



FACULTADES DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ASTROFÍSICA

Determinación de los parámetros físicos de estructuras magnéticas solares

Sergio Díaz Suárez

Tutores: Dr. Manolo COLLADOS VERA y Dr. Basilio RUIZ COBO

La Laguna, Junio 2018

Índice general

Abstract	1
1. Introducción	4
1.1. Parámetros de Stokes	5
1.2. Ecuación del transporte radiativo	6
1.3. Aproximación Milne-Eddington	8
1.4. SIR	9
1.5. Objetivos	9
2. Síntesis en la aproximación ME	11
2.1. Procedimiento y resultado	12
2.2. Dependencia con la intensidad del campo magnético	13
2.3. Dependencia con la inclinación del campo magnético	15
2.4. Dependencia con el azimuth del campo magnético	16
3. Funciones respuesta en la aproximación ME	17
4. Inversión en la aproximación ME	21
4.1. Algoritmo Levenberg-Marquardt	22
4.2. Inversión ME de perfiles de Stokes generados con ME	23
5. Aplicación de SIR y ME a datos de Hinode	26
6. Mapa de Hinode usando SIR	32
Conclusiones	36
Bibliografía	37

Abstract

The Sun is the nearest star for us. It is an almost perfect sphere of magnetized plasma which emits radiation constantly and it is fundamental for the existence and development of life on Earth but at the same time, it can be a threat because we are dependent on electricity and eventually a solar storm could destroy our infrastructures, leaving us without access to technology, so it is important to understand how the Sun is and predict its behaviour.

In this Master thesis, we will focus on obtaining the thermodynamic and magnetic conditions from the polarized light, that is to say from the Stokes parameters. We will use not only simulated conditions but real data from the solar photosphere, which is the nearest layer to the Sun's surface. In order to do this, we will talk about the Stokes parameters and about the Radiative Transfer Equation for full Polarized Light. After that, we will solve this equation under the Milne-Eddington approximation and we will explain its analytical solution. However, this isn't the only way to obtain a solution. In fact, nowadays this equation is solved numerically because when we consider the dependence of parameters with optical depth there is not analytical solution although there are several programs to study the low atmosphere of the Sun like SIR, which we will explain how it works and its advantages and disadvantages.

To make this possible, once we have seen how analytical solution of the Radiative Transfer Equation for full Polarized Light are, we will explain the method to synthesize under the Milne-Eddington approximation or in other words, how to obtain the Stokes parameters from 9 free parameters. These parameters are S_0 and S_1 which are the associated coefficients to the source function. η is the ratio between the absorption on the line and on the continuum. a is the damping adimensionalized parameter whereas w_m is the line of sight velocity of the medium. Respect to $\Delta\lambda_D$, B , θ and χ , they are the Doppler broadening in wavelength units, the intensity of the magnetic field in Gauss, the inclination of the magnetic field respect to the line of sight in degrees and the azimuth of the magnetic field also in degrees. We will particularize for the spectral line of Fe I at 6301.5 Å and maintaining an initial set constant, we will change each parameter to observe and explain what happens. Using this method, we will study what occurs when we vary the intensity of magnetic field,

the inclination of the magnetic field respect to the line of sight and its azimuth.

After that, we will build up the response functions. Under the Milne-Eddington hypothesis, we will show you that the response functions are analytical and are the first derivative of Stokes parameters respect to the free parameters of the Milne-Eddington approximation. In any case, we will also check these analytical response functions by using a central difference method. Nevertheless, the response functions, numerical or analytical, tell us how Stokes parameters change because of linear perturbations on the parameters which we use for synthesizing the Stokes profiles.

Now, in order to achieve the inversion of an observed Stokes profile under the Milne-Eddington approximation, one must introduce to the program a set of Milne-Eddington parameters to synthesize the Stokes parameters, compare between the observed and synthetic Stokes profiles and change iteratively the parameters until a good fit is achieved. As the Radiative Transfer Equation for full Polarized Light is not linear, we have to do it iteratively until the difference between the observed and synthesized Stokes profiles are minimum or specifically, until χ^2 is minimum. Fortunately, there are algorithms to make non-linear fits from which Levenberg-Marquardt algorithm is selected for being standard and giving excellent results. As a test, we can substitute the observed profile by a synthetic Stokes profile plus a noise. Applying our inversion code to this profile, we can check the behaviour of our code. In practice, we will use first a synthetic Stokes profile without noise to obtain the 9 free parameters and later, the same profile but noise is added. However, in both cases, we will simulate the spectral line of Fe I at 6301.5 Å.

In addition to this, we are going to apply our Milne-Eddington inversion code on real spectropolarimetric data, which are Stokes profiles versus wavelength. Particularly, we are going to use it on a granule near to the active region NOAA 10953 which was observed by HINODE in 2007. But now, we are going to invert the line of Fe I at 6302.49 Å instead of the line of Fe I at 6301.5 Å because the first one is more sensitive to magnetic field as we will see. At the same time, we are going to compare our results from Milne-Eddington inversion code with those from SIR, which doesn't have problems to invert multiple spectral lines simultaneously, and we will explain why both programs agree with the values of magnetic field or the inclination of magnetic field. Here, we will see the fundamental disadvantage of maintaining the quantities constant with optical depth because a Milne-Eddington inversion code can't explain the asymmetries on Stokes profiles or the ascent and the descent of plasma in photospheric layers of granules. In addition to this, our Milne-Eddington inversion code can be used only for one spectral line whereas SIR inverts multiple spectral lines at the same time.

Last of all, we are going to obtain the maps of temperature, microturbulence, velocity along the line of sight, intensity of magnetic field, inclination and azimuth

of magnetic field for a section of the before mentioned active region, which includes the quiet Sun, and a part of a sunspot with its penumbra and its umbra. Those will be obtained with SIR and we will discover that the values are concordant with the literature. Also we will obtain the map of temperatures at a top layer and we will check that this quantity decreases with height, which is expected in the solar photosphere and we will relate the intensity of magnetic field to the temperature for the different structures which appear on the section of the before mentioned active region.

Capítulo 1

Introducción

El Sol es la estrella del Sistema Solar. Aunque existen millones de estrellas tanto similares como distintas a él, su cercanía le permite destacar sobre todas las demás, tomando además un rol crucial en la formación de la vida en la Tierra pero simultáneamente, también constituye una amenaza para los seres humanos, pues cada vez somos más dependientes de la tecnología y el Sol por su actividad magnética es capaz de eyectar plasma al espacio, y a veces en la dirección de la Tierra, lo que ocasionaría enormes daños materiales a nivel mundial. Por este motivo, es necesario predecir la actividad magnética solar, para lo cual es imprescindible comprender la naturaleza del Sol usando observaciones y simulaciones, las dos principales fuentes de información.

Actualmente, prácticamente todo el conocimiento que tenemos del Sol mediante observaciones procede de los fotones que escapan de su atmósfera. Estos fotones pueden tener su origen bien en las transiciones electrónicas de átomos y moléculas o bien en procesos de dispersión. En ambos casos puede emerger radiación polarizada. Sin embargo, mientras que en el caso de las dispersiones basta con que el fenómeno ocurra para obtener radiación polarizada, en el caso de las transiciones atómicas, debe haber un agente externo como el campo magnético.

En cualquier caso, la radiación es energía transportada bien por partículas subatómicas o bien por ondas electromagnéticas. Dichas ondas están constituidas por un campo eléctrico y un campo magnético perpendiculares entre sí y también a la dirección de propagación. A partir de las ecuaciones de Maxwell, puede obtenerse la ecuación en la que la aproximación de onda plana es válida. En tal caso, tomando el eje z como la dirección de propagación de la onda, el campo eléctrico puede expresarse como:

$$\vec{E} = (\varepsilon_1 \vec{x} + \varepsilon_2 \vec{y}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (1.1)$$

Donde ε_1 y ε_2 son números complejos. Sin embargo, hay que tomar la parte real de la ecuación 1.1, ya que medimos cantidades reales. Operando un poco con las

componentes reales del campo eléctrico, puede demostrarse la existencia de la elipse de polarización, es decir, tenemos polarización elíptica, aunque la elipse degenera a una recta cuando el desfase entre las componentes del campo eléctrico es múltiplo de π , polarización lineal, y a una circunferencia cuando es múltiplo de $\pi/2$, polarización circular. Luego, si la radiación está polarizada, significa que existe una coherencia entre las componentes del campo eléctrico. No obstante, detectar y medir campos eléctricos es una tarea complicada. En su lugar, medimos la energía de estas ondas.

1.1. Parámetros de Stokes

Los parámetros de Stokes son cuatro magnitudes físicas que informan sobre la intensidad y polarización de la radiación y fueron definidos por primera vez en el siglo XIX por George Stokes. En el caso de ondas electromagnéticas cuasimonocromáticas, ondas cuya amplitud puede variar lentamente en el tiempo comparada con el periodo de la onda, los parámetros de Stokes son (ver [17]):

$$I \equiv k(\langle \varepsilon_1^* \varepsilon_1 \rangle + \langle \varepsilon_2^* \varepsilon_2 \rangle) \quad (1.2)$$

$$Q \equiv k(\langle \varepsilon_1^* \varepsilon_1 \rangle - \langle \varepsilon_2^* \varepsilon_2 \rangle) \quad (1.3)$$

$$U \equiv k(\langle \varepsilon_1^* \varepsilon_2 \rangle + \langle \varepsilon_2^* \varepsilon_1 \rangle) \quad (1.4)$$

$$V \equiv ik(\langle \varepsilon_1^* \varepsilon_2 \rangle - \langle \varepsilon_2^* \varepsilon_1 \rangle) \quad (1.5)$$

Donde k es una constante de proporcionalidad que les da las dimensiones de intensidad específica, es decir, energía por unidad de área, tiempo, frecuencia y ángulo sólido. ε_1 y ε_2 son las componentes complejas del campo eléctrico en las direcciones x e y respectivamente de la onda mientras que $\langle \dots \rangle$ indica promedio temporal. De nuevo, asumimos el eje z como dirección de propagación.

En cuanto al significado de los parámetros de Stokes, I mide la intensidad de la radiación como puede verse en 1.2, Q y U miden la polarización lineal y V mide polarización circular. Por convenio, cuando $Q > 0$ y $U=0$, las oscilaciones ocurren en el eje x de nuestro sistema de referencia mientras que si $Q < 0$ y $U=0$, las oscilaciones se producen en el eje y . Por otra parte, si $V > 0$, tenemos polarización circular dextrógira mientras que si $V < 0$ tenemos polarización circular levógira.

Por último, para agrupar los 4 parámetros de Stokes, construimos el pseudo-vector de Stokes, pues dichos parámetros no forman una base en el espacio, y es lo que llamamos vector de Stokes. Por definición: $\vec{I} \equiv \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}$

1.2. Ecuación del transporte radiativo

La ecuación del transporte radiativo o ETR surge por la conservación de la energía en el medio y nos indica cómo la radiación es transportada. Para el caso particular en el que la radiación no polarizada atraviesa una capa de un grosor diferencial de una atmósfera plano-paralela y estacionaria y que la radiación no está polarizada, puede demostrarse que la ETR es (ver [4]):

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = (I - S) \quad (1.6)$$

Donde han utilizado la definición de profundidad óptica, $d\tau = -\chi dz$, siendo χ , el coeficiente de absorción y z , la altura a lo largo de la línea de visión. Sin embargo, no solo aparece el continuo sino también líneas espectrales debido a las transiciones atómicas y moleculares que ocurren en la atmósfera solar. Para incluir estos fenómenos en la ecuación 1.6, lo que hacemos es desglosar el coeficiente de absorción en dos términos: uno asociado al continuo y otro a la línea en la definición de la profundidad óptica. De esta manera, puede obtenerse la siguiente ecuación:

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = (1 + \eta) (I - S) \quad (1.7)$$

Siendo τ , la profundidad óptica del continuo, η , el cociente entre el coeficiente de absorción de la línea y el continuo y S , la función fuente. Sin embargo, esta ecuación no incluye el hecho de que la luz puede estar polarizada, por lo que tenemos que recurrir a la ecuación del transporte radiativo para la luz polarizada que es vectorial a diferencia de la anterior que es escalar. La demostración de esta segunda ecuación puede encontrarse en [15] y es:

$$\frac{d\vec{I}}{d\tau} = K (\vec{I} - \vec{S}) \quad (1.8)$$

Para llegar a esta ecuación diferencial vectorial, el Equilibrio Termodinámico Local o ETL es asumido. En dicha ecuación, \vec{I} es el vector de Stokes, \vec{S} es el vector función fuente que vale $\vec{S} = \begin{pmatrix} B_T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ siendo B_T , la función de Planck y K es una matriz cuya expresión es:

$$K = \begin{pmatrix} \eta_I & \eta_Q & \eta_U & \eta_V \\ \eta_Q & \eta_I & \rho_V & -\rho_U \\ \eta_U & -\rho_V & \eta_I & \rho_Q \\ \eta_V & \rho_U & -\rho_Q & \eta_I \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Como podemos ver hay 7 términos independientes. η_I es el coeficiente de absorción correspondiente al $1 + \eta$ que obtuvimos con la ETR escalar y nos aporta información

sobre la radiación total absorbida, η_Q y η_U son los coeficientes de absorción que nos informan de la radiación absorbida con polarización lineal mientras que η_V es el coeficiente de absorción asociado a la absorción de radiación polarizada circularmente. Los 3 términos restantes, ρ_Q , ρ_U , ρ_V son los términos magneto-ópticos e indican cómo cambia la polarización debido a la absorción de radiación. Estos coeficientes tienen la siguiente expresiones: [15]

$$\eta_I = 1 + \frac{\eta}{2} \left[\phi_p \sin^2 \theta + \frac{\phi_b + \phi_r}{2} (1 + \cos^2 \theta) \right] \quad (1.10)$$

$$\eta_Q = \frac{\eta}{2} \left(\phi_p - \frac{\phi_b + \phi_r}{2} \right) \sin^2 \theta \cos 2\chi \quad (1.11) \quad \rho_Q = \frac{\eta}{2} \left(\psi_p - \frac{\psi_b + \psi_r}{2} \right) \sin^2 \theta \cos 2\chi \quad (1.12)$$

$$\eta_U = \frac{\eta}{2} \left(\phi_p - \frac{\phi_b + \phi_r}{2} \right) \sin^2 \theta \sin 2\chi \quad (1.13) \quad \rho_U = \frac{\eta}{2} \left(\psi_p - \frac{\psi_b + \psi_r}{2} \right) \sin^2 \theta \sin 2\chi \quad (1.14)$$

$$\eta_V = \frac{\eta}{2} (\phi_r - \phi_b) \cos \theta \quad (1.15) \quad \rho_V = \frac{\eta}{2} (\psi_r - \psi_b) \cos \theta \quad (1.16)$$

Donde de nuevo η es el cociente entre absorción entre la línea y el continuo. θ es el ángulo que forma nuestra línea de visión con las líneas de campo magnético, χ es el ángulo que forma el plano perpendicular de las líneas de campo magnético respecto a nuestra línea de visión. ϕ_b , ϕ_p y ϕ_r son los perfiles de absorción desplazados al azul, centrado en la línea y desplazado al rojo respectivamente mientras que ψ_b , ψ_p y ψ_r son los perfiles de dispersión desplazados al azul, centrado en la línea y desplazado al rojo respectivamente. Dichos perfiles incluyen la presencia de movimientos térmicos y macroscópicos pues los átomos que absorben radiación tienen una distribución de velocidades maxwelliana superpuesta a la velocidad del medio.

Sin embargo, el origen de estos 6 perfiles es el efecto Zeeman. Cuando los átomos excitados emiten radiación en un medio magnetizado para volver a un estado menos energético, si el campo magnético es suficientemente intenso comparado con los efectos térmicos es capaz de producir una separación en energía, que se refleja en las longitudes de onda, debido a que el campo rompe la degeneración de los subniveles magnéticos. Matemáticamente, los perfiles con los que trabajaremos tienen estas expresiones:

$$\begin{aligned} \phi_r &= \sum_{M-M'=-1} \frac{S_{MM'}}{\sqrt{\pi} \Delta\lambda_D} H(v - v_M - v_B, a) & \psi_r &= \sum_{M-M'=-1} \frac{S_{MM'}}{\sqrt{\pi} \Delta\lambda_D} L(v - v_M - v_B, a) \\ \phi_p &= \sum_{M-M'=0} \frac{S_{MM'}}{\sqrt{\pi} \Delta\lambda_D} H(v - v_M, a) & \psi_p &= \sum_{M-M'=0} \frac{S_{MM'}}{\sqrt{\pi} \Delta\lambda_D} L(v - v_M, a) \\ \phi_b &= \sum_{M-M'=1} \frac{S_{MM'}}{\sqrt{\pi} \Delta\lambda_D} H(v - v_M + v_B, a) & \psi_b &= \sum_{M-M'=1} \frac{S_{MM'}}{\sqrt{\pi} \Delta\lambda_D} L(v - v_M + v_B, a) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Donde $H(u,a)$ y $L(u,a)$ son las funciones de Voigt y Voigt-Faraday respectivamente, $S_{MM'}$ es el coeficiente 3-j que es adimensional, $\Delta\lambda_D$ es la anchura Doppler en longitudes de onda expresada en \AA , v_m es el cociente entre la velocidad del medio a lo largo de la línea de visión y la velocidad térmica, v_B es el cociente entre la separación de las líneas por la existencia de un campo magnético y la anchura Doppler, ambas en longitudes de onda, v es el cociente entre la diferencia de longitud de onda observada y a la que ocurre la transición dividida entre la anchura Doppler en longitudes de onda y a es el parámetro de amortiguamiento adimensionalizado al igual que v , v_B y v_m . Estas magnitudes pueden expresarse como:

$$v = \frac{\lambda - \lambda_o}{\Delta\lambda_D} \quad (1.18) \quad a = \frac{\Gamma\lambda_o^2}{c\Delta\lambda_D} \quad (1.19) \quad v_M = \frac{w_M\lambda_o}{c\Delta\lambda_D} \quad (1.20) \quad v_B = \frac{4,67 \cdot 10^{-13} B\lambda_o^2 g}{\Delta\lambda_D} \quad (1.21)$$

Siendo c , la velocidad de la luz expresada en $\text{\AA}/s$, g , el factor de Landé efectivo de la transición electrónica del átomo o molécula, B es el campo magnético expresado en G, λ y λ_o son las longitudes de ondas observada y de la transición expresadas en \AA , w_m es la velocidad del medio en kilómetros por segundo y Γ es el coeficiente de amortiguamiento en $\text{\AA}^2/s$.

1.3. Aproximación Milne-Eddington

En general, resolver la ecuación 1.8 no es trivial puesto que tenemos un sistema de 4 ecuaciones diferenciales acopladas entre sí por no mencionar que los elementos de la matriz de Mueller dependen de la profundidad óptica. Sin embargo, bajo ciertas aproximaciones es posible resolver dicho sistema incluyendo la aproximación Milne-Eddington (ME). Esta aproximación consta de las siguientes hipótesis:

1. Los coeficientes de la matriz de Mueller no dependen de la profundidad óptica. Para que todo sea consistente, los parámetros de los que dependen estos coeficientes tampoco dependen de la profundidad óptica como por ejemplo el campo magnético, su inclinación respecto a la línea de visión o la anchura Doppler. En consecuencia, no hay gradientes en los campos de velocidad lo que implica la aparición de perfiles simétricos, como veremos más adelante.
2. La función fuente es lineal con la profundidad óptica. Como consecuencia, el vector fuente puede expresarse de la siguiente manera: $\vec{S} = \begin{pmatrix} S_0 + S_1\tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Siendo S_0 y S_1 dos parámetros constantes con la profundidad óptica.

Bajo esta aproximación, veremos en el capítulo 2 que no solamente es posible obtener una solución a la ecuación 1.8 sino que además es analítica.

1.4. SIR

SIR es el acrónimo en inglés de Stokes Inversion based on Response functions [14]. Es un programa diseñado para invertir perfiles de Stokes en la fotosfera solar, es decir, para deducir en esa región las condiciones en las que se están produciendo las líneas espectrales solares observadas como la temperatura, la presión gaseosa, el vector campo magnético o la velocidad a lo largo de la línea de visión. Para hacer esto posible, SIR utiliza un modelo de atmósfera inicial.

Escogido el modelo, SIR sintetiza los perfiles de Stokes bajo las condiciones físicas del modelo y compara con los perfiles de Stokes observados. Tras esto, SIR genera las funciones respuesta, que como veremos con más detalle en el capítulo 3 nos informan en general sobre cómo los espectros observados cambian frente a variaciones en las condiciones físicas del modelo. Así pues, uno debe obtener nuevos parámetros del modelo a través de las funciones respuesta de manera que la suma al cuadrado de la diferencia entre los perfiles de Stokes observados y sintéticos sea la menor posible, es decir, logrando el mejor ajuste.

No obstante, esto no es posible sin un algoritmo de ajuste no lineal, ya que la ecuación 1.8 es no lineal. Para ello, SIR emplea el algoritmo Levenberg-Marquadt que podremos ver con más detalle en la sección 4.1. Al mismo tiempo, SIR resuelve la ecuación 1.8 asumiendo que el modelo cumple ETL y equilibrio hidrostático mediante el método del operador diagonal lambda (más detalles en [14]) debido a que a diferencia de la aproximación ME, los parámetros del modelo dependen de la profundidad óptica.

Una vez alcanzado el mejor ajuste de la inversión, el programa genera automáticamente los nuevos modelos de atmósfera con su error y los perfiles sintetizados por dicho modelo. La inversión concluye y si procede, el programa repite todo lo mencionado anteriormente incrementando la complejidad del modelo invertido.

1.5. Objetivos

Este trabajo persigue varios objetivos. En primer lugar, sintetizaremos una línea espectral bajo la aproximación ME para diferentes combinaciones de parámetros de entrada del modelo ME. Luego calcularemos las funciones respuesta en dicha aproximación y, mediante el algoritmo Levenberg-Marquardt, invertiremos esa línea espectral en la aproximación ME, para ver si recuperamos los valores utilizados de este modelo tanto en ausencia de ruido como en presencia de él. En segundo lugar, para comprobar el comportamiento del código de inversión ME, invertiremos perfiles de Stokes para una línea espectral en diferentes casos. En tercer lugar, aplicaremos tanto SIR como el código de inversión ME a datos espectropolarimétricos reales

proporcionados por el satélite HINODE/SP [6] [9] en regiones donde la aproximación ME es válida. Y por último utilizando SIR, generaremos mapas de inversión de temperatura, campo magnético, inclinación y azimuth de dicho campo además de la velocidad a lo largo de la línea de visión y la microturbulencia con los mismos datos de HINODE. Para tales fines, utilizamos IDL como lenguaje de programación para crear el programa de inversión bajo aproximación ME además de obtener las funciones respuesta, síntesis de líneas y hacer el tratamiento de los datos de HINODE.

Capítulo 2

Síntesis en la aproximación ME

En este capítulo, vamos a simular los parámetros de Stokes para la línea de Fe I a 6301.49 Å, cuya transición electrónica es ${}^5D_2 \rightarrow {}^5P_2$, usando la aproximación ME. Como indicamos en la sección 1.3, bajo esta aproximación, la ecuación vectorial 1.8 tiene una solución analítica que es conocida como la solución de Unno-Rachkovsky. Dicha solución puede demostrarse asumiendo que los vectores de Stokes varían linealmente con la profundidad óptica además de las hipótesis mencionadas en esta aproximación y son [15]:

$$I = S_0 + S_1 \Delta^{-1} [\eta_I (\eta_I^2 + \rho_Q^2 + \rho_U^2 + \rho_V^2)] \quad (2.1)$$

$$Q = -S_1 \Delta^{-1} [\eta_I^2 \eta_Q + \eta_I (\eta_V \rho_U - \eta_U \rho_V) + \rho_Q (\eta_Q \rho_Q + \eta_U \rho_U + \eta_V \rho_V)] \quad (2.2)$$

$$U = -S_1 \Delta^{-1} [\eta_I^2 \eta_U + \eta_I (\eta_Q \rho_V - \eta_V \rho_Q) + \rho_U (\eta_Q \rho_Q + \eta_U \rho_U + \eta_V \rho_V)] \quad (2.3)$$

$$V = -S_1 \Delta^{-1} [\eta_I^2 \eta_V + \eta_I (\eta_U \rho_Q - \eta_Q \rho_U) + \rho_V (\eta_Q \rho_Q + \eta_U \rho_U + \eta_V \rho_V)] \quad (2.4)$$

Donde:

$$\Delta \equiv \eta_I^2 (\eta_I^2 - \eta_Q^2 - \eta_U^2 - \eta_V^2 + \rho_Q^2 + \rho_U^2 + \rho_V^2) - (\eta_Q \rho_Q + \eta_U \rho_U + \eta_V \rho_V)^2 \quad (2.5)$$

Como vimos en las ecuaciones 1.10 - 1.21, bajo esta aproximación tenemos 9 parámetros libres para sintetizar los perfiles: S_0 , S_1 , η , a , w_m , $\Delta\lambda_D$, B , θ y χ . S_0 y S_1 son los coeficientes asociados a la función fuente mientras que η es el cociente entre los coeficientes de absorción en la línea y el continuo. a es el parámetro de amortiguamiento adimensionalizado mientras que w_m es la componente a lo largo de la línea de visión de la velocidad del medio. En cuanto a $\Delta\lambda_D$, B , θ y χ son respectivamente el ensanchamiento Doppler en longitudes de onda expresado en Angstroms, la intensidad del campo magnético en Gauss, la inclinación del campo magnético respecto a la línea de visión en grados y el azimuth del campo magnético también en grados.

2.1. Procedimiento y resultado

Para sintetizar los perfiles de Stokes, tras elegir el conjunto de parámetros libres hay que crear el mallado en torno a la línea, es decir, λ . Dado que $\Delta\lambda_D$ es expresado en Angstroms, tanto λ como λ_o también las expresamos en Angstroms por autoconsistencia. Con esto, y hallado el factor de Landé efectivo de la transición, resolvemos las ecuaciones 1.18 - 1.21. Una vez hecho esto, hallamos los perfiles de absorción y de dispersión cuyas ecuaciones están en 1.17 para lo que además hay que calcular los coeficientes 3-j. Tras esto, obtenemos los coeficientes de la matriz K, 1.9, que vienen dados por las expresiones 1.10 - 1.16. Y finalmente tras hallar Δ mediante 2.5 generamos los perfiles de Stokes usando las ecuaciones 2.1 - 2.4. En la siguiente figura, mostramos el resultado de realizar el método descrito en este párrafo a la línea de Fe I a 6301.5 Å:

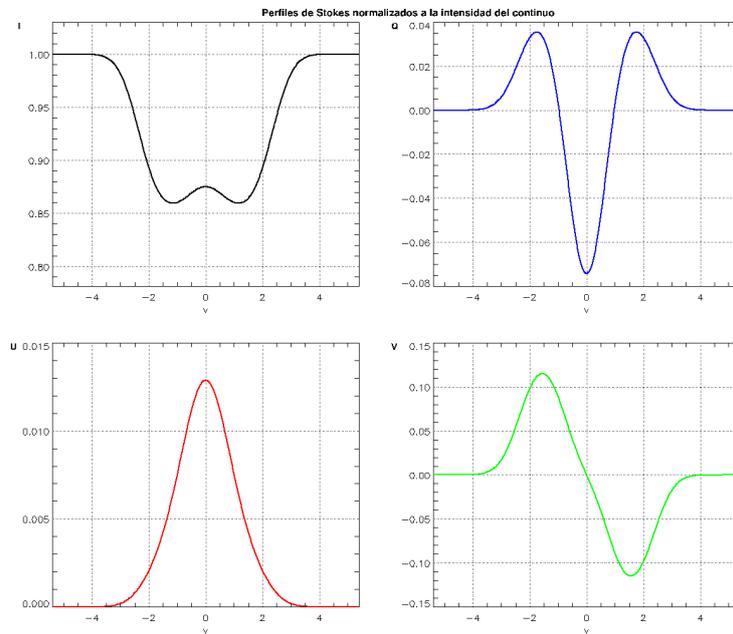


Figura 2.1: Perfiles de Stokes normalizados a la intensidad del continuo. Set de parámetros: $S_0 = 0,2$, $S_1 = 0,8$, $\eta = 10$, $a = 0$, $w_m = 0$ km/s, $\Delta\lambda_D = 9,27 \cdot 10^{-3}$ Å, $B = 500$ G, $\theta = 45^\circ$ y $\chi = 0^\circ$.

La figura 2.1 consta de 4 gráficas en las que se representan los parámetros de Stokes I (superior izquierda), Q (superior derecha), U (inferior izquierda) y V (inferior derecha) normalizados frente a v , la longitud de onda adimensional y que viene dado por la ecuación 1.18. En la representación de I frente a v podemos ver que la línea no presenta un lóbulo sino tres aunque en el caso presentado solamente se aprecia 2 lóbulos en I por no ser el campo magnético suficientemente intenso. Esto es debido al efecto Zeeman que ocurre cuando la intensidad del campo magnético es comparable o mayor al ensanchamiento de la línea por efectos térmicos (el ensanchamiento Doppler). Como consecuencia de esto, en esta gráfica vemos una leve separación

horizontal en v que en última instancia implica una separación en energía, debido a que un campo magnético rompe la degeneración de los subniveles magnéticos tanto del nivel energético inferior como del nivel energético superior de la transición.

Por otra parte, uno puede preguntarse porqué aparece más de un lóbulo. La respuesta a esto está en las reglas de selección. En efecto, como hemos mencionado antes, un campo magnético produce la ruptura de degeneración de los subniveles magnéticos para los niveles en los que ocurre la transición. Sin embargo, no todas las transiciones entre un subnivel magnético del nivel superior y otro del nivel inferior son posibles. Las reglas de selección indican que solamente son posibles aquellas transiciones en las que el número cuántico M permanece constante durante la transición, siempre y cuando los niveles superior e inferior no tienen simultáneamente momento angular total 0, o bien M varía en una unidad. Si M es constante durante una transición, la transición es de tipo π mientras que si M varía en una unidad, tenemos transiciones σ . Dentro de esta segunda categoría, podemos distinguir entre transiciones σ_+ y σ_- .

Las transiciones σ_+ son aquellas en las cuales el número cuántico magnético del nivel inferior disminuye en 1 respecto al nivel superior y aparecen desplazadas al azul porque la orientación del campo magnético favorece el giro de los electrones, de modo que la frecuencia de Larmor, que depende de la intensidad del campo magnético, es superpuesta a la frecuencia propia de giro del electrón. Por otra parte, en las transiciones σ_- , el número cuántico magnético del nivel inferior aumenta en 1 respecto al nivel superior y aparecen desplazadas al rojo porque la orientación del campo magnético desfavorece el giro de los electrones.

Ahora bien, como podemos ver en las 3 gráficas restantes, la luz generada está polarizada elípticamente, pues tenemos polarización lineal, como puede observarse de las gráficas de los perfiles de Stokes Q y U, y polarización circular, cuando observamos la gráfica de los perfiles de Stokes V. Sin embargo, en la gráfica del perfil V frente a v , vemos que hay dos lóbulos en vez de 3. Esto es debido a que las transiciones π no generan polarización circular solamente polarización lineal porque ocurren en la dirección del campo magnético mientras que las transiciones σ_+ y σ_- pueden generar ambos tipos de polarización pues ocurren en el plano perpendicular a las líneas de campo.

2.2. Dependencia con la intensidad del campo magnético

En esta sección, vamos a describir qué ocurre si aumentamos la intensidad del campo magnético a 1500 G y mantenemos los demás parámetros constantes mediante el

mismo procedimiento que para el primer caso. El resultado es la siguiente figura:

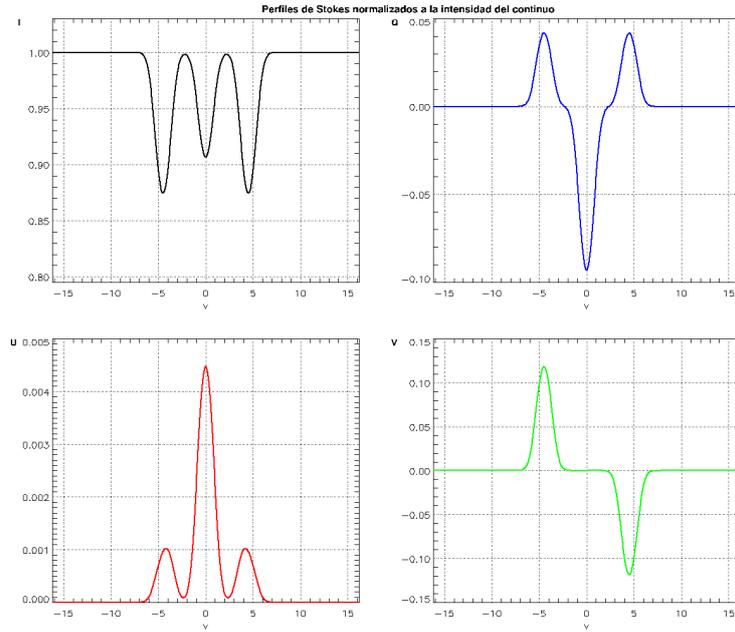


Figura 2.2: Perfiles de Stokes normalizados a la intensidad del continuo. Set de parámetros: $S_0 = 0,2$, $S_1 = 0,8$, $\eta = 10$, $a = 0$, $w_m = 0 \text{ km/s}$, $\Delta\lambda_D = 9,27 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$, $B = 1500 \text{ G}$, $\theta = 45^\circ$ y $\chi = 0^\circ$.

En la figura 2.2 representamos los parámetros de Stokes normalizados en el mismo orden que en el caso anterior. Como podemos ver, al haber intensificado el campo magnético, el efecto Zeeman es lo suficientemente intenso como para observar en la gráfica de I frente a v , un triplete de líneas espectrales que corresponden a la misma línea espectral y además, una separación completa de todos lóbulos en cada gráfica. Sin embargo, uno puede preguntarse en dicha gráfica porqué la línea central que corresponde a transiciones π absorbe menos que las otras dos transiciones correspondientes a transiciones σ_+ (izquierda) y σ_- (derecha). Esto es debido a que bajo la aproximación de onda plana cuasimonocromática, los parámetros de Stokes definidos en 1.2 - 1.5 cumplen la siguiente relación (ver [17] para más detalles):

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2 \quad (2.6)$$

Pero en el caso particular de ondas monocromáticas, se cumple la igualdad [17]. Esto quiere decir que en el caso de ondas monocromáticas, la radiación que recibamos va a estar completamente polarizada, mientras que en el caso de ondas cuasimonocromáticas no tiene porqué ser así. Ahora bien, esta desigualdad puede comprobarse gráficamente en la figura 2.2 para cada transición. Si por ejemplo nos centramos en demostrarlo para las transiciones σ_+ , uno debe seleccionar el máximo del lóbulo asociado a este tipo de transición en Q , U y V , elevar al cuadrado cada cantidad, sumarlas y comprobar el resultado con la diferencia al cuadrado entre el continuo y

el mínimo del lóbulo que tenemos en I para dicha transición.

Además, debido a que cada transición está siempre centrada en la misma región, podemos observar que en el perfil de Stokes V, las transiciones σ_+ corresponden al lóbulo de la izquierda, mientras que las transiciones σ_- corresponden al lóbulo de la derecha. A raíz de este hecho, deducimos que las transiciones π solamente generan polarización lineal mientras que las transiciones σ generan polarización lineal y circular, aunque ésta última de diferente polaridad según si son transiciones σ_+ , que dan lugar a una polaridad positiva, o σ_- , que generan polaridad negativa.

2.3. Dependencia con la inclinación del campo magnético

En esta sección, vamos a mostrar qué ocurre si manteniendo el set inicial de parámetros disminuimos θ a 0° . La siguiente figura muestra cuál es el resultado:

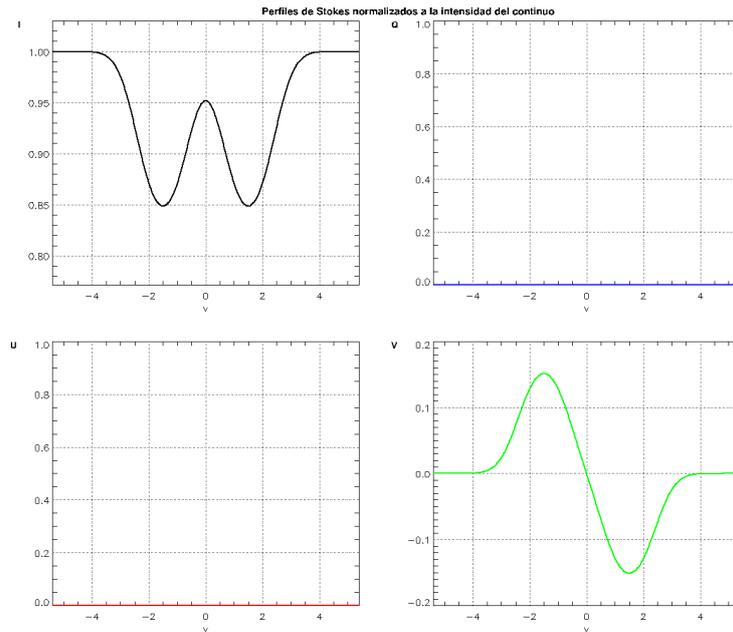


Figura 2.3: Perfiles de Stokes normalizados a la intensidad del continuo. Set de parámetros: $S_0 = 0,2$, $S_1 = 0,8$, $\eta = 10$, $a = 0$, $w_m = 0$ km/s, $\Delta\lambda_D = 9,27 \cdot 10^{-3}$ Å, $B = 500$ G, $\theta = 0^\circ$ y $\chi = 0^\circ$.

En este caso particular, en la figura 2.3 observamos solamente polarización circular y dos lóbulos en I. La explicación de esto está, por un lado en que los coeficientes 1.11 - 1.14 tienen una dependencia directa con el $\sin^2 \theta$ y por otro lado, en las definiciones de Q y U dadas por 2.2 y 2.3. Físicamente quiere decir que no vemos transiciones π ni tampoco la polarización lineal de las transiciones σ porque las líneas de campo magnético son paralelas a la línea de visión.

2.4. Dependencia con el azimuth del campo magnético

En la última sección, mostraremos qué ocurre cuando manteniendo el set de parámetros al comienzo del capítulo variamos el ángulo χ a 45° . Los parámetros de Stokes resultantes están en la siguiente figura:

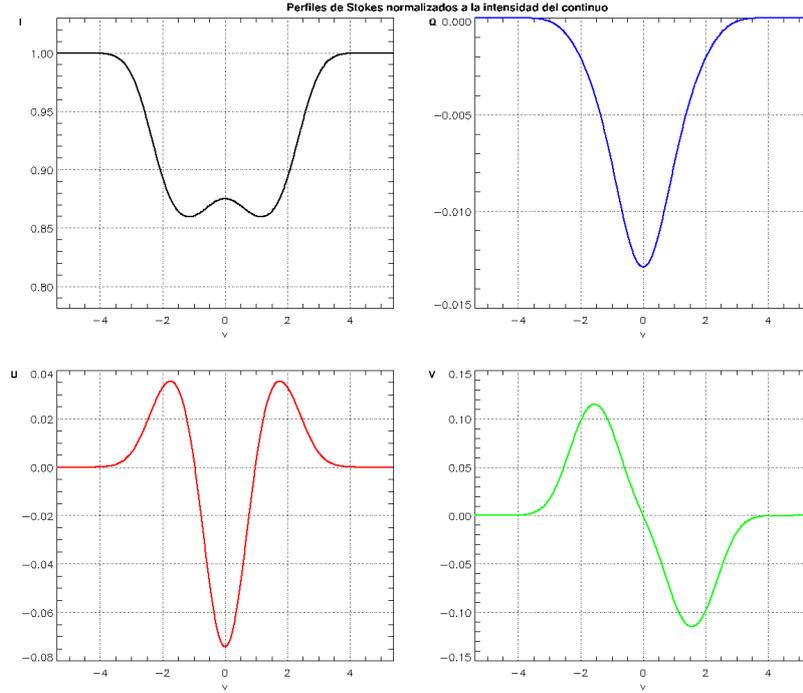


Figura 2.4: Perfiles de Stokes normalizados a la intensidad del continuo. Set de parámetros: $S_0 = 0,2$, $S_1 = 0,8$, $\eta = 10$, $a = 0$, $w_m = 0 \text{ km/s}$, $\Delta\lambda_D = 9,27 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$, $B = 500 \text{ G}$, $\theta = 0^\circ$ y $\chi = 45^\circ$.

Como se ve en 2.4 con respecto a la figura 2.1, cambian Q y U pero no I y V. Esto se debe a que η_Q y ρ_Q son proporcionales a $\cos 2\chi$ mientras que η_U , y ρ_U dependen del seno del ángulo doble de χ , con lo cual respecto al caso inicial ahora en particular η_Q y ρ_Q son 0 pero no los otros dos. V e I no dependen globalmente de los efectos de estas rotaciones, pues el primero nos da la absorción total de la radiación mientras que la polarización circular solamente depende de la inclinación de las líneas de campo magnético respecto a la línea de visión.

Capítulo 3

Funciones respuesta en la aproximación ME

El concepto de función respuesta es introducido por primera vez en 1975 en el artículo de Beckers & Milkey para la intensidad de radiación y comprender los efectos de la velocidad a lo largo de la línea de visión en él [1]. Posteriormente, este concepto es aplicado a los parámetros de Stokes en el artículo de Landi Degl’Innocenti & Landi Degl’Innocenti [7] y en 1982, Landi Degl’Innocenti & Landolfi [8] proponen este concepto para obtener a partir de la polarización circular de dos líneas espectrales, las condiciones físicas en las que están formándose dicho par de líneas espectrales.

Las funciones respuesta para los parámetros de Stokes proceden de aplicar teoría de perturbaciones en primer orden a la ecuación 1.8. Landi Degl’Innocenti & Landi Degl’Innocenti [7] demuestran que la función respuesta para los parámetros de Stokes puede expresarse usando la siguiente ecuación:

$$\delta I_i(\tau = 0) = \int_0^\infty R_i(\tau) \delta x(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

Donde i va desde 0 hasta 3 de manera que δI_i representa a cada uno de los componentes del vector de Stokes, $\delta x(\tau)$ es la perturbación física en primer orden que altera los parámetros de Stokes y R_i es la función respuesta del sistema. Por tanto, las funciones respuestas son herramientas matemáticas con las que podemos observar cómo una perturbación física modifica los parámetros de Stokes y además la ecuación 3.1 es válida a cualquier longitud de onda. Sin embargo, obtener la función respuesta debido a $\delta x(\tau)$ es bastante complicado, ya que como podemos observar hay una dependencia con la profundidad óptica.

No obstante, salvo la función fuente, todo es constante con la profundidad óptica bajo la aproximación ME con lo que el problema de calcular la función respuesta se simplifica enormemente. De hecho, la ecuación 3.1 puede ser escrita de la siguiente

manera:

$$\delta I_i = R_i \delta x \quad (3.2)$$

Despejando R_i de 3.2, sustituyendo incrementos por derivadas y usando notación vectorial obtenemos la siguiente expresión

$$\vec{R} = \frac{d\vec{I}}{dx} \quad (3.3)$$

Esto significa que en la aproximación ME, las funciones respuesta tienen una expresión analítica. Así pues, para hallar las funciones respuesta, hay que derivar los parámetros de Stokes con respecto a los parámetros libres de dicha aproximación, es decir, S_0 , S_1 , η , a , w_m , $\Delta\lambda_D$, B , θ y χ . Además debemos tener en cuenta que las funciones respuesta pueden ser o no adimensionales dependiendo de la variable con respecto a la que derivemos. Por ejemplo, al derivar respecto a la intensidad del campo magnético, las funciones respuesta son expresadas en el inverso de Gauss pero si derivamos respecto a η las funciones respuesta son adimensionales.

A continuación, mostramos las expresiones de las funciones respuesta para cada parámetro de Stokes asumiendo que derivamos respecto a un parámetro genérico x de la aproximación ME. Derivando las expresiones 2.1 - 2.4 con respecto a esa variable obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dI}{dx} = \delta_{S_0x} + A_1 \Delta^{-1} \delta_{S_1x} - S_1 \Delta^{-1} \left(A_1 \eta_I \Delta^{-1} \frac{d\Delta}{dx} - A_1 \frac{d\eta_I}{dx} - A_2 \right) \quad (3.4)$$

$$\frac{dQ}{dx} = \delta_{S_1x} \frac{Q}{S_1} - Q \Delta^{-1} \frac{d\Delta}{dx} - S_1 \Delta^{-1} \left(\eta_I^2 \frac{d\eta_Q}{dx} + A_3 \frac{d\eta_I}{dx} + A_4 \eta_I + \frac{d(K\rho_Q)}{dx} \right) \quad (3.5)$$

$$\frac{dU}{dx} = \delta_{S_1x} \frac{U}{S_1} - U \Delta^{-1} \frac{d\Delta}{dx} - S_1 \Delta^{-1} \left(\eta_I^2 \frac{d\eta_U}{dx} + A_5 \frac{d\eta_I}{dx} + A_6 \eta_I + \frac{d(K\rho_U)}{dx} \right) \quad (3.6)$$

$$\frac{dV}{dx} = \delta_{S_1x} \frac{V}{S_1} - V \Delta^{-1} \frac{d\Delta}{dx} - S_1 \Delta^{-1} \left(\eta_I^2 \frac{d\eta_V}{dx} + A_7 \frac{d\eta_I}{dx} + A_8 \eta_I + \frac{d(K\rho_V)}{dx} \right) \quad (3.7)$$

Donde δ_{S_1x} es una delta de Kronecker que vale 1 cuando derivamos respecto a S_1 y 0 en otro caso, δ_{S_0x} es otra delta de Kronecker que vale 1 cuando derivamos respecto a S_0 y 0 en otro caso. Por otra parte, las derivadas con respecto a Δ y K :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dx} &= 2\eta_I (A_1 - \eta_Q^2 - \eta_U^2 - \eta_V^2) \frac{d\eta_I}{dx} + \eta_I^2 \left[A_2 - 2 \left(\eta_Q \frac{d\eta_Q}{dx} + \eta_U \frac{d\eta_U}{dx} + \eta_V \frac{d\eta_V}{dx} \right) \right] \\ \frac{dK}{dx} &= \eta_Q \frac{d\rho_Q}{dx} + \eta_U \frac{d\rho_U}{dx} + \eta_V \frac{d\rho_V}{dx} + \rho_Q \frac{d\eta_Q}{dx} + \rho_U \frac{d\eta_U}{dx} + \rho_V \frac{d\eta_V}{dx} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Además, por definición, las variables A_i son:

$$A_1 \equiv \eta_I^2 + \rho_Q^2 + \rho_U^2 + \rho_V^2 \quad A_2 \equiv 2\eta_I \frac{d\eta_I}{dx} + 2\rho_Q \frac{d\rho_Q}{dx} + 2\rho_U \frac{d\rho_U}{dx} + 2\rho_V \frac{d\rho_V}{dx}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &\equiv 2\eta_I\eta_Q + \eta_V\rho_U - \eta_U\rho_V & A_4 &\equiv \eta_V\frac{d\rho_U}{dx} + \rho_U\frac{d\eta_V}{dx} - \eta_U\frac{d\rho_V}{dx} - \rho_V\frac{d\eta_U}{dx} \\
A_5 &\equiv 2\eta_I\eta_U + \eta_Q\rho_V - \eta_V\rho_Q & A_6 &\equiv \eta_Q\frac{d\rho_V}{dx} + \rho_V\frac{d\eta_Q}{dx} - \eta_V\frac{d\rho_Q}{dx} - \rho_Q\frac{d\eta_V}{dx} \\
A_7 &\equiv 2\eta_I\eta_V + \eta_U\rho_Q - \eta_Q\rho_U & A_8 &\equiv \eta_U\frac{d\rho_Q}{dx} + \rho_Q\frac{d\eta_U}{dx} - \eta_Q\frac{d\rho_U}{dx} - \rho_U\frac{d\eta_Q}{dx}
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Recordemos que las expresiones de los coeficientes de la matriz de Mueller están en 1.10 - 1.16. En algunos casos, como derivar respecto a S_0 , son sencillos, pues ni los términos de absorción ni los términos magneto-ópticos dependen de él con lo que podemos directamente derivar las funciones respuesta del sistema de ecuaciones dado por 3.4 - 3.7. En otros casos, como derivar respecto a θ , requiere derivar las ecuaciones 1.10 - 1.16 con respecto a dicha variable, aunque aparece explícitamente, y a partir de ahí, obtener los coeficientes A_i dados por 3.9, luego las derivadas respecto a Δ y K y finalmente sustituir en el sistema de ecuaciones 3.4 - 3.7.

Un caso más complicado ocurre en las ecuaciones de los coeficientes de la matriz de Mueller cuando la variable con respecto a la que derivamos es un argumento de las funciones de Voigt y Voigt-Faraday como a . En tal caso, sabiendo que $H(u, a)$ es la función de Voigt y $L(u, a)$ es la función de Voigt-Faraday puede demostrarse los siguientes resultados [5]:

$$\begin{aligned}
\frac{dH(u, a)}{da} &= 2 \left[H(u, a)a + L(u, a)v - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right] & \frac{dH(u, a)}{dv} &= \frac{dL(u, a)}{da} \\
\frac{dL(u, a)}{da} &= 2 [L(u, a)a - H(u, a)v] & \frac{dL(u, a)}{dv} &= -\frac{dH(u, a)}{da}
\end{aligned}$$

No obstante, cuando derivamos por ejemplo respecto al campo magnético, hay que utilizar además de estos 4 resultados, la regla de la cadena, pues el campo magnético está implícito en u . Como vimos en la sección 1.2, el argumento u puede ser $v - v_M + v_B$ si hablamos de los perfiles de absorción y dispersión desplazados al azul, $v - v_M - v_B$ en el caso de dichos perfiles desplazados al rojo y $v - v_M$ para los perfiles centrados en la línea. En cualquier caso, una vez obtenidas las derivadas respecto a ese parámetro hay que hacer el mismo procedimiento, esto es, obtener los coeficientes A_i dados por 3.9, luego las derivadas respecto a Δ y K y finalmente sustituir en el sistema de ecuaciones 3.4 - 3.7.

Finalmente, para comprobar que los resultados son correctos, hemos construido las derivadas numéricas mediante el método de diferencias centradas para cada uno de los parámetros de Stokes y para cada parámetro de la aproximación ME. En concreto, si $f(x)$ es la función cuya derivada queremos evaluar en el punto x_o , el método numérico a implementar es:

$$f'(x_o) \approx \frac{f(x_o + h) - f(x_o - h)}{2h} \quad (3.10)$$

Con lo cual, si por ejemplo queremos hallar la función respuesta numérica respecto al campo magnético, uno debe construir los parámetros de Stokes manteniendo todos los parámetros constantes salvo el campo magnético de manera que difieran en una cantidad h . Así pues, uno puede obtener figuras como esta:

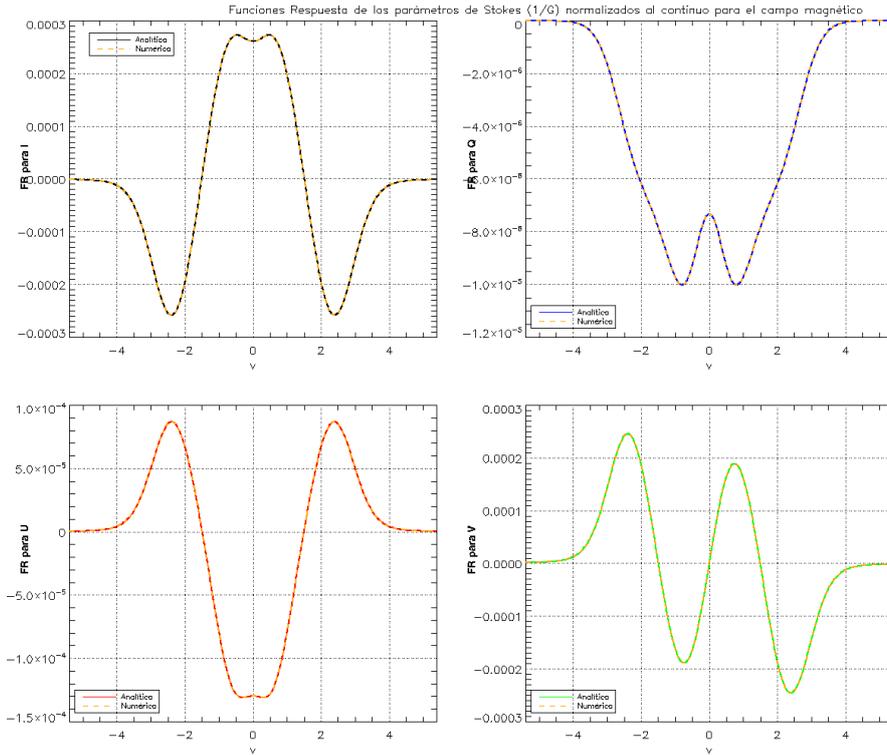


Figura 3.1: Funciones respuesta analítica y numérica del campo magnético normalizadas a la intensidad del continuo en G^{-1} . Para generar las funciones respuesta utilizamos el mismo caso que en 2.4 pero con $a=0,1$.

La figura 3.1 consta de 4 gráficas que son las funciones respuesta del campo magnético para I(superior izquierda), Q(superior derecha), U(inferior izquierda) y V (inferior derecha). En color naranja, tenemos las funciones respuesta numéricas para cada parámetro de Stokes. Para obtener, las funciones respuesta numéricas usamos una diferencia en la intensidad del campo magnético de $h = 0,5$ G.

Este procedimiento hay que hacerlo para cada parámetro libre de la aproximación, dado que como veremos en el próximo capítulo, son necesarias para la minimización de la función de mérito aunque en esta memoria no aparezcan las figuras asociadas.

Capítulo 4

Inversión en la aproximación ME

En este capítulo, vamos a explicar cómo bajo la aproximación ME es posible obtener información sobre los parámetros ME a partir de los perfiles de Stokes observados recuperando las condiciones físicas en las que ocurren, lo que denominamos una inversión, y los resultados obtenidos con su consecuente análisis. Para ello, introducimos los perfiles de Stokes observados al programa, y mediante un set de parámetros arbitrarios, sintetizamos los perfiles de Stokes. El objetivo es obtener a partir de aquí el mejor ajuste posible tras múltiples iteraciones.

Para ello, utilizamos el método de mínimos cuadrados que consiste en minimizar χ^2 siendo esta cantidad en nuestro caso particular, la diferencia al cuadrado entre los parámetros de Stokes observados y sintetizados. A menudo, es denominada la función de mérito. Así pues, la función de mérito es:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\sigma_{ij}^2} \left[I_{ij}^{obs} - I_{ij}^{syn}(\vec{\mathbf{x}}) \right]^2 \quad (4.1)$$

Donde el sumatorio en i es para cada longitud de onda, el sumatorio en j es por el número de componentes de un vector de Stokes, I_{ij}^{obs} es cada uno de los componentes del vector de Stokes observado a una longitud de onda dada mientras que I_{ij}^{syn} es cada uno de los componentes del vector de Stokes sintetizados a esa misma longitud de onda; σ_{ij} es la incertidumbre en los datos observados y $\vec{\mathbf{x}}$ es el vector que contiene a los parámetros libres del modelo ME. Dado que queremos minimizar χ^2 , la primera derivada de esta magnitud debe hacerse 0 respecto a cada parámetro libre pero cuando uno hace el cálculo correspondiente descubre que hay términos de la forma $\frac{dI_{ij}}{dx_k}$ con $k=1,2,\dots,9$, es decir, de manera natural aparecen las funciones respuesta de cada parámetro que son analíticas en ME y numéricas en SIR.

No obstante, la dificultad de este proceso radica en la existencia de no linealidad debido a que los perfiles no están basados en simples polinomios sino en una combinación de funciones trigonométricas, funciones de Voigt, funciones de Voigt-Faraday

e incluso potencias como puede verse en las definiciones de los coeficientes de la matriz de Mueller y de los parámetros de Stokes en 1.2 y 2 respectivamente. Afortunadamente, existen algoritmos de mínimos cuadrados no lineales siendo el más común el algoritmo de Levenberg-Marquardt, que es el que emplea tanto SIR como nuestro programa ME.

4.1. Algoritmo Levenberg-Marquardt

Este algoritmo de mínimos cuadrados modificado por Marquardt y diseñado inicialmente por Levenberg es un método de ajuste no lineal que combina el método de la matriz hessiana usado para regiones cercanas al mínimo de χ^2 con el método del mayor paso descendiente utilizado para regiones lejanas al mínimo de χ^2 de manera que el paso entre ambos métodos ocurre de manera continua. Al usar este algoritmo, el sistema de ecuaciones lineales que hay que resolver para cada parámetro es [11]:

$$\sum_{l=1}^M \alpha'_{kl} \delta a_l = \beta_k \quad (4.2)$$

M es el número de parámetros de ajuste que en nuestro caso particular puede ir desde 1 hasta 9. β es un vector de hasta 9 componentes, uno por cada parámetro de la aproximación ME a ajustar y contiene la primera derivada de χ^2 respecto a cada variable a ajustar multiplicado por -0.5, δa_l es el vector cuyas incógnitas deseamos obtener y α' es una matriz cuyos elementos no diagonales valen lo mismo que en la matriz de curvatura, α , que es la matriz de segunda derivadas de χ^2 respecto a los parámetros de ajuste divididos entre 2 pero los elementos diagonales de α' valen:

$$\alpha'_{ll} = \alpha_{ll} \cdot (1 + \lambda) \quad (4.3)$$

Tanto α' como α son matrices cuadradas con dimensión igual al número de elementos que contenga β . λ es el factor de escala que permite pasar de un método a otro y α_{ll} son los elementos diagonales de la matriz de curvatura. Así pues, cuando $\lambda \gg 1$, la matriz α' en 4.2 es diagonalmente dominante y entonces el sistema de ecuaciones para cada variable tiende al método del paso descendiente mientras que si $\lambda \ll 1$ entonces 4.2 tiende al método hessiano.

Por último, la estructura de ejecución del algoritmo puede resumirse así:

1. Calcular el valor de χ^2 del primer ajuste con la solución inicial.
2. Utilizar un valor pequeño de λ . En nuestro código usamos un valor de 0.01.
3. Resolver el sistema de ecuaciones dado por 4.2 y añadirlo a los valores iniciales.

4. Calcular χ^2 a partir de la nueva solución.
5. Si χ^2 es menor que la anterior χ^2 , entonces dividimos λ entre 10 y actualizamos la solución y volver a resolver 4.2.
6. Si χ^2 es mayor o igual que la anterior χ^2 , entonces multiplicamos λ por 10 y volver a resolver 4.2.

Los pasos 3 al 6 son repetidos hasta que el valor de χ^2 disminuye con respecto al anterior valor en $5 \cdot 10^{-4}$. Una vez hecho esto, colocamos $\lambda = 0$ y construimos la matriz de covarianzas, C, sabiendo que el inverso de la matriz de curvatura es por definición esta matriz. Para más detalles, consultar [11].

4.2. Inversión ME de perfiles de Stokes generados con ME

En esta sección, vamos a mostrar los resultados de implementar el algoritmo Levenberg-Marquardt permitiéndonos recuperar un conjunto de parámetros usado para sintetizar los perfiles de Stokes a partir de estos perfiles de Stokes y un conjunto de parámetros ME arbitrarios. En concreto, para ese mismo perfil, hemos generado 50 conjuntos de parámetros ME arbitrarios y tras finalizar este proceso, calculamos el valor medio y la desviación estándar de aquellos parámetros en los que χ^2 es suficientemente pequeña y sintetizamos los perfiles de Stokes con ellos.

Además, este método lo hemos aplicado primero introduciendo un perfil de Stokes sin ruido y luego otro perfil generado con los mismo parámetros ME pero incluyendo ruido de tal manera que S/N=1000. El resultado de ambos procesos lo podemos encontrar en las siguientes tabla y figura:

Parámetro ME	Síntesis	Inversión (sin ruido)	Inversión (con ruido)
S_0	0,20	$(2,0024680 \pm 0,0000006) \cdot 10^{-1}$	$0,21 \pm 0,03$
S_1	0,80	$(8,0098718 \pm 0,00000024) \cdot 10^{-1}$	$0,79 \pm 0,03$
η	10,00	10,00	$10,2 \pm 0,6$
a	0,10	$(9,999996 \pm 0,000004) \cdot 10^{-2}$	$0,103 \pm 0,001$
w_m (km/s)	0,00	$(1 \pm 6) \cdot 10^{-18}$	$(2,06 \pm 0,02) \cdot 10^{-4}$
$\Delta\lambda_D$ (Å)	$9,27 \cdot 10^{-3}$	$(9,270005 \pm 0,000005) \cdot 10^{-3}$	$(9,23 \pm 0,04) \cdot 10^{-3}$
B (G)	500,0	$499,99997 \pm 0,00003$	$500,2 \pm 0,4$
θ (rad)	0,7853982	$0,78539812 \pm 0,00000006$	$0,7852 \pm 0,0019$
χ (rad)	0,7853982	$0,78539812 \pm 0,00000006$	$0,785 \pm 0,003$

Tabla 4.1: Parámetros ME usados para sintetizar los perfiles y los obtenidos usando el valor medio y desviación estándar tras 50 realizaciones para ambos casos.

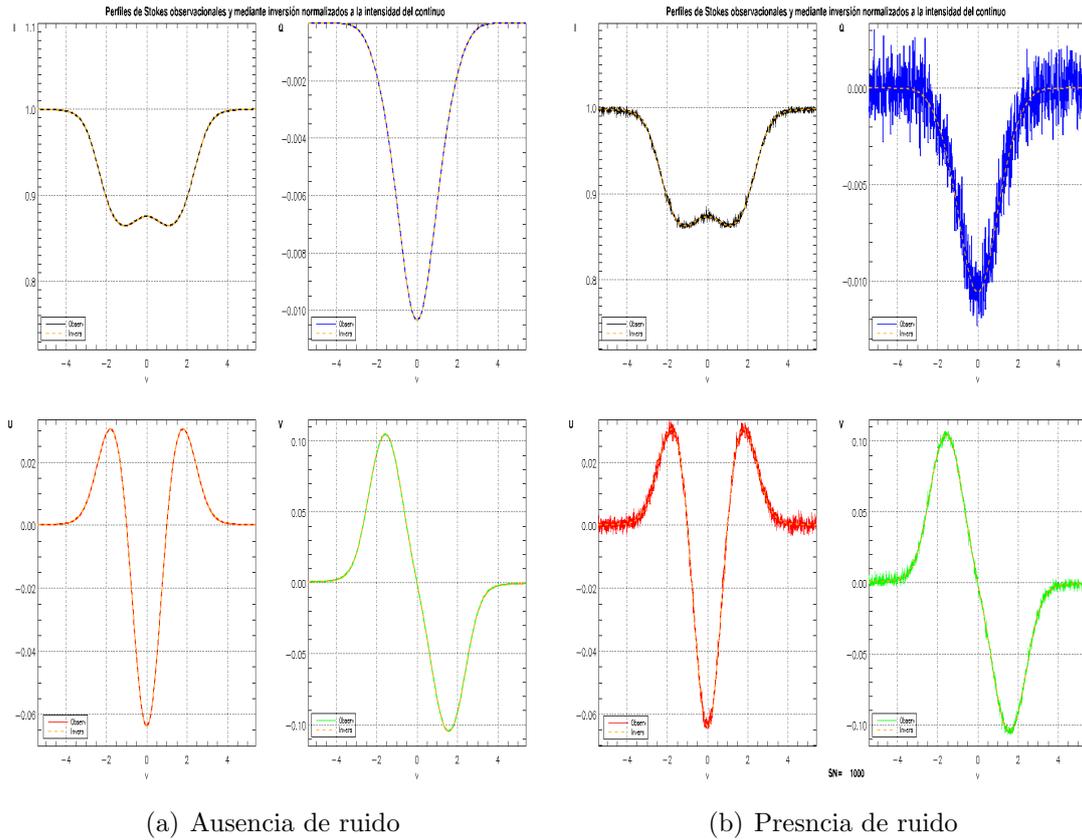


Figura 4.1: Perfiles de Stokes normalizados tanto en presencia de ruido, con señal a ruido 1000, como en ausencia de este para la línea de Fe I a 6301.5 Å.

Respecto a la tabla 4.1, en primer lugar podemos ver que la presencia del ruido, que en nuestro caso, simula el ruido fotónico en un instrumento de observación, empeora los resultados con respecto al caso ideal. En segundo lugar, comparando los valores de inversión de las dos situaciones con el parámetro ME usado para sintetizar la línea espectral, observamos que en el caso ideal aunque no todos los valores entran dentro del valor esperado, el número de cifras significativas es muy alto, lo que indica una alta precisión mientras que en el caso que incluye el ruido, todos los valores están dentro de lo esperado excepto para la velocidad del medio. Es posible obtener soluciones no reales o absurdas si no acotamos los valores durante la ejecución, pues el programa trata de determinar la menor χ^2 sin entender por ejemplo que la intensidad del campo magnético no puede ser negativa. En este caso particular, físicamente es posible un valor positivo (negativo) de w_m , pues indica que el medio se aleja (se acerca) al observador respectivamente. Afortunadamente, el valor es suficientemente pequeño como para no intervenir en la formación de los espectros como puede verse en 4.1. La causa más probable de este hecho es la presencia de ruido que como hemos mencionado antes, enmascara los resultados esperados dificultando la obtención del valor correcto.

En cuanto a la figura 4.1, ésta consta de dos imágenes en las cuales representamos

los parámetros de Stokes normalizados I (superior izquierda), Q (superior derecha), U (inferior izquierda) y V (inferior derecha) observados y los parámetros de Stokes generado al sintetizar los perfiles con los valores medios (línea naranja discontinua). En ambos casos podemos ver que los perfiles obtenidos por la inversión ajustan perfectamente los perfiles observados.

Por último, para comprobar el porcentaje de eficiencia del programa, representamos para ambos casos, χ^2 frente al número de realizaciones siendo el resultado, la siguiente figura:

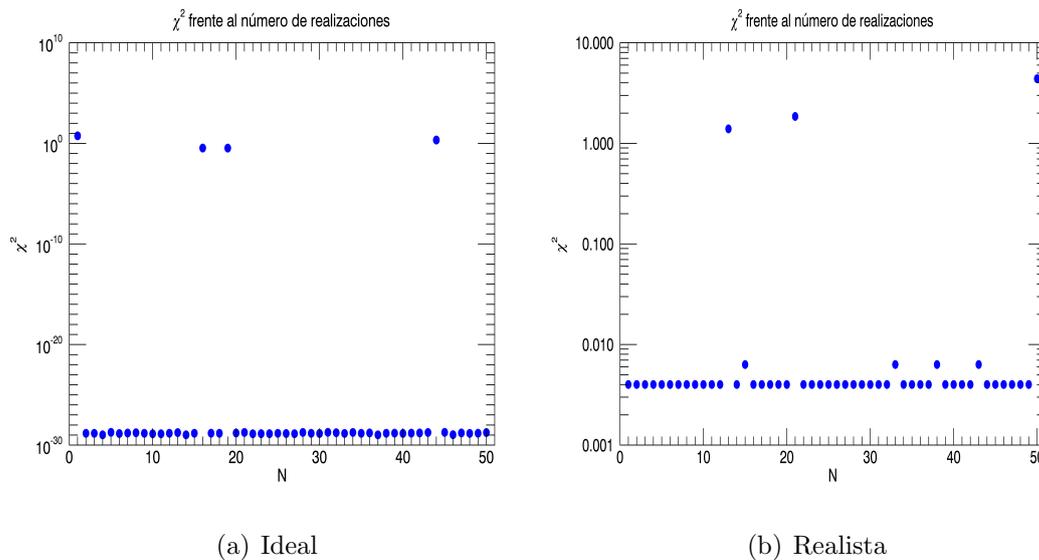


Figura 4.2: χ^2 frente al número de realizaciones tanto en ausencia de ruido como en presencia de él. El eje Y está en escala logarítmica

Claramente, el efecto del ruido es enmascarar los valores que buscamos, pues aunque hay un buen ajuste de los perfiles, como hemos visto en la figura 4.1, existe una diferencia de 27 órdenes de magnitud en χ^2 entre el caso ideal y el caso real cuando el programa converge. Además vemos que la eficiencia en ambos casos es parecida: 92 % para el caso ideal (46 de 50 casos bien) y paradójicamente 94 % para el otro caso. Probablemente, la diferencia de eficiencia es simplemente aleatoria, ya que al hacer otras 50 realizaciones para cada caso, estos números cambian. Sin embargo, claramente hay casos en los que el programa, dado un conjunto de parámetros arbitrarios, no converge correctamente y por eso, son despreciados en el cálculo del valor medio y desviación estándar de los parámetros ME.

Capítulo 5

Aplicación de SIR y ME a datos de Hinode

En este capítulo, vamos a invertir datos espectropolarimétricos reales procedentes de la región activa NOAA 10953. Estos datos fueron adquiridos por el satélite HI-NODE/SP [9], [6] el 30 de abril de 2007 entre las 18:35 y las 22:30 hora universal [13] y básicamente son los perfiles de Stokes de cada región normalizados con respecto al Sol en calma para la región del espectro electromagnético comprendida entre 6300.9 y 6303.4 Å con un muestreo espectral de 21.46 mÅ en los que aparecen dos líneas espectrales de Fe I: una a 6301.5 Å, cuya transición ya mencionamos en el capítulo 2 y otra a 6302.49 Å cuya transición electrónica de desexcitación es $^5D_0 \rightarrow ^5P_1$. Tanto el punto del mapa seleccionado a invertir observado a 6300.9 Å como el aspecto de la región del espectro electromagnético pueden verse en las siguientes figuras:

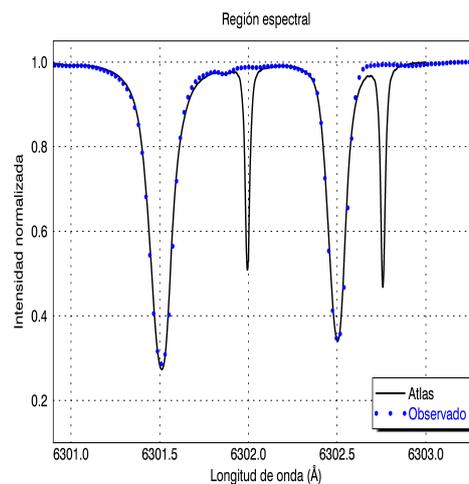


Figura 5.1: Espectro electromagnético observado (puntos azules) y obtenida del ATLAS (línea negra) [10]. Hay dos líneas espectrales de Fe I que no son observadas debido a su origen telúrico.

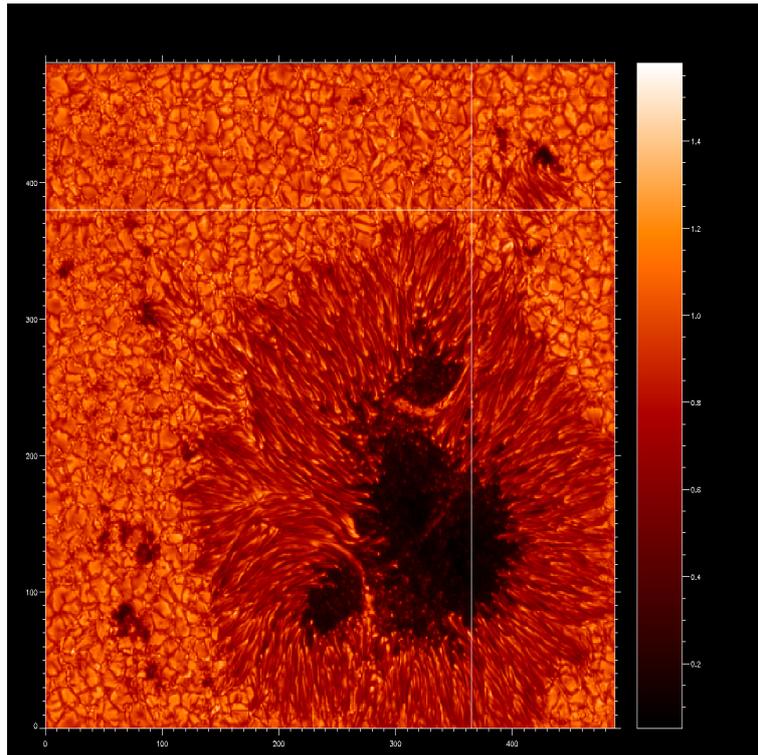


Figura 5.2: Región activa NOAA 10953 visto a 6300.9 \AA . La intersección de las líneas blancas horizontal y vertical es el punto que estamos estudiando.

Como puede verse en la figura 5.2, ese punto corresponde a un punto de un gránulo de la fotosfera solar. Sin embargo, ahora a diferencia de los capítulos anteriores, en ME, trabajamos con la línea de Fe I a 6302.49 \AA debido a que tiene un factor de Landé efectivo mayor que la línea espectral a 6301.5 \AA lo que se traduce en una mayor sensibilidad a la presencia de campos magnéticos.

En general, el procedimiento consiste en extraer y guardar en un fichero .per los perfiles de Stokes de esa región, invertir los perfiles con SIR utilizando un modelo de fábula [2] el que incluimos intensidad de campo magnético, inclinación y azimuth del campo magnético y velocidad a lo largo de la línea de visión constantes e invertir los perfiles con ME usando el procedimiento en 4.2 teniendo en cuenta que hay que seleccionar adecuadamente la línea de 6302.5 \AA , pues nuestro programa es monolínea pero SIR invierte las dos líneas simultáneamente. Y por último hay que construir rutinas para visualizar los resultado, los cuales tras aplicar este método de trabajo, están en las siguientes tabla y figura:

Parámetro ME	Inversión ME
S_0	$(4 \pm 1) \cdot 10^{-3}$
S_1	$(9,76 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$
η	$190,0 \pm 0,4$
a	$(1,7362 \pm 0,0009) \cdot 10^{-1}$
w_m (km/s)	$(3,1555 \pm 0,0009) \cdot 10^{-1}$

Parámetro ME	Inversión ME
$\Delta\lambda_D$ (Å)	$(4,384 \pm 0,003) \cdot 10^{-2}$
B (G)	$(381,43 \pm 0,05)$
θ (rad)	$(1,712742 \pm 0,000023)$
χ (rad)	$(1,54604 \pm 0,00004)$

Tabla 5.1: Parámetros ME obtenidos por inversión

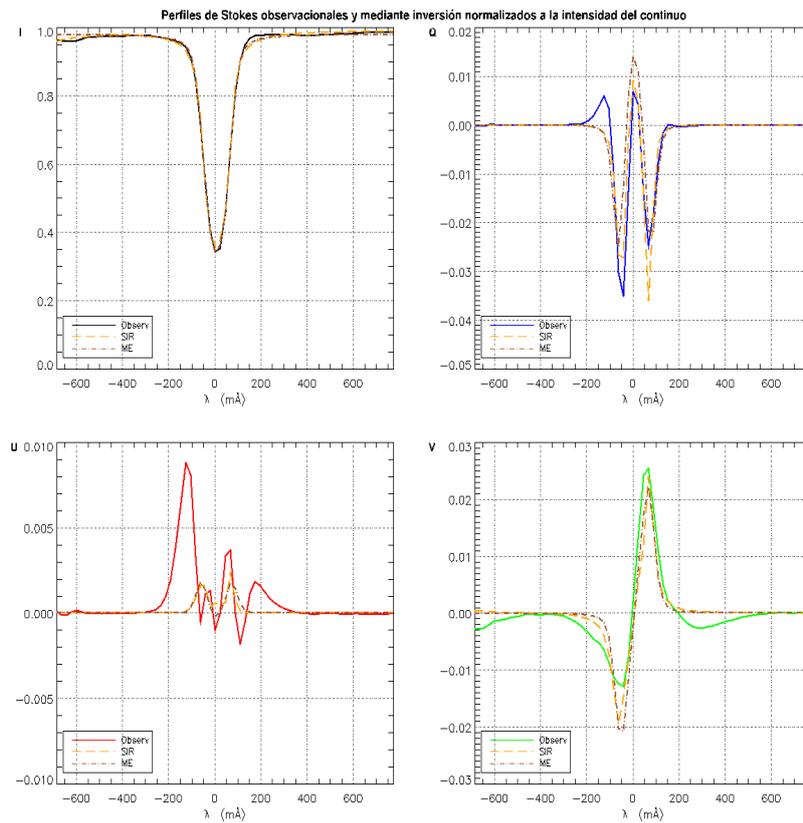


Figura 5.3: Perfiles de Stokes normalizados respecto al Sol en calma I (superior izquierda), Q (superior derecha), U (inferior izquierda) y V (inferior derecha) observados, generados con los parámetros ME de la tabla 5.1 y obtenidos con SIR tras invertir frente a la longitud de onda.

Para obtener la figura 5.3 hemos centrado en la línea de Fe I a 6302.49 \AA . Como podemos ver en dicha figura, predecimos los perfiles I e V tanto con SIR como con ME y en menor medida Q. No ocurre así con el perfil de Stokes U ni con SIR ni con ME debido a que la señal a ruido no es muy alta. Sin embargo, hay una diferencia entre SIR y ME que consiste en que ME no predice asimetrías en los perfiles de Stokes debido a que por hipótesis no admitimos gradientes de velocidad mientras que SIR es más flexible y puede verse en el perfil Q. Otra diferencia como ya comentamos, es la no dependencia de los parámetros ME con la profundidad óptica por hipótesis mientras que en SIR no ocurre eso. Teniendo en cuenta esto, si representamos magnitudes como la temperatura frente al logaritmo de la profundidad óptica

obtenemos la siguiente figura:

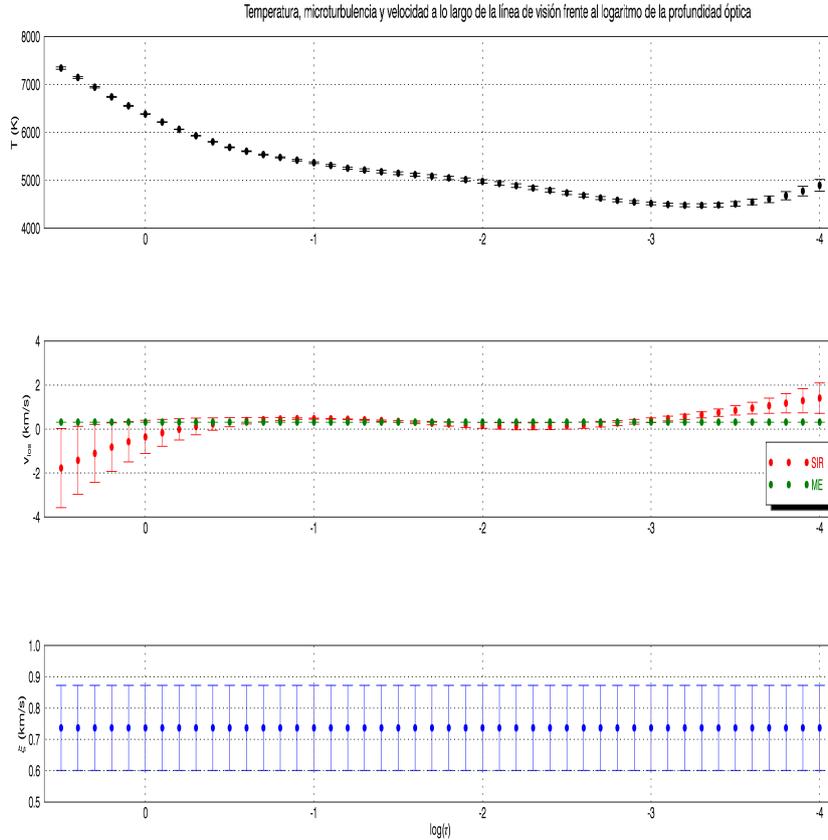


Figura 5.4: Temperatura (superior), velocidad a lo largo de la línea de visión (centro) y microturbulencia (inferior) frente al logaritmo de la profundidad óptica.

El lado izquierdo de las 3 figuras corresponde a la región interna del Sol más cercana a su superficie, de manera que ascendemos en la atmósfera a medida que $\log \tau$ se vuelve negativa. Como podemos ver, la temperatura va disminuyendo con la altura hasta $\log \tau = -3,5$ donde alcanza un mínimo y comienza a subir. Esta región que generalmente abarca unos 500 km en altura respecto a su superficie es lo que denominamos fotosfera mientras que por encima de dicho mínimo tenemos la cromosfera, que no podemos estudiar con SIR por la ausencia de LTE. Debido a que las magnitudes dependen de la profundidad óptica, la aproximación ME no permite predecir lo anterior ni tampoco el continuo ascenso y descenso del material por los movimientos convectivos [16]. Esto lo vemos en la figura 5.4 para la gráfica central, en la cual la velocidad a lo largo de la línea de visión es negativa (el material asciende) en el fondo de la atmósfera y conforme vamos ascendiendo en ella cambia de signo, lo que significa el descenso del material en la atmósfera mientras que en ME es constante. No obstante, en la gráfica central de 5.4 podemos apreciar que en torno a $\log \tau = -3$, tanto SIR como ME predicen valores similares y no es una

coincidencia como pronto veremos.

Respecto a la microturbulencia, es un falso parámetro que se introduce en los perfiles “ad-hoc” y nos indica cuánta física es necesaria para terminar de comprender esa región. Ahora bien, si representamos el vector campo magnético frente al logaritmo de la profundidad óptica obtenemos la siguiente figura:

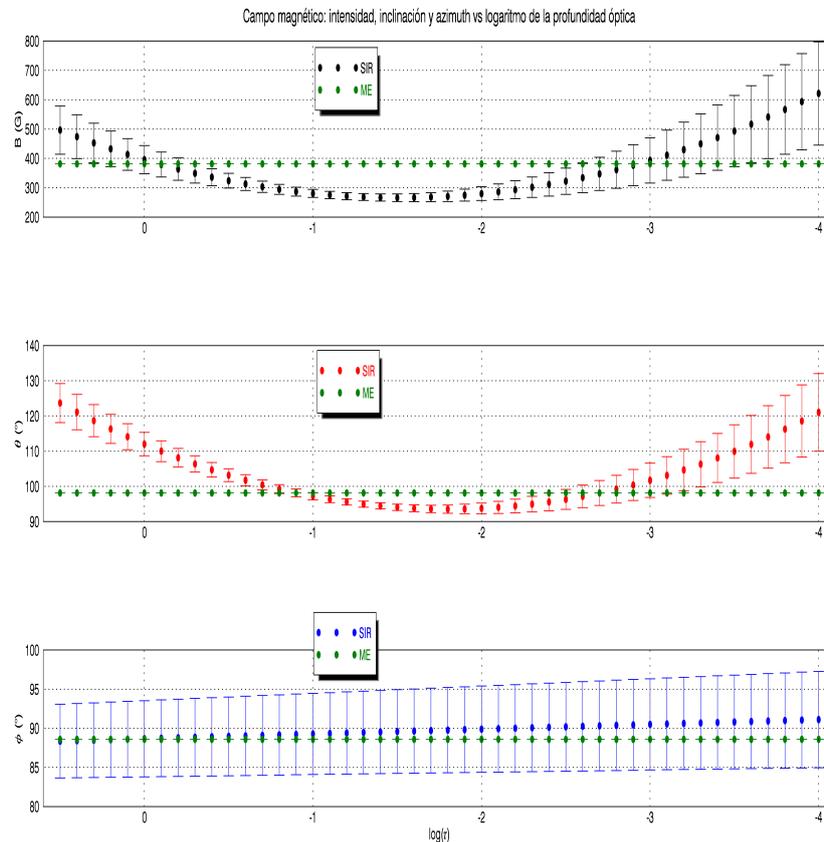


Figura 5.5: Intensidad del campo magnético (superior), inclinación (centro) y azimuth (inferior) frente al logaritmo de la profundidad óptica.

Como puede verse en la figura 5.5, al igual que en la figura 5.4 para la velocidad a lo largo de la línea de visión, en torno a $\log \tau = -3$, los valores de la intensidad del campo magnético, la inclinación y el azimuth de dicho campo son similares tanto para SIR como en la aproximación ME. Esto es debido a que las funciones respuesta a esa profundidad óptica tienen mayor sensibilidad en esa región lo que se traduce en una mejor medida de las magnitudes. Para verificar esto, utilizamos SIR, evaluamos la función respuesta para el campo magnético teniendo en cuenta ambas líneas y graficamos. El resultado es la siguiente figura:

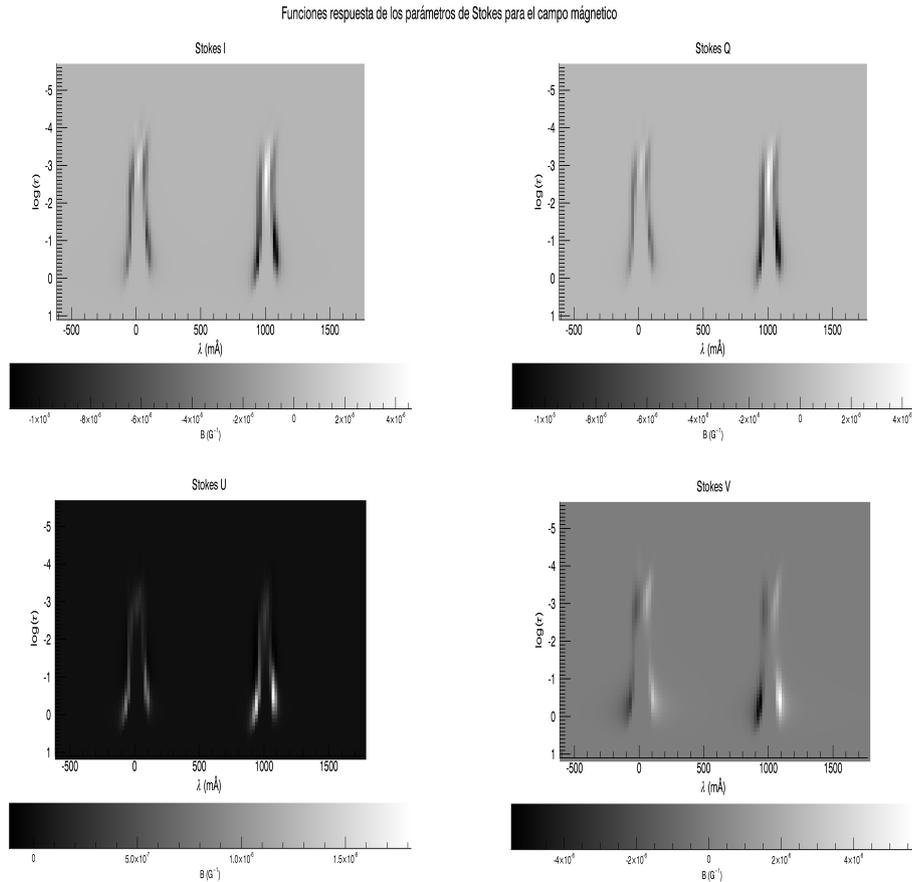


Figura 5.6: Función respuesta del campo magnético para la región observada

En la figura 5.6, podemos comprobar que la línea a 6302.49 \AA tiene una mayor sensibilidad al campo magnético que la línea a 6301.5 \AA , y en consecuencia justifica el porqué escogemos la línea a 6302.49 \AA , ya que permite obtener medidas más fiables de la estructura del campo magnético que la otra línea. Esta intensidad de respuesta es mayor tanto en las alas como en la parte central de la línea, siendo esta región donde ME y SIR proporcionan resultados similares. A su vez, esto está relacionado con lo que hemos mencionado en el capítulo 2 sobre el factor de Landé efectivo: cuanto mayor es este factor, las transiciones son más sensibles al campo magnético.

Capítulo 6

Mapa de Hinode usando SIR

En este último capítulo, vamos a utilizar SIR para obtener mapas de diversas magnitudes como la temperatura, de una parte de la región activa NOAA 10953. En la siguiente figura, mostramos el área a invertir: En esta figura podemos ver gránulos

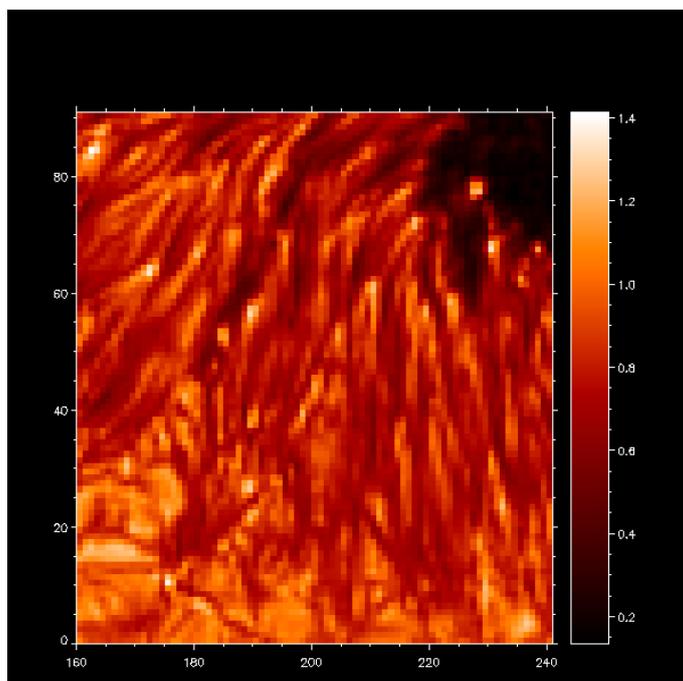


Figura 6.1: Imagen de la región a invertir observado a 6300.9 \AA

e intergránulos en la parte inferior, la penumbra de la mancha solar que abarca gran parte de la imagen y en la parte superior derecha podemos ver la umbra de la mancha. La imagen tiene una dimensión de 81×91 píxeles. Para invertir regiones en SIR, hay que crear una macro, programa que realiza tareas de manera automática, en la cual extraemos los perfiles de Stokes asociados, invertimos los perfiles con SIR y el modelo resultante así como los errores asociados y los perfiles que sintetiza SIR a partir de ese modelo son guardados con nombres diferentes en los que incluimos las coordenadas en píxeles. Para este procedimiento, hemos utilizado un modelo

Harvard-Smithsonian Reference [3] modificado en el que incluimos campo magnético con una inclinación y azimuth constantes y también introducimos microturbulencia. Por supuesto, debemos crear también posteriormente, una rutina de visualización. El resultado de este proceso podemos verlo por ejemplo en esta figura:

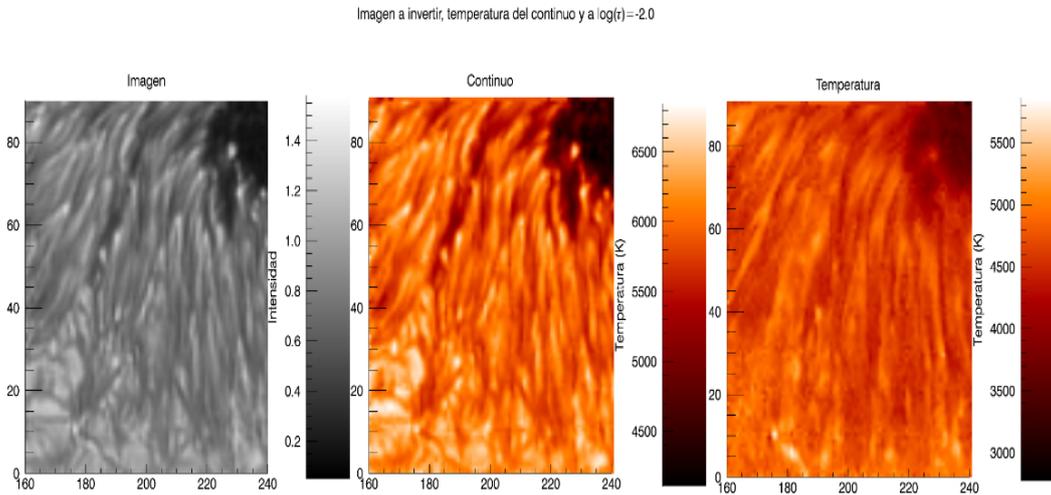


Figura 6.2: Imagen a invertir (izquierda), temperatura del continuo (centro) y temperatura a $\log \tau = -2,0$

En la figura 6.2 podemos ver que el mapa de temperaturas del continuo, que corresponde también a $\tau = 1$ recupera la imagen obtenida con los parámetros de Stokes a 6300.9 \AA que hemos invertido, ya que al comparar dichas imágenes vemos que las estructuras de los gránulos, los intergránulos, la penumbra y la umbra de la región invertida coinciden con los datos de HINODE. Los valores de temperatura típicos para dichas estructuras a $\tau = 1$ o equivalentemente en la superficie solar son de $6500\text{-}6900 \text{ K}$ para los gránulos, $6000 - 6500 \text{ K}$ para los intergránulos y entre 4000 y 4500 K para la umbra. En el caso de la penumbra vemos una escala amplia temperaturas, pues aparecen estructuras calientes en la propia penumbra con temperaturas cercana a la temperatura de los gránulos siendo la temperatura promedio de un valor entre los 5300 y los 5800 K . Esto concuerda con los valores de la figura 8.30 de [16] cuando $z=0 \text{ km}$ para nuestros valores promedios.

Por otra parte, la figura de la derecha de 6.2 es también un mapa de temperaturas pero simulando una capa superior dentro de la fotosfera. Como puede verse, la temperatura ha disminuido con la altura en todos los puntos del mapa. También podemos apreciar un efecto de difuminado de la región, impidiendo ver por ejemplo la granulación de la región y la aparición de estructuras tipo fibra.

En la siguiente figura, mostramos el mapa de la intensidad, inclinación y azimuth del campo magnético cuando estamos en la superficie además de la temperatura del continuo:

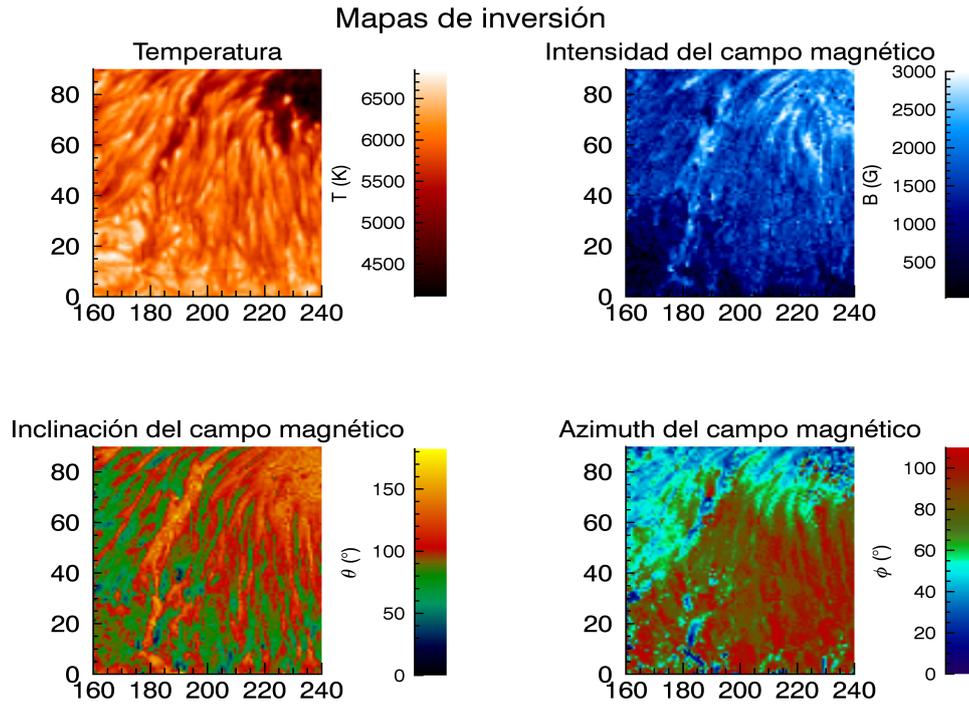


Figura 6.3: Temperatura (superior izquierda), intensidad del campo magnético (superior derecha), inclinación del campo magnético respecto a la línea de visión (inferior izquierda) y azimuth del campo magnético (inferior derecha) en el continuo.

En el mapa de la intensidad del campo magnético, podemos ver que los gránulos e intergránulos poseen intensidades de campo magnético inferiores a 500 G, la penumbra de la mancha abarca en promedio valores de 1500 G siendo más intenso cuanto más cerca esté la zona de la umbra y la propia umbra tiene campos cuya intensidad oscila entre 2500 y 3000 G. Todos ellos son valores concordantes con los esperados [16] [12].

Uno puede preguntarse porqué la temperatura en la umbra es más baja que en un gránulo o en un intergránulo. Y la respuesta está en la intensidad del campo magnético que es suficientemente elevada como para producir la inhibición de la convección que es responsable de la granulación y de la mayor parte del transporte de energía. No obstante, en el mapa de temperaturas, vemos lo que en la literatura es denominada como un punto umbral [16] que ocurre cuando la inhibición de la convección por la presencia de fuertes campo magnéticos no es completa por lo que la temperatura es más alta y es una evidencia de que la umbra no es completamente homogénea.

Si nos fijamos en el mapa de la inclinación del campo magnético vemos que en la umbra, el campo magnético es vertical respecto a la línea de visión mientras que en la penumbra, es más complicado, porque existen zonas de la penumbra en las que el campo se mantiene vertical y otras regiones en las que el campo empieza

a inclinarse horizontalmente. Éste último domina más cuanto más alejado de la penumbra estemos.

Por último, si representamos los mapas de la velocidad a lo largo de la línea de visión y la microturbulencia para el continuo obtenemos la siguiente figura:

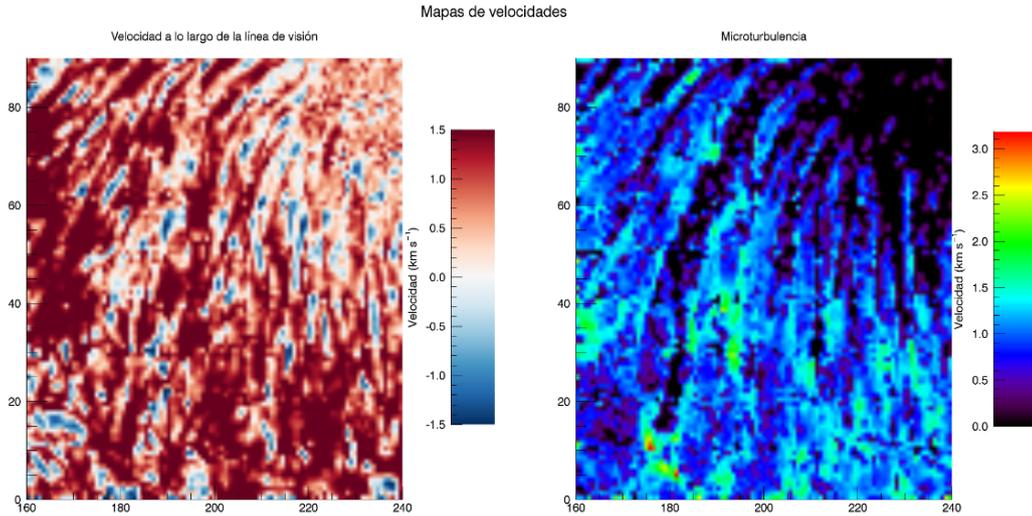


Figura 6.4: Velocidad a lo largo de la línea de visión (izquierda) y microturbulencia (derecha) para $\tau = 1$. Ambas expresadas en km s^{-1} .

En el mapa de la izquierda de 6.4, podemos ver material ascendente en los gránulos y descendente en los intergránulos. Esto es consecuencia directa de la convección que hay justo debajo de la superficie solar empujando el material hacia los laterales de la celda convectiva y hacia la atmósfera de manera que alcanzan una cierta altura hasta que la gravedad retiene al material y desciende. Mientras en la penumbra y en la umbra, predomina un retroceso del material hacia el interior pero no al 100 %.

Por otra parte, la microturbulencia como comentamos en el capítulo 5, es un parámetro que nos indica un ensanchamiento adicional de las líneas producido por turbulencia a escalas menores que las del recorrido libre medio del fotón. Vemos que salvo para la umbra y las regiones en las que hay campo vertical en la penumbra, la microturbulencia no es 0 siendo del orden de $1,5 \text{ km s}^{-1}$.

Conclusiones

En la aproximación ME, que consiste en que todos los parámetros son independientes de la profundidad óptica salvo la función fuente que es lineal con dicha magnitud, la ecuación del transporte radiativo dado por 1.8 queda resuelta y su solución es analítica lo que nos permite sintetizar líneas espectrales a partir de 9 parámetros libres: S_0 , S_1 , η , a , w_m , $\Delta\lambda_D$, B , θ y χ . Además, hemos construido las funciones respuesta, que bajo la aproximación ME, son las derivadas de los parámetros de Stokes respecto a los parámetros libres y por tanto, son analíticas. Pero independientemente de si usamos la aproximación ME o no, nos informan sobre cómo los parámetros de Stokes son modificados debido a pequeñas perturbaciones en las condiciones físicas del medio.

Posteriormente, dado un perfil de Stokes sintetizado con ME, y mediante múltiples conjuntos de parámetros ME arbitrarios, hemos logrado recuperar las condiciones físicas en las que los perfiles de Stokes introducidos al programa están generados, tanto en ausencia de ruido como en presencia de éste. Esto es posible gracias a la implementación del algoritmo Levenberg-Marquardt, una herramienta que permite realizar un ajuste no lineal y que requiere los parámetros libres de la aproximación ME para sintetizar los perfiles, las funciones respuesta para ir introduciendo perturbaciones en los perfiles sintetizados y los perfiles observados para poder comparar.

Luego, hemos aplicado nuestro programa de inversión ME a datos reales para conocer bajo la aproximación ME, las condiciones físicas en las que se forma la línea espectral de Fe I a 6302.49 Å. En concreto, lo hemos usado en un punto de un gránulo cercano a la región activa NOAA 10953 y del que se ha obtenido los perfiles de Stokes y la longitud de onda correspondiente. Al mismo tiempo, hemos comparado con SIR para saber si las condiciones bajo la aproximación ME son consistentes con los parámetros de SIR ya que realmente los parámetros sí dependen de la profundidad óptica y SIR lo tiene en cuenta.

Por último, hemos generado y analizado mapas de inversión de temperatura, microturbulencia, velocidad a lo largo de la línea de visión, intensidad del campo magnético, su inclinación y el azimuth del campo magnético para una parte de la región activa mencionada donde comparamos con la literatura los valores obtenidos.

Bibliografía

- [1] BECKERS, J., AND MILKEY, R. The line response function of stellar atmospheres and the effective depth of line formation. *Solar Physics* 43 (1975), 289–292.
- [2] FONTENLA, J. M., AVRETT, E., THUILLIER, G., AND HARDER, J. Semiempirical Models of the Solar Atmosphere. I. The Quiet- and Active Sun Photosphere at Moderate Resolution. *Astrophysical Journal* 639 (2006), 441–458.
- [3] GINGERICH, O., NOYES, R. W., KALKOFEN, W., AND CUNY, Y. The Harvard-Smithsonian reference atmosphere. *Solar Physics* 18 (July 1971), 347–365.
- [4] GRAY, D. F. *The observation and analysis of stellar photospheres*. Cambridge University Press, 2005.
- [5] HEINZEL, P. Derivatives of the Voigt functions. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia* 29 (1978), 159–162.
- [6] KOSUGI, T., MATSUZAKI, K., SAKAO, T., SHIMIZU, T., SONE, Y., TACHIKAWA, S., HASHIMOTO, T., MINESUGI, K., ET AL. The Hinode (Solar-B) Mission: An Overview. *Solar Physics* 243 (2007), 3–17.
- [7] LANDI DEGL’INNOCENTI, E., AND LANDI DEGL’INNOCENTI, M. Response functions for magnetic lines. *Astronomy and Astrophysics* 56 (1977), 111–115.
- [8] LANDI DEGL’INNOCENTI, E., AND LANDOLFI, M. Thermodynamical properties of unresolved magnetic flux tubes. i: A diagnostic method based on circular polarization ratios in line pairs. *Solar Physics* 77 (1982), 13–26.
- [9] LITES, B. W., ELMORE, D. F., AND STREANDER, K. V. The Solar-B Spectro-Polarimeter. *Astronomical Society of the Pacific Conference Series* 236 (2001), 33.
- [10] NECKEL, H. Announcement: spectral atlas of solar absolute diskaveraged and disk-center intensity from 3290-12510 Å. *Solar Physics* 184 (1999), 421–422.

- [11] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., AND FLANNERY, B. P. *Numerical recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*, vol. 1. Cambridge University Press, 1992.
- [12] PRIEST, E. *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge University Press, 2014.
- [13] RUIZ COBO, B., AND ASENSIO RAMOS, A. Returning magnetic flux in sunspot penumbrae. *Astronomy & Astrophysics* 549 (2013), L4.
- [14] RUIZ COBO, B., AND DEL TORO INIESTA, J. Inversion of stokes profiles. *The Astrophysical Journal* 398 (1992), 375–385.
- [15] SÁNCHEZ, F., COLLADOS, M., AND VÁZQUEZ, M. *Solar Observations: Techniques and Interpretation*. Cambridge University Press, 1992.
- [16] STIX, M. *The sun: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] TRUJILLO-BUENO, J., MORENO-INSERTIS, F., AND SÁNCHEZ, F. *Astrophysical Spectropolarimetry*. Cambridge University Press, 2002.