

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

Programación vectorial lineal y entera

Autor: Jorge Santiso, Jesús Manuel

Director: Carlos González Martín

Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación



UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
Departamento de Estadística,
Investigación Operativa y Computación

D. Carlos González Martín, Catedrático de Estadística e Investigación Operativa del Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación de la Universidad de La Laguna,

CERTIFICA: Que la presente Memoria titulada “Programación Vectorial Lineal y Entera”, ha sido realizada bajo mi dirección, en el Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación de la Universidad de La Laguna, por D. Jesús Manuel Jorge Santiso, y constituye su Tesis Doctoral para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos que haya lugar, firmo el presente certificado en La Laguna, a veintiséis de Febrero de dos mil dos.

Fdo.: Carlos González Martín

*A mi esposa Marianela,
mi amor y mi inspiración.*

*A mis hijos Samuel, David e Iván,
un maravilloso sueño hecho realidad.*

*A mis padres Jesús y Genoveva,
por todas las enseñanzas y valores
que me han transmitido a lo largo de la vida.*

Agradecimientos

Cuando hace ya algún tiempo, mi director y tutor Carlos González Martín, me propuso como tema general de investigación para mi tesis doctoral la Programación Multiobjetivo y, en particular, el estudio de los casos lineal y entero desde la perspectiva vectorial, ignoraba hasta qué punto me iba a entusiasmar y cautivar este inmenso campo, tan duro y tan lleno de posibilidades al mismo tiempo. A él le debo la confianza inicialmente depositada en mí y el haberme introducido en el *oficio*, enseñándome lo necesario para salir adelante. Pero sobre todo, quiero agradecerle sinceramente, la libertad y autonomía de trabajo que me ha proporcionado durante la realización de esta empresa. Para mí ha sido un verdadero honor.

Es difícil expresar con palabras cuánto les debo a mis compañeros del área de Lenguajes y Sistemas Informáticos de la Universidad de La Laguna, especialmente, a Casiano Rodríguez León y a Coromoto León Hernández. Su cálida acogida en el Grupo de Paralelismo y la ayuda de todo tipo que me han brindado ininterrumpidamente, han facilitado de manera considerable mi empeño. Para ellos, mi más profundo agradecimiento.

También quiero enviar un mensaje de gratitud a todos aquellos amigos, tanto del Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación, como de otros Departamentos afines de la Universidad de La Laguna, que se han interesado por la marcha de este proyecto y ofrecido innumerables comentarios y sugerencias.

Deseo reconocer a Marianela todos los sacrificios generosamente realizados y el enorme apoyo que siempre me ha proporcionado. Sin su comprensión y ánimos constantes no hubiese tenido la fuerza suficiente. Gracias de corazón. Por último, deseo mencionar a mis hijos, los cuales, a pesar de no comprender muy bien el motivo de mis largas jornadas *en el trabajo*, siempre lograron contagiarme sus risas y alegría, recordándome cuán hermosa es la vida y haciéndome sentir lo afortunado que soy al compartirla con ellos.

Prólogo

En el mundo actual, la mayor parte de los problemas de decisión con cierta importancia y trascendencia admiten, de forma natural, una formulación donde intervienen múltiples criterios o juicios de valor. Debido a esto, y como quiera que optimización y decisión están íntimamente ligadas entre sí (al decidir siempre intentamos elegir la *alternativa óptima*, es decir, que más nos satisface, de entre el conjunto de acciones u opciones posibles), los problemas de *Decisión Multicriterio* (MCD) han ido acaparando una gran atención dentro de la Investigación Operativa y en gran parte de ambientes y sectores de la sociedad.

Una vasta clase de problemas de Decisión Multicriterio pueden ser especificados mediante la maximización, de manera conjunta, de varias funciones objetivo sobre una determinada región factible dada de forma implícita. Esta formulación, que ha resultado ser de gran utilidad práctica (ver, por ejemplo, las referencias incluidas en [Rm93]), recibe el nombre de *Programa Multiobjetivo* (MOP) y fue definida explícitamente, por primera vez, por Kuhn y Tucker, en 1951 ([KhTc51]). Cuando todas las funciones que aparecen en el MOP son lineales, tenemos un problema de *Programación Lineal Multiobjetivo* (MOLP). Si, además, las variables son de tipo entero se trata de un problema de *Programación Lineal Multiobjetivo Entero* (MOILP).

Debido al frecuente conflicto que se produce entre los diferentes criterios, en los problemas MOP no suele existir una solución que optimice simultáneamente todos los objetivos. La consecuencia directa de esto es que el concepto de solución óptima, tal como lo conocemos en programación escalar, debe ser revisado (por dejar de tener validez) y, en su lugar, aparecen otros nuevos, siendo las nociones de *solución eficiente* y *débilmente eficiente* dos de las más útiles. Desde una perspectiva amplia, los métodos de resolución del MOP pretenden encontrar, de entre el conjunto de soluciones eficientes, la *más preferida* por el *decisor* (DM) ([Ev84]).

Los procedimientos de resolución del MOP pueden agruparse en tres grandes categorías, dependiendo del momento en que el DM manifiesta sus

preferencias: antes, durante o después de la resolución del problema (ver, por ejemplo, [HwMs79], [Ev84], [Jr92], ...).

En el primer grupo (*articulación a priori de las preferencias*), y hablando en términos generales, el DM es capaz de precisar la importancia relativa de cada función objetivo a través de ciertos coeficientes escalares (pesos). Debido a ello el MOP se puede reducir a uno o varios problemas de optimización escalar que, comúnmente, suelen ser sencillos de resolver (especialmente para el caso lineal). Por contra, el principal inconveniente de este enfoque radica en la dificultad que encuentra el DM para proporcionar la información detallada y específica que se le solicita. Dentro de esta clase de procedimientos se enmarcan, entre otros, los métodos de *Programación por Metas* ([ChCp77]) y el *método Lexicográfico* ([HwMs79], p. 45-55).

La segunda categoría incluye a todos aquellos algoritmos en los que el DM expresa información sobre sus preferencias durante la fase de resolución del problema. Existen una gran cantidad de tales procedimientos (ver, por ejemplo, [ShRv91], [GrSt94], [Gn85], ...), los cuales son denominados, genéricamente, como *interactivos*, debido a que requieren una interacción continua entre el analista y el DM. Los métodos interactivos gozan de una gran popularidad y reputada fama entre los especialistas del MOP, representando para muchos la única alternativa de resolución verdaderamente viable ([St86], p. 361). En esencia, su esquema de funcionamiento consiste en resolver, en cada iteración, uno o más programas escalares, construidos a partir de las revelaciones hechas por el DM sobre su estructura de preferencias. Comparados con las técnicas de la categoría anterior, la información que se solicita al DM en cada paso no es tan difícil de obtener. No obstante, los métodos interactivos no están exentos de dificultades. Algunas de las más preocupantes son que la convergencia de tales procedimientos no está siempre garantizada y, en general, precisan ciertas suposiciones que no son fácilmente verificables. Además, aún bajo condiciones propicias, el número de iteraciones requeridas por el correspondiente algoritmo puede ser muy elevado, causando enormemente al DM. Por otra parte, el procedimiento resolutor empleado condiciona fuertemente la búsqueda realizada, al limitar a través de su diseño los puntos que se pueden explorar. Por último, dado que en cada iteración sólo se procesan puntos aislados, sin realizarse una búsqueda exhaustiva de la región más prometedora, suele ser frecuente obtener óptimos locales en lugar de globales ([BrZn92]).

La tercera clase de procedimientos (*articulación a posteriori de las preferencias*) se caracterizan porque no utilizan ningún tipo de información sobre las preferencias del DM durante la optimización. Generalmente en una primera etapa se calculan todas (o una parte de interés especial de) las soluciones eficientes, para posteriormente presentarlas al DM, al objeto de elegir la solución más satisfactoria (segunda etapa). Existen numerosos

métodos generadores de soluciones eficientes, tanto para el caso general (ver, por ejemplo, [ChHm83]), como para los casos especiales lineal ([Sy96], [Ar93b], [ArMl91], [Mr85], ...) y entero (ver las referencias incluidas en [TgKn86] y [Rs86]). Este tipo de metodología es conocida en la literatura con el nombre de *Programación Vectorial* (VP) y representa, desde un punto de vista estrictamente matemático, la extensión natural de la programación escalar tradicional.

El enfoque vectorial aplicado a un MOLP lo denotaremos a lo largo de esta memoria como un problema de tipo LVP (= MOLP + VP). Análogamente, para el MOILP obtendríamos el paradigma ILVP (= MOILP + VP). En general, y abusando de la notación, cuando pretendamos resolver vectorialmente un MOP genérico tendremos un problema de tipo VP.

La principal ventaja de la programación vectorial es que el proceso de optimización está totalmente automatizado. Por contra, existen evidentes desventajas cuando esta metodología se aplica sin las cautelas adecuadas y de manera indiscriminada.

Efectivamente, la tarea de generar, para problemas moderados o grandes, todo el conjunto de soluciones eficientes de un VP puede requerir una cantidad de esfuerzo computacional desproporcionada, incluso para el caso lineal, haciéndola, por tanto, inadecuada en la práctica. A modo de ejemplo, Benson manifiesta ([Bn98a], p. 3) que, utilizando el algoritmo ADBASE de Steuer ([St89]) para obtener el conjunto de vértices eficientes de una serie aleatoriamente generada de 10 LVPs, con 50 desigualdades, 50 variables y 4 funciones objetivo, el número medio de soluciones halladas fue de 83781. Además, al incrementar el número de variables hasta un total de 60, encontró que ADBASE fue incapaz de resolver los problemas propuestos, por exceder cualquiera de ellos el límite de 200000 vértices eficientes establecido por el programa.

No obstante, supongamos por un momento que tales conjuntos de soluciones eficientes (y aún mayores) pudieran ser generados de manera rutinaria y ágil (lo cual no es del todo descabellado que ocurra pronto, si la tecnología informática, hardware más software, sigue progresando a ritmos parecidos a los mantenidos en los últimos años). Aún así, todavía quedaría otra importante cuestión por resolver, como es la saturación experimentada por el DM, al no tener éste capacidad suficiente para procesar adecuadamente tal cantidad de datos. Efectivamente, la competencia de la mente humana para gestionar información tiene ciertos límites que no se pueden superar ([Bn98a]).

Las dificultades anteriores, consideradas insalvables por muchos profesionales del mundo de la optimización multiobjetivo, han hecho que la programación vectorial haya sido desestimada sistemáticamente como una

metodología posible, siendo percibida, en numerosos círculos intelectuales, como una curiosidad meramente académica (de fuerte carácter matemático) y sin un claro futuro práctico.

Sin embargo, creemos que la situación no es tan desalentadora como pudiera parecer a primera vista. Sin pretender establecer ningún tipo de confrontación, en nuestra opinión, los inconvenientes anteriormente reseñados pueden ser, cuando menos, atemperados sustancialmente.

Con respecto al esfuerzo computacional, es ampliamente aceptado que para un mismo problema, una reducción en el tamaño de la región eficiente generada induce una reducción casi proporcional en el tiempo de ejecución del algoritmo (ver, por ejemplo, [MvDA98], p. 556). Al hilo de esta argumentación, existen al menos dos técnicas bien conocidas para contraer, a priori, el tamaño del conjunto de soluciones eficientes que se pretende generar en el espacio de decisión. La primera de ellas, y más sofisticada, consiste en restringir a subintervalos de $(0, 1)$ el rango de variación de todos o algunos de los pesos aplicados a las funciones objetivo. Esta práctica es denominada en la literatura inglesa como *interval weight coefficients* y, para el caso lineal, ha sido estudiada, entre otros, por Steuer ([St76b]). El procedimiento presentado por Steuer consiste en transformar el LVP con ponderaciones en intervalo en otro LVP equivalente, que tiene como región eficiente el conjunto contraído de soluciones eficientes del problema original. La segunda estrategia, y más ampliamente utilizada, consiste en restringir el rango de valores de las funciones objetivo mediante la introducción de cotas inferiores adecuadas. Estas acotaciones se pueden incorporar en el modelo como restricciones ordinarias, obteniéndose un problema ampliado que debe ser resuelto. Entre otros autores, Mavrotas, Diakoulaki y Assimacopoulos ([MvDA98]) han investigado ampliamente el efecto de tales acotaciones en el tamaño de la región eficiente. Sus experimentos para el LVP, basados en establecer grados de acotación (expresados como un tanto por ciento sobre el rango de variación de los valores de las funciones objetivos obtenidos a partir de los datos de la tabla de pagos), tanto para objetivos individuales, como para el conjunto de todos ellos, son bastante esperanzadores, sobre todo si el DM está dispuesto a aceptar acotaciones significativas. A modo de ejemplo, los autores exponen que acotaciones simultáneas en torno al 40% del rango inducen reducciones alrededor del 50% en el número de vértices eficientes.

Por otra parte, una vez generado el conjunto de soluciones eficientes es posible *discretizarlo* y *filtrarlo* para reducir su tamaño a posteriori. Es esencial que los procedimientos empleados en la discretización de la región eficiente de un LVP proporcionen una *muestra suficientemente representativa* y *dispersa* de puntos (no, necesariamente, vértices). Para un compendio de las técnicas más ampliamente utilizadas ver [St86]. Por otra parte, el filtrado de un conjunto de puntos, entendido como un problema de

elección de representantes adecuados, es un tema ampliamente estudiado por la Estadística ([Sm96]). En el ámbito de la programación vectorial, autores como Steuer ([St86]) o Morse ([Mr80]), han tratado este aspecto en profundidad.

Combinando las contracciones a priori y a posteriori de la región eficiente se puede reducir hasta límites manejables el tamaño de la región eficiente, empleando en la tarea conjunta tiempos de cálculo razonables. Una vez que el DM elige una solución como preferida, mediante un *filtrado inverso* (*reverse filtering*, [St86]) es posible reconstruir un entorno eficiente de pequeña dimensión con la intención de realizar en él mismo una búsqueda exhaustiva.

Cerrando esta ronda de explicaciones previas, conviene mencionar que la metodología vectorial no tiene como único objetivo la obtención de descripciones completas, ya sean globales o locales, de la región eficiente. Es posible una percepción más ambiciosa de la misma, que abarque también la generación, en un solo paso, de representaciones globales (discretas), de tamaño adecuado, de la región eficiente. Un avance decidido en esta dirección lo constituye el algoritmo propuesto por Benson y Sayin ([BnSy97]).

En esta monografía estudiamos numerosos aspectos (sin pretender hacer una relación exhaustiva de los mismos) de la programación vectorial relacionados con los casos lineal y entero. Dado que en la literatura existe una gran cantidad de publicaciones y trabajos sobre el LVP (literalmente, cientos de artículos, capítulos de libros y libros) y el ILVP (aunque en mucha menor profusión), debemos aclarar que una actitud enciclopedista por nuestra parte hubiese constituido una tarea abrumadora y casi irrealizable.

En una primera fase fueron seleccionados una serie de tópicos (en nuestra opinión esenciales) sobre los que realizar un estudio preliminar sobre el estado del arte. Esto fue complicado, pues los conocimientos de nuestro interés, aparte de estar dispersos en el tiempo y en el espacio, presentaban la dificultad añadida de la utilización de múltiples y complejas notaciones distintas. No se trataba de un simple ejercicio de lectura y recopilación, sino de una reelaboración personal y actualizada totalmente nueva. La motivación era doble. Una con un claro carácter, digamos, divulgativo, que quiere hacer la programación vectorial lineal y entera mejor conocida y comprendida (aunque cierto dolor está garantizado) y que pretende resaltar algunas de las principales dificultades que plantea su aplicación. La otra, de carácter más técnico, aspira a conocer con precisión los numerosos resultados disponibles y dónde encajan (cómo se interrelacionan) en el cuerpo de la teoría.

Pero la cuestión, obviamente, no era tanto lo que se había hecho, sino lo que se podía hacer. Descubrimos, para nuestra satisfacción, que lejos de constituir un campo agotado, la programación vectorial lineal y entera presentaba (y sigue presentando en la actualidad) una gran cantidad de retos y desafíos sobre los que reflexionar y trabajar duramente. En este sentido, desarrollamos y ampliamos, siempre que pudimos, todos aquellos aspectos que nos parecían que estaban insuficientemente tratados o que eran susceptibles de ser mejorados.

Y el resultado de este proceso queda recogido en la memoria que ahora presentamos. La organización de la misma refleja un intento de dividir la extensa materia tratada en partes coherentes. Dado que cada capítulo de la tesis incluye una introducción, con descripciones pormenorizadas acerca de su contenido, aquí sólo daremos unas breves pinceladas generales.

En el capítulo uno se expone la teoría básica utilizada en el desarrollo de esta memoria. Sin perder de vista nuestro interés específico por el LVP, se intentó hacer un estudio, lo más general posible, de propiedades, con el fin de aprovechar al máximo las ventajas de la teoría. Aun a pesar de que los temas tratados pueden considerarse tradicionales y tienen un fuerte carácter preliminar, nos fue posible hacer ciertas contribuciones de provecho. En este sentido merecen ser destacadas las secciones 1.5, en la que damos una clasificación exhaustiva del VP, 1.7, dedicada a los fundamentos del LVP y en la que aportamos algunos resultados y herramientas teóricas, y 1.9, en la que se presenta una teoría de *cotas eficientes* que permite establecer una cierta relación de polaridad entre el problema de programación vectorial convexo (CVP) y el que surge en el cálculo de sus *supremos eficientes*.

El segundo capítulo está dedicado a la caracterización de las caras eficientes de un LVP. Este es un tema clásico que ofrece innumerables oportunidades. En primer lugar se analizó el problema general de identificar las caras de un poliedro (sección 2.3), tanto si se conocen elementos locales (vértices) de las mismas como si no, prestando especial cuidado al fenómeno de la degeneración. En este contexto se propone la noción de *descriptor maximal* como un mecanismo adecuado para el reconocimiento preciso de caras. Dado que las caras eficientes siempre se pueden describir a través del conjunto de soluciones óptimas de ciertos problemas escalares, y puesto que este tema general suele estar insuficientemente tratado en la literatura, también se estudió con detenimiento la caracterización apropiada del conjunto de soluciones óptimas de problemas escalares arbitrarios (sección 2.4). Con estas herramientas en la mano fue posible diseñar nuevos tests para determinar la eficiencia de caras arbitrarias (sección 2.9) e incidentes en algún vértice conocido (sección 2.8).

En el tercer capítulo se abordan ciertos tópicos específicos del LVP que, a pesar de estar más indirectamente relacionados con el cálculo de soluciones eficientes, llamaron poderosamente nuestra atención por las nuevas potencialidades que ofrecían. Evidentemente, la lista de cuestiones tratadas es forzosamente incompleta para poder hacer manejable un trabajo de estas características. Entre los aspectos desarrollados que más nos han satisfecho, merece la pena destacar el análisis de eficiencia completa (sección 3.2) por su trascendencia en otras partes de la teoría, el estudio de la dualidad (sección 3.4) por su indiscutible belleza y elegancia, y la optimización de una función lineal sobre la región eficiente (sección 3.5) por el nuevo enfoque que permite en la metodología vectorial ([Bn84]) y su complejidad (estrechamente relacionada con la optimización global, [HrTuy96]).

El cuarto capítulo estudia los principales aspectos relativos a los métodos generadores de soluciones eficientes. Atendiendo exclusivamente a su diseño proponemos una clasificación exhaustiva basada en cuatro categorías (sección 4.5), siendo el enfoque descendente local (LTD) una iniciativa nuestra. Asimismo, para cada clase de métodos se desarrolló un nuevo algoritmo y se analizaron sus propiedades.

En el quinto capítulo se examina el caso lineal entero. En nuestra opinión este tema no ha recibido en la literatura la atención que merece su importancia. Por ello, y porque consideramos que el ILVP tiene una gran aplicabilidad en el mundo real, hemos dedicado un esfuerzo especial al estudio de este problema. Después de ilustrar convenientemente la dureza del modelo (sección 5.2), entre otras cosas probamos rigurosamente algunas de sus propiedades más notables (sección 5.3) y desarrollamos varios algoritmos generadores de soluciones eficientes (sección 5.5).

Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo, enumerando sus principales aportaciones. Además, se señalan posibles líneas de desarrollo e investigación que se esperan llevar a cabo en un futuro próximo.

Jesús M. Jorge Santiso

Notación y Símbolos

A	Matriz de restricciones. En general, se considerará que $A \in R^{m \times n}$ es regular por filas.
a_i	Fila i -ésima de la matriz A .
a^j	Columna j -ésima de la matriz A .
B	Base (matriz no singular de orden m) de A .
$B(\bar{x})$	Conjunto de todas las bases de A asociadas a \bar{x} .
$B(P)$	Conjunto de cotas eficientes para el problema P .
b	Vector de recursos. En general, supondremos que $b \in R^m$.
\bar{b}	$B^{-1} b$.
C	Matriz de costos. Se considerará que $C \in R^{k \times n}$.
C^\geq	Cono de preferencias inducido por la matriz C : $\{d \in R^n / Cd \geq 0\} \cup \{0\}$
$CNH(D)$	(CoNic Hull) Envolverte cónica o cono generado por un conjunto de vectores D .
$CVH(Q)$	(ConVex Hull) Envolverte convexa de un conjunto de puntos Q .

c_i	Gradiente de la i -ésima función objetivo.
$D_{\bar{x}}$	Conjunto de dominación de \bar{x} : $\{x \in R^n / x = \bar{x} + y, y \in C^{\geq}\}$
e	Vector cuyas componentes son todas uno. La dimensión dependerá del contexto.
E^P	Conjunto de todas las soluciones eficientes del problema P .
E_{xp}^P	Conjunto de todos los vértices eficientes del problema P .
E_{xr}^P	Conjunto de todos los rayos extremos eficientes del problema P .
E_e^P	Conjunto de las aristas eficientes del problema P .
E_f^P	Conjunto de las caras eficientes del problema P .
E_{mf}^P	Conjunto de las caras eficientes maximales del problema P .
$E_f^P(\bar{x})$	Conjunto de las caras eficientes del problema P incidentes en el vértice \bar{x} .
E_B^P	Conjunto de todas las bases eficientes del problema P .
E_{DB}^P	Conjunto de todas las bases duales-eficientes del problema P .
E_p^P	Conjunto de soluciones eficientes propias del problema P .
E_i^P	Conjunto de soluciones eficientes impropias del problema P .
E_s^{IP}	Soluciones eficientes soportadas del problema entero IP .
E_{ns}^{IP}	Soluciones eficientes no soportadas del problema entero IP .
F	Se ha empleado con dos significados. En los primeros cuatro capítulos de la memoria representa una cara de un poliedro. En el capítulo 5 denota la región factible de un ILVP genérico.

ILVP	Problema de programación vectorial lineal entera, formulado en forma estándar como: $\left. \begin{array}{l} \max(\text{imizar}) \ z(x) = Cx \\ \text{s.a: } \ x \in F = \{x \in Z_+^n / Ax=b\} \end{array} \right\}$
$I(B)$	Región de indiferencia asociada a la base B : $\{\lambda \in R_{++}^k / \lambda' R \geq 0\}$
$I^P(Y)$	Región de indiferencia de Y asociada al problema P : $\{\lambda \in \Lambda_k^0 / Y \subseteq S_{P_\lambda}\}$
$\text{int}(Y)$	Interior de Y .
J_B	Conjunto de índices asociados a las variables básicas. Cuando este conjunto se utilice como superíndice o subíndice, sólo se escribirá B para simplificar la notación.
J_N	Conjunto de índices asociados a las variables no básicas. Cuando este conjunto se utilice como superíndice o subíndice, sólo se escribirá N para simplificar la notación.
k	Número de funciones objetivo.
LP	Problema de programación lineal escalar (Linear Program).
LVP	Problema de programación vectorial lineal (Linear Vector Program), formulado en forma estándar como: $\left. \begin{array}{l} \max(\text{imizar}) \ z(x) = Cx \\ \text{s.a: } \ x \in X = \{x \in R_+^n / Ax=b\} \end{array} \right\}$
m	Número de restricciones.
n	Número de variables estructurales.
N	Matriz formada por las columnas no básicas de A .
$P(\alpha)$	Problema de maximización de holguras: $\max\{e' s / z(x) - s = \alpha, x \in X, s \in R_+^k\}$
$\dot{P}(\alpha)$	Problema de maximización uniforme de holguras: $\max\{s / z(x) - es \geq \alpha, x \in X, s \in R_+\}$

- P_λ Problema paramétrico o ponderado:

$$\max\{\lambda^t z(x) / x \in X\}$$
- $P_{\lambda,\alpha}$ Problema paramétrico-restringido:

$$\max\{\lambda^t z(x) / x \in X, z(x) \geq \alpha\}$$
- $P_{\lambda,p}$ Problema de la norma ponderada:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^k \lambda_i |z_i^t - z_i(x)|^p / x \in X\right\}$$
- $P_i(\varepsilon)$ Problema ε -restringido con maximización del i -ésimo objetivo:

$$\max\{z_i(x) / x \in X, z_j(x) \geq \varepsilon_j, \forall j \neq i\}$$
- R Matriz con los costos reducidos asociados a las variables no básicas ($C^B B^{-1} N - C^N$).
- R_+^n Ortante no negativo de R^n ($\{x \in R^n / x \geq 0\}$).
- R_{++}^n Ortante positivo de R^n ($\{x \in R^n / x > 0\}$).
- r.h.s. Acrónimo de right hand side.
- $S(P)$ Conjunto de supremos eficientes del problema P .
- S^P Conjunto de soluciones superiores del problema P .
- S_Q Conjunto de soluciones óptimas de un problema escalar Q .
- s.f.b. Acrónimo de solución factible básica.
- $T(B)$ Tabla canónica asociada a la base B .
- v.b. Acrónimo de variables básicas.
- $V(C)$ Cono generado por las filas de la matriz C :

$$\{v \in R^n / v^t = \lambda^t C, \lambda \in R_+^k\}$$

 Cuando C es la matriz de costos, a $V(C)$ se le llama cono criterio o cono gradiente.

VP	Problema de programación vectorial (Vector Program). Su formulación genérica es: $\max\{z(x) / x \in X\}$
$WS(P)$	Conjunto de supremos débilmente eficientes del problema P .
$WB(P)$	Conjunto de cotas débilmente eficientes para el problema P .
WE^P	Conjunto de soluciones débilmente eficientes del problema P .
X	Región factible. Para el caso lineal, es un poliedro que, formulado en forma estándar, escribiremos como: $\{x \in R_+^n / Ax = b\}$
X_{xp}	Conjunto de puntos extremos de X .
X_{xd}	Conjunto de direcciones extremas de X .
X^*	Cono de recesión de X .
X_e	Conjunto de aristas de X .
X_{xr}	Conjunto de rayos extremos (aristas no acotadas) de X .
X_f	Conjunto de todas las caras de X .
X_f^q	Conjunto de todas las caras de X de dimensión q .
x	Vector de variables de decisión.
x_i	Componente i -ésima del vector x .
x^j	Vector j -ésimo.
$x \succ y$	x es preferido a y .
$x \sim y$	x es indiferente a y .
$x^1 \sim_E x^2$	x^1 es E-adyacente a x^2 .
$x^1 < x^2$	$x_j^1 < x_j^2 \quad \forall j$.

$x^1 \leq x^2$	$x_j^1 \leq x_j^2 \quad \forall j$ y, además, $\exists i$ tal que $x_i^1 < x_i^2$.
$x^1 \leq x^2$	$x_j^1 \leq x_j^2 \quad \forall j$.
$x^1 \neq x^2$	$\exists j$ tal que $x_j^1 < x_j^2$ ó $x_j^1 > x_j^2$
$x^1 \neq x^2$	$\exists i, j$ tales que $x_i^1 < x_i^2$ y $x_j^1 > x_j^2$
Y^0	Interior relativo del conjunto Y .
z	Vector de funciones objetivo.
z^I	Punto ideal.
\bar{z}	Valores objetivos asociados a la solución \bar{x} ($\bar{z} = z(\bar{x})$).
$z(X)$	Región objetivo, especificada por: $\{z(x) / x \in X\}$
#	Absurdo.
■	Final de demostración.
●	Final de ejemplo.
Λ_k^0	$\left\{ \lambda \in R^k / \lambda > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$
Λ_k	$\left\{ \lambda \in R^k / \lambda \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$

Contenidos

Prólogo	ix
Notación y Símbolos	xvii
1 Fundamentos de la Programación Vectorial: El Caso Lineal	1
1.1 Introducción	1
1.2 El Problema de Decisión Multicriterio	4
1.2.1 El Sistema de Preferencias como una Relación Binaria	5
1.2.2 El Sistema de Preferencias Inducido por una Función de Valor	9
1.3 El Problema General de Programación Vectorial	12
1.4 Escalarizaciones para el VP	18
1.4.1 Problema Paramétrico (o Ponderado)	18
1.4.2 Problema de la Norma Ponderada	23
1.4.3 Problema ε -Restringido con Maximización del i -ésimo Objetivo	24
1.4.4 Problema de Maximización de Holguras	25
1.4.5 Problema Paramétrico-Restringido	28
1.5 Clasificación de los VP	29
1.6 El Problema de Programación Vectorial Lineal	32
1.6.1 Nomenclatura	33
1.6.2 El LVP Expresado en Formato de Tabla	38
1.7 Resultados Básicos para el LVP	40
1.7.1 Teoremas de la Alternativa	40

1.7.2	Caracterizaciones de Eficiencia	42
1.7.3	Estructuración del Conjunto de Soluciones Eficientes	45
1.7.4	Eficiencia y Conexidad.....	47
1.7.5	Caracterizaciones para la Acotación de un LVP	49
1.8	Métodos Gráficos de Resolución	51
1.8.1	Método de los Gradientes Compuestos	52
1.8.2	Método de los Conjuntos de Dominación	53
1.9	Cotas para el VP	56
1.10	Relajación de un VP	67
1.10.1	Imposición de Niveles a las Funciones Objetivo	69
1.10.2	Cortes Mediante Hiperplanos Arbitrarios	70
2	Caracterizaciones de Caras Eficientes	73
2.1	Introducción	73
2.2	Consideraciones sobre Degeneración	76
2.3	Identificación de las Caras de un Poliedro	80
2.3.1	Caras Arbitrarias	80
2.3.2	Caras Incidentes en un Vértice	85
(i)	Caso No Degenerado	87
(ii)	Caso Degenerado.....	88
2.4	Soluciones Óptimas de un Programa Escalar Lineal	93
2.5	Eficiencia y Envoltentes Convexas	104
2.6	Vértices Eficientes	107
2.6.1	Caso No Degenerado	108
2.6.2	Caso Degenerado	110
2.7	Aristas Eficientes Incidentes en un Vértice	112
2.7.1	Caso No Degenerado	112
2.7.2	Caso Degenerado	116
2.8	Caras Eficientes Incidentes en un Vértice	120
2.8.1	Caso No Degenerado	121
2.8.2	Caso Degenerado	125

2.9 Caras Arbitrarias Eficientes	133
2.10 Regiones de Indiferencia	136

3 Tópicos Seleccionados en Programación Vectorial

Lineal 139

3.1 Introducción	139
3.2 Eficiencia Completa	141
3.3 Identificación de Objetivos Redundantes	152
3.4 Dualidad	163
3.4.1 Concepto de Dualidad de Gale, Kuhn y Tucker	163
3.4.2 Concepto de Dualidad de Kornbluth	173
3.4.3 Concepto de Dualidad de Isermann	174
3.4.4 Concepto de Dualidad de Hannan	180
3.5 Optimización Lineal sobre la Región Eficiente	181
3.5.1 Propiedades Generales	181
3.5.2 El Problema del Cálculo del Rango de Variación Eficiente de las Funciones Objetivo	188
3.5.3 Estrategias Básicas de Resolución	191
3.5.4 Método de Planos de Corte	192
3.5.5 Método de Maximización Facial Progresiva	194

4 Métodos Generadores de Soluciones Eficientes 205

4.1 Introducción	205
4.2 Cálculo de un Vértice Eficiente Inicial	207
4.2.1 Método Paramétrico (o Ponderado)	208
4.2.2 Método de Maximización Lexicográfica	209
4.2.3 Método de Ecker y Kouada	212
4.2.4 Método de Isermann	214
4.2.5 Método de Benson	215
4.2.6 Método de Hartley	217

4.3	Cálculo del Conjunto de Vértices Eficientes	218
4.3.1	Consideraciones Prácticas	221
4.4	Cálculo del Conjunto de Aristas Eficientes	227
4.4.1	Consideraciones Prácticas	230
4.5	Cálculo de Todo el Conjunto de Soluciones Eficientes	233
4.5.1	Métodos Ascendentes Globales	235
4.5.2	Métodos Ascendentes Locales	241
4.5.3	Métodos Descendentes Globales	256
4.5.4	Un Nuevo Enfoque: Métodos Descendentes Locales	264
5	Programación Vectorial Lineal Entera	279
5.1	Introducción	279
5.2	El problema de Programación Vectorial Lineal Entero	282
5.3	Preliminares Teóricos	288
5.3.1	Relaciones entre el Problema Entero y su Relajación Convexa	288
5.3.2	Relaciones entre el Problema Entero y su Relajación Lineal	292
5.3.3	Eficiencia Completa	295
5.4	Distancias entre las Soluciones Eficientes del ILVP y las de su Relajación Lineal	296
5.5	Métodos Generadores de Soluciones Eficientes Enteras	300
5.5.1	Método Elemental	301
5.5.2	El Caso Biobjetivo	302
(i)	Método NISE	302
(ii)	Método de Chalmet-Lemonidis-Elzinga.....	305
(iii)	Método Restringido	307
5.5.3	El Caso General	308
(i)	Método de Klein y Hannan	309
(ii)	Método de Marcotte y Soland	311
(iii)	Método de Puntos Subeficientes	314

(iv) Método de los Retículos Completamente Eficientes320

Conclusiones e Investigaciones Futuras **325**

Bibliografía **331**

Capítulo 1

Fundamentos de la Programación Vectorial: El Caso Lineal

1.1 Introducción

En este capítulo se estudian con cierta profundidad los aspectos generales del VP determinístico, dedicando una especial atención al caso lineal. Previamente se introduce la notación necesaria para la formalización adecuada de estos problemas. Los tópicos abordados en esta primera parte del trabajo desempeñan un papel fundamental, pues su objetivo no es otro que construir una plataforma sólida para acceder al resto de cuestiones tratadas en esta memoria. En esencia, constituyen una recopilación de hechos ampliamente conocidos o clásicos, aunque hay que destacar que la presentación de los mismos se ha reelaborado totalmente, incorporando numerosas ideas propias que han derivado en desarrollos más simplificados y en algunos nuevos resultados.

En la sección 1.2 se comienza describiendo el escenario de la Decisión Multicriterio, haciendo énfasis en que, dado que es muy probable que el *sistema de preferencias* del *decisor* extienda la *preferencia de Pareto*, podemos admitir que las *soluciones más preferidas* del problema serán *eficientes* (Proposición 1.2.9). Este importante hecho se sigue manteniendo si la *función de valor* del decisor (supuesta su existencia) es creciente en cada uno de sus argumentos (Corolario 1.2.15).

Tales consideraciones dan pie, en la sección 1.3, a presentar el VP como un paradigma alternativo y viable en programación multiobjetivo.

Además de definir explícitamente diversos conceptos de solución, probamos que la formulación dada para el problema es lo más general posible.

La programación vectorial gira en torno al concepto de *solución eficiente* (o *débilmente eficiente*) pero, lamentablemente, su definición no es matemáticamente cómoda. Por tal motivo, las caracterizaciones de eficiencia suelen darse en función de algún tipo de *escalarización* del VP. En este sentido, la sección 1.4 estudia los problemas escalares de mayor utilidad asociados a un programa vectorial, sin pretender en ningún momento ser exhaustivos. Ciertamente, se puede argumentar que este aspecto ha sido tratado por numerosos autores a lo largo del tiempo, existiendo recopilaciones bastante completas de resultados en determinados libros de texto (ver, por ejemplo, [ChHm83]) y monografías. Sin embargo, los motivos que nos han aconsejado a ofrecer nuestra perspectiva personal del tema, se basan en que éste es un eje esencial de la programación vectorial y su integración de manera unificada en la memoria, abundando en los detalles de interés y eliminando los meramente accesorios, facilitaría la asimilación y comprensión de conclusiones posteriores. Entre los resultados más importantes, y bien conocidos, expuestos en este apartado, merece la pena destacar, relacionados con el *problema ponderado*, las caracterizaciones de soluciones eficientes propias y débilmente eficientes para los programas vectoriales convexos (CVP) dadas en los Teoremas 1.4.7 y 1.4.9, respectivamente. Con respecto al *problema de maximización de holguras*, resulta de particular interés el test de eficiencia para puntos arbitrarios enunciado en el Teorema 1.4.35.

En la sección 1.5 proponemos una clasificación exhaustiva de problemas para el VP que extiende de manera natural la existente en optimización escalar. De este modo, un problema sólo puede ser o *no factible*, o *acotado*, o *no acotado* (Proposición 1.5.4). Otros autores han propuesto clasificaciones alternativas, siendo la dada por Isermann para el caso lineal ([Is76]), formalmente equivalente a la aquí presentada. Hemos creído sugerente la inclusión en este apartado del estudio de las relaciones que se establecen entre la acotación de un VP y las de sus funciones objetivo consideradas individualmente (Proposición 1.5.9 y siguientes).

El problema de programación vectorial lineal, abreviadamente denotado por LVP, no es más que un VP donde todas las funciones objetivo y las restricciones son de tipo lineal. La idoneidad de este modelo en el mundo real está fuera de toda duda. La sección 1.6 introduce el LVP, así como la terminología y notación propia asociada al mismo.

La sección 1.7 ahonda en la estructura del LVP, abordando las propiedades específicas de este problema. Se comienza con una serie de novedosas y útiles herramientas teóricas dadas en forma de teoremas de la alternativa para sistemas de desigualdades lineales (Teorema 1.7.1 y

siguientes). Esto nos permite obtener, de forma sencilla y elegante, entre otras, las condiciones de eficiencia para el caso lineal (Teorema 1.7.6). Asimismo, merece la pena mencionar las caracterizaciones (aparentemente desapercibidas hasta ahora) dadas para soluciones eficientes y débilmente eficientes arbitrarias que no son necesariamente puntos extremos (Corolario 1.7.8 y Corolario 1.7.12, respectivamente). También se tratan en este apartado las cuestiones relacionadas con la estructuración de la región eficiente en caras eficientes maximales (Corolario 1.7.27), así como la conexidad de la frontera eficiente (Teorema 1.7.40). Además se realiza un estudio innovador y detallado de las condiciones que garantizan la acotación o no de un LVP (Teorema 1.7.41 y siguientes).

La sección 1.8 está dedicada a los métodos gráficos de resolución de un VP los cuales, aunque cuentan con una utilidad muy limitada, nos permitirán resolver geoméricamente la mayor parte de los ejemplos que aparecen en esta memoria (principalmente en 2 y 3 dimensiones). Hemos seleccionado y expuesto dos técnicas básicas, a saber, el *método de los gradientes compuestos* y el *método de los conjuntos de dominación*.

En la sección 1.9 introducimos las nociones originales de *cota y supremo eficiente* de un VP a través de la generalización de sus contrapartidas escalares. Se prueba que si un problema es acotado entonces tiene cotas (Corolario 1.9.7) y supremos eficientes (Corolario 1.9.20). Sin embargo, en contra de lo que sucede en el caso escalar, un VP puede tener cotas y no ser acotado (Ejemplo 1.9.12). Hemos demostrado que en condiciones de linealidad, si el problema tiene cotas débilmente eficientes entonces también es débilmente acotado (Teorema 1.9.14). Quizás el resultado más importante de esta sección sea que para un VP con región objetivo cerrada y convexa (en particular, para los LVP), el conjunto de soluciones no dominadas coincide con los supremos eficientes del problema (Corolario 1.9.34). Para nosotros resultó una gran satisfacción comprobar que, para el caso lineal, el cálculo de las soluciones no dominadas se podía abordar utilizando una relación de polaridad como la que habíamos planteado. Por otra parte, el hecho de haber obtenido, de forma independiente, la formulación de problema dual propuesta por Gale-Kuhn-Tucker para el caso vectorial ([GKKT51], p. 320) nos insufló una gran cantidad de ánimo.

Por último, la sección 1.10 aborda la cuestión de la *relajación* de un VP. Entre otros resultados novedosos podemos citar que el problema relajado proporciona cotas para el problema original (Proposición 1.10.2). Una de las particularizaciones más útiles de la noción de relajación consiste en extender sólo la región factible manteniendo la misma función objetivo. Para estos problemas, aunque las soluciones dominadas del problema original siguen conservando su condición en el problema relajado (Proposición 1.10.4), en general, no se puede afirmar lo mismo con respecto a

las soluciones no dominadas (Ejemplo 1.10.5). Sin embargo, para ciertas relajaciones especiales muy utilizadas en la práctica, si se cumple que las soluciones eficientes del problema original siguen siéndolo en el problema relajado (Proposición 1.10.7). Los resultados concernientes a la relajación de un VP permiten obtener fácilmente algunas conclusiones clásicas de la teoría del LVP, entre las que se pueden citar que el LVP es *N-acotado* (Corolario 1.10.10).

1.2 El problema de Decisión Multicriterio

Desde hace ya bastante tiempo, la sociedad moderna presencia un lento pero inexorable cambio de mentalidad en la manera de tratar y discutir los problemas de decisión que ha de afrontar, debido al hecho de que, por lo común, las consecuencias que se derivan de nuestras determinaciones son multidimensionales. Es por ello que una cantidad cada vez mayor de los problemas de decisión se plantean desde una óptica multicriterio, en el sentido de tomar en consideración dos o más objetivos simultáneamente. La perspectiva multicriterio plantea no pocos problemas, siendo el más significativo el frecuente conflicto entre los criterios establecidos.

El problema de *Decisión Multicriterio*, denotado como MCD, se formula matemáticamente como ([Zl82]):

$$\max(\text{imizar})\{z(x) / x \in X\} \quad (1.1)$$

donde: $X \subseteq R^n$ es el *conjunto de alternativas* o *región factible*, $x \in X$, es el *vector de variables (estructurales) de decisión* y $z: R^n \rightarrow R^k$, es la *función objetivo vectorial*, siendo $k \geq 2$.

A R^n se le denomina comúnmente *espacio de decisión* y a R^k *espacio objetivo* (también conocido como *espacio criterio* o *espacio de consecuencias*).

El MCD (acrónimo de Multiple Criteria Decision) pretende encontrar aquellas soluciones que son *óptimas* o *más preferidas* (representan las mejores consecuencias) de acuerdo al juicio del decisor (DM).

El modelo (1.1) quedará especificado de forma genérica por (z, X) . Cuando la función objetivo vectorial sea la identidad, para simplificar la notación, sólo indicaremos la región factible (X) .

Si la región factible viene dada de forma implícita (explícita) se dice que (1.1) es un *problema de optimización multiobjetivo (multiatributo)*.

En la práctica ocurre, normalmente, que k es mucho menor que n . Dauer apunta que, en los problemas reales, suele ser frecuente que $2 \leq k \leq 5$ ([Dr87], p.579). Algunos autores, entre otros Zionts ([Zn85], p. 230),

recomiendan que, como mucho, aparezcan 7 objetivos en la formulación del modelo MCD.

Llamaremos $z(X)$ a la imagen de X a través de la aplicación vectorial z , es decir:

$$z(X) = \{z(x), x \in X\}$$

A $z(X)$ se le conoce como la *región objetivo* o *conjunto criterio* (*criterion set*), del problema (1.1), y no es más que el conjunto de todos los resultados o consecuencias posibles asociados a las alternativas de que se disponen en el problema.

Como k suele ser mucho menor que n se produce, en palabras de Dauer, un *colapsamiento* ([Dr87], p. 586) de la región factible. Por tal motivo, $z(X)$ suele tener una estructura más simple que X .

El problema (1.1) es, trivialmente, equivalente al siguiente problema:

$$\max \{z / z \in z(X)\} \quad (1.2)$$

El problema (1.2) tiene los atractivos de tener una región factible de pequeña dimensión y de que trabaja directamente sobre las consecuencias de nuestras determinaciones, lo cual hace más intuitivo el proceso de decisión. Por otra parte, es claro que si \bar{z} es una solución óptima de (1.2), $z^{-1}(\bar{z}) = \{x \in X / z(x) = \bar{z}\}$ representa *decisiones óptimas* en (1.1).

Para que el *analista* pueda hacer alguna contribución al proceso de decisión, es necesario que las preferencias del DM tengan una estructura matemática apropiada, de forma que se establezca una *ordenación* de los elementos del conjunto criterio. Esta estructura es, o bien una relación binaria, denominada *relación de preferencia*, y denotada por \succ , ([Yu85], Chapter 2), o bien una función, denominada *función de valor* o *de preferencia*, y denotada por v ([ChHm83], p. 62-88).

Sea $Z = z(X)$.

1.2.1 El Sistema de Preferencias como una Relación Binaria

Es obvio que, dados dos elementos arbitrarios del conjunto criterio, $z^1, z^2 \in Z$, sólo puede ocurrir uno de los siguientes sucesos:

- z^1 es *preferido* o *mejor* que z^2 , denotado por $z^1 \succ z^2$,
- z^1 es *menos preferido* o *peor* que z^2 , denotado por $z^1 \prec z^2$ o
- z^1 es *no comparable* o *indiferente* a z^2 , denotado por $z^1 \sim z^2$.

Cualquier información sobre las preferencias del DM en Z se puede representar como un subconjunto de $Z \times Z$. En este sentido, una preferencia no es más que una relación binaria.

Diremos que:

$$\begin{aligned}(z^1, z^2) \in \{>\} &\Leftrightarrow z^1 \succ z^2 \\(z^1, z^2) \in \{<\} &\Leftrightarrow z^1 \prec z^2 \\(z^1, z^2) \in \{\sim\} &\Leftrightarrow z^1 \sim z^2\end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned}\{>\} &= \{(z^1, z^2) \in Z \times Z / z^1 \succ z^2\} \\ \{<\} &= \{(z^1, z^2) \in Z \times Z / z^1 \prec z^2\} \\ \{\sim\} &= \{(z^1, z^2) \in Z \times Z / z^1 \sim z^2\}\end{aligned}$$

Obsérvese que:

- Los conjuntos $\{>\}$ y $\{<\}$ son simétricos, en el sentido de que $(z^1, z^2) \in \{>\}$ si, y sólo si, $(z^2, z^1) \in \{<\}$.
- $\{>\}$, $\{<\}$ y $\{\sim\}$ forman una partición de $Z \times Z$.
- Dada una preferencia especificada por $\{>\}$, a partir de ella se pueden obtener $\{<\}$ y $\{\sim\}$. Efectivamente, $\{<\} = \{(z^1, z^2) \in Z \times Z / z^2 \succ z^1\}$ y $\{\sim\} = Z \times Z - (\{>\} \cup \{<\})$.

Convengamos de ahora en adelante en que dados $x, y \in R^k$, $x \geq y$ si, y sólo si, $x \geq y$ y $x \neq y$.

Definición 1.2.1 *La preferencia de Pareto, también conocida como más es mejor (more is better), se formula matemáticamente como: Dados $z^1, z^2 \in Z$, $z^1 \succ z^2$ si, y sólo si, $z^1 \geq z^2$.*

La preferencia de Pareto es la preferencia que se establece sobre el conjunto criterio cuando el DM sólo indica que está tanto más satisfecho, cuanto mayores sean los niveles alcanzados en cada uno de los objetivos individualmente. Evidentemente, se trata de una preferencia muy simple que dará lugar a una deficiente e incompleta ordenación de Z .

Consideremos la siguiente definición:

Definición 1.2.2 Se dice que la preferencia $\{\succ'\}$ extiende a la preferencia $\{\succ\}$ si $\{\succ\} \subseteq \{\succ'\}$.

Parece razonable suponer (y así lo haremos en esta memoria) que cualquiera que sea la preferencia del DM, ésta extenderá, al menos, la preferencia de Pareto.

Es posible introducir nuevas relaciones binarias a partir de las consideradas anteriormente. Efectivamente:

Definición 1.2.3 Se dice que z^1 es al menos tan preferido como z^2 , y lo denotaremos por $z^1 \succeq z^2$, si $(z^1, z^2) \in \{\succ\} \cup \{\sim\}$.

Luego, $\{\succeq\} = \{\succ\} \cup \{\sim\}$.

Proposición 1.2.4 (i) $z^1 \sim z^2$ si, y sólo si, $z^1 \succeq z^2$ y $z^2 \succeq z^1$.
(ii) $z^1 \succ z^2$ si, y sólo si, $z^1 \succeq z^2$ y $z^2 \not\succeq z^1$.

De esta manera, dada la preferencia $\{\succ\}$ se puede deducir $\{\succeq\}$ y viceversa.

La necesidad, implícita en cualquier proceso de toma de decisiones, de construir directa o indirectamente, el sistema de preferencias del DM es debida a que para poder seleccionar una *alternativa óptima* necesitamos previamente haberlas *ordenado* de alguna manera.

Consideramos lógico suponer, por mantener cierta conformidad con los usos habituales del lenguaje (ver, por ejemplo, [Yu85], Remark 2.4) que $\{\succ\}$ verifique las propiedades irreflexiva y antisimétrica y que $\{\sim\}$ cumpla la reflexiva y simétrica.

Definición 1.2.5 ([Yu85], Definition 2.4) Una preferencia $\{\succ\}$ es un orden:

- (i) *parcial si verifica, además, la propiedad transitiva.*
- (ii) *débil si es un orden parcial y su preferencia inducida $\{\succeq\}$ verifica la propiedad transitiva.*
- (iii) *estricto si es un orden débil y verifica la propiedad conexa.*

El siguiente resultado no reviste dificultad.

Proposición 1.2.6 La preferencia de Pareto es un orden parcial pero, en general, no es un orden débil.

Obsérvese que, en ciertos casos concretos, la preferencia de Pareto sí es un orden débil como, por ejemplo, si $Z \subseteq R^2$ es el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. En particular, resulta evidente que:

Proposición 1.2.7 *Si la preferencia de Pareto definida en Z no tiene puntos indiferentes entonces es un orden estricto.*

El principio de optimalidad inducido por una preferencia $\{\succ\}$ establece que si un punto $\bar{x} \in X$ es una *solución óptima (más preferida)* para el DM, entonces $\nexists x \in X$ tal que $z(\bar{x}) \prec z(x)$. Teniendo en cuenta este hecho damos los siguientes conceptos:

Definición 1.2.8 ([Yu85], Definition 2.6) *Dada una preferencia $\{\succ\}$ definida en Z , los conjuntos no dominado y dominado de Z según $\{\succ\}$, vienen dados por $N(\{\succ\}, Z) = \{\bar{z} \in Z / \nexists z \in Z, z \succ \bar{z}\}$ y $D(\{\succ\}, Z) = \{\bar{z} \in Z / \exists z \in Z, z \succ \bar{z}\}$, respectivamente.*

A los elementos de $N(\{\succ\}, Z)$ ($D(\{\succ\}, Z)$) se les denomina soluciones no dominadas (dominadas) según $\{\succ\}$.

Obsérvese que:

- $N(\{\succ\}, Z)$ y $D(\{\succ\}, Z)$ forman una partición de Z .
- Si $\{\succ\}$ especifica completamente la preferencia del DM, entonces $N(\{\succ\}, Z)$ representa las consecuencias del conjunto de soluciones más preferidas (óptimas), siendo todas ellas indiferentes entre sí.

Cuando la preferencia $\{\succ\}$ sea la de Pareto denotaremos los conjuntos de soluciones no dominadas y dominadas por $N(Z)$ y $D(Z)$, respectivamente. Además, en este caso, $N(Z) = \{\bar{z} \in Z / \nexists z \in Z, z \geq \bar{z}\}$ y $D(Z) = \{\bar{z} \in Z / \exists z \in Z, z \geq \bar{z}\}$.

A los elementos de X cuya imagen a través de z pertenezca a $N(Z)$ se les llama soluciones eficientes. A las soluciones eficientes también se les conoce como *óptimos de Pareto*, pues representan el conjunto de soluciones óptimas según el principio de optimalidad inducido por la preferencia de Pareto.

El siguiente resultado nos indica que, bajo la hipótesis de que la preferencia del DM extienda la preferencia de Pareto, cualquier solución óptima para el problema (1.1) es también un óptimo de Pareto.

Proposición 1.2.9 Si la preferencia $\{\succ\}$ extiende la preferencia de Pareto entonces $N(\{\succ\}, Z) \subseteq N(Z)$.

Demostración. Sea $\bar{z} \in N(\{\succ\}, Z)$. Supongamos, por reducción al absurdo que $\bar{z} \notin N(Z) \Rightarrow \exists \hat{z} \in Z$ tal que $\hat{z} \geq \bar{z} \Rightarrow \hat{z} \succ \bar{z} \Rightarrow \bar{z} \notin N(\{\succ\}, Z) \Rightarrow \#$, luego $\bar{z} \in N(Z)$. ■

1.2.2 El Sistema de Preferencias Inducido por una Función de Valor.

Definición 1.2.10 ([Yu85], Definition 5.2) Una función, $v: Z \subseteq R^k \rightarrow R$, se dice que es una función de valor que representa la estructura de preferencias del DM si se verifica que $z^1 \succ z^2$ si, y sólo si, $v(z^1) > v(z^2)$.

En las condiciones de la definición anterior, $\{\succ\}$ se puede ver como la preferencia inducida por v .

Es sencillo probar los siguientes resultados:

Proposición 1.2.11 Si $v: Z \subseteq R^k \rightarrow R$ es una función de valor que representa la estructura de preferencias del DM, entonces

- (i) $z^1 \sim z^2$ si, y sólo si, $v(z^1) = v(z^2)$.
- (ii) $\{\succ\}$ es un orden débil.

En función del resultado anterior podemos concluir que, en general, la preferencia de Pareto no se puede representar mediante una función de valor, por no ser un orden débil.

Si fuésemos capaces de especificar de forma explícita la función de valor que representa la estructura de preferencias del DM, entonces el problema MCD se reduce a resolver un problema de optimización escalar:

$$\max\{v(z) / z \in Z\} \quad (1.3)$$

Si denotamos por S_v el conjunto de soluciones óptimas del problema (1.3) y por $\{\succ\}$ la preferencia inducida por v , entonces:

Proposición 1.2.12 $S_v = N(\{\succ\}, Z)$.

Demostración.“ \subseteq ”

Sea $\bar{z} \in S_v \Rightarrow \forall z \in Z, v(\bar{z}) \geq v(z)$. Supongamos, por reducción al absurdo que $\bar{z} \notin N(\succ, Z) \Rightarrow \exists \hat{z} \in Z$ tal que $\hat{z} \succ \bar{z} \Rightarrow v(\hat{z}) > v(\bar{z}) \Rightarrow \#,$ luego, $\bar{z} \in N(\succ, Z)$.

“ \supseteq ”

Sea $\bar{z} \in N(\succ, Z)$. Supongamos, por reducción al absurdo que $\bar{z} \notin S_v \Rightarrow \exists \hat{z} \in Z$ tal que $v(\hat{z}) > v(\bar{z}) \Rightarrow \hat{z} \succ \bar{z} \Rightarrow \bar{z} \notin N(\succ, Z) \Rightarrow \#,$ luego $\bar{z} \in S_v$. ■

Desafortunadamente, en la práctica es difícil construir la función de valor del DM, siendo necesario realizar fuertes hipótesis para poder garantizar, siquiera, su existencia (ver, por ejemplo, [Yu85], Chapter 5 y [ChHm83], Chapter 3). En general, la función de valor v no es conocida ni por el analista ni por el DM.

Proposición 1.2.13 *Sea \succ la preferencia de un DM particular y v su función de valor (supuesta su existencia). Si \succ extiende la preferencia de Pareto, entonces v es no decreciente en cada uno de sus argumentos.*

Demostración. Sean $z^1, z^2 \in Z, z^1 \geq z^2$. Como \succ extiende la preferencia de Pareto $\Rightarrow z^1 \succ z^2$. Supongamos, por reducción al absurdo que $v(z^1) < v(z^2) \Rightarrow z^1 \prec z^2 \Rightarrow \#,$ luego $v(z^1) \geq v(z^2)$. ■

Por otra parte, si v es creciente en cada uno de sus argumentos, es posible garantizar que las soluciones más preferidas del DM siguen siendo óptimos de Pareto. Efectivamente:

Proposición 1.2.14 *Sea $v: Z \subseteq R^k \rightarrow R$ la función de valor del DM. Supongamos que v es creciente en cada uno de sus argumentos. Entonces, la preferencia del DM extiende a la de Pareto.*

Demostración. Sea $z^1 \geq z^2 \Rightarrow v(z^1) > v(z^2) \Rightarrow z^1 \succ z^2$. ■

Corolario 1.2.15 ([St86], Theorem 6.11) *Sea $v: Z \subseteq R^k \rightarrow R$ la función de valor del DM. Supongamos que v es creciente en cada uno de sus argumentos. Entonces, $S_v \subseteq N(Z)$.*

Demostración. Aplicar Proposición 1.2.14 y Proposición 1.2.9. ■

Aunque la suposición de que v sea creciente en cada uno de sus argumentos nos resulta bastante *creíble* (realista), vamos a realizar el ejercicio de estudiar lo que sucede si la relajamos, dejándola méramente en

no decreciente en cada uno de sus argumentos. Para ello necesitamos el siguiente concepto:

Definición 1.2.16 ([Yu85], Definition 2.7) *Dado $Z \subseteq R^k$ y una preferencia $\{\succ\}$ tal que $N(\{\succ\}, Z) \neq \emptyset$, se dice que Z es N-acotado con respecto a $\{\succ\}$ si $\forall z \in Z$ ocurre que $z \in N(\{\succ\}, Z)$, o bien, $\exists \bar{z} \in N(\{\succ\}, Z)$ tal que $\bar{z} \succ z$.*

Teorema 1.2.17 *Sean $v: Z \subseteq R^k \rightarrow R$ la función de valor del DM. Supongamos que v es no decreciente en cada uno de sus argumentos y que Z es N-acotado con respecto a la preferencia de Pareto. Entonces, si $S_v \neq \emptyset$ se tiene que $S_v \cap N(Z) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $\bar{z} \in S_v$ y supongamos que $\bar{z} \notin N(Z)$. Por ser Z N-acotado $\Rightarrow \exists \hat{z} \in N(Z)$ tal que $\hat{z} \geq \bar{z} \Rightarrow v(\hat{z}) \geq v(\bar{z})$. Como $\bar{z} \in S_v \Rightarrow \hat{z} \in S_v \cap N(Z)$. ■

Luego, aún imaginando que v es no decreciente en cada uno de sus argumentos, si Z es N-acotado con respecto a la preferencia de Pareto, se puede garantizar que alguna solución óptima para el DM es también un óptimo de Pareto.

Queremos finalizar esta sección haciendo algunas apreciaciones de carácter general. Cuando las preferencias sobre el conjunto de consecuencias Z están correctamente especificadas (ya sea a través de una relación de preferencia o a través de una función de valor) e inducen un orden estricto, el problema MCD está claramente formulado, en el sentido de que hay una sola solución óptima. Sin embargo, en los problemas reales no solemos disponer ni de una completa especificación de las preferencias del DM, ni de buenas ordenaciones de los elementos de Z . Esto no significa que no se puedan tomar decisiones. Únicamente habrá que articular los mecanismos adecuados que permitan recabar información adicional sobre las preferencias y obtener, si se puede, el conjunto de soluciones óptimas según la estructura revelada. En el otro extremo de la metodología, una alternativa a este proceso consiste en utilizar, como única información acerca de las preferencias del DM, que ésta extiende a la preferencia de Pareto. En este caso se debería generar todo el conjunto de soluciones eficientes y presentarlo al DM para que seleccione la solución más preferida. Concretamente, esta última estrategia es la empleada por la programación vectorial, la cual será objeto de un profundo estudio en esta memoria.

1.3 El Problema General de Programación Vectorial

El *problema de programación vectorial* (continuo), VP, también conocido como *problema de maximización vectorial*, se define como un problema de optimización multiobjetivo en el que, para la resolución del mismo, la única información que se emplea sobre el sistema de preferencias del DM es que éste extiende la preferencia de Pareto. De esta manera, resolver el VP se entiende como la generación de todo el conjunto de soluciones eficientes (ver, por ejemplo, [Gf68], p. 618, [EvSt73], p. 54, [ChHm83], p. 114 o [Gal86], p.253).

Nótese que el adjetivo vectorial se emplea con un doble propósito o funcionalidad. Por un lado indica que se tienen en consideración dos o más funciones objetivo y es contrapuesto al término escalar, que se utiliza para designar aquellos problemas de optimización matemática que sólo tienen una única función objetivo. Por otra parte hace referencia al enfoque o metodología de resolución utilizada.

El modelo matemático del VP se formula, sin pérdida de generalidad, como:

$$\max(\text{imizar})\{z(x) / x \in X\} \quad (1.4)$$

donde la región factible, $X \subseteq R^n$, viene dada en forma implícita a través de restricciones que deben ser satisfechas.

Obsérvese que para el caso más general X no tiene porqué ser cerrado, convexo y ni siquiera conexo. Cuando la región factible X es un conjunto cerrado y convexo, y la función objetivo vectorial z es cóncava, tenemos lo que se denomina un problema de programación vectorial convexa (CVP).

En este apartado vamos a presentar diversos conceptos de solución en sintonía con el espíritu metodológico del VP. Sea P el VP dado en (1.4).

Sin lugar a dudas, la noción *más natural* de solución óptima para P , atendiendo exclusivamente al principio de optimalidad de Pareto, es la siguiente:

Definición 1.3.1 *Un punto $x^s \in X$ se dice que es una solución superior, también conocida como solución óptima global, de P , si, y sólo si, $\forall x \in X$ se verifica que $z(x) \leq z(x^s)$.*

Al conjunto de soluciones superiores de P lo denotaremos por S^P .

Existe otro concepto íntimamente relacionado con el de solución superior y utilizado profusamente en la literatura.

Sea $i \in \{1, \dots, k\}$. Consideremos el problema escalar, $P_i \equiv \max\{z_i(x) / x \in X\}$, y denotemos al conjunto de soluciones óptimas de P_i por S_{P_i} .

Definición 1.3.2 Supongamos que $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, P_i es acotado. Se define el punto ideal del problema P como el punto, $z^I = (z_1^I, \dots, z_k^I)$, del espacio objetivo, R^k , tal que $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, z_i^I es el valor objetivo óptimo de P_i .

A veces se suele denotar al punto ideal por z^{max} .

Resulta claro que si x^s es una solución superior de P , entonces $z(x^s) = z^I$.

Por desgracia, en la vida real ocurre, con mucha frecuencia, que al menos 2 de los k objetivos entran en conflicto entre sí, es decir, mejorar uno de ellos empeora el otro y viceversa. Por este motivo, la inexistencia de una solución superior para el VP es algo bastante corriente. Es por ello que, a esta clase de solución, se le conoce también con el nombre de *solución utopía*.

Esto obliga a considerar el concepto de óptimo de Pareto, quizás, menos *natural* y *cómodo* que el anterior pero, sin lugar a dudas, más *realista* y, en definitiva, *útil*.

Recordemos (ver Definición 1.2.8 y apreciaciones siguientes) que, bajo la preferencia de Pareto, un punto $\bar{y} \in Y \subseteq R^k$ se dice *no dominado* si, y sólo si, $\nexists y \in Y$ tal que $y \geq \bar{y}$, siendo *dominado* en caso contrario.

Al conjunto de puntos no dominados (dominados) de Y lo denotaremos por $N(Y)$ ($D(Y)$).

Sea $Z = z(X)$.

Definición 1.3.3 Una solución $\bar{x} \in X$ se dice que es eficiente para P si, y sólo si, $z(\bar{x}) \in N(Z)$.

Mientras que el concepto de punto no dominado hace referencia al espacio objetivo, el concepto de solución eficiente hace referencia al espacio de decisión.

Obsérvese que:

- Cuando $k=1$ la noción de eficiencia es equivalente a la de optimalidad en problemas de optimización escalar.
- Una solución superior es una solución eficiente, pero una solución eficiente no es, en general, una solución superior.
- Si $z^I \in Z$ entonces $N(Z) = \{z^I\}$.

Al conjunto de todas las soluciones eficientes del problema P se le conoce como *región eficiente* de P y lo denotaremos por E^P .

A $z(E^P) = \{z(x) / x \in E^P\}$ se le conoce como *rango de la región eficiente* de P . Obviamente $N(Z) = z(E^P)$. En este sentido, $E^P = z^{-1}(N(Z))$.

Otras definiciones alternativas de solución eficiente son las siguientes:

Proposición 1.3.4 *Son equivalentes:*

- $\bar{x} \in E^P$.
- $\nexists x \in X$ tal que $z(x) \geq z(\bar{x})$.
- $\forall x \in X$ tal que $z(x) \geq z(\bar{x})$ entonces $z(x) = z(\bar{x})$.
- $\forall x \in X$ tal que $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ con $z_i(x) > z_i(\bar{x})$ entonces $\exists j \in \{1, \dots, k\}$, $j \neq i$, que verifica $z_j(x) < z_j(\bar{x})$.

Es evidente que:

Proposición 1.3.5 $E^P = \emptyset$ si, y sólo si, $\forall x \in X$, $\exists \bar{x} \in X$ tal que $z(\bar{x}) \geq z(x)$.

Definición 1.3.6 *Un punto $\bar{x} \in X$ se dice que es una solución no eficiente o inferior de P si, y sólo si, $z(\bar{x}) \in D(Z)$.*

Al conjunto de todas las soluciones no eficientes del problema P lo denotaremos por \bar{E}^P y, claramente, viene dado por $X - E^P$.

La definición clásica de solución eficiente, aunque sencilla no es enteramente satisfactoria, por lo que se han introducido, a lo largo del tiempo, relajaciones y restricciones de la misma.

Con el fin de hacer distinciones entre las soluciones eficientes, y sin pérdida de generalidad, consideremos un problema de optimización biobjetivo ($k=2$).

Sean $z^1, z^2 \in Z$, $z^1 \neq z^2$ y supongamos que, para el DM, $z^1 \sim z^2$. Si denotamos por $\Delta z_1 = z_1^1 - z_1^2$ e $\Delta z_2 = z_2^2 - z_2^1$, entonces podemos escribir $z^2 = (z_1^2, z_2^2) = (z_1^1 - \Delta z_1, z_2^1 + \Delta z_2)$.

Podemos pensar que el DM ha *intercambiado* o *sustituido* Δz_1 por Δz_2 , en orden a mantener la indiferencia entre z^1 y z^2 .

Al cociente $\Delta z_2 / \Delta z_1$ se le denomina *tasa de intercambio* o *sustitución* entre z^1 y z^2 ([Yu85], p. 28).

Esta tasa de intercambio nos expresa cuanto se incrementa (decrementa) z_2 cuando decrementamos (incrementamos) z_1 en una unidad. Obsérvese, además, que la noción de tasa de intercambio depende de los puntos z^1, z^2 considerados.

Se denomina *tasa marginal de intercambio* o *sustitución al límite*:

$$\lim_{\Delta z^1 \rightarrow 0} (\Delta z_2 / \Delta z_1) = \partial z^2 / \partial z^1$$

supuesta su existencia.

Atendiendo a que la tasa marginal de intercambio entre algún par de objetivos sea finita o infinita, podemos clasificar las soluciones eficientes en dos grupos mutuamente excluyentes: *soluciones eficientes propias* e *impropias*.

Definición 1.3.7 ([Gf68], p. 618) *Un punto $\bar{x} \in X$ se dice que es una solución eficiente propia de P si, y sólo si, $\bar{x} \in E^P$ y $\exists M \in R_{++}$ tal que $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ y $\forall x \in X$, con $z_i(x) > z_i(\bar{x})$ entonces $\exists j \in \{1, \dots, k\}$, $j \neq i$, verificando $z_j(x) < z_j(\bar{x})$ y $(z_i(x) - z_i(\bar{x})) \leq M(z_j(\bar{x}) - z_j(x))$.*

En otras palabras, para cualquier solución eficiente propia de P , dado cualquier objetivo, la ganancia marginal en ese objetivo relativa a la pérdida respecto a algún otro objetivo está acotada superiormente.

Denotaremos al conjunto de soluciones eficientes propias de P por E_p^P .

Definición 1.3.8 *A las soluciones eficientes que no son propias las llamaremos soluciones eficientes impropias.*

Al conjunto de soluciones eficientes impropias lo denotaremos por E_i^P .

Por otra parte, una relajación del concepto de solución eficiente se obtiene de la siguiente manera. Sea, nuevamente, $Y \subseteq R^k$ un conjunto arbitrario.

Definición 1.3.9 *Un punto $\bar{y} \in Y$ se dice débilmente no dominado si, y sólo si, $\nexists y \in Y$ tal que $y > \bar{y}$. En caso contrario, se dice que es (o está) débilmente dominado.*

Al conjunto de puntos débilmente no dominados de Y lo denotaremos por $WN(Y)$. Si representamos por $WD(Y)$ a los puntos débilmente dominados de Y , entonces $WN(Y) = Y - WD(Y)$.

Definición 1.3.10 ([KrnSt80], p. 190) *Un punto $\bar{x} \in X$ se dice que es una solución débilmente eficiente o cuasi-eficiente de P si $z(\bar{x}) \in WN(Z)$.*

El conjunto de soluciones débilmente eficientes de P lo especificaremos por WE^P . Resulta claro que: $WN(Z) = z(WE^P)$.

En función de las definiciones anteriores tenemos que $\bar{x} \in WE^P$ si, y sólo si, $\nexists x \in X$ tal que $z(x) > z(\bar{x})$.

Al igual que ocurre con las soluciones eficientes, cuando $k=1$ el concepto de solución débilmente eficiente coincide con el de óptimo para el caso escalar.

Las relaciones que se establecen entre los diferentes conceptos de solución considerados quedan resumidas en:

Corolario 1.3.11 $E_p^P \subseteq E^P \subseteq WE^P \subseteq X$.

Finalmente, vale la pena precisar claramente cuando dos soluciones se consideran equivalentes.

Definición 1.3.12 ([Hr83], p. 3) *Se dice que $x, y \in X$ son equivalentes si $z(x) = z(y)$. Además, dado $V \subseteq X$ se dice que $W \subseteq V$ es una representación completa de V si $\forall v \in V, \exists w \in W$ tal que v es equivalente a w , es decir, $z(V) = z(W)$.*

Después de introducir todos los conceptos anteriores estamos en condiciones de definir con exactitud qué se entiende por *optimizar* o *resolver* el problema P utilizando la metodología vectorial.

La acepción más común de *optimizar vectorialmente* consiste en determinar o generar todo E^P o WE^P o partes específicas de tales conjuntos. A los algoritmos que resuelven el problema P se les conoce como *algoritmos generadores del conjunto de soluciones eficientes*.

Este enfoque dado al concepto de resolución de P constituye una clara generalización del cálculo de todos los óptimos alternativos de un problema de optimización escalar y ha de utilizarse con ciertas cautelas si se quiere que sea de utilidad en la práctica.

Como resolver P puede ser una tarea formidable (pues se considera que las demandas computacionales crecen exponencialmente con el tamaño del problema, [Sy96]), la programación vectorial debe concentrar sus esfuerzos sobre conjuntos reducidos (ver [St76b] y [MvDA98] para estudiar dos técnicas localizadas) o generar *aproximaciones* de la región eficiente E^P . Tales aproximaciones pueden serlo por *exceso* ($E^P \subseteq E$) o por *defecto* ($E \subseteq E^P$), donde E representa el conjunto de soluciones generado por el método aproximado. Las aproximaciones por defecto que se pueden considerar pueden calcular desde una a *casi todas* las soluciones eficientes. Para el caso lineal (ver la sección 1.6), una aproximación por defecto muy extendida consiste en el cálculo de (todos) los vértices eficientes (sección 4.3). Si consideramos ahora la envolvente convexa de todos los puntos extremos eficientes obtendremos una aproximación por exceso de la región eficiente (sección 2.5). Las ventajas de las *técnicas aproximadas* son evidentes: mientras que aceleran el proceso de resolución, siguen proporcionando una visión global de la región eficiente.

Para finalizar esta sección, veamos que la formulación del VP dada al comienzo de la misma, es lo más general posible. Efectivamente:

Sean $P' \equiv \min\{-z(x)/x \in X\}$ y $P'' \equiv \max\{z(x)+\alpha/x \in X\}$, donde $\alpha \in R^k$. Nos proponemos ver que P , P' y P'' son equivalentes, en el sentido de que sus regiones eficientes coinciden.

Proposición 1.3.13 $E^P = E^{P'}$.

Demostración. $\bar{x} \in E^P \Leftrightarrow \exists x \in X$ tal que $z(x) \geq z(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists x \in X$ tal que $-z(x) \leq -z(\bar{x}) \Leftrightarrow \bar{x} \in E^{P'}$. ■

Proposición 1.3.14 $E^P = E^{P''}$.

Demostración. $\bar{x} \in E^P \Leftrightarrow \exists x \in X$ tal que $z(x) \geq z(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists x \in X$ tal que $z(x)+\alpha \geq z(\bar{x})+\alpha \Leftrightarrow \bar{x} \in E^{P''}$. ■

1.4 Escalarizaciones para el VP

El concepto de solución eficiente no es, por desgracia, matemáticamente cómodo. Para poderlo hacer operativo necesitamos expresarlo en términos de algún otro que nos resulte familiar. La estrategia más común consiste en relacionar las soluciones eficientes de un VP con las soluciones óptimas de algún problema de programación escalar (SP). Con este fin se han utilizado en la literatura numerosas clases de SP's. Aquí no vamos a dar un repertorio exhaustivo de las mismas, sino que seleccionaremos aquéllas que consideramos entroncan con los pilares básicos de la teoría del VP, desarrollando para cada una de ellas las propiedades de mayor utilidad para los propósitos de esta memoria.

El libro de Chankong y Haimes ([ChHm83], p. 113-175) constituye una referencia excelente sobre este tópico.

Con carácter general, denotaremos por S_Q al conjunto de todas las soluciones óptimas de un programa escalar Q .

Sean P el VP $\max\{z(x)/x \in X\}$ y $\Lambda_k = \{\lambda \in R_+^k / e^t \lambda = 1\}$. Evidentemente, el interior relativo de Λ_k , indicado por Λ_k^0 , viene dado por $\{\lambda \in R_{++}^k / e^t \lambda = 1\}$.

1.4.1 Problema Paramétrico (o Ponderado)

Definición 1.4.1 Sea $\lambda \in R^k$. Al problema $\max\{\lambda^t z(x) / x \in X\}$ se le conoce con el nombre de problema paramétrico (o ponderado) asociado a P , y le denotaremos por P_λ .

El problema paramétrico P_λ es, muy probablemente, el problema escalar que mejores *dividendos* ha proporcionado a la programación vectorial.

El siguiente resultado, aunque sencillo, es de gran importancia:

Teorema 1.4.2 $\forall \lambda \in R_{++}^k$ se verifica que $S_{P_\lambda} \subseteq E^P$.

Demostración. Sean $\lambda \in R_{++}^k$ y $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in X, z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \lambda^t z(\hat{x}) > \lambda^t z(\bar{x}) \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$. Luego, $\bar{x} \in E^P$. ■

Como consecuencias inmediatas tenemos:

Corolario 1.4.3 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda_k^0} S_{P_\lambda} \subseteq E^P$.

Corolario 1.4.4 Si X es compacto entonces $E^P \neq \emptyset$.

Corolario 1.4.5 ([YuZl75], Remark 4.3) Si $\exists \lambda \in R_{++}^k$ tal que $\lambda' z(x) \equiv 0$ entonces $E^P = X$.

El Teorema 1.4.2 se puede refinar aún más. Efectivamente:

Teorema 1.4.6 ([Gf68], Theorem 1) $\forall \lambda \in R_{++}^k$ se verifica que $S_{P_\lambda} \subseteq E_p^P$.

Demostración. Sean $\lambda \in R_{++}^k$, $\bar{x} \in S_{P_\lambda} \Rightarrow \bar{x} \in E^P$. Vamos a probar que $\bar{x} \in E_p^P$, sin más que tomar $M = (k-1) \max\{(\lambda_j / \lambda_i) / i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j\}$.

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists i \in \{1, \dots, k\}$, $\exists \hat{x} \in X$, con $z_i(\hat{x}) > z_i(\bar{x})$ tal que $\forall j \in \{1, \dots, k\}$ con $j \neq i$ y $z_j(\hat{x}) < z_j(\bar{x})$ se tiene $(z_i(\hat{x}) - z_i(\bar{x})) > M(z_j(\bar{x}) - z_j(\hat{x})) \Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, k\}, j \neq i, (z_i(\hat{x}) - z_i(\bar{x})) > ((k-1)\lambda_j / \lambda_i)(z_j(\bar{x}) - z_j(\hat{x}))$. Multiplicando ambos miembros de esta última expresión por $\lambda_i / (k-1)$ y sumando en $j \neq i$, se tiene: $\lambda_i(z_i(\hat{x}) - z_i(\bar{x})) > \sum_{j \neq i} \lambda_j(z_j(\bar{x}) - z_j(\hat{x})) \Rightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j(z_j(\bar{x}) - z_j(\hat{x})) < 0 \Rightarrow \exists \hat{x} \in X, \lambda' z(\bar{x}) < \lambda' z(\hat{x}) \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$. Luego, $\bar{x} \in E_p^P$. ■

Sin lugar a dudas, uno de los resultados tradicionales más importantes en la teoría del VP es el siguiente, debido a Geoffrion, en el que se caracteriza a las soluciones eficientes propias de un problema de programación vectorial convexa.

Teorema 1.4.7 ([Gf68], p. 620) Si P es un CVP entonces $E_p^P = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_k^0} S_{P_\lambda}$.

Demostración.

“ \supseteq ”

Por el Teorema 1.4.6.

“ \subseteq ”

Sea $\hat{x} \in E_p^P \Rightarrow \exists M \in R_{++}$ tal que $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, el sistema:

$$z_i(x) > z_i(\hat{x})$$

$$z_i(x) + Mz_j(x) > z_i(\hat{x}) + Mz_j(\hat{x}), \quad j \neq i$$

no tiene solución en X . Aplicando el teorema de Gordan generalizado¹

([Mn69], p. 65-66), para el i -ésimo sistema $\exists \mu^i \in R_+^k, \sum_{j=1}^k \mu_j^i = 1$, tal que:

$$\mu_i^i z_i(x) + \sum_{j \neq i} \mu_j^i (z_j(x) + Mz_j(x)) \leq \mu_i^i z_i(\hat{x}) + \sum_{j \neq i} \mu_j^i (z_j(\hat{x}) + Mz_j(\hat{x})), \quad \forall x \in X$$

o, equivalentemente:

$$z_i(x) + M \sum_{j \neq i} \mu_j^i z_j(x) \leq z_i(\hat{x}) + M \sum_{j \neq i} \mu_j^i z_j(\hat{x}), \quad \forall x \in X$$

Sumando sobre i y reordenando:

$$\sum_{j=1}^k \left(1 + M \sum_{i \neq j} \mu_j^i \right) z_j(x) \leq \sum_{j=1}^k \left(1 + M \sum_{i \neq j} \mu_j^i \right) z_j(\hat{x}), \quad \forall x \in X$$

Llamando λ_j a $1 + M \sum_{i \neq j} \mu_j^i$, se tiene: $\exists \lambda \in R_{++}^k, \lambda^t z(x) \leq \lambda^t z(\hat{x}), \quad \forall x \in X \Rightarrow$

$$\exists \lambda \in R_{++}^k, \hat{x} \in S_{P_\lambda} \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda_k^0, \hat{x} \in S_{P_\lambda}.$$

■

Con relación a las soluciones débilmente eficientes tenemos las siguientes propiedades:

Proposición 1.4.8 $\forall \lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$ se verifica que $S_{P_\lambda} \subseteq WE^P$.

Demostración. Sean $\lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$ y $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin WE^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in X, z(\hat{x}) > z(\bar{x}) \Rightarrow \lambda^t z(\hat{x}) > \lambda^t z(\bar{x}) \Rightarrow \#,$ pues $\bar{x} \in S_{P_\lambda} \Rightarrow \bar{x} \in WE^P$.

■

El siguiente resultado caracteriza a las soluciones débilmente eficientes de un problema de programación vectorial convexa.

Teorema 1.4.9 Si P es un CVP entonces $WE^P = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_k \setminus \{0\}} S_{P_\lambda}$.

Demostración.

“ \supseteq ”

Por la Proposición 1.4.8.

“ \subseteq ”

Sea $\bar{x} \in WE^P \Rightarrow$ el sistema $z(x) > z(\bar{x})$ no tiene solución en X . Aplicando el teorema de Gordan generalizado ([Mn69], p. 65-66) $\Rightarrow \exists \lambda \in R_+^k \setminus \{0\}, \forall x \in X,$

¹ Hablando a grosso modo, el siguiente teorema constituye una generalización del lema de Farkas:

Teorema de Gordan generalizado. Sea $X \subseteq R^n, X \neq \emptyset, X$ convexo y $z: R^n \rightarrow R^k$ cóncava. Entonces, $z(x) > 0$ no tiene solución en $X \Leftrightarrow \exists u \in R_+^k \setminus \{0\}, u^t z(x) \leq 0, \forall x \in X$.

$\lambda'(z(x) - z(\bar{x})) \leq 0 \Rightarrow \exists \lambda \in R_+^k \setminus \{0\}, \forall x \in X, \lambda' z(x) \leq \lambda' z(\bar{x}) \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda_+^k \setminus \{0\}, \bar{x} \in S_{P_\lambda}.$

■

Para el caso lineal, el resultado anterior aparece enunciado en [St86], Theorem 9.25.

Corolario 1.4.10 Si P es un CVP entonces $E^P \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda_+^k \setminus \{0\}} S_{P_\lambda}.$

Demostración. Inmediata, sin más que tener en cuenta que $E^P \subseteq WE^P.$

■

Obsérvese que puede ocurrir que $E^P = \emptyset$ y $WE^P \neq \emptyset.$ Efectivamente,

Ejemplo 1.4.11 Consideremos el problema $P \equiv \max\{(x_1, x_2) / x_1 \leq 1\}.$ Es claro que $E^P = \emptyset$ y, sin embargo, $\exists \lambda' = (1, 0) \in R_+^k \setminus \{0\}$ tal que $S_{P_\lambda} \neq \emptyset \Rightarrow WE^P \neq \emptyset.$

●

Sea el problema $(z, S_{P_\lambda}).$ Entonces, $E^{(z, S_{P_\lambda})}$ denotará al conjunto de soluciones óptimas de P_λ no dominadas según $z.$

Proposición 1.4.12 $\forall \lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$ se verifica que $E^{(z, S_{P_\lambda})} \subseteq E^P.$

Demostración. Sean $\lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$ y $\bar{x} \in E^{(z, S_{P_\lambda})}.$ Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in X, z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \lambda' z(\hat{x}) \geq \lambda' z(\bar{x}) \Rightarrow \hat{x} \in S_{P_\lambda}, z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \#,$ pues $\bar{x} \in E^{(z, S_{P_\lambda})}.$ Luego, $\bar{x} \in E^P.$

■

Corolario 1.4.13 Sea $\lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$ tal que $z(S_{P_\lambda}) = \{\bar{z}\}$ entonces $S_{P_\lambda} \subseteq E^P.$

Como, dado $i \in \{1, \dots, k\},$ el problema, $P_i \equiv \max\{z_i(x) / x \in X\}$ es una particularización de $P_\lambda,$ sin más que hacer $\lambda = e_i,$ son inmediatos los siguientes resultados:

Corolario 1.4.14 $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ se verifica que $S_{P_i} \subseteq WE^P.$

Corolario 1.4.15 $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ se verifica que $E^{(z, S_{P_i})} \subseteq E^P.$

Corolario 1.4.16 Sea $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $z(S_{P_i}) = \{\bar{z}\}.$ Entonces $S_{P_i} \subseteq E^P.$

Es interesante observar que cuando el parámetro utilizado para encontrar soluciones eficientes a través del problema ponderado no tiene todas sus componentes estrictamente positivas podemos proceder en *dos etapas*.

Teorema 1.4.17 Sean $\lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$, $P^* \equiv \max\{v^t z(x) / x \in S_{P_\lambda}\}$, donde $v_j = 1$ si $\lambda_j = 0$ y $v_j = 0$ si $\lambda_j > 0$. Entonces, $S_{P^*} \subseteq E^P$.

Demostración. Si $\lambda > 0$ el resultado es directo. En otro caso, supongamos $S_{P^*} \neq \emptyset$ y sea $\bar{x} \in S_{P^*}$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in X$, $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \lambda^t z(\hat{x}) \geq \lambda^t z(\bar{x}) \Rightarrow \hat{x} \in S_{P_\lambda}$. Como $\bar{x} \in S_{P^*} \Rightarrow v^t z(\hat{x}) \leq v^t z(\bar{x})$. Tomando $\bar{\lambda} = \lambda + v \in R_{+++}^k$, como también $\bar{x} \in S_{P_\lambda} \Rightarrow \bar{\lambda}^t z(\hat{x}) \leq \bar{\lambda}^t z(\bar{x}) \Rightarrow \#$, pues $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x})$. Luego, $\bar{x} \in E^P$. ■

Prestemos un poco de atención al caso especial que se obtiene si $k = 2$.

Sea $P^* \equiv \max\{z_2(x) / x \in S_{P_1}\}$.

Corolario 1.4.18 $S_{P^*} \subseteq E^P$.

También es posible obtener otra útil propiedad. Efectivamente, si denotamos por β_2 a $z_2(S_{P^*})$, podemos afirmar que:

Teorema 1.4.19 $z_2(E^P) \geq \beta_2$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{x} \in E^P$ tal que $\beta_2 > z_2(\bar{x}) \Rightarrow \exists \hat{x} \in S_{P_1}$, $z_2(\hat{x}) > z_2(\bar{x}) \Rightarrow z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in E^P$. ■

Luego, conjuntando los dos resultados anteriores, β_2 es ¡el valor mínimo para z_2 sobre la región eficiente! En la sección 3.6 de esta memoria trataremos en profundidad el problema de optimizar una función lineal sobre la región eficiente, siendo el cálculo de valores mínimos de las funciones objetivo sobre la región eficiente un caso especial.

Por último, y también para el problema bicriterio:

Proposición 1.4.20 Sea $i \in \{1, 2\}$ tal que $E^{(z, S_{P_i})} \neq \emptyset$. Entonces $z(E^{(z, S_{P_i})})$ es un conjunto unitario.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $i = 1$. Sea $\bar{x} \in E^{(z, S_{P_1})}$. Sea $\bar{z} = z(\bar{x})$. Entonces, $\forall \hat{x} \in E^{(z, S_{P_1})} \Rightarrow z_1(\hat{x}) = z_1(\bar{x})$, pues $\hat{x} \in S_{P_1}$. Además, $z_2(\hat{x}) = z_2(\bar{x})$, pues de lo contrario, $\bar{x} \notin E^{(z, S_{P_1})}$ o $\hat{x} \notin E^{(z, S_{P_1})}$. ■

1.4.2 Problema de la Norma Ponderada

Definición 1.4.21 Sean $\lambda \in R^k$ y $1 \leq p < \infty$. Al problema $\min \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i |z_i^I - z_i(x)|^p / x \in X \right\}$ se le denomina problema de la norma ponderada asociado a P y le denotaremos por $P_{\lambda, p}$.

Obviamente, $P_{\lambda, p}$ es una versión generalizada del problema ponderado P_λ , pues cuando $p = 1$, $P_{\lambda, p}$ se reduce a P_λ , supuesta la acotación de cada una de las funciones objetivo sobre la región factible.

Proposición 1.4.22 $\forall \lambda \in R_{++}^k$ se verifica que $S_{P_{\lambda, p}} \subseteq E^P$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in S_{P_{\lambda, p}} \Rightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(|z_i^I - z_i(x)|^p - |z_i^I - z_i(\bar{x})|^p \right) \geq 0, \forall x \in X$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in X, z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow |z^I - z(\hat{x})|^p \leq |z^I - z(\bar{x})|^p$. Como $\lambda \in R_{++}^k \Rightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(|z_i^I - z_i(\hat{x})|^p - |z_i^I - z_i(\bar{x})|^p \right) < 0 \Rightarrow \#$, luego $\bar{x} \in E^P$. ■

Análogamente se puede probar que:

Proposición 1.4.23 $\forall \lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$ se verifica que $S_{P_{\lambda, p}} \subseteq WE^P$.

Igual que para el problema paramétrico, se verifica que las soluciones no dominadas de $z(S_{P_{\lambda, p}})$ también son no dominadas en $Z = z(X)$.

Proposición 1.4.24 $\forall \lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$ se verifica que $E^{(z, S_{P_{\lambda, p}})} \subseteq E^P$.

Demostración. Sea $\lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$. Sea $\bar{x} \in E^{(z, S_{P_{\lambda, p}})} \Rightarrow \bar{x} \in S_{P_{\lambda, p}} \Rightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(|z_i^I - z_i(x)|^p - |z_i^I - z_i(\bar{x})|^p \right) \geq 0, \forall x \in X$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in X, z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow |z^I - z(\hat{x})|^p \leq |z^I - z(\bar{x})|^p \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \left(|z_i^I - z_i(\hat{x})|^p - |z_i^I - z_i(\bar{x})|^p \right) \leq 0 \Rightarrow \hat{x} \in S_{P_{\lambda,p}}, \quad z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \#, \text{ pues}$$

$$\bar{x} \in E^{(z, S_{P_{\lambda,p}})} \Rightarrow \bar{x} \in E^P. \quad \blacksquare$$

De manera inmediata concluimos que:

Corolario 1.4.25 Sea $\lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$ tal que $z(S_{P_{\lambda,p}}) = \{\bar{z}\}$. Entonces $S_{P_{\lambda,p}} \subseteq E^P$.

1.4.3 Problema ε -Restringido con Maximización del i -ésimo Objetivo

Definición 1.4.26 Sean $\varepsilon \in R^k$ e $i \in \{1, \dots, k\}$. Al problema $\max\{z_i(x) / x \in X, z_j(x) \geq \varepsilon_j, \forall j \neq i\}$ se le conoce con el nombre de problema ε -restringido con maximización del i -ésimo objetivo asociado a P , y le denotaremos por $P_i(\varepsilon)$.

El siguiente resultado no reviste dificultad:

Proposición 1.4.27 $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ se verifica que $S_{P_i(\varepsilon)} \subseteq WE^P$.

En general, dado $\bar{x} \in X$ denotaremos su imagen a través de z por \bar{z} ($= z(\bar{x})$).

Proposición 1.4.28 $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ se verifica que $\bar{x} \in S_{P_i(\bar{z})}$.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists i \in \{1, \dots, k\}, \bar{x} \notin S_{P_i(\bar{z})} \Rightarrow \exists x \in X, z_i(x) > z_i(\bar{x}), z_j(x) \geq z_j(\bar{x}), \forall j \neq i \Rightarrow z(x) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \#, \text{ pues } \bar{x} \in E^P$.

“ \Leftarrow ”

Como $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \bar{x} \in S_{P_i(\bar{z})} \Rightarrow \exists x \in X, z(x) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} \in E^P$. ■

Proposición 1.4.29 $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ se verifica que $E^{(z, S_{P_i(\varepsilon)})} \subseteq E^P$.

Demostración. Sea $\hat{x} \in E^{(z, S_{P_i(\varepsilon)})}$. Supongamos por reducción al absurdo que $\hat{x} \notin E^P \Rightarrow \exists x \in X, z(x) \geq z(\hat{x}) \Rightarrow z_j(x) \geq \varepsilon_j, \forall j \neq i$. Ahora bien, como $\hat{x} \in S_{P_i(\varepsilon)} \Rightarrow z_i(x) = z_i(\hat{x}) \Rightarrow x \in S_{P_i(\varepsilon)}, z(x) \geq z(\hat{x}) \Rightarrow \#, \text{ pues } \hat{x} \in E^{(z, S_{P_i(\varepsilon)})}$. ■

Corolario 1.4.30 Sea $i \in \{1, \dots, k\}$. Si $z(S_{P_i(\varepsilon)}) = \{\bar{z}\}$ entonces $S_{P_i(\varepsilon)} \subseteq E^P$.

Veamos que relaciones existen entre P_λ y $P_i(\varepsilon)$.

Proposición 1.4.31 Sea $\lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$. Entonces $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\lambda_i > 0$ y $\forall \bar{x} \in S_{P_\lambda}$ se tiene que $\bar{x} \in S_{P_i(\bar{\varepsilon})}$.

Demostración. Sean $\lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$, con $\lambda_i > 0$ para cierto $i \in \{1, \dots, k\}$ y $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin S_{P_i(\bar{\varepsilon})} \Rightarrow \exists \hat{x} \in X$, $z_i(\hat{x}) > z_i(\bar{x})$, $z_j(\hat{x}) \geq z_j(\bar{x})$, $\forall j \neq i \Rightarrow \lambda^t(z(\hat{x}) - z(\bar{x})) > 0 \Rightarrow \lambda^t z(\hat{x}) > \lambda^t z(\bar{x}) \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$. Luego $\bar{x} \in S_{P_i(\bar{\varepsilon})}$. ■

Proposición 1.4.32 Sea $\lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$. Si $z(S_{P_\lambda}) = \{\bar{z}\}$ entonces $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ se verifica que $S_{P_\lambda} \subseteq S_{P_i(\bar{\varepsilon})}$.

Demostración. Directa combinando el Corolario 1.4.16 y la Proposición 1.4.28. ■

Teorema 1.4.33 Sea $i \in \{1, \dots, k\}$. Si P es un CVP y $\bar{x} \in S_{P_i(\varepsilon)}$ entonces $\exists \lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$ tal que $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$.

Demostración. Directa aplicando la Proposición 1.4.27 y el Teorema 1.4.9. ■

1.4.4 Problema de Maximización de Holguras

Definición 1.4.34 Sea $\alpha \in R^k$. Al problema $\max\{e^t s / z(x) - s = \alpha, x \in X, s \in R_+^k\}$ se le conoce con el nombre de problema de maximización de holguras asociado a P y a α , y le denotaremos por $P(\alpha)$.

El problema de maximización de holguras constituye una de las principales escalarizaciones del problema vectorial, como tendremos ocasión de comprobar a lo largo de esta memoria.

Teorema 1.4.35 Si $(\bar{x}^t, \bar{s}^t) \in S_{P(\alpha)}$ entonces $\bar{x} \in E^P$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in X$, $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \geq \alpha$. Sea $\hat{s} = z(\hat{x}) - \alpha \Rightarrow \hat{s} \geq 0$ y $\hat{s} \geq \bar{s} \Rightarrow (\hat{x}^t, \hat{s}^t) \in X^{P(\alpha)}$, $e^t \hat{s} > e^t \bar{s} \Rightarrow (\bar{x}^t, \bar{s}^t) \notin S_{P(\alpha)} \Rightarrow \#$, luego $\bar{x} \in E^P$. ■

El siguiente resultado nos proporciona una idea (lamentablemente, basada sólo en una condición suficiente) para hallar una solución eficiente de un VP.

Sean $\bar{x} \in X$ y $\bar{z} = z(\bar{x}) \in R^k$.

Corolario 1.4.36 ([Bn78], Theorem 3.2, [WnLee77], Theorem 2)² Si $(\hat{x}^t, \hat{s}^t) \in S_{P(\bar{z})}$ entonces $\hat{x} \in E^P$.

Efectivamente, el procedimiento se puede concretar en encontrar una solución factible $\bar{x} \in X$ y resolver $P(\bar{z})$. Entonces, si el problema es acotado, cualquier solución óptima será eficiente. Sin embargo, si $P(\bar{z})$ es no acotado no podemos concluir que $E^P = \emptyset$.

La importancia de la siguiente caracterización viene dada en que se basa en la resolución de un único problema escalar relativamente sencillo.

Teorema 1.4.37 ([Bn78], Theorem 3.1, [WnLee77], Theorem 1)³ $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, $P(\bar{z})$ es acotado, con valor objetivo óptimo 0.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Es evidente que $P(\bar{z})$ es factible, pues $(\bar{x}^t, 0^t) \in X^{P(\bar{z})}$. Supongamos por reducción al absurdo que $P(\bar{z})$ es no acotado, o acotado con valor objetivo óptimo mayor que 0. En ambos casos, $\exists \hat{x} \in X$, $\exists \hat{s} \in R_+^k$, $e^t \hat{s} > 0 \Rightarrow \hat{s} \geq 0 \Rightarrow z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in E^P$.

“ \Leftarrow ”

$P(\bar{z})$ es acotado, con valor objetivo óptimo 0 $\Rightarrow (\bar{x}^t, 0^t) \in S_{P(\bar{z})}$. Ahora por el Corolario 1.4.36 $\Rightarrow \bar{x} \in E^P$. ■

Corolario 1.4.38 $E^P = \emptyset$ si, y sólo si, $\forall \alpha \in R^k$, $P(\alpha)$ es no factible o no acotado.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \alpha \in R^k$, $P(\alpha)$ es acotado. Sea $(\bar{x}^t, \bar{s}^t) \in S_{P(\alpha)}$. Por el Teorema 1.4.35 $\Rightarrow \bar{x} \in E^P \Rightarrow \#$, pues $E^P = \emptyset$.

² Para el caso lineal, ver [EcKd75], Theorem 1.

³ En [Is74], Lemma 1, se cita un resultado análogo a éste para el caso lineal, el cual está referenciado a un artículo de Charnes y Cooper de ¡1961!.

“ \Leftarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $E^P \neq \emptyset \Rightarrow \exists \bar{x} \in E^P$. Por el Teorema 1.4.37 $\Rightarrow \exists \alpha = z(\bar{x}) \in R^k$, $P(\alpha)$ es acotado, con valor objetivo óptimo $0 \Rightarrow \#$. ■

El problema de maximización de holguras se puede especializar para que sea de utilidad en el cálculo de soluciones débilmente eficientes. Efectivamente, una opción consiste en considerar el siguiente problema propuesto por Benson ([Bn86], p. 194): $\max\{s / z(x) - es \geq \alpha, x \in X, s \in R_+\}$, y al que denotaremos por $\dot{P}(\alpha)$.

Teorema 1.4.39 Si $(\bar{x}^t, \bar{s}^t) \in S_{\dot{P}(\alpha)}$ entonces $\bar{x} \in WE^P$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin WE^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in X$, $z(\hat{x}) > z(\bar{x}) \geq \alpha$. Sea $\hat{s} = \min_{1 \leq i \leq k} \{z_i(\hat{x}) - \alpha_i\} \Rightarrow \hat{s} > 0$, $\hat{s} > \bar{s} \Rightarrow (\hat{x}^t, \hat{s}^t) \in X^{\dot{P}(\alpha)}$, $\hat{s} > \bar{s} \Rightarrow (\bar{x}^t, \bar{s}^t) \notin S_{\dot{P}(\alpha)} \Rightarrow \#$, luego $\bar{x} \in WE^P$. ■

Sean $\bar{x} \in X$, $\bar{z} = z(\bar{x}) \in R^k$. El Teorema 1.4.39 muestra que si el problema $\dot{P}(\bar{z})$ es acotado (factible seguro que es), entonces cualquier solución óptima del mismo es débilmente eficiente.

La siguiente caracterización para soluciones débilmente eficientes es de gran utilidad debido a su sencillez y fácil implementación.

Teorema 1.4.40 ([Bn86], Theorem 3) $\bar{x} \in WE^P$ si, y sólo si, $\dot{P}(\bar{z})$ es acotado, con valor objetivo óptimo 0 .

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Es evidente que $\dot{P}(\bar{z})$ es factible, pues $(\bar{x}^t, 0^t) \in X^{\dot{P}(\bar{z})}$. Supongamos por reducción al absurdo que $\dot{P}(\bar{z})$ es no acotado, o acotado con valor objetivo óptimo mayor que 0 . En ambos casos, $\exists \hat{x} \in X$, $\exists \hat{s} \in R_{++}$, $z(\hat{x}) - es \geq z(\bar{x}) \Rightarrow z(\hat{x}) > z(\bar{x}) \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in WE^P$.

“ \Leftarrow ”

$\dot{P}(\bar{z})$ es acotado, con valor objetivo óptimo $0 \Rightarrow (\bar{x}^t, 0^t) \in S_{\dot{P}(\bar{z})} \Rightarrow \bar{x} \in WE^P$. ■

Corolario 1.4.41 $WE^P = \emptyset$ si, y sólo si $\forall \alpha \in R^k$, $\dot{P}(\alpha)$ es no factible o no acotado.

Demostración.“ \Rightarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \alpha \in R^k$, $\dot{P}(\alpha)$ es acotado. Sea $(\bar{x}^t, \bar{s}^t) \in S_{\dot{P}(\alpha)} \Rightarrow \bar{x} \in WE^P \Rightarrow \#,$ pues $WE^P = \emptyset$.

“ \Leftarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $WE^P \neq \emptyset \Rightarrow \exists \bar{x} \in WE^P$. Por el Teorema 1.4.40 $\Rightarrow \exists \alpha = z(\bar{x}) \in R^k$, $\dot{P}(\alpha)$ es acotado, con valor objetivo óptimo $0 \Rightarrow \#$. ■

1.4.5 Problema Paramétrico-Restringido

Definición 1.4.42 ([ChHm83], p. 148) Sean $\lambda, \alpha \in R^k$. Al problema $\max\{\lambda^t z(x) / x \in X, z(x) \geq \alpha\}$ se le conoce con el nombre de problema híbrido o paramétrico-restringido asociado a P , y le denotaremos por $P_{\lambda, \alpha}$.

El problema $P_{\lambda, \alpha}$ combina las ventajas del problema P_λ (optimización escalar) y del problema $P(\alpha)$ (región factible restringida).

Por otra parte, dado $\bar{x} \in X$ con $\bar{z} = z(\bar{x}) \in R^k$, el problema $P_{\lambda, \bar{z}}$ se puede ver como una generalización de $P_i(\bar{z})$ sin más que tomar $\lambda = e_i$. Además, los problemas $P_{\lambda, \alpha}$ y $P(\alpha)$ tienen una estructura muy parecida (el primero constituye una generalización del segundo), verificándose que $S_{P_{e, \alpha}} = S_{P(\alpha)}$.

Consideremos, a partir de ahora, $\lambda \in R_{++}^k$.

Teorema 1.4.43 $S_{P_{\lambda, \alpha}} \subseteq E^P$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in S_{P_{\lambda, \alpha}}$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in X$, $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \geq \alpha \Rightarrow \hat{x} \in X^{P_{\lambda, \alpha}}$, $\lambda^t z(\hat{x}) > \lambda^t z(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} \notin S_{P_{\lambda, \alpha}} \Rightarrow \#,$ luego $\bar{x} \in E^P$. ■

El resultado dado anteriormente nos proporciona una condición suficiente para hallar una solución eficiente de un VP, sin más que tener en cuenta que $S_{P_{\lambda, \bar{z}}} \subseteq E^P$, $\forall \bar{x} \in X$.

Una condición necesaria y suficiente para que una solución sea eficiente en función del problema $P_{\lambda, \alpha}$ es:

Teorema 1.4.44 $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, $\bar{x} \in S_{P_{\lambda, \bar{z}}}$.

Demostración.“ \Rightarrow ”

Como $\bar{x} \in X$ y $z(\bar{x}) \geq \bar{z} \Rightarrow \bar{x}$ es factible para $P_{\lambda, \bar{z}}$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin S_{P_{\lambda, \bar{z}}} \Rightarrow \exists \hat{x} \in X$, $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x})$, $\lambda' z(\hat{x}) > \lambda' z(\bar{x})$. Como $\lambda > 0 \Rightarrow z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} \notin E^P \Rightarrow \#$.

“ \Leftarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in X$, $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow z(\hat{x}) \geq z(\bar{x})$, $\lambda' z(\hat{x}) > \lambda' z(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} \notin S_{P_{\lambda, \bar{z}}} \Rightarrow \#$.

■

Corolario 1.4.45 $E^P = \emptyset$ si, y sólo si, $\forall \alpha \in R^k$, $P_{\lambda, \alpha}$ es no factible o no acotado.

Demostración.“ \Rightarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \alpha \in R^k$, $P_{\lambda, \alpha}$ es acotado. Por el Teorema 1.4.43 $\Rightarrow \emptyset \neq S_{P_{\lambda, \alpha}} \subseteq E^P \Rightarrow \#$.

“ \Leftarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $E^P \neq \emptyset \Rightarrow \exists \bar{x} \in E^P$. Por el Teorema 1.4.44 $\Rightarrow \exists \alpha = z(\bar{x}) \in R^k$, $\bar{x} \in S_{P_{\lambda, \alpha}} \Rightarrow \#$.

■

1.5 Clasificación de los VP

En esta sección damos una clasificación para los problemas de programación vectorial, la cual se puede considerar una generalización de su contrapartida escalar, sin más que tener en cuenta que el concepto de solución eficiente para un VP es la *extensión natural* del concepto de solución óptima de un SP. Existen clasificaciones alternativas a la aquí presentada, como las formuladas por Evans y Steuer ([EvSt73]), Steuer ([St86]) o Isermann ([Is76]).

Sea P un VP formulado según (1.4). Consideremos, en primer lugar, las siguientes definiciones:

Definición 1.5.1 P es no factible si, y sólo si, $X = \emptyset$.

Definición 1.5.2 P es (débilmente) acotado si, y sólo si, $E^P \neq \emptyset$ ($WE^P \neq \emptyset$).

Obsérvese que la acotación de P es independiente de la acotación o no de E^P .

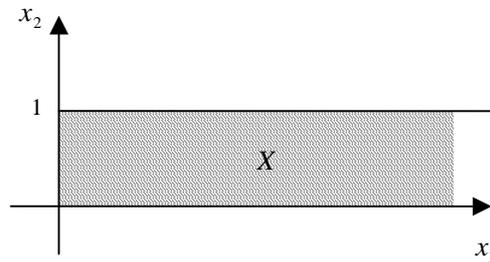


Figura 1.1

Definición 1.5.3 P es no (débilmente) acotado si, y sólo si, $X \neq \emptyset$ y $E^P = \emptyset$ ($WE^P = \emptyset$).

La siguiente es una clasificación exhaustiva y mutuamente excluyente de los problemas de programación vectorial.

Proposición 1.5.4 Si P es un VP entonces siempre se da sólo uno de los siguientes casos: (i) P es no factible, (ii) P es (débilmente) acotado, (iii) P es no (débilmente) acotado.

No queremos dejar de mencionar que la clasificación de Isermann ([Is76], Definition 3), propuesta para el caso lineal, puede comprobarse que es formalmente equivalente a la aquí presentada.

Las siguientes propiedades son inmediatas:

Proposición 1.5.5 Si X es acotado entonces P es (débilmente) acotado.

Es claro que el recíproco no es cierto en general, como pone de manifiesto el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 1.5.6 Consideremos el problema $P \equiv \max\{-x_1, x_2\} / x_2 \leq 1, x \in \mathbb{R}_+^2$. Es evidente que X es no acotado (Figura 1.1) y, sin embargo, $E^P = \{(1, 1)\}$.

Como $E^P \subseteq WE^P$, tenemos:

Proposición 1.5.7 Si P es acotado entonces P es débilmente acotado.

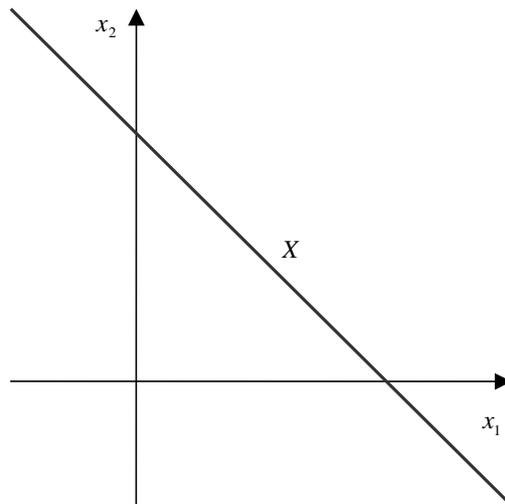


Figura 1.2

Sin embargo, el recíproco puede que no se dé, es decir, un problema puede ser débilmente acotado y no acotado, simultáneamente.

Ejemplo 1.5.8 Consideremos el problema $P \equiv \max\{x/x_2 \leq 1, x \in R_+^2\}$. La región factible de este ejemplo coincide con la del Ejemplo 1.5.6 (ver Figura 1.1 para su representación gráfica). Evidentemente, $E^P = \emptyset$, pero $WE^P \neq \emptyset$ pues $\exists \lambda = (0, 1)^t \in R_+^2$ tal que $S_{P_\lambda} = R_+ \times \{1\}$.

●

Proposición 1.5.9 Si $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $P_i \equiv \max\{z_i(x) / x \in X\}$ es acotado entonces P es (débilmente) acotado.

Demostración. Como $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, P_i es acotado $\Rightarrow \exists z^i \in R^k$, $\forall z \in Z = z(X)$, $z \leq z^i \Rightarrow \forall \lambda \in R_{++}^k$, $\forall z \in Z$, $\lambda^t z \leq \lambda^t z^i \Rightarrow \forall \lambda \in R_{++}^k$, P_λ es acotado $\Rightarrow E^P \neq \emptyset$.

■

No es cierto que si P es (débilmente) acotado entonces $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ tal que P_i es acotado. Efectivamente:

Ejemplo 1.5.10 Consideremos el problema $P \equiv \max\{x/x_1 + x_2 = 1, x \in R^2\}$ cuya región factible se representa en la Figura 1.2. Evidentemente, $E^P = WE^P = X = \{x \in R^2 / x_1 + x_2 = 1\}$ y, sin embargo, z_1 y z_2 son no acotadas en X .

●

Adicionalmente también podemos escribir los siguientes resultados:

Corolario 1.5.11 Si P es no acotado entonces $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ tal que P_i es no acotado.

Proposición 1.5.12 Si $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ tal que P_i es acotado entonces P es débilmente acotado.

Demostración. Si $\exists i \in \{1, \dots, k\}$, P_i es acotado $\Rightarrow S_{P_i} \neq \emptyset$. Ahora, por el Corolario 1.4.14 $\Rightarrow WE^P \neq \emptyset$. ■

Corolario 1.5.13 Si P es no débilmente acotado entonces $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ se verifica que P_i es no acotado.

1.6 El Problema de Programación Vectorial Lineal

El problema de programación vectorial (1.4) se dice que es un problema de programación vectorial lineal, denotado por LVP (acrónimo de Linear Vector Program), cuando cada función objetivo es lineal y la región factible es un poliedro.

El LVP ha atraído a lo largo del tiempo una considerable atención, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Por una parte, su adecuación a una gran cantidad de situaciones del mundo real está fuera de toda duda y, por otro lado, su estructura especial permite elegantes y útiles desarrollos teóricos y algorítmicos que, lamentablemente, no son posibles en los problemas de programación vectorial de índole más general.

En esta sección introduciremos la notación y terminología asociada a los modelos LVP.

Convendremos en que la *formulación matemática estándar* de un LVP, es la siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \max(\text{imizar}) \quad z(x) = Cx \\ \text{s.a: } \quad x \in X = \{x \in R_+^n / Ax=b\} \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

donde $A = \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_m^t \end{pmatrix} \in R^{m \times n}$, es la *matriz de restricciones*, $b \in R^m$, el *vector de*

recursos, y $C = \begin{pmatrix} c_1^t \\ \vdots \\ c_k^t \end{pmatrix} \in R^{k \times n}$, la *matriz criterio o de costos*.

Supondremos, sin pérdida de generalidad, que A es una matriz regular por filas, es decir, de rango m , lo cual se traduce, en términos

prácticos, en que todas las restricciones redundantes han sido eliminadas ([Hd62], p. 123).

Sea P el LVP formulado en (1.5). Consideraremos que la terna (m, n, k) nos da la *dimensión* o *tamaño* del problema P .

De la descripción de P se desprende que si $X \neq \emptyset$ entonces X es apuntado ([Mr83], Theorem 3.2).

La región objetivo viene dada por:

$$z(X) = \{ Cx / x \in X \} \tag{1.6}$$

Es conocido que $z(X)$ es un poliedro (ver [Rc70], Theorem 19.3).

1.6.1 Nomenclatura

Dado un poliedro X arbitrario, a partir de ahora utilizaremos la siguiente notación:

- X_{xp} \leftrightarrow conjunto de puntos extremos de X ,
- X_{xd} \leftrightarrow conjunto de direcciones extremas de X ,
- X_e \leftrightarrow conjunto de aristas de X ,
- X_{xr} \leftrightarrow conjunto de rayos extremos (aristas no acotadas) de X ,
- X_f^q \leftrightarrow conjunto de caras de X de dimensión q y
- X_f \leftrightarrow conjunto de todas las caras de X .

Ahora son claros los siguientes resultados: $X_f^0 = X_{xp}$, $X_f^1 = X_e$,

$$X_{xr} \subseteq X_e \text{ y } X_f = \bigcup_{q=0}^{\dim(X)} X_f^q.$$

Dado $\bar{x} \in X_{xp}$, sea $B(\bar{x})$ el conjunto de todas las bases de A asociadas a \bar{x} . Sabemos que en el caso de no degeneración, este conjunto es unitario ([Mr83], p. 325).

Definición 1.6.1 ([St86], Definition 7.3) *Se llama cono criterio o cono gradiente de problema P , y lo denotaremos por $V(C)$, al cono generado por los k gradientes de las funciones objetivo $(\{c_1, \dots, c_k\})$, es decir, $V(C) = \{v \in R^n / v^t = \lambda^t C, \lambda \in R_+^k\} = \left\{ v \in R^n / v = \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i, \lambda_i \geq 0 \forall i \right\}$.*

La importancia del cono criterio viene dada porque es un indicador del tamaño de la región eficiente del problema y de la dificultad que,

probablemente, tendremos a la hora de resolver el mismo. En general, se considera ([St86], p. 177) que cuanto más grande es el cono criterio mayor es E^P . Además, está íntimamente relacionado con la existencia y conexión de las soluciones eficientes.

Definición 1.6.2 ([Bt80], p. 696) *Si consideramos como soluciones de P a E^P (WE^P), se llama cono de preferencias o de dominación (débil) para la matriz C al cono polar semipositivo (positivo) del cono generado por las filas de C , es decir, al conjunto $C^{\geq} = \{d \in R^n / Cd \geq 0\} \cup \{0\}$ ($C^> = \{d \in R^n / Cd > 0\} \cup \{0\}$).*

Los conos de preferencias juegan un importante papel en la programación vectorial, pues proporcionan una interpretación geométrica valiosa. En general, cuanto más pequeño sea el cono de preferencias mayor será E^P .

A los elementos no nulos del cono de preferencias (débil) se les denomina *direcciones de preferencia o de mejora o de dominación (débil) de P* pues dados $x^1 \in X$, $d \in C^{\geq}$ ($d \in C^>$), si $x^2 = x^1 + d$ entonces $Cx^2 \geq Cx^1$ ($Cx^2 > Cx^1$) y, en este caso, se dice que x^2 *domina (débilmente) a x^1 en la dirección d* ([Bt77], p. 123).

Definición 1.6.3 ([St86], Definition 6.15) *Sea $\bar{x} \in X$. Se llama conjunto de dominación (débil) de \bar{x} , y se denota por $D_{\bar{x}}$ ($WD_{\bar{x}}$) a $\bar{x} + C^{\geq} = \{\bar{x} + d \in R^n / d \in C^{\geq}\}$ ($\bar{x} + C^> = \{\bar{x} + d \in R^n / d \in C^>\}$).*

Debido a la estructura especial que presenta la región factible de un LVP (poliedro) es posible, y conveniente, hacer distinciones entre los elementos de la frontera eficiente. Así:

Definición 1.6.4 *Un vector x se dice que es un punto extremo o vértice (débilmente) eficiente del problema P si, y sólo si, $x \in X_{xp} \cap E^P$ ($x \in X_{xp} \cap WE^P$).*

Al conjunto de todos los puntos extremos (débilmente) eficientes del problema P lo denotaremos por E_{xp}^P (WE_{xp}^P).

De análoga manera, las siguientes definiciones, dadas para el caso eficiente, se extienden de forma inmediata para el caso débilmente eficiente.

Definición 1.6.5 $\delta \in X_e$ *se dice que es una arista eficiente del problema P si, y sólo si, cualquier punto de la arista es eficiente, es decir, $\delta \subseteq E^P$.*

El conjunto de las aristas eficientes del problema P lo denotaremos por E_e^P .

Como las aristas del problema pueden ser acotadas (bounded edges) o no acotadas (unbounded edges), parece lógico que también las distingamos en E_e^P utilizando, respectivamente, la siguiente notación: E_{be}^P y E_{ue}^P .

Definición 1.6.6 r es un rayo extremo eficiente del problema P si, y sólo si, (i) $r \in X_{xr}$ y (ii) $r \subseteq E^P$.

Al conjunto de todos los rayos extremos eficientes del problema P lo denotaremos por E_{xr}^P .

Es directo el siguiente resultado:

Proposición 1.6.7 $E_{xr}^P = E_{ue}^P$.

Definición 1.6.8 d es una dirección extrema eficiente del problema P si, y sólo si, $\exists r = \{\bar{x} + \lambda d / \lambda \in R_+\} \in E_{xr}^P$.

El conjunto de las direcciones extremas eficientes lo especificaremos por E_{xd}^P .

Definición 1.6.9 Sean $x^1, x^2 \in E_{xp}^P$. Se dice que x^1 y x^2 son E -adyacentes si, y sólo si, (i) x^1 y x^2 son adyacentes y (ii) la arista que los une ($CVH(\{x^1, x^2\})$) es eficiente.

El hecho de que x^1 y x^2 sean E -adyacentes lo denotaremos por $x^1 \sim_E x^2$.

La Definición 1.6.9 es equivalente a las dadas en [Gal77] (Definition 2.6), [Is77a] (Definition. 3), [ChHm83] (p. 242), [St86] (Definition 9.22) y es ligeramente diferente de las utilizadas en [Zl74] y [Zl82], donde sólo se exige que ambos vértices sean adyacentes y eficientes. Conviene advertir que este matiz es importante porque es posible que dos vértices sean adyacentes y eficientes pero no E -adyacentes, como se ilustrará en el Ejemplo 2.5.10.

En general, si $F \in X_f$, entonces:

Definición 1.6.10 F es una cara eficiente del problema P si, y sólo si, cualquier punto de la cara es eficiente, es decir, $F \subseteq E^P$.

El conjunto de las caras eficientes lo denotaremos por E_f^P .

Definición 1.6.11 F es una cara eficiente maximal del problema P si, y sólo si, F es un elemento maximal del conjunto de las caras eficientes de X ordenadas según la inclusión de conjuntos, es decir, i) $F \in E_f^P$ y ii) $\nexists F' \in E_f^P, F \subset F'$.

El conjunto de las caras eficientes maximales de P lo denotaremos por E_{mf}^P .

Nótese que no todas las caras eficientes maximales de un LVP tienen que ser de la misma dimensión.

En programación vectorial lineal, el conjunto E^P , se suele dar (ver sección 1.7) como la unión de todas las caras eficientes maximales de P , las cuales quedan caracterizadas por sus puntos y/o rayos extremos.

Sea $\bar{x} \in E_{xp}^P$. Denotaremos por $E_e^P(\bar{x})$, $E_{be}^P(\bar{x})$, $E_{ue}^P(\bar{x})$, $E_f^P(\bar{x})$ y $E_{mf}^P(\bar{x})$, respectivamente, a los conjuntos de aristas eficientes, aristas eficientes acotadas, aristas eficientes no acotadas, caras eficientes y caras eficientes maximales, incidentes en \bar{x} .

Vamos a ilustrar algunos de los conceptos dados con el siguiente ejemplo extraído de [Jr92], p.100:

Ejemplo 1.6.12 Consideremos el problema:

$$P \equiv \max \left\{ x / \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in R_+^3 \right\}$$

Teniendo en cuenta la representación gráfica de la región factible (ver Figura 1.3), y denotando por $CVH(\cdot)$ la envolvente convexa de un conjunto de puntos, es claro que:

$$\begin{aligned} E^P &= E_e^P = E_{be}^P = CVH(\{x^2, x^3\}), & E_{xp}^P &= \{x^2, x^3\}, & E_{ue}^P &= \emptyset, & WE^P &= \\ &CVH(\{x^1, x^2, x^7, x^8\}) \cup CVH(\{x^2, x^3, x^6, x^7\}) \cup & & & & & & \\ &CVH(\{x^3, x^4, x^5, x^6\}) \cup CVH(\{x^1, x^2, x^3, x^4, x^9\}) & \text{ y } & WE_{xp}^P &= \\ &\{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9\}. & & & & & & \bullet \end{aligned}$$

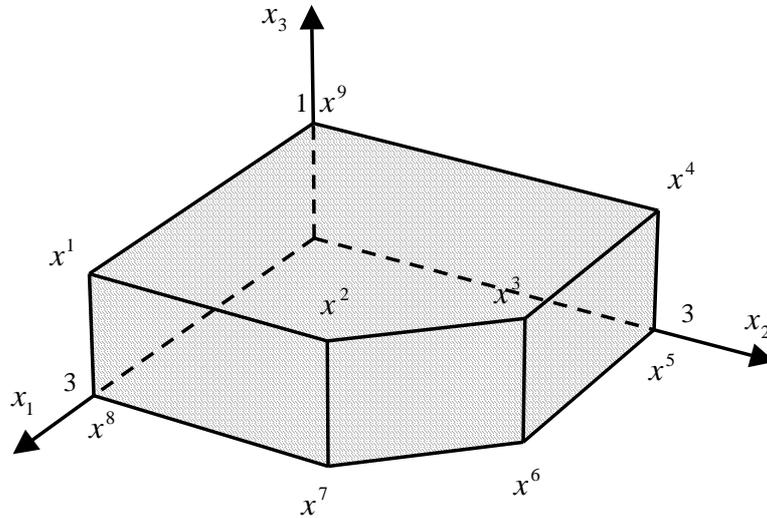


Figura 1.3

Sean $B \in B(\bar{x})$ y $R = C^B B^{-1} N - C^N \in R^{k \times (n-m)}$, la correspondiente matriz de costos reducidos.

Definición 1.6.13 ([Gal77], Definition 2.5, [ArMl91], p. 471) *Se dice que B es una base eficiente si la solución factible básica (s.f.b.) asociada es eficiente.*

Al conjunto de todas las bases eficientes del problema P lo denotaremos por E_B^P . Claramente, el conjunto de bases eficientes asociada a \bar{x} , denotado por $E_B^P(\bar{x})$, viene dado por $B(\bar{x}) \cap E_B^P$.

Definición 1.6.14 ([ArMl91], p. 471)¹ *Una base eficiente B se dice que es dual-eficiente si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k$ tal que $\lambda' R \geq 0$. Cuando sea conocido λ diremos que B es una base λ -dual-eficiente.*

Al conjunto de todas las bases duales-eficientes del problema P lo denotaremos por E_{DB}^P . Por la definición, $E_{DB}^P \subseteq E_B^P$.

¹ Equivalente a la definición de base factible dual dada en [Is77], Definition 5. Algunos autores como Steuer ([St86], Definition 9.9) y Hartley ([Hr83], p. 5) lo denominan base eficiente.

Utilizando el mismo estilo de notación, al conjunto de bases duales-eficientes asociadas a \bar{x} lo denominaremos $E_{DB}^P(\bar{x})$. Evidentemente, $E_{DB}^P(\bar{x}) = B(\bar{x}) \cap E_{DB}^P$.

La importancia del concepto de base dual-eficiente se entenderá más adelante cuando se den las caracterizaciones de eficiencia asociadas a soluciones factibles básicas (capítulo 2) y se estudie la dualidad (capítulo 3).

Veremos que si no hay degeneración los conceptos de base eficiente y dual-eficiente coinciden ($E_B^P = E_{DB}^P$), pero que si \bar{x} es una solución factible básica degenerada, no todas sus bases asociadas tienen que ser duales eficientes (aunque, al menos, una sí, es decir, $E_B^P(\bar{x}) \cap E_{DB}^P(\bar{x}) \neq \emptyset$).

Si designamos por $I(B)$ a $\{\lambda \in R_+^k / \lambda' R \geq 0\}$, entonces $B \in E_{DB}^P$ si, y sólo si $I(B) \neq \emptyset$. A $I(B)$ se le conoce como región de indiferencia asociada a la base B .

1.6.2 El LVP Expresado en Formato de Tabla

Dado el problema $P \equiv \max\{Cx / Ax = b, x \in R_+^n\}$ y una base B de A ($= [B \ N]$), sean $J_B, J_N \subseteq J = \{1, \dots, n\}$ los conjuntos de índices asociados a las variables básicas y no básicas, respectivamente, y denotemos por x_B (x_N) a las variables básicas (no básicas) de x . Designando por C^B (C^N) las columnas de C asociadas a J_B (J_N) entonces P se puede reescribir como:

$$\left. \begin{array}{l} \max z \\ \text{s. a :} \\ (B, N, 0_{m \times k}) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \\ z - (C^B, C^N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = 0_{k \times 1} \\ x_B \geq 0, x_N \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1.7)$$

Los datos del problema anterior admiten la expresión matricial siguiente:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{pmatrix} B & N & 0_{m \times k} \\ -C^B & -C^N & I_{k \times k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{m \times 1} \\ 0_{k \times 1} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

El sistema (1.8) lo podemos transformar de forma equivalente en:

$$\begin{array}{l} (1') \\ (2') \end{array} \begin{pmatrix} I_{m \times m} & B^{-1}N & 0_{m \times k} \\ 0_{k \times m} & C^B B^{-1}N - C^N & I_{k \times k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b_{m \times 1} \\ C^B B^{-1}b_{k \times 1} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

donde $(1') = B^{-1}(1)$ y $(2') = (2) + C^B(1')$.

Utilizando un formato de tablas, obtendríamos lo que se conoce como *tabla canónica asociada a B* ([YuZl75], p. 443).

v.b.	x_B	x_N	r.h.s.
x_B	$I_{m \times m}$	$B^{-1}N$	$B^{-1}b_{m \times 1}$
z	$0_{k \times m}$	$C^B B^{-1}N - C^N$	$C^B B^{-1}b_{k \times 1}$

A la tabla anterior la denotaremos por $T(B)$. Este arreglo de datos constituye una manera clara y ordenada de presentar información local (relativa a vértices) para muchos algoritmos generadores de soluciones eficientes (ver capítulo 4).

Sea $\bar{x}' = (\bar{x}'_B, \bar{x}'_N) = ((B^{-1}b)', 0')$ el punto extremo asociado a B . Es claro que si \bar{x} es no degenerado, sólo tiene asociada una única tabla canónica. En caso contrario, pueden haber múltiples tablas canónicas asociadas a \bar{x} .

En función de $T(B)$, llamando $Y = B^{-1}N$, $\bar{b} = B^{-1}b$, $R = C^B B^{-1}N - C^N$ y $\bar{z} = C\bar{x}$, se tiene que: $\forall x \in X$, $x_B = \bar{b} - Yx_N$. Además, $z = Cx = \bar{z} - Rx_N = C^B \bar{b} - Rx_N$.

Más concisamente, y en formato matricial, $T(B)$ se escribe ahora como:

$$\begin{pmatrix} I & Y & \bar{b} \\ 0 & R & \bar{z} \end{pmatrix}$$

Dado $j \in J_N$, se define la razón mínima del simplex primal ([Mr83], p. 66) como:

$$\theta_j = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} / y_{ij} > 0 \right\} \\ \infty \text{ si } y_{ij} \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{cases} \quad (1.10)$$

Entonces, si $0 < \theta_j < \infty$, cuando se introduce x_j en la base se obtiene una nueva s.f.b. (solución factible básica) $\bar{x}^j = \bar{x} + \theta_j d^j$, con valores objetivos $\bar{z}^j = C\bar{x}^j = C\bar{x} - \theta_j r^j$, donde $d_B^j = -y^j$, $d_N^j = e_j$, siendo y^j , r^j las columnas j de Y y R , respectivamente y $e_j \in R^{n-m}$ un vector de ceros con un 1 en la componente j .

Por último, y en función de la notación recién introducida, el problema (1.5) puede formularse de varias maneras:

Proposición 1.6.15 *El problema (1.5) admite las siguientes formulaciones equivalentes (en el sentido de que no varían las regiones eficientes):*

$$i) \quad \min \{ R x_N / Y x_N \leq \bar{b}, x_N \in R_+^{n-m} \}, \text{ donde } Y = B^{-1} N \text{ y } \bar{b} = B^{-1} b.$$

$$ii) \quad \max \left\{ C_{\bar{f}x} x_{\bar{f}x} / A_{\bar{f}x} x_{\bar{f}x} = b - A_{\text{f}x} x_{\text{f}x}, x_{\bar{f}x} \in R_+^{|J_{\bar{f}x}|} \right\}, \text{ donde } J_{\text{f}x} = \{ j \in J / x_j \text{ es fija} \}, J_{\bar{f}x} = J \setminus J_{\text{f}x}.$$

Demostración. Inmediata, sin más que aplicar la Proposición 1.3.14 tomando, para $i)$, $\alpha = -C^B B^{-1} b$ y, para $ii)$, $\alpha = -C_{\text{f}x} x_{\text{f}x}$. ■

1.7 Resultados Básicos para el LVP

En esta sección vamos a estudiar una serie de resultados que son específicos de los problemas lineales y que constituyen la piedra angular de la programación vectorial lineal. Comprobaremos, además, como la dualidad escalar resulta ser, para el modelo LVP, una herramienta extremadamente útil y potente.

Obsérvese que en términos formales, cualquier LVP es un CVP y, por supuesto, un VP siéndole, por tanto, aplicables de forma automática todos los resultados obtenidos para éstos últimos.

Comenzaremos dando algunos nuevos teoremas de la alternativa para sistemas de desigualdades lineales que se erigirán en eficaces instrumentos de desarrollo teórico a lo largo de esta memoria.

1.7.1 Teoremas de la Alternativa

Sean $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $C \in R^{k \times n}$, $\alpha \in R^k$, matrices de coeficientes (fijas), tales que (C, α) es no nula.

Teorema 1.7.1 *El sistema $Ax = b$, $x \geq 0$, $Cx \geq \alpha$, tiene solución si, y sólo si, el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda^t \alpha > u^t b$, $\lambda \geq 0$ no tiene solución.*

Demostración. $Ax = b$, $x \geq 0$, $Cx \geq \alpha$, tiene solución $\Leftrightarrow -Ax + by = 0$, $y > 0$,
 $x \geq 0$, $Cx - \alpha y \geq 0$, tiene solución $\Leftrightarrow (-A, b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, $(0, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0$,
 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$, tiene solución. Aplicando el teorema de la alternativa de
 Motzkin ([Mn69], p. 28) $\Leftrightarrow s(0, 1) + \lambda'(C, -\alpha) + w'(I, 0) + u'(-A, b) = 0$,
 $w \geq 0$, $s > 0$, $\lambda \geq 0$, no tiene solución $\Leftrightarrow u'A - \lambda'C \geq 0'$, $\lambda'\alpha > u'b$, $\lambda \geq 0$, no
 tiene solución. ■

Teorema 1.7.2 *El sistema $Ax = b$, $x \geq 0$, $Cx \geq \alpha$, tiene solución si, y sólo si, los sistemas $u'A - \lambda'C \geq 0'$ con $\lambda'\alpha \geq u'b$, $\lambda > 0$ o $\lambda'\alpha > u'b$, $\lambda \geq 0$ no tienen solución.*

Demostración. $Ax = b$, $x \geq 0$, $Cx \geq \alpha$, tiene solución $\Leftrightarrow -Ax + by = 0$, $y > 0$,
 $x \geq 0$, $Cx - \alpha y \geq 0$, tiene solución $\Leftrightarrow (-A, b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, $(0, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0$,
 $(I, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$, $(C, -\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$, tiene solución. Aplicando el teorema de la
 alternativa de Slater ([Mn69], p. 27) \Leftrightarrow los sistemas
 $s(0, 1) + \lambda'(C, -\alpha) + w'(I, 0) + u'(-A, b) = 0$, $w \geq 0$, con $s \geq 0$, $\lambda > 0$ o $s > 0$,
 $\lambda \geq 0$, no tienen solución \Leftrightarrow los sistemas $u'A - \lambda'C \geq 0'$, con $\lambda'\alpha \geq u'b$, $\lambda > 0$ o
 $\lambda'\alpha > u'b$, $\lambda \geq 0$, no tienen solución. ■

Corolario 1.7.3 *Sea $\alpha = C\bar{x}$ donde $\bar{x} \in X = \{x \in R_+^n / Ax = b\}$. Entonces, $Ax = b$,
 $x \geq 0$, $Cx \geq \alpha$ no tiene solución si, y sólo si, $u'A - \lambda'C \geq 0'$, $\lambda'\alpha = u'b$, $\lambda > 0$,
 tiene solución.*

Demostración. $Ax = b$, $x \geq 0$, $Cx \geq \alpha$, no tiene solución \Leftrightarrow Alguno de los
 sistemas $u'A - \lambda'C \geq 0'$, con $\lambda'\alpha \geq u'b$, $\lambda > 0$ o $\lambda'\alpha > u'b$, $\lambda \geq 0$, tiene solución.
 Ahora bien, como $u'A - \lambda'C \geq 0'$, $\bar{x} \in X \Rightarrow u'A\bar{x} - \lambda'C\bar{x} = u'b - \lambda'\alpha \geq 0$
 $\Rightarrow u'b \geq \lambda'\alpha$ en ambos casos. Luego $\lambda'\alpha > u'b$ no puede darse. Así,
 $u'A - \lambda'C \geq 0'$, $\lambda'\alpha = u'b$, $\lambda > 0$, tiene solución. ■

Se pueden obtener unos resultados análogos a los anteriormente dados que serán de utilidad para el estudio de la eficiencia débil de un punto.

Teorema 1.7.4 *$Ax = b$, $x \geq 0$, $Cx > \alpha$, tiene solución si, y sólo si, $u'A - \lambda'C \geq 0'$, $\lambda'\alpha - \delta = u'b$, $(\lambda', \delta) \geq 0$, no tiene solución.*

Demostración. $Ax = b$, $x \geq 0$, $Cx > \alpha$, tiene solución $\Leftrightarrow -Ax + by = 0$, $y > 0$, $x \geq 0$, $Cx - \alpha y > 0$, tiene solución $\Leftrightarrow (-A, b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, $\begin{pmatrix} C & -\alpha \\ 0^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0$, $(I, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$, tiene solución. Aplicando el teorema de la alternativa de Motzkin ([Mn69], p. 28), $\Leftrightarrow (\lambda^t, \delta) \begin{pmatrix} C & -\alpha \\ 0^t & 1 \end{pmatrix} + s^t(I, 0) + u^t(-A, b) = 0$, $s \geq 0$, $(\lambda^t, \delta) \geq 0$, no tiene solución $\Leftrightarrow u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda^t \alpha - \delta = u^t b$, $(\lambda^t, \delta) \geq 0$, no tiene solución. ■

Corolario 1.7.5 Sea $X = \{x \in R_+^n / Ax = b\} \neq \emptyset$. Entonces, $Ax = b$, $x \geq 0$, $Cx > \alpha$, no tiene solución si, y sólo si $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda^t \alpha \geq u^t b$, $\lambda \geq 0$, tiene solución.

Demostración. $Ax = b$, $x \geq 0$, $Cx > \alpha$, no tiene solución $\Leftrightarrow u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda^t \alpha - \delta = u^t b$, $(\lambda^t, \delta) \geq 0$, tiene solución. Ahora bien, no puede ocurrir que $\lambda = 0$, $\delta > 0$ pues $\Rightarrow u^t A \geq 0^t$, $u^t b < 0$. Dado $x \in X$ arbitrario, $\Rightarrow u^t Ax = u^t b \geq 0 \Rightarrow \#$. Luego $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda^t \alpha \geq u^t b$, $\lambda \geq 0$, tiene solución. ■

1.7.2 Caracterizaciones de Eficiencia

Consideremos el LVP, $P \equiv \max\{Cx / x \in X\}$, donde $X = \{x \in R_+^n / Ax = b\}$.

Teorema 1.7.6 (Condiciones de Eficiencia para el Caso Lineal) Sea $\bar{x} \in X$. Entonces, $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda^t C\bar{x} = u^t b$, $\lambda > 0$, tiene solución.

Demostración. $\bar{x} \in E^P \Leftrightarrow Ax = b$, $x \geq 0$, $Cx \geq C\bar{x}$, no tiene solución. Llamando $\alpha = C\bar{x}$ y aplicando el Corolario 1.7.3 \Leftrightarrow el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda^t C\bar{x} \geq u^t b$, $\lambda > 0$, tiene solución. ■

Corolario 1.7.7 $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k$ tal que $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$.

Demostración. Basta utilizar Teorema 1.7.6 y aplicar dualidad escalar. ■

El siguiente resultado, aparentemente nuevo, proporciona un procedimiento práctico para comprobar la eficiencia de un punto arbitrario (no necesariamente extremo).

Corolario 1.7.8 Sea $\bar{x} \in X$. Entonces, $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, el problema $\min\{s / u^t A - \lambda^t C \geq 0, u^t b - s = \lambda^t C\bar{x}, \lambda \geq e, s \geq 0\}$ es acotado con valor óptimo 0.

Demostración. $\bar{x} \in E^P \Leftrightarrow$ el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t, \lambda^t C\bar{x} = u^t b, \lambda > 0$, tiene solución. Como $u^t b \geq \lambda^t C\bar{x} \Leftrightarrow$ el problema $\min\{s / u^t A - \lambda^t C \geq 0, u^t b - s = \lambda^t C\bar{x}, \lambda \geq e, s \geq 0\}$ es acotado con valor óptimo 0. ■

Una formulación alternativa de las condiciones de eficiencia para el caso lineal sería:

Teorema 1.7.9 ([Krn74], Lemma 1) $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, $\exists (\bar{\lambda}^t, \bar{u}^t) \in R^{k+m}$ tal que $(\bar{x}^t, \bar{\lambda}^t, \bar{u}^t)$ es solución de: i) $Ax = b, x \geq 0$, ii) $\lambda^t C - u^t A \leq 0^t, \lambda \geq e$, iii) $(\lambda^t C - u^t A)x = 0$.

Evidentemente, siempre podemos escribir que:

$$E^P = \{x \in R^n / Ax = b, \lambda^t C - u^t A \leq 0^t, u^t b - \lambda^t Cx = 0, x \geq 0, \lambda \geq e\}.$$

El Teorema 1.7.9 establece una relación entre la eficiencia y las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker ([Mr83]). Las principales dificultades que presenta dicha caracterización de E^P son las dimensiones del sistema de restricciones y la complejidad del mismo. Efectivamente, hay un incremento de $n+k+1$ restricciones y $m+k$ variables respecto la problema original P y, por otro lado, el sistema es no lineal.

Análogamente,

Teorema 1.7.10 (Condiciones de Eficiencia Débil para el Caso Lineal) Sea $\bar{x} \in X$. Entonces, $\bar{x} \in WE^P$ si, y sólo si, el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t, \lambda^t C\bar{x} = u^t b, \lambda \geq 0$, tiene solución.

Demostración. $\bar{x} \in WE^P \Leftrightarrow Ax = b, x \geq 0, Cx > C\bar{x}$, no tiene solución. Llamando $\alpha = C\bar{x}$ y aplicando el Corolario 1.7.5 \Leftrightarrow el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t, \lambda^t \alpha \geq u^t b, \lambda \geq 0$, tiene solución. Ahora bien, como $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t \Rightarrow u^t A\bar{x} - \lambda^t C\bar{x} = u^t b - \lambda^t \alpha \geq 0 \Rightarrow u^t b \geq \lambda^t \alpha$. Luego, $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t, \lambda^t C\bar{x} = u^t b, \lambda \geq 0$, tiene solución. ■

Corolario 1.7.11 $\bar{x} \in WE^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_+^k - \{0\}$ tal que $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$.

$$\text{Además, } WE^P = \{x \in R^n / Ax = b, \lambda^t C - u^t A \leq 0^t, u^t b - \lambda^t Cx = 0, x \geq 0, \lambda \geq 0\}.$$

De nuevo, se puede dar sin dificultad un procedimiento eficaz y novedoso para comprobar la eficiencia débil de un punto arbitrario (no necesariamente extremo).

Corolario 1.7.12 *Sea $\bar{x} \in X$. Entonces, $\bar{x} \in WE^P$ si, y sólo si, el problema $\min\{s / u^t A - \lambda^t C \geq 0^t, u^t b - s = \lambda^t C\bar{x}, e^t \lambda = 1, \lambda \geq 0, s \geq 0\}$ es acotado con valor óptimo 0.*

El problema ponderado asociado a P , $P_\lambda \equiv \max\{\lambda^t Cx / Ax = b, x \in R_+^n\}$, juega un papel fundamental en la programación vectorial lineal y será, por tanto, objeto de un detenido y minucioso estudio a lo largo de esta memoria.

El dual del problema P_λ , el cual denotaremos por D_λ , se formula como:

$$\min\{u^t b / u^t A \geq \lambda^t C, u \in R^m\}$$

El teorema que vamos a enunciar a continuación, constituye en nuestra opinión, uno de los más importantes resultados de la programación vectorial lineal, permitiéndonos establecer un valioso puente entre las dos distintas realidades que constituyen la optimización escalar y la vectorial.

Teorema 1.7.13 ([EvSt73], Corollary 1.4) $E^P = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_k^0} S_{P_\lambda}$.

Demostración. Si $X = \emptyset$, el teorema es trivial. Supongamos $X \neq \emptyset$. $\bar{x} \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda_k^0} S_{P_\lambda} \Leftrightarrow \exists \bar{\lambda} \in \Lambda_k^0, \bar{x} \in S_{P_{\bar{\lambda}}}$. Por dualidad escalar, $\Leftrightarrow \exists \bar{\lambda} \in \Lambda_k^0, \exists \bar{u} \in R^m, \bar{u}^t A - \bar{\lambda}^t C \geq 0^t, \bar{\lambda}^t C\bar{x} = \bar{u}^t b \Leftrightarrow \exists \bar{\lambda} \in R_{++}^k, \exists \bar{u} \in R^m, \bar{u}^t A - \bar{\lambda}^t C \geq 0^t, \bar{\lambda}^t C\bar{x} = \bar{u}^t b \Leftrightarrow \bar{x} \in E^P$. ■

Debido al teorema anterior, la programación vectorial lineal y la programación (escalar) lineal de costos paramétricos están íntimamente relacionadas.

Veamos una interesante variante de las condiciones de eficiencia. Para ello daremos, en primer lugar, un resultado clásico de la programación lineal escalar.

Teorema 1.7.14 *Consideremos el problema escalar $\max\{c^t x / x \in X\}$ (Q), donde $X = \{x \in R^n / Ax \leq b\}$. Sean $\bar{x} \in X$ e I el conjunto de índices asociados a desigualdades activas (aquellas que se dan con igualdad) en \bar{x} . Entonces, $\bar{x} \in S_Q$ si, y sólo si, $\exists u \in R_+^{|I|}$ tal que $u^t A_I = c^t$.*

Demostración. Por hipótesis, $\bar{x} \in X$. Efectivamente, si $\bar{x} \in S_\varrho$, por dualidad $\Leftrightarrow \exists u \in R_+^m, u^t A = c^t, u^t (b - A\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \exists u \in R_+^{|I|}, u^t A_I = c^t$. ■

Corolario 1.7.15 ([Ph72], Theorem 3) Sean $\bar{x} \in X = \{x \in R^n / Ax \leq b\}$ e I el conjunto de índices asociados a las desigualdades activas en \bar{x} . Entonces, $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_+^k, \exists u \in R_+^{m'}$ tales que $\lambda^t C - u^t A_I = 0^t$.

Demostración. Por el Corolario 1.7.7, $\bar{x} \in E^P \Leftrightarrow \exists \lambda \in R_+^k, \bar{x} \in S_{P_\lambda}$. Ahora basta utilizar el teorema anterior. ■

Son inmediatos los siguientes corolarios, sin más que tener en cuenta que P es un CVP.

Corolario 1.7.16 $WE^P = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_k - \{0\}} S_{P_\lambda}$.

Corolario 1.7.17 $E^P = E_p^P$.

Luego, el LVP no tiene soluciones eficientes impropias.

1.7.3 Estructuración del Conjunto de Soluciones Eficientes

Sean $F \in X_f$ arbitraria y $\lambda \in R^k$. Si denotamos por F^0 el interior relativo de F , se sabe por la programación lineal escalar (aunque también se justificará en el capítulo 2, Corolario 2.4.23) que:

Teorema 1.7.18 Si $F^0 \cap S_{P_\lambda} \neq \emptyset$ entonces $F \subseteq S_{P_\lambda}$.

El siguiente resultado nos dice que si un punto del interior relativo a una cara es eficiente, entonces toda la cara es eficiente.

Corolario 1.7.19 Si $F^0 \cap E^P \neq \emptyset$ entonces $F \subseteq E^P$.

En particular,

Corolario 1.7.20 Si $X^0 \cap E^P \neq \emptyset$ entonces $E^P = X$.

Corolario 1.7.21 Si $E^P \neq \emptyset$ y $X^0 \cap E^P = \emptyset$ entonces $E^P \subseteq \bigcup_{t=1}^T F_t$, donde F_t es una cara propia de X .

Demostración. Sabemos que $E^P = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_k^0} S_{P_\lambda}$. Si $X^0 \cap E^P = \emptyset \Rightarrow \forall \lambda \in \Lambda_k^0$,

$$X^0 \cap S_{P_\lambda} = \emptyset \Rightarrow \forall \lambda \in \Lambda_k^0, S_{P_\lambda} \subseteq \bigcup_{i=1}^T F_i \Rightarrow E^P \subseteq \bigcup_{i=1}^T F_i.$$

■

Análogamente, para las soluciones débilmente eficientes es posible escribir:

Corolario 1.7.22 Si $F^0 \cap WE^P \neq \emptyset$ entonces $F \subseteq WE^P$.

Corolario 1.7.23 Si $X^0 \cap WE^P \neq \emptyset$ entonces $WE^P = X$.

Corolario 1.7.24 Si $WE^P \neq \emptyset$ y $X^0 \cap WE^P = \emptyset$ entonces $WE^P \subseteq \bigcup_{i=1}^T F_i$, donde F_i es una cara propia de X .

Los resultados anteriores son importantes en programación vectorial lineal, pues aseguran que el conjunto E^P (WE^P), o es todo X o está contenido en la frontera de X . Por esta razón, a E^P (WE^P) también se le conoce como *frontera (débilmente) eficiente* de P y se suele expresar como la unión de todas las caras (débilmente) eficientes maximales de P .

El siguiente teorema garantiza que podemos asociar a cualquier cara eficiente al menos un parámetro de Λ_k^0 .

Teorema 1.7.25 $F \subseteq E^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in \Lambda_k^0$ tal que $F \subseteq S_{P_\lambda}$.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Directa por el Teorema 1.7.13.

“ \Rightarrow ”

Sea $\bar{x} \in F^0 \subseteq E^P \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda_k^0, \bar{x} \in S_{P_\lambda} \Rightarrow F^0 \cap S_{P_\lambda} \neq \emptyset$. Ahora por el Teorema 1.7.18 $\Rightarrow F \subseteq S_{P_\lambda}$.

■

Teorema 1.7.26 ([ECHK80], Corollary 4.1) Si $F \subseteq E^P$ es maximal entonces $\exists \lambda \in \Lambda_k^0, F = S_{P_\lambda}$.

Demostración. $F \subseteq E^P \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda_k^0, F \subseteq S_{P_\lambda}$. Además $S_{P_\lambda} \in E_f^P$ y F es maximal por la inclusión $\Rightarrow F = S_{P_\lambda}$.

■

Corolario 1.7.27 $E^P = \bigcup_{j=1}^l F_j$, donde $\forall j \in \{1, \dots, l\}$, $F_j \in E_f^P$ es maximal.

Además, $\forall j \in \{1, \dots, l\}$, $\exists \lambda^j \in \Lambda_k^0$, $F_j = S_{P_{\lambda^j}}$.

En particular, si $E^P = X$ entonces $\exists \bar{\lambda} \in \Lambda_k^0$, $X = S_{P_{\bar{\lambda}}}$.

El Corolario 1.7.27 es de gran importancia, pues nos indica que todo el conjunto de soluciones eficientes de un LVP se puede poner como la unión de sus caras eficientes maximales. Esta estructuración dada a la región eficiente es la más sencilla que se puede obtener.

Análogamente, para el caso de eficiencia débil damos sin demostración los correspondientes resultados.

Teorema 1.7.28 $F \subseteq WE^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in \Lambda_k - \{0\}$, $F \subseteq S_{P_{\lambda}}$.

Teorema 1.7.29 Si $F \subseteq WE^P$ es maximal entonces $\exists \lambda \in \Lambda_k - \{0\}$, $F = S_{P_{\lambda}}$.

Corolario 1.7.30 $WE^P = \bigcup_{j=1}^l F_j$, donde $\forall j \in \{1, \dots, l\}$, $F_j \in WE_f^P$ es maximal.

Además, $\forall j \in \{1, \dots, l\}$, $\exists \lambda^j \in \Lambda_k - \{0\}$, $F_j = S_{P_{\lambda^j}}$.

En particular, si $WE^P = X$ entonces $\exists \bar{\lambda} \in \Lambda_k - \{0\}$, $X = S_{P_{\bar{\lambda}}}$.

Corolario 1.7.31 E^P (WE^P) es cerrado.

Demostración. Directa por ser unión finita de cerrados. ■

Corolario 1.7.32 ([Is77a], Lemma 1) Sea X un poliedro apuntado. Si $E^P \neq \emptyset$ entonces $E_{xp}^P \neq \emptyset$.

Demostración. Directa, pues si X es un poliedro apuntado \Rightarrow Cualquier cara no vacía de X contiene al menos un vértice. ■

Corolario 1.7.33 Sea X un poliedro apuntado. Si $WE^P \neq \emptyset$ entonces $WE^P \cap X_{xp} \neq \emptyset$.

1.7.4 Eficiencia y Conexidad.

Bajo este epígrafe se enmarca una de las propiedades de mayor trascendencia práctica para el LVP, la cual queda enunciada en términos sencillos diciendo que *el conjunto de vértices eficientes está conectado*. Dicha

conexión debe interpretarse en el sentido de que se pueden visitar todos los vértices eficientes utilizando, exclusivamente, aristas eficientes. Esta notable característica constituye el fundamento de muchos de los métodos generadores de soluciones eficientes para el LVP (ver capítulo 4). Por otra parte, entre las consecuencias teóricas que se desprenden del hecho anteriormente reseñado, cabe destacar la de que E^P es (topológicamente) conexo.

El razonamiento habitualmente empleado para deducir la conexidad de E_{xp}^P consiste en probar que dicha propiedad se cumple sobre determinados *grafos básicos* asociados a E_{xp}^P ([Zl74], [YuZl75], [St86], ...). Esto es debido a que resulta (algebraicamente) más sencillo trabajar con bases que con vértices y porque existe una relación biunívoca entre ambos conceptos para el caso no degenerado. Ahora bien, en general, la posibilidad del fenómeno de la degeneración ha sido, frecuentemente, descuidada por numerosos autores. Con la intención de evitar imprecisiones y errores presentamos los siguientes resultados:

Sea B^0 una base factible arbitraria.

Definición 1.7.34 ([ArMl91], p. 473) *Diremos que una base B es B^0 -accesible si B puede ser alcanzada a partir de B^0 utilizando exclusivamente pivotes positivos determinados por medio de la regla lexicográfica ([Dn63]).*

Definición 1.7.35 ([ArMl91], p. 473) *Una base B se dice que es B^0 -dual-eficiente si B es dual-eficiente ($B \in E_{DB}^P$) y B es B^0 -accesible.*

Al conjunto de bases B^0 -dual-eficientes lo denotaremos por $E_{DB}^P(B^0)$.

Definición 1.7.36 ([St86], Definition 9.13) *Sean $B \in E_{DB}^P$, $R = C^B B^{-1} N - C^N \in R^{k \times (n-m)}$, la correspondiente matriz de costos reducidos asociada y $j \in J_N$. Se dice que x_j es una variable (no básica) eficiente (con respecto a B) si $\exists \lambda \in I(B)$ tal que $\lambda^t r^j = 0$, donde r^j es la columna j de R .*

El motivo del nombre empleado en la definición anterior se entenderá en la sección 2.7, cuando probemos que para una base dual-eficiente, el incremento de una variable eficiente da lugar a una arista eficiente.

Cuando λ sea conocido diremos que x_j es una variable λ -eficiente. Por otra parte, a las variables no básicas que no son eficientes se les denomina *ineficientes*.

Definición 1.7.37 ([ArMI91], p. 474) Sean $B^1, B^2 \in E_{DB}^P(B^0)$. Diremos que B^1 es B^0 -adyacente a B^2 si B^2 se obtiene a partir de B^1 utilizando un pivote positivo, determinado por medio de la regla lexicográfica inducida por B^0 , sobre una columna asociada a una variable eficiente.

Consideremos el grafo $G_{B^0}^P = (V, E)$ donde $V = E_{DB}^P(B^0)$ y $E = \{(B^1, B^2) \in V \times V / B^2 \text{ es } B^0\text{-adyacente a } B^1\}$.

El siguiente resultado, enunciado por Armand y Malivert, lo daremos sin demostración por simplificar la exposición.

Teorema 1.7.38 ([ArMI91], Theorem 2) $G_{B^0}^P$ es conexo.

El Teorema 1.7.38 es de una gran importancia práctica pues nos indica que explorando exclusivamente bases duales-eficientes B^0 -adyacentes es posible determinar todos los vértices y aristas eficientes de un LVP. Como consecuencia inmediata tenemos que:

Corolario 1.7.39 El grafo formado por los vértices y aristas eficientes de P es conexo.

Demostración. No tiene dificultad pues cualquier vértice eficiente de P se puede especificar a través de un nodo de $G_{B^0}^P$ (basta combinar el Teorema 1.7.13 con las propiedades algorítmicas del método del simplex). Además cualquier arista eficiente es incidente en algún vértice eficiente. ■

Teorema 1.7.40 E^P es (topológicamente) conexo.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que E^P no es conexo $\Rightarrow \exists U, V \subseteq R^n$, abiertos según la topología usual, tales que $U \cap E^P \neq \emptyset$, $V \cap E^P \neq \emptyset$, $U \cap V \cap E^P = \emptyset$, $E^P \subseteq U \cup V$. Sabemos que E^P se puede poner como una unión finita de caras de X . Además, cada cara debe estar íntegramente contenida en U o V pues si suponemos que $\exists F \in E_f^P$, $F \cap U \neq \emptyset, F \cap V \neq \emptyset$, como $U \cap V \cap F = \emptyset$ y F es convexo $\Rightarrow \exists \bar{x} \in F$, $\bar{x} \notin U \cup V \Rightarrow \#$, pues $F \subseteq E^P \subseteq U \cup V$. Ahora bien, si las caras eficientes están contenidas íntegramente en U o V , como quiera que $U \cap E^P \neq \emptyset$ y $V \cap E^P \neq \emptyset \Rightarrow G^P$ no puede ser conexo $\Rightarrow \#$. ■

1.7.5 Caracterizaciones para la Acotación de un LVP

A continuación daremos una serie condiciones que garantizan si la región eficiente de un LVP es vacía o no.

Teorema 1.7.41 *Sea $X \neq \emptyset$. Entonces, $E^P \neq \emptyset$ si, y sólo si, el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda > 0$, tiene solución.*

Demostración. Por hipótesis, $X \neq \emptyset$. $\bar{x} \in E^P \Leftrightarrow \exists \bar{\lambda} \in \Lambda_k^0$, $\bar{x} \in S_{P_{\bar{\lambda}}} \Leftrightarrow \exists \bar{\lambda} \in \Lambda_k^0, D_{\bar{\lambda}}$ es factible \Leftrightarrow El sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda > 0$ tiene solución. ■

Teorema 1.7.42 *Sea $X \neq \emptyset$. Entonces, $WE^P \neq \emptyset$ si, y sólo si, el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda \geq 0$, tiene solución.*

Es claro que el cálculo de WE^P y de E^P está íntimamente relacionado. Por este motivo, y para simplificar la exposición, a partir de ahora sólo enunciaremos resultados para el caso eficiente. Los mismos se pueden extender (en general, con ligeras modificaciones) al caso débilmente eficiente.

Corolario 1.7.43 *Sea $X \neq \emptyset$. Entonces, $E^P \neq \emptyset$ si, y sólo si, el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda \geq e$ tiene solución.*

Corolario 1.7.44 *Sea $X \neq \emptyset$. Entonces, $E^P \neq \emptyset$ si, y sólo si, el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq e^t C$, $\lambda \geq 0$, tiene solución.*

Análogamente, la no acotación de un LVP puede ser comprobada mediante los siguientes tests:

Corolario 1.7.45 ([Hr85], Theorem 3.3) *Sea $X \neq \emptyset$. Entonces, $E^P = \emptyset$ si, y sólo si, el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda > 0$, no tiene solución.*

Corolario 1.7.46 *Sea $X \neq \emptyset$. Entonces, $E^P = \emptyset$ si, y sólo si, el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda \geq e$, no tiene solución.*

Corolario 1.7.47 *Sea $X \neq \emptyset$. Entonces, $E^P = \emptyset$ si, y sólo si, el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq e^t C$, $\lambda \geq 0$, no tiene solución.*

Teorema 1.7.48 ([Is76], Lemma 1) *Sea $X \neq \emptyset$ y C no nula. Entonces, $E^P = \emptyset$ si, y sólo si, el sistema $Cd \geq 0$, $Ad = 0$, $d \in R_+^n$, tiene solución.*

Demostración. Por hipótesis $E^P = \emptyset$. Por el Corolario 1.7.45 \Leftrightarrow El sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda > 0$ no tiene solución. Haciendo los cambios de variable: $y^2 = \lambda$, $y^4 = -u \Leftrightarrow C^t y^2 + I y^3 + A^t y^4 = 0$, $y^2 > 0$, $y^3 \geq 0$ no tiene solución. Ahora, aplicando el teorema de la alternativa de Tucker ([Mn69], p. 29) \Leftrightarrow El sistema $Cd \geq 0$, $Ad = 0$, $d \in R_+^n$, tiene solución. ■

Corolario 1.7.49 Sea $X \neq \emptyset$ y C no nula. Entonces, $E^P = \emptyset$ si, y sólo si, el programa lineal $\max\{e^t s / Cd - Is = 0, Ad = 0, d \geq 0, s \geq 0\}$ es no acotado.

Demostración. $E^P = \emptyset \Leftrightarrow \exists \bar{d} \in R_+^n, C\bar{d} \geq 0, A\bar{d} = 0 \Leftrightarrow \exists \bar{d} \in R_+^n, \exists \bar{s} \in R_+^n, C\bar{d} - \bar{I}\bar{s} = 0, A\bar{d} = 0, \bar{s} \geq 0 \Leftrightarrow \max\{e^t s / Cd - Is = 0, Ad = 0, d \geq 0, s \geq 0\}$ es no acotado. ■

Adicionalmente es posible escribir:

Corolario 1.7.50 ([GlKT51], Theorem 5) Sea $X \neq \emptyset$ y C no nula. Entonces, $E^P \neq \emptyset$ si, y sólo si, el sistema $Cd \geq 0, Ad = 0, d \in R_+^n$, no tiene solución.

Corolario 1.7.51 Sea $X \neq \emptyset$ y C no nula. Entonces, $E^P \neq \emptyset$ si, y sólo si, el programa lineal $\max\{e^t s / Cd - Is = 0, Ad = 0, d \geq 0, s \geq 0\}$ es acotado, con valor óptimo 0.

Demostración. $E^P \neq \emptyset \Leftrightarrow$ El sistema $Cd \geq 0, Ad = 0, d \in R_+^n$, no tiene solución \Leftrightarrow El programa lineal $\max\{e^t s / Cd - Is = 0, Ad = 0, d \geq 0, s \geq 0\}$ es acotado, con valor óptimo 0. ■

Sea X^* el cono característico (también llamado cono de recesión) de X , es decir, $X^* = \{d \in R^n \wedge \forall x \in X, x + \alpha d \in X, \forall \alpha \in R_+\}$ ([Rc70], p. 61).

Proposición 1.7.52 Sea $X \neq \emptyset$. Entonces, $E^P = \emptyset$ si, y sólo si, $X^* \cap C^z \neq \{0\}$.

Demostración. Directa teniendo en cuenta que $X^* \cap C^z \neq \emptyset \Leftrightarrow Cd \geq 0, Ad = 0, d \in R_+^n$, tiene solución. ■

Corolario 1.7.53 Sea $X \neq \emptyset$. Entonces, $E^P = \emptyset$ si, y sólo si, $\exists d \in X^* - \{0\}$ tal que $\forall x \in X, \forall \delta \in R_{++}$ se verifica $C(x + \delta d) \geq Cx$.

1.8 Métodos Gráficos de Resolución

En esta sección estudiaremos dos métodos gráficos que nos permiten determinar el conjunto de soluciones eficientes de forma geométrica. Su utilidad es muy limitada (dependen de que podamos representar la región factible) y se suelen utilizar con fines didácticos. Sin embargo, los conceptos en que se basan, aunque intuitivos, son de interés pues encuentran aplicación en otras áreas de la optimización vectorial.

Consideremos el problema de optimización vectorial $P \equiv \max\{Cx / x \in X\}$.

1.8.1 Método de los Gradientes Compuestos

Este método se utiliza frecuentemente en programación vectorial lineal.

Supongamos que X es un poliedro y sea $V(C)$ el cono criterio de P .

Teorema 1.8.1 ([St86], Corollary 7.5) $\bar{x} \in E^p$ si, y sólo si, $\exists \alpha \in V^0(C)$, tal que \bar{x} es solución óptima del problema $\max \{\alpha'x / x \in X\}$.

Demostración. Directa utilizando el Teorema 1.7.13 y el hecho de que $V^0(C) = \{\alpha \in R^n / \alpha' = \lambda' C, \lambda \in R_{++}^k\}$. ■

El método de los gradientes compuestos se basa en representar gráficamente la región factible y $V^0(C)$ y optimizar gráficamente problemas escalares lineales cuyo gradiente pertenezca a $V^0(C)$.

Ejemplo 1.8.2 Sean $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \{x \in R_+^2 / x_1 + 2x_2 = 2\}$ y $\bar{x}' = (2, 0) \in X$. Veamos que $\bar{x} \in E^p$. Efectivamente, pues $\alpha' = (1, 1) = (1/3, 1/3) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in V^0(C)$ (ver Figura 1.4) y \bar{x} es solución óptima del problema $\max \{\alpha'x / x \in X\}$. ●

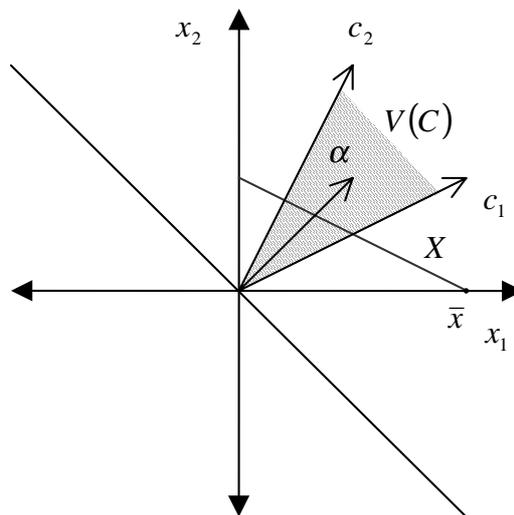


Figura 1.4

1.8.2 Método de los Conjuntos de Dominación

Es el mejor método para la detección gráfica de la eficiencia para problemas de *optimización vectorial no lineal* donde la región factible venga dada por inecuaciones no lineales y para los problemas de *programación vectorial entera* (ver capítulo 5 para su formulación).

Sea $\bar{x} \in X$ y $D_{\bar{x}}$ su correspondiente conjunto de dominación (ver Definición 1.6.3). El método de los conjuntos de dominación se basa en el siguiente resultado:

Teorema 1.8.3 ([St86], Theorem 6.16) $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, $D_{\bar{x}} \cap X = \{\bar{x}\}$.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $D_{\bar{x}} \cap X \neq \{\bar{x}\} \Rightarrow \exists \hat{x} \in D_{\bar{x}} \cap X$, $\hat{x} \neq \bar{x} \Rightarrow \exists d \in C^{\geq}$, $d \neq 0$, $\hat{x} = \bar{x} + d \in X \Rightarrow C\hat{x} = C(\bar{x} + d) = C\bar{x} + Cd \geq C\bar{x} \Rightarrow \bar{x} \notin E^P \Rightarrow \#$, luego $D_{\bar{x}} \cap X = \{\bar{x}\}$.

“ \Leftarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in X$, $\hat{x} \neq \bar{x}$, $C\hat{x} \geq C\bar{x} \Rightarrow \exists d = \hat{x} - \bar{x} \in R^n$, $Cd \geq 0$, $\hat{x} = \bar{x} + d \Rightarrow \hat{x} \in D_{\bar{x}} \cap X$ y $\hat{x} \neq \bar{x} \Rightarrow \#$, luego $\bar{x} \in E^P$. ■

Si la región factible X se puede representar geoméricamente, podemos detectar los puntos eficientes de la siguiente forma: Cualquier punto $\bar{x} \in X$, tal que la intersección de su conjunto de dominación con X sólo contenga a \bar{x} será eficiente siendo, en caso contrario, ineficiente.

Nótese que cuanto mayor sea C^{\geq} , menor es la *probabilidad* de que un cierto \bar{x} sea eficiente y, por tanto, menor será E^P .

Vamos a resolver varios ejemplos con el método de los conjuntos de dominación aplicados a una serie de VP's $\max \{Cx / x \in X\}$ con la misma región factible X dada por $\{x \in R_+^2 / x_1 \leq 1, x_2 \leq 1\}$ (ver Figura 1.5).

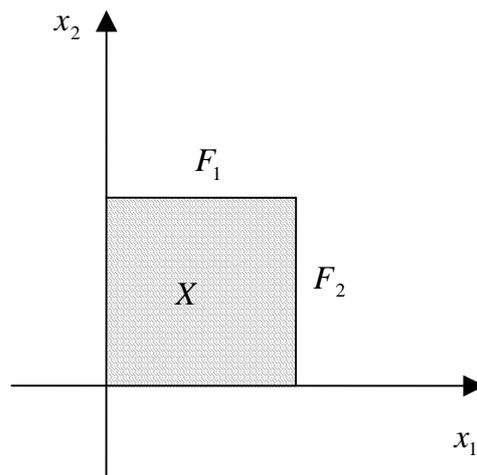


Figura 1.5

donde $F_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 / x_1 \leq 1, x_2 = 1\}$ y $F_2 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 / x_1 = 1, x_2 \leq 1\}$.

Ejemplo 1.8.4 Sea $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Es claro que $C^\geq = \left\{ d^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} / d \in \mathbb{R}_+^k \right\}$ (ver Figura 1.6) y que $E^P = F_1 \cup F_2$.

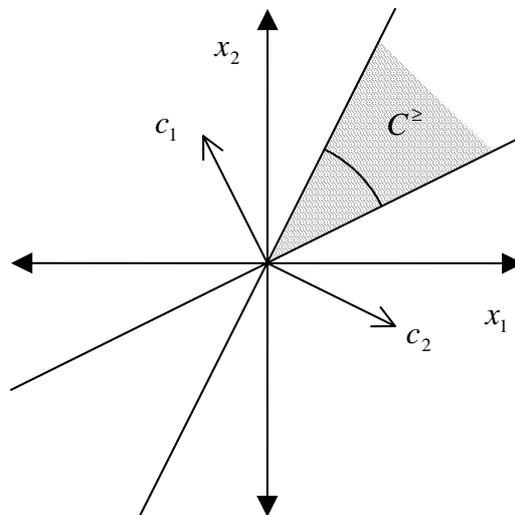


Figura 1.6

Ejemplo 1.8.5 Sea $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Como $C^\geq = \{0\}$ (ver Figura 1.7) entonces $E^P = X$.

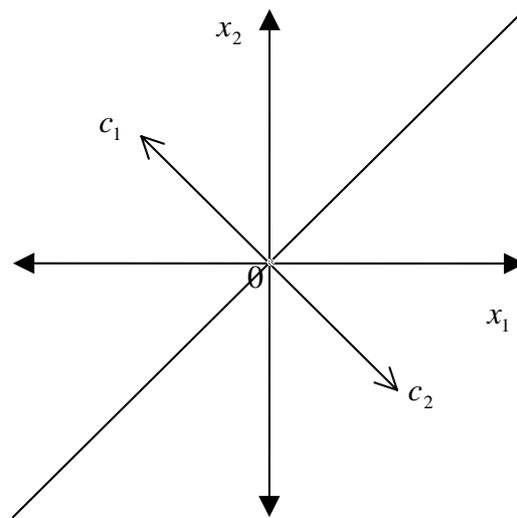


Figura 1.7

Añadiendo una nueva función objetivo al ejemplo anterior podemos considerar:

Ejemplo 1.8.6 Sea $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $C^{\geq} = \{d \in \mathbb{R}_+^2 / d_2 - d_1 = 0\}$ (ver Figura 1.8) entonces $E^P = F_1 \cup F_2$.

●

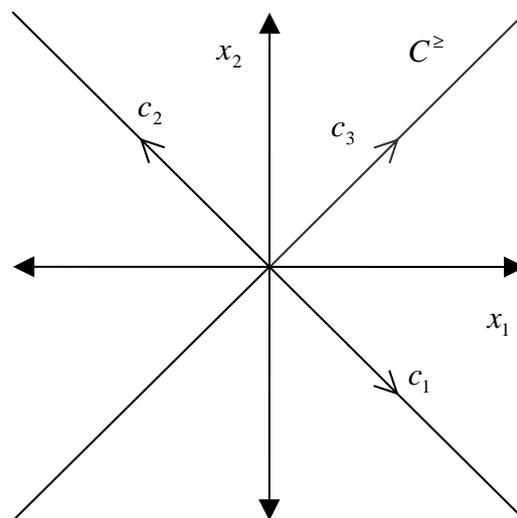


Figura 1.8

1.9 Cotas para el VP

En esta sección introduciremos, de forma novedosa, las nociones de *cotas* y *supremos eficientes* de una función vectorial $z(x)$ sobre un determinado dominio X , como una generalización de sus contrapartidas escalares. Podemos obtener así propiedades y resultados interesantes que permiten establecer una cierta relación de polaridad entre el problema de programación multiobjetivo convexo (CVP) y el que surge en el cálculo de sus supremos. En particular, para el caso lineal, es posible derivar la definición de problema dual vectorial dada por Gale et al (ver [GIKT51]), proporcionando de esta manera una justificación geométrica de la misma.

Algunos de los resultados presentados han sido enunciados especialmente para el caso débilmente eficiente por ser específicos del mismo o no constituir extensiones triviales de sus homólogos para el caso eficiente.

Sea P el VP problema $\max\{z(x)/x \in X\}$. Con el fin de proporcionar una teoría lo más general posible admitiremos que, a menos que se diga lo contrario, X puede ser no cerrado, no convexo e, incluso, no conexo.

Es posible extender de diversas maneras la noción existente para el caso escalar de cota de un conjunto. Una posibilidad admisible y, aparentemente no explotada, es la siguiente:

Definición 1.9.1 $\alpha \in R^k$ se dice que es una cota (débilmente) eficiente de $z(x)$ sobre X o, simplemente, una cota (débilmente) eficiente de P si, y sólo si, $\exists x \in X$ tal que $z(x) \geq \alpha$ ($z(x) > \alpha$).

Al conjunto de cotas (débilmente) eficientes de P lo denotaremos por $B(P)$ ($WB(P)$).

Existen otras definiciones posibles a la aquí dada. Por ejemplo, en [SwNT85] (p. 202) se presenta la dada por Brumelle ([Br81]) en la siguiente forma: $\alpha \in R^k$ es una cota superior para un conjunto $Y \subseteq R^k$, si $\alpha \geq y$ para cualquier $y \in Y$. De esta forma, resulta claro que el concepto de cota eficiente proporcionado en esta memoria generaliza la definición de Brumelle.

Con el fin de no perder la intuición geométrica consideremos el siguiente ejemplo:

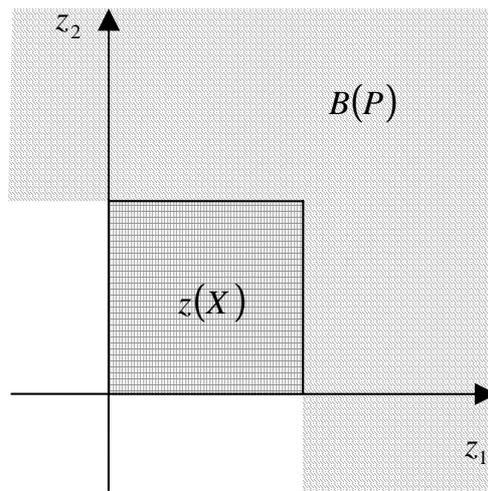


Figura 1.9

Ejemplo 1.9.2 Supongamos que $z(X) = \{z \in \mathbb{R}_+^2 / z_1 \leq 1, z_2 \leq 1\}$ (ver Figura 1.9). Entonces $B(P) = \{z \in \mathbb{R}^2 / z_1 > 1\} \cup \{z \in \mathbb{R}^2 / z_2 > 1\} \cup \{(1, 1)\}$ y $WB(P) = \{z \in \mathbb{R}^2 / z_1 \geq 1\} \cup \{z \in \mathbb{R}^2 / z_2 \geq 1\}$. ●

En general, $B(P)$ no es ni cerrado ni convexo (incluso aunque $z(X)$ si lo sea) como pone de manifiesto el Ejemplo 1.9.2.

Sin embargo, aunque $WB(P)$ también puede ser no convexo (Ejemplo 1.9.2), si podemos garantizar que es cerrado:

Proposición 1.9.3 $WB(P)$ es cerrado.

Demostración. Supongamos que $\alpha^1, \alpha^2, \dots$ es una sucesión de elementos de $WB(P)$ que converge a cierto α^* . Tenemos que probar que $\alpha^* \in WB(P)$. Supongamos por reducción al absurdo que $\alpha^* \notin WB(P) \Rightarrow \exists \bar{x} \in X$, $\bar{z} = z(\bar{x}) > \alpha^*$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k = \alpha^* \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq k_0$, $\alpha^k < \bar{z} \Rightarrow \forall k \geq k_0$, $\alpha^k \notin WB(P) \Rightarrow \#$, luego $\alpha^* \in WB(P)$. ■

El siguiente resultado indica que cualquier cota eficiente también es una cota eficiente débil.

Proposición 1.9.4 $B(P) \subseteq WB(P)$.

Demostración. Sea $\alpha \in B(P) \Rightarrow \exists x \in X$, $z(x) \geq \alpha \Rightarrow \exists x \in X$, $z(x) > \alpha \Rightarrow \alpha \in WB(P)$. ■

Por otra parte, las soluciones no dominadas de $z(X)$ son también cotas eficientes de P .

Proposición 1.9.5 $z(E^P) \subseteq B(P)$.

Demostración. Sea $\bar{z} \in z(E^P) \Rightarrow \exists \bar{x} \in E^P, z(\bar{x}) = \bar{z} \Rightarrow \nexists x \in X, z(x) \geq \bar{z} \Rightarrow \bar{z} \in B(P)$. ■

En realidad ocurre que:

Corolario 1.9.6 $z(E^P) = B(P) \cap z(X)$.

Luego, al igual que ocurre en el caso escalar tenemos que:

Corolario 1.9.7 Si P es acotado entonces $B(P) \neq \emptyset$.

Los puntos dominados de $z(X)$ no pueden ser cotas eficientes de P . Efectivamente, sea $\Delta_k^{\leq} = R_-^k - \{0\}$.

Proposición 1.9.8 $\forall \alpha \in z(E^P) + \Delta_k^{\leq}$ entonces $\alpha \notin B(P)$.

Demostración. Sea $\bar{\alpha} \in z(E^P) + \Delta_k^{\leq} \Rightarrow \exists \bar{z} \in z(E^P), \exists \bar{d} \in \Delta_k^{\leq}, \bar{\alpha} = \bar{z} + \bar{d} \Rightarrow \exists \bar{z} \in z(E^P), \bar{z} \geq \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha \notin B(P)$. ■

Para el caso débil podemos escribir:

Proposición 1.9.9 $z(WE^P) = WB(P) \cap z(X)$.

Corolario 1.9.10 Si P es débilmente acotado entonces $WB(P) \neq \emptyset$.

Proposición 1.9.11 $\forall \alpha \in z(WE^P) + R_-^k$ entonces $\alpha \notin WB(P)$.

Lamentablemente, en contra de lo que sucede en el caso escalar, puede ocurrir que P sea no (débilmente) acotado y $B(P) \neq \emptyset$ ($WB(P) \neq \emptyset$).

Ejemplo 1.9.12 Sea $P \equiv \max \left\{ (x_1, x_2) / x_2 + \frac{1}{2x_1} \leq 0 \right\}$ (ver Figura 1.10 para la representación gráfica de la región factible). Entonces $B(P) = WB(P) = \{ \alpha \in R^2 / \alpha_2 \geq 0 \}$ y $E^P = WE^P = \emptyset$. ●

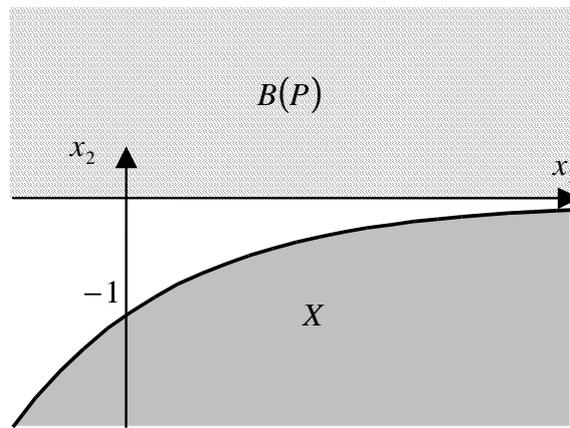


Figura 1.10

Incluso si P es un LVP, puede ocurrir que P sea no acotado y $B(P) \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.9.13 Consideremos el MOLP $P \equiv \max\{(x_1, x_2) / x_2 \leq 1, x \in \mathbb{R}_+^2\}$ (Ver la Figura 1.11 para ver la representación gráfica de su región objetivo). Evidentemente, $z(X) \neq \emptyset$, $E^P = \emptyset$ y, no obstante, $B(P) = \{\alpha \in \mathbb{R}^2 / \alpha_2 > 1\} \neq \emptyset$.

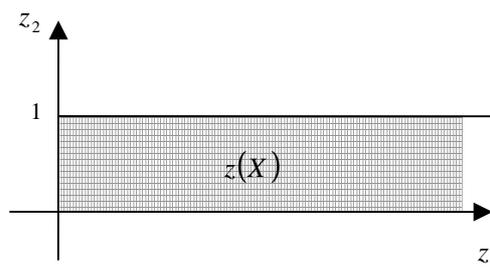


Figura 1.11

Sin embargo, si se verifica que:

Teorema 1.9.14 Si P es un LVP formulado según (1.5), con $X \neq \emptyset$ y $WB(P) \neq \emptyset$, entonces P es débilmente acotado.

Demostración. $WB(P) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \alpha \in R^k$, el sistema $Ax = b$, $x \geq 0$, $Cx > \alpha$, no tiene solución. Como $X \neq \emptyset$, por el Corolario 1.7.5 $\Leftrightarrow u^t A - \lambda^t C \geq 0^t$, $\lambda^t \alpha \geq u^t b$, $\lambda \geq 0$, tiene solución $\Rightarrow \exists \lambda \in R_+^k - \{0\}$, P_λ y D_λ son factibles $\Rightarrow \exists \lambda \in R_+^k - \{0\}$, P_λ es acotado $\Rightarrow WE^P \neq \emptyset \Rightarrow P$ es débilmente acotado. ■

Una condición suficiente para que un VP no tenga cotas eficientes es la siguiente:

Proposición 1.9.15 Sea $z(X) \neq \emptyset$. Si $d > 0$ es una dirección de recesión de $z(X)$ entonces $B(P) = \emptyset$.

Demostración. Sea $\bar{z} \in z(X)$. $\forall \alpha \in R^k \Rightarrow \exists \lambda \in R_+$, $\tilde{z} = \bar{z} + \lambda d \in z(X)$, $\tilde{z} \geq \alpha \Rightarrow \alpha \notin B(P) \Rightarrow B(P) = \emptyset$. ■

Intuitivamente resulta claro que cuanto más ajustadas sean las cotas superiores tanto más útiles serán. Por tal motivo estamos interesados en aquellas cotas superiores que sean *minimales*. Una propuesta interesante viene a continuación:

Definición 1.9.16 A los elementos de $B(P)$ ($WB(P)$) no (débilmente) dominados según el criterio minimizar, es decir, a las soluciones (débilmente) eficientes del problema $\min\{\alpha / \alpha \in B(P)\}$ ($\min\{\alpha / \alpha \in WB(P)\}$), se les denomina supremos (débilmente) eficientes de P .

Al conjunto de todos los supremos (débilmente) eficientes de P lo denotaremos por $S(P)$ ($WS(P)$).

Debemos hacer notar que la palabra supremo también ha sido usada previamente en la literatura pero, hasta donde sabemos, con diferentes significados al empleado por nosotros. A modo de ejemplo, el concepto de *supremo* de Brumelle ([Br81], p. 160) se identificó con la *menor* cota superior, es decir, $\bar{\alpha} \in R^k$ es un supremo para un conjunto $Y \subseteq R^k$ si $\bar{\alpha}$ es una cota superior (en el sentido de Brumelle) y $\bar{\alpha} \leq \alpha$ para cualquier otra cota α de Y . Resulta claro que este concepto de supremo coincide, esencialmente, con el supremo componente a componente (en un sentido escalar) de Y y que sólo hay un único supremo de Y . En particular, la propuesta de supremo eficiente hecha en la Definición 1.9.16 generaliza la dada por Brumelle.

Siguiendo con nuestro desarrollo teórico debemos observar que la circunstancia de que un VP tenga cotas eficientes no constituye ninguna garantía para la existencia de supremos (aunque sí es una condición necesaria) como ponen de manifiesto los siguientes dos ejemplos:

Ejemplo 1.9.17 En el caso del Ejemplo 1.9.12, $S(P) = \emptyset$ y $WS(P) = \{x \in R^2 / x_2 = 0\}$. Obsérvese que $B(P) \neq \emptyset$ y, sin embargo, $S(P) = \emptyset$.

●

Ejemplo 1.9.18 Para el caso trivial de $X = \emptyset$ entonces $B(P) = WB(P) = R^k \Rightarrow S(P) = WS(P) = \emptyset$.

●

En general, el cálculo de $S(P)$ o $WS(P)$ es una tarea complicada pues no se suele tener una descripción adecuada de $B(P)$ o $WB(P)$. Sin embargo, es posible afirmar que cualquier solución no dominada de P es un supremo.

Teorema 1.9.19 $z(E^P) \subseteq S(P)$.

Demostración. Sea $\bar{z} \in z(E^P) \Rightarrow \bar{z} \in B(P)$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{z} \notin S(P) \Rightarrow \exists \hat{z} \in B(P)$, $\hat{z} \leq \bar{z} \Rightarrow \exists \bar{x} \in X$, $\bar{z} = z(\bar{x}) \geq \hat{z} \Rightarrow \hat{z} \notin B(P) \Rightarrow \#$. Luego $\bar{z} \in S(P)$.

■

Nuevamente, conforme al sentido escalar de los términos, es inmediato que:

Corolario 1.9.20 Si P es acotado entonces $S(P) \neq \emptyset$.

El recíproco, en general, no es cierto. Puede ocurrir que $S(P) \neq \emptyset$ y que P no sea acotado. Efectivamente:

Ejemplo 1.9.21 Supongamos que $z(X) = \{(z_1, z_2) \in R^2 / (z_1 z_2 \geq -1, z_1 < 0)\} \cup \{(z_1, z_2) \in R^2 / (z_1 z_2 \leq -1, z_1 > 0)\}$ (ver Figura 1.12 para su representación gráfica). En este caso, $B(P) = R_+^2$, $S(P) = \{(0, 0)\}$ y $E^P = \emptyset$.

●

Por un razonamiento análogo,

Teorema 1.9.22 $z(WE^P) \subseteq WS(P)$.

Corolario 1.9.23 Si P es débilmente acotado entonces $WS(P) \neq \emptyset$.

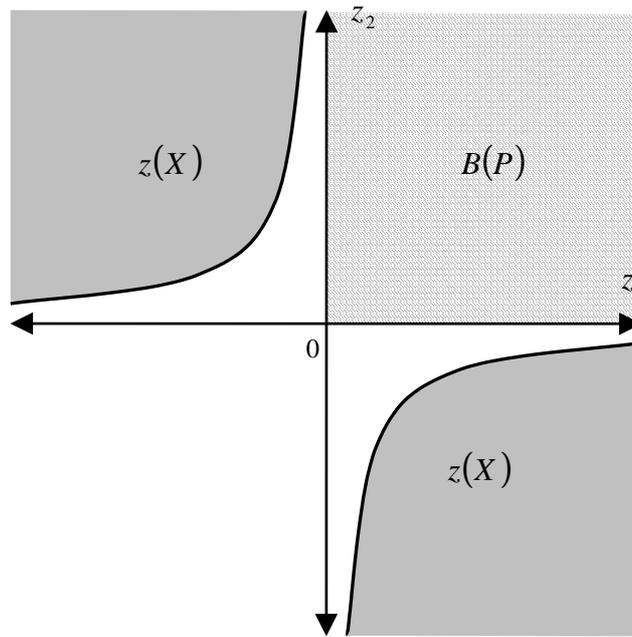


Figura 1.12

Nótese que puede darse el caso de que $WS(P) \neq \emptyset$ y P no sea débilmente acotado. Efectivamente, en el Ejemplo 1.9.21, se tiene que $WE^P = \emptyset$, $WB(P) = R_+^2$ y $WS(P) = \{(0, \alpha) / \alpha \in R_+\} \cup \{(\alpha, 0) / \alpha \in R_+\}$.

Es posible dar una condición muy similar a la enunciada en la Proposición 1.9.15, pero relativa a los supremos de un VP. Para ver esto daremos un resultado auxiliar. Sea e_i un vector con todas sus componentes nulas, salvo la i -ésima con valor 1.

Proposición 1.9.24 *Si $\bar{z} \in S(P)$ entonces $\exists \delta > 0$ tal que $\forall \varepsilon \in R_{++}$, $\varepsilon \leq \delta$, $\exists \hat{z} \in z(X)$, $\hat{z} \geq \bar{z} - \varepsilon e_i$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$.*

Demostración. Sea $i \in \{1, \dots, k\}$. Supongamos por reducción al absurdo que $\forall \delta > 0$, $\exists \varepsilon \in R_{++}$, $\varepsilon \leq \delta$, $\nexists \hat{z} \in z(X)$, $\hat{z} \geq \tilde{z} = \bar{z} - \varepsilon e_i \Rightarrow \tilde{z} \in B(P)$, $\tilde{z} \leq \bar{z} \Rightarrow \bar{z} \notin S(P) \Rightarrow \#$. ■

Proposición 1.9.25 *Sea $z(X) \neq \emptyset$. Si $d \in R_+^k - \{0\}$ es una dirección de recesión de $z(X)$ entonces $S(P) = \emptyset$.*

Demostración. Sea $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $d_i > 0$. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{z} \in S(P)$. Por la Proposición 1.9.24 $\Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que $\forall \varepsilon \in R_{++}$, $\varepsilon \leq \delta$, $\exists \hat{z} \in z(X)$, $\hat{z} \geq \bar{z} - \varepsilon e_i \Rightarrow \exists \lambda \in R_+$, $\tilde{z} = \hat{z} + \lambda d \in z(X)$, $\tilde{z} \geq \bar{z} \Rightarrow \#$, pues $\bar{z} \in B(P)$. ■

A continuación pretendemos estudiar cuando podemos garantizar que $S(P) \subseteq z(X)$. Primero necesitamos ciertos resultados previos:

Es inmediato que:

Lema 1.9.26 Sean $\alpha \in R^k$ y $G_\alpha = \{z \in R^k / z \geq \alpha\}$ el ortante no negativo desplazado a α . Entonces G_α es cerrado, convexo y su conjunto de direcciones de recesión es R_+^k .

Corolario 1.9.27 Si $S(P) \neq \emptyset$ entonces $\forall \alpha \in R^k$, $z(X)$ y G_α no tienen direcciones de recesión comunes.

Demostración. Directa sin más que aplicar la Proposición 1.9.25 y el Lema 1.9.26. ■

Proposición 1.9.28 Sea $H \subseteq R^k$ un hiperplano dado por $\{z \in R^k / \alpha^t z = \beta\}$. Entonces, si $H \cap G_{\bar{z}} = \emptyset$ entonces α tiene todas sus componentes del mismo signo.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que podemos particionar $\{1, \dots, k\}$ en dos subconjuntos, I y J tales que $\alpha_i \geq 0$ y $\alpha_j \leq 0$. Es claro que podemos encontrar un vector $d \in R_{++}^k$ con la propiedad $d^t \alpha = 0 \Rightarrow d$ es una dirección de recesión de H . Luego, dado $\hat{z} \in H \Rightarrow \exists \lambda \in R_+$ tal que $\tilde{z} = \hat{z} + \lambda d \in H$ y $\tilde{z} \geq \bar{z} \Rightarrow H \cap G_{\bar{z}} \neq \emptyset$, absurdo. ■

Ahora ya estamos en condiciones de probar uno de los resultados más importantes en esta sección.

Teorema 1.9.29 Sea $z(X) \neq \emptyset$ cerrado y convexo. Entonces $S(P) \subseteq z(X)$.

Demostración. Sea $\bar{z} \in S(P)$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{z} \notin z(X)$. Sea $G_{\bar{z}} = \{z \in R^k / z \geq \bar{z}\}$. Como $\bar{z} \in B(P)$ y $\bar{z} \notin z(X) \Rightarrow G_{\bar{z}} \cap z(X) = \emptyset$. Ahora, aplicando [Rc70], Corollary 11.4.1 $\Rightarrow H = \{z \in R^k / \alpha^t z = \beta\}$ separa fuertemente a $z(X)$ y $G_{\bar{z}}$, es decir, dado $B = \{z \in R^k / |z| \leq 1\}$ la bola euclídea unitaria, entonces $\exists \varepsilon \in R_{++}$, $\alpha^t z < \beta$, $\forall z \in z(X) + \varepsilon B$, $\alpha^t z > \beta$, $\forall z \in G_{\bar{z}} + \varepsilon B$ ([Rckf70], p. 95). Como el hiperplano H no intersecta a $G_{\bar{z}}$, por la Proposición 1.9.28 $\Rightarrow \alpha$ tiene todas sus componentes del mismo signo. Como $\alpha^t z > \beta$, $\forall z \in G_{\bar{z}} + \varepsilon B \Rightarrow \alpha \in R_+^k$. Sean $i \in \{1, \dots, k\}$ y $\gamma \in R_{++}$, $\gamma < \varepsilon \Rightarrow \tilde{z} = \bar{z} - \gamma e^i \in G_{\bar{z}} + \varepsilon B \Rightarrow \alpha^t \tilde{z} > \beta$, $\tilde{z} \leq \bar{z}$. Supongamos por reducción al absurdo $\exists x \in X$, $z(x) \geq \tilde{z} \Rightarrow \alpha^t z(x) \geq \alpha^t \tilde{z} > \beta \Rightarrow \#$, luego, $\tilde{z} \in B(P)$. Como $\tilde{z} \leq \bar{z} \Rightarrow \bar{z} \notin S(P) \Rightarrow \#$. Por tanto, $\bar{z} \in z(X)$. ■

Es interesante observar que las hipótesis anteriores no se pueden relajar, pues:

- (i) si eliminamos la convexidad, utilizando el Ejemplo 1.9.21, vemos que $0 \in S(P)$ y, sin embargo, $0 \notin z(X)$.
- (ii) si no imponemos que $z(X)$ sea cerrado podemos considerar el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.9.30 Supongamos que $z(X) = \{z \in \mathbb{R}^2 / \alpha'z < \beta\}$ (ver su representación gráfica en la Figura 1.13). Evidentemente $z(X)$ no es cerrado (en realidad es abierto) y $S(P) = \{z \in \mathbb{R}^2 / \alpha'z = \beta\} \not\subseteq z(X)$.

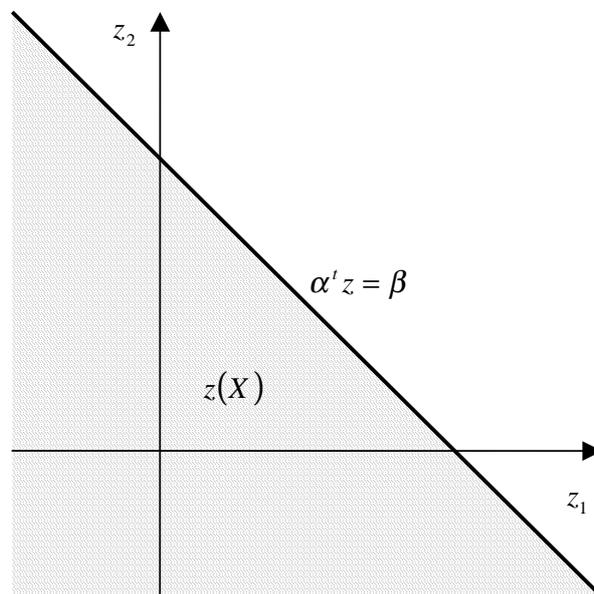


Figura 1.13

El teorema anterior no es cierto para el caso débil, es decir, aunque $z(X)$ sea cerrado y convexo, no se puede garantizar que $WS(P) \subseteq z(X)$. Efectivamente:

Ejemplo 1.9.31 Utilizando el Ejemplo 1.9.13, es claro que $z(X)$ es cerrado y convexo. Además $WB(P) = \{\alpha \in \mathbb{R}^2 / \alpha_2 \geq 1\}$, $WS(P) = \{\alpha \in \mathbb{R}^2 / \alpha_2 = 1\}$ y, evidentemente, $WS(P) \not\subseteq z(X)$.

Corolario 1.9.32 Sea $z(X) \neq \emptyset$ cerrado y convexo. Entonces $S(P) \subseteq z(E^P)$.

Demostración. Sea $\bar{z} \in S(P)$. Por el Teorema 1.9.29 $\Rightarrow \exists \bar{x} \in X$, $z(\bar{x}) = \bar{z}$, $\bar{z} \in B(P) \Rightarrow \bar{z} \in z(E^P)$. ■

Corolario 1.9.33 Si P es un CMP entonces $S(P) = z(E^P)$.

Demostración. Aplicar Teorema 1.9.19 y Corolario 1.9.32. ■

Corolario 1.9.34 Si P es un LVP entonces $S(P) = z(E^P)$.

Demostración. Si P es un LVP $\Rightarrow z(X)$ cerrado y convexo. Ahora basta utilizar Corolario 1.9.33. ■

El resultado anterior es de gran importancia pues permite establecer una relación de dualidad para el caso lineal, en el sentido de que calcular las soluciones no dominadas de P es equivalente a resolver $D \equiv \min\{\alpha / \alpha \in B(P)\}$, es decir, $z(E^P) = E^D$. Ahora bien, $B(P) = \{\alpha \in R^k / Ax = b, x \geq 0, Cx \geq \alpha, \text{no tiene solución}\}$. Teniendo en cuenta que $z(E^P) = E^D$ y aplicando el Corolario 1.7.3, podemos concluir que $D \equiv \min\{\alpha \in R^k / u^t A \geq \lambda^t C, u^t b \leq \lambda^t \alpha, u \in R^m, \lambda \in R^k_+\}$. Como en realidad, ésta es la formulación de problema dual para el LVP propuesta por Gale-KuhnTucker ([GKT51]), hemos obtenido una justificación de fuerte carácter geométrico para tal definición. En el capítulo 3 se realizará un estudio en profundidad sobre la dualidad en programación vectorial lineal.

Nos hacemos ahora la pregunta de si será posible lograr una extensión de los razonamientos dados anteriormente al caso débil.

Para el caso débil, en general, no se verifica que $WS(P) \subseteq z(WE^P)$, incluso aunque $z(X)$ fuese cerrado y convexo, o aún en el extremo de que fuese un poliedro. Para ello basta observar en el Ejemplo 1.9.13 que $WB(P) = \{\alpha \in R^2 / \alpha_2 \geq 1\}$, $WS(P) = \{\alpha \in R^2 / \alpha_2 = 1\}$ y $WS(P) \not\subseteq z(X)$.

Consideremos el siguiente resultado preliminar:

Proposición 1.9.35 Sean Y subconjunto de R^k no vacío, cerrado y convexo y $H \subseteq R^k$ un hiperplano dado por $\{z \in R^k / \alpha^t z = \beta\}$. Si $Y = Y + R^k_-$ y $H \cap Y = \emptyset$ entonces α tiene todas sus componentes del mismo signo.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que podemos particionar $\{1, \dots, k\}$, en 2 subconjuntos no vacíos, I y J tales que $\alpha_i \geq 0$ y $\alpha_j \leq 0$. Es claro que podemos obtener un vector $d \in R^k_-$ que verifique $d^t \alpha = 0$

$\Rightarrow d$ es una dirección de recesión de H . Así, dado $\bar{z} \in Y$ y $\hat{z} \in H \Rightarrow \exists \lambda \in R_+$ tal que $\tilde{z} = \hat{z} + \lambda d \in H$ y $\tilde{z} < \bar{z} \Rightarrow \tilde{z} \in Y \Rightarrow H \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow \#$.

■

A continuación damos la formulación correspondiente del Teorema 1.9.29 para el caso débil.

Teorema 1.9.36 *Sea $z(X) \neq \emptyset$, cerrado y convexo. Si $z(X) = z(X) + R_-^k$ entonces $WS(P) \subseteq z(X)$.*

Demostración. Sea $\bar{z} \in WS(P)$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{z} \notin z(X)$. Por el teorema de hiperplanos de separación existe un hiperplano $H = \{z \in R^k / \alpha^t z = \beta\}$ tal que $\alpha^t z < \beta, \forall z \in z(X)$ y $\alpha^t \bar{z} > \beta$. Como, $H \cap z(X) = \emptyset$ y $z(X) = z(X) + R_-^k$, por la Proposición 1.9.35 $\Rightarrow \alpha$ tiene todas sus componentes del mismo signo. Ahora, teniendo en cuenta que $\alpha^t z < \beta, \forall z \in z(X) \Rightarrow \alpha \in R_+^k$. Sean $\gamma \in R_{++}$ y $\tilde{z} = \bar{z} - \gamma e$ tales que $\alpha^t \tilde{z} > \beta \Rightarrow \tilde{z} < \bar{z}$. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists x \in X, z(x) > \tilde{z} \Rightarrow \alpha^t z(x) > \alpha^t \tilde{z} > \beta \Rightarrow \#,$ luego $\tilde{z} \in WB(P)$. Por último, dado que $\tilde{z} < \bar{z} \Rightarrow \bar{z} \notin S(P) \Rightarrow \#,$ luego $\bar{z} \in z(X)$.

■

Corolario 1.9.37 *Sea $z(X) \neq \emptyset$, cerrado y convexo con $z(X) = z(X) + R_-^k$. Entonces $WS(P) \subseteq z(WE^P)$.*

Demostración. Sea $\bar{z} \in WS(P)$. Por el Teorema 1.9.36 $\Rightarrow \exists \bar{x} \in X, z(\bar{x}) = \bar{z}, \bar{z} \in WB(P) \Rightarrow \bar{z} \in z(WE^P)$.

■

Corolario 1.9.38 *Si $z(X) \neq \emptyset$, cerrado y convexo con $z(X) = z(X) + R_-^k$ entonces $WS(P) = z(WE^P)$.*

Demostración. Consecuencia inmediata del Teorema 1.9.22 y el Corolario 1.9.37.

■

Ahora ya son claros los siguientes resultados:

Corolario 1.9.39 *Si P es un CVP con $z(X) = z(X) + R_-^k$ entonces $WS(P) = z(WE^P)$.*

Corolario 1.9.40 *Si P es un LVP con $z(X) = z(X) + R_-^k$ entonces $WS(P) = z(WE^P)$.*

1.10 Relajación de un VP

En este apartado introducimos el concepto de relajación de un VP y se analizan algunas de las particularizaciones más importantes del mismo. Nuevamente, con la intención de proporcionar una teoría lo más general posible supondremos, a menos que se diga lo contrario, la región factible tan arbitraria como queramos (no cerrada, no convexa, no conexa, ...).

Sean P^1 y P^2 , respectivamente, los problemas $\max\{z^1(x)/x \in X^1\}$ y $\max\{z^2(x)/x \in X^2\}$.

La siguiente definición es una posible generalización del correspondiente concepto escalar:

Definición 1.10.1 *Se dice que P^2 es una relajación de P^1 o que P^1 constituye una restricción de P^2 si se cumple: i) $X^1 \subseteq X^2$ y ii) $z^1(x) \leq z^2(x)$, $\forall x \in X^1$.*

La importancia del problema relajado P^2 viene dada, entre otras cosas, porque $z^2(E^{P^2})$ proporciona cotas para P^1 . Efectivamente:

Proposición 1.10.2 $z^2(E^{P^2}) \subseteq B(P^1)$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in E^{P^2}$. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \hat{x} \in X^1$, $z^1(\hat{x}) \geq z^2(\bar{x}) \Rightarrow z^2(\hat{x}) \geq z^2(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} \notin E^{P^2} \Rightarrow \#$, luego $\nexists \hat{x} \in X^1$, $z^1(\hat{x}) \geq z^2(\bar{x}) \Rightarrow z^2(\bar{x}) \in B(P^1)$. ■

Una importante clase de relajaciones de P^1 la constituyen aquellas que cumplen que $z^1(x) = z^2(x) = z(x)$, $\forall x \in X^1$. Consideremos a partir de ahora este caso y analicémoslo con detenimiento.

Para esta clase de relajaciones se tiene:

Proposición 1.10.3 $E^{P^2} \cap X^1 \subseteq E^{P^1}$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in E^{P^2} \cap X^1$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^{P^1} \Rightarrow \exists \hat{x} \in X^1 \subseteq X^2$, $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} \notin E^{P^2} \Rightarrow \#$, luego $\bar{x} \in E^{P^1}$. ■

Proposición 1.10.4 $\bar{E}^{P^1} \subseteq \bar{E}^{P^2}$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in \bar{E}^{P^1} \Rightarrow \exists \hat{x} \in X^1 \subseteq X^2$, $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} \in \bar{E}^{P^2}$. ■

Nótese que:

- (i) Si $x \in E^{P^1}$, no necesariamente $x \in E^{P^2}$.
- (ii) Si $x \in \bar{E}^{P^2}$, $x \in X^1$, no necesariamente, $x \in \bar{E}^{P^1}$. Efectivamente, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.10.5 Sean $X^1 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 / x_1 \leq 1, x_2 \leq 1\}$, $X^2 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 / x_2 \leq 1\}$, $P^1 \equiv \max\{x / x \in X^1\}$ y $P^2 \equiv \max\{x / x \in X^2\}$. Ver Figura 1.14 y Figura 1.15 para la representación gráfica de las regiones factibles. Evidentemente, $X^1 \subseteq X^2$. Además, es claro que $\{(1, 1)\} \in E^{P^1}$ y $\{(1, 1)\} \notin E^{P^2}$ (en realidad, $E^{P^1} = \{(1, 1)\}$ y $E^{P^2} = \emptyset$).

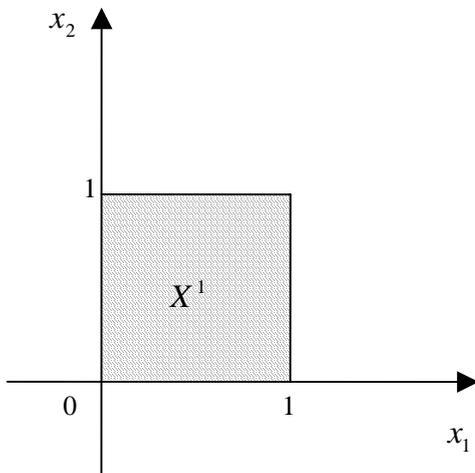


Figura 1.14

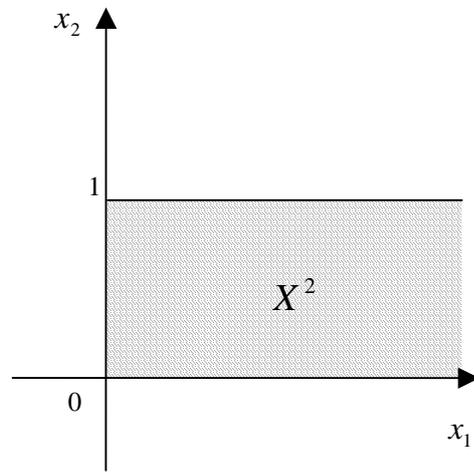


Figura 1.15

Proposición 1.10.6¹ Supongamos que P^1 y P^2 son LVP's y que $X^1 \neq \emptyset$. Entonces, si $E^{P^2} \neq \emptyset$ se verifica que $E^{P^1} \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $E^{P^1} = \emptyset \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}_{++}^k$, P_λ^1 es no acotado. Como $\emptyset \neq X^1 \subseteq X^2 \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}_{++}^k$, P_λ^2 es no acotado $\Rightarrow E^{P^2} = \emptyset \Rightarrow \#$, luego $E^{P^1} \neq \emptyset$. ■

Si adoptamos la perspectiva de que P^2 es el problema original y P^1 una determinada restricción del primero, se obtienen una serie de casos interesantes:

¹ En [St86], Theorem 9.31, p. 228, se da una particularización de este resultado.

1.10.1 Imposición de Niveles a las Funciones Objetivo

Sean $\alpha \in R^k$ y $X^1 = \{x \in X^2 / z(x) \geq \alpha\} \subseteq X^2$. Bajo estas circunstancias, sí se cumple que las soluciones eficientes del problema restringido son eficientes en el problema original. Efectivamente:

Proposición 1.10.7 $E^{P^1} \subseteq E^{P^2}$.

Demostración. Sea $\tilde{x} \in E^{P^1}$ y supongamos, por reducción al absurdo, que $\tilde{x} \notin E^{P^2}$. Entonces, $\exists \bar{x} \in X^2$, $z(\bar{x}) \geq z(\tilde{x}) \geq \alpha \Rightarrow \tilde{x} \notin E^{P^1} \Rightarrow \#$, luego $\tilde{x} \in E^{P^2}$ y, por tanto, $E^{P^1} \subseteq E^{P^2}$. ■

En concreto:

Corolario 1.10.8 $E^{P^1} = E^{P^2} \cap X^1$.

Demostración. $E^{P^1} = E^{P^1} \cap X^1 \subseteq E^{P^2} \cap X^1 \subseteq E^{P^1}$. ■

Los resultados anteriores son de gran importancia en programación vectorial pues nos indican que la restricción del rango de valores de las funciones objetivo mediante la introducción de cotas inferiores permite *contraer* la región eficiente original. De esta manera, es posible *localizar* la aplicación de los métodos generadores de soluciones eficientes a áreas de interés específico, reduciendo el esfuerzo computacional y la posibilidad de saturación del DM.

Nótese que para el caso general puede ocurrir que $E^{P^1} = \emptyset$ aunque $E^{P^2} \neq \emptyset$ y $X^1 \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.10.9 Sea $P^2 \equiv \max\{x / x \in X^2\}$ donde α y X^2 están representados en la Figura 1.16. Entonces es claro que $X^1 \neq \emptyset$, $E^{P^2} = \{\bar{x}\}$ y $E^{P^1} = \emptyset$. ●

Como especializaciones más comunes de la región factible X^1 tenemos:

- (i) $X^1 = \{x \in X^2 / z_i(x) \geq \alpha_i\}$ para algún $i \in \{1, \dots, k\}$ (acotaciones individualizadas de alguna función objetivo).
- (ii) Cuando tomamos $\alpha = \bar{z} = z(\bar{x})$ para un cierto $\bar{x} \in X^2$, entonces $X^1 = \{x \in X^2 / z(x) \geq \bar{z}\} \subseteq X^2$. El problema P^1 así definido es de gran importancia en programación vectorial lineal y entera como comprobaremos más adelante.

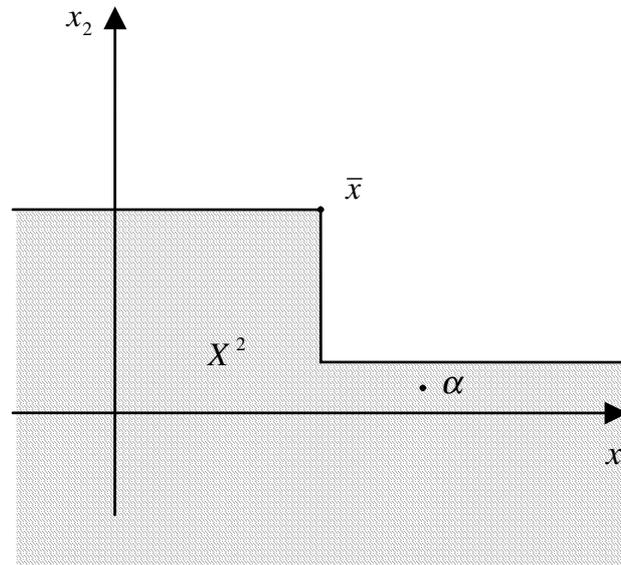


Figura 1.16

El siguiente resultado indica que el LVP es N-acotado (ver Definición 1.2.15).

Corolario 1.10.10 ([St86], Theorem 9.32) *Sea P un LVP con $E^P \neq \emptyset$. Entonces, $\forall x \in X$, $x \in E^P$ o, $\exists \hat{x} \in E^P$ tal que $z(\hat{x}) \geq z(x)$.*

Demostración. Si $E^P = X$ ya estaría. En caso contrario, sea $\bar{x} \in X \cap \bar{E}^P$. Haciendo que P desempeñe el papel de P^2 , sea $X^1 = \{x \in X / z(x) \geq z(\bar{x})\} \subseteq X$. Como $X^1 \neq \emptyset$ y $E^P \neq \emptyset$, por la Proposición 1.10.6 $\Rightarrow E^{P^1} \neq \emptyset$. Además (Proposición 1.10.7), $E^{P^1} \subseteq E^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in E^P$, $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \exists \hat{x} \in E^P$, $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x})$. ■

Aplicando un razonamiento similar:

Corolario 1.10.11 *Sea P un LVP con $WE^P \neq \emptyset$. Entonces, $\forall x \in X$, $x \in WE^P$ o, $\exists \hat{x} \in WE^P$, $z(\hat{x}) > z(x)$.*

1.10.2 Cortes Mediante Hiperplanos Arbitrarios

La idea de aplicar cortes arbitrarios (no necesariamente relacionados con las funciones objetivo) a la región factible, con la intención de descartar soluciones, resulta muy sugerente desde un punto de vista algorítmico. Por desgracia, bajo estas circunstancias es difícil obtener resultados de utilidad entre los problemas original y restringido. Aquí analizaremos algunas interesantes propiedades que surgen bajo hipótesis de linealidad.

Sean $\alpha \in R^k$, $\beta \in R$, X^2 poliedro, $X^1 = \{x \in X^2 / \alpha^t x \geq \beta\} \subseteq X^2$ y $z(x) = Cx$.

Teorema 1.10.12 ([EcSn94], Theorem 4.2) $\forall \bar{x} \in E^{P^1}$ tal que $\alpha^t \bar{x} > \beta$ entonces $\bar{x} \in E^{P^2}$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^{P^2} \Rightarrow \exists \hat{x} \in X^2$, $C\hat{x} \geq C\bar{x} \Rightarrow C(\hat{x} - \bar{x}) \geq 0$. Como $\bar{x} \in E^{P^1} \Rightarrow \hat{x} \notin X^1 \Rightarrow \alpha^t \hat{x} < \beta < \alpha^t \bar{x} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, $x = (1 - \varepsilon)\bar{x} + \varepsilon\hat{x} = \bar{x} + \varepsilon(\hat{x} - \bar{x}) \in X^1 \Rightarrow Cx = C\bar{x} + \varepsilon C(\hat{x} - \bar{x}) \geq C\bar{x} \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in E^{P^1}$. Luego, $\bar{x} \in E^{P^2}$. ■

Sea $F = \{x \in X^2 / \alpha^t x = \beta\}$ la cara generada (o inducida) por el hiperplano $H = \{x \in R^n / \alpha^t x = \beta\}$.

Teorema 1.10.13 ([EcSn94], Theorem 4.3) Si $\alpha^t d < 0$, $\forall d \in C^\geq - \{0\}$ entonces $F \subseteq E^{P^1}$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{x} \in F$, $\bar{x} \notin E^{P^1} \Rightarrow \alpha^t \bar{x} = \beta$, $\exists \hat{x} \in X^1$, $C\hat{x} \geq C\bar{x}$. Sea $d = \hat{x} - \bar{x} \neq 0 \Rightarrow d \in C^\geq - \{0\}$. Además $\alpha^t d = \alpha^t(\hat{x} - \bar{x}) \geq \beta - \beta = 0 \Rightarrow \#$, luego $F \subseteq E^{P^1}$. ■

Sea P el LVP $\max\{Cx / x \in X\}$ y $H = \{x \in R^n / \alpha^t x = \beta\}$ un hiperplano soporte de X . En tal caso, $F = \{x \in X / \alpha^t x = \beta\}$ es una cara de X y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $X \subseteq \{x \in R^n / \alpha^t x \geq \beta\}$. Dada esta situación, el resultado anterior se particulariza en:

Corolario 1.10.14 Si $\alpha^t d < 0$, $\forall d \in C^\geq - \{0\}$ entonces $F \subseteq E^P$.

Veamos cómo se puede comprobar la condición $\alpha^t d < 0$, $\forall d \in C^\geq - \{0\}$. Una posibilidad consiste en:

Teorema 1.10.15 $\alpha^t d < 0$, $\forall d \in C^\geq - \{0\}$ si, y solo si, el problema $\max\{\alpha^t d / Cd - s = 0, e^t s \geq 1, s \geq 0\} < 0$.

Demostración. $\alpha^t d < 0$, $\forall d \in C^\geq - \{0\} \Leftrightarrow \max\{\alpha^t d / d \in C^\geq - \{0\}\} < 0 \Leftrightarrow \max\{\alpha^t d / Cd - s = 0, e^t s > 0, s \geq 0\} < 0 \Leftrightarrow \max\{\alpha^t d / Cd - s = 0, e^t s \geq 1, s \geq 0\} < 0$. ■

Capítulo 2

Caracterizaciones de Caras Eficientes

2.1 Introducción

La caracterización adecuada de la eficiencia para los vértices, las aristas y, en general, las caras de dimensión arbitraria de un LVP, juega un papel fundamental en el desarrollo de los algoritmos de optimización vectorial. Sin embargo, el problema de la degeneración complica bastante tal análisis de eficiencia, dándose la circunstancia de que, en este supuesto, para las caras de dimensión mayor que uno, existe un notable vacío en la literatura (como excepción tenemos que destacar el trabajo de Murty, [Mr85]).

Por otra parte, al analizar la bibliografía disponible hemos observado una gran dispersión de resultados, en ocasiones no exentos de errores, y desprovistos de un marco común que los integre de forma armónica. Todo ello nos animó a centrar parte de nuestra investigación en este interesantísimo tema, con el fin de ofrecer un tratamiento coherente del mismo, que posibilite la obtención de nuevos resultados. En este sentido, nuestra aportación está recogida en el presente capítulo, cuyos primeros apartados (2.2, 2.3 y 2.4) tienen un carácter general y están relacionados con la programación lineal escalar, abordando tópicos de especial relevancia y utilidad que, por lo común, son insuficientemente tratados en los manuales y libros de texto a los que hemos tenido acceso.

Concretamente, en la sección 2.2 se analiza el fenómeno de la degeneración, a menudo causa de errores y malentendidos y siempre fuente de dificultades. Merece destacar la distinción que hacemos entre la degeneración (geométrica) del poliedro y la degeneración (algebraica) de la correspondiente representación lineal utilizada. Adicionalmente, también

enunciamos los resultados más relevantes que acontecen cuando se especifica un vértice a través de una base.

Como nuestra capacidad para obtener caracterizaciones acerca de la eficiencia de las caras de un poliedro está altamente influenciada por el mecanismo utilizado para describirlas, enunciamos, en el apartado 2.3, las alternativas más útiles que conocemos. De esta manera, introducimos el concepto de *descriptor de una cara* (Definición 2.3.5), basado en la especificación de las desigualdades activas que presenta. Esta idea clásica es posible (y deseable) refinarla con el propósito de que cualquier cara, independientemente de su degeneración o no, tenga asociado un único descriptor. Surge así el concepto de *descriptor maximal* el cual presentamos en la Definición 2.3.11. La importancia de utilizar un descriptor maximal para representar una cara se fundamenta en el hecho de que hace inmediata la especificación de su interior relativo (Proposición 2.3.19). Habiéndonos dotado de esta herramienta, desarrollamos una teoría completa para la misma, distinguiendo específicamente los casos correspondientes a caras incidentes en un vértice no degenerado y degenerado, respectivamente. Merecen ser destacados los prácticos tests proporcionados para comprobar la maximalidad de un descriptor (Corolarios 2.3.15 y 2.3.33).

Una cuestión fascinante, e íntimamente relacionada con los tests de eficiencia, es la caracterización adecuada del conjunto de todas las soluciones óptimas de un programa escalar lineal. Sin embargo, estamos acostumbrados, debido al tratamiento habitual que ha *padecido* este tema, a que cuando se resuelve un programa escalar nos quedemos con el primer vértice óptimo encontrado, sin preguntarnos nada acerca de los posibles máximos alternativos. Aunque esta actitud se puede justificar parcialmente con un razonamiento del tipo “*todas las soluciones óptimas tienen un mismo valor objetivo*”, lo cierto es que no es trivial lograr descripciones adecuadas de tales conjuntos. La sección 2.4 refleja un enérgico intento por nuestra parte para paliar esta situación, aglutinando y desarrollando ideas de interés. Nos sentimos especialmente satisfechos de las caracterizaciones dadas en optimalidad total, a través de descriptores maximales, para caras incidentes en un vértice degenerado (Teoremas 2.4.19 y 2.4.20) y del resultado enunciado en el Teorema 2.4.25 acerca de la relación existente entre una cara óptima y la correspondiente relajación que resulta al suprimir de la representación del poliedro las desigualdades inactivas de la cara.

Tras estos resultados preliminares, el material de las secciones 2.5 a la 2.9 trata, específicamente, la cuestión de la determinación de la eficiencia de una cara.

De esta forma, el apartado 2.5 está dedicado a las caras dadas a través de envolventes convexas de puntos. Los resultados expuestos bajo

este epígrafe son ampliamente conocidos y tienen interés por la evidencia geométrica que proporcionan.

La sección 2.6 trata uno de los tópicos que quizás haya recibido más atención, a lo largo del tiempo, en la teoría del LVP. Estamos hablando de la caracterización de vértices eficientes. En 1973, Evans y Steuer publicaron un artículo magnífico, en el que exponían con notable elegancia un buen número de condiciones necesarias y suficientes para determinar la eficiencia de un vértice, habiendo tenido en cuenta, incluso, el caso degenerado. Aquí, aparte de los resultados de Evans y Steuer, hemos integrado algunos enunciados por Phillip ([Ph72], [Ph77]) y por Isermann ([Is77a]).

La sección 2.7 está dedicada a la caracterización de la eficiencia de aristas incidentes en un vértice conocido. Este era un trabajo pendiente a mitad de los años 70 del que tomaron buena nota Ecker y Kouada, quienes en un artículo sobresaliente ([EcKd78]), *pusieron las cosas en su sitio*. La disposición de estos tests, tanto para el caso no degenerado como para el degenerado, dejó el terreno preparado para el siguiente gran desafío: la caracterización de caras arbitrarias incidentes en un vértice conocido.

Aunque diversos autores (Ecker, Hegner, Kouada, Isermann, Murty, ...) han proporcionado, con mayor o menor éxito, tests para comprobar la eficiencia de una cara, supuesta su incidencia en un vértice dado, la complejidad del tema es de tal envergadura (principalmente debida al fenómeno de la degeneración) y la cantidad de ideas y recursos que se pueden utilizar tan grande, que el campo no está en absoluto agotado. En este sentido, extendiendo las ideas de los dos apartados anteriores, hemos realizado dos desarrollos teóricos novedosos, ambos con un escrupuloso tratamiento del caso degenerado, que nos han proporcionado un número considerable de condiciones eficaces, que garantizan la eficiencia de una cara. Para nosotros resultan muy gratificantes, entre otros, los Corolarios 2.8.2, 2.8.3 y 2.8.20, para el caso no degenerado, y los Corolarios 2.8.23, 2.8.25, 2.8.35 y 2.8.42, para el caso degenerado.

Cuando no se conoce explícitamente ninguno de los vértices en los que incide la cara (hecho que puede presentarse dependiendo de la metodología de resolución empleada), las herramientas desarrolladas en la sección 2.8 no tienen utilidad. En el apartado 2.9 investigamos esta variante. Para ello se partió de los resultados obtenidos por Yu y Zeleny ([YuZl75]), para poliedros dados en forma de sistemas de desigualdades, y se dedujo un nuevo test (Corolario 2.9.5) mediante la aplicación del Teorema de la Alternativa de Tucker. Después de reescribir este resultado para poliedros en forma estándar (Corolario 2.9.9), observamos con entusiasmo que, cuando las condiciones se particularizaban para puntos arbitrarios (no necesariamente vértices), se obtenían, además de ciertos tests clásicos enunciados por Evans y Steuer, algún otro nuevo (Corolario 2.9.13).

Finalmente, la sección 2.10 trata brevemente la noción de región de indiferencia, la cual, aunque directamente no proporciona caracterizaciones de eficiencia para caras, sí permite asociar a cada cara eficiente un conjunto preciso de identificadores. Esta idea ha sido utilizada, entre otros, por Gal ([Gal77]).

2.2 Consideraciones sobre Degeneración

La *degeneración* es un fenómeno bastante frecuente en la práctica y fuente de numerosos problemas en programación lineal ([Hd62], p. 174), entre los que podemos destacar el *ciclado* (*cycling*) y el *estancamiento* en el valor objetivo (*stalling*). Sin embargo, existen también otras dificultades asociadas al fenómeno de la degeneración, quizás menos conocidas y más sutiles, como el cálculo de las caras incidentes en un vértice degenerado, que complican extraordinariamente la programación vectorial.

Los motivos anteriores son de suficiente peso para hacer, siquiera, un breve repaso de conocimientos sobre este apasionante tema, no siempre bien entendido.

Definición 2.2.1 ([MrCh95], p. 28) *Geoméricamente, un punto extremo del poliedro X es degenerado (no degenerado) si el número de facetas incidentes en él es estrictamente mayor (igual) que la dimensión del poliedro.*

Definición 2.2.2 ([MrCh95], p. 28) *Un poliedro X se dice no degenerado (degenerado) si cualquier (algún) punto extremo de X es no degenerado (degenerado).*

Ejemplo 2.2.3 *El cubo unitario (ver Figura 2.1) es un poliedro no degenerado pues en todos los vértices inciden exactamente 3 facetas.*

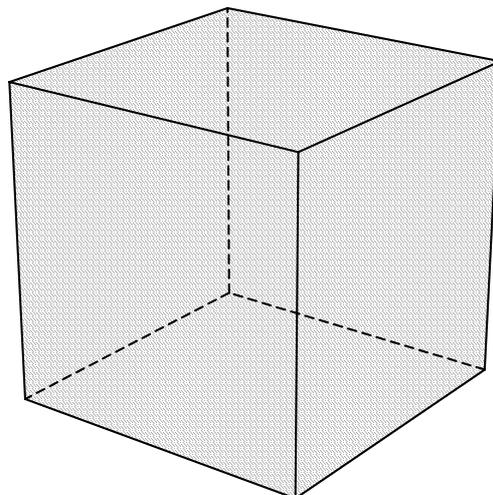


Figura 2.1. Cubo Unitario

Ejemplo 2.2.4 Consideremos la pirámide dada en la Figura 2.2. Evidentemente, se trata de un poliedro degenerado pues v es un vértice degenerado dado que inciden en él 4 facetas distintas.

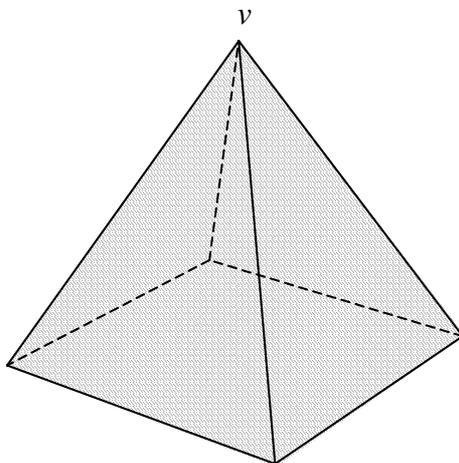


Figura 2.2. Pirámide

Dado un poliedro $X \subseteq R^n$, éste se puede describir algebraicamente mediante diferentes sistemas de ecuaciones y desigualdades lineales. Cada uno de estos sistemas de restricciones constituye una *representación (lineal)* del poliedro. Una representación se dice *minimal* si dicha representación utiliza el menor número de restricciones posible.

Definición 2.2.5 ([Mr83], p. 171) Dada una restricción de desigualdad y un punto \bar{x} que la satisfaga, diremos que la restricción es *activa* en \bar{x} si se da con igualdad. En caso contrario se dice que es *inactiva*.

Definición 2.2.6 ([Sc86], p. 99) Dada una representación lineal de un poliedro y una desigualdad de la misma. Diremos que dicha desigualdad es una *igualdad implícita* si es activa para todos los puntos del poliedro.

Consideremos la representación lineal del poliedro X dada por el sistema:

$$\{x \in R^n / Ax = b, x \geq 0\} \quad (2.1)$$

donde supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\text{rang}(A) = m$.

Definición 2.2.7 ([MrCh95], p. 29) Un punto extremo \bar{x} de X es *algebraicamente degenerado (no degenerado)* si el número total de restricciones activas en \bar{x} es estrictamente mayor (igual) que n .

En particular, si el número de restricciones activas en \bar{x} es mayor en σ unidades que la dimensión del espacio de variables n , \bar{x} se dice que es σ -degenerado o degenerado de grado σ .

Definición 2.2.8 *El sistema (2.1) se dice no degenerado (degenerado) si cualquier (algún) punto extremo de X es algebraicamente no degenerado (degenerado).*

Teorema 2.2.9 ([Mr83], p. 323) *El sistema (2.1) es degenerado si, y sólo si, b se puede poner como la combinación lineal de $m-1$ o menos columnas de A .*

Teorema 2.2.10 ([MrCh95], p. 29) *Si un poliedro es degenerado (no degenerado) mediante la definición geométrica entonces cualquier representación minimal de éste será degenerada (no degenerada).*

Por otra parte:

Teorema 2.2.11 ([MrCh95], p. 29) *Si la representación lineal de un poliedro es no degenerada entonces:*

- (i) *El poliedro es no degenerado.*
- (ii) *La representación no tiene igualdades implícitas.*

Obsérvese que es posible que (ver Ejemplo 2.2.12):

- (i) No hayan igualdades implícitas en la representación utilizada y, sin embargo, ésta sea degenerada.
- (ii) Aunque la representación lineal que describe el poliedro sea degenerada, quizás éste no lo sea.

Ejemplo 2.2.12 *Sea el poliedro X definido por el siguiente sistema de desigualdades:*

$$\{x \in \mathbb{R}_+^2 / x_1 - x_2 \geq -1, x_1 + x_2 \leq 3, 2x_1 - 3x_2 \leq 1, x_1 \leq 2\}$$

y cuya representación geométrica se da en la Figura 2.3. Es claro que la descripción lineal anterior no tiene igualdades implícitas y que es degenerada, por ser \bar{x} un vértice degenerado (el número de restricciones activas en \bar{x} es 3).



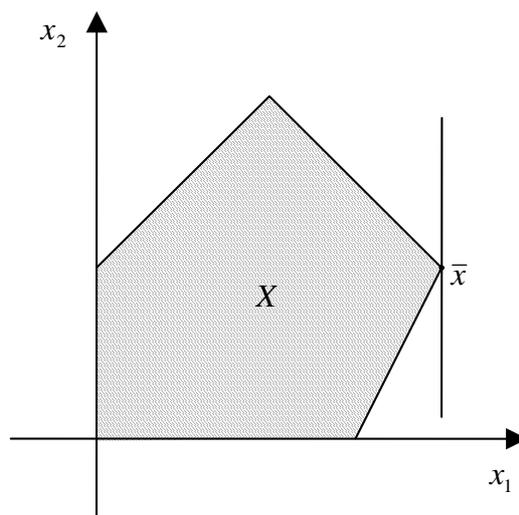


Figura 2.3

Teorema 2.2.13 Sea \bar{x} una s.f.b. no degenerada del sistema (2.1). Entonces,

- (i) \bar{x} tiene asociada una única base.
- (ii) Cualquier pivotación que introduzca una variable no básica en la base genera una arista incidente en \bar{x} .
- (iii) $\dim(X) = n - m$ ([Mr83], p. 138).
- (iv) El número de aristas incidentes en \bar{x} es igual a la dimensión de X , es decir, $n - m$.
- (v) Dado $1 \leq r \leq n - m$ arbitrario, cualquier conjunto $\{e^1, \dots, e^r\}$ de r aristas de X incidentes en \bar{x} define una cara r -dimensional F de X , con la propiedad de que $\{e^1, \dots, e^r\}$ es, exactamente, el conjunto de aristas de F incidentes en \bar{x} ([MrCh95], p. 29).

Sea \bar{x} una s.f.b. degenerada del sistema (2.1). Entonces,

- (i) \bar{x} tiene asociada varias bases.
- (ii) Para cualquier base asociada a \bar{x} existen pivotaciones que no generan aristas incidentes en \bar{x} .
- (iii) Puede ocurrir que $\dim(X) < n - m$ ([Mr85], p. 34).
- (iv) El número de aristas incidentes en \bar{x} puede ser muy superior a la dimensión del poliedro (piénsese en una pirámide de R^3 con múltiples caras).

Teorema 2.2.14 Cualquier poliedro degenerado tiene al menos un vértice en el cual el número de aristas incidentes en él es estrictamente mayor que la dimensión del poliedro.

Dado un poliedro degenerado X y un conjunto $\{e^1, \dots, e^r\}$ de r ($r \geq 2$) aristas de X incidentes en un mismo vértice degenerado \bar{x} , puede que no

haya ninguna cara de X que contenga, exactamente, a estas aristas. Efectivamente:

Ejemplo 2.2.15 *Si consideramos el poliedro dado en la Figura 2.4, es claro que v^1 es un vértice degenerado y que no existe ninguna cara propia del poliedro que contenga las aristas $e^1 = CVH(\{v^1, v^2\})$ y $e^2 = CVH(\{v^1, v^3\})$ simultáneamente.*

●

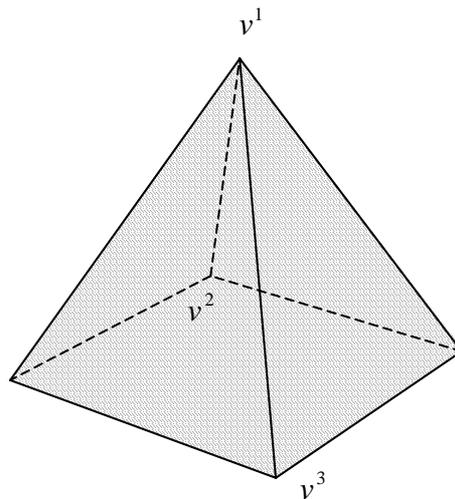


Figura 2.4

Cuando se tiene un poliedro definido por un sistema degenerado de restricciones lineales (algo frecuente en la práctica), ciertas técnicas de la programación vectorial se ven seriamente comprometidas, pues el cálculo de las aristas y caras de mayor dimensión, eficientes e incidentes en un mismo vértice, se vuelve especialmente confuso.

2.3 Identificación de las Caras de un Poliedro

En esta sección enunciaremos algunas de las técnicas más comúnmente utilizadas para la identificación de las caras de un poliedro, haciéndose un estudio riguroso de las propiedades asociadas a la especificación a través de desigualdades activas.

2.3.1 Caras Arbitrarias

Existen múltiples formas de caracterizar una cara arbitraria de un poliedro X . Unas tienen un carácter más geométrico y otras un carácter más algebraico. Veamos algunas de ellas.

El resultado siguiente es claramente geométrico y proporciona una representación explícita de la cara.

Teorema 2.3.1 Sean F_{xp} y F_{xd} , respectivamente, los puntos y direcciones extremas de una cara arbitraria F de X . Entonces, $F = CVH(F_{xp}) + CNH(F_{xd})$.

Obsérvese que, en general no es cierto que una combinación convexa de un conjunto arbitrario de puntos y direcciones extremas del poliedro sea una cara del mismo.

Los caracterizaciones más útiles son algebraicas e identifican a la cara de forma implícita.

Teorema 2.3.2 ([Sc86], p. 101) $F \neq \emptyset$ es una cara del poliedro X si, y sólo si, $\exists c \in R^n$ tal que F es el conjunto de soluciones óptimas del problema escalar $\max\{c'x / x \in X\}$.

Otra posible alternativa consiste en la especificación de un hiperplano soporte.

Teorema 2.3.3 Sean $\alpha \in R^n$ y $\beta \in R$. Si $\alpha'x \leq \beta$ es una desigualdad soporte para X , entonces $F(\alpha, \beta) = \{x \in X / \alpha'x = \beta\}$ es una cara de X . Además, a cualquier cara no vacía F de X se le puede asociar una desigualdad soporte.

Por último, también podemos especificar una cara a través de un conjunto de desigualdades activas.

Teorema 2.3.4 ([Sc86], p. 101) Dado $J' \subseteq J = \{1, \dots, n\}$, $F(J') = \{x \in X / x_j = 0, \forall j \in J'\}$ es una cara de X y cualquier cara $F \neq \emptyset$ de X se puede expresar (no necesariamente de forma única) de esta manera.

En la práctica, el Teorema 2.3.4 proporciona una forma de expresar las caras cómoda y (algorímicamente) conveniente. Efectivamente,

Definición 2.3.5 $J' \subseteq J$ es un descriptor para una cara F de X si, y sólo si, $F = F(J')$.

Es claro que $J' \subseteq J$ es un descriptor para una cara F de X si, y sólo si, $F(J')$ es una representación de F .

En este sentido, cualquier subconjunto $J' \subseteq J$ se puede considerar un descriptor (para la cara dada por $F(J')$).

Supongamos que X viene dado por el sistema (2.1). Evidentemente:

$$F(J') = \{x \in R_+^n / A^{J-J'} x_{J-J'} = b, x_{J'} = 0\}$$

El siguiente ejemplo ilustrar geoméricamente la noción de descriptor de una cara.

Ejemplo 2.3.6 Sea X el poliedro dado por $\{x \in R_+^3 / x_1 - x_2 = 0, x_2 + x_3 = 1\}$ y cuya representación gráfica aparece en la Figura 2.5. Evidentemente, $X = CVH(\{\bar{x}, \hat{x}\})$, donde $\bar{x}^t = (0, 0, 1)$ y $\hat{x}^t = (1, 1, 0)$, siendo $\dim(X) = 1$. Es claro que X es un poliedro no degenerado especificado a través de una representación lineal degenerada. Las caras de X quedan descritas de la siguiente manera: $F(\emptyset) = X$, $F(\{1\}) = F(\{2\}) = F(\{1, 2\}) = \{\bar{x}\}$, $F(\{3\}) = \{\hat{x}\}$, $F(\{1, 3\}) = F(\{2, 3\}) = F(\{1, 2, 3\}) = \emptyset$.

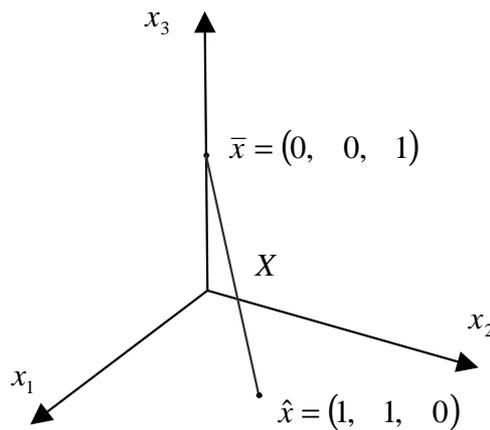


Figura 2.5

A continuación vamos a estudiar una serie de propiedades asociadas a la especificación de una cara a través de un conjunto de desigualdades activas.

Proposición 2.3.7 ([Sy96], Remark 4) Sean $J', J'' \subseteq J$ tales que $J' \subseteq J''$. Entonces $F(J') \supseteq F(J'')$.

Demostración. $J' \subseteq J'' \Rightarrow F(J') = \{x \in X / x_j = 0, \forall j \in J'\} \supseteq \{x \in X / x_j = 0, \forall j \in J''\} = F(J'')$.

Proposición 2.3.8 Sean $J', J'' \subseteq J$ tales que $J' \neq J''$ y supongamos que ambos subconjuntos son descriptores de una misma cara F . Entonces $J' \cup J''$ también es un descriptor de F .

Demostración. Se trata de ver que $F(J' \cup J'') = F$.

" \subseteq "

Como $F = F(J')$ y $J' \subseteq J' \cup J''$, aplicando la Proposición 2.3.7 $\Rightarrow F(J' \cup J'') \subseteq F$.

" \supseteq "

Sea $\bar{x} \in F(J') \Rightarrow \bar{x} \in X$ y $\bar{x}_{J'} = 0$. Como $F(J') = F(J'') = F \Rightarrow \bar{x}_{J''} = 0 \Rightarrow \bar{x}_{J' \cup J''} = 0 \Rightarrow \bar{x} \in F(J' \cup J'')$.

■

El siguiente resultado da una acotación para el número de caras de una dimensión dada.

Proposición 2.3.9 ([Sy96], Remark 3) Sea $r \in \{0, \dots, n-m\}$. El número de caras r -dimensionales de X está acotado superiormente por $\binom{n}{m+r}$.

Proposición 2.3.10 ([Sy96], Remark 2) Sean $J', J'' \subseteq J$. Si $|J'| \leq |J''|$ entonces $\dim(F(J')) \geq \dim(F(J''))$.

Definición 2.3.11 $J' \subseteq J$ es un descriptor maximal si, y sólo si, $\nexists J'' \subseteq J$, $J' \subset J''$, $F(J'') = F(J')$.

Teorema 2.3.12 $J' \subseteq J$ es un descriptor maximal si, y sólo si, $\forall s \in J - J'$, $\exists \hat{x} \in F(J')$, $\hat{x}_s > 0$.

Demostración.

" \Rightarrow "

Sean $s \in J - J'$ y $J'' = J' \cup \{s\}$. Evidentemente, $J' \subset J'' \Rightarrow F(J') \supseteq F(J'')$.

Supongamos por reducción al absurdo que $\forall \hat{x} \in F(J')$, $\hat{x}_s = 0 \Rightarrow F(J') \subseteq F(J'') \Rightarrow F(J'') = F(J') \Rightarrow \#$, pues J' es un descriptor maximal.

" \Leftarrow "

Supongamos por reducción al absurdo que J' no es un descriptor maximal $\Rightarrow \exists J'' \subseteq J$, $J' \subset J''$, $F(J'') = F(J')$. Entonces, dado $s \in J'' - J' \Rightarrow \forall \hat{x} \in F(J')$, $\hat{x}_s = 0 \Rightarrow \#$.

■

Corolario 2.3.13 $J' \subseteq J$ es un descriptor maximal si, y sólo si, $\exists \hat{x} \in F(J')$ tal que $\hat{x}_{J-J'} > 0$.

Demostración. Basta aplicar el Teorema 2.3.12 y tener en cuenta la convexidad de $F(J')$. ■

Ejemplo 2.3.14 En el Ejemplo 2.3.6, $J' = \emptyset$ es un descriptor maximal para X pues $\exists \tilde{x}' = (1/2, 1/2, 1/2) \in X$. ●

Corolario 2.3.15 $J' \subseteq J$ es un descriptor maximal si, y sólo si, el sistema

$$by - A^{J-J'} x_{J-J'} = 0, \quad x_{J-J'} \geq e, \quad y \geq 1 \quad (2.2)$$

tiene solución.

Demostración. Basta tener en cuenta que la factibilidad de (2.2) es equivalente a la factibilidad del sistema $A^{J-J'} x_{J-J'} = b, \quad x_{J-J'} > 0$ y ahora aplicar el Corolario 2.3.13. ■

El siguiente resultado también es directo.

Corolario 2.3.16 $J' \subseteq J$ es un descriptor maximal si, y sólo si, $\forall s \in J - J', \max\{x_s / x \in F(J')\} > 0$.

El Corolario 2.3.16 muestra la estrecha relación existente entre el concepto de *subconjunto de tipo 1* introducido por Murty ([Mr85], p. 37) y el de descriptor maximal propuesto por nosotros.

Proposición 2.3.17 Sean $J', J'' \subseteq J$ descriptors maximales. Entonces, también $J''' = J' \cap J''$ es un descriptor maximal.

Demostración. Sea $s \in J - J''' \Rightarrow s \in J - J'$ o $s \in J - J''$ o a los dos a la vez. Supongamos que $s \in J - J'$. Como $J''' \subseteq J' \Rightarrow F(J') \subseteq F(J''')$. Además, J' es un descriptor maximal $\Rightarrow \exists \hat{x} \in F(J') \subseteq F(J'''), \hat{x}_s > 0$. ■

Obsérvese que un subconjunto propio de un descriptor maximal puede que no sea un descriptor maximal. Efectivamente,

Ejemplo 2.3.18 Tomando nuevamente en consideración el Ejemplo 2.3.6, $J' = \{1, 2\}$ es un descriptor maximal pues $\exists \bar{x}' = (0, 0, 1) \in X$. Sin embargo, $J'' = \{1\} \subseteq J'$ no es maximal, pues basta tomar $s = 2 \in J - J'' = \{2, 3\}$ y comprobar que $\max\{x_2 / x \in F(J'')\} = 0$. ●

El siguiente resultado nos permite describir algebraicamente el interior relativo de una cara especificada a través de un descriptor maximal.

Proposición 2.3.19 $J' \subseteq J$ es un descriptor maximal si, y sólo si, $F^0(J') = \{x \in X / x_{j-j'} > 0, x_{j'} = 0\} \neq \emptyset$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de [Zg98], Lemma 2.9. ■

Teorema 2.3.20 Toda cara F tiene un único descriptor maximal asociado.

Demostración. Por el Teorema 2.3.4 es claro que toda cara tiene asociado, al menos, un descriptor maximal. Supongamos por reducción al absurdo que no es único, es decir, $\exists J', J'' \subseteq J, J' \neq J''$, descriptors maximales de $F \Rightarrow F = F(J') = F(J'')$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\exists s \in J'$ y $s \notin J''$. Si $s \in J' \Rightarrow x_s = 0, \forall x \in F$. Ahora bien, como $s \notin J''$ y J'' es un descriptor maximal $\Rightarrow \exists \hat{x} \in F(J'') = F, \hat{x}_s > 0 \Rightarrow \#$. ■

2.3.2 Caras Incidentes en un Vértice

Cuando sabemos que una cara es incidente en un determinado vértice del poliedro, su caracterización a través de desigualdades activas se puede simplificar (mediante la acotación de J') si conocemos una base asociada al vértice. Esto resultará de gran utilidad para los algoritmos generadores de soluciones eficientes basados en *esquemas de pivotaciones* sobre tablas del simplex (ver capítulo 4).

Definición 2.3.21 Una cara $F \subseteq X$ se dice que es incidente en el vertice \bar{x} si $\bar{x} \in F_{xp}$.

Sean \bar{x} una s.f.b. de X , $J = \{1, \dots, n\}$, B una base asociada a \bar{x} e $Y = B^{-1}N$. Definimos $J_p = \{j \in J_B, \bar{x}_j > 0\}$, $J_D = \{j \in J_B, \bar{x}_j = 0\}$ y $J_Z = \{j \in J, \bar{x}_j = 0\}$. Cuando no haya lugar a dudas, y por simplificar la notación, denotaremos a J_p, J_D y J_Z por P, D y Z , respectivamente.

J_p y J_D son los conjuntos de índices asociados a las variables básicas no degeneradas y degeneradas, respectivamente. Como, $J_B = J_p \cup J_D$ y $J_p \cap J_D = \emptyset$, si $|J_p| = p$ y $|J_D| = \sigma$ entonces $p + \sigma = m$.

J_Z es el conjunto de índices asociados a las variables a nivel cero. Evidentemente, $J_Z = J_D \cup J_N$.

El siguiente resultado no presenta dificultad.

Proposición 2.3.22 Dado $J' \subseteq J$, la cara $F(J')$ es incidente en el vertice \bar{x} si $J' \subseteq J_Z$.

Dado el LVP, $P \equiv \max\{Cx / x \in X\}$, la tabla canónica de P asociada a B , $T(B)$, se escribe:

v.b.	x_P	x_D	x_N	r.h.s.
x_P	I_p	$0_{p \times d}$	Y_P	\bar{b}_p
x_D	$0_{d \times p}$	I_d	Y_D	0
	$0_{k \times p}$	$0_{k \times d}$	R	$C^P \bar{b}_p$

Tabla canónica de P asociada a B

donde Y_P (Y_D) son las filas de Y correspondientes a variables básicas no degeneradas (degeneradas) y $R = C^B B^{-1} N - C^N$.

Es claro, utilizando esta notación, que $\forall x \in X$, $x_p = \bar{b}_p - Y_P x_N$, $x_D = -Y_D x_N$ y $Cx = C^P \bar{b}_p - R x_N$.

Teorema 2.3.23 Dada una base arbitraria B asociada a \bar{x} , $\forall J' \subseteq J_N$ se verifica que $F(J')$ determina una única cara de X incidente en \bar{x} . Además, cualquier cara F de X incidente en \bar{x} tiene asociado al menos un descriptor $J' \subseteq J_N$ para alguna base B asociada a \bar{x} .

Demostración. Dado $J' \subseteq J_N$ es claro que $F(J') \in X_f$ pues $F(J')$ es la intersección de X con un número finito de sus hiperplanos soporte.

Sea ahora $F \in X_f$. Por el Teorema 2.3.2 $\Rightarrow \exists c \in R^n$, $F = S_Q$, donde Q es el problema escalar $\max\{c^t x / x \in X\}$. Sea $B \in R^{m \times m}$ una base asociada a \bar{x} y denotemos por r el correspondiente vector de costos reducidos. Entonces, $S_Q = \{x \in X / r^t x_N = 0\}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, aplicando la teoría de la programación lineal escalar que r es no negativo. Sea $J' = \{j \in J_N / r_j > 0\} \subseteq J_N$. Veamos que $F = F(J')$. Efectivamente:

“ \subseteq ”

$$\forall x \in F \Rightarrow r^t x_N = 0. \text{ Como } r \geq 0, x_N \geq 0 \Rightarrow \forall j \in J', x_j = 0 \Rightarrow x \in F(J')$$

“ \supseteq ”

$$\forall x \in F(J') \Rightarrow r^t x_N = r_{J'}^t x_{J'} + r_{J_N - J'}^t x_{J_N - J'} = 0 \Rightarrow x \in F.$$

■

Vamos a hacer un breve repaso de las propiedades de las caras incidentes sobre un determinado vértice contemplando las posibilidades de degeneración y no degeneración del mismo.

(i) Caso No Degenerado

Sea \bar{x} una s.f.b. no degenerada de X . Evidentemente, $J_P = J_B$, $J_Z = J_N$ y $J_D = \emptyset$.

Proposición 2.3.24 *Si \bar{x} es no degenerado entonces $\forall J' \subseteq J_N$, J' es un descriptor maximal.*

Se puede considerar que el cálculo de las aristas y las caras de dimensión mayor o igual que dos, de X , incidentes en \bar{x} (no degenerado), no reviste dificultad debido a los siguientes resultados clásicos:

Teorema 2.3.25 ([Mr85], p. 34) *Cualquier $s \in J_N$, determina una única arista de X incidente en \bar{x} dada por $\delta^s = F(J_N - \{s\}) = \{x \in X / x_j = 0, \forall j \in J_N - \{s\}\}$. Además, cualquier arista de X , incidente en \bar{x} , tiene asociada un único descriptor $J_N - \{s\}$, para cierto $s \in J_N$.*

Teorema 2.3.26 ([Mr85], p. 34) *Cualquier $J' \subseteq J_N$, con $|J'| = n - m - r$, determina una única cara r -dimensional de X incidente en \bar{x} dada por $F(J') = \{x \in X / x_j = 0, \forall j \in J'\}$. Además, a cualquier cara r -dimensional F de X , incidente en \bar{x} , se le puede asignar un único descriptor $J' \subseteq J_N$.*

El teorema anterior representa la generalización a caras de mayor dimensión del Teorema 2.3.25.

Ejemplo 2.3.27 *En el Ejemplo 2.3.6, \hat{x} es un vértice no degenerado, cuya tabla canónica asociada es:*

v.b.	x_1	x_2	x_3	r.h.s.
x_1	1	0	1	1
x_2	0	1	1	1

Tabla canónica asociada a \hat{x}

Es claro que $J_B = \{1,2\}$, $J_N = \{3\}$. Las caras de X incidentes en \hat{x} se pueden especificar como subconjuntos de J_N . Así, para las caras de dimensión 1, $|J'| = n - m - r = 3 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow J' = \emptyset$ (Recordemos que $F(\emptyset) = X$). Para las caras de dimensión 0 (el propio \hat{x}) $\Rightarrow |J'| = 1$. Como $J' \subseteq J_N \Rightarrow J' = \{3\}$.

●

En caso de no degeneración, a tenor del siguiente resultado, se construyen caras propias maximales utilizando subconjuntos propios minimales J' .

Teorema 2.3.28 Sean $J', J'' \subseteq J_N$. Entonces $J' \subset J''$ si, y sólo si, $F(J') \supset F(J'')$.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

$$F(J') = \{x \in X / x_j = 0, \forall j \in J'\} \supset \{x \in X / x_j = 0, \forall j \in J''\} = F(J'') \Rightarrow J' \subset J''.$$

“ \Rightarrow ”

Por hipótesis, $J' \subset J''$. Utilizando la Proposición 2.3.7 $\Rightarrow F(J') \supseteq F(J'')$. Como \bar{x} es no degenerado, por el Teorema 2.3.26 $\Rightarrow |J'| = n - m - \dim(F(J')) < n - m - \dim(F(J'')) = |J''| \Rightarrow \dim(F(J')) > \dim(F(J'')) \Rightarrow F(J') \supset F(J'')$. ■

(ii) Caso Degenerado

Sea \bar{x} una s.f.b. σ -degenerada de X . Sea B una base arbitraria asociada a \bar{x} . Entonces, $J_Z = J_D \cup J_N$ y $\sigma = |J_D|$.

El cálculo de las aristas y caras de dimensión mayor o igual que dos, de X , incidentes en un punto extremo degenerado es considerablemente más complejo que el correspondiente análisis para el caso no degenerado.

Teorema 2.3.29 Dado $J' \subseteq J_Z$ entonces $F(J')$ determina una única cara de X incidente en \bar{x} . Además, cualquier cara F de X incidente en \bar{x} tiene asociado un único descriptor maximal, $J' \subseteq J_Z$, dado por $\{j \in J_Z / \forall x \in F, x_j = 0\}$.

Demostración. La primera parte del teorema no tiene dificultad. Veamos la segunda parte.

Sea $J' = \{j \in J_Z / \forall x \in F, x_j = 0\}$ y comprobemos en primer lugar que J' es un descriptor de F , es decir, $F = F(J')$.

“ \subseteq ”

Sea $x \in F$. Por definición de $J' \Rightarrow \forall j \in J', x_j = 0 \Rightarrow x \in F(J')$.

“ \supseteq ”

Si F es una cara de X incidente en \bar{x} . Por el Teorema 2.3.23 $\Rightarrow \exists B \in R^{m \times m}$ base asociada a \bar{x} y $\exists J'' \subseteq J_N$ tal que $F = F(J'')$. Por definición de $J' \Rightarrow J'' \subseteq J' \Rightarrow F(J') \subseteq F(J'') = F$.

Probemos ahora que J' es un descriptor maximal. Sin embargo, esto es claro, pues por la definición de $J' \Rightarrow \forall j \in J - J', \exists \hat{x} \in F(J'), \hat{x}_j > 0$.

Por último, veamos la unicidad. Ahora bien, esto es directo pues dado que J' es un descriptor maximal, aplicando el Teorema 2.3.20, necesariamente ha de ser único. ■

Ejemplo 2.3.30 En el Ejemplo 2.3.6, \bar{x} es un vértice degenerado de grado 1, siendo una de sus tablas canónicas asociadas:

v.b.	x_1	x_2	x_3	r.h.s.
x_1	1	-1	0	0
x_3	0	1	1	1

Tabla canónica asociada a \bar{x}

Es claro que $J_B = \{1,3\}$, $J_P = \{3\}$, $J_D = \{1\}$, $J_N = \{2\}$ y $J_Z = \{1,2\}$.

Sabemos que las caras de X incidentes en \bar{x} se pueden especificar como subconjuntos de J_Z . Así:

Para $|J'| = 0 \Rightarrow J' = \emptyset \Rightarrow F(J') = X$.

Para $|J'| = 1 \Rightarrow$ Como $J' \subseteq J_Z$ las posibilidades son: $J' = \{1\}$ o $J' = \{2\}$. En ambos casos, $F(J') = \{\bar{x}\}$.

Para $|J'| = 2 \Rightarrow J' = \{1,2\} \Rightarrow F(J') = \{\bar{x}\}$.

Por otra parte, los descriptores maximales (únicos) que se pueden asociar a las caras de X incidentes en \bar{x} son:

Para $X \Rightarrow J' = \emptyset$.

Para $\{\bar{x}\} \Rightarrow J' = \{1,2\}$. ●

Nos preguntamos ahora si existirá alguna prueba sencilla para comprobar si un descriptor es maximal. Afortunadamente, la respuesta es afirmativa. En efecto:

Sean $J' \subseteq J_Z = J_N \cup J_D$, $J'_N = J' \cap J_N$ y $J'_D = J' \cap J_D$. En estas condiciones, es claro que $J' = J'_N \cup J'_D$.

Sean $Y_{J'_D}$ ($Y_{J_D - J'_D}$) las filas de Y asociadas a variables de J'_D ($J_D - J'_D$) respectivamente.

Teorema 2.3.31 $J' \subseteq J_Z$ es un descriptor maximal si, y sólo si, el sistema

$$Y_{J'_D} u = 0, Y_{J_D - J'_D} u < 0, u_{J_N - J'_N} > 0, u_{J'_N} = 0 \quad (2.3)$$

tiene solución.

Demostración. Como $J' \subseteq J_Z$ descriptor maximal $\Leftrightarrow \exists \hat{x} \in F(J')$, $x_{J-J'} > 0$. Ahora, dado que $X = \{x \in R_+^n / x_P = \bar{b}_P - Y_P x_N, x_D = -Y_D x_N\}$ es claro el resultado ■

Luego, todo se reduce a resolver el sistema (2.3). A primera vista, debido a las desigualdades estrictas que presenta, no parece muy prometedor. Sin embargo, se prueba sin dificultad que:

Lema 2.3.32 Resolver el sistema

$$Hu < 0, u > 0 \quad (2.4)$$

es equivalente a resolver el sistema

$$Hu \leq -e, u \geq e \quad (2.5)$$

Obsérvese que cualquier solución de (2.5) es solución de (2.4).

Corolario 2.3.33 $J' \subseteq J_Z$ es un descriptor maximal si, y sólo si, el sistema

$$Y_{J'} u = 0, Y_{J_D - J'_D} u \leq -e, u_{J_N - J'_N} \geq e, u_{J'_N} = 0 \quad (2.6)$$

tiene solución.

Es fácil ver que si $J_N - J'_N \neq \emptyset$ el sistema (2.6) se puede simplificar de la siguiente manera:

$$Y_{J'_D}^{J_N - J'_N} u = 0, Y_{J_D - J'_D}^{J_N - J'_N} u \leq -e, u \geq e \quad (2.7)$$

Ejemplo 2.3.34 Sea \bar{x} s.f.b. degenerada de un cierto poliedro X , siendo B_1 una base asociada dada por $J_{B_1} = \{5, 3, 6\}$. Supongamos que la tabla canónica asociada a B_1 es:

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	r.h.s.
x_5	1	1	0	-1	1	0	1
x_3	1	1	1	1	0	0	3
x_6	1	-1	0	0	0	1	0

$T(B_1)$. Tabla canónica asociada a \bar{x}

Es claro que $J_N = \{1, 2, 4\}$, $J_D = \{6\}$ y $J_Z = \{1, 2, 4, 6\}$.

Vamos a comprobar si los siguientes descriptores, $J' = \{4\}$, $J' = \{1, 2\}$, $J' = \{1, 6\}$, $J' = \{2, 6\}$ y $J' = \{1, 2, 6\}$, asociados a caras incidentes en \bar{x} , son maximales o no.

Para $J' = \{4\} \Rightarrow J'_N = \{4\}$, $J'_D = \emptyset$, $J_N - J'_N = \{1, 2\}$ y $J_D - J'_D = \{6\}$. Así, el sistema (2.7) se transforma en: $(1, -1)u \leq -1$, $u \geq e$. Claramente, $u' = (1, 2)$ es solución de este sistema $\Rightarrow J'$ es un descriptor maximal.

Para $J' = \{1, 2\} \Rightarrow J'_N = \{1, 2\}$, $J'_D = \emptyset$, $J_N - J'_N = \{4\}$ y $J_D - J'_D = \{6\}$. Así, el sistema (2.7) se transforma en: $0u \leq -1$, $u \geq 1$. El cual, evidentemente, no tiene solución $\Rightarrow J'$ no es un descriptor maximal.

Para $J' = \{1, 6\} \Rightarrow J'_N = \{1\}$, $J'_D = \{6\}$, $J_N - J'_N = \{2, 4\}$ y $J_D - J'_D = \emptyset$. Así, el sistema (2.7) se transforma en: $(-1, 0)u = 0$, $u \geq e$. El cual, evidentemente, no tiene solución $\Rightarrow J'$ no es un descriptor maximal.

Para $J' = \{2, 6\} \Rightarrow J'_N = \{2\}$, $J'_D = \{6\}$, $J_N - J'_N = \{1, 4\}$ y $J_D - J'_D = \emptyset$. Así, el sistema (2.7) se transforma en: $(1, 0)u = 0$, $u \geq e$. El cual, evidentemente, no tiene solución $\Rightarrow J'$ no es un descriptor maximal.

Sin embargo, para $J' = \{1, 2, 6\} \Rightarrow J'_N = \{1, 2\}$, $J'_D = \{6\}$, $J_N - J'_N = \{4\}$ y $J_D - J'_D = \emptyset$. Así, el sistema (2.7) se transforma en: $0u = 0$, $u \geq 1$. Claramente, $u = 1$ es solución de este sistema $\Rightarrow J'$ es un descriptor maximal. ●

¿Qué se puede afirmar si, siendo \bar{x} degenerado, consideramos $J' \subseteq J_N$ como en el caso no degenerado? Es sabido que:

Teorema 2.3.35 ([Mr85], p. 35) Dado $J' \subseteq J_N$, con $|J'| = n - m - r$, determina una única cara de X , incidente en \bar{x} , dada por $F(J') = \{x \in X / x_j = 0, \forall j \in J'\}$, pero su dimensión puede ser menor que r .

Obsérvese, además, que diferentes subconjuntos $J' \subseteq J_N$ pueden generar la misma cara y que, para $r > 1$, no se puede garantizar que se obtengan todas las caras de dimensión r incidentes en \bar{x} mediante la revisión exhaustiva de $T(B)$, incluso aunque esta revisión se extienda una a una todas las tablas canónicas asociadas a \bar{x} ([Mr85], p. 37).

Para poder garantizar la dimensión de la cara consideremos $\tilde{J}_N = \{j \in J_N / y_D^j \leq 0\}$. Son conocidos los siguientes resultados:

Teorema 2.3.36 ([Mr85], p. 36) Cualquiera $s \in \tilde{J}_N$, determina una única arista de X incidente en \bar{x} dada por $\delta^s = F(J_N - \{s\}) = \{x \in X / x_j = 0, \forall j \in J_N - \{s\}\}$. Además, todas las aristas de X incidentes en \bar{x} se pueden obtener de esta manera mediante la exploración de todas las tablas

canónicas asociadas a \bar{x} (aunque la misma arista, probablemente, aparecerá varias veces repetidas en esta enumeración).

Teorema 2.3.37 ([Mr85], p. 37) *Dado $J' \subseteq J_N$, tal que $J_N - J' \subseteq \tilde{J}_N$, con $|J'| = n - m - r$, entonces $F(J')$ determina una única cara de X incidente en \bar{x} y de dimensión r .*

Ahora bien, procediendo como en el teorema anterior, no somos capaces de determinar directamente si la cara es maximal y puede haber caras r -dimensionales que escapen a esta enumeración.

Sean $B(\bar{x}) = \{B_l / l \in \{1, \dots, L\}\}$ todas las bases asociadas a \bar{x} (inclusive las que se obtienen a través de pivotes negativos) y $\tilde{J}_{N_l} = \{j \in J_{N_l} / y_D^j \leq 0\}$, es decir, es el conjunto de índices no básicos, respecto a una base dada B_l , tales que al introducirlos en la base generan una arista de X .

Si para cada una de las bases $\{B_l / l \in \{1, \dots, L\}\}$ asociadas a \bar{x} , tomamos $J' \subseteq J_{N_l}$ tal que $J_{N_l} - J' \subseteq \tilde{J}_{N_l}$, se pueden obtener otras caras de X incidentes en \bar{x} . Pero de nuevo nos encontramos con que esta enumeración a través de tablas, consideradas una a una, puede que no produzca todas las caras de dimensión $r > 1$ de X incidentes en \bar{x} , pues es posible que en una misma tabla no se puedan identificar las r aristas que definen la cara ([Mr85], p. 37).

$$\text{Sea } \tilde{J} = \bigcup_{l=1}^L \tilde{J}_{N_l}.$$

Teorema 2.3.38 ([Mr85], Theorem 1) $\forall x \in X$ se verifica que $x_j = 0$, $\forall j \in J_Z - \tilde{J}$.

El resultado anterior indica que las variables $x_{J_Z - \tilde{J}}$ son fijas a nivel 0 y, por tanto, se pueden suprimir de la representación del poliedro.

Además, si queremos mantener la validez del Teorema 2.3.38, la construcción de \tilde{J} no se puede simplificar imponiendo que en $\{B_l / l \in \{1, \dots, L\}\}$ estén todas las bases asociadas a \bar{x} , lexicográficamente accesibles a partir de una dada, como pone de manifiesto el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 2.3.39 Utilizando los datos del Ejemplo 2.3.34 se tiene que $\tilde{J}_{N_1} = \{2, 4\}$. Aplicando la regla lexicográfica a $T(B_1)$, la única tabla canónica alternativa asociada a \bar{x} se obtiene al meter x_1 en la base:

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	r.h.s.
x_5	0	2	0	-1	1	-1	1
x_3	0	2	1	1	0	-1	3
x_1	1	-1	0	0	0	1	0

$T(B_2)$. Tabla canónica asociada a \bar{x}

Nuevamente, $\tilde{J}_{N_2} = \{2, 4\} \Rightarrow \tilde{J} = \{2, 4\} \Rightarrow J_Z - \tilde{J} = \{1, 6\}$. Sin embargo, $\exists \hat{x} \in X$ especificado por $(0, 1, 2, 0, 0, 1)$ tal que $\hat{x}_6 \neq 0$.

●

El siguiente resultado no es más que una pequeña modificación del enunciado en el Teorema 2.3.29, que nos permite restringir los candidatos a formar parte de J' a costa de realizar más cálculos previos (determinación a priori de \tilde{J}).

Teorema 2.3.40 ([Mr85], p. 37) Sea $J' \subseteq J_Z$ descriptor maximal tal que $J_Z - J' \subseteq \tilde{J}$. Entonces:

- i) $F(J')$ determina una única cara de X incidente en \bar{x} .
- ii) A cualquier cara F de X , incidente en \bar{x} , se le puede asociar un descriptor maximal $J' \subseteq J_Z$ dado por $\{j \in J_Z / \forall x \in F, x_j = 0\}$.

2.4 Soluciones Óptimas de un Programa Escalar Lineal

El estudio de caracterizaciones apropiadas del conjunto de todas las soluciones óptimas de un problema de programación lineal escalar es un aspecto frecuentemente descuidado en la literatura. Sin embargo, este tópico es de especial relevancia en la teoría del LVP, pues cualquier cara eficiente maximal se puede poner como el conjunto de soluciones óptimas de un cierto problema lineal escalar (Teorema 1.7.26).

En este apartado vamos a estudiar con cierto detenimiento cómo se puede describir el conjunto de soluciones óptimas de un problema lineal escalar y proporcionaremos condiciones necesarias y suficientes para que una cara arbitraria de la región factible sea óptima.

Consideremos el problema $Q \equiv \max\{c^t x / x \in X\}$, donde X supondremos viene dado por el sistema (2.1).

Teorema 2.4.1 $S_Q = \{x \in R^n / Ax = b, x \geq 0, u^t A \geq c^t, (u^t A - c^t)x = 0\}$.

Demostración. Basta tener en cuenta que el problema dual de Q es $\min\{u^t b / u^t A \geq c^t\}$ y aplicar las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad para el caso lineal escalar ([Mr83], Theorem 4.6). ■

Corolario 2.4.2 $\bar{x} \in S_Q$ si, y sólo si, $\exists u \in R^m$ tal que $u^t A \geq c^t, (u^t A - c^t)\bar{x} = 0$.

Teorema 2.4.3 Sea $J' \subseteq J$ un descriptor maximal. Entonces, $F(J') \subseteq S_Q$ si, y sólo si, $\exists u \in R^m$ tal que $u^t A \geq c^t, u^t A^{J-J'} = c_{J-J'}^t$.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Por hipótesis, $\exists u \in R^m, u^t A \geq c^t, u^t A^{J-J'} = c_{J-J'}^t \Rightarrow \forall x \in F(J'), (u^t A - c^t)x = 0$.

Por el Corolario 2.4.2 $\Rightarrow x \in S_Q$.

“ \Rightarrow ”

Sea $\bar{x} \in F^0(J') \subseteq S_Q \Rightarrow \bar{x}_{J-J'} > 0$. Como $\bar{x} \in S_Q \Leftrightarrow \exists u \in R^m, u^t A \geq c^t, (u^t A - c^t)\bar{x} = 0$. Como $\bar{x}_{J-J'} > 0 \Rightarrow u^t A^{J-J'} = c_{J-J'}^t$. ■

Los resultados anteriores se pueden refinar mucho más si disponemos de información adicional. Efectivamente:

Sean $\bar{x} \in X$ s.f.b., B una base asociada, $Y = B^{-1}N$, $\bar{b} = B^{-1}b$ y $r^t = c_B^t B^{-1}N - c_N^t$ el vector de costos reducidos asociado. Sabemos que $\forall x \in X$ se verifica que $c^t x = c_B^t \bar{b} - r^t x_N$.

Estudiemos, en primer lugar, cuándo se puede garantizar que $\bar{x} \in S_Q$.

El siguiente resultado, denominado Criterio Fundamental de Optimalidad ([Mr83], p. 62), es ampliamente conocido e independiente de la degeneración o no de \bar{x} .

Teorema 2.4.4 ([Mr83], Theorem 2.1) Si $r \geq 0$ entonces $\bar{x} \in S_Q$.

Demostración. Si $r \geq 0 \Rightarrow r^t x_N \geq 0, \forall x \in X \Rightarrow c^t \bar{x} = c_B^t \bar{b} \geq c_B^t \bar{b} - r^t x_N = c^t x, \forall x \in X \Rightarrow \bar{x} \in S_Q$. ■

También es sabido (por las propiedades del algoritmo del simplex) que a cualquier vértice óptimo se le puede asociar una base cuyo vector de costos reducidos sea no negativo ([Mr83], p. 329).

Luego, en virtud de las propiedades anteriores, para el caso no degenerado, es directo el siguiente resultado:

Teorema 2.4.5 *Si \bar{x} es no degenerado entonces $\bar{x} \in S_Q$ si, y sólo si, $r \geq 0$.*

Veamos qué se puede afirmar para el caso degenerado. Supongamos, pues, que \bar{x} es σ -degenerado.

Teorema 2.4.6 *$\bar{x} \in S_Q$ si, y sólo si, el sistema $r^t u < 0$, $Y_D u \leq 0$, $u \geq 0$, no tiene solución.*

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Supongamos, por reducción al absurdo que $\exists \hat{u} \in R_+^{n-m}$, $r^t \hat{u} < 0$, $Y_D \hat{u} \leq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon \in R_{++} / \hat{x}_N = \varepsilon \hat{u} \geq 0$, $\hat{x}_B = \bar{b} - Y \hat{x}_N \geq 0 \Rightarrow \hat{x} \in X$. Además, como $r^t \hat{x}_N = \varepsilon r^t \hat{u} < 0 \Rightarrow c^t \hat{x} = c_B^t \bar{b} - \varepsilon r^t \hat{u} > c_B^t \bar{b} = c^t \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \notin S_Q \Rightarrow \#$. Luego, el sistema $r^t u < 0$, $Y_D u \leq 0$, $u \geq 0$, no tiene solución.

“ \Leftarrow ”

Como $\forall x \in X \Rightarrow x_N \geq 0$, $x_B = \bar{b} - Y x_N \geq 0$, aplicando la hipótesis $\Rightarrow \exists x \in X$, $r^t x_N < 0 \Rightarrow \bar{x} \in S_Q$. ■

Corolario 2.4.7 *$\bar{x} \in S_Q$ si, y sólo si, el sistema $r^t + v^t Y_D \geq 0^t$, $v \geq 0$, tiene solución.*

Demostración. Directa aplicando al resultado anterior el teorema de la alternativa de Gale ([Mn69], p. 35). ■

Una vez que sabemos comprobar la optimalidad de un vértice, indistintamente de la base asociada utilizada, estamos en condiciones de intentar dar caracterizaciones para todo el conjunto de soluciones óptimas de Q .

Supongamos que $\bar{x} \in S_Q$. Independientemente de que \bar{x} sea degenerado o no, se tienen los siguientes resultados:

Teorema 2.4.8 $S_Q = \{x \in X / r^t x_N = 0\}$.

Demostración. Teniendo en cuenta que $\bar{x} \in S_Q$ podemos escribir que $S_Q = \{x \in X / c^t x = c^t \bar{x} - r^t x_N = c^t \bar{x}\} = \{x \in X / r^t x_N = 0\}$. ■

Es claro que si el vector de costos relativos tiene todas sus componentes estrictamente positivas entonces \bar{x} es la única solución óptima de Q ([Mr83], Result 3.2, p. 139).

También podemos identificar el conjunto de soluciones óptimas a través de ciertos hiperplanos soporte. Efectivamente,

Teorema 2.4.9 $S_Q = F(c^t, c_B^t B^{-1} b)$.

Demostración. $S_Q = \{x \in X / c^t x = c^t \bar{x}\} = \{x \in X / c^t x = c_B^t B^{-1} b\} = F(c^t, c_B^t B^{-1} b)$. ■

Corolario 2.4.10 $S_Q \in X_f$.

El corolario anterior es importante pues nos indica que las soluciones óptimas de un programa lineal escalar conforman una cara de la región factible.

Si deseamos caracterizaciones más sutiles de S_Q , en función de r , debemos distinguir, nuevamente, los casos en que \bar{x} sea no degenerado y degenerado.

Estudiemos, en primer lugar, el caso en que \bar{x} es no degenerado.

Teorema 2.4.11 $S_Q = \{x \in X / r_j x_j = 0, \forall j \in J_N\}$.

Demostración.

“ \subseteq ”

Sea $\hat{x} \in S_Q \subseteq X \Rightarrow r^t \hat{x}_N = 0$. Como $\hat{x}_N \geq 0$ y $r \geq 0$ (pues $\bar{x} \in S_Q$) $\Rightarrow r_j \hat{x}_j = 0, \forall j \in J_N$.

“ \supseteq ”

Sea $\hat{x} \in X / r_j \hat{x}_j = 0, \forall j \in J_N \Rightarrow r^t \hat{x}_N = 0$. Ahora, como $\bar{x} \in S_Q \Rightarrow \hat{x} \in S_Q$. ■

Como consecuencia, podemos especificar S_Q a través de un conjunto de desigualdades activas. Efectivamente:

Corolario 2.4.12 Sea $J' = \{j \in J_N / r_j > 0\}$. Entonces $S_Q = F(J')$.

Demostración. Sea $\hat{x} \in S_Q \subseteq X \Leftrightarrow r_j \hat{x}_j = 0, \forall j \in J_N \Leftrightarrow \hat{x}_j = 0, \forall j \in J' \Leftrightarrow \hat{x} \in F(J')$. ■

Sea $J' \subseteq J_N$. Si eliminamos la hipótesis de que $\bar{x} \in S_Q$ podemos obtener:

Teorema 2.4.13 $F(J') \subseteq S_Q$ si, y sólo si, $r \geq 0, r_{J_N - J'} = 0$.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Como $\bar{x} \in S_Q$ (pues $\bar{x} \in F(J')$) y, además, \bar{x} es no degenerado $\Rightarrow r \geq 0$.

Sea $s \in J_N - J'$. Supongamos, por reducción al absurdo que $r_s > 0$. Como \bar{x} es no degenerado $\Rightarrow \exists \varepsilon \in R_{++} / \hat{x}_s = \varepsilon > 0, \hat{x}_j = 0, \forall j \in J_N - \{s\}, \hat{x}_B = \bar{b} - Y\hat{x}_N > 0 \Rightarrow \hat{x} \in F(J')$ y, sin embargo, $\hat{x} \notin S_Q \Rightarrow \#$, pues $F(J') \subseteq S_Q$.

“ \Leftarrow ”

Por hipótesis, $r \geq 0 \Rightarrow \bar{x} \in S_Q$. Sea $\hat{x} \in F(J') \Rightarrow \hat{x}_{J'} = 0$. Como $r_{J_N - J'} = 0 \Rightarrow r^t \hat{x}_N = r_{J'}^t \hat{x}_{J'} + r_{J_N - J'}^t \hat{x}_{J_N - J'} = 0$. Aplicando el Teorema 2.4.8 $\Rightarrow \hat{x} \in S_Q$. ■

Evidentemente, si $r_{J_N - J'} = 0$ y $\bar{x} \in S_Q$, independientemente de que el vértice sea degenerado o no, se tiene que $F(J') \subseteq S_Q$

Teorema 2.4.14 ([EcHK80], Lemma 4.1) $F(J') = S_Q$ si, y sólo si, $r \geq 0, J' = \{j \in J_N / r_j > 0\}$.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Por el Teorema 2.4.13, $r \geq 0$ y $J_N - J' \subseteq \{j \in J_N / r_j = 0\}$.

Veamos ahora que $\{j \in J_N / r_j = 0\} \subseteq J_N - J'$. Efectivamente, sea $s \in J_N / r_s = 0$. Supongamos, por reducción al absurdo que $s \in J_N - J'$. Como \bar{x} es no degenerado $\Rightarrow \exists \varepsilon \in R_{++} / \hat{x}_s = \varepsilon > 0, \hat{x}_j = 0, \forall j \in J_N - \{s\}, \hat{x}_B = \bar{b} - Y\hat{x}_N > 0 \Rightarrow \hat{x} \in S_Q$ y, sin embargo, $\hat{x} \notin F(J') \Rightarrow \#$, pues $F(J') = S_Q$.

“ \Leftarrow ”

Como $r \geq 0 \Rightarrow \bar{x} \in S_Q$. Ahora basta aplicar el Corolario 2.4.12. ■

Pongámonos, ahora, bajo la hipótesis de que $\bar{x} \in S_Q$ es σ -degenerado.

Proposición 2.4.15 $\forall v \in R^\sigma, \forall x \in X$ se verifica $r^t x_N = v^t x_D + (r^t + v^t Y_D) x_N$.

Demostración. Directa pues $x_D = -Y_D x_N$. ■

Sea $\Phi(\bar{x}) = \{v \in R_+^\sigma / r^t + v^t Y_D \geq 0\}$. Nótese que $\Phi(\bar{x}) \neq \emptyset$ pues $\bar{x} \in S_Q$. Entonces, $\forall v \in \Phi(\bar{x})$, se tiene:

Teorema 2.4.16 $S_Q = \{x \in X / v^t x_D = 0, (r^t + v^t Y_D) x_N = 0\}$.

Demostración.

“ \supseteq ”

Sea $\hat{x} \in X$ tal que $v^t \hat{x}_D = 0, (r^t + v^t Y_D) \hat{x}_N = 0$. Por la Proposición 2.4.15 $\Rightarrow r^t \hat{x}_N = 0$. Como $\bar{x} \in S_Q \Rightarrow \hat{x} \in S_Q$.

“ \subseteq ”

$\hat{x} \in S_Q \subseteq X \Rightarrow r^t \hat{x}_N = 0$. Aplicando la Proposición 2.4.15 $\Rightarrow v^t \hat{x}_D + (r^t + v^t Y_D) \hat{x}_N = 0$. Como $\forall v \in \Phi(\bar{x}), v^t \hat{x}_D \geq 0, (r^t + v^t Y_D) \hat{x}_N \geq 0 \Rightarrow v^t \hat{x}_D = 0, (r^t + v^t Y_D) \hat{x}_N = 0$. ■

Teorema 2.4.17 $S_Q = \{x \in X / v_j x_j = 0, \forall j \in J_D, (r_j + v^t y_D^j) x_j = 0, \forall j \in J_N\}$.

Demostración.

“ \supseteq ”

Sea $\hat{x} \in X$ tal que $v_j \hat{x}_j = 0, \forall j \in J_D, (r_j + v^t y_D^j) \hat{x}_j = 0, \forall j \in J_N \Rightarrow v^t \hat{x}_D = 0, (r^t + v^t Y_D) \hat{x}_N = 0 \Rightarrow \hat{x} \in S_Q$.

“ \subseteq ”

Sea $\hat{x} \in S_Q \subseteq X \Rightarrow v^t \hat{x}_D = 0, (r^t + v^t Y_D) \hat{x}_N = 0$. Como $v \in \Phi(\bar{x}) \Rightarrow v \in R_+^\sigma, r^t + v^t Y_D \geq 0$. Además, $\hat{x}_D \in R_+^\sigma, \hat{x}_N \in R_+^{n-m} \Rightarrow v_j \hat{x}_j = 0, \forall j \in J_D, (r_j + v^t y_D^j) \hat{x}_j = 0, \forall j \in J_N$. ■

Ahora ya estamos en condiciones de volver a caracterizar el conjunto de soluciones óptimas de un programa escalar a través de un conjunto de desigualdades activas. Efectivamente:

Corolario 2.4.18 Sea $J' = \{j \in J_N / r_j + v^t y_D^j > 0\} \cup \{j \in J_D / v_j > 0\}$. Entonces $S_Q = F(J')$.

Demostración. Sea $\hat{x} \in S_Q \subseteq X \Leftrightarrow v_j \hat{x}_j = 0, \forall j \in J_D, (r_j + v^t y_D^j) \hat{x}_j = 0, \forall j \in J_N$. Como $v \in \Phi(\bar{x}), \Leftrightarrow \hat{x}_j = 0, \forall j \in J' \Leftrightarrow \hat{x} \in F(J')$. ■

Nuevamente, si eliminamos la hipótesis de que $\bar{x} \in S_Q$ podemos obtener:

Teorema 2.4.19 *Sea $J' \subseteq J_Z$ descriptor maximal. Entonces, $F(J') \subseteq S_Q$ si, y sólo si, el sistema, $r_{J'_N}^t + v^t Y_D^{J'_N} \geq 0$, $r_{J'_N - J'}^t + v^t Y_D^{J'_N - J'} = 0$, $v_{J'_D} \geq 0$, $v_{J'_D - J'} = 0$, tiene solución.*

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Como $\bar{x} \in S_Q$ (pues $\bar{x} \in F(J')$) y, además, \bar{x} es degenerado $\Rightarrow r^t + v^t Y_D \geq 0$, $v \geq 0$, tiene solución.

Sea $s \in J_N - J'$ y supongamos, por reducción al absurdo que $r_s + v^t y_D^s > 0$. Como J' es un descriptor maximal $\Rightarrow \exists \hat{x} \in F(J')$, $\hat{x}_s > 0$. Sin embargo, $\hat{x} \notin S_Q \Rightarrow \#$, pues $F(J') \subseteq S_Q$.

Para $s \in J_D - J'$ se haría un razonamiento análogo al anterior.

“ \Leftarrow ”

Por hipótesis, $r^t + v^t Y_D \geq 0$, $v \geq 0$, tiene solución $\Rightarrow \bar{x} \in S_Q$. Sea $\hat{x} \in F(J') \Rightarrow \hat{x}_{J'} = 0$. Aplicando el Teorema 2.4.17 $\Rightarrow \hat{x} \in S_Q$. ■

Teorema 2.4.20 *Sea $J' \subseteq J_Z$ descriptor maximal y supongamos que la representación de X dada por el sistema (2.1) no tiene igualdades implícitas (\emptyset es un descriptor maximal de X). Entonces, $F(J') = S_Q$ si, y sólo si, $r^t + v^t Y_D \geq 0$, $v \geq 0$, $J' = \{j \in J_N / r_j + v^t y_D^j > 0\} \cup \{j \in J_D / v_j > 0\}$.*

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Por el Teorema 2.4.19 $\Rightarrow r^t + v^t Y_D \geq 0$, $v \geq 0$, $J_N - J' \subseteq \{j \in J_N / r_j + v^t y_D^j = 0\}$ y $J_D - J' \subseteq \{j \in J_D / v_j = 0\}$.

Veamos ahora que $\{j \in J_N / r_j + v^t y_D^j = 0\} \subseteq J_N - J'$. Efectivamente, sea $s \in J_N$, $r_s + v^t y_D^s = 0$ y supongamos por reducción al absurdo que $s \in J'_N$. Como \emptyset es un descriptor maximal de $X \Rightarrow \exists \hat{x} \in X$, $\hat{x}_s > 0 \Rightarrow \hat{x} \notin F(J')$ y $\hat{x} \in S_Q \Rightarrow \#$, pues $F(J') = S_Q$.

Para ver que $\{j \in J_D / v_j = 0\} \subseteq J_D - J'$ se aplica un razonamiento similar.

Luego $J_N - J' = \{j \in J_N / r_j + v^t y_D^j = 0\}$ y $J_D - J' = \{j \in J_D / v_j = 0\} \Rightarrow J'_N = \{j \in J_N / r_j + v^t y_D^j > 0\}$ y $J'_D = \{j \in J_D / v_j > 0\}$.

“ \Leftarrow ”

Como $r^t + v^t Y_D \geq 0$, $v \geq 0 \Rightarrow \bar{x} \in S_Q$. Ahora, aplicando el Corolario 2.4.18 $\Rightarrow F(J') = S_Q$. ■

Estudiemos ahora ciertos aspectos que consideramos de interés. Nos plantearemos, en primer lugar, la cuestión de cuando un poliedro contenido en la región factible X es totalmente óptimo.

Sean $S = \{x^1, \dots, x^s\} \subseteq X$ e $Y = CVH(S)$.

Proposición 2.4.21 $Y^0 \cap S_\varrho \neq \emptyset$ si, y sólo si, $Y \subseteq S_\varrho$.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Trivial.

“ \Rightarrow ”

Sea $\bar{x} \in Y^0 \cap S_\varrho \Rightarrow \exists \mu \in \Lambda_s^0$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^s \mu_i x^i$. Como $\bar{x} \in S_\varrho \Rightarrow \forall x \in X$, $c^t \bar{x} \geq c^t x$
 $\Rightarrow c^t \bar{x} \geq c^t x^i$, $\forall i \in \{1, \dots, s\}$. Supongamos, por reducción al absurdo que
 $\exists i_0 \in \{1, \dots, q\}$, $c^t \bar{x} > c^t x^{i_0} \Rightarrow c^t \bar{x} = c^t \left(\sum_{i=1}^s \mu_i x^i \right) = \sum_{i=1}^s \mu_i c^t x^i < \sum_{i=1}^s \mu_i c^t \bar{x} = c^t \bar{x}$
 $\Rightarrow \#$, luego $S \subseteq S_\varrho$. Ahora, aplicando que S_ϱ es convexo $\Rightarrow Y = CVH(S) \subseteq S_\varrho$. ■

El resultado anterior se puede generalizar al caso no acotado. Efectivamente, consideremos adicionalmente un conjunto de direcciones de recesión de X dado por $T = \{d^1, \dots, d^p\}$ y supongamos que $Y = CVH(S) + CNH(T)$.

Proposición 2.4.22 $Y^0 \cap S_\varrho \neq \emptyset$ si, y sólo si, $Y \subseteq S_\varrho$.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Trivial.

“ \Rightarrow ”

Sea $\bar{x} \in Y^0 \cap S_\varrho$. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \hat{x} \in Y$, $\hat{x} \notin S_\varrho$. Podemos encontrar $\{\hat{x}^{s+1}, \dots, \hat{x}^{s+p}\}$, puntos sobre los rayos de Y , tales que tomando $\hat{S} = \{x^1, \dots, x^s, \hat{x}^{s+1}, \dots, \hat{x}^{s+p}\}$, se verifique que $\hat{x} \in CVH(\hat{S})$ y $\bar{x} \in CVH^0(\hat{S})$. Como $\bar{x} \in S_\varrho$, por la Proposición 2.4.21 $\Rightarrow CVH(\hat{S}) \subseteq S_\varrho \Rightarrow \hat{x} \in S_\varrho \Rightarrow \#$, luego $Y \subseteq S_\varrho$. ■

Corolario 2.4.23 Sea $\emptyset \neq Y \subseteq X$ poliedro. Entonces, $Y^0 \cap S_\varrho \neq \emptyset$ si, y sólo si, $Y \subseteq S_\varrho$.

Demostración. Inmediata utilizando la Proposición 2.4.22 y teniendo en cuenta que cualquier poliedro se puede poner como la envolvente convexa de

sus puntos extremos más la envolvente cónica de sus direcciones extremas (ver, por ejemplo, [NmWl88], Theorem 4.8). ■

A continuación desarrollaremos unas propiedades que nos serán de utilidad para la interpretación geométrica de algunas conclusiones de la sección 2.8.

Sea $J' \subseteq J$, $Q' \equiv \max\{c^t x / x \in X'\}$, $X' = \{x \in R^n / Ax = b, x_{J'} \geq 0\}$. Por un razonamiento análogo al empleado en el Teorema 2.4.1 se obtiene:

Teorema 2.4.24

$$S_{Q'} = \{x \in R^n / Ax = b, x_{J'} \geq 0, u^t A^{J'} \geq c_{J'}^t, u^t A^{J-J'} = c_{J-J'}^t, (u^t A - c^t)x = 0\}.$$

Consideremos ahora las caras $F(J') = \{x \in X / x_{J'} = 0\}$ y $F'(J') = \{x \in X' / x_{J'} = 0\}$.

Es claro que $F(J') \subseteq (F'(J'))^0$.

Teorema 2.4.25 Si $J' \subseteq J$ es un descriptor maximal de $F(J')$, entonces $F(J') \subseteq S_{Q'}$ si, y sólo si, $F'(J') \subseteq S_{Q'}$.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Sea $\bar{x} \in F(J') \subseteq F'(J') \subseteq S_{Q'} \Rightarrow \forall x \in X', c^t \bar{x} \geq c^t x$. Como $X \subseteq X' \Rightarrow \forall x \in X, c^t \bar{x} \geq c^t x \Rightarrow \bar{x} \in S_{Q'}$.

“ \Rightarrow ”

Por ser $J' \subseteq J$ descriptor maximal de $F(J')$, aplicando la Proposición 2.3.18 $\Rightarrow \exists \bar{x} \in X, \bar{x}_{J-J'} > 0$. Como $F(J') \subseteq S_{Q'}$, por el Teorema 2.4.1 $\Rightarrow \exists \bar{u} \in R^m, \bar{u}^t A^{J'} \geq c_{J'}^t, \bar{u}^t A^{J-J'} - c_{J-J'}^t = 0$. Entonces, $\forall \hat{x} \in F'(J') \Rightarrow A\hat{x} = b, \hat{x}_{J'} = 0 \Rightarrow (\bar{u}^t A - c^t)\hat{x} = (\bar{u}^t A^{J'} - c_{J'}^t)\hat{x}_{J'} + (\bar{u}^t A^{J-J'} - c_{J-J'}^t)\hat{x}_{J-J'} = 0$. Ahora, por el Teorema 2.4.24 $\Rightarrow \hat{x} \in S_{Q'}$. ■

Es claro que en la implicación hacia la izquierda no se necesita la condición de que J' sea un descriptor maximal.

Vamos a ilustrar gráficamente el Teorema 2.4.25 considerando dos situaciones posibles en R^2 .

Ejemplo 2.4.26 Consideremos el problema Q de optimización escalar dado por la Figura 2.6. Evidentemente, la relajación lineal Q' considerada en el Teorema 2.4.25 se corresponde con la representada en la Figura 2.7. Es claro que en este caso $\{\bar{x}\} = S_Q = S_{Q'}$.

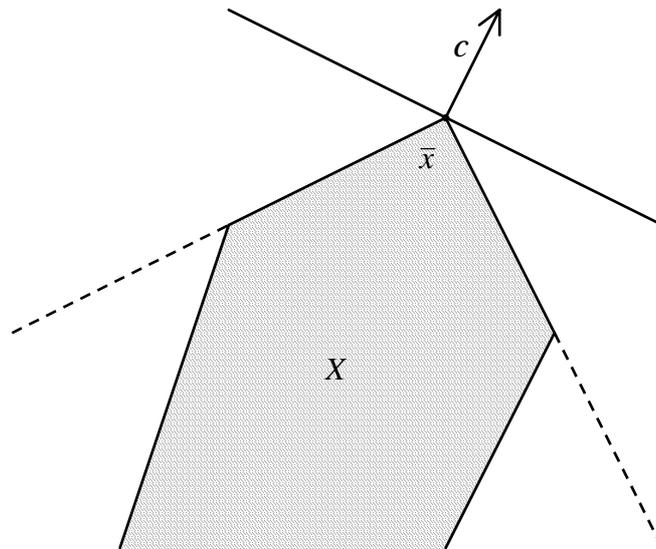


Figura 2.6

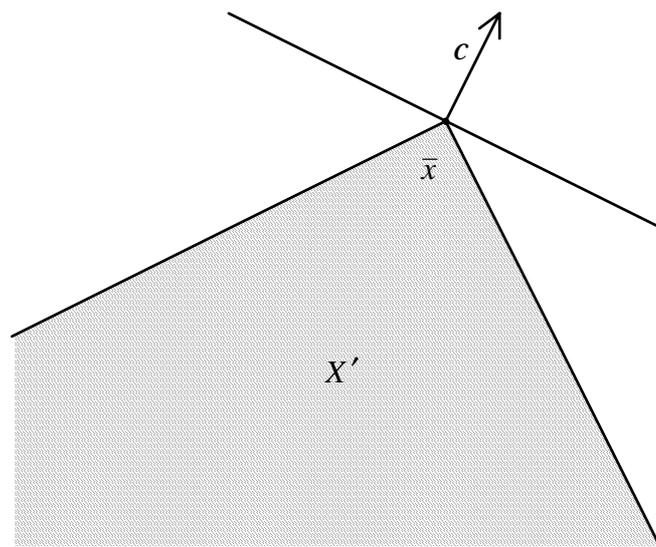


Figura 2.7

Ejemplo 2.4.27 Consideremos ahora el problema Q de optimización escalar dado por la Figura 2.8. Evidentemente, la relajación lineal Q' considerada en el Teorema 2.4.25 se corresponde con la representada en la Figura 2.9. Es claro que en este caso $S_Q \subset S_{Q'}$.

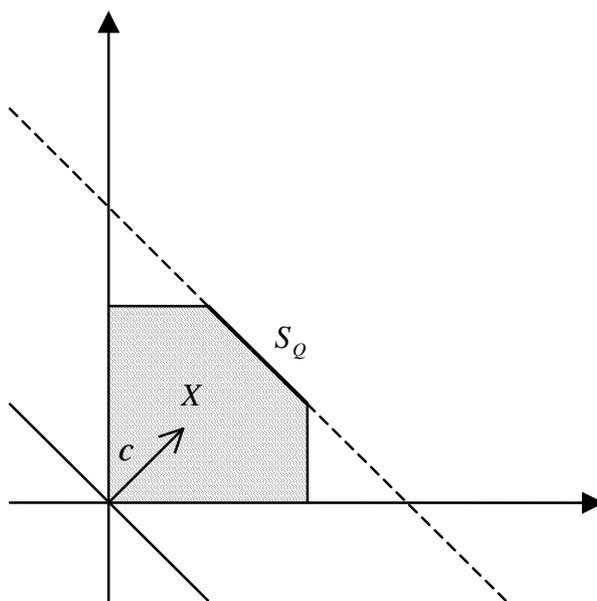


Figura 2.8

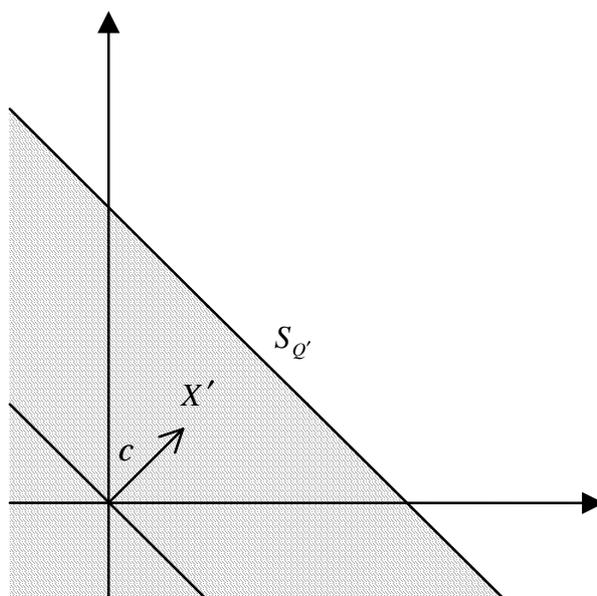


Figura 2.9

2.5 Eficiencia y Envolventes Convexas

En esta sección vamos a estudiar algunas de las propiedades más útiles relacionadas con la eficiencia y relativas a las envolventes convexas de puntos. La importancia de las mismas reside, por una parte, en la fuerte intuición geométrica que proporcionan y, por otra, en su indiscutible rendimiento teórico y algorítmico.

Consideremos el LVP, $P \equiv \max\{Cx / x \in X\}$ y sean $Q = \{x^1, \dots, x^q\} \subseteq X$ puntos arbitrarios e $Y = CVH(Q)$. Entonces, se pueden obtener los siguientes resultados:

Corolario 2.5.1 ([Zl74], Theorem 4.1.2, (i), [YuZl75], Theorem 2.2, (i), [Gal77], Corollary 2.4) $Y^0 \cap E^P \neq \emptyset$ si, y sólo si, $Y \subseteq E^P$.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Trivial.

“ \Rightarrow ”

Si $Y^0 \cap E^P \neq \emptyset \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda_k^0$, $Y^0 \cap S_{P_\lambda} \neq \emptyset$. Por la Proposición 2.4.21 $\Rightarrow Y \subseteq S_{P_\lambda} \Rightarrow Y \subseteq E^P$. ■

A partir del Teorema 1.4.38 y el Corolario 2.5.1 podemos obtener un práctico test para comprobar la eficiencia de una envolvente convexa de puntos:

Teorema 2.5.2 Sean $\mu \in \Lambda_q^0$ arbitrario, $\bar{x} = \sum_{i=1}^q \mu_i x^i$ y $\bar{z} = C\bar{x}$. Entonces, $Y \subseteq E^P$ si, y sólo si, $P(\bar{z}) \equiv \max\{e^t s / Cx - s = \bar{z}, x \in X, s \in R_+^k\}$ es acotado, con valor objetivo óptimo 0.

Otra interesante propiedad es la siguiente:

Corolario 2.5.3 ([Gal77], Theorem 2.3) $Y \subseteq E^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in \Lambda_k^0$, $Q \subseteq S_{P_\lambda}$.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

$Y \subseteq E^P \Rightarrow Y^0 \cap E^P \neq \emptyset \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda_k^0$, $Y^0 \cap S_{P_\lambda} \neq \emptyset$. Por la Proposición 2.4.21 $\Rightarrow Y \subseteq S_{P_\lambda} \Rightarrow Q \subseteq S_{P_\lambda}$.

“ \Leftarrow ”

Si $\exists \lambda \in \Lambda_k^0$, $Q \subseteq S_{P_\lambda}$. Como S_{P_λ} es convexo $\Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda_k^0$, $CVH(Q) \subseteq S_{P_\lambda} \Rightarrow Y \subseteq E^P$. ■

Corolario 2.5.4 ([Zl74], Theorem 4.1.2, (ii), [YuZl75], Theorem 2.2, (i), [YuZl75], Lemma 2.1) $Y \cap \bar{E}^P \neq \emptyset$ si, y sólo si, $Y^0 \subseteq \bar{E}^P$.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Trivial.

“ \Rightarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $Y^0 \cap E^P \neq \emptyset$. Por el Corolario 2.5.1 $\Rightarrow Y \subseteq E^P \Rightarrow Y \cap \bar{E}^P = \emptyset \Rightarrow \#$. Luego, $Y^0 \subseteq \bar{E}^P$. ■

Proposición 2.5.5 ([ChHm83], p. 155) Si $Q \subseteq \bar{E}^P$ entonces $Y \subseteq \bar{E}^P$.

Demostración. Como $Q \subseteq \bar{E}^P \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, q\}$, $\exists \bar{x}^i \in X$, $C\bar{x}^i \geq Cx^i$. Sea $x \in Y = CVH(Q) \Rightarrow \exists \mu \in \Lambda_q$, $x = \sum_{i=1}^q \mu_i x^i \Rightarrow \exists \bar{x} = \sum_{i=1}^q \mu_i \bar{x}^i \in X$, $C\bar{x} \geq Cx \Rightarrow x \in \bar{E}^P \Rightarrow Y \subseteq \bar{E}^P$. ■

Corolario 2.5.6 ([YuZl75], Theorem 2.1) \bar{E}^P es convexo.

Demostración. Directa pues $\forall x^1, x^2 \in \bar{E}^P \Rightarrow CVH(\{x^1, x^2\}) \subseteq \bar{E}^P$. ■

Sin embargo, en general, E^P no es convexo.

Teorema 2.5.7 Si X es acotado entonces $E^P \subseteq CVH(E_{xp}^P)$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in E^P$. Por ser X acotado $\Rightarrow \exists Q = \{x^1, \dots, x^q\} \subseteq X_{xp}$, $\bar{x} \in CVH^0(Q)$. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists i \in \{1, \dots, q\}$ tal que $x^i \in \bar{E}^P$. Por el Corolario 2.5.4 $\Rightarrow CVH^0(Q) \subseteq \bar{E}^P \Rightarrow \bar{x} \in \bar{E}^P \Rightarrow \#$. Luego, $\bar{x} \in CVH(E_{xp}^P)$ ■

Normalmente, $E^P \neq CVH(E_{xp}^P)$. No obstante, el resultado anterior nos indica que $CVH(E_{xp}^P)$ puede considerarse una *aproximación* de E^P (ver capítulo 4).

Las conclusiones anteriores se pueden extender sin dificultad al caso de que Q está formado por un número finito de puntos y direcciones extremas de X . En particular, se prueba:

Teorema 2.5.8 $E^P \subseteq CVH(E_{xp}^P) + CNH(E_{xd}^P)$.

Supongamos que $Y = CVH(\{x^1, \dots, x^p\}) + CNH(\{d^1, \dots, d^q\})$ y $\bar{x} \in Y^0$. Otra herramienta de utilidad para los métodos generadores de soluciones eficientes (ver sección 4.5) es la siguiente:

Teorema 2.5.9 *Entonces, $Y \subseteq E^P$ si, y sólo si, el problema $\min\{s / u^t A - \lambda^t C \geq 0, u^t b - s = \lambda^t C \bar{x}, \lambda \geq e, s \geq 0\}$ es acotado, con valor óptimo 0.*

Demostración. Si el problema $\min\{s / u^t A - \lambda^t C \geq 0, u^t b - s = \lambda^t C \bar{x}, \lambda \geq e, s \geq 0\}$ es acotado, con valor óptimo 0, por el Corolario 1.7.8 $\Leftrightarrow \bar{x} \in E^P$. Como $\bar{x} \in Y^0$, aplicando el Corolario 2.5.1 $\Leftrightarrow Y \subseteq E^P$. ■

No queremos finalizar esta sección sin dejar de interpretar los resultados obtenidos a través de la teoría de poliedros. Efectivamente, dado que toda cara de X se puede poner como el poliedro generado por sus puntos extremos y direcciones extremas (si las hubiese), tenemos las siguientes consecuencias inmediatas:

- Por el Corolario 2.5.1, si un punto del interior relativo de una cara es eficiente, toda la cara es eficiente (Corolario 1.7.19).
- Por el Corolario 2.5.3, si todos los vértices de una cara son soluciones óptimas de un mismo problema P_λ , con $\lambda \in R_{++}^k$, entonces toda la cara es eficiente.
- Por el Corolario 2.5.4, si algún punto de la cara no es eficiente, entonces todo el interior relativo de la cara es ineficiente.
- Por la Proposición 2.5.5, si todos los vértices de la cara son ineficientes, entonces toda la cara es ineficiente. En contraposición, aunque todos los vértices de una cara sean eficientes, tal cara no tiene por que ser eficiente (ver Ejemplo 2.5.10).

Ejemplo 2.5.10 *En la Figura 2.10 se observa que los vértices x^2 y x^3 son eficientes y, sin embargo, $CVH(\{x^2, x^3\}) \not\subseteq E^P$.* ●

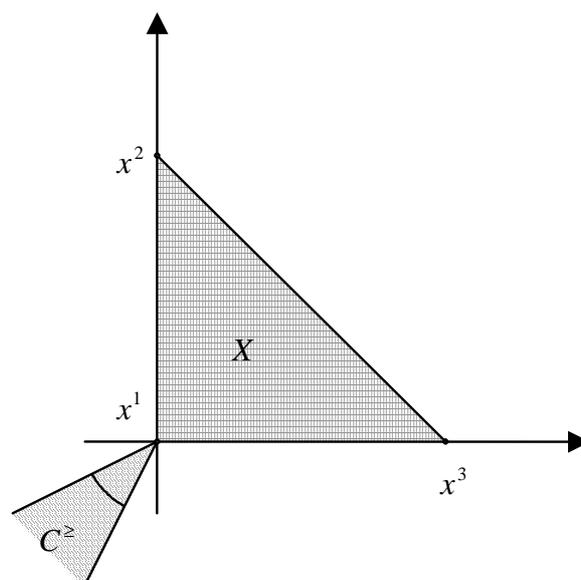


Figura 2.10

2.6 Vértices Eficientes

Los tests de eficiencia para vértices constituyen una de las herramientas básicas de la programación vectorial lineal. Históricamente (ver, por ejemplo, [Ph72], [EvSt73], [Zl74], ...) fueron los primeros en ser abordados por su relativa sencillez y porque su disponibilidad permitiría afrontar, de manera casi inmediata, diversas implementaciones de algoritmos generadores de vértices eficientes (cuyo diseño general se consideraba conceptualmente claro). Sorprendentemente, tales resultados han estado dispersos en la literatura durante largo tiempo y, algunos, ni siquiera estaban exentos de errores ([Ph72]).

Ello nos impulsó a realizar una reelaboración completa del tema, cuyo fruto ha sido este apartado. Por una parte, pretendemos mostrar la armonía y belleza de la teoría, al integrar de manera natural y sencilla los resultados más importantes publicados (no un inventario metódico), incluyendo un estudio detallado y paralelo del caso degenerado. Consideramos que esta panorámica ofrecida presta un gran servicio al lector, por reunir y hacer accesibles un inmenso caudal de ideas. Por otra parte, la estructura diseñada nos servirá de pauta para realizar el estudio, en las siguientes secciones, de las caracterizaciones de eficiencia de caras de mayor dimensión de un poliedro.

Sea P el problema $\max\{Cx / x \in X\}$, donde X viene dado por el sistema (2.1). Consideremos \bar{x} s.f.b. de X , especificado por una base arbitraria $B \in R^{m \times m}$ de $A (= [B \ N])$ y $R = C^B B^{-1} N - C^N \in R^{k \times (n-m)}$, su matriz de costos reducidos asociada, la cual supondremos, sin pérdida de generalidad,

no nula. Obsérvese que, en caso contrario, se tendría de manera trivial (ver Proposición 2.6.1) que $E^P = X$.

Para puntos arbitrarios, disponemos de resultados como el siguiente:

Proposición 2.6.1 $\hat{x} \in E^P$ si, y sólo si, $\exists x \in X$ tal que $R\hat{x}_N \geq Rx_N$.

Demostración. $\hat{x} \in E^P \Leftrightarrow \exists x \in X, Cx \geq C\hat{x} \Leftrightarrow \exists x \in X, Cx = C^B\bar{b} - Rx_N \geq C^B\bar{b} - R\hat{x}_N = C\hat{x} \Leftrightarrow \exists x \in X, R\hat{x}_N \geq Rx_N$. ■

Ahora bien, si la solución factible considerada es un vértice estamos en condiciones de poder explotar su estructura especial para lograr tests notablemente más eficaces que el anterior.

2.6.1 Caso No Degenerado

Supongamos, en primer lugar, que \bar{x} es no degenerado. Uno de los resultados clásicos más importantes es:

Teorema 2.6.2 ([EvSt73], Lemma 2.1) $\bar{x} \in E_{xp}^P$ si, y sólo si, el sistema:

$$Ru \leq 0, u \geq 0 \quad (2.8)$$

no tiene solución.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Supongamos, por reducción al absurdo que $\exists \hat{u} \in R_+^{n-m}, R\hat{u} \leq 0$. Como \bar{x} es no degenerado $\Rightarrow \exists \varepsilon \in R_{++} / \hat{x}_N = \varepsilon\hat{u} \geq 0, \hat{x}_B = \bar{b} - Y\hat{x}_N > 0 \Rightarrow \hat{x} \in X$. Además, como $R\hat{x}_N = \varepsilon R\hat{u} \leq 0 = R\bar{x}_N \Rightarrow \bar{x} \notin E_{xp}^P \Rightarrow \#$. Luego $\exists u \in R_+^{n-m}$ tal que $Ru \leq 0$.

“ \Leftarrow ”

Como $\forall x \in X \Rightarrow x_N \geq 0, x_B = \bar{b} - Yx_N \geq 0$, aplicando la hipótesis $\Rightarrow \exists x \in X, Rx_N \leq R\bar{x}_N \Rightarrow \bar{x} \in E_{xp}^P$. ■

Aplicando al sistema (2.8) el teorema de la alternativa de Gale ([Mn69], p. 35) se obtiene:

Corolario 2.6.3¹ $\bar{x} \in E_{xp}^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_+^k$ tal que $\lambda'R \geq 0$.

¹ En este resultado se basa el método II.2 que aparece en [Ph72], p. 218-220. El autor no distinguió el caso degenerado. Este error fue corregido años más tarde en [Ph77].

Nótese que, independientemente o no de la degeneración de \bar{x} , si $\exists \lambda \in R_{++}^k$ tal que $\lambda^t R \geq 0$ entonces $\bar{x} \in S_{p_\lambda} \subseteq E^P$. Para la otra implicación si es fundamental la hipótesis de no degeneración.

Es interesante destacar que λ se puede entender como una especie de vector de multiplicadores de Lagrange asociados a \bar{x} .

Por la homogeneidad del sistema del Corolario 2.6.3, la condición $\lambda \in R_{++}^k$ se puede sustituir por $\lambda \in \Lambda_k^0$ o por $\lambda \geq e$. Así,

Corolario 2.6.4 $\bar{x} \in E_{xp}^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in \Lambda_k^0$, $\lambda^t R \geq 0$.

Corolario 2.6.5 $\bar{x} \in E_{xp}^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R^k$, $\lambda^t R \geq 0$, $\lambda \geq e$.

Si hacemos ahora el cambio de variable $\lambda = \lambda + e$, entonces:

Corolario 2.6.6 $\bar{x} \in E_{xp}^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_+^k$, $\lambda^t R \geq -e^t R$.

A partir del Teorema 2.6.2 se descubre, sin dificultad, el siguiente test:

Corolario 2.6.7 ([EvSt73], Corollary 2.2) $\bar{x} \in E_{xp}^P$ si, y sólo si, el problema:

$$\max \{e^t s / Ru + Is = 0, u \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.9)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Nótese que el problema (2.9) es factible pues $(u^t, s^t) = (0, 0)$ verifica las restricciones. Además, hay disponible de forma inmediata una base inicial dada por la identidad (I).

Además, es claro que (2.9) es un problema degenerado. Sin embargo, se debe esperar que tenga un número reducido de restricciones de tipo igualdad, por ser frecuente en la práctica que k sea pequeño.

Merece la pena destacar que, si en el transcurso de la resolución del problema (2.9), el valor objetivo se hace estrictamente positivo, podemos parar sin necesidad de terminar la optimización, concluyendo que \bar{x} es no eficiente. Evidentemente, la consideración de esta apreciación aumenta el rendimiento del test.

Teorema 2.6.8 $\bar{x} \notin E_{xp}^P$ si, y sólo si, (2.9) es no acotado.

Demostración. $\bar{x} \notin E_{xp}^P$. Por el Corolario 2.6.5 $\Leftrightarrow \lambda' R \geq 0, \lambda \geq e$, no tiene solución. Si denotamos por D el problema dual de (2.9) $\Leftrightarrow D$ es no factible. Como (2.9) es factible \Leftrightarrow (2.9) es no acotado. ■

2.6.2 Caso Degenerado

Con mucha frecuencia ocurre en la práctica que el vértice objeto de estudio es degenerado. Por tal motivo es prioritario analizar adecuadamente la nueva situación.

Supongamos que \bar{x} es σ -degenerado. Siempre se verifica que:

Teorema 2.6.9 ([St86], Theorem 9.11) $\forall \bar{x} \in E_{xp}^P$ entonces $\exists B \in B(\bar{x}), \exists \lambda \in R_{++}^k$ tales que $\lambda' R \geq 0$.

Demostración. Si $\bar{x} \in E_{xp}^P \Rightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, \bar{x} \in S_{P_\lambda}$. Ahora, aplicando las propiedades del algoritmo del simplex $\Rightarrow \exists B \in B(\bar{x}), \lambda' R \geq 0$. ■

Bajo hipótesis de degeneración es posible que la base particular B , asociada a \bar{x} , que estamos considerando, verifique que $I(B) = \emptyset$; es decir, el sistema $\lambda' R \geq 0, \lambda > 0$, no tiene solución. No obstante, sean $Y = B^{-1}N$ e Y_D las filas de Y asociadas a variables básicas degeneradas.

Teorema 2.6.10 ([EvSt73], Lemma 2.4) $\bar{x} \in E_{xp}^P$ si, y sólo si, el sistema:

$$Ru \leq 0, Y_D u \leq 0, u \geq 0 \quad (2.10)$$

no tiene solución.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Supongamos, por reducción al absurdo que $\exists \hat{u} \in R_+^{n-m}, R\hat{u} \leq 0, Y_D \hat{u} \leq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon \in R_{++} / \hat{x}_N = \varepsilon \hat{u} \geq 0, \hat{x}_B = \bar{b} - Y\hat{x}_N \geq 0 \Rightarrow \hat{x} \in X$. Además, como $R\hat{x}_N = \varepsilon R\hat{u} \leq 0 = R\bar{x}_N \Rightarrow \bar{x} \notin E_{xp}^P \Rightarrow \#$, Luego $\nexists u \in R_+^{n-m}, Ru \leq 0, Y_D u \leq 0$.

“ \Leftarrow ”

Como $\forall x \in X \Rightarrow x_N \geq 0, x_B = \bar{b} - Yx_N \geq 0$, aplicando la hipótesis $\Rightarrow \nexists x \in X, Rx_N \leq R\bar{x}_N \Rightarrow \bar{x} \in E_{xp}^P$. ■

Aplicando al sistema (2.10) el teorema de la alternativa de Tucker ([Mn69], p. 29), se tiene:

Corolario 2.6.11 ([ArM191], Proposition 2.2) $\bar{x} \in E_{xp}^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k$, $\exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq 0$.

Por la homogeneidad del sistema anterior podemos escribir:

Corolario 2.6.12 $\bar{x} \in E_{xp}^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in \Lambda_k^0$, $\exists v \in R_+^\sigma$, tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq 0$.

Corolario 2.6.13 $\bar{x} \in E_{xp}^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R^k$, $\exists v \in R_+^\sigma$, tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq 0$, $\lambda \geq e$.

Si hacemos ahora el cambio de variable $\lambda = \lambda + e$, entonces:

Corolario 2.6.14² $\bar{x} \in E_{xp}^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_+^k$, $\exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq -e^t R$.

A partir del Teorema 2.6.10 también es posible obtener el siguiente test:

Corolario 2.6.15 $\bar{x} \in E_{xp}^P$ si, y sólo si, el problema:

$$\max \{e^t s / Ru + Is = 0, Y_D u \leq 0, u \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.11)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

El problema (2.11) siempre es factible pues $(u^t, s^t) = (0, 0)$ verifica las restricciones. Además, se dispone de forma inmediata una base inicial, dada por las columnas asociadas a s y a las variables de holgura de $Y_D u \leq 0$.

Si el grado de degeneración σ de \bar{x} no es grande, se debe esperar que (2.11) tenga una base de dimensión pequeña, por ser frecuente en la práctica que k sea pequeño.

Evidentemente, (2.11) es un problema degenerado y, nuevamente, si en el transcurso de su resolución, el valor objetivo se hace estrictamente positivo, podemos parar la optimización, concluyendo que \bar{x} es no eficiente.

² En este resultado se basa el método II.2 que aparece en [Ph77], p. 357, para generar una solución eficiente.

Teorema 2.6.16 $\bar{x} \notin E_{xp}^P$ si, y sólo si, (2.11) es no acotado.

Demostración. $\bar{x} \notin E_{xp}^P$. Por el Corolario 2.6.13 $\Leftrightarrow \lambda'R + v'Y_D \geq 0$, $\lambda \geq e$, $v \geq 0$, no tiene solución. Si denotamos por D el problema dual de (2.11) $\Leftrightarrow D$ es no factible. Como (2.11) es factible \Leftrightarrow (2.11) es no acotado. ■

2.7 Aristas Eficientes Incidentes en un Vértice

Una vez que se tienen tests para comprobar la eficiencia de un vértice, lo natural consiste en intentar extenderlos al caso de aristas incidentes en un vértice. Mientras que para el caso no degenerado existe una cantidad apreciable de resultados publicados, es significativa la escasez de los mismos para el caso degenerado, que sólo ha merecido atención en raras ocasiones (ver, por ejemplo, [EcKd78]).

Esta sección estudia en qué condiciones una arista incidente en un vértice es eficiente, desarrollando una teoría viable para el caso degenerado.

Sea P el problema $\max\{Cx / x \in X\}$, donde X viene dado por el sistema (2.1). Consideremos \bar{x} s.f.b. de X , especificado por una base arbitraria $B \in R^{m \times m}$ de $A (= [B \ N])$ y $R = C^B B^{-1} N - C^N \in R^{k \times (n-m)}$, su matriz de costos reducidos asociada, la cual supondremos, sin pérdida de generalidad, no nula.

Sean $j \in J_N$, r^j la columna de R asociada a \bar{x}_j y $\delta^j \in X_e$ la arista de X , incidente en \bar{x} , que se obtiene al incrementar el valor de la variable no básica \bar{x}_j . Supondremos que $r^j \not\geq 0$, pues en caso contrario la arista es obviamente ineficiente (ver Proposición 4.3.6, (ii)).

Sabemos que si denotamos por $J' = J_N - \{j\}$, entonces $\delta^j = F(J')$.

2.7.1 Caso No Degenerado

Supongamos que \bar{x} es no degenerado.

Teorema 2.7.1 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$Ru \leq r^j, \quad u \geq 0 \tag{2.12}$$

no tiene solución.

Demostración. Sea $\hat{u} = e_j \in R_+^{n-m} \Rightarrow r^j = R\hat{u}$

“ \Rightarrow ”

Supongamos, por reducción al absurdo que $\exists \tilde{u} \in R_+^{n-m}$, $R\tilde{u} \leq r^j$. Como \bar{x} es no degenerado, $\exists \varepsilon \in R_{++}$ tal que los puntos \tilde{x} y \hat{x} , dados por, $\tilde{x}_N = \varepsilon\tilde{u}$, $\tilde{x}_B = \bar{b} - Y\tilde{x}_N$ y $\hat{x}_N = \varepsilon\hat{u}$, $\hat{x}_B = \bar{b} - Y\hat{x}_N$ verifican que $\tilde{x}_B, \hat{x}_B > 0$. Luego, $\tilde{x}, \hat{x} \in X$. Además, $\hat{x} \in \delta^j$. Como $R\hat{u} \geq R\tilde{u} \Rightarrow R\hat{x}_N \geq R\tilde{x}_N \Rightarrow \hat{x} \notin E^P \Rightarrow \#$, pues $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$.

“ \Leftarrow ”

Como \bar{x} es no degenerado, $\exists \varepsilon \in R_{++}$ tal que \hat{x} , definido por, $\hat{x}_N = \varepsilon\hat{u}$, $\hat{x}_B = \bar{b} - Y\hat{x}_N$ verifica que $\hat{x}_B > 0 \Rightarrow \hat{x} \in (\delta^j)^0$. Además, aplicando la hipótesis $\Rightarrow \exists u \in R_+^{n-m}$, $Ru \leq R\hat{u} \Rightarrow \exists x \in X$, $Rx_N \leq R\hat{x}_N \Rightarrow \hat{x} \in E^P \Rightarrow \delta^j \subseteq E^P$. ■

Es posible reescribir el Teorema 2.7.1 en términos de un programa escalar lineal. Efectivamente:

Corolario 2.7.2 ([EcKd78], Theorem 1) $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el problema:

$$\max\{e^t s / Ru + Is = r^j, u \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.13)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Obsérvese que (2.13) siempre es factible pues $(u^t, s^t) = (e_j^t, 0)$ verifica las restricciones. Además, se puede conseguir de manera inmediata una base inicial. Adicionalmente, la dimensión de esta base debe ser pequeña pues hay sólo k restricciones de tipo igualdad. Por otra parte, si en el transcurso de la resolución del problema (2.13), el valor objetivo se hace estrictamente positivo, podemos parar sin necesidad de terminar la optimización, concluyendo que δ^j es no eficiente.

Aplicando dualidad escalar al Corolario 2.7.2 se tiene:

Corolario 2.7.3 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el problema:

$$\min\{\lambda^t r^j / \lambda^t R \geq 0, \lambda \geq e\} \quad (2.14)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Teorema 2.7.4 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$Ru - r^j v \leq 0, u \geq 0, v \geq 0 \quad (2.15)$$

no tiene solución.

Demostración.“ \Leftarrow ”

Tomando $v=1$ y aplicando la hipótesis $\Rightarrow Ru \leq r^j$, $u \geq 0$, no tiene solución. Ahora por el Teorema 2.7.1 $\Rightarrow \delta^j \in E_e^P(\bar{x})$.

“ \Rightarrow ”

Supongamos por R. A. que $\exists \bar{u} \in R_+^{n-m}$, $\exists \bar{v} \in R_+$, $R\bar{u} - r^j \bar{v} \leq 0$. Distinguiamos dos casos: i) $\bar{v} = 0 \Rightarrow$ el sistema $Ru \leq 0$, $u \geq 0$, tiene solución. Por el Teorema 2.6.2 $\Rightarrow \bar{x} \notin E^P \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in \delta^j$. ii) $\bar{v} > 0 \Rightarrow Ru \leq r^j$, $u \geq 0$, tiene solución. Aplicando el Teorema 2.7.1 $\Rightarrow \delta^j \notin E_e^P(\bar{x}) \Rightarrow \#$. ■

El siguiente resultado constituye una elegante extensión del Teorema 2.6.2.

Teorema 2.7.5 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$Ru \leq 0, u_{J_N - \{j\}} \geq 0 \quad (2.16)$$

no tiene solución.

Corolario 2.7.6 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k$ tal que $\lambda^t R \geq 0$, $\lambda^t r^j = 0$.

Demostración. $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$. Aplicando el Teorema 2.7.4 $\Leftrightarrow (R, -r^j)y \leq 0$, $y \geq 0$ no tiene solución. Aplicando el teorema de la alternativa de Gale ([Mn69], p. 35) $\Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k$, $\lambda^t (R, -r^j) \geq 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k$, $\lambda^t R \geq 0$, $\lambda^t r^j \leq 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k$, $\lambda^t R \geq 0$, $\lambda^t r^j = 0$. ■

Independientemente o no de la degeneración de \bar{x} , siempre ocurre que si $\exists \lambda \in R_{++}^k$ tal que $\lambda^t R \geq 0$, $\lambda^t r^j = 0$ entonces $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$. Por desgracia, para la otra implicación es fundamental la no degeneración de \bar{x} .

Por la homogeneidad del sistema del Corolario 2.7.6, la condición $\lambda \in R_{++}^k$ se puede sustituir por $\lambda \in \Lambda_k^0$ o por $\lambda \geq e$. Así podemos obtener:

Corolario 2.7.7 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in \Lambda_k^0$ tal que $\lambda^t R \geq 0$, $\lambda^t r^j = 0$.

Corolario 2.7.8 ([EcHK80], Corollary 4.2) $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R^k$ tal que $\lambda^t R \geq 0$, $\lambda^t r^j = 0$, $\lambda \geq e$.

En general, dado $\bar{\lambda} \in R_{++}^k$ arbitrario, se tiene:

Corolario 2.7.9 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R^k$ tal que $\lambda^t R \geq 0$, $\lambda^t r^j = 0$, $\lambda \geq \bar{\lambda}$.

Demostración. Inmediata teniendo en cuenta que $\delta^j \in E_e^P(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k$, $\lambda^t R \geq 0$, $\lambda^t r^j = 0$ y que por la homogeneidad del sistema siempre podemos multiplicar λ por una constante positiva α suficientemente grande que haga que $\alpha\lambda \geq \bar{\lambda}$. ■

Utilizando, respectivamente, los cambios de variable $\lambda = \lambda + e$ y $\lambda = \lambda + \bar{\lambda}$ se obtienen:

Corolario 2.7.10 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_+^k$ tal que $\lambda^t R \geq -e^t R$, $\lambda^t r^j = -e^t r^j$.

Corolario 2.7.11 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_+^k$ tal que $\lambda^t R \geq -\bar{\lambda}^t R$, $\lambda^t r^j = -\bar{\lambda}^t r^j$.

O bien, expresados en términos de programas lineales escalares:

Corolario 2.7.12 ([EcKd78], Corollary 2) $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el problema:

$$\min \{s_j / -\lambda^t R + s^t = e^t R, \lambda \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.17)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Corolario 2.7.13 ([ArMl91], p. 479) $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el problema:

$$\min \{s_j / -\lambda^t R + s^t = \bar{\lambda}^t R, \lambda \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.18)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Nótese que el programa lineal (2.18) tiene la gran ventaja de que, cuando $\bar{\lambda} \in I(B)$, es evidente una solución factible básica inicial (ahorrándonos la fase I del método del simplex), la cual viene dada por $(\lambda^t, s^t) = (0^t, \bar{\lambda}^t R)$, pues $\bar{\lambda} \in I(B) \Rightarrow \bar{\lambda}^t R \geq 0$. Esta ventaja desaparece si utilizamos el problema (2.17), donde no se puede garantizar la no negatividad del término independiente.

A partir del Teorema 2.7.5 se tiene:

Corolario 2.7.14 ([EcKd78], Corollary 1) $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el problema:

$$\max \{e^t s / Ru + Is = 0, u_{J_N - \{j\}} \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.19)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Nótese que el problema (2.19) siempre es factible pues $(u^t, s^t) = (0, 0)$ verifica las restricciones.

Evans y Steuer afirman, erróneamente, un resultado parecido al Corolario 2.7.14. A saber: el punto extremo adyacente a través de δ^j es eficiente si, y sólo si, el problema (2.19) es acotado, con valor óptimo igual a 0 ([EvSt73], Lemma 2.3). Sin embargo, sólo se verifica la implicación hacia la izquierda. En general, la otra no es cierta, pues dos vértices adyacentes de X pueden ser eficientes y la arista que los une no serlo (Ejemplo 2.5.10) y, por tanto, (2.19) ser no acotado. Ecker y Kouada dan un contraejemplo numérico que ilustra este hecho ([EcKd78], p. 252).

Corolario 2.7.15 $\delta^j \notin E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, (2.19) es no acotado.

Demostración. $\delta^j \notin E_e^P(\bar{x})$. Por el Corolario 2.7.8 $\Leftrightarrow \lambda^t R^{J_N - \{j\}} \geq 0$, $\lambda^t r^j = 0$, $\lambda \geq e$, no tiene solución. Si denotamos por D el dual de (2.19) $\Leftrightarrow D$ es no factible. Como (2.19) es factible \Leftrightarrow (2.19) es no acotado. ■

A continuación vamos a estudiar las generalizaciones de los resultados anteriores al caso degenerado.

2.7.2 Caso Degenerado

Supongamos, pues, que \bar{x} es σ -degenerado. Sean $Y = B^{-1}N$, Y_D las filas de Y asociadas a variables básicas degeneradas e y_D^j la columna j de Y_D .

Consideremos $\tilde{J}_N = \{j \in J_N / y_D^j \leq 0\}$. Sabemos que para la tabla canónica actual $T(B)$ asociada a \bar{x} , los elementos de \tilde{J}_N determinan aristas incidentes en \bar{x} , pues las variables no básicas asociadas a los mismos se pueden incrementar. Sin embargo, hay que tener muy presente que algunos de los elementos de $J_N - \tilde{J}_N$ también pueden estar asociados a aristas incidentes en \bar{x} , a pesar del hecho de que en la tabla $T(B)$ tales variables no se puedan incrementar individualmente ([Mr85]). Esta circunstancia conlleva a que, si consideramos \tilde{J}_N como fuente de índices para el cálculo de las aristas eficientes incidentes en un vértice degenerado, tengamos que estudiar todas las tablas canónicas asociadas al mismo que sean lexicográficamente accesibles a partir de la base originalmente fijada ([ArMl91]). Sólo de esta manera podemos garantizar la obtención de todas las aristas eficientes incidentes en el vértice. Para un tratamiento a partir de una única tabla canónica remitimos al lector a los resultados más generales expuestos, para el caso degenerado, en la sección 2.8.

Obsérvese que los elementos de $J_N - \tilde{J}_N$ proporcionan bases degeneradas alternativas de \bar{x} .

Fijemos pues, $j \in \tilde{J}_N$ y no olvidemos la advertencia hecha en el párrafo anterior.

Teorema 2.7.16 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$Ru \leq r^j, Y_D u \leq 0, u \geq 0 \quad (2.20)$$

no tiene solución.

Demostración. Sea $\hat{u} = e_j \in R_+^{n-m} \Rightarrow r^j = R\hat{u}$

“ \Rightarrow ”

Supongamos, por reducción al absurdo que $\exists \tilde{u} \in R_+^{n-m}, R\tilde{u} \leq r^j, Y_D \tilde{u} \leq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon \in R_{++}$ tal que los puntos \tilde{x} y \hat{x} , dados por, $\tilde{x}_N = \varepsilon \tilde{u}, \tilde{x}_B = \bar{b} - Y\tilde{x}_N$ y $\hat{x}_N = \varepsilon \hat{u}, \hat{x}_B = \bar{b} - Y\hat{x}_N$ verifican que $\tilde{x}_B, \hat{x}_B \geq 0$. Luego, $\tilde{x}, \hat{x} \in X$. Además, $\hat{x} \in \delta^j$. Como $R\hat{u} \geq R\tilde{u} \Rightarrow R\hat{x}_N \geq R\tilde{x}_N \Rightarrow \hat{x} \notin E^P \Rightarrow \#$, pues $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$.

“ \Leftarrow ”

$\exists \varepsilon \in R_{++}$ tal que \hat{x} , definido por, $\hat{x}_N = \varepsilon \hat{u}, \hat{x}_B = \bar{b} - Y\hat{x}_N$ verifica que $\hat{x} \in (\delta^j)^0$. Además, aplicando la hipótesis $\Rightarrow \exists u \in R_+^{n-m}, Y_D u \leq 0, Ru \leq R\hat{u} \Rightarrow \exists x \in X, Rx_N \leq R\hat{x}_N \Rightarrow \hat{x} \in E^P \Rightarrow \delta^j \subseteq E^P$.

■

El Teorema 2.7.16 admite también la reformulación:

Corolario 2.7.17 ([Eckd78], Theorem 2) $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el problema:

$$\max \{e^t s / Ru + Is = r^j, Y_D u \leq 0, u \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.21)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

El problema (2.21) siempre es factible pues $(u^t, s^t) = (e_j^t, 0)$ verifica las restricciones. Además, se puede conseguir de manera inmediata una base inicial. La dimensión de dicha base no ha de ser grande si el grado de degeneración σ de \bar{x} no es elevado (en la práctica es frecuente que k sea pequeño). Por otra parte, si en el transcurso de la resolución del problema (2.21), el valor objetivo se hace estrictamente positivo, podemos parar sin necesidad de terminar la optimización, concluyendo que δ^j es no eficiente.

Aplicando dualidad escalar al Corolario 2.7.17 conseguimos:

Corolario 2.7.18 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el problema:

$$\min \{\lambda^t r^j / \lambda^t R + v^t Y_D \geq 0, \lambda \geq e, v \geq 0\} \quad (2.22)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Teorema 2.7.19 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$Ru - r^j v \leq 0, Y_D u \leq 0, u \geq 0, v \geq 0 \quad (2.23)$$

no tiene solución.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Tomando $v=1$ y aplicando la hipótesis $\Rightarrow Ru \leq r^j, Y_D u \leq 0, u \geq 0$, no tiene solución. Por el Teorema 2.7.16 $\Rightarrow \delta^j \in E_e^P(\bar{x})$.

“ \Rightarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{u} \in R_+^{n-m}, \exists \bar{v} \in R_+, R\bar{u} - r^j \bar{v} \leq 0, Y_D \bar{u} \leq 0$. Distinguimos dos casos: i) $\bar{v} = 0 \Rightarrow$ el sistema $Ru \leq 0, Y_D u \leq 0, u \geq 0$, tiene solución. Aplicando el Teorema 2.6.10 $\Rightarrow \bar{x} \notin E^P \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in \delta^j$. ii) $\bar{v} > 0 \Rightarrow Ru \leq r^j, Y_D u \leq 0, u \geq 0$, tiene solución. Por el Teorema 2.7.16 $\Rightarrow \delta^j \notin E_e^P(\bar{x}) \Rightarrow \#$. ■

Corolario 2.7.20 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k, \exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq 0, \lambda^t r^j = 0$.

Demostración. $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$. Por el Teorema 2.7.19 $\Leftrightarrow (R, -r^j)y \leq 0, (Y_D, 0)y \leq 0, y \geq 0$ no tiene solución. Aplicando el teorema de la alternativa de Tucker ([Mn69], p. 29) $\Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, \exists v \in R_+^\sigma, \lambda^t (R, -r^j) + v^t (Y_D, 0) \geq 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, \exists v \in R_+^\sigma, \lambda^t R + v^t Y_D \geq 0, \lambda^t r^j \leq 0 \Leftrightarrow^1 \exists \lambda \in R_{++}^k, \exists v \in R_+^\sigma, \lambda^t R + v^t Y_D \geq 0, \lambda^t r^j = 0$. ■

Por la homogeneidad del sistema enunciado en el Corolario 2.7.20, la condición $\lambda \in R_{++}^k$ se puede sustituir por $\lambda \in \Lambda_k^0$ o por $\lambda \geq e$. Así:

Corolario 2.7.21 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in \Lambda_k^0, \exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq 0, \lambda^t r^j = 0$.

Corolario 2.7.22 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R^k, \exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq 0, \lambda^t r^j = 0, \lambda \geq e$.

¹ $\lambda^t r^j \geq -v^t y_j^D \geq 0$

En general, dado $\bar{\lambda} \in R_{++}^k$, tenemos:

Corolario 2.7.23 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R^k$, $\exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq 0$, $\lambda^t r^j = 0$, $\lambda \geq \bar{\lambda}$.

Utilizando, respectivamente, los cambios de variable $\lambda = \lambda + e$ y $\lambda = \lambda + \bar{\lambda}$ se obtienen:

Corolario 2.7.24 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_+^k$, $\exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq -e^t R$, $\lambda^t r^j = -e^t r^j$.

Corolario 2.7.25 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_+^k$, $\exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq -\bar{\lambda}^t R$, $\lambda^t r^j = -\bar{\lambda}^t r^j$.

En función de la acotación de programas escalares lineales, los resultados anteriores se escriben como:

Corolario 2.7.26 ([Eckd78], Corollary 3) $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el programa:

$$\min \{s / \lambda^t R + v^t Y_D \geq -e^t R, -\lambda^t r^j + s = e^t r^j, \lambda \geq 0, v \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.24)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Corolario 2.7.27 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el programa:

$$\min \{s / -\lambda^t R - v^t Y_D \leq \bar{\lambda}^t R, -\lambda^t r^j + s = \bar{\lambda}^t r^j, \lambda \geq 0, v \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.25)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

La ventaja del problema (2.25) sobre el (2.24) viene dada porque si tenemos $\bar{\lambda} \in I(B)$, entonces podemos garantizar la no negatividad del término independiente ($\bar{\lambda}^t R \geq 0$) y podemos utilizar directamente la fase II del método del simplex, por ser evidente una solución factible básica inicial.

A partir del Teorema 2.7.19 se puede deducir:

Corolario 2.7.28 $\delta^j \in E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el problema:

$$\max \{e^t s / Ru + Is - r^j v = 0, Y_D u \leq 0, u \geq 0, s \geq 0, v \geq 0\} \quad (2.26)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

El problema (2.26) siempre es factible pues $(u^t, s^t, v) = (0, 0, 0)$ verifica las restricciones.

Corolario 2.7.29 $\delta^j \notin E_e^P(\bar{x})$ si, y sólo si, (2.26) es no acotado.

Demostración. $\delta^j \notin E_e^P(\bar{x})$. Por el Corolario 2.7.22 $\Leftrightarrow \lambda^t R + v^t Y_D \geq 0$, $\lambda^t r^j = 0$, $\lambda \geq e$, $v \geq 0$, no tiene solución $\Leftrightarrow \lambda^t R + v^t Y_D \geq 0$, $\lambda^t r^j \leq 0$, $\lambda \geq e$, $v \geq 0$, no tiene solución. Si denotamos por D el dual de (2.26) $\Leftrightarrow D$ es no factible. Como (2.26) es factible \Leftrightarrow (2.26) es no acotado. ■

2.8 Caras Eficientes Incidentes en un Vértice

Aunque el problema de determinar la eficiencia de una cara incidente en un vértice no degenerado arbitrario ha sido ampliamente estudiado a lo largo del tiempo ([Is77a], [ECHK80], [Mr85], ...), creemos totalmente justificado dedicar parte de nuestro esfuerzo y empeño a la obtención de nuevas condiciones que garanticen dicha circunstancia. Por otra parte, de forma sistemática (salvo escasas excepciones) se ha dejado de lado el caso degenerado, aduciéndose que “*lo único que se necesita para manejarlo es introducir alguna regla para deshacer los empates que se producen al determinar la fila pivote*” ([ECHK80], p. 356). Esto es falso pues, incluso aunque se considerasen todas las tablas canónicas asociadas a un vértice degenerado, se pueden *perder* caras eficientes ([Mr85], p. 31).

Los tests que determinan la eficiencia o no de una cara son herramientas muy apreciadas y codiciadas en programación vectorial. En general, las ideas que se esconden en los mismos, en última instancia, suelen ser sencillas, pero su elaboración no es trivial.

En esta sección vamos a obtener caracterizaciones novedosas que nos permitan determinar la eficiencia de una cara incidente en un vértice dado. Para ello partiremos de dos planteamientos parecidos, pero distintos. El primero de ellos se basa en la idea de que la cara es eficiente si, y sólo si, lo es algún punto de su interior relativo. El segundo, relaja el problema original de tal forma que el vértice considerado se convierte ahora en un elemento del interior relativo de una cierta cara del problema relajado que es eficiente si, y sólo si, lo es la cara objeto de estudio.

Como siempre, sea P el problema $\max\{Cx / x \in X\}$, donde X viene dado por el sistema (2.1). Consideremos \bar{x} s.f.b. de X , especificado por una base arbitraria $B \in R^{m \times m}$ de $A (= [B \ N])$ y $R = C^B B^{-1} N - C^N \in R^{k \times (n-m)}$, su matriz de costos reducidos asociada, la cual supondremos, sin pérdida de generalidad, no nula.

2.8.1 Caso No Degenerado

Supongamos que \bar{x} es no degenerado. Sean $J' \subseteq J_N$ arbitrario y $r = R^{J_N - J'} e$. En esta situación, es claro que J' es un descriptor maximal y $\dim(F(J')) = n - m - |J'|$. Además, $\{\delta^j / j \in J_N - J'\}$ es, exactamente, el conjunto de aristas de $F(J')$ incidentes en \bar{x} .

Una posible generalización del Teorema 2.7.1 adopta la forma:

Teorema 2.8.1 $F(J') \in E_f^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$Ru \leq r, u \geq 0 \quad (2.27)$$

no tiene solución.

Demostración. Sea $\hat{u}^t = (\hat{u}_{J'}^t, \hat{u}_{J_N - J'}^t) = (0^t, e^t) \in R_+^{n-m} \Rightarrow r = R\hat{u}$.

“ \Rightarrow ”

Supongamos, por reducción al absurdo que $\exists \tilde{u} \in R_+^{n-m}, R\tilde{u} \leq r$. Como \bar{x} es no degenerado, $\exists \varepsilon \in R_{++}$ tal que los puntos \tilde{x} y \hat{x} , dados por, $\tilde{x}_N = \varepsilon\tilde{u}$, $\tilde{x}_B = \bar{b} - Y\tilde{x}_N$ y $\hat{x}_N = \varepsilon\hat{u}$, $\hat{x}_B = \bar{b} - Y\hat{x}_N$ verifican que $\tilde{x}_B, \hat{x}_B > 0$. Luego, $\tilde{x}, \hat{x} \in X$. Además, $\hat{x} \in F(J')$. Como $R\hat{u} \geq R\tilde{u} \Rightarrow R\hat{x}_N \geq R\tilde{x}_N \Rightarrow \hat{x} \notin E^P \Rightarrow \#$, pues $F(J') \in E_f^P(\bar{x})$.

“ \Leftarrow ”

Como \bar{x} es no degenerado, $\exists \varepsilon \in R_{++}$ tal que \hat{x} , definido por, $\hat{x}_N = \varepsilon\hat{u}$, $\hat{x}_B = \bar{b} - Y\hat{x}_N$ verifica que $\hat{x}_B > 0 \Rightarrow \hat{x} \in F^0(J')$. Además, aplicando la hipótesis $\Rightarrow \exists u \in R_+^{n-m}, Ru \leq R\hat{u} \Rightarrow \exists x \in X, Rx_N \leq R\hat{x}_N \Rightarrow \hat{x} \in E^P \Rightarrow F(J') \in E_f^P(\bar{x})$. ■

La no factibilidad del sistema (2.27) se puede analizar a través de la resolución de un programa lineal escalar. Efectivamente:

Corolario 2.8.2 $F(J') \in E_f^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el programa:

$$\max \{e^t s / Ru + Is = r, u \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.28)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

El problema (2.28) siempre es factible, pues $(u_{J'}^t, u_{J_N - J'}^t, s^t) = (0^t, e^t, 0)$ verifica las restricciones. Además, se debe esperar que (2.28) tenga una base de dimensión pequeña, por ser frecuente en la práctica que k sea pequeño. Si en el transcurso de la resolución del problema (2.28), el valor objetivo se hace estrictamente positivo, podemos parar sin necesidad de terminar la optimización, concluyendo que $F(J')$ es no eficiente.

Aplicando dualidad escalar al Corolario 2.8.2 se obtiene:

Corolario 2.8.3 $F(J') \in E_f^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el problema:

$$\min\{\lambda^t r / \lambda^t R \geq 0, \lambda \geq e\} \quad (2.29)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Otra posibilidad viene de la mano del siguiente resultado:

Teorema 2.8.4 $F(J') \in E_f^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$Ru - rv \leq 0, u \geq 0, v \geq 0 \quad (2.30)$$

no tiene solución.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Tomando $v=1$ y aplicando la hipótesis $\Rightarrow Ru \leq r, u \geq 0$, no tiene solución.

Por el Teorema 2.8.1 $\Rightarrow F(J') \in E_f^P(\bar{x})$.

“ \Rightarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{u} \in R_+^{n-m}, \exists \bar{v} \in R_+, R\bar{u} - r\bar{v} \leq 0$.

Distinguimos dos casos: i) $\bar{v} = 0 \Rightarrow$ el sistema $Ru \leq 0, u \geq 0$, tiene solución.

Utilizando el Teorema 2.6.2 $\Rightarrow \bar{x} \notin E^P \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in F(J')$ ii) $\bar{v} > 0 \Rightarrow$

$Ru \leq r, u \geq 0$, tiene solución. De nuevo, por el Teorema 2.8.1 $\Rightarrow F(J') \notin E_f^P(\bar{x})$

$\Rightarrow \#$. ■

Corolario 2.8.5 $F(J') \in E_f^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k$ tal que $\lambda^t R \geq 0, \lambda^t r = 0$.

Demostración. $F(J') \in E_f^P(\bar{x}) \Leftrightarrow (R, -r)y \leq 0, y \geq 0$ no tiene solución.

Aplicando el teorema de la alternativa de Gale ([Mn69], p. 35) $\Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k,$

$\lambda^t (R, -r) \geq 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, \lambda^t R \geq 0, \lambda^t r \leq 0 \Leftrightarrow^1 \exists \lambda \in R_{++}^k, \lambda^t R \geq 0, \lambda^t r = 0$. ■

Independientemente o no de la degeneración de \bar{x} , si $\exists \lambda \in R_{++}^k$ tal que $\lambda^t R \geq 0, \lambda^t r = 0$, entonces $F(J') \in E_f^P(\bar{x})$.

Por la homogeneidad del sistema enunciado en el Corolario 2.8.5, la condición $\lambda \in R_{++}^k$ se puede sustituir por $\lambda \in \Lambda_k^0$ o por $\lambda \geq e$. Así:

Corolario 2.8.6 $F(J') \in E_f^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in \Lambda_k^0$ tal que $\lambda^t R \geq 0, \lambda^t r = 0$.

¹ $\lambda^t R \geq 0 \Rightarrow \lambda^t R^{J_N - J'} \geq 0 \Rightarrow \lambda^t r = \lambda^t R^{J_N - J'} e \geq 0$.

Corolario 2.8.7 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R^k$ tal que $\lambda^t R \geq 0$, $\lambda^t r = 0$, $\lambda \geq e$.

En general, dado $\bar{\lambda} \in R_{++}^k$, siempre podemos multiplicar λ por una constante positiva α suficientemente grande que haga que $\alpha\lambda \geq \bar{\lambda}$, pudiéndose obtener:

Corolario 2.8.8 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R^k$ tal que $\lambda^t R \geq 0$, $\lambda^t r = 0$, $\lambda \geq \bar{\lambda}$.

Utilizando, respectivamente, los cambios de variable $\lambda = \lambda + e$ y $\lambda = \lambda + \bar{\lambda}$ se concluye:

Corolario 2.8.9 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_+^k$ tal que $\lambda^t R \geq -e^t R$, $\lambda^t r = -e^t r$.

Corolario 2.8.10 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_+^k$ tal que $\lambda^t R \geq -\bar{\lambda}^t R$, $\lambda^t r = -\bar{\lambda}^t r$.

Lema 2.8.11 Dados $v^1, v^2 \in R^n$. Entonces $v^1 \geq v^2$, $e^t v^1 = e^t v^2$ si, y sólo si, $v^1 = v^2$.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Trivial.

“ \Rightarrow ”

Por hipótesis, $v^1 \geq v^2$. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists j \in \{1, \dots, n\}$, $v_j^1 > v_j^2 \Rightarrow e^t v^1 > e^t v^2 \Rightarrow \#$. Luego $v^1 = v^2$. ■

Los siguientes resultados son claros combinando los corolarios anteriores con el Lema 2.8.11.

Corolario 2.8.12 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el programa:

$$\min \{e^t s_{J_N - J'} / -\lambda^t R + s^t = e^t R, \lambda \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.31)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Corolario 2.8.13 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el programa:

$$\min \{e^t s_{J_N - J'} / -\lambda^t R + s^t = \bar{\lambda}^t R, \lambda \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.32)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Cuando $\bar{\lambda} \in I(B)$, el programa (2.32) presenta la ventaja de que es evidente una solución factible básica inicial (ahorrándonos la fase I del método del simplex), la cual viene dada por $(\lambda', s') = (0', \bar{\lambda}'R)$, pues $\bar{\lambda} \in I(B) \Rightarrow \bar{\lambda}'R \geq 0$. Esta ventaja se pierde si $\bar{\lambda}$ se sustituye por e , pues no se puede garantizar la no negatividad del término independiente.

A partir del Teorema 2.8.4 se tiene:

Corolario 2.8.14 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el programa:

$$\max \{e' s / Ru + Is - rv = 0, u \geq 0, s \geq 0, v \geq 0\} \quad (2.33)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

El problema (2.33) siempre es factible pues $(u', s', v) = (0, 0, 0)$ verifica las restricciones.

Corolario 2.8.15 $F(J') \notin E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el problema (2.33) es no acotado.

Demostración. $F(J') \notin E_f^p(\bar{x}) \Leftrightarrow \lambda'R \geq 0, \lambda'r = 0, \lambda \geq e$, no tiene solución $\Leftrightarrow \lambda'R \geq 0, \lambda'r \leq 0, \lambda \geq e$, no tiene solución. Si denotamos por D el dual de (2.33) $\Leftrightarrow D$ es no factible. Como (2.33) es factible \Leftrightarrow (2.33) es no acotado. ■

También es posible utilizar otras argumentaciones a las empleadas hasta ahora para deducir condiciones novedosas que garanticen la eficiencia de una cara.

Teorema 2.8.16 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$\lambda'R \geq 0, \lambda'R^{J_N - J'} = 0, \lambda > 0 \quad (2.34)$$

tiene solución.

Demostración. $F(J') \in E_f^p(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, F(J') \subseteq S_{P_\lambda}$. Aplicando el Teorema 2.4.13 \Leftrightarrow El sistema, $\lambda'R \geq 0, \lambda'R^{J_N - J'} = 0, \lambda > 0$, tiene solución. ■

Por la homogeneidad del sistema (2.34), es claro que

Corolario 2.8.17 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$\lambda'R \geq 0, \lambda'R^{J_N - J'} = 0, \lambda \geq e \quad (2.35)$$

tiene solución.

Haciendo el cambio de variable $\lambda = \lambda - e$ en el sistema (2.35) obtenemos:

Corolario 2.8.18 ([ECHK80], Theorem 4.2) $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$\lambda R \geq -e^t R, \lambda R^{J_N - J'} = -e^t R^{J_N - J'}, \lambda \geq 0 \quad (2.36)$$

tiene solución.

El siguiente resultado generaliza a los dados en el Teorema 2.6.2 y Teorema 2.7.5, para vértices y aristas, respectivamente.

Teorema 2.8.19 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$Ru \leq 0, u_{j'} \geq 0 \quad (2.37)$$

no tiene solución.

Demostración. $F(J') \in E_f^p(\bar{x}) \Leftrightarrow$ El sistema, $\lambda^t R \geq 0, \lambda^t R^{J_N - J'} = 0, \lambda > 0$, tiene solución. \Leftrightarrow El sistema, $\lambda^t (R, -R^{J_N - J'}) \geq 0, \lambda > 0$, tiene solución. Aplicando el teorema de la alternativa de Gale ([Mn69], p. 35) \Leftrightarrow El sistema $(R, -R^{J_N - J'}) y \leq 0, y \geq 0$, no tiene solución. \Leftrightarrow El sistema (2.37) no tiene solución. ■

El Teorema 2.8.19 se puede expresar en función de la resolución de un programa lineal escalar, obteniéndose el siguiente test:

Corolario 2.8.20 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el programa:

$$\max \{e^t s / Ru + Is = 0, u_{j'} \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.38)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

El resultado anterior es más sencillo que el enunciado en [Is77a], Theorem 4 y Theorem 5.

Corolario 2.8.21 $F(J') \notin E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el problema (2.38) es no acotado.

Demostración. Por el Corolario 2.8.17, $F(J') \notin E_f^p(\bar{x}) \Leftrightarrow \lambda^t R \geq 0, \lambda^t R^{J_N - J'} = 0, \lambda \geq e$, no tiene solución. Si denotamos por D el dual de (2.38) $\Leftrightarrow D$ es no factible. Como (2.38) es factible \Leftrightarrow (2.38) es no acotado. ■

2.8.2 Caso Degenerado

Vamos a estudiar ahora las generalizaciones de los resultados anteriores al caso degenerado. Supongamos, pues, que \bar{x} es σ -degenerado.

Nuestra intención consiste en calcular todas las caras eficientes incidentes en un vértice degenerado a través de la utilización de una única tabla canónica.

Sea $J' \subseteq J_Z$ un descriptor maximal. Sabemos que $F(J')$ determina una única cara de X incidente en \bar{x} y que toda cara F tiene asociado un único descriptor maximal $J' \subseteq J_Z$ (ver Teorema 2.3.29).

Sean $J'_N = J' \cap J_N$, $J'_D = J' \cap J_D$ e $Y_{J'_D}$ ($Y_{J_D - J'_D}$) las filas de Y asociadas a variables de J'_D ($J_D - J'_D$) respectivamente. Como es habitual, Y_D representa las filas de Y asociadas a las variables básicas degeneradas (J_D).

Sea $r = R\hat{u}$, donde \hat{u} es solución del sistema (2.6). En virtud del Corolario 2.3.33, como J' es un descriptor maximal, r siempre se puede calcular.

Estas hipótesis generalizan las hechas en el caso de caras incidentes en un vértice no degenerado, pues en esa situación, $J_Z = J_N$, $J_D = \emptyset \Rightarrow J' = J'_N$, $J'_D = \emptyset$ y el sistema (2.6) se transforma en:

$$\hat{u}_{J_N - J'_N} \geq e, \hat{u}_{J'_N} = 0$$

Tomando $\hat{u}_{J_N - J'_N} = e$ se tiene $r = R^{J_N - J'} e$.

Nuestro primer resultado caracteriza la eficiencia de una cara en función de la no factibilidad de un sistema relativamente simple:

Teorema 2.8.22 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$Ru \leq r, Y_D u \leq 0, u \geq 0 \quad (2.39)$$

no tiene solución.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Supongamos, por reducción al absurdo que $\exists \tilde{u} \in R_+^{n-m}$, $R\tilde{u} \leq r$, $Y_D \tilde{u} \leq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon \in R_{++}$ tal que los puntos \tilde{x} y \hat{x} , dados por, $\tilde{x}_N = \varepsilon \tilde{u}$, $\tilde{x}_B = \bar{b} - Y\tilde{x}_N$ y $\hat{x}_N = \varepsilon \hat{u}$, $\hat{x}_B = \bar{b} - Y\hat{x}_N$ verifican que $\tilde{x}_B, \hat{x}_B \geq 0$. Luego, $\tilde{x}, \hat{x} \in X$. Además, $\hat{x} \in F(J')$. Como $R\hat{u} \geq R\tilde{u} \Rightarrow R\hat{x}_N \geq R\tilde{x}_N \Rightarrow \hat{x} \notin E^p \Rightarrow \#$, pues $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$.

“ \Leftarrow ”

$\exists \varepsilon \in R_{++}$ tal que \hat{x} , definido por, $\hat{x}_N = \varepsilon \hat{u}$, $\hat{x}_B = \bar{b} - Y\hat{x}_N$ verifica que $\hat{x} \in F^0(J')$. Además, aplicando la hipótesis $\Rightarrow \exists u \in R_+^{n-m}$, $Ru \leq R\hat{u} \Rightarrow \exists x \in X$, $Rx_N \leq R\hat{x}_N \Rightarrow \hat{x} \in E^p \Rightarrow F(J') \in E_f^p(\bar{x})$. ■

Nótese que el Teorema 2.8.22 generaliza de forma elegante y apropiada al Teorema 2.6.10, dado que el descriptor maximal asociado a \bar{x} es precisamente J_Z y por esta razón el sistema (2.6) tiene como única solución $\hat{u} = 0$ y, consecuentemente, $r = 0$. Por otra parte, es evidente que el

Teorema 2.8.22 también generaliza al Teorema 2.8.1, pues cuando el vértice es no degenerado, $J_D = \emptyset$.

Comprobar la no factibilidad del sistema (2.39) se puede llevar a cabo fácilmente a través de la resolución de un programa lineal escalar. Efectivamente:

Corolario 2.8.23 $F(J') \in E_f^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el programa:

$$\max \{e^t s / Ru + Is = r, Y_D u \leq 0, u \geq 0, s \geq 0\} \tag{2.40}$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

El problema (2.40) siempre es factible pues $(u_{J'_N}^t, u_{J_N - J'_N}^t, s^t) = (0^t, \hat{u}_{J_N - J'_N}^t, 0^t)$ verifica las restricciones. Por otra parte, si el grado de degeneración σ de \bar{x} no es grande, se debe esperar que el problema (2.40) tenga una base de dimensión pequeña, por ser frecuente en la práctica que k sea pequeño. Además, si en el transcurso de la resolución del problema (2.40) el valor objetivo se hace estrictamente positivo, podemos parar sin necesidad de terminar la optimización, concluyendo que $F(J')$ es no eficiente.

Ilustraremos con un ejemplo el uso del test dado en el Corolario 2.8.23.

Ejemplo 2.8.24 Consideremos la siguiente tabla canónica asociada a $J_{B_1} = \{5, 3, 6\} \Rightarrow J_Z = \{1, 2, 4, 6\}$.

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	r.h.s.
x_5	1	1	0	-1	1	0	1
x_3	1	1	1	1	0	0	3
x_6	1	-1	0	0	0	1	0
	-2	1	0	2	0	0	6
	-2	-4	0	-1	0	0	-3
	5	3	0	4	0	0	12

$T(B_1)$. Tabla canónica asociada a \bar{x}

donde $R = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Comprobemos que la cara $F(\{1, 2, 6\})$ no es eficiente.

Para $J' = \{1, 2, 6\} \Rightarrow J'_N = \{1, 2\}$, $J'_D = \{6\}$, $J_N - J'_N = \{4\}$ y $J_D - J'_D = \emptyset$. Así, el sistema (2.7): $Y_{J'_D}^{J_N - J'_N} u = 0$, $Y_{J_D - J'_D}^{J_N - J'_N} u \leq -e$, $u \geq e$, se transforma en: $0u = 0$, $u \geq 1$. Claramente, $u = 1$ es solución de este sistema $\Rightarrow J'$ es un descriptor maximal.

$$\text{Entonces, } r = R^{J_N - J'_N} \hat{u}_{J_N - J'_N} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La tabla canónica asociada al problema (2.40) para $J' = \{1, 2, 6\}$ es:

v.b.	x_1	x_3	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	r.h.s.
s_1	-2	1	2	1	0	0	0	2
s_2	-2	-4	-1	0	1	0	0	-1
s_3	5	3	4	0	0	1	0	4
s_4	1	-1	1	0	0	0	1	0
	0	0	0	1	1	1	0	0

Este problema se comprueba que es acotado con valor óptimo positivo (5) $\Rightarrow F(\{1, 2, 6\})$ no es eficiente.

Comprobemos ahora que $F(\{4\}) \in E_f^p$. $J' = \{4\}$ es un descriptor maximal pues dado que $J'_N = \{4\}$, $J'_D = \emptyset$, $J_N - J'_N = \{1, 2\}$ y $J_D - J'_D = \{6\}$, el sistema (2.7) se transforma en: $(1, -1)u \leq -1$, $u \geq e$, y, claramente, $u' = (1, 2)$ es solución de este sistema.

$$\text{Entonces } r = R^{J_N - J'_N} \hat{u}_{J_N - J'_N} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

La tabla canónica asociada al problema (2.40) para $J' = \{4\}$ es:

v.b.	x_1	x_3	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	r.h.s.
s_1	-2	1	2	1	0	0	0	0
s_2	-2	-4	-1	0	1	0	0	-10
s_3	5	3	4	0	0	1	0	11
s_4	1	-1	1	0	0	0	1	0
	0	0	0	1	1	1	0	0

Este problema se comprueba que es acotado con valor óptimo nulo (0) $\Rightarrow F(\{4\})$ es eficiente. ●

Aplicando dualidad escalar al Corolario 2.8.23 se obtiene otro test importante:

Corolario 2.8.25 $F(J') \in E_f^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el programa:

$$\min\{\lambda^t r / \lambda^t R + v^t Y_D \geq 0, \lambda \geq e, v \geq 0\} \quad (2.41)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Es posible obtener una ligera variación del Teorema 2.8.22 que nos permita posteriores desarrollos.

Teorema 2.8.26 $F(J') \in E_f^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$Ru - rv \leq 0, Y_D u \leq 0, u \geq 0, v \geq 0 \quad (2.42)$$

no tiene solución.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Tomando $v=1$ y aplicando la hipótesis $\Rightarrow Ru \leq r, Y_D u \leq 0, u \geq 0$, no tiene solución. Por el Teorema 2.8.22 $\Rightarrow F(J') \in E_f^P(\bar{x})$.

“ \Rightarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{u} \in R_+^{n-m}, \exists \bar{v} \in R_+, R\bar{u} - r\bar{v} \leq 0, Y_D \bar{u} \leq 0$. Distinguimos dos casos: i) $\bar{v} = 0 \Rightarrow$ el sistema $Ru \leq 0, Y_D u \leq 0, u \geq 0$, tiene solución. Por el Teorema 2.6.10 $\Rightarrow \bar{x} \notin E^P \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in F(J')$. ii) $\bar{v} > 0 \Rightarrow Ru \leq r, Y_D u \leq 0, u \geq 0$, tiene solución. Aplicando el Teorema 2.8.22 $\Rightarrow F(J') \notin E_f^P(\bar{x}) \Rightarrow \#$.

■

Corolario 2.8.27 $F(J') \in E_f^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k, \exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq 0, \lambda^t r = 0$.

Demostración. $F(J') \in E_f^P(\bar{x}) \Leftrightarrow (R, -r)y \leq 0, (Y_D, 0)y \leq 0, y \geq 0$ no tiene solución. Aplicando el teorema de la alternativa de Tucker ([Mn69], p. 29) $\Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, \exists v \in R_+^\sigma, \lambda^t (R, -r) + v^t (Y_D, 0) \geq 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, \exists v \in R_+^\sigma, \lambda^t R + v^t Y_D \geq 0, \lambda^t r \leq 0 \Leftrightarrow^2 \exists \lambda \in R_{++}^k, \exists v \in R_+^\sigma, \lambda^t R + v^t Y_D \geq 0, \lambda^t r = 0$.

■

Por la homogeneidad del sistema dado en el Corolario 2.8.27, la condición $\lambda \in R_{++}^k$ se puede sustituir por $\lambda \in \Lambda_k^0$ o por $\lambda \geq e$. Así:

Corolario 2.8.28 $F(J') \in E_f^P(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in \Lambda_k^0, \exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq 0, \lambda^t r = 0$.

² $\lambda^t R + v^t Y_D \geq 0 \Rightarrow \lambda^t R^{J_N - J'_N} \geq -v^t Y_D^{J_N - J'_N} \Rightarrow \lambda^t r = \lambda^t R^{J_N - J'_N} \hat{u}_{J_N - J'_N} \geq -v^t Y_D^{J_N - J'_N} \hat{u}_{J_N - J'_N} \geq 0$

Corolario 2.8.29 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R^k$, $\exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq 0$, $\lambda^t r = 0$, $\lambda \geq e$.

En general, dado $\bar{\lambda} \in R_{++}^k$, se tiene:

Corolario 2.8.30 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R^k$, $\exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq 0$, $\lambda^t r = 0$, $\lambda \geq \bar{\lambda}$.

Utilizando, respectivamente, los cambios de variable $\lambda = \lambda + e$ y $\lambda = \lambda + \bar{\lambda}$ se obtienen:

Corolario 2.8.31 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_+^k$, $\exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq -e^t R$, $\lambda^t r = -e^t r$.

Corolario 2.8.32 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_+^k$, $\exists v \in R_+^\sigma$ tales que $\lambda^t R + v^t Y_D \geq -\bar{\lambda}^t R$, $\lambda^t r = -\bar{\lambda}^t r$.

En función de programas lineales escalares es posible escribir:

Corolario 2.8.33 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el programa:

$$\min \{s / \lambda^t R + v^t Y_D \geq -e^t R, -\lambda^t r + s = e^t r, \lambda \geq 0, v \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.43)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Corolario 2.8.34 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el programa:

$$\min \{s / -\lambda^t R - v^t Y_D \leq \bar{\lambda}^t R, -\lambda^t r + s = \bar{\lambda}^t r, \lambda \geq 0, v \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.44)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

La ventaja del problema (2.44) sobre (2.43) viene dada porque si tenemos $\bar{\lambda} \in I(B)$, entonces podemos garantizar la no negatividad del término independiente ($\bar{\lambda}^t R \geq 0$, $\bar{\lambda}^t r = \bar{\lambda}^t R^{J_N - J'_N} \hat{u}_{J_N - J'_N} \geq 0$) y podemos utilizar directamente la fase II del método del simplex, por ser evidente una solución factible básica inicial.

Utilizando el Teorema 2.8.26 se obtiene:

Corolario 2.8.35 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el programa:

$$\max \{e^t s / Ru + Is - rv = 0, Y_D u \leq 0, u \geq 0, s \geq 0, v \geq 0\} \quad (2.45)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Evidentemente, el problema (2.45) siempre es factible pues $(u^t, s^t, v) = (0, 0, 0)$ verifica las restricciones.

Corolario 2.8.36 $F(J') \notin E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el problema (2.45) es no acotado.

Demostración. $F(J') \notin E_f^p(\bar{x}) \Leftrightarrow \lambda^t R + v^t Y_D \geq 0, \lambda^t r = 0, \lambda \geq e, v \geq 0$, no tiene solución $\Leftrightarrow \lambda^t R + v^t Y_D \geq 0, \lambda^t r \leq 0, \lambda \geq e, v \geq 0$, no tiene solución. Si denotamos por D el dual de (2.45) $\Leftrightarrow D$ es no factible. Como (2.45) es factible \Leftrightarrow (2.45) es no acotado. ■

Utilizando ahora otro tipo de argumentación es posible escribir:

Teorema 2.8.37 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$\lambda^t R + v^t Y_{J'_D} \geq 0, \lambda^t R^{J_N - J'} + v^t Y_{J'_D}^{J_N - J'} \leq 0, \lambda > 0, v \geq 0 \quad (2.46)$$

tiene solución.

Demostración. $F(J') \in E_f^p(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, F(J') \subseteq S_{P_\lambda}$. Aplicando el Teorema 2.4.19 \Leftrightarrow El sistema (2.46) tiene solución. ■

Obsérvese que, en realidad, la desigualdad $\lambda^t R^{J_N - J'} + v^t Y_{J'_D}^{J_N - J'} \leq 0$ es una igualdad implícita.

Por la homogeneidad del sistema (2.46), es claro que:

Corolario 2.8.38 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$\lambda^t R + v^t Y_{J'_D} \geq 0, \lambda^t R^{J_N - J'} + v^t Y_{J'_D}^{J_N - J'} \leq 0, \lambda \geq e, v \geq 0 \quad (2.47)$$

tiene solución.

Corolario 2.8.39 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$\lambda^t R + v^t Y_{J'_D} \geq -e^t R, \lambda^t R^{J_N - J'} + v^t Y_{J'_D}^{J_N - J'} \leq -e^t R^{J_N - J'}, \lambda \geq 0, v \geq 0 \quad (2.48)$$

tiene solución.

Demostración. Directa, sin más que hacer en el Corolario 2.8.38 el cambio de variable $\lambda = \lambda - e$. ■

Teorema 2.8.40 $F(J') \in E_f^p(\bar{x})$ si, y sólo si, el sistema:

$$Ru \leq 0, Y_{J'_D} u \leq 0, u_{J'_N} \geq 0 \quad (2.49)$$

no tiene solución.

Demostración. $F(J') \in E_f^p(\bar{x}) \Leftrightarrow$ El sistema (2.46) tiene solución \Leftrightarrow El sistema, $\lambda^t (R, -R^{J_N - J'}) + v^t (Y_{J'_D}, -Y_{J'_D}^{J_N - J'}) \geq 0, \lambda > 0, v \geq 0$, tiene solución.

Aplicando el teorema de la alternativa de Tucker ([Mn69], p. 29) \Leftrightarrow El sistema $(R, -R^{J_N-J'})y \leq 0, (Y_{J'_b}, -Y_{J'_b}^{J_N-J'})y \leq 0, y \geq 0$, no tiene solución. \Leftrightarrow El sistema (2.49) no tiene solución. ■

Creemos muy interesante interpretar el resultado dado en el Teorema 2.8.40. Para ello, consideremos el problema relajado $P' \equiv \max\{Cx / x \in X'\}$, siendo $X' = \{x \in R^n / Ax = b, x_{j'} \geq 0\}$ y sea $F'(J') = \{x \in X' / x_{j'} = 0\}$. Aplicando el Teorema 2.6.10, el Teorema 2.8.40 viene a decir que $F(J') \in E_f^P$ si, y sólo si, $\bar{x} \in E^{P'}$. ¿Qué sentido tiene esto? Para responder a esta pregunta necesitamos un resultado preliminar:

Teorema 2.8.41 *Si $J' \subseteq J$ es un descriptor maximal de $F(J')$, entonces $F(J') \in E_f^P$ si, y sólo si, $F'(J') \in E_f^{P'}$.*

Demostración. $F(J') \in E_f^P \Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, F(J') \subseteq S_{P_\lambda}$. Por el Teorema 2.4.25, $\Leftrightarrow F'(J') \subseteq S_{P'_\lambda} \Leftrightarrow F'(J') \in E_f^{P'}$. ■

Luego, estudiar la eficiencia de $F(J')$ en el problema P es equivalente a estudiar la eficiencia de $F'(J')$ en el problema P' . Ahora bien, como $F(J') \subseteq (F'(J'))^0$, entonces $\bar{x} \in (F'(J'))^0$. Ahora es clara la interpretación.

El Teorema 2.8.40 también se puede expresar en términos de un programa lineal escalar, dando lugar al siguiente test:

Corolario 2.8.42 *$F(J') \in E_f^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el programa:*

$$\max\{e^t s / Ru + s = 0, Y_{J'_b} u \leq 0, u_{j'_N} \geq 0, s \geq 0\} \quad (2.50)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Corolario 2.8.43 *$F(J') \notin E_f^P(\bar{x})$ si, y sólo si, el problema (2.50) es no acotado.*

Demostración. Por el Corolario 2.8.38, $F(J') \notin E_f^P(\bar{x}) \Leftrightarrow \lambda^t R + v^t Y_{J'_b} \geq 0, \lambda^t R^{J_N-J'} + v^t Y_{J'_b}^{J_N-J'} = 0, \lambda \geq e, v \geq 0$, no tiene solución. Si denotamos por D el dual de (2.50) $\Leftrightarrow D$ es no factible. Como (2.50) es factible \Leftrightarrow (2.50) es no acotado. ■

2.9 Caras Arbitrarias Eficientes

Los pioneros en el reconocimiento de la eficiencia en caras definidas de forma implícita y sin utilizar información específica relativa a alguno de los vértices de la misma, fueron Yu y Zeleny ([YuZl75]). Sin embargo, ésta es una cuestión que ha recibido mucha menos atención por parte de los investigadores que la dedicada a las caras incidentes en un vértice dado. El motivo principal de ello es que existe un consenso bastante generalizado, por parte de la comunidad científica, de que los métodos *globales* generadores de soluciones eficientes (ver capítulo 4) son menos viables que los *locales*, debido a la explosión combinatoria que experimentan. Otra razón en contra es que, al no poder ser utilizado el concepto de base asociado a todo vértice, se pierden muchas posibilidades algebraicas, quedando considerablemente limitados los desarrollos teóricos.

Consideremos el LVP, $P \equiv \max\{Cx / x \in X\}$, donde X es un poliedro de R^n . Sean Q el problema escalar $\max\{c^t x / x \in X\}$ y $F \in X_f$.

En nuestro estudio consideraremos diferentes representaciones para X . Empezaremos deduciendo unos resultados clásicos debidos a Yu y Zeleny.

Sean $X = \{x \in R^n / Ax \leq b\}$, con $\text{rang}(A) = m$, $I' \subseteq I = \{1, \dots, m\}$ y $F = F(I') = \{x \in X / A_{I'} x = b_{I'}\}$.

Teorema 2.9.1 Si $\exists u \in R_+^{|I'|}$, $u^t A_{I'} = c^t$ entonces $F(I') \subseteq S_Q$.

Demostración. Por hipótesis, $\exists u \in R_+^{|I'|}$, $u^t A_{I'} = c^t$. Entonces, completando con ceros u , $\forall x \in F(I') \Rightarrow \exists u \in R_+^m$, $u^t A = c^t$, $u^t (b - Ax) = 0 \Leftrightarrow x \in S_Q$. ■

Corolario 2.9.2 ([YuZl75], Theorem 4.3) Si $\exists \lambda \in R_{++}^k$, $\exists u \in R_+^{|I'|}$ tales que $u^t A_{I'} = \lambda^t C$ entonces $F(I') \subseteq E^P$.

Supongamos que I' es un descriptor maximal. Entonces:

Teorema 2.9.3 $F(I') \subseteq S_Q$ si, y sólo si, $\exists u \in R_+^{|I'|}$, $u^t A_{I'} = c^t$.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Por el Teorema 2.9.1.

“ \Rightarrow ”

Sea $\bar{x} \in F^0 \subseteq S_Q \Rightarrow A_{I-I'}\bar{x} < b_{I-I'}$. Como $\bar{x} \in S_Q \Leftrightarrow \exists u \in R_+^m$, $u^t A = c^t, u^t(b - A\bar{x}) = 0$. Como $A_{I-I'}\bar{x} < b_{I-I'} \Rightarrow u_{I-I'} = 0 \Rightarrow \exists u \in R_+^{|I'|}$, $u^t A_{I'} = c^t$. ■

Corolario 2.9.4 ([YuZl75], Theorem 4.3, (i)) $F(I') \in E_f^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k$, $\exists u \in R_+^{|I'|}$ tales que $u^t A_{I'} = \lambda^t C$.

Aplicando el teorema de la alternativa de Tucker ([Mn69], p. 29) al Corolario 2.9.4 se obtiene:

Corolario 2.9.5 $F(I') \in E_f^P$ si, y sólo si, el sistema:

$$Cw \geq 0, A_{I'}w \leq 0 \tag{2.51}$$

no tiene solución en R^n .

El Corolario 2.9.5 puede ser reformulado en términos de un programa lineal escalar como:

Corolario 2.9.6 $F(I') \in E_f^P$ si, y sólo si, el programa:

$$\max \{e^t s / Cw - Is = 0, A_{I'}w \leq 0, s \geq 0\} \tag{2.52}$$

es acotado, con valor óptimo 0.

Corolario 2.9.7 $F(I') \notin E_f^P$ si, y sólo si, el problema (2.52) es no acotado.

Consideremos ahora que X viene descrito como $\{x \in R_+^n / Ax = b\}$, con $\text{rang}(A) = m$. Sean $J' \subseteq J = \{1, \dots, n\}$ descriptor maximal y $D \in R^{n \times n}$ matriz diagonal, donde $d_{jj} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in J' \\ 0 & \text{si } j \in J - J' \end{cases}$.

Teorema 2.9.8 $F(J') \in E_f^P$ si, y sólo si, el sistema:

$$Cw \geq 0, Dw \geq 0, Aw = 0 \tag{2.53}$$

no tiene solución en R^n .

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Sea $\bar{x} \in F^0(J') \Rightarrow \bar{x}_{J-J'} > 0$. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists w \in R^n, Cw \geq 0, Dw \geq 0, Aw = 0 \Rightarrow \exists \bar{\alpha} \in R_{++}$, $\hat{x} = \bar{x} + \bar{\alpha}w \in X$. Ahora bien, $C\hat{x} = C(\bar{x} + \bar{\alpha}w) = C\bar{x} + \bar{\alpha}Cw \geq C\bar{x} \Rightarrow \#, \text{ pues } \bar{x} \in E^P$.

“ \Leftarrow ”

Sean $\bar{x} \in F(J')$, $x \in X$ arbitrario, $w = x - \bar{x} \Rightarrow Aw = 0$, $Dw \geq 0$. Aplicando la hipótesis $\Rightarrow Cw \geq 0 \Rightarrow \forall x \in X$, $Cx \geq C\bar{x} \Rightarrow \bar{x} \in E^P \Rightarrow F(J') \in E_f^P$. ■

Evidentemente, para demostrar en el Teorema 2.9.8 la implicación hacia la izquierda no hace falta que $J' \subseteq J$ sea un descriptor maximal.

En términos de un programa escalar lineal, el Teorema 2.9.8 se puede escribir como:

Corolario 2.9.9 $F(J') \in E_f^P$ si, y sólo si, el programa:

$$\max \left\{ e^t s / Cw - Is = 0, Aw = 0, w_{J'} \geq 0, s \geq 0 \right\} \quad (2.54)$$

es acotado, con valor óptimo 0.

El Corolario 2.9.9 constituye una valiosa herramienta de caracterización de la eficiencia de una cara arbitraria y representa un resultado parecido en su estructura al dado en el Corolario 2.8.20.

Corolario 2.9.10 $F(J') \notin E_f^P$ si, y sólo si, (2.54) es no acotado.

Aplicando el teorema de la alternativa de Tucker ([Mn69], p. 29) al sistema (2.53) obtenemos:

Corolario 2.9.11 $F(J') \in E_f^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k$, $\exists v \in R_+^n$, $\exists u \in R^m$ tales que $\lambda^t C + v^t D + u^t A = 0$.

Veamos ahora cómo, de la mano de los resultados anteriores, se pueden deducir algunos tests de eficiencia para puntos arbitrarios (no necesariamente vértices):

Sean $\bar{x} \in X$ y $J' = \{j \in J / \bar{x}_j = 0\}$. Evidentemente, $F(J')$ es una cara de X y J' es un descriptor maximal de la misma. Además, $\bar{x} \in F^0(J')$. Hechas estas precisiones resultan claras las siguientes conclusiones:

Teorema 2.9.12 ([EvSt73], Lemma 1.2) $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, el sistema:

$$Cw \geq 0, Dw \geq 0, Aw = 0 \quad (2.55)$$

no tiene solución en R^n .

Corolario 2.9.13 $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, el programa:

$$\max \left\{ e^t s / Cw - Is = 0, Aw = 0, w_{J'} \geq 0, s \geq 0 \right\} \quad (2.56)$$

es acotado, con valor óptimo 0.

Corolario 2.9.14 ([EvSt73], Corollary 1.3) $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k$, $\exists v \in R_+^n$, $\exists u \in R^m$ tales que $\lambda' C + v' D + u' A = 0$.

En la sección 3.2 dedicada a la eficiencia completa mostraremos otra interesante perspectiva desde la que acometer la caracterización de eficiencia para caras arbitrarias.

2.10 Regiones de Indiferencia

Las regiones de indiferencia son ampliamente utilizadas en decisión multicriterio porque proporcionan información valiosa para el DM, facilitando el proceso de selección de una solución eficiente ([YuZl75], Remark 3.5). Sin embargo, éste no es el único uso que se les puede dar, pues permiten caracterizar de forma implícita el conjunto de soluciones eficientes de un LVP. Debido a esta última propiedad han sido utilizadas, en ocasiones, por los algoritmos generadores de soluciones eficientes (ver [Gal77]).

Sea P el problema $\max\{Cx / x \in X\}$, donde X viene dado por el sistema (2.1). Supongamos $X \neq \emptyset$ y consideremos $Y \subseteq X$.

La definición de región de indiferencia que presentamos a continuación extiende las ideas comúnmente utilizadas en la literatura (ver, por ejemplo, las dadas en [Krn74], p. 605 o [AnCl92], p. 189).

Definición 2.10.1 Se llama *región de indiferencia (débil) de Y asociada al problema P* , y se denota por $I^P(Y)$ ($WI^P(Y)$), al conjunto $\{\lambda \in \Lambda_k^0 / Y \subseteq S_{P_\lambda}\}$ ($\{\lambda \in \Lambda_k / Y \subseteq S_{P_\lambda}\}$).

Las particularizaciones más frecuentes de Y son los casos dados por $Y = \{\bar{x}\}$ con $\bar{x} \in X_{xp}$ e $Y = F \in X_f$.

Para simplificar la notación, la región de indiferencia de \bar{x} asociada al problema P se denotará por $I^P(\bar{x})$.

Es claro que:

Proposición 2.10.2 $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, $I^P(\bar{x}) \neq \emptyset$.

Ahora, aplicando dualidad escalar a la Definición 2.10.1, se tiene:

Proposición 2.10.3 $I^P(\bar{x}) = \{\lambda \in \Lambda_k^0 / \lambda' C - u' A \leq 0, \lambda' C \bar{x} = u' b\}$.

Se pueden obtener conclusiones más sutiles cuando $\bar{x} \in X_{xp}$, sin más que utilizar los resultados de la sección 2.4. Efectivamente,

Corolario 2.10.4 *Sea \bar{x} s.f.b. no degenerada. Entonces $I^P(\bar{x}) = \{\lambda \in \Lambda_k^0 / \lambda' R \geq 0\}$.*

Demostración. Aplicando el Teorema 2.4.5. ■

Corolario 2.10.5 *Sea \bar{x} s.f.b. σ -degenerada. Entonces $I^P(\bar{x}) = \{\lambda \in \Lambda_k^0 / \exists v \in R_+^\sigma, \lambda' R + v' Y_D \geq 0\}$.*

Demostración. Aplicando el Corolario 2.4.7. ■

Proposición 2.10.6 ([Krn74], p. 605, [ChHm83], p. 157) *Supongamos que X es acotado. Entonces $\Lambda_k^0 = \bigcup_{x^i \in E_{xp}^P} I^P(x^i)$.*

Demostración.

“ \supseteq ”

Evidente.

“ \subseteq ”

Sea $\lambda \in \Lambda_k^0$. Como X es acotado $\Rightarrow S_{P_\lambda} \neq \emptyset$. Además, por ser X apuntado $\Rightarrow S_{P_\lambda}$ contiene algún vértice. Ahora bien, sabemos que cualquier vértice x^i de S_{P_λ} también es un vértice de X . Como, además, $x^i \in E^P \Rightarrow x^i \in E_{xp}^P \Rightarrow \lambda \in I^P(x^i) \Rightarrow \Lambda_k^0 \subseteq \bigcup_{x^i \in E_{xp}^P} I^P(x^i)$. ■

Sea $F \in X_f$.

Proposición 2.10.7 *$F \in E_f^P$ si, y sólo si, $I^P(F) \neq \emptyset$.*

Aplicando el Teorema 2.4.3, se tiene:

Proposición 2.10.8 $I^P(F) = \{\lambda \in \Lambda_k^0 / \lambda' C - u' A \leq 0, \lambda' C^{J-J'} = u' A^{J-J'}\}$

Corolario 2.10.9 *$I^P(F)$ y $WI^P(F)$ son convexos.*

Corolario 2.10.10 *$WI^P(F)$ es cerrado.*

El siguiente resultado es importante, pues permite obtener la región de indiferencia de una cara en función de las regiones de indiferencia de sus vértices y aristas no acotadas.

Teorema 2.10.11 ([Gal77], Theorem 2.3) *Sea $Q = F_{xp} \cup F_{xr}$. Entonces, $I^P(F)$*
 $= \bigcap_{x^i \in Q} I^P(x^i)$.

Demostración. $\lambda \in I^P(F) \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda_k^0, F \subseteq S_{P_\lambda}$. Por ser S_{P_λ} convexo \Leftrightarrow
 $\lambda \in \Lambda_k^0, Q \subseteq S_{P_\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda_k^0, \lambda \in I^P(x^i), \forall x^i \in Q \Leftrightarrow \lambda \in \bigcap_{x^i \in Q} I^P(x^i)$. ■

Corolario 2.10.12 *Sea $Q \subseteq E_{xp}^P \cup E_{xr}^P$. F es una cara eficiente maximal de X*
si, y sólo si, $\bigcap_{x^i \in Q} I^P(x^i) \neq \emptyset$ y $\bigcap_{x^i \in Q'} I^P(x^i) = \emptyset, \forall Q', Q \subset Q' \subseteq E_{xp}^P \cup E_{xr}^P$.

La importancia del Corolario 2.10.12 viene dada porque enuncia un mecanismo viable para calcular *ascendentemente* (ver capítulo 4) el conjunto de todas las caras eficientes maximales de un LVP. En realidad, el método generador de soluciones eficientes para el LVP propuesto por Gal ([Gal77]) se fundamenta en este principio.

Capítulo 3

Tópicos Seleccionados en Programación Vectorial Lineal

3.1 Introducción

En este capítulo nos centramos en el estudio de ciertas cuestiones de interés en programación vectorial lineal las cuales, según nuestro parecer, enriquecen notablemente y desde diversas perspectivas la metodología estudiada. Concretamente, los tópicos seleccionados, que se describirán brevemente en los párrafos siguientes, han sido la *caracterización de la eficiencia completa*, la *identificación de objetivos redundantes*, la *dualidad*, y la *optimización lineal sobre la región eficiente*. Indudablemente, hubiera sido posible incluir otros aspectos no menos sugerentes y atractivos. La elección realizada está basada en nuestra propia experiencia y constituye un *compromiso* entre la voluntad de ofrecer un elenco de materias suficientemente rico y variado, y la necesidad de hacer físicamente abordable un trabajo de estas características.

Ocurre a veces (quizá con mayor frecuencia de lo que podríamos pensar a priori) que la región eficiente de un LVP coincide con su región factible ([Bn91a]). En estos casos se dice que el problema es *completamente eficiente*. Es evidente que la detección de este fenómeno a priori, es decir, antes de la resolución del LVP, presenta numerosas ventajas, siendo algunas de ellas las siguientes: (i) puede producir importantes ahorros computacionales, (ii) aporta nuevas caracterizaciones para caras eficientes arbitrarias y (iii) simplifica notablemente la optimización de una función lineal sobre la región eficiente. Por tales motivos, hemos dedicado la sección 3.2 al análisis de eficiencia completa de un LVP, presentando con detalle un

buen número de tests novedosos. Algunos de ellos se enuncian en términos de la factibilidad de un sistema lineal (ver, por ejemplo Teorema 3.2.25 y Corolarios 3.2.26 a 3.2.28) y otros en función de un programa lineal escalar (Teoremas 3.2.29 y 3.2.31), siendo todos fácilmente aplicables al no requerir hipótesis previas. Es importante reseñar que, aunque los resultados anteriores han sido obtenidos explotando la definición de eficiencia completa, también se han sugerido enfoques alternativos como los utilizados en los Teoremas 3.2.32 y 3.2.34.

Es nuestra opinión que, previamente a la resolución de cualquier LVP de tamaño medio o grande se debería realizar, de manera rutinaria, algún tipo de preprocesado del modelo. Aparte de las tareas tradicionales de preprocesamiento utilizadas en los modelos escalares (ver, por ejemplo, [ThTZ66], [Mt73], [ZnW180], [Tl80] o [KLTZ83]), tales como identificación de variables fijas, eliminación de restricciones redundantes, etc., podemos plantearnos descartar aquellos objetivos que no influyen en la región eficiente. Las ventajas de eliminar a priori estos *objetivos redundantes* son obvias: por un lado debemos esperar una disminución del esfuerzo computacional a la hora de calcular el conjunto de soluciones eficientes y, por otra parte, cualquier tipo de análisis a posteriori que se haga sobre la región generada ha de verse simplificado. Estas razones nos decidieron a dedicar parte de nuestro esfuerzo a la identificación de objetivos redundantes, quedando recogidos nuestros resultados en la sección 3.3. En ella se intenta conceptualizar de forma clara los elementos que hemos considerado más relevantes, presentándose algunos de ellos por primera vez (Definiciones 3.3.3, 3.3.6 y 3.3.7). La teoría expuesta se ha desarrollado concediendo un papel preponderante al cono de preferencias (Teoremas 3.3.12 y 3.3.18). De esta manera hemos podido enriquecer los resultados propuestos por Gal y Leberling ([GalLb77]) con otros originales (ver, por ejemplo, Corolario 3.3.20), obteniéndose todos de manera unificada y armoniosa. Adicionalmente, dado que es conocido que los objetivos que se pueden poner como combinaciones cónicas del resto son redundantes (Corolario 3.3.19), proponemos un procedimiento (algoritmo MSS), con complejidad polinomial, para calcular el sistema generador minimal de un cono poliédrico.

La dualidad en programación vectorial lineal fue abordada, por primera vez, por Gale, Kuhn y Tucker, en 1951 ([Kh91], p. 85), como un caso particular del estudio que tales autores hicieron sobre dualidad en programación matricial lineal ([GIKT51]). Desde entonces, diversos investigadores, han propuesto, con mayor o menor éxito, definiciones alternativas para el caso lineal. Aunque la teoría de la dualidad permite elegantes desarrollos teóricos, su utilidad práctica, hasta el momento, para los casos vectorial y matricial (en contraposición con lo que sucede en el caso escalar), deja mucho que desear, no habiéndose logrado aún (y, probablemente, nunca se logre) una definición de problema dual que sea

algorítmicamente satisfactoria. En la sección 3.4 se estudian de manera homogénea y se relacionan entre sí algunas de las definiciones más notables sobre dualidad en programación vectorial. Entre todas las disponibles hemos seleccionado las planteadas por Gale-Kuhn-Tucker ([GKT51]), Kornbluth ([Krn74]), Isermann ([Is77b]) y Hannan ([Hn78]). Nuestro empeño se ha visto recompensado con un buen número de modestas aportaciones (ver, por ejemplo, Teoremas 3.4.17, 3.4.21, 3.4.23, 3.4.31, 3.4.33, Lema 3.4.32, Corolarios 3.4.22, 3.4.41, 3.4.43), las cuales han contribuido a enriquecer la teoría con nuevas propiedades y relaciones, y a abreviar sustancialmente algunas de las demostraciones presentadas.

Por último, la sección 3.5 estudia diversos aspectos relacionados con la optimización de una función lineal sobre la región eficiente. Se trata de un problema elegante y muy complejo (de optimización no convexa), que ha despertado interés desde hace más de treinta años ([Ph72], p. 224), estando su utilidad e importancia fuera de toda duda (ver, por ejemplo, [IsSt87], [Bn84], [Bn91b], [Bn92], [Bn93], [EcSn94], [DrFs95] y [BnLee96]). En particular, Benson muestra en [Bn84] (p. 565) que ciertos problemas del mundo real se pueden modelar de forma más apropiada y realista con este enfoque que con el más tradicional de la programación lineal multiobjetivo. En este apartado realizamos un estudio teórico y algorítmico de este tema, presentando, entre otros resultados inéditos, el método de maximización facial progresiva (MFP) basado en la optimización, en cada iteración, de la función objetivo sobre una cara eficiente estrictamente mejorada. Las caras eficientes generadas se obtienen a partir de la resolución de un programa bilineal simplificado (Teorema 3.5.32), que puede ser abordado adecuadamente mediante técnicas específicas de optimización global ([AHJS99]).

3.2 Análisis de Eficiencia Completa

Sea P el problema de optimización vectorial $\max \{z(x) / x \in X\}$, donde supondremos, sin pérdida de generalidad, que $X \neq \emptyset$.

Definición 3.2.1 ([Bn91a], p. 482) P se dice que es completamente eficiente si $E^P = X$.

Ejemplo 3.2.2 Consideremos el problema P dado por:

$$\left. \begin{aligned} \max Cx &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x \\ \text{s.a. : } x \in X &= \{x \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\} \end{aligned} \right\}$$

y cuya región factible y cono de preferencias se representa en la Figura 3.1. Evidentemente, $E^P = X$.

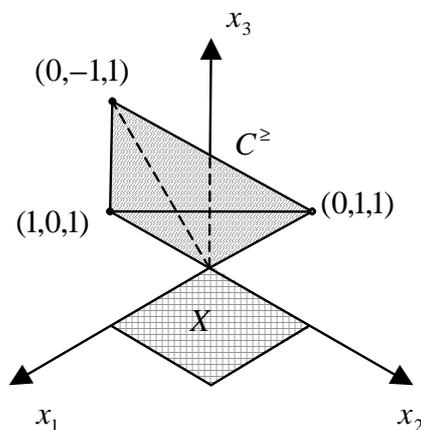


Figura 3.1

Es claro que si $z(X)$ es un conjunto unitario, entonces P es completamente eficiente. En particular, la condición anterior se da trivialmente si X contiene una única alternativa.

El estudio de la eficiencia completa fue abordado por primera vez en 1977, de la mano de M. Benveniste ([Bnv77]) y posteriormente tratado por H. Benson, en 1991 ([Bn91a]). Mientras que Benveniste realizó un estudio preliminar bajo la hipótesis de linealidad en las funciones objetivo, Benson analizó con detenimiento las particularidades del fenómeno para el LVP.

En esta sección desarrollaremos una teoría coherente y estructurada para la eficiencia completa en el caso lineal que, a la par que integra ciertos resultados conocidos, ofrece otros nuevos.

Consideremos, inicialmente, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

Teorema 3.2.3 $Y \subseteq E^P$ si, y sólo si, el sistema:

$$z(x) - z(y) \geq 0, \quad x \in X, \quad y \in Y \quad (3.1)$$

no tiene solución.

Demostración. $Y \subseteq E^P \Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X, z(x) \geq z(y) \Leftrightarrow$ el sistema (3.1) no tiene solución.

Sea P_Y el programa escalar:

$$\max \{ e^t s / z(x) - z(y) - s = 0, x \in X, y \in Y, s \geq 0 \}$$

Evidentemente P_Y siempre es factible y generaliza al problema de maximización de holguras $P_{\bar{x}}$.

Teorema 3.2.4 $Y \subseteq E^P$ si, y sólo si, P_Y es acotado, con valor óptimo 0.

Demostración. $Y \subseteq E^P$. Por el Teorema 1.4.37 $\Leftrightarrow \forall y \in Y, P_{z(y)}$ es acotado, con valor óptimo 0 $\Leftrightarrow P_Y$ es acotado, con valor óptimo 0. ■

Teorema 3.2.5 Si $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}) \in S_{P_Y}$ entonces $\bar{x} \in E^P$.

Demostración. Aplicar el Corolario 1.4.36. ■

Corolario 3.2.6 Si $E^P = \emptyset$ entonces P_Y es no acotado.

Sean $\lambda \in R_{++}^k$ y $P_{\lambda,Y}$ el problema de optimización escalar:

$$\max \{ \lambda^t (z(x) - z(y)) / z(x) - z(y) \geq 0, x \in X, y \in Y \}$$

$P_{\lambda,Y}$ siempre es factible pues hemos presupuesto que $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Además $P_{\lambda,Y}$ generaliza al problema paramétrico-restringido $P_{\lambda,\bar{z}}$ (ver sección 1.4.5). Obsérvese también que $P_{\lambda,Y}$ es una generalización del problema P_Y , pues eliminando s en éste último se obtiene $P_{e,Y}$.

Teorema 3.2.7 $Y \subseteq E^P$ si, y sólo si, $P_{\lambda,Y}$ es acotado, con valor óptimo 0.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{y} \in Y, \exists \bar{x} \in X, z(\bar{x}) - z(\bar{y}) \geq 0, \lambda^t (z(\bar{x}) - z(\bar{y})) > 0$. Como $\lambda > 0 \Rightarrow z(\bar{x}) - z(\bar{y}) \geq 0 \Rightarrow \bar{y} \notin E^P$. #

“ \Leftarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $Y \not\subseteq E^P \Rightarrow \exists \bar{y} \in Y, \exists \bar{x} \in X, z(\bar{x}) \geq z(\bar{y}) \Rightarrow \lambda^t (z(\bar{x}) - z(\bar{y})) > 0 \Rightarrow \#$. ■

Aplicando los resultados anteriores obtenemos:

Teorema 3.2.8 *Son equivalentes:*

(i) P es completamente eficiente.

(ii) El sistema

$$z(x) - z(y) \geq 0, \quad x, y \in X \quad (3.2)$$

no tiene solución ([Bnv77], Theorem 1, p. 286).

(iii) El programa escalar P_x dado por:

$$\max \{ e^t s / z(x) - z(y) - s = 0, \quad x, y \in X, s \geq 0 \}$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

(iv) El programa escalar $P_{\lambda, x}$ dado por:

$$\max \{ \lambda^t (z(x) - z(y)) / z(x) - z(y) \geq 0, \quad x, y \in X \}$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0 ([Bn91a], Theorem 1, p. 483).

Una interesante relación de simetría captada por Benson viene de la mano del problema $-P \equiv \max \{ -z(x) / x \in X \}$. Efectivamente:

Corolario 3.2.9 ([Bn91a], Corollary 1.1) P es completamente eficiente si, y sólo si, $-P$ es completamente eficiente.

Demostración. Directa, pues por la Proposición 1.3.13 sabemos que las regiones eficientes de P y $-P$ coinciden. ■

El siguiente resultado no tiene dificultad:

Proposición 3.2.10 Si $\exists \lambda \in \Lambda_k^0$ tal que $\lambda^t z(x) = 0^t$ entonces $E^P = X$.

Bajo la hipótesis de linealidad en las funciones objetivo, la Proposición 3.2.10 proporciona nuevas condiciones suficientes. Efectivamente:

Teorema 3.2.11 *Son equivalentes:*

(i) $\lambda^t C = 0^t$, $\lambda > 0$ tiene solución.

(ii) $\exists d \in R^n$, $Cd \geq 0$.

(iii) El sistema

$$Cd - Is = 0, \quad e^t s \geq 1, \quad s \geq 0 \quad (3.3)$$

no tiene solución ([Bnv77], Corollary 1, p. 287).

(iv) El problema

$$\max \{ e^t s / Cd - Is = 0, \quad s \geq 0 \} \quad (3.4)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

(v) $C^z = \{0\}$.

Demostración.

“(i) \Leftrightarrow (ii)”

Directa, sin más que utilizar el teorema de la alternativa de Stiemke ([Mn69], p. 32).

“(ii) \Rightarrow (iii)”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{d} \in R^n$, $\exists \bar{s} \in R^k$, $C\bar{d} - I\bar{s} = 0$, $e^t \bar{s} \geq 1$, $\bar{s} \geq 0 \Rightarrow C\bar{d} \geq 0$, #.

“(ii) \Leftarrow (iii)”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{d} \in R^n$, $C\bar{d} \geq 0 \Rightarrow \exists \alpha \in R_{++}$, $\exists \hat{s} \in R^k$, $\alpha C\bar{d} - I\hat{s} = 0$, $e^t \hat{s} \geq 1$, $\hat{s} \geq 0$. Llamando $\hat{d} = \alpha \bar{d} \Rightarrow \exists \hat{d} \in R^n$, $\exists \hat{s} \in R^k$, $C\hat{d} - I\hat{s} = 0$, $e^t \hat{s} \geq 1$, $\hat{s} \geq 0 \Rightarrow \#$.

“(ii) \Leftrightarrow (iv)”

No reviste dificultad.

“(ii) \Leftrightarrow (v)”

Es claro pues $C^{\geq} = \{d \in R^n / Cd \geq 0\} \cup \{0\}$.

■

Si consideramos $z(x) = Cx$, en virtud del Teorema 3.2.11 se tiene:

Corolario 3.2.12 ([YuZl75], Remark 4.3) *Si $\lambda^t C = 0^t$, $\lambda > 0$ tiene solución entonces $E^P = X$.*

Corolario 3.2.13 ([Bnv77], Theorem 2) *Si $\exists d \in R^n$, $Cd \geq 0$ entonces $E^P = X$.*

El recíproco del resultado anterior no es cierto como pone de manifiesto el siguiente contraejemplo:

Ejemplo 3.2.14 *Consideremos el problema dado en el Ejemplo 3.2.2. Se tiene*

que $E^P = X$ y, sin embargo, $\exists \bar{d} = (1, 0, 1) \in R^3$ tal que $C\bar{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$.

Corolario 3.2.15 *Si el sistema (3.3) no tiene solución entonces $E^P = X$.*

Corolario 3.2.16 *Si el problema (3.4) es acotado, con valor óptimo igual a 0, entonces $E^P = X$.*

Corolario 3.2.17 *Si $C^{\geq} = \{0\}$ entonces $E^P = X$.*

Obsérvese que el problema (3.4) siempre es factible pues $(d^t, s^t) = (0, 0)$ verifica las restricciones. Además, hay disponible de forma inmediata una base inicial dada por I . Por otra parte, se debe esperar que la base inicial de (3.4) sea de dimensión pequeña, por ser frecuente en la práctica que k sea pequeño.

Veamos bajo qué hipótesis las condiciones suficientes anteriores de eficiencia completa son también necesarias. Si denotamos por $\text{int}(X)$ el interior de X en la topología usual de R^n tenemos:

Teorema 3.2.18 ([Bnv77], Theorem 3) *Sea $X \subseteq R^n$ tal que $\text{int}(X) \neq \emptyset$. Si $E^p = X$ entonces $\exists d \in R^n$ tal que $Cd \geq 0$.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{d} \in R^n$, $C\bar{d} \geq 0$. Sea $\bar{x} \in \text{int}(X) \Rightarrow \exists \varepsilon \in R_{++}$, $\hat{x} = \bar{x} + \varepsilon \bar{d} \in X$. Además, $C\hat{x} = C\bar{x} + \varepsilon C\bar{d} \geq C\bar{x} \Rightarrow \bar{x} \notin E^p \Rightarrow \#$. ■

Nótese que la condición de que $\text{int}(X) \neq \emptyset$ es muy dura, pues implica que X ha de ser de dimensión total.

Veamos cómo se puede comprobar si el interior de un poliedro es no vacío. Para ello consideraremos las representaciones más comunes. En primer lugar, es de sobra conocido que:

- i) Si $X = \{x \in R^n / Ax \leq b\}$ entonces $\text{int}(X) = \{x \in R^n / Ax < b\}$.
- ii) Si $X = \{x \in R^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ entonces $\text{int}(X) = \{x \in R^n / Ax < b, x > 0\}$.
- iii) Si $X = \{x \in R^n / Ax = b, x \geq 0\}$ entonces $\text{int}(X) = \{x \in R^n / Ax = b, x > 0\}$.

Proposición 3.2.19 ([Bnv77], p. 287) *$Ax < b$ tiene solución si, y sólo si, $yb - Ax \geq e$, $y \geq 1$, $y \in R$ tiene solución.*

Demostración. $Ax < b$ tiene solución $\Leftrightarrow \exists \bar{x} \in R^n$, $\exists \bar{y} \in R$, $\bar{y} \geq 1$, $\bar{y}(b - A\bar{x}) \geq e \Leftrightarrow yb - Ax \geq e$, $y \geq 1$, $y \in R$ tiene solución. ■

Corolario 3.2.20 *$Ax < b$, $x > 0$ tiene solución si, y sólo si, $yb - Ax \geq e$, $x \geq e$, $y \geq 1$, $y \in R$ tiene solución.*

Demostración. $Ax < b$, $x > 0$ tiene solución $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} x < \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene solución.

Por la Proposición 3.2.19, $\Leftrightarrow y \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} x \geq e$, $y \geq 1$, $y \in R$ tiene solución $\Leftrightarrow yb - Ax \geq e$, $x \geq e$, $y \geq 1$, $y \in R$ tiene solución. ■

Proposición 3.2.21 *$Ax = b$, $x > 0$ tiene solución si, y sólo si, $yb - Ax = 0$, $x \geq e$, $y \geq 1$, $y \in R$ tiene solución.* (3.5)

Demostración.“ \Leftarrow ”

Inmediata.

“ \Rightarrow ”

Por hipótesis $\exists \bar{x} > 0$ tal que $A\bar{x} = b$. Sea $\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \{\bar{x}_j\}$. Si $\delta \geq 1 \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y}) = (\bar{x}, 1)$ es solución de (3.5). Si por el contrario, $\delta < 1 \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y}) = (\bar{x}/\delta, 1/\delta)$ es solución de (3.5) ■

A partir de ahora, analizaremos exclusivamente el problema de la eficiencia completa en relación con el LVP. Supongamos que P viene dado por $\max\{Cx / Ax = b, x \in R_+^n\}$.

En primer lugar, siempre podemos asegurar que:

Corolario 3.2.22 Si $\exists \lambda \in \Lambda_k^0, \exists u \in R^m, \lambda^t C = u^t A$ entonces $E^P = X$.

Demostración. Basta aplicar las condiciones de eficiencia para el caso lineal (Teorema 1.7.6). ■

Evidentemente, el Corolario 3.2.22 es una generalización del Corolario 3.2.12.

Por otra parte, también es posible escribir:

Corolario 3.2.23 Si el problema:

$$\min\{e^t s / u^t A - \lambda^t C - s^t I = 0, \lambda \geq e, s \geq 0\} \quad (3.6)$$

es acotado, con valor óptimo igual a cero, entonces $E^P = X$.

Corolario 3.2.24 Si el problema:

$$\max\{e^t C d / A d = 0, C d \geq 0, d \geq -e\} \quad (3.7)$$

es acotado, con valor óptimo igual a cero entonces $E^P = X$.

Demostración. Aplicando dualidad escalar, el problema (3.7) es acotado, con valor óptimo igual a cero $\Leftrightarrow \min\{e^t s / u^t A - \lambda^t C - s^t I = e^t C, \lambda \geq 0, s \geq 0\}$ es acotado, con valor óptimo igual a cero. Haciendo el cambio de variable $\lambda = \lambda + e \Leftrightarrow$ el problema (3.6) es acotado, con valor óptimo igual a cero. ■

Ahora bien, si utilizamos las condiciones necesarias y suficientes que proporciona el Teorema 3.2.8 en combinación con los teoremas de la alternativa disponibles para el caso lineal (sección 1.7), el análisis de la eficiencia completa para el LVP comienza a dotarse de tests verdaderamente útiles.

Teorema 3.2.25 $E^P = X$ si, y sólo si, el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} u^t A - \lambda^t C \geq 0 \\ v^t A + \lambda^t C \geq 0 \\ u^t b + v^t b \leq 0 \\ \lambda > 0 \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

tiene solución.

Demostración. $E^P = X$. Por el Teorema 3.2.8 \Leftrightarrow El sistema $\left. \begin{array}{l} Cx - Cy \geq 0 \\ Ax = b \\ Ay = b \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$ no

tiene solución. \Leftrightarrow El sistema $\left. \begin{array}{l} (C, -C) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \\ (x^t, y^t) \geq 0 \end{array} \right\}$ no tiene solución. Por ser

$X \neq \emptyset$ y aplicando el Teorema de la Alternativa 1.7.3., \Leftrightarrow El sistema $\left. \begin{array}{l} (u^t, v^t) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} - \lambda^t (C, -C) \geq 0^t \\ (u^t, v^t) \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \leq 0, \lambda > 0 \end{array} \right\}$ tiene solución. \Leftrightarrow El sistema (3.8) tiene solución. ■

Debido a la homogeneidad del sistema (3.8) obtenemos:

Corolario 3.2.26 $E^P = X$ si, y sólo si, el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} u^t A - \lambda^t C \geq 0 \\ v^t A + \lambda^t C \geq 0 \\ u^t b + v^t b \leq 0 \\ \lambda \geq e \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

tiene solución.

Aplicando ahora el cambio de variable $\lambda = \lambda - e$ al sistema (3.9):

Corolario 3.2.27 $E^P = X$ si, y sólo si, el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} u^t A - \lambda^t C \geq e^t C \\ v^t A + \lambda^t C \geq -e^t C \\ u^t b + v^t b \leq 0 \\ \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

tiene solución.

En realidad, la desigualdad $u^t b + v^t b \leq 0$ del sistema (3.8) es una igualdad implícita. Efectivamente:

Corolario 3.2.28 $E^P = X$ si, y sólo si, el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} u^t A - \lambda^t C \geq 0 \\ v^t A + \lambda^t C \geq 0 \\ u^t b + v^t b = 0 \\ \lambda > 0 \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

tiene solución.

Demostración. $E^P = X \Leftrightarrow$ El sistema (3.8) tiene solución. Como $u^t A + v^t A \geq 0$, multiplicando ambos miembros por $x \in X$, $u^t b + v^t b \geq 0$. \Leftrightarrow El sistema (3.11) tiene solución. ■

A partir de los resultados anteriores podemos concluir que:

Teorema 3.2.29 $E^P = X$ si, y sólo si, el problema D_X dado por:

$$\left. \begin{array}{l} \min u^t b + v^t b \\ \text{s.a. : } u^t A - \lambda^t C \geq 0 \\ v^t A + \lambda^t C \geq 0 \\ \lambda \geq e \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

Obsérvese que D_X no puede ser no acotado si suponemos que $X \neq \emptyset$.

A modo de comparación, Benson propone como condición necesaria y suficiente para la eficiencia completa de P , que el problema:

$$\left. \begin{array}{l} \min u^t b \\ \text{s.a. : } u^t A - s^t I \geq 0 \\ v^t A - \lambda^t C - s^t I = 0 \\ \lambda \geq e, s \geq 0 \end{array} \right\}$$

sea acotado, con valor óptimo igual a 0 ([Bn91a], Theorem 2).

Por otra parte, es interesante notar que:

Proposición 3.2.30 D_x es el dual de la formulación lineal de P_x .

Demostración. Inmediata, sin más que tener en cuenta que la formulación lineal de P_x es:

$$\left. \begin{array}{l} \max \left(0^t, \quad 0^t, \quad e^t \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix} \\ \text{s.a :} \\ \begin{pmatrix} -C & C & I \\ A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix} \geq 0 \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

■

Teorema 3.2.31 $E^P = X$ si, y sólo si, el programa lineal escalar (3.13) es acotado con valor objetivo óptimo 0.

También podemos utilizar otro tipo de argumentaciones para comprobar la eficiencia completa de un problema. La que exponemos a continuación se basaría en nuestra capacidad para encontrar un punto del interior relativo del poliedro.

Sabemos que, $X \neq \emptyset$ si, y sólo si, $X^0 \neq \emptyset$ ([NmWl88], Proposition 2.3). Sea $\bar{x} \in X^0$.

Teorema 3.2.32 $E^P = X$ si, y sólo si, el sistema $u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t b = \lambda^t C\bar{x}$ tiene solución.

Demostración. $E^P = X \Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, X = S_{P_\lambda} \Leftrightarrow \bar{x} \in S_{P_\lambda} \Leftrightarrow$ El sistema $u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t b = \lambda^t C\bar{x}$ tiene solución.

■

Teorema 3.2.33 $E^P = X$ si, y sólo si, $P(C\bar{x})$ es acotado, con valor óptimo 0.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Si $P(C\bar{x})$ es acotado, con valor óptimo 0, por el Teorema 1.4.37 $\Rightarrow \bar{x} \in E^P$.

Como $\bar{x} \in X^0 \Rightarrow E^P = X$.

“ \Rightarrow ”

Si $E^P = X \Rightarrow \bar{x} \in E^P$. Por el Teorema 1.4.37 $\Rightarrow P(C\bar{x})$ es acotado, con valor óptimo 0. ■

La principal dificultad que presentan las caracterizaciones dadas en los dos teoremas anteriores estriba en encontrar un punto $\bar{x} \in X^0$. Ahora bien, si somos capaces de determinar el descriptor maximal $J' \subseteq J$ de X ($F(J') = X$), entonces, en virtud de la Proposición 2.3.19, $X^0 = \{x \in X / x_{J-J'} > 0, x_{J'} = 0\}$.

Otra posibilidad que podemos contemplar, para desarrollar nuevas herramientas de utilidad en el estudio de la eficiencia completa, consiste en utilizar los resultados obtenidos en el capítulo 2, relacionados con la caracterización de las caras eficientes, sin más que tener en cuenta que X es una cara (impropia) de X . Aunque la idea es sencilla (y en esta sencillez radica gran parte de su belleza), proporciona una nueva perspectiva, aparentemente no explotada previamente, para afrontar este problema.

Con la intención de dar una pequeña muestra de los resultados que se pueden obtener por esta vía, consideremos \bar{x} s.f.b. de X , especificado por una base arbitraria $B \in R^{m \times m}$ de $A (= [B \ N])$ y $R = C^B B^{-1} N - C^N \in R^{k \times (n-m)}$, su matriz de costos reducidos asociada, la cual supondremos, sin pérdida de generalidad, no nula. Supongamos, en primer lugar, que \bar{x} es no degenerada. Siempre ocurre que $X = F(\emptyset)$. Pero si \bar{x} es no degenerada, entonces \emptyset también es un descriptor maximal de X . Sea $r = R \cdot e$. Ahora, utilizando el vector r que acabamos de definir, podemos aplicar a X los resultados obtenidos en la sección 2.8.

En particular, en virtud del Teorema 2.8.1, se tiene:

Teorema 3.2.34 $E^P = X$ si, y sólo si, el sistema $Ru \leq r, u \geq 0$, no tiene solución.

O bien, utilizando el Corolario 2.8.6,

Corolario 3.2.35 $E^P = X$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k, \lambda' R \geq 0, \lambda' r = 0$.

Para el caso en que \bar{x} es σ -degenerado necesitamos encontrar previamente el descriptor maximal $J' \subseteq J$ de X . Una vez hallado, definimos $r = R\hat{u}$, donde \hat{u} es solución del sistema (2.6) y ya estamos en condiciones de aplicar los resultados de la sección 2.8 obtenidos para el caso degenerado.

Concretamente, aplicando el Teorema 2.8.22 se tiene:

Teorema 3.2.36 $E^P = X$ si, y sólo si, el sistema $Ru \leq r$, $Y_D u \leq 0$, $u \geq 0$, no tiene solución.

O bien, utilizando el Corolario 2.8.27 podemos escribir:

Corolario 3.2.37 $E^P = X$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k$, $\exists v \in R_+^\sigma$, $\lambda^t R + v^t Y_D \geq 0$, $\lambda^t r = 0$.

No quisiéramos acabar esta sección sin mencionar, de manera explícita, que también es posible hacer un razonamiento inverso al realizado en los párrafos anteriores. Efectivamente, una de las aplicaciones de mayor utilidad práctica para los tests de eficiencia completa consiste en utilizarlos para determinar la eficiencia de una cara arbitraria. Esta reflexión se basa en el hecho de que cualquier cara de un poliedro es, en sí misma, un poliedro. Así, entre otros muchos resultados podemos escribir:

Teorema 3.2.38 $F \in E_f^P$ si, y sólo si, el sistema $Cx \geq Cy$, $x \in X$, $y \in F$, no tiene solución.

Corolario 3.2.39 $F \in E_f^P$ si, y sólo si, el programa escalar $\max \{e^t s / Cx - Cy - Is = 0, x \in X, y \in F\}$ es acotado, con valor óptimo 0.

3.3 Identificación de Objetivos Redundantes

En esta sección nos planteamos estudiar cuales (si los hay) de los objetivos de un LVP no influyen en su conjunto de soluciones eficientes, en el sentido de que, si los suprimimos, el nuevo problema resultante continúa teniendo la misma región eficiente que el original. Este tipo de análisis se conoce con el nombre de *identificación* o *determinación de objetivos redundantes* y tiene gran importancia en programación vectorial, por ser ampliamente aceptado que el esfuerzo computacional para resolver un LVP crece más que proporcionalmente con el número de objetivos ([St86]). En general, la eliminación de los objetivos redundantes de un LVP se deberá traducir, por una parte, en un ahorro (a veces considerable) de cálculo (y tiempo) al resolver el problema y, por otra, en una simplificación de cualquier análisis a posteriori (filtrado de soluciones eficientes, búsqueda de una solución preferida, ...) que se haga sobre la región eficiente. Por desgracia, la identificación exacta de los objetivos redundantes de un LVP es un problema de gran dureza (como se verá en breve) y, en el estado actual del arte, sólo resultan prácticos ciertos enfoques muy sencillos.

A efectos de clasificación, la identificación de objetivos redundantes está englobada dentro del *análisis de sensibilidad* en programación vectorial.

Sea P un LVP definido como en (1.5). A lo largo de este apartado utilizaremos la siguiente notación: Dado $I \subseteq \{1, \dots, k\}$, \bar{I} será $\{1, \dots, k\} - I$. Cuando $I = \{r\}$, con $r \in \{1, \dots, k\}$, por motivos de simplificación, denotaremos por \bar{r} a $\{1, \dots, k\} - \{r\}$. De forma usual, $z_i(x)$ corresponderá con $\{z_i(x)/i \in I\}$ y designaremos por P_I al problema de programación vectorial:

$$\max \{z_I(x) / x \in X\} \quad (3.14)$$

Obsérvese que P_I es un nuevo problema a todos los efectos pues, en general, no ocurre que $E^P \subseteq E^{P_I}$, ni que $E^P \supseteq E^{P_I}$. Sin embargo, si se da la siguiente propiedad:

Proposición 3.3.1 $WE^{P_I} \subseteq WE^P$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in WE^{P_I} \Rightarrow \nexists x \in X, z_I(x) > z_I(\bar{x}) \Rightarrow \nexists x \in X, z(x) > z(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} \in WE^P$.

■

Definición 3.3.2 ([GalLb77], Definition 2.2) Sea $r \in \{1, \dots, k\}$. El objetivo $z_r(x)$ se dice (débilmente) redundante¹ en P si, y sólo si, $E^P = E^{P_{\bar{r}}}$ ($WE^P = WE^{P_{\bar{r}}}$). En caso contrario, el objetivo se dice que es (débilmente) irredundante².

Supondremos, para no trivializar el concepto recién introducido, que $z_r(x)$ no es idénticamente constante.

En función de la definición anterior es claro que, si mediante algún procedimiento, llegamos al convencimiento de que el objetivo z_r es redundante debemos, en aras del ahorro del esfuerzo computacional y la simplificación del problema de decisión, eliminarlo del modelo. Sin embargo, y como regla general, las funciones objetivo identificadas como redundantes según la definición anterior son dependientes de la secuencia de eliminación seguida, debiéndose desecharse una a una en pasos sucesivos pues, eliminar una de ellas, puede convertir otras funciones objetivo redundantes, en irredundantes.

Para hacer un tratamiento lo más general posible consideraremos simultáneamente un bloque de funciones objetivo. Así, si $E^P = E^{P_I}$ diremos

¹ También son utilizables los adjetivos derivado, no esencial, superfluo, ...

² Fundamental, esencial, ...

que $z_i(x)$ es redundante en P y que $z_l(x)$ es una representación (válida) de $z(x)$.

La identificación de objetivos redundantes en un LVP es una cuestión mucho más difícil de tratar que la determinación de la eficiencia completa del problema, pues mientras que en esta última se compara E^P con X (poliedro cerrado y convexo), en la primera se compara E^P con E^{P_i} (en general, no convexo y sin descripción algebraica conocida a priori).

Definición 3.3.3 Dada una representación $z_l(x)$ de $z(x)$ para el problema P , se define su orden como el cardinal de I .

Definición 3.3.4 $z_l(x)$ es una representación no redundante o minimal de $z(x)$ para el problema P si, y sólo si, i) $E^P = E^{P_l}$ y ii) P_l no tiene objetivos redundantes.

Nótese que para un mismo problema P pueden haber múltiples representaciones no redundantes de $z(x)$ y sus órdenes no tienen porqué ser coincidentes. Efectivamente:

Ejemplo 3.3.5 Consideremos el problema:

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2, x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

cuya región factible y cono de preferencias se ilustra en la Figura 3.2. Se observa sin dificultad que existen dos representaciones no redundantes distintas para $z(x)$, las cuales vienen dadas por: $\{z_1, z_5, z_6\}$ y $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, siendo sus órdenes 3 y 4, respectivamente. ●

El ejemplo anterior evidencia que el orden de una representación no redundante de $z(x)$ para el problema P es altamente dependiente de la secuencia de objetivos redundantes identificados (eliminaciones parciales seguidas).

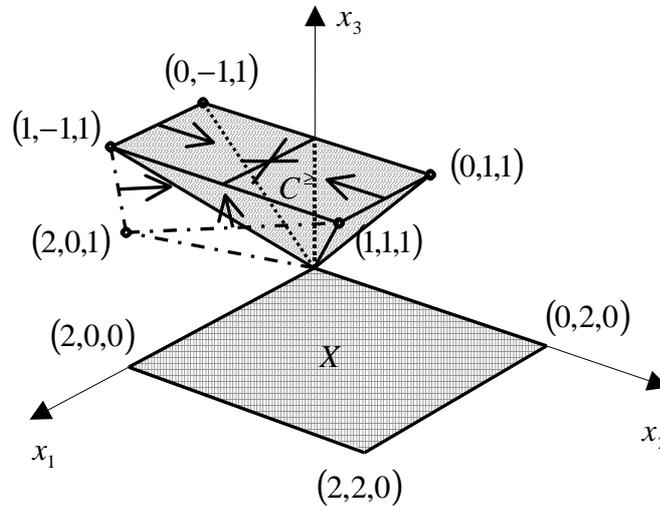


Figura 3.2

Definición 3.3.6 Al número mínimo de objetivos no redundantes de un problema P le denominaremos índice vectorial de P (o, simplemente, índice de P) y lo denotaremos por $\rho(P)$.

Para el problema del Ejemplo 3.3.5, $\rho(P)=3$. En general, determinar el índice vectorial de P es algo bastante complejo (no sólo depende de $z(x)$, sino también de X e, incluso, de la secuencia de objetivos redundantes identificados).

Definición 3.3.7 Una representación de $z(x)$ para el problema P se dice óptima si su orden coincide con $\rho(P)$.

En el Ejemplo 3.3.5, $\{z_1, z_5, z_6\}$ es una representación óptima de $z(x)$. Cuando el LVP a resolver tiene un número de objetivos coincidente con su índice vectorial, el espacio objetivo es de la menor dimensión posible. Evidentemente, lo deseable es tener el problema formulado en términos de una representación óptima. Lamentablemente, esto es mucho más difícil de hacer que de decir.

Los siguientes resultados enunciados a continuación caracterizan los objetivos redundantes en P . Sin embargo, ninguno de ellos resulta ser demasiado útil en la práctica.

Teorema 3.3.8 $z_{\bar{r}}(x)$ es redundante en P si, y sólo si, $\forall \bar{x} \in X$, los sistemas:

$$z(x) \geq z(\bar{x}), x \in X \quad (3.15)$$

y

$$z_l(x) \geq z_l(\bar{x}), x \in X \quad (3.16)$$

son simultáneamente compatibles o incompatibles.

Demostración. Directa teniendo en cuenta la definición de solución eficiente y que $z_{\bar{r}}(x)$ es redundante en $P \Leftrightarrow E^P = E^{P_l}$.

■

Teorema 3.3.9 ([GalLb77], Theorem 2.4) $z_{\bar{r}}(x)$ es redundante en P si, y sólo si, i) $\forall x \in E^P, \exists \omega \in R_{++}^{|\bar{r}|}, x \in S_{(P)_\omega}$, ii) $\forall x \in E^{P_l}, \exists \lambda \in R_{++}^k, x \in S_{P_\lambda}$.

Teorema 3.3.10 $E^P \subseteq E^{P_l}$ si, y sólo si, el sistema:

$$z_l(y) \geq z_l(x), y \in X, x \in E^P \quad (3.17)$$

no tiene solución.

Teorema 3.3.11 $E^{P_l} \subseteq E^P$ si, y sólo si, el sistema:

$$z(y) \geq z(x), y \in X, x \in E^{P_l} \quad (3.18)$$

no tiene solución.

El problema que presentan los sistemas (3.17) y (3.18) es que no se pueden expresar como sistemas de desigualdades lineales, dado que los conjuntos de soluciones eficientes, en general, no son convexos.

En este punto nos vemos obligados a introducir más notación. Convendremos en que:

C_l representa las filas de C correspondientes a los índices de l .

C^{\geq} y C_l^{\geq} denotan los conos de preferencia de P y P_l , respectivamente.

$D_{\bar{x}}$ y $D_{\bar{x}}^l$ indican los conjuntos de dominación de $\bar{x} \in X$ para P y P_l , respectivamente.

Teorema 3.3.12 $z_{\bar{r}}(x)$ es redundante en P si, y sólo si, i) $\forall x \in E^P$,

$D_x^l \cap X = \{x\}$, ii) $\forall x \in E^{P_l}, D_x \cap X = \{x\}$.

En función del teorema anterior y dado que $D_x = x + C^{\geq}$, es claro que una condición suficiente para que $E^P = E^{P_i}$ es que ocurra que $C^{\geq} = C_I^{\geq}$. Sin embargo, esta condición, en general, no es necesaria, es decir, $C_{\bar{I}}x$ puede ser redundante en P y, sin embargo, $C^{\geq} \neq C_I^{\geq}$. Efectivamente, en el Ejemplo 3.3.5, $z_3(x)$ es redundante y $C^{\geq} \neq C_I^{\geq}$.

La idea que acabamos de enunciar nos permitirá obtener un procedimiento para identificar objetivos redundantes. Primero necesitaremos algunos resultados preliminares. Sea $r \in \bar{I}$.

Definición 3.3.13 c_r es una combinación cónica de las filas de C_I si, y sólo si, $\exists u \in R_+^{|\bar{I}|}$ tal que $c_r^t = u^t C_I$.

Teorema 3.3.14 c_r es una combinación cónica de las filas de C_I si, y sólo si, el sistema:

$$c_r^t x > 0, \quad C_I x \leq 0, \quad (3.19)$$

no tiene solución en R^n .

Demostración. c_r es una combinación cónica de $C_I \Leftrightarrow$ el sistema $c_r^t = u^t C_I$ tiene solución en $R_+^{|\bar{I}|}$. Ahora, aplicando el teorema de la alternativa de Farkas ([Mn69], p. 34) \Leftrightarrow el sistema (3.19) no tiene solución en R^n . ■

El siguiente resultado constituye un método eficaz para comprobar si c_r es una combinación cónica de las filas de C_I .

Teorema 3.3.15 c_r es una combinación cónica de las filas de C_I si, y sólo si, el programa lineal escalar:

$$\max \{c_r^t x / C_I x \leq 0\} \quad (3.20)$$

es acotado.

Demostración. Basta tener en cuenta el Teorema 3.3.14. ■

Observaciones:

- (i) El programa (3.20) siempre es factible. Efectivamente, se puede considerar como solución factible básica inicial la que se obtiene al considerar las variables de holgura como básicas.
- (ii) Si el problema (3.20) es acotado, el valor objetivo óptimo ha de ser, necesariamente, 0. Efectivamente, si suponemos que $\exists \bar{x} \in R^n$ tal que $c_r^t \bar{x} > 0$ y $C_I \bar{x} \leq 0$, entonces también es solución factible cualquier $\alpha \bar{x}$ con $\alpha \in R_{++}$. Ahora, tomando α todo lo grande que queramos,

podemos aumentar arbitrariamente el valor de la función objetivo, en contradicción con que el problema sea acotado.

- (iii) Si al resolver el problema (3.20), en alguna iteración el valor de la función objetivo se hace positivo, podemos concluir que el problema es no acotado.
- (iv) El problema es altamente degenerado, lo cual, muy probablemente, afectará de manera adversa a la resolución numérica del mismo.

Corolario 3.3.16 c_r no es una combinación cónica de las filas de C_I si, y sólo si, el programa (3.20) es no acotado.

Demostración. Basta tener en cuenta la discusión que sigue al Teorema 3.3.15. ■

Definición 3.3.17 $C_{\bar{I}}$ es una combinación cónica de C_I si, y sólo si, cada fila de $C_{\bar{I}}$ es una combinación cónica de C_I .

Es claro que $C_{\bar{I}}$ es una combinación cónica de C_I si, y sólo si, $\exists U \in R_+^{(k-|\bar{I}|) \times |\bar{I}|}$ tal que $C_{\bar{I}} = UC_I$

Teorema 3.3.18 Si $C_{\bar{I}}$ es una combinación cónica de las filas de C_I entonces $C^{\geq} = C_I^{\geq}$.

Demostración. Sea $x \in R^n$, $x \neq 0$.

“ \subseteq ”

Si $x \in C^{\geq} \Rightarrow Cx \geq 0$. Evidentemente, sólo puede ocurrir uno de los siguientes dos casos: i) $C_I x \geq 0 \Rightarrow x \in C_I^{\geq}$, o bien, ii) $\exists r \in \bar{I}$, $C_I x = 0$, $c_r^t x > 0$. Ahora bien, como $C_{\bar{I}}$ es una combinación cónica de $C_I \Rightarrow \exists u \in R_+^{|\bar{I}|}$, $c_r^t = u^t C_I \Rightarrow c_r^t x = u^t C_I x = 0$ #. Luego este segundo caso no se puede dar.

“ \supseteq ”

$x \in C_I^{\geq} \Rightarrow C_I x \geq 0$. Como además $\exists U \in R_+^{(k-|\bar{I}|) \times |\bar{I}|}$, $C_{\bar{I}} = UC_I \Rightarrow C_{\bar{I}} x = UC_I x \geq 0 \Rightarrow Cx \geq 0 \Rightarrow x \in C^{\geq}$. ■

Ahora estamos condiciones de dar condiciones suficientes para determinar objetivos redundantes.

Corolario 3.3.19 ([GalLb77], Theorem 2.3) Si c_r es una combinación cónica de C_I entonces $c_r^t x$ es redundante en P .

Corolario 3.3.20 Si el programa (3.20) es acotado entonces $c_r^t x$ es redundante en P .

Corolario 3.3.21 ([GalLb77], Theorem 2.11) *Si las filas de C_1 generan el cono criterio $V(C)$ entonces los objetivos $C_{\bar{r}}x$ son redundantes en P .*

Lo interesante, evidentemente, es tener en C_1 un sistema generador minimal de $V(C)$, pues los generadores no esenciales del cono criterio se corresponden con objetivos redundantes al ser combinaciones cónicas de los generadores esenciales. Este razonamiento da pie a una heurística muy sencilla, enunciada por Gal y Leberling ([GalLb77], p. 179-180), consistente en determinar el sistema generador minimal del cono criterio $V(C)$.

No obstante, debemos realizar una serie de apreciaciones:

- (i) No se puede garantizar que la representación de $z(x)$ obtenida con una heurística como la anterior sea óptima. Ni siquiera, no redundante. El número mínimo de generadores de $V(C)$ sólo constituye, en general, una aproximación a $\rho(P)$ y, que sepamos, no existe ninguna estimación sobre la bondad de la misma.
- (ii) Para el buen funcionamiento de la heurística es fundamental contar con un algoritmo eficaz para encontrar el sistema generador minimal de un cono poliédrico (es decir, finitamente generado). El procedimiento propuesto por Gal y Leberling para realizar este paso solo se esquematiza rudimentariamente, sin entrar en detalles algorítmicos de ningún tipo.

Como creemos que el cálculo del sistema generador minimal de un cono poliédrico no es, a priori, una tarea trivial, a continuación presentamos un algoritmo nuevo y con marcado carácter práctico, para resolver tal problema. Al finalizar el procedimiento, I almacenará los índices correspondientes a las filas de C que constituyen el sistema generador minimal del cono criterio.

Algoritmo MSS (Minimal Spanning System)

Paso 0. (Inicialización)

Hacer $I = \{1, \dots, k\}$ y $J = \{1, \dots, k\}$.

Paso 1. (Progresión, exploración y registro)

Seleccionar $r \in J$. Hacer $J = J - \{r\}$.

Resolver $Q' \equiv \max \{c_r^t x / C_{I-\{r\}} x \leq 0\}$.

Si Q' es acotado hacer $I = I - \{r\}$ (c_r es un generador no esencial y, por tanto, se puede suprimir).

Paso 2. (Terminación)

Si $J = \emptyset$, STOP. En otro caso, ir al paso 1.

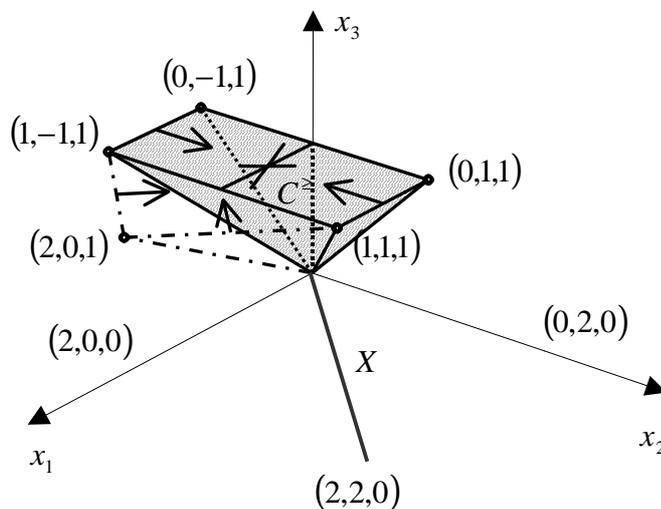


Figura 3.3

Observaciones:

- (i) El algoritmo es válido (Teorema 3.3.15).
- (ii) El número de iteraciones realizada por el algoritmo es k .
- (iii) La complejidad del algoritmo es claramente polinomial.

Ejemplo 3.3.22 Consideremos el siguiente problema:

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_3 \leq 2, x_1 - x_2 \geq 0, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

En la Figura 3.3 se observa la región factible (el segmento que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $(2, 2, 0)$) y el cono de preferencias $C^>$. Claramente, el problema es completamente eficiente. Cuando se calcula el sistema generador minimal del cono criterio, utilizando el algoritmo MSS con selección de objetivos

secuencial, se detectan como redundantes las funciones objetivo z_5 y z_6 . Efectivamente $z_5 = z_3 + z_4$ y $z_6 = z_2 + z_3$. El orden de la representación obtenida de $z(x)$ es 4 y, sin embargo, $\rho(P) = 2$, como se puede comprobar gráficamente sin excesiva dificultad. ●

A continuación veremos cómo se puede mejorar sensiblemente la eficacia del procedimiento MSS en orden a detectar objetivos redundantes.

Un primer refinamiento consiste en realizar a priori un preprocesado de la región factible, con el objeto de, entre otras cosas, poder fijar el mayor número de variables posibles. Entonces, las columnas de C asociadas a variables fijas, se pueden descartar en el análisis de objetivos redundantes que se haga a continuación (Proposición 1.6.15, ii)). El resultado inmediato es que ahora el cono criterio está contenido en un espacio de menor dimensión, lo cual conlleva dos ventajas fundamentales: por una parte se requiere un menor esfuerzo computacional en la identificación de objetivos redundantes, y por otra, es muy posible que se detecten más de ellos utilizando métodos como MSS, basados en el cálculo del sistema generador minimal del cono criterio.

Ejemplo 3.3.23 *Un posible preprocesado aplicable a la descripción de la región factible del Ejemplo 3.3.22 podría consistir en:*

Restando a la segunda restricción la primera $\Rightarrow x_2 \leq 2$. Se tiene una cota superior para x_2 .

Restando a la tercera restricción la primera $\Rightarrow x_3 \leq 0$. Como $x_3 \geq 0 \Rightarrow$ Se fija x_3 a 0.

Al fijar x_3 a 0, la segunda restricción se puede reemplazar por una cota superior sobre $x_1 \Rightarrow x_1 \leq 2$.

Luego, $X = \{x \in R^3 / x_1 - x_2 = 0, 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2, x_3 = 0\}$.

Como $x_3 = 0$, podemos eliminar la tercera columna de C , obteniéndose la matriz criterio preprocesada:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La representación gráfica de estos vectores se da en la Figura 3.4.

Ahora, aplicando el algoritmo MSS, se obtiene que z_2 , z_3 y z_4 son redundantes. La representación de $z(x)$ obtenida viene dada por $\{z_1, z_5, z_6\}$.

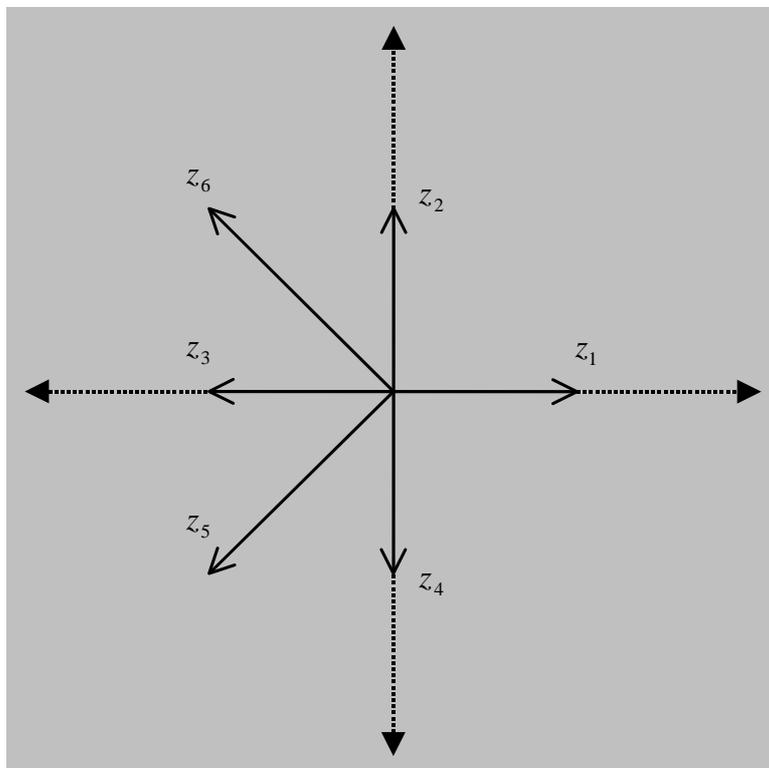


Figura 3.4

Siguiendo con nuestra intención de descartar a priori el mayor número posible de columnas de la matriz criterio, podemos recurrir a la siguiente idea: Si conocemos una solución básica (aunque no sea factible), asociada a una base B de A , es posible trabajar con la matriz de costos reducidos R en lugar de C (Proposición 1.6.15, i)). Esto conlleva una nueva disminución del tamaño de la matriz criterio considerada, pasando de ser de dimensión $k \times n$ a $k \times (n - m)$.

Ejemplo 3.3.24 Consideremos el problema dado por la siguiente tabla:

x_1	x_2	x_4	x_5	r.h.s.
1	-1	0	0	0
1	0	1	0	2
0	1	0	1	2
-1	0	0	0	0
0	-1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
1	-11	0	0	0

Es claro que la tabla anterior corresponde al problema originalmente enunciado en el Ejemplo 3.3.22, después del preprocesado de la región factible realizado en el Ejemplo 3.3.23.

Si tomamos como base la dada por $J_B = \{1, 4, 5\}$, tenemos:

v.b.	x_1	x_2	x_4	x_5	r.h.s.
x_1	1	-1	0	0	0
x_4	1	0	1	0	2
x_5	0	1	0	1	2
	0	-1	0	0	0
	0	-1	0	0	0
	0	1	0	0	0
	0	1	0	0	0
	0	1	0	0	0
	0	2	0	0	0

Así $R = C_B B^{-1} N - C_N = (-1, -1, 1, 1, 2, 0)^T$.

Ahora aparecen como sistemas generadores minimales del cono criterio los siguientes: $\{z_1, z_3\}$, $\{z_1, z_4\}$, $\{z_1, z_5\}$, $\{z_2, z_3\}$, $\{z_2, z_4\}$ y $\{z_2, z_5\}$, los cuales son, a su vez, representaciones óptimas de $z(x)$ para el problema P .

Obsérvese que ahora el número mínimo de generadores del cono criterio preprocesado y reducido coincide con $\rho(P)$.

●

3.4 Dualidad

La programación lineal escalar presenta una elegante simetría lograda a través del concepto de dualidad. Lamentablemente, y a pesar de los múltiples intentos realizados, no sucede lo mismo para el caso vectorial. En este apartado estudiaremos y relacionaremos entre sí algunas de las definiciones más importantes de dualidad en programación vectorial sugeridas a lo largo del tiempo.

3.4.1 Concepto de Dualidad de Gale, Kuhn y Tucker

Albert Tucker y sus alumnos David Gale y Harold Kuhn publicaron, en 1951, un artículo sobresaliente ([GKT51]) en el que presentaron, de manera rigurosa, una teoría de dualidad generalizada para problemas de programación matricial lineal. Aunque, según parece ([Kh91], p. 85), este trabajo estuvo motivado por una nota privada de von Neumann, en la que se formulaba el problema dual de un programa lineal escalar, Gale, Kuhn y Tucker fueron los primeros en desarrollar y dar a conocer tales resultados.

Dada la importancia histórica y trascendencia de las conclusiones expuestas en [GKT51], es nuestra intención analizar en profundidad la

definición de dualidad matricial de Gale-Kuhn-Tucker para, a continuación, particularizar al caso vectorial, ciertos resultados que, o bien son de especial interés o bien no constituyen un mero ejercicio académico de reducción de dimensionalidad. También veremos como se relacionan entre sí las soluciones eficientes de los problemas matriciales con las de los problemas vectoriales.

Dado $X \subseteq R^{k \times r}$ región factible, $D \in X$ se dice *eficiente* si, y sólo si, $\nexists E \in X, E \geq D$. Cuando $k > 1$ y $r = 1$ este concepto coincide con el dado para el caso vectorial.

Sean $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{m \times r}$ y $C \in R^{k \times n}$, matrices de coeficientes (fijas). Se define ([GKT51], p. 319) el *problema primal matricial*, al que denotaremos por P^{GKT-M} , como:

$$\max \{ D / Ax = By, Cx \geq Dy, x \in R_+^n, y \in R_{++}^r \} \quad (3.21)$$

y el *problema dual matricial*, denotado por D^{GKT-M} , como:

$$\min \{ D / u^t A \geq \lambda^t C, u^t B \leq \lambda^t D, u \in R^m, \lambda \in R_{++}^k \} \quad (3.22)$$

Cuando consideramos el caso especial $k > 1$, $r = 1$, podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $y = 1$. Ahora, llamando $b = B \in R^m$ y $\alpha = D \in R^k$, los problemas matriciales (3.21) y (3.22) se convierten, respectivamente, en los siguientes problemas vectoriales:

$$\max \{ \alpha / Ax = b, Cx \geq \alpha, x \in R_+^n \} \quad (3.23)$$

y en:

$$\min \{ \alpha / u^t A \geq \lambda^t C, u^t b \leq \lambda^t \alpha, u \in R^m, \lambda \in R_{++}^k \} \quad (3.24)$$

A los problemas (3.23) y (3.24) los denotaremos, respectivamente, por P^{GKT-V} y D^{GKT-V} .

Es claro que el problema (3.23) se reduce a:

$$\max \{ Cx / Ax = b, x \in R_+^n \} \quad (3.25)$$

con lo cual el problema P^{GKT-V} es equivalente a un LVP en forma estándar. En cuanto al problema D^{GKT-V} , en la sección (1.9) hemos probado que (3.24) es la formulación lineal del problema que surge en el cálculo de los supremos eficientes de (3.25), verificándose así que $E^{D^{GKT-V}} = S(P)$. Tenemos de esta manera una elegante interpretación geométrica de la definición del problema dual vectorial de Gale-Kuhn-Tucker.

Por último, si el caso vectorial lo particularizamos para $k = 1$, se puede tomar, sin pérdida de generalidad, $\lambda = 1$ y, llamando $c = C \in R^n$, los problemas que se obtienen coinciden, respectivamente, con las definiciones clásicas (escalares) de los problemas primal:

$$\max\{c^t x / Ax = b, x \in R_+^n\} \quad (3.26)$$

y dual:

$$\min\{u^t b / u^t A \geq c^t\} \quad (3.27)$$

para el caso escalar ([Mr83]).

Para simplificar la notación sean, por el momento, $P \equiv P^{GKT-M}$ y $D \equiv D^{GKT-M}$. Asimismo, denotaremos las regiones factibles de ambos problemas por X^P y X^D , respectivamente.

En primer lugar procederemos a caracterizar las soluciones eficientes de los problemas primal y dual.

Teorema 3.4.1 ([GKT51], Theorem 1) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in E^P$ si, y sólo si, i) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in X^P$, ii) el sistema $Ax = By$, $Cx \geq \bar{D}y$, $x \in R_+^n$, $y \in R_+^r$, no tiene solución.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \notin E^P \Rightarrow \exists (\hat{x}, \hat{y}, \hat{D}) \in X^P$, $\hat{D} \geq \bar{D} \Rightarrow C\hat{x} \geq \hat{D}\hat{y} \geq \bar{D}\hat{y}$, $A\hat{x} = B\hat{y}$, $\hat{x} \in R_+^n$, $\hat{y} \in R_+^r \Rightarrow$ absurdo con ii).

“ \Rightarrow ”

Por hipótesis $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in E^P$. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \hat{x} \in R_+^n$, $\exists \hat{y} \in R_+^r$, $C\hat{x} \geq \bar{D}\hat{y}$, $A\hat{x} = B\hat{y}$. Sean $\tilde{x} = \bar{x} + \hat{x}$, $\tilde{y} = \bar{y} + \hat{y} \Rightarrow C\tilde{x} \geq \bar{D}\tilde{y}$, $A\tilde{x} = B\tilde{y}$, $\tilde{x} \in R_+^n$, $\tilde{y} \in R_+^r \Rightarrow \exists l \in \{1, \dots, k\}$, $c_l^t \tilde{x} > \bar{d}_l^t \tilde{y} \Rightarrow$ Cualquier elemento de \bar{d}_l se puede incrementar ligeramente manteniéndose la desigualdad anterior. Sea \tilde{D} una matriz obtenida a partir de \bar{D} cambiando la fila l por otra ligeramente incrementada y tal que $C\tilde{x} \geq \tilde{D}\tilde{y} \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{D}) \in X^P$, $\tilde{D} \geq \bar{D} \Rightarrow \#$. ■

Teorema 3.4.2 ([GKT51], Theorem 1) $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in E^D$ si, y sólo si i) $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in X^D$, ii) el sistema $u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t B \leq \lambda^t \bar{D}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, no tiene solución.

Demostración. Análoga a la demostración anterior. ■

A partir de los resultados anteriores podemos obtener las siguientes propiedades:

Corolario 3.4.3 i) Si $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in E^P$ entonces $C\bar{x} = \bar{D}\bar{y}$.

ii) Si $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in E^D$ entonces $\bar{u}^t B = \bar{\lambda}^t \bar{D}$.

A continuación daremos dos teoremas de la alternativa que nos serán de bastante utilidad en breve.

Teorema 3.4.4 *El sistema $u^t B \leq 0$, $u^t A \geq 0$, $u \in R^m$, no tiene solución si, y sólo si, el sistema $Ax = By$, $x \in R_+^n$, $y \in R_{++}^r$ tiene solución.*

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Sean $\bar{x} \in R_+^n$, $\bar{y} \in R_{++}^r$, $A\bar{x} = B\bar{y}$. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{u} \in R^m$, $\bar{u}^t B \leq 0$, $\bar{u}^t A \geq 0 \Rightarrow \bar{u}^t Ax \geq 0 > \bar{u}^t By$, $\forall x \in R_+^n$, $\forall y \in R_{++}^r$. Ahora bien, como $\bar{u}^t A\bar{x} = \bar{u}^t B\bar{y}$ pues $A\bar{x} = B\bar{y} \Rightarrow \#$.

“ \Rightarrow ”

Sea $j \in \{1, \dots, r\}$, b^j columna j de B . Por hipótesis, $u^t B \leq 0$, $u^t A \geq 0$, $u \in R^m$, no tiene solución $\Rightarrow u^t b^j < 0$, $u^t B \leq 0$, $u^t A \geq 0$, $u \in R^m$ no tiene solución, $\forall j \in \{1, \dots, r\}$. Aplicando el lema de Farkas ([Mn69], p. 34) $\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x^j \\ y^j \end{pmatrix} \in R_+^{n+r}$, $(A, -B) \begin{pmatrix} x^j \\ y^j \end{pmatrix} = b^j$, $\forall j \in \{1, \dots, r\} \Rightarrow A \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^r x^j \\ \sum_{j=1}^r y^j \end{pmatrix} - B \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^r y^j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^r b^j$. Llamando $x = \sum_{j=1}^r x^j$, $y = \sum_{j=1}^r y^j \Rightarrow Ax - By = Be \Rightarrow Ax = B(y + e) \Rightarrow Ax = By$, $x \in R_+^n$, $y \in R_{++}^r$ tiene solución. ■

Corolario 3.4.5 ([GIKT51], Lemma 3) *El sistema $u^t B \leq 0$, $u^t A \geq 0$, $u \in R_+^m$, no tiene solución si, y sólo si, el sistema $Ax \leq By$, $x \in R_+^n$, $y \in R_{++}^r$ tiene solución.*

Demostración. Consecuencia directa del Teorema 3.4.4. ■

Ahora podemos caracterizar la factibilidad de los problemas primal y dual de forma adecuada. Efectivamente:

Teorema 3.4.6 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in X^P$ si, y sólo si, el sistema $u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t B \leq \lambda^t \bar{D}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, no tiene solución.

Demostración. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in X^P \Leftrightarrow A\bar{x} = B\bar{y}$, $C\bar{x} \geq \bar{D}\bar{y}$, $\bar{x} \in R_+^n$, $\bar{y} \in R_{++}^r \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -C \\ A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -\bar{D} \\ B \\ -B \end{pmatrix} y, \quad x \in R_+^n, \quad y \in R_{++}^r, \quad \text{tiene solución.} \quad \text{Aplicando el Corolario 3.4.5}$$

$$\Leftrightarrow u^t \begin{pmatrix} -\bar{D} \\ B \\ -B \end{pmatrix} \leq 0, \quad u^t \begin{pmatrix} -C \\ A \\ -A \end{pmatrix} \geq 0, \quad u \in R^m, \quad \text{no tiene solución} \Leftrightarrow u^t A \geq \lambda^t C,$$

$u^t B \leq \lambda^t \bar{D}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, no tiene solución. ■

Teorema 3.4.7 $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in X^D$ si, y sólo si, el sistema $Ax = By$, $Cx \geq \bar{D}y$, $x \in R_+^n$, $y \in R_+^r$, no tiene solución.

Demostración. $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in X^D \Leftrightarrow \bar{u}^t A \geq \bar{\lambda}^t C$, $\bar{u}^t B \leq \bar{\lambda}^t \bar{D}$, $\bar{u} \in R^m$, $\bar{\lambda} \in R_{++}^k$
 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -A^t & A^t \\ B^t & -B^t \end{pmatrix} u \leq \begin{pmatrix} -C^t \\ \bar{D}^t \end{pmatrix} \lambda$, $u \in R_+^m$, $\lambda \in R_{++}^k$, tiene solución. Aplicando el

Corolario 3.4.5 $\Leftrightarrow x^t \begin{pmatrix} -C^t \\ \bar{D}^t \end{pmatrix} \leq 0$, $x^t \begin{pmatrix} -A^t & A^t \\ B^t & -B^t \end{pmatrix} \geq 0$, $x \in R_+^{m+r}$, no tiene solución

$\Leftrightarrow (-C, \bar{D}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq 0$, $\begin{pmatrix} -A & B \\ A & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$, $x \in R_+^n$, $y \in R_+^r$, no tiene solución \Leftrightarrow
 $Ax = By$, $Cx \geq \bar{D}y$, $x \in R_+^n$, $y \in R_+^r$, no tiene solución. ■

La siguiente propiedad es importante pues indica, entre otras cosas, que si el problema primal es acotado entonces también lo es el dual y viceversa.

Teorema 3.4.8 ([GIKT51], Theorem 2) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in E^P$ si, y sólo si, $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in E^D$

Demostración. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in E^P$. Por el Teorema 3.4.1 \Leftrightarrow i) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in X^P$, ii) $Ax = By$, $Cx \geq \bar{D}y$, $x \in R_+^n$, $y \in R_+^r$, no tiene solución. Utilizando el Teorema 3.4.6 y el Teorema 3.4.7 \Leftrightarrow i) $u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t B \leq \lambda^t \bar{D}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, no tiene solución, ii) $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in X^D$. Ahora, aplicando el Teorema 3.4.2 $\Leftrightarrow (\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in E^D$. ■

Corolario 3.4.9 $E^P \neq \emptyset$ si, y sólo si, $E^D \neq \emptyset$.

Vamos a probar otra propiedad relevante en dualidad y enunciada de la siguiente manera: P (D) es acotado si, y sólo si, P y D son factibles.

Teorema 3.4.10 ([GIKT51], Theorem 3) $E^P \neq \emptyset$ ($E^D \neq \emptyset$) si, y sólo si, $\exists \bar{D} \in R^{k \times r}$ tal que los siguientes dos sistemas tienen solución: i) $Ax = By$, $Cx \geq \bar{D}y$, $x \in R_+^n$, $y \in R_+^r$, ii) $u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t B \leq \lambda^t \bar{D}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_{++}^k$.

Demostración. Sean $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D})$, $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D})$ soluciones de i) y ii), respectivamente. Por definición, \Leftrightarrow i) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in X^P$, ii) $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in X^D$. Aplicando el Teorema 3.4.7 \Leftrightarrow i) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in X^P$, ii) $Ax = By$, $Cx \geq \bar{D}y$,

$x \in R_+^n$, $y \in R_+^r$, no tiene solución. Por el Teorema 3.4.1 $\Leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in E^P$. ■

Corolario 3.4.11 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in E^P$ $((\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in E^D)$ si, y sólo si, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in X^P$, $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in X^D$.

Corolario 3.4.12 $E^P \neq \emptyset$ ($E^D \neq \emptyset$) si, y sólo si, $X^P \neq \emptyset$, $X^D \neq \emptyset$.

Teorema 3.4.13 ([GlKT51], Theorem 4) $E^P \neq \emptyset$ ($E^D \neq \emptyset$) si, y sólo si, los siguientes sistemas tienen solución: i) $Ax = By$, $x \in R_+^n$, $y \in R_+^r$, ii) $u^t A \geq \lambda^t C$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Inmediata por el Teorema 3.4.10.

“ \Leftarrow ”

Sean $\bar{x} \in R_+^n$, $\bar{y} \in R_+^r$, $\bar{u} \in R^m$, $\bar{\lambda} \in R_+^k$ tales que $A\bar{x} = B\bar{y}$ y $\bar{u}^t A \geq \bar{\lambda}^t C$. Sean también $b = B\bar{y}$, $c^t = \bar{\lambda}^t C \Rightarrow$ iii) $Ax = b$, $x \in R_+^n$ y iv) $u^t A \geq c^t$, $u \in R^m$ tienen solución. Por dualidad escalar, $\Rightarrow \exists \hat{x} \in R_+^n$, $A\hat{x} = b$, $\exists \hat{u} \in R^m$, $\hat{u}^t A \geq c^t$, $c^t \hat{x} = \hat{u}^t b \Rightarrow \bar{\lambda}^t C \hat{x} = \hat{u}^t B \bar{y}$. Sea $\bar{D} = \frac{C\hat{x}\hat{u}^t B}{\hat{u}^t b}$ o $\frac{e\hat{u}^t B}{\bar{\lambda}^t e} + \frac{C\hat{x}e^t}{e^t \bar{y}}$ según sea $\hat{u}^t b \neq 0$ o $\hat{u}^t b = 0$, respectivamente. En cualquier caso, $C\hat{x} = \bar{D}\bar{y}$, $\hat{u}^t B = \bar{\lambda}^t \bar{D}$. Ahora, aplicando el Teorema 3.4.10 $\Rightarrow E^P \neq \emptyset$ ($E^D \neq \emptyset$). ■

Corolario 3.4.14 ([GlKT51], Theorem 5) $E^P \neq \emptyset$ si, y sólo si, i) $u^t B \leq 0$, $u^t A \geq 0$, $u \in R^m$, no tiene solución, ii) $u^t A \geq \lambda^t C$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, tiene solución.

Demostración. Inmediata aplicando el Teorema 3.4.4 a la condición i) del Teorema 3.4.13. ■

Teorema 3.4.15 El sistema $u^t A \geq \lambda^t C$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$ tiene solución si, y sólo si, el sistema $Cd \geq 0$, $Ad = 0$, $d \in R_+^n$, no tiene solución.

Demostración. El sistema $u^t A \geq \lambda^t C$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$ tiene solución $\Leftrightarrow -A^t u \leq -C^t \lambda$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, tiene solución $\Leftrightarrow (-A^t, A^t)u \leq -C^t \lambda$, $u \in R_+^m$, $\lambda \in R_+^k$, tiene solución. Ahora aplicando el Corolario 3.4.5 $\Leftrightarrow d^t(-C^t) \leq 0$, $d^t(-A^t, A^t) \geq 0$, $d \in R_+^n$ no tiene solución \Leftrightarrow el sistema $Cd \geq 0$, $Ad = 0$, $d \in R_+^n$, no tiene solución. ■

Corolario 3.4.16 ([GlKT51], Theorem 5) $E^P \neq \emptyset$ si, y sólo si, i) $Ax = By$, $x \in R_+^n$, $y \in R_{++}^r$, tiene solución, ii) $Cd \geq 0$, $Ad = 0$, $d \in R_+^n$, no tiene solución.

Demostración. Por el Teorema 3.4.13, $E^P \neq \emptyset \Leftrightarrow$ Los siguientes sistemas tienen solución: i) $Ax = By$, $x \in R_+^n$, $y \in R_{++}^r$, ii) $u^t A \geq \lambda^t C$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_{++}^k$. Ahora el resultado es directo aplicando a ii) el Teorema 3.4.15. ■

Veamos de que forma se particularizan, para el caso vectorial ($k > 1$, $r = 1$), algunos de los resultados anteriores y que nuevas propiedades se obtienen, al tratar con un problema más sencillo y manejable, por haber reducido la dimensionalidad del mismo.

Para poder desarrollar de forma adecuada la teoría primero daremos una serie de herramientas preliminares.

Teorema 3.4.17 $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in X^{P^{GKT-V}}$ si, y sólo si, $u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t b < \lambda^t \bar{\alpha}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, no tiene solución.

Demostración. $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in X^{P^{GKT-V}} \Leftrightarrow Ax = b$, $Cx \geq \bar{\alpha}$, $x \in R_+^n$, tiene solución $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -\bar{\alpha} \end{pmatrix}$, $\bar{x} \in R_+^n$, $s \in R_+^k$. Aplicando el lema de Farkas

([Mn69], p. 34) $\Leftrightarrow (u^t, \lambda^t) \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & I \end{pmatrix} \geq 0$, $(u^t, \lambda^t) \begin{pmatrix} b \\ -\bar{\alpha} \end{pmatrix} < 0$ no tiene solución $\Leftrightarrow u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t b < \lambda^t \bar{\alpha}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, no tiene solución. ■

El siguiente resultado es claro atendiendo a la definición de solución eficiente.

Teorema 3.4.18 $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in E^{P^{GKT-V}}$ si, y sólo si, i) $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in X^{P^{GKT-V}}$, ii) $Ax = b$, $Cx \geq \bar{\alpha}$, $x \in R_+^n$, no tiene solución.

Como consecuencia tenemos:

Corolario 3.4.19 Si $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in E^{P^{GKT-V}}$ entonces $C\bar{x} = \bar{\alpha}$.

Una caracterización más elaborada para las soluciones eficientes del problema primal sigue a continuación.

Teorema 3.4.20 $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in E^{P^{GKT-V}}$ si, y sólo si, i) $u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t b < \lambda^t \bar{\alpha}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, no tiene solución, ii) $u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t b \leq \lambda^t \bar{\alpha}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_{++}^k$, tiene solución.

Demostración. Sea $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in E^{P^{GKT-v}}$. Aplicando el Teorema 3.4.18 \Leftrightarrow i) $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in X^{P^{GKT-v}}$, ii) $Ax = b$, $Cx \geq \bar{\alpha}$, $x \in R_+^n$ no tiene solución. Ahora, aplicando a i) el Teorema 3.4.17 y utilizando en ii) los teoremas de la alternativa 1.7.1 y 1.7.2 \Leftrightarrow i) $u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t b < \lambda^t \bar{\alpha}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, no tiene solución, ii) $u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t b \leq \lambda^t \bar{\alpha}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_{++}^k$, tiene solución. ■

Para el problema dual tenemos:

Teorema 3.4.21 $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in X^{D^{GKT-v}}$ si, y sólo si, i) $Ax = b$, $Cx \geq \bar{\alpha}$, $x \in R_+^n$, no tiene solución y ii) $Cd \geq 0$, $Ad = 0$, $d \in R_+^n$ no tiene solución.

Demostración. $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in X^{D^{GKT-v}} \Leftrightarrow u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t b \leq \lambda^t \bar{\alpha}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_{++}^k$, tiene solución. Aplicando el Teorema de la alternativa de Tucker ([Mn69], p. 29) $\Leftrightarrow Ax = by$, $Cx \geq \bar{\alpha}y$, $x \in R_+^n$, $y \in R_+$, no tiene solución. Ahora distinguiendo los casos $y > 0$ e $y = 0$, tenemos \Leftrightarrow i) $Ax = b$, $Cx \geq \bar{\alpha}$, $x \in R_+^n$, no tiene solución y ii) $Cd \geq 0$, $Ad = 0$, $d \in R_+^n$ no tiene solución. ■

Corolario 3.4.22 $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in X^{D^{GKT-v}}$ si, y sólo si, i) $Ax = b$, $Cx \geq \bar{\alpha}$, $x \in R_+^n$, no tiene solución y ii) $u^t A \geq \lambda^t C$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_{++}^k$ tiene solución.

Demostración. Directa utilizando el Teorema 3.4.21 y aplicando a ii) el Teorema 3.4.15. ■

Teorema 3.4.23 $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-v}}$ si, y sólo si, i) $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in X^{D^{GKT-v}}$, ii) el sistema $u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t b < \lambda^t \bar{\alpha}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, no tiene solución.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \notin E^{D^{GKT-v}} \Rightarrow \exists (\hat{u}, \hat{\lambda}, \hat{\alpha}) \in X^{D^{GKT-v}}$, $\hat{\alpha} \leq \bar{\alpha} \Rightarrow \hat{u}^t A \geq \hat{\lambda}^t C$, $\hat{u}^t b \leq \hat{\lambda}^t \hat{\alpha} < \hat{\lambda}^t \bar{\alpha}$, $\hat{u} \in R^m$, $\hat{\lambda} \in R_{++}^k \Rightarrow \#$.

“ \Rightarrow ”

Por hipótesis $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-v}} \Rightarrow (\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in X^{D^{GKT-v}}$. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \hat{u} \in R^m$, $\exists \hat{\lambda} \in R_+^k$, $\hat{u}^t A \geq \hat{\lambda}^t C$, $\hat{u}^t b < \hat{\lambda}^t \bar{\alpha}$. Sean $\tilde{u} = \bar{u} + \hat{u} \in R^m$, $\tilde{\lambda} = \bar{\lambda} + \hat{\lambda} \in R_{++}^k \Rightarrow \tilde{u}^t A \geq \tilde{\lambda}^t C$, $\tilde{u}^t b < \tilde{\lambda}^t \bar{\alpha}$. Evidentemente, cualquier componente de $\bar{\alpha}$ se puede decrementar ligeramente manteniéndose la desigualdad anterior. Sea $\tilde{\alpha}$ un vector obtenido a partir de $\bar{\alpha}$ mediante el procedimiento descrito $\Rightarrow (\tilde{u}, \tilde{\lambda}, \tilde{\alpha}) \in X^{D^{GKT-v}}$, $\tilde{\alpha} \leq \bar{\alpha} \Rightarrow \#$. ■

Las siguientes propiedades nos serán de utilidad posteriormente:

Teorema 3.4.24 Si $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-V}}$ entonces $\bar{\lambda}'\bar{\alpha} = \bar{u}'b$.

Demostración. Si $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-V}} \subseteq X^{D^{GKT-V}} \Rightarrow \bar{\lambda}'\bar{\alpha} \geq \bar{u}'b$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{\lambda}'\bar{\alpha} > \bar{u}'b$. Como $\bar{\lambda} \in R_{++}^k$, podemos construir $\hat{\alpha} \leq \bar{\alpha}$ tal que $\bar{\lambda}'\hat{\alpha} = \bar{u}'b \Rightarrow (\bar{u}, \bar{\lambda}, \hat{\alpha}) \in X^{D^{GKT-V}}$, $\hat{\alpha} \leq \bar{\alpha} \Rightarrow (\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \notin E^{D^{GKT-V}} \Rightarrow \#$, luego $\bar{\lambda}'\bar{\alpha} = \bar{u}'b$. ■

Proposición 3.4.25 Si $X^{D^{GKT-V}} \neq \emptyset$ entonces $\exists (\hat{u}, \hat{\lambda}, \hat{\alpha}) \in X^{D^{GKT-V}}$ tal que $\hat{\lambda}'\hat{\alpha} = \hat{u}'b$.

Demostración. Si $X^{D^{GKT-V}} \neq \emptyset \Rightarrow \exists (\hat{u}, \hat{\lambda}, \bar{\alpha}) \in X^{D^{GKT-V}} \Rightarrow \hat{u}'A \geq \hat{\lambda}'C$, $\hat{\lambda}'\bar{\alpha} \geq \hat{u}'b$, $\hat{u} \in R^m$, $\hat{\lambda} \in R_{++}^k$. Si $\hat{\lambda}'\bar{\alpha} = \hat{u}'b$ ya estaría. En otro caso $\Rightarrow \hat{\lambda}'\bar{\alpha} > \hat{u}'b \Rightarrow \exists \hat{\alpha} \in R^k$, $\hat{\alpha} \leq \bar{\alpha}$, $\hat{\lambda}'\hat{\alpha} = \hat{u}'b$. ■

Ahora ya estamos en condiciones de obtener resultados de verdadero interés:

Teorema 3.4.26 $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in E^{P^{GKT-V}}$ si, y sólo si, $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-V}}$.

Demostración. Sea $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in E^{P^{GKT-V}}$. Aplicando el Teorema 3.4.20 \Leftrightarrow i) $u'A \geq \lambda'C$, $u'b < \lambda'\bar{\alpha}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, no tiene solución, ii) $u'A \geq \lambda'C$, $u'b \leq \lambda'\bar{\alpha}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_{++}^k$, tiene solución $(\bar{u}, \bar{\lambda}) \Leftrightarrow$ i) $u'A \geq \lambda'C$, $u'b < \lambda'\bar{\alpha}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, no tiene solución, ii) $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in X^{D^{GKT-V}}$. Por el Teorema 3.4.23 $\Leftrightarrow (\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-V}}$. ■

Corolario 3.4.27 $E^{P^{GKT-V}} \neq \emptyset$ si, y sólo si, $E^{D^{GKT-V}} \neq \emptyset$.

Teorema 3.4.28 $E^{D^{GKT-V}} \neq \emptyset$ ($E^{P^{GKT-V}} \neq \emptyset$) si, y sólo si, $\exists \bar{\alpha} \in R^k$ tal que tienen solución los siguientes dos sistemas: i) $Ax = b$, $Cx \geq \bar{\alpha}$, $x \in R_+^n$, ii) $u'A - \lambda'C \geq 0^t$, $\lambda'\bar{\alpha} \geq u'b$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_{++}^k$.

Demostración. Sean $(\bar{x}, \bar{\alpha})$ y $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha})$ soluciones de i) y ii) respectivamente \Leftrightarrow i) $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in X^{P^{GKT-V}}$, ii) $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in X^{D^{GKT-V}}$. Por el Teorema 3.4.17 \Leftrightarrow i) $u'A \geq \lambda'C$, $u'b < \lambda'\bar{\alpha}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, no tiene solución, ii) $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in X^{D^{GKT-V}}$. Aplicando el Teorema 3.4.23 $\Leftrightarrow (\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-V}}$. ■

Corolario 3.4.29 $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in E^{P^{GKT-V}}$ $((\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-V}})$ si, y sólo si, $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in X^{P^{GKT-V}}$, $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in X^{D^{GKT-V}}$.

Para el caso vectorial, se prueba sin ninguna dificultad que el Teorema 3.4.10 se concreta en:

Teorema 3.4.30 $E^{P^{GKT-V}} \neq \emptyset$ ($E^{D^{GKT-V}} \neq \emptyset$) si, y sólo si, los siguientes sistemas tienen solución: i) $Ax = b$, $x \in R_+^n$, ii) $u^t A \geq \lambda^t C$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_{++}^k$.

Obsérvese que este resultado no es mas que el Teorema 1.7.41.

Para finalizar este subapartado vamos a relacionar entre sí las soluciones eficientes de los problemas matriciales y vectoriales.

Teorema 3.4.31 Sean $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in X^{P^{GKT-M}}$, $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in X^{D^{GKT-M}}$ con $B\bar{y} = b$ y $\bar{D}\bar{y} = \bar{\alpha}$. Entonces $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-V}}$ y $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in E^{P^{GKT-V}}$.

Demostración. Como $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in X^{D^{GKT-M}} \Rightarrow \bar{u}^t A \geq \bar{\lambda}^t C$, $\bar{u}^t B \leq \bar{\lambda}^t \bar{D}$, $\bar{u} \in R^m$, $\bar{\lambda} \in R_{++}^k \Rightarrow \bar{u}^t B\bar{y} \leq \bar{\lambda}^t \bar{D}\bar{y} \Rightarrow \bar{u}^t b \leq \bar{\lambda}^t \bar{\alpha} \Rightarrow (\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in X^{D^{GKT-V}}$. Como también $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in X^{P^{GKT-M}} \Rightarrow A\bar{x} = b$, $C\bar{x} \geq \bar{D}\bar{y} = \bar{\alpha}$, $\bar{x} \in R_+^n \Rightarrow (\bar{x}, \bar{\alpha}) \in X^{P^{GKT-V}}$. Ahora, aplicando el Corolario 3.4.29 se obtiene el resultado buscado. ■

El lema siguiente es ligeramente más general que el enunciado por Rödder ([Rd77], Lemma 1.5) y constituye una elegante y potente herramienta teórica.

Lema 3.4.32 Dados $u \in R^m$, $b \in R^m$, $\lambda \in R_{++}^k$ y $\alpha \in R^k$ vectores fijos. Entonces, el sistema $u^t = \lambda^t U$, $\alpha = Ub$, $U \in R^{k \times m}$ tiene solución si, y sólo si, $\lambda^t \alpha = u^t b$.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Sea $\bar{U} \in R^{k \times m}$ tal que $u^t = \lambda^t \bar{U}$, $\alpha = \bar{U}b \Rightarrow u^t b = \lambda^t \bar{U}b = \lambda^t \alpha$.

“ \Leftarrow ”

Distinguiremos dos casos: i) $u^t b \neq 0$ y ii) $u^t b = 0$.

Caso i) Si $u^t b \neq 0$ definimos $U = \frac{\alpha u^t}{u^t b} \in R^{k \times m} \Rightarrow \lambda^t U = \frac{\lambda^t \alpha u^t}{u^t b} = \frac{u^t b u^t}{u^t b} = u^t$ y

$$Ub = \frac{\alpha u^t b}{u^t b} = \alpha.$$

Caso ii) Si $u^t b = 0 \Rightarrow \lambda^t \alpha = 0$. Como $\lambda \in R_{++}^k \Rightarrow \alpha = 0$. Consideremos $U =$

$$\frac{eu^t}{\lambda^t e} \in R^{k \times m} \Rightarrow \lambda^t U = \frac{\lambda^t eu^t}{\lambda^t e} = u^t, Ub = \frac{eu^t b}{\lambda^t e} = 0 = \alpha.$$

■

Teorema 3.4.33 Si $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-v}}$, $B\bar{y} = b$, $\bar{y} \in R_{++}^r$ entonces $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in E^{D^{GKT-M}}$, donde $\bar{D} = \bar{U}B$ y $\bar{U} \in R^{k \times m}$ es solución de $\bar{u}^t = \bar{\lambda}^t \bar{U}$, $\bar{\alpha} = \bar{U}b$.

Demostración. Si $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-v}}$, por el Teorema 3.4.24 $\Rightarrow \bar{\lambda}^t \bar{\alpha} = \bar{u}^t b$. Teniendo en cuenta el Lema 3.4.32 $\Rightarrow \exists \bar{U} \in R^{k \times m}$, $\bar{u}^t = \bar{\lambda}^t \bar{U}$, $\bar{\alpha} = \bar{U}b$. Tomando $\bar{D} = \bar{U}B \Rightarrow \bar{u}^t B = \bar{\lambda}^t \bar{U}B = \bar{\lambda}^t \bar{D} \Rightarrow (\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in X^{D^{GKT-M}}$. Además, $\bar{D}\bar{y} = \bar{U}B\bar{y} = \bar{U}b = \bar{\alpha}$. Supongamos por reducción al absurdo que $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \notin E^{D^{GKT-M}} \Rightarrow \exists (\hat{u}, \hat{\lambda}, \hat{D}) \in X^{D^{GKT-M}}$ tal que $\hat{D} \leq \bar{D} \Rightarrow \hat{u}^t A \geq \hat{\lambda}^t C$, $\hat{u}^t B \leq \hat{\lambda}^t \hat{D}$, $\hat{u} \in R^m$, $\hat{\lambda} \in R_{++}^k$, $\hat{\lambda}^t \hat{D} \leq \hat{\lambda}^t \bar{D} \Rightarrow \hat{u}^t b = \hat{u}^t B\bar{y} \leq \hat{\lambda}^t \hat{D}\bar{y} < \hat{\lambda}^t \bar{D}\bar{y} = \hat{\lambda}^t \bar{\alpha}$. Ahora bien, como $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-v}}$, utilizando el Teorema 3.4.23 sabemos que el sistema $u^t A \geq \lambda^t C$, $u^t b < \lambda^t \bar{\alpha}$, $u \in R^m$, $\lambda \in R_+^k$, no tiene solución $\Rightarrow \#$. Luego, $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in E^{D^{GKT-M}}$. ■

3.4.2 Concepto de Dualidad de Kornbluth

La teoría de la dualidad vectorial para el caso lineal desarrollada por Kornbluth, en 1974, considera, en lugar de un problema primal y otro dual fijos, una clase de problemas primales y duales multiparametrizados en los recursos.

Sean $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{m \times r}$ y $C \in R^{k \times n}$. Las clases de problemas primales y duales consideradas por Kornbluth (ver [Krn74], p. 603-604) y a las que denotaremos, respectivamente, por $P(y)$ y $D(\lambda)$, vienen dadas por:

$$\max \{ Cx / x \in X^{P(y)} \} \quad (3.28)$$

y

$$\min \{ u^t B / u \in X^{D(\lambda)} \} \quad (3.29)$$

donde $y \in \Lambda_r^0$, $X^{P(y)} = \{ x \in R_+^n / Ax = By \}$, $\lambda \in \Lambda_k^0$ y $X^{D(\lambda)} = \{ u \in R^m / u^t A \geq \lambda^t C \}$.

Kornbluth centra su atención en la obtención de soluciones eficientes propias ([Krn74], p. 602), pero sabemos que para el caso lineal los conceptos de solución eficiente propia y de solución eficiente coinciden (Corolario 1.7.17).

Obsérvese que cuando $r = k = 1 \Rightarrow y = \lambda = 1$ y entonces $P(1)$ y $D(1)$ se reducen al par de problemas primal y dual, respectivamente, del caso escalar (problemas (3.26) y (3.27)). Sin pérdida de generalidad, podemos considerar $y \in R_{++}^r$ y $\lambda \in R_{++}^k$.

Teorema 3.4.34 ([Krn74], Theorem 2) $\exists \bar{y} \in R_{++}^r$, $E^{P(\bar{y})} \neq \emptyset$ si, y sólo si, $\exists \bar{\lambda} \in R_{++}^k$, $E^{D(\bar{\lambda})} \neq \emptyset$.

Demostración. Sean $\bar{y} \in R_{++}^r$, $\bar{x} \in E^{P(\bar{y})} \Leftrightarrow \exists \bar{\lambda} \in R_{++}^k$, $\bar{x} \in S_{P(\bar{y})_{\bar{\lambda}}}$. Ahora, por dualidad escalar $\Leftrightarrow \exists \bar{u} \in S_{D(\bar{y})_{\bar{\lambda}}}$, donde $D(\bar{y})_{\bar{\lambda}} = D(\bar{\lambda})_{\bar{y}} = \min\{u^t B \bar{y} / u^t A \geq \bar{\lambda}^t C\} \Leftrightarrow \exists \bar{\lambda} \in R_{++}^k$, $\bar{u} \in E^{D(\bar{\lambda})} \Leftrightarrow \exists \bar{\lambda} \in R_{++}^k$, $E^{D(\bar{\lambda})} \neq \emptyset$. ■

Vamos a establecer las relaciones existentes entre el concepto de dualidad de Gale-Kuhn-Tucker para el caso matricial y el concepto de dualidad de Kornbluth.

Teorema 3.4.35 ([Rd77], Theorem 1.8, [Is78a], Theorem 4)

i) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in E^{P^{GKT-M}}$ si, y sólo si, $\bar{x} \in E^{P(\bar{y})}$.

ii) $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in E^{D^{GKT-M}}$ si, y sólo si, $\bar{u} \in E^{D(\bar{\lambda})}$.

Demostración. Probaremos sólo i) por ser ii) su formulación dual.

“ \Rightarrow ”

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in E^{P^{GKT-M}} \Rightarrow \bar{x} \in X^{P(\bar{y})}$, $C\bar{x} = \bar{D}\bar{y}$ y el sistema $Cx \geq \bar{D}y$, $Ax = By$, $x \in R_+^n$, $y \in R_+^r$ no tiene solución. En particular, para $y = \bar{y}$, $Cx \geq \bar{D}\bar{y}$, $Ax = B\bar{y}$, $x \in R_+^n$, no tiene solución $\Rightarrow Cx \geq C\bar{x}$, $Ax = B\bar{y}$, $x \in R_+^n$, no tiene solución $\Rightarrow \bar{x} \in E^{P(\bar{y})}$.

“ \Leftarrow ”

Sea $\bar{x} \in E^{P(\bar{y})}$, $\bar{y} \in R_{++}^r \Rightarrow \exists \bar{\lambda} \in R_{++}^k$, $\bar{x} \in S_{P(\bar{y})_{\bar{\lambda}}}$. Por dualidad escalar $\Rightarrow \exists \bar{u} \in R^m$, $\bar{u}^t A - \bar{\lambda}^t C \geq 0^t$, $\bar{\lambda}^t C\bar{x} = \bar{u}^t B\bar{y}$. Llamando $b = B\bar{y}$, $\alpha = C\bar{x}$ y aplicando el Lema 3.4.32 $\Rightarrow \exists \bar{U} \in R^{k \times m}$ tal que $\bar{u}^t = \bar{\lambda}^t \bar{U}$, $C\bar{x} = \bar{U}B\bar{y}$. Llamando $\bar{D} = \bar{U}B \Rightarrow \bar{u}^t B = \bar{\lambda}^t \bar{D}$, $C\bar{x} = \bar{D}\bar{y} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in X^{P^{GKT-M}}$, $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in X^{D^{GKT-M}}$. Aplicando el Corolario 3.4.11 $\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in E^{P^{GKT-M}}$. ■

Luego, en virtud del teorema anterior, los conceptos de dualidad de Gale-Kuhn-Tucker y Kornbluth son equivalentes. Con lo cual, los resultados obtenidos para el primero se aplican al otro de forma automática.

3.4.3 Concepto de Dualidad de Isermann

Heinz Isermann ha sido uno de los investigadores que más energía y esfuerzo han dedicado al desarrollo de una teoría práctica de la dualidad en programación vectorial lineal. A pesar de ello, no le fue posible conseguir ningún algoritmo de *tipo dual* para resolver el LVP. Sin embargo, cuando menos, sus ideas añaden una nueva e interesante perspectiva sobre el problema que estamos tratando. En este subapartado vamos a desarrollar la

teoría de la dualidad de Isermann, mostrando las conexiones existentes con la noción de dualidad propuesta por Gale, Kuhn y Tucker.

Consideremos el problema primal $P \equiv \max\{Cx / x \in X\}$, donde $X \equiv \{x \in R_+^n / Ax = b\}$. Isermann define, sin pararse en justificaciones de ningún tipo, el problema dual de P , al que denotaremos por D' , como (ver, por ejemplo, [Is77b], p. 247):

$$\left. \begin{array}{l} \min g(U) = Ub \\ \text{s.a: } U \in X^{D'} = \{U \in R^{k \times m} / UAx \leq Cx, x \in R_+^n, \text{ no tiene solución}\} \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

Aunque a primera vista tal definición puede resultar artificiosa, es posible obtenerla, como veremos en breve, a través de la generalización del procedimiento conocido como dual lagrangiano para el caso escalar ([Mr83]).

Sea $U \in R^{k \times m}$ fija, denominada matriz de precios. Consideremos el problema $P'(U)$ dado por:

$$\left. \begin{array}{l} \max z'(x) = L(x, U) = Cx + U(b - Ax) = Ub + (C - UA)x \\ \text{s.a: } x \in R_+^n \end{array} \right\} \quad (3.31)$$

al que denominaremos *problema lagrangiano generalizado*.

Es claro que $\forall U \in R^{k \times m}$, $P'(U)$ es una relajación de P , pues $X \subseteq X'$ y $z(x) = L(x, U)$, $\forall x \in X$.

Por ello, aplicando la Proposición 1.10.2, $z'(E^{P'(U)}) \subseteq B(P)$, es decir, si $\bar{x} \in E^{P'(U)} \Rightarrow \exists x \in X$, $z(x) \geq z'(\bar{x})$. Así, una posibilidad para obtener cotas eficientes de P consiste en obtener aquellos valores de U que hagan $E^{P'(U)} \neq \emptyset$.

Ahora bien, llamando $P''(U)$ a:

$$\left. \begin{array}{l} \max (C - UA)x \\ \text{s.a: } x \in R_+^n \end{array} \right\}$$

sabemos que $E^{P'(U)} = E^{P''(U)}$ (Proposición 1.3.14).

Además, por ser $P''(U)$ un problema lineal que tiene como únicas restricciones las de no negatividad en las variables, podemos escribir:

- (i) $E^{P''(U)} \neq \emptyset$ si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k$, $\lambda'(C - UA) \leq 0$.
- (ii) $E^{P''(U)} \neq \emptyset$ entonces $0 \in E^{P''(U)}$.

Sea U tal que $E^{P'(U)} \neq \emptyset \Leftrightarrow E^{P''(U)} \neq \emptyset \Rightarrow 0 \in E^{P''(U)} \Rightarrow \exists x \in X$, $z(x) \geq z'(0) = Ub$. Con la intención de ajustar esta cota superior lo más

posible, interesa minimizar $g(U) = Ub$ sobre aquellos valores de U que hacen que $E^{P(U)} \neq \emptyset$. Esto da lugar al problema:

$$\min \{ Ub / \lambda^t (C - UA) \leq 0, \lambda \in R_{++}^k, U \in R^{k \times m} \} \quad (3.32)$$

Ahora bien:

Proposición 3.4.36 $\bar{U} \in X^{D^t}$ si, y sólo si, $\exists \bar{\lambda} \in R_{++}^k, \bar{\lambda}^t (C - \bar{U}A) \leq 0$.

Demostración. $\bar{U} \in X^{D^t} \Leftrightarrow$ el sistema $\bar{U}Ax \leq Cx, x \in R_+^n$, no tiene solución. Aplicando el teorema de la alternativa de Gale ([Mn69], p. 35) $\Leftrightarrow \lambda^t (C - \bar{U}A) \leq 0, \lambda \in R_{++}^k$, tiene solución. ■

De esta forma, D^t es equivalente al problema (3.32). Se tiene así una justificación geométrica, aparentemente no conocida hasta ahora, de la definición de problema dual de Isermann.

Es interesante observar que:

- Para $k = 1$, P y D^t se reducen al par de problemas primal y dual del caso escalar (problemas (3.26) y 3.27), respectivamente).
- Para $k > 1$, la relación de dualidad entre P y D^t no es simétrica, en el sentido de que el dual del dual no es el problema primal.

Veamos ahora que relaciones existen entre las soluciones eficientes asociadas a los problemas duales propuestos por Isermann y por Gale-Kuhn-Tucker, tanto para el caso vectorial como para el matricial.

En primer lugar estudiaremos como se relacionan entre si las regiones factibles.

Proposición 3.4.37 Si $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in X^{D^t}$ entonces $(\bar{u}^t, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) = (\bar{\lambda}^t \bar{U}, \bar{\lambda}, \bar{U}b) \in X^{D^{GKT-V}}$.

Demostración. $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in X^{D^t} \Rightarrow \bar{\lambda} \in R_{++}^k, \bar{\lambda}^t (C - \bar{U}A) \leq 0$. Tomando $\bar{u}^t = \bar{\lambda}^t \bar{U} \Rightarrow \bar{u}^t A \geq \bar{\lambda}^t C$. Además, $\bar{u}^t b = \bar{\lambda}^t \bar{U}b = \bar{\lambda}^t \bar{\alpha} \Rightarrow (\bar{u}^t, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) = (\bar{\lambda}^t \bar{U}, \bar{\lambda}, \bar{U}b) \in X^{D^{GKT-V}}$. ■

Proposición 3.4.38 Si $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in X^{D^{GKT-V}}$ y $\bar{\lambda}^t \bar{\alpha} = \bar{u}^t b$ entonces $\exists \bar{U} \in R^{k \times m}$ tal que $\bar{u}^t = \bar{\lambda}^t \bar{U}, \bar{\alpha} = \bar{U}b, (\bar{\lambda}, \bar{U}) \in X^{D^t}$.

Demostración. Inmediata. ■

Como consecuencia:

Corolario 3.4.39 $X^{D^{GKT-V}} \neq \emptyset$ si, y sólo si, $X^{D^I} \neq \emptyset$.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

$X^{D^{GKT-V}} \neq \emptyset$, por la Proposición 3.4.25 $\Rightarrow \exists (\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in X^{D^{GKT-V}}$, $\bar{\lambda}'\bar{\alpha} = \bar{u}'b$. Ahora, aplicando la Proposición 3.4.38 $\Rightarrow \exists \bar{U} \in R^{k \times m}$, $\bar{u}' = \bar{\lambda}'\bar{U}$, $\bar{\alpha} = \bar{U}b$, $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in X^{D^I} \Rightarrow X^{D^I} \neq \emptyset$.

“ \Leftarrow ”

$X^{D^I} \neq \emptyset \Rightarrow \exists (\bar{\lambda}, \bar{U}) \in X^{D^I}$. Aplicando Proposición 3.4.37 $\Rightarrow (\bar{u}', \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) = (\bar{\lambda}'\bar{U}, \bar{\lambda}, \bar{U}b) \in X^{D^{GKT-V}} \Rightarrow X^{D^{GKT-V}} \neq \emptyset$. ■

El siguiente paso consiste en analizar las regiones eficientes.

Teorema 3.4.40 (Condición necesaria en [Is78a], Theorem 3)

Si $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in E^{D^I}$ entonces $(\bar{u}', \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) = (\bar{\lambda}'\bar{U}, \bar{\lambda}, \bar{U}b) \in E^{D^{GKT-V}}$.

Demostración. Por la Proposición 3.4.37, $(\bar{\lambda}'\bar{U}, \bar{\lambda}, \bar{U}b) \in X^{D^{GKT-V}}$. Supongamos por reducción al absurdo que $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \notin E^{D^{GKT-V}} \Rightarrow \exists (\hat{u}, \hat{\lambda}, \hat{\alpha}) \in X^{D^{GKT-V}}$ tal que $\hat{\lambda}'\hat{\alpha} = \hat{u}'b$ y $\hat{\alpha} \leq \bar{\alpha}$. Aplicando el Lema 3.4.32 $\Rightarrow \exists \hat{U} \in R^{k \times m}$, $\hat{u}' = \hat{\lambda}'\hat{U}$, $\hat{\alpha} = \hat{U}b \Rightarrow (\hat{\lambda}, \hat{U}) \in X^{D^I}$ y $\hat{U}b = \hat{\alpha} \leq \bar{\alpha} = \bar{U}b \Rightarrow (\bar{\lambda}, \bar{U}) \notin E^{D^I}$. ■

Corolario 3.4.41 Sean $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in E^{D^I}$, $B\bar{y} = b$, $\bar{y} \in R_{++}^r$ entonces $(\bar{u}', \bar{\lambda}, \bar{D}) = (\bar{\lambda}'\bar{U}, \bar{\lambda}, \bar{U}B) \in E^{D^{GKT-M}}$.

Demostración. Si $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in E^{D^I}$, por el Teorema 3.4.40 $\Rightarrow (\bar{u}', \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) = (\bar{\lambda}'\bar{U}, \bar{\lambda}, \bar{U}b) \in E^{D^{GKT-V}}$. Como $B\bar{y} = b$, $\bar{y} \in R_{++}^r$, aplicando el Teorema 3.4.33 $\Rightarrow (\bar{\lambda}'\bar{U}, \bar{\lambda}, \bar{U}B) \in E^{D^{GKT-M}}$. ■

Teorema 3.4.42 (Condición suficiente en [Is78a], Theorem 3)

Si $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-V}}$ entonces $\exists \bar{U} \in R^{k \times m}$ solución de $\bar{u}' = \bar{\lambda}'\bar{U}$, $\bar{\alpha} = \bar{U}b$, tal que $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in E^{D^I}$.

Demostración. Si $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \in E^{D^{GKT-V}}$, por el Teorema 3.4.24 $\Rightarrow \bar{\lambda}'\bar{\alpha} = \bar{u}'b$. Aplicando la Proposición 3.4.38 $\Rightarrow \exists \bar{U} \in R^{k \times m}$ tal que $\bar{u}' = \bar{\lambda}'\bar{U}$, $\bar{\alpha} = \bar{U}b$, $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in X^{D^I}$. Supongamos por reducción al absurdo que $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \notin E^{D^I} \Rightarrow \exists (\hat{\lambda}, \hat{U}) \in X^{D^I}$, $\hat{U}b \leq \bar{U}b$. Sean $\hat{u}' = \hat{\lambda}'\hat{U}$, $\hat{\alpha} = \hat{U}b$. Evidentemente, $\hat{\lambda}'\hat{\alpha} = \hat{u}'b \Rightarrow$

$(\hat{u}, \hat{\lambda}, \hat{\alpha}) \in X^{D^{GKT-V}}$ y $\hat{\alpha} \leq \bar{\alpha} \Rightarrow (\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) \notin E^{D^{GKT-V}} \Rightarrow \#$. Luego $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in E^{D^I}$. ■

Corolario 3.4.43 Sean $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in X^{D^{GKT-M}}$, $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in X^{D^{GKT-M}}$ con $B\bar{y} = b$. Entonces $\exists \bar{U} \in R^{kxm}$ solución de $\bar{u}^t = \bar{\lambda}^t \bar{U}$, $\bar{D}\bar{y} = \bar{U}b$, tal que $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in E^{D^I}$.

Demostración. Si $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{D}) \in X^{D^{GKT-M}}$, $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}) \in X^{D^{GKT-M}}$ con $B\bar{y} = b$, aplicando el Teorema 3.4.31 $\Rightarrow (\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) = (\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{D}\bar{y}) \in E^{D^{GKT-V}}$. Por el Teorema 3.4.42, $\Rightarrow \exists \bar{U} \in R^{kxm}$ solución de $\bar{u}^t = \bar{\lambda}^t \bar{U}$, $\bar{D}\bar{y} = \bar{U}b$, tal que $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in E^{D^I}$. ■

Luego, en términos de eficiencia los problemas D^I y D^{GKT-V} (D^{GKT-M}) se pueden considerar equivalentes. De esta forma, los resultados presentados para el problema dual de Gale-Kuhn-Tucker son aplicables, de forma automática, al problema dual de Isermann y viceversa. No obstante, dado que ciertos resultados de la teoría de la dualidad de Isermann fueron publicados con errores, hemos creído de interés redactar correctamente y de manera simplificada dicha teoría.

Proposición 3.4.44 ([Is76], Lemma 3) (Teorema débil de dualidad vectorial) $\forall x \in X^P$, $\forall (\lambda, U) \in X^{D^I}$, no se verifica $Ub \leq Cx$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{x} \in X^P$, $\exists (\bar{\lambda}, \bar{U}) \in X^{D^I}$, $\bar{U}b \leq C\bar{x} \Rightarrow \bar{\lambda}^t \bar{U}b < \bar{\lambda}^t C\bar{x}$. Ahora bien, como $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in X^{D^I} \Rightarrow \bar{\lambda}^t (C - \bar{U}A) \leq 0$. Además, dado que $\bar{x} \in R_+^n \Rightarrow \bar{\lambda}^t (C - \bar{U}A)\bar{x} \leq 0 \Rightarrow \bar{\lambda}^t C\bar{x} \leq \bar{\lambda}^t \bar{U}A\bar{x} = \bar{\lambda}^t \bar{U}b \Rightarrow \#$. ■

Corolario 3.4.45 ([Is76], Lemma 4) Sean $\bar{x} \in X^P$, $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in X^{D^I}$ con $C\bar{x} = \bar{U}b$. Entonces, $\bar{x} \in E^P$, $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in E^{D^I}$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in X^P$, $C\hat{x} \geq C\bar{x} = \bar{U}b \Rightarrow \#$ con la Proposición 3.4.44. Análogamente, supongamos por reducción al absurdo que $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \notin E^{D^I} \Rightarrow \exists (\hat{\lambda}, \hat{U}) \in X^{D^I}$, $\hat{U}b \leq \bar{U}b = C\bar{x} \Rightarrow \#$ con la Proposición 3.4.44. ■

Teorema 3.4.46 (Teorema fuerte de dualidad vectorial para el problema primal) $\forall \bar{x} \in E^P$, $\exists (\bar{\lambda}, \bar{U}) \in E^{D^I}$ con $C\bar{x} = \bar{U}b$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in E^P \Rightarrow \exists \bar{\lambda} \in R_{++}^k, \bar{x} \in S_{P_{\bar{\lambda}}}$. Por dualidad escalar $\Rightarrow \exists \bar{u} \in R^m, \bar{u}^t A - \bar{\lambda}^t C \geq 0^t, \bar{\lambda}^t C \bar{x} = \bar{u}^t b$. Llamando $\bar{\alpha} = C \bar{x} \Rightarrow \bar{\lambda}^t \bar{\alpha} = \bar{u}^t b$. Aplicando el Lema 3.4.32 $\Rightarrow \exists \bar{U} \in R^{k \times m}, \bar{u}^t = \bar{\lambda}^t \bar{U}, \bar{\alpha} = \bar{U} b \Rightarrow (\bar{\lambda}, \bar{U}) \in X^{D'}$, $C \bar{x} = \bar{U} b$. Ahora, por el Corolario 3.4.45 $\Rightarrow (\bar{\lambda}, \bar{U}) \in E^{D'}$. ■

Teorema 3.4.47 (Teorema fuerte de dualidad vectorial para el problema dual) $\forall (\bar{\lambda}, \bar{U}) \in E^{D'}, \exists \bar{x} \in E^P$ con $C \bar{x} = \bar{U} b$.

Demostración. Sea $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in E^{D'}$. Por el Teorema 3.4.40 $\Rightarrow (\bar{\lambda}^t \bar{U}, \bar{\lambda}, \bar{U} b) \in E^{D^{GKT-v}}$. Aplicando Teorema 3.4.26 $\Rightarrow (\bar{x}, \bar{U} b) \in E^{P^{GKT-v}}$. Por el Corolario 3.4.19 $\Rightarrow \bar{x} \in E^P, C \bar{x} = \bar{U} b$. ■

Corolario 3.4.48 ([Is76], Lemma 7) i) Sea $\bar{x} \in X^P$. Entonces, $\bar{x} \in E^P$ si, y sólo si, $\exists (\bar{\lambda}, \bar{U}) \in X^{D'}, (\bar{U} A - C) \bar{x} = 0$.

ii) Sea $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in X^{D'}$. Entonces $(\bar{\lambda}, \bar{U}) \in E^{D'}$ si, y sólo si, $\exists \bar{x} \in X^P, (\bar{U} A - C) \bar{x} = 0$.

Corolario 3.4.49 ([Is76], Theorem 3) $E^P \neq \emptyset$ si, y sólo si, $E^{D'} \neq \emptyset$.

Teorema 3.4.50 ([Is78b], Proposition 4, (i)) Sea $X^P \neq \emptyset$. Entonces, P es no acotado si, y sólo si, D' es no factible.

Demostración. Sabemos por el Corolario 1.7.41 que $E^P = \emptyset \Leftrightarrow X^P = \emptyset$ ó $Cd \geq 0, Ad = 0, d \in R_+^n$, tiene solución. Como $X^P \neq \emptyset$, por el teorema de la alternativa de Tucker ([Mn69], p. 29) $\Leftrightarrow \lambda^t C - u^t A \leq 0, \lambda \in R_{++}^k$, no tiene solución $\Leftrightarrow \lambda^t (C - UA) \leq 0, \lambda \in R_{++}^k$, no tiene solución $\Leftrightarrow X^{D'} = \emptyset$. ■

Teorema 3.4.51 ([Is78b], Proposition 4, (ii)) Sea $X^{D'} \neq \emptyset$. Entonces, D' es no acotado si, y sólo si, P es no factible.

Demostración. Por hipótesis, $X^{D'} \neq \emptyset$. Por el Corolario 3.4.39 $\Leftrightarrow X^{D^{GKT-v}} \neq \emptyset$. Aplicando el Teorema 3.4.21 \Leftrightarrow i) $\exists \bar{\alpha} \in R^k$, el sistema $Ax = b, Cx \geq \bar{\alpha}, x \in R_+^n$, no tiene solución y ii) $Cd \geq 0, Ad = 0, d \in R_+^n$ no tiene solución. En estas condiciones, $E^{D'} = \emptyset$, por el Corolario 3.4.49 $\Leftrightarrow E^P = \emptyset$ Utilizando el Teorema 1.7.48 resulta $\Leftrightarrow X^P = \emptyset$ ó $Cd \geq 0, Ad = 0, d \in R_+^n$ tiene solución. Como por hipótesis $Cd \geq 0, Ad = 0, d \in R_+^n$ no tiene solución, $\Leftrightarrow X^P = \emptyset$. ■

Corolario 3.4.52 Si $X^P \neq \emptyset$ y $X^{D'} \neq \emptyset$ entonces $E^P \neq \emptyset$ ($E^{D'} \neq \emptyset$).

Demostración. Por hipótesis, $X^P \neq \emptyset$ y $X^{D'} \neq \emptyset$. Supongamos por reducción al absurdo que $E^P = \emptyset$. Por el Teorema 3.4.50 $\Rightarrow X^{D'} = \emptyset \Rightarrow \#$. ■

Por último, consideremos una base factible arbitraria B para el problema primal (3.25) y sea $R = C^B B^{-1} N - C^N$ su matriz de costos reducidos asociada.

Teorema 3.4.53 B es una base dual-eficiente si, y sólo si, $\exists \lambda \in R_{++}^k$, $(\lambda, C^B B^{-1}) \in X^{D'}$.

Demostración. Por la Definición 1.6.14, B es una base dual-eficiente $\Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k$, tal que $\lambda' R \geq 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k$ tal que $\lambda'(C^B - C^B B^{-1} B, C^N - C^B B^{-1} N) \leq 0, \Leftrightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, \lambda'(C - C^B B^{-1} A) \leq 0 \Leftrightarrow (\bar{\lambda}, C^B B^{-1}) \in X^{D'}$. ■

Proposición 3.4.54 ([Is78], Theorem 5) Si B es una base dual-eficiente entonces $\bar{x}^t = (\bar{x}_B^t, \bar{x}_N^t) = ((B^{-1}b)^t, 0^t) \in E^P$ y $\exists \lambda \in R_{++}^k, (\lambda, U) = (\lambda, C^B B^{-1}) \in E^{D'}$.

Demostración. Inmediata pues $\bar{x} \in X^P$, $(\lambda, U) \in X^{D'}$ y $C\bar{x} = Ub$. ■

3.4.4 Concepto de Dualidad de Hannan

Sea P el problema vectorial (3.25). En 1978, Edward Hannan propone como problema dual de P la clase $D^H(\Lambda_k^0)$ constituida por los programas lineales escalares multiparametrizados en los recursos:

$$\min \{u^t b / u^t A \geq \lambda^t C\} \quad (3.33)$$

donde $\lambda \in \Lambda_k^0$ ([Hn78], p. 645). Evidentemente, esta clase coincide con la clase de problemas duales de Kornbluth cuando $r=1$ y, por tal motivo, le son aplicables automáticamente todos los resultados disponibles para la dualidad de Kornbluth. Sin embargo, la formulación dada en (3.33) aparentemente es más sencilla que la de Kornbluth. La intención de Hannan era dotar la teoría del LVP con una definición de problema dual que fuera abordable desde un punto de vista práctico. Hannan plantea (sin confirmarlo) que $D^H(\Lambda_k^0)$ se podría abordar utilizando técnicas de programación lineal escalar multiparamétrica o bien utilizando el método del simplex dual escalar en conjunción con técnicas desarrolladas para resolver P ([Hn78], p. 645). Sin embargo, esto no es en absoluto trivial de hacer y equivale, en dificultad, a la resolución de la clase de problemas

$\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_k^0}$, cuestión que, hasta la fecha, no ha podido ser resuelta satisfactoriamente.

3.5 Optimización Lineal sobre la Región Eficiente

En esta sección nos proponemos estudiar diversos aspectos relacionados con la maximización de una función lineal sobre el conjunto de soluciones eficientes de un LVP. Este problema ha sido estudiado durante más de treinta años (ver, por ejemplo, [Ph72], p. 224) y surge, fundamentalmente, cuando se dispone de una función que actúa como un criterio para discriminar entre, o medir la importancia de las soluciones eficientes. Sin embargo, ésta no es su única aplicación. En efecto, operaciones como la de determinar los rangos de variación de cada una de las funciones objetivo sobre la región eficiente no son más que especializaciones del problema bajo estudio.

Sin pérdida de generalidad, formularemos el problema de optimización de una función lineal sobre la región eficiente de un LVP, como el programa escalar lineal Q :

$$\max\{v^t x / x \in E^P\} \quad (3.34)$$

donde $P \equiv \max\{Cx / x \in X\}$ y $X = \{x \in R_+^n / Ax = b\} \neq \emptyset$.

Q es un problema difícil de resolver pues, por lo común:

- i) E^P es no convexo (aunque sí conexo) y
- ii) E^P no se conoce de forma explícita, ni se tiene una descripción apropiada (lineal) de forma implícita.

Matemáticamente, el problema Q se puede clasificar como un problema de optimización global (también denominado problema de programación no convexa). Tales problemas poseen, en general, óptimos locales (frecuentemente en elevado número), que no necesariamente son óptimos globales ([BnLee96], p. 78).

3.5.1 Propiedades Generales

A continuación desarrollaremos un buen número de propiedades que resultan de interés para la resolución de Q . Asimismo estudiaremos ciertas relajaciones y otras variaciones relativas a dicho problema.

La siguiente propiedad nos indica que cuando Q es acotado, alguna de las caras eficientes de P coincide con el conjunto de soluciones óptimas de Q .

Teorema 3.5.1 Si Q es acotado ($S_Q \neq \emptyset$) entonces $\exists F \in E_f^P$ tal que $S_Q = F$.

Demostración. Directa, por ser $v^t x$ función lineal y $E^P = \bigcup_{j=1}^l F_j$, donde $\forall j \in \{1, \dots, l\}$, F_j es una cara eficiente de P . ■

En particular, si Q es acotado algún vértice eficiente es óptimo para Q .

Corolario 3.5.2 ([Bn84], Theorem 4.5) Si Q es acotado entonces $S_Q \cap E_{xp}^P \neq \emptyset$.

Demostración. Por la representación tomada de X , se trata de un poliedro apuntado \Rightarrow Cualquier cara de X contiene al menos un vértice. Ahora basta aplicar el Teorema 3.5.1. ■

Teorema 3.5.3 Supongamos que $E^P \neq \emptyset$. Entonces, Q es no acotado ($S_Q = \emptyset$) si, y sólo si, $\exists F \in E_f^P$ tal que $v^t x$ es no acotada en F .

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Inmediata.

“ \Rightarrow ”

Es claro por ser $v^t x$ función lineal y E^P una unión finita de caras eficientes. ■

Corolario 3.5.4 ([Bn84], Theorem 3.2) Supongamos que $E^P \neq \emptyset$. Entonces, Q es no acotado si, y sólo si, $\exists \bar{d} \in E_{xd}^P$ tal que $v^t \bar{d} > 0$.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Inmediata.

“ \Rightarrow ”

Si Q es no acotado, por el Teorema 3.5.3 $\Rightarrow \exists F \in E_f^P$ tal que $v^t x$ es no acotada en F . Teniendo en cuenta que F es un poliedro y aplicando la teoría de la programación lineal escalar $\Rightarrow \exists \bar{d} \in F_{xd}$ tal que $v^t \bar{d} > 0$. Además, como $F \in E_f^P \Rightarrow \bar{d} \in E_{xd}^P$. ■

Sea R la siguiente relajación del problema Q :

$$\max \{v^t x / x \in X\} \quad (3.35)$$

Evidentemente, la gran ventaja que presenta R sobre Q es que se trata de un problema *fácil* de resolver por ser X un poliedro. Veamos que relaciones se pueden establecer entre las soluciones de R y Q .

El siguiente resultado enuncia una condición suficiente para la acotación de Q .

Teorema 3.5.5 *Si Q es factible ($E^P \neq \emptyset$) y R acotado ($S_R \neq \emptyset$) entonces Q es acotado ($S_Q \neq \emptyset$).*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $S_Q = \emptyset$. Como $E^P \neq \emptyset$, por el Teorema 3.5.3 $\Rightarrow \exists F$ cara de X , $F \subseteq E^P$, $v^T x$ es no acotada en F . Como $F \subseteq X \Rightarrow v^T x$ es no acotada en $X \Rightarrow S_R = \emptyset \Rightarrow \#$. ■

Nótese que:

- i) Q puede ser acotado ($S_Q \neq \emptyset$), aunque R no lo sea ($S_R = \emptyset$). Ver Figura 3.5.
- ii) Q puede ser no factible ($E^P = \emptyset$), aunque R sea acotado ($S_R \neq \emptyset$). Ver Figura 3.6.

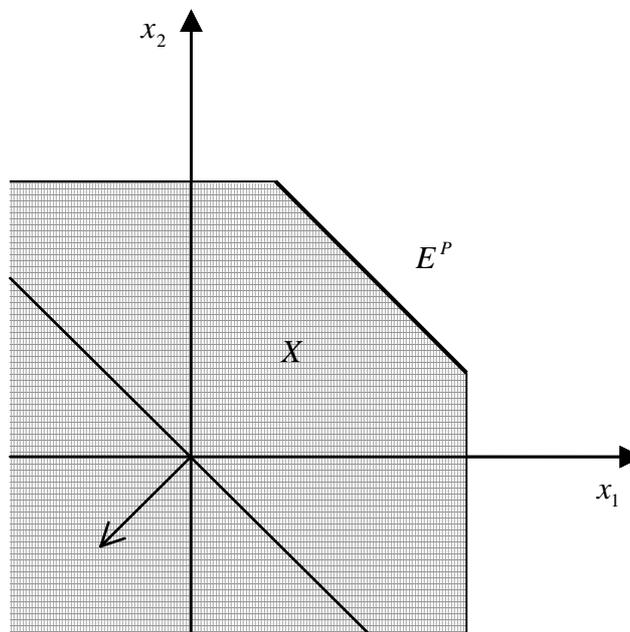


Figura 3.5

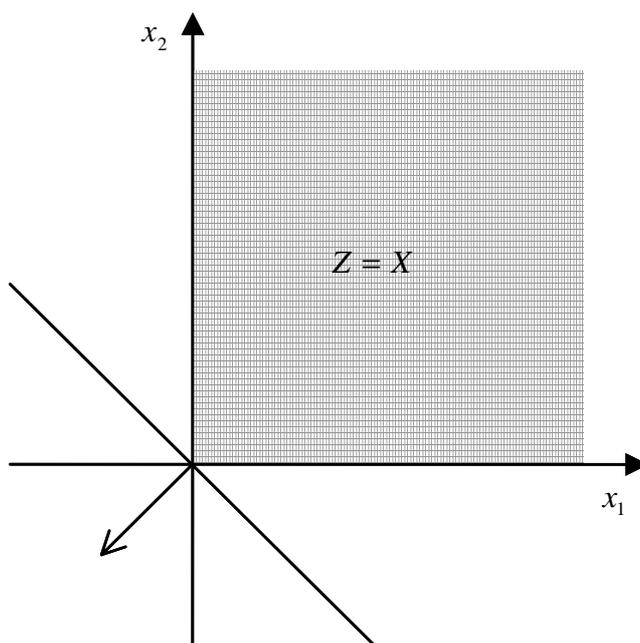


Figura 3.6

Proposición 3.5.6 ([EcSn94], p. 544) $S_R \cap E^P \subseteq S_Q$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in S_R \cap E^P \Rightarrow \bar{x} \in S_R, \bar{x} \in E^P$. Como $E^P \subseteq X \Rightarrow \bar{x} \in S_Q$. ■

Aunque la Proposición 3.5.6 es sugerente, a priori no hay ninguna garantía de que entre las soluciones óptimas de R tenga que haber alguna solución eficiente.

Una situación fácil de tratar es la que se presenta cuando todo S_R es eficiente. Efectivamente:

Proposición 3.5.7 Si $\emptyset \neq S_R \subseteq E^P$ entonces $S_Q = S_R$.

Demostración.

“ \supseteq ”

Aplicando la Proposición 3.5.6.

“ \subseteq ”

Sea $\bar{x} \in S_Q$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin S_R \Rightarrow \exists \hat{x} \in S_R \subseteq E^P, v^t \hat{x} > v^t \bar{x} \Rightarrow \#,$ luego $S_Q \subseteq S_R$. ■

Veamos algunos ejemplos en los que se cumple la hipótesis del resultado anterior.

Sea $V(C)$ el cono criterio de P y $V^0(C)$ su interior relativo, el cual sabemos que viene dado por $\{x \in R^n / x^t = \lambda^t C, \lambda \in R_{++}^k\}$.

Proposición 3.5.8 Si $v \in V^0(C)$ entonces $S_R \subseteq E^P$.

Otro caso sencillo se presenta cuando P es completamente eficiente. Efectivamente:

Proposición 3.5.9 Si P es completamente eficiente entonces $S_R \subseteq E^P$.

Demostración. Si P es completamente eficiente, por definición $\Rightarrow E^P = X$. ■

También podemos considerar la siguiente situación:

Proposición 3.5.10 ([EcSn94], Lemma 2.1) Si $v^t d > 0, \forall d \in C^{\geq} - \{0\}$ entonces $S_R \subseteq E^P$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in S_R$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^P \Rightarrow D_{\bar{x}} \cap X \neq \{\bar{x}\} \Rightarrow \exists \hat{x} \in D_{\bar{x}} \cap X, \hat{x} \neq \bar{x} \Rightarrow \exists d \in C^{\geq}, d \neq 0, \hat{x} = \bar{x} + d \in X \Rightarrow v^t \hat{x} = v^t \bar{x} + v^t d > v^t \bar{x} \Rightarrow \#, \text{ pues } \bar{x} \in S_R$. Luego, $\bar{x} \in E^P$. ■

Si relajamos la hipótesis anterior imponiendo solamente la no negatividad de $v^t d$ sobre $C^{\geq} - \{0\}$ podemos escribir:

Teorema 3.5.11 ([Bn84], Theorem 4.7, [EcSn94], Lemma 2.2) Supongamos que $E^P \neq \emptyset$ y que R es acotado. Si $v^t d \geq 0, \forall d \in C^{\geq}$ entonces $S_R \cap S_Q \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in S_R$. Si $\bar{x} \in E^P$ ya estaría. En otro caso, como P es lineal y $E^P \neq \emptyset$, por el Corolario 1.10.10 $\Rightarrow \exists \hat{x} \in E^P, C\hat{x} \geq C\bar{x}$. Sea $d = \hat{x} - \bar{x} \Rightarrow d \in C^{\geq}, \hat{x} = \bar{x} + d \in X$. Como $v^t d \geq 0 \Rightarrow v^t \hat{x} \geq v^t \bar{x} \Rightarrow \hat{x} \in S_R, \hat{x} \in E^P \Rightarrow \hat{x} \in S_Q$. ■

Podemos comprobar la hipótesis realizada en el Teorema 3.5.11 mediante el siguiente procedimiento:

Consideremos el problema: $T \equiv \min\{v^t d / Cd \geq 0\}$.

Proposición 3.5.12 ([EcSn94], Lemma 2.3, (ii)) Si T es acotado entonces $v^t d \geq 0, \forall d \in C^{\geq}$.

Demostración. Inmediata aplicando dualidad escalar y teniendo en cuenta que el problema dual de T tiene como función objetivo la función constante 0. ■

Ciertamente, existen además otras situaciones especiales que simplifican la resolución de Q .

Teorema 3.5.13 ([BnSy94], Theorem 3.2) *Si P tiene alguna solución superior y v depende linealmente de las filas de la matriz criterio, entonces $S_Q = E^P$.*

Demostración. Siempre ocurre que $S_Q \subseteq E^P$. Veamos el otro contenido. Si P tiene alguna solución superior $\Rightarrow z(E^P) = z^I$, donde z^I es el punto ideal. Por otra parte, si v depende linealmente de las filas de la matriz criterio $\Rightarrow \exists \lambda \in R^k$ tal que $v^I = \lambda^I C$. En estas hipótesis, $\forall x \in E^P, v^I x = \lambda^I Cx = \lambda^I z^I \Rightarrow E^P \subseteq S_Q$. ■

Bajo las hipótesis del Teorema 3.5.13, el valor objetivo óptimo de Q se obtiene mediante $v^I \bar{x}$, siendo $\bar{x} \in E^P$ arbitraria.

La hipótesis de que v sea linealmente dependiente con las filas de la matriz criterio no se puede omitir. Efectivamente:

Ejemplo 3.5.14 ([BnSy94], Example 3.1) Sean $X = \{x \in R^3 / 0 \leq x_j \leq 1, \forall j \in \{1, 2, 3\}\}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $v^I = (0, 0, 1) \Rightarrow Z = \{z \in R^2 / 0 \leq z_j \leq 1, \forall j \in \{1, 2\}\}$, el punto ideal es $z^I = (1, 1) \in Z$, $E^P = S^P = \{(1, 1, \alpha) / 0 \leq \alpha \leq 1\}$ (conjunto de soluciones superiores), $S_Q = \{(1, 1, 1)\}$ y $S_R = \{(\alpha, \beta, 1) / 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}$. Evidentemente, $E^P \neq S_Q$. ●

Para comprobar si existe dependencia lineal entre v y las filas de C podemos usar el siguiente resultado:

Proposición 3.5.15 *El sistema $v^I = \lambda^I C$, $\lambda \in R^k$, tiene solución si, y sólo si, $\max\{v^I d / Cd = 0\}$ es acotado.*

Demostración. Por la teoría de la dualidad escalar. ■

Obsérvese que $\max\{v^I d / Cd = 0\}$ siempre es factible y que si es acotado (por dualidad escalar) su valor óptimo es 0.

Otro resultado de interés es el siguiente:

Proposición 3.5.16 ([Bn84], Theorem 4.6) *Sea $\bar{x} \in E_{xp}^P$ tal que cualquier arista de X incidente en \bar{x} es eficiente. Entonces si $\bar{x} \in S_Q$ se verifica que $\bar{x} \in S_R$.*

Demostración. Consecuencia inmediata de la teoría de la programación lineal escalar. ■

Con el fin de enriquecer más la teoría, podemos estudiar las relaciones existentes entre Q y otros problemas, no necesariamente escalares. Como ejemplo hemos seleccionado uno propuesto por Benson ([Bn84], p. 570).

Sea P' el programa vectorial $\max\{C'x / x \in X\}$, donde $C' = \begin{pmatrix} C \\ v^t \end{pmatrix} \in R^{(k+1) \times n}$.

Teorema 3.5.17 ([Bn84], Theorem 4.1) Si $\bar{x} \in S_Q$ entonces $\bar{x} \in E^{P'}$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^{P'} \Rightarrow \exists \hat{x} \in X, C'\hat{x} \geq C'\bar{x} \Rightarrow C\hat{x} \geq C\bar{x}$. Como $\bar{x} \in E^P \Rightarrow C\hat{x} = C\bar{x} \Rightarrow \hat{x} \in E^P$. Además, $C'\hat{x} \geq C'\bar{x}, C\hat{x} = C\bar{x} \Rightarrow v^t\hat{x} > v^t\bar{x} \Rightarrow \#, \text{ pues } \bar{x} \in S_Q$. ■

Tenemos así un condición suficiente para la no acotación de Q .

Corolario 3.5.18 ([Bn84], Remark 4.2) Si $E^P \neq \emptyset$ y $E^{P'} = \emptyset$ entonces Q es no acotado.

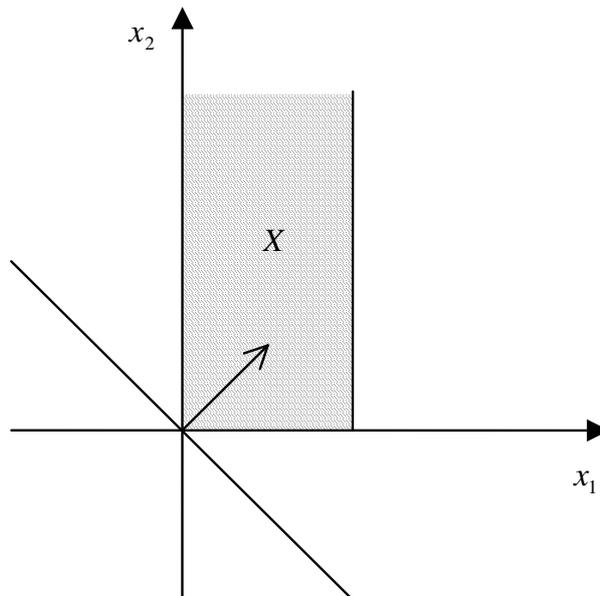


Figura 3.7

En general, el recíproco del resultado anterior no es cierto. Efectivamente:

Ejemplo 3.5.19 Sea $X = \{x \in R_+^2 / x_1 \leq 1\}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $v^t = (1, 1)$ (ver Figura 3.7). Entonces $E^P = E^{P'} = \{x \in R_+^2 / x_1 = 1\}$. Sin embargo, Q es no acotado.

●

3.5.2 El Problema del Cálculo del Rango de Variación Eficiente de las Funciones Objetivo

Existen ciertas especializaciones de Q muy conocidas. Entre ellas figuran los problemas a resolver cuando se pretende calcular el rango de variación de las funciones objetivo sobre la región eficiente (*rango de variación eficiente*). Tales problemas han suscitado un interés especial (ver, por ejemplo, [St86], p. 267-270, [IsSt87] y [RvRd88]) debido fundamentalmente a las siguientes razones: (i) representan simplificaciones (con propiedades especiales) del problema general Q que inducen a pensar que su resolución no debe ser tan complicada, (ii) proporcionan una *estimación* sobre el tamaño de la región eficiente del problema que es utilizada por muchos algoritmos (principalmente, técnicas de generación parciales de soluciones eficientes¹ e interactivos²) para mejorar su rendimiento.

Por tales motivos, creemos que merece la pena conceptualizar adecuadamente el problema y examinar algunas de sus características particulares.

Dado el problema $P \equiv \max\{z(x) / x \in X\}$ se define el rango de variación eficiente de P como el rango de variación de $z(x)$ sobre E^P . En general, tal rango se suele expresar como $\{z \in R^k / z_i^{emin} \leq z \leq z_i^{emax}\}$, donde $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $z_i^{emin} = \min\{z_i(x) / x \in E^P\}$ y $z_i^{emax} = \max\{z_i(x) / x \in E^P\}$.

Que el cómputo de z_i^{emin} o z_i^{emax} sobre un LVP no es más que un caso particular del problema general de optimización de una función lineal sobre la región eficiente resulta claro ($v^t = -e_i^t C$, $v^t = e_i^t C$, respectivamente).

Hallar z_i^{emax} no reviste dificultad, pues:

¹ Por ejemplo, el método NISE ([Ch78], p. 127-140).

² Por ejemplo, el método STEP ([BMTL71]) o el método restringido ([Ch78], p. 115-121).

Corolario 3.5.20 Si $E^P \neq \emptyset$ entonces $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $z_i^{emax} = \max\{c_i^t x / x \in X\}$.

Demostración. Sean $i \in \{1, \dots, k\}$, $v^t = e_i^t C$ y Q y R definidos según (3.34) y 3.35), respectivamente. Comprobemos en primer lugar que si R es no acotado ($S_R = \emptyset$) entonces Q también lo es ($S_Q = \emptyset$). Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{x} \in E^P$ tal que $v^t \bar{x} = c_i^t \bar{x} \geq v^t x = c_i^t x$, $\forall x \in E^P$. Como $S_R = \emptyset \Rightarrow \exists \hat{x} \in X$ tal que $c_i^t \hat{x} > c_i^t \bar{x}$. Sólo pueden ocurrir dos casos: (i) $\hat{x} \in E^P \Rightarrow \#$. (ii) $\hat{x} \notin E^P$. Por el Corolario 1.10.10 $\Rightarrow \exists \tilde{x} \in E^P$ tal que $C\tilde{x} \geq C\hat{x} \Rightarrow c_i^t \tilde{x} \geq c_i^t \hat{x} > c_i^t \bar{x} \Rightarrow \#$. Supongamos ahora que R es acotado ($S_R \neq \emptyset$). Como $v^t d = e_i^t C d \geq 0$, $\forall d \in C^\geq$, aplicando el Teorema 3.5.11 $\Rightarrow S_R \cap S_Q \neq \emptyset$. ■

Sin embargo, con respecto a z^{emin} , la situación cambia radicalmente. Por suerte, para $k=2$, disponemos de cotas inferiores válidas para cualquier tipo de problema (no necesariamente lineal). Efectivamente, si denotamos por $P_i \equiv \max\{z_i(x) / x \in X\}$ y $z^i = z(x^i)$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, se verifica:

Proposición 3.5.21 Sean $x^1 \in S_{P_1}$, $x^2 \in S_{P_2}$. Entonces, $\forall x \in E^P$, $z_1^2 \leq z_1(x) \leq z_1^1$ y $z_2^1 \leq z_2(x) \leq z_2^2$.

Demostración. Vamos a probar sólo $z_1^2 \leq z_1(x) \leq z_1^1$, pues la demostración del otro resultado es totalmente análoga. Por el Corolario 3.5.20, es cierto que $\forall x \in E^P$, $z_1(x) \leq z_1^1$. Veamos, pues, que $z_1^2 \leq z_1(x)$. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{x} \in E^P$, $z_1^2 > z_1(\bar{x}) \Rightarrow z^2 \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in E^P$. ■

Corolario 3.5.22 En las condiciones de la proposición anterior, si z^1 y z^2 son no dominados entonces $z^{emin} = (z_1(x^2), z_2(x^1))$.

Aunque la Proposición 3.5.21 no se puede generalizar para $k > 2$, tradicionalmente se han utilizado las *tablas de pagos* como heurísticas para proporcionar estimaciones sobre z^{emin} .

La tabla de pagos se define como una tabla de $k \times k$ entradas, donde la fila i corresponde a $z(x^i)$, siendo $x^i \in S_{P_i}$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ ([Ch78], p. 118).

$z_1(x^1)$...	$z_k(x^1)$
⋮	$z_i(x^i)$	⋮
$z_1(x^k)$...	$z_k(x^k)$

La diagonal de la tabla da los valores máximos sobre la región eficiente:

$$z_i^{max} = z_i(x^i) = \max\{z_i(x) / x \in X\}$$

Evidentemente, $z^{max} = (z_1^{max}, \dots, z_k^{max})$ es el punto ideal del problema.

Para estimar z_i^{emin} se suele utilizar z_i^{pmin} , definido como el valor mínimo de la columna i de la tabla de pago, es decir, $z_i^{pmin} = \min\{z_i(x^j) / j \in \{1, \dots, k\}\}$. A z_i^{pmin} se le denomina *valor pesimista* o *valor nadir* ([Ws85], p. 23-24) asociado al objetivo i . Al vector $z^{pmin} = (z_1^{pmin}, \dots, z_k^{pmin})$ se le conoce como *punto nadir*.

Dado $i \in \{1, \dots, k\}$, las dificultades con que nos podemos encontrar son que $z_i^{emin} > z_i^{pmin}$ o que $z_i^{emin} < z_i^{pmin}$.

El caso $z_i^{emin} > z_i^{pmin}$ se da, exclusivamente, cuando alguno de los problemas P_i ($i \in \{1, \dots, k\}$) tiene óptimos alternativos, con lo que las filas de la tabla de pago pueden corresponder a vectores dominados. Esto se puede prevenir maximizando lexicográficamente cada una de las funciones objetivo (ver sección 4.2.2), lo que haría que las filas de la tabla de pago sean no dominadas. El otro caso, $z_i^{emin} < z_i^{pmin}$, en general, no se puede evitar.

La experiencia computacional ([IsSt87], p. 93-95) muestra que tales estimaciones suelen ser bastante pobres (incluso aunque se utilicen filas no dominadas en la tabla de pagos), poniendo en entredicho la idoneidad de esta estrategia³.

Proposición 3.5.23 $\forall x \in E^P$, $z(x)$ puede tener, a lo sumo, $k-2$ componentes por debajo del punto nadir.

Demostración. Sea $x \in E^P$. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\forall j \in \{1, \dots, k\} - \{i\}$, $z_j(x) < z_j^{pmin} \Rightarrow z(x^i) \geq z(x) \Rightarrow \#$, pues $x \in E^P$. ■

Con lo visto hasta ahora sólo es posible abordar la resolución de ciertos casos especiales del problema Q . En lo que resta de este apartado nos centraremos en algunos métodos de resolución para el caso general. Empezaremos analizando dos técnicas muy simples.

³ No obstante, algunos autores, como Reeves y Reid (ver [RvRd88]) piensan que en la mayoría de las situaciones reales, tal técnica representa un buen compromiso entre el esfuerzo computacional requerido y la bondad de las cotas obtenidas.

3.5.3 Estrategias Básicas de Resolución

Se puede considerar que existen dos planteamientos rudimentarios y de utilidad muy limitada para la resolución de Q . Ambos se distinguen por la forma en que *contemplan* a la región eficiente: explícita o implícitamente.

Método Elemental ([IsSt87], p. 95)

Si se sabe que Q es acotado y que el número de vértices eficientes no es demasiado grande, una técnica viable consiste en utilizar un algoritmo generador de vértices eficientes (ver sección 4.3) para calcularlos todos y después evaluar sobre ellos $v^t x$. Efectivamente, si suponemos que $E_{xp}^P = \{x^1, \dots, x^l\}$ y denotamos por v^j a $v^t x^j$, $\forall j \in \{1, \dots, l\}$ entonces, aplicando el Corolario 3.5.2, el valor objetivo óptimo \bar{v} de Q vendrá dado por $\max\{v^j / j \in \{1, \dots, l\}\}$.

Las principales dificultades que presenta este procedimiento son: (i) hay que garantizar a priori la acotación de Q (cosa que no es sencilla de verificar) y (ii) el tiempo requerido para el cálculo de todos los vértices eficientes puede ser prohibitivo.

Método No Lineal ([IsSt87], p. 96)

Desde un punto de vista estrictamente teórico el problema Q se puede formular como un problema de programación escalar no lineal. Efectivamente:

$$\max\{v^t x / Ax = b, \lambda^t C + u^t A + s^t = 0, s^t x = 0, x \geq 0, \lambda \geq e, s \geq 0\} \quad (3.36)$$

La justificación del método se basa en el Teorema 1.7.9, el cual permite garantizar que:

$$E^P = \{x \in R_+^n / Ax = b, \lambda^t C + u^t A + s^t = 0, s^t x = 0, \lambda \geq e, s \geq 0\}$$

Las principales dificultades que se observan para resolver (3.36) son las dimensiones del problema y la complejidad del mismo. Efectivamente, hay un incremento de $n+k+1$ restricciones y $n+m+k$ variables respecto al problema original Q y, por otro lado, el problema es altamente no lineal debido a la restricción $s^t x = 0$. En el estado actual del arte de la programación escalar no lineal, este planteamiento resulta poco práctico.

Debido a las limitaciones que presentan estas estrategias básicas de resolución, en los últimos años hemos asistido a una verdadera proliferación de algoritmos altamente complejos, en un intento de resolver el problema general Q (ver, por ejemplo, [Bn91b], [Bn92], [DrFs95], ...), así como procedimientos específicos para situaciones particulares como: caso bicriterio ([BnLee96]), dependencia lineal entre las filas de la matriz criterio y la función objetivo de Q ([Bn93]), ... etc.

Bajo el siguiente epígrafe presentamos el primer procedimiento con espíritu práctico, para resolver el problema Q , del que tenemos constancia.

3.5.4 Método de Planos de Corte

Este método fue propuesto inicialmente por Philip ([Ph72], Method iv.2, p. 225) y redescubierto independientemente por Isermann y Steuer ([IsSt87], p. 96) como una especialización para el problema del cálculo de valores objetivos mínimos sobre la región eficiente. Posteriormente, Ecker y Song ([EcSn94]) analizan y justifican ciertos detalles no del todo claros en el esquema original. La importancia del procedimiento radica en que es un procedimiento de tipo local (basado en vértices) geoméricamente intuitivo y, aparentemente, sencillo de utilizar.

El método se fundamenta en que cualquier par de vértices eficientes está conectado a través de un camino de aristas eficientes (ver sección 1.7.4). Así, cualquier hiperplano $H = \{x \in R^n / v^t x = \beta\}$, con $\beta \in [v^{min}, v^{max}]$ (donde $v^{max} = \max\{v^t x / x \in E^P\}$ y $v^{min} = \min\{v^t x / x \in E^P\}$) interseca, al menos, a una arista eficiente de X .

Algoritmo P

Paso 1. (Inicialización)

Si $E^P = \emptyset \Rightarrow$ STOP, Q es no factible.

En caso contrario, elegir $x^0 \in E_{xp}^P$. Hacer $i = 0$.

Paso 2. (Exploración)

¿Existe una arista eficiente de P , incidente en x^i , que mejore $v^t x$, es decir, con un costo relativo respecto a v menor que 0?

Si la respuesta es sí, ir al paso 3.

En caso contrario, tenemos un óptimo local. Ir al paso 4.

Paso 3. (Progresión local)

Si la arista es no acotada \Rightarrow STOP, Q es no acotado.

En otro caso, pivotar a lo largo de la arista hasta x^{i+1} (vértice adyacente). Hacer $i = i + 1$. Volver al paso 2.

Paso 4. (Planos de corte)

Sea H^i el hiperplano $\{x \in R^n / v^t x = v^t x^i\}$.

¿Existe un vértice de $X \cap H^i$, que interseca una arista eficiente de P y que mejore $v^t x$?

Si la respuesta es sí, sea x^{i+1} tal vértice. Hacer $i = i + 1$ e ir al paso 3.

En caso contrario, tenemos un óptimo global. STOP. $\bar{x} \in S_Q$.

Obviamente, toda la dificultad del método se concentra en el paso 4, ya que éste no es trivial a pesar de ser *intuitivamente claro*.

Supongamos, por simplificar, que X es un polítopo y hagamos las siguientes hipótesis:

Sean $\bar{x} \in E_{xp}^P$ óptimo local y no global de Q , $X' = \{x \in X / v^t x \geq v^t \bar{x}\}$ y $P' \equiv \max\{Cx / x \in X'\}$. Por ser $\bar{x} \in E_{xp}^P$ óptimo local sabemos que no hay aristas eficientes en P , incidentes en \bar{x} , que incrementen el valor de $v^t x$. Sin embargo:

Teorema 3.5.24 ([EcSn94], Theorem 4.1) *Existe una arista eficiente en P' , incidente en \bar{x} , sobre el hiperplano $H = \{x \in R^n / v^t x = v^t \bar{x}\}$.*

Demostración. Sea $\bar{x} \in E^P \cap X'$. Por la Proposición 1.10.3 $\Rightarrow \bar{x} \in E^{P'}$. Además, como $\bar{x} \notin S_Q \Rightarrow \exists \hat{x} \in E_{xp}^P$, $v^t \hat{x} > v^t \bar{x} \Rightarrow \hat{x} \in X'$. Nuevamente, por la Proposición 1.10.3 $\Rightarrow \hat{x} \in E^{P'}$. Como $E^{P'}$ es conexo (Teorema 1.7.40), debe existir un camino de aristas eficientes en P' entre \bar{x} y $\hat{x} \Rightarrow$ Existe una arista eficiente en P' , incidente en \bar{x} . Además tal arista está sobre el hiperplano $H = \{x \in R^n / v^t x = v^t \bar{x}\}$, pues si alguna arista eficiente en P' , incidente en \bar{x} , incrementase el valor de $v^t x \Rightarrow$ Tal arista es eficiente en $P \Rightarrow \#$, pues \bar{x} es un óptimo local de Q . ■

Utilizando un razonamiento parecido al anterior es posible probar que:

Teorema 3.5.25 $\exists \hat{x} \in E_{xp}^{P'}$, sobre el hiperplano H ($v^t \hat{x} = v^t \bar{x}$) y existe una arista eficiente en P' , incidente en \hat{x} , que incrementa el valor de $v^t x$.

Corolario 3.5.26 ([EcSn94], Corollary 4.1) *Sean $\bar{x} \in E_{xp}^P$ óptimo local de Q y $G = X \cap H$. Si $\forall \hat{x} \in G \cap E_{xp}^{P'}$ no existe una arista eficiente en P' que mejore el valor de $v^t x$ entonces $\bar{x} \in S_Q$.*

Los resultados anteriores indican que nos movamos de \bar{x} , utilizando las aristas eficientes de P' , hasta lograr incrementar la función objetivo v . Queda esbozado así una rutina sistemática para calcular algún $x \in E_{xp}^P$ tal que $v^t x > v^t \bar{x}$ o concluir que Q es no acotado.

Sin embargo, para poder afirmar en una iteración arbitraria que \bar{x} es un óptimo global de Q , necesitamos generar todo $G \cap E_{xp}^{P'}$ y esto sigue siendo una tarea computacionalmente costosa (aunque este conjunto, se debe esperar que sea bastante más reducido que E_{xp}^P).

3.5.5 Método de Maximización Facial Progresiva

A continuación vamos a desarrollar un algoritmo novedoso e implementable para resolver el problema general de optimizar una función lineal sobre la región eficiente de un LVP. El procedimiento se fundamenta en dos ideas sencillas. En primer lugar, el conjunto de soluciones eficientes de un LVP se puede ver como una unión finita de caras eficientes (Corolario 1.7.27). Por otra parte, cada cara es un poliedro y podemos optimizar muy eficazmente una función lineal $v^t x$ sobre ella (por ejemplo, a través del método del simplex o del método de Karmarkar). El método que proponemos, bautizado como *Maximización Facial Progresiva*, o MFP para abreviar, pretende generar una sucesión de caras eficientes estrictamente crecientes en el valor de la función objetivo v . La gran dificultad que existe para explotar un procedimiento con estas características reside en cómo seleccionar caras eficientes apropiadas sobre las que efectuar la optimización lineal. Esta cuestión intentará ser dilucidada a lo largo de este apartado.

Sea $J' \subseteq J = \{1, \dots, n\}$. Empezaremos con una propiedad muy sencilla:

Proposición 3.5.27 *El problema dual de $\max\{v^t x / x \in F(J')\}$ es $\min\{u^t b / u^t A^{J-J'} \geq v_{J-J'}^t\}$.*

Los siguientes dos resultados nos permitirán caracterizar la no acotación de $v^t x$ sobre una cara no vacía $F(J')$ de X . Efectivamente:

Teorema 3.5.28 *Supongamos que $F(J') \neq \emptyset$. Entonces, el problema $\max\{v^t x / x \in F(J')\}$ es no acotado si, y sólo si, $u^t A^{J-J'} \geq v_{J-J'}^t$ no tiene solución.*

Demostración. Por la teoría de la dualidad escalar. ■

Corolario 3.5.29 *Supongamos que $F(J') \neq \emptyset$. Entonces, el problema $\max\{v^t x / x \in F(J')\}$ es no acotado si, y sólo si, el sistema $A^{J-J'} d = 0$, $v_{J-J'}^t d = 1$, $d \geq 0$, tiene solución.*

Demostración. Utilizar el Teorema 3.5.28 y aplicar el teorema de la alternativa de Gale ([Mn69], p. 33). ■

Vamos a caracterizar cuando, sobre una cara arbitraria $F(J')$, es posible mejorar un nivel arbitrario $\alpha \in \mathbb{R}$ impuesto sobre una función objetivo $v^t x$.

Teorema 3.5.30 *El sistema:*

$$\left. \begin{array}{l} Ax - by = 0 \\ v^t x - \alpha y \geq 1 \\ x \geq 0, x_{j'} = 0, y \geq 1 \end{array} \right\} \quad (3.37)$$

tiene solución si, y sólo si, $\exists \hat{x} \in F(J')$ tal que $v^t \hat{x} > \alpha$.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Sea (\bar{x}, \bar{y}) solución del sistema (3.37). Consideremos $\hat{x} = \bar{x}/\bar{y} \Rightarrow A\hat{x} = b$, $\hat{x} \geq 0$, $\hat{x}_{j'} = 0$ y $v^t \hat{x} \geq \alpha + 1/\bar{y} > \alpha \Rightarrow \hat{x} \in F(J')$ y $v^t \hat{x} > \alpha$.

“ \Leftarrow ”

Sea $\hat{x} \in F(J')$ tal que $v^t \hat{x} > \alpha \Rightarrow A\hat{x} = b$, $\hat{x} \geq 0$, $\hat{x}_{j'} = 0$ y $v^t \hat{x} > \alpha$. Sea $\delta \in (0, 1]$ tal que $v^t \hat{x} - \delta \geq \alpha$. Tomando $\bar{x} = \hat{x}/\delta$, $\bar{y} = 1/\delta \geq 1$ es claro que (\bar{x}, \bar{y}) es solución del sistema (3.37). ■

Teorema 3.5.31 *El sistema:*

$$\left. \begin{array}{l} u^t A^{J-J'} - \delta v_{J-J'}^t \geq 0 \\ u^t b + w \leq \delta \alpha \\ \delta + w > 0 \\ \delta, w \geq 0 \end{array} \right\} \quad (3.38)$$

no tiene solución si, y sólo si, $\exists \hat{x} \in F(J')$ tal que $v^t \hat{x} > \alpha$.

Demostración. Si $\exists \hat{x} \in F(J')$ tal que $v^t \hat{x} > \alpha \Leftrightarrow$ el sistema (3.37) tiene solución \Leftrightarrow el sistema:

$$\begin{pmatrix} A^{J'} & A^{J-J'} & -b \\ -A^{J'} & -A^{J-J'} & b \\ -v_{J'}^t & -v_{J-J'}^t & \alpha \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{J'} \\ x_{J-J'} \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{J'} \\ x_{J-J'} \\ y \end{pmatrix} \geq 0$$

tiene solución. Aplicando el teorema de la alternativa de Gale ([Mn69], p. 35) $\Leftrightarrow u^t(A^{J'}, A^{J-J'}, -b) + \delta(-v_{J'}^t, -v_{J-J'}^t, \alpha) + s^t(I, 0, 0) + w(0, 0, -1) \geq 0$, $\delta + w > 0$, $s \geq 0$, $\delta, w \geq 0$, no tiene solución \Leftrightarrow el sistema (3.38) no tiene solución. ■

Consideremos ahora el problema:

$$\left. \begin{array}{l} \min s^t x \\ \text{s.a :} \\ \lambda^t C + u^t A + s = 0 \\ Ax - by = 0 \\ v^t x - \alpha y \geq 1 \\ x, s \geq 0, \lambda \geq e, y \geq 1 \end{array} \right\} \quad (3.39)$$

El problema (3.39) es un problema de programación bilineal, genéricamente denotados como BLP (ver [HrTuy96], p. 20) y, evidentemente, está acotado inferiormente por 0.

La importancia que presenta el problema (3.39) se debe al siguiente resultado:

Teorema 3.5.32 *El programa (3.39) es acotado con valor óptimo 0, si, y sólo si, $\exists F \in E_f^p$ y $\exists \hat{x} \in F$ tales que $v^t \hat{x} > \alpha$.*

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Por hipótesis $\exists F \in E_f^p$. Sabemos que cualquier cara de un poliedro tiene asociado un único descriptor maximal (Teorema 2.3.20). Luego $\exists J' \subseteq J = \{1, \dots, n\}$ descriptor maximal tal que $F = F(J')$. Como $F(J') \in E_f^p$, aplicando el Corolario 2.9.11 \Rightarrow el sistema $\lambda^t C + u^t A + s = 0, s \geq 0, s_{J-J'} = 0, \lambda \geq e$, tiene solución $(\bar{\lambda}, \bar{u}, \bar{s})$. Por otra parte, $\hat{x} \in F(J')$ verifica que $v^t \hat{x} > \alpha$. Por el Teorema 3.5.30 \Leftrightarrow el sistema (3.37) tiene solución (\bar{x}, \bar{y}) . Es claro entonces que $(\bar{\lambda}, \bar{u}, \bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$ es una solución factible de (3.39) tal que $\bar{s}^t \bar{x} = \bar{s}_{J'}^t \bar{x}_{J'} + \bar{s}_{J-J'}^t \bar{x}_{J-J'} = 0$. Como el problema (3.39) está acotado inferiormente por 0 \Rightarrow el programa (3.39) es acotado, con valor óptimo 0.

“ \Rightarrow ”

Por hipótesis, el programa (3.39) es acotado con valor óptimo 0. Supongamos que $(\bar{\lambda}, \bar{u}, \bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$ es una solución óptima del mismo. Sea $J' = \{j \in J / \bar{s}_j > 0\}$ y consideremos la cara $F(J')$. Por el Corolario 2.9.11 $\Rightarrow F(J') \in E_f^p$. Además (\bar{x}, \bar{y}) es solución del sistema (3.37), luego por el Teorema 3.5.30 $\Rightarrow \exists \hat{x} \in F(J')$ tal que $v^t \hat{x} > \alpha$. ■

Nótese que la demostración anteriormente hecha no sólo justifica la existencia de una cara eficiente con la propiedad deseada de incremento del

valor objetivo, sino que también proporciona el mecanismo de construcción de dicha cara. Este hecho será utilizado posteriormente por el algoritmo.

Teorema 3.5.33 *Si el programa (3.39) es acotado con valor óptimo estrictamente positivo entonces $v^t x \leq \alpha, \forall x \in E^P$.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{x} \in E^P$ tal que $v^t \bar{x} > \alpha \Rightarrow \exists F \in E_f^P$ tal que $\bar{x} \in F$. Aplicando el Teorema 3.5.32 \Leftrightarrow el programa (3.39) es acotado con valor óptimo 0, lo cual es #. ■

Teorema 3.5.34 *Supongamos $E^P \neq \emptyset$. Si el programa (3.39) es no factible entonces $\exists x \in X$ tal que $v^t x > \alpha$.*

Demostración. Como $E^P \neq \emptyset$, aplicando el Corolario 1.7.43 \Leftrightarrow el sistema $\lambda^t C + u^t A + s = 0, s \geq 0, \lambda \geq e$, tiene solución. Dado que por hipótesis el programa bilineal (3.39) es no factible \Rightarrow el sistema $Ax - by = 0, v^t x - \alpha y \geq 1, x \geq 0, y \geq 1$, no tiene solución. Ahora, por el Teorema 3.5.30 $\Rightarrow \exists x \in X$ tal que $v^t x > \alpha$. ■

Ahora estamos en disposición de esquematizar un algoritmo para resolver el problema Q basado en la generación de una sucesión de caras eficientes estrictamente crecientes en el valor objetivo de v .

Algoritmo MFP

Paso 0. (Inicialización)

Hacer $i = 0$ y $\alpha^0 = -M$, siendo M una constante positiva arbitrariamente grande.

Paso 1. (Exploración)

Resolver el siguiente problema de programación bilineal T_i :

$$\left. \begin{array}{l} \min s^t x \\ \text{s.a :} \\ \lambda^t C + u^t A + s = 0 \\ Ax - by = 0 \\ v^t x - \alpha^i y \geq 1 \\ x, s \geq 0, \lambda \geq e, y \geq 1 \end{array} \right\} \quad (3.40)$$

Paso 2. (Regla de parada)

Si el programa T_i es no factible o acotado con valor objetivo óptimo estrictamente positivo, STOP. El valor objetivo óptimo de Q es α^i .

En otro caso (el programa (3.40) es acotado, con valor objetivo óptimo 0), continuar.

Paso 3. (Avance)

Sea $(\bar{\lambda}^i, \bar{u}^i, \bar{s}^i, \bar{x}^i, \bar{y}^i)$ una solución óptima de T_i . Hacer $J^i = \{j \in J / \bar{s}_j^i > 0\}$.

Resolver el problema $Q^i \equiv \max\{v^t x / x \in F(J^i)\}$.

Si Q^i es no acotado, STOP. El problema Q es no acotado.

En otro caso, sea \hat{x}^{i+1} una solución extrema óptima de Q^i . Hacer $\alpha^{i+1} = v^t \hat{x}^{i+1}$,
 $i = i + 1$ e ir al paso 1.

Los siguientes resultados mostrarán que los puntos extremos \hat{x}^i generados por el algoritmo MFP tienen valores objetivos estrictamente crecientes. Además veremos que el algoritmo sólo necesita un número finito de iteraciones para encontrar una solución óptima global del problema Q o concluir que éste es no acotado o no factible.

Primero debemos resaltar los siguientes hechos:

- (a) Si T_0 es no factible podemos concluir que Q es no factible (Teorema 3.5.34).
- (b) Si Q^i es no acotado en alguna iteración i entonces Q es también no acotado (inmediato).

Una de las características más importantes del algoritmo propuesto es que es monótono creciente. Efectivamente:

Proposición 3.5.35 *En cada iteración del algoritmo MFP se mejora estrictamente el valor la función objetivo.*

Demostración. Sea α^i el nivel impuesto a la función objetivo $v^t x$ en la iteración i del algoritmo MFP. Por el Teorema 3.5.32, si el programa T_i es acotado con valor óptimo 0 $\Rightarrow F(J^i) \in E_f^p$ y $\exists \hat{x} \in F(J^i)$ tal que $v^t \hat{x} > \alpha$. Como en el paso 3 calculamos α^{i+1} como el valor objetivo óptimo del problema $Q^i \equiv \max\{v^t x / x \in F(J^i)\} \Rightarrow \alpha^{i+1} > \alpha^i$. ■

El algoritmo MFP sólo considera, por cada cara encontrada, un único descriptor (no necesariamente maximal) y descarta de posteriores consideraciones todos aquellos descriptores correspondientes a caras contenidas en alguna de las ya obtenidas. Antes de probar esta afirmación necesitamos un resultado preliminar:

Proposición 3.5.36 Sean $J', J'' \subseteq J$ tales que $F(J'') \subseteq F(J')$ y supongamos que $\max\{v^t x / x \in F(J')\}$ es acotado, con valor objetivo óptimo α . Sea $\beta \geq \alpha$ una constante arbitraria. Entonces el sistema:

$$\left. \begin{aligned} Ax - by &= 0 \\ v^t x - \beta y &\geq 1 \\ x \geq 0, x_{j'} &= 0, y \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

no tiene solución.

Demostración. Por hipótesis, $F(J'') \subseteq F(J')$. Supongamos por reducción al absurdo que el sistema (3.40) es factible. Por el Teorema 3.5.30 $\Rightarrow \exists \hat{x} \in F(J'') \subseteq F(J')$ tal que $v^t \hat{x} > \beta \geq \alpha \Rightarrow \#$. ■

Ahora podemos probar el resultado deseado:

Teorema 3.5.37 Si J^i es el descriptor obtenido en la iteración i del algoritmo MFP, entonces ningún otro descriptor $J' \subseteq J$ tal que $F(J^i) \supseteq F(J')$ será usado en una iteración posterior.

Demostración. Sea $J' \subseteq J$ tal que $F(J^i) \supseteq F(J')$. Sea α^i el nivel utilizado por el programa T_i del algoritmo MFP en la iteración i . Aplicando la Proposición 3.5.36 $\Rightarrow \forall \beta \geq \alpha^i$, el sistema:

$$\left. \begin{aligned} Ax - by &= 0 \\ v^t x - \beta y &\geq 1 \\ x \geq 0, x_{j'} &= 0, y \geq 1 \end{aligned} \right\}$$

no tiene solución. Como este sistema es una especialización de parte de las restricciones del programa T_i , la Proposición 3.5.35 y el Teorema 3.5.30 aseguran que J' no puede ser generado en una iteración posterior j del algoritmo. ■

Como consecuencia directa, combinando que P tiene un número finito de caras eficientes con el Teorema 3.5.37, es directo probar la convergencia del algoritmo propuesto.

Corolario 3.5.38 El algoritmo MFP realiza un número finito de iteraciones.

Nótese que, en el caso peor, el número de iteraciones realizadas por el algoritmo MFP es: $|E_{xp}^P| + 1$. Para que se diese este caso tienen que concurrir las siguientes hipótesis: (i) $v^t x$ ha de ser estrictamente creciente en cada vértice eficiente, (ii) todas las caras generadas por el algoritmo han de ser vértices o aristas acotadas y estar ordenadas en valor creciente de $v^t x$ y (iii) el primer vértice generado ha de ser el de menor valor objetivo.

Finalmente, teniendo en cuenta las propiedades anteriores podemos probar que el algoritmo es válido. Efectivamente:

Corolario 3.5.39 *Si $E^P \neq \emptyset$, el algoritmo MFP encuentra una solución óptima global exacta para el problema Q o concluye que éste es no acotado.*

Demostración. No tiene dificultad dado que P tiene un número finito de caras eficientes y que, por construcción, el algoritmo o bien encuentra una cara eficiente que mejora estrictamente el valor de la función objetivo para el problema o bien determina que no existe ninguna con la propiedad requerida (Teorema 3.5.32) ■

A continuación haremos unos breves comentarios sobre los detalles de codificación del algoritmo MFP.

Resulta claro que, excluyendo el paso 1, todos los demás pasos del algoritmo son fácilmente implementables. En particular, el paso 3 se puede llevar a cabo aplicando técnicas tradicionales de la programación lineal escalar como el método del simplex (ver, por ejemplo, [Mr83]).

El paso 1 es el encargado de la obtención de una cara eficiente, no necesariamente adyacente a la obtenida en la iteración anterior, en la que se mejore estrictamente el valor de la función objetivo. Esta tarea es, sin lugar a dudas, la más cara en demanda computacional del algoritmo MFP, requiriendo el cálculo de un óptimo global de un programa BLP. Este tipo de problemas ha sido estudiado extensivamente dentro del campo de la optimización global durante más de 30 años, existiendo en la actualidad diferentes técnicas bien establecidas, basadas casi todas ellas en la propiedad de que un BLP es posible reformularlo como un problema de minimización cóncava sobre un poliedro. Entre los procedimientos disponibles podemos destacar: los *métodos de planos de corte* como el propuesto por Konno (ver [HrTuy96], Algorithm IX.1, p. 453), los *métodos de aproximación poliédrica interior* como el sugerido por Vaish y Shetty (ver [HrTuy96], Algorithm IX.2, p. 457), los *métodos cónicos* que combinan planos de corte y aproximación interna como el de Gallo y Ülkücü (ver [HrTuy96], Algorithm IX.3, p. 460) o los *métodos basados en aproximación exterior* como el de Thieu (ver [HrTuy96], Algorithm IX.4, p. 465). De todas éstas, sólo el algoritmo de Thieu tiene garantizada su convergencia en un número finito de iteraciones a un óptimo global bajo cualquier tipo de circunstancias (acotación o no de la región factible). Recientemente, Audet et al. ([AHJS99]) han presentado un procedimiento para resolver de forma exacta el BLP en el caso general. Se trata de un algoritmo basado en ramificación y acotación, que utiliza las condiciones de monotonía y holguras complementarias de reformulaciones equivalentes del problema en programas lineales maxmin simétricos. Según los autores, el algoritmo

AHJS se ha usado con éxito para resolver problemas de hasta 200 variables y 200 restricciones ([AHJS99], p. 591).

Ejemplo 3.5.40 Consideremos el problema:

$$P \equiv \max \left\{ x / \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in R_+^3 \right\}$$

Nos proponemos calcular el valor mínimo del primer objetivo sobre la región eficiente utilizando el algoritmo MFP. El problema Q a resolver se formula como: $\max \{(-1, 0, 0) x / x \in E^P\}$. Con el fin de no perder la intuición geométrica hemos representado gráficamente la región factible de P (ver Figura 3.8).

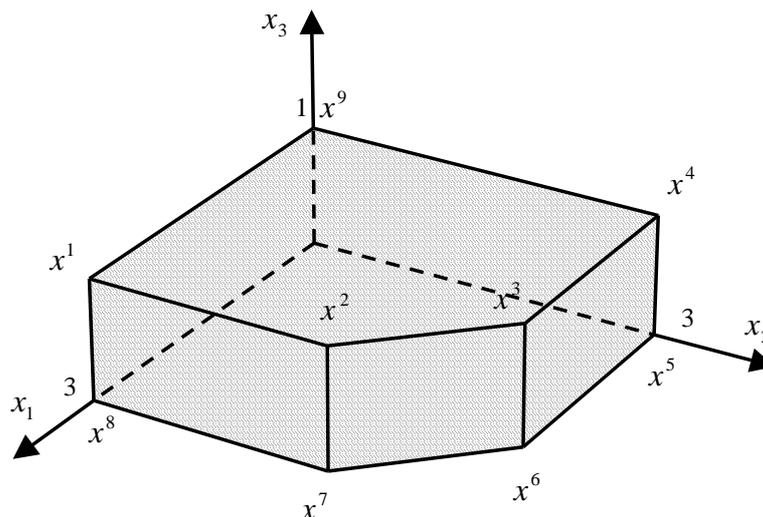


Figura 3.8

Es claro que: $E^P = \text{CVH}(\{x^2, x^3\})$, $E_{xp}^P = \{x^2, x^3\}$ y que la solución óptima de Q se alcanza en $x^3 = (2, 3, 1)$ siendo, el valor objetivo óptimo -2 (2 para el problema original de minimización). Para poder usar el algoritmo MFP necesitamos una descripción lineal de la región factible en forma estándar. Ella se obtiene tomando:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Paso 0.

$i = 0$ y $\alpha^0 = -M$, (M una constante positiva arbitrariamente grande).

Iteración 0.**Paso 1.**

Resolver el BLP:

$$\left. \begin{array}{l} \min s^t x \\ \text{s.a:} \\ \lambda^t C + u^t A + s = 0 \\ Ax - by = 0 \\ v^t x - \alpha^0 y \geq 1 \\ x, s \geq 0, \lambda \geq e, y \geq 1 \end{array} \right\}$$

Se comprueba que este problema es acotado, con valor óptimo 0, siendo una de sus soluciones óptimas la dada por $(\bar{\lambda}^0, \bar{u}^0, \bar{s}^0, \bar{x}^0, \bar{y}^0)$, donde:

$$\bar{\lambda}^0 = (1, 1, 1)^t, \bar{u}^0 = (-1, 0, 0, -1)^t, \bar{s}^0 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)^t, \bar{x}^0 = (3, 2, 1, 0, 0, 1, 0)^t \text{ e } \bar{y}^0 = 1.$$

Paso 3.

$$J^0 = \{4, 7\}.$$

Tenemos que resolver el problema $Q^0 \equiv \max\{v^t x / x \in F(J^0)\}$.

Se comprueba que una solución óptima de Q^0 es $x^3 = (2, 3, 1)^t$, siendo el valor objetivo óptimo $\alpha^1 = -2$. Hagamos $i = 1$.

Iteración 1.**Paso 1.**

Tenemos que resolver el problema:

$$\left. \begin{array}{l} \min s^t x \\ \text{s.a:} \\ \lambda^t C + u^t A + s = 0 \\ Ax - by = 0 \\ v^t x - \alpha^1 y \geq 1 \\ x, s \geq 0, \lambda \geq e, y \geq 1 \end{array} \right\}$$

Este problema se comprueba que es acotado con valor óptimo global estrictamente positivo e igual a 1, siendo una de sus soluciones óptimas la dada por $(\bar{\lambda}^1, \bar{u}^1, \bar{s}^1, \bar{x}^1, \bar{y}^1)$, donde:

$$\bar{\lambda}^1 = (1, 1, 1)^t, \bar{u}^1 = (-1, 0, 0, -1)^t, \bar{s}^1 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)^t, \bar{x}^1 = (1, 3, 1, 1, 2, 0, 0)^t \text{ e } \bar{y}^1 = 1.$$

Paso 2.

Stop, el valor objetivo óptimo de Q es $\alpha^1 = -2$, alcanzándose este óptimo en el punto $x^3 = (2, 3, 1)^t$.



Capítulo 4

Métodos Generadores de Soluciones Eficientes

4.1 Introducción

Aunque el problema de identificar la región eficiente asociada a un LVP ha sido estudiado extensivamente en la literatura, la gran mayoría de los algoritmos publicados no son suficientemente claros en los detalles (que con frecuencia se omiten), presentan numerosos cuellos de botella y suelen suponer la no degeneración y/o acotación de la región factible. Complicando aún más las cosas, debido a la propia estructura del problema, tales procedimientos suelen ser grandes consumidores de recursos computacionales. Todo ello ha ocasionado que, en la actualidad, siga existiendo un considerable interés matemático en el desarrollo de nuevos y más eficaces algoritmos generadores de soluciones eficientes ([StPr98]). Este capítulo aglutina nuestro esfuerzo en este sentido. Así, después de analizar cuidadosamente las cuestiones más tradicionales (como el *cálculo de un vértice eficiente inicial* y la *generación del conjunto de vértices y/o aristas eficientes*), presentamos una clasificación exhaustiva de los algoritmos de resolución para el LVP, incluyendo nuevos procedimientos para cada una de las clases consideradas.

Una de las primeras acciones a realizar por la mayoría de los métodos generadores de soluciones eficientes consiste en calcular un vértice eficiente inicial. En la sección 4.2 analizamos y relacionamos entre sí las técnicas más conocidas. Entre otros detalles de interés mostraremos: i) que el método de maximización lexicográfica ([EvSt73]) sólo es válido cuando en cualquiera de sus iteraciones es posible encontrar una función objetivo acotada, ii) que el método de Isermann ([Is77a]) puede fallar sobre aquellos problemas que verifican que la intersección entre su conjunto criterio y el ortante no negativo es vacío, iii) que el método de Benson ([Bn81]) puede ser visto como

una extensión del método de Isermann, basada en una formulación dual del subproblema empleado por Ecker y Kouada, y iv) que el método de Hartley ([Hr83], [Hr85]) es el procedimiento válido más sencillo de entre todos los considerados.

Históricamente, los primeros algoritmos generadores de soluciones eficientes sólo calculaban vértices. La principal razón era su mayor sencillez, tanto teórica como práctica. Dado que los vértices eficientes constituyen una primera aproximación de la región eficiente, la idoneidad de este tipo de herramientas nunca ha sido puesta en duda, existiendo en la actualidad diversos métodos bien consolidados. En la sección 4.3 presentamos un algoritmo genérico para el cálculo del conjunto de vértices eficientes de un LVP y analizamos con detenimiento las cuestiones más importantes relacionadas con su implementación.

Los métodos generadores de vértices eficientes son susceptibles de ser extendidos, sin apenas cambios, para que calculen también el conjunto aristas eficientes. La información proporcionada de esta manera es sustancialmente más completa e interesante debido a su fuerte carácter geométrico. A pesar de ello, por sí sola, no es suficiente para determinar la estructura facial de la región eficiente. Desafortunadamente, la posibilidad de que existan direcciones extremas eficientes, confiere a la identificación de todas las aristas eficientes una mayor complejidad teórica que la que supone el cálculo exclusivo de los vértices eficientes (Proposición 4.4.3). Todos estos hechos se analizan en la sección 4.4.

En la sección 4.5 estudiamos los métodos generadores de todo el conjunto de soluciones eficientes. Atendiendo exclusivamente a su diseño, tales procedimientos pueden ser agrupados en diversas categorías. Nosotros proponemos una nueva clasificación que resulta de combinar dos más generales sugeridas por Sayin ([Sy96]) y Armand ([Ar93b]), respectivamente. Obtenemos así cuatro clases perfectamente definidas y mutuamente excluyentes: *Ascendentes Globales* (GBU), *Ascendentes Locales* (LBU), *Descendentes Globales* (GTD) y *Descendentes Locales* (LTD). Después de revisar exhaustivamente la literatura, parece ser que el diseño LTD es inédito y representa, por tanto, un enfoque algorítmico no explotado previamente.

Para cada una de las clases anteriores hemos hecho un estudio similar, consistente en proporcionar un esquema genérico de organización de tareas, una especificación precisa de un nuevo algoritmo basada en el esquema previamente reseñado, un análisis de propiedades y la resolución detallada de, al menos, un LVP con el procedimiento propuesto.

La sección 4.5.1 trata el intuitivo y legendario diseño GBU. Basándonos en los resultados enunciados en el Teorema 4.5.4 para

envolventes convexas eficientes, proponemos el procedimiento GBU-COMBINATION para la etapa combinatoria de esta clase de esquemas.

En la sección 4.5.2 analizamos el diseño LBU, el cual se ha revelado como el más ampliamente utilizado por la comunidad científica. Atendiendo a la descripción LBU hemos formulado el algoritmo LBU-FACES. Básicamente, LBU-FACES constituye una extensión del algoritmo VERTICES dado en la sección 4.3, en la cual se ha introducido, para el cálculo de las caras eficientes maximales incidentes en un vértice, una nueva rutina ascendente (a la que hemos denominado BU-IFACES) orientada al tratamiento de caras a través de sus descriptores y que puede emplear como test de eficiencia cualesquiera de los propuestos en la sección 2.8.

La sección 4.5.3 estudia el diseño GTD. Este diseño es también de los más antiguos, habiendo sido utilizado por Yu y Zeleny en 1975 ([YuZl75]). El algoritmo planteado, al que hemos llamado GTD-COMBINATION, se basa en otro más general, TD-IFACES que permite calcular de manera descendente las caras eficientes maximales incidentes en una cara arbitraria especificada a través de un descriptor. Con esta implementación, es posible reutilizar la rutina en la sección 4.5.4. Los test de eficiencia empleados en TD-IFACES son los dados en la sección 2.9.

Por último, en la sección 4.5.4 abordamos el diseño LTD mediante el desarrollo de un algoritmo denominado LTD-FACES. En esencia hemos combinado una versión extendida del algoritmo VERTICES (ver sección 4.3) con el procedimiento TD-IFACES presentado en el apartado anterior, pero especializado adecuadamente con los tests de eficiencia de la sección 2.8.

4.2 Cálculo de un Vértice Eficiente Inicial

Encontrar un punto extremo eficiente inicial suele ser la primera tarea a realizar por la mayor parte de los algoritmos que intentan determinar el conjunto de soluciones eficientes de un LVP. A pesar de que este problema está bien resuelto (ver [Hr83] o [Hr85]) y su complejidad computacional es claramente polinomial, se han publicado, de manera sorprendente, una gran cantidad de artículos sobre el mismo. En esta sección haremos una breve revisión de las ideas más importantes que se han ido sugiriendo a lo largo del tiempo.

Sea P un LVP dado de forma genérica como:

$$\max\{z(x) / x \in X\} \quad (4.1)$$

donde $z(x) = Cx$ y la región factible X es un poliedro descrito a través de:

$$\{x \in R^n / Ax = b, x \geq 0\} \quad (4.2)$$

4.2.1 Método Paramétrico

El *método paramétrico* o *ponderado* quizás sea el procedimiento más sencillo y conocido, aunque por desgracia no siempre válido, para encontrar un vértice eficiente inicial en un LVP. Una de las primeras referencias en que se comenta este procedimiento es en [Ph72] (Method II.1, p.218).

El método paramétrico se basa en que cualquier solución óptima del problema ponderado (P_λ) con pesos estrictamente positivos es eficiente (Teorema 1.4.2). Así, cualquier vértice óptimo de P_λ es un punto extremo eficiente de P . Nótese que el Teorema 1.4.2 no precisa la linealidad del problema P , con lo cual este procedimiento puede ser utilizado para encontrar soluciones eficientes arbitrarias de problemas no lineales.

Para la implementación del algoritmo se selecciona un $\lambda \in R_{++}^k$ arbitrario (por ejemplo, $\lambda = e$) y se resuelve el problema P_λ . Claramente, el número de programas escalares lineales resueltos es 1 y su complejidad es polinomial. Nótese que si X es acotado siempre se verifica que $S_{P_\lambda} \neq \emptyset$ y, por tanto, el algoritmo es válido. Sin embargo, si X es no acotado, puede ocurrir que $S_{P_\lambda} = \emptyset$ y, en consecuencia, el algoritmo puede fallar. Encontrar un λ adecuado que haga que P_λ sea acotado sobre regiones factibles no acotadas puede no ser una tarea sencilla, especialmente cuando el parámetro λ se selecciona al azar. Por suerte, para la gran mayoría de LVP's inspirados en el mundo real, sucede que tienen regiones factibles acotadas y, por tanto, el método funciona correctamente.

En el curso de la resolución de P_λ podemos pasar, de forma inadvertida, durante las pivotaciones intermedias, por puntos extremos que son eficientes para P (aunque no óptimos para P_λ). Para evitar este hecho, podemos considerar un refinamiento del método, en el que se utilice de forma sistemática (después de cada pivotación o un cierto número de ellas) algún test adecuado de eficiencia para vértices (ver sección 2.6).

Las ventajas del método mejorado con respecto al original son: (i) un presumible ahorro de tiempo y, (ii) una disminución de la probabilidad de fracaso del método cuando X es no acotado ([St86], p.227). Hay que notar, sin embargo, que los tests de eficiencia son consumidores de recursos computacionales y, por tanto, el ahorro de tiempo depende en gran medida de la implementación precisa que se haga, pues en ella se establece cuándo deben comenzar las comprobaciones y con qué frecuencia. En [EvSt73], p. 68-70, hay unas interesantes tablas de resultados experimentales en las que, entre otras cosas, se comparan entre sí el método ponderado original y el mejorado con comprobación de eficiencia en cada pivotación (denotadas en

el artículo como *option1* y *option 2*, respectivamente), en las que el primero domina claramente al segundo.

4.2.2 Método de Maximización Lexicográfica

El *método de maximización lexicográfica* o *secuencial* fue desarrollado originalmente por Evans y Steuer (ver [EvSt73] p. 63-66). El procedimiento consiste en ir optimizando, secuencialmente, cada una de las funciones objetivo sobre el conjunto de soluciones óptimas del problema anteriormente considerado. Es bien sabido el hecho de que aunque todas las funciones objetivo sean no acotadas puede ocurrir que $E^P \neq \emptyset$ y, en consecuencia, $E_{xp}^P \neq \emptyset$ (ver Ejemplo 4.2.1). Steuer afirma erróneamente que, obviando esta circunstancia, el método es válido, es decir, proporciona un vértice eficiente ([St86], p. 231). Nosotros probaremos que para que el algoritmo sea válido se necesita como hipótesis que en cada iteración alguna de las funciones objetivo sea acotada sobre la región factible considerada. Si se relaja este requerimiento (exceptuando el caso especial enunciado en la Proposición 4.2.8), el método de maximización lexicográfica puede fallar.

Ejemplo 4.2.1 Consideremos el problema lineal biobjetivo representado en la Figura 4.1. Evidentemente, tanto c_1 como c_2 son no acotadas sobre $X = \mathbb{R}_+^2$ (ortante no negativo) y, sin embargo, $E^P = \{x \in \mathbb{R}_+^2 / x_1 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}_+^2 / x_2 = 0\}$ (frontera del ortante no negativo).

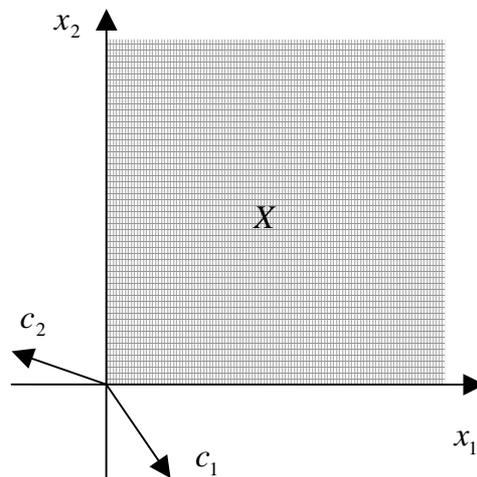


Figura 4.1

De manera pormenorizada, el algoritmo construye una sucesión de k regiones factibles monótonamente encajadas, definidas de forma recursiva de la siguiente forma:

Inicialmente, $X^0 = X$.

Para construir X^1 se debe determinar $j_1 \in \{1, \dots, k\}$, tal que $z_{j_1}(x)$ sea acotado sobre X^0 . Entonces X^1 se define como $\{x \in X^0 / z_{j_1}(x) = \max\{z_{j_1}(x) / x \in X^0\}\}$.

Para calcular X^2 se determina $j_2 \in \{1, \dots, k\} \setminus \{j_1\}$ tal que $z_{j_2}(x)$ sea acotado sobre X^1 . Entonces $X^2 = \{x \in X^1 / z_{j_2}(x) = \max\{z_{j_2}(x) / x \in X^1\}\}$.

En general, para $l \in \{1, \dots, k\}$, $X^l = \{x \in X^{l-1} / z_{j_l}(x) = \max\{z_{j_l}(x) / x \in X^{l-1}\}\}$ donde $j_l \in \{1, \dots, k\} \setminus \{j_1, \dots, j_{l-1}\}$ y tal que $z_{j_l}(x)$ sea acotado sobre X^{l-1} .

Si en alguna iteración $l \in \{1, \dots, k-1\}$, $X^l \neq \emptyset$, pero todas las funciones objetivo no utilizadas todavía en las definiciones de los X^i anteriores, $i \in \{1, \dots, l\}$, son no acotadas sobre X^l , se hace $X^{l+1} = \dots = X^k = \emptyset$.

El método de maximización lexicográfica se fundamenta en los siguientes resultados:

Proposición 4.2.2 ([EvSt73], Lemma 4.4) *Supongamos que $E^P \neq \emptyset$. Si $\exists l \in \{1, \dots, k\}$, $X^l \neq \emptyset$ entonces $X^l \cap E^P \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $\bar{x} \in X^l$. Si $\bar{x} \notin E^P$ por el Corolario 1.10.10 tenemos que $\exists \hat{x} \in E^P$ tal que $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x})$. Luego $\hat{x} \in X^l \cap E^P$. ■

Proposición 4.2.3 ([EvSt73], Lemma 4.7) *Si $X^k \neq \emptyset$ entonces $X^k \subseteq E^P$.*

Demostración. Sea $\bar{x} \in X^k$ y supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in X$, $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \#$ por la construcción de X^k . ■

Proposición 4.2.4 ([St86], Theorem 9.33) $\forall l \in \{1, \dots, k\}$ se verifica $X_{xp}^l \subseteq X_{xp}$.

Demostración. Es evidente, pues por la teoría de la programación lineal escalar ([Mr83]), $X_{xp}^l \subseteq X_{xp}^{l-1}$, $\forall l \in \{1, \dots, k\}$. ■

Combinando las dos proposiciones anteriores tenemos que:

Corolario 4.2.5 $X_{xp}^k \subseteq E_{xp}^P$.

Nótese que, en general, si $X^l = \emptyset$ con $l \in \{1, \dots, k\}$ no podemos concluir nada sobre E^P . Efectivamente,

Ejemplo 4.2.6 (Región eficiente no vacía)

Consideremos el LVP dado por $z_1(x) = -2x_1$, $z_2(x) = -2x_2 + x_3$, $z_3(x) = x_1 + x_2 - 2x_3$ y $X = R_+^3$. Es claro que $(0, 0, 0) \in E_{xp}^P$ (basta utilizar el método ponderado con $\lambda = e$) y, sin embargo, $X^1 = \{x \in R_+^3 / x_1 = 0\}$ y $X^2 = X^3 = \emptyset$.

●

Ejemplo 4.2.7 (Región eficiente vacía)

Consideremos el LVP dado por $z_1(x) = x_1$, $z_2(x) = x_2$, $z_3(x) = x_3$ y $X = \{x \in R_+^3 / x_1 \leq 1\}$. Es claro que $E^P = \emptyset$ y, sin embargo, $X^1 = \{x \in R_+^3 / x_1 = 1\}$ y $X^2 = X^3 = \emptyset$.

●

Hay un caso especial que merece interés:

Proposición 4.2.8 Si $X^{k-1} \neq \emptyset$ y $X^k = \emptyset$ entonces $E^P = \emptyset$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $E^P \neq \emptyset$. Por la Proposición 4.2.2 se tiene $X^{k-1} \cap E^P \neq \emptyset$. Sea $\bar{x} \in X^{k-1} \cap E^P$. Como $X^k = \emptyset \Rightarrow \exists \hat{x} \in X^{k-1}$ tal que $z_i(\hat{x}) = z_i(\bar{x}) \ \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$ y $z_k(\hat{x}) > z_k(\bar{x}) \Rightarrow z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in E^P$.

■

En función de los resultados anteriores, el método de maximización lexicográfica se concreta en el siguiente algoritmo:

Algoritmo ML**Paso 1**

Calcular la secuencia $\{X^i\}$, con $i \in \{1, \dots, k\}$, de acuerdo al procedimiento descrito con anterioridad.

Paso 2

Si $X^k \neq \emptyset$ entonces $X^k \subseteq E^P$. En particular, cualquier punto extremo de X^k es un punto extremo eficiente de P .

En otro caso ($X^k = \emptyset$), no podemos concluir que $E^P = \emptyset$, salvo si $X^{k-1} \neq \emptyset$.

Nótese que construir la sucesión de los X^i , $i \in \{1, \dots, k\}$ no es tan sencillo como parece y, aunque se pueda hacer, quizás se necesiten más de k optimizaciones escalares, en el supuesto de que algunas de las funciones objetivo sean no acotadas.

Evidentemente, el número de programas lineales escalares que se tienen que resolver, para el caso peor, al ejecutar el algoritmo es $k(k+1)/2$ y, por tanto, la complejidad del procedimiento es polinomial.

Para reducir la posibilidad de fallo del método cuando algunas de las funciones objetivo son no acotadas, se puede recurrir nuevamente a la utilización de test de eficiencia para vértices como los dados en la sección 2.6. Existen entonces varias implementaciones posibles: i) Testear el punto extremo eficiente inicial y cada uno de los puntos extremos óptimos encontrados al resolver los problemas de optimización escalar. ii) Testear de forma sistemática (después de cada pivotación o un cierto número de ellas).

En las tablas de resultados computacionales que aparecen en [EvSt73] (p. 68-70) se tienen datos referidos a las implementaciones del método de maximización lexicográfica y a las dos versiones mejoradas anteriores i) y ii) (referidas como option 3, option 4 y option 5¹, respectivamente, en el artículo [EvST73]). De esos experimentos se desprende que el refinamiento descrito en i) mejora claramente a las otras dos posibilidades.

4.2.3 Método de Ecker y Kouada

El método de Ecker y Kouada ([EcKd75]) constituyó, históricamente, el primer método válido para encontrar una solución eficiente inicial (no necesariamente un vértice) para el LVP o concluir que no había ninguna. Además su complejidad resultó claramente polinomial al precisar sólo la resolución de un programa escalar lineal. Posteriormente, Ecker y Hegner ([EcHg78]) refinaron el método original con un nuevo paso, encaminado a encontrar un punto extremo eficiente a partir de la solución eficiente generada con el método inicial. Dado que esta nueva operación, basada en pivotaciones, también era polinomial, la complejidad teórica del procedimiento no se vería afectada aunque, sin embargo, si se resintió la implementabilidad del mismo.

A continuación analizaremos el método primario de Ecker y Kouada y veremos cómo se puede complementar, a través de un procedimiento fácilmente codificable, para generar un vértice eficiente.

El procedimiento de Ecker y Kouada se basa en el principio general enunciado en el Corolario 1.4.36, a saber: Dado $\bar{x} \in X$ y $\bar{z} = z(\bar{x}) \in R^k$. Si $(\hat{x}^t, \hat{s}^t) \in S_{P(\bar{z})}$ entonces $\hat{x} \in E^P$, siendo $P(\bar{z})$ el siguiente problema:

$$\max \{e^t s / Ax = b, Cx = Is + C\bar{x}, x \geq 0, s \geq 0\} \quad (4.3)$$

Además, la validez del método queda garantizada por el siguiente resultado:

¹ Con comprobación de eficiencia después de cada pivotación.

Teorema 4.2.9 ([EcKd75], Theorem 2) *Supongamos $X \neq \emptyset$. Entonces $P(\bar{z})$ es no acotado si, y sólo si, $E^P = \emptyset$.*

Demostración. Por hipótesis, $P(\bar{z})$ es no acotado. Como $X \neq \emptyset$, por dualidad escalar \Leftrightarrow el problema
$$\left. \begin{array}{l} \min u^t b + \lambda^t C \bar{x} \\ \text{s.a.: } (u^t, \lambda^t) \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & -I \end{pmatrix} \geq (0^t, e^t) \end{array} \right\} \text{ es no factible} \Leftrightarrow \min \{u^t b - \lambda^t C \bar{x} / u^t A - \lambda^t C \geq 0^t, \lambda \geq e\} \text{ es no factible} \Leftrightarrow \text{El sistema } u^t A - \lambda^t C \geq 0^t, \lambda > 0 \text{ no tiene solución. Por el Corolario 1.7.46, } \Leftrightarrow E^P = \emptyset. \blacksquare$$

En función de lo visto, el algoritmo de Ecker y Kouada se formula como:

Algoritmo EK

Paso 1.

Si $X = \emptyset$ entonces $E^P = \emptyset$. Stop.
En otro caso, sean $\bar{x} \in X$ y $\bar{z} = z(\bar{x})$.

Paso 2.

Resolver $P(\bar{z})$.
Si $P(\bar{z})$ es no acotado entonces $E^P = \emptyset$.
En otro caso, $\forall (\hat{x}^t, \hat{s}^t) \in S_{P(\bar{z})}$ se tiene $\hat{x} \in E^P$.

Como hemos mencionado anteriormente la solución generada por el algoritmo no necesariamente ha de ser un vértice. Seguidamente vamos a dar un elegante y práctico resultado propuesto por Benson en un contexto no relacionado con el tema que nos ocupa que, sin embargo, proporcionará una forma de obtener un punto extremo eficiente a partir de una solución óptima de $P(\bar{z})$.

Sean $\bar{\lambda} \in R_{++}^k$ arbitrario, $\bar{x} \in E^P$, $\bar{z} = C\bar{x}$ y consideremos los siguientes problemas:

$$P_{\bar{\lambda}, \bar{z}} \equiv \max \{ \bar{\lambda}^t Cx / Ax = b, Cx \geq \bar{z}, x \geq 0 \}$$

$$D_{\bar{\lambda}, \bar{z}} \equiv \min \left\{ (u^t, v^t) \begin{pmatrix} b \\ \bar{z} \end{pmatrix} / (u^t, v^t) \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \geq \bar{\lambda}^t C, v \leq 0 \right\}$$

Nótese que $D_{\bar{\lambda}, \bar{z}}$ es el problema dual de $P_{\bar{\lambda}, \bar{z}}$.

Teorema 4.2.10 ([Bn92], Lemma 2.1, [BnSy93], Theorem 4) *Sea $(\bar{u}^t, \bar{v}^t) \in S_{D_{\bar{\lambda}, \bar{z}}}$, donde \bar{v} representa las variables duales asociadas a las restricciones $Cx \geq \bar{z}$ de $P_{\bar{\lambda}, \bar{z}}$. Entonces, $\bar{x} \in S_{P_{\bar{\lambda}, \bar{z}}}$, con $\hat{\lambda} = \bar{\lambda} - \bar{v}$.*

Demostración. Como $\bar{x} \in E^P$, por el Teorema 1.4.44 se tiene que $\bar{x} \in S_{P_{\bar{\lambda}, \bar{z}}}$. Aplicando dualidad escalar, dado $(\bar{u}^t, \bar{v}^t) \in S_{D_{\bar{\lambda}, \bar{z}}}$ $\Rightarrow \bar{\lambda}^t C \bar{x} = \bar{u}^t b + \bar{v}^t C \bar{x} \Rightarrow \hat{\lambda}^t C \bar{x} = (\bar{\lambda}^t - \bar{v}^t) C \bar{x} = \bar{u}^t b$, donde $\hat{\lambda} = \bar{\lambda} - \bar{v}$. Evidentemente $\hat{\lambda} \in R_{++}^k$. Como el problema $D_{\hat{\lambda}}$ viene dado por $\min\{u^t b / u^t A \geq \hat{\lambda}^t C = (\bar{\lambda}^t - \bar{v}^t) C, u \in R^m\}$ y $(\bar{u}^t, \bar{v}^t) \in S_{D_{\bar{\lambda}, \bar{z}}} \Rightarrow \bar{u} \in X^{D_{\hat{\lambda}}}$. Ahora bien, como $\bar{x} \in X$ y $\hat{\lambda}^t C \bar{x} = \bar{u}^t b \Rightarrow \bar{x} \in S_{P_{\hat{\lambda}}}$. ■

En función del resultado anterior es posible formular un procedimiento para obtener un vértice eficiente a partir de un punto de $S_{P(\bar{z})}$.

Algoritmo EV-CATCHER

Paso 1.

Sea $(\hat{x}^t, \hat{s}^t) \in S_{P(\bar{z})}$.

Si $\hat{x} \notin X_{xp}$ entonces resolver $D_{\bar{\lambda}, \hat{z}^t}$ con $\bar{\lambda} \in R_{++}^k$ arbitrario y $\hat{z} = z(\hat{x})$.

Sea $(\bar{u}^t, \bar{v}^t) \in S_{D_{\bar{\lambda}, \hat{z}}}$. (Nótese que $D_{\bar{\lambda}, \hat{z}}$ siempre es acotado por serlo $P_{\bar{\lambda}, \hat{z}}$).

Paso 2.

Hacer $\hat{\lambda} = \bar{\lambda} - \bar{v}$ y resolver $P_{\hat{\lambda}}$.

Cualquier vértice óptimo de $P_{\hat{\lambda}}$ es un vértice eficiente de P .

4.2.4 Método de Isermann

En el año 1977 Isermann propuso un nuevo procedimiento para encontrar un punto extremo eficiente inicial de un LVP ([Is77a], p. 714). La propuesta de Isermann era atractiva por los siguientes motivos: i) Era fácilmente implementable (sólo precisaba la resolución de dos programas lineales escalares). ii) Proporcionaba un vértice eficiente. iii) Fue proclamado como válido bajo cualquier tipo de circunstancias.

Precisamente, la ventaja iii) del método estaba fundamentada en el siguiente resultado:

Sea D^* el problema dado por: $\min\{u^t b / u^t A - \lambda^t C \geq 0^t, \lambda \geq e\}$.

Teorema 4.2.11 (Ver [Is76], Theorem 5, [Is77a], Theorem 3) $E^P \neq \emptyset$ si, y sólo si, D^* es acotado.

Nótese que, en el teorema anterior, la implicación hacia la izquierda es clara. Efectivamente, si D^* es acotado, dado $(\bar{u}^t, \bar{\lambda}^t) \in S_{D^*}$ entonces $D_{\bar{\lambda}}$ es

acotado, siendo $\bar{\lambda} \in R_{++}^k$. Por tanto, $P_{\bar{\lambda}}$ es acotado y, en consecuencia, $E^P \neq \emptyset$.

En función del razonamiento anterior, es posible formular un algoritmo de 2 etapas:

Algoritmo I

Paso 1.

Resolver D^* . Si el problema es no factible o no acotado $\Rightarrow E^P = \emptyset$. Stop.

En otro caso, sea $(\bar{u}^t, \bar{\lambda}^t) \in S_{D^*}$.

Paso 2.

Resolver $P_{\bar{\lambda}}$. ($\emptyset \neq S_{P_{\bar{\lambda}}} \subseteq E^P$).

Lamentablemente, el Teorema 4.2.11 no es cierto en general, como pusieron de manifiesto Ecker y Hegner ([EcHg78]), mediante un contraejemplo en el que se daba un problema P acotado, para el que D^* era factible y no acotado. De esta forma, el método de Isermann perdía su importante característica de validez bajo cualquier tipo de hipótesis.

Un sencillo análisis del Teorema 4.2.11 nos ayudará a ver qué se le pasó por alto a Isermann.

Como probamos anteriormente, siempre ocurre que si D^* es acotado entonces $E^P \neq \emptyset$. Además, es claro que si D^* es no factible entonces $E^P = \emptyset$. Ahora bien, queda por estudiar el caso (posible) en que D^* sea no acotado. En esta situación Isermann concluyó erróneamente (como probaron Ecker y Hegner) que $E^P = \emptyset$. Veamos qué condiciones hacen que D^* sea no acotado. Si suponemos que D^* es factible y no acotado, entonces equivalentemente, aplicando dualidad escalar, el problema $\max\{e^t s / Ax = b, Cx \geq 0, x \geq 0\}$ debe ser no factible, es decir, $\{x \in X / Cx \geq 0\} = \emptyset$. Benson, en 1981, reparó en éste hecho y estableció que el método de Isermann es válido sólo para la clase de problemas P para los que $\{x \in X / Cx \geq 0\} \neq \emptyset$ ([Bn81], Theorem 1).

4.2.5 Método de Benson

En la misma tónica del método de Isermann, Benson propone un procedimiento válido, estructurado en tres etapas, para encontrar un vértice eficiente inicial en el LVP.

El método de Benson ([Bn81]) está basado en el siguiente resultado:

Sean $\bar{x} \in X$ y $\bar{z} = z(\bar{x})$ y denotemos el problema dual de $P(\bar{z})$, bajo hipótesis de linealidad, por $D(\bar{z})$.

Corolario 4.2.12 $D(\bar{z})$ es acotado si, y sólo si, $E^P \neq \emptyset$.

Demostración. $D(\bar{z})$ es acotado $\Leftrightarrow P(\bar{z})$ es acotado $\Leftrightarrow E^P \neq \emptyset$. ■

Nótese que $D(\bar{z}) \equiv \min\{u^t b - \lambda^t C\bar{x} / u^t A - \lambda^t C \geq 0^t, \lambda \geq e\}$. En realidad, Benson considera en su artículo un problema ligeramente distinto a $D(\bar{z})$, pero equivalente a él, sin más que hacer el cambio de variable $\lambda = \lambda - e$ en $D(\bar{z})$.

Supongamos que $D(\bar{z})$ es acotado y sea $(\bar{u}^t, \bar{\lambda}^t) \in S_{D(\bar{z})}$. Entonces $\exists \bar{\lambda} \in R_{++}^k$ tal que $D_{\bar{\lambda}}$ es factible. En consecuencia, si $X \neq \emptyset$ se tiene que $P_{\bar{\lambda}}$ es acotado. Teniendo en cuenta este razonamiento, el método de Benson queda descrito de la siguiente forma:

Algoritmo B

Paso 1.

Si $X = \emptyset$ entonces $E^P = \emptyset$. Stop.
En otro caso, sean $\bar{x} \in X$ y $\bar{z} = z(\bar{x})$.

Paso 2.

Resolver $D(\bar{z})$.
Si $D(\bar{z})$ es no acotado entonces $E^P = \emptyset$. Stop.
En otro caso, sea $(\bar{u}^t, \bar{\lambda}^t) \in S_{D(\bar{z})}$.

Paso 3.

Resolver $P_{\bar{\lambda}}$. ($\emptyset \neq S_{P_{\bar{\lambda}}} \subseteq E^P$).

Se podría considerar que el método de Benson utiliza una formulación dual al de Ecker y Kouada, en el sentido de que el programa lineal propuesto por Benson, $D(\bar{z})$, es el dual del problema $P(\bar{z})$ considerado por Ecker y Kouada.

Obsérvese, además, que si $\bar{x} \in X$ es tal que $C\bar{x} = 0$, el programa lineal $D(\bar{z})$ propuesto por Benson coincide con el considerado por Isermann (D^*), y ambos métodos son exactamente iguales.

4.2.6 Método de Hartley

A comienzos de los años 80 se disponía de un conjunto, más o menos amplio, de métodos para obtener un vértice eficiente inicial de un LVP. Sin embargo, el problema había sido resuelto, quizás por no realizar un planteamiento adecuado del mismo, de una manera innecesariamente complicada. Este hecho fue observado por Hartley, quién propuso, en 1983 (ver [Hr83], p. 9), un nuevo procedimiento, válido bajo cualquier hipótesis, que destacaba frente a sus predecesores por su mayor sencillez, tanto teórica como práctica.

La fundamentación del método de Hartley reside en el Corolario 1.7.46: “Si suponemos $X \neq \emptyset$, entonces $E^P = \emptyset$ si, y sólo si, el sistema $u^t A - \lambda^t C \geq 0$, $\lambda \geq e$, no tiene solución”.

Por otra parte, es claro que si $u^t A - \lambda^t C \geq 0$, $\lambda \geq e$ tiene solución entonces $\exists \bar{\lambda} \in R_{++}^k$ tal que $D_{\bar{\lambda}}$ es factible. Si asumimos que $X \neq \emptyset$ entonces $P_{\bar{\lambda}}$ es acotado.

Llamando $Y = \{(u^t, \lambda^t) / u^t A - \lambda^t C \geq e^t C, \lambda \geq 0\}$, el algoritmo se concreta en:

Algoritmo H

Paso 1.

Si $X = \emptyset$ entonces $E^P = \emptyset$. Stop.

Paso 2.

Si $Y = \emptyset$ entonces $E^P = \emptyset$. Stop.

En otro caso, encontrar $(\bar{u}^t, \bar{\lambda}^t) \in Y$.

Paso 3.

Sea $\hat{\lambda} = \bar{\lambda} + e$. Resolver $P_{\hat{\lambda}}$. ($\emptyset \neq S_{P_{\hat{\lambda}}} \subseteq E^P$).

Nótese que encontrar soluciones factibles para X e Y o, en otro caso, concluir que son vacíos, no conlleva dificultad práctica. Además, si $X \neq \emptyset$ la s.f.b. encontrada en el paso 1 puede utilizarse como vértice inicial para la resolución de $P_{\hat{\lambda}}$ en el paso 3.

4.3 Cálculo del Conjunto de Vértices Eficientes

Los algoritmos que calculan el conjunto de vértices (o bases) eficientes de problema lineal vectorial P son importantes por varias razones:

- (i) Son más sencillos, desde un punto de vista teórico, y rápidos, desde un punto de vista computacional, que cualquiera de los métodos generadores de E^P .
- (ii) Proporcionan una primera aproximación de E^P . Es bien sabido (Teorema 2.5.7) que, para el caso de que X sea un polítopo, se verifica que $E^P \subseteq CVH(E_{xp}^P)$.
- (iii) Por lo regular, con ligeras modificaciones también proporcionan el conjunto de aristas eficientes (ver sección 4.4).
- (iv) Constituyen el esquema algorítmico básico (en el que insertar las rutinas generadoras de las caras eficientes incidentes en un vértice dado) de una clase muy importante de algoritmos generadores de soluciones eficientes (ver el estudio de los métodos locales realizado en las secciones 4.5.2 y 4.5.4).

Las consideraciones anteriores justifican que dediquemos parte de nuestro esfuerzo al estudio de los métodos generadores de vértices eficientes.

Resulta tentador pensar que para generar E_{xp}^P basta con determinar todos los vértices de la región factible X y descartar aquellos cuyas imágenes a través de z estén dominados por algún otro vértice. Esto es falso, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.3.1 Consideremos el LVP: $\max\{x / x \in X\}$, donde X es el poliedro bidimensional representado en la Figura 4.2. Es claro que todos los vértices de X ($X_{xp} = \{x^1, x^2, x^3\}$) son no comparables entre sí y, sin embargo, $E_{xp}^P = \{x^1, x^2\}$.

●

Aún en el caso de que mediante algún procedimiento o test eliminásemos aquellos vértices que no fuesen eficientes, este método *de fuerza bruta* resultaría, en la práctica, costosísimo, debido a que el número total de vértices de un poliedro puede ser enorme y, sin embargo, sólo ser eficientes una reducida porción de ellos.

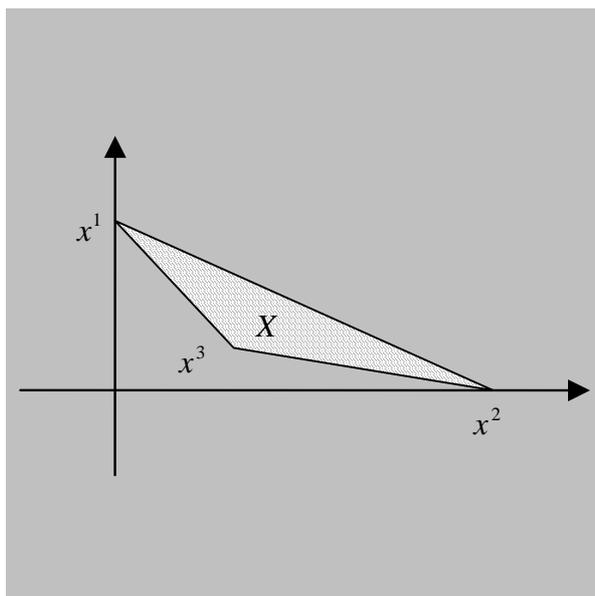


Figura 4.2

Sin duda, uno de los resultados más importantes en la teoría LVP, y piedra angular de la mayor parte de los algoritmos para resolver E^P , es el hecho de que el conjunto de vértices eficientes es conexo (Corolario 1.7.39). Esta propiedad da lugar a un procedimiento, mucho más sutil y práctico que el anteriormente reseñado, organizado en 3 etapas básicas: Una operación de inicialización consistente en obtener un punto extremo eficiente inicial (ver sección 4.2). Un proceso de exploración que determina los vértices adyacentes a uno dado y descarta aquéllos no eficientes. Y un paso de avance que elige (eliminando de posteriores consideraciones) un vértice eficiente conocido para el cual no se haya estudiado su entorno. El procedimiento se repite hasta que no queden más vértices eficientes por estudiar.

Zeleny ([Zl74], p. 99) y Yu y Zeleny ([YuZl75], p. 450) utilizan esta técnica (ya superada, aunque históricamente importante) de obtener vértices adyacentes, no obviamente ineficientes (ver Proposición 4.3.6), y luego comprobar su eficiencia.

Sin embargo, este procedimiento resulta aún bastante oneroso, debido a que se generan más vértices de los estrictamente necesarios y a que los test de eficiencia requieren, por lo general, la resolución de algún programa escalar lineal (LP).

Ahora bien, se puede obtener un mayor rendimiento de esta técnica si introducimos algún mecanismo que garantice que los vértices adyacentes generados en un paso arbitrario del algoritmo son eficientes. Así, un bosquejo rudimentario de un algoritmo más conveniente para generar el conjunto de vértices eficientes consistiría en: *Hallar un vértice eficiente inicial y determinar todos los vértices eficientes adyacentes a él, para a*

continuación elegir uno de ellos y repetir el proceso iterativamente. En términos prácticos, el empleo de este procedimiento debe traducirse en una mejora del rendimiento computacional de aquellos métodos que la utilicen. Los algoritmos generadores de vértices eficientes dados en [EvSt73], [St86], [EcKd78], [Hr83] y [ArMl91] se enmarcan dentro de este enfoque.

Veamos un algoritmo genérico para el cálculo de vértices eficientes basado en esta idea mejorada. Utilizaremos la siguiente notación:

V_1	Lista de vértices eficientes explorados.
V_2	Lista de vértices eficientes no explorados.
$EV(x^i)$	Vértices E-adyacentes a x^i (Definición 1.6.9).

Esquema VERTICES

Paso 0. Inicialización.

Encontrar un vértice eficiente inicial x^0 . Si no hay ninguno, STOP. $E_{xp}^P = \emptyset$.

En otro caso, hacer $V_1 \leftarrow \emptyset$, $V_2 \leftarrow \{x^0\}$, $i \leftarrow 0$.

Paso 1. Progresión, exploración y registro.

Seleccionar un punto $x^i \in V_2$. Hacer $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{x^i\}$ y $V_2 \leftarrow V_2 - \{x^i\}$.

Calcular $EV(x^i) = \{x \in E_{xp}^P / x \sim_E x^i\}$ y hacer $V_2 \leftarrow V_2 \cup (EV(x^i) - V_1)$.

Paso 2. Terminación.

Si $V_2 = \emptyset \Rightarrow$ STOP. $E_{xp}^P = V_1$. En caso contrario, hacer $i \leftarrow i + 1$ e ir al paso 1.

Analicemos algunas de las propiedades del esquema VERTICES:

Teorema 4.3.2 *El esquema VERTICES es válido.*

Demostración. Por la conexidad del conjunto de vértices eficientes (Corolario 1.7.39). ■

Teorema 4.3.3 *El esquema VERTICES es finito.*

Demostración. Dado que en la literatura existen procedimientos finitos para calcular $EV(x^i)$ (ver, por ejemplo, [Is77a], [EcKd78], [ArMl91], [Ar93b]) la demostración es clara pues: i) los vértices eficientes generados no se repiten, ii) en cada iteración se pasa un vértice distinto de V_2 a V_1 y iii) el número de vértices eficientes de P es finito. ■

Si denotamos por $O(EV)$ la complejidad de la rutina que calcula el conjunto de vértices E-adyacentes a uno dado, se tiene:

Proposición 4.3.4 *El esquema VERTICES tiene una complejidad $|E_{xp}^P| * O(EV)$.*

Como $|E_{xp}^P|$ puede ser muy grande (exponencial en la entrada), independientemente de $O(EV)$ (que se suele dar en función del número de programas lineales escalares resueltos o del número de aristas eficientes incidentes en el punto extremo), el esquema VERTICES tiene una complejidad no polinomial, por lo que problemas relativamente pequeños requieren una gran cantidad de cálculo.

Es interesante notar que dado que existen polítopos para los cuales el grafo de aristas asociado es completo y como la eficiencia completa siempre se puede lograr eligiendo adecuadamente la matriz de costos, resulta que tales algoritmos tienen, en el peor de los casos, un comportamiento cuadrático en $|X_{xp}|$ para el número de LP's resueltos.

Complicando aún más la cuestión hay que decir que, hasta el momento, no se conoce ningún algoritmo que enumere el conjunto de puntos extremos de un polítopo definido por un sistema de restricciones degenerado en tiempo polinomial en el tamaño de la entrada y la salida ([MrCh95], p. 30).

4.3.1 Consideraciones Prácticas

Aunque el esquema VERTICES es conceptualmente claro, su implementación no es trivial. En este subapartado intentaremos arrojar cierta luz sobre este aspecto.

Sabemos que cuando X es no degenerado existe una correspondencia biunívoca entre las bases factibles y los vértices de X (ver, por ejemplo, [Hd62], p. 100 ó [Mr83], p.121). Además, mediante el empleo de la tablas canónicas podemos identificar fácilmente todas las bases factibles adyacentes a una dada y movernos a cualquiera de ellas a través de una única operación de pivotación ([Mr83]). De acuerdo a esta idea en [EvSt73], [Is77], [EcKd78], ... se proponen test para saber qué pivotes de las tablas canónicas conducen a bases o direcciones eficientes. A esta organización de datos basadas en tablas la denominaremos *esquema de pivotaciones (eficientes)*. Aunque esta metodología de trabajo es la que tradicionalmente se ha utilizado, la misma tiene serias dificultades para el caso en que X sea degenerado, pues no se conoce ningún método que de forma eficaz enumere, siquiera, los vértices adyacentes a uno degenerado ([Pr94], p. 48).

Una alternativa a la utilización de un esquema de pivotaciones para el caso degenerado, conocida como *método de perturbaciones* (ver, por ejemplo, [Hd62], p. 175), propone perturbar X añadiendo pequeñas cantidades a las componentes del vector de recursos. Si esta operación se hace correctamente, obtendremos un poliedro X' no degenerado, para el cual cada vértice del mismo corresponde a un vértice de X y cada vértice de X tiene asociado al menos un vértice de X' . El método de perturbaciones resulta prometedor dado que no hay más, (en general, muchos menos) vértices de X' que bases factibles de X . Sin embargo, y desafortunadamente, $|X'_{xp}|$ puede ser exponencialmente mayor que $|X_{xp}|^1$.

En realidad, desde un punto de vista algorítmico, el método de perturbaciones se corresponde con el establecimiento de algún orden lexicográfico sobre el conjunto de las bases factibles del problema, de tal manera que sólo se seleccionen algunas de las bases asociadas a un vértice degenerado ([Ar93a], p. 250).

Este hecho fue explotado por Armand y Malivert (1991) ([ArMl91]) quienes proponen un método para generar los vértices y aristas eficientes, esencialmente igual al de Isermann ([Is77a]), pero con un tratamiento especial para la degeneración ([ArMl91], p. 473) consistente en determinar una base eficiente inicial y aplicar la regla de pivotación lexicográfica de Dantzig, Orden y Wolfe ([Dn63]) en conjunción con un test de eficiencia (Corolario 2.6.11), para el cálculo de las bases duales-eficientes adyacentes.

A continuación realizamos una serie de consideraciones sobre la implementación de las tareas más relevantes del esquema VERTICES.

Sean $\bar{x} \in X_{xp}$, $B \in B(\bar{x})$, R la matriz de costos reducidos asociada a B y r_i la fila i de R .

Inicialización.

El tópico de encontrar un vértice eficiente inicial para un LVP fue tratado en profundidad en la sección 4.2. Para no ser repetitivos, y muy sintetizadamente, tenemos que: (i) Si X es un polítopo basta con resolver el problema paramétrico P_e para obtener un punto extremo eficiente inicial. (ii) Para el caso general (X un poliedro no necesariamente acotado), podemos utilizar diversos métodos a prueba de fallos, entre los que destacamos, por ejemplo, el método de Hartley ([Hr83]). Este paso tiene claramente una complejidad polinomial (se trata de resolver uno o dos LP's) y no reviste especial dificultad.

¹ En [Ar93a], Theorem 4.4, p. 262, se dan cotas superiores e inferiores para el número de vértices de X' asociado a uno degenerado de X , cuando X es un poliedro de dimensión total.

Con el fin de minimizar el número de iteraciones necesarias en esta etapa puede ser de utilidad el siguiente resultado:

Proposición 4.3.5 ([YuZl75], Remark 3.3) *Si $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $r_{ij} > 0$, $\forall j \in J_N$ entonces $\bar{x} \in E_{x^p}^p$.*

Demostración. Inmediata, sin más que observar que en las hipótesis anteriores, \bar{x} es la única solución óptima de P_i . ■

Progresión.

Consiste en elegir un cierto $x^i \in V_2$. Entre las reglas más usuales a considerar tenemos (ver, por ejemplo, [HrSh78], Chapter 6):

- (i) búsqueda *primero en anchura*. La lista V_2 se codifica como una *cola* (regla FIFO).
- (ii) búsqueda *primero en profundidad*. La lista V_2 se codifica como una *pila* (regla LIFO).
- (iii) Elección al azar.

En general, con cualquiera de las tres estrategias anteriores y utilizando un esquema de pivotaciones eficientes, para pasar de la tabla $T(B^i)$ a la tabla $T(B^{i+1})$ se utiliza el *crashing*², pues las bases y sus inversas no se suelen almacenar de forma explícita por razones de espacio y velocidad. En numerosas ocasiones, el *crashing* conlleva múltiples pivotaciones, puesto que las tablas de partida y llegada pueden diferir en un gran número de variables básicas. Desde el punto de vista computacional, si se utiliza la búsqueda primero en profundidad, resulta más oportuno descartar V_2 y almacenar en una pila de pivotaciones el par (fila, columna) por cada pivote utilizado en las iteraciones realizadas hacia delante. De esta manera, cuando una base ya ha sido estudiada (no conduce a ninguna base eficiente adyacente sin explorar) elegir una base (no explorada) de V_2 , se traduce en hacer un *pop* (sacar un elemento) de la pila y realizar la pivotación inversa correspondiente (el equivalente a una operación de backtracking), lo cual resulta ser en la práctica computacionalmente menos costoso que la técnica de *crashing* aplicada habitualmente (ver los experimentos computacionales de Strijbosch et al. [StVS91]).

Exploración (cálculo de $EV(x^i)$).

Se trata de la parte del esquema más delicada y pesada (en recursos computacionales). Básicamente, se trata de determinar cuáles de las aristas incidentes a un punto extremo eficiente dado son eficientes. Es ampliamente

² Se conoce como *crashing* al proceso de moverse de una base a otra en un número mínimo de pivotaciones ordinarias, sin tener en cuenta la factibilidad intermedia ([St86], p. 107).

conocido que ya el cálculo de las aristas incidentes en un vértice degenerado es problemático (ver [Hr83], p. 8 o [Geue93]). Además, cualquiera que sea la técnica elegida, ésta debe garantizar que no queden aristas sin explorar.

Como sabemos, las caracterizaciones más importantes relacionadas con la eficiencia de una arista incidente en un vértice eficiente dado, se basan en la resolución de algún LP (ver sección 2.7) y tienen, por tanto, complejidad polinomial.

Se puede reducir el número de LP's resueltos si descartamos *ineficiencias obvias*:

Consideremos $\tilde{J}_N = \{j \in J_N / \theta_j > 0\}$ donde θ_j es la razón mínima del método del simplex primal asociada a la columna j (ver, [Mr83], p. 66). Obsérvese si \bar{x} es no degenerado $\tilde{J}_N = J_N$ y si \bar{x} es degenerado $\tilde{J}_N = \{j \in J_N / y_D^j \leq 0\}$, donde Y_D denota las filas de Y asociadas a variables básicas degeneradas.

Dado $j \in \tilde{J}_N$, sean r^j la columna j de R y \bar{x}^j la nueva s.f.b. que se obtiene cuando se introduce x_j en la base, supuesto que $\theta_j < \infty$.

Proposición 4.3.6 ([YuZl75], Theorem 3.1) *Sea $j \in \tilde{J}_N$, con $\theta_j < \infty$.*

- (i) *Si $r^j \leq 0$ entonces $\bar{x} \notin E_{xp}^P$.*
- (ii) *Si $r^j \geq 0$ entonces $\bar{x}^j \notin E_{xp}^P$.*
- (iii) *Si $\exists k \in J'_N$, $\theta_j r^j \geq \theta_k r^k$ entonces $\bar{x}^j \notin E_{xp}^P$.*

Demostración. Sabemos que $\bar{z}^j = C\bar{x}^j = C\bar{x} - \theta_j r^j$.

Si $r^j \leq 0 \Rightarrow \bar{z}^j = C\bar{x}^j = C\bar{x} - \theta_j r^j \geq C\bar{x} = \bar{z} \Rightarrow \bar{x} \notin E_{xp}^P$.

Si $r^j \geq 0 \Rightarrow \bar{z}^j = C\bar{x}^j = C\bar{x} - \theta_j r^j \leq C\bar{x} = \bar{z} \Rightarrow \bar{x}^j \notin E_{xp}^P$.

Si $\exists k \in J'_N$, $\theta_j r^j \geq \theta_k r^k \Rightarrow \bar{z}^j = C\bar{x}^j = C\bar{x} - \theta_j r^j \leq C\bar{x} - \theta_k r^k = C\bar{x}^k = \bar{z}^k$
 $\bar{x}^j \notin E_{xp}^P$. ■

Interpretando el apartado (ii) de la proposición anterior, resulta que no interesa intentar meter en la base aquellas variables con $r^j \geq 0$.

La Proposición 4.3.6 se puede extender sin dificultad al caso de aristas no acotadas (ver Proposición 4.4.4)

En el peor de los casos (eficiencia completa), para un problema no degenerado, por cada vértice eficiente habría que resolver $n - m$ LP's. Luego,

$O(EV) = O(n) * O(LP)$. Evidentemente, un tratamiento unificado (aplicación de alguna *técnica de postoptimalidad lineal*) y una implementación cuidadosa de los test empleados puede ahorrar una gran cantidad de cálculo y mejorar considerablemente el rendimiento computacional (ver, por ejemplo, [EcKd78] o [ArMl91]).

A título de ejemplo desarrollaremos una idea dada por Armand y Malivert ([ArMl91], p. 479), que mejora sustancialmente el esfuerzo computacional empleado en la determinación de las variables no básicas eficientes asociadas a una base B $\bar{\lambda}$ -dual-eficiente dada.

Efectivamente, si R es la matriz de costos reducidos asociada a B (base λ -dual-eficiente no degenerada), para comprobar si x_j ($j \in J_N$) es una variable λ -eficiente, por el Corolario 2.7.6, sólo se necesita verificar la factibilidad del sistema lineal:

$$\{\lambda'R - s = 0, s_j = 0, \lambda > 0, s \geq 0\} \quad (4.4)$$

En orden a manejar computacionalmente desigualdades estrictas como $\lambda > 0$ basta tener en cuenta que, por la homogeneidad del sistema (4.4) podemos sustituir $\lambda > 0$ por $\lambda \geq \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}_{++}^k$ arbitrario pero fijo. En términos de la programación lineal escalar tal sistema es equivalente a que el problema:

$$\min\{s_j / \lambda'R - s = -\alpha'R, \lambda \geq 0, s \geq 0\} \quad (4.5)$$

sea acotado con valor óptimo 0.

En la literatura, una elección común consiste en tomar $\alpha = e$, (ver, por ejemplo, [EcKd78], Corollary 2), aunque en este caso no se puede garantizar la no negatividad de $e'R$, lo que obligaría, en general, a tener que aplicar la fase I del método del simplex. Sin embargo, como (4.5) hay que resolverlo para cada $j \in J_N$, esto puede suponer un coste no despreciable en absoluto, habida cuenta que es ampliamente aceptado el hecho de que las fases I y II del método del simplex tienen, aproximadamente, la misma demanda computacional ([Mr83]).

Ahora bien, si se toma $\alpha = \bar{\lambda}$, por ser B $\bar{\lambda}$ -dual-eficiente se verifica que $\alpha'R \geq 0$. De esta manera se tiene una base factible inicial inmediata para (4.5), pudiéndose empezar directamente con la fase II del método del simplex. Esto constituye una clara ventaja frente al proceso anteriormente reseñado.

Registro.

En cada iteración del esquema hay que clasificar los vértices eficientes obtenidos (posiblemente en gran número) en explorados y no explorados y, en el segundo caso, añadirlos a V_2 . Ello implica búsquedas continuadas,

tanto en V_1 como en V_2 . Además, a medida que se generan vértices eficientes, aumenta el tamaño de V_1 y, constantemente, se modifica el de V_2 .

Por tales motivos, para aumentar el rendimiento computacional del esquema es importante prestar atención, entre otras cuestiones, a las técnicas de codificación y almacenamiento que se haga de los vértices y al tipo de búsqueda que se realice sobre los mismos.

Existen diferentes esquemas de codificación de los vértices o bases, siendo uno muy sencillo el consistente en almacenar solamente el conjunto de variables básicas (o no básicas) en formato de array desordenado. Ahora bien, dado que el número de variables en el problema puede ser grande y $|E_{xp}^P|$ elevado, con el fin de acelerar al máximo las velocidades de ejecución y disminuir los requerimientos de almacenamiento, es fundamental utilizar un formato de datos debidamente *compactado* o *comprimido*³.

Una alternativa eficaz (a efectos de almacenamiento y comparación) de codificación comprimida para un vértice \bar{x} consiste en identificar el vértice por un número natural $n_{\bar{x}}$. Dado que cada vértice tiene asociada alguna base, una estrategia posible se basa en asociar a cada base un único número n_{J_B} . En particular, el mecanismo de codificación de bases empleado por Steuer hace $n_{J_B} = \sum_{j \in J_B} 2^j$ (ver [St86], p. 103-104).

Sin embargo, la implementación de esta idea no es directa puesto que el número n de variables del problema puede ser grande y, en principio, en la base podrían estar cualesquiera m de ellas, por lo que n_{J_B} puede tener un valor enorme, que imposibilita almacenarlo, directamente, en ninguno de los tipos de datos básicos que ofrecen los lenguajes de programación más habituales. Una solución aceptable estriba en utilizar una cadena o vector de bits, llamémosla bv , de, al menos, n elementos. Esta cadena, en general, se puede implementar como un array (de dimensión conveniente) de enteros, con todas sus componentes inicialmente iguales a 0. Entonces, para cada $j \in J_B$ sólo hay que poner a 1 la componente j de bv . Aunque esta operación no es inmediata (se necesita calcular previamente qué elemento entero de bv contiene a j y luego obtener el desplazamiento apropiado), se puede codificar sin dificultad. Las que sí se pueden realizar muy eficientemente, y esto es lo verdaderamente importante, son las comparaciones entre bases.

Debemos tener muy en cuenta que el énfasis no se pone tanto en la reducción del costo de codificación y decodificación de las bases eficientes

³ Desafortunadamente, la utilización de estos formatos comprimidos complica el código, haciéndolo más difícil de entender y depurar.

(pues sólo se codifican y decodifican una vez), sino en el ahorro de almacenamiento que representan y, especialmente, en la facilidad con que se puedan comparar entre sí una vez comprimidas (pues el esquema realiza un gran número de búsquedas que, en última instancia, acarrearán numerosas comparaciones entre vértices o bases).

Obsérvese que un código numérico como el anterior está asociado a un único vértice pero, sin embargo, si el vértice \bar{x} es degenerado, un mismo vértice tiene asociados diferentes códigos. Esta dificultad puede ser evitada en un algoritmo orientado a vértices si, en lugar de codificar J_B , se codifica el descriptor maximal del vértice, J_Z ; es decir, los índices asociados a variables a nivel cero. Así $n_{\bar{x}} = n_{J_Z} = \sum_{j \in J_Z} 2^j$.

Una vez decidida la codificación de las bases o vértices (quizás simultáneamente) tenemos que considerar la cuestión de la estructura de almacenamiento de los mismos y la técnica de búsqueda que se va a emplear. Esto es importante pues los requerimientos de espacio suelen ser cuantiosos debido a que el esquema VERTICES consiste, básicamente, en un procedimiento de enumeración de los nodos de un cierto grafo.

Entre las técnicas de almacenamiento ([AhHU74]) susceptibles de ser utilizadas cabe destacar, desde una sencilla lista secuencial simple desordenada, hasta listas doblemente enlazadas ordenadas, árboles, ... etc. En función del almacenamiento elegido también podremos optar entre diferentes posibilidades de búsqueda, entre las cuales merece la pena citar la búsqueda secuencial, la binaria, ... o aquéllas otras más elaboradas como el *hashing* ([HrSh78], p. 82-93).

4.4 Cálculo del Conjunto de Aristas Eficientes

El conjunto de las aristas eficientes de un LVP se considera de interés por los siguientes motivos:

- (i) Añaden información geométrica valiosa para la estructuración de los vértices eficientes. Este conocimiento puede ser utilizado beneficiosamente por algoritmos más complejos como los correspondientes a los métodos ascendentes globales y locales, dados en las secciones 4.5.1 y 4.5.2, respectivamente.
- (ii) Proporcionan una aproximación de E^P más detallada que la suministrada por los vértices eficientes. Es bien sabido (Teorema 2.5.8) que para el caso general de que X sea un poliedro arbitrario (no necesariamente acotado), se verifica que $E^P \subseteq CVH(E_{xp}^P) + CNH(E_{xd}^P)$.

El procedimiento de cálculo de todas las aristas eficientes de un LVP se puede considerar, desde un punto de vista algorítmico, muy parecido al empleado con los vértices eficientes, aunque hay que hacer algunas salvedades que apuntaremos más adelante. Básicamente, el problema se reduce a determinar, para cualquier vértice eficiente generado, en lugar de los vértices eficientes adyacentes, el conjunto de todas las aristas eficientes (acotadas y no acotadas) incidentes en el mismo (ver, [EcKd78]).

Desde esta perspectiva, el siguiente esquema proporciona un algoritmo genérico para el cálculo de todas las aristas eficientes de un LVP.

Utilizaremos la siguiente notación:

- V Lista de vértices eficientes hallados.
 E_1 Lista de aristas eficientes exploradas.
 E_2 Lista de aristas eficientes no exploradas (uno de los puntos extremos de la arista no ha sido generado).

Esquema EDGES

Paso 0. Inicialización.

Encontrar un vértice eficiente inicial x^0 . Si no hay ninguno, STOP. $E_{xp}^P = \emptyset$ y $E_e^P = \emptyset$.

En otro caso, hacer $V \leftarrow \{x^0\}$, $E_1 \leftarrow \emptyset$, $E_2 \leftarrow \emptyset$ y $i \leftarrow 0$.

Paso 1. Exploración.

Calcular los conjuntos $E_{be}^P(x^i)$ y $E_{ue}^P(x^i)$, correspondientes a las aristas eficientes acotadas y no acotadas, respectivamente, incidentes en x^i .

Hacer $E_1 \leftarrow E_1 \cup E_{ue}^P(x^i) \cup (E_{be}^P(x^i) \cap E_2)$ y $E_2 \leftarrow (E_2 \cup E_{be}^P(x^i)) - E_1$.

Paso 2. Terminación.

Si $E_2 = \emptyset$, STOP. Los conjuntos de vértices y aristas eficientes han sido generados. $E_{xp}^P = V$ y $E_e^P = E_1$.

Paso 3. Progresión.

Seleccionar una arista $e \in E_2$. Sea x^{i+1} punto extremo de e no generado ($x^{i+1} \notin V$). Hacer $V \leftarrow V \cup \{x^{i+1}\}$, $i \leftarrow i + 1$, e ir al paso 1.

Merece la pena que hagamos unos breves comentarios sobre las asignaciones que se realizan en el paso 1.

- Analicemos en primer lugar: $E_1 \leftarrow E_1 \cup E_{ue}^P(x^i) \cup (E_{be}^P(x^i) \cap E_2)$. Nótese que las aristas almacenadas en $E_{ue}^P(x^i)$ al ser no acotadas, no pueden proporcionar nuevos vértices no explorados. Por otra parte, los elementos

de $E_{be}^P(x^i) \cap E_2$, a pesar de ser aristas acotadas, inciden en vértices ya explorados y, por tanto, pueden ser eliminadas de consideraciones posteriores.

- La justificación de la segunda de las asignaciones realizadas, $E_2 \leftarrow (E_2 \cup E_{be}^P(x^i)) - E_1$, es mas sencilla y se fundamenta en el conocimiento de que entre las aristas obtenidas en la iteración i del esquema, sólo las acotadas que no han sido previamente generadas pueden proporcionar nuevas aristas eficientes.

El razonamiento anterior ayuda a justificar la validez del esquema.

Teorema 4.4.1 *El esquema EDGES calcula todo el conjunto de aristas eficientes.*

Demostración. Inmediata debido a la conexidad de la región eficiente (Corolario 1.7.39). ■

Teorema 4.4.2 *El esquema EDGES es finito.*

Demostración. En primer lugar nótese que existen procedimientos finitos, como los dados en [EcKd78] y [ArMl91], para calcular las aristas eficientes incidentes en un vértice. Ahora la prueba es clara pues los vértices eficientes generados en cada iteración no se repiten y el número de vértices eficientes de P es finito. ■

Con respecto a la complejidad del esquema, si denotamos por $O(EE)$ la complejidad de la rutina que calcula el conjunto de todas las aristas eficientes incidentes en un vértice dado se tiene:

Proposición 4.4.3 *El esquema EDGES tiene una complejidad $|E_{xp}^P| * O(EE)$.*

A primera vista podría pensarse que la complejidad del esquema EDGES es similar a la del procedimiento VERTICES dado que la dificultad de identificar aristas incidentes en un vértice dado es comparable a la de la enumeración de los vértices adyacentes al mismo. Pero esta afirmación sólo es cierta cuando X es un polítopo. Lamentablemente, para el caso no acotado, el número de aristas puede que no crezca polinomialmente en el número de vértices (piénsese en un cono poliédrico con un sólo vértice y un número arbitrariamente grande de aristas no acotadas incidentes en el mismo). Por tal motivo, el cálculo de todas las aristas eficientes de un LVP es un problema *estrictamente más duro* de tratar que el de generación de vértices eficientes, aún a pesar de ser muy parecidos.

4.4.1 Consideraciones Prácticas

Dadas las grandes similitudes que presentan los esquemas VERTICES y EDGES, las observaciones sobre implementación hechas para el primero pueden ser trasladadas sin dificultad al segundo. No obstante, es necesario hacer algunas precisiones.

El problema de determinar el conjunto de todas las aristas incidentes en un vértice degenerado es problemático, como ya se especificó en el capítulo 2. Ello obliga a tomar ciertas precauciones si no queremos *perder* ninguna arista en la etapa de exploración. En este sentido, las investigaciones de Armand y Malivert ([ArMI91]) han probado que, en orden a generar todas las aristas eficientes incidentes en un vértice degenerado, basta con considerar sólo aquellas bases degeneradas duales-eficientes que sean lexicográficamente accesibles desde la base actual a través de pivotes positivos. Este resultado esencial será usado por los métodos locales que estudiaremos en la sección 4.5.

La codificación tradicional de las aristas suele venir dada por un par ordenado (u, v) donde, si la arista es acotada, se almacenan los puntos extremos de la misma y, si la arista es no acotada, u denota el vértice en el que incide la arista y v la dirección de no acotación.

En la etapa de progresión, dependiendo del método de selección de los elementos de E_2 que deseemos usar, tendremos que implementar la lista como una cola (búsqueda primero en anchura), una pila (búsqueda primero en profundidad) o cualquier otra estructura apropiada. En cualquier caso, nótese que es posible (ver Ejemplo 4.4.5) que el estudio de una arista, en una iteración dada del algoritmo, conlleve la eliminación de varios elementos, no necesariamente adyacentes, de la lista E_2 .

Como sabemos (ver sección 2.7), los mayoría de los tests existentes para determinar la eficiencia de una arista incidente en un vértice dado se basan en la resolución de algún LP. Con el fin de ahorrar esfuerzo de cálculo, se pueden evitar ineficiencias obvias mediante la aplicación de la Proposición 4.3.6 que, para el caso no acotado, puede ser extendida de la siguiente manera:

Sean $\bar{x} \in X_{sp}$, $B \in B(\bar{x})$, R la matriz de costos reducidos asociada a B , $j \in J_N$ tal que $y^j \leq 0$ y δ^j la arista no acotada que se obtiene al incrementar la variable x_j . Es claro que:

Proposición 4.4.4 Si $r^j \geq 0$ entonces $\delta^j \notin E_{ue}^P$.

Veamos una aplicación del esquema EDGES sobre un ejemplo concreto.

Ejemplo 4.4.5 Supongamos que el conjunto de aristas eficientes de un problema arbitrario se puede representar mediante el grafo representado en la Figura 4.3:

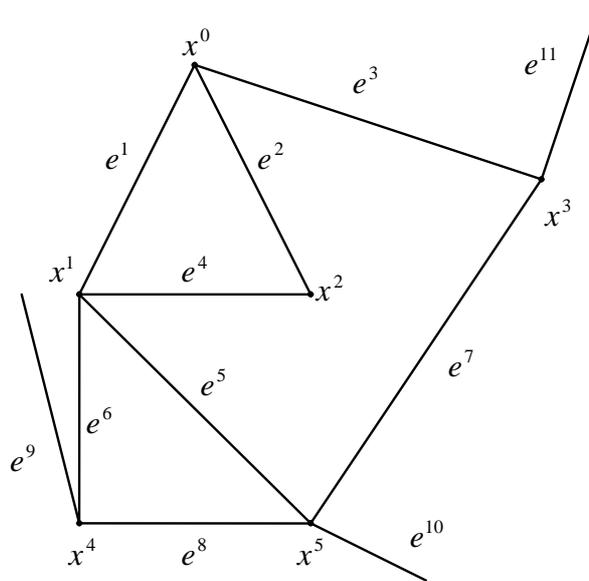


Figura 4.3

La traza del esquema, utilizando una búsqueda primero en anchura en la etapa de progresión, sería:

Iteración 0.

Paso 0.

$$V = \{x^0\}, E_1 = \emptyset \text{ y } E_2 = \emptyset.$$

Paso 1.

$$E_{be}^P(x^0) = \{e^1, e^2, e^3\} \text{ y } E_{ue}^P(x^0) = \emptyset \Rightarrow E_1 = \emptyset \text{ y } E_2 = \{e^1, e^2, e^3\}.$$

Paso 2.

Como $E_2 \neq \emptyset$, continuamos.

Paso 3.

Seleccionamos $e^1 \in E_2 \Rightarrow x^1$ es el punto extremo de e^1 no generado.

$$V = \{x^0, x^1\}.$$

Iteración 1.

Paso 1.

$$E_{be}^P(x^1) = \{e^1, e^4, e^5, e^6\} \text{ y } E_{ue}^P(x^1) = \emptyset \Rightarrow E_1 = \{e^1\} \text{ y } E_2 = \{e^2, e^3, e^4, e^5, e^6\}.$$

Paso 2.

Como $E_2 \neq \emptyset$, continuamos.

Paso 3.

Seleccionamos $e^2 \in E_2 \Rightarrow x^2$ es el punto extremo de e^2 no generado.

$$V = \{x^0, x^1, x^2\}.$$

Iteración 2.

Paso 1.

$$E_{be}^P(x^2) = \{e^2, e^4\} \text{ y } E_{ue}^P(x^2) = \emptyset \Rightarrow E_1 = \{e^1, e^2, e^4\} \text{ y } E_2 = \{e^3, e^5, e^6\}.$$

Paso 2.

Como $E_2 \neq \emptyset$, continuamos.

Paso 3.

Seleccionamos $e^3 \in E_2 \Rightarrow x^3$ es el punto extremo de e^3 no generado.

$$V = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}.$$

Iteración 3.

Paso 1.

$$E_{be}^P(x^3) = \{e^3, e^7\} \text{ y } E_{ue}^P(x^3) = \{e^{11}\} \Rightarrow E_1 = \{e^1, e^2, e^4, e^3, e^{11}\} \text{ y } E_2 = \{e^5, e^6, e^7\}.$$

Paso 2.

Como $E_2 \neq \emptyset$, continuamos.

Paso 3.

Seleccionamos $e^5 \in E_2 \Rightarrow x^5$ es el punto extremo de e^5 no generado.

$$V = \{x^0, x^1, x^2, x^3, x^5\}.$$

Iteración 4.

Paso 1.

$$E_{be}^P(x^5) = \{e^5, e^7, e^8\} \text{ y } E_{ue}^P(x^5) = \{e^{10}\} \Rightarrow E_1 = \{e^1, e^2, e^4, e^3, e^{11}, e^5, e^7, e^{10}\} \text{ y } E_2 = \{e^6, e^8\}$$

Paso 2.

Como $E_2 \neq \emptyset$, continuamos.

Paso 3.

Seleccionamos $e^6 \in E_2 \Rightarrow x^4$ es el punto extremo de e^6 no generado.

$$V = \{x^0, x^1, x^2, x^3, x^5, x^4\}.$$

Iteración 5.

Paso 1.

$$E_{be}^P(x^4) = \{e^6, e^8\} \text{ y } E_{ue}^P(x^4) = \{e^9\} \Rightarrow E_1 = \{e^1, e^2, e^4, e^3, e^{11}, e^5, e^7, e^{10}, e^6, e^8, e^9\} \text{ y } E_2 = \emptyset.$$

Paso 2.

Como $E_2 = \emptyset \Rightarrow \text{STOP}$. $E_{xp}^P = \{x^0, x^1, x^2, x^3, x^5, x^4\}$ y $E_e^P = \{e^1, e^2, e^4, e^3, e^{11}, e^5, e^7, e^{10}, e^6, e^8, e^9\}$.

●

4.5 Cálculo de Todo el Conjunto de Soluciones Eficientes

La forma más cómoda y práctica de describir el conjunto (en general, no convexo) de soluciones eficientes E^P consiste en expresarlo como la unión de todas las caras eficientes maximales de P . Desde esta perspectiva, la estructura de E^P es relativamente sencilla, puesto que tiene la misma complejidad que el conjunto de soluciones no dominadas de $z(X)$ (Dauer y Gallagher [DrGl96] han probado que existe una correspondencia biyectiva entre las caras eficientes maximales de X y de $z(X)$).

Genéricamente, a los algoritmos que calculan todo E^P se les denomina métodos generadores de soluciones eficientes. Suelen ser complejos y grandes consumidores de recursos computacionales, por la naturaleza combinatoria que presenta la determinación de las caras eficientes. Esta sección está dedicada al estudio de los mismos.

Se podría afirmar (ingenuamente), que la determinación de forma exacta de todo E^P es un problema resuelto, al menos desde un punto de vista teórico y para el caso lineal, pues E^P se puede poner como $\bigcup_{\lambda \in \Lambda_k^0} S_{P_\lambda}$

(Teorema 1.7.13). Sin embargo, diseñar un algoritmo basado en esta idea no es trivial ni mucho menos, pues no está nada claro como variar paramétricamente el λ .

Atendiendo a la manera en que se construye E^P , algunos autores como Serpil Sayin ([Sy96], p. 88), distinguen dos diseños algorítmicos claramente diferenciados: *ascendente (bottom-up)* y *descendente (top-down)*.

Los algoritmos generadores de soluciones eficientes con un diseño ascendente calculan las caras eficientes de menor a mayor dimensión, mientras que los descendentes lo hacen en sentido inverso, es decir, determinan las caras eficientes de mayor a menor dimensión.

Los métodos descendentes se pueden considerar, en cierta medida, *duales* de los ascendentes, pues mientras que los últimos van incrementando la dimensión sin perder la eficiencia, los primeros decrementan la dimensión hasta lograr la eficiencia. De esta manera, ambos diseños presentan ventajas y desventajas complementarias. Efectivamente:

- Si las caras eficientes maximales tienen, en general, una dimensión elevada, es de esperar un mayor rendimiento de los métodos descendentes frente a los ascendentes. Por contra, si las caras eficientes maximales tienen una dimensión reducida, los algoritmos descendentes realizarán un número elevado de iteraciones, debido a la explosión combinatoria que experimentan, mientras que los ascendentes se mostrarán muy eficaces.
- Los algoritmos ascendentes permiten determinar inmediatamente si la región eficiente es vacía o no, pero descuidan (salvo que la comprobación se haga de forma explícita a través de un test específico como los dados en la sección 3.2) la posibilidad de eficiencia completa. Con los métodos descendentes la situación se invierte, es decir, determinan inmediatamente la eficiencia completa del problema, pero no son adecuados cuando la región eficiente es vacía (salvo que se aplique algún test específico como los dados en la Sección 1.7.5).
- Si paramos un algoritmo descendente antes de encontrar alguna cara eficiente maximal, no habremos obtenido ninguna cara eficiente. Esto no sucede con los algoritmos ascendentes.
- Mientras que los algoritmos ascendentes necesitan comprobar la maximalidad de las caras eficientes generadas, los algoritmos descendentes están exentos de esta verificación, pues su propia dinámica de funcionamiento garantiza dicha propiedad.

Generalmente, tanto los métodos ascendentes como los descendentes, evitan trabajar directamente con las dimensiones exactas de las caras identificadas en cada iteración, debido a la dificultad que conlleva este conocimiento. En realidad, el dato de la dimensión de la cara no es algorítmicamente necesario, pudiendo ser empleados, por ejemplo, procedimientos basados en la inclusión matemática, con complejidades muy inferiores.

Otra clasificación admisible para los métodos generadores de soluciones eficientes fue propuesta por Armand ([Ar93b], p. 358). Este autor distingue entre métodos *locales* y *globales*.

Los métodos de tipo local determinan las caras eficientes maximales a medida que se obtienen nuevos puntos extremos y aristas eficientes, es decir, para cada vértice considerado, calculan todas las caras eficientes maximales incidentes en el mismo. Otras estrategias distintas a la anterior, como la de generar primero todos los vértices y aristas no acotadas eficientes, para después determinar las caras eficientes maximales, se consideran enfoques globales.

Nuevamente ambas posibilidades algorítmicas tienen puntos fuertes y débiles, produciéndose una dicotomía. Merecen ser destacados los siguientes aspectos:

- Los métodos globales suelen ser algoritmos muy intuitivos que se pueden implementar fácilmente. En general, evitan el inconveniente de la degeneración en la construcción de las caras eficientes maximales. Por contra, tienen alguna etapa fuertemente combinatoria.
- Los métodos locales son más complejos en sus detalles que los globales, requiriendo implementaciones más laboriosas, basadas casi siempre en algún tipo de esquema de pivotación. Por tal motivo han de resolver adecuadamente el problema de la degeneración de un vértice. Su principal ventaja consiste en que la etapa combinatoria se reduce notablemente, pues el número de caras incidentes en un determinado vértice acostumbra a ser sensiblemente menor que el número total de caras del poliedro.

Es posible combinar las clasificaciones de Sayin y Armand, para lograr una organización más específica compuesta por los siguientes tipos: *Ascendente Local*, *Ascendente Global*, *Descendente Global* y *Descendente Local*. Después de una revisión bibliográfica exhaustiva, sorprendentemente, no hemos encontrado ningún algoritmo generador de soluciones eficientes que se adapte al enfoque descendente local.

A lo largo de esta sección realizaremos un estudio detallado, con aportaciones algorítmicas concretas, para cada una de las clases de diseño que acabamos de especificar.

4.5.1 Métodos Ascendentes Globales

Los métodos ascendentes globales (Global Bottom Up o GBU, para abreviar) atienden al siguiente esquema: En primer lugar determinan todo el conjunto de vértices y aristas eficientes para, a continuación, obtener el conjunto de caras eficientes maximales mediante la generación de combinaciones convexas eficientes, progresivamente mayores, de los vértices y aristas no acotadas generados en el paso anterior. Así, podemos escribir el siguiente procedimiento genérico:

Esquema GBU-FACES (Global Bottom Up)

Etapa I. Cálculo.

Calcular el conjunto de todos los vértices y aristas eficientes del problema.

Si $E_{xp}^P = \emptyset$, STOP. $E^P = \emptyset$.

Etapa II. Combinación.

Obtener de manera creciente (en el sentido de la inclusión matemática) todas las combinaciones convexas eficientes maximales de los vértices y aristas no acotadas generados en la Etapa I.

Entre los algoritmos publicados recientemente que se adaptan a este esquema cabe destacar el de Armand-Malivert ([ArMI91]).

En la etapa I quizás haya que obtener información adicional para los vértices y aristas obtenidos. Por ejemplo, si la región factible es un polítopo, un procedimiento podría consistir en calcular la región de indiferencia asociada a cada vértice. Después de realizada esta tarea, para identificar todas las caras eficientes maximales, basta con simplemente agrupar en conjuntos maximales aquellos puntos extremos eficientes que tengan en común, al menos, un mismo parámetro.

La etapa II es fuertemente combinatoria y la gran consumidora de recursos computacionales, pues el número de test de eficiencia a aplicar puede ser enorme ([Ar93b], p. 358). A la hora de buscar las caras eficientes maximales podemos utilizar tanto una *búsqueda primero en anchura* ([HrSh78], p. 263), como *primero en profundidad* ([HrSh78], p. 268), sobre el conjunto de vértices y aristas eficientes. Sin embargo, desde un punto de vista computacional, parece más eficaz el recorrido primero en profundidad, pues permite hacer un mayor número de eliminaciones de los nodos del árbol de enumeración.

Con el propósito de disminuir las combinaciones posibles, es útil la siguiente propiedad elemental:

Proposición 4.5.1 Sean \bar{x} y \hat{x} dos vértices adyacentes, eficientes pero no E -adyacentes (la arista que los une no es eficiente). Entonces, $\exists F \in E_f^p$ tal que $\bar{x}, \hat{x} \in F$.

Aunque a lo largo de esta memoria hemos presentado diversos resultados generales que permiten caracterizar la eficiencia de una envolvente convexa (ver sección 2.5), es posible dar algunos más:

Sean $\{x^1, \dots, x^p\} \subseteq X_{xp}$, $\{d^1, \dots, d^q\} \subseteq X_{xd}$ y $G = CVH(\{x^1, \dots, x^p\}) + CNH(\{d^1, \dots, d^q\})$.

El siguiente test es una ligera modificación de un resultado propuesto por Armand y Malivert ([ArMI91], Theorem 4.1).

Teorema 4.5.2 Sean $\bar{x} \in G^0$, x^s una s.f.b. de X y B^s una base asociada. Entonces, $G' = CVH(\{x^1, \dots, x^p, x^s\}) + CNH(\{d^1, \dots, d^q\}) \subseteq E^p$ si, y sólo si, el sistema $\lambda^t R^s + v^t Y_D^s \geq 0$, $\lambda^t R^s \bar{x}_{N^s} = 0$, $\lambda > 0$, $v \geq 0$ tiene solución.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Como $G' \subseteq E^p \Rightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k$, $G' \subseteq S_{P_\lambda}$. Ahora es claro el resultado teniendo en cuenta que x^s es una s.f.b. de X , $x^s \in S_{P_\lambda}$, $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$ y aplicando los Corolarios 2.4.7 y 2.4.8.

“ \Leftarrow ”

Por hipótesis, $\lambda^t R^s + v^t Y_D^s \geq 0$, $\lambda^t R^s \bar{x}_{N^s} = 0$, $\lambda > 0$, $v \geq 0$ tiene solución. Por el Corolario 2.4.8 se tiene que $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$. Como $\bar{x} \in G^0$, aplicando la Proposición 2.4.21, $G \subseteq S_{P_\lambda}$. Además, por el Corolario 2.4.7, $x^s \in S_{P_\lambda}$ y como S_{P_λ} es convexo, $G' \subseteq S_{P_\lambda}$ y, por tanto, $G' \subseteq E^p$. ■

A fin de complementar el Teorema 4.5.2, Armand y Malivert distinguieron el siguiente caso:

Teorema 4.5.3 ([ArMI91], Theorem 4.2) Sean d^s una dirección extrema de X obtenida a partir de x^p a través de una base asociada B^p , $G' = CVH(\{x^1, \dots, x^p\}) + CNH(\{d^1, \dots, d^q, d^s\})$ y $\bar{x} \in G^0$. Entonces, $G' \subseteq E^p$ si, y sólo si, el sistema $\lambda^t R^p + v^t Y_D^p \geq 0$, $\lambda^t R^p \bar{x}_{N^p} = 0$, $\lambda > 0$, $v \geq 0$ tiene solución.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Como $G' \subseteq E^p$ entonces $\exists \lambda \in R_{++}^k$ tal que $G' \subseteq S_{P_\lambda}$. Ahora es claro el resultado teniendo en cuenta que x^p es una s.f.b. de X y $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$.

“ \Leftarrow ”

Por hipótesis, el sistema $\lambda^t R^p + v^t Y_D^p \geq 0$, $\lambda^t R^p \bar{x}_{N^p} = 0$, $\lambda > 0$, $v \geq 0$ tiene solución $\Rightarrow x^p \in S_{P_\lambda}$ y $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$. Como $\bar{x} \in G^0 \Rightarrow G' \subseteq S_{P_\lambda} \Rightarrow G' \subseteq E^p$. ■

Sin embargo, para los propósitos de este apartado, conviene tener a mano caracterizaciones que permitan tratar de manera unificada la etapa de combinación de los métodos generadores con diseño GBU. Un ejemplo de tales herramientas es la siguiente:

Teorema 4.5.4 Sea $\bar{x} \in G^0$. Son equivalentes los siguientes resultados:

(i) $G \subseteq E^p$

(ii) El problema

$$\min \{s / u^t A - \lambda^t C \geq 0, u^t b - s = \lambda^t C \bar{x}, \lambda \geq e, s \geq 0\} \quad (4.6)$$

es acotado, con valor óptimo 0.

(iii) El problema

$$\max \{e^t s / Cw - Is = 0, Aw = 0, w_{j'} \geq 0, s \geq 0\} \quad (4.7)$$

es acotado, con valor óptimo 0, donde $J' = \{j \in J / \bar{x}_j = 0\}$.

Demostración. (i) \Leftrightarrow (ii) por el Teorema 2.5.9.

Veamos ahora (i) \Leftrightarrow (iii).

Por el Corolario, 2.5.1, $G \subseteq E^p \Leftrightarrow \bar{x} \in E^p$. Ahora, aplicando el Corolario 2.9.13, se obtiene el resultado deseado. ■

Obsérvese que el Teorema 4.5.4 trabaja directamente con vértices y aristas en lugar de bases, desapareciendo, por tanto, el problema de la degeneración.

Cualquiera de los resultados anteriormente expuestos proporciona un procedimiento para calcular iterativamente todas las caras eficientes maximales de un LVP, en base a la generación de envolventes convexas eficientes progresivamente mayores. Basta empezar inicialmente con $G = \{x^i\}$ y repetir el procedimiento $\forall x^i \in E_{xp}^p$.

Veamos una codificación de la etapa II que utiliza un recorrido primero en profundidad para el cálculo de las envolventes convexas eficientes maximales. Sin pérdida de generalidad y para simplificar la exposición haremos la descripción para el caso de un polítopo. Utilizaremos para ello la siguiente notación:

V Lista con el conjunto de vértices eficientes del problema.

L Lista con las caras eficientes maximales halladas.

Algoritmo GBU-COMBINATION(V)

Si $|V| = 1$, STOP. $L = V$

En otro caso ($|V| = n$, con $n > 1$), hacer $L = \emptyset$ y para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ejecutar BU-CONVEX($\{i\}$).

La implementación de la rutina BU-CONVEX sería:

Algoritmo BU-CONVEX(I)**Paso 1.**

Sea m el máximo índice de I .

Si $\exists J \in L$ tal que $I \cup \{m+1, \dots, n\} \subseteq J$, STOP.

Paso 2.

Si $\forall j \in \{m+1, \dots, n\}$ se verifica que $CVH(\{x^i / i \in I \cup \{j\}\}) \not\subseteq E^P$ ir al paso 4.

Paso 3.

Para cada $j \in \{m+1, \dots, n\}$ tal que $CVH(\{x^i / i \in I \cup \{j\}\}) \subseteq E^P$, ejecutar BU-CONVEX($I \cup \{j\}$).

Ir al paso 5.

Paso 4.

Si $\exists J \in L$ tal que $I \subset J$, hacer $L \leftarrow L \cup \{I\}$.

Paso 5.

STOP.

Nótese que si se da la condición del paso 2 del algoritmo anterior entonces I es un conjunto de índices candidato a ser maximal.

Los siguientes resultados justifican la validez del procedimiento propuesto.

Proposición 4.5.5 *El algoritmo BU-CONVEX es finito.*

Teorema 4.5.6 *El algoritmo BU-CONVEX(I) genera todas las envolventes convexas eficientes maximales que contienen a $\{x^i / i \in I\}$ y no contienen los vértices $\{x^i / i \in \{1, \dots, m\} - I\}$, donde $m = \max(I)$.*

Demostración. Evidente por la construcción del algoritmo. ■

Corolario 4.5.7 *El algoritmo GBU-COMBINATION es una propuesta finita y válida de implementación de la etapa II del esquema GBU-FACES.*

El siguiente resultado nos da la complejidad del algoritmo GBU-COMBINATION.

Proposición 4.5.8 *En el caso peor ($E^P = X$), el algoritmo GBU-COMBINATION ejecuta el algoritmo BU-CONVEX (mediante llamadas recursivas) $2^{|V|} - 1$ veces.*

Utilizando como test de eficiencia para envolventes convexas el programa (4.6), vamos a ilustrar el funcionamiento del algoritmo GBU-COMBINATION.

Ejemplo 4.5.9 Consideremos el siguiente LVP degenerado propuesto por Yu y Zeleny ([YuZl75], p. 465):

$$\max \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} x$$

s.a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Etapa 1. Cálculo del conjunto de vértices eficientes.

Esta etapa no reviste dificultad. Para este problema los resultados son:

$E_{xp}^P = \{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ y $E_{xd}^P = \emptyset$ (ver la Figura 4.4 para una representación

en el plano de la estructura de la región eficiente del problema), donde:

$x^1 = (0, 1, 2)$, $x^2 = (1/2, 1/2, 2)$, $x^3 = (0, 2, 0)$, $x^4 = (0, 0, 3)$ y $x^5 = (1, 1, 0)$.

Etapa 2. Algoritmo GBU-COMBINATION.

Utilizaremos la siguiente notación: *eff* \leftrightarrow eficiente, *no eff* \leftrightarrow no eficiente.

Análisis de x^1 .

Inicialmente, $L = \emptyset$.

Se traduce en una llamada a $BU-CONVEX(\{1\})$, obteniéndose los siguientes resultados:

$\{1, 2\}$ es eficiente, pues tomando $\bar{x} = 1/2x^1 + 1/2x^2 = (1/4, 3/4, 2)$ y resolviendo el programa (i) del Teorema 4.5.4, el valor óptimo es 0. Análogamente se comprueba que: $\{1, 2, 3\}$ *eff*, $\{1, 2, 3, 4\}$ *no eff*, $\{1, 2, 3, 5\}$ *eff*, $L = \{\{1, 2, 3, 5\}\}$, $\{1, 2, 4\}$ *eff*, como $\{1, 2, 4, 5\}$ *no eff*, $L = \{\{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4\}\}$, $\{1, 2, 5\}$ *no eff*, $\{1, 3\}$ *eff*, $\{1, 3, 4\}$ *no eff*, $\{1, 3, 5\}$ *eff*, $\{1, 4\}$ *eff*, $\{1, 4, 5\}$ *no eff*, $\{1, 5\}$ *eff*.

Análisis de x^2 .

$L = \{\{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4\}\}$.

Se traduce en una llamada a $BU-CONVEX(\{2\})$, obteniéndose los siguientes resultados:

$\{2, 3\}$ *eff*, $\{2, 3, 4\}$ *no eff*, $\{2, 3, 5\}$ *eff*, $\{2, 4\}$ *eff*, $\{2, 4, 5\}$ *no eff*, $\{2, 5\}$ *eff*.

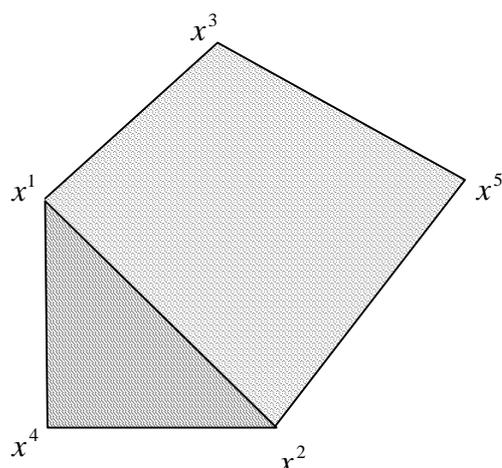


Figura 4.4

Análisis de x^3 .

$$L = \{\{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4\}\}.$$

Se traduce en una llamada a $BU-CONVEX(\{3\})$, obteniéndose los siguientes resultados:

$\{3, 4\}$ no eff, $\{3, 5\}$ eff.

Análisis de x^4 .

$$L = \{\{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4\}\}.$$

Se traduce en una llamada a $BU-CONVEX(\{4\})$, obteniéndose los siguientes resultados:

$\{4, 5\}$ no eff.

Luego, las caras eficientes maximales vienen dadas como $CVH(\{x^1, x^2, x^3, x^5\})$ y $CVH(\{x^1, x^2, x^4\})$.

●

4.5.2 Métodos Ascendentes Locales

El modo de funcionamiento de los algoritmos con diseño ascendente local (Local Bottom Up o LBU para abreviar) consiste en determinar gradualmente, de menor a mayor tamaño, para cada vértice eficiente encontrado, todas las caras eficientes incidentes en el mismo.

Por tal motivo, los algoritmos generadores de soluciones eficientes de clase LBU se pueden considerar una generalización del esquema EDGES.

Esta propuesta representó un salto cualitativo importante con respecto a otros esquemas mas sencillos (ascendente o descendente simple)

empleados con anterioridad. No en vano, la mayor parte de los algoritmos publicados en la literatura atienden a esta concepción. Entre ellos podemos destacar los de Isermann ([Is77a]), Gal ([Gal77]), Ecker-Hegner-Kouada ([ECHK80]), Murty ([Mr85]) y Armand ([Ar93b]).

La principal ventaja que presentan, frente a los métodos ascendentes globales, es que la etapa combinatoria se reduce significativamente por cuanto el número de caras incidentes en un determinado vértice suele ser sensiblemente menor que el número total de caras del poliedro.

Por otra parte, su principal inconveniente es la necesidad de dar un tratamiento adecuado al problema de generar las caras eficientes maximales incidentes en un vértice degenerado. Sorprendentemente, esta tarea ha sido descuidada y/o obviada por la mayoría de autores ([Mr85], p.31). Hasta donde sabemos, sólo Murty [Mr85] y Armand ([Ar93b]) han resuelto satisfactoriamente este aspecto.

Por otra parte, si las caras eficientes maximales tienen dimensión elevada, por la propia dinámica interna del algoritmo, se produce una explosión combinatoria en cada vértice estudiado.

A continuación se presenta el esquema típico de un algoritmo con diseño ascendente local. Utilizaremos la siguiente notación:

V_1	Lista de vértices eficientes explorados (es decir, para los cuales ya han sido generadas todas las caras eficientes incidentes en los mismos).
V_2	Lista de vértices eficientes no explorados.
L	Lista de caras eficientes maximales halladas.
$EV(x^i)$	Conjunto de vértices E-adyacentes a x^i .

Esquema LBU-FACES

Paso 0. Inicialización.

Encontrar un vértice eficiente inicial x^0 . Si no hay ninguno, STOP. $E^P = \emptyset$.
Hacer $V_1 \leftarrow \emptyset$, $V_2 \leftarrow \{x^0\}$, $L \leftarrow \emptyset$ e $i \leftarrow 0$.

Paso 1. Progresión.

Seleccionar un punto $x^i \in V_2$.

Paso 2. Exploración.

Determinar ascendentemente (en el sentido de la inclusión matemática) todas las caras eficientes maximales incidentes en x^i . Con la información obtenida hacer $EV(x^i) = \{x \in E_{xp}^P / x \sim_E x^i\}$.

Paso 3. Registro.

Añadir a L las caras eficientes maximales encontradas en el paso anterior.

Hacer $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{x^i\}$ y $V_2 \leftarrow (V_2 - \{x^i\}) \cup (EV(x^i) - V_1)$.

Paso 4. (Terminación)

Si $V_2 = \emptyset \Rightarrow$ STOP. El conjunto de todas las soluciones eficientes ha sido generado.

$E^P = \bigcup_{F \in L} F$. En caso contrario, hacer $i \leftarrow i + 1$ e ir al paso 1.

Si se dispone de un procedimiento válido y finito para calcular ascendentemente las caras eficientes incidentes en un vértice arbitrario, entonces las siguientes propiedades son inmediatas:

Teorema 4.5.10 *El esquema LBU-FACES es finito.*

Teorema 4.5.11 *El esquema LBU-FACES es válido.*

El verdadero cuello de botella del algoritmo se produce en la etapa de exploración, pues el problema de determinar todas las caras eficientes maximales incidentes en un vértice dado no es trivial.

Efectivamente, los métodos ascendentes locales construyen las caras eficientes maximales incidentes en un vértice dado a partir de algún proceso incremental que, descrito someramente, consiste en ir aumentando, mientras se pueda, el tamaño de las caras sin perder la eficiencia de las mismas. Este procedimiento aunque conceptualmente claro, no es trivial de llevar a la práctica, sobre todo bajo degeneración, habiendo sido fuente de numerosos errores publicados en la literatura. Por otra parte, una implementación cuidadosa, que intente tratar de manera unificada todos los vértices, puede ahorrar una cantidad importante de esfuerzo computacional.

El siguiente resultado, aunque sencillo, resultará de gran utilidad:

Proposición 4.5.12 *Si $F(J') \notin E_f^P$ entonces $\forall J'' \subseteq J'$ se verifica que $F(J'') \notin E_f^P$.*

Demostración. $\forall J'' \subseteq J' \Rightarrow F(J') \subseteq F(J'')$. Ahora, como $F(J') \notin E_f^P \Rightarrow F(J'') \notin E_f^P$. ■

Conviene reparar en que, para sacarle el máximo rendimiento a la propiedad anterior, interesa almacenar las caras no eficientes con la menor dimensión posible. La mejor situación se presenta con vértices degenerados no eficientes.

Existen dos técnicas básicas de crecimiento o incremento para las caras: *primero en anchura* y *primero en profundidad* ([HrSh78]). La regla de primero en anchura crea en la primera iteración las caras eficientes de tamaño (dimensión) 1, en la segunda iteración, mediante combinación de las caras eficientes obtenidas en el paso anterior, crea las caras de tamaño (dimensión) 2 y así sucesivamente hasta que en una iteración arbitraria no se generan más caras eficientes o se genera el propio poliedro. Por el contrario, una regla primero en profundidad, selecciona alguna cara eficiente incidente en el vértice (en general una arista eficiente) y la incrementa constantemente hasta hacerla maximal. A continuación se repite el procedimiento anterior sobre el conjunto de las caras restantes no incluidas en la recién obtenida. Los algoritmos de Isermann ([Is77a]) y Armand ([Ar93b], procedure S2) utilizan esta última técnica.

Seguidamente vamos a desarrollar un procedimiento novedoso, que utiliza una búsqueda primero en anchura, para calcular todas las caras eficientes maximales incidentes en una cara eficiente (no necesariamente un vértice) y dada a través de un descriptor. El atractivo que presenta el método es que permite un tratamiento sistemático y unificado del problema que nos ocupa, tanto en situación de no degeneración como de degeneración. Utilizaremos la siguiente notación:

- L_1 Lista de caras eficientes maximales incidentes en la cara eficiente $F(J)$.
- L_2 Lista de caras no eficientes incidentes en la cara eficiente $F(J)$.
- $2^{|J|}$ Partes de J .

Algoritmo BU-IFACES(J)

Paso 0. Inicialización.

Hacer $i \leftarrow 1$, $n = |J|$, $I^n = \{J\}$, $L_1 = \{J\}$ y $L_2 = \emptyset$.

Paso 1.

Calcular $I^{n-i} = \{J' \in 2^{|J|} / |J'| = n - i\} - L_2$

Paso 2. Terminación.

Si $I^{n-i} = \emptyset \Rightarrow$ STOP. El conjunto de todas las caras eficientes maximales incidentes en la cara eficiente $F(J)$ es $\bigcup_{J' \in L_1} F(J')$.

Paso 3.

Para cada $J' \in I^{n-i}$, si $F(J') \in E_f^p$ (aplicar, por ejemplo, Corolario 2.9.9) hacer

$L_1 = (L_1 - \{J'' \in L_1 / J'' \supset J'\}) \cup \{J'\}$. En caso contrario, hacer $L_2 = L_2 \cup \{J'\}$.

Hacer $i \leftarrow i + 1$ e ir al paso 1.

Analicemos el procedimiento anterior:

En la iteración i se generan todos los descriptores de tamaño $n-i$ para las caras incidentes en $F(J)$ que no son ineficientes según la lista L_2 (paso 1). Es claro que si este conjunto es vacío no podremos encontrar más caras eficientes incidentes en $F(J)$ que las que ya tengamos (paso 2). En el paso 3 es cuando se estudian individualmente los descriptores. Si es eficiente, tenemos que eliminar de la lista L_1 todos aquellos elementos que contengan al descriptor examinado. Por contra, si no es eficiente, cualquier subconjunto de él corresponde a una cara ineficiente (Proposición 4.5.12) y debemos añadirlos a la lista L_2 .

Nos queda sólo tratar el aspecto de cómo determinar si una cara especificada a través de un descriptor es eficiente o no. Este asunto ha sido tratado con precisión y rigor en la sección 2.8, tanto para el caso no degenerado como degenerado, siempre que el descriptor inspeccionado sea maximal (ver, por ejemplo, los Corolarios 2.8.2 y 2.8.23, respectivamente). Por otra parte, dado que sabemos que si un vértice es no degenerado, todas las caras incidentes en él (inclusive el propio vértice) tienen asociado un único descriptor (maximal) (ver Teorema 2.3.26), este caso no presenta inconvenientes. Afortunadamente, el caso degenerado también puede ser abordado sin dificultad. Efectivamente, ahora puede ocurrir que el descriptor asociado a una cara ya estudiada no sea maximal. Si no lo es, y dado que usamos un esquema ascendente en el tamaño de las caras (descendente en el tamaño de los descriptores), al decrementar nuevamente el descriptor puede ocurrir que, o bien sea maximal (correspondiendo a otra cara distinta y pudiendo ser aplicado el test de eficiencia), o bien no lo sea, en cuyo caso debemos volver a decrementar el descriptor.

De este modo, resulta inmediata la siguiente propiedad:

Teorema 4.5.13 *El algoritmo BU-IFACES es finito y válido.*

Si queremos que el algoritmo BU-IFACES saque provecho de la información generada con anterioridad por el esquema LBU-FACES, las listas L_1 y L_2 deben ser pasadas como parámetros. Así, una llamada a la rutina tendría ahora la forma:

$$\text{BU-IFACES}(J, L_1, L_2)$$

debiendo contener el paso 0 de la misma las siguientes instrucciones:

Hacer $i \leftarrow 1$, $n = |J|$, $I^n = \{J\}$ y $L_1 = L_1 \cup \{J\}$.

Nótese que con esta nueva especificación todavía es posible calcular las caras eficientes que contienen a una dada, sin utilizar ningún tipo de información previa. Para ello basta realizar una llamada a la rutina BU-

IFACES con los argumentos $(J, \emptyset, \emptyset)$, donde J es un descriptor para la cara considerada.

Lo que sigue es la descripción detallada de un algoritmo basado en el esquema LBU-FACES:

Algoritmo LBU-FACES

Paso 0. Inicialización.

Encontrar una s.f.b. inicial x^0 . Si no hay ninguna, STOP $\Rightarrow X = \emptyset$.

Hacer $V_1 \leftarrow \emptyset$, $L_1 \leftarrow \emptyset$ e $i \leftarrow 1$.

Comprobar si x^0 es eficiente o no.

En caso afirmativo, hacer $V_2 \leftarrow \{x^0\}$, $L_2 \leftarrow \emptyset$.

En caso negativo, hacer $L_2 = \left\{ 2^{|J_{z^0}|} \right\}$ y encontrar un vértice eficiente inicial x^1 . Si no hay ninguno, STOP. $E^P = \emptyset$. En otro caso, hacer $V_2 \leftarrow \{x^1\}$.

Paso 1. Progresión.

Seleccionar un punto $x^i \in V_2$.

Paso 2. Análisis de eficiencia para caras incidentes en x^i .

Se trata de llamar a la rutina BU-IFACES(J_{z^i}, L_1, L_2).

Almacenar en $EV(x^i)$ los vértices E-adyacentes a x^i encontrados por el procedimiento BU-IFACES.

Paso 3. Registro.

Hacer $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{x^i\}$, $V_2 \leftarrow (V_2 - \{x^i\}) \cup (EV(x^i) - V_1)$.

Paso 4. Terminación.

Si $V_2 = \emptyset \Rightarrow$ STOP. El conjunto de todas las soluciones eficientes ha sido generado.

$E^P = \bigcup_{F \in L_1} F$. En caso contrario, hacer $i \leftarrow i + 1$ e ir al paso 1.

A continuación ilustraremos con un ejemplo el funcionamiento del algoritmo LBU-FACES.

Ejemplo 4.5.14 Consideremos el siguiente LVP:

$$\max x$$

s.a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Véase la Figura 4.5 para una representación gráfica de la región factible.

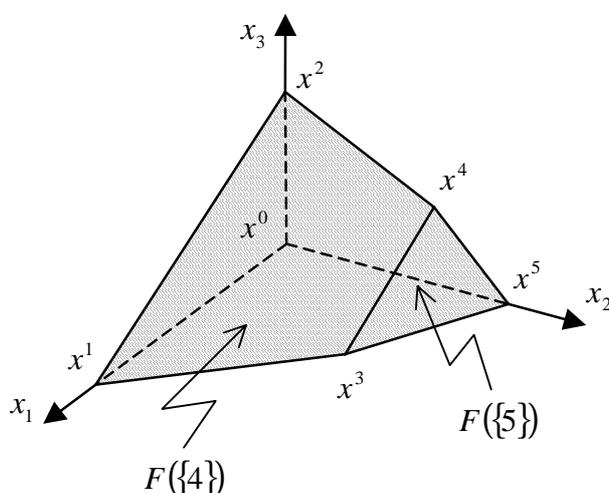


Figura 4.5

Paso 0. Inicialización.

Evidentemente $X \neq \emptyset$, pues a partir de los datos del problema se obtiene de forma inmediata una tabla canónica factible.

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r.h.s.
x_4	1	1	2	1	0	4
x_5	1	2	2	0	1	6
	-1	0	0	0	0	0
	0	-1	0	0	0	0
	0	0	-1	0	0	0

$T(B^0)$. Tabla canónica asociada a x^0 .

x^0 es una s.f.b. no degenerada y no eficiente (basta aplicar, por ejemplo, el Corolario 2.6.7, y comprobar que el programa (2.9) es no acotado), siendo $J_{z^0} = \{1, 2, 3\}$.

Sin embargo, la siguiente tabla si representa una s.f.b. ($J_{B^1} = \{1, 5\}$) eficiente inicial (pues es solución óptima del problema $\max\{e^t Cx / x \in X\}$):

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r.h.s.
x_1	1	1	2	1	0	4
x_5	0	1	0	-1	1	2
	0	1	2	1	0	4
	0	-1	0	0	0	0
	0	0	-1	0	0	0

$T(B^1)$. Tabla canónica asociada a x^1 .

Hacemos $L_1 = \emptyset$, $L_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$.
 $V_1 = \emptyset$, $V_2 = \{x^1\}$.

Iteración 1.

Paso 1. Progresión.

Seleccionamos x^1 de V_2 .

Paso 2. Análisis de eficiencia para caras incidentes en x^1 .

Es evidente que x^1 es no degenerado, siendo $J_{N^1} = \{2, 3, 4\}$ y $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ahora ejecutamos la rutina BU-IFACES(J_{N^1}, L_1, L_2).

Paso 0.

$i=1$, $n=3$, $I^3 = \{\{2, 3, 4\}\}$, $L_1 = \{\{2, 3, 4\}\}$

Nivel 1.

$I^2 = \{\{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.

Para $J' = \{2, 4\} \Rightarrow$ Obtendríamos el vértice x^2 , especificado por $J_{Z^2} = \{1, 2, 4\}$. La base está dada por $J_{B^2} = \{3, 5\}$. Este vértice es E-adyacente a x^1 , como pone de manifiesto la caracterización enunciada en el Corolario 2.8.2. Efectivamente:

$$r = R^{J_{N^1}-J'} e = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La tabla canónica asociada al test para $J' = \{2, 4\}$ es:

v.b.	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	r.h.s.
s_1	1	2	1	1	0	0	2
s_2	-1	0	0	0	1	0	0
s_3	0	-1	0	0	0	1	-1
	0	0	0	-1	-1	-1	0

Se comprueba que este problema es acotado, con valor óptimo nulo $(0) \Rightarrow F(\{2, 4\}) \in E_f^p$.

Para $J' = \{3, 4\} \Rightarrow$ Obtendríamos el vértice x^3 , especificado por $J_{z^3} = \{3, 4, 5\}$. La base está dada por $J_{B^3} = \{1, 2\}$. Este vértice es E-adyacente a x^1 , como se puede comprobar a partir del Corolario 2.8.2. Efectivamente:

$$r = R^{J_N - J'} e = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La tabla canónica asociada al test para $J' = \{3, 4\}$ es:

v.b.	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	r.h.s.
s_1	1	2	1	1	0	0	1
s_2	-1	0	0	0	1	0	-1
s_3	0	-1	0	0	0	1	0
	0	0	0	-1	-1	-1	0

Se comprueba que este problema es acotado, con valor óptimo nulo $(0) \Rightarrow F(\{3, 4\}) \in E_f^p$.

En función de los resultados anteriores: $L_1 = \{\{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.

Nivel 2

$$I^1 = \{\{4\}\}.$$

La única cara a estudiar es la dada por $J' = \{4\}$.

$$\text{Para } J' = \{4\} \Rightarrow r = R^{J_N - J'} e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La tabla canónica asociada al test para $J' = \{4\}$ es:

v.b.	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	r.h.s.
s_1	1	2	1	1	0	0	3
s_2	-1	0	0	0	1	0	-1
s_3	0	-1	0	0	0	1	-1
	0	0	0	-1	-1	-1	0

Se comprueba que este problema es acotado, con valor óptimo nulo $(0) \Rightarrow F(\{4\}) \in E_f^p$.

En función de los resultados anteriores:

$$L_1 = \{\{4\}\} \text{ y } L_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

Evidentemente, ya no hay más caras eficientes maximales incidentes en x^1 que estudiar, terminando por ello la rutina BU-IFACES y devolviendo el control al procedimiento principal.

Paso 3. Registro.

$$V_1 = \{x^1\}, V_2 = \{x^2, x^3\}, L_1 = \{\{4\}\} \text{ y } L_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

Iteración 2.

Paso 1. Progresión.

Seleccionamos x^2 de V_2 , cuya base B^2 está dada por $J_{B^2} = \{3, 5\}$.

La tabla canónica asociada a B^2 es:

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r.h.s.
x_3	1/2	1/2	1	1/2	0	2
x_5	0	1	0	-1	1	2
	-1	0	0	0	0	0
	0	-1	0	0	0	0
	1/2	1/2	0	1/2	0	2

$T(B^2)$. Tabla canónica asociada a x^2

Paso 2. Análisis de eficiencia para caras incidentes en x^2 .

Es evidente que x^2 es no degenerado, siendo $J_{N^2} = \{1, 2, 4\}$ y $R =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ahora ejecutamos la rutina BU-IFACES(J_{N^2}, L_1, L_2).

Paso 0.

$$i=1, n=3, I^3 = \{\{1,2,4\}\} \text{ y } L_1 = \{\{4\}, \{1,2,4\}\}.$$

Nivel 1.

$$I^2 = \{\{1,4\}, \{2,4\}\}.$$

Para $J' = \{1,4\} \Rightarrow$ Obtendríamos el vértice x^4 , especificado por $J_{z^4} = \{1,4,5\}$. La base está dada por $J_{B^4} = \{2,3\}$. Este vértice es E-adyacente a x^2 pues $F(\{4\}) \in E_f^p$ y $F(\{4\}) \supseteq F(\{1,4\})$ (por tanto, no hay que aplicar ningún test).

Para $J' = \{2,4\} \Rightarrow$ Obtendríamos el vértice ya explorado x^1 (vértice E-adyacente a x^2 pues $F(\{4\}) \supseteq F(\{2,4\})$).

En función de los resultados anteriores $L_1 = \{\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}$

Nivel 2

$$I^1 = \{\{4\}\}.$$

La única cara a estudiar es la dada por $J' = \{4\}$, la cual ya sabemos que es eficiente.

En función de los resultados anteriores:

$$L_1 = \{\{4\}\} \text{ y } L_2 = \{\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

Evidentemente, ya no hay más caras eficientes maximales incidentes en x^2 que estudiar, terminando por ello la rutina BU-IFACES y devolviendo el control al procedimiento principal.

Paso 3. Registro.

$$V_1 = \{x^1, x^2\}, \quad V_2 = \{x^3, x^4\}, \quad L_1 = \{\{4\}\} \quad \text{y} \quad L_2 = \{\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

Iteración 3.

Paso 1. Progresión.

Seleccionamos x^3 de V_2 , cuya base B^3 está dada por $J_{B^3} = \{1,2\}$.

La tabla canónica asociada a B^3 es:

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r.h.s.
x_1	1	0	2	2	-1	2
x_2	0	1	0	-1	1	2
	0	0	2	2	-1	2
	0	0	0	-1	1	2
	0	0	-1	0	0	0

$T(B^3)$. Tabla canónica asociada a x^3

Paso 2. Análisis de eficiencia para caras incidentes en x^3 .

Es evidente que x^3 es no degenerado, siendo $J_{N^3} = \{3,4,5\}$ y $R =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora ejecutamos la rutina BU-IFACES(J_{N^3}, L_1, L_2).

Paso 0.

$$i=1, n=3, I^3 = \{\{3,4,5\}\}, L_1 = \{\{4\}, \{3,4,5\}\}$$

Nivel 1.

$$I^2 = \{\{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$$

Para $J' = \{3,4\} \Rightarrow$ Obtendríamos el vértice ya explorado x^1 (vértice E-adyacente a x^3 pues $F(\{4\}) \supseteq F(\{3,4\})$).

Para $J' = \{3,5\} \Rightarrow$ Obtendríamos el vértice x^5 , especificado por $J_{Z^5} = \{1,3,5\}$. La base está dada por $J_{B^5} = \{4,2\}$. Este vértice es E-adyacente a x^3 , como pone de manifiesto el test enunciado en el Corolario 2.8.2. Efectivamente:

$$r = R^{J_{N^3}-J'} e = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La tabla canónica asociada al test para $J' = \{3,5\}$ es:

v.b.	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	r.h.s.
s_1	2	2	-1	1	0	0	2
s_2	0	-1	1	0	1	0	-1
s_3	-1	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	-1	-1	-1	0

Se comprueba que este problema es acotado, con valor óptimo nulo $(0) \Rightarrow F(\{3, 5\}) \in E_f^p$.

Para $J' = \{4, 5\} \Rightarrow$ Obtendríamos el vértice x^4 (vértice E-adyacente a x^3 pues $F(\{4\}) \supseteq F(\{4, 5\})$).

En función de los resultados anteriores $L_1 = \{\{4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$

Nivel 2

$$I^1 = \{\{4\}, \{5\}\}.$$

La única cara a estudiar es la dada por $J' = \{5\}$, pues para $J' = \{4\}$ ya sabemos que es eficiente.

$$\text{Para } J' = \{5\} \Rightarrow r = R^{J_N - J'} e = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La tabla canónica asociada al test para $J' = \{5\}$ es:

v.b.	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	r.h.s.
s_1	2	2	-1	1	0	0	4
s_2	0	-1	1	0	1	0	-1
s_3	-1	0	0	0	0	1	-1
	0	0	0	-1	-1	-1	0

Se comprueba que este problema es acotado, con valor óptimo nulo $(0) \Rightarrow F(\{5\}) \in E_f^p$.

En función de los resultados anteriores:

$$L_1 = \{\{4\}, \{5\}\} \text{ y } L_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

Evidentemente, ya no hay más caras eficientes maximales incidentes en x^3 que estudiar, terminando por ello la rutina BU-IFACES y devolviendo el control al procedimiento principal.

Paso 3. Registro.

$$V_1 = \{x^1, x^2, x^3\}, \quad V_2 = \{x^4, x^5\}, \quad L_1 = \{\{4\}, \{5\}\} \quad \text{y} \quad L_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

Iteración 4.

Paso 1. Progresión.

Seleccionamos x^4 de V_2 , siendo B^4 una base asociada dada por $J_{B^4} = \{2, 3\}$.

La tabla canónica asociada a B^4 es:

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r.h.s.
x_3	1/2	0	1	1	-1/2	1
x_2	0	1	0	-1	1	2
	-1	0	0	0	0	0
	0	0	0	-1	1	2
	1/2	0	0	1	-1/2	1

$T(B^4)$. Tabla canónica asociada a x^4 .

Paso 2. Análisis de eficiencia para caras incidentes en x^4 .

Evidentemente x^4 es no degenerado, siendo $J_{N^4} = \{1, 4, 5\}$ y $R =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Ahora ejecutamos la rutina BU-IFACES(J_{N^4}, L_1, L_2).

Paso 0.

$$i=1, n=3, I^3 = \{\{1, 4, 5\}\}, L_1 = \{\{4\}, \{5\}, \{1, 4, 5\}\}$$

Nivel 1.

$$I^2 = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{4, 5\}\}$$

Para $J' = \{1, 4\} \Rightarrow$ Obtendríamos el vértice ya explorado x^2 (vértice E-adyacente a x^4 pues $F(\{4\}) \supseteq F(\{1, 4\})$).

Para $J' = \{1, 5\} \Rightarrow$ Obtendríamos el vértice x^5 (vértice E-adyacente a x^4 pues $F(\{5\}) \supseteq F(\{1, 5\})$).

Para $J' = \{4, 5\} \Rightarrow$ Obtendríamos el vértice ya explorado x^3 (vértice E-adyacente a x^4 pues $F(\{4\}) \supseteq F(\{4, 5\})$).

En función de los resultados anteriores $L_1 = \{\{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$

Nivel 2

$$I^1 = \{\{4\}, \{5\}\}.$$

Como las caras dadas por $J' = \{4\}$ y $J' = \{5\}$ ya sabemos que son eficientes, no tenemos nada que estudiar.

En función de los resultados anteriores:

$$L_1 = \{\{4\}, \{5\}\} \text{ y } L_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

Evidentemente, ya no hay más caras eficientes maximales incidentes en x^4 que estudiar, terminando por ello la rutina BU-IFACES y devolviendo el control al procedimiento principal.

Paso 3. Registro.

$$V_1 = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}, \quad V_2 = \{x^5\}, \quad L_1 = \{\{4\}, \{5\}\}, \quad L_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

Iteración 5.

Paso 1. Progresión.

Seleccionamos x^5 de V_2 , cuya base B^5 está dada por $J_{B^5} = \{2, 4\}$.

La tabla canónica asociada a B^5 es:

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r.h.s.
x_4	1/2	0	1	1	-1/2	1
x_2	1/2	1	1	0	1/2	3
	-1	0	0	0	0	0
	1/2	0	1	0	1/2	3
	0	0	-1	0	0	0

$T(B^5)$. Tabla canónica asociada a x^5 .

Paso 2. Análisis de eficiencia para caras incidentes en x^5 .

Es evidente que x^5 es no degenerado, siendo $J_{N^5} = \{1, 3, 5\}$ y $R =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora ejecutamos la rutina BU-IFACES(J_{N^5}, L_1, L_2).

Paso 0.

$$i=1, \quad n=3, \quad I^3 = \{\{1, 3, 5\}\}, \quad L_1 = \{\{4\}, \{5\}, \{1, 3, 5\}\}$$

Nivel 1.

$$I^2 = \{\{1, 5\}, \{3, 5\}\}.$$

Para $J' = \{1, 5\} \Rightarrow$ Obtendríamos el vértice ya explorado x^4 (vértice E-adyacente a x^5 pues $F(\{5\}) \supseteq F(\{1, 5\})$).

Para $J' = \{3, 5\} \Rightarrow$ Obtendríamos el vértice x^3 (vértice E-adyacente a x^5 pues $F(\{5\}) \supseteq F(\{3, 5\})$).

En función de los resultados anteriores $L_1 = \{\{4\}, \{5\}, \{1,5\}, \{3,5\}\}$

Nivel 2

$$I^1 = \{\{5\}\}.$$

Como la cara dada por $J' = \{5\}$ ya sabemos que es eficiente, no tenemos nada que estudiar.

En función de los resultados anteriores:

$$L_1 = \{\{4\}, \{5\}\} \text{ y } L_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

Evidentemente, ya no hay más caras eficientes maximales incidentes en x^5 que estudiar, terminando por ello la rutina BU-IFACES y devolviendo el control al procedimiento principal.

Paso 3. Registro.

$$V_1 = \{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}, \quad V_2 = \emptyset, \quad L_1 = \{\{4\}, \{5\}\}, \quad L_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

Paso 4. Terminación.

Como $V_2 = \emptyset \Rightarrow$ El conjunto de caras eficientes maximales se obtiene a partir de $L_1 = \{\{4\}, \{5\}\}$. Así, $E^p = F(\{4\}) \cup F(\{5\})$, donde $F(\{4\}) = CVH(\{x^1, x^2, x^3, x^4\})$ y $F(\{5\}) = CVH(\{x^3, x^4, x^5\})$.



4.5.3 Métodos Descendentes Globales

Los métodos descendentes globales (Global Top Down o GTD para abreviar) comprenden a todos aquellos algoritmos descendentes que perciben la región eficiente como una unión de caras eficientes maximales arbitrarias, donde el dato de si la cara es incidente en un vértice dado es irrelevante (o no se conoce, o se obvia).

Como sabemos, todos los métodos descendentes comprueban la eficiencia de las caras de X utilizando un esquema de ordenación de las mismas de mayor a menor dimensión. De esta manera, una vez que se confirma la eficiencia de una cara se puede asegurar que es maximal, evitándose el cálculo de las caras eficientes de menor dimensión.

Históricamente, el primer algoritmo generador de soluciones eficientes para el LVP de tipo descendente global se atribuye a Yu y Zeleny ([YuZl75]). Posteriormente han surgido otros como el de Sayin ([Sy96]).

A continuación presentamos el esquema algorítmico de un método descendente global de tipo genérico. Utilizaremos la siguiente notación:

- L Lista de caras eficientes maximales generada por el algoritmo.
 W Lista de caras por estudiar.
 X_f^i Conjunto de las caras de X de dimensión i .

Esquema GTD-FACES

Paso 0. Inicialización.

Hacer $L \leftarrow \emptyset$, $W \leftarrow \{X\}$, $i \leftarrow 1$ y $q \leftarrow \dim(X)$.

Paso 1. Exploración y registro.

Para cada $F \in W$ hacer:

$W \leftarrow W - \{F\}$.

Si $F \in E_f^p$ hacer $L \leftarrow L \cup \{F\}$.

Paso 2. Progresión (Descenso).

$W \leftarrow \{F' \in X_f^{q-i} / \exists F \in L, F' \subseteq F\}$.

Paso 3. (Regla de parada)

Si $W = \emptyset$, STOP. El conjunto de todas las soluciones eficientes ha sido generado.

$$E^p = \bigcup_{F \in L} F.$$

En otro caso, hacer $i \leftarrow i + 1$ e ir al paso 1.

Obsérvese que el algoritmo utiliza una *búsqueda primero en anchura* ([HrSh78], p. 263), pues estudia en primer lugar la eficiencia de todas las caras de dimensión $q-i$ y después genera las caras de dimensión $q-i-1$.

Teorema 4.5.15 *El esquema GTD-FACES es finito.*

Demostración. Directa pues el número de caras de un poliedro es finito. ■

Veamos un resultado previo que será de utilidad para probar la validez del algoritmo.

Proposición 4.5.16 $E^p = \bigcup_{i=0}^q \bigcup_{j \in J^i} F_j$, donde $\forall i \in \{0, \dots, q\}$ se tiene $J^i \subseteq \{j / F_j \in X_f^i\}$.

Demostración. Es claro teniendo en cuenta que $E^p = \bigcup_{i=0}^q X_f^i \cap E^p$. ■

Teorema 4.5.17 *El esquema GTD-FACES es válido.*

Demostración. Evidentemente, todas las caras almacenadas en L son eficientes y maximales por la construcción de la lista W . Veamos ahora que no puede ocurrir que una cara eficiente maximal del problema no haya sido generada por el algoritmo. Efectivamente, basta tener en cuenta la Proposición 4.5.16 y observar que todas las caras de X son inspeccionadas explícita o implícitamente, pues cuando una cara de dimensión i no es eficiente, automáticamente en el paso 2 se añaden a la lista W todas sus caras de dimensión $i-1$ que no están contenidas en alguna cara eficiente ya generada. ■

Teorema 4.5.18 *En el caso peor ($E^p = \emptyset$), el esquema GTD-FACES genera todas las caras de X .*

Aunque la idea de descenso se formuló originalmente pensando en representaciones implícitas de las caras, resulta claro que el mismo principio sigue siendo igualmente válido cuando utilizamos representaciones explícitas de las mismas (mediante combinaciones convexas de vértices y aristas no acotadas). Así, sería posible construir una rutina TD-CONVEX, muy similar a la rutina BU-CONVEX dada en la sección 4.5.1, que iría analizando la eficiencia de envolventes convexas progresivamente más pequeñas.

Habiendo dejado constancia del hecho anterior, vamos a precisar, un algoritmo implementable basado en representaciones implícitas de las caras mediante descriptores (ver capítulo 2).

El principal inconveniente que presenta el esquema GTD-FACES consiste en que trabajar con dimensiones exactas resulta complicado cuando la representación lineal del poliedro es degenerada (ver sección 2.2). Por tal motivo, para obtener un algoritmo práctico de clase descendente global se necesita recurrir a alguna técnica de enumeración de caras que garantice el decrecimiento de las nuevas caras generadas en términos de la inclusión (no estricta) matemática y que permita aplicar algún tipo de test de eficiencia relativamente sencillo. Afortunadamente, esto se puede conseguir cuando caracterizamos las caras utilizando descriptores. Efectivamente, entre otros resultados podemos utilizar el Corolario 2.9.9, el cual caracteriza la eficiencia de una cara dada a través de un descriptor maximal en términos de la acotación del programa (2.54). En particular sabemos que si el programa (2.54) es acotado entonces la cara es eficiente, independientemente de la maximalidad del descriptor utilizado.

De esta manera, utilizando una técnica descendente no tenemos porqué preocuparnos de si $J' \subseteq J$ es un descriptor maximal para la cara. Efectivamente, si J' no es maximal y la cara es eficiente, puede que no

detectemos la eficiencia de la misma en ese momento (el programa (2.54) resulta no acotado). Lo que si es seguro es que encontraremos, en alguna iteración posterior del algoritmo, otro descriptor asociado a la cara, J'' , tal que $J' \subseteq J'' \subseteq J$ y en el que el programa (2.54) será acotado.

Precisemos ahora un nuevo algoritmo de clase GTD basado en las ideas anteriores. Utilizaremos la siguiente notación:

- L_1 Lista con los descriptores de las caras eficientes maximales halladas.
 L_2 Lista con los descriptores de las caras no eficientes halladas.
 I^i Subconjuntos de J de cardinal i que candidatos a describir una cara eficiente maximal.

Algoritmo GTD-COMBINATION

Hacer $L_1 \leftarrow \emptyset$ y $L_2 \leftarrow \emptyset$.

Encontrar una s.f.b. inicial x^0 . Si no hay ninguna, STOP $\Rightarrow X = \emptyset$.

Comprobar si x^0 es eficiente o no. En caso negativo, $L_2 = \left\{ 2^{\lfloor J_{z^0} \rfloor} \right\}$.

Llamar a TD-IFACES($\{1, \dots, n\}, L_1, L_2$)

Algoritmo TD-IFACES(J, L_1, L_2)

Paso 0. Inicialización.

Hacer $i \leftarrow 0$.

Paso 1.

Calcular $I^i = \{J' \subseteq J / |J'| = i\} - L_2$.

Hacer $I^i = I^i - \{J' \in I^i / \exists J'' \in L_1, J'' \subseteq J'\}$.

Paso 2. Terminación.

Si $I^i = \emptyset$, STOP.

Paso 3.

Para cada $J' \in I^i$, si $F(J') \in E_f^p$ (aplicar, por ejemplo, Corolario 2.9.9) hacer $L_1 = L_1 \cup \{J'\}$.

En caso contrario, hacer $L_2 = L_2 \cup \{2^{\lfloor J' \rfloor}\}$.

Hacer $i \leftarrow i + 1$ e ir al paso 1.

Merece la pena hacer las siguientes aclaraciones:

- (i) Como las caras asociadas a descriptores de la lista L_2 corresponden a caras no eficientes, debemos eliminar de posteriores consideraciones tales elementos. Por ello hacemos $I^i = \{J' \subseteq J / |J'| = i\} - L_2$. La verdadera utilidad de este refinamiento quedará de manifiesto al

estudiar los métodos descendentes locales (ver sección 4.5.4). En el procedimiento descendente global el único elemento de L_2 que tiene utilidad es J_{z^0} .

- (ii) Cuando hacemos $I^i = I^i - \{J' \in I^i / \exists J'' \in L_1, J'' \subseteq J'\}$ eliminamos aquellos subconjuntos de J de cardinal i que son superconjuntos de algún descriptor eficiente maximal previamente generado. Evidentemente, para las caras correspondientes a tales descriptores ya existe una cara eficiente maximal que las contiene.

Teorema 4.5.19 *El algoritmo GTD-COMBINATION es finito y válido.*

El motivo de dotar a la rutina TD-IFACES de argumentos específicos es la necesidad de realizar un tratamiento unificado, que permita reutilizar el código y ahorrar esfuerzo computacional en aquellos procesos que la llamen reiteradamente sobre problemas íntimamente relacionados.

Veamos como se comporta el procedimiento GTD-COMBINATION sobre varios ejemplos:

Ejemplo 4.5.20 *Consideremos nuevamente el LVP enunciado en el Ejemplo 4.5.9:*

$$\max \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} x$$

s.a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Paso 0. Inicialización.

$L_1 = \emptyset$. Evidentemente $X \neq \emptyset$, pues a partir de los datos del problema se obtiene de forma inmediata una tabla canónica:

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	r.h.s.
x_4	1	1	1	1	0	0	3
x_5	2	2	1	0	1	0	4
x_6	1	-1	0	0	0	1	0
	4	1	2	0	0	0	0
	1	3	-1	0	0	0	0
	-1	1	4	0	0	0	0

$T(B^0)$. Tabla canónica asociada a x^0 .

x^0 es una s.f.b. degenerada, siendo $J_{z^0} = \{1, 2, 3, 6\}$. Sabemos, por el Corolario 2.9.13, que $x^0 \in E_{xp}^P$ si, y sólo si, el programa:

$$\max \{e^t s / Cw - Is = 0, w_{z^0} \geq 0, Aw = 0, s \geq 0\}$$

es acotado, con valor óptimo 0.

Ahora bien, como el problema anterior es no acotado concluimos que $x^0 \notin E_{xp}^P$.

$$L_2 = \{\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{6\}, \emptyset\}.$$

Iteración 0.

Se trata de estudiar los subconjuntos $J' \subseteq J$ tal que $|J'| = 0$.

Dado que $I^0 = \emptyset$ no hay nada que estudiar.

Iteración 1.

$$I^1 = \{\{4\}, \{5\}\}.$$

Para $J' = \{4\}$, el programa (2.54) se concreta en $\max \{e^t s / Cw - Is = 0, Aw = 0, s \geq 0, w_4 \geq 0\}$. Como este problema es acotado, con valor óptimo 0, $F(\{4\}) \in E_f^P$.

Para $J' = \{5\}$, el programa (2.54) se concreta en $\max \{e^t s / Cw - Is = 0, Aw = 0, s \geq 0, w_5 \geq 0\}$. Nuevamente, este problema es acotado, con valor óptimo 0. Luego $F(\{5\}) \in E_f^P$.

$$\text{Así, } L_1 = \{\{4\}, \{5\}\}.$$

Iteración 2.

Se trata de estudiar los subconjuntos $J' \subseteq J - \{4, 5\}$, tales que $|J'| = 2$ y que no pertenezcan a la lista $L_2 \Rightarrow I^2 = \emptyset \Rightarrow \text{STOP}$. $E_{mf}^P = \{F(\{4\}), F(\{5\})\}$.



Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 4.5.21 Consideremos el siguiente LVP propuesto por Sayin ([Sy96], p. 91):

$$\begin{aligned} & \max x \\ & \text{s.a:} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Paso 0. Inicialización.

$L_1 = \emptyset$. Evidentemente $X \neq \emptyset$, pues a partir de los datos del problema se obtiene de forma inmediata una tabla canónica.

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r.h.s.
x_4	2	3	4	1	0	12
x_5	4	1	1	0	1	8
	-1	0	0	0	0	0
	0	-1	0	0	0	0
	0	0	-1	0	0	0

$T(B^0)$. Tabla canónica asociada a x^0 .

x^0 es una s.f.b. no degenerada y no eficiente (aplicar, por ejemplo, el Corolario 2.6.7), siendo $J_{z^0} = \{1, 2, 3\}$. Sin embargo, vamos a obviar este hecho y no considerar la lista L_2 para complicar artificialmente el problema.

Iteración 0.

Se trata de estudiar los subconjuntos $J' \subseteq J$ tal que $|J'| = 0$.

Para $J' = \emptyset$, el programa (2.54) se concreta en $\max\{w_1 + w_2 + w_3 / Aw = 0, w_1, w_2, w_3 \geq 0\}$. Como este problema es no acotado no podemos concluir nada. (Nótese que si \emptyset fuese un descriptor maximal entonces $F(\emptyset) \notin E_f^p$)

Iteración 1.

Se trata de estudiar los subconjuntos de I^1 dados por $J' \subseteq J$ y tales que $|J'| = 1$.

Así, $I^1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$.

Para $J' = \{1\}, \{2\}$ y $\{3\}$, el test a aplicar se concreta en $\max\{w_1 + w_2 + w_3 / Aw = 0, w_1, w_2, w_3 \geq 0\}$. Como este problema es no acotado no podemos concluir nada.

Para $J' = \{4\}$, el test a aplicar se concreta en $\max\{w_1 + w_2 + w_3 / Aw = 0, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0\}$. Este problema es acotado, con valor óptimo $0 \Rightarrow F(\{4\}) \in E_f^p$.

Para $J' = \{5\}$, el test a aplicar se concreta en $\max\{w_1 + w_2 + w_3 / Aw = 0, w_1, w_2, w_3, w_5 \geq 0\}$. Este problema es acotado, con valor óptimo $0 \Rightarrow F(\{5\}) \in E_f^p$.

Así, $L_1 = \{\{4\}, \{5\}\}$.

Iteración 2.

Se trata de estudiar los subconjuntos $J' \subseteq J - \{4, 5\}$, tales que $|J'| = 2$. Así, $I^2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

Para $J' = \{1, 2\}, \{1, 3\}$ y $\{2, 3\}$, el test a aplicar se concreta en $\max\{w_1 + w_2 + w_3 / Aw = 0, w_1, w_2, w_3 \geq 0\}$. Como este problema es no acotado no podemos concluir nada.

Iteración 3.

Se trata de estudiar los subconjuntos $J' \subseteq J - \{4, 5\}$, tales que $|J'| = 3$. Así, $I^3 = \{\{1, 2, 3\}\}$.

Para $J' = \{1, 2, 3\}$, el test a aplicar se concreta en $\max\{w_1 + w_2 + w_3 / Aw = 0, w_1, w_2, w_3 \geq 0\}$. Como este problema es no acotado no podemos concluir nada.

Iteración 4.

Se trata de estudiar los subconjuntos $J' \subseteq J - \{4, 5\}$, tales que $|J'| = 4$.

Como $I^4 = \emptyset \Rightarrow STOP$. $E_{mf}^p = \{F(\{4\}), F(\{5\})\}$.



4.5.4 Un Nuevo Enfoque: Métodos Descendentes Locales

La técnica que proponemos a continuación para generar el conjunto de soluciones eficientes de un LVP intenta combinar las ventajas del análisis local con las que presentan los métodos descendentes. Obtendríamos así un diseño de tipo descendente local (Local Top Down o LTD para abreviar), que hasta donde sabemos, es inédito.

La idea básica de los algoritmos descendentes locales consiste en *calcular de forma descendente, para cada vértice eficiente, todas las caras eficientes maximales incidentes en el mismo*. El método termina cuando no quedan vértices eficientes por estudiar.

La posibilidad de desarrollar un algoritmo de este tipo está condicionada, principalmente, a la disponibilidad de caracterizaciones adecuadas para caras eficientes incidentes en un vértice, independientemente de la degeneración o no del mismo. Afortunadamente, estos tests fueron obtenidos en el capítulo 2.

Desde un punto de vista algorítmico, los métodos generadores de soluciones eficientes de clase descendente local constituyen una combinación de los algoritmos VERTICES (sección 4.3) y TD-IFACES (sección 4.5.3), donde para cada vértice eficiente encontrado por la rutina VERTICES se llama a TD-IFACES para que calcule las caras eficientes maximales incidentes en dicho vértice.

Las principales ventajas que presenta el nuevo enfoque propuesto son:

- (i) Frente a los métodos descendentes globales, reducen sustancialmente las caras a examinar a base de estudiar localmente cada vértice eficiente. De esta forma, se mantiene más controlada una posible explosión combinatoria puesto que el número de caras incidentes en un determinado vértice suele ser sensiblemente menor que el número total de caras del poliedro.
- (ii) Cuando las caras eficientes maximales tienen una dimensión elevada, los métodos descendentes locales deberían comportarse mejor que los ascendentes locales.

Como inconvenientes podemos enumerar:

- (i) Cuanto menor sea la dimensión de las caras eficientes maximales, peor será el comportamiento de los algoritmos de la clase LTD.

- (ii) Cuanto mayor sea el número de vértices eficientes, más esfuerzo computacional será necesario. Esta dificultad es común a todos los métodos locales.

Veamos el diseño genérico de un algoritmo descendente local. Utilizaremos la siguiente notación:

V_1	Lista de vértices eficientes explorados (es decir, para los cuales ya han sido todas las caras eficientes incidentes en los mismos).
V_2	Lista de vértices eficientes no explorados.
L_1	Lista de caras eficientes maximales halladas.
L_2	Lista de caras no eficientes halladas.
$EV(x^i)$	Conjunto de vértices E-adyacentes a x^i .

Esquema LTD-FACES

Paso 0. Inicialización.

Encontrar un vértice eficiente inicial x^0 . Si no hay ninguno, STOP. $E^P = \emptyset$.
Hacer $V_1 \leftarrow \emptyset$, $V_2 \leftarrow \{x^0\}$, $L_1 \leftarrow \emptyset$, $L_2 \leftarrow \emptyset$ e $i \leftarrow 0$.

Paso 1. Progresión.

Seleccionar un punto $x^i \in V_2$.

Paso 2. Exploración.

Determinar descendientemente (en el sentido de la inclusión matemática) todas las caras eficientes maximales incidentes en x^i . A partir de esta información calcular $EV(x^i) = \{x \in E_{xp}^P / x \sim_E x^i\}$.

Paso 3. Registro.

Añadir a L_1 las caras eficientes maximales encontradas en el paso anterior. Hacer lo propio con las caras no eficientes y la lista L_2 .

Hacer $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{x^i\}$ y $V_2 \leftarrow (V_2 - \{x^i\}) \cup (EV(x^i) - V_1)$.

Paso 4. Terminación.

Si $V_2 = \emptyset \Rightarrow$ STOP. El conjunto de todas las soluciones eficientes ha sido generado.
 $E^P = \bigcup_{F \in L_1} F$. En caso contrario, hacer $i \leftarrow i + 1$ e ir al paso 1.

Las siguientes propiedades son inmediatas por ser LTD-FACES una combinación de los algoritmos VERTICES y TD-IFACES

Teorema 4.5.22 *El esquema LTD-FACES es finito.*

Teorema 4.5.23 *El esquema LTD-FACES es válido.*

A continuación entraremos en los detalles de un algoritmo específico basado en la tecnología LTD.

Convendremos en que las listas L_1 y L_2 contendrán, respectivamente, los descriptores eficientes y no eficientes hallados por nuestro algoritmo. Además, denotaremos por J_{z^j} el descriptor maximal asociado al punto extremo x^j .

Algoritmo LTD-FACES

Paso 0. Inicialización.

Encontrar una s.f.b. inicial x^0 . Si no hay ninguna, STOP $\Rightarrow X = \emptyset$.

Hacer $V_1 \leftarrow \emptyset$, $L_1 \leftarrow \emptyset$ e $i \leftarrow 1$.

Comprobar si x^0 es eficiente o no.

En caso afirmativo, hacer $V_2 \leftarrow \{x^0\}$, $L_2 \leftarrow \emptyset$.

En caso negativo, hacer $L_2 = \left\{ 2^{|J_{z^0}|} \right\}$ y encontrar un vértice eficiente inicial x^1 . Si no hay ninguno, STOP. $E^P = \emptyset$. En otro caso, hacer $V_2 \leftarrow \{x^1\}$.

Paso 1. Progresión.

Seleccionar un punto $x^i \in V_2$.

Paso 2. Exploración.

Análisis de eficiencia para caras incidentes en x^i .

Se trata de llamar a TD-IFACES(J_{z^i}, L_1, L_2), pero ahora aplicaremos los tests de eficiencia para caras dados en los Corolarios 2.8.2 y 2.8.23, para los casos no degenerado y degenerado, respectivamente, por ser más adecuados que el Corolario 2.9.9 cuando se trabaja con un enfoque orientado a tablas.

Análisis de E-adyacencia relativo a x^i .

Se trata de determinar los vértices E-adyacentes a x^i (utilizando la información generada previamente) y almacenarlos en $EV(x^i)$.

Para cualquier vértice x^j adyacente a x^i que descubramos como ineficiente, actualizaremos convenientemente la lista L_2 .

Paso 3. Registro.

Hacer $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{x^i\}$, $V_2 \leftarrow (V_2 - \{x^i\}) \cup (EV(x^i) - V_1)$.

Paso 4. Terminación.

Si $V_2 = \emptyset \Rightarrow$ STOP. El conjunto de todas las soluciones eficientes ha sido generado.

$E^P = \bigcup_{F \in L_1} F$. En caso contrario, hacer $i \leftarrow i + 1$ e ir al paso 1.

Conviene enfatizar que para poder aplicar un test como el Corolario 2.8.23 en la rutina TD-IFACES es preciso que el descriptor considerado sea maximal (entre otras cosas, esta condición se necesita para poder calcular el vector r que aparece en el test).

Vamos a ilustrar el procedimiento propuesto aplicándolo a un ejemplo concreto:

Ejemplo 4.5.24 Consideremos el siguiente LVP (coincidente con el dado en el Ejemplo 4.5.9):

$$\max \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} x$$

s.a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Tomaremos como s.f.b. inicial la misma que utilizó Isermann ([Is77a], p. 719).

Paso 0. Inicialización.

Sea x^1 la s.f.b. asociada a la base B^1 dada por $J_{B^1} = \{2, 3, 6\}$, cuya tabla canónica escribimos a continuación:

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	r.h.s.
x_2	1	1	0	-1	1	0	1
x_3	0	0	1	2	-1	0	2
x_6	2	0	0	-1	1	1	1
	-3	0	0	3	-1	0	5
	2	0	0	-5	4	0	1
	2	0	0	7	-3	0	9

$T(B^1)$. Tabla canónica asociada a x^1 .

Se comprueba sin dificultad que x^1 es eficiente. Así:
 $V_1 = \emptyset$, $V_2 = \{x^1\}$, $L_1 = \emptyset$, $L_2 = \emptyset$.

Iteración 1.**Paso 1. Progresión.**

Seleccionamos x^1 de V_2 .

Paso 2. Exploración.

Es evidente que x^1 es no degenerado, siendo $J_{N^1} = \{1, 4, 5\}$ y $R =$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Análisis de eficiencia para caras incidentes en x^1 .

Se trata de ir revisando los subconjuntos $J' \subseteq J_{N^1}$ de menor a mayor cardinal (ascendentemente) lo que implica un estudio (descendente) de las caras $F(J')$.

Como x^1 es no degenerado, aplicaremos como test de eficiencia el Corolario 2.8.2, a saber, $F(J') \in E_f^p(\bar{x}) \Leftrightarrow \max\{e^t s / Ru + Is = r, u \geq 0, s \geq 0\}$ es acotado, con valor óptimo igual a 0, donde $r = R^{J_{N^1}-J'} e$.

Nivel 0. $I^0 = \{\emptyset\}$

$$J' = \emptyset \Rightarrow r = Re = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

La tabla canónica asociada al test para $J' = \emptyset$ es:

v.b.	x_1	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	r.h.s.
s_1	-3	3	-1	1	0	0	-1
s_2	2	-5	4	0	1	0	1
s_3	2	7	-3	0	0	1	6
	0	0	0	-1	-1	-1	0

Se comprueba que este problema es acotado, con valor óptimo positivo (5.7). Por tanto, $X = F(\emptyset)$ no es eficiente (el problema no es completamente eficiente).

Nivel 1.

$$I^1 = \{\{1\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

Las caras a estudiar son las dadas por $J' = \{1\}$, $J' = \{4\}$ y $J' = \{5\}$

$$\text{Para } J' = \{1\} \Rightarrow r = R^{J_N - J'} e = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La tabla canónica asociada al test para $J' = \{1\}$ es:

v.b.	x_1	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	r.h.s.
s_1	-3	3	-1	1	0	0	2
s_2	2	-5	4	0	1	0	-1
s_3	2	7	-3	0	0	1	4
	0	0	0	-1	-1	-1	0

Se comprueba que este problema es acotado, con valor óptimo positivo (4) $\Rightarrow F(\{1\}) \notin E_f^p$.

$$\text{Para } J' = \{4\} \Rightarrow r = R^{J_N - J'} e = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La tabla canónica asociada al test para $J' = \{4\}$ es:

v.b.	x_1	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	r.h.s.
s_1	-3	3	-1	1	0	0	-4
s_2	2	-5	4	0	1	0	6
s_3	2	7	-3	0	0	1	-1
	0	0	0	-1	-1	-1	0

Se comprueba que este problema es acotado, con valor óptimo nulo (0) $\Rightarrow F(\{4\}) \in E_f^p$.

$$\text{Para } J' = \{5\} \Rightarrow r = R^{J_N - J'} e = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

La tabla canónica asociada al test para $J' = \{5\}$ es:

v.b.	x_1	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	r.h.s.
s_1	-3	3	-1	1	0	0	0
s_2	2	-5	4	0	1	0	-3
s_3	2	7	-3	0	0	1	9
	0	0	0	-1	-1	-1	0

Se comprueba que este problema es acotado, con valor óptimo nulo (0) $\Rightarrow F(\{5\}) \in E_f^P$.

Evidentemente, ya no quedan más caras eficientes maximales incidentes en x^1 por estudiar.

Análisis de E-adyacencia relativo a x^1 .

A partir de los resultados anteriores y teniendo en cuenta a $T(B^1)$, se obtienen los siguientes vértices E-adyacentes a x^1 :

Si metemos x_1 en la base \Rightarrow Obtenemos x^2 especificado por $J_{z^2} = \{4, 5, 6\}$. La base está dada por $J_{B^2} = \{2, 3, 1\}$. ($x^2 \in F(\{4\}) \cap F(\{5\})$).

Si metemos x_4 en la base \Rightarrow Obtenemos x^3 especificado por $J_{z^3} = \{1, 3, 5\}$. La base está dada por $J_{B^3} = \{2, 4, 6\}$. ($x^3 \in F(\{5\})$).

Si metemos x_5 en la base \Rightarrow Obtenemos x^4 especificado por $J_{z^4} = \{1, 2, 4, 6\}$. Una base asociada es $J_{B^4} = \{5, 3, 6\}$. (Obsérvese que había 2 variables candidatas a salir de la base, x_2 o x_6 , pero ambas conducen al mismo vértice degenerado). ($x^4 \in F(\{4\})$).

Paso 3. Registro.

$$V_1 = \{x^1\}, V_2 = \{x^2, x^3, x^4\}, L_1 = \{\{4\}, \{5\}\}, L_2 = \{\emptyset, \{1\}\}.$$

Iteración 2.

Paso 1. Progresión.

Seleccionamos x^2 de V_2 , cuya base B^2 está dada por $J_{B^2} = \{2, 3, 1\}$.

La tabla canónica asociada a B^2 es:

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	r.h.s.
x_2	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	1/2
x_3	0	0	1	2	-1	0	2
x_1	1	0	0	-1/2	1/2	1/2	1/2
	0	0	0	3/2	1/2	3/2	13/2
	0	0	0	-4	3	-1	0
	0	0	0	8	-4	-1	8

$T(B^2)$. Tabla canónica asociada a x^2 .

Paso 2. Exploración.

Es evidente que x^2 es no degenerado, siendo $J_{N^2} = \{4, 5, 6\}$ y $R =$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 3/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Análisis de eficiencia para caras incidentes en x^2 .

Como sabemos, debemos revisar los subconjuntos $J' \subseteq J_{N^2}$ de menor a mayor cardinal (ascendentemente) para realizar un estudio descendente de las caras $F(J')$.

Como x^2 es no degenerado, aplicaremos como test de eficiencia el Corolario 2.8.2.

Como sabemos que $X = F(\emptyset)$ no es eficiente, pasamos directamente al nivel 1.

Nivel 1.

$$I^1 = \{\{4\}, \{5\}, \{6\}\}.$$

La única cara a estudiar es la dada por, $J' = \{6\}$, pues sabemos que $F(\{4\})$, $F(\{5\}) \in E_f^p$.

$$\text{Para } J' = \{6\} \Rightarrow r = R^{J_N - J'} e = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -4 & 3 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La tabla canónica asociada al test para $J' = \{6\}$ es:

v.b.	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	r.h.s.
s_1	3/2	1/2	3/2	1	0	0	2
s_2	-4	3	-1	0	1	0	-1
s_3	8	-4	-1	0	0	1	4
	0	0	0	-1	-1	-1	0

Se comprueba que este problema es acotado, con valor óptimo positivo (5.7)
 $\Rightarrow F(\{6\}) \notin E_f^P$.

Análisis de E-adyacencia relativo a x^2 .

A partir de los resultados anteriores y de la tabla $T(B^2)$, obtenemos los siguientes vértices E-adyacentes a x^2 :

Si metemos x_4 en la base \Rightarrow Obtenemos un nuevo vértice x^5 E-adyacente a x^2 (especificado por $J_{z^5} = \{3, 5, 6\}$). La base está dada por $J_{B^5} = \{2, 4, 1\}$. ($x^5 \in F(\{5\})$).

Si metemos x_5 en la base \Rightarrow Obtenemos x^4 (especificado por $J_{z^4} = \{1, 2, 4, 6\}$), vértice eficiente degenerado ya encontrado, pero aún no explorado. ($x^4 \in F(\{4\})$).

Si metemos x_6 en la base \Rightarrow Obtenemos x^1 (especificado por $J_{z^1} = \{1, 4, 5\}$), vértice eficiente ya explorado. ($x^1 \in F(\{4\}) \cap F(\{5\})$).

Paso 3. Registro.

$V_1 = \{x^1, x^2\}$, $V_2 = \{x^3, x^4, x^5\}$, $L_1 = \{\{4\}, \{5\}\}$ y $L_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{6\}\}$.

Iteración 3.

Paso 1. Progresión.

Seleccionamos x^3 de V_2 , cuya base B^3 está dada por $J_{B^3} = \{2, 4, 6\}$.

La tabla canónica asociada a B^3 es:

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	r.h.s.
x_2	1	1	1/2	0	1/2	0	2
x_4	0	0	1/2	1	-1/2	0	1
x_6	2	0	1/2	0	1/2	1	2
	-3	0	-3/2	0	1/2	0	2
	2	0	5/2	0	3/2	0	6
	2	0	-7/2	0	1/2	0	2

$T(B^3)$. Tabla canónica asociada a x^3 .

Paso 2. Exploración.

Es evidente que x^3 es no degenerado, siendo $J_{N^3} = \{1, 3, 5\}$ y $R = \begin{pmatrix} -3 & -3/2 & 1/2 \\ 2 & 5/2 & 3/2 \\ 2 & -7/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Nótese que a la vista de la tabla $T(B^3)$, si metemos x_5 en la base obtendríamos un nuevo vértice x^6 que es obviamente ineficiente (basta observar que $r^5 \geq 0$ y aplicar la Proposición 4.3.6). Como x^6 tiene como descriptor maximal $J_{Z^6} = \{1, 2, 3, 6\}$, hacemos $L_2 = L_2 \cup \{2^{|J_{Z^6}|}\}$. Recuérdese que la detección de vértices ineficientes acelera el estudio de eficiencia para las caras en los métodos LTD.

Análisis de eficiencia para caras incidentes en x^3 .

Revisando sistemáticamente los subconjuntos $J' \subseteq J_{N^3}$, de menor a mayor cardinal, tenemos:

Nivel 1.

$$I^1 = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}\}.$$

Sabemos que $F(\{5\}) \in E_f^P$. Como $\exists J_{Z^6} \in L_2$ tal que $J_{N^3} - \{5\} \subseteq J_{Z^6}$ ya no hay más nada que analizar.

Análisis de E-adyacencia relativo a x^3 .

A partir de los resultados anteriores y de la tabla $T(B^3)$, obtenemos los siguientes vértices E-adyacentes a x^3 :

Si metemos x_1 en la base \Rightarrow Obtenemos x^5 , especificado por $J_{Z^5} = \{3, 5, 6\}$, vértice eficiente ya encontrado pero aún no explorado. ($x^5 \in F(\{5\})$).

Si metemos x_3 en la base \Rightarrow Obtenemos x^1 (especificado por $J_{z^1} = \{1, 4, 5\}$), vértice eficiente ya explorado. ($x^1 \in F(\{4\}) \cap F(\{5\})$).

Paso 3. Registro.

$$V_1 = \{x^1, x^2, x^3\}, V_2 = \{x^4, x^5\}, L_1 = \{\{4\}, \{5\}\}, L_2 = \{\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{6\}, \emptyset\}.$$

Iteración 4.

Paso 1. Progresión.

Seleccionamos x^4 de V_2 , siendo B_1^4 una base asociada dada por $J_{B_1^4} = \{5, 3, 6\}$.

La tabla canónica asociada a B_1^4 es:

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	r.h.s.
x_5	1	1	0	-1	1	0	1
x_3	1	1	1	1	0	0	3
x_6	1	-1	0	0	0	1	0
	-2	1	0	2	0	0	6
	-2	-4	0	-1	0	0	-3
	5	3	0	4	0	0	12

$T(B_1^4)$. Tabla canónica asociada a x^4 .

Paso 2. Exploración.

Evidentemente x^4 es degenerado, siendo $J_{z^4} = \{1, 2, 4, 6\}$, $J_{N_1^4} = \{1, 2, 4\}$ y $R =$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Análisis de eficiencia para caras incidentes en x^4 .

Debemos revisar los subconjuntos $J' \subseteq J_{z^4}$ de menor a mayor cardinal.

Además, como x^4 es degenerado aplicaremos como test de eficiencia el Corolario 2.8.23.

Nivel 1.

Como $I^1 = \emptyset$, pues $\{1\}, \{2\}, \{6\} \in L_2$ y $\{4\} \in L_1$, ya no hay más nada que analizar.

Análisis de E-adyacencia relativo a x^4 .

A partir de los resultados anteriores y de $T(B_1^4)$ se tiene:

Si metemos x_1 en la base \Rightarrow Obtenemos de nuevo x^4 , pero ahora especificado por $J_{B_2^4} = \{5, 3, 1\}$.

La tabla canónica asociada a B_2^4 es:

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	r.h.s.
x_5	0	2	0	-1	1	-1	1
x_3	0	2	1	1	0	-1	3
x_1	1	-1	0	0	0	1	0
	0	-1	0	2	0	2	6
	0	-6	0	-1	0	2	-3
	0	8	0	4	0	-5	12

$T(B_2^4)$. Tabla canónica asociada a x^4 .

Si metemos x_2 en la base \Rightarrow Obtenemos x^1 (ya estudiado).

Si metemos x_4 en la base \Rightarrow Obtenemos x^6 , vértice no eficiente ya encontrado.

A partir de $T(B_2^4)$ se obtienen los siguientes resultados:

Si metemos x_2 en la base \Rightarrow Obtenemos x^2 (ya estudiado).

Si metemos x_4 en la base \Rightarrow Obtenemos x^6 , vértice no eficiente ya encontrado.

Si metemos x_6 en la base \Rightarrow Obtenemos x^4 , especificado por $J_{B_1^4} = \{5, 3, 6\}$.

Como ya no hay más bases degeneradas lexicográficamente accesibles a través de pivotes positivos asociadas a x^4 , concluimos el análisis de E-adyacencia.

Paso 3. Registro.

$V_1 = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$, $V_2 = \{x^5\}$, $L_1 = \{\{4\}, \{5\}\}$, $L_2 = \{\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{6\}, \emptyset\}$.

Iteración 5.**Paso 1. Progresión.**

Seleccionamos x^5 de V_2 , cuya base B^5 está dada por $J_{B^5} = \{2, 4, 1\}$.

La tabla canónica asociada a B^5 es:

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	r.h.s.
x_2	0	1	1/4	0	1/4	-1/2	1
x_4	0	0	1/2	1	-1/2	0	1
x_1	1	0	1/4	0	1/4	1/2	1
	0	0	-3/4	0	5/4	3/2	5
	0	0	2	0	1	-1	4
	0	0	-4	0	0	-1	0

$T(B^5)$. Tabla canónica asociada a x^5 .

Paso 2. Exploración.

Es evidente que x^5 es no degenerado, siendo $J_{N^5} = \{3, 5, 6\}$ y $R =$

$$\begin{pmatrix} -3/4 & 5/4 & 3/2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Análisis de eficiencia para caras incidentes en x^5 .

Al revisar los subconjuntos $J' \subseteq J_{N^5}$ ascendentemente en su cardinal tenemos:

Nivel 1.

Como $I^1 = \emptyset$, pues $\{3\}, \{6\} \in L_2$ y $\{5\} \in L_1$, ya no hay más nada que analizar.

Análisis de E-adyacencia relativo a x^5 .

A partir de los resultados anteriores y de $T(B^5)$ tenemos:

Si metemos x_3 en la base \Rightarrow Obtenemos x^2 (especificado por $J_{Z^2} = \{4, 5, 6\}$), vértice eficiente ya explorado.

Si metemos x_5 en la base \Rightarrow Obtenemos x^6 , vértice no eficiente ya encontrado (nótese que también se da que $r^5 \geq 0$).

Si metemos x_6 en la base \Rightarrow Obtenemos x^3 (especificado por $J_{Z^3} = \{1, 3, 5\}$), vértice eficiente ya explorado.

Paso 3. Registro.

$V_1 = \{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}$, $V_2 = \emptyset$, $L_1 = \{\{4\}, \{5\}\}$, $L_2 = \{\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{6\}, \emptyset\}$.

Paso 4. Terminación.

Como $V_2 = \emptyset \Rightarrow$ El conjunto de caras eficientes maximales se obtiene a partir de $L_1 = \{\{4\}, \{5\}\}$. Así, $E^p = F(\{4\}) \cup F(\{5\})$, donde $F(\{4\}) = CVH(\{x^1, x^2, x^4\})$ y $F(\{5\}) = CVH(\{x^1, x^2, x^3, x^5\})$.

●

Capítulo 5

Programación Vectorial Lineal Entera

5.1 Introducción

A lo largo de esta memoria hemos venido tratando diversas cuestiones que atañen a la programación vectorial y, más concretamente, a la programación vectorial lineal, como un caso particular de la anterior que se ocupa de la maximización de k funciones objetivo lineales sobre un poliedro. Sin embargo, es posible obtener otras especializaciones del modelo vectorial profusamente utilizadas en la resolución de problemas del mundo real. Entre ellas, una muy conocida e íntimamente relacionada (al menos en apariencia) con el LVP, la constituye el problema de *programación vectorial lineal entera*, al que denotaremos, de manera genérica, como ILVP. Siendo conscientes de este hecho, nuestra investigación no podía darse por finalizada sin explorar, siquiera someramente, las posibilidades que ofrecía este nuevo planteamiento. Pronto nos dimos cuenta de que, tras su atractiva apariencia, se escondían tremendos desafíos que lo hacían aún más cautivante. Este capítulo representa nuestra aportación en esta materia y en él se estudian con rigor algunos de los aspectos teóricos y algorítmicos de mayor interés relacionados con el ILVP.

En la sección 5.2 se plantea el modelo ILVP en términos matemáticos y se ponen de manifiesto, mediante el uso de numerosos ejemplos, los principales inconvenientes que presenta el mismo. Entre ellos, uno de los más problemáticos, es que no todas las soluciones eficientes del ILVP necesariamente cumplen el *Principio de Geoffrion*, es decir, maximizan alguna ponderación de la función objetivo vectorial con pesos estrictamente positivos. Este hecho indujo a Teghem y Kunsch ([TgKn86]) a distinguir dos categorías mutuamente excluyentes de soluciones eficientes: *soportadas* y *no soportadas*, según verificasen o no, respectivamente, la propiedad

anteriormente reseñada. Otra dificultad, bastante incómoda, es la falta de conexidad de la región eficiente.

En la sección 5.3 examinamos las principales propiedades teóricas del ILVP. Para esta tarea, nos hemos apoyado, principalmente (pero no exclusivamente), en el estudio de las relaciones existentes entre el problema entero y sus *relajaciones lineal y convexa*. Entre otras cuestiones han sido probados los siguientes resultados: (i) si el problema entero es acotado entonces también lo es su relajación lineal y viceversa (Proposiciones 5.3.19 y 5.3.18, respectivamente), (ii) entre el conjunto de soluciones eficientes del ILVP siempre hay alguna solución soportada (Teorema 5.3.12), (iii) todas las soluciones eficientes soportadas son propias (Proposición 5.3.1), (iv) el problema entero es N-acotado (Teorema 5.3.22), (v) para cualquier solución eficiente no soportada siempre existe alguna solución eficiente de la relajación lineal que la domina (Proposición 5.3.23), (vi) el método de Ecker y Kouada para generar una solución eficiente inicial sigue siendo válido en el caso entero (Teorema 5.3.21), ...

En la sección 5.4 presentamos una serie de estimaciones novedosas sobre la proximidad (en norma infinito) entre las soluciones eficientes del problema entero y las de su relajación lineal (Teoremas 5.4.3, 5.4.6 y 5.4.7). Estas acotaciones aportan una información geométrica valiosa, tanto para el analista como para el DM, pues indican si, en un entorno de una solución eficiente dada de la relajación lineal, existe alguna solución eficiente del problema entero y viceversa. Además, mostramos que las cotas halladas son las mejores posibles que se pueden obtener bajo las hipótesis hechas (Ejemplo 5.4.4).

Desafortunadamente, no es posible conseguir, de manera directa, métodos generadores de soluciones eficientes enteras para el ILVP, mediante la simple mezcla de las técnicas existentes para el LVP con los algoritmos de resolución disponibles para el caso escalar entero ([TgKn86], p. 95). Ello obliga a un replanteamiento completo del problema. En la sección 5.5 analizaremos en primer lugar, y sin pretender ser exhaustivos, algunos de los métodos generadores de soluciones eficientes enteras para el ILVP considerados como más relevantes entre los publicados en la literatura. Distinguiremos el caso general (con múltiples objetivos) del caso especial biobjetivo, debido a las simplificaciones que permiten las propiedades de este último. En general, para cada método damos una especificación algorítmica detallada del mismo y realizamos un análisis sobre sus propiedades más relevantes: convergencia, validez y complejidad. Esto nos permitirá hacernos una idea del estado del arte sobre el tema. Los algoritmos para el problema general que se abordan en este apartado son los de *Klein y Hannan* ([KlHn82]), y *Marcotte y Soland* ([MrSl86]). Para el caso biobjetivo prestaremos atención al *método NISE* ([Ch78]), al *algoritmo de Chalmet, Lemonidis y Elzinga* ([ChLE86]) y al *método Restringido* ([Ch78],

p. 115-127). Casi todos los procedimientos expuestos han sido retocados (manteniendo el espíritu original) de alguna manera, con la intención de, o bien hacerlos más claros o bien poder extenderlos a situaciones para las que originalmente no fueron pensados. En particular, este último es el caso de los métodos NISE y Restringido, los cuales fueron desarrollados para el caso continuo.

Aunque no trataremos, por cuestiones de espacio, los numerosos algoritmos de propósito especial publicados para el problema binario, merece la pena destacar los métodos de enumeración implícita dados por Bitran ([Bi77] y [Bi79]), Deckro y Winkofsky ([DcWn83]) y el de Kiziltan y Yucaoglu ([KzYc83]). Entre los diferentes artículos donde se realiza una revisión del estado del arte de los métodos generadores de soluciones eficientes enteras destacamos el de Rasmussen ([Rs86]), en el que se analizan los métodos para el problema binario, y el de Teghem y Kunsch ([TgKn86]), que hacen lo propio con el problema general y el problema binario.

Sin embargo, el objetivo fundamental de la sección 5.5 no consiste tanto en hacer una exposición más o menos precisa de algunos de los procedimientos de resolución más conocidos para el ILVP, sino en presentar dos nuevos algoritmos generadores de soluciones eficientes enteras desarrollados por nosotros. El primero de ellos, al que hemos denominado *método de Puntos Subeficientes*, es un procedimiento aproximado por exceso cuando se tienen en cuenta más de dos objetivos ($k > 2$) y exacto para el caso biobjetivo. El segundo, al que nos referiremos como *método de los Retículos Completamente Eficientes*, es un método exacto. Además del estudio común para los procedimientos de esta sección, ambos métodos han sido aplicados sobre problemas concretos para ilustrar su funcionamiento.

El método de Puntos Subeficientes enumera de forma implícita las soluciones factibles del ILVP generando, para cada nodo del árbol de enumeración, separaciones válidas formadas por subconjuntos disjuntos dos a dos. Ello implica que no se recalculan soluciones previamente halladas. Los puntos de corte para cada nodo se obtienen a través de una aplicación local del test de Ecker y Kouada (ver sección 4.2.3), que garantiza que son eficientes cuando $k = 2$.

El método de los Retículos Completamente Eficientes (RCE) utiliza un enfoque radicalmente distinto (y, hasta donde sabemos, inusual en el campo entero) al utilizado por los otros algoritmos analizados en esta sección. Efectivamente, mientras que todos los métodos estudiados hasta ahora almacenan de forma explícita la región eficiente, el procedimiento RCE lo hace de forma implícita. Básicamente, el algoritmo propuesto estudia la eficiencia completa de las regiones activas, almacenándolas si son completamente eficientes y separándolas en caso contrario. El principal

inconveniente del algoritmo es que cuando $k > 2$, los subconjuntos de la separación no tienen por qué ser disjuntos dos a dos, pudiendo ser regeneradas algunas de las soluciones ya obtenidas. Evidentemente, cuanto mayor sea la relación entre el número de soluciones eficientes y el número de soluciones factibles del problema, mejor será el comportamiento del método propuesto.

5.2 El Problema de Programación Vectorial Lineal Entero

La formulación estándar del problema de programación vectorial lineal entero mixto viene dada por:

$$\left. \begin{array}{l} \max z(x) = Cx \\ \text{s.a. : } x \in F = X \cap \{x \in R^n / x_j \in Z, \forall j \in J'\} \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

siendo $J' \subseteq J = \{1, \dots, n\}$ y $X = \{x \in R_+^n / Ax = b\}$, donde supondremos que $A \in Z^{m \times n}$ es regular por filas, $b \in Z^m$ y $C \in Z^{k \times n}$.

Al modelo anterior lo denotaremos, abreviadamente, por MILVP, acrónimo de Mixed Integer Linear Vector Program.

Cuando $J' = J$ tenemos un problema de programación vectorial entero puro, denominado ILVP, el cual puede ser escrito como:

$$\max \{Cx / x \in F = X \cap Z^n\} \quad (5.2)$$

Una especialización de la formulación dada en (5.2) la constituye aquélla en la que los valores de las variables están restringidos a los elementos del conjunto $B = \{0, 1\}$ hablándose, en este caso, del problema de programación vectorial entero 0-1 (0-1ILVP).

Obsérvese que F no es un poliedro, mientras que X sí lo es. En realidad, para el problema entero puro, F es un retículo.

Sea IP un ILVP dado. Siguiendo la nomenclatura utilizada a lo largo de esta memoria, al conjunto de soluciones eficientes del problema IP lo denotaremos por E^{IP} .

El conjunto E^{IP} se suele describir de forma explícita, dado que en la mayor parte de problemas reales la región eficiente es finita.

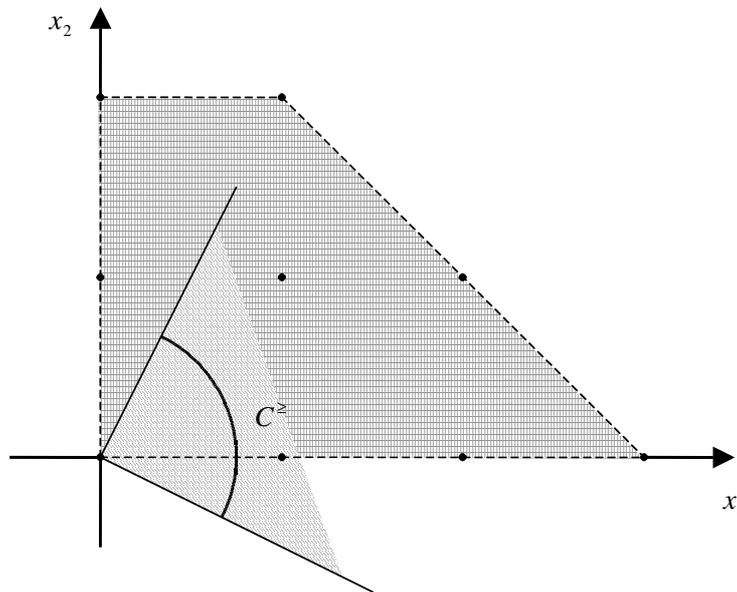


Figura 5.1

Ejemplo 5.2.1 Consideremos el problema IP dado por:

$$\left. \begin{array}{l} \max z(x) = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2) \\ \text{s.a. } x \in F = \{x \in Z_+^2 / x_1 + x_2 \leq 3, x_2 \leq 2\} \end{array} \right\}$$

La Figura 5.1 muestra la representación gráfica de la región factible y del cono de preferencias asociado. Claramente, el conjunto de soluciones eficientes es $E^{IP} = \{(3,0), (2,1), (1,2)\}$.

●

Igual que ocurre en el caso escalar, el modelo ILVP es mucho más duro de tratar que el LVP. A continuación presentaremos algunas de las razones que justifican esta afirmación.

En primer lugar, existe una diferencia fundamental entre la programación vectorial lineal continua y la entera, pues mientras que en la primera, cualquier punto $\bar{x} \in E^P$ tiene una región de indiferencia $I(\bar{x}) = \{\lambda \in \Lambda_k^0 / \bar{x} \in S_{P_\lambda}\} \neq \emptyset$, es decir, verifican el Principio de Geoffrion ([TgKn86], p. 96), en la segunda esto puede que no suceda, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo extraído de [Bt77], p. 122:

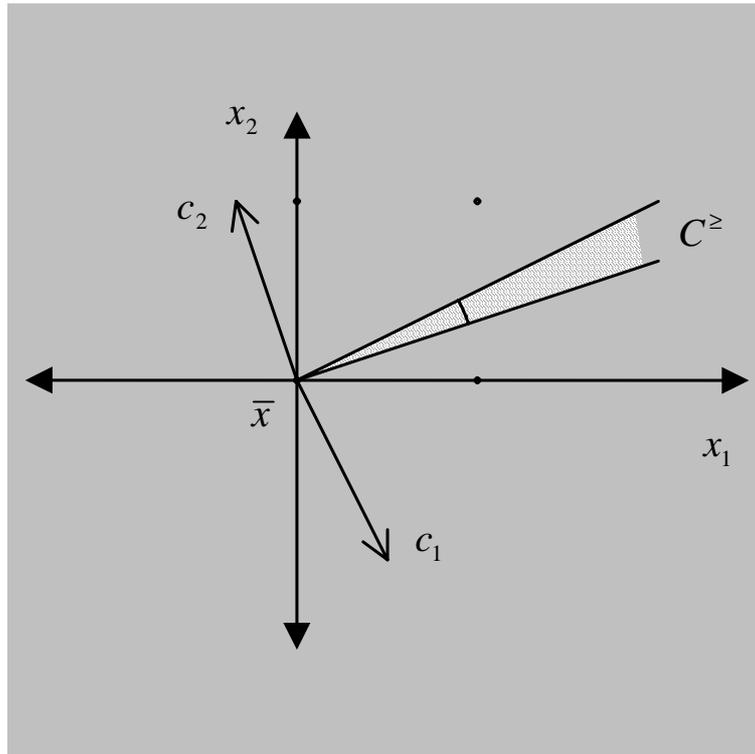


Figura 5.2

Ejemplo 5.2.2 Sea IP el problema:

$$\max \{(x_1 - 2x_2, -x_1 + 3x_2) / x \in B^2\}$$

La Figura 5.2 muestra la representación de la región factible y del cono de preferencias asociado al problema. Resulta claro que $E^{IP} = B^2$. Sin embargo, para el punto $\bar{x} = (0, 0)$ ocurre que $\forall \lambda \in R_+^k$ se verifica que $\bar{x} \notin S_{IP_\lambda}$. Luego $I(\bar{x}) = \{\lambda \in \Lambda_k^0 / \bar{x} \in S_{IP_\lambda}\} = \emptyset$.

●

Esta (desafortunada) característica o anomalía consistente en que algunas de las soluciones eficientes del problema IP pueden tener regiones de indiferencia vacías, nos conducirá a hacer distinciones dentro de E^{IP} .

Definición 5.2.3 ([TgKn86], p. 96) Sea $\bar{x} \in E^{IP}$. Diremos que \bar{x} es eficiente soportada (supported efficient) si $I(\bar{x}) \neq \emptyset$. En otro caso, \bar{x} se dice que es eficiente no soportada.

Obsérvese que esta definición es muy parecida a la dada por Gabriel Bitran ([Bt79], p. 381), donde en lugar de considerar $\lambda \in \Lambda_k^0$ se usa $\lambda \in \Lambda_k$ y a las soluciones eficientes soportadas y no soportadas se les denomina, respectivamente, soluciones eficientes fuertes y débiles.

Los conjuntos de soluciones eficientes soportadas y no soportadas los denotaremos, respectivamente, por E_s^{IP} y E_{ns}^{IP} . Evidentemente, ambos conjuntos forman una partición de E^{IP} , es decir, $E^{IP} = E_s^{IP} \cup E_{ns}^{IP}$ y $E_s^{IP} \cap E_{ns}^{IP} = \emptyset$.

La siguiente conclusión es clara:

Proposición 5.2.4 $E_s^{IP} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_k^0} S_{IP_\lambda}$.

Veamos qué se puede decir respecto a las regiones de indiferencia asociadas a soluciones eficientes.

Corolario 5.2.5 ([Bt77], Theorem 3.6) *Sea $\bar{x} \in E_s^{IP}$. Entonces $I(\bar{x}) = \{\lambda \in \Lambda_k^0 / \lambda^t C(\bar{x} - x^i) \geq 0, \forall x^i \in E_s^{IP}\}$.*

Demostración. Directa a partir de la Proposición 5.2.4. ■

Cuando se conoce E^{IP} , pero no somos capaces de discriminar el conjunto E_s^{IP} , podemos utilizar el siguiente resultado:

Corolario 5.2.6 *Sea $\bar{x} \in E_s^{IP}$. Entonces $I(\bar{x}) = \{\lambda \in \Lambda_k^0 / \lambda^t C(\bar{x} - x^i) \geq 0, \forall x^i \in E^{IP}\}$.*

Demostración.

“ \subseteq ”

Directa aplicando la definición de $I(\bar{x})$ y teniendo en cuenta que $E^{IP} \subseteq F$.

“ \supseteq ”

Inmediata teniendo en cuenta el Corolario 5.2.5 y que $E_s^{IP} \subseteq E^{IP}$. ■

Ejemplo 5.2.7 *Consideremos el problema IP :*

$$\left. \begin{array}{l} \max z(x) = (-x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2) \\ \text{s.a : } x \in F = \{x \in Z_+^2 / x_1 + 5x_2 \leq 25, x_1 + x_2 \leq 7, 3x_1 + x_2 \leq 16\} \end{array} \right\}$$

En la Figura 5.3 se representa gráficamente el cono de preferencias y las regiones factibles, tanto del problema continuo (relajación lineal) como del problema entero.

El problema IP tiene 27 soluciones factibles, de las cuales 11 son eficientes. En particular,

$$E^{IP} = \{(0,5), (0,4), (1,4), (2,4), (3,4), (3,3), (4,3), (4,2), (4,1), (5,1), (5,0)\}.$$

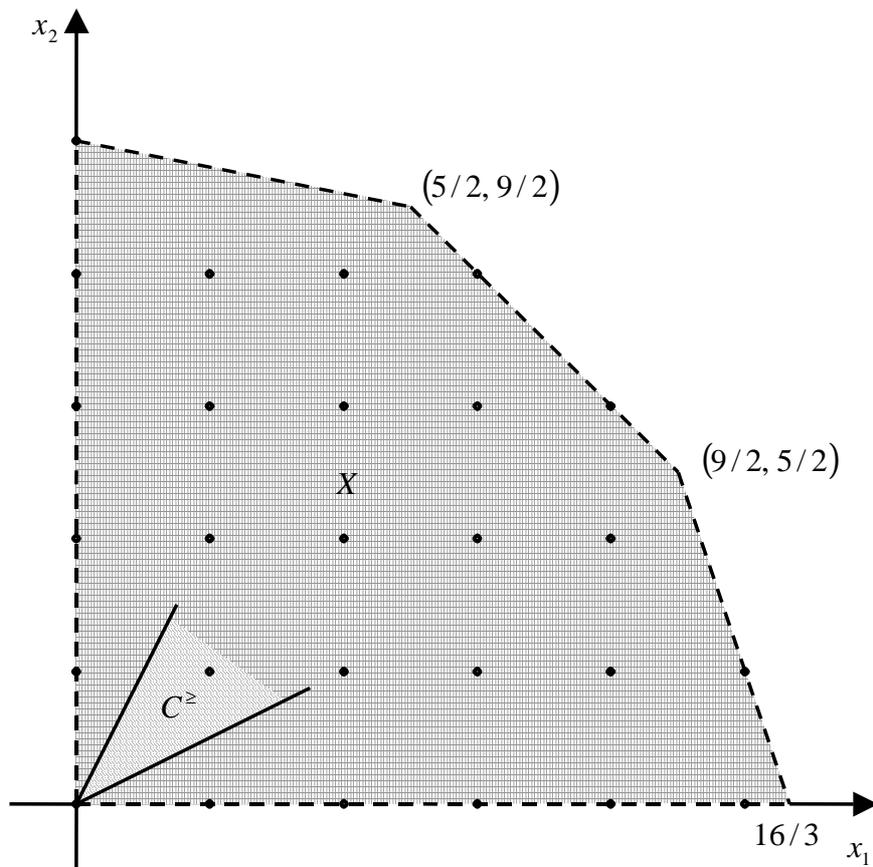


Figura 5.3

Es fácil discernir cuáles de las soluciones eficientes del problema entero son soportadas o no si disponemos de la representación gráfica del conjunto criterio (ver Figura 5.4). Resulta así que:

$$E_s^{IP} = \{(0,5), (3,4), (4,3), (5,1), (5,0)\}, \quad E_{ns}^{IP} = \{(0,4), (1,4), (2,4), (3,3), (4,2), (4,1)\}.$$

Nótese que en $z(X)$ se encuentran una gran cantidad de puntos enteros que no tienen inversa entera en X y que, por tanto, no son factibles para el problema entero. Efectivamente, el punto $(2,1) \in z(X)$ es la imagen de $(4/3, 5/3) \in X$, pero $(4/3, 5/3) \notin F$.

●

El carácter discreto de la región factible del ILVP es más un inconveniente que una ventaja, pues al perderse la convexidad del problema se anulan muchos importantes resultados que se daban en el caso lineal, entre ellos la conexidad del conjunto de soluciones eficientes.

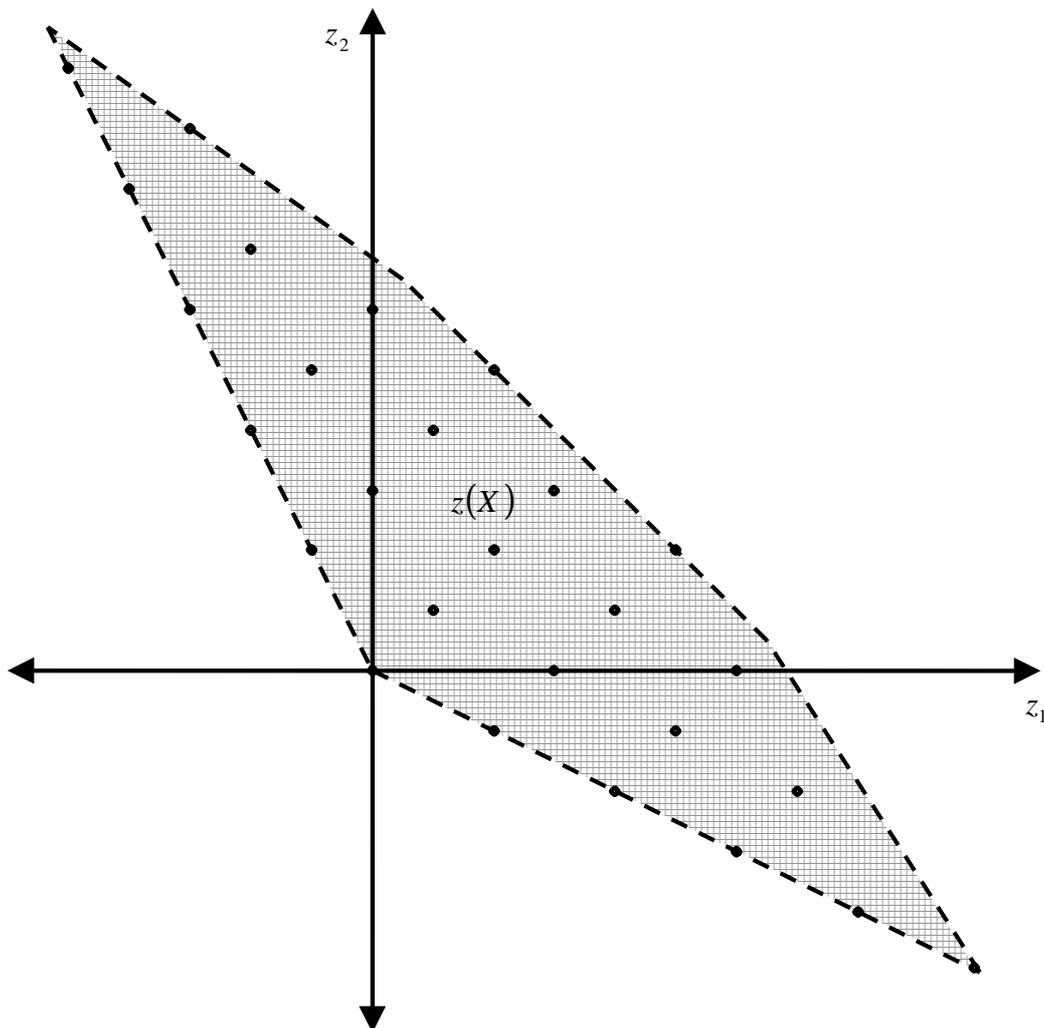


Figura 5.4

Además, nótese que el atractivo de poder listar de forma explícita la región eficiente es bastante discutible. Cuando E^{IP} es no acotado, o acotado pero con un cardinal elevado resulta imposible o poco práctico, dar la descripción tradicional (en forma explícita) de E^{IP} . Por desgracia, tampoco resulta fácil dar una descripción de forma implícita de E^{IP} , aunque es posible, como pondremos de manifiesto en la Sección 5.5, con el método de los Reticulos Completamente Eficientes.

Ejemplo 5.2.8 Consideremos el siguiente problema IP propuesto por Roger Hartley ([Hr83], p. 19):

$$\max \{x / e'x \leq b, x \geq 0, x \in Z^n\},$$

donde $b \in Z_{++}$. La descripción explícita de E^{IP} tiene cardinal $\binom{n+b-1}{b}$ (combinaciones con repetición de n elementos tomados de b en b), lo que

para n y b moderados es desproporcionado. Sin embargo, de forma implícita, $E^{IP} = \{x \in F / e^t x = b\}$. La relajación lineal de este problema tiene una única cara eficiente con n vértices. Para el problema relajado, $E^P = \{x \in X / e^t x = b\}$.

●

Por otra parte, cualquier problema de optimización escalar lineal entera *se puede escribir* (aunque es bastante difícil de lograr) como un problema de optimización escalar lineal y, sin embargo, esto no se puede extender al caso vectorial como han puesto de manifiesto los ejemplos anteriores.

5.3 Preliminares Teóricos

En esta sección obtendremos de manera rigurosa algunas de las propiedades más relevantes relacionadas con el ILVP.

Una cuestión interesante que, aparentemente no ha sido tratada con anterioridad en la literatura, consiste en dilucidar si todas las soluciones eficientes del problema entero son propias. A pesar de que este problema aún permanece abierto, lo que sí podemos garantizar son los siguientes resultados:

Proposición 5.3.1 $E_s^{IP} \subseteq E_p^{IP}$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in E_s^{IP} \Rightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k$ tal que $\bar{x} \in S_{IP_\lambda}$. Aplicando el Teorema 1.4.7 $\Rightarrow \bar{x} \in E_p^{IP}$.

■

Proposición 5.3.2 Si X es un polítopo entonces $E^{IP} = E_p^{IP}$.

Demostración. Inmediata por tener F un número finito de puntos.

■

5.3.1 Relaciones entre el Problema Entero y su Relajación Convexa

Definición 5.3.3 ([Sc86], p. 230) Dado un poliedro X , se define la envolvente entera X_I de X , como la envolvente convexa de los puntos enteros de X , es decir, $X_I = CVH(X \cap Z^n) = CVH(F)$.

Denotaremos por P_I el problema (lineal) vectorial continuo:

$$\max\{Cx / x \in X_I\} \quad (5.3)$$

Al problema P_I lo llamaremos *relajación convexa* de IP .

Estudiando la relación existente entre los problemas IP y P_I es posible obtener ciertas propiedades de utilidad para el problema entero. Necesitaremos primero un breve repaso de resultados conocidos.

Dado que $F \subseteq X_I \subseteq X$ (en realidad $F = X_I \cap Z^n$) podemos decir que P_I es una relajación de IP .

Evidentemente, X_I es un poliedro. Luego, por el Teorema de Caratheodory ([NmW188], p. 104-105), $\exists \{x^1, \dots, x^q\} \subseteq F$, $\exists \{d^1, \dots, d^r\} \subseteq Z^n$ tal que $X_I = CVH(x^1, \dots, x^q) + CNH(d^1, \dots, d^r)$.

Si se conocen explícitamente todos los puntos de F , es teóricamente posible (aunque difícil de llevar a cabo en la práctica) obtener una descripción lineal de X_I . Para cardinales reducidos se puede utilizar el programa de libre difusión PORTA¹ desarrollado por Thomas Christof.

Para el caso 0-1, debido a la estructura especial del problema se tiene:

Proposición 5.3.4 ([Sh75], p. 173) $x \in F$ si, y sólo si, $x \in (X_I)_{xp}$.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Siempre se da pues $X_I = CVH(F)$.

“ \Rightarrow ”

Sea $x \in F$. Supongamos por reducción al absurdo que $x \notin (X_I)_{xp} \Rightarrow \exists x^1, x^2 \in X_I$, $x^1 \neq x^2$, $\exists \lambda \in]0, 1[$, $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$. Ahora bien, como $0 < \lambda < 1$ y $\forall i, j \in \{1, 2\}$, $0 \leq x_i^j \leq 1 \Rightarrow$ si $x_i = 0 \Rightarrow x_i^1 = x_i^2 = 0$ y si $x_i = 1 \Rightarrow x_i^1 = x_i^2 = 1$. Entonces, $x = x^1 = x^2 \Rightarrow \#$, luego $x \in (X_I)_{xp}$. ■

Definición 5.3.5 ([Sc86], p. 231) Sea X un poliedro. Cuando $X_I = X$ se dice que X es un poliedro entero.

La conceptualización de este fenómeno se debe a que, para muchos problemas combinatorios (como los de transporte y asignación), ocurre que X es un poliedro entero y se tiene directamente una descripción lineal de X_I .

¹ Disponible en:

<http://www.iwr.uni-heidelberg.de/iwr/comopt/soft/PORTA/readme.html>

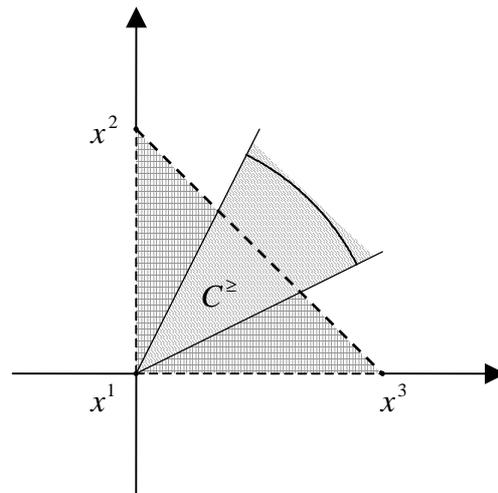


Figura 5.5

Teorema 5.3.6 ([NmWl88], Proposition 2.2, p. 541) *Si A es totalmente unimodular entonces X es entero.*

Corolario 5.3.7 ([Sc86], p. 232) *Sea X un poliedro racional apuntado. Entonces X es entero si, y sólo si, todos sus vértices son enteros.*

Es bien sabido (ver, por ejemplo, [Sc86], p. 230 o [NmWl88], Theorem 6.3, p. 107) que $\forall \lambda \in R^k$ se verifica $S_{IP_\lambda} = S_{(P_1)_\lambda} \cap Z^n$.

Proposición 5.3.8 $E^{P_1} \cap Z^n \subseteq E^{IP}$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in E^{P_1} \cap Z^n$. Evidentemente, $\bar{x} \in F$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^{IP} \Rightarrow \exists \hat{x} \in F, z(\hat{x}) \geq z(\bar{x})$. Como $F \subseteq X^{P_1} \Rightarrow \exists \hat{x} \in X^{P_1}, z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} \notin E^{P_1} \Rightarrow \#$, luego $\bar{x} \in E^{IP}$. ■

Sin embargo, en general, no coinciden E^{IP} y $E^{P_1} \cap Z^n$, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.3.9 Sea IP el problema 0-1: $\max \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x / (1, 1)x \leq 1, x \in Z_+^2 \right\}$.

Véase la Figura 5.5 para una representación gráfica del cono de preferencias y de las regiones factibles del problema entero y su relajación lineal.

Como $C^z = CNH(\{(1, 2), (2, 1)\})$ se tiene que $E^{IP} = \{x^1, x^2, x^3\} = F$ (el problema entero es completamente eficiente), $E^{P_1} = CVH(\{x^2, x^3\})$ y $E^{P_1} \cap Z^n = \{x^2, x^3\}$. ●

No obstante, es posible asegurar que el conjunto de soluciones eficientes soportadas del problema entero coincide con el conjunto de soluciones eficientes enteras del problema lineal P_l . Efectivamente:

Teorema 5.3.10 $E^{P_l} \cap Z^n = E_s^{IP}$.

Demostración.

“ \subseteq ”

$\forall \bar{x} \in E^{P_l} \cap Z^n \subseteq E^{IP} \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda_k^0, \bar{x} \in S_{(P_l)\lambda}$. Como $F \subseteq X_l \Rightarrow \bar{x} \in S_{IP_\lambda} \Rightarrow \bar{x} \in E_s^{IP}$.

“ \supseteq ”

Sea $\bar{x} \in E_s^{IP} \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda_k^0$ tal que $\bar{x} \in S_{IP_\lambda} \Rightarrow \bar{x} \in S_{(P_l)\lambda} \cap Z^n \Rightarrow \bar{x} \in E^{P_l} \cap Z^n$. ■

De esta manera podemos concluir que:

Corolario 5.3.11 $E_{xp}^{P_l} \subseteq E_s^{IP}$.

Demostración. Directa, pues $E_{xp}^{P_l} \subseteq E^{P_l} \cap Z^n$. ■

El siguiente resultado es importante por cuanto indica que si el problema entero es acotado entonces tiene soluciones eficientes soportadas.

Teorema 5.3.12 $E^{IP} \neq \emptyset$ si, y sólo si, $E_s^{IP} \neq \emptyset$.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Directo.

“ \Rightarrow ”

Sea $\bar{x} \in E^{IP}$. Supongamos por reducción al absurdo que $E_s^{IP} = \emptyset$. Por el Teorema 5.3.10 $\Rightarrow E^{P_l} = \emptyset$. Como $\bar{x} \in X_l \Rightarrow \exists d \in (X_l)_{xd} \cap Z^n$ tal que $\forall \delta \in R_{++}$ se verifica $\hat{x} = \bar{x} + \delta d \in X_l$ y $z(\bar{x} + \delta d) \geq z(\bar{x})$. En particular, tomando $\delta \in Z_{++}$ resulta que $\hat{x} = \bar{x} + \delta d \in F$ y $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} \notin E^{IP} \Rightarrow \#$, luego $E_s^{IP} \neq \emptyset$. ■

Es claro entonces que:

Corolario 5.3.13 $E^{IP} = \emptyset$ si, y sólo si, $\forall \lambda \in R_{++}^k, S_{IP_\lambda} = \emptyset$.

Corolario 5.3.14 Si $E^{IP} \neq \emptyset$ entonces $E^{IP} \cap (X_I)_{xp} \neq \emptyset$.

Demostración. $E^{IP} \neq \emptyset \Rightarrow E_s^{IP} \neq \emptyset \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda_k^0, S_{IP_\lambda} = S_{(P_I)_\lambda} \cap Z^n \neq \emptyset \Rightarrow S_{(P_I)_\lambda} \cap (X_I)_{xp} \neq \emptyset \Rightarrow S_{IP_\lambda} \cap (X_I)_{xp} \neq \emptyset \Rightarrow E^{IP} \cap (X_I)_{xp} \neq \emptyset$. ■

Un vértice de X_I puede ser no eficiente en P_I y, sin embargo, ser eficiente en IP , como pone de manifiesto el Ejemplo 5.3.9. En él, $x^1 \in E^{IP} \cap (X_I)_{xp}$ y, sin embargo, $x^1 \notin E^{P_I}$.

En términos de acotación, los problemas IP y P_I son equivalentes. Efectivamente:

Proposición 5.3.15 $E^{IP} \neq \emptyset$ si, y sólo si, $E^{P_I} \neq \emptyset$.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

$E^{IP} \neq \emptyset \Rightarrow E_s^{IP} \neq \emptyset \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda_k^0, S_{IP_\lambda} \neq \emptyset \Rightarrow S_{(P_I)_\lambda} \neq \emptyset \Rightarrow E^{P_I} \neq \emptyset$.

“ \Leftarrow ”

$E^{P_I} \neq \emptyset \Rightarrow E_{xp}^{P_I} \neq \emptyset \Rightarrow E_s^{IP} \neq \emptyset \Rightarrow E^{IP} \neq \emptyset$. ■

5.3.2 Relaciones entre el Problema Entero y su Relajación Lineal

Dado el problema $IP \equiv \max\{Cx / x \in F = X \cap Z^n\}$, se define su *relajación lineal* como el LVP $P \equiv \max\{Cx / x \in X\}$, donde la restricción de que $x \in Z^n$ ha sido eliminada.

Como $F \subseteq X$ y la función objetivo no ha sido cambiada, P es una relajación de IP y, por tal motivo, se le aplican los resultados generales desarrollados en la sección 1.10.

Aunque, en general, no se da la igualdad entre los conjuntos $E^P \cap Z^n$ y E^{IP} (ver Ejemplo 5.3.9), podemos probar que $E^P \cap Z^n$ constituye una aproximación por defecto de E^{IP} . Efectivamente:

Proposición 5.3.16 $E^P \cap Z^n \subseteq E^{IP}$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in E^P \cap Z^n$. Evidentemente, $\bar{x} \in F$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^{IP} \Rightarrow \exists \hat{x} \in F = X \cap Z^n, z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \hat{x} \in X, z(\hat{x}) \geq z(\bar{x}) \Rightarrow \#$, pues $\bar{x} \in E^P$. ■

Proposición 5.3.17 Si IP no tiene soluciones eficientes no soportadas y A es totalmente unimodular entonces $E^P \cap Z^n = E^{IP}$.

Demostración. Por el Teorema 5.3.10 sabemos que $E^{P_i} \cap Z^n = E_s^{IP}$. Si IP no tiene soluciones eficientes no soportadas $\Rightarrow E^{IP} = E_s^{IP}$. Además, por ser A totalmente unimodular, aplicando el Teorema 5.3.6 $\Rightarrow P_i \equiv P$. Ahora es claro el resultado. ■

Kouvelis y Carlson proponen una clase especial de problemas enteros biobjetivos, denominados *programas unimodulares particionados en variables* (VPUP, Variable Partitioned Unimodular Programs) en los que, siendo la matriz A totalmente unimodular, se puede garantizar, a priori, que $E_{ns}^{IP} = \emptyset$ ([KvCr92], Theorem 3.1). Para tales problemas, en función del resultado anterior, bastaría resolver la relajación lineal para tener resuelto de forma implícita el problema entero.

Los siguientes dos resultados muestran la relación existente entre la acotación del problema relajado y la del problema entero.

Proposición 5.3.18 Si $F \neq \emptyset$ y $E^P \neq \emptyset$ entonces $E_s^{IP} \neq \emptyset$.

Demostración. $E^P \neq \emptyset \Rightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, S_{P_\lambda} \neq \emptyset$. Como $\emptyset \neq F \subseteq X \Rightarrow S_{IP_\lambda} \neq \emptyset \Rightarrow E_s^{IP} \neq \emptyset$. ■

Proposición 5.3.19 Si $E^{IP} \neq \emptyset$ entonces $E^P \neq \emptyset$.

Demostración. Por hipótesis, $E^{IP} \neq \emptyset$. Aplicando el Teorema 5.3.12, $\Rightarrow E_s^{IP} \neq \emptyset \Rightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, IP_\lambda$ es acotado. Como, según la formulación dada en (5.1), X es racional, aplicando [NmWl88], Corollary 6.8, c., p. 108 $\Rightarrow P_\lambda$ es acotado $\Rightarrow E^P \neq \emptyset$. ■

Cuando se relaja la condición de racionalidad del poliedro X , el recíproco no es cierto en todos los casos, es decir, puede ocurrir que $E^{IP} \neq \emptyset$ y $E^P = \emptyset$, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.3.20 Sea IP el problema $\max\{Ix / (\alpha, -1)x = 0, x \in Z_+^2\}$, donde α es irracional. Para $\alpha = \pi$ la región factible de la correspondiente relajación lineal se muestra en la Figura 5.6. Claramente, $E^P = \emptyset$. Por otra parte, dado que el único punto entero de la región factible es el $(0, 0)$, resulta que $E^{IP} = \{(0, 0)\}$. ●

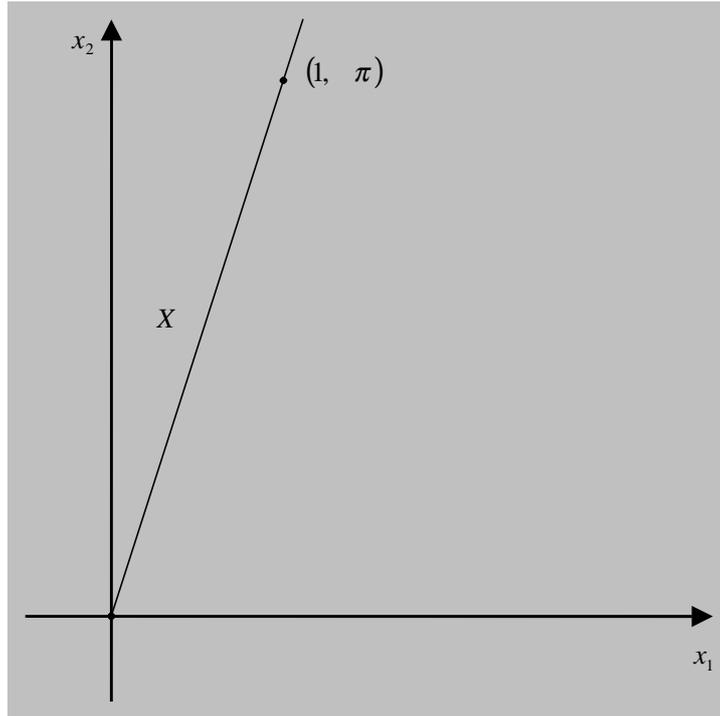


Figura 5.6

Uno de las conclusiones más interesantes que pueden ser obtenidas con los resultados de este apartado es que el método de Ecker y Kouada para generar una solución eficiente inicial (ver sección 4.2.3) sigue siendo válido para el ILVP. Efectivamente, dados $\bar{x} \in F$, $\bar{z} = z(\bar{x})$ y denotando por $IP(\bar{z})$ al problema:

$$\max \{ e^t s / Ax = b, Cx = Is + C\bar{x}, x \in Z_+^n, s \in R_+^k \}$$

el Corolario 1.4.36 garantiza que si $(\hat{x}^t, \hat{s}^t) \in S_{P(\bar{z})}$ entonces $\hat{x} \in E^P$.

Además:

Teorema 5.3.21 Si $F \neq \emptyset$ entonces $E^{IP} = \emptyset$ si, y sólo si, $IP(\bar{z})$ es no acotado.

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $IP(\bar{z})$ es acotado. Por el Teorema 1.4.35 $\Rightarrow E^{IP} \neq \emptyset \Rightarrow \#$.

“ \Leftarrow ”

Supongamos por reducción al absurdo que $E^{IP} \neq \emptyset$. Por la Proposición 5.3.19 $\Rightarrow E^P \neq \emptyset$. Por hipótesis, $IP(\bar{z})$ es no acotado $\Rightarrow P(\bar{z})$ es no acotado. Aplicando el Teorema 4.2.9 $\Rightarrow E^P = \emptyset \Rightarrow \#$.

■

Al igual que ocurre en el caso lineal, el problema entero es N-acotado. Efectivamente:

Teorema 5.3.22 Si $E^{IP} \neq \emptyset$ entonces $\forall x \in F$ se verifica que $x \in E^{IP}$ o bien $\exists \hat{x} \in E^{IP}$ tal que $z(\hat{x}) \geq z(x)$.

Demostración. Sean $\bar{x} \in F$ y $\bar{z} = z(\bar{x})$. Supongamos que $\bar{x} \notin E^{IP}$. Como por hipótesis $E^{IP} \neq \emptyset$, aplicando el Teorema 5.3.21 $\Rightarrow IP(\bar{z})$ es acotado $\Rightarrow \exists (\hat{x}', \hat{s}') \in S_{IP(\bar{z})}$. Ahora, por el Corolario 1.4.36 $\Rightarrow \hat{x} \in E^{IP}$ y, además, $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x})$. ■

Veamos que también se verifica que para cualquier solución eficiente no soportada del problema entero existe una solución eficiente del problema lineal relajado que la domina.

Proposición 5.3.23 Si $\bar{x} \in E_{ns}^{IP}$ entonces $\exists \hat{x} \in E^P$ tal que $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x})$.

Demostración. En primer lugar obsérvese que si $E_{ns}^{IP} \neq \emptyset \Rightarrow E^{IP} \neq \emptyset$. Aplicando la Proposición 5.3.19 $\Rightarrow E^P \neq \emptyset$. Por hipótesis $\bar{x} \in E_{ns}^{IP} \Rightarrow \bar{x} \in X$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^P$. Como P es un LVP, aplicando el Teorema 1.7.13 $\Rightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k$, $\bar{x} \in S_{P_\lambda}$. Teniendo en cuenta que $F \subseteq X \Rightarrow \bar{x} \in S_{P_\lambda} \Rightarrow \bar{x} \in E_s^{IP} \Rightarrow \#$. Luego $\bar{x} \notin E^P$. Ahora, por el Corolario 1.10.10 $\Rightarrow \exists \hat{x} \in E^P$, $z(\hat{x}) \geq z(\bar{x})$. ■

5.3.3 Eficiencia Completa

Intuitivamente (debido al carácter discreto de F) la posibilidad de encontrarnos con una situación de eficiencia completa para el problema entero parece ser superior a la que presenta su relajación lineal. Para confirmar esta apreciación basta tener en cuenta que IP puede ser completamente eficiente y, sin embargo, P o P_l no serlo (ver Ejemplo 5.3.9) pero no a la inversa, como garantiza el siguiente resultado:

Teorema 5.3.24 Si $E^P = X$ entonces $E^{IP} = F$.

Demostración. Sabemos por la Proposición 1.10.3 que $E^P \cap F \subseteq E^{IP}$. Si $E^P = X \Rightarrow F \subseteq E^{IP} \Rightarrow E^{IP} = F$. ■

La consecuencia directa del resultado anterior es que cualquier condición suficiente para comprobar la eficiencia completa de P sigue siendo válida para IP . En particular:

Proposición 5.3.25 Si $\exists \lambda \in \Lambda_k^0$, $\exists u \in R^m$ tales que $\lambda^t C = u^t A$ entonces $E^{IP} = F$.

Demostración. Basta aplicar el Corolario 3.2.22. ■

El siguiente resultado es algo más sutil que la aplicación del Teorema de la alternativa de Tucker ([Mn69], p. 29) a la Proposición 5.3.25.

Proposición 5.3.26 *Si el sistema:*

$$Ad = 0, Cd \geq 0 \quad (5.4)$$

no tiene solución en Z^n entonces $E^{IP} = F$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in F$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{x} \notin E^{IP} \Rightarrow \exists \hat{x} \in F, C\hat{x} \geq C\bar{x} \Rightarrow \exists d = \hat{x} - \bar{x} \in Z^n, Ad = 0, Cd \geq 0 \Rightarrow \#$. Luego $F \subseteq E^{IP}$. ■

Curiosamente, si el sistema (5.4) tiene solución entera no negativa, no sólo el problema entero no es completamente eficiente, sino que es no acotado (no tiene ninguna solución eficiente).

Proposición 5.3.27 *Si el sistema (5.4) tiene solución en Z_+^n entonces $E^{IP} = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{x} \in E^{IP}$. Por hipótesis, $\exists d \in Z_+^n, Ad = 0, Cd \geq 0 \Rightarrow \forall \delta \in Z_{++}, \hat{x} = \bar{x} + \delta d \in F, C\hat{x} \geq C\bar{x} \Rightarrow \bar{x} \notin E^{IP} \Rightarrow \#$. Luego $E^{IP} = \emptyset$. ■

Siempre es posible caracterizar la eficiencia completa del problema entero en los términos enunciados en el Teorema 3.2.7. Así, por ejemplo:

Teorema 5.3.28 *IP es completamente eficiente si, y sólo si, el siguiente programa escalar entero mixto:*

$$\max \left\{ e^t s / z(x) - z(y) - s = 0, x, y \in F, s \geq 0 \right\} \quad (5.5)$$

es acotado, con valor óptimo igual a 0.

El resultado anterior nos será de gran utilidad en la sección 5.5.3 en la que presentaremos un nuevo algoritmo generador de soluciones eficientes para el problema entero basado en identificar subconjuntos completamente eficientes de la región factible F .

5.4 Distancias entre las Soluciones Eficientes del Problema Entero y su Relajación Lineal

En este apartado vamos a dar una serie de estimaciones sobre la proximidad en norma infinito de las soluciones eficientes del problema entero y las de su relajación lineal.

Consideremos el problema $IP \equiv \max\{Cx / x \in F\}$, donde $F = \{x \in Z^n / Ax \leq b\}$, y su correspondiente relajación lineal $P \equiv \max\{Cx / x \in X\}$, donde $X = \{x \in R^n / Ax \leq b\}$.

Como es habitual en la literatura, denotaremos la norma l_∞ de un vector $x \in R^n$ por $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| / i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Desde un punto de vista estrictamente matemático, los resultados que presentamos constituyen una generalización de los siguientes dos propuestos por Cook et al. ([CGST86]) para el caso escalar.

Sean $c \in R^n$, $Q \equiv \max\{c^t x / x \in X\}$ e $IQ \equiv \max\{c^t x / x \in F\}$.

Teorema 5.4.1 ([CGST86], Theorem 1, p. 252) Sean $\delta \in R_+$ y $A \in Z^{m \times n}$, tal que cualquier menor de A , en valor absoluto, es menor o igual que δ . Supongamos que $F \neq \emptyset$ y que Q es acotado. Entonces:

- (i) $\forall \bar{x} \in S_Q \Rightarrow \exists \hat{x} \in S_{IQ}, \|\bar{x} - \hat{x}\|_\infty \leq n\delta$.
- (ii) $\forall \hat{x} \in S_{IQ} \Rightarrow \exists \bar{x} \in S_Q, \|\bar{x} - \hat{x}\|_\infty \leq n\delta$.

Teorema 5.4.2 ([CGST86]), Theorem 6, p. 256) Sean $\delta \in R_+$ y $A \in Z^{m \times n}$, tal que cualquier menor de A , en valor absoluto, es menor o igual que δ . Entonces, $\forall \bar{x} \in F$ ocurre:

- (i) $\bar{x} \in S_{IQ}$, o bien,
- (ii) $\exists \hat{x} \in F, \|\bar{x} - \hat{x}\|_\infty \leq n\delta$ y $c^t \hat{x} > c^t \bar{x}$.

Vistos estos resultados preliminares, estamos en condiciones de estudiar las dimensiones que habría de tener un entorno de una solución eficiente arbitraria del problema relajado, al objeto de garantizar que contiene, al menos, una solución eficiente soportada del programa entero original. La variante que surge, si eliminamos la condición de que la solución sea soportada, aún no ha sido resuelta y permanece abierta.

Teorema 5.4.3 Sean $\delta \in R_+$, $A \in Z^{m \times n}$, tal que cualquier menor de A , en valor absoluto, es menor o igual que δ . Sea $b \in R^m$ y $C \in R^{k \times n}$. Supongamos que $F \neq \emptyset$ y $E^P \neq \emptyset$. Entonces, $\forall \bar{x} \in E^P \Rightarrow \exists \hat{x} \in E_s^{IP}, \|\bar{x} - \hat{x}\|_\infty \leq n\delta$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in E^P \Rightarrow \exists \lambda \in R_{++}^k, \bar{x} \in S_{P_\lambda}$. Aplicando el Teorema 5.4.1, (i), $\Rightarrow \exists \hat{x} \in S_{IP_\lambda}, \|\bar{x} - \hat{x}\|_\infty \leq n\delta \Rightarrow \exists \hat{x} \in E_s^{IP}, \|\bar{x} - \hat{x}\|_\infty \leq n\delta$.

■

La cota dada en el Teorema 5.4.3 es la mejor posible. Efectivamente:

Ejemplo 5.4.4 Consideremos el problema $IP \equiv \max\{Cx / x \in F\}$ con

$$F = X \cap Z^2 \text{ y } X = \{x \in R^2 / Ax \leq b\}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$b = \begin{pmatrix} \beta \\ \vdots \\ \beta \end{pmatrix}$ y $C = I_n$, donde I_n es la identidad de orden n . Es claro que se puede tomar $\delta = 1$.

Además, se comprueba sin dificultad, que $\forall \beta \in R, 0 \leq \beta < 1, \bar{x} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \\ \vdots \\ n\beta \end{pmatrix}$, es la

única solución eficiente de P y $\hat{x} = 0$ la única solución eficiente (y, por tanto, soportada, en virtud del Teorema 5.3.13) de IP . Como $\delta = 1 \Rightarrow \|\bar{x} - \hat{x}\|_\infty = n\beta = n\beta\delta$.

●

El ejemplo anterior constituye una generalización de otro debido a L. Lovász, formulado para el caso escalar con $c = (1, \dots, 1)^t$ y descrito por Schrijver ([Sc86], p. 241).

Por otra parte, en general no es cierto que para cualquier solución eficiente del problema entero exista una solución eficiente del problema relajado que diste, en norma infinito, a lo sumo $n\delta$. Efectivamente, esta cuestión queda de manifiesto en el siguiente contraejemplo en el que $n = 2$.

Ejemplo 5.4.5 Consideremos el problema $IP \equiv \max\{Cx / x \in F\}$ con

$$F = X \cap Z^2 \text{ y } X = \{x \in R^2 / Ax \leq b\}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } C =$$

$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Obviamente, se puede tomar $\delta = 1$. Ver la Figura 5.7 para la

representación gráfica del cono de preferencias de Pareto y de las regiones factibles del problema entero y su relajación lineal.

Como $C^z = CNH(\{(1, 4), (1, 5)\})$, se tiene que:

$$E^P = CVH(\{(0, 11/2), (11/2, 0)\}) \text{ y } E^{IP} = F - \{(0, 0)\}.$$

Obsérvese que $\hat{x} = (0, 1) \in E^{IP}$ y, sin embargo, $\forall \bar{x} \in E^P, \|\bar{x} - \hat{x}\|_\infty > n\delta = 2$.

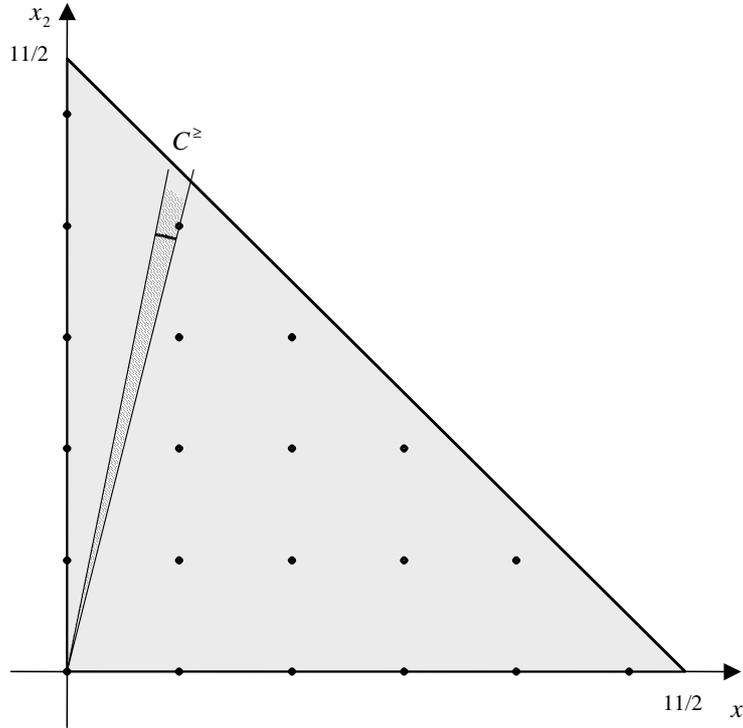


Figura 5.7

Si sabemos que la solución eficiente del programa entero es soportada podemos obtener la siguiente conclusión:

Teorema 5.4.6 Sean $\delta \in R_+$, $A \in Z^{m \times n}$, tal que cualquier menor de A , en valor absoluto, es menor o igual que δ . Sean $b \in R^m$ y $C \in R^{k \times n}$. Entonces, $\forall \hat{x} \in E_s^{IP} \Rightarrow \exists \bar{x} \in E^P, \|\bar{x} - \hat{x}\|_\infty \leq n\delta$.

Demostración. Sea $\hat{x} \in E_s^{IP} \Rightarrow \exists \lambda \in R_{+++}^k, \hat{x} \in S_{IP_\lambda}$. Como $S_{P_\lambda} \neq \emptyset$ por ser $A \in Z^{m \times n}$, aplicando el Teorema 5.4.1, (ii), $\Rightarrow \exists \bar{x} \in S_{P_\lambda}, \|\bar{x} - \hat{x}\|_\infty \leq n\delta \Rightarrow \exists \bar{x} \in E^P, \|\bar{x} - \hat{x}\|_\infty \leq n\delta$.

■

Si queremos tomar en consideración cualquiera de las soluciones eficientes (no sólo las soportadas) del problema entero, podemos recurrir a:

Teorema 5.4.7 Sean $\delta \in R_+$, $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \in Z^{(m+k) \times n}$, tal que cualquier menor de esta matriz, en valor absoluto, es menor o igual que δ . Sea $b \in R^m$. Entonces, $\forall \hat{x} \in E^{IP} \Rightarrow \exists \bar{x} \in E^P, \|\bar{x} - \hat{x}\|_\infty \leq n\delta$.

Demostración. Sean $\hat{x} \in E^{IP}$ y $\hat{z} = z(\hat{x})$. Por el Teorema 1.4.44, $\Rightarrow \hat{x} \in S_{IP, \hat{z}}$.

Como $S_{P_{e, \hat{z}}} \neq \emptyset$ por ser $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \in Z^{(m+k) \times n}$, aplicando el Teorema 5.4.1, (ii), $\Rightarrow \exists \bar{x} \in S_{P_{e, \hat{z}}}$, $\|\bar{x} - \hat{x}\|_{\infty} \leq n\delta$. Nuevamente, aplicando el Teorema 1.4.44, $\Rightarrow \bar{x} \in E^P$, $\|\bar{x} - \hat{x}\|_{\infty} \leq n\delta$. ■

Nótese que la cota dada para los teoremas anteriores es la mejor posible. Para ello basta considerar otra vez el Ejemplo 5.4.4.

Por último, el siguiente resultado nos proporciona una estimación de las dimensiones del entorno de una solución no eficiente que garantice que contiene, al menos, un punto que la domina.

Teorema 5.4.8 Sean $\delta \in R_+$, $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \in Z^{(m+k) \times n}$, tal que cualquier menor de esta matriz, en valor absoluto, es menor o igual que δ . Sea $b \in R^m$. Sea $\bar{x} \in F$, $\bar{x} \notin E^{IP}$. Entonces, $\exists \hat{x} \in F$, $C\hat{x} \geq C\bar{x}$ y $\|\bar{x} - \hat{x}\|_{\infty} \leq n\delta$.

Demostración. Sean $\bar{x} \in F$, $\bar{z} = C\bar{x}$. Supongamos que $\bar{x} \notin E^{IP}$. Por el Teorema 1.4.44 $\Rightarrow \bar{x} \notin S_{IP, \bar{z}}$. Ahora, por el Teorema 5.4.2 $\Rightarrow \exists \hat{x} \in F$, $C\hat{x} \geq C\bar{x}$, $e^t C\hat{x} > e^t C\bar{x}$, $\|\bar{x} - \hat{x}\|_{\infty} \leq n\delta \Rightarrow \exists \hat{x} \in F$, $C\hat{x} \geq C\bar{x}$ y $\|\bar{x} - \hat{x}\|_{\infty} \leq n\delta$. ■

5.5 Métodos Generadores de Soluciones Eficientes Enteras

Mientras que el LVP se ha estudiado extensivamente en la literatura, obteniéndose una gran cantidad de resultados y algoritmos con relativamente (dada la dificultad) buen comportamiento, el ILVP es significativamente más duro de tratar, presentando una elocuente escasez de resultados.

En general, los métodos generadores de soluciones eficientes para el problema entero son radicalmente distintos a los existentes para el caso continuo ([Sh75], p. 171), necesitando la gran mayoría de ellos enumerar, de forma implícita y/o explícita, todas las soluciones factibles y realizar comparaciones entre las mismas para eliminar los puntos dominados ([KIHn82], p. 379).

Usualmente, a medida que se calculan las soluciones eficientes de un ILVP, hay que resolver una serie de programas escalares enteros íntimamente relacionados entre sí ([KIHn82], p. 381). En estos casos, se

pueden conseguir importantes ahorros computacionales si tales problemas son resueltos de manera unificada mediante *técnicas de postoptimalidad entera*. Debido a esto, la gran mayoría de algoritmos que resuelven el ILVP han sido implementados para el caso especial de variables 0-1, puesto que el análisis de postoptimalidad para los problemas enteros escalares 0-1 es relativamente sencillo.

Sea IP un ILVP arbitrario formulado como en (5.2).

5.5.1 Método Elemental

Es el algoritmo más sencillo e intuitivo para resolver un ILVP con un número finito de soluciones factibles y sirve, fundamentalmente, como patrón de comparación para estudiar el comportamiento de otros algoritmos generadores de soluciones eficientes, proporcionando de esta manera un útil contraste.

El *método elemental* ([Bi77], Naive Algorithm, p. 129) se estructura en dos etapas. En la primera se enumeran explícitamente todas las soluciones factibles del problema y en la segunda se eliminan aquellas soluciones cuyas imágenes, a través de z , están dominadas.

Intuitivamente, el método elemental trabaja razonablemente bien cuando la relación entre el número de soluciones eficientes y el número de soluciones factibles (densidad de eficiencia) es relativamente alta (próxima a uno).

Por otra parte, uno de sus principales inconvenientes radica en que hasta que no finaliza el algoritmo no se puede garantizar la eficiencia de ninguno de los puntos de la lista generada.

Veamos cómo se puede concretar la segunda etapa del método.

Consideremos una lista de puntos dados de forma explícita y estudiemos el problema de determinar qué puntos de la lista son no dominados.

El algoritmo ND (NonDominated) que vamos a dar a continuación se basa exclusivamente en la definición de solución eficiente. Recibe como entrada una lista de puntos L y devuelve como salida la lista de puntos no dominados. Para simplificar el proceso, la lista de salida es sobrescrita sobre la de entrada.

Algoritmo ND(L)

Para cada $\bar{z} \in L$ determinar los $z \in L$ tales que $\bar{z} \geq z$ y, para cada uno de ellos, hacer: $L = L - \{z\}$.

Proposición 5.5.1 *El algoritmo ND tiene complejidad $O(|L|^2)$ en el número de comparaciones vectoriales.*

Demostración. El caso peor se da cuando toda la lista L es no dominada. Ahora es directo el resultado. ■

Definición 5.5.2 *Se denomina densidad de eficiencia de L , y la denotaremos por $\delta(L)$, a la relación $|N(L)|/|L|$.*

Evidentemente $0 \leq \delta(L) \leq 1$.

La importancia del algoritmo ND viene dada porque, en general, cualquier algoritmo aproximado por exceso para el ILVP, combinado con el algoritmo ND, da lugar a un algoritmo exacto. El caso peor de algoritmo aproximado por exceso es aquél que lista, de forma explícita, todo el conjunto de soluciones factibles del problema (primera etapa del método Elemental).

5.5.2 El Caso Biobjetivo

Cuando sólo se presentan dos funciones objetivos ($k = 2$), tanto la teoría como los algoritmos se simplifican notablemente ([BnLee96], p. 79). Esto es debido las propiedades especiales que presenta el plano frente a espacios de mayor dimensión. A continuación vamos a hacer un breve repaso de algunos de los procedimientos más conocidos englobados dentro de esta categoría.

(i) Método NISE (NonInferior Set Estimation)

El método NISE ([Ch78], p. 127-140) fue desarrollado por Cohon et al. en 1978, como un método aproximado para el LVP bidimensional. Sin embargo, es posible retocar ligeramente la versión original, para que se pueda utilizar en el caso entero con región factible acotada ([Bf95], p. 180). El algoritmo modificado que presentamos aquí proporciona una aproximación del conjunto $z(E_s^{IP})$, el cual a su vez se puede considerar una aproximación de $z(E^{IP})$.

Consideremos dos puntos no dominados en el espacio objetivo, $z^1, z^2 \in z(E^{IP})$. La idea en la que se fundamenta el método NISE consiste en *desplazar hacia afuera de la región factible el segmento que une los puntos z^1 y z^2 (según la perpendicular al mismo)*, es decir, en maximizar una cierta combinación lineal positiva de las funciones objetivo.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $z_1^1 > z_1^2$. Entonces $z_2^1 < z_2^2$. El vector dirección del segmento que pasa por z^1 y z^2 es $z^2 - z^1$.

Buscamos un cierto $\lambda \in R_{++}^2$ tal que $\lambda'(z^2 - z^1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 / \lambda_2 = (z_2^2 - z_2^1) / (z_1^1 - z_1^2)$. Luego, podemos tomar $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (z_2^2 - z_2^1, z_1^1 - z_1^2)$.

Utilizaremos la siguiente notación:

- E Lista con las imágenes a través de z de las soluciones eficientes generadas.
 Q Conjunto de pares de índices asociados a soluciones no dominadas en el espacio criterio candidatas a ser adyacentes en la lista E .

Algoritmo NISE

Paso 0. Inicialización.

Si $F = \emptyset \Rightarrow$ STOP. Problema no factible.

En otro caso calcular $z_1^1 = \max\{z_1(x) / x \in F\}$, $z_2^1 = \max\{z_2(x) / x \in F, z_1(x) = z_1^1\}$.

Hacer $E = \{z^1\}$ y calcular $z_2^2 = \max\{z_2(x) / x \in F\}$.

Si $z_2^2 = z_2^1 \Rightarrow$ STOP, el punto z^1 es ideal.

En otro caso, calcular $z_1^2 = \max\{z_1(x) / x \in F, z_2(x) = z_2^2\}$.

Hacer $E = E \cup \{z^2\}$, $Q = \{(1, 2)\}$ y $s = 3$.

Paso 1. Regla de parada.

Si $Q = \emptyset \Rightarrow$ STOP.

En caso contrario, seleccionar $p = (r, t) \in Q$.

Hacer $Q = Q - \{p\}$.

Paso 2. Búsqueda.

Hacer $\lambda^s = (z_2^t - z_2^r, z_1^r - z_1^t)$ y resolver IP_{λ^s} . Sean $x^s \in S_{IP_{\lambda^s}}$ y $z^s = z(x^s)$.

Si $(\lambda^s)^t z^s > (\lambda^s)^r z^r$ hacer $E = E \cup \{z^s\}$, $Q = Q \cup \{(r, s), (s, t)\}$ y $s = s + 1$.

Ir al paso 1.

Proposición 5.5.3 *El algoritmo NISE es finito.*

Demostración. Directa, por ser F acotado. ■

Proposición 5.5.4 *Los pesos generados por el algoritmo NISE tienen todas sus componentes estrictamente positivas.*

Demostración. Lo haremos por inducción. Es claro que se verifica para $(1, 2) \in Q$. Supongámoslo cierto para $(r, t) \in Q$ arbitrario y veamos que se verifica el resultado para los pares $(r, s), (s, t) \in Q$ generados en el paso 2 del algoritmo NISE a partir de z^s . Esto es equivalente a probar que el punto z^s verifica que $z_1^r > z_1^s > z_1^t$ y $z_2^t > z_2^s > z_2^r$. Ahora bien, esto es claro teniendo en cuenta que si $\lambda^r, \lambda^t \in R_{++}^2$ son los pesos utilizados por el algoritmo para

generar a z^r y z^t , respectivamente $\Rightarrow \forall z \in z(X), (\lambda^r)_z \geq (\lambda^r)_{z^r}, (\lambda^t)_z \geq (\lambda^t)_z$. Denotando por A el punto de intersección de las rectas $(\lambda^r)_z = (\lambda^r)_{z^r}$ y $(\lambda^t)_z = (\lambda^t)_{z^t}$ (ver Figura 5.8), es geoméricamente claro que la única posibilidad de desplazamiento hacia afuera del segmento que une a z^r y z^t , está limitada por la envolvente convexa de los puntos z^r, z^t y A . ■

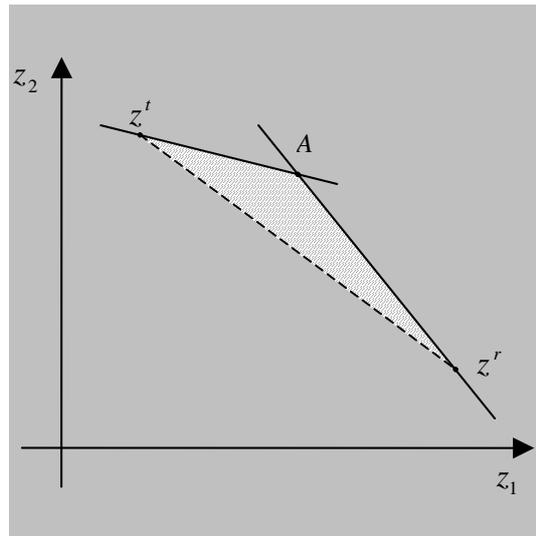


Figura 5.8

Corolario 5.5.5 $E \subseteq z(E_s^{IP})$

Demostración. Para $i \geq 3$ los puntos z^i generados por el algoritmo son soluciones óptimas de IP_{λ^i} . Como por la Proposición 5.5.4, λ^i tiene todas sus componentes estrictamente positivas $\Rightarrow z^i \in z(E_s^{IP})$.

Para $i \in \{1, 2\}$ es claro que $z^i \in z(E_{xp}^{P_i})$, por haberse obtenido a través del método lexicográfico (ver sección 4.2.2). Ahora por el Corolario 5.3.11 $\Rightarrow z^i \in z(E_s^{IP})$. ■

Proposición 5.5.6 *El número de programas enteros resueltos por el algoritmo NISE es $2|E|+1$.*

Demostración. Para $|E|=0$ o $|E|=1$ es trivial. Ahora basta tener en cuenta que por cada nuevo punto no dominado generado hay que resolver 2 programas enteros. ■

Nótese que el algoritmo NISE no se puede generalizar de forma directa cuando $k > 2$ (ver [Ch78], p. 138).

Para finalizar esta exposición del método NISE, añadiremos que también son posibles otras extensiones del mismo diferentes a la aquí presentada. Efectivamente, en 1991, Solanki ([Sl91]) propuso un algoritmo aproximado, denominado ABIN (Algorithm to approximate the Biobjective Integer Noninferior set), para el problema vectorial entero mixto biobjetivo, que también se basaba en una modificación del método NISE, la cual, en lugar de utilizar el problema ponderado IP_λ para obtener una solución no dominada entre los puntos x^r y x^t , con $p = (r, t) \in Q$, usa un programa basado en la métrica de Tchebycheff ponderada y aumentada ([Sl91], p. 4).

(ii) Método de Chalmet-Lemonidis-Elzinga

Se trata de un método exacto, basado en la técnica divide y vencerás, para calcular $z(E^{IP})$, el cual necesita como hipótesis que F sea acotado y $z: R^n \rightarrow R^2$ sea entera (ver [ChLE86]).

Utilizaremos la siguiente notación:

- E Lista con las imágenes a través de z de las soluciones eficientes generadas.
- Q Conjunto de pares de índices asociados a soluciones no dominadas en el espacio criterio candidatas a ser adyacentes en la lista E .

El algoritmo se basa en que $\forall \lambda \in R_{++}^k$, $\forall \alpha \in R^k$ se verifica que $S_{IP_{\lambda, \alpha}} \subseteq E^{IP}$ (Teorema 1.4.43).

Algoritmo CLE

Paso 0. Inicialización.

Si $F = \emptyset \Rightarrow$ STOP. Problema no factible.

En otro caso calcular $z_1^1 = \max\{z_1(x) / x \in F\}$, $z_2^1 = \max\{z_2(x) / x \in F, z_1(x) = z_1^1\}$.

Hacer $E = \{z^1\}$ y calcular $z_2^2 = \max\{z_2(x) / x \in F\}$.

Si $z_2^2 = z_2^1 \Rightarrow$ STOP, el punto z^1 es ideal.

En otro caso, calcular $z_1^2 = \max\{z_1(x) / x \in F, z_2(x) = z_2^2\}$.

Hacer $E = E \cup \{z^2\}$, $Q = \{(1, 2)\}$ y tomar $\lambda \in \Lambda_2^0$ arbitrario.

Paso 1. Regla de parada.

Si $Q = \emptyset \Rightarrow$ STOP.

En caso contrario, seleccionar $p = (r, t) \in Q$.

Hacer $Q = Q - \{p\}$ y $\alpha = (z_1^t + 1, z_2^r + 1)$.

Paso 2. Búsqueda.

Si $IP_{\lambda,\alpha}$ es no factible, ir al paso 1.

En caso contrario, sean $x^s \in S_{IP_{\lambda,\alpha}}$, $z^s = z(x^s)$.

Hacer $E = E \cup \{z^s\}$, $Q = Q \cup \{(r, s), (s, t)\}$ e ir al paso 1.

Proposición 5.5.7 *El algoritmo CLE es finito.*

Demostración. Directa por ser F acotado. ■

La siguiente propiedad es de utilidad para probar la validez del algoritmo.

Proposición 5.5.8 $\forall (r, t) \in Q$, $\min\{z_1^r, z_1^t\} = z_1^t$, $\min\{z_2^r, z_2^t\} = z_2^r$

Demostración. La prueba la haremos por inducción. Es claro que para $(1, 2) \in Q$ se verifica que $\min\{z_1^1, z_1^2\} = z_1^2$, $\min\{z_2^1, z_2^2\} = z_2^1$. Supongamos el resultado cierto para un $(r, t) \in Q$ arbitrario y veamos que los 2 nuevos pares (r, s) y (s, t) creados a partir de él, en el paso 2 del algoritmo CLE, verifican el enunciado. Para (r, s) se tiene que $z_2^s > z_2^r \Rightarrow \min\{z_2^r, z_2^s\} = z_2^r$. Como $z^r, z^s \in z(E^{IP}) \Rightarrow z_1^r > z_1^s \Rightarrow \min\{z_1^r, z_1^s\} = z_1^s \Rightarrow$ El par (r, s) verifica el enunciado. Para el par (s, t) se aplicaría un razonamiento análogo. ■

Teorema 5.5.9 $E = z(E^{IP})$.

Demostración.

“ \subseteq ”

Directa por el Teorema 1.4.43.

“ \supseteq ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{z} = z(\bar{x}) \in z(E^{IP})$ tal que $\bar{z} \notin E$ (es decir, no fue generado por el algoritmo) \Rightarrow Para cualquier problema $IP_{\lambda,\alpha}$, generado por el algoritmo, $\bar{x} \notin S_{IP_{\lambda,\alpha}}$.

Sea $IP_{\lambda,\alpha}$ el problema con región factible más pequeña que contiene a \bar{x} y sea $p = (r, t) \in Q$ el par de índices asociado a tal problema $\Rightarrow \bar{z}_1 > z_1^t$ y $\bar{z}_2 > z_2^r$. Sean $x^s \in S_{IP_{\lambda,\alpha}}$, $z^s = z(x^s)$. Como $\bar{z}, z^s \in z(E^{IP})$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $z_1^s > \bar{z}_1$ y $z_2^s < \bar{z}_2 \Rightarrow \bar{x}$ está contenido en la región factible del problema que tiene asociados el par de índices $(s, t) \in Q$, la cual es estrictamente más pequeña que la del problema asociado a $(r, t) \in Q \Rightarrow \#$. ■

Proposición 5.5.10 *El número de programas enteros resueltos por el algoritmo CLE es $2|E|+1$.*

Demostración. Para $|E|=0$ o $|E|=1$ es trivial. Ahora basta tener en cuenta que por cada nuevo punto no dominado generado hay que resolver 2 programas enteros. ■

Obsérvese que el algoritmo no se puede generalizar de forma directa al caso $k > 2$, pues podrían quedar partes de $z(E^{IP})$ sin generar.

(iii) Método Restringido

Aunque el método restringido originalmente fue diseñado como un algoritmo de tipo aproximado para el VP continuo (ver, por ejemplo, [Ch78], p. 115-127), se probará que la versión que proponemos aquí es un método exacto para el ILVP biobjetivo, bajo las hipótesis de acotación de la región factible F y de que alguna de las funciones objetivo sea entera.

Sin pérdida de generalidad supondremos que $z_2 : R^n \rightarrow R$ entera.

Utilizaremos la siguiente notación:

E Lista con las imágenes a través de z de las soluciones eficientes generadas.

Algoritmo R

Paso 0. Inicialización.

$$z_2^U = \max\{z_2(x) / x \in F\}.$$

$$F^0 = F, E = \emptyset, i = 0.$$

Paso 1.

Calcular $\alpha_1^i = \max\{z_1(x) / x \in F^i\}$ y $\alpha_2^i = \max\{z_2(x) / x \in F, z_1(x) = \alpha_1^i\}$.

Hacer $E = E \cup \{\alpha^i\}$.

Paso 2.

Si $\alpha_2^i = z_2^U \Rightarrow \text{STOP}$, $z(E^{IP}) = E$.

En otro caso, hacer $F^{i+1} = \{x \in F^i / z_2(x) \geq \alpha_2^i + 1\}$, $i = i + 1$ e ir al paso 1.

Proposición 5.5.11 *El algoritmo R es finito.*

Demostración. Directa, pues los valores de α_2^i son enteros y crecientes en cada iteración y el valor de z_2^U es finito por ser F acotado. ■

Teorema 5.5.12 $E = z(E^{IP})$.

Demostración.

“ \subseteq ”

Sea $\alpha^i \in E$ y supongamos por reducción al absurdo que $\alpha^i \notin z(E^{IP})$. Como $\alpha^i \in z(F) \Rightarrow \exists \bar{x} \in F, \bar{z} = z(\bar{x}) \geq \alpha^i$. Es claro que $\bar{x} \in F^i$ pues (i) para $i=0$, $F^0 = F$ y (ii) para $i \geq 1$, $\bar{z}_2 \geq \alpha_2^i \geq \alpha_2^{i-1} + 1$. Ahora, como $\bar{z}_1 \geq \alpha_1^i$, por la construcción de $\alpha_1^i \Rightarrow \bar{z}_1 = \alpha_1^i \Rightarrow \bar{z}_2 > \alpha_2^i \Rightarrow \#$ por la construcción de α_2^i

“ \supseteq ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{z} = z(\bar{x}) \in z(E^{IP})$ tal que $\bar{z} \notin E$. Sea F^s la región factible más pequeña que contiene a $\bar{x} \Rightarrow \bar{z}_2 \leq \alpha_2^s$, (pues si no $\bar{x} \in F^{s+1}$). Como $\alpha^s \in z(F)$, $\bar{x} \in E^{IP}$, $\bar{z} \notin E \Rightarrow \bar{z}_1 > \alpha_1^s \Rightarrow \#$ por la construcción de α_1^s . ■

Proposición 5.5.13 *El número de programas enteros resueltos por el algoritmo R es $2|E|+1$.*

Demostración. Evidente pues en el paso 0 hay que resolver un programa entero y por cada punto generado hay que resolver, adicionalmente, 2 programas enteros. ■

Nótese que el algoritmo R es simétrico en el sentido de que el papel de z_2 se puede sustituir por z_1 , haciéndose entonces un barrido en abcisas en lugar de en ordenadas.

5.5.3 El Caso General

Los algoritmos que generan E^{IP} cuando el problema tiene más de dos objetivos ($k > 2$), son mucho más complicados que los existentes para el caso biobjetivo ($k = 2$). Esto es debido a la enorme complejidad que introducen los espacios multidimensionales. Seguidamente vamos a analizar una serie de procedimientos de utilidad para calcular la región eficiente de un ILVP. Mientras que los métodos de *Klein-Hannan* y *Marcotte-Soland* son ampliamente conocidos, los métodos de *Puntos Subeficientes* y de los *Retículos Completamente Eficientes* representan contribuciones originales que resultan bastante prometedoras por ser intuitivos y fácilmente implementables.

Supondremos con carácter general que F es acotado y que $z: R^n \rightarrow R^k$ es entera.

(i) Método de Klein y Hannan

El método que describimos a continuación fue desarrollado por Klein y Hannan ([KlHn82]) y, en palabras de los propios autores, se puede considerar una extensión del método aplicado por Pasternak y Passy al problema biobjetivo 0-1 ([KlHn82], p. 379). El fundamento teórico del procedimiento reside en una extensión del Corolario 1.4.15 que permite generar puntos eficientes a través de la resolución secuencial de una serie de problemas escalares no convexos y enteros, con regiones factibles sucesivamente encajadas.

Utilizaremos la siguiente notación:

$$IP_1^i \leftrightarrow \max\{z_1(x) / x \in F^i\}$$

$$Y^i \leftrightarrow z(S_{IP_1^i})$$

$$E^i \leftrightarrow N(Y^i), \text{ es decir, conjunto de soluciones no dominadas de } Y^i.$$

$$E \leftrightarrow \text{Imágenes a través de } z \text{ de las soluciones eficientes encontradas.}$$

Algoritmo KH**Paso 0. Inicialización.**

$$F^0 = F, E = \emptyset, i = 0.$$

Paso 1. Regla de parada.

$$\text{Si } F^i = \emptyset \Rightarrow \text{STOP, } z(E^{IP}) = E.$$

Paso 2.

$$\text{Resolver } IP_1^i. \text{ Sean } Y^i = z(S_{IP_1^i}) \text{ y } E^i = N(Y^i).$$

Paso 3.

$$\text{Hacer } F^{i+1} = \{x \in F^i / \forall z^j \in E^i, z_2(x) \geq z_2^j + 1 \text{ ó } \dots \text{ ó } z_k(x) \geq z_k^j + 1\}.$$

$$\text{Hacer } E = E \cup E^i, i = i + 1 \text{ e ir al paso 1.}$$

Nótese que para $k = 2$, el algoritmo KH coincide con el algoritmo R (método Restringido) dado en la sección 5.5.2.

Veamos que el algoritmo es válido:

Teorema 5.5.14 ([KlHn82], Theorem 1, (b)) $\forall i$ se verifica que $E^i \subseteq z(E^{IP})$.

Demostración. Sea $\bar{z} = z(\bar{x}) \in E^i$. Es claro que $\bar{x} \in F^i$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{z} \notin z(E^{IP}) \Rightarrow \exists \hat{x} \in F, \hat{z} = z(\hat{x}) \geq \bar{z}$. Como $\bar{x} \in F^i \Rightarrow \hat{x} \in F^i$. Además $\hat{z}_1 \geq \bar{z}_1 \Rightarrow \hat{z} \in Y^i \Rightarrow \bar{z} \notin E^i \Rightarrow \#$.

■

Teorema 5.5.15 ([KlHn82], Theorem 2) $z(E^{IP}) = E$.

Demostración.

“ \supseteq ”

Basta tener en cuenta que $E = \bigcup_i E^i$ y $\forall i$, por el Teorema 5.5.14,

$$E^i \subseteq z(E^{IP}).$$

“ \subseteq ”

Sea $\bar{x} \in E^{IP}$ con $\bar{z} = z(\bar{x})$. Es claro que $\bar{x} \in F^0$. Sea F^s la región factible más pequeña que contiene a $\bar{x} \Rightarrow \bar{z}_1 \leq z_1^s$, donde z_1^s es el valor óptimo de IP_1^s . Si $\bar{z}_1 < z_1^s$, como \bar{z} no puede estar dominado por ningún $z \in E^s$ pues $\bar{z} \in z(E^{IP}) \Rightarrow \bar{x} \in F^{s+1} \Rightarrow \#$. Luego $\bar{z}_1 = z_1^s \Rightarrow \bar{z} \in Y^s$. Como $\bar{z} \in z(E^{IP}) \Rightarrow \bar{z} \in E^s \Rightarrow \bar{z} \in E$. ■

El siguiente resultado garantiza la convergencia del algoritmo:

Proposición 5.5.16 *El algoritmo KH es finito.*

Demostración. Directa, teniendo en cuenta que por ser F acotado $\Rightarrow |E^{IP}|$ es finito y que en cada iteración se genera, al menos, una nueva solución eficiente, pues para i arbitrario, ninguno de los puntos eficientes generados previamente es factible en F^i y al ser F^i acotado $\Rightarrow Y^i$ es finito y distinto de vacío. Ahora por el Teorema 5.5.14, $E^i \subseteq z(E^{IP})$. ■

Obsérvese que cuando $k > 2$ e $i \geq 1$, la relajación lineal de F^i es no convexa, pues cada solución eficiente genera una *esquina* (Ver Figura 5.9). Por tal motivo, a las restricciones introducidas en el paso 3 del algoritmo KH, Klein y Hannan las denominan *restricciones esquina* ([KlHn82], p. 381).

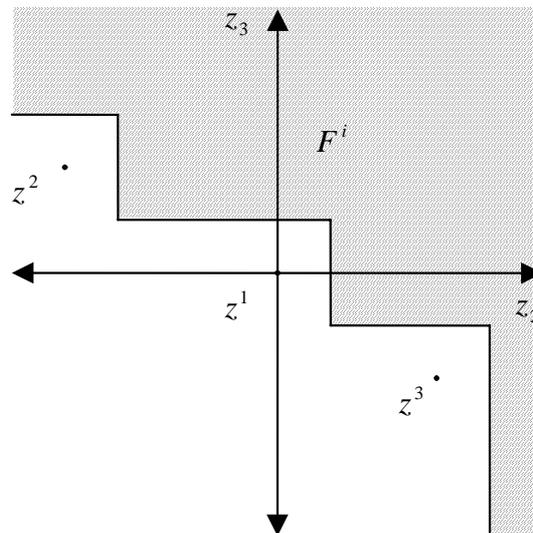


Figura 5.9. Región factible originada por 3 soluciones eficientes.

La aplicabilidad del procedimiento KH depende de que el algoritmo de programación entera escalar que utilizemos en el paso 2 para resolver los IP_1^i sea capaz de manejar directamente las restricciones esquina introducidas por las soluciones eficientes que se van generando. Además, para mejorar la eficacia del algoritmo sería conveniente poder aplicar alguna técnica de postoptimalidad entera. Estas dos restricciones han reducido drásticamente la utilidad práctica del algoritmo.

No obstante, Klein y Hannan han aplicado con éxito su método al problema de variables 0-1, utilizando una técnica de postoptimalidad entera sugerida inicialmente por Roodman y aplicada al algoritmo aditivo de Balas ([KlHn82], p. 382).

Para finalizar nótese los siguientes aspectos:

- (i) Todas las restricciones generadas por el algoritmo KH son del mismo tipo.
- (ii) Muchos de los puntos eficientes obtenidos pueden definir restricciones redundantes, por lo que es conveniente eliminarlas.
- (iii) En el paso 2 de una iteración arbitraria i del algoritmo KH, el problema IP_1^i se puede sustituir por IP_j^i , $j \in \{1, \dots, k\}$, a condición de actualizar convenientemente F^{i+1} en el paso 3.
- (iv) Para calcular E^i a partir de Y^i se puede utilizar el algoritmo ND (ver sección 5.5.1).

(ii) Método de Marcotte y Soland

El método de Marcotte y Soland ([MrSl86]) es un procedimiento muy sencillo e intuitivo que fue diseñado originalmente para ser usado de forma interactiva en los casos continuos y discreto. No obstante, sus autores apuntaron ([MrSl86], p. 70) que, sin excesivas modificaciones, se podría obtener un procedimiento de cierta utilidad (su complejidad no es buena) en programación vectorial entera. Es esta última variante la que analizaremos aquí.

Utilizaremos la siguiente notación:

- L \leftrightarrow Lista con las regiones por estudiar.
- E \leftrightarrow Imágenes a través de z de las soluciones eficientes.
- IP^i $\leftrightarrow \max\{z(x) / x \in F^i\}$.
- β^i \leftrightarrow Punto ideal del problema IP^i .
- J_i \leftrightarrow Conjunto de separación para el problema IP^i .

Algoritmo MS**Paso 0. Inicialización.**

$$L = \{F\}, E = \emptyset, i = 0.$$

Paso 1. Regla de parada.

Si $L = \emptyset \Rightarrow \text{STOP}$, $z(E^{IP}) = E$.

En caso contrario, seleccionar $F^i \in L$ a través de la regla FIFO.

Paso 2. Eliminación por no factibilidad.

Si $F^i = \emptyset$ ir al paso 6.

Paso 3. Búsqueda del punto de separación.

Sean $x^i \in S_{IP^i}$ y $z^i = z(x^i)$.

Hacer $E = E \cup \{z^i\}$.

Paso 4. Eliminación por acotación.

Calcular β^i punto ideal del problema P^i . Si $\beta^i = z^i$ ir al paso 6.

Paso 5. Ramificación.

Sea $J_i = \{l \in \{1, \dots, k\} / z_l^i \leq \beta_l^i - 1\}$.

$\forall l \in J_i$, hacer $F^{i_l} = \{x \in F^i / z_l(x) \geq z_l^i + 1\}$ y $L = L \cup \{F^{i_l}\}_{l \in J_i}$.

Paso 6. Cierre de bucle.

Hacer $L = L - \{F^i\}$, $i = i + 1$ e ir al paso 1.

Veamos en primer lugar que el algoritmo es válido:

Proposición 5.5.17 Si IP^j es un descendiente de IP^i , entonces $E^{IP^j} \subseteq E^{IP^i}$.

Demostración. Basta hacer la demostración para el caso IP^i padre e IP^j hijo. Sean $x^i \in S_{IP^i}$, $z^i = z(x^i)$, $j \in J_i$ tales que $F^j = \{x \in F^i / z_j(x) \geq z_j^i + 1\}$.

Entonces, es claro que $E^{IP^j} \subseteq E^{IP^i}$. ■

Teorema 5.5.18 $E = z(E^{IP})$.

Demostración.

“ \subseteq ”

Sea $z^i = z(x^i) \in E \Rightarrow x^i \in S_{IP^i} \Rightarrow x^i \in E^{IP^i}$. Aplicando la Proposición 5.5.17 \Rightarrow

$x^i \in E^{IP} \Rightarrow z^i \in E^{IP}$.

“ \supseteq ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \bar{z} = z(\bar{x}) \in z(E^{IP})$ tal que $\bar{z} \notin E$ (es decir, no fue generado por el algoritmo). Sea F^s la región factible más

pequeña que contiene a $\bar{x} \Rightarrow F^s \neq \emptyset$ y $z^s \neq \beta^s \Rightarrow F^s$ se ha de separar pero como F^s es la región factible más pequeña que contiene a $\bar{x} \Rightarrow \forall l \in J_s, \bar{z}_l \leq z_l^s$. Como, además, $\forall l \notin J_s, \bar{z}_l \leq z_l^s = \beta_l^s \Rightarrow \bar{z} \leq z^s \Rightarrow \#$, pues $\bar{z} \in z(E^{lp})$. ■

Proposición 5.5.19 *El algoritmo MS es finito.*

Demostración. Directa, teniendo en cuenta que por ser X acotado $\Rightarrow |E^{lp}|$ es finito y que la región factible asociada a un nodo arbitrario no contiene ninguno de los puntos de separación eficientes de sus ancestros. ■

Proposición 5.5.20 *El número de programas enteros resueltos por el algoritmo MS, en el caso peor, es $O(k^{|E|})$.*

Demostración. Efectivamente, en el peor de los casos el árbol de enumeración tiene profundidad $|E|$. Como el número de descendientes de un nodo arbitrario (orden del árbol) puede ser $k \Rightarrow$ Una cota superior para el número de nodos generados por el algoritmo es $(k^{|E|+1} - 1)/(k - 1)$. Como por cada nodo hay que comprobar su factibilidad y, en caso afirmativo, obtener el punto ideal y determinar el punto de separación \Rightarrow Por cada nodo, en el peor caso hay que resolver $(k + 2)$ programas enteros. Ahora es claro el enunciado. ■

Definición 5.5.21 *Una separación de $F^i, \{F^{i_l}\}_{l \in J}$, se dice válida si $N(z(F^i)) \subseteq \bigcup_{l \in J} z(F^{i_l})$.*

El siguiente resultado se prueba sin dificultad:

Proposición 5.5.22 *La separación de F^i inducida por $J_i \neq \emptyset$ es válida.*

Proposición 5.5.23 *F^i se puede poner como $\{x \in F / z(x) \geq l^i\}$, con $l^i \in R^k$, pudiendo tener algunas componentes de l^i el valor $-\infty$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que las regiones factibles generadas en una iteración arbitraria del algoritmo heredan las restricciones de su región factible padre F^j y que las nuevas restricciones añadidas son del tipo $z(x) \geq l'$. Así, tras las oportunas simplificaciones, $l^i \leq z(x)$. ■

Comentarios 5.5.24

- (i) En cada iteración se crean, a lo sumo, k nuevos nodos. Si k es grande, el árbol de enumeración crecerá muy rápidamente.

- (ii) En general, cuando $k > 2$ puede ocurrir que las subregiones generadas no sean disjuntas entre sí. Esto constituye la principal desventaja del algoritmo, pues no se puede garantizar la no regeneración de soluciones eficientes previamente halladas.
- (iii) El hecho de que $F^p \cap F^q \neq \emptyset$, con $p, q \in J_i$, provoca, en general, la existencia de nodos superfluos en el árbol de enumeración. Efectivamente, consideremos los nodos N_p y N_t , los cuales supondremos que son, respectivamente, el *padre* y el *tío* del nodo N_s . Entonces, si $F^s \subseteq F^t$, trivialmente, se puede suprimir el nodo N_s .
- (iv) Aunque la regla anterior se enunció para el tío del nodo N_s , sigue siendo válida para el hermano de cualquier *ancestro* del nodo N_s .
- (v) Los ancestros de un nodo suprimido no se deben volver a utilizar para suprimir otros nodos (por ejemplo, los descendientes de sus hermanos) pues, en general, no se pueden garantizar separaciones válidas ([MrSl86], p. 67).
- (vi) Por último, nótese que la comprobación de condiciones del tipo $F^s \subseteq F^r$, basada en sus respectivas descripciones algebraicas, no es demasiado tediosa (Proposición 5.5.23).

(iii) Método de Puntos Subeficientes

El algoritmo que damos en esta sección es un método aproximado por exceso, basado en la técnica divide y vencerás donde, para cada nodo del árbol de enumeración, se generan separaciones válidas compuestas exclusivamente por subconjuntos disjuntos entre sí. De esta forma, no se pueden regenerar puntos ya obtenidos. Los puntos de separación para cada nodo se obtienen mediante la aplicación local (restringida al nodo) del método de Ecker y Kouada (ver sección 4.2.3). Estos puntos de corte los hemos denominado *puntos subeficientes* porque, aunque no son necesariamente eficientes para el problema original cuando $k > 2$, si son eficientes respecto a las subregiones de las que proceden.

Utilizaremos la siguiente notación:

- L \leftrightarrow Lista de regiones por estudiar.
- E \leftrightarrow Imágenes a través de z de los puntos generados.

Algoritmo PS**Paso 0. Inicialización.**

$$L = \{F\}, E = \emptyset, i = 0.$$

Paso 1. Regla de parada.

Si $L = \emptyset \Rightarrow \text{STOP}$, $z(E^P) \subseteq E$.

En caso contrario, seleccionar $F^i \in L$.

Paso 2. Eliminación por no factibilidad.

Si $F^i = \emptyset$ ir al paso 5.

En otro caso, sean $\bar{x}^i \in F^i$ arbitrario y $\bar{z}^i = z(\bar{x}^i)$.

Paso 3. Búsqueda del punto de separación.

Sea $(\hat{x}^i), (\hat{s}^i)$ solución óptima de $\max\{e^t s / x \in F^i, z(x) - s = \bar{z}^i, s \geq 0\}$ y $\hat{z}^i = z(\hat{x}^i)$.

Hacer $E = E \cup \{\hat{z}^i\}$

Paso 4. Ramificación.

Crear k subregiones a partir de F^i de la siguiente manera:

$$F^{i_1} = \{x \in F^i / z_1(x) \geq \hat{z}_1^i + 1\}$$

$$F^{i_2} = \{x \in F^i / z_1(x) \leq \hat{z}_1^i, z_2(x) \geq \hat{z}_2^i + 1\}$$

$$\vdots$$

$$F^{i_k} = \{x \in F^i / z_1(x) \leq \hat{z}_1^i, z_2(x) \leq \hat{z}_2^i, \dots, z_k(x) \geq \hat{z}_k^i + 1\}$$

Hacer $L = L \cup \{F^{i_j}\}_{j=1}^k$.

Paso 5. Cierre de bucle.

Hacer $L = L - \{F^i\}$, $i = i + 1$ e ir al paso 1.

Proposición 5.5.25 F^i se puede poner como $\{x \in F / l^i \leq z(x) \leq u^i\}$, con $l^i, u^i \in R^k$, pudiendo ser algunas componentes de l^i (u^i) $-\infty$ (∞).

Demostración. Es claro pues las regiones factibles generadas en una iteración arbitraria i del algoritmo heredan las restricciones de su región factible padre F^i y como las nuevas restricciones añadidas son del tipo $l' \leq z(x) \leq u'$, después de las oportunas simplificaciones $l^i \leq z(x) \leq u^i$ ■

Proposición 5.5.26 $\{F^{i_j}\}_{j=1}^k$ son disjuntos entre sí.

Demostración. Inmediata. ■

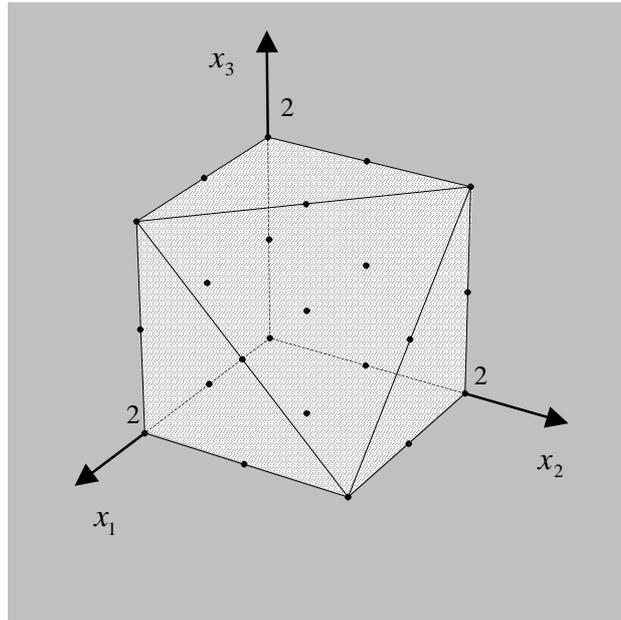


Figura 5.10

Veamos una aplicación del algoritmo anterior a un ejemplo concreto. Se utilizará la regla FIFO para elegir las regiones de la lista L y convendremos en no almacenar en dicha lista aquellas regiones vacías.

Ejemplo 5.5.27 Consideremos el problema $IP \equiv \max\{(x_1, x_2, x_3) / x \in F\}$ donde $F = \{x \in \mathbb{Z}_+^3 / x_1 \leq 2, x_2 \leq 2, x_3 \leq 2, x_1 + x_2 + x_3 \leq 4\}$. Véase la Figura 5.10 para una representación gráfica de la región factible F . En total hay 23 soluciones factibles, de las cuales sólo 6 son eficientes. En particular: $E^{IP} = \{(2,0,2), (1,1,2), (0,2,2), (1,2,1), (2,2,0), (2,1,1)\}$.

La aplicación del algoritmo PS dará los siguientes resultados:

Iteración 0.

$$L = \{F\}, F^0 = F, \hat{z}^0 = \hat{x}^0 = (1,2,1), E = \{\hat{x}^0\}.$$

$$F^{0_1} = \{x \in F / x_1 \geq 2\}, F^{0_2} = \{x \in F / x_1 \leq 1, x_2 \geq 3\} = \emptyset, F^{0_3} = \{x \in F / x_1 \leq 1, x_2 \leq 2, x_3 \geq 2\}.$$

Iteración 1.

$$L = \{F^{0_1}, F^{0_3}\}, F^1 = F^{0_1}, \hat{z}^1 = \hat{x}^1 = (2,2,0), E = \{\hat{x}^0, \hat{x}^1\}.$$

$$F^{1_1} = \{x \in F / x_1 \geq 3\} = \emptyset, F^{1_2} = \{x \in F / x_1 = 2, x_2 \geq 3\} = \emptyset, F^{1_3} = \{x \in F / x_1 = 2, x_2 \leq 2, x_3 \geq 1\}.$$

Iteración 2.

$$L = \{F^{0_3}, F^{1_3}\}, F^2 = F^{0_3}, \hat{z}^2 = \hat{x}^2 = (1,1,2), E = \{\hat{x}^0, \hat{x}^1, \hat{x}^2\}.$$

$$F^{2_1} = \{x \in F / 2 \leq x_1 \leq 1, x_2 \leq 2, x_3 \geq 2\} = \emptyset, F^{2_2} = \{x \in F / x_1 \leq 1, x_2 = 2, x_3 \geq 2\}, F^{2_3} = \{x \in F / x_1 \leq 1, x_2 \leq 1, x_3 \geq 3\} = \emptyset.$$

Iteración 3.

$$L = \{F^{1_3}, F^{2_2}\}, F^3 = F^{1_3}, \hat{z}^3 = \hat{x}^3 = (2,0,2), E = \{\hat{x}^0, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3\}.$$

$$F^{3_1} = \{x \in F / x_1 = 2, x_1 \geq 3, x_2 \leq 2, x_3 \geq 1\} = \emptyset, F^{3_2} = \{x \in F / x_1 = 2, 1 \leq x_2 \leq 2, x_3 \geq 1\}, F^{3_3} = \{x \in F / x_1 = 2, x_2 \leq 2, x_3 \geq 3\} = \emptyset.$$

Iteración 4.

$$L = \{F^{2_2}, F^{3_2}\}, F^4 = F^{2_2}, \hat{z}^4 = \hat{x}^4 = (0,2,2), E = \{\hat{x}^0, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4\}.$$

$$F^{4_1} = F^{4_2} = F^{4_3} = \emptyset.$$

Iteración 5.

$$L = \{F^{3_2}\}, F^5 = F^{3_2}, \hat{z}^5 = \hat{x}^5 = (2,1,1), E = \{\hat{x}^0, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4, \hat{x}^5\}.$$

$$F^{5_1} = F^{5_2} = F^{5_3} = \emptyset.$$

Iteración 6.

$$L = \emptyset \Rightarrow \text{STOP.}$$

Obsérvese que en este ejemplo la aproximación dada por el algoritmo PS coincide exactamente con E^{IP} .

A continuación estudiaremos la validez y convergencia del procedimiento propuesto.

Teorema 5.5.28 *El algoritmo PS es finito.*

Demostración. Como la región factible es acotada, contendrá un número finito de puntos. Ahora basta tener en cuenta que en cada iteración se descarta al menos un punto y que los puntos generados no se repiten. ■

Proposición 5.5.29 *El número de programas enteros resueltos por el algoritmo PS es $(k+1)|E|+1$.*

Demostración. Inmediata teniendo en cuenta que para obtener un punto de separación hay que resolver un programa entero, que los puntos de separación no se repiten y que por cada uno de tales puntos se crean k nuevos subproblemas para los que hay que estudiar su factibilidad. ■

Denotemos por IP^i el problema $\max\{z(x)/x \in F^i\}$ y sea \hat{z} el punto obtenido en el paso 3 del algoritmo PS para el nodo F^i . Entonces:

Teorema 5.5.30 $z(E^{IP^i}) \subseteq \bigcup_{j=1}^k z(E^{IP^{ij}}) \cup \{\hat{z}\}$.

Demostración. Sean $\bar{z} \in z(E^{IP^i})$ con $\bar{z} = z(\bar{x})$. Por el Corolario 1.4.36 sabemos que $\hat{z} = z(\hat{x}) \in z(E^{IP^i})$. Si $\bar{z} \neq \hat{z} \Rightarrow \exists l \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\forall j \in \{1, \dots, l-1\}$, $\bar{z}_j \leq \hat{z}_j$ y $\bar{z}_l > \hat{z}_l \Rightarrow \bar{x} \in F^{i_l} \Rightarrow \bar{x} \in E^{IP^{i_l}} \Rightarrow \bar{z} \in z(E^{IP^{i_l}})$. ■

El algoritmo PS es un método aproximado por exceso. Efectivamente:

Teorema 5.5.31 $z(E^{IP}) \subseteq E$.

Demostración. Es inmediata pues $E^{IP} = E^{IP^0}$. ■

Para $k=2$ el algoritmo PS es exacto. Efectivamente, esta afirmación aparece clara después de tener en cuenta los siguientes dos resultados:

Sea IP' el problema $\max\{z(x)/x \in F'\}$.

Proposición 5.5.32 Sean $\alpha \in R$ y $F' = \{x \in F / z_1(x) \geq \alpha\}$. Entonces, $E^{IP'} \subseteq E^{IP}$.

Teorema 5.5.33 Sean $\bar{x} \in E^{IP}$, $\bar{z} = z(\bar{x})$ y $F' = \{x \in F / z_1(x) \leq \bar{z}_1\}$. Entonces, $E^{IP'} = E^{IP} \cap F'$.

Demostración.

“ \supseteq ”

Como $F' \subseteq F$, por la Proposición 1.10.3 $\Rightarrow E^{IP} \cap F' \subseteq E^{IP'}$.

“ \subseteq ”

Sea $\hat{x} \in E^{IP'} \Rightarrow \hat{x} \in F'$. Supongamos por reducción al absurdo que $\hat{x} \notin E^{IP} \Rightarrow \exists \tilde{x} \in F$, $\tilde{z} \geq \hat{z}$, donde $\hat{z} = z(\hat{x})$ y $\tilde{z} = z(\tilde{x}) \Rightarrow$ (i) $\tilde{z}_1 > \bar{z}_1 \geq \hat{z}_1$, pues $\hat{x} \in E^{IP'}$, (ii) $\tilde{z}_2 \geq \hat{z}_2$. Ahora bien, por (i) y por ser $\bar{x} \in E^{IP} \Rightarrow \bar{z}_2 > \tilde{z}_2$. Luego, aplicando (i) y (ii) $\Rightarrow \bar{z} \geq \hat{z}$ pero, evidentemente, $\bar{x} \in F' \Rightarrow \#$, pues $\hat{x} \in E^{IP'}$. Luego, $\hat{x} \in E^{IP}$. ■

Lamentablemente, cuando $k > 2$ el algoritmo PS puede generar soluciones que no son eficientes, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo en R^3 .

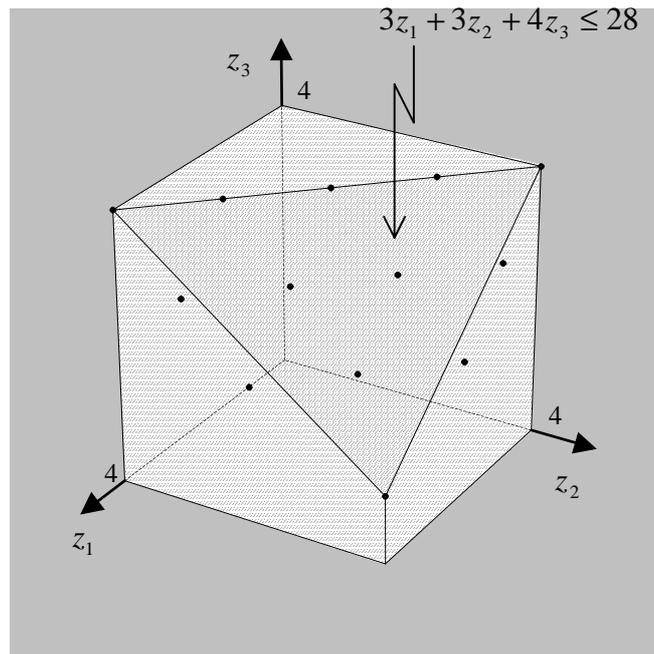


Figura 5.11. Soluciones Eficientes del Problema.

Ejemplo 5.5.34 Consideremos el problema $IP \equiv \max\{(x_1, x_2, x_3) / x \in F\}$ donde $F = \{x \in Z_+^3 / 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 28, x_1 \leq 4, x_2 \leq 4, x_3 \leq 4\}$. La Figura 5.11 muestra los 13 puntos de la región eficiente junto a la región factible del problema relajado. En particular:

$$E^{IP} = \left\{ \begin{array}{l} (4,0,4), (3,1,4), (2,2,4), (1,3,4), (0,4,4), (4,1,3), (3,2,3), \\ (2,3,3), (1,4,3), (4,2,2), (3,3,2), (2,4,2), (4,4,1) \end{array} \right\}.$$

Tomando, por ejemplo, $(3,3,2) \in E^{IP} \Rightarrow F' = \{x \in F / z_1(x) \leq \bar{z}_1\} = \{x \in F / x_1 \leq 3\}$. Sin embargo, $(3,4,1) \in E^{IP'}$ y $(3,4,1) \notin E^{IP}$.

●

Afortunadamente, al ser el algoritmo PS un procedimiento aproximado por exceso, siempre es posible combinarlo con el algoritmo ND (ver sección 5.5.1) para descartar las posibles soluciones dominadas que hubiere y obtener así $z(E^{IP})$ de forma exacta.

Comentarios 5.5.35

- (i) La ramificación es lineal. Siempre se crean k subregiones.
- (ii) Existen diferentes formas de elegir una subregión activa. Dos técnicas extremas consisten en utilizar las reglas *primero en anchura* ([HrSh78], p. 263) y *primero en profundidad* ([HrSh78], p. 268).
- (iii) Las regiones activas se pueden separar utilizando cualquier permutación de los k objetivos.

(iv) Método de los Retículos Completamente Eficientes

El siguiente algoritmo que presentamos es exacto y almacena la región eficiente de forma implícita a través de retículos completamente eficientes obtenidos a partir del problema original. Básicamente, el procedimiento propuesto estudia la eficiencia completa de las regiones activas, separándolas si no son completamente eficientes. El algoritmo es secuencial en el sentido de que genera, en cada iteración, al menos una solución eficiente. Lamentablemente, cuando $k > 2$, las soluciones generadas en una iteración pueden haber sido obtenidas previamente.

Utilizaremos la siguiente notación:

- L \leftrightarrow Lista de regiones por estudiar.
 R \leftrightarrow Regiones de E^p (en forma implícita).

Algoritmo RCE

Paso 0. Inicialización.

$$L = \{F\}, R = \emptyset, i = 0.$$

Paso 1. Regla de parada.

$$\text{Si } L = \emptyset \Rightarrow \text{STOP, } E^{lp} = \bigcup_{Y \in R} Y.$$

En caso contrario, seleccionar $F^i \in L$.

Paso 2. Eliminación por no factibilidad.

Si $F^i = \emptyset$ ir al paso 5.

Paso 3. Eliminación por eficiencia completa.

Sea $(\bar{y}^i)^T, (\bar{x}^i)^T, (\bar{s}^i)^T$ solución óptima del problema:

$$\max \{e^t s / x, y \in F^i, z(y) - z(x) - s = 0, s \geq 0\} \quad (5.6)$$

Si $e^t \bar{s}^i = 0$ hacer $R = R \cup \{F^i\}$ e ir al paso 5.

En otro caso hacer $Y^i = \{x \in F^i / z(x) = z(\bar{y}^i)\}$ y $R = R \cup \{Y^i\}$.

Paso 4. Ramificación.

Sea $\hat{z}^i = z(\bar{y}^i)$. Crear k subregiones a partir de F^i de la siguiente manera:

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, F^{ij} = \{x \in F^i / z_j(x) \geq \hat{z}_j^i + 1\}.$$

Hacer $L = L \cup \{F^{ij}\}_{j=1}^k$.

Paso 5. Cierre de bucle.

Hacer $L = L - \{F^i\}$, $i = i + 1$ e ir al paso 1.

Veamos que el algoritmo RCE es válido y finito. Para ello necesitamos una serie de resultados preliminares.

Proposición 5.5.36 Los conjuntos $\{(y, x) \in F^i \times F^i / z(y) - z(x) - s = 0, s \geq 0\}$ y $\{(y, x) \in F \times F^i / z(y) - z(x) - s = 0, s \geq 0\}$ son idénticos.

Demostración.

“ \subseteq ”

Inmediata por ser $F^i \subseteq F$.

“ \supseteq ”

Sea $\bar{y} \in F$ y $\bar{x} \in F^i$ tales que $z(\bar{y}) \geq z(\bar{x})$. Como por la Proposición 5.5.23, $\exists l^i \in R^k$ tal que F^i se puede poner como $\{x \in F / z(x) \geq l^i\} \Rightarrow \bar{y} \in F^i$. ■

Proposición 5.5.37 El programa (5.6) es acotado, con valor óptimo 0 si, y sólo si, $F^i \subseteq E^{IP}$.

Demostración. El programa (5.6) es acotado, con valor óptimo 0. Aplicando la Proposición 5.5.36 \Leftrightarrow El programa $\max\{e^t s / y \in F, x \in F^i, z(y) - z(x) - s = 0, s \geq 0\}$ es acotado, con valor óptimo 0. Ahora, por el Teorema 3.2.4 $\Leftrightarrow F^i \subseteq E^{IP}$. ■

Ahora resulta claro que el paso 3 del algoritmo RCE comprueba si F^i presenta eficiencia completa o no. En caso afirmativo, no hay necesidad de separación. Además, siempre ocurre que:

Proposición 5.5.38 Si $((\bar{y}^i)^t, (\bar{x}^i)^t, (\bar{s}^i)^t)$ es solución óptima del problema (5.6) entonces $\bar{y}^i \in E^{IP}$.

Demostración. Si $((\bar{y}^i)^t, (\bar{x}^i)^t, (\bar{s}^i)^t)$ es solución óptima del problema (5.6), aplicando la Proposición 5.5.36 $\Rightarrow ((\bar{y}^i)^t, (\bar{x}^i)^t, (\bar{s}^i)^t)$ es solución óptima del problema $\max\{e^t s / y \in F, x \in F^i, z(y) - z(x) - s = 0, s \geq 0\}$. Ahora, por el Teorema 3.2.5 $\Rightarrow \bar{y}^i \in E^{IP}$. ■

Teorema 5.5.39 $\bigcup_{Y \in R} Y \subseteq E^{IP}$.

Demostración. Directa teniendo en cuenta la Proposición 5.5.37 y la Proposición 5.5.38. ■

Teorema 5.5.40 $E^{IP} = \bigcup_{Y \in R} Y$.

Demostración.

“ \supseteq ”

Por el Teorema 5.5.39.

“ \subseteq ”

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \hat{x} \in E^{IP}$ tal que $\forall Y \in R, \hat{x} \notin Y$. Sea F^s la región factible más pequeña generada por el algoritmo RCE que contiene a $\hat{x} \Rightarrow F^s \neq \emptyset$. Sea $((\bar{y}^s), (\bar{x}^s), (\bar{s}^s))$ solución óptima de (5.6). Como $\forall Y \in R, \hat{x} \notin Y \Rightarrow z(\hat{x}) \neq z(\bar{y}^s)$ y $F^s \not\subseteq E^{IP} \Rightarrow F^s$ se ha de separar, pero como F^s es la región factible más pequeña que contiene a $\hat{x} \Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, k\}, z_j(\hat{x}) \leq z_j(\bar{y}^s)$. Como $z(\hat{x}) \neq z(\bar{y}^s) \Rightarrow z(\hat{x}) \leq z(\bar{y}^s) \Rightarrow \#$, pues $\hat{x} \in E^{IP}$. ■

Teorema 5.5.41 *El algoritmo RCE es finito.*

Demostración. Directa, teniendo en cuenta que por ser X acotado $\Rightarrow |E^{IP}|$ es finito y que la región factible asociada a un nodo arbitrario no contiene ninguno de los puntos de separación eficientes de sus ancestros. ■

Cualquiera de las observaciones hechas en Comentarios 5.5.24 se puede trasladar sin dificultad al algoritmo RCE, debido a la estructura del mismo. En particular, cuando $k > 2$, las separaciones generadas por el algoritmo RCE no tienen porque ser disjuntas. Por tal motivo se pueden volver a regenerar soluciones eficientes previamente halladas.

Proposición 5.5.42 *El número de programas enteros resueltos por el algoritmo RCE es $(k+1)|R|+1$.*

Demostración. Inmediata teniendo en cuenta que para obtener un punto de separación hay que resolver un programa entero (problema 5.6) y que por cada uno de tales puntos se crean k nuevos subproblemas para los que hay que estudiar su factibilidad. ■

Debemos esperar un buen tiempo de ejecución del algoritmo RCE cuanto mayor (más próxima a 1) sea la densidad de eficiencia del problema. Efectivamente, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.5.43 *Sea $IP \equiv \max\{(-4x_1 + x_2, 5x_1 - x_2) / x \in F\}$, $F = \{x \in Z_+^2 / 2x_1 + 2x_2 \leq 11\}$. En función de la representación gráfica dada en la Figura 5.7 es claro que $E^{IP} = F - \{(0, 0)\} \Rightarrow |E^{IP}| = 20 \Rightarrow$ Con cualquiera de los algoritmos anteriormente analizados se necesitarían, al menos 21,*

iteraciones. Sin embargo, con el algoritmo RCE sólo se necesitan 4. Efectivamente:

Iteración 0.

$$L = \{F\}, F^0 = F, \left((\bar{y}^0)^{\vee}, (\bar{x}^0)^{\vee}, (\bar{s}^0)^{\vee} \right) = ((1,4), (0,0), (1,4)), R = \emptyset, \hat{z}^0 = (0,1).$$

$$Y^0 = \{x \in F / z(x) = \hat{z}^0\}, R = \{Y^0\}.$$

$$F^{0_1} = \{x \in F / z_1(x) \geq 1\} \neq \emptyset, F^{0_2} = \{x \in F / z_2(x) \geq 2\} \neq \emptyset.$$

Iteración 1.

$$L = \{F^{0_1}, F^{0_2}\}, F^1 = F^{0_1}, \left((\bar{y}^1)^{\vee}, (\bar{x}^1)^{\vee}, (\bar{s}^1)^{\vee} \right) = ((0,1), (0,1), (0,0)) \Rightarrow F^1 \text{ es eficiente completo. } R = \{Y^0, F^1\}.$$

Iteración 2.

$$L = \{F^{0_2}\}, F^2 = F^{0_2}, \left((\bar{y}^2)^{\vee}, (\bar{x}^2)^{\vee}, (\bar{s}^2)^{\vee} \right) = ((1,0), (1,0), (0,0)) \Rightarrow F^2 \text{ es eficiente completo. } R = \{Y^0, F^1, F^2\}.$$

Iteración 3.

$$L = \emptyset \Rightarrow \text{STOP.}$$



Conclusiones e Investigaciones Futuras

En esta memoria hemos investigado con rigor y profundidad un buen número de aspectos de la programación vectorial particularizados para los casos lineal y entero. Con carácter general se ha pretendido realizar un tratamiento unificado e integrador de los diversos temas tratados, incorporándose numerosas ideas originales que han derivado en nuevos resultados, algoritmos y enriquecedoras perspectivas de enfoque. En este sentido, las principales aportaciones de este trabajo han sido las siguientes:

1. Se presentan nuevos teoremas de la alternativa para sistemas de desigualdades lineales. Estas eficaces herramientas, aparte de hacer más manejable los conceptos de solución eficiente y débilmente eficiente, han permitido simplificar un buen número de desarrollos teóricos y obtener nuevos resultados de utilidad práctica ([JrGn01a], [Jr02c]).
2. Continuando con teoría básica, se proponen también diferentes tests para determinar cuándo el conjunto de soluciones eficientes de un LVP es vacío o no.
3. Se introducen las nociones de cotas y supremos eficientes de un VP como una extensión posible de su contrapartida escalar y se prueba, entre otras propiedades, que los conjuntos de todos los supremos y de las soluciones no dominadas de un CVP coinciden. Este hecho nos proporciona una relación de polaridad para el CVP que, para el caso lineal, da lugar a la definición de problema dual propuesta por Gale-Kuhn-Tucker ([JrGn01a], [Jr02c]).
4. Se sugiere el concepto de descriptor maximal como un mecanismo adecuado para describir, de manera única, las caras de un poliedro, considerándose separadamente los casos especiales que surgen cuando la cara es incidente en un vértice degenerado y no degenerado. Asimismo, y puesto que es posible que una misma cara tenga varios descriptores asociados, fue necesario desarrollar tests que permitieran determinar su maximalidad ([Jr02b]).

5. Se realiza un amplio estudio sobre el conjunto de soluciones óptimas de un problema lineal escalar arbitrario que, aparte de aglutinar los escasos resultados existentes, permitió obtener nuevas caracterizaciones y propiedades.
6. Se proporciona un extenso conjunto de tests de eficiencia para caras y puntos arbitrarios de la región factible, considerando independientemente los casos especiales de caras incidentes en un vértice conocido no degenerado y degenerado, respectivamente. La utilidad inmediata de tales resultados ha quedado sobradamente demostrada a lo largo de esta memoria ([JrGn01b], [JrGn01c], [Jr01c]).
7. Proponemos algunos tests, fácilmente implementables, para detectar a priori la eficiencia completa de un LVP ([Jr01d], [Jr02a]). Dado que cualquier cara de un poliedro es, en sí misma, un poliedro, los tests de eficiencia completa también encuentran aplicación en la caracterización de la eficiencia de caras arbitrarias.
8. La identificación de objetivos redundantes ha sido objeto de un estudio concienzudo. Puesto que se sabe que los objetivos que se pueden poner como una combinación cónica del resto son redundantes, se propone un método general (algoritmo MSS) para calcular el sistema generador minimal de un cono poliédrico.
9. Se incluye una reelaboración completa y pormenorizada de algunos de los conceptos de dualidad vectorial más importantes propuestos a lo largo del tiempo, examinándose las relaciones existentes entre las distintas nociones consideradas.
10. En el contexto de la optimización de una función lineal sobre la región eficiente se formula un nuevo método (algoritmo MFP) que genera una sucesión de caras eficientes distintas sobre las que se evalúa el objetivo de interés. Dichas caras se obtienen a partir de la resolución, en cada iteración, de un programa bilineal simplificado que puede ser abordado a través del uso de métodos específicos bien conocidos de la programación no convexa. Las características más atractivas de este algoritmo son que las caras generadas no necesitan ser adyacentes y que en cada iteración se mejora estrictamente el valor de la función objetivo ([Jr01a]).
11. Sugerimos una nueva clasificación para los métodos generadores de soluciones eficientes de un LVP en función de su diseño algorítmico. La organización propuesta consta de cuatro categorías mutuamente excluyentes: Ascendentes Globales (GBU), Ascendentes Locales (LBU), Descendentes Globales (GTD) y Descendentes Locales (LTD). Después de una extensa revisión bibliográfica se comprobó que, a pesar de su utilidad, el diseño LTD no había sido previamente explotado.

12. Para cada una de las cuatro clases anteriores se desarrollaron nuevos algoritmos generadores de soluciones eficientes. Las especificaciones particulares emplean algunos de los tests de eficiencia para caras obtenidos previamente en esta tesis. Además del correspondiente análisis de propiedades realizado, se ilustró el comportamiento de los métodos propuestos mediante la resolución de una serie de ejemplos.

13. Con respecto al ILVP, se examinaron con detenimiento las principales dificultades que presenta y se realizó una justificación rigurosa de propiedades no triviales del mismo que la bibliografía especializada había descuidado sistemáticamente. Gran parte de los resultados pudieron ser obtenidos relacionando el ILVP con sus relajaciones lineal o convexa.

14. Se proporcionan una serie de estimaciones, en norma infinito, sobre la proximidad del conjunto de soluciones eficientes de un ILVP y las correspondientes a su relajación lineal. Además, se pudo probar (mediante contraejemplos adecuados) que las estimaciones dadas, bajo las hipótesis realizadas, son las mejores posibles ([Jr01b]).

15. Se proponen dos algoritmos nuevos, basados en la técnica *divide y vencerás*, para generar el conjunto de soluciones eficientes del problema entero. Uno de los procedimientos (método PS) es un algoritmo exacto para el caso biobjetivo y aproximado por exceso para el caso general ($k > 2$). Su mejor característica es que no regenera soluciones previamente calculadas. El segundo procedimiento (método RCE) es un algoritmo exacto para cualquier dimensión, que analiza en cada iteración la eficiencia completa de la región activa considerada. Este último enfoque, hasta donde sabemos no utilizado previamente en la literatura, permite describir la región eficiente del ILVP de forma implícita.

Indudablemente, el trabajo presentado en esta memoria no puede calificarse de cerrado. Por el contrario, tanto la programación vectorial lineal como la entera, han demostrado tener buenas condiciones para llevar a cabo fructíferas investigaciones. En más de una ocasión los análisis y reflexiones realizados nos condujeron hacia nuevos y excitantes derroteros que, por limitaciones lógicas de espacio y tiempo, no pudieron ser tratados, dejando inevitablemente muchos aspectos que mejorar y direcciones hacia donde avanzar. A título de muestra, algunas de las líneas de desarrollo que pensamos acometer en un futuro próximo son las siguientes:

1. Programación vectorial en el espacio objetivo

En los últimos años se ha empezado a estudiar seriamente la posibilidad de aplicar al LVP la metodología vectorial directamente sobre el espacio de consecuencias (en lugar de sobre el espacio de decisión), obteniéndose resultados verdaderamente prometedores (ver, por ejemplo, [BnSn00a],

[BnSn00b], [Bn98a], [Bn98b], [Bn98c], [Jh97], ...). Esta nueva perspectiva aporta, al menos dos grandes ventajas: La primera es que la estructura del conjunto criterio es mucho más simple que la de la región factible, debido principalmente a que el número de funciones objetivo es sensiblemente más reducido (frecuentemente en varios órdenes de magnitud), que el número de variables de decisión. Este fenómeno de contracción, usualmente conocido como *colapsamiento* ([Dr87], p. 580), también afecta en la misma medida a las caras eficientes ([Bn95], p. 244), provocando que muchos puntos de la región eficiente tengan una misma imagen en el conjunto criterio (ver, por ejemplo, [Dr87] o [Bn95]), y evitando cálculos redundantes sin interés para el DM ([Bn98a]). En segundo lugar, el DM prefiere basar la elección de la solución más preferida en términos de sus consecuencias, más que en los niveles de las variables de decisión (ver [Bn98a], [BnSy97], [DrLiu90] o [DrSl90]). Dado que este tipo de investigación está todavía en su más tierna infancia, consideramos que constituye una prometedora línea de desarrollo de evidente utilidad práctica.

2. Métodos aproximados y heurísticas en programación vectorial

En nuestra opinión, la programación vectorial debe redirigir su interés a la obtención de subconjuntos, de tamaño adecuado, de soluciones verdaderamente representativas (quizás en un sentido estadístico) de la región eficiente. De esta manera es posible aliviar algunas de las debilidades que presenta la metodología vectorial ([BnSy97]). Esta sugestiva y apenas explotada vía de trabajo puede beneficiarse, por ejemplo, de los recientes avances ocurridos en optimización global ([HrTuy96]) y en el campo de las heurísticas ([McFg00], [MrMr99], [Pr84]).

3. Estudio de problemas combinatorios concretos

La *optimización combinatoria multiobjetivo* constituye una potente herramienta para modelizar muchas situaciones del mundo real ([UITg94]). Sin embargo, a pesar de que problemas combinatorios tales como los de la *mochila*, *árbol generador mínimo*, *asignación*, *transporte*, *flujo en redes*, *recubrimiento* y *viajante de comercio*, por citar algunos de los más conocidos, han comenzado a recibir una creciente atención en la literatura desde una óptica vectorial (ver, por ejemplo, [SdGn01], [RRCS99], [RASG98], [Is79]), la realidad es que, debido a su enorme complejidad ([Sr86], [Eh98]), requieren aún mucha investigación en diversas direcciones: teórica, por ejemplo estudiando si existen caracterizaciones de soluciones eficientes específicas para algunos modelos, metodológica, adaptando algunos de los métodos existentes para el caso escalar al caso vectorial o reajustando algunas técnicas vectoriales generales a problemas concretos, incluso práctica, diseñando heurísticas que generen subconjuntos representativos de la región eficiente en el sentido señalado en el apartado anterior.

4. Implementación de los algoritmos propuestos y estudio computacional

En general, la no implementación de un algoritmo conlleva el riesgo de que la comunidad científica no pueda apreciar su interés. Por otra parte la verdadera utilidad de cualquier algoritmo se manifiesta cuando se puede utilizar para resolver problemas prácticos del mundo real. Con la voluntad de aprovechar al máximo todo el potencial desarrollado en esta tesis, tenemos la intención de implementar en *C++* ([St00]) la totalidad de los algoritmos propuestos, empleando como resolutor escalar para los problemas lineales y enteros el *CPLEX* ([Cplex93]). Además, pensamos diseñar una amplia serie de experimentos computacionales que nos permita analizar numéricamente los rendimientos de las rutinas creadas y compararlas entre sí. Nuestro objetivo último es crear una librería de procedimientos de la programación vectorial, robusta y de calidad, que pueda ser integrada en un entorno de trabajo amigable y potente, desde el cual los diferentes usuarios del sistema logren invocar de manera sencilla las distintas funciones implementadas.

5. Paralelismo y Programación vectorial

Hoy en día, los ordenadores más rápidos del mundo son máquinas paralelas, los cuales permiten, entre otras cosas, dar respuesta en tiempo real a problemas que han sido considerados previamente como intratables, debido a su magnitud, por la tecnología secuencial. Además, la disponibilidad de tales instrumentos de cálculo de altas prestaciones, se está haciendo cada vez más habitual gracias al esfuerzo realizado por los diversos centros de supercomputación existentes (CEPBA¹, EPCC², ...) para hacer más accesibles sus recursos. Teniendo en cuenta que resolver grandes problemas multiobjetivos requiere con frecuencia largas etapas de cómputo intensivo y enormes cantidades de espacio de almacenamiento y que, en estos casos, se pueden producir importantes ahorros de tiempo cuando se emplean técnicas paralelas ([Akl97]), una vía interesante de investigación será la implementación, utilizando *OpenMP* ([CDKM01]), de los procedimientos presentados en esta memoria y su posterior análisis experimental de rendimientos sobre sistemas paralelos de memoria compartida ([Akl89]). El enorme potencial que posee esta línea de desarrollo ya ha sido percibido por la comunidad científica, existiendo en la actualidad algunos trabajos (ver, por ejemplo, [WcZh97] y [StPr98]) muy sugerentes e instructivos sobre el uso del paralelismo en el campo de la programación vectorial lineal.

¹ <http://www.cccc.es/esp/>

² <http://www.epcc.ed.ac.uk/>

Bibliografia

- [AhHU74] Aho, A., Hopcroft, J. and Ullman, J. (1974), *The design and analysis of computer algorithms*, Addison-Wesley.
- [AHJS99] Audet, C., Hansen, P., Jaumard, B. and Savard, G. (1999), A symmetrical linear maxmin approach to disjoint bilinear programming, *Mathematical Programming* **85**, 573-592.
- [Akl89] Akl, S. (1989), *The Design and Analysis of Parallel Algorithms*, Prentice Hall.
- [Akl97] Akl, S. (1997), *Parallel Computation: Models and Methods*, Prentice Hall.
- [AlCl01] Alves, M. and Clímaco, J. (2001), Indifference sets of reference points in multi-objective integer linear programming, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* **10**, 177-189.
- [AnCl92] Antunes, C. and Clímaco, J. (1992), Sensitivity analysis in MCDM using the weight space, *Operations Research Letters* **12**, 187-196.
- [AnTM96] An, L., Tao, P. and Muu, L. (1996), Numerical solution for optimization over the efficient set by d.c. optimization algorithms, *Operations Research Letters* **19**, 117-128.
- [Ar93a] Armand, P. (1993), Bounds on the number of vertices of perturbed polyhedra, *Annals of Operations Research* **47**, 249-269.
- [Ar93b] Armand, P. (1993), Finding all maximal efficient faces in multiobjective linear programming, *Mathematical Programming* **61**, 357-375.

- [ArMl91] Armand, P. and Malivert, C. (1991), Determination of the efficient set in multiobjective linear programming, *Journal of Optimization Theory and Applications* **70**, No. 3, 467-489.
- [Bf95] Boffey, B. (1995), Multiobjective routing problems, *Top* **3**, No. 2, 167-220.
- [BGHR77] Benichou, M., Gauthier J., Hentges G. and Ribiere, G. (1977), The efficient solution of large-scale linear programming problems-Some algorithmic techniques and computational results, *Mathematical Programming* **13**, 280-322.
- [BKPK81] Burkard, R., Keiding, H., Pruzan, P. and Krarup, J. (1981), A relationship between optimality and efficiency in multicriteria 0-1 programming problems, *Computers and Operations Research* **8**, No. 4, 241-247.
- [BlKp73] Belenson, S. and Kapur, K. (1973), An algorithm for solving multicriterion linear programming problems with examples, *Operational Research Quarterly* **24**, No. 1, 65-77.
- [BMTL71] Benayoun, R., Montgolfier, J., Tergny, J. and Larichev, O. (1971), Linear programming with multiple objective functions: STEP method (STEM), *Mathematical Programming* **1**, 366-375.
- [Bn78] Benson, H. (1978), Existence of efficient solutions for vector maximization problems, *Journal of Optimization Theory and Applications* **26**, No. 4, 569-580.
- [Bn79] Benson, H. (1979), Vector maximization with two objective functions, *Journal of Optimization Theory and Applications* **28**, No. 2, 253-257.
- [Bn81] Benson, H. (1981), Finding an initial efficient extreme point for a linear multiple objective program, *Journal of the Operational Research Society* **32**, No. 6, 495-498.
- [Bn82] Benson, H. (1982), Admissible points of a convex polyhedron, *Journal of Optimization Theory and Applications* **38**, No. 3, 341-361.
- [Bn84] Benson, H. (1984), Optimization over the efficient set, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **98**, 562-580.
- [Bn85] Benson, H. (1985), Multiple objective linear programming with parametric criteria coefficients, *Management Science* **1**, No. 4, 461-474.
- [Bn86] Benson, H. (1986), An algorithm for optimizing over the weakly-efficient set, *European Journal of Operational Research* **25**, 192-199.

- [Bn91a] Benson, H. (1991), Complete efficiency and the initialization of algorithms for multiple objective programming, *Operations Research Letters* **10**, 481-487.
- [Bn91b] Benson, H. (1991), An all-linear programming relaxation algorithm for optimizing over the efficient set, *Journal of Global Optimization* **1**, 83-104.
- [Bn92] Benson, H. (1992), A finite, nonadjacent extreme-point search algorithm for optimization over the efficient set, *Journal of Optimization Theory and Applications* **73**, No. 1, 47-64.
- [Bn93] Benson, H. (1993), A bisection-extreme point search algorithm for optimizing over the efficient set in the linear dependence case, *Journal of Global Optimization* **3**, 95-111.
- [Bn95] Benson, H. (1995), A geometrical analysis of the efficient outcome set in multiple objective convex programs with linear criterion functions, *Journal of Global Optimization* **6**, 231-251.
- [Bn98a] Benson, H. (1998), An outer approximation algorithm for generating all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear programming problem, *Journal of Global Optimization* **13**, 1-24.
- [Bn98b] Benson, H. (1998), Further analysis of an outcome set-based algorithm for multiple-objective linear programming, *Journal of Optimization Theory and Applications* **97**, No. 1, 1-10.
- [Bn98c] Benson, H. (1998), Hybrid approach for solving multiple-objective linear programs in outcome space, *Journal of Optimization Theory and Applications* **98**, No. 1, 17-35.
- [BnAk91] Benson, H. and Aksoy, Y. (1991), Using efficient feasible directions in interactive multiple objective linear programming, *Operations Research Letters* **10**, 203-209.
- [BnLee96] Benson, H. and Lee, D. (1996), Outcome-based algorithm for optimizing over the efficient set of a bicriteria linear programming problem, *Journal of Optimization Theory and Applications* **88**, No. 1, 77-105.
- [BnMr77] Benson, H. and Morin, T. (1977), The vector maximization problem: Proper efficiency and stability, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **32**, No. 1, 64-72.
- [BnSn00a] Benson, H. and Sun, E. (2000), Outcome space partition of the weight set in multiobjective linear programming, *Journal of Optimization Theory and Applications* **105**, 17-36.

- [BnSn00b] Benson, H. and Sun, E. (2000), Pivoting in an outcome polyhedron, *Journal of Global Optimization* **16**, 301-323.
- [BnSn99] Benson, H. and Sun, E. (1999), New closedness results for efficient sets in multiple objective mathematical programming, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **238**, 277-296.
- [BnSy93] Benson, H. and Sayin, S. (1993), A face search heuristic algorithm for optimizing over the efficient set, *Naval Research Logistics* **40**, 103-116.
- [BnSy94] Benson, H. and Sayin, S. (1994), Optimization over the efficient set: four special cases, *Journal of Optimization Theory and Applications* **80**, No. 1, 3-18.
- [BnSy97] Benson, H. and Sayin, S. (1997), Towards finding global representations of the efficient set in multiple objective mathematical programming, *Naval Research Logistics* **44**, 47-67.
- [Bnv77] Benveniste, M. (1977), Testing for complete efficiency in a vector maximization problem, *Mathematical Programming* **12**, 285-288.
- [Br81] Brumelle, S. (1981), Duality for multiple objective convex programs, *Mathematics of Operations Research* **6**, 159-172.
- [BrDL90] Barda, O., Dupuis, J. and Lencioni, P. (1990), Multicriteria location of thermal power plants, *European Journal of Operational Research* **45**, 332-346.
- [BrZn92] Breslawski, A. and Zionts, S. (1992), Some results concerning the quality of vertex solutions found by a method for multiple objective linear programming, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* **1**, 139-153.
- [Bt77] Bitran, G. (1977), Linear multiple objective programs with zero-one variables, *Mathematical Programming* **13**, 121-139.
- [Bt79] Bitran, G. (1979), Theory and algorithms for linear multiple objective programs with zero-one variables, *Mathematical Programming* **17**, 362-390.
- [Bt80] Bitran, G. (1980), Linear multiple objective problems with interval coefficients, *Management Science* **26**, No. 7, 694-706.
- [BtMg79] Bitran, G. and Magnanti, T. (1979), The structure of admissible points with respect to cone dominance, *Journal of Optimization Theory and Applications* **29**, 573-614.

- [BtMg80] Bitran, G. and Magnanti, T. (1980), Duality based characterizations of efficient facets, Fandel, G. and Gal, T. (eds.), *Multiple Criteria Decision Making: Theory and Application*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 177, Berlin: Springer-Verlag, 12-25.
- [CCFP93] Carrizosa, E., Conde, E., Fernández, F. and Puerto, J. (1993), Efficiency in euclidean constrained location problems, *Operations Research Letters* **14**, 291-295.
- [CCFP95] Carrizosa, E., Conde, E., Fernández, F. and Puerto, J. (1995), Multi-criteria analysis with partial information about the weighting coefficients, *European Journal of Operational Research* **81**, 291-301.
- [CDKM01] Chandra, R., Dagum, L. Kohr, D. Maydan, D. McDonald, J. and Menon, R. (2001), *Parallel Programming in OpenMP*, Morgan Kaufmann Publishers, Academic Press.
- [CGST86] Cook, W., Gerards, A., Schrijver, A. and Tardos, É. (1986), Sensitivity theorems in integer linear programming, *Mathematical Programming* **34**, 251-264.
- [Ch78] Cohon, J. (1978), *Multiobjective Programming and Planning*, Academic Press.
- [ChCp77] Charnes, A. and Cooper, W. (1977), Goal programming and multiple objective optimizations, *European Journal of Operational Research* **1**, 39-54.
- [ChHm83] Chankong, V. and Haimes, Y. (1983), *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, North-Holland.
- [ChKm94] Choi, Y. and Kim, S. (1994), Stepwise contouring of efficient criterion vectors for large-scale MOLP, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* **3**, 15-26.
- [ChLE86] Chalmet, L., Lemonidis, L. and Elzinga, D. (1986), An algorithm for the bi-criterion integer programming problem, *European Journal of Operational Research* **25**, 292-300.
- [ChYu91] Chieng, I. and Yu, P. (1991), Transformation and restructuring of linear multiobjective programs: A fundamental method to resolve complex problems, *European Journal of Operational Research* **54**, 199-209.
- [Cplex93] Cplex (1993), *Using the Cplex Callable Library Mixed Integer Library, Version 2.1*, Cplex Optimization, Inc.

- [DcWn83] Deckro, R. and Winkofsky, E. (1983), Solving zero-one multiple objective programs through implicit enumeration, *European Journal of Operational Research* **12**, 362-374.
- [Dn63] Dantzig, G. (1963), *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press.
- [Dr80] Dauer, J. (1980), An equivalence result for solutions of multiobjective linear programs, *Computers and Operations Research* **7**, 33-39.
- [Dr87] Dauer, J. (1987), Analysis of the objective space in multiple objective linear programming, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **126**, 579-593.
- [Dr91] Dauer, J. (1991), Optimization over the efficient set using an active constraint approach, *Zeitschrift für Operations Research* **35**, 185-195.
- [Dr93] Dauer, J. (1993), On degeneracy and collapsing in the construction of the set of objective values in a multiple objective linear program, *Annals of Operations Research* **47**, 279-292.
- [DrFs95] Dauer, J. and Fosnaugh, T. (1995), Optimization over the efficient set, *Journal of Global Optimization* **7**, 261-277.
- [DrGl96] Dauer, J. and Gallagher, R. (1996), A combined constraint-space, objective-space approach for determining high-dimensional maximal efficient faces of multiple objective linear programs, *European Journal of Operational Research* **88**, 368-381.
- [DrLiu90] Dauer, J. and Liu, Y. (1990), Solving multiple objective linear programs in objective space, *European Journal of Operational Research* **46**, 350-357.
- [DrSl90] Dauer, J. and Saleh, O. (1990), Constructing the set of efficient objective values in multiple objective linear programs, *European Journal of Operational Research* **46**, 358-365.
- [DrSl92] Dauer, J. and Saleh, O. (1992), A representation of the set of feasible objectives in multiple objective linear programs, *Linear Algebra and its Applications* **166**, 261-275.
- [DsCD99] Dasgupta, P., Chakrabarti, P. and DeSarkar, S. (1999), *Multiobjective Heuristic Search*, Vieweg.
- [DsZn80] Deshpande, D. and Zionts, S. (1980), Sensitivity analysis in multiple objective linear programming: Changes in the objective function matrix, Fandel, G. and Gal, T. (eds.), *Multiple Criteria Decision Making: Theory and Application*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 177, Berlin: Springer-Verlag, 26-39.

- [DtRT93] Dutta, D., Rao, J. and Tiwari, R. (1993), A restricted class of multiobjective linear fractional programming problems, *European Journal of Operational Research* **68**, 352-355.
- [DyPr77] Dyer, M. and Proll, L. (1977), An algorithm for determining all extreme points of a convex polytope, *Mathematical Programming* **12**, 81-96.
- [EcHg78] Ecker, J. and Hegner, N. (1978), On computing an initial efficient extreme point, *Journal of the Operational Research Society* **29**, 1005-1007.
- [EcHK80] Ecker, J., Hegner, N. and Kouada, I. (1980), Generating all maximal efficient faces for multiple objective linear programs, *Journal of Optimization Theory and Applications* **30**, No. 3, 353-381.
- [EcKd75] Ecker, J. and Kouada, I. (1975), Finding efficient points for linear multiple objective programs, *Mathematical Programming* **8**, 375-377.
- [EcKd78] Ecker, J. and Kouada, I. (1978), Finding all efficient extreme points for multiple objective linear programs, *Mathematical Programming* **14**, 249-261.
- [EcSh81] Ecker, J. and Shoemaker, N. (1981), Selecting subsets from the set of nondominated vectors in multiple objective linear programming, *SIAM J. Control and Optimization* **19**, No. 4, 505-515.
- [EcSn94] Ecker, J. and Song, J. (1994), Optimizing a linear function over an efficient set, *Journal of Optimization Theory and Applications* **83**, No. 3, 541-563.
- [Eh00] Ehrgott, M. (2000), *Multicriteria Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 491, Berlin: Springer-Verlag.
- [Eh98] Ehrgott, M. (1998), Hard to say it's easy - Four reasons why combinatorial multiobjective programmes are hard, Haimes, Y. and Steuer, R. (eds.), *Research and Practice in Multiple Criteria Decision Making*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 487, Berlin: Springer-Verlag, 69-80.
- [Ev84] Evans, G. (1984), An overview of techniques for solving multiobjective mathematical programs, *Management Science* **30**, No. 11, 1268-1282.
- [EvSt73] Evans, J. and Steuer, R. (1973), A revised simplex method for linear multiple objective programs, *Mathematical Programming* **5**, 54-72.
- [FrMP98] Fernández, F., Monroy, L. and Puerto, J. (1998), Multicriteria goal games, *Journal of Optimization Theory and Applications* **99**, 403-421.

- [Gal77] Gal, T. (1977), A general method for determining the set of all efficient solutions to a linear vector maximum problem, *European Journal of Operational Research* **1**, 307-322.
- [Gal78] Gal, T. (1978), An overview on recent results in MCP as developed in Aachen, Germany, Zionts, S. (ed.), *Multiple Criteria Problem Solving, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, No. 155, Berlin: Springer-Verlag, 225-248.
- [Gal80] Gal, T. (1980), A note on size reduction of the objective functions matrix in vector maximum problems, Fandel, G. and Gal, T. (eds.), *Multiple Criteria Decision Making: Theory and Application, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, No. 177, Berlin: Springer-Verlag, 74-84.
- [Gal81] Gal, T. (1981), Relaxation analysis in linear vectorvalued maximization, *European Journal of Operational Research* **8**, 274-282.
- [Gal85] Gal, T. (1985), On the structure of the set bases of a degenerate point, *Journal of Optimization Theory and Applications* **45**, No. 4, 577-589.
- [Gal86] Gal, T. (1986), On efficient sets in vector maximum problems-A brief survey, *European Journal of Operational Research* **24**, 253-264.
- [Gal93] Gal, T. (1993), Degeneracy graphs: theory and application. An updated survey, *Annals of Operations Research* **46**, 81-105.
- [GalKZ88] Gal, T., Kruse, H. and Zörnig, P. (1988), Survey of solved and open problems in the degeneracy phenomenon, *Mathematical Programming* **42**, 125-133.
- [GalLb77] Gal, T. and Leberling, H. (1977), Redundant objective functions in linear vector maximum problems and their determination, *European Journal of Operational Research* **1**, 176-184.
- [GalLb81] Gal, T. and Leberling, H. (1981), Relaxation analysis in linear vectorvalued maximization, *European Journal of Operational Research* **8**, 274-282.
- [GalWl86] Gal, T. and Wolf, K. (1986), Stability in vector maximization - A survey, *European Journal of Operational Research* **25**, 169-182.
- [Gass93] Gass, S. (1993), Encounters with degeneracy: A personal view, *Annals of Operations Research* **47**, 335-342.
- [GbMg86] Gabbani, D. and Magazine, M. (1986), An interactive heuristic approach for multi-objective integer-programming problems, *Journal of the Operational Research Society* **37**, 285-291.

- [Geue93] Geue, F. (1993), An improved N-tree algorithm for the enumeration of all neighbors of a degenerate vertex, *Annals of Operations Research* **47**, 361-391.
- [Gf67] Geoffrion, A. (1967), Solving bicriterion mathematical programs, *Operations Research* **15**, 39-54.
- [Gf68] Geoffrion, A. (1968), Proper efficiency and the theory of vector maximization, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **22**, 618-630.
- [GgOs93] George, K. and Osborne, M. (1993), On degeneracy in linear programming and related problems, *Annals of Operations Research* **47**, 343-359.
- [GKT51] Gale, D., Kuhn, H. and Tucker, A. (1951), Linear programming and the theory of games, T. C. Koopmans, ed., *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, 317-329.
- [GIS195] Gallagher, R. and Saleh, O. (1995), A representation of an efficiency equivalent polyhedron for the objective set of a multiple objective linear program, *European Journal of Operational Research* **80**, 204-212.
- [Gn85] González-Martín, C. (1985), *Métodos Interactivos en Programación Multiobjetivo*, Secretariado de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.
- [GnRF85] González, J., Reeves, G. and Franz, L. (1985), An interactive procedure for solving multiple objective integer linear programming problems, Haimes, Y. and Chankong, V. (eds.), *Decision Making with Multiple Objectives*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 242, Berlin: Springer-Verlag, 250-260.
- [Gr78] Gros, C. (1978), Generalization of Fenchel's duality theorem for convex vector optimization, *European Journal of Operational Research* **2**, 368-376.
- [GrOs93] George, K. and Osborne, M. (1993), On degeneracy in linear programming and related problems, *Annals of Operations Research* **47**, 343-359.
- [GrSt94] Gardiner, L. and Steuer, R. (1994), Unified interactive multiple objective programming, *European Journal of Operational Research* **74**, 391-406.
- [GrV191] Geromel, J. and Valente, P. (1991), An upper bound on properly efficient solutions in multiobjective optimization, *Operations Research Letters* **10**, 83-86.

- [Hd62] Hadley, G. (1962), *Linear Programming*, Addison Wesley.
- [Hn78] Hannan, E. (1978), Using duality theory for identification of primal efficient points and for sensitivity analysis in multiple objective linear programming, *Journal of the Operational Research Society* **29**, No. 7, 643-649.
- [Hn90] Henig, M. (1990), Value functions, Dominations cones and proper efficiency in multicriteria optimization, *Mathematical Programming* **46**, 205-217.
- [HnLW89] Hansen, P., Labbé, M. and Wendell, R. (1989), Sensitivity analysis in multiple objective linear programming: The tolerance approach, *European Journal of Operational Research* **38**, 63-69.
- [Hr83] Hartley, R. (1983), *Survey of algorithms for vector optimisation problems*, Multi-Objective Decision Making, Academic Press, London.
- [Hr85] Hartley, R. (1985), *Linear multiple objective programming*, Mathematics of Multi Objective Optimization, Springer-Verlag, 157-177.
- [HrSh78] Horowitz, E. and Sahni, S. (1978), *Fundamentals of Computer Algorithms*, Pitman.
- [HrTh99] Horst, R. and Thoai, N. (1999), Maximizing a concave function over the efficient or weakly-efficient set, *European Journal of Operational Research* **117**, 239-252.
- [HrTuy96] Horst, R. and Tuy, H. (1996), *Global Optimization: Deterministic approaches, 3rd Edition*, Springer.
- [HwMs79] Hwang, C. and Masud, A. (1979), *Multiple Objective Decision Making- Methods and Applications: A State of the Art Survey*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 164, Berlin: Springer-Verlag.
- [IgTh84] Ignizio, J. and Thomas, L. (1984), An enhanced conversion scheme for lexicographic, multiobjective integer programs, *European Journal of Operational Research* **18**, 57-61.
- [Is74] Isermann, H. (1974), Proper efficiency and the linear vector maximum problem, *Operations Research* **22**, 189-191.
- [Is76] Isermann, H. (1976), Existence and duality in multiple objective linear programming, Thiriez, H. and Zionts, S. (ed.), *Multiple Criteria Decision Making*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 130, Berlin: Springer-Verlag, 64-75.

- [Is77a] Isermann, H. (1977), The enumeration of the set of all efficient solutions for a linear multiple objective program, *Operational Research Quarterly* **28**, No. 3, 711-725.
- [Is77b] Isermann, H. (1977), The relevance of duality in multiple objective linear programming, *TIMS Studies in the Management Sciences* **6**, 241-262.
- [Is78a] Isermann, H. (1978), Duality in multiple objective linear programming, Zions, S. (ed.), *Multiple Criteria Problem Solving, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, No. 155, Berlin: Springer-Verlag, 274-285.
- [Is78b] Isermann, H. (1978), On some relations between a dual pair of multiple objective linear programs, *Zeitschrift für Operations Research* **22**, 33-41.
- [Is79] Isermann, H. (1979), The enumeration of all efficient solutions for a linear multiple objective transportation problem, *Naval Research Logistics Quarterly* **26**, 123-139.
- [IsSt87] Isermann, H. and Steuer, R. (1987), Computational experience concerning payoff tables and minimum criterion values over the efficient set, *European Journal of Operational Research* **33**, 91 -97.
- [Jh83] Jahn, J. (1983), Duality in vector optimization, *Mathematical Programming* **25**, 343-353.
- [Jh97] Jahn, J. (1997), On the determination of minimal facets and edges of a polyhedral set, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* **6**, 17-24.
- [Jr01a] Jorge, J. (2001), A bilinear algorithm for optimizing a linear function over the efficient set of a multiple objective linear programming problem, to appear.
- [Jr01b] Jorge, J. (2001), Estimaciones sobre proximidad entre las soluciones eficientes del problema de programación multiobjetivo lineal entero y las de su relajación lineal, Actas del XXVI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa.
- [Jr01c] Jorge, J. (2001), Maximal descriptor set characterizations of efficient faces in multiple objective linear programming, to appear.
- [Jr01d] Jorge, J. (2001), Un estudio de la eficiencia completa en programación lineal multiobjetivo, Actas del XXVI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa.

- [Jr02a] Jorge, J. (2002), Characterizing complete weak efficiency in multiple objective linear programming, Paper Presented at the 5th International Conference on Operations Research, Havana.
- [Jr02b] Jorge, J. (2002), Identifying faces of a polyhedron, Paper Presented at the 5th International Conference on Operations Research, Havana.
- [Jr02c] Jorge, J. (2002), On weakly efficient bounds for multiple objective programming problems, Paper Presented at the 5th International Conference on Operations Research, Havana.
- [Jr92] Jorge, J. (1992), *Aspectos Metodológicos y Computacionales de la Optimización Multiobjetivo. El Caso Lineal*, Memoria de Licenciatura, DEIOC, Universidad de La Laguna.
- [JrGn01a] Jorge, J. and González-Martín, C. (2001), A theory of efficient bounds for multiple objective mathematical programs, to appear.
- [JrGn01b] Jorge, J. and González-Martín, C. (2001), Characterizing the efficiency of a face incident at a degenerate vertex in multiple objective linear programming, to appear.
- [JrGn01c] Jorge, J. and González-Martín, C. (2001), Testing for efficient faces incident at a nondegenerate vertex in multiple objective linear programming, to appear.
- [Kh91] Kuhn, H. (1991), Nonlinear programming: A historical note, Lenstra, J., Rinnooy Kan, A. and Schrijver, A. (eds.), *History of Mathematical Programming, A Collection of Personal Reminiscences*, North Holland, 82-96.
- [KhFj89] Khang, D. and Fujiwara, O. (1989), A new algorithm to find all vertices of a polytope, *Operations Research Letters* **8**, 261-264.
- [KhTc51] Kuhn, H. and Tucker, A. (1951), Nonlinear programming, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, 481-492.
- [Kk85] Kok, M. (1985), Scalarization and the interface with decision makers in interactive multi objective linear programming, *Mathematics of Multi Objective Optimization*, Springer-Verlag, 433-438.
- [KlHn82] Klein, D. and Hannan, E. (1982), An algorithm for the multiple objective integer linear programming problem, *European Journal of Operational Research* **9**, 378-385.
- [KLTZ83] Karwan, M., Lofti, V., Telgen, J. and Zionts, S. (1983), *Redundancy in Mathematical Programming*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 206, Berlin: Springer-Verlag.

- [Krn74] Kornbluth, J. (1974) Duality, indifference and sensitivity analysis in multiple objective linear programming, *Operational Research Quarterly* **25**, 599-614.
- [Krn85] Kornbluth, J. (1985), Shadow prices in multiple objective linear programming, *Journal of the Operational Research Society* **36**, No. 12, 1095-1101.
- [Krn86] Kornbluth, J. (1986), On the use of multiple objective linear programming algorithms to solve problems with fractional objectives, *European Journal of Operational Research* **23**, 78-81.
- [KrnSt80] Kornbluth, J. and Steuer, R. (1980), On computing the set of all weakly efficient vertices in multiple objective linear fractional programming, Fandel, G. and Gal, T. (eds.), *Multiple Criteria Decision Making: Theory and Application*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 177, Berlin: Springer-Verlag, 189-202.
- [KrNV93] Karaivanova, J., Narula, S. and Vassilev, V. (1993), An interactive procedure for multiple objective integer linear programming problems, *European Journal of Operational Research* **68**, 344-351.
- [KvCr92] Kouvelis, P. and Carlson, R. (1992), Total unimodularity applications in bi-objective discrete optimization, *Operations Research Letters* **11**, 61-65.
- [KZVR85] Karwan, M., Zionts, S., Villareal, B. and Ramesh, R. (1985), An improved interactive multicriteria integer programming algorithm, Haimes, Y. and Chankong, V. (eds.), *Decision Making with Multiple Objectives*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 242, Berlin: Springer-Verlag, 261-271.
- [KzYc82] Kiziltan, G. and Yucaoglu, E. (1982), An algorithm for bicriterion linear programming, *European Journal of Operational Research* **10**, 406-411.
- [KzYc83] Kiziltan, G. and Yucaoglu, E. (1983), An algorithm for multiobjective zero-one linear programming, *Management Science* **29**, No. 12, 1444-1453.
- [Lee78] Lee, S. (1978), Interactive integer goal programming: Methods and application, Zionts, S. (ed.), *Multiple Criteria Problem Solving*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 155, Berlin: Springer-Verlag, 362-383.
- [Lin76] Lin, J. (1976), Maximal vectors and multi-objective optimization, *Journal of Optimization Theory and Applications* **18**, No. 1, 41-64.

- [LTWW84] Lowe, T., Thisse, J., Ward, J. and Wendell, R. (1984), On efficient solutions to multiple objective mathematical programs, *Management Science* **11**, 1346-1349.
- [McFg00] Michalewicz, Z. and Fogel, D.(2000), *How to Solve it: Modern Heuristics*, Berlin: Springer.
- [Mn69] Mangasarian, O. (1969), *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill.
- [Mr83] Murty, K. (1983), *Linear programming*, John Wiley & Sons.
- [Mr85] Murty, K. (1985), Faces of a polyhedron, *Mathematical Programming Study* **24**, 30-42.
- [MrCh95] Murty, K. and Chung, S. (1995), Segments in enumerating faces, *Mathematical Programming* **70**, 27-45.
- [MrLb80] Morse, J. and Lieb, E. (1980), Flexibility and rigidity in multicriterion linear programming, Fandel, G. and Gal, T. (eds.), *Multiple Criteria Decision Making: Theory and Application*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 177, Berlin: Springer-Verlag, 238-251.
- [MrMr99] Moreno, M. and Moreno, J. (1999), *Heurísticas en Optimización*, Canarias: Dirección General de Universidades.
- [MrOv92] Marchi, E. and Oviedo, J. (1992), Lexicographic optimality in the multiple objective linear programming: The nucleolar solution, *European Journal of Operational Research* **57**, 355-359.
- [MrPr97] Mármol, A. and Puerto, J. (1997), Special cases of the tolerance approach in multiobjective linear programming, *European Journal of Operational Research* **98**, 610-616.
- [Mrs80] Morse, J. (1980), Reducing the size of the nondominated set: Pruning by clustering, *Computers and Operations Research* **7**, 55-66.
- [MrSl86] Marcotte, O. and Soland, R. (1986), An interactive branch-and-bound algorithm for multiple criteria optimization, *Management Science* **32**, No. 1, 61-75.
- [Mt73] Mattheiss, T. (1973), An algorithm for determining irrelevant constraints and all vertices in systems of linear inequalities, *Operations Research* **21**, 247-260.
- [MtRb80] Mattheiss, T. and Rubin, D. (1980), A survey and comparison of methods for finding all vertices of convex polyhedral sets, *Mathematics of Operations Research* **5**, No. 2, 167-185.

- [MtYr93] Metev, B. and Yordanova, I. (1993), Use of reference points for MOLP problems analysis, *European Journal of Operational Research* **68**, 374-378.
- [MvDA98] Mavrotas, G., Diakoulaki, D. and Assimacopoulos, D. (1998), Bounding MOLP objective functions: effect on efficient set size, *Journal of the Operational Research Society* **49**, 549-557.
- [MvDk98] Mavrotas, G. and Diakoulaki, D. (1998), A branch and bound algorithm for mixed zero-one multiple objective linear programming, *European Journal of Operational Research* **107**, 530-541.
- [Nc78] Naccache, P. (1978), Connectedness of the set of nondominated outcomes in multicriteria optimization, *Journal of Optimization Theory and Applications* **25**, 459-467.
- [Ng93] Niggemeier, M. (1993), Degeneracy in integer linear optimization problems: A selected bibliography, *Annals of Operations Research* **46**, 195-202.
- [NmWl88] Nemhauser, G. and Wolsey, L. (1988), *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons.
- [Nw82] Nieuwenhuis, J. (1982), Some results about nondominated solutions, *Journal of Optimization Theory and Applications* **36**, No. 2, 289-301.
- [Ph72] Philip, J. (1972), Algorithms for the vector maximization problem, *Mathematical Programming* **2**, 207-229.
- [Ph76] Philip, J. (1976), An algorithm for combined quadratic and multiobjective programming, Thiriez, H. and Zionts, S. (eds.), *Multiple Criteria Decision Making, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, No. 130, Berlin: Springer-Verlag, 35-52.
- [Ph77] Philip, J. (1977), Vector Maximization at a degenerate vertex, *Mathematical Programming* **13**, 357-359.
- [Pr84] Pearl, J. (1984), *Heuristics: Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving*, Addison Wesley.
- [Pr94] Provan, J. (1994), Efficient enumeration of the vertices of polyhedra associated with network LP's, *Mathematical Programming* **63**, 47-64.
- [PrFr98] Puerto, J. and Fernández, F. (1998), Pareto-optimality in classical inventory problems, *Naval Research Logistics* **45**, 83-98.
- [PrKr92] Prasad, S. and Karwan, M. (1992), A note on solving bicriteria linear programming problems using single criteria software, *Computers Ops. Res.* **19**, 169-173.

- [RASG98] Ramos, R., Alonso, S., Sicilia, J. and González, C. (1998), The problem of the optimal biobjective spanning tree, *European Journal of Operational Research* **111**, 617-628.
- [Rc70] Rockafellar, R. (1970), *Convex analysis*, Princeton University Press.
- [Rd77] Rödder, W. (1977), A generalized saddlepoint theory, *European Journal of Operational Research* **1**, 55-59.
- [Rd82] Reid, J. (1982), A sparsity-exploiting variant of the Bartels-Golub decomposition for linear programming bases, *Mathematical Programming* **24**, 55-69.
- [RhWb84] Rhode, R. and Weber, R. (1984), The range of the efficient frontier in multiple objective linear programming, *Mathematical Programming* **28**, 84-95.
- [Rm93] Romero, C. (1993), *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones*, Alianza Editorial.
- [RmZK86] Ramesh, R., Zionts, S. and Karwan, M. (1986), A class of practical interactive branch and bound algorithms for multicriteria integer programming, *European Journal of Operational Research* **26**, 161-172.
- [RmZK89] Ramesh, R., Zionts, S. and Karwan, M. (1989), Preference structure representation using convex cones in multicriteria integer programming, *Management Science* **35**, 1092-1105.
- [Rn92] Ringuest, J. (1992), *Multiobjective Optimization: Behavioral and Computational Considerations*, Kluwer Academic Publishers.
- [RRCS99] Ramos, R., Ramos, M., Colebrook, M. and Sicilia, J. (1999), Locating a facility on a network with multiple median-type objectives, *Annals of Operations Research* **86**, 221-235.
- [Rs86] Rasmussen, L. (1986), Zero-one programming with multiple criteria, *European Journal of Operational Research* **26**, 83-95.
- [RvRd88] Reeves, G. and Reid, R. (1988), Minimum values over the efficient set in multiple objective decision making, *European Journal of Operational Research* **36**, 334-338.
- [Sc86] Schrijver, A. (1986), *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons.
- [Sd01] Sedeño-Noda, A. (2001), *Nuevos Algoritmos y Mejoras Computacionales para Problemas de Flujos en Redes*, Tesis Doctoral, DEIOC, Universidad de La Laguna.

- [SdGn01] Sedeño-Noda, A. and González-Martín, C. (2001), An algorithm for the biobjective integer minimum cost flow problem, *Computers and Operations Research* **28**, 139-156.
- [Sh75] Shapiro, J. (1975), Multiple criteria public investment decision making by mixed integer programming, Thiriez, H. and Zionts, S. (eds.), *Multiple Criteria Decision Making, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, No. 130, Berlin: Springer-Verlag, 170-181.
- [ShRv91] Shin, W. and Ravindran, A. (1991), Interactive multiple objective optimization: Survey I--Continuous case, *Computers and Operations Research* **18**, 97-114
- [Sl91] Solanki, R. (1991), Generating the noninferior set in mixed integer biobjective linear programs: An application to a location problem, , *Computers and Operations Research* **18**, 1-15.
- [SIAC93] Solanki, R., Appino, P. and Cohon, J. (1993), Approximating the noninferior set in multiobjective linear programming problems, *European Journal of Operational Research* **68**, 356-373.
- [SlCh89] Solanki, R. and Cohon, J. (1989), Approximating the noninferior set in linear biobjective programs using multiparametric decomposition, *European Journal of Operational Research* **41**, 355-366.
- [Sm96] Som, R. (1996), *Practical Sampling Techniques, Second Edition, Revised and Expanded*, Dekker.
- [Sr86] Serafini, P. (1986), Some considerations about computational complexity for multi objective combinatorial problems, *Recent advances and historical development of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 294, Berlin: Springer-Verlag, 222-232.
- [St00] Stroustrup, B. (2000), *The C++ Programming Language, Spetial Edition*, Addison Wesley.
- [St76a] Steuer, R. (1976), A five phase method procedure for implementing a vector-maximum algorithm for multiple objective linear programming problems, Thiriez, H. and Zionts, S. (eds.), *Multiple Criteria Decision Making, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, No. 130, Berlin: Springer-Verlag, 159-169.
- [St76b] Steuer, R. (1976), Multiple objective linear programming with interval criterion weights, *Management Science* **23**, No. 3, 305-316.

- [St78] Steuer, R. (1978), Vector-maximum gradient cone contraction techniques, Zionts, S. (ed.), *Multiple Criteria Problem Solving*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 155, Berlin: Springer-Verlag, 462-481.
- [St86] Steuer, R. (1986), *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*, John Wiley & Sons.
- [St89] Steuer, R. (1989), *ADBASE Multiple-Objective Linear Programming Package*, University of Georgia, Athens, Georgia.
- [St94] Steuer, R. (1994), Random problem generation and the computation of efficient extreme points in multiple objective linear programming, *Computational Optimization and Applications* **3**, 333-347.
- [StDS91] Strijbosch, L., Doorne, A. and Selen, W. (1991), A simplified MOLP algorithm: The MOLP-S procedure, *Computers Ops. Res.* **18**, 709-716.
- [Stn80] Standish, T. (1980), *Data Structure Techniques*, Addison Wesley.
- [StPr98] Steuer, R. and Piercy, C. (1998), Cone decomposition for the solution of efficient extreme points in parallel, Haimes, Y. and Steuer, R. (eds.), *Research and Practice in Multiple Criteria Decision Making*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 487, Berlin: Springer-Verlag, 369-380.
- [StVS91] Strijbosch, L., Van Doorne, A. and Selen, W. (1991), A simplified MOLP algorithm: The MOLP-S procedure, *Computers and Operations Research* **18**, 709-716.
- [SwNT85] Sawaragi, Y., Nakayama, H. and Tanino, T. (1985), *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press.
- [Sy96] Sayin, S. (1996), An algorithm based on facial decomposition for finding the efficient set in multiple objective linear programming, *Operations Research Letters* **19**, 87-94.
- [TgKn86] Teghem, J. and Kunsch, P. (1986), A survey of techniques for finding efficient solutions to multi-objective integer linear programming, *Asia-Pacific Journal of operational Research* **3**, 95-108.
- [Th88] Thieu, T. (1988), A note on the solution of bilinear problems by reduction to concave minimization, *Mathematical Programming* **41**, 249-260.
- [ThSw92] Thulasiraman, K. and Swamy, M. (1992), *Graphs: Theory and Algorithms*, John Wiley and Sons.

- [ThTZ66] Thompson, G. Tongue, F. and Zionts, S. (1966), Techniques for removing nonbinding constraints and extraneous variables from linear programming problems, *Management Science* **12**, No. 7, 588-608.
- [Tl80] Telgen, J. (1980), *Redundancy and Linear programs*, Mathematical Centre Tracts 137.
- [TnSw79] Tanino, T. and Sawaragi, Y. (1979), Duality theory in multiobjective programming, *Journal of Optimization Theory and Applications* **27**, 509-529.
- [TuCh92] Tung, C. and Chew, K. (1992), A multicriteria Pareto-optimal path algorithm, *European Journal of Operational Research* **62**, 203-209.
- [UITg94] Ulungu, E. and Teghem, J. (1994), Multi-objective combinatorial optimization problems: A survey, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* **3**, 83-104.
- [VlKr81a] Villareal, B. and Karwan, M. (1981), An interactive dynamic Programming approach to multicriteria discrete programming, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **81**, 524-544.
- [VlKr81b] Villareal, B. and Karwan, M. (1981), Multicriteria integer programming: A (hybrid) dynamic programming recursive approach, *Mathematical Programming* **21**, 204-223.
- [VlKZ80] Villareal, B., Karwan, M. and Zionts, S. (1980), An interactive branch and bound procedure for multicriterion integer linear programming, Fandel, G. and Gal, T. (eds.), *Multiple Criteria Decision Making: Theory and Application*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 177, Berlin: Springer-Verlag, 448-467.
- [WcZh97] Wiecek, M. and Zhang, H. (1997), A parallel algorithm for multiple objective linear programs, *Computational Optimization and Applications* **8**, 41-56.
- [Wh82] White, D. (1982), The set of efficient solutions for multiple objective shortest path problems, *Computers and Operations Research* **9**, 101-107.
- [Wh83] White, D. (1983), A branch and bound method for multi-objective boolean problems, in *Multi-Objective Decision Making*, Edited by S. French, R. Hartley, L. C. Thomas and D. J. White, Academic press, London.
- [Wh84] White, D. (1984), A branch and bound method for multi-objective boolean problems, *European Journal of Operational Research* **15**, 126-130.

- [Wh91] White, D. (1991), A characterisation of the feasible set of objective function vectors in linear multiple objective problems, *European Journal of Operational Research* **52**, 361-366.
- [WIED90] Wilamowsky, Y. Epstein, S. and Dickman, B. (1990), Optimization in multiple-objective linear programming problems with pre-emptive priorities, *Journal of the Operational Research Society* **41**, 351-356.
- [WnLee77] Wendell, R. and Lee, D. (1977), Efficiency in multiple objective optimization problems, *Mathematical Programming* **12**, 406-414.
- [Ws85] Weistroffer, H. (1985), Careful usage of pessimistic values is needed in multiple objectives optimization, *Operations Research Letters* **4**, 23-25.
- [YmTI98] Yamada, S., Tanino, T. and Inuiguchi, M. (1998), An outer approximation method for optimization over the efficient set, Haimes, Y. and Steuer, R. (eds.), *Research and Practice in Multiple Criteria Decision Making*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 487, Berlin: Springer-Verlag, 196-207.
- [Yu74] Yu, P. (1974), Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives, *Journal of Optimization Theory and Applications* **14**, No. 3, 319-377.
- [Yu85] Yu, P. (1985), *Multiple-Criteria Decision Making*, Plenum Press, New York.
- [YuZI75] Yu, P. and Zeleny, M. (1975), The set of all nondominated solutions in linear cases and a multicriteria simplex method, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **49**, 430-468.
- [YuZI76] Yu, P. and Zeleny, M. (1976), Linear multiparametric programming by multicriteria simplex method, *Management Science* **23**, No 2, 159-170.
- [Zg98] Ziegler, G. (1998), *Lectures on Polytopes*, Second Edition, Springer.
- [ZI74] Zeleny, M. (1974), *Linear Multiobjective Programming*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 95, Berlin: Springer-Verlag.
- [ZI82] Zeleny, M. (1982), *Multiple Criteria Decision Making*, New York: McGraw-Hill.
- [Zn77] Zionts, S. (1977), Integer linear programming with multiple objectives, *Annals of Discrete Mathematics* **1**, 551-562.

- [Zn85] Zions, S. (1985), Multiple criteria mathematical programming: An overview and several approaches, *Mathematics of Multi Objective Optimization*, Springer-Verlag, 227-273.
- [ZnWl76] Zions, S. and Wallenius, J. (1976), An interactive programming method for solving the multiple criteria problem, *Management Science* **22**, 652-663.
- [ZnWl80] Zions, S. and Wallenius, J. (1980), Identifying efficient vectors: Some theory and computational results, *Operations Research* **28**, 785-793.
- [Zr93] Zörnig, P. (1993), A theory of degeneracy graphs, *Annals of Operations Research* **47**, 541-556.

