



## RESUMEN

Como es sabido, el gestor de contenidos académicos Moodle forma parte de un elevado porcentaje de centros educativos. En este Trabajo de Fin de Máster se propone la utilización del libro digital y la lección de Moodle en el marco de la innovación educativa.

Se diseña un espacio virtual incorporando esos dos recursos con la intención de ser implementados para una enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas basada en la Resolución de Problemas. Se darán también pautas y consideraciones técnicas para el profesorado que considere oportuno el uso de Moodle en su aula.

Analizaremos estos recursos en un contexto del aula de Matemáticas para niveles educativos de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato y se presentarán un libro digital basado en el uso del Sistema de Geometría Dinámica GeoGebra, así como una lección de Estadística y Probabilidades. Adicionalmente, brindaremos al docente una herramienta que permitirá evaluar el grado de usabilidad de estos recursos en el aula.

**Palabras clave:** Moodle, resolución de problemas matemáticos, aprendizaje en línea, libro digital, GeoGebra.

## ABSTRACT

As it is known, the LMS Moodle takes part of a high percent of schools. In this Master Thesis, we propose the use of the e-book and the lesson in Moodle in the frame of learning education. We design a virtual space adding these two resources in order to be implemented for a teaching and learning of Mathematics based in the Problems Solving.

We will describe some guide and considerations for teachers who considerate as good the use of Moodle in their classrooms.

We will analyze these resources in a context of Maths classroom for Secondary School and High School and we will present an e-book based on the Dynamic Geometry System GeoGebra, and a lesson based on Statistics and Probability. In addition, we will bring to the teacher a tool wich will allow to evaluate the degree of usability of these resources in the classroom.

**Keywords:** Moodle, Math problems solving, online learning, e-book, GeoGebra.

## TABLA DE CONTENIDO

Resumen .....	1
Introducción.....	3
Capítulo 1. Planteamiento del problema de innovación .....	5
1.1. ¿Qué es una innovación educativa?.....	5
1.2. ¿Por qué hacer una innovación de este tipo?.....	9
1.3. Un ejemplo de innovación: Moodle .....	10
1.4. Otras innovaciones educativas centradas en Moodle.....	14
1.5. Objetivos.....	16
Capítulo 2. Marco conceptual.....	19
Capítulo 3. Resultados.....	27
3.1. Espacio Moodle en MoodleCloud .....	28
3.2. El libro digital. Descripción del diseño y aspectos técnicos. ....	30
3.3. La lección de Moodle. Aspectos técnicos. ....	34
3.4. Análisis de los problemas para el libro digital y su implementación en el espacio virtual. ....	39
3.5. Análisis de los problemas para la Lección de Moodle. Su implementación en el espacio virtual. ....	45
3.6. Evaluación de Moodle .....	58
Capítulo 4. Conclusiones y propuestas de mejora .....	62
Referencias Bibliográficas .....	66
Anexos .....	69
Anexo I: Test COLLES Real (extraído de Moodle).....	69

## INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es, desde hace ya tiempo, uno de los focos para los que la Educación Secundaria no obtiene buenos resultados en comparación con otros países. En la mayoría de aulas de Matemáticas, los profesores se encuentran con una situación común: los alumnos y alumnas tienen muchas dificultades de interpretación de la información de la situación que plantea el problema y eso les impide estructurarla de una forma práctica que les permita buscar una estrategia adecuada que les conduzca hasta una solución, y, en ocasiones, a la solución correcta.

Son ya varios titulares de prensa como el que recogía ABC el pasado mes de noviembre de 2017, tras publicarse los últimos resultados de la prueba PISA, y en el que se indicaba:

["Informe PISA: España suspende en la capacidad de los alumnos para resolver problemas en equipo." \(Stegman, J.C., 2017\)](#)

La Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) establece el aprendizaje por competencias. La Recomendación 2006/962/EC, del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente, insta a los Estados miembros a *desarrollar la oferta de competencias clave*. Entendemos que una competencia es una combinación de conocimientos, capacidades, o destrezas, y actitudes adecuadas al contexto. Se considera que *las competencias clave son aquellas que todas las personas precisan para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo*. Se han establecido ocho competencias clave esenciales para el bienestar de las sociedades europeas, el crecimiento económico y la innovación, y se describen los conocimientos, las capacidades y las actitudes esenciales vinculadas a cada una de ellas. (BOE, 2015)

En este Trabajo se abordarán herramientas que fomentan las competencias Digital (CD), Social y Cívica (CSC), Matemática y científico-tecnológica (MMCT), Aprender a aprender (AA) y Sentido de la iniciativa y del espíritu emprendedor (SIE), todas necesarias para llegar a resolver problemas matemáticos con éxito.

Una de estas herramientas principales es el entorno Moodle (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment), que es un gestor de contenidos académicos (en inglés LMS, o Learning Management System) creado por Martin Dougiamas a mitad del año 2001, que no fue conocido hasta el momento de su auge en 2008. Como se mostrará más adelante, Moodle posee muchos ingredientes que pueden aportar tanto al profesorado como al alumnado de ESO algunas formas de sacar mucho más provecho

al planteamiento de situaciones problemáticas, utilizando la tecnología como apoyo para su resolución.

Dos recursos significativos para la resolución de problemas que nos brinda Moodle son el **libro digital** y la **lección**. Un **libro digital** (o e-book) es un objeto informatizado con contenido de índole textual o diferente (como puede ser la contención de imágenes, vídeos, entornos interactivos, ...) que nace del resultado de integrar el concepto tradicional de libro con características propias de la evolución de las tecnologías de la información y la comunicación.

Por otra parte, una **lección** (de Moodle) es una secuencia de páginas web dentro del entorno, las cuales terminan siempre con uno o varios objetos de interacción, como pueden ser un botón que sobre el que podemos leer “Seguir” o varias opciones que pueden responder a una pregunta relacionada con el contenido del cuerpo de la página, muy útil para que el docente mida si el usuario es capaz de responderla gracias a la información vertida en la página.

El resultado de estos objetos de interacción dará lugar a un flujo o secuencia del visionado de las páginas, que previamente han sido programados por el docente, y que convertirán la experiencia de aprendizaje del estudiante en única y personalizada.

Este Trabajo de Fin de Máster está incluido en la modalidad de innovación educativa y seguirá la siguiente estructura:

- El capítulo 1 tiene por objeto el planteamiento del problema de innovación que presentamos. Partiremos de un análisis de lo que se entiende por *innovación educativa*, indicando lo que vamos a entender por *innovación*. También analizaremos la pertinencia del uso de Moodle como entorno de innovación educativa en el contexto del aula de Matemáticas de Educación Secundaria, así como su historia, orígenes y herramientas que integra. Seguiremos el desarrollo recordando al lector algunas de las innovaciones educativas más conocidas que han sido posibles gracias a este entorno virtual. Cierran este capítulo el planteamiento del objetivo general, los objetivos específicos y la descripción de las fases de trabajo que hemos seguido en el desarrollo del presenta Trabajo.
- Seguidamente, el capítulo 2 recoge la elaboración de un marco conceptual haciendo un recorrido por diferentes autores con contribuciones relacionadas al propósito de este Trabajo. Exploraremos, entre otros, los estudios donde se describen el diseño, desarrollo y evaluación de Moodle, las bases metodológicas del constructivismo social

en las que se apoya Moodle, o bien, los tipos de aprendizaje basados en medios electrónicos que se dan en la actualidad. Como consecuencia este aprendizaje, emergen recursos digitales precursores de los que se pretende desarrollar en este Trabajo, razón por la cual también se incluyen en este capítulo. Será imprescindible, a su vez, dedicar un apartado a la revisión de la literatura relacionada con el aprendizaje vía resolución de problemas y la inclusión de recursos tecnológicos para alcanzar este fin. Somos conscientes de que el uso de la tecnología lleva asociado un coste, que se traducen en factores que dificultan el aprendizaje. Comentaremos algunos de estos factores e introduciremos una herramienta de evaluación de Moodle como recurso educativo en línea.

- El capítulo 3 muestra el desarrollo de las herramientas y contenidos necesarios para construir el recurso didáctico que se propone como solución al problema de innovación. También se describe aquí el procedimiento seguido, a modo de guía, para un docente que considere ponerlo en práctica. Este capítulo finaliza con el planteamiento y justificación de la herramienta de evaluación para evaluar la viabilidad de la utilización de Moodle como recurso en línea con las utilidades diseñadas.
- En capítulo 4, a partir de los objetivos que nos planteamos en el capítulo 1, se establecen las conclusiones de este Trabajo. Finalmente, se añaden algunas propuestas de mejora que podrían potenciar determinados aspectos que se desarrollan a lo largo de este Trabajo de Fin de Máster.

## CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INNOVACIÓN

### I.1. ¿QUÉ ES UNA INNOVACIÓN EDUCATIVA?

Según la RAE podemos construir una primera definición atendiendo a las características morfológicas de la palabra *innovación*:

*In-*: Prefijo que aquí tiene el sentido de adentro o al interior.

*-Nova-*: Equivale a renovar, cambiar, novedad, hacer de nuevo, desconocido, inesperado, ...

*-ción*: Sujivo que implica acción, actividad o proceso, resultado o efecto.

Es de aquí de donde surge la definición formal de innovación según la Real Academia de la Lengua: innovación es “acción y efecto de innovar”, es decir, “acción y efecto de mudar o alterar algo, introduciendo novedades”.

Por tanto, la innovación educativa será la aplicación de la innovación en el campo de la enseñanza y el aprendizaje académico.

Resulta de interés el análisis que realiza Sánchez (2005) sobre ocho factores (*Ilustración 1*) que constituyen lo que él considera como innovación. Pese a que están relacionados, este autor se esfuerza en diferenciar cada uno del término *innovación*, los cuales pasamos a resumir brevemente:

- 1) *Innovación frente a investigación*: La investigación, como parte del método científico, sigue una metodología empirista y positivista, y su objetivo fundamental es la búsqueda de nuevos conocimientos. En el ámbito educativo, la innovación forma parte de la investigación, pero se centra en ámbitos docentes más ligados a metodologías prácticas.
- 2) *Innovación frente a renovación*: Aunque muchos autores tienden a identificar innovación con renovación, entenderemos que el término renovación tiene connotaciones de cambio por ser algo obsoleto. La innovación no necesariamente sustituye algo inválido por algo válido, sino que pretende mejorar lo que se tenía anteriormente, asunto que puede conseguirse mediante cambio o adición de elementos.



*Ilustración 1: Factores relacionados con la innovación educativa (Sánchez, 2005).*

- 3) *Innovación frente a reforma*: Entendemos reforma (educativa) como un proceso dirigido principalmente a modificar el marco general de la enseñanza (metas, estructura, organización, ...) atendiendo a factores socioculturales, políticos y económicos. Una reforma abarca muchos más procedimientos que una innovación.
- 4) *Innovación frente a revolución*: Si bien la innovación normalmente viene dada por la introducción paulatina de pequeños elementos en la forma de educar, una revolución tiene connotaciones de muchos cambios fuertes en muy poco tiempo, de connotaciones radicales que contemplan estructuras, valores y al propio sistema educativo.
- 5) *Innovación frente a tecnología*: La tecnología es el conjunto de instrumentos o técnicas novedosas en información y comunicación que se utilizan habitualmente en una disciplina. Por tanto, la tecnología es una forma de innovación, pero no toda la innovación es tecnología.
- 6) *Innovación frente investigación-acción*: La investigación-acción se relaciona con la acción de resolver problemas prácticos que aparecen en el día a día, está entre los términos de investigación e innovación, pero más próximo al constructo de innovación.
- 7) *Innovación frente a cambio*: Entendemos cambio por un hecho observable, que ha sido observado y en el que se ha detectado una modificación frente al estado inicial. A nivel educativo podría ser una práctica diaria en el aula, interacción del profesor y el alumnado, la disposición de aula,... Sin embargo, y a pesar de que una innovación conlleva cambios, existe una diferencia intencional: un cambio espontáneo y no planificado puede no formar parte de una innovación educativa. Por tanto, innovación educativa conlleva cambios planificados e intencionales en la forma de educar.
- 8) *Innovación frente a mejora*: No siempre que se realiza una innovación educativa en el aula se produce una mejora. Por tanto, el término innovación ha de ir relacionado con una evaluación para determinar tal mejora. Además, esta mejora irá llegando de forma paulatina, pues de lo contrario la innovación sería una revolución.

Existen diferentes autores que han emitido su propia definición de lo que es una innovación educativa. Desde los albores de la innovación en Educación, Nichols (1983, página 4) afirma que "una innovación es una idea, objeto, o práctica percibida como



nueva por un individuo o individuos, que intenta introducir mejoras en relación a objetivos deseados, que tiene una fundamentación, y que se planifica, desarrolla y evalúa”.

En una misma línea, Cañal de León (2002) remarca que una innovación educativa es un “conjunto de ideas, procesos y estrategias, más o menos sistematizados, mediante los cuales se trata de introducir y provocar cambios en las prácticas educativas vigentes”.

Sánchez (2005) emite una definición propia: “Innovación educativa es el proceso realizado de *forma deliberada*, por un docente o varios con el *objetivo de mejorar* la praxis educativa, a través de un cambio positivo originado como respuesta a un problema, a la revisión de la propia praxis inducida interna o externamente y en un contexto concreto como es el centro educativo y/o aula”.

Pérez y Tejedor (2016) indican que una innovación educativa involucra al profesor, al estudiante y la tecnología que se involucra en la formación. Fruto de ello, y a modo de ejemplo de innovaciones en la educación con un alto uso de las herramientas tecnológicas, hoy en día se avanza en el desarrollo de los cursos masivos en línea (MOOCs), los seminarios en línea (*webinars*), las clases invertidas (*flipped-classrooms*), blogs, wikis o formación universitaria abierta (*Open Course Ware*). De hecho, Pérez y Tejedor defienden dos tipologías principales de innovación:

- Las innovaciones *top-down*: son las que permiten el desarrollo de plataformas tecnológicas y se basan en el e-learning, pasando por el blended learning y desembocando en la clase invertida (*flipped-classroom*). Estos procesos de alto impacto y visibilidad son innovaciones promovidas de manera institucional.
- Las innovaciones *bottom-up*: son aquellas que se desarrollan en las aulas de clase. Son posibles gracias a las buenas prácticas de los docentes y vienen caracterizadas por su entusiasmo que rompen con metodologías tradicionales. Son, entre otras, las metodologías centradas en el aprendizaje por casos, aprendizaje cooperativo, aprendizaje experimental (*experiential learning*), aprendizaje basado en problemas (*problem-based learning*) o el aprendizaje por proyectos (*project-oriented learning*).

Una vez revisado este concepto a través de diferentes autores, *entenderemos por innovación educativa todo aquel proceso programado y justificado, que los docentes puedan ejecutar en el aula con el objetivo de mejorar la práctica educativa, como respuesta a uno o*

varios problemas que surgen tras la evaluación de las metodologías utilizadas anteriormente sobre el alumnado en el contexto de centro educativo.

## 1.2. ¿POR QUÉ HACER UNA INNOVACIÓN DE ESTE TIPO?

Una motivación para orientar este trabajo fue la lectura del trabajo de Reyes (2012) en el que se propone a los docentes de Matemáticas en formación, utilizar el libro digital como recurso con enlaces externos y ventanas interactivas integradas en él. Se trata de fomentar la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas aplicando una serie de episodios que establecen en Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013), y que vienen derivadas de las fases propuestas por Polya (1945).

La acertada utilización de diferentes recursos multimedia e interactivos, frente a la resolución con lápiz y papel, estimula la intuición matemática y da una perspectiva nueva y dinámica a la resolución de los problemas, pudiendo el estudiante llegar más lejos en la exploración de las situaciones y dar un paso más hacia la abstracción y las propiedades puramente matemáticas.

En cambio, un inconveniente observado en la elaboración de materiales de aula es el uso de hardware (*iPad* y *Macintosh*) y software privativos (*iPub*, *iBooks Author*) y que el recurso que se elabore debe ser depositado en un repositorio de aplicaciones móviles (*iTunes*).

Como se comentará en la sección 1.3, donde analizaremos a Moodle como recurso educativo, el uso de herramientas de LMS (*Learning Management System* o Sistema de Administración del Aprendizaje) está muy extendido a nivel global y existe una multitud de experiencias de aula que vuelcan resultados muy positivos en el aprendizaje de los estudiantes, y cuyo factor común es el uso de Moodle, tanto en enseñanza superior como en enseñanzas medias.

El desarrollo técnico de Moodle también se ha expandido, de forma que ya no precisamos de un ordenador para poder utilizarlo, sino que es posible trabajar con Moodle desde dispositivos multiplataforma (ordenador, tabletas y teléfonos móviles), lo cual elimina la fuerte limitación de la adquisición de un hardware no tan accesible económicamente.

Proponemos utilizar Moodle como herramienta establecida en educación y organizadora de recursos potenciales, como los que se desarrollan en este Trabajo de Fin de Máster, y daremos propuestas de software libre -o privativo con versión gratuita- que permitirán generar distintos materiales que conformarán los recursos a los que hacemos referencia.



Ilustración 2: Moodle.org es el sitio oficial dedicado a Moodle.

### 1.3. UN EJEMPLO DE INNOVACIÓN: MOODLE

Como indicábamos anteriormente, Moodle está categorizado como recurso de *Learning Management System (LMS)*, un gestor de contenidos académicos definido por entornos dinámicos organizados por módulos, de ahí el acrónimo que le da nombre: *Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment (Entorno de aprendizaje modular dinámico orientado a objetos)*. Es Martin Dougiamas (Ilustración 3) quien, a mediados de 2001, crea una revolucionaria herramienta llena de recursos que favorecen las experiencias de aprendizaje, tanto de forma presencial como a distancia.



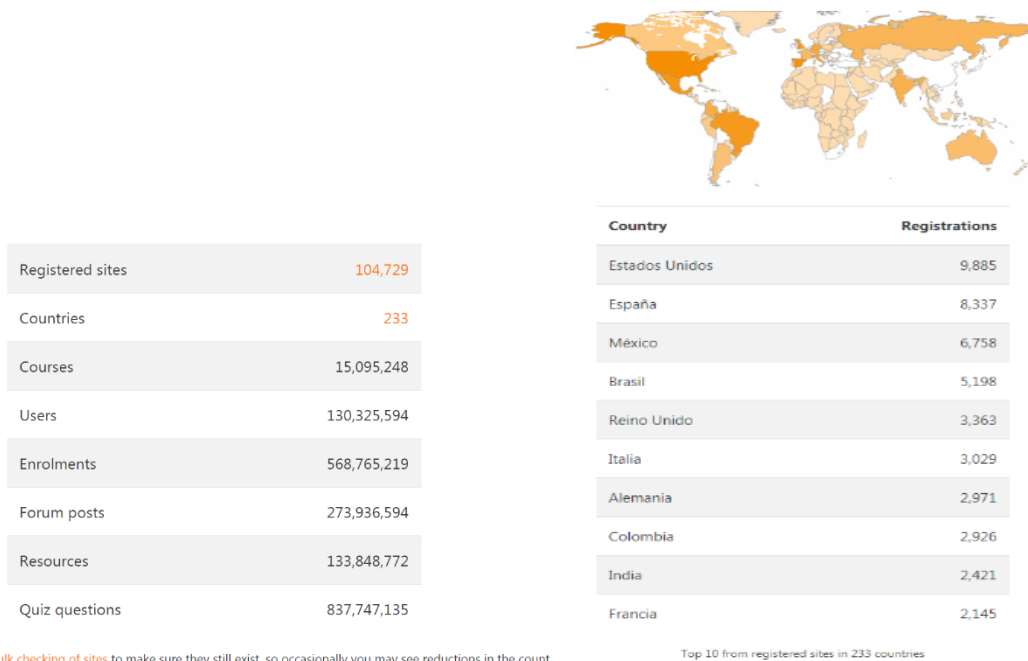
Ilustración 3: Martin Dougiamas, fundador de Moodle.

Moodle tiene una licencia de *GNU GPL (GNU<sup>1</sup> is not Unix General Public License o GNU no es Unix - licencia pública general)* que permite a todo aquel usuario que accede al código del software modificarlo libremente. La Fundación Moodle comparte con los usuarios

<sup>1</sup> (Extraído de <https://www.gnu.org/>) El proyecto GNU es un proyecto colaborativo de software libre con el objetivo de implementar un sistema operativo completamente libre: el sistema GNU, precursor de Linux. En concreto, el software libre implica que los usuarios tienen las cuatro libertades esenciales: (0) ejecutar el programa, (1) estudiar y modificar el código fuente del programa, (2) redistribuir copias exactas y (3) distribuir versiones modificadas. El proyecto GNU fue anunciado por Richard Stallman en 1983.

un completo sitio (<http://moodle.org>). En esta web podemos encontrar desde la última versión instalable de Moodle (actualizaciones realizadas por el equipo de desarrollo y la Comunidad de usuarios de Moodle), numerosos tutoriales sobre todos los aspectos y recursos (paquetes) de Moodle, como la red *Moodle.net*, en la que podemos encontrar actividades implementadas listas para utilizar en nuestro aula virtual personal y datos estadísticos sobre Moodle. En particular resaltaremos de las estadísticas de la *Ilustración 4* que existen más de 104.000 sitios Moodle registrados en 233 países, contando con más de 130 millones de usuarios.

Se debe tener en cuenta que este software no es de utilización directa en un ordenador personal, sino que es un gestor de páginas web que debe ser configurado en un hosting o espacio web virtual. En la sección 2 (página 28), en el que describimos una forma simplificada de creación de espacio Moodle, se aclara esta idea.



We perform regular bulk checking of sites to make sure they still exist, so occasionally you may see reductions in the count

Top 10 from registered sites in 233 countries

*Ilustración 4: Estadísticas generales y usuarios en los 10 países que más utilizan Moodle (junio de 2018). Fuente: <https://moodle.net/stats/>.*

A continuación procederemos a justificar la utilización de Moodle como herramienta para la educación en línea.

Los datos que arrojan las estadísticas del uso de Moodle en el mundo académico son, en parte, justificadas por el cumplimiento de los requerimientos que Clarenc y otros (2013) establecen para los entornos virtuales educativos:

*Interactividad:* Se relaciona con la conversación bidireccional entre receptor y emisor. El alumno tiene acceso a la diversidad de información (material, recursos, ...), y es él mismo el protagonista de su propio aprendizaje.

*Flexibilidad:* la plataforma no se mantiene rígida a los planes de estudio, sino que puede adaptarse tanto a la pedagogía como a los contenidos adoptados por una organización.

*Escalabilidad:* la plataforma funciona con la misma calidad, independientemente de la cantidad de usuarios registrados y activos.

*Estandarización:* Se pueden utilizar cursos y/o materiales que hayan sido realizados por terceros.

*Usabilidad:* Se refiere a la rapidez y facilidad con que las personas realizan tareas propias mediante el uso de un producto. Se entiende por usabilidad que cumpla con estas tres subpropiedades:

*Efectividad:* para que los usuarios logren los objetivos con precisión y plenitud.

*Eficiencia:* se refiere a los recursos empleados para lograr la precisión y plenitud.

*Satisfacción:* es el grado de complacencia con el uso de la plataforma.

*Funcionalidad:* se refiere a las características que permiten que una plataforma responda a los requerimientos y necesidades de los usuarios, y está relacionada con la escalabilidad.

*Ubicuidad:* es la capacidad de una plataforma de hacerle sentir al usuario la seguridad de que en ella encontrará todo lo que necesita.

*Persuabilidad:* capacidad que tiene de una plataforma de convencer, fidelizar, a un usuario mediante su uso.

*Accesibilidad:* se refiere a los medios que permiten a personas con otras capacidades a acceder a la información online. Algunos dispositivos que lo permiten son unas subrutinas llamadas *screen readers*, que forman parte de los requerimientos técnicos del consorcio W3C de accesibilidad en la web.

Al acceder a Moodle, cualquier usuario puede diferenciar hasta 3 zonas principales, aunque este número puede cambiar dependiendo de la plantilla de estilos utilizada para mostrar la interfaz del aula virtual. En las versiones más modernas, el usuario puede esconder temporalmente columnas completas, dependiendo, por ejemplo, de si necesita más espacio para visualización en la ventana. Describiremos, por tanto, las que el lector se encontrará en MoodleCloud con la plantilla básica, en caso de que decida seguir los pasos que les indicamos (*Ilustración 5*).

- La columna de contenidos: Es la zona central y principal para los usuarios y a la que se dedica mayor proporción de pantalla. El usuario encontrará ahí una categorización en secciones elegida por el docente para organizar los diferentes recursos (chats, foros, ...), actividades (wikis, cuestionarios, tareas, ...) y documentos (pdf, páginas web, enlaces externos a internet, videos, sonido, imágenes, ...) necesarios para la actividad docente.



Ilustración 5: Interfaz de un aula virtual Moodle de MoodleCloud, y zonas principales.

- El menú de herramientas: Se sitúa en una columna secundaria y el usuario puede encontrar diferentes enlaces útiles (a la página principal, otros cursos donde el usuario se inscribió, las secciones del curso, perfil, ...) que le harán más sencilla la navegación por el sitio web.
- El menú de bloques: es una zona lateral complementaria en la que el usuario puede tener acceso a la parte de comunicación de la plataforma (calendario, eventos, mensajería, información, ...) que ayudan al usuario en su organización.

En nuestra descripción simplificada de Moodle hemos convenido indicar las herramientas con las que cuenta esta plataforma agrupadas según su funcionalidad (Clarenc y otros, 2013):

- a) *Orientadas al aprendizaje*: Foros, buscador de foros, soporte de múltiples formatos, e-portafolio, intercambio de archivos, comunicación sincrónica (chat), comunicación asincrónica (mensajería, correo electrónico), blogs (weblogs grupales, individuales y blogs de asignaturas), presentación multimedia (videoconferencia), wikis.
- b) *Orientadas a la productividad*: Anotaciones personales o favoritos, calendario y revisión de progreso, buscador de cursos, ayuda en el uso de la plataforma, mecanismos de sincronización y trabajo fuera de línea, control de publicación, páginas caducadas y enlaces, novedades del curso.
- c) *Implicación de los estudiantes*: Grupos de trabajo, autovaloraciones, grupos de estudio, perfil del estudiante.
- d) *Soporte*: Autenticación de usuarios, registro de estudiantes, auditoría.
- e) *Publicación de cursos y contenidos*: Test y resultados automatizados, administración del curso, seguimiento del estudiante, apoyo al creador del curso, calificación en línea.
- f) *Diseño y planes de estudio*: Conformidad con la accesibilidad, la reutilización y compartición de contenidos, plantillas de cursos, personalización del entorno, conformidad con el diseño de la educación (IMS, AICC y ADL).

Todas estas herramientas permiten a Moodle completar con garantías los estándares de un buen entorno virtual educativo.

#### 1.4. OTRAS INNOVACIONES EDUCATIVAS CENTRADAS EN MOODLE

Con casi 20 años de edad, Moodle fue una revolucionaria herramienta que se popularizó al principio en la docencia universitaria, pero, gracias a un desarrollo exponencial de su versatilidad y sus herramientas, también llegó a formar parte de una forma cambiante de dar clase, sustituyendo las fotocopias por archivos *pdf* colgados en un mismo lugar. Luego surgió el uso de los cuestionarios digitales como un novedoso y atractivo instrumento de evaluación, e incluso se ha llegado a convertir en una herramienta organizativa para el profesor y el estudiante, en el sentido en que el docente habrá de utilizar Moodle para diseñar secuencias completas de aprendizaje. Es el estudiante el que deberá aliarse de Moodle para estudiar en casa, cuando el método de enseñanza y aprendizaje es la clase invertida (*flipped-classroom*), una innovación educativa muy reciente.

Pero no es la clase invertida la única innovación que ha supuesto Moodle: el aprendizaje por proyectos es también un espacio común donde los estudiantes no sólo pueden



interactuar, sino que también pueden usar Moodle como organizador de toda la información de utilidad que vayan consiguiendo e ir marcando los progresos en las tareas finalizadas con éxito.

La atención a la diversidad también se hace más cercana a los estudiantes con diferentes dificultades de aprendizaje a través de itinerarios de aprendizaje alternativos, teniendo el profesor la oportunidad de hacer un seguimiento más exhaustivo en los avances que vayan haciendo estos alumnos por sus rutas de aprendizaje.

La última tendencia, junto con la clase invertida da un giro a la forma tradicional de enseñanza: viene representada por las técnicas de gamificación. Este asunto ha sido desarrollado de forma intencional ante un sector de estudiantes azotado por el desinterés y el rechazo hacia ciertas materias. Una técnica recientemente añadida a Moodle para recrear la gamificación es la adquisición de *badges* o insignias. El docente puede diseñar unas insignias que aparecerán en el perfil del estudiante cuando consiga determinados logros (hitos), como la visualización de algún documento, la realización de un cuestionario exitosamente, terminar una lección, o incluso cuando termine de interactuar con todos los elementos que configuran el curso de Moodle. Para facilitar la gestión de insignias se puede utilizar una “mochila” digital externa a Moodle, que son portales en los que se almacenan las insignias de todos los sitios que conectan con el perfil de un mismo estudiante. Un lugar recurrido para la gestión de insignias es <http://opengadges.me>.



Ilustración 6: Ejemplos de insignias o badges en Moodle. Cada insignia lleva un texto con el logro alcanzado.

Pero Moodle no sólo queda para las enseñanzas académicas. Son cada vez más las empresas y organizaciones que utilizan Moodle para brindar a sus empleados y colaboradores una alternativa a las clases presenciales focalizando en la libertad de horarios y localizaciones, hito que se ve favorecido por el desarrollo de aplicaciones



Moodle en dispositivos móviles y portátiles que brindan al usuario total libertad de movimientos y de horarios. Se ha convertido en la base de la teleformación por excelencia, y ha sido la semilla para el florecimiento de diferentes plataformas LMS.

## 1.5. OBJETIVOS

Nuestro propósito general para este Trabajo de Fin de Máster es el de desarrollar recursos didácticos innovadores basados en herramientas tecnológicas disponibles en la red (Moodle, GeoGebra, YouTube, GoConqr, ...) organizados y preparados para ser utilizados en las aulas de Educación Secundaria.

Para este fin, se tratará de alcanzar los siguientes objetivos:

1. Configurar un espacio virtual de discusión, consulta y resolución de problemas, en el que se incluyen determinadas herramientas digitales haciendo uso de MoodleCloud.
2. Integrar en ese espacio los materiales digitales convencionales (documentos, videos, enlaces, ...), así como artilugios más complejos en un mismo entorno, focalizando la utilización de herramientas matemáticas y su utilización en el aula de clase.
3. Proponer diferentes estrategias de desarrollo de cursos, desarrollando diferentes líneas de aprendizaje o métodos de evaluación, tanto individuales como colaborativos, estudiando con detenimiento la parte pedagógica de su utilización.
4. Analizar la viabilidad de la inclusión de estas herramientas desarrolladas en el aula de Matemáticas para los niveles educativos de Secundaria.
5. Justificar las ventajas que se pueden atribuir al uso de libros digitales y lecciones de Moodle, y su aportación al aprendizaje por resolución de problemas en un entorno único y suficiente para el alumnado.
6. Establecer criterios de diseño y propuestas de mejora, como guía del docente para la creación de situaciones de aprendizaje significativas en el aula de Matemáticas.

El trabajo se desarrollará en siete fases principales que se recogen en la infografía de la *Ilustración 7*.



Ilustración 7: Esquema con las fases de este Trabajo de Fin de Máster.

Describimos a continuación, con más profundidad, las fases de nuestro Trabajo:

En primer lugar nos proponemos hacer una revisión bibliográfica para conocer los avances en la línea de innovación elegida, así como para configurar un marco conceptual adecuado que permita desarrollar nuestra innovación. También buscaremos los orígenes del entorno Moodle, donde implementaremos nuestros recursos digitales para el aprendizaje. La didáctica de las matemáticas será también objeto de exploración en esta fase, y en particular, nos centraremos en la resolución de problemas de Matemáticas.

En la segunda fase se tratará de configurar un marco conceptual que establecerá el concepto de innovación educativa y todos los conceptos que derivan de éste durante el desarrollo del presente Trabajo, suministrándole la consistencia que requiere.

En la tercera fase se mostrarán los principales pasos para solicitar gratuitamente un sitio Moodle propio en <http://moodlecloud.com> y describir las principales herramientas para construir todos los materiales digitales que conformarán los recursos educativos que describimos en esta innovación.

La fase 4 se dedicará a seleccionar algunos problemas relacionados con contenidos curriculares de la asignatura de Matemáticas de los niveles de ESO y Bachillerato para ejemplificar el uso de un libro y una lección de Moodle, y desarrollándolos para contribuir al aprendizaje por resolución de problemas.

En la quinta fase se tratará de diseñar, construir e incluir en el sitio Moodle creado los recursos digitales (libro y lección) en los que se muestra al lector de forma interactiva dos metodologías basadas en el aprendizaje por resolución de problemas.

En la sexta fase analizaremos los escenarios de resolución de los problemas seleccionados, atendiendo a los puntos importantes para que el docente pueda hacer un buen diseño de los recursos digitales anteriormente citados.

En la séptima y última fase se propondrá una herramienta de evaluación de la efectividad de Moodle y los recursos diseñados en este espacio virtual como recurso de aprendizaje en línea, atendiendo a la valoración de ciertos factores.

Se tratará en definitiva de configurar un espacio virtual Moodle gratuito en <http://moodlecloud.com> en el que se incorporarán algunos problemas organizados en torno a los episodios descritos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013).

Una vez diseñado el libro digital de resolución de problemas, nos dispondremos a elaborar una lección con una metodología alternativa: resolución, a partir de distintas

preguntas que representan fases parciales del proceso de resolución. El estudiante podrá seguir diferentes rutas o recibir retroalimentaciones a partir de las respuestas que vaya introduciendo, de acuerdo con lo que hemos considerado que es una *lección* de Moodle<sup>2</sup>.

Para comentar el análisis de estos dos escenarios se han añadido vínculos en la versión digital (*pdf*) de este documento hacia el sitio Moodle previamente diseñado, dándole la posibilidad al lector de ir experimentando la situación que se propone en cada escenario.

## CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

Moodle constituye un software basado en muchas herramientas y recursos para monitorizar el aprendizaje de alumnos a los que se les propone una forma semipresencial o no presencial de aprendizaje. Se hizo muy popular a partir de su creación porque es un software de distribución libre, lo que conlleva la existencia de una gran comunidad de seguidores que consiguen hacer un mantenimiento gratuito de su código y seguir generando nuevos recursos sin coste económico alguno y que siempre están al alcance de todos los usuarios.

El siglo XXI ha sido denominado como el siglo de la información y la comunicación en tiempo real. Esto viene provocado por un cambio tecnológico que avanza a pasos agigantados. Los cambios en la tecnología a los que nos referimos también han permitido la reformulación de muchas facetas del mundo educativo, como la aparición de la educación en línea. Taylor y Maor comienzan un estudio en el año 1998 cómo la tecnología influye en el aprendizaje. Trabajan con Dougiamas para diseñar una plataforma con papel de innovación educativa, pero que fomenta un aprendizaje en línea y favorece la interacción social de los estudiantes.

De ese proyecto (Dougiamas, 2001) nace Moodle, un recurso de tecnología en línea que contiene numerosas herramientas para el aprendizaje desarrolladas con técnicas social-constructivistas para la impartición de una asignatura basada en el constructivismo social.

Según Calzadilla (2002) las TICs presentan ventajas para el proceso de aprendizaje colaborativo, entre las que se destacan: la estimulación de la comunicación interpersonal, la facilitación del trabajo colaborativo, el seguimiento del proceso del grupo tanto a un nivel individual como colectivo, el acceso a la información y a contenidos de aprendizaje,

---

<sup>2</sup> El concepto de lección de Moodle se estableció al final de la introducción, en la página 3.

la gestión de la administración de alumnos, la creación de ejercicios de evaluación y la autoevaluación.

Con la aparición de nuevos recursos para el aprendizaje basados en las TICs se abre la puerta a nuevos conceptos como *e-learning*, *m-learning* y *u-learning*. E-learning se refiere al aprendizaje y la utilización de tecnologías de la información y la comunicación con un propósito de aprendizaje. El inminente desarrollo de Internet hace posible la adaptación de contenidos a plataformas de aprendizaje, pero también podría incluirse las tecnologías Multimedia o los Simuladores (Conde, 2007). M-learning (o *mobile learning*) se refiere al uso de tecnologías móviles para los fines del aprendizaje, remarcando no sólo la utilización de dispositivos móviles (portátiles, tabletas, teléfonos móviles) como herramientas centrales del aprendizaje, sino también la posibilidad de que el aprendizaje se realice a partir de la movilidad de los estudiantes (Conde, 2007). Esta forma de aprendizaje es posible por el gran desarrollo actual de unas comunicaciones inalámbricas eficaces y globalizadas. Finalmente, **u-learning** (o *ubiquous learning*) es el concepto que engloba todas las formas de aprendizaje a partir de TICs. “Consistiría en permitir al receptor final del conocimiento poder adquirirlo y modelarlo [dicho conocimiento] en cualquier momento, lugar y situación” (Conde, 2007).

Se han originado multitud de plataformas de autoaprendizaje y de aprendizaje mixto (o *blended learning*<sup>3</sup>) que hacen más versátil el aprendizaje suprimiendo las barreras espacio-temporales de la educación en línea.

Quedan atrás los métodos estáticos de aprendizaje, como los libros de texto. Reyes (2012) afirma que, aunque los libros de texto eran el medio de estudio de los que ahora son profesores de matemáticas, en la actualidad el aula de matemáticas se ha vuelto lo suficientemente dinámica para que el docente recabe los recursos educativos acordes a las necesidades que el alumnado tenga en el aula. Es conveniente que el profesorado no limite dogmáticamente unos contenidos genéricos, como los que pueden encontrarse en un libro de texto tradicional.

Los libros digitales se convierten en el nuevo punto de mira. Son varios los portales que han desarrollado este tipo de recurso para facilitar la adquisición de contenidos, como

---

<sup>3</sup> Se llama aprendizaje mixto (o *blended learning*) a la combinación de trabajo en el aula con el trabajo en casa haciendo uso tanto de internet como de los medios digitales. El *blended learning* también se conoce como *educación flexible*, *educación semipresencial* o *modelo híbrido*. Con este tipo de aprendizaje se busca la continuidad y mejor aprovechamiento del tiempo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

puede ser el portal online de GeoGebra (<http://GeoGebra.org>). Desde el punto de vista técnico, es conveniente indicar que los libros digitales de Moodle tienen un formato enriquecido en lenguaje HTML.

A título informativo, el formato de un texto se refiere a las características gráficas que caracterizan un texto, como pueden ser el tipo de letra, el tamaño, color, las formas de énfasis que puedan mostrar (cursiva, negrilla, subrayado, ...). Enriquecer el texto es agregar estas características a un determinado texto, aunque en particular suele decirse que el procesador de textos utiliza un formato enriquecido. El lenguaje HTML puede agregar otras características adicionales y ocultas para el usuario, pero que, a través de un determinado código y tras la compilación (o interpretación del código por una rutina interna del programa), se multiplican las posibilidades de enriquecimiento de texto, como la aparición de botones de acción, la creación de tablas y formularios, la inserción de imágenes, ...

Volviendo al recurso, los libros digitales de Moodle están formados por páginas que siguen un único índice de hasta dos niveles de profundidad (capítulo y sección) y que siempre permanece a la vista del estudiante durante su lectura. La principal ventaja de utilizar libros digitales es la interacción en tiempo real con ellos, añadiendo determinados apartados teórico-prácticos para que los estudiantes, por ejemplo, recuerden los conceptos y procesos necesarios para atender a la diversidad del aula. Esto se puede hacer mediante la generación de contenido audiovisual por parte del propio docente, o la recopilación de otros recursos que hayan creado anteriormente otros profesionales de la enseñanza, y que pueden ser incrustados en los mismos.

El libro digital de Moodle se complementa con otro recurso menos utilizado en esta herramienta: las lecciones. Las lecciones de Moodle son desarrollos interactivos de contenido (bien teórico o bien práctico) en el que la interacción del estudiante da lugar a diferentes flujos o recorridos que se programan con anterioridad por el diseñador del recurso para que los estudiantes consigan llegar a un mismo objetivo, o bien un objetivo acorde a los conocimientos de cada uno. Un ejemplo claro puede ser el desarrollo de un cierto problema que comprenda varias fases, como pueden ser las diferentes fases de resolución de una ecuación completa de 2º grado:

- operar y transponer términos,
- identificar el tipo de ecuación,
- identificar los valores de los parámetros de la resolvente,

- aplicar dicha fórmula y
- calcular el valor o valores resultantes.

Con este recurso podemos ayudar a los estudiantes, facilitando con ello la atención al alumnado acorde a su ritmo de aprendizaje, esto es, atendiendo así a la diversidad en el aula. También puede ayudarse a los alumnos a corregir errores durante la ejecución de los problemas: el docente puede establecer rutas a partir de fases puntuales durante la lección. El estudiante que tenga dificultades podría acceder a rutas alternativas explicadas, por ejemplo, con más detalle o a través de videos. Luego podría volver a intentar el objetivo principal al que se enfrentaba. La detección de dichos errores se realiza mediante la formulación de una pregunta (a elegir entre respuesta múltiple, abierta, emparejamiento, ...) de una pantalla a la siguiente.

En relación a la asignatura de matemáticas, uno de los campos en el que los alumnos suelen tener más dificultades es la resolución de problemas. Polya (1945) realiza un primer acercamiento hacia la resolución de problemas estableciendo algunos heurísticos o estrategias de resolución. Señala la importancia de atender a cuatro fases en la resolución:

- elaborar un plan,
- identificar los datos,
- hacer un diagrama,
- volver atrás para comprobar las soluciones,

con la intención de que los estudiantes tengan algunas vías para poder seguir el proceso de resolución con éxito. Schoenfeld (1992), aboga por la elaboración de una lista de heurísticos o estrategias no tan generales, sino más particulares con el objetivo de facilitar aún más la resolución. Según English & Sriraman (2010), se debería desarrollar la modelización matemática, hacer un avance en la resolución de problemas que involucren simulaciones de problemas auténticos, reales, (como elegir un equipo para los Juegos Olímpicos) y enrolar a los estudiantes en el pensamiento matemático que involucra la creación e interpretación de situaciones y que requiere computar, ejecutar procedimientos y razonamientos deductivos.

Hemos considerado que Moodle puede ser una herramienta que facilite la resolución de problemas, si se tiene en mente la posibilidad de que se pueden incluir diversos recursos que puedan dotar al alumno de mejor visión y comprensión de la situación que plantea

el problema. Además Moodle puede ser un apoyo para desarrollar diferentes estrategias de resolución.

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) investigaron las consecuencias positivas de la utilización de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) en la resolución de problemas de Matemáticas. El uso de esta y otras herramientas digitales abre la posibilidad de explorar la situación problemática desde diferentes puntos de vista. La primera, y más inminente ventaja, es la capacidad de configurar un marco pragmático de trabajo, que es aquel en el que el estudiante puede reexaminar una situación a partir de pequeños cambios en la misma, que pueden ocurrir, por ejemplo, al cambiar la posición de algunos elementos. Posteriormente, el estudiante recorre algunas fases o *episodios* en su razonamiento a la hora de resolver las tareas propuestas. Nos referimos al Análisis de las Relaciones entre los objetos matemáticos de manera Dinámica (ARD).

Los episodios propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) se relacionan con las fases propuestas por Polya (1945), pero incorporan el enfoque particular que les dota la disponibilidad de SGD y otras herramientas tecnológicas.

Un primer episodio lo constituye el denominado comprensión. Este episodio permite al estudiante dar sentido a toda la información que se le proporciona y permite una posible representación mediante un modelo dinámico.

El segundo episodio conlleva la exploración de todo el escenario de trabajo. Aparecen en esta fase las propiedades matemáticas y conjeturas que descubre a partir de la representación o haciendo pequeñas variaciones por el movimiento de algunos de los elementos y observando en la situación los elementos invariantes, lo cual le permitirá al estudiante pasar al tercer episodio.

Es interesante la relación que remarcan los autores sobre el transcurso de la resolución de un determinado problema respecto a la forma en que el profesorado puede mostrar un determinado camino para favorecer ciertos tipos de razonamiento.

El siguiente episodio es la búsqueda de múltiples aproximaciones para la resolución del problema. Dentro de las posibles formas de resolución de un problema encontramos el enfoque basado en diferentes sistemas de representación, como el analítico, el geométrico, el numérico, ... Un SGD permite interaccionar fácilmente con cada uno de ellos. La consecución del tercer episodio permite la extensión de un problema o su generalización, asunto que resulta impensable cuando se intenta la resolución a través de las clásicas herramientas de lápiz y papel.



Los autores denominan al cuarto y último episodio integración. Es la fase que aporta cohesión mediante la reflexión de los procesos que se han visto involucrados gracias, principalmente, al uso de herramientas tecnológicas digitales y, en concreto, a la creación de un modelo dinámico para la resolución del problema.

El uso de tecnología digital en la enseñanza de las Matemáticas también conlleva aspectos negativos. Werbach (2000) afirma que “las representaciones 3D o la reproducción de animaciones en video de alta resolución no necesariamente son efectivas para el aprendizaje”. Por ejemplo, el uso de la vista gráfica 3D en GeoGebra de una determinada superficie en GeoGebra no asegura que el estudiante entienda lo que ve representado, sobre todo si no tiene una vista que permita su comprensión. Según Werbach, el hecho de que un alumno cuente con más o menos herramientas no implican que adquieran en un momento dado los conceptos o procedimientos que se narran en un recurso digital: “también es preciso *enganchar* a nuestros alumnos”, y eso lo podemos hacer si conseguimos, por ejemplo, que los alumnos encuentren diferentes puntos de vista de un mismo ejercicio y fomentando el debate entre ellos.

Otros factores que entran en juego a la hora de utilizar tecnología digital como recurso para el aprendizaje son la necesidad de tener un dispositivo multimedia adecuado y la imposibilidad de poder utilizar el recurso si no se cuenta con una conexión fluida de internet inalámbrico (wifi). La agencia *We are social* (<http://wearesocial.com>) en colaboración con la fundación *Hootsuite* (<http://hootsuite.com>) hicieron recientemente un estudio (Kemp, 2018) en el que se afirma que en 2018 el 53% de la población mundial usa internet, con más de 4 billones de usuarios. En este estudio podemos se cita que el 68% de la población utiliza con frecuencia su teléfono móvil para acceder a internet. A partir de este estudio se puede inferir nuestra afirmación anterior, esto es, que las dificultades de utilización de Moodle se justificarán en poseer la infraestructura para mantener una buena conexión a internet.

Por tanto, la inclusión de herramientas tecnológicas en el aula y la creación de recursos con estas herramientas requiere que evaluemos su efectividad como recurso de aprendizaje. A pesar de que Moodle es un recurso con muchas fortalezas cuando se utiliza en un entorno de aprendizaje mixto, un mal diseño de sus contenidos puede producir fracaso en los estudiantes.

Tras la creación de Moodle, Dougiamas (2001), Taylor y Maor (2000), se diseñó un test de valoración de la percepción de diferentes factores -llamado *COLLES* (*Constructivist On-Line Learning Environment Survey*, o encuesta para entornos de aprendizaje

constructivistas en línea)- que los estudiantes y tutores de un curso implementaron como instrumento para evaluar a Moodle como recurso educativo innovador. Este test fue concebido en las bases del *constructivismo social*<sup>4</sup> y constituyó un medio con el que se trataba de evaluar o valorar el uso, pensando en planteamientos educativos:

*“COLLES comprende nuevas escalas para la investigación de entornos de aprendizaje. Las escalas fueron desarrolladas de la teoría del constructivismo social (incluyendo el construccionismo social, el constructivismo crítico, la coparticipación y la cognición social situada) el cual lidera estudios vanguardistas en las predisposiciones de los roles de los estudiantes que están mejorando la calidad de su comunicación en la enseñanza y aprendizaje basados en la web” (Taylor y Maor, 2000, página 3).*

Dougiamas (2002) se centró en analizar los siguientes aspectos en relación a los comentarios volcados por los alumnos y el docente que utilizó Moodle, siempre en relación con otro test implementado por los estudiantes: ATTLS.

ATTLS es el acrónimo de *The Attitudes Towards Thinking and Learning Survey* (encuesta de actitudes hacia el pensamiento y el aprendizaje). Dougiamas describe que este test fue diseñado y desarrollado por Galotti y otros (1999) para categorizar a un estudiante dependiendo de si es un conocedor conectado (CC) o un conocedor separado (CS). Esto indica si el estudiante aprende mejor de forma independiente o en conexión con otros. Las conclusiones de este estudio muestran que los estudiantes CC disfrutaban más con su aprendizaje, son cooperativos y suelen congeniar y compartir ideas del resto del grupo, mientras que los CS tienden a hacer más críticas y argumentaciones para aprender. El estudio establece que CC y CS son formas de aprendizaje independientes.

Del análisis de las respuestas volcadas en ATTLS, Dougiamas formuló unas hipótesis que le permitieron establecer los siguientes aspectos para el diseño de COLLES para evaluar la pertinencia de Moodle como recurso tecnológico para la educación en línea:

---

<sup>4</sup> El *constructivismo social* o *dialéctico* son teorías educativas en las que trabajaron los psicólogos Jean Piaget y Lev Vigotsky. El constructivismo es una teoría de aprendizaje en la que el sujeto aprende de su entorno, construye el conocimiento a partir de lo ya aprendido y de lo que va descubriendo. En particular, el constructivismo social es el que basa esa construcción del conocimiento mediante la interacción social con los individuos de su entorno, sus iguales, en las que cada individuo aprende de las aportaciones de cada persona del grupo, de los avances comunes y de los intereses del propio grupo, donde el principal canal de transmisión es la interacción social.

- *Relevancia profesional*: estudia el grado de importancia de las actividades en línea para las prácticas profesionales.
- *Pensamiento reflexivo*: no
- *Interactividad*: muestra si favorece el diálogo educativo enriquecedor.
- *Soporte del profesorado*: indica en qué manera los tutores permiten participar en el aprendizaje en línea.
- *Soporte de los compañeros*: determina el grado de soporte reforzador y sensible durante la comunicación entre compañeros.
- *Interpretación*: estudia si los estudiantes o los profesores consideran la efectividad de las comunicaciones que tienen los demás mediante la plataforma.

Las conclusiones tras el análisis de las respuestas de los tests ATTLS y COLLES revelaron que el test ATTLS indicaban que la mayoría de estudiantes había puntuado alto como concedores conectados (CC), y sus aportaciones en los foros lo confirmaban. Al mismo tiempo, casi todos los estudiantes habían mostrado una empatía adecuada.

Los resultados de COLLES indicaban que todos los estudiantes habían desarrollado una experiencia de aprendizaje cercana a la fórmula óptima. Sin embargo, las puntuaciones bajas de COLLES recaían en los aspectos de soporte de los compañeros y la interactividad. El curso siguiente se tomaron algunas medidas, como añadir normas en foros, o la inclusión de un editor de textos de formato enriquecido para estimular y fomentar la interacción.

Como ejemplo de aplicación, Brijlall y Maharaj (2017) utilizaron el mismo cuestionario para valorar la implantación de Moodle como herramienta para la docencia semipresencial: “[...] con estas ideas formulamos nuestra pregunta de investigación: ¿cómo podría ser utilizado Moodle como plataforma para promover de forma efectiva la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje en un contexto de aprendizaje?”.

Kotzer y Elran (2012) realizaron un estudio para dar más cohesión al diseño de un recurso tecnológico de aprendizaje en línea que se complementa con un análisis pedagógico.

Según los autores, el diseño de un curso en la modalidad de e-learning debe girar alrededor de tres aspectos fundamentales de forma interconectada: la tecnología, el contenido y la pedagogía (*Ilustración 8*).



Ilustración 8: Modelo de diseño de un recurso de e-learning.


La referencia a la tecnología requiere establecer las herramientas implementadas en el entorno y la forma en que se puedan adaptar a diferentes necesidades. Los contenidos se refieren a la forma en que integraremos los conocimientos en el curso, donde será necesario precisar las tareas a desarrollar. Finalmente, el diseño pedagógico lo conforman las distintas interrelaciones entre los diferentes usuarios (desde los estudiantes al docente), así como otros factores relacionados con los participantes, como puede ser la escuela o el contexto económico y social.

En consecuencia, la aplicación del cuestionario COLLES de Taylor y Maor, junto con el diseño pedagógico de Kotzer y Elran, pueden aportar consistencia a los posibles recursos generados en un curso de Moodle.

## CAPÍTULO 3. RESULTADOS

Los resultados de nuestro Trabajo de Fin de Máster se estructuran en cuatro partes. El lector podrá encontrar diferentes enlaces<sup>5</sup> en la versión digital de este Trabajo.

---

<sup>5</sup> **Nota importante:** A partir de este momento queremos potenciar la usabilidad de este Trabajo en todas sus dimensiones. En las imágenes donde vea el icono  haga clic sobre él y su navegador le llevará directamente a la página que indica la ilustración. De esta manera será mucho más cómodo navegar por el aula Moodle.

Es importante remarcar que la primera vez que acceda al aula virtual mediante un usuario y contraseña que se indican en la página de bienvenida (información a la derecha). Le recomendamos que entre como **profesor**, según las indicaciones de la pantalla.

En primer lugar, se presentarán los elementos técnicos necesarios que han dado lugar al espacio Moodle que hemos configurado.

Posteriormente se muestran los elementos básicos necesarios para hacer el diseño de un libro digital.

La tercera parte describe orientaciones de diseño y la construcción de una lección de Moodle.

Finalmente, se dota a la herramienta y recursos creados de un instrumento de evaluación que permitirá, al docente que la ponga en práctica, comprobar el grado de conveniencia de su uso y extraer conclusiones que permitan mejorar los recursos construidos.

### 3.1. ESPACIO MOODLE EN MOODLECLOUD

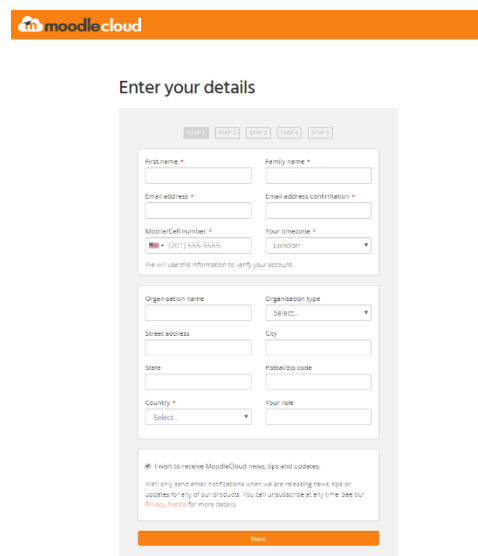
Moodle ha lanzado un servicio oficial de *hosting* gratuito que se llama Moodle Cloud.

En programación web, un *hosting* es un espacio virtual donde se introduce el código de una página web, de forma que cuando un usuario accede a esta página, puede observar la interfaz gráfica que produce ese código. En ocasiones, los *hostings* comerciales cuentan con unos programas internos (*scripts*) que instalan una plataforma automáticamente. Para los que no tienen esta posibilidad, hay que usar clientes *FTP* para subir el código, como *FileZilla* (software libre), y hacer una configuración extra.

En este espacio se proporciona un entorno Moodle completo y actualizado a la última versión publicada a todo aquel que quiera utilizarlo, pero que no dispone de los medios o conocimientos técnicos necesarios para instalarlo y ponerlo en marcha. Está especialmente destinado para pequeñas instituciones o, simplemente, para personas que quieren desarrollar algún tipo de formación con el apoyo de un gestor de cursos masivo (o LMS en su acrónimo inglés) y no tienen mucho dominio de instalaciones web.

Los pasos principales para solicitarlo son:

1. Acceder a <https://moodlecloud.com>,



The image shows a registration form for Moodle Cloud. At the top, there is an orange header with the Moodle Cloud logo. Below the header, the form is titled "Enter your details". It contains several input fields and dropdown menus for personal and organizational information. At the bottom, there is a checkbox for receiving updates and a "Next" button.

Field	Type
First name	Text input
Family name	Text input
Email address	Text input
Email address confirmation	Text input
Mobile/Cell number	Text input
Your timezone	Dropdown menu
Organisation name	Text input
Organisation type	Dropdown menu
Street address	Text input
City	Text input
State	Text input
Postcode/zip code	Text input
Country	Dropdown menu
Your role	Text input

Ilustración 9: Formulario de registro en MoodleCloud.

2. Indicar en un formulario de registro: nombre, apellidos, correo electrónico y un número de teléfono móvil (que se usará para validar la petición).
3. Elegir e introducir el nombre para el sitio Moodle, proceso que será validado por el sistema para que no haya dos sitios con el mismo nombre.

Pocos minutos después, el usuario dispondrá de un sitio Moodle completo, del que será administrador con permisos totales y donde se podrán implementar cursos, y dentro de éstos, los recursos que desee.

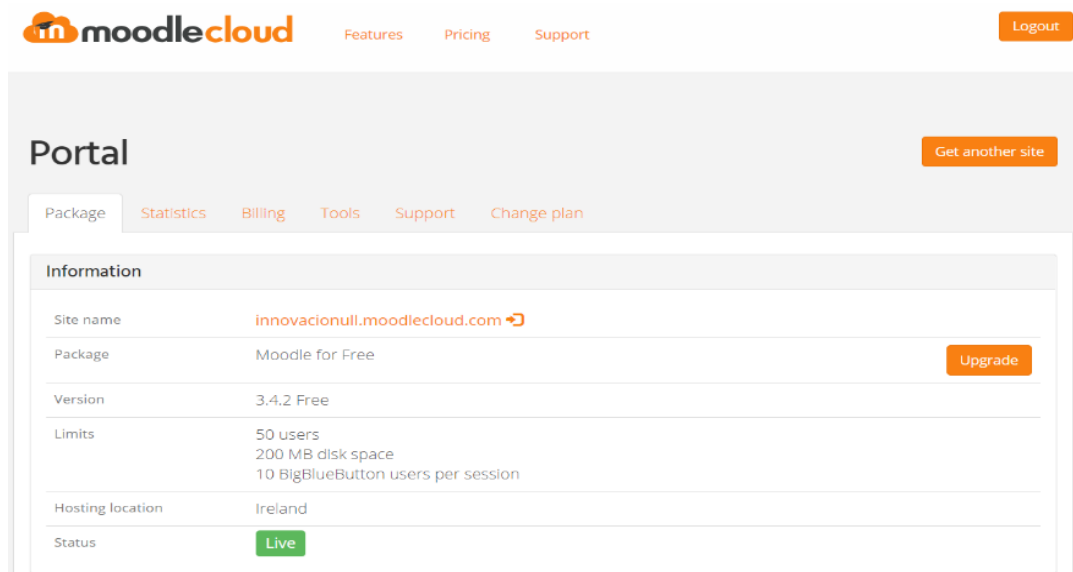


Ilustración 10: Página de usuario en MoodleCloud. Se incluyen los detalles de la cuenta activada.

Una vez que la cuenta esté configurada y el nombre del espacio elegido, podremos gestionar la cuenta gratuita (que estará sujeta a algunas limitaciones, pero que a nosotros no nos afectarán), de manera que si se paga una cuota de membresía (*upgrade*) se pueden ir eliminando las restricciones a las que está sujeta la gratuidad. En esta pantalla tendremos el enlace a nuestro sitio Moodle (*Ilustración 10*). En nuestro caso, nuestro site Moodle es <http://innovacionull.moodlecloud.com>, y en él se han añadido dos cuentas, una con rol de profesor y otra con rol de estudiante, para que el lector pueda manipular este entorno de pruebas.

Vamos a partir de la hipótesis que el docente sabe añadir cursos, agregar usuarios y generar los recursos más conocidos en Moodle (cuestionarios, archivos, enlaces, ...) y que esté algo familiarizado con el entorno. Existen numerosos tutoriales para llegar a manejar sin grandes dificultades el mismo. Por ejemplo, el propio canal de YouTube de Moodle (<https://www.youtube.com/user/moodlehq>). En particular, nosotros hemos habilitado un curso en nuestro site Moodle denominado “Herramientas para la enseñanza de las Matemáticas”, lugar donde alojaremos nuestros recursos. Puede verse una captura

de pantalla en la *Ilustración 11*. Este aula virtual contendrá un foro de uso general para que Moodle no pierda su esencia social-constructivista, y que cuya presencia estará justificada en la sección 3.6.

### 3.2. EL LIBRO DIGITAL. DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO Y ASPECTOS TÉCNICOS.

Como ya adelantábamos anteriormente, siguiendo los planteamientos de Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013), hemos seleccionado dos problemas cuya resolución pasará por los episodios descritos en el marco conceptual, para después diseñar un libro digital. Se tratará de hacer énfasis en la representación y alguno de los tipos de aproximación (geométrica, numérica, algebraica o funcional) y a partir de ahí, además de resolver el problema, se intentará generalizar y llegar a deducir alguna propiedad. Finalmente, aplicar el análisis para determinar la existencia de más soluciones. Esta es nuestra propuesta para un primer enfoque de uso del libro digital en el aprendizaje por resolución de problemas.

The screenshot shows a Moodle course interface. At the top, it says 'Innovación ULL' and 'Alberto García Díaz'. The course title is 'Herramientas para la enseñanza de las Matemáticas'. The main content area is divided into several sections: a welcome message, a 'Foro General' (General Forum) section, a 'Libro de Moodle' (Moodle Book) section with a globe icon, a 'Lección de Moodle' (Moodle Lesson) section, and an 'Evaluación de Moodle' (Moodle Evaluation) section showing a bar chart with three bars labeled 'ANEXO', 'COLLES Real', and 'COLLES Favorita'. The left sidebar contains navigation and administration options, and the right sidebar contains 'Recuerda...', 'Avisos Recientes', and 'Eventos Próximos'.

*Ilustración 11: Página del curso donde se alojan los recursos.*

Previamente a la presentación de los problemas, se incluye un primer capítulo en el libro digital con una breve explicación de la estructura de un libro digital, que herramientas necesitamos para generar videotutoriales para incrustar en Moodle, así como una forma de enriquecerlo y hacerlo más atractivo: algunos ejemplos de código HTML con el que se pueden incrustar diferentes elementos en las páginas del libro y las instrucciones que hay que seguir para poder incrustar sin dificultades los distintos códigos, o incluso algunos lugares donde encontrar otros.

Tabla De Contenidos

- 1. Libro de Moodle**
  - 1.1. Estructura de un Libro
  - 1.2. Creación de videotutoriales
  - 1.3. Códigos HTML
  - 1.4. Cómo incrustar HTML
- 2. Primer problema
  - 2.1. Primera parte
  - 2.2. Segunda parte
  - 2.3. Tercera parte
- 3. Segundo problema
  - 3.1. Primera parte
  - 3.2. Segunda parte
  - 3.3. Tercera parte

Ilustración 12: Tabla de contenidos del libro digital.

Lo primero que tenemos que tener que indicar es lo que significan los iconos de un libro. Esto se muestra en la *Ilustración 13*, y también se indica el procedimiento en caso de querer conservar el libro digital en formato *pdf*.

## 1. Libro de Moodle

### 1.1. Estructura de un Libro

Los libros de Moodle pueden estructurarse en capítulos y subcapítulos. Toda la estructura queda a la vista del alumno en forma de árbol, el cual puede ser numerado o indexado automáticamente con iconos, según los ajustes indicados en la configuración del Libro.

En particular, las páginas del libro se van añadiendo una a una, pero puede cambiarse su posición o categoría (convertir un subcapítulo en capítulo, por ejemplo) con ayuda de los iconos de la **Tabla de Contenidos** cuando nos encontramos en el *modo de edición* del libro.

A continuación indicamos qué significan los iconos que aparecen en el modo de edición de un Libro de Moodle:

- ↕ Con estas flechas podemos mover las páginas para que aparezcan antes o después.
- ⚙ Con la rueda podemos editar el contenido de una página. Debemos pulsar el botón Guardar cambios para que permanezcan dichos cambios.
- ✖ El botón del aspa borrará una página. Habrá que confirmar pulsando Sí en la siguiente pantalla.
- 👁 El ojo puede mostrar o esconder una página que, por ejemplo, estemos editando.
- ✚ La cruz sirve para crear una página justo después de donde estaba dicho botón.



Y algo muy favorable para un libro digital, es que se puede generar un documento pdf de un capítulo en concreto, o bien del libro completo. Para generar el pdf, basta con acceder al menú **Administración > Administración del libro > Imprimir** el libro completo/este capítulo.

Avanzar ▶



Ilustración 13: Elementos básicos de un libro digital.

Otro apartado está dedicado a la propuesta de algunas herramientas necesarias para la creación de videotutoriales. En esta subsección del libro (*Ilustración 14*) se albergan los elementos mínimos para la elaboración de un videotutorial: el primer elemento es un capturador de pantalla, que grabará todo lo que aparezca en la pantalla de nuestro ordenador, siempre que el tutorial precise de material audiovisual de apoyo. El software



## 1.2. Creación de videotutoriales

Los videotutoriales son un recurso educativo muy recurrido entre los docentes innovadores. Se trata de realización de un vídeo que puede contener explicaciones -con o sin subtítulos- de manera que un estudiante pueda seguir un determinado procedimiento. La gran ventaja es que los estudiantes pueden reproducir este recurso las veces que lo necesite, tanto si necesita recuperar información, como si es un estudiante con necesidades específicas de apoyo educativo.

La creación de videotutoriales puede ser más o menos compleja dependiendo del software que utilicemos para crear los vídeos o de si precisarán post-edición.

Generalmente necesitaremos estos elementos:

- **Software para la grabación de imagen y sonido, que también realice captura de pantalla.** Después de haber utilizado algunos, recomendamos Screen-O-Matic (<http://https://screencast-o-matic.com/>), que, aunque no es una herramienta de software libre, posee una versión gratuita y limitada (marca de agua en la reproducción del vídeo y limitación a 15 minutos de grabación). Screen-O-Matic es una herramienta básica pero que a la vez aporta una interfaz clara y concisa, hace seguimiento del puntero y permite colocar al narrador en la esquina inferior derecha si éste lo considera necesario.



Ilustración 14: Primera parte del tutorial sobre videotutoriales.

de nuestra recomendación (Screen-o-Matic) tiene dos bondades: el seguimiento del puntero durante la grabación y la posibilidad de aparecer nosotros en una esquina de la grabación.

El segundo elemento necesario para hacer un buen videotutorial es un software de edición de video, que permitirá, entre otras muchas funcionalidades, eliminar tomas falsas, recortar secuencias, reordenarlas o añadir títulos.

Finalmente, es recomendable trabajar con vídeos desde la nube, lo cual impedirá que nuestro sitio Moodle gratuito (y por tanto limitado en memoria virtual) se colapse o se ralentice notablemente. Es por esto que el tercer elemento conveniente es hacer una suscripción a una red social de videos (como YouTube, Vimeo o similares).

En la *Ilustración 15* se muestra el proceso para rescatar el fragmento de código HTML para incrustar un vídeo alojado en YouTube.

En la tercera sección damos al docente algunos ejemplos de códigos incrustables con el resultado final sobre Moodle. Resulta interesante algunos elementos complementarios para hacer más llamativa y amigable la navegación. Nos referimos a los botones y las barras de progreso. En la *Ilustración 16* se muestran algunos ejemplos.

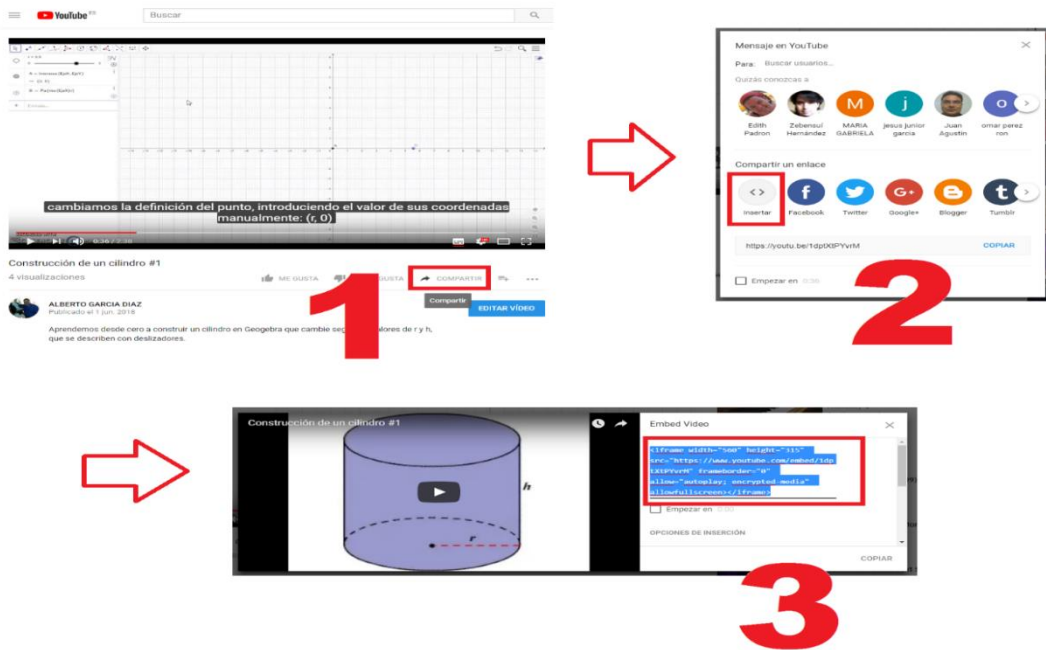


Ilustración 15: Tres pasos para rescatar el código HTML que nos permitirá incrustar en Moodle un video alojado en YouTube.

Finalmente, en la última sección del primer capítulo se indica el procedimiento para incrustar los fragmentos de código HTML en Moodle y se muestran ejemplos de elementos más relacionados con contenidos académicos, como un vídeo YouTube, un

### 1.3. Códigos HTML

Mediante **códigos HTML incrustados** pueden ponerse algunos elementos para darle mayor funcionalidad al uso del libro, como pueden ser el uso de botones o barras de progreso.

Estos son algunos ejemplos:


- 1 Mediante el código

```
<a href="https://google.com"><input type="button" target="_blank" value="Ir a Google"></a>
```

obtenemos un botón que nos permite ir a Google cómodamente:

- 2 También podríamos hacer botones con iconos:

```
<a href="https://google.com"></a>
```

y obtener:  (al hacer clic abandonamos esta página y vamos a Google)

- 3 Otra cosa que podemos insertar es una barra de progreso llamativa:

Utilizando este código:

```
<progress max="100" value="25">
```

Obtenemos:

Y usando este código:

```
<meter max="100" value="25">
```

Obtenemos:

Ya depende de la vistosidad que queramos darle a nuestro formato.

[¿Cómo hacerlo? ➔](#)




Ilustración 16: Algunos ejemplos de código HTML incrustables en recursos de Moodle y su resultado final.

applet de GeoGebra y un mapa conceptual realizado en GoConqr. Se muestra un fragmento en la *Ilustración 17*.

Una vez que ya tenemos los elementos básicos para elaborar el Libro digital, vamos a proceder a describir los enunciados de los problemas que hemos elegido.

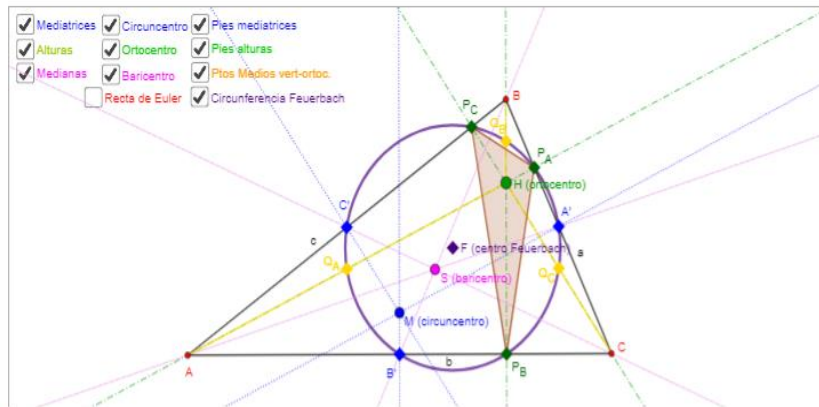
#### 1.4. Cómo incrustar HTML

Para incrustar un código HTML desplegamos la barra oculta de herramientas  y luego hacemos clic en el editor HTML  $\langle \rangle$  para pegar el código del objeto que deseemos ver en pantalla.

Luego volvemos a pulsar el botón del editor HTML para volver a la vista normal y observar los cambios.

Elementos como *applets* de Geogebra, videos de YouTube,... son elementos que pueden ser incrustados en páginas de un Libro Moodle. Por ejemplo, añadiendo el código

```
<iframe scrolling="no" title="Recta de Euler y circunf. de Feuerbach" src="https://www.geogebra.org/material/iframe/id/w7wRD3G8/width/1272/height/544/border/888888/smb/false/stb/false/stbh/false/ai/false/asb/false/sri/false/rc/false/ld/false/sdz/false/ctl/false" width="1272px" height="544px" style="border:0px;"></iframe>
```



Observamos el siguiente applet:

O bien podríamos incrustar un videotutorial desde YouTube con el código

```
<iframe width="560" height="315" src="https://www.youtube.com/embed/p55AkrECg5A?rel=0" frameborder="0" allow="autoplay; encrypted-media" allowfullscreen"></iframe>
```



Podemos aprovechar recursos de otras páginas, como mapas mentales animados. Este recurso puede crearse en el portal GoConqr, y se da la posibilidad de obtener el código HTML para su incrustación en Moodle:

*Ilustración 17: Ejemplos de applet de GeoGebra, video de YouTube y mapa conceptual de GoConqr incrustados en Moodle.*

### 3.3. LA LECCIÓN DE MOODLE. ASPECTOS TÉCNICOS.


La Lección de Moodle será un segundo enfoque hacia el aprendizaje por resolución de problemas, distinto del enfoque realizado en los libros digitales de Moodle.

Una Lección se compone de diferentes pantallas relacionadas con las que se pueden hacer determinadas rutas o flujos dentro del aprendizaje. Es importante tener en cuenta que una lección de Moodle permite hacer un avance en contenidos teóricos, reforzar

procedimientos (como el de resolución de cierto tipo de problemas o ejercicios), o bien hacer una mezcla de ambos tipos de aprendizajes.

Debido a que apenas encontramos referencias bibliográficas sobre el uso de lecciones Moodle, haremos una descripción de qué es una lección, cuál es su estructura y qué elementos la constituyen con la finalidad de analizar las ventajas de su utilización.

Un docente que desee implementar una Lección de Moodle debe conocer los diferentes tipos de pantalla con que un usuario se puede encontrar durante su proceso de aprendizaje:

**Página de contenido:** Una página de contenido equivale a una página de libro digital, es decir, un espacio con formato enriquecido de HTML en el que podemos incrustar diferentes elementos. Las páginas de contenido sirven de ramificaciones. Las ramificaciones se muestran como botones en los que podemos vincular o enlazar a otros elementos de la lección, y podrán dar lugar a distintos itinerarios dentro de la lección. No están sujetos a una pregunta, por lo que también podrían ser vistos como una simple página de información que podría terminar en un botón  para seguir con la lección.

**Pregunta:** Para asegurarnos de que los estudiantes van entendiendo los conceptos que se desarrollan en las lecciones es bueno contar con las preguntas. Existen diferentes tipos:

- Preguntas de verdadero o falso.
- Preguntas de opción múltiple: se puede establecer el número de respuestas correctas y considerarla correcta si se pulsa en una o varias opciones.
- Preguntas numéricas: se puede establecer el valor exacto y un error máximo admisible para poder considerar la respuesta correcta.
- Preguntas de respuesta corta: se establece una cadena de caracteres como respuesta correcta. Sólo puede hacerse distinción entre mayúsculas y minúsculas.
- Preguntas de emparejamiento: se proponen varias opciones con distintos desplegados. Habrá una opción en el desplegado como desplegados haya (es decir, no se pueden considerar opciones distractoras en esta modalidad. La respuesta se considera correcta si todos los desplegados se marcan con sus respectivas opciones correctas.

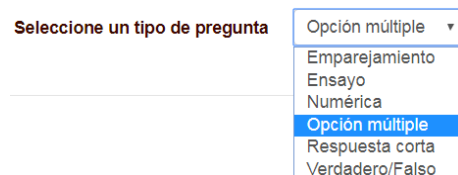


Ilustración 18: Selector de tipo de pregunta en lecciones Moodle.

- *Preguntas de ensayo*: se ha de hacer un desarrollo y el evaluador hace una evaluación a posteriori. Al alumno se le permite continuar el flujo de la lección, o bien puede elegirse que continúe siempre que el evaluador así lo considere, desbloqueando el contenido con una evaluación positiva.

The screenshot shows the Moodle interface for creating a multichoice question. It features a title field 'Titulo de la página' with the value 'P1'. Below it is a rich text editor for 'Contenido de la página' with the placeholder text 'Texto de la pregunta'. There is a checkbox for 'Opciones' set to 'Multirrespuesta'. Under the 'Respuesta 1' section, there are three fields: 'Respuesta' (with placeholder 'Opción 1'), 'Comentario' (with placeholder 'Comentario si se marca la opción 1.'), and 'Saltar' (set to 'Página siguiente'). A 'Puntuación' field is set to '5'. A 'Respuesta 2' section is partially visible at the bottom.

Ilustración 19: Interfaz de pregunta de opción múltiple. Cada respuesta puede enlazar con distintos elementos del flujo de la lección.

Existen diferentes usos para las preguntas y también diferentes formas de presentarlas a los alumnos y alumnas. Podemos presentar una secuencia de preguntas que enlazan una con la siguiente, haciendo un itinerario simple:

$$P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow \dots \rightarrow P_n,$$

donde todos los estudiantes tendrán que responder a las  $n$  preguntas, o podemos formar lo que se denomina *clúster* y que trataremos en el siguiente apartado. En cuanto al uso metodológico de una lección como instrumento de evaluación, creando así la diferencia con una página de contenido, las páginas permiten registrar, a partir de las opciones que elija o indique el estudiante, una calificación como suma de las calificaciones de las páginas por donde va pasando. En cada pregunta, además, se brinda la opción a los estudiantes a que sólo tengan un intento de respuesta o que puedan volver a

intentarlo, teniendo en cuenta que el sistema sólo almacenará la calificación de esa pregunta si se responde correctamente en el primer intento. Es importante tener en cuenta que, dependiendo de la respuesta que dé un estudiante, podrá seguir el flujo normal de la lección, o bien saltar a otro punto de la misma.

**Clústeres:** los clústeres son agrupaciones de preguntas del cual se puede programar que los estudiantes pasen por un número de preguntas aleatorias dentro de dicho grupo. Esto se consigue cuando el salto de la opción correcta se hace hacia una “página no vista dentro de un clúster”. Tras un final de clúster, se puede seguir un flujo normal de la lección, lo cual se consigue enlazando al “final del clúster”.

Por ejemplo, si queremos que la tercera pregunta de un flujo sea diferente para los estudiantes, hacemos lo siguiente:

$$P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \text{Clúster} \rightarrow \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Final de clúster} \rightarrow P_4 \rightarrow P_5 \rightarrow \dots$$

El sistema enviará a los alumnos, tras responder correctamente a la segunda pregunta, o bien a  $Q_1$ , o bien a  $Q_2$ , o a  $Q_3$  de forma aleatoria, y luego seguirán el mismo flujo desde  $P_4$ .

**Ramificación:** Ya comentamos anteriormente que una ramificación se introduce a partir de una página de contenido o bien de una pregunta, donde cada opción de respuesta puede originar una nueva ruta de información dentro del recurso. Obsérvese que puede abrirse a un estudiante la posibilidad de que pueda recibir instrucciones más precisas que le indiquen cómo ha de realizar correctamente el procedimiento para el que se le ha pedido respuesta, en caso de que no lo haya hecho de forma certera.

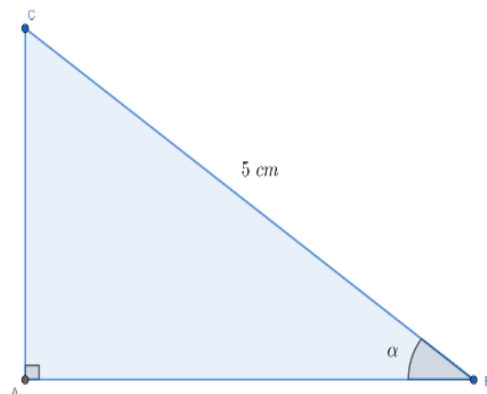
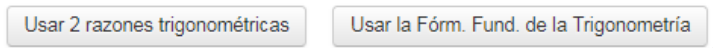


Ilustración 20: Triángulo ABC del ejemplo.

Pongamos un ejemplo. Dado el triángulo rectángulo  $ABC$  de la *Ilustración 20*, calcule la longitud del segmento  $AC$  sabiendo que  $\cos(\alpha) = 0.8$ .

Podemos utilizar una lección para mostrarle al estudiante una estrategia efectiva que se puede recurrir al uso de las razones trigonométricas seno y coseno, o bien utilizar la Fórmula Fundamental de la Trigonometría para obtener el valor del seno del ángulo. Podríamos proponerle al estudiante una página de contenido donde, después de haber

leído y comprendido el problema, elija con dos botones la forma en que quiere resolverlo:

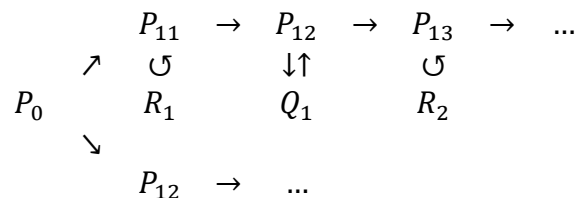


A esta página la llamamos  $P_0$ .

Ahora se abren las dos posibilidades ya descritas. Llamaremos  $P_{11}$  a la pregunta en la que el estudiante deberá calcular el valor del segmento, pero para este objetivo, primero deberá reconocer que ha de utilizar la razón coseno ( $\cos(\alpha) = \frac{AB}{5} = 0.8$ ), despejar una ecuación ( $AB = 0.8 \cdot 5$ ) en la pregunta  $P_{12}$  y finalmente, hacer el cálculo ( $AB = 4$ ) en la pregunta  $P_{13}$ .

Observamos entonces que para calcular la longitud de  $AB$  el estudiante puede cometer tres errores diferentes según va siguiendo la ruta  $P_0 \rightarrow P_{11} \rightarrow P_{12} \rightarrow P_{13} \rightarrow \dots$ . Depende de los errores en el que el docente quiera hacer más o menos énfasis, puede hacer una ruta alternativa, o bien dar una simple retroalimentación o pista para que el estudiante pueda volver a intentarlo.

Imaginemos que el docente quiere corregir en la mayoría de sus alumnos el proceso de despeje de una incógnita en una ecuación donde intervengan fracciones, como en el segundo paso de la secuencia de resolución anterior. En otras palabras, el estudiante se enfrenta a la pregunta  $P_{12}$ . Si contesta erróneamente, el docente puede definir una ramificación a una página de contenidos  $Q_1$  donde, por ejemplo, haya posteado un video donde se resuelve un ejemplo similar. Después de su visionado, el estudiante encuentra un botón para volver a intentar la pregunta  $P_{12}$ . Por tanto, habríamos creado la siguiente ramificación a partir de  $P_{11}$ :



donde  $R_1$  y  $R_2$  podrían ser retroalimentaciones que aconsejen al estudiante en el caso de que se equivoque de función trigonométrica ( $R_1$ ), o bien indicándole que realice la operación de nuevo ( $R_2$ ). También recordamos la ramificación desde  $P_{12}$ , que era el caso en que se utilizaba la Fórmula Fundamental de la Trigonometría.

El **final de una ramificación** de una lección debe indicarse añadiéndola al final. Ésta dará la opción al docente de diseñar cuál será la siguiente página: existe la posibilidad de




volver a la página donde se ramificó en el flujo (forzando al estudiante a completar todas las ramificaciones), o bien llegar al final de la lección, eximiendo al estudiante de repetir contenidos (como en el caso que hemos descrito como ejemplo, en el que cada ramificación resuelve el problema de una forma diferente).

### 3.4. ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS PARA EL LIBRO DIGITAL Y SU IMPLEMENTACIÓN EN EL ESPACIO VIRTUAL.

En este apartado se presentarán dos problemas, uno de geometría plana y otro de geometría del espacio. Hemos determinado para cada uno diferentes enfoques que pretendemos que los alumnos descubran a partir de una primera manipulación por medio de ventanas interactivas (applets) que podemos importar de GeoGebra, para que los estudiantes puedan deducir propiedades y llegar al razonamiento algebraico, el de mayor abstracción, para proceder a su resolución.

En el segundo problema se propone al estudiante que construya los objetos matemáticos que precisará para su resolución, siguiendo algunos videotutoriales que se han incluido en las páginas del propio libro digital. Se ha añadido el subtítulo de los mismos para que no se requiera de audio y pueda mantenerse el clima de trabajo.

También se ha enriquecido un poco la interfaz, añadiendo botones para que navegue cómodamente, y una barra de progresos que le indicará en qué punto de la resolución se encuentra.

Recordamos al lector que en las imágenes donde vea el icono  haga clic sobre él y su navegador le llevará directamente a la página que indica la ilustración dentro de Moodle.

---

## LA MEDIA EMPANADA

Hoy, para el almuerzo, la madre de Fernando ha preparado una riquísima empanada gallega cuadrada, de la cual Fernando y su hermana se comerán la mitad, y sus padres la otra mitad.

Como sus padres aún no van a almorzar, la madre de Fernando le pide cortar la empanada que se comerán él y su hermana, y separar la otra mitad.





- a) ¿De cuántas formas distintas podría Fernando cortar la empanada con un solo corte y pasando por el centro?
- b) ¿Podría Fernando cortar la empanada con más cortes, pero pasando por el centro y pudiendo separar la mitad de la empanada?
- c) ¿Es posible cortar la empanada, desde los vértices hasta un cierto punto que no esté en el centro, obteniendo la mitad exacta?

## DESARROLLO

Lo primero que le brindamos al estudiante es un modelo real de empanada cuadrada, con lo que el contexto permite al alumno identificarlo con un elemento de la vida cotidiana. De hecho, esta visualización permite al estudiante encontrar sus primeras soluciones, que se ven reflejadas en la primera parte del problema. Aquí se le muestra al alumno la identificación de un determinado corte a la empanada con un eje de simetría (Ilustración 21). También se añade un botón que enlaza a *Wikipedia*, lugar donde se detalla más en profundidad este concepto.

### 2. Primer problema

#### 2.1. Primera parte

No es difícil pensar en los distintos ejes de simetría de un cuadrado. De hecho, resultan las respuestas más intuitivas y comunes:



Ilustración 21: Un primer acercamiento a los ejes de simetría devuelven algunas soluciones al problema.

Para la segunda parte, intentamos una aproximación geométrica abriendo la puerta a que el estudiante amplíe hasta un número indefinido de soluciones (en este caso, el estudiante podrá descubrir que cualquier corte que pase por el centro da lugar a una simetría central que también dividirá la empanada en dos partes exactamente iguales). Para alcanzar este fin, instamos al alumno a que manipule un *applet* de *GeoGebra* que

### 2.2. Segunda parte

Pensemos ahora en un corte que pase por el centro del cuadrado pero que no esté sobre uno de los ejes de simetría vistos a

Para ayudar a visualizar esta situación, tenemos el siguiente diagrama.

1. Mueve el punto del centro y cambia la inclinación de la recta.
2. ¿Te permitiría ese corte separar las dos mitades de la empanada?
3. ¿Por qué?

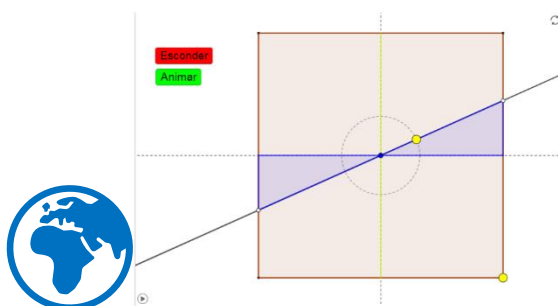


Ilustración 22: Applet para manipulación.

hemos incrustado y para el que se dan algunas indicaciones que lo conduzcan a dicha conclusión. El estudiante deberá comprobar la semejanza de dos triángulos subyacentes al fijar un corte (en términos geométricos, se fija la pendiente de la recta que pasa por el centro de la empanada).

Este applet ha sido creado en GeoGebra y subido a la red al portal de GeoGebra Online. Al hacerlo, el propio portal devuelve un código HTML incrustable<sup>6</sup> en las hojas del libro digital. También podríamos hacer una aproximación numérica, midiendo áreas con la herramienta que lleva este mismo nombre, pero este acercamiento no está implementado para inducir un razonamiento más avanzado.

La tercera parte representa una segunda ampliación al primer problema. Para demostrar que esta nueva manera de cortar la empanada (cuando se fija un punto interior y se llega del punto a los vértices)

tomaremos otro applet un poco más complejo. En él también se tendrá que manipular el punto y se hace una prueba geométrica con la ayuda del cambio automático de color de las zonas de la empanada para el cómputo efectivo de las dos mitades cuando se acciona el deslizador.

**2.3. Tercera parte**

Ahora tenemos que cortar la empanada de una forma diferente: seleccionar un punto cualquiera y hacer cuatro cortes rectos que lleguen a ese punto, uno desde cada vértice.

Para ayudarte a visualizarlo, vamos a intentar seleccionar un punto donde tú creas que, después de cortarlo, puedas separar media empanada.

Sigue las instrucciones que aparecen en el applet

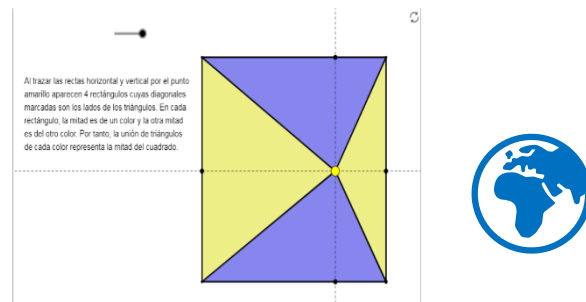


Ilustración 23: Applet para la segunda extensión del problema de la empanada.

## EL CILINDRO ÓPTIMO

De todas las familias de cilindros con volumen fijo  $V$ , encontrar las dimensiones (radio de la base y altura) de aquel que minimiza el área lateral.

### DESARROLLO

Para este problema viene muy bien tener una clara representación de la figura y entender qué ocurre con los valores de área lateral y volumen cuando cambian el radio de la base y la altura.

Una buena representación utilizando software de geometría dinámica es una buena alternativa, pero puede presentar alguna dificultad cuando los estudiantes no están habituados al entorno.

Por este motivo hemos planteado un diseño atractivo que, por medio de un vídeo que hemos creado y en el que desgranamos la construcción del cilindro y las modificaciones

<sup>6</sup> En algunos portales, los códigos HTML incrustables aparecen en inglés como *embedded code*.

que el estudiante debe realizar para poder potenciar la situación problemática y, por tanto, el aprendizaje que puede extraer de ella. Estas modificaciones puede hacerlas gracias a su intuición o curiosidad, pero es muy importante darle la oportunidad de que conozca qué posibilidades puede llegar a cubrir cuando trabaja con un software de geometría dinámica tan versátil como GeoGebra.

#### Utilidades del uso de un Libro de Moodle

### 3. Segundo problema

#### 3.1. Primera parte

Lo primero que tenemos que hacer es un diagrama de la situación. Usar Geogebra nos vendrá muy bien para este fin. Mira el vídeo y reproduce la construcción en la parte inferior.

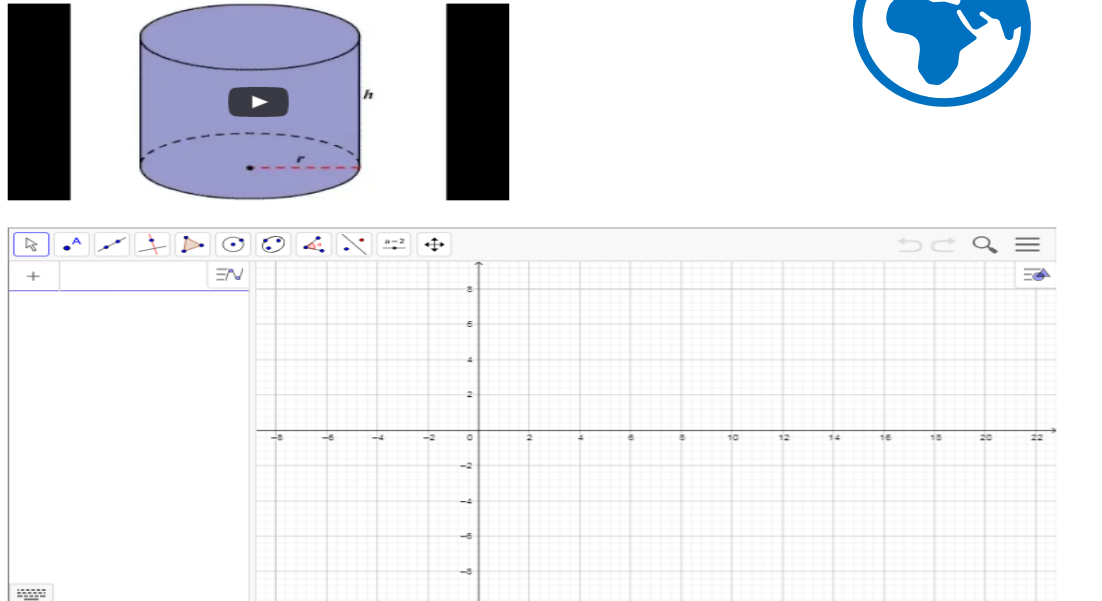
The image shows a screenshot of a Moodle page. At the top, there is a blue globe icon. Below it, a video player is embedded, showing a cylinder with a play button in the center. The cylinder has a radius 'r' and height 'h' labeled. To the right of the video player is a GeoGebra applet interface, which includes a toolbar with various geometric tools and a coordinate grid with axes ranging from -8 to 22. The video player and the GeoGebra applet are positioned side-by-side, demonstrating how different elements can be integrated into a single Moodle page.

Ilustración 24: En una hoja del Libro Digital podemos incrustar diferentes elementos en un mismo lugar, como en esta captura de pantalla, donde se ha insertado un vídeo sobre un applet en el que los estudiantes pueden reproducir sus propias representaciones con o sin guía.

Con la ayuda de los libros digitales de Moodle podemos integrar vídeos explicativos y un entorno en línea de GeoGebra en el mismo lugar (*Ilustración 24*). Facilitamos así el trabajo a los estudiantes, siempre y cuando cuenten con los medios tecnológicos necesarios, puesto que ya no es necesario contar con la previa instalación del programa, sino que se puede trabajar de la misma manera desde el navegador de internet (Google Chrome, Mozilla Firefox o similares). Así el estudiante podrá centrarse en seguir paso a paso las instrucciones del vídeo en su construcción para una posterior manipulación.

En la primera parte incrustamos un vídeo hospedado en nuestra cuenta de YouTube y un applet de GeoGebra en el que los estudiantes reproducirán la construcción.

El siguiente paso es hacer un acercamiento numérico del problema. Es necesario que el estudiante manipule los deslizadores para que observe los cambios en el área lateral y en el volumen. Siguiendo la estrategia de la primera parte, le mostramos al estudiante los cálculos que debería hacer para calcular manualmente área y volumen del cilindro

dato. Se añaden las instrucciones necesarias para acceder a estos valores numéricos en GeoGebra. El applet de la *Ilustración 25* estará preparado con la construcción que hizo en la pantalla anterior.

### 3. Segundo problema

#### 3.2. Segunda parte

El volumen de un cilindro se calcula mediante la fórmula (el área de la base es el área de una circunferencia de radio  $r$ ):

$$V_{\text{cil}} = A_{\text{base}} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Sin embargo, el cálculo del área total se descompone en la suma del área lateral más las áreas de las dos bases (que en este cuerpo geométrico son iguales). Por tanto:

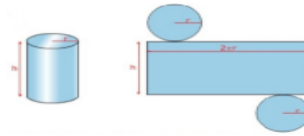
$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}}$$

El área de la base, según se indicó antes es el área del círculo de la base:  $A_{\text{base}} = \pi \cdot r^2$ .

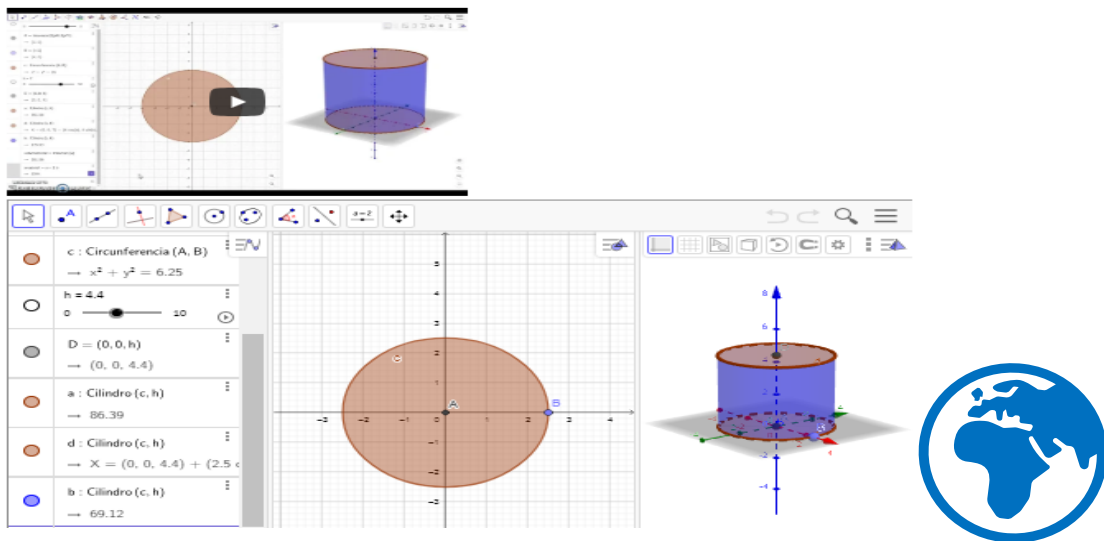
El área lateral se entiende como un rectángulo, cuya altura coincide con la altura del cilindro, y la base de este rectángulo es tan larga como lo es la circunferencia de la base. Es decir, la base del rectángulo es  $L = 2 \cdot \pi \cdot r$ . En consecuencia:  $A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ .

Realizando la suma indicada anteriormente:

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2\pi r \cdot (r + h).$$



Pero estos cálculos puede realizarlos Geogebra en cuestión de segundos. Aprende a hacerlo con el vídeo y repítelo en la construcción que acabas de hacer:



*Ilustración 25: Acercamiento numérico al área y el volumen.*

En esta fase se ha establecido las formas de calcular el volumen y el área total del cilindro, por lo que el estudiante ha dado un paso al frente y está listo para abordar el acercamiento analítico.

La siguiente fase en la resolución de este problema pasa por la optimización de la función objetivo (área total del cilindro) bajo la condición de ligadura del volumen  $V$  en favor de los dos parámetros a calcular,  $r$  y  $h$ . Para tratar esta parte, dotaremos al estudiante de los procedimientos para construir una función que considere al área del cilindro  $A$  frente a  $r$ , por razones de simplicidad. El estudiante llegará a la *Ilustración 26*.

En nuestro ejemplo, habíamos determinado que

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Dado que  $V$  es constante y  $A = 2\pi r(r + h)$ , entonces

$$A = A(r) = 2\pi r \left( r + \frac{V}{\pi r^2} \right) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

## Utilidades del uso de un Libro de Moodle

### 3. Segundo problema

#### 3.3. Tercera parte

Es momento de considerar que  $V$  es constante, lo cual implica que  $r$  y  $h$  cumplen que

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi \cdot r^2}.$$

Así podremos estudiar el área total

$$A_{\text{total}} = 2\pi r \cdot \left( r + \frac{V}{\pi \cdot r^2} \right)$$

en función únicamente de  $r$ .

Indiquemos estos cambios en *Geogebra*, según lo que ya hemos construido:

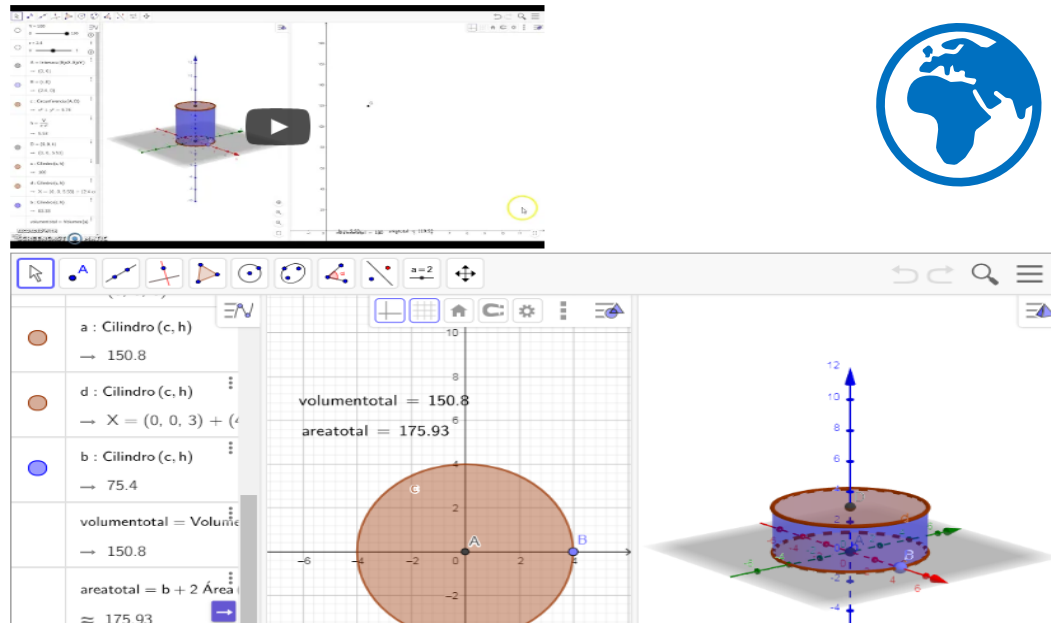


Ilustración 26: última página del libro.

En consecuencia, introduciremos en Moodle la función

$$A: r \mapsto 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r > 0.$$

Antes de esto, habrá que hacer un cambio en el planteamiento de GeoGebra, ya que  $V$  pasa a ser constante y  $h = h(r)$  ya no varía libremente.

Tras este paso, se pedirá al estudiante que cambie de gráfica (para no tener que eliminar ni ocultar elementos ya creados) y sitúe un punto móvil de coordenadas  $(r, A(r))$ . Al variar  $r$ , el punto variará y el estudiante descubrirá una trayectoria curva describiendo un mínimo. Activando el rastro del punto se describe ligeramente la gráfica. Finalmente, registrando los valores de ambas coordenadas del punto móvil en la hoja de cálculo se deja constancia de la existencia de óptimo, habiéndose obtenido un acercamiento más preciso de la situación. Ahora el estudiante está preparado para resolver el ejercicio de manera algebraica.

## GENERALIZACIÓN Y AMPLIACIÓN

Este problema requiere de su generalización, ya que el enunciado no fija numéricamente el valor del volumen  $V$ . Por tanto, deberá precisar algebraicamente el desarrollo y formalizar el proceso de optimización de la función área respecto de la variable radio de la base.

Pero la generalización también puede llevar al estudiante al descubrimiento de la relación que existe entre el radio de la base y la altura de un cilindro que minimice su área: la altura ha de ser doble del radio. Este hecho podría intuirse si se varía el valor de  $V$  en el *applet* de la tercera página dedicada a este problema y se encuentran los valores de  $r$  y  $h$  que optimizan el área.

### 3.5. ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS PARA LA LECCIÓN DE MOODLE. SU IMPLEMENTACIÓN EN EL ESPACIO VIRTUAL.

Antes de describir los problemas, referimos al lector que esta lección se utilizó en las Prácticas de Enseñanza<sup>7</sup>. Se trató de afianzar los métodos de resolución e indicaciones teóricas realizadas durante el desarrollo del Criterio de Evaluación 7 del Bloque de aprendizaje V (Estadística y Probabilidad) y se idearon en algunos que se iban a recoger en la evaluación de este contenido, que, según el docente, necesitaban reforzar con vistas a las pruebas de acceso a la Universidad (EBAU).

Por medio de la lección se trabajarán 4 problemas que complementan los contenidos desarrollados por el profesorado en el aula durante el citado curso. La *Ilustración 27* presenta sus enunciados.

---

<sup>7</sup> El Centro en el que se puso en práctica fue el IES Teobaldo Power, concretamente tuvieron acceso los alumnos y alumnas del curso de 2º de Bachillerato A (Matemáticas II) en el curso escolar 2017 – 18 (actual).

## A01



### PROBABILIDAD CONDICIONADA.

En un aula hay 100 alumnos, de los cuales: 40 son hombres, 30 usan gafas, y 15 son varones y usan gafas. Si seleccionamos al azar un alumno de dicho curso:

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use gafas?
- Si sabemos que el alumno seleccionado no usa gafas, ¿qué probabilidad hay de que sea hombre?

Empezar a resolver el problema

Necesito refrescar la teoría

## B01



### TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL (PROBABILIDADES A PRIORI)

La empresa de lácteos "La vaquita feliz" tiene tres fábricas en Canarias: Lanzarote, El Hierro y Tenerife. La fábrica de Tenerife es la mayor, envasando un 40% de toda la leche. Las otras fábricas envasan el resto de leche por igual.

Se sabe que, por un problema de etiquetado, los colores del 2% de lo envasado en Tenerife, el 3% de lo envasado en El Hierro y el 5% de lo envasado en Lanzarote tienen defectos.

Toda la leche envasada se lleva a un gran depósito (antes de redistribuirlo por los comercios de toda Canarias). ¿Cuál es la probabilidad de que el encargado del depósito elija una caja de leche al azar y los colores del envase tengan defectos?

Empezar a resolver el problema

Necesito repasar la teoría

## C01



### TEOREMA DE BAYES

En mi clase nos gustan tres tipos de música: Al 70% les gusta el reggaetón, al 25% le gusta la salsa y, al resto, le gusta el rap. De los que les gusta el reggaetón, el 60% son chicas, de los que le gusta la salsa, el 30% son chicas y el rap les gusta a partes iguales a chicos que a chicas.

El profesor, que no conoce nuestras preferencias musicales, elige a una chica al azar. ¿Qué probabilidades hay de que le guste el reggaetón?

Empezar a resolver el problema

Necesito repasar la teoría

## D01



### DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Las personas con tipo sanguíneo O negativo se denominan donantes universales, porque las personas con cualquier tipo sanguíneo puede recibir esta sangre sin problemas de coagulación.

En España, 3 de cada 50 personas tiene sangre de tipo O negativo. En una cafetería, en cualquier lugar de España, hay 8 personas.

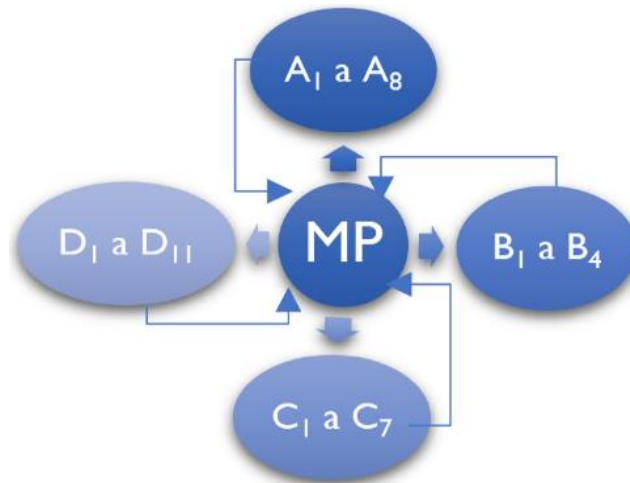
- ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna sea donante universal?
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya como máximo dos personas con grupo sanguíneo O negativo?

Empezar a resolver el problema

Necesito repasar la teoría

Ilustración 27: Los cuatro problemas propuestos en la lección Moodle.

Se diseñaron cuatro flujos radiales a partir de una pantalla inicial (que denominaremos *MP* o menú principal), en la que cada flujo equivalía a la resolución de un problema. Al final de cada ramificación se volvía a *MP*. Es decir, el diseño es el indicado en la *Ilustración 28*.



*Ilustración 28: Diseño radial de la lección propuesta. A partir del menú principal MP se selecciona cada problema. Al terminar la resolución se vuelve a MP.*

En la primera página de cada ramificación se presentaba el problema y se daba la posibilidad al estudiante de repasar la teoría necesaria para poder resolverlo haciendo uso de una notación acorde con la que se había trabajado en el aula. A partir de ahí, los estudiantes encontraron retroalimentaciones con algunas pistas que les permitiera terminar las distintas ramificaciones.

A continuación, resumiremos los itinerarios presentados en cada problema.

---

## PROBABILIDAD CONDICIONADA: EL USO DE LAS GAFAS

En un aula hay 100 alumnos, de los cuales: 40 son hombres, 30 usan gafas, y 15 son varones y usan gafas. Si seleccionamos al azar un alumno de dicho curso:

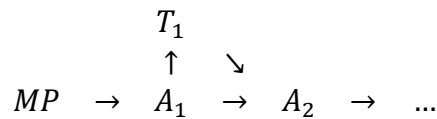
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use gafas?
- Si sabemos que el alumno seleccionado no usa gafas, ¿qué probabilidad hay de que sea hombre?

### DESARROLLO

En este problema se refuerza a los estudiantes los puntos del álgebra de sucesos necesarios para concluir en la definición de la probabilidad de un suceso condicionado (*Ilustración 29*).



Al ser una ramificación opcional (cuya página de teoría designamos por  $T_1$ ), el estudiante que se sienta seguro puede saltarla buscando directamente la resolución. Así tenemos este flujo:



### Teoría: Probabilidad condicionada

La probabilidad de un suceso es una asignación tal que a un suceso le va a corresponder un número entre 0 y 1, donde 0 indica que nunca va a ocurrir y 1 que siempre va a ocurrir.

Pueden conseguirse nuevos sucesos a partir de otros sucesos. Por ejemplo, dado un suceso  $A$  se puede conseguir el suceso contrario o complementario de  $A$ , que se denota por  $\bar{A}$ , o bien  $A^c$ . De todos es sabido que  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

También podemos considerar la unión de los sucesos  $A$  y  $B$ , que se denotan por  $A \cup B$ , o bien la intersección de ellos, que se indica por  $A \cap B$ .

La fórmula de la probabilidad de la unión está relacionada con la probabilidad de cada suceso y de la intersección (¡cuidado! No es exactamente la de la suma):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

El suceso intersección  $A \cap B$  es importante, porque indica que sucede cuando ocurren a la vez  $A$  y  $B$ .

El hecho de que dos sucesos  $A$  y  $B$  no puedan suceder a la vez indica que los sucesos  $A$  y  $B$  son incompatibles, y se indica por  $A \cap B = \emptyset$ .

Decimos que un suceso  $A$  está condicionado a otro suceso  $B$ , cuando el hecho de que  $B$  ocurra influye en la realización de  $A$ . Este suceso se lee " $A$  condicionado a  $B$ ", o bien " $A$ , sabiendo que ha ocurrido  $B$ ", y se escribe  $A|_B$ .

Cuando nos piden una probabilidad condicionada se calcula así:

$$P(A|_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Observa cómo en el denominador aparece la probabilidad del suceso que condiciona (del que ya se tiene información).

*Ilustración 29: Página T1. Contiene la teoría necesaria para resolver este problema.*



Dado que es el problema que condensa la parte inicial del criterio de evaluación, las preguntas son muy concretas para que el estudiante adopte una forma sistemática de organizar la información dependiendo de los datos que le son suministrados. Además, hay dos preguntas que responder. Indicaremos con una tipografía resaltada qué objetivo general se está calculando. En la pregunta  $A_2$  el estudiante deberá distinguir dos tipos de sucesos: hombre/mujer y tener/no tener gafas.

Llamaremos por tanto

$A$  = "ser hombre" y  $B$  = "usar gafas".

Nos piden calcular la probabilidad de que al elegir al azar un estudiante, sea mujer y no use gafas.

¿Cómo podría simbolizarse esta pregunta utilizando las los sucesos  $A$  y  $B$  que hemos descrito?

- $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
- $P(\bar{A} \cup B)$
- $P(A \cap \bar{B})$
- $P(\bar{A} \cup \bar{B})$
- $P(A \cap B)$

Enviar



*Ilustración 30: Página A3.*

Una vez hecho esto, en  $A_3$  se utiliza la nomenclatura clásica y se le pide que escriba el suceso a calcular en el primer apartado (*Ilustración 30*).

Tras identificar el suceso por el que se pregunta ( $\bar{A} \cap \bar{B}$ ), el estudiante distribuirá en  $A_4$  los datos que le aporta el enunciado en una tabla de contingencia indicada en la

*Ilustración 31*. Luego se le requerirá elegir el contenido de la casilla necesario para realizar la operación que conduce al cálculo de la probabilidad. Al terminar de deducir los

números pendientes de determinar, el estudiante determinará en  $A_5$  que existen 45 mujeres que no utilizan gafas, según se recoge en la solución:

	$B$	$\bar{B}$	totales
$A$	15	25	40
$\bar{A}$	15	45	60
totales	30	70	$N = 100$

Según el enunciado, ponemos los datos y tenemos:

	$B$	$\bar{B}$	totales
$A$	15	?	40
$\bar{A}$	?	?	?
totales	30	?	$N = 100$

En este problema se pide calcular la probabilidad del suceso  $\bar{A} \cap \bar{B}$ .

¿Cuántos casos aparecen en el lugar de  $\bar{A} \cap \bar{B}$  en la tabla?

- 45  
  30  
  40  
  35  
  25

Enviar



Ilustración 31: Tabla de contingencia incompleta en  $A_4$ .

Finalmente, en  $A_6$  el estudiante concluye con el cálculo de la probabilidad pedida, según se indica, que

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{|\bar{A} \cap \bar{B}|}{N} = \frac{45}{100} = 0.45.$$

A partir de la tabla de la página  $A_4$  (y que el estudiante podrá seguir visualizando), se podrá resolver el

segundo apartado. En concreto, se debe calcular la probabilidad de que elijamos una persona que, sabiendo que no tiene gafas, sea mujer:  $P(A|\bar{B})$ . Primero deberá elegir en  $A_6$  la notación exacta para el suceso que se indica, según se muestra en la *Ilustración 32*: *Página A6*. En  $A_7$ , el estudiante deberá introducir el cálculo de dicha probabilidad utilizando la tabla y la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{|A \cap \bar{B}|}{|\bar{B}|} = \frac{25}{70} \approx 0.36.$$

$A$  = "ser hombre" y  $B$  = "usar gafas".

	$B$	$\bar{B}$	totales
$A$	15	25	40
$\bar{A}$	15	45	60
totales	30	70	$N = 100$

Para el segundo apartado, primero necesitamos simbolizar el suceso del que tenemos que calcular la probabilidad:

¿Cómo representamos el suceso "ser hombre, sabiendo que no usa gafas"?

- $A|_B$   
   $B|_{\bar{A}}$   
   $A|\bar{B}$   
  $B|_A$   
   $\bar{A}|_B$   
   $\bar{B}|_A$

Enviar



Ilustración 32: *Página A6*.

Y con ello, el estudiante volverá a *MP*, porque habrá terminado de resolver el ejercicio.

**PROBABILIDAD CONDICIONADA.**

En un aula hay 100 alumnos, de los cuales: 40 son hombres, 30 usan gafas, y 15 son varones y usan gafas. Si seleccionamos al azar un alumno de dicho curso:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use gafas?  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.45$ .

b) Si sabemos que el alumno seleccionado no usa gafas, ¿qué probabilidad hay de que sea hombre?  $P(A|\bar{B}) = 0.36$ .

---

**¡¡ENHORABUENA!!**  
**HAS COMPLETADO CON ÉXITO ESTE PROBLEMA.**  
**AHORA REGRESA AL MENÚ PRINCIPAL Y ELIGE OTRO CONTENIDO.**




Ilustración 33: Página A<sub>8</sub>, fin de la ramificación y vuelta a *MP*.

## TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL: LA VAQUITA FELIZ

La empresa de lácteos "La vaquita feliz" tiene tres fábricas en Canarias: Lanzarote, El Hierro y Tenerife. La fábrica de Tenerife es la mayor, envasando un 40% de toda la leche. Las otras fábricas envasan el resto de leche por igual.

Se sabe que, por un problema de etiquetado, los colores del 2% de lo envasado en Tenerife, el 3% de lo envasado en El Hierro y el 5% de lo envasado en Lanzarote tienen defectos.

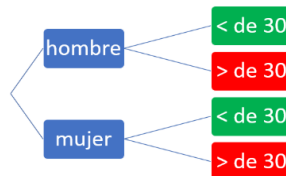
Toda la leche envasada se lleva a un gran depósito (antes de redistribuirlo por los comercios de toda Canarias). ¿Cuál es la probabilidad de que el encargado del depósito elija una caja de leche al azar y los colores del envase tengan defectos?

### Teoría: teorema de la probabilidad total

El **Teorema de la Probabilidad Total** se utiliza cuando se puede conseguir un suceso a través de varias vías distintas.

Para calcular fácilmente la probabilidad total se utiliza el **árbol de sucesos**.

Por ejemplo, podemos pensar en parar a una persona por la calle al azar y preguntarle si tiene más de 30 años. Entonces, las posibilidades son:



En este árbol observamos dos sucesos: el primero es  $A$  = "ser hombre" y el segundo  $B$  = "ser mayor de 30 años", y sus correspondientes contrarios.

Para calcular probabilidades con el árbol de sucesos, la probabilidad de una rama es el producto de las probabilidades desde el punto inicial al final de cada rama. Esta rama representará la probabilidad de la intersección de todos los sucesos que haya atravesado.

Finalmente, si queremos calcular la probabilidad de un suceso que involucra varias ramas, sumamos las probabilidades de cada una de ellas.

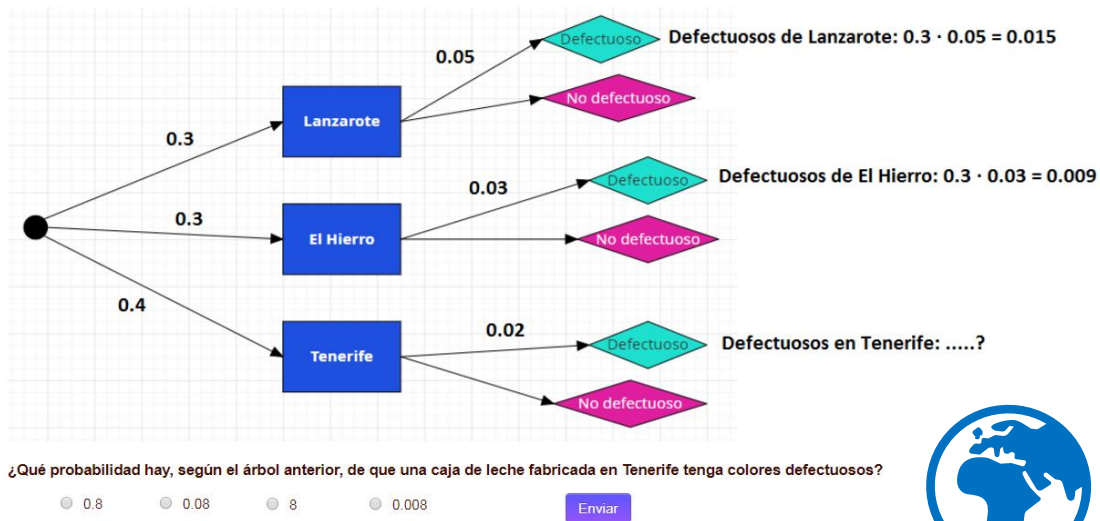
[Volver al problema](#)

Ilustración 34: Página T<sub>2</sub> con unas observaciones teóricas y el uso de un árbol de sucesos para su cálculo.

## DESARROLLO

Este es un problema de enunciado recurrente para aplicar el Teorema de la Probabilidad Total. Por ello, la primera página de contenidos teóricos de esta ramificación,  $T_2$  (*Ilustración 34*), está dedicada a la generación de un árbol de probabilidades y, más que presentar la ecuación, se hace una descripción de lo que significa. Será en el tercer ejercicio donde se incidirá en la notación formal de las probabilidades condicionadas y las probabilidades de intersección de sucesos que aparecen en el árbol.

Una vez iniciada la resolución, en  $B_2$  se hace la construcción del árbol de sucesos con los datos del enunciado y se inicia con el cálculo de las probabilidades de cada rama.



*Ilustración 35: Árbol de sucesos en  $B_2$ .*

Se pide al estudiante que calcule la probabilidad de la tercera rama, según se indica en la *Ilustración 35*.

Por tanto,  $P(\text{Tenerife}) \cdot P(\text{Defectuoso}|\text{Tenerife}) = 0.4 \cdot 0.02 = 0.008$ .

El último paso, según se indica en la siguiente pregunta, precisa de la suma de las probabilidades de las tres ramas. El estudiante encuentra un árbol con la información actualizada. Por tanto, la respuesta a la pregunta de  $B_3$  es:

$$P(\text{Defectuoso}) = 0.015 + 0.009 + 0.008 = 0.032.$$

## TEOREMA DE BAYES: ESTILOS MUSICALES

En mi clase nos gustan tres tipos de música: Al 70% les gusta el reggaetón, al 25% le gusta la salsa y, al resto, le gusta el rap. De los que les gusta el reggaetón, el 60% son chicas, de los que le gusta la salsa, el 30% son chicas y el rap les gusta a partes iguales a chicos que a chicas.

El profesor, que no conoce nuestras preferencias musicales, elige a una chica al azar. ¿Qué probabilidades hay de que le guste el reggaetón?

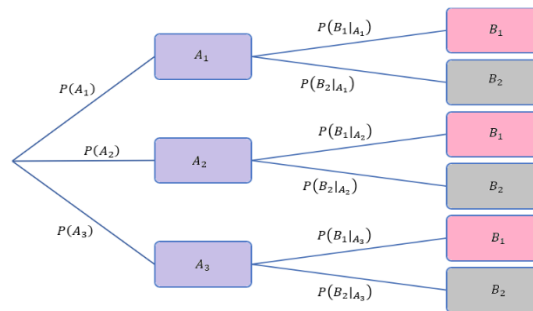
## DESARROLLO

El presente problema tiene que ver con el Teorema de la Probabilidad Total, ya que se precisa calcular una probabilidad condicionada definida de forma inversa a las

### Teoría: Teorema de Bayes (Probabilidades a posteriori)

Ya vimos en el Teorema de la Probabilidad Total que podemos diseñar un árbol de sucesos, primero atendiendo a un carácter y, desde cada caso de ese carácter (por ejemplo  $A_1, A_2, A_3$ ). Luego hacemos un segundo nivel de profundidad con el segundo carácter, es decir, de cada árbol pueden salir los casos  $B_1, B_2$ . Las ramas del segundo nivel del árbol son las probabilidades condicionadas  $B_i|A_j$ , donde  $i$  y  $j$  son únicamente etiquetas para enumerar las ramas.

Entonces, el árbol quedaba:



El teorema de Bayes llega cuando nos piden una probabilidad condicionada dada en el orden inverso. Son de la forma  $P(A_j|B_i)$ . Supongamos que queremos calcular  $P(A_3|B_1)$ .

El árbol de sucesos no nos devuelve esta probabilidad, por lo que habrá que calcular la probabilidad pedida a través de la fórmula:

$$P(A_3|B_1) = \frac{P(A_3 \cap B_1)}{P(B_1)}$$

La probabilidad del denominador sabemos por el teorema de la probabilidad total:

$$P(B_1) = P(A_1) \cdot P(B_1|A_1) + P(A_2) \cdot P(B_1|A_2) + P(A_3) \cdot P(B_1|A_3)$$

La probabilidad de la intersección coincide con la probabilidad de la rama que contiene a  $A_3$  y  $B_1$ :

$$P(A_3 \cap B_1) = P(A_3) \cdot P(B_1|A_3)$$

Finalmente hacemos la división.

*Ilustración 36: Página T<sub>3</sub>, con un resumen teórico con lo necesario para la resolución del problema.*



probabilidades condicionadas del enunciado. Se ha buscado un contexto cercano a los estudiantes como pueden ser gustos musicales.

Como siempre, el alumno tiene la opción de elegir la ramificación que le muestra la página T<sub>3</sub> que alberga un resumen teórico de lo que necesita saber para poder resolver el problema. El contenido de esta página puede observarse en la *Ilustración 36*.

Según hacíamos en problemas anteriores, uno de los aspectos que perseguimos es que los estudiantes utilicen una notación correcta y formal para escribir los sucesos de interés. En C<sub>2</sub> (*Ilustración 37*) el estudiante deberá marcar el suceso que se precisa, en este caso,  $P(\text{reggaetón}|_{\text{chica}})$ .

Después de leer el enunciado, lo primero que debemos identificar es la probabilidad que nos piden calcular.

¿Qué probabilidad nos pide calcular el ejercicio?

- $P(\text{reggaetón}|_{\text{chica}})$
- $P(\text{chica})$
- $P(\text{reggaetón})$
- $P(\text{chica}|_{\text{reggaetón}})$
- $P(\text{chico})$
- Ninguna respuesta es cierta.

Enviar



*Ilustración 37: En C<sub>2</sub>, el estudiante debe identificar el suceso del que hay que calcular la probabilidad.*

En  $C_3$  el estudiante deberá elaborar un árbol utilizando la información que se da en el enunciado. En la página el estudiante encontrará el árbol de sucesos con las probabilidades que da el enunciado en las ramas correspondientes. Será su labor indicar cómo calcular la probabilidad condicionada pedida, según se indica en la *Ilustración 38*.

Dado que

$$P(\text{reggaetón}|\text{chica}) = \frac{P(\text{reggaetón} \cap \text{chica})}{P(\text{chica})},$$

En  $C_4$  el estudiante dará el primer paso para determinar el valor de estas probabilidades. Con ayuda del Teorema de la Probabilidad Total ha de determinar la probabilidad del denominador:

Ahora, que tenemos identificado lo que tenemos que calcular,  $P(\text{reggaetón}|\text{chica})$ , toca hacer el árbol.

Vamos colocando las probabilidades que nos indica el enunciado, y obtenemos:

La probabilidad que necesitamos calcular no podemos encontrarla en el árbol de sucesos, por lo que tendremos que desarrollar la fórmula para poder calcularla:

$$P(\text{reggaetón}|\text{chica}) = \dots$$

- $\frac{P(\text{reggaetón} \cap \text{chica})}{P(\text{reggaetón})}$
- $\frac{P(\text{reggaetón} \cup \text{chica})}{P(\text{chica})}$
- $\frac{P(\text{reggaetón} \cap \text{chica})}{P(\text{chica})}$
- $\frac{P(\text{reggaetón} \cup \text{chica})}{P(\text{reggaetón})}$

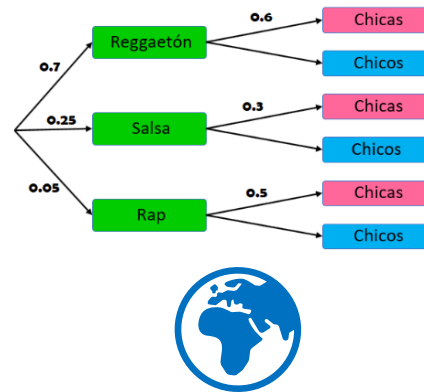


Ilustración 38: Página C3. El estudiante tiene a la vista el árbol de sucesos y ha de indicar cómo calcular la probabilidad condicionada que se requiere.

$$\begin{aligned} P(\text{chica}) &= P(\text{reggaetón}) \cdot P(\text{chica}|\text{reggaetón}) + P(\text{salsa}) \cdot P(\text{chica}|\text{salsa}) + P(\text{rap}) \cdot P(\text{chica}|\text{rap}) = \\ &= 0.7 \cdot 0.6 + 0.25 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.5 = \\ &= 0.52. \end{aligned}$$

Será en  $C_5$  donde calculará la probabilidad del numerador, la cual es equivalente a la probabilidad de la rama que contiene ambos sucesos. Es decir:

$$P(\text{reggaetón} \cap \text{chica}) = P(\text{reggaetón}) \cdot P(\text{chica}|\text{reggaetón}) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42.$$

Finalmente, en  $C_6$  se dan indicaciones para que el estudiante devuelva el valor de la probabilidad redondeada a la centésima:  $P(\text{reggaetón}|\text{chica}) = \frac{0.42}{0.52} = 0.807 \approx 0.81$ .

## TEOREMA DE BAYES

En mi clase nos gustan tres tipos de música: Al 70% les gusta el reggaetón, al 25% le gusta la salsa y, al resto, le gusta el rap. De los que les gusta el reggaetón, el 60% son chicas, de los que le gusta la salsa, el 30% son chicas y el rap les gusta a partes iguales a chicos que a chicas.

El profesor, que no conoce nuestras preferencias musicales, elige a una chica al azar. ¿Qué probabilidades hay de que le guste el reggaetón?

$$P(\text{reggaetón}|\text{chica}) = \frac{P(\text{reggaetón} \cap \text{chica})}{P(\text{chica})} = \frac{0.42}{0.52} = 0.81.$$

¡ENHORABUENA! HA SUPERADO CON ÉXITO ESTE PROBLEMA!  
VUELVA AL MENÚ PRINCIPAL Y SELECCIONE OTRO PROBLEMA PARA CONTINUAR.

Volver al menú principal



Ilustración 39: Final de esta ruta de aprendizaje.

## DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: GRUPOS SANGUÍNEOS

Las personas con tipo sanguíneo O negativo se denominan donantes universales, porque las personas con cualquier tipo sanguíneo pueden recibir esta sangre sin problemas de coagulación.

En España, 3 de cada 50 personas tiene sangre de tipo O negativo. En una cafetería, en cualquier lugar de España, hay 8 personas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna sea donante universal?
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya como máximo dos personas con grupo sanguíneo O negativo?

### DESARROLLO

El último problema está dedicado a la distribución binomial. La mayor dificultad que tienen los estudiantes es la comprensión del concepto de distribución de probabilidad, debido a su alto nivel de abstracción. Como consecuencia, suelen tener dificultades de aplicación de los modelos que se les proporcionan.

Para ayudar a los estudiantes en este sentido, añadimos al principio de la lección una página de contenido,  $T_4$  (Ilustración 40), con un breve recordatorio de teoría sobre la distribución binomial, los conceptos relacionados con ella y algunos aspectos sobre el cálculo de probabilidades de sucesos básicos y el uso de la calculadora, y utilizando la notación que trabajaron en clase.

En este problema, el estudiante debe hallar dos probabilidades, pero es muy importante que el estudiante empiece a comprender la información relevante del enunciado. Para ello, en la pregunta  $D_2$  el estudiante descubrirá cuál es el experimento base (prueba de Bernouilli) asociado a la variable binomial a construir, a qué se denominará éxito y cuál será su probabilidad. La información y la pregunta se muestra en la Ilustración 41.



## Teoría: distribución binomial

### DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La **distribución binomial** es un modelo de probabilidades, es decir, una forma de cálculo de probabilidades de algunos experimentos con determinadas características y con cálculo simplificado.

Para poder calcular probabilidades según el modelo de la distribución binomial es necesario entender algunos conceptos:

- Debemos tener un **experimento base** que *sólo pueda tener dos resultados*: un resultado que nos sea siempre favorable (y que llamaremos **éxito**) y su contrario (que denominamos **fracaso**).
- Será necesario conocer la probabilidad de éxito al hacer el experimento una sola vez. A este valor se le designa la letra  $p$ . Por tanto, la probabilidad del fracaso, al ser el suceso contrario, será  $q = 1 - p$ .
- Podremos repetir el experimento  $n$  veces, de forma que, antes de empezar el experimento, tengamos las mismas condiciones iniciales en cada repetición. Es decir, **vamos a realizar  $n$  repeticiones independientes del experimento base**.

Consideramos ahora  $X$  la **variable aleatoria que cuenta el número de éxitos que se producen cuando hacemos  $n$  pruebas independientes del experimento base, donde la probabilidad de éxito es  $p$** . En este caso, decimos que  $X$  sigue una distribución binomial, y se representa:  $X \in B(n, p)$ . El enunciado de cada ejercicio nos dará los datos sobre cuántas veces repetimos el experimento base y cuál es la probabilidad de éxito.

Una vez hayamos establecido que una variable siga una distribución binomial, podemos utilizar la fórmula de probabilidades de una distribución binomial, que son:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ donde } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1, n.$$

Recordamos también que  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$  es el número combinatorio que se lee " $n$  sobre  $k$ ". En la calculadora se puede calcular rápidamente

pulsando el valor de  $n$ , luego la tecla  $nCr$  y después el valor de  $k$ . Al pulsar la tecla [ANS] o [=] obtendremos el resultado final. Recuerda también que en las pruebas oficiales hay que escribir el cociente.

Finalmente, comentamos que la fórmula anterior del cálculo de probabilidad de una variable binomial es sólo válida para un único valor de la variable. Si necesitamos calcular la probabilidad de que la variable tome varios valores, habrá que calcularlos uno a uno y luego sumarlos.

[Volver al menú principal](#)



*Ilustración 40: En T<sub>4</sub> los estudiantes pueden hacer un repaso de los conceptos relacionados con la distribución binomial.*

Dado que la proporción de éxitos es de 3 por cada 50 personas, la probabilidad de éxito (encontrar un donante universal) es  $p = \frac{3}{50} = 0.06$ , respuesta que deberá indicar el estudiante para avanzar.

Según la información encontramos la proporción con que aparece en España una persona O negativo al azar: 3 de cada 50 personas. Este dato se puede interpretar como la **probabilidad de encontrar un donante universal al azar en toda España**. También ponemos énfasis en encontrar a un donante universal, por lo que este será nuestro **éxito**.

Si llamamos a nuestro éxito  $A$  = "encontrar un donante universal", ¿Cuál es la probabilidad de éxito, es decir,  $p = P(A)$ ?

0.03  0.06  0.6  0.3

[Enviar](#)



*Ilustración 41: Página D<sub>2</sub>. El estudiante debe indicar cuál es la probabilidad de éxito.*



El otro dato que caracteriza una variable binomial es el número de repeticiones que se hacen del experimento base:  $n$ . En este caso, la dificultad radica en que las opciones son números que aparecen en el enunciado del problema. Para poder avanzar, el estudiante debe marcar que  $n = 8$ , como personas hay en la cafetería.

Una vez localizada la probabilidad de éxito  $p$ , sería conveniente buscar el número de repeticiones. En nuestro caso, el experimento base sería preguntarle a cada persona cuál es su grupo sanguíneo. Para conocer el número exacto de personas en la cafetería, hay que preguntarle a todos.



¿Cuál es el número de repeticiones del experimento base,  $n$ ?

- 50   
  3   
  6   
  8

Enviar

Ilustración 42: En  $D_3$  el estudiante debe indicar el valor de  $n$ .

Ya en  $D_4$  hay que establecer la variable binomial y cuál es su significado. Por este motivo, se le indica al estudiante lo que encuentra en la *Ilustración 43*.

Según lo definido como éxito, la probabilidad pedida es  $P(X = 0)$ . Nótese que si hubiésemos considerado como éxito el hecho de encontrar a una persona que no sea donante universal, entonces  $X \in B(8, 0.94)$  y la probabilidad pedida sería  $P(X = 8)$ .

#### DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Las personas con tipo sanguíneo O negativo se denominan donantes universales, porque las personas con cualquier tipo sanguíneo puede recibir esta sangre sin problemas de coagulación.

En España, 3 de cada 50 personas tiene sangre de tipo O negativo. En una cafetería, en cualquier lugar de España, hay 8 personas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna sea donante universal?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya como máximo dos personas con grupo sanguíneo O negativo?

$p = P(\text{encontrar un donante universal}) = 0.06, n = 8.$

En el enunciado aparece una nueva variable, a la que llamaremos  $X$  = "número de donantes universales en la cafetería". Entonces  $X$  contaría los éxitos de nuestro experimento, y el hecho de que una de las personas sea donante, no significa que la siguiente tenga que ser o no donante universal.

Esto indica que  $X$  es una variable aleatoria binomial, con  $n = 8$  repeticiones y probabilidad de éxito  $p = 0.06$ . Esto lo indicamos escribiendo

$$X \in B(8, 0.06).$$

¿Cuál de las siguientes es la probabilidad que se pide en el primer apartado?

- $P(X > 0)$    
   $P(X = 0)$    
   $P(X = 8)$    
   $P(X < 8)$

Enviar



Ilustración 43: En  $D_4$  se establece la variable binomial y sus parámetros. El estudiante debe formalizar algebraicamente la probabilidad requerida en (a).

Una vez establecida toda la información primordial que desemboca en el cálculo de la probabilidad requerida, se pide al estudiante que indique la operación con la que corresponde dicho cálculo, según se muestra en *Ilustración 44*.

$X \in B(8, 0.06), \quad P(X = 0).$

Indique qué fórmula expresa el valor correcto de  $P(X = 0)$  en esta variable binomial:



- $\binom{8}{0} 0.08^0 \cdot 0.92^8$    
   $\binom{8}{0} 0.06^8 \cdot 0.94^0$    
   $\binom{8}{0} 0.06^0 \cdot 0.94^8$    
   $\binom{8}{0} 0.08^8 \cdot 0.92^0$

Ilustración 44: En  $D_5$  el estudiante indicará la operación que resuelve la probabilidad que se requiere.

Una vez elegida la opción correcta  $\left(\binom{8}{0} \cdot 0.06^0 \cdot 0.94^8 \approx 0.6096\right)$ , el estudiante deberá introducir en  $D_6$  la respuesta decimal con precisión a la diezmilésima.

Con ello se concluye el primer apartado y se pasa a abordar el segundo, en el que el

Dado que hay 8 personas en la cafetería, ¿cómo indicáramos ahora el suceso del que hay que calcular la probabilidad?

- $P(X = 2)$    
   $P(X \leq 2)$    
   $P(X \geq 2)$   
  $P(X < 2)$    
   $P(X > 2)$

Enviar



Ilustración 45: En  $D_7$  el estudiante indica la notación adecuada para la probabilidad a calcular.

estudiante debe ahora la probabilidad de un suceso compuesto: la probabilidad de que haya un máximo de 2 personas donantes universales en la cafetería. Una vez más, el estudiante empezará escribiendo con una notación algebraica adecuada la probabilidad requerida:  $P(X \leq 2)$ , opción que deberá marcar en  $D_7$ .

Dado que estos estudiantes únicamente cuentan con la fórmula para calcular una probabilidad de un suceso elemental de la forma  $P(X = k)$ , con  $0 \leq k \leq n$  (según se observaba en la Ilustración 40), se pide al estudiante que razone cómo puede calcular esta probabilidad. Esto se muestra en la pregunta  $D_8$ , cuyo texto se muestra en la Ilustración 46.

Se espera que el estudiante indique que hay que calcular las probabilidades de los tres sucesos elementales  $P(X = k)$ , con  $0 \leq k \leq 2$ , y que luego las sume. Por tanto, necesitará calcular 3 probabilidades y luego sumarlas, ya que se consiera la unión de tres sucesos de la forma  $P(X = k)$ , los cuales son incompatibles.

Para asegurarnos de que el estudiante calcula bien las probabilidades de estos tres sucesos proponemos al estudiante que indique en  $D_9$  el valor de los tres valores en los desplegables que podemos observar en Ilustración 47.

Para ello, deberíamos calcular las probabilidades de ¿cuántos sucesos en total?

- 2, y luego sumarlos.  
 5, y luego sumarlos.  
 4, y luego sumarlos.  
 Sólo 1.  
 8, y luego sumarlos.  
 3, y luego sumarlos.

Enviar



Ilustración 46: En  $D_8$  el estudiante describe el proceso de cálculo de un suceso compuesto de una variable binomial.

Calcule las tres probabilidades necesarias y luego indíquelo más abajo.

$P(X = 0) =$

$P(X = 1) =$

$P(X = 2) =$

- 



Ilustración 47: En  $D_9$  el estudiante selecciona los valores de las probabilidades de los sucesos elementales.

El hecho de haber incluido esta pregunta da la posibilidad de descubrir si lleva correctamente a cabo el cálculo de probabilidades según se indicaba en  $T_4$ .

Una vez superada esta pantalla, el estudiante debe terminar el cálculo de la probabilidad sumando los tres valores.

Cuando el estudiante introduce  $P(X \leq 2) = 0.9904$  habrá terminado con éxito el último problema y habrá terminado la lección.

### DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

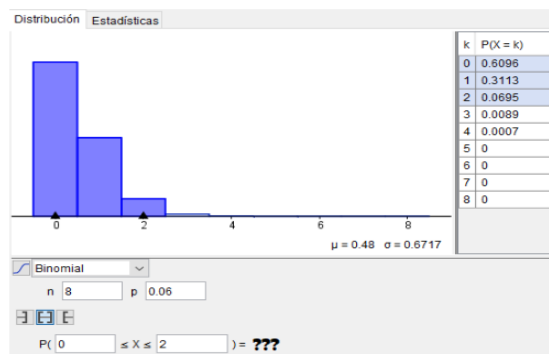
Las personas con tipo sanguíneo O negativo se denominan donantes universales, porque las personas con cualquier tipo sanguíneo puede recibir esta sangre sin problemas de coagulación.

En España, 3 de cada 50 personas tiene sangre de tipo O negativo. En una cafetería, en cualquier lugar de España, hay 8 personas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna sea donante universal?  $P(X = 0) = 0.6096$ .

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de la mitad de personas con grupo sanguíneo O negativo?

$X \in B(8, 0.06)$ ,  $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ .



Termine el cálculo e indique el resultado final de la probabilidad de que, como máximo, haya 2 donantes universales en la cafetería. Recuerde redondear el resultado a las diezmilésimas (4 cifras decimales).

Ilustración 48: En la última pregunta se le recuerda que puede utilizar otros recursos trabajados en el aula para poder calcular probabilidades de variables aleatorias binomiales, cuyo apoyo gráfico complementan la adquisición de todo el procedimiento descrito.

## 3.6. EVALUACIÓN DE MOODLE

La evaluación de los recursos constituye un elemento fundamental para analizar las viabilidades de una propuesta. Como último elemento del recurso propuesto, Moodle incluye, a modo de evaluación de la propia herramienta, unas encuestas predefinidas con las que puede evaluarse la efectividad de la utilización de Moodle como recurso en línea. Nos referimos a las encuestas COLLES (*Constructivist On-Line Learning Environment Survey*) citadas en el capítulo 2.

Fueron Taylor y Maor (2000) quienes idearon este cuestionario para evaluar el recurso creado por Dougiamas (2002), pudiendo evaluar la pertinencia de la utilización de un recurso de e-learning atendiendo a seis dimensiones o aspectos.

Su estructura es de 24+2 preguntas con 4 respuestas en una escala tipo *Likert* (0 a 3), y repartidas en 6+1 bloques, representando cada bloque (1 a 6) los siguientes aspectos: relevancia profesional, pensamiento reflexivo, interactividad, apoyo del tutor, apoyo de los compañeros e interpretación. El séptimo bloque recoge una pregunta de control de la aleatoriedad de las respuestas (tiempo que se ha tardado en rellenarlo) y una pregunta de respuesta abierta (comentario adicional, a modo de propuesta de mejora).

Existen tres tipos de test COLLES: real, favorito y mixto (real y favorito). En las tres categorías se realizan las mismas preguntas, con la salvedad de que en el modo mixto se repite cada pregunta (véase el test COLLES real en el *Anexo I*, página 69).

En el test COLLES favorito los estudiantes contestan a las preguntas según su percepción, en el test COLLES real los estudiantes contestan a las mismas preguntas según la realidad y en el test COLLES mixto, los estudiantes pueden mostrar las diferencias entre su percepción y lo que ha acontecido durante el desarrollo real del curso.

Hemos adaptado el test COLLES dentro de nuestro Trabajo de Fin de Máster para evaluar los recursos elaborados. Los resultados de este test nos servirán de referencia para hacer modificaciones y atender a las fortalezas del curso cuando lo hayamos implementado. Lo denominamos COLLES MODIFICADO. Pasamos a continuación a analizar las preguntas categorizadas en los aspectos que describíamos anteriormente.

Las respuestas que el estudiante puede dar en los primeros 6 bloques son:

Casi nunca (0), Rara vez (1), A menudo (2), Casi siempre (3).

En el primer bloque, relevancia profesional, se analiza si los contenidos del curso en línea son de interés para el estudiante, enfatizando su utilidad en el futuro.

#### **[A] Relevancia**

1. Los problemas trabajados en el libro digital y en la lección de Moodle se centran son temas que me interesan.
2. Creo que los problemas presentados son imprescindibles para el estudio de mi asignatura.
3. Los problemas resueltos me permiten aprender cómo mejorar mi aprendizaje.
4. Los problemas que he resuelto tienen relación con esta asignatura.

El pensamiento reflexivo ocupa el segundo bloque de cuestiones, y se pide al estudiante que refleje valoraciones acerca de su percepción de la forma de aprender, qué percepción tiene de sus propias ideas, y también de sus compañeros:

**[B] Pensamiento reflexivo**

5. Los problemas de este curso virtual me hacen reflexionar sobre cómo aprendo.
6. Con los problemas de este curso he descubierto nuevos conocimientos o he reafirmado los que ya tenía.
7. Con las situaciones planteadas en los problemas que he resuelto he observado cómo mis compañeros han adquirido nuevos conocimientos o han reafirmado los que ya tenían.
8. Las situaciones de los problemas que he resuelto en esta unidad me han hecho pensar sobre las ideas que tengo.

El tercer bloque es el dedicado a la interactividad, y mide el grado de comunicación de un estudiante con los otros en ambos sentidos:

**[C] Interactividad**

9. Explico mis ideas para resolver los problemas a los demás.
10. Les pido a otros compañeros ideas para resolver los problemas.
11. Los otros estudiantes me piden ideas para resolver los problemas.
12. Algunos compañeros han respondido a las ideas que he escrito en el foro cuando he dado ideas para poder resolver los problemas.

El soporte del profesorado ocupa el cuarto bloque de preguntas. En él los estudiantes analizan el papel del profesorado y su metodología:

**[D] Apoyo del tutor**

13. El tutor me ha animado a reflexionar sobre aspectos de los problemas para poder resolverlos.
14. El tutor me ha animado a debatir sobre aspectos descritos en los problemas.
15. El tutor escrito las explicaciones en los foros para ayudar a los demás a resolver los problemas.
16. El tutor ha expresado reflexiones críticas sobre las situaciones enunciadas en los problemas.

También hay cabida para el soporte entre compañeros en el test COLLES. Los estudiantes valoran su grado de compromiso hacia los demás y también el que éste percibe de sus compañeros:

**[E] Apoyo de compañeros**

17. Los otros estudiantes me animaron a participar en los foros.
18. A los otros estudiantes les parece bien mi contribución.
19. Otros estudiantes puntuaron mis contribuciones.
20. Los otros estudiantes empatizan con mis esfuerzos por aprender.

El último bloque de preguntas con escala *Likert* se dedica a la interpretación de un estudiante acerca de Moodle como herramienta de comunicación con el tutor y los compañeros:

**[F] Interpretación**

21. Entendía bien los mensajes que los otros estudiantes escribieron en el foro.
22. Los otros estudiantes entendieron bien mis mensajes en el foro.
23. Entendía bien los mensajes del tutor en el foro.
24. El tutor entendía bien mis mensajes en el foro.

Finalmente, dos preguntas con respuesta abierta cierran el cuestionario. Aquí los estudiantes indican la duración aproximada de cumplimentación del cuestionario y otros comentarios que deseen incluir en la valoración:

25. ¿Cuánto tiempo aproximado, en minutos, le llevó completar esta encuesta?
26. ¿Tiene algún otro comentario?

Conviene señalar que el libro digital y la lección de Moodle son herramientas que pueden ser interpretadas como recursos de autoaprendizaje y que en sí no presentan interacción social, con lo que las dimensiones “apoyo del tutor” y “apoyo de los compañeros” del test COLLES MODIFICADO restarían eficiencia a esta herramienta de evaluación. Pero, aún no siendo objetivo específico de este Trabajo de Fin de Máster, Moodle se caracteriza y se diferencia de otros recursos de e-learning por el sentido de interacción a través de foros, por lo que el test COLLES MODIFICADO será una buena opción para evaluar los recursos libro digital y lección si combinamos estos recursos con un foro de interacción o una evaluación por pares, impidiendo así que estos recursos pierdan la esencia del entorno organizador, Moodle. Es por este motivo que hemos añadido el foro en el aula virtual.

## CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES Y PROPUESTAS DE MEJORA

En este último capítulo nos proponemos, a modo de mejora, hacer un análisis sobre el grado de consecución de los objetivos que nos hemos propuesto en la realización de este Trabajo de Fin de Máster.

A lo largo de este Trabajo se ha podido comprobar que se ha podido configurar un espacio virtual Moodle que un docente de Matemáticas puede utilizar para fomentar que sus alumnos discutan, consulten y resuelvan problemas (objetivo 1).

Además de integrar materiales digitales habituales, se han incorporado otros, más complejos, como por ejemplo botones de acción con código HTML, applets de GeoGebra o videotutoriales que tomamos de YouTube (objetivo 2).

Este trabajo ha sido acompañado de la redacción de diferentes especificaciones técnicas a modo de guía para facilitar la labor de implementación de un sitio virtual Moodle. A su vez, hemos tenido en cuenta incluir algunas recomendaciones técnicas que sirven de mejora para la implementación, haciendo más llamativa para los alumnos, dejando libertad al lector que incluya aquellos recursos que considere oportunos.

Se han incluido en este Trabajo de Fin de Máster diferentes orientaciones útiles para el diseño e implementación de dos recursos didácticos: un libro digital y una lección sobre Moodle. En el libro digital se incluyen recursos multimedia de diferente índole, entre los que sobresalen los videotutoriales y los *applets* de GeoGebra. Éstos servirán de apoyo a los estudiantes para que logren adquirir una visión geométrica o se construyan sus propias herramientas que les permitan deducir las propiedades necesarias para llegar a una solución, logrando así el propósito de cada problema. Las lecciones también pueden albergar estos elementos, y complementan la experiencia del libro digital dejando un registro de respuestas de los estudiantes mostrando al profesorado cuáles son sus principales dificultades y qué rutas de aprendizaje han seguido los estudiantes (objetivo 2).

Con la selección de los problemas que atienden a diferentes contenidos curriculares de Educación Secundaria y el análisis de su resolución, hemos propuesto varias estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas que los docentes de Matemáticas pueden llevar a sus aulas. Las soluciones de los problemas incluidos en el libro digital se diseñaron atendiendo a los episodios propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013). Las lecciones de Moodle también podrían ser utilizadas por el profesorado como instrumento para el autoaprendizaje. Los estudiantes podrían recibir

una ayuda extra en caso de que no hayan completado alguna de las fases de la resolución. Adicionalmente, la atención a la diversidad para alumnado avanzado puede contemplarse si el profesorado diseña rutas a partir de preguntas que lo detecten (objetivos 3 y 4).

Se ha mostrado en este trabajo las ventajas del uso de las herramientas que hemos desarrollado (el libro digital y la lección). Hemos destacado que ambos recursos pueden encontrarse en un entorno único y suficiente para el alumnado, impidiendo así que se pierdan en Internet buscando recursos. Otra gran ventaja es la posibilidad de que el estudiante pueda disponer de un repaso de la teoría antes de empezar a hacer un ejercicio, como habíamos diseñado en la lección (objetivo 5).

Por último, hemos elaborado a partir de una herramienta de evaluación existente dentro de Moodle (el test COLLES de Dougiamas (2002), en colaboración con Taylor y Maor (2000)), un instrumento de evaluación para nuestros fines particulares (el test COLLES MODIFICADO) que, pese a que no se pudo aplicar, permitirá, tanto a los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato volcar sus opiniones en torno a la utilidad real y valor educativo que tienen estos recursos durante su proceso de aprendizaje, como al docente para rediseñar las experiencias educativas que ponga a disposición de su alumnado.

Por tanto, consideramos que este trabajo cumple ampliamente con sus objetivos.

## PROPUESTAS DE MEJORA

De modo esquemático, presentamos algunas propuestas de mejora en relación con lo desarrollado en este Trabajo de Fin de Máster.

1. El uso de libros digitales y lecciones en la resolución de problemas hace que los alumnos puedan disponer de recursos interactivos y enlaces a otras webs, así como procesos de aprendizaje acordes con sus dificultades en el aprendizaje. El amplio abanico que comprende la generación de documentos utilizando las características del lenguaje HTML pueden hacer de un libro digital una experiencia completa. En particular, para el aula invertida podría suponer una muy buena combinación con los foros, de manera que el docente podría generar contenido en videos personalizados que comprendan los contenidos a trabajar de manera práctica en el aula en su siguiente sesión. Sería interesante iniciar una línea de innovación el diseño de una situación de aprendizaje basada en la clase invertida y que utilice libros digitales de Moodle para su implementación.



2. Cuando nos referimos a que las lecciones suponen una herramienta para la atención a la diversidad, no solo nos referimos a que atienden a los estudiantes con dificultades en el aprendizaje. Las lecciones son una buena opción para atender a los alumnos con capacidades superiores, ya que pueden realizarse análisis más profundos, cuyas ramificaciones podrían iniciarse mediante preguntas de complejidad superior.
3. Algo muy positivo es que las lecciones de Moodle permiten hacer un análisis de los distintos recorridos que han hecho los estudiantes durante su ejecución, ya que cuenta con un apartado de estadísticas exhaustivas de la cual el docente puede extraer distintos tipos de información. Pero cuantas más ramificaciones tenga la lección, más complicada de programar será. Sin duda, la experiencia del docente irá aumentando según vaya familiarizándose con la programación de estas lecciones.
4. Otro aspecto que podría considerarse es que en una lección de Moodle se llegue a forzar al estudiante a seguir un determinado razonamiento, como se puso de manifiesto en la definición de la variable binomial. Por ejemplo, en cuarto problema de la lección, lo que unos estudiantes considerarían éxito, otros podrían considerarlo fracaso. Ante eso debemos comentar que las Lecciones Moodle son un recurso con una alta variabilidad de estrategias para la enseñanza de las Matemáticas. En el caso de la lección que se ha desarrollado como ejemplo, su diseño partía de la premisa de que lo que quería hacerse era precisamente definir una serie de procedimientos estándar para afianzar su cálculo. Sin embargo, podría utilizarse una Lección Moodle como recurso donde los estudiantes podrían recibir determinadas nociones -y no guías- para resolver una determinada situación problemática. Incluso otro uso algo más recurrente que el anterior es el de utilizar una Lección para diseñar una secuencia con elementos teóricos en el que el docente pretenda controlar la asimilación de ciertos conceptos o procedimientos por parte de su alumnado a partir de las preguntas.
5. Finalmente, y en relación con el apartado 3, sería positivo que los desarrolladores de Moodle implementaran una funcionalidad por la que se permita mostrar un grafo de las diferentes preguntas y los saltos, para poder controlar mejor los diferentes de flujo en la lección y evitar ramificaciones incompletas -el sistema terminaría el flujo automáticamente en estos casos, llevando al estudiante al final de la lección-. Actualmente se muestra el flujo de forma lineal según en el orden que se van creando las preguntas.

Para finalizar, concluimos este Trabajo de Fin de Máster valorando positivamente su potencialidad para ser llevado al aula en su totalidad y creemos que la posibilidad real de ser utilizado es una oportunidad que puede ser factible para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas del siglo XXI.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barwell, R. (2011). Word problems: Connecting language, mathematics and life that works? *Research into Practice: Research Monograph 34. Literacy and Numeracy Secretariat*. Recuperado de: [http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/WW\\_Word\\_Problems.pdf](http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/WW_Word_Problems.pdf).
- Becerra Plaza, G.E. (2016) Innovación. En Pérez, T. J. M., y Tejedor, S. (Eds.). *Ideas para aprender a aprender: manual de innovación educativa y tecnología* (pp 41-47). Retrieved from <https://ebookcentral-proquest-com.accedys2.bbtck.ull.es>.
- Calzadilla, M. E. (2002). Aprendizaje colaborativo y tecnologías de la información y la comunicación. *Revista Iberoamericana De Educación*, 29(1), 1-10. Recuperado a partir de <https://rieoei.org/RIE/article/view/2868>
- Clarenc, C. A.; S. M. Castro, C. López de Lenz, M. E. Moreno y N. B. Tosco (2013). Analizamos 19 plataformas de eLearning: Investigación colaborativa sobre LMS. Grupo GEIPITE, Congreso Virtual Mundial de e-Learning. Sitio web: [www.congresoelearning.org](http://www.congresoelearning.org)
- Conde, M.A. (2007). mLearning, de camino hacia el uLearning. Universidad de Salamanca.
- English, L. y Sriraman, B. (2010). *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. Recuperado de [https://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/21829/1/TM\\_mLearningcamino.pdf](https://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/21829/1/TM_mLearningcamino.pdf)
- Dougiamas, M. (2001). Moodle: open-source software for producing internet-based courses.
- Dougiamas, M. y Taylor, P. (2002) Interpretative analysis of an internet-based course constructed using a new courseware tool called Moodle. Recuperado de: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.492.5927&rep=rep1&type=pdf>
- Dougiamas, M. and Taylor, P.C. (2003) Moodle: Using Learning Communities to Create an Open Source Course Management System. *Documentación de la Conferencia EDMEDIA 2003, Honolulu, Hawaii*. Recuperado en 2018 de: <https://dougiamas.com/archives/edmedia2003/>

- English L., Sriraman B. (2010) Problem Solving for the 21st Century. In: Sriraman B., English L. (eds) Theories of Mathematics Education. Advances in Mathematics Education. Springer, Berlin, Heidelberg
- Gallotti, K. M., Clinchy, B. M., Ainsworth, K., Lavin, B., y Mansfield, A. F. (1999). A New Way of Assessing Ways of Knowing: The Attitudes Towards Thinking and Learning Survey (ATTLS). *Sex Roles*, 40(9/10), 745-766.
- Kemp, S. (2018). *Digital in 2018 Global Overview*. Recuperado de <https://www.slideshare.net/wearesocial/digital-in-2018-global-overview-86860338>
- Khairiree, K. (2017). *A Study of Constructivist in Mathematics in Virtual Class with Moodle and the Geometer's Sketchpad*. International College, Suan Sunandha Rajabhat University, Bangkok, Thailand.
- Kotzer, S. y Elran, Y. (2012). *Learning and teaching with Moodle-based E-learning environments, combining learning skills and content in the fields of Math and Science & Technology*, Davidson Institute of Science Education, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel.
- Brijlall, Deonarain & Maharaj, Aneshkumar. (2017). Exploring MOODLE as a Platform in Promoting Effective Mathematics Teaching and Learning. *PONTE International Scientific Researchs Journal*. 73.
- Nichols, A. (1983). *Managing educational innovations*. Londres: Allen & Unwin.
- Olaizola, A. (2014). La clase invertida: Usar las TIC para “dar vuelta” a la clase. *Actas X Jornadas de Material Didáctico y Experiencias Innovadoras en Educación Superior*, Universidad de Buenos Aires.
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. *Extraído en 2018 de: Boletín Oficial del Estado*.
- Polya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Reyes, I. (2012). *El diseño de un libro interactivo que incorpora la resolución de problemas y el uso coordinado de tecnología digital*. Tesis de maestría (sin publicar). CINVESTAV. México.

- Sánchez, J. (2005). La innovación educativa institucional y su repercusión en los centros docentes de Castilla-La Mancha. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 3 (1), 638-664.
- Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2013). *The Mathematics Enthusiast*, ISSN 1551-3440, Vol. 10, nos. 1 y 2, pp. 279-302. Dept. of Mathematical Sciences. The University of Montana.
- Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: An evolving research and practice domain. *ZDM -The International Journal on Mathematics Education*.
- Santos-Trigo, M. (2018). Mathematical problem solving and the use of technology in the initial education and professional development of teachers. Universidad de La Laguna (Seminario sobre resolución de problemas, 16 de marzo).
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). NY: Macmillan.
- Stegman, J.C. (21 de noviembre de 2017). Informe PISA: España suspende en la capacidad de los alumnos para resolver problemas en equipo. ABC. Recuperado de: [http://www.abc.es/sociedad/abci-informe-pisa-espana-suspende-capacidad-alumnos-para-resolver-problemas-equipo-201711210812\\_noticia.html](http://www.abc.es/sociedad/abci-informe-pisa-espana-suspende-capacidad-alumnos-para-resolver-problemas-equipo-201711210812_noticia.html)
- Suurtamm, C.; Quigley, B. y Lazarus, J. (2015). Making space for students to think mathematically. *What Works? Research into Practice. Research Monograph #59. Student Achievement Division*.
- Taylor, P. y Maor, D. (2000). Assessing the efficacy of online teaching with the Constructivist On-Line Learning Environment Survey. Recuperado el 20 de febrero de 2011 de <http://cleo.murdoch.edu.au/confs/tlf/tlf2000/taylor.html>
- Werbacht, K. (2000). *Clicks and Mortar Meets Cap and Gown: Higher Education Goes Online*.

## ANEXOS

### ANEXO I: TEST COLLES REAL (EXTRAÍDO DE MOODLE).

#### **COLLES Real**

El propósito de esta encuesta es ayudarnos a entender hasta qué punto la presentación en línea de esta unidad le facilitó el aprendizaje. Cada una de las 24 cuestiones siguientes le preguntará sobre su experiencia en esta unidad. No hay respuestas 'correctas' o 'erróneas': solo queremos su opinión. Le garantizamos que sus opiniones serán tratadas con el mayor grado de confidencialidad y no afectarán a su evaluación. Sus respuestas, pensadas cuidadosamente, nos ayudarán a mejorar la manera de impartir esta unidad en el futuro. Muchas gracias.

Todas las preguntas son necesarias y deben ser contestadas

#### **Relevancia**

En esta unidad en línea...

- 1 Mi aprendizaje se centra en asuntos que me interesan.
- 2 Lo que aprendo es importante para mi práctica profesional.
- 3 Aprendo cómo mejorar mi práctica profesional.
- 4 Lo que aprendo tiene relación con mi práctica profesional

#### **Pensamiento reflexivo**

En esta unidad en línea...

- 5 Pienso críticamente sobre cómo aprendo.
- 6 Pienso críticamente sobre mis propias ideas.
- 7 Pienso críticamente sobre las ideas de otros estudiantes.
- 8 Pienso críticamente sobre las ideas que leo.

#### **Interactividad**

En esta unidad en línea...

- 9 Explico mis ideas a otros estudiantes.
- 10 Pido a otros estudiantes que me expliquen sus ideas.
- 11 Otros estudiantes me piden que explique mis ideas.

12 Otros estudiantes responden a mis ideas.

### **Apoyo del tutor**

En esta unidad en línea...

13 El tutor me estimula a reflexionar.

14 El tutor me anima a participar.

15 El tutor ejemplifica las buenas disertaciones.

16 El tutor ejemplifica la auto reflexión crítica.

### **Apoyo de compañeros**

En esta unidad en línea...

17 Otros estudiantes me animan a participar.

18 Los otros estudiantes elogian mi contribución.

19 Otros estudiantes valoran mi contribución.

20 Los otros estudiantes empatizan con mis esfuerzos por aprender.

### **Interpretación**

En esta unidad en línea...

21 Entiendo bien los mensajes de otros estudiantes

22 Los otros estudiantes entienden bien mis mensajes.

23 Entiendo bien los mensajes del tutor.

24 El tutor entiende bien mis mensajes.

### **Otros**

25 ¿Cuánto tiempo le llevó completar esta encuesta?

26 ¿Tiene algún otro comentario?