravariante. Concluimos la parte teórica de este capítulo dando un paso más allá, del mismo modo que un homomorfismo relaciona objetos algebraicos y funtores relacionan categorías, estudiamos las transformaciones naturales que relacionan funtores.

El Segundo Capítulo lo dedicamos al Estudio de la Categoría de Módulos, siendo éstos una generalización común de Grupos Abelianos y Espacios Vectoriales sobre un Anillo cualquiera, no necesariamente conmutativo lo que proporciona estructuras a "derecha" e "izquierda" pero que a través del concepto de Anillo Opuesto nos permite tratar a la vez propiedades de uno por otro. Teniendo en cuenta muchas de las construcciones realizadas para grupos abelianos y espacios vectoriales, como es el caso de suma directa interna y externa, se generalizan, a través de propiedades universales, al concepto de producto directo y suma directa de una familia cualquiera de Módulos, y ambos conceptos, en el caso de una familia infinita, en general no coinciden, siendo la suma directa un submódulo propio del producto directo, además será el concepto base para el estudio de Módulos libres. Se presentarán diversas propiedades de los productos y sumas directas para familias de morfismos entre familias de módulos

En el Tercer Capítulo continuamos con uno de los conceptos centrales en Álgebra Homológica: las sucesiones exactas de módulos y veremos algunos resultados interesantes que las involucran y en los que será introducida una nueva mecánica de demostración, llamada diagram chasing "persecución del diagrama" pues en cada paso de la demostración con cada elemento sólo hay dos cosas que podamos hacer con él, seguir avanzando con la flecha o escoger una imagen inversa. Finalizamos probando la exactitud a izquierda de los funtores Hom de la Categoría de A- Módulos, para una anillo general A, en la categoría de grupos abelianos, aunque cuando el Anillo es Conmutativo llega a la misma categoría de A-módulos, y contraejemplos de que en general no son exactos.

El siguiente capítulo está dedicado el estudio de los Módulos Libres que generalizan el concepto de base y que a su vez son un caso particular del concepto de Suma Directa. Representa además un papel en el desarrollo del siguiente capítulo. La motivación para incluirlos es clara: la existencia de estructuras adicionales definidas sobre un A- módulo y las propiedades del propio anillo A son dos factores determinantes a la hora de estudiar las características del módulo y de los funtores asociados al mismo.

Acabamos el trabajo con un capítulo dedicado el estudio del Producto Tensorial para

Módulos, en general, como un cociente de un A-módulo libre sobre un producto cartesiano de un modulo a derecha y un módulo a izquierda. Además demostramos que este objeto verifica una propiedad universal, que es la que va a permitir poder trabajar con un objeto matemático tan abstracto, y presentamos varias propiedades que demuestran esto último. Los funtores estudiados en Álgebra homológica son Hom y Tensor. Finalizamos pues, con la definición de los funtores Producto Tensorial, probando, además la exactitud a derecha de dichos funtores de la Categoría de A- Módulos, para una anillo general A, en la categoría de grupos abelianos, aunque cuando el Anillo es Conmutativo llega a la misma categoría de A-módulos, y presentamos contraejemplos de que en general no son exactos.

Capítulo 1

Categorías. Funtores. Transformaciones naturales.

1.1. Categorías. Subcategorías. Ejemplos

Definición 1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste en:

I. Una clase de objetos, $obj(\mathcal{C})$.

II. $\forall X, Y$ objetos de $\mathcal{C}$ tiene asociado un conjunto que denotaremos por $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y cuyos elementos llamamos *morfismos* entre X y Y.

III. $\forall X, Y, Z$ objetos de $\mathcal{C}$ existe una operación $\circ$ tal que:

$$\circ : Mor_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to Mor_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

$$(f, g) \longmapsto \circ(f, g) = g \circ f$$

A esta aplicación la denominamos *composición* (en lo que sigue, la composición entre f y g la escribiremos gf).

y verifica:

(i) $\forall X, Y, Z, T$ objetos de $\mathcal{C}$, $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y) \bigcap Mor_{\mathcal{C}}(Z, T) \neq \emptyset \Leftrightarrow (X, Y) \neq (Z, T)$.

(ii) $\forall X, Y$ objetos de $\mathcal{C}$, $\forall f \in Mor_C(X, Y)$, existen morfismos $1_X \in Mor_{\mathcal{C}}(X, X), 1_Y \in Mor_{\mathcal{C}}(Y, Y)$ tales que $f1_X = f$ y $1_Y f = f$. Estos morfismos se denominan *morfismos identidad*.

(iii) La composición es asociativa, es decir, $\forall X, Y, Z, T$ objetos de $\mathcal{C}$, $\forall f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y), \forall g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ y $\forall h \in Mor_{\mathcal{C}}(Z, T) : h(gf) = (hg)f$.

El morfismo identidad para un objeto X de $\mathcal{C}$es único, ya que si existen $i \in Mor_{\mathcal{C}} X, X$ tal que $\forall f \in Mor_{\mathcal{C}} X, Y : fi_X = f \Rightarrow f(1_X i) = (f1_X)i = fi = f = f1_X \Rightarrow 1_X i = 1_X \Rightarrow$

$1_X = i$

Sean X, Y objetos de $\mathcal{C}$, $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$, decimos que f es un *isomorfismo* si existe $g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tal que

$$fg = 1_Y, \; gf = 1_X.$$

Ejemplo 1.1. 1 ***Sets***

Sets es una categoría que consiste en:

I. La clase de objetos $obj(\mathit{Sets})$ son los conjuntos.
II. $\forall X, Y$ conjuntos, el conjunto $Mor_{\mathit{Sets}}(X, Y)$ es el conjunto de las aplicaciones entre X e Y.
III. $\forall X, Y, Z$ conjuntos, $\forall f \in Mor_{\mathit{Sets}}(X, Y), \forall g \in Mor_{\mathit{Sets}}(Y, Z)$, la composición es la composición usual entre aplicaciones.

2 ***Grupos***

Grupos es una categoría que consiste en:

I. La clase de objetos $obj(\mathit{Grupos})$ son los grupos.
II. $\forall X, Y$ grupos, el conjunto $Mor_{\mathit{Grupos}}(X, Y)$ es el conjunto de los homomorfismos de grupos entre X e Y.
III. $\forall X, Y, Z$ grupos, $\forall f \in Mor_{\mathit{Grupos}}(X, Y), \forall g \in Mor_{\mathit{Grupos}}(Y, Z)$, la composición es la composición usual entre aplicaciones.

3 ***Top***

Top es una categoría que consiste en:

I. La clase de objetos $obj(\mathit{Top})$ son los espacios topológicos.
II. $\forall X, Y$ espacios topológicos, el conjunto $Mor_{\mathit{Top}}(X, Y)$ es el conjunto de las funciones continuas entre X e Y.
III. $\forall X, Y, Z$ espacios topológicos, $\forall f \in Mor_{\mathit{Top}}(X, Y), \forall g \in Mor_{\mathit{Top}}(Y, Z)$, la composición es la composición usual entre funciones.

4 ***Ab***

Ab es una categoría que consiste en:

I. La clase de objetos $obj(Ab)$ son los grupos abelianos.
II. $\forall X, Y$ grupos abelianos, el conjunto $Mor_{Ab}(X, Y)$ es el conjunto de los homomorfismos de grupos entre X e Y.
III. $\forall X, Y, Z$ grupos abelianos, $\forall f \in Mor_{Ab}(X, Y), \forall g \in Mor_{Ab}(Y, Z)$, la composición es la composición usual entre aplicaciones.

Definición 1.2. Una categoría $\mathcal{S}$ es una *subcategoría* de una categoría $\mathcal{C}$ si:

(i) $\forall X, Y$ objetos de $\mathcal{S}, Mor_{\mathcal{S}}(X,Y) \subset Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

(ii) $\forall X$ objeto de $\mathcal{S}$, el morfismo identidad $1_X \in Mor_{\mathcal{S}}(X,X)$ es el mismo que $1_X \in Mor_{\mathcal{C}}(X,X)$.

(iii) $\forall X, Y, Z$ objetos de $\mathcal{S}, \forall f \in Mor_{\mathcal{S}}(X,Y), \forall g \in Mor_{\mathcal{S}}(Y,Z)$, la composición $gf \in Mor_{\mathcal{S}}(X,Z)$ es la misma que la composición $gf \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Z)$.

(iv) $\forall X$ objeto de $\mathcal{S}$, X es un objeto de $\mathcal{C}$.

Decimos que $\mathcal{S}$ es una *subcategoría plena* de $\mathcal{C}$ si $\forall X, Y$ objetos de $\mathcal{S}$ tenemos que $Mor_{\mathcal{S}}(X,Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Ejemplo 1.2. 1 Las categorías *Grupos*, *Top* y *Ab* son subcategorías de *Sets*.

2 La categoría *Ab* es una subcategoría de *Grupos*.

Definición 1.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, definimos su *categoría opuesta* $\mathcal{C}^{op}$ como la categoría que consiste en:

(i) La clase de objetos es la misma que en $\mathcal{C}$.

(ii) $\forall X, Y$ objetos de $\mathcal{C}^{op}$, $Mor_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = Mor_{\mathcal{C}}(Y,X)$.

(iii) $\forall X, Y, Z$ objetos de $\mathcal{C}^{op}, \forall f^{op} \in Mor_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y), \forall g^{op} \in Mor_{\mathcal{C}^{op}}(Y,Z)$ (donde $f \in Mor_{\mathcal{C}}(Y,X), g \in Mor_{\mathcal{C}}(Z,Y)$), definimos la composición como $g^{op} f^{op} = (fg)^{op}$.

1.2. Funtores *Hom*

Definición 1.4. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías, entonces un *funtor covariante* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste en:

(i) $\forall X$ objeto de $\mathcal{C}, F(X)$ es un objeto de $\mathcal{D}$.

(ii) $\forall X, Y$ objetos de $\mathcal{C}, \forall f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$, F define una aplicación

$$F : Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

$$f \longmapsto F(f).$$

(iii) $\forall X, Y, Z$ objetos de $\mathcal{C}, \forall f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y), \forall g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, entonces

$$F(gf) = F(g)F(f).$$

(iv) $\forall X$ objeto de $\mathcal{C}, 1_X \in Mor_{\mathcal{C}}(X,X)$ el morfismo identidad de X, entonces

$$F(1_X) = 1_{F(X)}.$$

Un *funtor contravariante* F se define de la misma forma, pero intercambiando (ii) y (iii) por:

(ii)' $\forall X, Y$ objetos de $\mathcal{C}, \forall f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$, F define una aplicación

$$F : Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$$

$$f \longmapsto F(f).$$

(iii)' $\forall X, Y, Z$ objetos de $\mathcal{C}, \forall f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y), \forall g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, entonces

$$F(gf) = F(f)F(g).$$

Ejemplo 1.3. 1 ***Funtor*** $Hom(X,-)$

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y X un objeto de $\mathcal{C}$, definimos $Hom(X,-) : \mathcal{C} \to Sets$, que también denotamos por T_X, como:

I. $\forall Y$ objeto de $\mathcal{C}, T_X(Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

II. $\forall Y, Z$ objetos de $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{rcl} T_X : Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \to & Mor_{Sets}(Mor_{\mathcal{C}}(X,Y), Mor_{\mathcal{C}}(X,Z)) \\ f & \mapsto & T_X(f) : Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Mor_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ & & \qquad\qquad h \mapsto fh \end{array}$$

$T_X(f)$ se denomina aplicación inducida por f y la denotamos por f_*.

$Hom(X,-)$ es un funtor covariante.

2 **Funtor contravariante** $Hom(-,X)$

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y X un objeto de $\mathcal{C}$, definimos $Hom(-,X) : \mathcal{C} \to Sets$, que también denotamos por T^X como:

I. $\forall Y$ objeto de $\mathcal{C}$, $T^X(Y) = Mor_{\mathcal{C}}(Y,X)$.

II. $\forall Y, Z$ objetos de $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{rcl} T^X : Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \to & Mor_{Sets}(Mor_{\mathcal{C}}(Z,X), Mor_{\mathcal{C}}(Y,X)) \\ f & \mapsto & T^X(f) : Mor_{\mathcal{C}}(Z,X) \to Mor_{\mathcal{C}}(Y,X) \\ & & \qquad\qquad h \mapsto hf \end{array}$$

$T^X(f)$ se denomina aplicación inducida por f y la denotamos por f^*.

Veamos que T^X es un funtor contravariante:

(i) $\forall Y$ objeto de $\mathcal{C}$, $T^X(Y) = Mor_{\mathcal{C}}(Y, X)$, que por definición de categoría es un conjunto, y por tanto, $T^X(Y)$ es un objeto de *Sets*.

(ii) $\forall Y, Z$ objetos de $\mathcal{C}$, veamos que $T^X : Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to Mor_{Sets}(Mor_{\mathcal{C}}(Z, X), Mor_{\mathcal{C}}(Y, X))$ es una aplicación:

1. $\forall f \in Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, veamos que $f^* \in Mor_{Sets}(Mor_{\mathcal{C}}(Z, X), Mor_{\mathcal{C}}(Y, X))$, es decir, que f es una aplicación:
    1. $\forall h \in Mor_{\mathcal{C}}(Z, X)$, como $f \in Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z) \Rightarrow f^*(h) = hf$ con la composición de $\mathcal{C}$, y por tanto $f^*(h) \in Mor_{\mathcal{C}}(Y, X)$.
    2. Sean $h, h' \in Mor_{\mathcal{C}}(Z, X), h = h' \Rightarrow$ como la composición en $\mathcal{C}$es una aplicación, tenemos que $hf = hf' \Rightarrow f^*(h) = f^*(h')$.

    Por tanto, $f^* \in Mor_{Sets}(Mor_{\mathcal{C}}(Z, X), Mor_{\mathcal{C}}(Y, X))$ es una aplicación.
2. Sean $f, g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z), f = g \Rightarrow \forall h \in Mor_{\mathcal{C}}(Z, X), hf = hg \Rightarrow f^*(h) = g^*(h) \Rightarrow f^* = g^*$

Por lo que $T^X : Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to Mor_{Sets}(Mor_{\mathcal{C}}(Z, X), Mor_{\mathcal{C}}(Y, X))$ es una aplicación.

(iii) $\forall Y, Z, W$ objetos de $\mathcal{C}$, $\forall f \in Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z), \forall g \in Mor_{\mathcal{C}}(Z, W)$, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} T^X(gf) = (gf)* : Mor_{\mathcal{C}}(W, X) & \to & Mor_{\mathcal{C}}(Y, X) \\ h & \mapsto & hgf \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} T^X(f)T^X(g) = f^*g^* : Mor_{\mathcal{C}}(W, X) & \to & Mor_{\mathcal{C}}(Z, X) \to Mor_{\mathcal{C}}(Y, X) \\ h & \mapsto & hg \quad \mapsto (hg)f = hgf \end{array}$$

Entonces, $T^X(gf) = T^X(f)T^X(g)$.

(iv) $\forall Y$ objeto de $\mathcal{C}$, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} T^X(1_Y) : Mor_{\mathcal{C}}(Y, X) & \to & Mor_{\mathcal{C}}(Y, X) \\ h & \mapsto & h1_Y = h \end{array}$$

lo que significa que $T^X(1_Y) = 1_{T^X(Y)}$.

Por lo tanto, $Hom(-, X)$ es un funtor contravariante.

1.3. Transformaciones Naturales

Definición 1.5. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores (covariantes), decimos que $\tau : F \to G$ es una *transformación natural* si:

(i) $\forall X$ objeto de $\mathcal{C}, \exists \tau_X \in Mor_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$.

(ii) $\forall X, Y$ objetos de $\mathcal{C}, \forall f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, $\tau_Y \circ F(f) = G(f) \circ \tau_X$.

Denotaremos la transformación natural τ por

$$\tau = \{\tau_X\}_{X\ objeto\ de\ \mathcal{C}} .$$

Nota 1.1. : Las transformaciones naturales pueden componerse: Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores y $\tau : F \to G, \sigma : G \to H$ transformaciones naturales, definimos $\sigma\tau : S \to U$ como:

$$\sigma\tau = \{(\sigma\tau)_X\}_{X\ objeto\ de\ \mathcal{C}} ,$$

donde $(\sigma\tau)_X = \sigma_X \tau_X$, entonces $\sigma\tau$ es una transformación natural. Veamos esto:

Tenemos que ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "(\sigma\tau)_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "(\sigma\tau)_Y"'] & H(Y) \end{tikzcd}$$

conmuta. Pero este diagrama se puede escribir como

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "G(f)"'] & H(X) \arrow[d, "H(f)"'] \\ F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & G(Y) \arrow[r, "\sigma_Y"'] & H(Y) \end{tikzcd}$$

Por tanto tenemos que

$$(H(f))(\sigma\tau)_X = (H(f))\sigma_X\tau_X = \sigma_Y(G(f))\tau_X = \sigma_Y \tau Y(F(f)) = (\sigma\tau)_Y(F(f)),$$

es decir, el diagrama conmuta.

Capítulo 2

Módulos

2.1. Categoría de Módulos sobre un anillo. Ejemplos

Definición 2.1. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo unitario. Decimos que M es un A-*módulo por la izquierda* si $(M, +)$ es un grupo abeliano y además hay definida una operación externa $\cdot : A \times M \to M$ tal que $\cdot(a, m) = am$ que verifica, $\forall m, m' \in M, \forall a, a' \in A$:

(i) $a(m + m') = am + am'$

(ii) $(a + a')m = am + a'm$

(iii) $(aa')m = a(a'm)$

(iv) $1m = m$

De la misma manera que lo anterior, M es un A-*módulo por la derecha* si existe una operación externa $\cdot : M \times A \to M$ que verifica:

(i) $(m + m')a = ma + m'a$

(ii) $m(a + a') = ma + ma'$

(iii) $m(aa') = (ma)a'$

(iv) $m1 = m$

Si M es un A-módulo por la izquierda, escribiremos A-módulo, y si M es un A-módulo por la derecha, escribiremos módulo-A.

Nota 2.1. Sea M un A-módulo por la izquierda, entonces se tiene, $\forall m \in M, \forall a \in A$:

(i) $0m = 0$.

(ii) $a0 = 0$.

(iii) $(-a)m = a(-m) = -am$.

Ejemplo 2.1. 1. Cualquier A anillo conmutativo se puede ver como un A-módulo y un módulo-A donde el producto externo es el producto definido en A.

2. Sea K un cuerpo, entonces los K-espacios vectoriales son K-módulos y viceversa.

3. Los grupos abelianos son $\mathbb{Z}$-módulos y viceversa.

Definición 2.2. Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo, entonces su *anillo opuesto* A^{op} es $(A, +, \circ)$ donde $\circ : A \times A \to A$ y

$$\circ(a, a') = a \circ a' = a'a$$

Lema 2.1. *1. Sea A un anillo, si M es un A-módulo, entonces M es un módulo-A^{op}.*

2. Sea A un anillo, si M es un módulo-A, entonces M es un A^{op}-módulo.

Demostración. Probaremos sólo el apartado 1. El apartado 2. se prueba de manera análoga.

Definimos el producto externo en A^{op} como

$$\begin{array}{rcl} \cdot : M \times A^{op} & \to & M \\ (m, a) & \mapsto & \cdot(m, a) = m \cdot a = am \end{array}$$

Veamos que M es un módulo-$A^{op}, \forall m, m' \in M, \forall a, a' \in A$:

- M es un grupo abeliano.
- Satisface las condiciones con el producto externo definido:
  (i) $(m + m') \cdot a = a(m + m') = am + am' = m \cdot a + m' \cdot a$.
  (ii) $m \cdot (a + a') = (a + a')m = am + am' = m \cdot a + m \cdot a'$.
  (iii) $m \cdot (a \circ a') = (a \circ a')m = a'am = a'(am) = a'(m \cdot a) = (m \cdot a) \cdot a'$.
  (iv) $m \cdot 1 = 1m = m$.

Por tanto, M es un módulo-A^{op}.

□

Nota 2.2. De aquí en adelante sólo hablaremos de A-módulos teniedo en cuenta el resultado anterior.

Definición 2.3. Sea M un A-módulo y $N \subseteq M$. Decimos que N es un *submódulo* de M si N es un A-módulo con el mismo producto externo que M.

Proposición 2.1. *Sea M un A-módulo y $N \subseteq M, N \neq \emptyset$, entonces N es un submódulo de M si, y sólo si:*

(i) $\forall n, n' \in N : n - n' \in N$,

(ii) $\forall a \in A, \forall n \in N : ax \in N$.

Ejemplo 2.2.

1. Si M es un A-módulo, $\{0\}$ y M son submódulos M llamados submódulos *impropios*. Si N es un submódulo de M y $N \neq M, N \neq \{0\}$, decimos que N es un submódulo *propio* de M.

2. Sea K un cuerpo, entonces los submódulos de los K-módulos son los subespacios vectoriales de los K-espacios vectoriales y viceversa.

3. Los submódulos de los $\mathbb{Z}$-módulos son los subgrupos de los grupos abelianos y viceversa.

4. Sea $(S_i)_{i\in I}$ es una familia de submódulos de un A-módulo M, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} S_i$ es un submódulo de M.

5. En general, la unión de submódulos no es un submódulo ya que si tomamos el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_6$, tenemos que
$$S_1 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$$
$$S_2 = \{\overline{0}, \overline{3}\}$$
son submódulos de $\mathbb{Z}_6$, pero $S_1 \bigcup S_2$ no lo es ya que $\overline{3} - \overline{2} = \overline{1} \notin S_1 \bigcup S_2$.

6. Sea M un A-módulo y sea $X \subseteq M$, entonces
$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{finita} a_i x_i \,/\, a_i \in A, x_i \in X \right\}$$
es un submódulo con la suma y el producto externo definidos en M y se denomina *submódulo generado por el conjunto X.*

   $\langle X \rangle$ es el submódulo de M más pequeño que contiene a X

   Demostración. Sea N submódulo de M tal que $X \subseteq N$, entonces
$$\forall x \in X, x \in N \Rightarrow \forall a \in A, \forall x \in X, ax \in N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{finita} a_i x_i \in N, a_i \in A, x_i \in X \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq N.$$
$\square$

7. Si $M_1, ..., M_n$ son A-módulos, entonces el producto cartesiano $M_1 \times \ldots \times M_n = \prod_{i=1}^{n} M_i$ es un A-módulo con la suma inducida por los M_i,

$$\begin{array}{rcl} + : \prod_{i=1}^{n} M_i \times \prod_{i=1}^{n} M_i & \to & \prod_{i=1}^{n} M_i \\ ((m_i)_{i=1}^n, (m_i')_{i=1}^n) & \mapsto & +((m_i)_{i=1}^n, (m_i')_{i=1}^n)) = (m_i + m_i')_{i=1}^n \end{array}$$

y la operación externa

$$\begin{array}{rcl} \cdot : A \times \prod_{i=1}^{n} M_i & \to & \prod_{i=1}^{n} M_i \\ (a, (m_i)_{i=1}^n) & \mapsto & \cdot(a, (m_i)_{i=1}^n) = (am_i)_{i=1}^n \end{array}$$

En particular, si $M_1, ..., M_n$ son submódulos de M, $M_1 \times \ldots \times M_n$ es un submódulo de M^n.

8. Si $M_1, ..., M_n$ son submódulos de M, entonces

$$M_1 + \ldots + M_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_i \,/\, m_i \in M_i \right\}$$

es un sumódulo de M y se denomina *submódulo suma*.

2.2. A-homomorfismos

Definición 2.4. Sean M, M' A-módulos, entonces un *A-homomorfismo* (u *homomorfismo de A-módulos*) es una aplicación $f : M \to M'$ satisfaciendo, $\forall m, m' \in M, \forall a \in A$:

(i) $f(m + m') = f(m) + f(m')$.

(ii) $f(am) = af(m)$.

Denotamos el conjunto de A-homomorfismos entre M y M' como $Hom_A(M, M')$.

Decimos que f es un *epimorfismo*, *monomorfismo* o *isomorfismo* de A-módulos si f es sobreyectiva, inyectiva o biyectiva respectivamente.

Corolario 2.1. *Podemos definir una categoría donde la clase de objetos son los A-módulos, los conjuntos de morfismos entre dos A-módulos M, M' son los conjuntos $Hom_A(M, M')$ y la composición es la usual para aplicaciones y se denota ${}_AMod$.*

Ejemplo 2.3. 1 Si M, M' son A-módulos, la aplicación identidad

$$\begin{array}{rcl} Id : M & \rightarrow & M \\ m & \mapsto & id(m) = m \end{array}$$

y la aplicación constante nula $0 : M \rightarrow M'$

$$\begin{array}{rcl} 0 : M & \rightarrow & M' \\ m & \mapsto & 0(m) = 0_{M'} \end{array}$$

son A-homomorfismos.

2 Sean $M_1, ..., M_n$ A-módulos, entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f : M_1 \times ... \times M_n & \rightarrow & M_1 + \ldots + M_n \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, ..., x_n) = x_1 + ... + x_n \end{array}$$

es un A-homomorfismo.

Definición 2.5. Sea M un A-módulo y N un submódulo de M, entonces $(M/N, +)$ el grupo abeliano cociente junto con el producto escalar definido $\forall a \in A$

$$a(m + N) = am + N$$

es un A-módulo y se denomina *módulo cociente.*

Se denomina *epimorfismo canónico* al homomorfismo sobre

$$\begin{array}{rcl} e : M & \rightarrow & M/N \\ m & \mapsto & e(m) = m + N \end{array}$$

Definición 2.6. Sean M, M' A-módulos, $f : M \rightarrow M'$ un A-homomorfismo, denotamos $cokerf = M'/imf$.

Nota 2.3. $Ker(f)$ es un submódulo de M y $Im(f)$ es un submódulo de M'.

Teorema 2.1 (Primer Teorema de Isomorfía)**.** *Sean M, M' A-módulos, $f : M \rightarrow M'$ A-homomorfismo, entonces existe un A-isomorfismo*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : M/Ker(f) & \rightarrow & Im(f) \\ m + Ker(f) & \mapsto & \varphi(m + Ker(f)) = f(m) \end{array}$$

Demostración. Como $M/Ker(f)$ y $Im(f)$ son grupos, por el Primer Teorema de Isomorfía para grupos tenemos que φ es un homomorfismo de grupos biyectivo.

Además, $\forall m \in M, \forall a \in A, \varphi(a(m + Ker(f))) = a\varphi(m + Ker(f))$ ya que

$$\varphi(a(m + Ker(f))) = \varphi(am + Ker(f)) = f(am) = af(m) = a\varphi(m + Ker(f)).$$

Por tanto, φ es un A-isomorfismo. □

Teorema 2.2 (Segundo Teorema de Isomorfía)**.** *Sea M A-módulo, N, N' submódulos de M, entonces*

$$N/(N \cap N') \cong (N + N')/N'.$$

Teorema 2.3 (Tercer Teorema de Isomorfía)**.** *Sea M un A-módulo, N, N' submódulos de M tales que $N \subseteq N'$, entonces*

$$(M/N)/(N'/N) \cong M/N'.$$

El Segundo y el Tercer Teorema de Isomorfía son consecuencias directas del Primer Teorema de Isomorfía.

2.3. Funtor Hom

Proposición 2.2. *Sean M, M' A-módulos, entonces $Hom_A(M, M')$ con la suma definida: $\forall f, g \in Hom_A(M, M')$,*

$$\begin{array}{rcl} f + g : M & \to & M' \\ m & \mapsto & (f+g)(m) = f(m) + g(m) \end{array}$$

es un grupo abeliano.

Definición 2.7. Sea A un anillo, el conjunto

$$Z(A) = \{a \in A \ / \ ab = ba, \forall b \in A\}$$

se denomina *centro de A*.

Proposición 2.3. *Si A es un anillo, entonces $Z(A)$ es un subanillo de A.*

Proposición 2.4. *Sea A un anillo, M, M' A-módulos. Entonces $Hom_A(M, M')$ es un $Z(A)$-módulo con las operaciones*

- *Para cualquier $f, g \in Hom_A(M, M'), m \in M : (f + g)(m) = f(m) + g(m)$.*
- *Para cualquier $f \in Hom_A(M, M'), a \in Z(A), m \in M : (af)(m) = f(am)$*

Corolario 2.2. *Si A es conmutativo, $Hom_A(M, N)$ es un A-módulo.*

Definición 2.8. Sean A, B anillos, sea $T :_A Mod \to_B Mod$ un funtor de cualquier varianza. Si $\forall M, M'$ A-módulos, $\forall f, g \in Hom_A(M, M')$:

$$T(f + g) = T(f) + T(g)$$

decimos que T es un *funtor aditivo*.

Proposición 2.5. *Sean A, B anillos y $T :_A Mod \to_B Mod$ un funtor aditivo, entonces:*

(i) Sean M, M' A-módulos, si $0_{Hom(M,M')} : M \to M'$ es el A-homomorfismo nulo, entonces $T(0_{Hom_A(M,M')}) = 0_{Hom_B(T(M),T(M'))}$.

(ii) $T(\{0\}) = \{0\}$

Demostración. (i) Como T es aditivo, tenemos que la aplicación $T : Hom_A(M, M') \to Hom_B(T(M), T(M'))$ es un homomorfismo de grupos y por tanto preserva el elemento neutro, es decir, $T(0_{Hom_A(M,M')}) = 0_{Hom_B(T(M),T(M'))}$.

(ii) Tomemos la aplicación $T : Hom_A(\{0\}, \{0\}) \to Hom_B(T(0), T(0))$. Entonces, por el apartado anterior tenemos

$$0_{Hom_B(T(0),T(0))} = T(0_{Hom_A(\{0\},\{0\})}) = T(Id_{\{0\}}) = Id_{T(0)}.$$

Por tanto tenemos

$$\begin{array}{rcl} Id_{T(0)} = 0_{Hom_B(T(0),T(0))} : T(0) & \to & T(0) \\ x & \mapsto & Id_{T(0)}(x) = x = 0_{Hom_B(T(0),T(0))}(x) = 0 \end{array}$$

es decir, $\forall x \in T(0), x = 0 \Rightarrow T(\{0\}) = \{0\}$.

□

Proposición 2.6. *$\forall M$ A-módulo, los funtores $Hom(M, -)$ y $Hom(-, M)$ son aditivos.*

2.4. Producto directo de módulos

Definición 2.9. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia cualquiera de A-módulos, entonces $\prod_{i\in I} M_i = \{(x_i)_{i\in I} / x_i \in M_i, \forall i \in I\}$ se denomina *Producto Directo de la familia* $\{M_i\}_{i\in I}$, donde $(x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I} \Leftrightarrow \forall i \in I, x_i = y_i$.

Proposición 2.7. *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia cualquiera de A-módulos, entonces:*

(i) *$\prod_{i\in I} M_i$ es un A-módulo con la suma $\forall (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} (x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$ y el producto externo $\forall a \in A, a(x_i)_{i\in I} = (ax_i)_{i\in I}$.*

(ii) *$\forall j \in I$, la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} p_j : \prod_{i\in I} M_i & \to & M_j \\ (x_i)_{i\in I} & \mapsto & p_j((x_i)_{i\in I}) = x_j \end{array}$$

es un epimorfismo de A-módulos que denominamos proyección canónica.

Demostración. (i) $(\prod_{i\in I} M_i, +)$ es un grupo abeliano.

Veamos que el producto externo definido cumple las propiedades. $\forall (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i, \forall a, a' \in A$:

(i) $a((x_i)_{i\in I}+(y_i)_{i\in I})=a(x_i)_{i\in I}+a(y_i)_{i\in I}$:

$$a((x_i)_{i\in I}+(y_i)_{i\in I})=a(x_i+y_i)_{i\in I}=(a(x_i+y_i))_{i\in I}=$$
$$=(ax_i+ay_i)_{i\in I}=(ax_i)_{i\in I}+(ay_i)_{i\in I}=a(x_i)_{i\in I}+a(y_i)_{i\in I}$$

(ii) $(a+a')(x_i)_{i\in I}=a(x_i)_{i\in I}+a'(x_i)_{i\in I}$:

$$(a+a')(x_i)_{i\in I}=((a+a')x_i)_{i\in I}=$$
$$=(ax_i+a'x_i)_{i\in I}=(ax_i)_{i\in I}+(a'x_i)_{i\in I}=a(x_i)_{i\in I}+a'(x_i)_{i\in I}$$

(iii) $(aa')(x_i)_{i\in I}=a(a'(x_i)_{i\in I})$:

$$(aa')(x_i)_{i\in I}=((aa')x_i)_{i\in I}=$$
$$=(a(a'x_i))_{i\in I}=a(a'x_i)_{i\in I}=a(a'(x_i)_{i\in I})$$

(iv) $1(x_i)_{i\in I}=(1x_i)_{i\in I}=(x_i)_{i\in I}$

Por tanto, $\prod\limits_{i\in I} M_i$ es un A-módulo.

(ii) Veamos ahora que p_j es un epimorfismo de A-módulos $\forall j\in I$. Sean $(x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}\in \prod\limits_{i\in I} M_i, \forall a\in A$,

(i) $p_j((x_i)_{i\in I}+(y_i)_{i\in I})=p_j((x_i)_{i\in I})+p_j((y_i)_{i\in I})$:

$$p_j((x_i)_{i\in I}+(y_i)_{i\in I})=p_j((x_i+y_i)_{i\in I})=x_j+y_j=p_j((x_i)_{i\in I})+p_j((y_i)_{i\in I})$$

(ii) $p_j(a(x_i)_{i\in I})=ap_j((x_i)_{i\in I})$:

$$p_j(a(x_i)_{i\in I})=p_j((ax_i)_{i\in I})=ax_j=a(x_j)=ap_j((x_i)_{i\in I})$$

p_j es sobreyectiva ya que $\forall x_j\in M_j, p_j(y)=x_j$, donde $y=(y_i)_{i\in I}$ con $y_i=x_i, i\neq j, y_j=x_j$.

□

Proposición 2.8 (Propiedad Fundamental del Producto Directo)**.** *Dada $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos, $\left(\prod_{i\in I} M_i,\{p_i\}_{i\in I}\right)$ verifica la siguiente "propiedad universal":*
$\forall M$ A-módulo y $\forall\{p'_i\}_{i\in I}$ familia de A-homomorfismos $p'_i: M\to M_i$ entonces $\exists | h\in Hom_A(M,\prod_{i\in I} M_i)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "p_i"] & M_i \\
M \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "p'_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Es decir, existe un único $h\in Hom_A(M,\prod_{i\in I} M_i)$ tal que, para todo $i\in I, p_i\circ h=p'_i$.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} h : M &\to \prod_{i\in I} M_i \\ x &\mapsto h(x) := (p_i'(x))_{i\in I} \end{aligned}$$

Veamos que h está bien definida. Sean $x, x' \in M, x = x'$:

$$h(x) = (p_i'(x))_{i\in I} = (p_i'(x'))_{i\in I} = h(x')$$

h es un homomorfismo. En efecto, $\forall x, x' \in M, \forall a \in A$:

(i) $h(x+x') = (p_i'(x+x'))_{i\in I} = (p_i'(x)+p_i'(x'))_{i\in I} = (p_i'(x))_{i\in I}+(p_i'(x'))_{i\in I} = h(x)+h(x')$

(ii) $h(ax) = (p_i'(ax))_{i\in I} = (ap_i'(x))_{i\in I} = a(p_i'(x))_{i\in I} = ah(x)$

Además, $\forall x \in M$,

$$p_i \circ h(x) = p_i((p_i'(x))_{i\in I}) = p_i'(x)$$

Comprobemos ahora la unicidad:

Sea $h' : M \to \prod_{i\in I} M_i$ homomorfismo tal que $p_i \circ h' = p_i'$, entonces $\forall x \in M, \forall i \in I$, si $h(x) = (x_i)_{i\in I}, h'(x) = (y_i)_{i\in I}$

$$p_i \circ h' = p_i' = p_i \circ h \Rightarrow p_i((x_i)_{i\in I}) = p_i((y_i)_{i\in I}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_i = y_i, \forall i \in I \Rightarrow (x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I} \Rightarrow h(x) = h'(x) \Rightarrow h = h'$$

□

Teorema 2.4. *Dada $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos, $\left(\prod_{i\in I} M_i, \{p_i\}_{i\in I}\right)$ son los únicos que verifican la propiedad universal anterior.*

Es decir, si $(M, \{p_i'\}_{i\in I})$ con M un A-módulo, $\forall i \in I, p_i' \in Mod_A(M, M_i)$ verifica la proposición anterior, entonces existe un único isomorfismo de A-módulos $\varphi : M \to \prod_{i\in I} M_i$ tal que $p_i \circ \varphi = p_i', \forall i \in I$.

Demostración. Por la proposición anterior tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "p_i"] & M_i \\ M \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "p_i'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_i'"] & M_i \\ \prod_{i\in I} M_i \arrow[u, "\varphi'"] \arrow[ur, "p_i"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces, componiendo los diagramas tenemos

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "p_i"] & M_i \\ \prod_{i\in I} M_i \arrow[u, "\varphi\circ\varphi'"] \arrow[ur, "p_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_i'"] & M_i \\ M \arrow[u, "\varphi'\circ\varphi"] \arrow[ur, "p_i'"'] & \end{tikzcd}$$

y estos diagramas también son conmutativos ya que:

- $p_i \circ (\varphi \circ \varphi') = (p_i \circ \varphi) \circ \varphi' = p'_i \circ \varphi' = p_i$
- $p'_i \circ (\varphi' \circ \varphi) = (p'_i \circ \varphi') \circ \varphi = p_i \circ \varphi = p'_i$

Además, como $p_i \circ 1_{\prod_{i\in I} M_i} = p_i$ y $p'_i \circ 1_M = p'_i$, por la unicidad demostrada en la proposición anterior tenemos:

$$\varphi \circ \varphi' = 1_{\prod_{i\in I} M_i}, \quad \varphi' \circ \varphi = 1_M$$

Por tanto, φ es un isomorfismo de A-módulos y $p_i \circ \varphi = p'_i$. □

2.5. Suma Directa de módulos

Proposición 2.9. *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos, entonces:*

(i) El subconjunto de $\prod_{i\in I} M_i$:

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \left\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \;/\; x_i = 0 \forall i \in I - J, J\, finito\right\}$$

es un submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$ llamado Suma Directa de $\{M_i\}_{i\in I}$.

(ii) $\forall j \in I$, la aplicación

$$\begin{aligned} q_j : M_j &\rightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i \\ x &\mapsto q_j(x) = (x_i)_{i\in I}, x_j = x, x_i = 0 \forall j \neq j \end{aligned}$$

es un monomorfismo de A-módulos que denominamos inmersión canónica.

Demostración. (i) Veamos que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es un submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$. Sean $(x_i)_{i\in I}, (x'_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i, a \in A$:

(i) $(x_i)_{i\in I} - (x'_i)_{i\in I} = (x_i - x'_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$.

(ii) $a(x_i)_{i\in I} = (ax_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$.

(ii) Veamos que q_j es un monomorfismo de A-módulos $\forall j \in I$

- q_j es un homomorfismo, ya que $\forall x, y \in M_j, \forall a \in A$:
  (i) $q_j(x + y) = (x_i + y_i)_{i\in I} = (x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = q_j(x) + q_j(y)$
  (ii) $q_j(ax) = (x_i)_{i\in I}$ tal que $x_j = ax, x_i = 0 \forall i \neq j \Rightarrow q_j(ax) = a(x_i)_{i\in I}$ tal que $x_j = x, x_i = 0 \forall i \neq j$, por tanto, $q_j(ax) = aq_j(x)$.
- q_j es inyectiva ya que si $q_j(x) = 0 = (x_i)_{i\in I}$ donde $x_i = 0, \forall i \in I$, entonces $x = 0$.

□

Corolario 2.3. *En el caso finito, $I = \{1, \ldots, n\}$,*

$$\prod_{i \in I} M_i = M_1 \times \ldots \times M_n = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

$\bigoplus_{i \in I} M_i$ *es un concepto* dual *de* $\prod_{i \in I} M_i$*.*

Proposición 2.10 (Propiedad Universal de la Suma Directa)**.** *Dada $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de A-módulos, $\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, \{q_i\}_{i \in I}\right)$ verifica la siguiente "propiedad universal":*
$\forall M$ A-módulo, $\forall \{q_i'\}_{i \in I}$ familia de A- homomorfismos $q_i' : M_i \to M$ entonces $\exists | h \in Hom_A(\bigoplus_{i \in I} M_i, M)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[dr, "q_i'"'] & \bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[d, dashed, "h"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Es decir, existe un único $h \in Hom_A(\bigoplus_{i \in I} M_i, M)$ tal que, para todo $i \in I$:

$$h \circ q_i = q_i'.$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} h : \bigoplus_{i \in I} M_i \quad &\to \quad M \\ (x_i)_{i \in I} \quad &\mapsto \quad h((x_i)_{i \in I}) = \sum_{j \in J} q_j'(x_i) \end{aligned}$$

Veamos que h está bien definida. Sean $(x_i)_{i \in I}, (x_i')_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i, (x_i)_{i \in I} = (x_i')_{i \in I}$:

$$h((x_i)_{i \in I}) = \sum_{j \in J} q_j'(x_j) = \sum_{j \in J} q_j'(x_j') = h((x_i')_{i \in I})$$

h es un homomorfismo. En efecto, $\forall (x_i)_{i \in I}, (x_i')_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i, \forall a \in A$:

(i) $h((x_i)_{i \in I} + (x_i')_{i \in I}) = h((x_i + x_i')_{i \in I}) = \sum_{j \in J} q_j'(x_j + x_j') = \sum_{j \in J} (q_j'(x_j) + q_j'(x_j')) = \sum_{j \in J} q_j'(x_j) + \sum_{j \in J} q_j'(x_j') = h((x_i)_{i \in I}) + h((x_i')_{i \in I})$

(ii) $h(a(x_i)_{i \in I}) = h((ax_i)_{i \in I}) = \sum_{j \in J} q_j'(ax_j) = \sum_{j \in J} aq_j'(x_j) = a \sum_{j \in J} q_j'(x_j) = ah((x_i)_{i \in I})$

Además $\forall x \in M_l, l \in I$, como $q_i(x) = (x_i)_{i \in I}$ con $x_i = 0$ si $i \neq l$ y $x_i = x$ si $i = l$:

$$h \circ q_i(x) = h(q_i(x)) = h((x_i)_{i \in I}) = \sum_{j \in J} q_j'(x_j) = q_l'(x)$$

Comprobemos ahora la unicidad:

Sea $h' : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ homomorfismo tal que $h' \circ q_i = q_i'$, entonces, $\forall (x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i, (x_i)_{i\in I} = \sum_{j\in J}(\cdots, 0, x_j, 0, \cdots)$:

$$h'((x_i)_{i\in I}) = h'\left(\sum_{j\in J}(\cdots, 0, x_j, 0, \cdots)\right) = \sum_{j\in J} h'((\cdots, 0, x_j, 0, \cdots)) =$$

$$= \sum_{j\in J} h'(q_j(x_j) = \sum_{j\in J} q_j' = \sum_{j\in J} h(q_j(x_j) = h((x_i)_{i\in I})$$

Por tanto, $h = h'$. □

Teorema 2.5. *Dada $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos, $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \{q_i\}_{i\in I}\right)$ son los únicos que verifican la propiedad universal anterior.*

Es decir, si $(M, \{q_i'\}_{i\in I})$ con M un A-módulo, $\forall i \in I, q_i' \in Mod_A(M, M_i)$ verifica la proposición anterior, entonces existe un único isomorfismo de A-módulos $\varphi : M \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ tal que $\forall i \in I : \varphi \circ q_i = q_i'$.

Demostración. Por la proposición anterior tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "q_i'"] \arrow[dr, "q_i"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ & \bigoplus_{i\in I} M_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[dr, "q_i'"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[d, "\varphi'"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Entonces, componiendo los diagramas tenemos:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[dr, "q_i"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[d, "\varphi\circ\varphi'"] \\ & \bigoplus_{i\in I} M_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "q_i'"] \arrow[dr, "q_i'"'] & M \arrow[d, "\varphi'\circ\varphi'"] \\ & M \end{tikzcd}$$

que también son conmutativos.

Como $1_{\bigoplus_{i\in I} M_i} \circ q_i = q_i$ y $1_M \circ q_i' = q_i'$, por la unicidad probada en la proposición anterior tenemos que

$$\varphi \circ \varphi' = 1_{\bigoplus_{i\in I} M_i}, \quad \varphi' \circ \varphi = 1_M$$

Por lo tanto φ es un isomorfismo de A-módulos y $\varphi \circ q_i = q_i'$. □

Proposición 2.11. *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos, entonces:*

(i) $\forall i \in I, p_i \circ q_j = \delta_{ij}$, *es decir,* $p_i \circ q_j = 1_{M_i}$ *si* $i = j$ *y* $p_i \circ q_j = 0$ *si* $i \neq j$.

(ii) *Si* $x \in \bigoplus_{i\in I} M_i \Rightarrow \exists J$ *finito* : $x = \sum_{j\in J}(q_j \circ p_j)(x)$

Demostración. (i) $\forall x \in M_j, j \in I$, tenemos que $q_j(x) = (x_i)_{i\in I}$ donde $x_j = x$ y $x_i = 0, \forall i \neq j \Rightarrow (p_l \circ q_j)(x) = p_l((x_i)_{i\in I})$ que es igual a 0 si $l \neq j$ ó es igual a x si $l = j, \forall l \in I$.

(ii) Si $x \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ entonces $x = (x_i)_{i\in I}$ con $x_i = 0, \forall i \in I - J, J$ suconjunto finito de I, se tiene que

$$x = \sum_{j\in J}(\cdots, 0, x_j, 0, \cdots) = \sum_{j\in J} q_j(x_j) = \sum_{j\in J} q_j(p_j(x)) = \sum_{j\in J}(q_j \circ p_j)(x)$$

□

2.6. A-homomorfismos entre familias de A-módulos

Proposición 2.12. *Sean $\{M_i\}_{i\in I}, \{M_i'\}_{i\in I}$ familias de A-módulos, $f_i \in Hom_A(M_i, M_i')$, $\forall i \in I$. Entonces*

$$\begin{aligned} \prod f_i : \prod_{i\in I} M_i &\to \prod_{i\in I} M_i' \\ (x_i)_{i\in I} &\mapsto \prod f_i((x_i)_{i\in I}) = (f_i(x_i))_{i\in I} \end{aligned}$$

es un A-homomorfismo.

Proposición 2.13. *Sean $\{M_i\}_{i\in I}, \{M_i'\}_{i\in I}$ familias de A-módulos, $f_i \in Hom_A(M_i, M_i')$, $\forall i \in I$. Entonces:*

(i) $Im(\prod f_i) = \prod Im(f_i)$.

(ii) $Ker(\prod f_i) = \prod Ker(f_i)$.

Proposición 2.14. *Sean $\{M_i\}_{i\in I}, \{M_i'\}_{i\in I}$ familias de A-módulos, $f_i \in Hom_A(M_i, M_i')$, $\forall i \in I$. f_i es un epimorfismo (resp. monomorfismo) si, y sólo si $\prod f_i$ es un epimorfismo (resp. monomorfismo).*

Proposición 2.15. *Sean $\{M_i\}_{i\in I}, \{M_i'\}_{i\in I}$ familias de A-módulos, $f_i \in Hom_A(M_i, M_i')$, $\forall i \in I$. Entonces*

$$\begin{aligned} \oplus f_i : \bigoplus_{i\in I} M_i &\to \bigoplus_{i\in I} M_i' \\ (x_i)_{i\in I} &\mapsto \oplus f_i((x_i)_{i\in I}) = (f_i(x_i))_{i\in I} \end{aligned}$$

es un A-homomorfismo.

Proposición 2.16. *Sean $\{M_i\}_{i\in I}, \{M_i'\}_{i\in I}$ familias de A-módulos, $f_i \in Hom_A(M_i, M_i')$, $\forall i \in I$. f_i es un epimorfismo (resp. monomorfismo) si, y sólo si $\oplus f_i$ es un epimorfismo (resp. monomorfismo).*

Capítulo 3

Sucesiones exactas de A-módulos

3.1. Sucesiones exactas.

Definición 3.1. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos y sean $f_i \in Hom_A(M_i, M_{i+1})$, $\forall i \in I$. Una sucesión finita de A-módulos y homomorfismos de A-módulos

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

se llama *sucesión exacta* si $Im(f_{i-1}) = Ker(f_i), \forall i \in I$.

Nota 3.1. Si M, N son A-módulos, no hace falta numerar los homomorfismos $0 \xrightarrow{i_M} M$ o $N \xrightarrow{j_N} 0$, ya que existe un único homomorfismo de A-módulos $i_M : 0 \to M$ tal que $i_M(0) = 0$ y un único homomorfismo de A-módulos constante $j_N : N \to 0$ con $j_N(n) = 0$, para todo $n \in N$.

Proposición 3.1. *Sean M, M', M'' A-módulos y sean $f, h \in Hom_A(M, M'), g \in Hom_A(M', M'')$:*

(i) Una sucesión $0 \xrightarrow{i_M} M \xrightarrow{f} M'$ es exacta si y solo si f es inyectiva.

(ii) Una sucesión $M' \xrightarrow{g} M'' \xrightarrow{j_{M''}} 0$ es exacta si y sólo si g es sobreyectiva.

(iii) Una sucesión $0 \xrightarrow{i_M} M \xrightarrow{h} M' \xrightarrow{j_{M'}} 0$ es exacta si y sólo si h es un isomorfismo.

Demostración. (i) Tenemos que $Ker(f) = Im(i_M)$ e $Im(i_M) = \{0\} \Rightarrow Kerf = \{0\} \Rightarrow$ f es inyectiva.

Si f es inyectiva $\Rightarrow Ker(f) = \{0\} = Im(i_M)$ y por tanto la sucesión es exacta.

(ii) Tenemos que $Im(g) = Ker(j_{M''}) = M'' \Rightarrow g$ es sobre.

Si g es sobre $\Rightarrow Im(g) = M''Ker(j_{M''}) \Rightarrow$ la sucesión es exacta.

(iii) Es consecuencia directa de los apartados anteriores

□

Definición 3.2. Una sucesión exacta se denomina *corta* si es de la forma

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

Proposición 3.2. *(i) Sea la sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *entonces* $M' \cong Im(f)$ *y* $M/Im(f) \cong M''$.

(ii) Si $T \subseteq S \subseteq M$ *son* A*-módulos, entonces existe una sucesión exacta:*

$$0 \longrightarrow S/T \xrightarrow{i} M/T \xrightarrow{g} M/S \longrightarrow 0$$

Demostración. (i) Como $Im(i_M) = Ker(f) = \{0\}$, por el Primer Teorema de Isomorfía tenemos que $M/\{0\} \cong Im(f) \Rightarrow M \cong Im(f)$.

Además, como $Im(g) = Ker(j_{M''} = M''$ y $Im(f) = Ker(g)$, por el Primer Teorema de Isomorfía tenemos que $M'/Ker(g) \cong Im(g) \Rightarrow M'/Im(f) \cong M''$.

(ii) Sea

$$\begin{array}{rcl} g : M/T & \to & M/S \\ m+T & \mapsto & g(m+T) = m+S \end{array}$$

g está bien definida ya que si $m+T, m'+T \in M/T, m+T = m'+T$ entonces $m - m' \in T \Rightarrow m - m' \in S\,(T \subseteq S) \Rightarrow g(m) = m+S = m'+S = g(m')$.
Además $g \in Hom_A(M/T, M/S)$ ya que, para todo $m+T, m'+T \in M/T, a \in A$:

(i) $g((m+T)+(m'+T)) = g((m+m')+T) = (m+m')+S =$
$= (m+S)+(m'+S) = g(m+T)+g(m'+T)$.

(ii) $g(a(m+T)) = g(am+T) = am+S = a(m+S) = ag(m+T)$.

g es sobre pues para cualquier $m+S \in M/S, g(m+T) = m+S$ ya que $T \subseteq S$.

Si tomamos

$$\begin{array}{rcl} i : S/T & \to & M/T \\ s+T & \mapsto & i(s+T) = s+T \end{array}$$

la inclusión, tenemos que $Im(i) = S/T$ y además

$$\begin{array}{rcl} Ker(g) & = & \{m+T \in M/T \;/\; g(m+T) = 0+S\} \\ & = & \{m+T \in M/T \;/\; m+S = 0+S\} \\ & = & \{m+T \in M/T \;/\; m \in S\} = S/T \end{array}$$

Por tanto, la sucesión es exacta.

□

Corolario 3.1 (Tercer Teorema de Isomorfía)**.** *Si* $T \subseteq S \subseteq M$ *son* A*-módulos, entonces*

$$(M/S)/(S/T) \cong M/T.$$

Demostración. Obtenemos el resultado al aplicar el apartado (i) en el apartado (ii) de la proposición anterior. $\square$

Proposición 3.3. *Sea la sucesión de A-módulos* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$*, donde* f *y* g *son A-homomorfismos. Entonces* $Im(f) \subseteq Ker(g)$ *si y sólo si* $g \circ f = 0$.

Corolario 3.2. *En las condiciones de las proposición anterior, si* $F :_A Mod \to_B Mod$ *es un funtor aditivo, si* $Im(f) \subseteq Ker(g)$ *entonces* $Im(F(f)) \subseteq Ker(F(g))$.

Proposición 3.4. *Sean* $\{M_i\}_{i\in I}, \{M_i'\}_{i\in I}, \{M_i''\}_{i\in I}$ *familias de A-módulos, y sean* $f_i \in Hom_A(M_i', M_i)$*,* $\forall i \in I$*,* $g_i \in Hom_A(M_i, M_i'')$*,* $\forall i \in I$*. Entonces son equivalentes:*

(i) La sucesión

$$0 \longrightarrow M_i' \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M_i'' \longrightarrow 0$$

es exacta $\forall i \in I$.

(ii) La sucesión

$$0 \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i' \xrightarrow{\prod f_i} \prod_{i\in I} M_i \xrightarrow{\prod g_i} \prod_{i\in I} M_i'' \longrightarrow 0$$

es exacta.

(iii) La sucesión

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i' \xrightarrow{\oplus f_i} \bigoplus_{i\in I} M_i \xrightarrow{\oplus g_i} \bigoplus_{i\in I} M_i'' \longrightarrow 0$$

es exacta.

Proposición 3.5 (Lema de los Cinco)**.** *Sean* h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 *A-homomorfismos, y sea el diagrama conmutativo con filas exactas*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & M_5 \arrow[d, "h_5"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"'] & N_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_3 \arrow[r, "g_3"'] & N_4 \arrow[r, "g_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

(i) Si h_2 *y* h_4 *son sobreyectivas y* h_5 *es inyectiva entonces* h_3 *es sobreyectiva.*

(ii) Si h_2 *y* h_4 *son inyectivas y* h_1 *es sobreyectiva entonces* h_3 *es inyectiva.*

(iii) Si h_1, h_2, h_4 *y* h_5 *son isomorfismos entonces* h_3 *es un isomorfismo.*

Demostración. (i) Sea $n_3 \in N_3 \overset{hip.}{\Rightarrow} \exists m_4 \in M_4 : g_3(n_3) = h_4(m_4) \Rightarrow g_4 \circ g_3(n_3) = $
$= g_4 \circ h_4(m_4) \overset{4c.c.}{=} h_5 \circ f_4(m_4)$.

Como las filas del diagrama son exactas, tenemos $g_4 \circ g_3(n_3) = 0 \Rightarrow h_5 \circ f_4(m_4) = 0$ $\overset{hip.}{\Rightarrow} f_4(m_4) = 0 \Rightarrow m_4 \in Ker(f_4) = Im(f_3) \Rightarrow \exists m_3 \in M_3 : f_3(m_3) = m_4$.

Entonces $h_4(m_4) = h_4 \circ f_3(m_3) \overset{3c.c.}{=} g_3 \circ h_3(m_3) \Rightarrow g_3 \circ h_3(m_3) = g_3(n_3) \Rightarrow g_3(h_3(m_3) - n_3) = 0 \Rightarrow h_3(m_3) - n_3 \in Ker(g_3) = Im(g_2) \Rightarrow \exists n_2 \in N_2 : g_2(n_2) = h_3(m_3) - n_3$.

Como h_2 es sobre, $\exists m_2 \in M_2 : h_2(m_2) = n_2 \Rightarrow g_2(n_2) = g_2 \circ h_2(m_2) \overset{2c.c.}{=} h_3 \circ f_2(m_2) = h_3(m_3) - n_3 \Rightarrow h_3(m_3 - f_2(m_2)) = n_3$.

Por tanto, si $m = m_3 - f_2(m_2) \in M_3$ entonces $h_3(m) = n_3$ por lo que h_3 es sobre.

(ii) Sea $m_3 \in Ker(h_3) \Rightarrow g_3 \circ h_3(m_3) \overset{3c.c.}{=} h_4 \circ f_3(m_3) = 0 \overset{hip.}{\Rightarrow} f_3(m_3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m_3 \in Ker(f_3) = Im(f_2) \Rightarrow \exists m_2 \in M_2 : f_2(m_2) = m_3$.

Entonces, $h_3(m_3) = h_3 \circ f_2(m_2) \overset{2c.c.}{=} g_2 \circ h_2(m_2) = 0 \Rightarrow h_2(m_2) \in Ker(g_2) = = Im(g_1) \Rightarrow \exists n_1 \in N_1 : g_1(n_1) = h_2(m_2)$.

Como h_1 es sobre, $\exists m_1 \in M_1 : h_1(m_1) = n_1 \Rightarrow h_2(m_2) = g_1(n_1) = g_1 \circ h_1(m_1) \overset{1c.c.}{=} = h_2 \circ f_1(m_1) \Rightarrow h_2(f_1(m_1) - m_2) = 0 \Rightarrow f_1(m_1) - m_2 \in Ker(h_2) \overset{hip.}{\Rightarrow} f_1(m_1) - m_2 = = 0 \Rightarrow f_1(m_1) = m_2 \Rightarrow m_3 = f_2(m_2) = f_2 \circ f_1(m_1) = 0 \Rightarrow m_3 = 0$

Por tanto h_3 es inyectiva.

(iii) Consecuencia de los dos apartados anteriores.

□

Nota 3.2. Este método de demostración se denomina *diagram chasing* ("persecución del diagrama).

Corolario 3.3. *En las condiciones del resultado anterior, h_3 es un isomorfismo si h_2 y h_4 son isomorfismos, h_5 es inyectiva y h_1 es sobreyectiva.*

Proposición 3.6. *Sea el diagrama con cuadrados conmutativos*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g_1"'] & N \arrow[r, "g_2"'] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cuyas lineas son suceciones de A-módulos y A-homomorfismos y α, β, γ son isomorfismos. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{f_2} M'' \longrightarrow 0$$

es exacta si, y sólo si la sucesión

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{g_1} N \xrightarrow{g_2} N'' \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Si la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{f_2} M'' \longrightarrow 0$$

es exacta, tenemos que f_1 es inyectiva, f_2 es sobreyectiva y $Im(f_1) = Ker(f_2)$.

Primero veamos que g_1 es inyectiva:

Sea $n' \in N' \Rightarrow \exists m' \in M' : n' = \alpha(m')$. Si $g_1(n') = 0$ entonces

$$g_1(\alpha(m)) = g_1 \circ \alpha(m') \overset{1c.c.}{=} \beta \circ f_1(m') = \beta(f_1(m')) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(m') = 0 \overset{hip.}{\Rightarrow} m' = 0 \Rightarrow n' = \alpha(m') = 0$$

y por tanto, g_1 es inyectiva.

g_2 es sobreyectiva ya que si $n'' \in N''$, entonces

$$\exists m'' \in M'' : \gamma(m'') = n'' \overset{hip.}{\Rightarrow} \exists m \in M : f_2(m) = m'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n'' = \gamma(f_2(m)) = \gamma \circ f_2(m) \overset{2c.c.}{=} g_2 \circ \beta(m)) = g_2(\beta(m))$$

Para ver que $Im(g_1) = Ker(g_2)$ haremos el doble contenido:

- Sea $n \in Im(g_1)$, entonces

$$\exists n' \in N' : g(n') = n \Rightarrow \exists m' \in M' : \alpha(m') = n' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_2(n) = g_2(g_1(n')) = g_2(g_1(\alpha(m'))) = g_2(g_1 \circ \alpha(m')) \overset{1c.c.}{=}$$

$$= g_2(\beta \circ f_1(m')) = (g_2 \circ \beta) \circ f_1(m') \overset{2c.c.}{=} (\gamma \circ f_2) \circ f_1(m') =$$

$$= \gamma((f_2 \circ f_1)(m')) \overset{hip.}{=} \gamma(0) = 0 \Rightarrow n \in Ker(g_2)$$

  y por tanto $Im(g_1) \subseteq Ker(g_2)$.

- Sea $n \in Ker(g_2)$, entonces

$$\exists m \in M : \beta(m) = n \Rightarrow g_2(\beta(m)) = g_2 \circ \beta(m) \overset{2c.c.}{=} \gamma \circ f_2(m) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2(m) = 0 \Rightarrow m \in Ker(f_2) = Im(f_1) \Rightarrow \exists m' \in M' : f_1(m') = m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \beta(m) = \beta(f_1(m')) = \beta \circ f_1(m') \overset{1c.c.}{=} g_1 \circ \alpha(m') = g_1(\alpha(m')) \Rightarrow n \in Im(g_1)$$

  y por tanto, $Ker(g_2) \subseteq Im(g_1)$.

Por consiguiente, la sucesión

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{g_1} N \xrightarrow{g_2} N'' \longrightarrow 0$$

es exacta.

Por otro lado, si la sucesión

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{g_1} N \xrightarrow{g_2} N'' \longrightarrow 0$$

es exacta, tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] & N \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta^{-1}"] & N'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^{-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f_1"'] & M \arrow[r, "f_2"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tiene cuadrados conmutativos, ya que $\forall n' \in N', \exists m' \in M' : \alpha(m') = n'$, entonces

$$\beta^{-1} \circ g_1(n') = \beta^{-1} \circ g_1(\alpha(m')) = \beta^{-1}(g_1 \circ \alpha(m')) = \beta^{-1}(\beta \circ f_1(m')) =$$

$$= (\beta^{-1} \circ \beta)(f_1(m')) = f_1(m') = f_1(\alpha^{-1}(n')) = f_1 \circ \alpha^{-1}(n')$$

y $\forall n \in N, \exists m \in M : \beta(m) = n$, entonces

$$\gamma^{-1} \circ g_2(n) = \gamma^{-1} \circ g_2(\beta(m)) = \gamma^{-1}(g_2 \circ \beta(m)) =$$

$$= \gamma^{-1}(\gamma \circ f_2(m)) = \gamma^{-1} \circ \gamma(f_2(m)) = f_2(m) = f_2(\beta^{-1}(n)) = f_2 \circ \beta^{-1}(n)$$

Por tanto, estamos en la situación que ya hemos probado. □

3.2. Sucesiones escindidas.

Si M, M' son A-módulos, la sucesión

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{q_1} M \oplus M' \xrightarrow{p_2} M' \longrightarrow 0$$

es exacta siendo

$$\begin{array}{rcl} q_1 : M & \rightarrow & M \oplus M' \\ x & \mapsto & q_1(x) = (x, 0) \end{array}$$

la inmersión canónica y

$$\begin{array}{rcl} p_2 : M \oplus M' & \rightarrow & M' \\ (x, y) & \mapsto & p_2((x, y)) = y \end{array}$$

la proyección canónica.

En efecto, tenemos que q_1 es inyectiva y p_2 es sobrectiva. Además $Im(q_1) = M \times \{0\}$ y

$$\begin{array}{rcl} Ker(p_2) & = & \{(x, y) \in M \oplus M' \ / \ p_2((x, y)) = 0\} \\ & = & \{(x, y) \in M \oplus M' \ / \ y = 0\} = \\ & = & M \times \{0\} = Im(q_1) \end{array}$$

Definición 3.3. Sea la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M' \longrightarrow 0$$

Si existe un isomorfismo $\varphi \in Hom_A(M, M' \oplus M'')$ tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{M'}"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "1_{M''}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "q_1"'] & M' \oplus M'' \arrow[r, "p_2"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

decimos que la sucesión exacta dada es *escindida*

Es decir, la sucesión es escindida si φ satisface

$$\varphi \circ f = q_1 \circ 1_{M'} \text{ y } 1_{M''} \circ g = p_2 \circ \varphi$$

Teorema 3.1 (Teorema de caracterización de sucesiones escindidas)**.** *Sea* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta, entonces son equivalentes:*

(i) La sucesión es exacta.

(ii) Existe $f' \in Hom_A(M, M')$ *tal que* $f' \circ f = 1_{M'}$.

(iii) Existe $g' \in Hom_A(M'', M)$ *tal que* $g \circ g' = 1_{M''}$.

Demostración. Primero veamos que (i) es equivalente a (ii):

- Si la sucesión es escindida y φ es el homomorfismo de A-módulos que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{M'}"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "1_{M''}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "q_1"'] & M' \oplus M'' \arrow[r, "p_2"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

  podemos definir el homomorfismo de A-módulos $f' = 1_{M'} \circ p_1 \circ \varphi$, y por la conmutatividad del diagragrama se tiene

$$f' \circ f = 1_{M'} \circ p_1 \circ \varphi \circ f = p_1 \circ q_1 = 1_{M'}.$$

- Supongamos ahora que existe $f' \in Hom_A(M, M')$ tal que $f' \circ f = 1_{M'}$.

  Como $M' \oplus M'' = M' \times M''$, tenemos que $(M' \oplus M'', \{p_1, p_2\})$ verifica la Propiedad Universal del producto directo de A-módulos, y por tanto $\exists | \varphi \in Hom_A(M, M' \oplus M'')$ que hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} M' \oplus M'' \arrow[r, "p_1"] & M' \\ M \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M' \oplus M'' \arrow[r, "p_2"] & M'' \\ M \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, que $f' = p_1 \circ \varphi$ y $g = p_2 \circ \varphi$.

Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{M'}"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "1_{M''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "q_1"'] & M' \oplus M'' \arrow[r, "p_2"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmuta.

El cuadrado de la derecha conmuta ya que $1_{M''} \circ g = g = p_2 \circ \varphi$. Además, de nuevo por la Propiedad Universal del producto directo, tenemos que q_1 es el único homomorfismo que hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
M' \oplus M'' \arrow[r, "p_1"] & M' \\
M' \arrow[u, "q_1"] \arrow[ur, "1_{M'}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M' \oplus M'' \arrow[r, "p_2"] & M'' \\
M' \arrow[u, "q_1"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

y por tanto, como $f' \circ f = p_1 \circ \varphi \circ f = 1_{M'}$, tenemos que $\varphi \circ f = q_1 = q_1 \circ 1_{M'}$, es decir, el cuadrado de la izquierda conmuta.

Como $1_0, 1_{M'}$ y $1_{M''}$ son isomorfismos, por el Lema de los Cinco se tiene que φ es un isomorfismo y por tanto la sucesión es escindida.

Veamos ahora que (i) es equivalente a (iii).

- Si la sucesión es escindida, podemos definir el homomorfismo de A-módulos

  $$g' : M'' \to M$$

  como $g' = \varphi^{-1} \circ q_2 \circ 1_{M''} = \varphi^{-1} \circ q_2$, y se tiene, por la conmutatividad del cuadrado de la derecha, que

  $$g \circ g' = g \circ \varphi^{-1} \circ q_2 = p_2 \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ q_2 = p_2 \circ q_2 = 1_{M''}$$

- Por otro lado, si suponemos que existe $g' \in Hom_A(M'', M)$ tal que $g \circ g' = 1_{M''}$.

  Tenemos que $(M' \oplus M'', \{q_1, q_2\})$ verifica la Propiedad Universal de la suma directa de A-módulos y por tanto $\exists | \varphi' \in Hom_A(M' \oplus M'', M)$ que hace conmutar los diagramas

  $$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "q_1"] \arrow[dr, "f"'] & M' \oplus M'' \arrow[d, "\varphi'"] \\
& M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M'' \arrow[r, "q_2"] \arrow[dr, "g'"'] & M' \oplus M'' \arrow[d, "\varphi'"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

  es decir, $f = \varphi' \circ q_1$ y $g' = \varphi' \circ q_2$.

También tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "1_{M'}"] & M' \oplus M'' \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\varphi'"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "1_{M''}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta.

En efecto, el cuadro de la izquierda conmuta ya que $f \circ 1_{M'} = f = \varphi' \circ q_1$. Además, por la Propiedad Universal de la suma directa de A-módulos tenemos que p_2 es el único homomorfismo de A-módulos que hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "q_1"] \arrow[dr, "0"'] & M' \oplus M'' \arrow[d, "p_2"] \\ & M'' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M'' \arrow[r, "q_2"] \arrow[dr, "1_{M''}"'] & M' \oplus M'' \arrow[d, "p_2"] \\ & M'' \end{tikzcd}$$

y por tanto, como $g \circ g' = g \circ \varphi' \circ q_2 = 1_{M''}$, tenemos que $g \circ \varphi' = p_2$, es decir, el cuadrado de la derecha conmuta.

Como $1_0, 1_{M'}$ y $1_{M''}$ son isomorfismos, por el Lema de los Cinco se tiene que φ' es un isomorfismo.

Si φ es el inverso de φ', es decir, $\varphi \circ \varphi' = 1_{M' \oplus M''}$ y $\varphi' \circ \varphi = 1_M$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{M'}"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "1_{M''}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "q_1"'] & M' \oplus M'' \arrow[r, "p_2"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta ya que

$$p_2 \circ \varphi = g \circ \varphi' \circ \varphi = g = 1_{M''} \circ g$$

y

$$\varphi \circ f = \varphi \circ \varphi' \circ q_1 = q_1 = q_1 \circ 1_{M'}$$

Por tanto, la sucesión es escindida.

□

3.3. Funtores exactos a derecha e izquierda.

Definición 3.4. Sea $T :_A Mod \to Ab$ un funtor covariante y sea

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M''$$

una sucesión exacta. T se denomina *exacto por la izquierda* si la sucesión

$$0 \longrightarrow T(M) \xrightarrow{T(f)} T(M') \xrightarrow{T(g)} T(M'')$$

es exacta.

Definición 3.5. Sea $T :_A Mod \to Ab$ un funtor covariante y sea

$$M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta. T se denomina *exacto por la derecha* si la sucesión

$$T(M) \xrightarrow{T(f)} T(M') \xrightarrow{T(g)} T(M'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

Nota 3.3. Si un funtor covariante $T :_A Mod \to Ab$ es exacto a derecha e izquierda, decimos que T es *exacto*.

3.4. Exactitud del Funtor Hom

Proposición 3.7. *Sean N, M, M' A-módulos, $f : M \to M'$ homomorfismo de A-módulos, entonces la aplicación inducida por el funtor $Hom(N, -)$, $f_* : Hom_A(N, M) \to Hom_A(N, M')$ es un homomorfismo de $Z(A)$-módulos.*

Demostración. La aplicación f_* es

$$\begin{array}{rcl} f_* : Hom_A(N, M) & \to & Hom_A(N, M') \\ g & \mapsto & f_*(g) = f \circ g \end{array}$$

Sean $g, h \in Hom_A(N, M), a \in Z(A)$:

(i) $f_*(g + h) = f \circ (g + h)$, entonces, $\forall n \in N$

$$(f_*(g + h))(n) = (f \circ (g + h))(n) = f((g + h)(n)) = f(g(n) + h(n)) =$$

$$= f(g(n)) + f(h(n)) = (f \circ g)(n) + (f \circ h)(n) = (f_*(g))(n) + (f_*(h))(n)$$

Por tanto, $f_*(g + h) = f_*(g) + f_*(h)$.

(ii) $f_*(ag) = f \circ (ag)$, entonces, $\forall n \in N$

$$(f_*(ag))(n)(f \circ (ag))(n) = f((ag)(n)) = f(g(an)) =$$

$$= f(ag(n)) = af(g(n)) = a(f \circ g)(n) = a(f_*(g))(n)$$

Por tanto, $f_*(ag) = af_*(g)$.

Por tanto, f_* es un homomorfismo de $Z(A)$-módulos. □

Teorema 3.2. *Sea N un A-módulo, entonces el funtor covariante $Hom(N,-)$ es exacto por la izquierda.*

Demostración. Sean M, M', M'' A-módulos, $f : M \to M', g : M' \to M''$ homomorfismos de A-módulos tales que la sucesión

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M''$$

es exacta, entonces tenemos que probar que

$$0 \longrightarrow Hom_A(N,M) \xrightarrow{f_*} Hom_A(N,M') \xrightarrow{g_*} Hom_A(N,M'')$$

es una sucesión exacta.

Primero veamos que f_* es inyectiva:

Sabemos que el elemento neutro de $Hom_A(N,M')$ es el A-homomorfismo $0 : N \to M'$. Sea $h \in Hom_A(N,M)$ tal que $f_*(h) = 0$, entonces, $\forall n \in N$ se tiene:

$$(f_*(h))(n) = (f \circ h)(n) = f(h(n)) = 0$$

entonces, como f es inyectiva, $h(n) = 0$ para todo $n \in N$, es decir, $h = 0$ y por tanto, f_* es inyectiva.

Para ver que $Im(f_*) = Ker(g_*)$ veamos el doble contenido:

- Sea $h \in Hom_A(N,M)$ entonces, $(g_* \circ f_*)(h) = g_*(f \circ h) = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = = 0 \circ h = 0$. Por tanto, por la proposición 4.3, $Im(f_*) \subseteq Ker(g_*)$
- Si $h' \in Ker(g_*)$, entonces $g_*(h') = g \circ h' = 0$, por tanto, $\forall n \in N$,

  $$(g \circ h')(n) = g(h'(n)) = 0$$

  Entonces $h'(n) \in Ker(g) = Im(f)$ lo que significa que $\forall n \in N, \exists m \in M$ tal que $h'(n) = f(m)$. Este m es único ya que, si existe $m' \in M$ tal que $h'(n) = f(m) = f(m')$ entonces $f(m) - f(m') = f(m - m') = 0$ y, como f es inyectiva, $m - m' = 0$, y por tanto $m = m'$.

  Sea

  $$\begin{aligned} p : N &\to M \\ n &\mapsto p(n) = m, \text{ si } h'(n) = f(m) \end{aligned}$$

  p está bien definida ya que este m es único. Además, p es un homomorfismo de A-módulos puesto que, $\forall a \in A$, $n, n' \in N$ tales que $h'(n) = f(m), h'(n') = f(m')$:

  (i)
  $$h'(n + n') = h'(n) + h'(n') = f(m) + f(m') = f(m + m') \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow p(n + n') = p(n) + p(n')$$

(ii)

$$h'(an) = ah'(n) = af(m) = f(am) \Rightarrow p(an) = ap(n)$$

En particular, p es un homomorfismo de $Z(A)$-módulos.

Además, $\forall n \in N$ tal que $h'(n) = f(m)$, se tiene que

$$(f_*(p))(n) = (f \circ p)(n) = f(p(n)) = f(m) = h'(n)$$

y por tanto $h \in Im(f_*)$.

$\square$

En general, no podemos asegurar que la sucesión que resulta al aplicar el funtor $Hom(N, -)$ acabe en "$\longrightarrow 0$.ªunque g sea sobreyectiva.

Sea la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{e} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde i es la inclusión y e es el epimorfismo canónico.

En $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tenemos que $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ tiene orden 2 ya que $2(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) = 0 + \mathbb{Z}$ y por tanto, si $\mathbb{I}_2$ es el grupo cíclico de orden 2, el conjunto $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{I}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq \{0\}$ ya que existe el $\mathbb{Z}$-homomorfismo que envía al elemento $1 \in \mathbb{I}_2$ a $\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Si aplicamos el funtor $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{I}_2, -)$ en la sucesión anterior, tenemos que $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{I}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq \{0\}$ pero $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{I}_2, \mathbb{Q}) = \{0\}$ ya que $\mathbb{Q}$ no tiene elementos distintos de cero de orden finito, y por tanto, la aplicación $e_* : Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{I}_2, \mathbb{Q}) \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{I}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ no puede ser sobre.

Es decir, el funtor $Hom(N, -)$ no transforma sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas cortas.

Proposición 3.8. *Sean N, M, M' A-módulos, $f : M \to M'$ homomorfismo de A-módulos, entonces la aplicación inducida por el funtor $Hom(-, N)$,*

$$f^* : Hom_A(M', N) \to Hom_A(M, N)$$

es un homomorfismo de $Z(A)$-módulos.

Definición 3.6. Sea $T :_A Mod \to Ab$ un funtor contravariante y sea

$$M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta. T se denomina *exacto por la izquierda* si la sucesión

$$0 \longrightarrow T(M'') \xrightarrow{T(g)} T(M') \xrightarrow{T(f)} T(M)$$

es exacta.

Teorema 3.3. *Sea N un A-módulo, entonces el funtor contravariante $Hom_A(-, N)$ es exacto por la izquierda.*

Demostración. Sean M, M', M'' A-módulos, $f : M \to M', g : M' \to M''$ homomorfismos de A-módulos tales que la sucesión

$$M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces tenemos que probar que

$$0 \longrightarrow Hom_A(M'', N) \xrightarrow{g^*} Hom_A(M', N) \xrightarrow{f^*} Hom_A(M, N)$$

es una sucesión exacta.

Primero veamos que g^* es inyectiva:

Sea $h \in Hom_A(M'', N)$ tal que $g^*(h) = 0$ entonces, como g es sobreyectiva, $\exists m' \in M''$ tal que, $\forall m'' \in M'', m'' = g(m')$. Entonces $\forall m'' \in M''$:

$$(h \circ g)(m') = h(g(m')) = h(m'') = 0$$

lo que implica que $h = 0$ y por tanto g^* es inyectiva.

Para ver que $Im(g^*) = Ker(f^*)$ veamos es doble contenido:

- Sea $h \in Hom_A(M'', N)$, entonces

$$(f^* \circ g^*)(h) = f^*(g^*(h)) = f^*(h \circ g) =$$
$$= (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ 0 = 0$$

  y por tanto, $h \in Ker(f^*)$, lo que implica que$Im(g^*) \subseteq Ker(f^*)$

- Sea $h' \in Ker(f^*)$. Como g es sobreyectiva tenemos que $\forall m'' \in M'', \exists m' \in M' : g(m') = m''$.

  Sea

$$\begin{array}{rcl} p : M'' & \to & N \\ m'' & \mapsto & p(m'') = h'(m') \text{ si } m'' = g(m') \end{array}$$

  p está bien definida ya que si $m_1'', m_2'' \in M'', m_1'' = m_2''$ entonces $\exists m_1', m_2' \in M' : g(m_1') = m_1'', g(m_2') = m_2''$, luego

$$g(m_1') = g(m_2') \Rightarrow g(m_1') - g(m_2') = 0 \Rightarrow g(m_1' - m_2') = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_1' - m_2' \in Ker(g) = Im(f) \Rightarrow \exists m \in M : m_1' - m_2' = f(m)$$

  Por tanto, como $h' \in Ker(f^*)$ tenemos que

$$h'(m_1'') - h'(m_2'') = h'(m_1' - m_2') =$$
$$= h'(f(m)) = (f^*(h'))(m) = 0 \Rightarrow h'(m_1'') = h'(m_2'')$$

  y por tanto $p(m_1'') = p(m''2)$.

  Además, p es un A-homomorfismo, ya que $\forall m'', m_1'', m_2'' \in M''$ tales que $m_1'' = g(m_1')$, $m_2'' = g(m_2')$, $m'' = g(m')$, y $\forall a \in A$:

(i) $p(m_1'') + p(m_2'') = p(g(m_1')) + p(g(m_2')) = h'(m_1') + h'(m_2') = h'(m_1' + m_2') =$
$= p(g(m_1') + g(m_2')) = p(m_1'' + m_2'')$

(ii) $p(am'') = p(ag(m')) = p(g(am')) = h'(am') = ah'(m') = ap(g(m')) = ap(m'')$

También tenemos que, $\forall m' \in M'$, se verifica

$$(g^*(p))(m') = (p \circ g)(m') = p(g(m')) = h'(m') \Rightarrow g^*(p) = h' \Rightarrow h' \in Im(g^*)$$

y por tanto $Ker(f^*) \subseteq Im(g^*)$.

$\square$

Capítulo 4

Módulos libres

4.1. Módulos libres

Definición 4.1. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos (A unitario) donde $M_i \cong A$ para cualquier $i \in I$, viendo A como A-módulo. Si M es un A-módulo, decimos que es un *A-módulo libre* si $M \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$.

Corolario 4.1. *Si M es un A-módulo libre, entonces $M \cong \bigoplus_{i\in I} A_i$ donde $A_i = A$ para todo $i \in I$.*

$\bigoplus_{i\in I} A_i$ se suele denotar por $A^{(I)}$.

Nota 4.1. M es de generación finita si $M \cong A \oplus \overset{n}{\ldots} \oplus A$ con $n \in \mathbb{N}^*$. A esta suma directa se la denota por A^n.

Por convenio, A^0 es el A-módulo 0.

Definición 4.2. Sea M un A-módulo y B un subconjunto de M. Decimos que B es una *base* si:

(i) B es un conjunto generador de M, es decir, para todo $m \in M$ existen $a_i \in A$ tales que $m = \sum_{finita} a_i e_i$ donde $e_i \in B$.

(ii) B es linealmente independiente, es decir, si $\sum_{finita} a_i e_i = 0, a_i \in A, e_i \in B$ entonces $a_i = 0$ para todo i.

Proposición 4.1. *El conjunto $B = \{q_i(1)\}_{i\in I}$ donde q_i son las inmersiones canónicas, es una base de $A^{(I)}$.*

Demostración. Veamos que B es una base:

(i) Sea $(a_i)_{i\in I}$ elemento de $A^{(I)}$, entonces

$$(a_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I}(\ldots, 0, a_i, 0, \ldots) = \sum_{i\in I} a_i(\ldots, 0, 1, 0, \ldots) = \sum_{i\in I} a_i q_i(1)$$

.

(ii) Si $\sum_{i\in I} a_iq_i(1) = (0)_{i\in I}$ entonces $\sum_{i\in J} a_iq_i(1) = \sum_{i\in I} a_i(1)_{i\in I} = (a_i)_{i\in J} = (0)_{i\in I}$, y por tanto $a_i = 0$ para todo $i \in I$.

□

Proposición 4.2. *Sea M un A-módulo. M es un A-módulo libre si y sólo si M tiene una base.*

Demostración. Si M es un A-módulo libre, entonces $M \cong \bigoplus_{i\in I} M_i \cong \bigoplus_{i\in I} A_i$. Si el isomorfismo que existe entre M y $\bigoplus_{i\in I} A_i$ es:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : M & \to & A^{(I)} \\ m & \mapsto & \varphi(m) = (a_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} a_iq_i(1) \end{array}$$

Veamos que el conjunto $B = \{\varphi^{-1}(q_i(1))\}_{i\in I}$ es una base de M:

(i) Si $m \in M, \varphi(m) = \sum_{i\in I} a_iq_i(1)$ entonces

$$m = \varphi^{-1}\left(\sum_{i\in I} a_iq_i(1)\right) = \sum_{i\in I} \varphi^{-1}(a_iq_i(1)) = \sum_{i\in I} a_i\varphi^{-1}(q_i(1))$$

Por tanto, B es un conjunto generador de M.

(ii) Si $\sum_{i\in I} a_i\varphi^{-1}(q_i(1)) = 0$ entonces

$$\varphi\left(\sum_{i\in I} a_i\varphi^{-1}(q_i(1))\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i\in I} a_i\varphi\left(\varphi^{-1}(q_i(1))\right) = \sum_{i\in I} a_iq_i(1) = 0$$

y, como $\{q_i\}_{i\in I}$ es una base de $A^{(I)}$, tenemos que $a_i = 0$ para todo i.

Por tanto, B es una base de M.

Supongamos ahora que M es un A-módulo que tiene base. Sea $B = \{x_i\}_{i\in I}$ base de M, entonces $m = \sum_{i\in I} a_ix_i, i \in I$ donde $a_i = 0$ si $i \in J$, siendo J un subconjunto finito de I.

Sea la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : M & \to & A^{(I)} \\ m = \sum_{i\in I} a_ix_i & \mapsto & \varphi(m) = \sum_{i\in I} q_i(a_i) = \sum_{i\in I} a_iq_i(1) \end{array}$$

φ está bien definida ya que si $m, m' \in M', m = \sum_{i\in I} a_ix_i, m' = \sum_{i\in I} a'_ix_i$ y $m = m'$, entonces:

$$\varphi(m) = \sum_{i\in I} a_iq_i(1) = \sum_{i\in I} a'_iq_i(1) = \varphi(m')$$

φ es un homoomorfismo de A-módulos que además es biyectivo:

- Si $m \in M, m = \sum_{i\in I} a_i x_i$

$$\varphi(m) = 0 \Rightarrow \sum_{i\in I} a_i q_i(1) = 0 \Rightarrow a_i = 0, \forall i \in I \Rightarrow m = 0$$

  Por tanto, φ es inyectiva.

- $\forall (a_i)_{i\in I} \in A^{(I)}$:

$$\varphi(\sum_{i\in I} a_i x_i) = \sum_{i\in I} a_i q_i(1) = (a_i)_{i\in I}$$

  Por tanto, φ es sobreyectiva.

Luego $M \cong A^{(I)}$, y por tanto M es un A-módulo libre. □

Definición 4.3. Sea M un A-módulo, X un conjunto cualquiera. (M, f) es un *A-módulo libre sobre X* si $f : X \to M$ es una aplicación que verifica la siguiente Propiedad Universal:

$\forall M'$ A-módulo, $\forall f' : X \to M'$ aplicación, $\exists | g \in Hom_A(M, M')$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & M \arrow[d, dashed, "g"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

Es decir, $\exists | g \in Hom_A(M, M')$ tal que $g \circ f = f'$.

Proposición 4.3. *(i) Si $(M, f), (M', f')$ son A-módulos libres sobre un conjunto X, entonces $M \overset{\varphi}{\cong} M'$ y $\varphi \circ f = f'$.*

(ii) Si (M, f) es un A-módulo libre sobre un conjunto X, M' es un A-módulo y $M \overset{\varphi}{\cong} M'$, entonces $(M', \varphi \circ f)$ es libre sobre X.

Demostración. (i) Por definición de A-módulo libre sobre X tenemos que existen únicos $\varphi \in Hom_A(M, M'), \varphi' \in Hom_A(M', M)$ que hacen conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ & M' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & M' \arrow[d, "\varphi'"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Componiendo los diagramas tenemos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d, "\varphi' \circ \varphi"] \\ & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f'"'] & M' \arrow[d, "\varphi \circ \varphi'"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

que también son conmutativos.

Por tanto, por la unicidad de la Propiedad Universal y como $1_M \circ f = f$ y $1_{M'} \circ f' = f'$ entonces

$$\varphi' \circ \varphi = 1_M \text{ y } \varphi \circ \varphi' = 1_{M'}.$$

Por tanto, φ es un isomorfismo y $\varphi \circ f = f'$.

(ii) Sean M'' un A-módulo y $f' : X \to M''$ una aplicación. Entonces existe $g' \in Hom_A(M, M'')$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & M \arrow[d, "g"] \\ & M'' \end{tikzcd}$$

Además tenemos que $g \circ \varphi^{-1} \in Hom_A(M', M'')$ hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi\circ f"] \arrow[dr, "f'"'] & M' \arrow[d, "g\circ\varphi^{-1}"] \\ & M'' \end{tikzcd}$$

que es una simplicación de

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & M \arrow[d, "g"] \arrow[dr, dotted, bend left, "\varphi"'] & \\ & M'' & M' \arrow[l, dotted, "g\circ\varphi^{-1}"] \arrow[ul, dotted, "\varphi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

ya que

$$(g \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ f) = g \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ f = g \circ f = f'$$

Comprobemos ahora la unicidad de $g \circ \varphi^{-1}$:

Sea $h \in Hom_A(M', M'')$ tal que $h \circ (\varphi \circ f) = (h \circ \varphi) \circ f = f'$. Entonces, por la unicidad de g en el primer diagrama y como $\exists | m \in M : m' = \varphi(m), \forall m' \in M'$, tenemos

$$h(m') = h(\varphi(m)) = (h \circ \varphi)(m) = g(m) = g(\varphi^{-1}(m')) = (g \circ \varphi^{-1})(m')$$

entonces $h = g \circ \varphi^{-1}$ y por tanto, $(M', \varphi \circ f)$ es un A-módulo libre sobre X.

$\square$

Proposición 4.4. *Si (F, f) es un $\mathbb{Z}$-módulo libre sobre un conjunto X, entonces $\langle Im(f) \rangle = F$.*

Demostración. Sea $H = \langle Im(f) \rangle$ y sea la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f' : X & \rightarrow & H \\ x & \mapsto & f'(x) = f(x) \end{array}$$

f' está bien definida ya que, si $x, y \in X, x = y$ entonces

$$f'(x) = f(x) = f(y) = f'(y)$$

Tenemos que $i \circ f' = f$ donde i es la inclusión. Por tanto, por la Propiedad Universal de Módulo Libre, 1_F es el único $\mathbb{Z}$-homomorfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i \circ f'"'] & F \arrow[d, "1_F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Como H es un $\mathbb{Z}$-módulo, $\exists | g \in Hom_{\mathbb{Z}}(F, H)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & H \end{tikzcd}$$

es decir, que $g \circ f = f'$.

Además, $i \circ g \in Hom_{\mathbb{Z}}(F, F)$ y verifica que $(i \circ g) \circ f = f$. En efecto:

$$(i \circ g) \circ f = i \circ (g \circ f) = i \circ f' = f$$

Por la unicidad de 1_F:

$$i \circ g = 1_F \Rightarrow i \circ g \text{ es biyectiva } \Rightarrow i \text{ es sobre}$$

y por tanto $i(H) = H = F$. □

Proposición 4.5. *Las definiciones de A-módulo libre y de A-módulo libre sobre un conjunto X son equivalentes.*

Demostración.

- Primero veamos que si M es un A-módulo libre, $\exists f : X \rightarrow M$ aplicación tal que (M, f) es un A-módulo libre sobre X.

  Si $M \cong A^{(I)}$ y tomamos $X = I$, entonces

$$\begin{array}{rcl} f : I & \rightarrow & A^{(I)} \\ i & \mapsto & f(i) = q_i(1) \end{array}$$

  es una aplicación. f está bien definida ya que si $i, j \in I, i = j$:

$$f(i) = q_i(1) = q_j(1) = f(j)$$

Sea M' un A-módulo y $f' : I \to M'$ un aplicación, entonces

$$\begin{array}{rcl} g : A^{(I)} & \to & M' \\ (a_i)_{i\in I} & \mapsto & g((a_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i f'(i) \end{array}$$

es un A-homomorfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & A^{(I)} \arrow[d, "g"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

Primero comprobemos que g es un A-homomorfismo. $\forall (a_i)_{i\in I}, (a'_i)_{i\in I} \in A^{(I)}, \forall a \in A$:

(i)
$$g((a_i)_{i\in I} + (a'_i)_{i\in I}) = g(a_i + a'_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I}(a_i + a'_i)f'(i) =$$
$$= \sum_{i\in I}(a_i f'(i) + a'_i f'(i)) = \sum_{i\in I} a_i f'(i) + \sum_{i\in I} a'_i f'(i) = g((a_i)_{i\in I}) + g((a'_i)_{i\in I})$$

(ii)
$$g(a(a_i)_{i\in I}) = g((aa_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I}(aa_i)f'(i) =$$
$$= \sum_{i\in I} a(a_i f'(i)) = a\sum_{i\in I} a_i f'(i) = ag((a_i)_{i\in I})$$

Además, $g \circ f = f'$ ya que $\forall i \in I : (g \circ f)(i) = g(f(i)) = g(q_i(1)) = f'(i)$.

Comprobemos ahora la unicidad de g:

Sea $h \in Hom_A(A^{(I)}, M)$ tal que $h \circ f = f'$. Entonces, $\forall (a_i)_{i\in I}$:

$$h((a_i)_{i\in I}) = h(a_i q_i(1)) = \sum_{i\in I} h(aq_i(1)) =$$
$$= \sum_{i\in I} ah(q_i(1)) = \sum_{i\in I} a_i f'(i) = g((a_i)_{i\in I})$$

Entonces, $h = g$, y por tanto $(A^{(I)}, f)$ es un A-módulo libre sobre I.

- Sea (M, f) un A-módulo libre sobre un conjunto I.

  Como $(A^{(I)}, g)$ también es A-módulo libre sobre I, donde g está definida como en el apartado anterior, entonces $M \cong A^{(I)}$ y por tanto, M es un A-módulo libre.

$\square$

Capítulo 5

Producto Tensorial de Módulos

5.1. Producto Tensorial de A-módulos

Definición 5.1. Si M un módulo-A, N un A-módulo y G un grupo abeliano, decimos que $f : M \times N \to G$ es una aplicación A-*biaditiva* si, $\forall x_1, x_2, x \in M, \forall y_1, y_2, y \in N, \forall a \in A$:

(i) $f((x_1 + x_2, y)) = f((x_1, y)) + f((x_2, y))$.

(ii) $f((x - y_1 + y_2)) = f((x, y_1)) + f((x, y_2))$

(iii) $f((xa, y)) = f((x, ay))$

Definición 5.2. Si M un módulo-A, N un A-módulo y G un grupo abeliano, $f : M \times N \to G$ aplicación A-biaditiva, decimos que (G, f) es un *producto tensorial* de M y N si verifica la siguiente Propiedad Universal:

Sea H grupo abeliano, $f' : M \times N \to H$ aplicación A-biaditiva, entonces $\exists | h \in Hom_{\mathbb{Z}}(G, H)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & G \arrow[d, dashed, "h"] \\ & H \end{tikzcd}$$

es decir, $\exists | h \in Hom_{\mathbb{Z}}(G, H)$ tal que $h \circ f = f'$.

Proposición 5.1. *Sean M un módulo-A, N un A-módulo. Si (T, f) y (S, g) son dos productos tensoriales de $M \times N$, entonces $T \cong S$ y $g = \tau \circ f$ donde τ es un isomorfismo.*

Demostración. Como (T, f) y (S, g) son productos tensoriales de $M \times N$, $\exists | \tau \in Hom_{\mathbb{Z}}(T, S), \exists | \tau' \in Hom_{\mathbb{Z}}(S, T)$ que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, "\tau"] \\ & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & S \arrow[d, "\tau'"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Componiendo ambos diagramas obtenemos

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "\tau' \circ \tau"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g"'] & S \arrow[d, "\tau \circ \tau'"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Como $1_T \circ f = f$ y $1_S \circ g = g$, por la Propiedad Universal del producto tensorial tenemos que

$$\tau' \circ \tau = 1_T \text{ y } \tau \circ \tau' = 1_T$$

Entonces τ es un isomorfismo, por lo que $T \cong S$ y además, $g = \tau \circ f$. $\square$

Sean M un módulo-A, N un A-módulo y F el $\mathbb{Z}$-módulo libre sobre $M \times N$, es decir, F es un $\mathbb{Z}$-módulo y existe una aplicación $f : M \times N \to F$ que verifica la Propiedad Universal de módulo libre. Entonces sea H el submódulo de F definido a través de sus generadores:

$$H = \langle \{ f((x_1 + x_2, y)) - f((x_1, y)) - f((x_2, y)), f((x, y_1 + y_2)) - f((x, y_1)) - f((x, y_2)),$$

$$f((xa, y)) - f((x, ay)) \ / \ x_1, x_2, x \in M, y_1, y_2, y \in N \} \rangle$$

y sea el $\mathbb{Z}$-módulo cociente $T = F/H$, que tiene sentido ya que F es abeliano.

Podemos definir la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \tau : M \times N & \to & T \\ (x, y) & \mapsto & \tau((x, y)) = \overline{f((x, y))} \end{array}$$

que además es A-biaditiva.

Demostración. τ está bien definida ya que si $(x, y), (x', y') \in M \times N, (x, y) = (x', y')$ entonces

$$\tau((x, y)) = \overline{f((x, y))} = \overline{f((x', y'))} = \tau((x', y'))$$

τ es A-biaditiva ya que, $\forall x_1, x_2, x \in M, \forall y_1, y_2, y \in N, \forall a \in A$:

(i) $f((x_1+x_2, y)) - f((x_1, y)) - f((x_2, y)) \in H \Rightarrow \overline{f((x_1 + x_2, y))} = \overline{f((x_1, y)) + f((x_2, y))} = \overline{f((x_1, y))} + \overline{f((x_2, y))} \Rightarrow \tau((x_1 + x_2, y)) = \tau((x_1, y)) + \tau((x_2, y))$.

(ii) $f((x, y_1+y_2)) - f((x, y_1)) - f((x, y_2)) \in H \Rightarrow \overline{f((x, y_1 + y_2))} = \overline{f((x, y_1)) + f((x, y_2))} = \overline{f((x, y_1))} + \overline{f((x, y_2))} \Rightarrow \tau((x, y_1 + y_2)) = \tau((x, y_1)) + \tau((x, y_2))$.

(iii) $f((xa, y) - f((x, ay)) \in H \Rightarrow \overline{f((xa, y))} = \overline{f((x, ay))} \Rightarrow \tau((xa, y)) = \tau((x, ay))$.

$\square$

Teorema 5.1. *Si M un módulo-A y N un A-módulo entonces (T, τ), con T y f definidos como antes, es un producto tensorial de M y N.*

Demostración. Tenemos que T es un $\mathbb{Z}$-módulo y $\tau : M \times N \to T$ es una aplicación A-biaditiva.

Veamos que T cumple la Propiedad Universal:

Sea G un $\mathbb{Z}$-módulo y $g : M \times N \to G$ una aplicación A-biaditiva. Sea

$$\begin{array}{rcl} \overline{g} : T & \to & S \\ \overline{z} & \mapsto & \overline{g}(\overline{z}) = g'(z) \end{array}$$

donde g' es el único $\mathbb{Z}$-homomorfismo que verifica la Propiedad Universal de módulo libre para el $\mathbb{Z}$-módulo libre F, es decir, que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & F \arrow[d, "g'"] \\ & G \end{tikzcd}$$

$\overline{g} \in Hom_{\mathbb{Z}}(T, G)$.

Además, $\forall (x, y) \in M \times N$:

$$\overline{g} \circ \tau((x, y)) = \overline{g}(\tau((x, y))) = \overline{g}(\overline{f((x, y))}) =$$

$$= g'(\overline{f((x, y))}) = g' \circ \overline{f}((x, y)) = g((x, y))$$

Veamos ahora la unicidad de $\overline{g}$.

Supongamos que $\exists \overline{h} \in Hom_{\mathbb{Z}}(T, G)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, "\overline{h}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

es decir, que $\overline{h} \circ \tau = g$.

Sea

$$\begin{array}{rcl} h' : F & \to & G \\ x & \mapsto & h'(x) = \overline{h}(\overline{x}) \end{array}$$

$h' \in Hom_{\mathbb{Z}}(F, G)$.

Además, $\forall (x, y) \in M \times N$:

$$h' \circ f((x, y)) = h'(f((x, y))) = \overline{h}(\overline{f((x, y))}) = \overline{h}(\tau((x, y))) = \overline{h} \circ \tau((x, y)) = g((x, y))$$

Por tanto, tanto g' como h' hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & F \arrow[d, "{g', h'}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

y, por la unicidad de la Propiedad Universal de módulo libre, tenemos que $g' = h'$.

Además, $\forall \overline{z} \in T$:

$$\overline{g}(\overline{z}) = g'(z) = h'(z) = \overline{h}(\overline{z})$$

y por tanto, $\overline{g} = \overline{h}$. $\square$

Nota 5.1. A este único producto tensorial de M y N lo denotamos $M \otimes_A N$.

Si $(x, y) \in M \times N$, denotamos $\tau((x, y))$ como $x \otimes y$.

Corolario 5.1. *$\forall x, x_1, x_2 \in M, \forall y, y_1, y_2 \in N, \forall a \in A$:*

(i) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$.

(ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$.

(iii) $xa \otimes y = x \otimes ay$.

Proposición 5.2. *Sean $x \in M, y \in N$. Si $x = 0$ o $y = 0$ entonces $x \otimes y = 0$.*

Nota 5.2. El recíproco no es cierto ya que si tomamos $M = \mathbb{Z}_2, N = \mathbb{Z}_4$, ambos son $\mathbb{Z}$-módulos (en particular $\mathbb{Z}_2$ es un módulo-$\mathbb{Z}$) y tenemos que $\overline{1} \otimes \overline{2} = \overline{1} \otimes 2 \cdot \overline{1} = \overline{1} \cdot 2 \otimes \overline{1} = \overline{2} \otimes \overline{1} = 0 \otimes \overline{1} = 0$.

Proposición 5.3. *(i) $\rangle Im(\tau) = M \otimes_A N$, es decir, $\forall z \in M \otimes_A N, \exists n_i \in \mathbb{Z}$:*

$$z = \sum_{finita} n_i(x_i \otimes y_i), n_i \in \mathbb{Z}$$

(ii) $\forall n \in \mathbb{Z} : n(x \otimes y) = nx \otimes y = x \otimes ny$.

Corolario 5.2. *Por el resultado anterior tenemos que $\forall z \in M \otimes_A N$:*

$$z = \sum_{finita} n_i(x_i \otimes y_i) = \sum_{finita} n_i x_i \otimes y_i = \sum_{finita} x'_i \otimes y_i$$

es decir, el conjunto $\{x \otimes y \ / \ x \in M, y \in N\}$ es un sistema generador (S.G.) de $M \otimes_A N$.

Proposición 5.4. *Sean M, N A-módulos:*

(i) Si G es un S.G. de M y $f \in Hom_A(M, N)$, entonces para conocer $f(z), \forall z \in M$, nos vale con saber $f(x), \forall x \in G$ ya que

$$f(z) = f\left(\sum_{finita} a_i x_i\right) = \sum_{finita} a_i f(x_i), \quad a_i \in A, x_i \in G$$

(ii) Si $f, g \in Hom_A(M, N)$, G un S.G. de M, entonces

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in G$$

Nota 5.3. Sean M es un módulo-A, N es un A-módulo, G un grupo abeliano.

Debido a la dificultad que hay en trabajar con los elementos de $M \otimes_A N$, para probar que una aplicación $f : M \otimes_A N \to G$ está bien definida, definimos una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \overline{f} : M \times N & \to & G \\ (m,n) & \mapsto & \overline{f}((m,n)) = f(m \otimes n) \end{array}$$

y probamos que es A-biaditiva. De esta manera, por la Propiedad Universal del producto tensorial, $\exists | h \in Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_A N, G)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\overline{f}"'] & M \otimes_A N \arrow[d, "\overline{h}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

es decir, $\exists | h : h \circ \tau = \overline{f}$. Entonces, $\forall (m,n) \in M \times N$:

$$h \circ \tau((m,n)) = h(\tau(m,n)) = h(m \otimes n) = \overline{f}((m,n)) = f((m \otimes n)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall m \in M, n \in N : h(m \otimes n) = f(x \otimes y) \Rightarrow h = f \in Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_A N, G)$$

y por tanto, no sólo obtenemos que f está bien definida, sino que f es un $\mathbb{Z}$-homomorfismo.

Proposición 5.5. *Sean M, M' módulos-A, N, N' A-módulos y sean $f \in Hom_A(M, M'), g \in Hom_A(N, N')$. Entonces*

$$\begin{array}{rcl} f \otimes g : M \otimes_A N & \to & M' \otimes_A N' \\ m \otimes n & \mapsto & f \otimes g(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n) \end{array}$$

es un $\mathbb{Z}$-homomorfismo.

Demostración. Sea

$$\begin{array}{rcl} \overline{f \otimes g} : M \times N & \to & M' \otimes_A N' \\ (m,n) & \mapsto & \overline{f \otimes g}((m,n)) = f(m) \otimes g(n) \end{array}$$

$\overline{f \otimes g}$ está bien definida ya que si $(m,n), (m',n') \in M \times N, (m,n) = (m',n')$:

$$\overline{f \otimes g}((m,n)) = f(m) \otimes g(n) = f(m') \otimes g(n') = \overline{f \otimes g}((m',n'))$$

Además, $\forall m, m_1, m_2 \in M, \forall n, n_1, n_2 \in N, \forall a \in A$:

(i)
$$\overline{f \otimes g}((m_1 + m_2, n)) = f(m_1 + m_2) \otimes g(n) = (f(m_1) + f(m_2)) \otimes g(n) =$$

$$= f(m_1) \otimes g(n) + f(m_2) \otimes g(n) = \overline{f \otimes g}((m_1, n)) + \overline{f \otimes g}((m_2, n))$$

(ii)
$$\overline{f\otimes g}((m,n_1+n_2)) = f(m)\otimes g(n_1+n_2) = f(m)\otimes(g(n_1)+g(n_2)) =$$
$$= f(m)\otimes g(n_1) + f(m)\otimes g(n_2) = \overline{f\otimes g}((m,n_1)) + \overline{f\otimes g}((m,n_2))$$

(iii)
$$\overline{f\otimes g}((ma,n)) = f(ma)\otimes g(n) = f(m)a\otimes g(n) =$$
$$= f(m)\otimes ag(n) = f(m)\otimes g(an) = \overline{f\otimes g}((m,an))$$

Por tanto, $\overline{f\otimes g}$ es A-biaditiva.

Entonces, por la Propiedad Universal del producto tensorial, $\exists | h \in Hom_{\mathbb{Z}}(M\otimes_A N, M'\otimes_A N')$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\overline{f\otimes g}"'] & M\otimes_A N \arrow[d, "h"] \\ & M'\otimes_A N' \end{tikzcd}$$

y, por **Nota 5.3**, $h = f\otimes g$. □

Proposición 5.6. *Sean M, M' módulos-A, N, N' A-módulos y sean $f, f_1, f_2 \in Hom_A(M,M'), g, g_1, g_2 \in Hom_A(N,N')$. Entonces*

(i) $(f_1+f_2)\otimes g = f_1\otimes g + f_2\otimes g$.

(ii) $f\otimes(g_1+g_2) = f\otimes g_1 + f\otimes g_2$.

(iii) $1_M\otimes 1_N = 1_{M\otimes_A N}$

(iv) Sean M'' un módulo-A, N" un A-módulo, $f'\in Hom_A(M',M''), g'\in Hom_A(N',N'')$, entonces:
$$(f'\otimes g')\circ(f\otimes g) = (f'\circ f)\otimes(g'\circ g)$$

(v) Si f y g son sobreyectivas, entonces $f\otimes g$ también es sobreyectiva.

Proposición 5.7. *Sean M un módulo-A, N un A-módulo.*

(i) $A\otimes_A N\cong N$. Por tanto, $A\otimes_A N$ es un A-módulo.

(ii) $M\otimes_A A\cong M$. Por tanto, $M\otimes_A A$ es un módulo-A.

(iii) Si A es un anillo conmutativo, entonces $M\otimes_A N$ es un A-módulo.

Demostración. (i) El producto externo definido en $A\otimes_A N$ es $a(b\otimes n) = ab\otimes n, \forall a\in A, \forall b\otimes n\in A\otimes_A N$. Para ver que este producto está bien definido, definimos, $\forall a\in A$:

$$\begin{array}{rcl} f_a : A\otimes_A N & \to & A\otimes_A N \\ b\otimes n & \mapsto & f_a(b\otimes n) = ab\otimes n = a(b\otimes n) \end{array}$$

y definimos también

$$\begin{aligned} \overline{f_a} : A \times N &\to A \otimes_A N \\ (b,n) &\mapsto \overline{f_a}((b,n)) = ab \otimes n = a(b \otimes n) \end{aligned}$$

$\overline{f_a}$ está bien definida ya que si $(b_1, n_1), (b_2, n_2) \in A \times N, (b_1, n_1) = (b_2, n_2)$:

$$\overline{f_a}((b_1, n_1)) = ab_1 \otimes n_1 = a(b_1 \otimes n_1) =$$

$$= a(b_2 \otimes n_2) = ab_2 \otimes n_2 = \overline{f_a}((b_2, n_2))$$

y además, $\overline{f_a}$ es A-biaditiva ya que $\forall a', b, b_1, b_2 \in A, \forall n, n_1, n_2 \in N$:

(i)
$$\overline{f_a}((b_1 + b_2, n)) = a(b_1 + b_2) \otimes n = (ab_1 + ab_2) \otimes n =$$
$$= ab_1 \otimes n + ab_2 \otimes n = \overline{f_a}((b_1, n)) + \overline{f_a}((b_2, n))$$

(ii)
$$\overline{f_a}((b, n_1 + n_2)) = ab \otimes (n_1 + n_2) =$$
$$= ab \otimes n_1 + ab \otimes n_2 = \overline{f_a}((b, n_1)) + \overline{f_a}((b, n_2))$$

(iii)
$$\overline{f_a}((ba', n)) = a(ba') \otimes n = (ab)a' \otimes n = ab \otimes a'n = \overline{f_a}((b, a'n))$$

Por tanto, por la Propiedad Universal del producto tensorial, $\exists | h \in Hom_{\mathbb{Z}}(A \otimes_A N, A \otimes_A N)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\overline{f_a}"'] & A \otimes_A N \arrow[d, "h"] \\ & A \otimes_A N \end{tikzcd}$$

y por **Nota 5.3**, $h = f_a$.

Entonces, $\forall a \in A, b_1 \otimes n_1, b_2 \otimes n_2 \in A \otimes_A N, b_1 \otimes n_1 = b_2 \otimes n_2$:

$$a(b_1 \otimes n_1) = ab_1 \otimes n_1 = f_a(b_1 \otimes n_1) =$$

$$= f_a(b_2 \otimes n_2) = ab_2 \otimes n_2 = a(b_2 \otimes n_2)$$

Con esta operación, $A \otimes_A N$ es un A-módulo, y

$$\begin{aligned} \varphi : A \otimes_A N &\to N \\ a \otimes n &\mapsto \varphi(a \otimes n) = an \end{aligned}$$

es un isomorfismo de A-módulos.

(ii) Análogo al anterior.

(iii) $M \otimes_A N$ con el producto escalar $a(m \otimes n) = ma \otimes n, \forall a \in A, \forall m \otimes n \in M \otimes_A N$ es un A-módulo. Para ver que el producto externo está bien definido, definimos la aplicación, $\forall a \in A$:

$$\begin{array}{rcl} \overline{f_a} : M \times N & \to & M \otimes_A N \\ (m,n) & \mapsto & \overline{f_a}((m,n)) = ma \otimes n \end{array}$$

que es A-biaditiva, y por tanto, por la Propiedad Universal del producto tensorial, $\exists | f_a \in Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_A N, M \otimes_A N)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\overline{f_a}"'] & M \otimes_A N \arrow[d, "f_a"] \\ & M \otimes_A N \end{tikzcd}$$

y que nos asegura que el producto externo está bien definido.

Nótese que el hecho de que A sea conmutativo es necesario para que $M \otimes_A N$ satisfaga la propiedad asociativa mixta ya que, $\forall a, a' \in A, \forall m \otimes n \in M \otimes_A N$:

$$aa'(m \otimes n) = m(aa') \otimes n = m(a'a) \otimes n =$$

$$= (ma')a \otimes n = a(ma' \otimes n) = a(a'(m \otimes n))$$

□

5.2. Funtores Producto Tensorial

Proposición 5.8. *Sea M un módulo-A, entonces $F_M = M \otimes_A - :_A Mod \to Ab$ definido*

- *$\forall N$ A-módulo, $F_M(N) = M \otimes_A N$:*
- *$\forall N, N'$ A-módulos, $\forall f \in Hom_A(N, N'), F_M(f) = 1_M \otimes f : M \otimes_A N \to M \otimes_A N'$.*

es un funtor covariante y aditivo.

De forma análoga podemos definir $G_N = - \otimes_A N : Mod_A \to Ab$, que también es un funtor covariante y aditivo.

Demostración. (i) $\forall N$ A-módulo, $F_M(N) = M \otimes_A N$ es un grupo abeliano.

(ii) $\forall N, N'$ A-módulos, $\forall f \in Hom_A(N, N')$:

$$F(f) = 1_M \otimes f \in Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_A N, M \otimes_A N')$$

(iii) $\forall N, N', N''$ A-módulos, $\forall f \in Hom_A(N, N'), \forall f \in Hom_A(N', N'')$:

$$F_M(g \circ f) = 1_M \otimes (g \circ f) = (1_M \circ 1_M) \otimes (g \circ f) =$$

$$= (1_M \otimes g) \circ (1_M \otimes f) = F_M(g) \circ F_M(f)$$

(iv) $\forall N$ A-módulo: $F(1_N) = 1_M \otimes 1_N = 1_{M\otimes_A N} = 1_{F_M(N)}$.
Por tanto, F_M es un funtor covariante.
Además, $\forall N, N'$ A-módulos, $\forall f, g \in Hom_A(N, N')$:

$$F_M(f+g) = 1_M \otimes (f+g) = 1_M \otimes f + 1_M \otimes g = F_M(f) + F_M(g)$$

y por tanto, F_M es un funtor aditivo. □

5.3. Exactitud de los Funtores Producto Tensorial

Proposición 5.9. *Si M es un módulo-A y N es un A módulo, los funtores $M \otimes_A -$, $- \otimes_A N$ son exactos por la derecha.*

Demostración. Probaremos que $M \otimes -$ es exacto por la derecha.

Sean N, N', N'' A-módulos, $f : N \to N', g : N' \to N''$ homomorfismos de A-módulos tales que la sucesión

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces tenemos que probar que

$$M \otimes_A N \overset{1_M\otimes f}{\longrightarrow} M \otimes_A N \overset{1_M\otimes g}{\longrightarrow} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Primero, tenemos que $1_M \otimes g$ es sobreyectiva ya que 1_M y g lo son.

Para ver que $Im(1_M \otimes f) = Ker(1_M \otimes g)$ veamos el doble continido:

- Sea $m \otimes n \in Im(1_M \otimes f)$ entonces $\exists n' \in N'$:

$$m \otimes n = 1_M(m) \otimes f(n') \Rightarrow 1_M \otimes g(1_M(m) \otimes f(n')) =$$

$$= (1_M \otimes g) \circ (1_M \otimes f)(m \otimes n') = (1_M \circ 1_M) \otimes (g \circ f)(m \otimes n') = m \otimes 0 = 0$$

  y por tanto $Im(1_M \otimes f) \subseteq Ker(1_M \otimes g)$.

- Sea $E = Im(1_M \otimes f)$. Definiimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \overline{g} : (M \otimes_A N)/E & \to & M \otimes_A N'' \\ \overline{m \otimes n} & \mapsto & \overline{g}(\overline{m \otimes n}) = m \otimes g(n) \end{array}$$

  $\overline{g}$ está bien definida ya que si $\overline{m_1 \otimes n_1}, \overline{m_2 \otimes n_2} \in (M \otimes_A N)/E, \overline{m_1 \otimes n_1} = \overline{m_2 \otimes n_2}$ entonces

$$m_1 \otimes n_1 - m_2 \otimes n_2 \in E \subseteq Ker(1_m \otimes g) \Rightarrow \overline{g}(\overline{m_1 \otimes n_1}) - \overline{g}(\overline{m_2 \otimes n_2}) =$$

$$= m_1 \otimes g(n_1) - m_2 \otimes g(n_2) = 1_M \otimes g(m_1 \otimes n_1) - 1_M \otimes g(m_2 \otimes n_2) =$$

$$= 1_M \otimes g(m_1 \otimes n_1 - m_2 \otimes n_2) = 0 \Rightarrow \overline{g}(\overline{m_1 \otimes n_1}) = \overline{g}(\overline{m_2 \otimes n_2})$$

Además, $\overline{g} \in Hom_{\mathbb{Z}}((M \otimes_A N)/E, M \otimes_A N'')$.

Sea $e : M \otimes_A N \to (M \otimes_A N)/E$ el epimorfismo canónico. Entonces $\overline{g} \circ e = 1_M \otimes g$ ya que $\forall m \otimes n \in M \otimes_A N : \overline{g} \circ e(m \otimes n) = 1_M \otimes g(m \otimes n)$.

Si $\overline{g}$ es un isomorfismo,

$$Ker(1_M \otimes g) = Ker(\overline{g} \circ e) = Ker(e) = E = Im(1_M \circ f)$$

Para probar que $\overline{g}$ es un isomorfismo, construiremos su inversa $\overline{p}$. Primero definimos

$$\begin{array}{rcl} p : M \times N'' & \to & (M \otimes_A N)/E \\ (m, n'') & \mapsto & p((m, n'')) = \overline{m \otimes n}, \text{ si } n'' = g(n) \end{array}$$

p está bien definida, ya que si $n_1, n_2 \in N : g(n_1) = g(n_2) = n''$ entonces

$$g(n_1 - n_2) = 0 \Rightarrow n_1, n_2 \in Ker(g) = Im(f) \Rightarrow \exists n' \in N' : f(n') = n_1 - n_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \otimes f(n') = m \otimes (n_1 - n_2) = m \otimes n_1 - m \otimes n_2 \in Im(1_M \otimes f) = E \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{m \otimes n_1 - m \otimes n_2} = \overline{m \otimes n_1} - \overline{m \otimes n_1} = \overline{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{m \otimes n_1} = \overline{m \otimes n_1} \Rightarrow p((m, n_1)) = p((m, n_2))$$

Además,p es A-biaditiva.

Por la Propiedad Universal del producto tensorial, $\exists | \overline{p} \in Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_A N'', (M \otimes_A N))$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times N'' \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "p"'] & M \otimes_A N'' \arrow[d, "\overline{p}"] \\ & (M \otimes_A N)/E \end{tikzcd}$$

y tenemos que $\forall (m, n''), n'' = g(n)$:

$$\overline{p} \otimes \tau((m, n'')) = \overline{p}(m \otimes n'') = p((m, n'')) = \overline{m \otimes n}$$

es decir,

$$\begin{array}{rcl} \overline{p} : M \otimes_A N'' & \to & (M \otimes_A N)/E \\ m \otimes n'' & \mapsto & \overline{p}(m \otimes n'') = \overline{m \otimes n}, \text{ si } n'' = g(n) \end{array}$$

Veamos que $\overline{p}$ es el inverso de $\overline{g}$:

- $\forall m \otimes n'' \in M \otimes_A N'', n'' = g(n)$:

$$\overline{g} \circ \overline{p}(m \otimes n'') = \overline{g}(\overline{m \otimes n}) = m \otimes g(n) = m \otimes n'' \Rightarrow \overline{g} \circ \overline{p} = 1_{M \otimes_A N''}$$

- $\forall \overline{m \otimes n} \in (M \otimes_A N)/E$:
$$\overline{p} \circ \overline{g}(\overline{m \otimes n}) = \overline{p}(m \otimes g(n)) = m \otimes n \Rightarrow \overline{p} \circ \overline{g} = 1_{(M \otimes_A N)/E}$$

Por tanto, $\overline{g}$ es un $\mathbb{Z}$-isomorfismo y se tiene el resultado.

$\square$

En general, el funtor $M \otimes_A -$ no envía sucesiones exactas cortas a sucesiones exactas corta.

Sea la sucesión exacta
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{e} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$
donde i es la inclusión y e es el epimorfismo canónico. Si $\mathbb{I}_2$ es el grupo cíclico de orden 2, por la exactitud a derecha del funtor $\mathbb{I}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} -$ tenemos la sucesión exacta
$$\mathbb{I}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{1_{\mathbb{I}_2} \otimes i} \mathbb{I}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{1_{\mathbb{I}_2} \otimes e} \mathbb{I}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

También tenemos que $\mathbb{I}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{I}_2$ y si $a \otimes q \in \mathbb{I}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ entonces
$$a \otimes q = a \otimes \frac{2q}{2} = 2a \otimes \frac{q}{2} = 0 \otimes \frac{q}{2} = 0$$
por lo que $\mathbb{I}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \{0\}$ y por tanto $1_{\mathbb{I}_2} \otimes i$ no puede ser inyectiva.

Análogamente ocurre para el funtor $- \otimes_A N$, donde N es un A-módulo.

Proposición 5.10. *Sean M un A-módulo, $A \otimes_A M \overset{\varphi}{\cong} M$, N un A-módulo, $A \otimes_A N \overset{\varphi'}{\cong} N$, y $f \in Hom_A(M, N)$. Entonces el cuadrado*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_A M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "1_A \otimes f"'] & M \arrow[d, "f"] \\
A \otimes_A N \arrow[r, "\varphi'"'] & N
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Tenemos un resultado análogo para los módulos-A.

Corolario 5.3. *La sucesión*
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$
es exacta si, y sólo si la sucesión
$$0 \longrightarrow A \otimes_A M' \xrightarrow{1_A \otimes f} A \otimes_A M \xrightarrow{1_A \otimes g} A \otimes_A M'' \longrightarrow 0$$
es exacta.

De la misma manera ocurre para los módulos-A.

Corolario 5.4. *Los funtores $A \otimes_A -$ y $- \otimes_A A$ transforman sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas cortas, es decir, son funtores exactos.*

Bibliografía

[1] Kent R. Fuller Frank W. Anderson. *Rings and Categories of Modules.* Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1974.

[2] S. Eilenberg H. Cartan. *Homological Algebra.* Princeton University Press, 1956.

[3] Nathan Jacobson. *Basic Algebra I.* Dover Publications, 1985.

[4] Nathan Jacobson. *Basic Algebra II.* Dover Publications, 1989.

[5] M. Scott Osborne. *Basic Homological Algebra.* Springer, 2000.

[6] U. Stammbach P. J. Hilton. *A Course in Homological Algebra.* Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, USA, 1970.

[7] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* Springer, 2009.

[8] C. A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge University Press, 1994.