

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

**Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución
de problemas de matemáticas, bien y mal definidos.
Un estudio con alumnos del primer ciclo
de la ESO y maestros en formación**

Autor: Noda Herrera, María Aurelia

**Directores: Martín Socas Robayna
y Josefa Hernández Domínguez**

Departamento de Análisis Matemático

D. MARTÍN M. SOCAS ROBAYNA, Catedrático de E.U. de Didáctica de las Matemáticas y DÑA. JOSEFA HERNÁNDEZ DOMÍNGUEZ, Titular de E.U. de Didáctica de las Matemáticas.

CERTIFICAN:

Que la presente memoria titulada **“ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS Y COGNITIVOS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS, BIEN Y MAL DEFINIDOS. UN ESTUDIO CON ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ESO Y MAESTROS EN FORMACIÓN”**, ha sido realizada bajo la dirección de los que suscriben, por la Licenciada M^a. Aurelia Noda Herrera, y que constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste a los efectos oportunos, firman la presente en La Laguna, a 14 de noviembre de 2000.

**A MI MADRE POR DARME LA VIDA
Y A MI PADRE POR ENSEÑARME A SOBREVIVIR**

AGRADECIMIENTOS

Deseo reconocer con sumo gusto mi gratitud a las siguientes personas. A D. Martín Socas Robayna por su exquisita dirección, sus conocimientos y labor investigativa en Didáctica de las Matemáticas y que sin su guía, este trabajo no hubiera visto la luz. A Dña. Josefa Hernández Domínguez por su magnífica dirección, ayuda y calidad humana, que transmite sosiego y levanta el ánimo en los momentos de decaimiento, lo que ha hecho posible la culminación de esta memoria. A D. Fernando Pérez González por su perseverancia y empuje para que, la que suscribe, iniciase la labor investigativa que ha hecho posible la realización de este trabajo. A Dña. Mercedes Palarea Medina por su labor de corrección, cuyo resultado ha hecho que esta memoria sea más legible. A todas las compañeras y compañeros del departamento y en especial a los del área de Didáctica de las Matemáticas, que siempre ayudan, critican y estimulan. A mis hijos, Félix y Débora, por comprender mis *ausencias*, y muy especialmente a Paco, él sabe todo lo que le debo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	I
CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO Y DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	1
1.1 EL CAMPO DE ESTUDIO DE LA INVESTIGACIÓN.	3
1.2 LOS PROBLEMAS Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS.	7
1.2.1 <i>Un acercamiento a la problemática de los problemas no rutinarios.</i>	15
1.3 INVESTIGACIONES SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.	29
1.3.1 <i>Investigaciones sobre la resolución de problemas no rutinarios.</i>	32
1.4 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.	40
CAPÍTULO 2: FUNDAMENTOS TEÓRICOS. MARCO CONCEPTUAL.	43
2.1 INTRODUCCIÓN.	45
2.2 PROBLEMAS DE ENCONTRAR “BIEN Y MAL DEFINIDOS”.....	45
2.2.1 <i>Nociones preliminares.</i>	45
2.2.2 <i>Modelo de Competencia para los problemas de encontrar.</i>	47
2.2.3 <i>Modelo de Competencia para los problemas de encontrar bien y mal definidos.</i>	49
2.3 MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL PARA EL ESTUDIO.	59
2.3.1 <i>Fases en la resolución de problemas.</i>	59
2.3.2 <i>Esquemas de análisis para observar la actuación de los alumnos en la resolución de problemas.</i>	66
2.3.3 <i>Análisis de las justificaciones</i>	70
2.3.4 <i>Unidades de análisis de la investigación.</i>	75

CAPÍTULO 3: DISEÑO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	79
3.1 INTRODUCCIÓN.	81
3.2 DISEÑO GENERAL Y ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN.	81
3.2.1 <i>Estudios pilotos.</i>	83
3.2.2 <i>Estudios definitivos.</i>	94
3.3 ENTREVISTAS A LOS ALUMNOS	101
3.3.1 <i>Descripción de las entrevistas.</i>	101
3.3.2 <i>Descripción de los protocolos.</i>	101
3.3.3 <i>Selección de los alumnos.</i>	102
3.3.4 <i>Desarrollo de las entrevistas.</i>	103
3.4 DISEÑO DEL CUESTIONARIOS DEFINITIVO.....	103
CAPÍTULO 4: ESTUDIO PILOTO	115
4.1 INTRODUCCIÓN.	117
4.2 FASE I DEL ESTUDIO PILOTO.	117
4.2.1 <i>Resultados globales.</i>	118
4.2.2 <i>Análisis de datos</i>	121
4.2.3 <i>Discusión y consideraciones.</i>	128
4.3 FASE II DEL ESTUDIO PILOTO.	133
4.3.1 <i>Resultados globales.</i>	133
4.3.2 <i>Análisis de datos.</i>	140
4.3.3 <i>Discusión y consideraciones de la segunda prueba.</i>	158
4.4. FASE III DEL ESTUDIO PILOTO.	163
4.4.1 <i>Resultados globales.</i>	164
4.4.2 <i>Análisis de datos.</i>	176
4.4.3. <i>Discusión y consideraciones del tercer estudio piloto.</i>	210
4.5 FASE IV DEL ESTUDIO PILOTO.	217
4.5.1 <i>Resultados globales.</i>	218
4.5.2 <i>Discusión y Consideraciones.</i>	219

CAPÍTULO 5: ESTUDIO DEFINITIVO: ALUMNOS DEL CENTRO SUPERIOR DE EDUCACIÓN.....	221
5.1 INTRODUCCIÓN.....	223
5.2 ESTUDIOS DEFINITIVOS: ALUMNOS DEL CSE.....	223
5.2.1 <i>Resultados globales</i>	224
5.2.2 <i>Análisis de datos</i>	236
5.2.3 <i>Discusión y consideraciones</i>	307
CAPÍTULO 6: ESTUDIO DEFINITIVO: ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA.....	327
6.1 INTRODUCCIÓN.....	329
6.2 ESTUDIOS DEFINITIVOS CON ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA.....	329
6.2.1 <i>Prueba videograbada</i>	330
6.2.1.1 <i>Resultados globales</i>	330
6.2.1.2 <i>Análisis de datos</i>	342
6.2.1.3 <i>Discusión y consideraciones</i>	376
6.2.2 <i>Prueba escrita</i>	392
6.2.2.1 <i>Resultados globales</i>	392
6.2.2.2 <i>Análisis de datos</i>	402
6.2.2.3 <i>Discusión y consideraciones</i>	428
CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO.....	443
7.1 ESQUEMA GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN: OBJETIVOS.....	445
7.2 CONCLUSIONES GENERALES RESPECTO A LOS OBJETIVOS.....	446
7.3 CONCLUSIONES GENERALES.....	459
7.3.1 <i>Respecto a la metodología e instrumentos utilizados</i>	459
7.3.2 <i>Respecto a los estudios específicos sobre la resolución de problemas de encontrar bien y mal definidos</i>	460
7.4 PERSPECTIVAS FUTURAS.....	463
BIBLIOGRAFÍA.....	465

INTRODUCCIÓN

“Mientras iba a St. Ives
Hallé a un hombre con siete esposas.
Cada esposa tenía siete sacos,
Cada saco tenía siete gatos,
Cada gato tenía siete violines.
Violines, gatos, sacos, esposas,
¿Cuántos eran los que iban a St. Ives?”

(Adivinanza anglosajona del siglo XVIII)

Esta memoria se dedica a la descripción de una investigación acerca del comportamiento de alumnos del primer ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) y alumnos de Formación de Maestros del Centro Superior de Educación (CSE), cuando se enfrentan a la tarea de resolver problemas no habituales hasta ahora en los libros escolares y en la práctica diaria del aula. La amplitud del tema ha hecho que centremos este trabajo en un tipo de problemas que hemos denominado: *“Problemas de encontrar bien y mal definidos”*.

El planteamiento y la resolución de problemas ha sido y es uno de los objetivos prioritarios de la Matemática. La resolución de problemas es un tema central en la construcción del conocimiento matemático y constituye una actividad cognitiva básica, que ha sido reconocida como esencial por la teoría y la práctica educativa. Por ello no nos puede extrañar que este tema haya sido y siga siendo tema de numerosas investigaciones. Éstas aumentan cuando en el año 1980 el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en su Agenda for Action propone este tópico como eje de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, considerándolo como la primera de las diez áreas de habilidades básicas.

El objeto de esta investigación posee, por tanto, un interés desde el punto de vista curricular, ya que, como se señala en diversas

publicaciones, entre las cuales citaremos: An Agenda for Action (NCTM, 1980); Association of Teachers of Mathematics (ATM, 1985); National Council of Supervisors of Mathematics de EEUU (Carl, 1989); Diseño Curricular Base del Área de Matemáticas para la Enseñanza Primaria (6-12), en la Nueva Reforma del Sistema Educativo Español (MEC 1989) y National Council of Teachers of Mathematics de EEUU a través de los Estándares (NCTM, 1989) y de los Principios y Estándares (NCTM, 2000), la resolución de problemas es el eje de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

El trabajo de la autora en el campo de la investigación sobre la resolución de problemas de Matemáticas comienza al incorporarse, como docente, al Área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna. Una de las líneas de investigación existente, en ese momento, en dicha Área, era la de los problemas verbales aritméticos, abordada, entre otros, por Socas Robayna, M. M. y Hernández Domínguez, J., a la cual se incorporó.

Las primeras cuestiones planteadas estaban relacionadas con el fracaso de los alumnos en la resolución de problemas: ¿Por qué hay alumnos que no logran resolver un problema y, sin embargo, muestran un conocimiento correcto de la teoría, están interesados por aprender y resuelven sin dificultad ejercicios estándar? ¿Por qué muchos alumnos, ante la tarea de resolver un problema, lo primero que buscan es la operación o fórmula que les permita, con todos los datos del problema, obtener un resultado que dé respuesta al objetivo pedido? ¿Quizás hay falta de una reflexión cualitativa previa?, o, dicho de otro modo, ¿El operativismo mecánico con el que se abordan habitualmente los problemas, es quizás debido a que la orientación habitual de la resolución de problemas suele impulsar el manejo abstracto de fórmulas, buscando ecuaciones que relacionen datos e incógnitas y poniéndose a realizar

cálculos inmediatamente? ¿Sería conveniente comenzar por un estudio cualitativo de la situación, intentando acotar y definir de manera precisa el problema, expresando con claridad qué es concretamente lo que se pide, precisando y explicitando las condiciones que se consideran imperantes en la situación abordada, como hacen habitualmente los expertos ante un verdadero problema? Recordemos a este respecto, las palabras de Einstein (Gil Pérez, 1997):

Ningún científico piensa con fórmulas. Antes que el científico comience a calcular debe tener en su cerebro el curso de los razonamientos. Estos últimos, en la mayoría de los casos, pueden ser expuestos con palabras sencillas. Los cálculos y las fórmulas constituyen el paso siguiente.

Estas reflexiones nos conducen a plantearnos nuevas cuestiones: ¿Podría ocurrir que los estudiantes introduzcan ideas “erróneas” cuando formulan hipótesis? ¿Constituiría esto una manera de sacar a la luz y tratar dichas ideas, que serían puestas en cuestión por los resultados obtenidos, permitiendo su modificación? ¿Plantear situaciones problema que se presten a la necesidad de hacer este tipo de reflexiones previas, ayudaría a mejorar la capacidad para resolver problemas?

Estas cuestiones planteadas, más la idea de que el trabajo con problemas “no rutinarios o abiertos” y los procesos que implican, hizo que decidiéramos emprender la investigación que presentamos en esta memoria, sobre problemas “bien y mal definidos”.

De esta manera, se plantea como propósito general de esta investigación, analizar y describir los comportamientos de los resolutores frente a problemas de encontrar bien y mal definidos en contextos diferentes (aritmético, algebraico y geométrico), analizando fundamentalmente la fase de comprensión de la situación problema,

observando cómo identifican los resolutores las situaciones problema, cómo actúan sobre las condiciones y/o el objetivo, qué relaciones establecen entre las condiciones y el objetivo, qué recursos utilizan para justificar sus actuaciones, cómo conviven en el contexto escolar situaciones problema bien y mal definidas, etc.

Para presentar este trabajo, dividimos la memoria en 7 capítulos.

En el CAPÍTULO 1, presentamos el planteamiento general de la investigación.

En los primeros apartados exponemos dónde se sitúa nuestra investigación, así como un análisis de la noción de problema, su significado y caracterización, y una revisión de investigaciones relacionadas con nuestro tema, que nos van a permitir conformar nuestro Marco Teórico Conceptual.

Los últimos apartados se dedican a delimitar el problema de investigación, formulando de manera concreta los objetivos del mismo.

En el CAPÍTULO 2 se exponen los fundamentos teóricos que apoyan la investigación.

La distribución del capítulo se organiza en dos partes: una dedicada al estudio epistemológico y otra al estudio cognitivo.

En la primera parte describimos el Modelo de Competencia para los problemas de encontrar bien y mal definidos que son objeto de nuestra investigación, el cual nos permite elaborar una clasificación formal de los mismos.

En la segunda parte del capítulo, exponemos el Marco Teórico Conceptual del estudio, describiendo las categorías de análisis así como la construcción de un esquema de análisis para la observación de los

alumnos, basado en el esquema de Schoenfeld, y un sistema de categorías de análisis de las justificaciones empleadas.

El CAPÍTULO 3 se dedica al diseño general y a la metodología de la investigación.

En una primera parte hacemos una descripción del diseño general de la investigación y de las distintas etapas que lo conforman, así como de las fases en que se han desarrollado las distintas etapas. Describimos las entrevistas realizadas, sus protocolos y su relación con las unidades de análisis.

Finalmente, el capítulo presenta los cuestionarios utilizados en la investigación y la construcción de los mismos.

El CAPÍTULO 4 presenta el análisis de los datos de los estudios pilotos, con alumnos del Centro Superior de Educación (CSE) y alumnos del primer ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO).

Los CAPÍTULOS 5 y 6 muestran el análisis de los datos de los estudios definitivos con alumnos del Centro Superior de Educación (CSE) y del primer ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), respectivamente.

En el CAPÍTULO 7 exponemos las conclusiones generales de nuestro trabajo, así como las cuestiones abiertas que esperamos abordar en posteriores trabajos de investigación.

Finalizamos la presentación de esta memoria con las referencias bibliográficas utilizadas en la misma.

Completa la memoria un volumen de anexos, donde se recogen los cuestionarios, las transcripciones de las entrevistas videograbadas, los instrumentos de análisis y los datos de las distintas pruebas.

Terminamos esta introducción señalando que varias partes de esta memoria han sido publicadas o están pendientes de publicación en revistas y actas de congresos como indicamos a continuación.

En Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (1996) y Socas, M. M., Hernández, J. y Noda, A. (1997, 1998a y 1998b), se recogen revisiones de la situación actual de la investigación en resolución de problemas aritméticos, aportando sugerencias didácticas para el aula, y se describe la construcción de un modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, que se extiende, a partir del esquema partes-todo, al Modelo de Competencia Formal de problemas de encontrar bien y mal definidos.

En Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (1998b, 1999b, 1999d y 2000b) se presentan las principales ideas que organizan el Modelo de Competencia Formal de problemas de encontrar bien y mal definidos y su relación con el esquema de análisis.

En Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (1999b, 2000a y 2000b) y Socas, M. M., Hernández, J. y Noda, A. (2000) se exponen algunas de las principales ideas del Esquema de análisis para la observación de las actuaciones de los resolutores en la fase de preparación de la resolución de problemas de encontrar bien y mal definidos, y algunos de los resultados obtenidos con respecto a los recursos utilizados por los resolutores para justificar sus actuaciones cuando resuelven problemas de encontrar bien y mal definidos.

En Hernández, J., Noda, A. y Socas, M. M. (1996) y en Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (1997, 1998a, 1999b y 1999c) se recogen algunos de los resultados de los estudios pilotos.

En Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (2000a y 2000c) se presentan algunos de los resultados de los estudios definitivos.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO Y DELIMITACIÓN DEL

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

- **EL CAMPO DE ESTUDIO DE LA INVESTIGACIÓN**

- **LOS PROBLEMAS Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS**
 - **UN ACERCAMIENTO A LA PROBLEMÁTICA DE LOS PROBLEMAS NO RUTINARIOS**

- **INVESTIGACIONES SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**
 - **INVESTIGACIONES SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS**

DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 EL CAMPO DE ESTUDIO DE LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo se sitúa en el campo de la resolución de problemas de matemáticas en el sistema escolar.

La resolución de problemas matemáticos es reconocida, como la actividad cognitiva más importante en esta materia, tanto por la teoría como por la práctica educativa en Matemáticas. Por ello, siempre ha sido el tema central en Matemáticas y también en otras disciplinas científicas. Cuando hablamos de resolver problemas en el contexto tradicional de nuestra escuela, estamos pensando en problemas de matemáticas o en problemas científicos, que son problemas bien definidos, bien estructurados o cerrados y excluimos los no científicos o cotidianos que son problemas del mundo real o de las ciencias sociales, que por lo general son problemas mal definidos, mal estructurados o abiertos, cuya resolución requiere "toma de decisiones" de diversos tipos para definirlos bien y darles una estructuración adecuada que permita vislumbrar alguna solución.

Observamos, que la resolución de problemas "rutinarios" o "bien definidos" o "bien estructurados" o "cerrados", aparece en los currículos de las áreas de tipo científico de las distintas etapas educativas, y ha sido y es extensamente investigada, mientras que los problemas "no rutinarios" o "mal definidos" o "mal estructurados" o "abiertos", que son en general problemas cotidianos, no tienen una presencia significativa en los currículos, al no tener cabida ni en las ciencias sociales, que tienen un carácter más descriptivo y narrativo, ni en las matemáticas, ni en las otras disciplinas científicas, que se ocupan de los problemas bien definidos y estructurados.

En estos últimos años, la resolución de problemas "mal definidos" o "no rutinarios" o "abiertos" ha tomado un interés específico tanto desde el

punto de vista de la instrucción (NCTM, 1991 y MEC, 1989), como del de la investigación (Silver, 1995; Stacey, 1995; Pehkonen, 1995; Verschaffel y De Corte, 1995, 1996). Estos problemas y sus procesos implicados son centrales en la disciplina matemática y en la naturaleza del pensamiento matemático, tal como ocurre en la matemática en sí misma y en la aplicación de la matemática para resolver problemas aplicados. Los diferentes usos de los problemas mal definidos, mal estructurados o abiertos, en la instrucción y en la evaluación, y los procesos cognitivos y metacognitivos asociados a la resolución de estos problemas, son aspectos emergentes de la investigación.

Destacado inicialmente el énfasis que la resolución de problemas tiene para la matemática y el sistema escolar, debemos afirmar, igualmente, que la investigación en la resolución de problemas de matemáticas se mueve en un amplio abanico de posibilidades que van desde consideraciones cognitivas que identifican la “resolución de problemas” con la “cognición” (Mayer, 1986) hasta consideraciones epistemológicas sobre la noción de problema de matemáticas, o problemas bien o mal definidos, estructurados, etc.

Todo ello sugiere que plantear este trabajo como un estudio de la resolución de problemas de matemáticas en el sistema escolar es un campo excesivamente amplio y heterogéneo que es preciso delimitar. Necesitamos, en suma, determinar cuáles de los estudios posibles queremos abordar y cuáles son los procesos que queremos estudiar, dentro del campo de la resolución de problemas en el sistema escolar.

Para nuestra tarea, queremos señalar que asumimos como programa de investigación el aspecto central indicado por el International Group of the Psychology of Mathematics Education (PME) en 1976, en el que se plantea que la investigación en Educación Matemática no debería

comenzar desde una teoría general y neutral respecto del contenido matemático, y generar de ella una teoría específica para las matemáticas, sino que por el contrario se debería comenzar por el estudio de los “procesos específicos” de cada contenido matemático (Bauersfeld y Skowronek, 1976).

Este planteamiento ha orientado gran número de trabajos de investigación en Educación Matemática desde entonces y es el que adoptamos nosotros en esta investigación.

Actualmente hay un acuerdo general en la comunidad internacional de educadores matemáticos, sobre la necesidad de revisar tanto la educación matemática en general, como la resolución de problemas en particular. Muchas son las preguntas que aún están sin contestar. Hay claramente una necesidad de que la investigación sea mucho más sistemática en esta área, a fin de construir una comprensión coherente de la naturaleza de los procesos de solución asociados con problemas abiertos y del impacto que, el experimentar con estos problemas, puede tener sobre el estudiante que aprende importantes ideas matemáticas.

Dado el alto interés que en la actualidad presenta la resolución de problemas abiertos en la Educación Matemática, es casi seguro el aumento de su uso en la instrucción. Por otra parte, la resolución de los problemas abiertos y los procesos cognitivos asociados a la creación o aplicación de matemáticas, anima tanto a aquéllos cuyo propósito de estudio es la Educación Matemática, como a aquéllos que ven la necesidad de introducir a los estudiantes en el mundo de la cultura y en experiencias de matemática profesional.

Puesto que la mayoría de los estudiantes no llegarán a ser matemáticos profesionales, una educación que los prepare a ser usuarios inteligentes de matemáticas, a fin de resolver problemas de importancia o

de interés para ellos, puede ser mejor que una enseñanza con base exclusiva en actividades de matemáticas profesionales, y la experiencia extensiva con problemas abiertos sería una componente importante de instrucción que apunta en esta dirección (Blum y Niss, 1991).

Surgen entonces nuestras primeras preguntas de investigación: ¿Es realmente útil y consistente la separación entre los problemas científicos y los no científicos o los cotidianos? ¿Debe la escuela centrarse exclusivamente en la enseñanza de problemas científicos? ¿Cómo conviven en el contexto escolar los problemas científicos, los cotidianos y los no científicos? ¿A qué estamos llamando problemas no cotidianos, no rutinarios, abiertos, mal definidos, mal estructurados,...?

Por otra parte, una de las dificultades que experimentan los alumnos en la resolución de problemas escolares, en los que toda la información necesaria para obtener una meta pedida viene dada en el enunciado del problema y donde el fin fundamental de la resolución es la elección de una operación y su ejecución, está relacionada con la no comprensión del enunciado del mismo y con una falta de capacidad para razonar en un problema concreto, además del hecho de que nuestras escuelas inciden fuertemente en los algoritmos y menos en la modelación de procesos cognitivos superiores, tales como el razonamiento y la comprensión conceptual. ¿Qué ocurriría si los resolutores se enfrentaran a problemas donde la información dada es insuficiente o hay información no necesaria? ¿Se potenciaría el nivel de razonamiento y la comprensión conceptual? ¿Sería un paso previo al tratamiento de verdaderos problemas de investigación?

Parece razonable pensar que un diseño instruccional innovador en resolución de problemas que incorpore los problemas “mal definidos” como parte esencial del trabajo en matemáticas, debe facilitar un mejor

desarrollo de ciertas capacidades matemáticas en los estudiantes y fomentar la aceptación de los mismos por los profesores, como parte integrante del currículo escolar.

Se plantea, como propósito general de esta investigación, analizar y describir los comportamientos de alumnos del primer ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) y estudiantes de Maestros en formación, al enfrentarse a problemas de matemáticas “bien y mal definidos”, aquéllos en los que falta o sobra información, no habituales en los libros escolares. Se plantea asimismo observar cómo conviven en el contexto escolar estos problemas con los “tradicionales” o científicos, cómo identifican los alumnos las situaciones planteadas, cómo actúan sobre las condiciones y/o el objetivo, qué relaciones establecen entre ellos, y qué recursos utilizan para justificar sus actuaciones.

1.2 LOS PROBLEMAS Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

A pesar de ser la caracterización de un problema una noción más o menos intuitiva que todos poseemos por estar enfrentándonos constantemente a ellos, el término “problema” ha adolecido tradicionalmente de precisión. Tanto los profesores como los investigadores lo emplean para indicar actividades matemáticas bastante diferentes. Por ejemplo, desde la Educación Matemática, Schoenfeld (1992) afirma que la literatura sobre resolución de problemas de matemáticas es difícil de interpretar, porque “problema” y “resolución de problemas” tienen y han tenido significados variados y, en ocasiones, contradictorios.

Hacemos ahora unas breves consideraciones generales para centrar

este tema¹. Tanto en Psicología como en Matemáticas, han surgido diferentes definiciones que no satisfacen de manera general, por pretender presentarlas desde una teoría general de la resolución de problemas con la intención, en muchos, casos de zanjar la discusión sobre lo que es verdaderamente un problema. Una pretensión de este tipo parece inabordable. Así, las diferentes definiciones que nos encontramos en la literatura van desde las posiciones en las que un problema está caracterizado por el contenido de la tarea o de la situación problema, independientemente del resolutor, como es el caso en Matemáticas, en Lógica Formal o en Inteligencia Artificial, hasta la de la Psicología que se coloca al lado del sujeto independientemente del contenido de la tarea. Una posición intermedia se encuentra en los trabajos en Educación Matemática, donde se enfatiza la necesidad de caracterizar los problemas con referencias tanto al resolutor como a la tarea. Como señala Puig (1993) podemos hablar de un nivel I de análisis de la noción de problema cuando consideramos únicamente al problema, sin relación con el sujeto y sin relación con la institución escolar.

Con relación a la Matemática nos encontramos que la noción de problema es de nivel I y está asociada al contenido de la tarea y significa “hacer” o “construir algo”, y se distingue a veces, de otro tipo de enunciados como los teoremas (en los Elementos de Euclides, por ejemplo).

En el campo de la Psicología, las definiciones de “problema” consideran qué situaciones han de tomarse como problemas, independientemente del contenido de las mismas, definiéndose más qué es “tener un problema” que “problema”, ya que lo que le da carácter de problema está desde la perspectiva del sujeto.

¹ En Puig (1993) y Carrillo (1998), se puede encontrar referencias más detalladas de este párrafo.

Así, encontramos definiciones de problema que modulan explícitamente esos rasgos en función de las teorías psicológicas en las que se enmarcan, desde la perspectiva conductista a la de la psicología de la Gestalt (Greeno, 1978).

Otras definiciones de problema son dadas en términos de relaciones entre estados, ya se expresen éstos respecto al sujeto o al problema, como hace Mayer (1986).

Los intentos de describir los problemas en términos de estados y de operadores que permiten los pasos de un estado a otro, se iniciaron en los años cincuenta. Están sustentados en los trabajos sobre resolución de problemas en el campo de la Inteligencia Artificial, y es la descripción habitual en los modelos psicológicos que conciben a los resolutores como procesadores de información (Newell y Simon, 1972).

Las definiciones mencionadas hasta aquí, son teorías de nivel II, ya que en ellas están presentes el problema y el sujeto.

En el campo de la Inteligencia Artificial, encontramos definiciones de problema en las que se ha hecho desaparecer toda mención al sujeto (Banerji, 1980), de manera que el problema queda caracterizado por una descripción formal del mismo.

En el campo de la Educación Matemática, las definiciones de problema hacen hincapié en que lo que caracteriza a un problema no puede establecerse sin referencia al resolutor, abarcando el término “problema” un abanico que va desde la distinción entre ejercicio y problema de Kantowski (1981), pasando por la “situación problemática” de Borasi (1986), hasta la idea de “pensar matemáticamente” de Schoenfeld (1992).

Por otra parte, el término “resolución de problemas” es igualmente utilizado para actividades muy diversas, que van desde la realización de ejercicios hasta problemas que requieren múltiples procedimientos.

Schoenfeld (1983) o Stanic y Kilpatrick (1988) llegan a reconocer también diferentes significados para la utilización del término “resolución de problemas”. Sin embargo, la “resolución de problemas” es un proceso, o una estrategia metodológica, o un tipo de aprendizaje,... que va mucho más allá de la mera distinción entre problema y ejercicio u otro tipo de actividad a desarrollar en el aula.

Las investigaciones en este tema han seguido las diferentes corrientes psicológicas: el asociacionismo, los teóricos de la Gestalt y las teorías cognitivas.

En las últimas décadas, la psicología cognitiva y educativa ha dirigido sus estudios sobre los procesos implicados en la resolución de problemas. Pérez y Pozo (1994) identifican dos tendencias generales: a) la solución de problemas como habilidades generales y b) la solución de problemas como un proceso específico.

La primera, parte de la idea de que la solución de problemas se basa en la adquisición de estrategias generales, de forma que, una vez adquiridas, pueden aplicarse con pocas restricciones a cualquier tipo de problemas. La segunda, trata de hacer hincapié en que la solución de problemas y su instrucción deben ser abordadas en las áreas y contextos específicos a los que se refieren los problemas.

Situados en el campo escolar, la resolución de problemas puede ser un tipo de aprendizaje matemático, al igual que la memorización simple, el aprendizaje algorítmico y el aprendizaje conceptual (Brown, 1978). Asimismo, la resolución de problemas puede ser vista como una meta u objetivo (Branca, 1980), un proceso o como una destreza básica.

Cuando la resolución de problemas se considera una meta, lo que importa es aprender a resolver problemas, independiente de los

problemas específicos, de procedimientos o métodos. Cuando es interpretada como un proceso, lo que importa son los métodos, procedimientos y estrategias puestos en juego. Cuando es considerada como una destreza básica, se considera que los estudiantes, en general, deben adquirir destreza en el enfrentamiento a problemas rutinarios, dejando el abordaje de verdaderos problemas a los alumnos más avanzados.

De manera más concreta, la resolución de problemas se ha planteado como el objetivo prioritario de la enseñanza de las matemáticas en estas últimas décadas. Basta ojear la importancia que concede a la resolución de problemas el National Council of Teachers of Mathematics de EEUU (NCTM) a través de los Estándares (NCTM, 1989), los Professional Standards (NCTM, 1971) y de los Principios y Estándares (NCTM, 2000).

El NCTM (1989) recomienda que la solución de problemas sea el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas. Continúa en los nuevos Principios y Estándares de 2000, insistiendo en que *“la resolución de problemas es una parte integral de todo aprendizaje matemático”* y propone como orientación en el Estándar de resolución de problemas que todos los problemas de Matemáticas, desde la Educación Infantil a la Secundaria, deben capacitar a los estudiantes para:

- _ *Construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas.*
- _ *Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos.*
- _ *Aplicar y adaptar una variedad de estrategias de resolución de problemas.*
- _ *Controlar y reflexionar sobre los procesos de resolución de problemas de Matemáticas.*

También en 1985, la Association of Teachers of Mathematics (ATM) estableció que la habilidad en resolución de problemas podría y debería reemplazar a la aritmética rutinaria como tema principal en la educación primaria. De forma análoga se expresa el National Council of Supervisors of Mathematics de EEUU (NCSM) (Carl, 1989), situando la resolución de problemas como la primera de las doce componentes de la enseñanza de las matemáticas esenciales para el siglo XXI.

Asimismo, desde el punto de vista de la sociedad, las demandas sociales de reforma para las matemáticas escolares indican, en todos los ámbitos y países, la necesidad de nuevos objetivos—como consecuencia, entre otras, del cambio de una sociedad industrial a una sociedad basada en la información. A modo de ejemplo citamos a Henry Pollak (1987), notable matemático especializado en aplicaciones a la industria, que resumió las exigencias relativas a los conocimientos de matemáticas de los nuevos trabajadores como: ser capaces de plantear problemas con las operaciones adecuadas; conocer técnicas diversas para plantear y resolver problemas; comprender las implicaciones matemáticas de un problema; poder trabajar en grupo sobre un problema; ver la posibilidad de aplicar ideas matemáticas a problemas comunes y complejos; estar preparados para enfrentarse a problemas abiertos ya que la mayoría de los problemas reales no están bien formulados; creer en la utilidad y validez de las matemáticas.

Por otra parte, el NCTM (1989) intenta dar respuesta a las demandas actuales de la sociedad, proponiendo unas directrices para un cambio en la educación matemática, y considerando como un fin general: *“Ser capaces de resolver problemas matemáticos: Es esencial desarrollar en todos los ciudadanos la capacidad de resolver problemas si se quiere que sean ciudadanos productivos. Para desarrollar dicha capacidad, los estudiantes tienen que trabajar sobre problemas que pueden tardar horas,*

días e incluso semanas en resolverse. Aunque algunos pueden ser ejercicios relativamente simples que puedan solucionarse independientemente, otros deberían implicar trabajo en grupos pequeños o una clase entera trabajando en conjunto.

Estos estándares suscriben y promueven la primera recomendación que se hace en An Agenda for Action (NCTM, 1980): *“La resolución de problemas ha de ser el punto de mira de las matemáticas escolares”.*

Con respecto a la resolución de problemas, en general, las recomendaciones van en la dirección de poner más énfasis en la formulación de problemas con diversas estructuras, en el uso de problemas cotidianos, en las aplicaciones, en el estudio de modelos y relaciones, en las estrategias de resolución, en trabajar con problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas, en investigar y formular preguntas a partir de situaciones problema, en representar situaciones de forma verbal, numérica, gráfica, geométrica o simbólica; mientras, sugieren que merece menos atención practicar con problemas rutinarios de un solo paso o con problemas categorizados por tipos.

También en España, los Diseños Curriculares Base (DCB) del Área de Matemáticas para la Enseñanza no Universitaria van en esta dirección. Por ejemplo, el Diseño Curricular Base (DCB) del Área de Matemáticas para la Enseñanza Primaria (6-12), (MEC, 1989), considera la resolución de problemas dentro del currículo de Matemáticas como un contenido prioritario:

“La resolución de problemas dentro del currículo de Matemáticas es un contenido prioritario, porque es un medio de aprendizaje y refuerzo de los demás contenidos, da sentido aplicativo al área y permite la relación entre los distintos bloques de Matemáticas y con las restantes áreas”.

La cita anterior expresa con claridad la importancia que el DCB da a la

resolución de problemas, aspecto que enfatiza igualmente el currículo de Canarias (Consejería de Educación de Canarias, 1993), hincapié que parte, como hemos señalado, de la época de los 80 (NCTM, 1980), que sigue vigente en la actualidad y que cada día son más los educadores que lo asumen plenamente.

La resolución de problemas, como afirma el DCB, es el método más conveniente de aprender Matemáticas; es la aplicación de las Matemáticas a diversas situaciones y favorece el desarrollo y la adquisición de capacidades cognitivas generales.

Ahora bien, la resolución de problemas se ha mostrado siempre como el tópico de mayor dificultad para el alumnado. Esta dificultad puede tener algo inherente a su propia complejidad, pero intuimos que muchas veces ha sido el resultado de unos planteamientos metodológicos inadecuados junto a una falta de motivación.

Múltiples son las sugerencias que aporta el DCB (MEC, 1989):

"En los planteamientos metodológicos se ha de tener en cuenta que el alumno debe desarrollar y perfeccionar sus propias estrategias, a la vez que adquiere otras generales y específicas que le permiten enfrentarse a las nuevas situaciones con probabilidad de éxito. En este sentido se brindará a los niños la oportunidad de familiarizarse con procesos que facilitan la exploración y resolución de problemas como: comprensión y expresión de la situación matemática (verbalización, dramatización, discusión en equipo), extracción de datos y análisis de los mismos, representación en forma gráfica del problema o situación, formulación de conjeturas y verificación de su validez o no, exploración mediante ensayo y error, formulaciones nuevas del problema, comprobación de resultados y comunicación de los mismos. Se hace necesario, asimismo, desarrollar la capacidad de persistir en la

exploración de un problema".

"Los problemas elegidos en la escuela deberán sacarse de situaciones que partan de la realidad de los alumnos, excluyendo enunciados que reproduzcan estereotipos sexistas, que provoquen su interés y que mantengan su atención, y de situaciones imaginadas que sean sugerentes y atractivas para el niño (situaciones de la vida cotidiana del colegio, de la economía familiar, con juegos y juguetes, con deportes...).

Observamos cómo las tendencias curriculares más recientes para la enseñanza de las matemáticas han insistido en la necesidad de situar en un primer plano las capacidades de "orden superior", es decir, las que están ligadas a la identificación y resolución de problemas, al pensamiento crítico y al uso de estrategias metacognitivas.

1.2.1 Un acercamiento a la problemática de los problemas no rutinarios

Más allá de intentar resolver problemas formulados, es común para los matemáticos enunciar sus propios problemas, basados en su interés y experiencia personal, por ello plantear problemas ha sido largamente identificado como un aspecto importante de la actividad matemática y de la investigación intelectual. Por ejemplo, Hadamard (1945) identificó la capacidad para formular problemas de investigación como un indicador de talento matemático excepcional. También, en varios artículos o ponencias de Polya (1954, 1957, 1962), al analizar la resolución de problemas matemáticos, hace referencia directa a aspectos de plantear problemas. Por ejemplo, la sugerencia "piensa un problema afín" se relaciona claramente con el problema planteado. El proceso de plantear nuevos problemas a partir de las soluciones obtenidas de un problema determinado y generar problemas afines que pueden resolverse de maneras similares, se asocian con el "mirar hacia atrás", fase de la

resolución de problemas discutida por Polya. Freudenthal (1973) también señaló al problema planteado como una pieza central de la actividad matemática.

Operando dentro de la propia matemática o intentando aplicar matemáticas a fenómenos, a menudo se asocia el término abierto a situaciones o problemas mal estructurados (Pollak, 1987). De hecho, es frecuente el caso en que aparecen problemas de matemáticas mal definidos, o que provienen en el curso de investigación de modelos y regularidades, y que deben estructurarse antes de poder encontrar una solución; los métodos de solución no se aclaran con frecuencia, y los debates se pueden encauzar sobre lo adecuado de las soluciones propuestas. Además, los problemas matemáticos, frecuentemente, provienen de intentos de generalizar un resultado conocido, representan conjeturas para hipótesis de trabajo, o aparecen como subproblemas generados en la búsqueda de la solución a algún problema mayor (Poincaré, 1948).

En particular, en la disciplina de matemáticas, observamos actividades claramente relacionadas con problemas abiertos, como es el hecho de problemas que han sido tipificados por otros o identificados en la literatura como problemas no resueltos.

Muchos reformadores del currículo han tratado de basar sus sugerencias para la innovación matemática en un acercamiento de la instrucción del aula a las formas auténticas de actividad matemática ("inculturación", Schoenfeld, 1992).

En este sentido los Estándares (NCTM, 1989) señalan:

"Los estudiantes de los grados 9-12 deberían también tener alguna experiencia reconociendo y formulando sus propios problemas, una actividad que es el corazón de hacer matemáticas" (p. 138).

Igualmente, los Estándares Profesionales (NCTM, 1991) también sugieren que una razón de actualidad para promocionar el uso de problemas abiertos en la instrucción de matemáticas, es la variedad de los procesos matemáticos involucrados en la exploración de tales situaciones problema:

"La enseñanza de las Matemáticas desde una perspectiva de resolución de problemas no rutinarios supone más trabajo que con problemas típicos de libros de texto. Implica la noción que la esencia del estudio de las matemáticas es en sí mismo un ejercicio de explorar, conjeturar, examinar y comprobar todos los aspectos de la resolución de problemas. Los estudiantes deberían tener la oportunidad de formular los problemas desde situaciones determinadas y crear nuevos problemas modificando las condiciones dadas en el problema" (p. 95).

Estos Estándares señalan igualmente el vínculo cercano entre el interés particular por los problemas no rutinarios y el interés más general por la resolución de problemas como un foco de atención para la instrucción matemática.

En el mismo sentido, el informe Cockroft (1982) destaca la importancia de la investigación para el estudio y comprensión de las matemáticas, y como éstas pueden emplearse para ampliar los conocimientos y solucionar los problemas de muy diversos campos. Hace hincapié en que es imprescindible estimular a los alumnos a que se planteen cuestiones como: ¿Qué pasaría si ...?, estableciendo debates.

La idea de usar problemas no rutinarios o no habituales en los libros de texto en la matemática de la escuela obligatoria se ha descrito en el currículo de diferentes países, de una manera o de otra.

Por ejemplo, en el DCB del Área de Matemáticas para la Enseñanza Primaria (6-12) (MEC, 1989), se especifica, en el apartado "Orientaciones

específicas”:

[...] Las situaciones problema presentadas pueden ser más o menos complejas, pueden aparecer con datos completos o incompletos, pueden tener una solución o varias, estar presentados de forma gráfica o no, con datos numéricos o sin ellos...

[...] Es interesante proponer problemas abiertos con dificultades crecientes, de manera que sea posible hacer conjeturas, buscar analogías y referirlos a situaciones más generales para que pueda encontrar respuesta a las nuevas situaciones problema que se plantean.

De manera más concreta, los Estándares Curriculares y de Evaluación para la educación matemática (NCTM, 1989) proponen que para desarrollar en los estudiantes la capacidad de “resolver problemas matemáticos”, algunos problemas deben ser abiertos, sin solución única, y otros habrán de ser formulados.

Así, en el estándar 1 (Las Matemáticas como resolución de problemas) del nivel 5-8, y dentro del apartado “Centro de atención y discusión”, se hace hincapié en aspectos como:

_ Las situaciones problema no rutinarias son mucho más amplias en sustancia y perspectiva que los problemas-acertijo aislados. También se diferencian mucho de los enunciados tradicionales que ofrecían un contexto para usar un algoritmo o una fórmula en particular, pero no ofrecían ninguna oportunidad para una verdadera resolución de problemas. Los problemas del mundo real no son ejercicios prefabricados con procedimientos y números de fácil resolución. Aquellas situaciones que permiten a los estudiantes experimentar problemas con números “liosos” o con demasiada o demasiado poca información o que tienen múltiples soluciones, cada una con

consecuencias diferentes, serán los que mejor les preparen para resolver problemas que probablemente lleguen a encontrar en su vida diaria.

_ Los estudiantes han de experimentar situaciones problema que ofrezcan múltiples oportunidades de formular y definir problemas, determinar la información que se necesita, decidir qué métodos utilizar para obtener esta información y determinar unos límites aceptables para las soluciones.

En el estándar 5 de Evaluación ("Evaluación de los alumnos"), se dan pautas para evaluar la capacidad de los alumnos en la resolución de problemas de Matemáticas. Éstas señalan la necesidad de encontrar evidencias en los alumnos que muestren su capacidad para formular problemas, reconocer que falta información que es esencial, es decir, ser capaces de observar si la información que se da es razonable o hace falta alguna información adicional.

Al igual que en USA y España, el uso de problemas abiertos y no rutinarios comienza a emerger en los currículos de Matemáticas de otros países en el ámbito internacional.

Por ejemplo, en el currículum de matemáticas para la escuela comprensiva en Hamburg (Alemania), aproximadamente una quinta parte del tiempo destinado a la enseñanza es de contenido libre, a fin de fomentar el uso de actividades matemáticas (Anon, 1990, citado por Pehkonen, 1995).

En Australia, como señala Stacey (1995), algunos problemas abiertos, por ejemplo en forma de proyectos, se usan en la evaluación desde finales de los años ochenta.

Algunas propuestas innovadoras de instrucción de matemáticas, como el enfoque instructivo del método "What-if", (Brown y Walter, 1983),

introducen la necesidad de que el alumno, a partir de problemas anteriormente resueltos, plantee problemas nuevos variando las condiciones o metas del problema original.

Algunos currículos, como es el de la enseñanza experimental Japonesa, han incluido la noción de “opennes” asociada a los problemas de soluciones múltiples. Este enfoque es conocido como “enseñando un enfoque abierto” o “enseñanza con problemas con final abierto” (Shimada,1977; Hashimoto y Sawada, 1984; Nohda, 1986). En esta propuesta curricular, los estudiantes analizan problemas y métodos de resolución de problemas, mediante el proceso de resolver el problema de alguna manera y luego discutir y evaluar una variedad de métodos de solución desarrollados y presentados por los compañeros de clase.

Tras esta breve revisión acerca de la presencia de los problemas abiertos y no rutinarios en los nuevos enfoques curriculares respecto a la resolución de problemas, observamos una cuestión básica y es que los términos: problemas no rutinarios, abiertos, mal estructurados, mal definidos, mal planteados,... quedan vagamente delimitados. Esto nos llevó a revisar la terminología usada en las tipologías de problemas existentes a fin de adaptarla a nuestro propósito de investigación.

Por todo ello, pasamos a analizar la terminología que hemos venido utilizando desde el principio de este capítulo. Es decir, vamos a presentar una breve tipología de problemas e intentar determinar lo que entendemos por problema abierto, no rutinario, etc.

Comenzamos con las clasificaciones desde el punto de vista matemático y nos encontramos con la de Polya (1962), como la más representativa, que los divide en “*problemas de encontrar*” y “*problemas de probar*”. En un problema de encontrar hay incógnita, datos y condición (el propósito es descubrir la incógnita) y en un problema de probar hay

hipótesis y conclusiones (el propósito es mostrar la veracidad o no de alguna afirmación). Señalaremos además, que aunque la distinción entre el problema de encontrar y el problema de probar es clara, en el proceso de resolución, uno de ellos puede transformarse en uno del otro tipo. Cualquier problema de encontrar se transforma en uno de probar si se hace una conjetura sobre su resultado. Un problema de probar si se delimitan unos objetivos y unas relaciones entre ellos, de manera que la conclusión sea una relación con otro objeto que se toma como incógnita, se transforma en problema de encontrar esa incógnita.

El punto de vista de la Psicología resalta en todas las definiciones de problema como característica esencial, la presencia de un objetivo que queremos alcanzar, apareciendo el problema en sí en el momento en que debemos determinar cómo lograr dicho objetivo. De esta manera la clasificación más extendida en Psicología consiste en organizar los problemas en dos clases: *“bien definidos”* y *“mal definidos”*. En el primer caso, existe un consenso sobre el objetivo o estado final y se considera resuelto cuando el sujeto alcanza dicho estado, por ejemplo resolver una ecuación algebraica o jugar una partida de ajedrez; en el segundo, no existe un consenso sobre el objetivo o estado final, es decir, no se puede determinar la existencia de un único estado final, por ejemplo componer una poesía o cómo luchar contra el desempleo. En los problemas mal definidos, la definición de los objetivos forma parte del problema.

Estas categorías ayudan a establecer diferencias basadas en el grado de definición de los objetivos, pero presentan bastantes inconvenientes ya que la mayoría de las veces no está claro si un problema pertenece a una u otra categoría.

Voss y otros (1983) critican esta clasificación y proponen la utilización de las clasificaciones de Reitman (1965) o Simon (1973), que en esencia

sugieren diferenciar los distintos problemas a través de la caracterización de sus estructuras, mediante las condiciones bajo las cuales se resuelve el problema. De esta manera los organizan en problemas "*bien estructurados*" y "*mal estructurados*", que de hecho, como señala Simon (1973), forman un continuo entre ambos, de manera que muchos problemas mal estructurados pueden convertirse a lo largo de la resolución en problemas bien estructurados.

Reitman (1965) planteó cuatro categorías de problemas según lo bien o mal que estuvieran especificados el "estado inicial" y el "estado final".

Simon (1973), analizando la estructura del problema, distinguió entre problemas "*bien estructurados*" y problemas "*mal estructurados*". Los problemas bien estructurados son aquellos que encontramos en los textos escolares; en ellos, la información necesaria para resolverlos está contenida en el enunciado, las reglas para encontrar la solución correcta son claras y se tienen criterios definidos para verificar la solución. En el otro extremo están los problemas mal estructurados que son similares a los problemas que nos encontramos en la vida diaria.

Una crítica a esta clasificación la encontramos en Frederiksen (1984) que sugirió que la dicotomía entre problemas bien y mal estructurados era demasiado simple para abarcar todas las variantes de la estructura de un problema y propone las siguientes categorías:

Problemas bien estructurados: Están claramente formulados. Se resuelven mediante aplicación de un algoritmo conocido. Se dispone de criterios para comprobar que la solución es correcta.

Problemas estructurados que requieren pensamiento productivo: Similares a los problemas bien estructurados, pero el resolutor tiene que diseñar total o parcialmente el procedimiento de resolución. En general hay que añadir algo que no está inmediatamente aparente en el

problema.

Problemas mal estructurados: Falta de formulación clara. Falta de un procedimiento que garantice la solución. Falta de criterios para determinar cuándo la solución se ha conseguido.

Frederiksen da como ejemplo de problema bien estructurado: "el cálculo del área de un triángulo conocida la longitud de sus lados"; como ejemplo de un problema estructurado que requiere pensamiento productivo, el problema de probar que "si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos e iguales, entonces el otro par de lados es también igual"; y como ejemplo de un problema mal estructurado, el problema de "encontrar todos los caminos posibles de mi casa a la escuela".

Estas clasificaciones de Simon (1973) y de Frederiksen (1984) son también criticadas por Kilpatrick (1987), que señala la falta de distinción entre problemas en los que falta la información para una completa formulación, y, problemas en los que teniendo una completa formulación, el procedimiento de resolución es desconocido.

Por otra parte, en Educación Matemática la mayoría de las clasificaciones están dirigidas a segmentar el continuo que va desde el ejercicio a las situaciones problema.

Entre las más significativas está la de Butts (1980) que establece cinco categorías que van desde el ejercicio al verdadero problema.

Ejercicios de reconocimiento: Resolver, reconocer o recordar una definición o proposición.

Ejercicios de algoritmos: Ejercicios que pueden ser resueltos con un algoritmo, normalmente numérico.

Problemas de aplicación: Problemas formulados en un enunciado concreto, normalmente escrito, que suponen utilizar algún algoritmo

conocido.

Problemas de investigación: Problemas cuyas proposiciones no contienen ninguna estrategia para representar el problema.

Situaciones problemas: Plantear situaciones que puedan requerir soluciones matemáticas.

En esta misma línea están las clasificaciones de Charles y Lester (1982) y Borassi (1986), en las que la inclusión de un problema en una u otra categoría, sólo puede hacerse en función del resolutor.

Otros intentos en Educación Matemática, con un enfoque más curricular, sugieren clasificar los problemas en “rutinarios” y “no rutinarios”.

Verschaffel y De Corte (1996) hacen distinción entre problemas “rutinarios” y “no rutinarios”. Problemas rutinarios son aquellos que se resuelven de una única manera, por medio de una o varias operaciones aritméticas con los números dados en el problema y problemas no rutinarios se consideran cuando el modelo matemático apropiado o la solución, no son obvios ni indiscutibles.

Por otra parte, Pehkonen (1991) intenta conjugar las clasificaciones más significativas de la Psicología Cognitiva y de la Educación Matemática y aboga por la división entre “problemas abiertos” y “problemas cerrados”. Esta distinción la hace según el grado de exactitud de la descripción de las situaciones de partida y llegada. En un problema cerrado, ambas situaciones están cerradas (claramente explicadas). Si la situación de partida y/o la de llegada son abiertas, entonces tenemos un problema abierto.

Tras observar los términos que aparecen en las propuestas curriculares, en la revisión de las tipologías de problemas, y en las diferentes investigaciones existentes, observamos que en muchas

ocasiones se utiliza un mismo término para referirse a situaciones diferentes y, en otras ocasiones, una misma situación es designada con diferentes términos. De manera general y a modo de resumen:

El término “*no rutinario*” es utilizado para referirse: a) Situaciones reales (compras, vacaciones, ...), donde la información, en general, no viene dada sino que hay que buscarla, y las soluciones no presentan en principio una relación directa con operaciones simbólicas sino que hay que relacionar cosas sabidas,.. b) Dada una situación determinada, formular o plantear un problema (NCTM, 1991); c) Dadas una condiciones con datos de más o de menos, modificar las condiciones y plantear un problema (NCTM, 1991); d) Situaciones donde el modelo matemático o las soluciones no son obvias y están condicionadas por el contexto realista de la tarea (Verschaffel y De Corte, 1996).

Por el contrario, el término “*rutinario*” se utiliza para referirse a situaciones habituales en los libros de texto y a situaciones concretas, con los datos necesarios para resolver el problema (no hay que discriminar), las operaciones son las de la aritmética, la solución es única, el proceso de decidir la operación es un proceso de reglas, y el contenido es el aprendido en la escuela en el momento planteado.

El término “*mal definido*” se utiliza para referirse: a) Situaciones en la que no existe un consenso sobre el objetivo o estado final, es decir, no podemos determinar la existencia de un único estado final (por ejemplo “componer una poesía” o “cómo luchar contra el desempleo”) y la definición de los objetivos forma parte del problema (Usado en Psicología); b) Problemas donde el "estado inicial" y/o el "estado final" están mal definidos o especificados (Reitman, 1965).

Por el contrario, el término “*bien definido*” se utiliza para referirse a una situación, en la que existe un consenso sobre el objetivo o estado final y

se considera resuelto cuando el sujeto alcanza dicho estado (En psicología, por ejemplo: “resolver una ecuación algebraica” o “jugar una partida de ajedrez”).

El término “*mal estructurado*” es utilizado para definir: a) Problemas que nos encontramos en la vida diaria. El enunciado no posee la información necesaria para resolverlo, las reglas para encontrar la solución no son claras y no se tienen criterios definidos para verificar la solución (Simon, 1975); b) Problemas en los que la formulación no es clara, no hay un procedimiento que garantice la solución y faltan criterios para determinar cuando la solución se ha conseguido (Frederiksen, 1984).

En cambio, el término “*bien estructurado*” se utiliza para referirse: a) Problemas que encontramos en los textos escolares, en los que la información necesaria para resolverlos está contenida en el enunciado, las reglas para encontrar la solución correcta son claras y se tienen criterios definidos para verificar la solución (Simon, 1975); b) Problemas claramente formulados, que se resuelven mediante aplicación de un algoritmo conocido y en los que se dispone de criterios para comprobar que la solución es correcta (Frederiksen, 1984); c) Problemas bien estructurados que requieren pensamiento productivo, son similares a los problemas bien estructurados, pero el resolutor tiene que diseñar total o parcialmente el procedimiento de resolución. En general hay que añadir algo que no está inmediatamente aparente en el problema.

Finalmente señalamos otra dicotomía usada en la organización de los problemas en el contexto escolar: “*problemas tradicionales*” y “*problemas creativos*” (Craig, 1995). La resolución de problemas tradicionales es el proceso que conduce a la resolución, desde un conjunto de condiciones. Los pasos que van desde las condiciones a la resolución no son conocidos de antemano. Si el que se enfrenta a la situación planteada,

inmediatamente reconoce la solución, la situación no es un problema para él. Es decir, que una situación determinada, puede ser un problema para un individuo y no serlo para otro, dependiendo de si el individuo ha encontrado la solución antes, de si la solución es evidente y de si la situación motiva al individuo a tomar alguna acción para resolver el conjunto determinado de condiciones. Por lo tanto, la resolución de un problema tradicional es un intento individual de vincular dos ítems conocidos, que son las condiciones dadas y el fin deseado, y el uso de diferentes caminos para alcanzar el fin. En cambio, el problema creativo tiene un conjunto conocido de condiciones, pero los medios para lograr el fin deseado y la naturaleza de la solución debe pensarse, es decir, que la resolución de problemas creativos tiene una dimensión añadida: la solución al conjunto de condiciones no es única. El poder elegir entre diferentes soluciones, da oportunidad para considerar y evaluar la calidad de la solución.

Aparte de las dicotomías anteriores, emergen en los trabajos sobre resolución de problemas otros términos: “*Opennes*”, aparece asociado a dos enfoques: a) relacionado con problemas de varias soluciones (Shimada,1977; Hashimoto y Sawada, 1984; Nohda, 1986) y b) y con problemas planteados, donde los estudiantes reformulan problemas matemáticos basados en uno resuelto anteriormente (Hashimoto, 1987).

El término “*problema planteado*” se refiere a la creación de un nuevo problema desde una situación o experiencia. Tal problema planteado puede ocurrir con anterioridad al problema resuelto, como sería el caso de problemas que se generan desde una determinada idea propia o de una situación natural; o puede ocurrir después del problema resuelto, como puede ser el caso de los problemas que se generan a partir de la experiencia de resolver un conjunto de problemas o un problema particular (Silver, 1993).

Pehkonen (1991) utiliza el término problema abierto, para referirse a los problemas donde la situación de partida y/o la situación de meta son abiertas, es decir, no están claramente formuladas.

Algunos educadores de matemáticas usan la palabra "exploratoria" como un sinónimo de "abierto" (Avital, 1992), a fin de evitar la confusión con los problemas de matemáticas aún sin solución (Silver, 1995).

Silver (1995) presenta el término problema abierto con varios significados diferentes. En Matemáticas, el término se usa generalmente para aplicarlo al problema que ha permanecido sin resolver por algún tiempo, es decir, que un problema es "abierto" hasta que alguien encuentre una solución y provoca la clausura del problema (por ejemplo, hasta 1993, el llamado "Último Teorema" de Fermat). En Educación Matemática, sin embargo, el término "problema abierto" se usa frecuentemente con significados algo diferentes: a) Cuando el problema es susceptible de diferentes interpretaciones o respuestas; b) Cuando invita a métodos diferentes de solución; c) Cuando el problema sugiere otros problemas o generalizaciones.

El término "abierto" es también utilizado para referirse a situaciones problema más generales y en algunos casos bien diferentes. Sanz (1989, pp. 227-228), siguiendo la noción de "obra abierta" (Eco, 1984), sugiere que debe verificar dos condiciones: a) [...] *Para cada persona que intenta resolverlo, no presenta de golpe un significado unívoco, tiene ciertas características de ambigüedad que son interpretadas de acuerdo con los códigos disponibles. Esto hace que un mismo problema no sea igual de problemático para personas diferentes* y b) [...] *Ha de tener estructura específica de problema.*

Señala Sanz, que un problema es abierto para un grupo de personas situadas entre dos extremos: los "expertos", para los que no es un

problema pues disponen de esquemas generales en los cuales queda englobado y saben de inmediato cuáles son los procedimientos que conducen a la solución o a demostrar la existencia o inexistencia de posibles soluciones, y los "imposibles o inexpertos", que no conocen el lenguaje en que está expresado el problema ni disponen de códigos para su interpretación.

Junto a los problemas abiertos, es preciso citar los llamados "*investigaciones*", ya que las fronteras entre ambos son difusas. En general, se asocia la resolución de problemas a una actividad encaminada a encontrar una solución a cierto problema, mientras que la investigación es más divergente, tratándose en ella de pensar en estrategias alternativas, indagar sobre lo que sucede si alguna condición cambia, etc.

Por ejemplo, Butts (1980) utiliza el término problemas de investigación, para referirse a problemas cuyas proposiciones no contienen ninguna estrategia para representar el problema.

Pehkonen (1995) pone de manifiesto la similitud de muchos de los términos mencionados, y sugiere el uso del término problema abierto, como una clase "paraguas", que incluye: problema abierto-cerrado, planteamiento de problemas, situaciones de la vida real, campos o secuencias de problemas, problemas sin cuestiones y variaciones de problemas. De esta manera, el problema cerrado es aquél cuyas condiciones y metas están totalmente definidas o explicadas.

1.3 INVESTIGACIONES SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Con relación a las investigaciones en general acerca de la resolución de problemas, la revisión de la literatura indica que tras la euforia de la investigación a principios de los ochenta, se produce un pequeño descenso a finales de esta década. Sin embargo, en la actualidad, ha

vuelto a resurgir el interés por la investigación en la resolución de problemas.

Lester y Garofalo (1982) contribuyen a una formulación clara de los temas clave en la investigación en la resolución de problemas en su obra "Mathematical problem solving. Issues in research". La mayoría de los artículos de este libro fueron presentados en una conferencia en la Universidad de Indiana, en 1981.

Bell, Costello y Küchemann (1983) presentan una amplia revisión de las principales investigaciones sobre Educación Matemática, realizada a petición del "Cockcroft Committee" y cuyas principales conclusiones fueron recogidas en Cockcroft (1982). Entre sus Capítulos, varios abordan la resolución de problemas.

Goldin y McClintock (1984) ofrecen una amplia revisión de las características de las tareas con las cuales se enfrenta un individuo. Aunque califican su exposición de amplia pero incompleta, la dividen en las siguientes categorías: sintaxis, contenido, contexto, estructura de la representación y características heurísticas del problema. *"Este estudio, afirma Goldin, nos permitirá describir la estructura de las competencias en los resolutores de problemas"*, que posteriormente él concreta en su modelo de competencias para resolución de problemas.

Silver (1985) edita un libro con los resultados de un encuentro de casi cuarenta investigadores en la Universidad de San Diego (1983). La conferencia tenía tres objetivos específicos: 1) proveer una valoración actual del estado de la investigación en resolución de problemas desde la perspectiva de la educación matemática; 2) explorar las contribuciones de otros investigadores y otras perspectivas tales como la psicología cognitiva, la resolución de problemas científicos y la inteligencia artificial, y 3) identificar algunas direcciones para la investigación en resolución de

problemas para la siguiente década.

Charles y Silver (1988) analizan los cambios que se han producido a partir del año 1980 en la resolución de problemas, tanto en los currículos como en la investigación. Su opinión es que la investigación en resolución de problemas se ha centrado casi exclusivamente en el análisis y la caracterización de la competencia y el rendimiento en la resolución de los mismos, y que muy poca se ha dirigido hacia la enseñanza y evaluación de dicha resolución.

En los Proceedings del XIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Booker y otros, 1990), celebrado en México, sus editores explican que agruparon los diferentes informes de investigación en cuatro grupos: Aprendizaje de las Matemáticas, Enseñanza de las Matemáticas, Interacción social y Análisis didácticos, señalando explícitamente que no usaron la categoría tradicional de resolución de problemas, porque *“investigaciones recientes han demostrado que la cognición matemática se da en una situación, y la conceptualización específica del dominio representa un papel crucial en el éxito al resolver problemas de matemáticas”*.

En España, los libros de Puig y Cerdán (1988), Maza (1989, 1991a, 1991b, 1991c, 1995), Bermejo (1990), y los trabajos de Castro (1994), Hernández y Socas (1994a, b), Socas y Hernández (1996), Noda, Hernández y Socas (1996), Socas, Hernández y Noda (1997, 1998a, 1998b), hacen revisiones de la situación actual de la investigación en resolución de problemas aritméticos, aportando sugerencias didácticas para el aula, unas veces, y otras, resultados de sus propias investigaciones.

En general, en esta última década podemos encontrar varias líneas de investigación dentro del área de resolución de problemas.

Una primera línea sigue la dirección iniciada por Schoenfeld (1992), que considera la resolución de problemas como una componente importante del pensamiento matemático (Puig, 1993; Castro y otros, 1999).

Una segunda línea está motivada por la introducción en los currículos de problemas reales y problemas aplicados (Lesh, 1997).

La relación de la resolución de problemas con la formación de profesores es otra línea emergente donde destacamos los trabajos realizados en España por Carrillo (1996); Castro y Castro (1996).

Pero destacamos que la formulación o invención de problemas (“problem posing”) se ha convertido en un importante tópico, dentro de la corriente de problemas abiertos o no rutinarios, que es objeto actualmente de numerosas investigaciones como veremos en el apartado siguiente, y dentro de esta línea es donde podemos situar este trabajo.

1.3.1 Investigaciones sobre la resolución de problemas no rutinarios

Aunque amplias investigaciones han sido dirigidas a la enseñanza de resolución de problemas en Matemáticas y a los procesos de resolución, la mayoría consideran problemas con una única solución "cerrada", similares a los problemas normalmente encontrados en libros de texto. Generalmente, dichas investigaciones, carecen de descripciones y análisis de los procesos usados por los estudiantes en la resolución de problemas “mal definidos” o de experimentaciones instructivas que involucren el uso de estos problemas.

A pesar del interés actual por los problemas “mal definidos”, más allá de las descripciones anecdóticas proporcionadas por algunos matemáticos (Hadamard, 1945, Poincaré, 1948), hay pocas investigaciones sobre el uso efectivo de tales problemas en la instrucción

y evaluación. No obstante, algunos análisis de procesos similares han sido llevados a otros campos del conocimiento. Por ejemplo, Reitman (1965) examinó los procesos utilizados por artistas y compositores en gran escala, en el marco de problemas mal estructurados, como la composición musical. Argumentó que la resolución de problemas mal estructurados expone muchas más diferencias en las estructuras de resolución que las expuestas cuando se resuelven problemas bien estructurados. Simon (1973), ampliando el análisis de Reitman sobre el dominio de tareas mal estructuradas, sugirió que aunque había poca diferencia en los procesos requeridos en la resolución de problemas bien o mal estructurados, estos últimos requieren una gama más amplia de procesos en la formulación y resolución del problema y en el reconocimiento de la solución, y que gran parte de la actividad cognitiva en la resolución de tales problemas se dirige a estructurar la tarea.

Una observación similar en lo que concierne a los procesos de formulación y reformulación es presentada por Lesh (1981) en su estudio de los procesos usados por jóvenes en la resolución de problemas matemáticos del mundo real en contextos significativos. En este sentido, un trabajo de Voss y Means (1989), revisa la solución de problemas mal estructurados en las ciencias sociales, problemas donde además de una meta no específica, caben argumentos que más o menos constituyen una solución y que pueden considerarse métodos válidos de solución.

En general, todo el trabajo sobre los problemas mal estructurados ha mostrado que su solución implica la integración de un amplio dominio de tareas y la coordinación de conocimientos con complejos modelos de razonamiento. Así, extrapolando al campo de las Matemáticas, uno podría argumentar que los problemas abiertos proporcionan una fuente rica de experiencias a los estudiantes.

Kilpatrick (1987) revisa la investigación sobre el tema del problema

formulado o problema planteado, y concluye que ha habido poca o ninguna investigación sistemática sobre problemas matemáticos planteados. Una revisión subsiguiente de esta área de investigación es realizada por Silver (1993) que identifica muchas más investigaciones, e intenta organizarlas, pero que alcanzó una conclusión similar: la investigación sobre problemas matemáticos planteados era en su mayor parte no sistemática y no hay aún una investigación científica adecuada basada sobre qué hacer en la instrucción o evaluación.

No obstante, algunas líneas de investigación han obtenido resultados que pueden proveer el apoyo general para el uso de problemas abiertos en la instrucción y ha sugerido enfoques analíticos que pueden ser útiles para el uso de problemas abiertos en la evaluación.

Estas líneas de investigación, sugieren la posibilidad de que los problemas abiertos podrían tener un impacto positivo sobre el estudiante que aprende ideas matemáticas. Por ejemplo, Sweller y sus colaboradores (Sweller, Mawer, y Word, 1983; Owen y Sweller 1985). llevan a cabo una serie de estudios donde contrastan estudiantes que trabajan con problemas con metas específicas (por ejemplo: "el radio de un círculo inscrito en un cuadrado es 6 pulgadas. Encuentra el área del cuadrado") y problemas con metas no específicas (por ejemplo: "el radio de un círculo inscrito en un cuadrado es 6 pulgadas. Averigua todo lo que puedas sobre el cuadrado y el círculo"). Muchos de los estudios de Sweller implican problemas de matemáticas mal estructurados en el dominio de la geometría y trigonometría, y los resultados de estos estudios han indicado, generalmente, que los estudiantes son capaces de aprender las habilidades y conocimientos con más efectividad y eficiencia mediante la experiencia con problemas con meta no específica que con ejercicios tradicionales de metas específicas.

Según Sweller y otros (1983), cuando los estudiantes resuelven

problemas con una meta específica, usan las estrategias generales que son efectivas para resolver los problemas o ejercicios específicos, pero que son menos efectivas para hacer conexiones entre conceptos y procedimientos o para organizar conocimientos. En contraste, los problemas con metas no específicas, aparentemente, ofrecen a los estudiantes más oportunidades para usar estrategias que fomenten establecer relaciones importantes y más sobresalientes, permitiendo, de este modo, desarrollar un conocimiento mejor organizado y habilidades que sean más útiles. Así, extrapolando los hallazgos de Sweller, uno podría pronosticar que a largo plazo, la implementación de problemas con metas no específicas hace que se relacionen con problemas planteados y conjeturar que estas actividades pueden tener un efecto positivo en el conocimiento matemático y en la resolución de problemas.

Silver y Adam (1987) han dado ejemplos que pueden usarse como problemas abiertos en la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. En el nivel secundario, Silver, Kilpatrick y Schlesinger (1990) han dado también numerosos ejemplos de problemas abiertos que invitan a la exploración y comunicación sobre ideas matemáticas. Por ejemplo, proporcionan un ejemplo de un episodio instructivo de aula en que un profesor y sus estudiantes discuten sobre los diversos métodos de solución del siguiente problema bien conocido: "En un corral tengo algunos pollos y algunos conejos. Yo cuento 50 cabezas y 120 patas. ¿Cuántos animales de cada tipo están en el corral?". En este episodio, los estudiantes mostraron y discutieron la validez, generalización y poder de dos enfoques algebraicos, una solución visual y el uso de aproximaciones sucesivas.

Algunas investigaciones relacionan la noción de problema abierto con problemas de métodos múltiples de solución. Encontramos en los trabajos de los japoneses sobre enseñanza del "enfoque abierto" (por ejemplo,

Shimada, 1977; Hashimoto y Sawada, 1984; Nohda, 1986), que se sugiere que las diversas soluciones, si son generadas por un individuo o por una clase entera, pueden compartirse para que todos los estudiantes experimenten una variedad de soluciones de problemas abiertos. Así, de estos trabajos, se podría concluir que los estudiantes pueden desarrollar y comprender soluciones múltiples acerca de problemas de matemáticas, y que esta experiencia puede organizarse en aulas para ayudar y mejorar la instrucción matemática.

Diversos estudios han desarrollado herramientas analíticas que pueden ayudar en la evaluación de la noción de problema abierto asociado con el problema planteado. En algunos estudios sobre problemas planteados, se han usado, para evaluar las respuestas dadas por estudiantes, medidas bastante sencillas. Por ejemplo, en el análisis de estudiantes matemáticamente talentosos, Krutetskii (1976) ha usado como medida de talento excepcional, un problema planteado, en el que se daba una información determinada sin pregunta (por ejemplo: *un alumno compró 2x cuadernos en un almacén, y en otro compró 1,5 veces dicha cantidad como mucho*), para que el estudiante plantee y dé respuesta a una pregunta determinada. Krutetskii argumentó que había un problema que resultaba "natural" desde la información dada, y él encontró que los estudiantes de capacidad alta eran capaces de "ver" este problema y plantearlo directamente; mientras que los de capacidad menor o requerían consejos o eran incapaces de plantear la pregunta. Por otra parte, Ellerton (1986) pedía a los estudiantes que plantearan un problema de matemáticas que fuera difícil de resolver a un amigo. Encontró que los estudiantes "más capaces" plantearon problemas de mayor dificultad (por ejemplo, con números más complejos y requiriendo más operaciones para la solución).

Más recientemente, se han desarrollado planes de evaluación más

complejos para analizar los problemas planteados con futuros profesores (Leung, 1993). Algunos planes de evaluación en Australia y en Europa han incorporado los problemas planteados como tareas de curso o como un requisito de salida (por ejemplo Little, 1993; Stephens y Money, 1993) o han usado tipos de problemas abiertos como parte de evaluaciones de actuación o rendimiento matemático a gran escala (por ejemplo, Kleijne y Schuring, 1993).

Problemas planteados y problemas abiertos son también aspectos destacados en la instrucción de geometría con base en el uso de las herramientas de software de computadora (por ejemplo, "The Geometric Supposers" de Yerushalmy, Chazan y Gordon, 1993).

Dentro de esta línea de investigación cabe destacar los trabajos de los japoneses, de manera más concreta, el "enfoque abierto", que ha sido examinado de manera detallada, así como su impacto en el resultado de los estudiantes.

Es justamente en el International Conference for the Psychology of Mathematics Education celebrado en Japón (PME 17, 1993), donde se discutió el uso de problemas abiertos en las aulas de matemáticas, discusión conducida por Pehkonen, de la Universidad de Helsinki. Una meta de la discusión del PME fue buscar respuestas a la pregunta ¿cuáles son los problemas abiertos?, ya que el grupo de problemas abiertos parecía no estar claro. Durante la discusión, se plantearon varios tipos de problemas: los problemas de investigación, aquellos que hay que replantearlos, situaciones de la vida real, proyectos, sucesiones de problemas, problemas sin pregunta, y variaciones de problema (método "What-if). Pehkonen sugiere, como hemos indicado, el uso del concepto "problema abierto" como una clase de problemas que contiene todas las clases de problemas mencionados. De esta manera, el concepto de "problema abierto" podría explicarse comenzando con su oponente, de

manera que un problema es cerrado si su situación de partida y su meta son cerradas, es decir, están claramente explicadas. Si la situación de partida y/o la situación de meta son abiertas, es decir, no son cerradas, se trata de un problema abierto.

Los problemas utilizados en las matemáticas de la escuela son los problemas cerrados, que no dan cabida al pensamiento creativo.

Exponemos finalmente algunos trabajos destacados en este sentido.

Nohda (1993) comenta algunos de los resultados obtenidos sobre el uso de "problemas abiertos" y trata de aclarar el significado de "las actividades abiertas de matemáticas". Los objetivos para usar y enseñar los problemas abiertos son cultivar y potenciar la creatividad y el pensamiento matemático de los estudiantes.

Silver (1993) considera que los problemas abiertos tienen un interés evidente en la educación matemática.

Stacey (1995) expone ejemplos significativos del uso actual de problemas abiertos en las escuelas de Australia, que se han incorporado a los planes de estudios en el citado país.

En Verschaffel y De Corte (1995), encontramos una investigación sobre el modelo matemático realista, que se caracteriza por generar una cultura de aula, donde la palabra problema se concibe como los ejercicios en el proceso de modelado matemático. Un programa de instrucción experimental se construyó sustituyendo el tradicional concepto de problema por una colección de problemas no rutinarios que fueron diseñados para estimular a los alumnos e involucrarlos en el enfoque de la matemática realista. El programa consistió en cinco unidades de enseñanza/aprendizaje que se relacionaban con dicho enfoque realista.

Los resultados tienden a apoyar la hipótesis de que es posible

desarrollar en los alumnos de la escuela elemental, una disposición hacia el modelado matemático realista.

En Takahashi (1996), encontramos algunas razones para el uso, en ciertas escuelas japonesas, de los problemas abiertos. Indica que la mayoría de los problemas que los maestros proponen a sus estudiantes o que están en los libros de texto tienen una respuesta correcta. Sin embargo, un problema abierto es aquél que tiene varias o muchas respuestas correctas. Hay diferentes razones por las que algunos maestros japoneses utilizan los problemas abiertos. Por un lado, piensan que a muchos estudiantes japoneses no les gusta las matemáticas por el temor a cometer errores delante de otros estudiantes que tienen habilidades diferentes, sin embargo, el problema abierto lo ven como algo más natural, ya que no tienen que preocuparse por las respuestas erróneas. Por otro lado, creen que la resolución de problemas abiertos mejora la actitud de los estudiantes.

Silver y Cai (1996) hacen un análisis sobre la formulación de problemas aritméticos con estudiantes de grado medio, Tortosa y Castro (1997), estudian la invención de problemas a través de situaciones ambientales, mientras que English (1998), investiga sobre el comportamiento de los alumnos frente a la formulación de problemas dentro de contextos tanto formales como informales. Hernández y Socas (2000) analizan el tipo de problemas que los alumnos inventan a partir de una operación aritmética.

Estas líneas de investigación muestran el interés surgido sobre problemas abiertos y su uso en la instrucción y evaluación. Aún, hay claramente una necesidad de que la investigación sea mucho más sistemática en esta área, a fin de construir una comprensión coherente de la naturaleza de los procesos de solución asociados con problemas abiertos y el impacto que puede tener sobre el estudiante que aprende

matemáticas el trabajar con dichos problemas.

1.4 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este apartado, procedemos a delimitar el problema de nuestra investigación formulando, de manera concreta, los objetivos del mismo.

Se plantea, como propósito general de esta investigación, analizar y describir los comportamientos de los resolutores frente a problemas de encontrar, bien y mal definidos, en contextos diferentes (aritmético, algebraico y geométrico).

No se pretende analizar todas las fases de la resolución de un problema bien o mal definido (comprensión, elaboración de un plan, ejecución del plan y comprobación del resultado, Polya, 1957), nos centramos en la fase de comprensión de la situación problema, observando cómo identifican los resolutores las situaciones problema en términos de bien o mal definidas, cómo las caracterizan, cómo actúan sobre las condiciones y/o el objetivo, qué relaciones establecen entre ellos, qué recursos utilizan para justificar sus actuaciones, cómo conviven en el contexto escolar situaciones problema bien y mal definidas, etc.

Los objetivos de esta investigación son expuestos a continuación.

OBJETIVO PRIMERO.

En nuestro trabajo, tras observar las dificultades existentes para hacer clasificaciones precisas de los problemas, ya que muchos de ellos presentan aspectos comunes en las diferentes categorías, surge la necesidad de elaborar unas categorías generales, a modo de modelo de competencia formal, es decir, un modelo formal abstracto de problema que caracteriza una situación ideal en relación o no, con un usuario ideal, que permita, al menos a nivel “local”, una organización que incluya todos

los tipos de problemas que queremos tratar, diferenciándolos unos de otros y caracterizándolos.

Por ello, el primer objetivo considera aspectos epistemológicos, y lo definimos de la siguiente manera:

Presentar una propuesta de organización conceptual de los términos usados. Elaborar un Modelo de Competencia formal.

Para este primer objetivo, la hipótesis de nuestro estudio es:

Pensamos que la elaboración de unas categorías generales que incluyan todos los tipos de problemas que se dan en la segmentación del continuo, no es posible.

Creemos que disponer de un modelo formal abstracto de problema, que caracteriza una situación ideal, con relación o no a un usuario ideal, permite al menos a nivel “local”, una organización que incluye todos los tipos de problemas que queremos tratar, diferenciándolos unos de otros y caracterizándolos y además, que nos sirve de referencia para analizar la ejecución de los resolutores.

OBJETIVO SEGUNDO.

Decidimos analizar el comportamiento de los resolutores, frente a problemas de encontrar (Polya, 1962) bien y mal definidos, en los contextos aritmético, algebraico y geométrico, buscando la existencia de comportamientos regulares e invariantes, observando para ello, cómo identifican los resolutores las situaciones planteadas en términos de bien o mal definidas, cómo las caracterizan, qué relaciones establecen entre las condiciones y el objetivo, qué transformaciones realizan sobre ellas y en qué transforman el problema planteado.

Esto nos ha llevado a formular el segundo objetivo, que tiene que ver con aspectos cognitivos, y lo definimos de la siguiente manera:

Estudiar la naturaleza de las actuaciones de los resolutores en la fase de preparación, frente a problemas de encontrar bien y mal definidos, determinando los comportamientos regulares e invariantes.

OBJETIVO TERCERO.

Como consecuencia de los objetivos anteriores, surge la necesidad de estudiar las justificaciones que utilizan los resolutores en sus actuaciones, en la fase de comprensión, que nos llevó a determinar un sistema de categorías de análisis de las justificaciones en dos direcciones: justificaciones tendentes a la validación y justificaciones tendentes a la refutación.

De esta manera, nuestro tercer objetivo queda formulado como:

Estudiar las justificaciones que utilizan los alumnos en la fase de comprensión, para validar y refutar los problemas de encontrar bien y mal definidos. Establecer categorías de análisis de las justificaciones utilizadas.

Estos objetivos generales suponen de hecho, abordar tres estudios diferenciados que tienen en sí mismos identidad propia, pero que están fuertemente relacionados, donde se concretan y particularizan cada uno de los objetivos anteriores.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

- INTRODUCCIÓN

- PROBLEMAS DE ENCONTRAR BIEN Y MAL DEFINIDOS

- NOCIONES PRELIMINARES
- MODELO DE COMPETENCIA PARA LOS PROBLEMAS DE ENCONTRAR
- MODELO DE COMPETENCIA PARA LOS PROBLEMAS DE ENCONTRAR BIEN Y MAL DEFINIDOS

- MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL PARA ESTE ESTUDIO

- FASES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
- ESQUEMAS DE ANÁLISIS PARA OBSERVAR LA ACTUACIÓN DE LOS ALUMNOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
- ANÁLISIS DE LAS JUSTIFICACIONES
- UNIDADES DE ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos los fundamentos teóricos, así como el marco teórico conceptual en el que desarrollamos el trabajo.

En un primer apartado analizamos las dificultades encontradas al revisar la literatura sobre los problemas bien y mal definidos y hacemos una propuesta de modelo de competencia que nos permita una caracterización de los mismos.

A continuación, analizamos distintos modelos de resolución de problemas para elaborar un esquema de análisis que permita observar la actuación de los alumnos. De este análisis surge el estudio de las justificaciones que utilizan los resolutores en sus actuaciones y que fue aportando datos para construir un sistema de categorías de las mismas.

Terminamos el capítulo detallando las unidades de análisis de nuestra investigación.

2.2 PROBLEMAS DE ENCONTRAR “BIEN Y MAL DEFINIDOS”

2.2.1 Nociones preliminares

Tras la revisión realizada (apartado 1.2.1, capítulo 1), sobre el empleo de términos como: problemas no rutinarios, abiertos, mal estructurados, mal definidos, planteados..., en diferentes investigaciones y en las propuestas curriculares, observamos que dichos términos quedan vagamente delimitados, ya que en muchas ocasiones se utiliza un mismo término para referirse a situaciones diferentes y en otras ocasiones, una misma situación es designada con diferentes términos. Veamos algunos ejemplos.

De los Estándares (1989) tomamos el siguiente problema:

Tienes el siguiente cambio: 8 monedas de una peseta, 5 monedas de

un duro, 11 monedas de dos duros, 5 monedas de cinco duros. Los artículos siguientes están a la venta: Caja de cereales a 160 ptas. Vaso de leche a 40 ptas. Un póster a 90 ptas. Una pelota a 120 ptas. Si compro una caja de cereales, ¿cuántos vasos de leche puedo comprar?

De Silver, Kilpatrick y Schlesinger (1990), tomamos el siguiente problema:

En un corral tengo algunos pollos y algunos conejos. Yo cuento 50 cabezas y 120 patas. ¿Cuántos animales de cada tipo están en el corral?

El primer problema es para los autores de los Estándares un problema abierto y no rutinario. Sin embargo es un problema de cálculo sencillo y solución única. La condición de abierto y no rutinario está asociada al contexto, es decir, se trata de un problema de la vida real.

El segundo problema es para los autores un problema abierto en el sentido que permite diferentes métodos de resolución (enfoque algebraico, una solución visual y el uso de aproximaciones sucesivas). Sin embargo, para Craig (1995) sería un problema tradicional no un problema creativo, ya que para ser de esta naturaleza habría que plantearlo de esta manera: *En un corral tengo algunos pollos y algunos conejos. Yo cuento 120 patas. ¿Cuántos animales de cada tipo están en el corral?*

Observamos como un mismo problema o situación problema, puede ser identificado de formas diferentes dependiendo de los autores y de sus interpretaciones.

En nuestra investigación surgió la necesidad de caracterizar con mayor precisión los tipos de problemas o situaciones problema con los que queríamos trabajar.

2.2.2 Modelo de Competencia para los problemas de encontrar

Como hemos comentado, la resolución de problemas “bien definidos” o “bien estructurados” aparece en los currículos de las áreas de tipo científico y ha sido y es extensamente investigada. Sin embargo, los problemas “mal definidos” o “mal estructurados” no tienen una presencia significativa ni en las matemáticas ni en las otras disciplinas científicas que se ocupan de los mismos.

Como hemos analizado, la noción de problema se ha intentado caracterizar tanto desde las Matemáticas (Polya, 1962), la Psicología (Newell y Simon, 1972) como desde la Educación Matemática (Schoenfeld, 1985). Igualmente, múltiples han sido los intentos por organizarlos y clasificarlos (Reitman, 1965; Simon, 1973; Butts, 1980; Charles y Lester, 1982; Frederiksen, 1984; Borasi, 1986; Pehkonen 1991, 1995).

Señalan Greeno (1978) y Kilpatrick (1987) que existen muchas dificultades para hacer clasificaciones precisas de los problemas, ya que muchos de ellos presentan aspectos comunes en las diferentes categorías.

Sin embargo, nuestros trabajos sobre resolución de problemas, al incorporar problemas como el ya clásico: ¿cuál es la edad del capitán?, (Baruk, 1985), y de otros tipos, nos llevó a pensar en la necesidad de elaborar unas categorías generales, a modo de modelo de competencia, es decir, un modelo formal abstracto de problema que caracteriza una situación ideal en relación o no con un usuario ideal, que permita, al menos a nivel “local”, una organización que incluya todos los tipos de problemas que queríamos tratar.

El análisis que nos propusimos era el de caracterizar lo que entendíamos por problema de encontrar, considerando únicamente al

problema en su organización lógico formal de los objetos implicados, es decir, conceptos, relaciones y procedimientos que le caracterizan (nivel I). Como hemos indicado con anterioridad, es claro que otras caracterizaciones o tipologías de problemas toman en cuenta al resolutor o alumno (nivel II), algunos también consideran las intenciones educativas implícitas (nivel III) (Puig, 1993).

En esta caracterización “local” consideramos los “problemas de encontrar” de la clasificación de Polya (1962, p.168) y adaptamos algunos elementos utilizados en la definición de espacio problema de Newell y Simon (1972). Señalamos que, mientras estos autores se refieren en su definición a las diferentes representaciones cognitivas del problema que hace el resolutor a partir del entorno de la tarea, nosotros hablamos de un “modelo de competencia formal” y de las representaciones semióticas posibles de las soluciones del problema.

De esta manera, un problema de encontrar queda determinado por la terna $\langle E, O, R \rangle$ donde E es el conjunto de estados semióticos, O el conjunto de operadores y R el conjunto de soluciones, siendo $E = \{E_0, E_1, \dots, E_n\}$, con $E_n \in R$, y E_0 el estado inicial, formado por el conjunto de los datos dados.

Caracterizamos el *Problema de encontrar*, cuando en la terna anterior: $E_0 \neq \emptyset \wedge \exists (E_i)_{i \in \{0,1,\dots,n\}} \wedge E_0 \subset E_i, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ [$(E_i)_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$ representa una sucesión de estados incluidos en E].

Los problemas de encontrar pueden ser caracterizados como propios e impropios. Consideremos $E_0 = \{e_1, e_2, \dots, e_{j-1}, e_j, e_{j+1}, \dots, e_i\}$.

Un problema de encontrar propio, queda caracterizado por: $\forall e_j \in E_0 \wedge e_j \neq f(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_i)$, es decir, cuando en el estado inicial no

hay datos redundantes, f está determinado por elementos de O .

Un problema de encontrar impropio, queda caracterizado por: $\exists e_j \in E_0 \wedge e_j = f(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_i)$, es decir, cuando en el estado inicial hay datos redundantes, incluso la propia solución.

2.2.3 Modelo de Competencia para los problemas de encontrar bien y mal definidos

Una vez caracterizados los problemas de encontrar, decidimos llamarles “bien definidos” por su correspondencia con algunos problemas del ámbito escolar y decidimos que al negar las condiciones del problema de encontrar bien definido, las situaciones restantes obtenidas, las llamaremos problemas de encontrar mal definidos.

De esta manera, negando las condiciones del problema de encontrar bien definido, podemos caracterizar los problemas de encontrar mal definidos (MD) como $[E_0 = \emptyset] \vee [\text{no existe } (E_i)_{i \in \{0,1,\dots,n\}}] \vee [E_0 \not\subset E_i, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}]$, es decir, $\exists e \in E_0 \wedge \forall i \in \{1,2,\dots,n\}, e \notin E_i$.

Partiendo de esta caracterización, nos encontramos con siete posibles categorías de problemas de encontrar mal definidos:

Categoría I: Cuando $E_0 = \emptyset$

Categoría II: Cuando no existe $(E_i)_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$

Categoría III: Cuando $E_0 \not\subset E_i, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$, es decir,

$$\exists e \in E_0 \wedge \forall i \in \{1,2,\dots,n\}, e \notin E_i$$

Categoría IV: Cuando $[E_0 = \emptyset] \wedge [\text{no existe } (E_i)_{i \in \{0,1,\dots,n\}}]$.

Categoría V: Cuando $[\text{no existe } (E_i)_{i \in \{0,1,\dots,n\}}] \wedge [E_0 \not\subset E_i, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}]$, es decir, $\exists e \in E_0 \wedge \forall i \in \{1,2,\dots,n\}, e \notin E_i$.

Categoría VI: Cuando $[E_0 = \emptyset] \wedge [E_0 \not\subset E_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}]$, es decir,

$$\exists e \in E_0 \wedge \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, e \notin E_i].$$

Categoría VII: Cuando $[E_0 = \emptyset] \wedge [\text{no existe } (E_i)_{i \in \{0, 1, \dots, n\}}] \wedge$

$$[E_0 \not\subset E_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}], \text{ es decir,}$$

$$\exists e \in E_0 \wedge \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, e \notin E_i].$$

Las categorías I y IV son equivalentes, y las categorías V, VI y VII están caracterizadas por propiedades contradictorias y son descartadas por imposibles.

Por lo tanto, observamos tres tipos diferentes de problemas de encontrar mal definidos que tienen sentido y son los correspondientes a las categorías I, II y III, que denominamos en adelante, tipo T_1 , T_2 y T_3 , respectivamente.

Los problemas de tipos T_1 y T_2 serán también caracterizados porque faltan datos, y los de tipo T_3 , porque sobran datos. De esta manera tenemos:

Tipo T_1 (faltan todos los datos), cuando $[E_0 = \emptyset]$.

Tipo T_2 (faltan datos), cuando $[E_0 \neq \emptyset] \wedge [\text{no existe } (E_i)_{i \in \{0, 1, \dots, n\}}]$.

Tipo T_3 (sobran datos), cuando $[E_0 \neq \emptyset] \wedge [\exists (E_i)_{i \in \{0, 1, \dots, n\}}] \wedge$

$[E_0 \not\subset E_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}]$, es decir, $\exists e \in E_0 \wedge \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, e \notin E_i]$.

Hemos de aclarar dos cuestiones previas, la primera respecto al origen de los problemas de encontrar mal definidos y la segunda respecto a su denominación.

Hemos caracterizado los problemas de encontrar mal definidos mediante la negación de las propiedades de los problemas de encontrar

bien definidos. Este será el uso que hagamos de esta caracterización, es decir, siempre partimos de un problema bien definido propio y a partir de él construimos el correspondiente problema mal definido, por lo tanto, el camino que nos conduce del problema bien definido al problema mal definido está perfectamente determinado y el problema mal definido está también perfectamente caracterizado.

La segunda cuestión es su denominación. Ante las diferentes alternativas, los nombres de rutinarios y no rutinarios o tradicionales y creativos no procedían obviamente por su propia naturaleza. La terminología de estructurados y no estructurados es inadecuada al considerar que tanto los bien definidos como los mal definidos tienen una estructura determinada. Lo de abierto y cerrado no encajaba en ninguna de las organizaciones conocidas. Optamos finalmente por la denominación de bien y mal definidos por no existir una contradicción explícita con su uso en la literatura, al referirnos nosotros a una clase particular de situaciones: los problemas de encontrar.

Retomamos de nuevo la primera cuestión dado el interés que tiene en el trabajo. Como hemos indicado, en el modelo de competencia, los problemas de encontrar mal definidos se construyen explícitamente con un estado inicial E_0' que se obtiene modificando el estado inicial E_0 de los problemas de encontrar bien definidos. Esto nos permite una organización más detallada de los problemas de encontrar mal definidos caracterizada por las modificaciones hechas al estado E_0 . Pasamos a analizar estas situaciones.

Si partimos de un problema bien definido propio, nos encontramos los siguientes casos (en lo que sigue, siempre consideramos el problema de encontrar bien definido propio con $E_0 = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i\}$):

- 1) Eliminamos todos los datos de E_0 y añadimos datos nuevos:

$$E_0 = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i\}$$

$$E_0' = \{e_{i+1}, \dots, e_{i+h}\}$$

de donde: $E_0 \not\subset E_0'$ ($R \not\subset E_0'$)

2) Eliminamos algún dato de E_0 :

$$E_0 = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i\}$$

$$E_0' = \{e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_i\}$$

de donde: $E_0 \not\subset E_0'$ ($R \not\subset E_0'$)

3) Eliminamos todos los datos de E_0 :

$$E_0' = \emptyset,$$

de donde: $E_0 \not\subset E_0'$ ($R \not\subset E_0'$)

4) Eliminamos algún dato de E_0 y añadimos otros:

$$E_0 = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i\}$$

$$E_0' = \{e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_i, e_{i+1}\}$$

de donde: $E_0 \not\subset E_0'$ ($R \not\subset E_0'$)

5) Eliminamos algún dato de E_0 y añadimos la solución:

$$E_0 = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i\}$$

$$E_0' = \{e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_i, R\}$$

de donde: $E_0 \not\subset E_0'$ ($R \subset E_0'$)

6) Eliminamos algún dato de E_0 y añadimos datos y la solución:

$$E_0 = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i\}$$

$$E_0' = \{e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_i, e_{i+1}, R\}$$

de donde: $E_0 \not\subset E_0'$ ($R \subset E_0'$)

7) Añadimos algún dato a E_0 :

$$E_0 = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i\}$$

$$E_0' = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i, e_{i+1}\}$$

de donde: $E_0 \subset E_0'$ ($R \not\subset E_0'$)

8) Añadimos algún dato y la solución a E_0 :

$$E_0 = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i\}$$

$$E_0' = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i, e_{i+1}, R\}$$

de donde: $E_0 \subset E_0'$ ($R \subset E_0'$)

Análogamente, si partimos de un problema bien definido impropio, nos encontramos con muchos más casos, ya que tenemos que considerar los impropios por tener datos innecesarios, por tener la solución incluida y por tener datos innecesarios y la solución incluida, situaciones que no analizamos expresamente en este apartado.

Resumiendo las situaciones anteriores, podemos indicar que los problemas “mal definidos porque faltan datos”, tipo T_2 , se caracterizan por $E_0 \not\subset E_0'$, y se construyen eliminando datos o eliminando y añadiendo datos de E_0 . De esta manera, distinguimos: los que resultan de eliminar algunos

datos de E_0 ($E_0' \subset E_0 \wedge E_0' \neq \emptyset$, tipo T₂A), los que resultan de eliminar y añadir datos, respectivamente de E_0 ($E_0' \not\subset E_0 \wedge E_0' \neq \emptyset$), pudiendo encontrarnos en este caso, con que $E_0 \cap E_0' \neq \emptyset$ (tipo T₂B) o bien $E_0 \cap E_0' = \emptyset$ (tipo T₂C).

Los problemas “mal definidos porque sobran datos” tipo T₃, son caracterizados: a) Por $E_0 \subset E_0'$, cuando son construidos añadiendo datos a E_0 , distinguiendo: los que no incluyen la solución en los datos añadidos ($R \not\subset E_0'$, tipo T₃A) y los que la incluyen ($R \subset E_0'$, tipo T₃B). b) Por $E_0 \not\subset E_0'$, cuando son construidos añadiendo y eliminando datos a E_0 , estando la solución entre los datos añadidos ($R \subset E_0'$, tipo T₃C).

A continuación exponemos con detalle, ejemplos de construcción de problemas de encontrar mal definidos tipo T₁ y T₂, construidos a partir del siguiente problema bien definido: *Pedro compra una botella de leche y 3 barras de pan. La botella de leche cuesta 150 pesetas y cada barra de pan 45 pesetas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?*

FALTAN TODOS LOS DATOS (Tipo T₁): $E_0 = \emptyset$

Ejemplo:

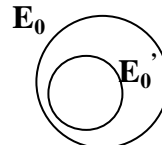
Pedro compró diferentes objetos. ¿Cuánto dinero le devuelven?

FALTAN DATOS (Tipo T₂): $[E_0 \neq \emptyset] \wedge [\text{no existe } (E_i)_{i \in \{0,1,\dots,n\}}]$.

En su construcción queda caracterizado por $E_0 \not\subset E_0'$.

Consideramos diferentes casos posibles:

1) Eliminando datos, $E_0' \subset E_0$, gráficamente



T₂ A) Cuando eliminamos algún dato de E_0 ,

$$E'_0 = \{e_1, e_2, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_i\} \text{ y } E'_0 \subset E_0 \wedge E'_0 \neq \emptyset.$$

Ejemplo:

Pedro compra una botella de leche y 3 barras de pan. La botella de leche cuesta 150 pesetas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?

Cuando eliminamos todos los datos de E_0 , $E'_0 = \emptyset \wedge E'_0 \subset E_0$, se transforma en un problema tipo T_1 .

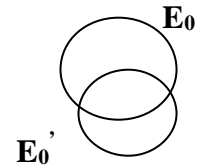
Ejemplo:

Pedro compró diferentes objetos. ¿Cuánto dinero le devuelven?

2) Eliminando y añadiendo datos, $E'_0 \not\subset E_0 \wedge E'_0 \neq \emptyset$

T₂ B) Cuando eliminamos algún dato y añadimos otro,

$$E'_0 = \{e_1, e_2, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_i, e_{i+1}\} \text{ y } E_0 \cap E'_0 \neq \emptyset, \text{ gráficamente}$$

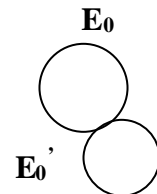


Ejemplo:

Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?

T₂ C) Cuando eliminamos todos los datos y añadimos datos nuevos,

$$E'_0 = \{e_{i+1}, \dots, e_{i+h}\} \text{ y } E_0 \cap E'_0 = \emptyset, \text{ gráficamente}$$



Ejemplo:

Pedro tiene 18 años y compra diferentes objetos. ¿Cuánto dinero le devuelven?

Siguiendo este proceso de construcción, eliminando y añadiendo datos, podemos encontrarnos con estas dos situaciones:

3) Eliminamos datos y añadimos otros, entre los que se encuentra la solución, $E'_0 = \{e_1, e_2, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_i, e_{i+1}, R\}$

4) Eliminamos todos los datos y añadimos la solución, $E'_0 = \{R\}$

En ambos casos, podemos observar que el procedimiento de añadir y eliminar datos, aplicado a E_0 , lo convierte en un problema de naturaleza diferente, ya que no cumple la condición: *no existe* $(E_i)_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$. Es decir, que no son problemas del Tipo T_2 . En la situación 3), se cumple la condición: $\exists e \in E_0, e \notin (E_i)_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$, es decir, se trata de un problema de encontrar mal definido porque sobran datos (Tipo T_3). En la situación 4), se cumplen las condiciones $E_0 \neq \emptyset \wedge \exists (E_i)_{i \in \{0,1,\dots,n\}} \wedge E_0 \subset E_i, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$, es decir, se trata de un problema de encontrar bien definido.

Luego los problemas de encontrar mal definidos porque faltan datos (tipo T_2), se encuentran en las situaciones descritas como: **T_2A , T_2B y T_2C** .

Añadimos ahora ejemplos de problemas de encontrar mal definidos Tipo T_3 , que son construidos a partir del siguiente problema bien definido:
¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro, la rueda de una bicicleta de 60 cm de radio da 340 vueltas?

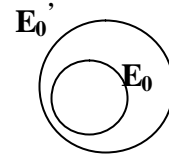
SOBRAN DATOS (Tipo T_3):

$[E_0 \neq \emptyset] \wedge [\exists (E_i)_{i \in \{0,1,\dots,n\}}] \wedge [E_0 \not\subset E_i, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}]$, es decir, cuando $\exists e \in E_0 \wedge \forall i \in \{1,2,\dots,n\}, e \notin E_i$.

En su construcción se caracterizan tanto por $E_0 \subset E'_0$ como por $E_0 \not\subset E'_0$

Tenemos diferentes casos posibles:

1) Añadiendo datos. Caracterizados por $E_0 \subset E'_0$, gráficamente



T₃ A) Añadiendo algún dato, $E'_0 = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i, e_{i+1}\}$ y $R \notin E'_0$

El dato e_{i+1} , es un dato independiente de los datos $e_1, \dots, e_j, \dots, e_i$, porque en caso contrario transformamos el problema en un problema bien definido impropio.

Ejemplo:

¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro, la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro da 340 vueltas y tarda 2 horas?

T₃ B) Cuando entre los datos añadidos está la solución,

$E'_0 = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i, e_{i+1}, R\}$ y $R \in E'_0$

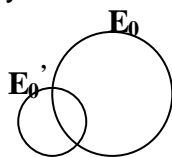
El dato e_{i+1} , es también un dato independiente de los datos iniciales, porque si no sería nuevamente un problema bien definido impropio.

El caso de añadir únicamente R tampoco es considerado, ya que el resultado sería nuevamente un problema bien definido impropio.

Ejemplo:

¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro, la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro, recorre 640 metros, da 340 vueltas y tarda 2 horas?

2) Añadiendo y eliminando datos. Caracterizados por $E_0 \not\subset E'_0$, gráficamente



T₃ C) Cuando eliminamos datos y añadimos otros, entre los que se encuentra la solución, $E'_0 = \{e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_i, e_{i+1}, R\}$ y $R \subset E'_0$

Esta situación fue ya descrita en el análisis de los mal definidos porque faltan datos. Cualquier otra situación de añadir y eliminar datos es del tipo de problemas mal definidos Tipo T₂.

Ejemplo:

¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro, la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro, recorre 640 metros y tarda 2 horas?

En definitiva, insistimos en que los términos “bien y mal definidos” no contienen ambigüedades y parecen más adecuados que los otros términos usados. Así por ejemplo, que un problema sea rutinario o no rutinario, depende de factores externos, como puede ser el currículo existente en un momento o en un país determinado. El término “mal estructurado” pensamos que no define la situación a la que nos referimos, puesto que todos los problemas o situaciones que consideramos, tienen una estructura determinada. El término “abierto” es, por otro lado, muy amplio y confuso.

Por todo ello, consideramos que los términos “bien definidos” y “mal definidos” son los que mejor definen los diferentes problemas utilizados en esta investigación.

Finalmente, queremos destacar que las relaciones entre nuestra caracterización y las que aporta la Psicología, no entran en contradicción. El punto de vista de la Psicología resalta, como característica esencial, en todas sus definiciones de problemas, la presencia de un objetivo que queremos alcanzar, apareciendo el problema en sí, en el momento en que debemos determinar cómo lograr dicho objetivo. De esta manera la

clasificación más extendida en Psicología consiste en organizar los problemas en dos clases: problemas bien definidos y problemas mal definidos. En los problemas bien definidos existe un consenso acerca del objetivo o estado final y se considera resuelto cuando el sujeto alcanza dicho estado (“resolver una ecuación algebraica” o “jugar una partida de ajedrez”), y en los problemas mal definidos no existe ese consenso, es decir, no podemos determinar la existencia de un único estado final. En los problemas mal definidos, la definición de los objetivos forma parte del problema (“componer una poesía” o “cómo luchar contra el desempleo”).

Como podemos observar, en la definición anterior de problemas mal definidos, el objetivo no existe o es ambiguo. Por ejemplo, en el caso del problema de cómo luchar contra el desempleo, la situación es ambiguo, ya que para una persona la meta puede ser cómo lograr que el desempleo no supere el 20% de la población activa, mientras que para otra, intentar que el desempleo no supere un 5% de la misma población activa.

En nuestro caso el planteamiento es diferente, el objeto final del problema está siempre bien caracterizado, lo que sucede es que los datos para determinarlo son a veces inadecuados, escasos o excesivos.

2.3 MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL PARA EL ESTUDIO

2.3.1 Fases en la resolución de problemas

La resolución de problemas en general, y la búsqueda de un modelo que ayude a las personas en dicho proceso de resolución, ha sido un tema investigado, tanto por parte de matemáticos como de psicólogos. Desde el punto de vista de la Psicología, diversas han sido las aportaciones más significativas a la resolución de problemas, de las que sólo citamos algunas, por razones de espacio: Dewey (1933), Wallas

(1926), Duncker (1945), Wertheimer (1954), Newell y Simon (1972), Mason, Burton y Stacey (1988), Mayer (1986), Bransford y Stein (1984). Desde el punto de vista de la Matemática, citamos los trabajos de Polya (1954, 1957, 1962), Schoenfeld (1985), Goldin (1985,1987), Guzmán (1991).

Dewey (1933) presentó un modelo para resolver problemas, con las cinco fases siguientes:

Identificación de la situación problemática.

Definición precisa del problema.

Análisis de medios-fines. Plan de solución.

Ejecución del plan.

Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización.

En «The Art of Thought» de Wallas (1926) aparece un modelo para resolver problemas con cuatro fases:

1. Preparación: Recolección de información e intentos preliminares de solución.
2. Incubación: Dejar el problema de lado para realizar otras actividades.
3. Iluminación: Aparece la clave para la solución.
4. Verificación: Se comprueba la solución para estar seguros de que funciona.

Entre los modelos propuestos por matemáticos, destaca el de Polya (1954, 1957), que ha inspirado o ha sido utilizado en multitud de estudios e investigaciones. Se basa en las observaciones que había realizado como profesor de Matemáticas y en la obra de los gestaltistas, aunque también podemos encontrar algunas coincidencias con el modelo de

Dewey. Sugirió que la resolución de problemas está basada en procesos cognitivos que tienen como resultado encontrar una salida a una dificultad, una vía alrededor de un obstáculo, alcanzando un objetivo que no es inmediatamente alcanzable.

Este modelo consta de cuatro fases que, a su vez, tiene otras subfases:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan. Determinar la relación entre los datos y la incógnita. De no encontrarse una relación inmediata, se puede considerar problemas auxiliares. Obtener finalmente un plan de solución.
3. Ejecución del plan.
4. Examinar la solución obtenida.

El modelo de Polya se basa, como afirman Puig y Cerdán (1988), en la idea del resolutor ideal, esto es, la persona que al resolver un problema avanza linealmente desde el enunciado hasta hallar la solución, sabiendo en todo momento qué hace y por qué lo hace, y que, para acabar, examina la solución, comprueba que es adecuada y ve hacia dónde le conduce.

Bourne y otros (1971) distinguen tres fases en la resolución de un problema: *Preparación*, *Producción* y *Enjuiciamiento*.

La *preparación* supone un análisis e interpretación de los datos disponibles inicialmente, de las restricciones y de una identificación del criterio de solución.

La fase de *producción* comprende un conjunto de operaciones diversas: recuperación de información de la memoria a largo plazo, exploración de información ambiental, transformaciones en memoria a corto plazo, almacenar información intermedia en memoria a largo plazo, y eventualmente alcanzar una solución. En esta fase se aplican

determinadas estrategias, algunas de carácter general y otras específicas de cada problema particular.

La fase de *enjuiciamiento* evalúa la solución generada, contrastándola con el criterio de solución.

Las tres fases se suceden habitualmente en el orden señalado. Sin embargo, muchos problemas requieren que el sujeto reinicie varios ciclos completos o parciales de preparación, producción y enjuiciamiento.

Observamos ciertas analogías con las fases propuestas por Polya. De esta manera, la preparación supone la comprensión de los datos disponibles inicialmente y de las restricciones además de una identificación del criterio de solución (comprender y concebir un plan). La fase de producción supone un conjunto de operaciones diversas que están relacionadas con la recuperación y el almacenamiento y la exploración y transformación de información hasta alcanzar una solución (ejecutar un plan). Durante el enjuiciamiento se evalúa la solución obtenida (examinar la solución obtenida).

Otro modelo de resolución de problemas, es el creado por Bransford y Stein (1984), concebido, como ellos afirman, «con la finalidad de facilitar la identificación y reconocimiento de las distintas partes o componentes a tener en cuenta en la resolución de problemas». Entre los autores que han inspirado este modelo se encuentra también Polya. Sus fases son:

- I: Identificación de los problemas.
- D: Definición y representación del problema.
- E: Exploración de posibles estrategias.
- A: Actuación, fundada en una estrategia.
- L: Logros. Observación y evaluación de nuestras actividades.

Schoenfeld (1985), inspirado en las ideas de Polya, diseña uno de los modelos más completos, sobre todo en estrategias heurísticas. Se basa

en una observación minuciosa del proceso de resolución de problemas por sujetos reales y, a posteriori, construye bloques de conductas más o menos homogéneas, que se dan en un período de tiempo, y así califica los bloques de modo que especifiquen su función en la globalidad del proceso. Distingue cuatro fases: análisis, exploración, ejecución y comprobación de la solución obtenida.

Mason, Burton y Stacey (1988) proponen un modelo que no pretende ser un instrumento de estudio o de análisis, sino una ayuda para la instrucción. El objetivo de estos autores es mostrar cómo acometer cualquier problema, es decir, cómo abordarlo de una manera eficaz y cómo ir aprendiendo de la experiencia. Se basan en los trabajos de Polya y Schoenfeld. En este modelo aparecen las fases:

1. Abordaje.
2. Ataque.
3. Revisión.

Puig y Cerdán (1988) presentan un modelo, basado en las ideas de Dewey y en el modelo de Polya, para la resolución de problemas aritméticos verbales, que consta de las siguientes fases:

1. Lectura.
2. Comprensión.
3. Traducción.
4. Cálculo.
5. Solución.
6. Revisión. Comprobación.

La fase “comprensión” de Polya la subdividen en dos etapas, lectura y comprensión, para acentuar el cuidado que debe ponerse en la lectura del enunciado. La fase “elaboración de un plan”, se llama aquí traducción y correspondería al paso del enunciado verbal a la operación u operaciones aritméticas correspondientes. La fase cálculo corresponde a la de

“ejecución del plan” y aquí intervienen las destrezas algorítmicas de los estudiantes. Las últimas fases, de revisión y comprobación, coinciden con la de “verificación del resultado” de Polya.

De Corte y Verschaffel (1989), basándose en las teorías del procesamiento de la información y en sus propias investigaciones, han presentado un modelo de competencia para la resolución de problemas aritméticos verbales de sumas y restas, que comprende cinco etapas:

1. Partiendo del enunciado del problema, el alumno construye una representación interna del problema en términos de conjuntos y relaciones entre estos conjuntos.
2. Sobre la base de esta representación, el resolutor elige la operación formal apropiada o la estrategia informal con el fin de encontrar el valor desconocido en la representación del problema.
3. El alumno ejecuta la operación o acción seleccionada.
4. El resolutor vuelve a la representación inicial del problema, sustituye el elemento desconocido por el resultado que ha obtenido y formula la respuesta.
5. El estudiante verifica las acciones realizadas con el fin de garantizar la corrección de las soluciones encontradas en la fase precedente.

Miguel de Guzmán (1991) publica un modelo que, relacionado también con las cuatro fases de Polya, orienta y anima al resolutor para que avance:

Familiarízate con el problema.

Búsqueda de estrategias.

Lleva adelante tu estrategia.

Hernández y Socas (1994b) presentan un modelo para resolver problemas verbales aritméticos, inspirado, como la mayoría de los

anteriores, en el modelo de Polya, pero en el que se han añadido algunos aspectos teniendo en cuenta los sistemas de representación de Goldin (1987). Consta de las siguientes fases:

1. Lectura del enunciado.
2. Comprensión.
3. Representación, ejecución y solución visual-geométrica.
4. Representación, ejecución y solución formal.
5. Soluciones.
6. Comprobación.

En nuestra investigación, no pretendemos analizar todas las fases de resolución de un problema bien o mal definido: *comprensión, elaboración de un plan, ejecución del plan y comprobación del resultado*, sino centrarnos en la fase de “*comprensión de la situación problema*”, es decir, nos preguntamos ¿cómo identifican los resolutores las situaciones problemas en términos de bien o mal definidos?, ¿cómo las caracterizan?, ¿cómo establecen relaciones entre los datos y el objetivo en este tipo de situaciones?, ¿cómo conviven en el contexto escolar situaciones problema mal y bien definidas?, etc.

Para ello recurrimos a los modelos de Dewey (1933) y Bourne y otros (1971) para la resolución de problemas y consideramos en nuestro trabajo la “*fase de preparación*” y nos centramos en la actuación de los alumnos en esta fase que, traducida al modelo de Dewey, se concreta en: *identificación de la situación problemática, definición precisa del problema y análisis de medios-fines*, esto es, cómo analizan e interpretan los resolutores los datos disponibles inicialmente, las restricciones y cómo identifican el criterio de solución.

Nuestro Modelo de Competencia Formal tiene la propiedad de servirnos de organizador general de los problemas que queremos tratar,

diferenciando unos de otros y caracterizándolos, y nos permite analizar la existencia o no, de comportamientos regulares e invariantes en las acciones de los resolutores en la fase de preparación al enfrentarse a estos problemas, para cuyo estudio, tuvimos que elaborar un esquema de análisis para poder profundizar en el comportamiento de los resolutores en esta fase.

2.3.2 Esquemas de análisis para observar la actuación de los alumnos en la resolución de problemas

Actualmente existen muchos modelos del proceso de resolución de problemas de matemáticas. Entre ellos, tenemos el modelo elaborado por Mason, Burton y Stacey (1988), que define tres fases en función de lo que ellos llaman *sentimientos* del resolutor y es un modelo destinado a su uso en la instrucción como guía para los alumnos. Asimismo, citamos el modelo de Goldin, que no es un modelo de fases sino de los lenguajes implicados en la resolución de problemas y está formulado como un modelo de competencia (Goldin, 1985,1987,1988, 1989 y 1993).

Schoenfeld (1985), por su parte, analiza, observando los protocolos de resolutores reales, los comportamientos que éstos desarrollan mientras resuelven problemas e intenta categorizar sus conductas y describir el conjunto del proceso como un conjunto de episodios, que son segmentos de conductas de igual categoría, con lo que elabora un *modelo de actuación*, y no un modelo de competencia. El esquema de análisis elaborado pretende describir el proceso de forma macroscópica. Para ello, introduce la idea de dividir el protocolo en episodios, definiendo éstos como secuencias de conductas que son todas de la misma naturaleza. Esa definición de "episodio" tiene que estar acompañada, para que tenga sentido, de una definición correspondiente de cuáles son los tipos de conducta distintos que se van a usar para calificar las secuencias de conducta y segmentar así el protocolo en trozos.

La división en episodios se completa con el examen de cada uno de ellos, mediante las preguntas que aparecen en el esquema siguiente. Este esquema de lectura, análisis, exploración, plan-ejecución, verificación, transición e información nueva y evaluación local, también contiene una breve caracterización de cada tipo de episodio (Schoenfeld, 1985, pp. 297-301):

LECTURA: Lectura, ingestión, silencio, relectura de partes.

L1 ¿Se han anotado todas las condiciones del problema? ¿Explícita o implícitamente?

L2 ¿Se ha anotado correctamente el objetivo del problema? ¿Explícita o implícitamente?

L3 ¿Hay alguna evaluación del estado actual del conocimiento del resolutor relativo a la tarea?

ANÁLISIS: Comprensión plena, reformulación, introducción de elementos, simplificación...

A1 ¿Qué elección de perspectiva se hace? ¿Explícitamente o por omisión de otras?

A2 ¿Las acciones están dirigidas por las condiciones del problema? (Trabajar hacia adelante).

A3 ¿Las acciones están dirigidas por los objetivos del problema? (Trabajar hacia atrás).

A4 ¿Se busca alguna relación entre las condiciones y el objetivo del problema?

A5 ¿El episodio como un todo es coherente? En suma, considerando A1-A4, ¿son razonables las acciones del resolutor?

EXPLORACIÓN.

Se diferencia de Análisis por su escasa estructura. Es un recorrido por el espacio del problema en busca de información que sea pertinente y

pueda ser incorporada a la secuencia Análisis-Plan-Ejecución.

E1 ¿El episodio está dirigido por la condición? ¿Por el objetivo?

E2 ¿La acción está dirigida o enfocada? ¿Tiene propósito?

E3 ¿Hay algún control del progreso? ¿Cuáles son las consecuencias para la solución de la presencia o ausencia de tal control?

E4 ¿El episodio en su conjunto es coherente?

PLAN-EJECUCIÓN

No interesa entrar en los detalles de cómo se forma el plan. Hay problemas, que se pueden llamar “dirigidos por un esquema”, cuyo plan no aparece enunciado de forma explícita, pasándose de la lectura a la ejecución de un plan bien estructurado.

PE1 ¿Hay evidencia de alguna planificación? ¿La planificación es explícita o debe ser inferida la presencia de un plan del carácter evidentemente intencionado de la conducta del sujeto?

PE2 ¿El plan es pertinente para la solución? ¿Es apropiado? ¿Está bien estructurado?

PE3 ¿Evalúa el sujeto la calidad del plan respecto a la pertinencia, propiedad o estructuración? Si es así, ¿cómo quedan estas evaluaciones al compararlas con los juicios emitidos en PE2?

PE4 ¿La ejecución sigue el plan de forma estructurada?

PE5 ¿Hay evaluación de la ejecución (especialmente si las cosas van mal) en el nivel local o en el nivel global?

PE6 ¿Cuáles son las consecuencias para la solución de la evaluación, si la hay, o de su ausencia, si no?

VERIFICACIÓN

V1 ¿Revisa el resolutor la solución?

V2 ¿Se contrasta la solución de alguna manera? Si es así, ¿cómo?

V3 ¿Hay alguna evaluación de la solución: ya sea del proceso, ya de confianza en el resultado?

TRANSICIÓN

T1 ¿Hay evaluación del actual estado de resolución? Ya que se acaba de abandonar un camino, ¿Hay algún intento de salvar o de almacenar cosas que pueden haber sido valiosas en él?

T2 ¿Cuáles son los efectos locales y globales sobre la solución de la presencia o ausencia de evaluación al abandonar el trabajo previo? ¿La acción, o ausencia de acción, emprendida por el resolutor es apropiada o necesaria?

T3 ¿Hay una evaluación de los efectos a corto y/o a largo plazo de la resolución de tomar la nueva dirección, o sencillamente el sujeto salta al nuevo enfoque?

T4 ¿Cuáles son los efectos locales y globales sobre la solución, de la presencia o ausencia de evaluación al embarcarse en un nuevo camino? ¿Es apropiada o necesaria tal acción?

INFORMACIÓN NUEVA Y EVALUACIÓN LOCAL

I1 ¿Evalúa el resolutor el estado actual de su conocimiento? ¿Es apropiado hacerlo?

I2 ¿Evalúa el resolutor la pertinencia o utilidad de la información nueva? ¿Es apropiado hacerlo?

I3 ¿Cuáles son las consecuencias para la solución de esas evaluaciones o su ausencia?

La lista de preguntas de este esquema elaborado por Schoenfeld se centra en las tareas generales del gestor, ya que esa “componente del conocimiento y la conducta” era la que pretendía examinar en el trabajo para el que lo elaboró.

Nuestras preguntas de investigación nos llevaron a la elaboración de un esquema de análisis para observar a resolutores reales en esta fase de preparación con problemas de encontrar bien y mal definidos.

En este sentido, adaptamos el modelo de Schoenfeld (1985) que después de varios trabajos preparatorios queda determinado de la siguiente manera, y que en lo sucesivo llamaremos ESQUEMA DE ANÁLISIS.

Lectura: *lectura, silencio, relectura.*

L1 ¿Se han anotado todas las condiciones del problema?

L2 ¿Se ha anotado correctamente el objetivo del problema?

L3 ¿El entorno (contexto) del problema condiciona la lectura del mismo?

Análisis - Exploración: *Comprensión, acciones razonables.*

E1 ¿Se busca alguna relación, verdadera o falsa, entre las condiciones y el objetivo del problema?

E2 ¿Las acciones están dirigidas por las condiciones del problema (los datos)?

E3 ¿Las acciones están dirigidas por el objetivo del problema (la pregunta)?

Actuación: *Reformulación, introducción de elementos, simplificación de elementos.*

A1 ¿Reconoce el resolutor explícita o implícitamente que el problema está bien o mal definido? ¿Lo justifica?

A2 ¿Lo replantea? ¿Lo transforma en un problema bien o mal definido? ¿Explícitamente? ¿Implícitamente? ¿Cómo? ¿Justifica la transformación realizada?

A3 ¿No lo transforma ni explícita ni implícitamente? ¿Lo justifica?

Verificación - Transición.

V1 ¿Revisa el resolutor su actuación? ¿Cómo consecuencia del proceso o del resultado obtenido? ¿Lo justifica?

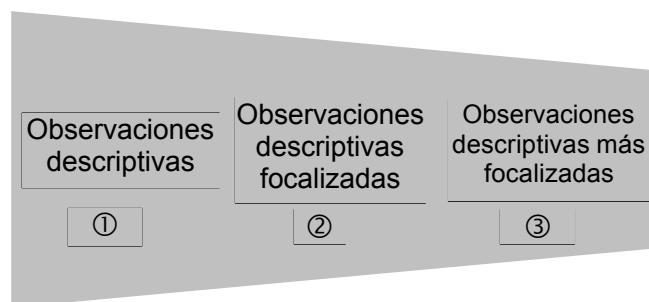
V2 ¿Cambia su plan de actuación? ¿Lo justifica?

2.3.3 Análisis de las justificaciones

Del análisis de los comportamientos de los resolutores en la fase de

preparación, principalmente del análisis de los apartados: Actuación: A1, A2 y A3 y verificación-transición: V1 y V2 de nuestro esquema de análisis, surge la necesidad de estudiar las justificaciones que utilizan los resolutores en sus actuaciones en esta fase de preparación, e intentar construir un sistema de Categorías de análisis de las justificaciones utilizadas.

Para ello, establecemos tres fases de observación:



① Fase de observación descriptiva.

En esta primera fase, el objetivo era determinar una primera categorización de las justificaciones que usaban los resolutores en dos direcciones: justificaciones tendentes a la validación o justificaciones tendentes a la refutación, partiendo de que validar es aceptar como válido el problema presentado (tanto si es bien definido como si es mal definido) y refutar es no aceptar como válido el problema presentado (tanto si es bien definido como si es mal definido).

Para analizar las justificaciones, pensamos que los alumnos iban a utilizar pruebas de naturaleza matemática o recursos lingüísticos. Pretendíamos, por tanto, hacer un estudio de observación descriptiva, de las justificaciones que utilizan los resolutores en la fase de preparación, para aceptar o rechazar los problemas de encontrar bien y mal definidos, y los métodos demostrativos y argumentativos que creemos que

utilizarían.

Consideramos *métodos demostrativos* los basados en las categorías de verdad y evidencia, y *métodos argumentativos* los basados en las categorías de lo verosímil y de lo razonable.

De esta manera, partimos de la idea de que, los métodos demostrativos son los asociados a la lógica formal, a la lógica de la demostración, a las pruebas de naturaleza matemática, y le llamamos PRUEBAS, y, los métodos argumentativos son los asociados a una lógica no formalizada, es decir, a la retórica y a la dialéctica, y le llamamos ARGUMENTACIONES.

En definitiva, tomaremos el criterio de PRUEBAS, cuando el resolutor usa un sistema conformado por objetos, procesos, conceptos, registros y representaciones matemáticas, que involucran y relacionan las cantidades numéricas o magnitudes explícitas. Es decir, criterios de tipo conceptual y procedimental típico de la Matemática, que manifiestan los resolutores y exponen como justificación de la validación o refutación de los espacios semióticos construidos. Tomaremos el criterio de ARGUMENTACIONES, al uso, por el resolutor, de formas verbales, escritas o habladas, que exteriorizan y evidencian conceptos y procesos acerca de los problemas o situaciones problema bien y mal definidos, pero que no ponen en relación las cantidades numéricas o magnitudes explícitas.

② Fase de observación descriptiva focalizada.

Al observar las justificaciones utilizadas por los resolutores para validar o refutar los problemas de encontrar bien y mal definidos, en términos de pruebas y argumentaciones, vimos la necesidad de analizar qué tipos de pruebas y argumentaciones utilizan, por lo que construimos un sistema de observación descriptivo más focalizado.

Para ello, recurrimos a los recursos matemáticos más comunes (NCTM, 1989: Estándar n.º. 3: “Las matemáticas como razonamiento”; Davis y Hersh, 1988; Duval, 1995 y Pluvinage, 1996) y a un tratado de las argumentaciones (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 1989) y, basándonos en los resultados obtenidos, tomamos los siguientes:

RECURSOS	
PRUEBA	ARGUMENTACIÓN
Recursos de la Matemática	
<ul style="list-style-type: none"> • Razonamiento empírico. • Razonamiento analítico. • Contradicción. • Contraejemplo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Comparación o analogía. • Ridículo.

PRUEBA: En relación con la disciplina. La justificación está en función de las relaciones matemáticas observadas por el resolutor o de los comportamientos matemáticos determinados por el resolutor en los procedimientos seguidos, que involucran y relacionan las cantidades numéricas o magnitudes explícitas.

Los cuatro procedimientos observados inicialmente son:

El Razonamiento Empírico: La justificación se realiza recurriendo a hechos físicos o experiencias cuantificables, sistema o procedimiento fundado en mera práctica o rutina. La justificación se basa en imágenes mentales rudimentarias en las cuales no están presentes habilidades de verificación o transformación.

El Razonamiento Analítico: La justificación se apoya en la demostración matemática, pasando del todo a las partes.

La Contradicción: La justificación se hace tomando del problema situaciones que pueden ser consideradas como falsas y verdaderas a la vez, lo que le lleva a la confusión que genera la refutación. Se razona así: si sólo tomo esto, se puede resolver, pero si tomo además esto otro, no se puede resolver, y concluye que el problema está mal definido por estas razones.

El Contraejemplo: La justificación se hace dando ejemplos sacados de la misma situación.

ARGUMENTACIÓN: La justificación está en función de formas verbales, escritas o habladas, que exteriorizan y evidencian conceptos y procesos acerca de los problemas o situaciones problema, bien y mal definidos, pero que no ponen en relación las cantidades explícitas.

Los dos tipos de argumentaciones observados inicialmente son:

Comparación o analogía: La justificación se realiza mediante la explicación verbal, pero tomando otro objeto (situación) para establecer diferencias o semejanzas. Exige esfuerzos de análisis más fuertes que la simple descripción o explicación.

Ridículo: La justificación se realiza dando a entender lo contrario de lo que se dice literalmente (justificación indirecta) o donde la situación planteada, por su rareza o extravagancia, puede mover a risa, e incluso cuando la situación planteada resulta extraña, irregular y de poco aprecio y consideración.

③ Fase de observación descriptiva más focalizada.

El propósito de esta fase fue construir un sistema categorial, derivado

de las observaciones obtenidas en las justificaciones utilizadas por los resolutores en la fase de preparación.

2.3.4 Unidades de análisis de la investigación

Para responder a nuestras preguntas de investigación: ¿Cómo identifican los resolutores las situaciones problema en términos de bien o mal definidas?, ¿Cómo las caracterizan?, ¿Cómo establecen relaciones entre los datos y el objetivo en este tipo de situaciones?, ¿En qué transforman las situaciones problema presentadas?, ¿Cómo justifican sus actuaciones?, etc., se estableció el siguiente conjunto de categorías de análisis:

En la categoría 1, analizamos cómo identifican el problema dado; en la categoría 2, analizamos las acciones llevadas a cabo en dos elementos de la terna: el conjunto de datos y la pregunta; en la categoría 3, analizamos las acciones ejecutadas sobre un elemento de la terna: el conjunto de datos; en la categoría 4, analizamos en qué transforman el problema dado. A continuación se muestran los descriptores de las diferentes categorías:

Categoría 1 -. Análisis de la identificación del problema dado.

C1A. Identifican al problema presentado como mal definido.

C1B. Identifican al problema presentado como bien definido.

C1C. No saben cómo identificar el problema.

Categoría 2: Análisis de las acciones que realizan.

C2A. Acciones dirigidas por las condiciones (datos).

C2B. Acciones dirigidas por el objetivo (pregunta).

C21. Mantienen el objetivo y modifican los datos para adecuarlos al objetivo.

C22. Mantienen los datos y cambian el objetivo, de manera que este nuevo objetivo tenga relación con los datos dados.

C23. Modifican tanto los datos como el objetivo.

C24. Otras situaciones.

Categoría 3: Análisis de las acciones sobre las condiciones del problema .

C3A. Añaden datos.

C3B. Eliminan datos.

C3C. Añaden y eliminan datos.

Categoría 4: Análisis de en qué transforman el problema dado.

C4A. Transforman el problema en uno mal definido tipo T_2 .

C4B. Transforman el problema en uno bien definido.

C4C. Transforman el problema en uno mal definido tipo T_3 .

Las preguntas de investigación y las categorías mencionadas se concretan en las siguientes preguntas del esquema de análisis que se analizó en el apartado 2.3.2:

E2 ¿Las acciones están dirigidas por las condiciones del problema?

C2A. Acciones dirigidas por las condiciones (datos).

E3 ¿Las acciones están dirigidas por los objetivos del problema?

C2B. Acciones dirigidas por el objetivo (pregunta).

A1 ¿Reconoce explícitamente o implícitamente que el problema está bien o mal definido? ¿Lo justifica?

C1A. Identifican al problema presentado como mal definido.

C1B. Identifican al problema presentado como bien definido.

C1C. No saben cómo identificar el problema.

A2 ¿Lo replantea? ¿Lo transforma en un problema bien o mal definido?
 ¿Explícitamente? ¿Implícitamente? ¿Cómo? ¿Justifica la transformación realizada? y **A3** ¿No lo transforma ni explícita ni implícitamente? ¿Lo justifica?

C21. Mantienen el objetivo y modifican los datos para adecuarlos al objetivo.

C22. Mantienen los datos y cambian el objetivo, de manera que este nuevo objetivo tenga relación con los datos dados.

C23. Modifican tanto los datos como el objetivo.

C3A. Añaden datos.

C3B. Eliminan datos.

C3C. Añaden y eliminan datos.

C4A. Transforman el problema en uno mal definido tipo T_2 .

C4B. Transforman el problema en uno bien definido.

C4C. Transforman el problema en uno mal definido tipo T_3 .

Esto nos va a permitir categorizar las actuaciones de los resolutores, determinando de esta manera la existencia o no, de comportamientos regulares e invariantes.

Por otro lado, de la observación de las preguntas de la fase verificación-transición del esquema de análisis, podemos observar si los resolutores presentan en sus actuaciones, uno o varios espacios semióticos.

La noción de espacio semiótico debe entenderse tanto como la secuencia de estados semióticos generados por el resolutor en las fases de planteamiento y resolución de un problema de encontrar a partir del

estado inicial E_0 y los operadores, como las modificaciones que el resolutor aplica al objetivo.

El análisis de estos espacios semióticos se hará en función de las secuencias de los comportamientos categorizados, al cambiar o no su plan de actuación.

De esta manera y a efectos de claridad cuando un resolutor cambia su plan de actuación podemos hablar de diferentes espacios semióticos. A efectos de simplificar, cuando un resolutor cambia varias veces su plan de actuación distinguiremos únicamente tres espacios semióticos: el inicial, el intermedio y el final.

CAPÍTULO 3

DISEÑO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

- **INTRODUCCIÓN**

- **DISEÑO GENERAL Y ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN**
 - ESTUDIOS PILOTOS
 - ESTUDIOS DEFINITIVOS

- **ENTREVISTAS A LOS ALUMNOS**
 - DESCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS
 - DESCRIPCIÓN DE LOS PROTOCOLOS
 - SELECCIÓN DE LOS ALUMNOS
 - DESARROLLO DE LAS ENTREVISTAS

- **DISEÑO DEL CUESTIONARIO DEFINITIVO**

3.1 INTRODUCCIÓN

Delimitado el propósito general de la investigación, se definieron los tres objetivos de la investigación que se desarrollaron en el capítulo primero, para abordar en el capítulo 2, la organización de los problemas de encontrar bien y mal definidos que queríamos estudiar y presentar el marco teórico conceptual del mismo. Ahora, en este capítulo 3, la finalidad es describir el diseño de investigación y los instrumentos de recogida de datos de la misma.

En el apartado 3.2, se hace una descripción global del diseño general de la investigación mediante un esquema de las distintas etapas que lo conforman. El esquema seguido contiene tanto estudios cuantitativos como cualitativos. La metodología cuantitativa nos permitió obtener datos globales sobre la actuación de los alumnos en la fase de “preparación” y la búsqueda de comportamientos regulares e invariantes, mientras el estudio cualitativo nos permitió realizar un análisis más fino sobre el proceso de resolución seguido, así como analizar las justificaciones que usaban los resolutores en términos de prueba y argumentación.

El apartado 3.3, describe las entrevistas realizadas y los protocolos de las mismas, dedicándose el último apartado a la construcción del cuestionario definitivo.

3.2 DISEÑO GENERAL Y ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN

El primer paso fue definir el diseño experimental. Ante la inexistencia de un instrumento contrastado de recogida de datos, adecuado para los propósitos de nuestra investigación, fue necesario realizar varios estudios previos hasta elaborar el cuestionario definitivo, siendo la elaboración de los instrumentos de medida (cuestionarios) un proceso generalmente largo.

El proceso seguido presenta dos etapas diferenciadas: Estudios pilotos y Estudios definitivos:

ESTUDIOS PILOTOS, caracterizados por la elaboración, aplicación y análisis de los resultados de un cuestionario inicial, paulatinamente modificado.

El procedimiento seguido en esta etapa fue:

Selección de una batería de problemas de encontrar bien y mal definidos, con un nivel de conocimientos asequible a alumnos de 2º de la ESO, en un abanico amplio de temas.

Elaboración de un primer cuestionario de 6 problemas de encontrar bien y mal definidos. Aplicación de este cuestionario a un primer grupo de alumnos de Magisterio.

Análisis de resultados y conclusiones.

Modificación del cuestionario en base a los resultados obtenidos y redacción de un segundo cuestionario con 19 problemas de encontrar bien y mal definidos, en tres contextos: aritmético, geométrico y algebraico.

Aplicación de este cuestionario a otro grupo de alumnos de Magisterio.

Realización de las primeras entrevistas videograbadas.

ESTUDIOS DEFINITIVOS, en los que se pueden distinguir los siguientes aspectos:

Elaboración de un cuestionario definitivo, a partir de los resultados anteriores, que consta de 21 problemas bien y mal definidos. El proceso seguido ha tenido en cuenta los criterios siguientes: juicio de expertos, aplicación puntual de los cuestionarios iniciales, entrevistas y revisión de las diferentes versiones para analizar las respuestas y la idoneidad de las cuestiones planteadas.

Aplicación de este cuestionario a un grupo de alumnos de segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y de primer curso de Magisterio.

Realización de entrevistas videograbadas con alumnos y alumnas de los dos niveles académicos.

En las dos etapas de la investigación se realizan pruebas escritas y videograbadas. Las pruebas escritas se pasaron a grupos completos de alumnos, sin seleccionar a los sujetos. Se llevaron a cabo en el aula de los mismos, entregándoles los enunciados de los problemas y sus correspondientes indicaciones por escrito. Previo a ello, se les decía que en cada problema anotasen todo lo que opinaban del mismo y se les insistía en que no borrarán nada de lo escrito, indicándoles que si se veían en la necesidad de ello, lo tachasen.

Las pruebas videograbadas se desarrollaron en un aula familiar a los alumnos, en la cual estaban presentes el resolutor o pareja de resolutores, situados en la pizarra, y el investigador u observador que realizaba la videograbación. Los resolutores eran advertidos de la necesidad de verbalizar todo lo que les fuese posible, al mismo tiempo que se les indicaba que si no podían resolver un problema por estar mal planteado, que indicasen por qué creían que estaba mal planteado y que lo replanteasen. Tras estas indicaciones, se les entregaba los enunciados de los problemas por escrito y se procedía a la videograbación.

Para el análisis de los datos se ha utilizado el sistema de categorías de análisis, explicado en el Capítulo anterior.

3.2.1 Estudios pilotos

La etapa correspondiente a los estudios pilotos se subdivide en cuatro fases, en cada una de las cuales se realizaron diferentes pruebas.

FASE I:

Durante el curso 1995-96, realizamos la primera prueba del estudio piloto, con el objetivo de analizar el comportamiento de los resolutores frente a problemas de encontrar bien y mal definidos, tomando nuestra propuesta de caracterización como modelo de competencia que sirve de referencia a la ejecución de los resolutores.

Como hemos señalado en el apartado 1.4, se observa sólo la fase “*Comprensión de la situación problema*”, en la resolución de problemas de encontrar bien o mal definidos. Para ello recurrimos a los modelos de Dewey (1933) y Bourne y otros (1971) para la resolución de problemas y consideramos en nuestro trabajo la “fase de preparación” y nos centramos en la actuación de los alumnos en esta fase.

POBLACIÓN DE ESTUDIO.

La prueba se pasó a nueve alumnos de tercer curso de Maestro de la Especialidad de Educación Infantil del Centro Superior de Educación (CSE) de la Universidad de La Laguna (Tenerife. España). Estos alumnos se caracterizan por su bajo nivel en conocimientos matemáticos, ya que principalmente vienen de un Bachillerato de Letras donde los contenidos de matemáticas son mínimos. Además, su perspectiva profesional no requiere conocimientos formales de matemáticas.

DISEÑO Y DESARROLLO DE LA PRUEBA.

El cuestionario incluyó 6 problemas de encontrar bien y mal definidos, que incluyen cuatro problemas de encontrar mal definidos (problemas A1, A2, B1 y B2) y dos problemas de encontrar bien definidos (problemas A3 y B3), entre los cuales hay de contexto aritmético, algebraico y geométrico.

De los cuatro problemas de encontrar mal definidos, tres eran mal definidos del Tipo T_2 (faltan datos) (problemas A1, A2 y B1) y uno mal

definido del Tipo T_3 (sobran datos) (problema B2), (Anexo 1, primer cuestionario).

Se aplicó en dos sesiones de una hora y en distintos días. Lo realizaron los alumnos de manera individual y por escrito en el mes de marzo de 1996. La primera sesión (grupo A de problemas), con la indicación "Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo, indicar las razones" y la segunda sesión (grupo B de problemas), con la indicación "Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo por estar mal planteado, indicar por qué está mal planteado, plantearlo bien y resolverlo".

	GRUPO A	GRUPO B
Mal definido	A1 (contexto algebraico) A2 (contexto aritmético)	B1 (contexto algebraico) B2 (contexto aritmético)
Bien definido	A3 (contexto aritmético)	B3 (contexto geométrico)

Tabla 3. 1

Los objetivos de esta fase fueron:

Analizar cómo se comportan los resolutores ante problemas de encontrar bien y mal definidos, observando: cómo identifican las situaciones problema en términos de bien o mal definidas, cómo las caracterizan, cómo establecen relaciones entre los datos y el objetivo, qué situaciones se crean cuando el alumno se enfrenta con problemas de encontrar bien y mal definidos al mismo tiempo, y de qué manera influye la presencia o ausencia de indicaciones que puede haber un problema mal planteado.

De esta manera, el objetivo final de esta prueba era "analizar la existencia o no de comportamientos regulares e invariantes en las actuaciones de los resolutores en la fase de "preparación" antes de abordar las fases de producción o enjuiciamiento (Bourne y otros, 1971).

Para el análisis de los datos utilizamos nuestro modelo de competencia formal y las tres categorías de análisis derivadas del mismo, que nos van a permitir determinar la existencia o no de comportamientos regulares e invariantes.

Establecemos que un comportamiento es regular cuando una misma secuencia de comportamientos de las categorías mencionadas lo presentan entre un 25% y un 75% del alumnado, y un comportamiento es invariante cuando una misma secuencia de comportamientos lo presentan entre un 75% y un 100% del alumnado.

En la categoría 1, analizamos si identifican el problema dado como bien o mal definido, en la categoría 2, analizamos las acciones llevadas a cabo en el conjunto de datos y la pregunta, y en la categoría 3, analizamos las acciones ejecutadas sobre el conjunto de datos.

Categoría 1: Identificación del problema en términos de bien definido o mal definido

C1A, si identifican el problema dado, como mal definido.

C1B, si identifican el problema dado, como bien definido.

Categoría 2: Análisis de las acciones que realizan.

C2A, si sus acciones están dirigidas por las condiciones (datos)¹

C2B, si sus acciones están dirigidas por el objetivo (pregunta)².

Categoría 3: Análisis de las acciones sobre las condiciones del problema.

C3A, si añaden datos al transformar el problema dado.

C3B, si eliminan datos al transformar el problema dado.

¹ Cuando lo importante son los datos dados y en función de ellos caracterizan el problema.

² Cuando lo importante es el objetivo dado y en función de él caracterizan el problema, decimos que las acciones están dirigidas por el objetivo.

FASE II.

Durante el curso 1996-97, llevamos a cabo la segunda fase del estudio piloto, con el objetivo de confirmar los resultados obtenidos en la primera prueba exploratoria. Para ello tomamos nuestro modelo de competencia formal, con las categorías de análisis derivadas del mismo ampliadas a partir del análisis de los datos obtenidos en la fase I de los estudios pilotos.

POBLACIÓN

Esta prueba se pasó a 13 alumnos de tercer curso de Maestro de la Especialidad de Educación Infantil del CSE de la Universidad de La Laguna (Tenerife. España).

DISEÑO Y DESARROLLO DE LA PRUEBA.

La prueba incluyó 19 problemas de encontrar bien y mal definidos, en los contextos aritmético, algebraico y geométrico. Estos incluyen siete mal definidos del Tipo T_2 (faltan datos) (problemas A1, A2, A3, B1, B2, B3 y B10), seis mal definidos del Tipo T_3 (sobran datos) (problemas A4, A5, A6, B4, B5 y B6) y seis bien definidos (problemas A7, A8, A9, B7, B8 y B9), en los contextos aritmético, algebraico y geométrico (Anexo 1, segundo cuestionario).

Se aplicó en dos sesiones de una hora y en distintos días. Lo realizaron los alumnos de manera individual y por escrito en diciembre de 1996. La primera sesión (grupo A de problemas), con la indicación "Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo, indicar las razones" y la segunda sesión (grupo B de problemas), con la indicación "Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo por estar mal planteado, indicar por qué está mal planteado, plantearlo bien y resolverlo".

	Mal definido Tipo T ₂	Mal definido Tipo T ₃	Bien definido
Contexto aritmético	A1, A3 y B1	A4 y B4	A7 y B7
Contexto algebraico	A2 y B2	A5 y B5	A8 y B8
Contexto geométrico	B3 y B10	A6 y B6	A9 y B9

Tabla 3. 2

Con esta prueba pretendíamos profundizar en los resultados obtenidos en la primera prueba con respecto a:

Analizar el comportamiento de los alumnos, ante problemas de encontrar mal definidos, qué es lo que hacen, en qué los convierten,...

Estudiar las situaciones que se crean, cuando el alumno se enfrenta con problemas de encontrar bien y mal definidos al mismo tiempo.

Observar, si las diferentes indicaciones dadas en los dos grupos de problemas, influían o no, en la actuación de los resolutores. Es decir, si el advertir previamente que puede haber un problema mal planteado, influye en la decisión del resolutor al caracterizar el problema presentado.

Igualmente que en la primera prueba, el objetivo final de esta segunda prueba escrita, era analizar la existencia o no de comportamientos regulares e invariantes, en las actuaciones de los resolutores en la fase de “preparación” antes de abordar las fases de producción o enjuiciamiento. Para ello utilizamos nuestro Modelo de Competencia Formal y las cuatro categorías derivadas del mismo, ampliadas a partir de los resultados obtenidos en la fase I del estudio piloto.

En la categoría 1, analizamos cómo identifican el problema dado; en la categoría 2, analizamos las acciones llevadas a cabo en el conjunto de datos y la pregunta; en la categoría 3, analizamos las acciones ejecutadas sobre el conjunto de datos; en la categoría 4, analizamos en qué transforman el problema dado.

Categoría 1 -. Análisis de la identificación del problema dado.

C1A. Identifican al problema presentado como mal definido.

C1B. Identifican al problema presentado como bien definido.

C1C. No saben cómo identificar el problema.

Categoría 2: Análisis de las acciones que realizan.

C2A. Acciones dirigidas por las condiciones (datos).

C2B. Acciones dirigidas por el objetivo (pregunta).

C21. Mantienen el objetivo y modifican los datos para adecuarlos al objetivo.

C22. Mantienen los datos y cambian el objetivo, de manera que este nuevo objetivo tenga relación con los datos dados.

C23. Modifican tanto los datos como el objetivo.

C24. Otras situaciones.

Categoría 3: Análisis de las acciones sobre las condiciones del problema .

C3A. Añaden datos.

C3B. Eliminan datos.

C3C. Añaden y eliminan datos.

Categoría 4: Análisis de en qué transforman el problema dado.

C4A. Transforman el problema en uno mal definido tipo T_2 .

C4B. Transforman el problema en uno bien definido.

C4C. Transforman el problema en uno mal definido tipo T_3 .

FASE III.

En esta fase (1996-97) se realizan las primeras entrevistas videograbadas, con el objetivo de corroborar los resultados obtenidos en las pruebas escritas anteriormente citadas, y de analizar las justificaciones empleadas.

POBLACIÓN DE ESTUDIO.

La tercera prueba se realizó con tres alumnos de tercer curso de Maestro de la Especialidad de Educación Infantil del Centro Superior de

Educación de la Universidad de La Laguna (Tenerife. España). Fueron divididos en dos grupos: El grupo 1 está formado por dos alumnos de niveles académicos medio (la alumna) y bajo (el alumno) y provienen de un bachillerato de letras donde los contenidos de matemáticas son mínimos. El grupo 2 está formado por una alumna de nivel académico medio-alto, proveniente de un bachillerato de ciencias. El nivel académico de estos alumnos fue extraído de su expediente académico.

DISEÑO Y DESARROLLO DE LA PRUEBA.

La tercera prueba incluyó trece problemas de encontrar mal definidos, en los contextos aritmético, algebraico y geométrico. Siete de ellos caracterizados desde la competencia como mal definidos del Tipo T_2 (faltan datos) y seis caracterizados desde la competencia como mal definidos del Tipo T_3 (sobran datos) (Anexo 1, segundo cuestionario).

	Mal definido Tipo T_2	Mal definido Tipo T_3
Contexto aritmético	A1, A3 y B1	A4 y B4
Contexto algebraico	A2 y B2	A5 y B5
Contexto geométrico	B3 y B10	A6 y B6

Tabla 3. 3

Esto se realiza en dos sesiones, de una hora cada una, en distintos días. Las sesiones son videograbadas.

En el grupo 1 la prueba se realiza mediante la discusión entre dos estudiantes, de manera que un alumno hace de entrevistador y el otro de resolutor, de manera alternativa en diferentes problemas. El papel del observador es realizar la grabación, observar e intervenir con un protocolo semiestructurado.

En el grupo 2 la prueba se realiza mediante entrevista semiestructurada (flexible). En esta entrevista utilizamos la técnica de la

explicitación, donde el alumno explica lo que ha visto, ha hecho, ha pensado,... evitando el investigador preguntar *“por qué lo ha hecho”*, con el fin de que el alumno no tenga la reacción de justificarse ante el investigador.

Con esta prueba, pretendíamos continuar con el estudio para determinar la existencia o no, de comportamientos regulares e invariantes, en las transformaciones que realizan los resolutores en la fase de "preparación" antes de abordar las fases de producción o enjuiciamiento. Cuando el análisis lo hacemos problema a problema, un comportamiento es regular si dos alumnos presentan una misma secuencia de comportamientos, y es un invariante, si los tres resolutores presentan la misma secuencia de comportamientos. Cuando el análisis lo hacemos por la tipología del problema (bien definido, mal definido T_2 y mal definido T_3), establecemos que un comportamiento es regular si ante un mismo tipo de problemas, el resolutor presenta una misma secuencia de comportamientos de las categorías mencionadas, entre un 25% y un 75% de los problemas presentados, y un comportamiento es invariante si una misma secuencia de comportamientos de las categorías mencionadas lo presentan entre un 75% y un 100% de los problemas presentados.

Además, al ser una prueba videograbada, se amplía el estudio a: Observar las justificaciones que utilizaban los resolutores en sus actuaciones, en términos de validación y refutación.

Se hizo necesario por tanto, construir un esquema de análisis, que nos permitiera determinar la existencia de comportamientos regulares e invariantes, así como la presencia de uno a varios espacios semióticos, quedando determinado como indicamos en el apartado 2.3.2 del capítulo 2:

Lectura: lectura, silencio, relectura.

L1 ¿Se han anotado todas las condiciones del problema?

L2 ¿Se ha anotado correctamente el objetivo del problema?

L3 ¿El entorno (contexto) del problema condiciona la lectura del mismo?

Análisis - Exploración: Comprensión, acciones razonables.

E1 ¿Se busca alguna relación, verdadera o falsa, entre las condiciones y el objetivo del problema?

E2 ¿Las acciones están dirigidas por las condiciones del problema (los datos)?

E3 ¿Las acciones están dirigidas por el objetivo del problema (la pregunta)?

Actuación: Reformulación, introducción de elementos, simplificación de elementos.

A1 ¿Reconoce el resolutor explícitamente o implícitamente que el problema está bien o mal definido? ¿Lo justifica?

A2 ¿Lo replantea? ¿Lo transforma en un problema bien o mal definido? ¿Explícitamente? ¿Implícitamente? ¿Cómo? ¿Justifica la transformación realizada?

A3 ¿No lo transforma ni explícita ni implícitamente? ¿Lo justifica?

Verificación - Transición.

V1 ¿Revisa el resolutor su actuación? ¿Cómo consecuencia del proceso o del resultado obtenido? ¿Lo justifica?

V2 ¿Cambia su plan de actuación? ¿Lo justifica?

FASE IV.

También durante el curso 1996-97, con el objetivo de confirmar o no los resultados obtenidos en las pruebas exploratorias anteriores, respecto a las diferentes indicaciones dadas a los dos grupos de problemas, y decidir la conveniencia o no, de mantener dichas indicaciones en la prueba final, aplicamos a un nuevo grupo de alumnos el segundo cuestionario (Anexo 1, segundo cuestionario).

POBLACIÓN DE ESTUDIO.

Se realizó con 21 alumnos de tercer curso de Maestro de la Especialidad de Educación Infantil del CSE de la Universidad de La Laguna (Tenerife. España).

DISEÑO Y DESARROLLO DE LA PRUEBA.

La prueba incluyó trece problemas de encontrar mal definidos, en los contextos aritmético, algebraico y geométrico. Siete de ellos caracterizados desde la competencia como mal definidos del Tipo T_2 (faltan datos) y seis caracterizados desde la competencia como mal definidos del Tipo T_3 (sobran datos).

	Grupo A	Grupo B
Contexto aritmético	A1 y A3 (tipo T_2)	B1 (tipo T_2)
	A4 (tipo T_3)	B4 (tipo T_3)
Contexto algebraico	A2 (tipo T_2)	B2 (tipo T_2)
	A5 (tipo T_3)	B5 (tipo T_3)
Contexto geométrico	A6 (tipo T_3)	B3 y B10 (tipo T_2)
		B6 (tipo T_3)

Tabla 3. 4

Para realizar la prueba, dividimos a los alumnos, al azar, en dos grupos, llevando cada grupo a un aula diferente, de manera que, al mismo tiempo, un grupo realizaba los problemas del grupo A, con la indicación: "Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo, indicar las

razones", y el otro grupo de alumnos, los problemas del grupo B, con la indicación: *"Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo por estar mal planteado, indicar por qué está mal planteado, plantearlo bien y resolverlo"*. Esto lo realizaron los alumnos de manera individual y por escrito en el mes de Abril de 1997.

La decisión de separar a los estudiantes en dos grupos, y realizar los distintos grupos de problemas al mismo tiempo, fue tomada para evitar una posible influencia entre los resolutores, si eran pasados en distintos días, como se realizó en las pruebas anteriores. De esta manera, el objetivo de esta cuarta prueba, era confirmar lo observado en las pruebas anteriores, con respecto a la *"Actuación de los estudiantes ante las diferentes indicaciones dadas a los diferentes grupos de problemas"*.

3.2.2 Estudios definitivos

Los estudios definitivos se desarrollaron con alumnos de la ESO y del CSE con los objetivos de nuestra investigación ya señalados y además con el objetivo complementario de poder contrastar los resultados de ambos grupos de alumnos.

POBLACIÓN DE ESTUDIO.

Esta prueba, se realizó con cuatro poblaciones diferentes:

23 alumnos de primer curso de Maestro de la Especialidad de Educación Infantil del CSE.

20 alumnos de segundo curso de la ESO, de edades comprendidas entre 13 y 14 años, pertenecientes al Colegio Público Isabel la Católica, de Santa Cruz de Tenerife.

3 alumnas de primer curso de Maestro de la Especialidad de Educación Infantil del CSE. Proviene de un bachillerato de letras donde los contenidos de matemáticas son mínimos. Fueron seleccionadas por su

expediente académico en Matemáticas (alto, medio y bajo).

3 alumnos de segundo curso de la ESO, de edades comprendidas entre 13 y 14 años, pertenecientes al Instituto de Enseñanza Secundaria El Chapatal, de Santa Cruz de Tenerife. Fueron seleccionados por su expediente académico en Matemáticas (alto, medio y bajo) y la opinión de sus respectivos profesores en dicha materia.

DISEÑO Y DESARROLLO DE LA PRUEBA.

La prueba incluyó 21 problemas de encontrar, bien y mal definidos (Anexo 1, cuestionario definitivo), en los contextos aritmético, algebraico y geométrico. Seis de ellos caracterizados desde la competencia como mal definidos del tipo T_2 (faltan datos) (problemas 1, 2, 3, 4, 5 y 6), nueve caracterizados desde la competencia como mal definidos del tipo T_3 (sobran datos) (problemas 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15) y seis caracterizados desde la competencia como bien definidos (problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21, siendo el 16, 17 y 18 bien definidos impropios y el 19, 20 y 21 bien definidos propios).

	Mal definido Tipo T_2	Mal definido Tipo T_3	Bien definido
Contexto aritmético	1 y 4	7, 10 y 13	16 (impropio) 19 (propio)
Contexto algebraico	2 y 5	8, 11 y 14	17 (impropio) 20 (propio)
Contexto geométrico	3 y 6	9, 12 y 15	18 (impropio) 21(propio)

Tabla 3. 5

A las poblaciones b) y d) de alumnos se les pasó a través de una entrevista, en dos sesiones, de una hora cada una, en distintos días. Las sesiones fueron videograbadas, y se realizaron mediante entrevistas semiestructuradas (flexibles), de manera individual, similares a las de las fase III de los estudios pilotos.

Con esta prueba, pretendíamos confirmar lo observado en el estudio piloto, con respecto a 1) la existencia o no de comportamientos regulares, en las acciones de los resolutores en la fase de "preparación" antes de abordar las fases de producción o enjuiciamiento, 2) las justificaciones utilizadas por los resolutores en sus actuaciones, en términos de validación y refutación.

Se utilizó el sistema de categorías derivado de nuestro Modelo de Competencia Formal y el esquema de análisis, así como las primeras categorías de análisis de las justificaciones.

En las tablas 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9 mostramos, a modo de resumen, las diferentes etapas de la investigación y sus elementos más representativos: población, instrumentos, entrevistas y objetivos.

	ESTUDIOS PILOTOS				ESTUDIOS DEFINITIVOS	
	FASE I	FASE II	FASE III	FASE IV	ESO	CSE
TEMPORALIZACIÓN	Marzo 1996	Diciembre 1996	Diciembre 1996	Abril 1997	Marzo 1998	Marzo 1998
POBLACIÓN	9 alumnos del CSE	13 alumnos del CSE	3 alumnos de niveles académicos: medio-alto, medio y bajo del CSE.	21 alumnos del CSE.	20 alumnos de 2º curso de la ESO, pertenecientes al Colegio Público Isabel la Católica de Santa Cruz de Tenerife. 3 alumnos de 2º curso de la ESO, pertenecientes al Instituto de Enseñanza Secundaria El Chapatal, de Santa Cruz de Tenerife, de niveles académicos: alto, medio y bajo.	23 alumnos de 1º de Magisterio de Educación Infantil del CSE. 3 alumnos de 1º de Magisterio de Educación Infantil del CSE, de niveles académicos: alto, medio y bajo.
CUESTIONARIOS	6 problemas de encontrar, bien y mal definidos	19 problemas de encontrar, bien y mal definidos.	13 problemas de encontrar, mal definidos.	13 problemas de encontrar, mal definidos.	21 problemas de encontrar, bien y mal definidos.	21 problemas de encontrar, bien y mal definidos.

Tabla 3. 6

	ESTUDIOS PILOTOS				ESTUDIOS DEFINITIVOS	
	FASE I	FASE II	FASE III	FASE IV	ESO	CSE
TIPO DE PRUEBA	Escrita	Escrita	Videograbada Individual la alumna de nivel académico medio-alto En pareja los alumnos de niveles académicos medio y bajo.	Escrita	Escrita 20 alumnos. Videograbada individual con cada uno de los tres alumnos de niveles académicos: alto, medio y bajo.	Escrita 23 alumnos. Videograbada individual con cada uno de los tres alumnos de niveles académicos: alto, medio y bajo.
TIPO DE ENTREVISTA			Semiestructuradas (flexibles), utilizando la técnica de la explicitación		Semiestructuradas (flexibles), utilizando la técnica de la explicitación	Semiestructuradas (flexibles), utilizando la técnica de la explicitación

Tabla 3. 7

	ESTUDIOS PILOTOS				ESTUDIOS DEFINITIVOS
	FASE I	FASE II	FASE III	FASE IV	ESO Y CSE
OBJETIVOS	Analizar la existencia o no de comportamientos regulares e invariantes, en las actuaciones de los resolutores, en la fase de preparación.	Analizar la existencia o no de comportamientos regulares e invariantes, en las actuaciones de los resolutores, en la fase de preparación.	Analizar la existencia o no de comportamientos regulares e invariantes, en las actuaciones de los resolutores en la fase de preparación. Observar las justificaciones utilizadas por los resolutores para validar o refutar un problema de encontrar mal definido, en términos de pruebas y argumentaciones.	Confirmar lo observado en las pruebas anteriores, con respecto a la actuación de los estudiantes ante las diferentes indicaciones dadas a los diferentes grupos de problemas”.	Confirmar lo observado en el estudio piloto, con respecto a: La existencia o no de comportamientos regulares e invariantes, en las actuaciones de los resolutores en la fase de preparación. Los diferentes tipos de Pruebas y Argumentaciones, utilizadas por los resolutores, para validar o refutar los problemas de encontrar bien y mal definidos.

Tabla 3. 8

	ESTUDIOS PILOTOS				ESTUDIOS DEFINITIVOS
	FASE I	FASE II	FASE III	FASE IV	ESO y CSE
INSTRUMENTOS PARA EL ANÁLISIS DE DATOS.	Nuestro Modelo de Competencia Formal y las tres categorías de análisis derivadas del mismo.	Nuestro Modelo de Competencia Formal y las cuatro categorías derivadas del mismo, ampliadas a partir de la primera prueba.	Nuestro Modelo de Competencia Formal y las cuatro categorías derivadas del mismo, ampliadas a partir de la primera prueba. Nuestro esquema de análisis. Primera fase de observación descriptiva de las justificaciones.		Nuestro Modelo de Competencia Formal y las cuatro categorías derivadas del mismo. Nuestro esquema de análisis. Categorías de Pruebas y Argumentaciones obtenidas en la segunda fase de observación descriptiva focalizada, de las justificaciones empleadas por los resolutores para validar o refutar los problemas de encontrar bien y mal definidos.

Tabla 3. 9

3.3 ENTREVISTAS A LOS ALUMNOS

Esta fase es fundamental en nuestra investigación, ya que nos permite registrar la observación del mayor número de hechos en unos individuos concretos.

Una entrevista de investigación, como afirman Cohen y Manion (1990) es “un diálogo iniciado por el entrevistador con el propósito específico de obtener información relevante para la investigación y enfocado por él sobre el contenido especificado...”

3.3.1 Descripción de las entrevistas

Las entrevistas han sido realizadas en dos momentos. En los estudios pilotos, con varios objetivos: en primer lugar seguir indagando sobre las posibilidades que nos ofrecían los distintos problemas planteados y en la búsqueda de comportamientos regulares e invariantes. Asimismo estas entrevistas nos permitieron hacer un esbozo de las justificaciones que utilizaban los alumnos al validar o refutar un problema.

Los estudios definitivos nos permitieron corroborar los comportamientos regulares e invariantes y las justificaciones que utilizaban en los diferentes problemas.

3.3.2 Descripción de los protocolos

El protocolo seguido en las entrevistas de este estudio fue para cada uno de los problemas del cuestionario, el siguiente:

Para el estudio de los comportamientos regulares e invariantes:

Si en la exposición del alumno, no queda claro cómo identifican el problema planteado, preguntarles: *¿Crees que está bien o mal definido? ¿Le faltan o le sobran datos?*

Si comentan que el problema no puede resolverse, sin más explicación, preguntarles: *¿En qué piensas al leerlo? ¿Por qué crees que no puede*

resolverse? ¿Qué harías ante una situación de este tipo? ¿Cómo plantearías tú el problema? ¿Cómo tendría que estar redactado el problema para que lo pudieras resolver?

En el análisis se mantienen las mismas categorías de análisis que en la segunda prueba.

Para el estudio de las justificaciones, el protocolo seguido en las entrevistas, fue el siguiente:

¿En qué piensas cuando lees el problema? ¿En qué piensas cuando actúas de esa manera? ¿Puedes darme tu opinión sobre el problema?

Si comentan que un dato sobra o que falta algún dato: ¿Por qué crees que faltan datos? ¿Por qué crees que sobra ese dato?

Si no utilizan determinados datos, sin hacer ningún comentario al respecto. *Del resto de los datos del problema, ¿qué comentas?*

Si hacen una operación en la pizarra y no comentan nada sobre la misma: *¿me puedes decir en qué pensaste al realizar esa operación?...*

Cuando terminan de replantear el problema: ¿De esa manera no le faltaría ni le sobraría ningún dato? ¿De esa manera sí puede resolverse?...

3.3.3 Selección de los alumnos

Las entrevistas iniciales se realizaron con un alumno de nivel académico medio-alto y con una pareja de dos alumnos de nivel académico medio y bajo.

Las entrevistas, dentro de los estudios definitivos, se llevaron a cabo con 3 alumnos de segundo de la ESO y 3 alumnos de primero de Maestro de Educación Infantil del CSE, de diferentes niveles académicos.

La selección de los alumnos se hizo en el nivel de Secundaria, de

acuerdo a sus calificaciones y a la valoración de sus profesores sobre aspectos de su personalidad, procurando que no participaran niños excesivamente tímidos o nerviosos.

En el CSE, nos ceñimos a sus calificaciones en Matemáticas extraídas de su expediente académico.

3.3.4 Desarrollo de las entrevistas

En las entrevistas se utilizaron los cuestionarios diseñados. Fueron realizadas en sus Centros respectivos: en un aula del IES El Chapatal y en el aula-laboratorio de Matemáticas del Centro Superior de Educación.

Previamente a las entrevistas a los alumnos de Secundaria, se les envió una carta a sus padres solicitando el permiso para que sus hijos fuesen vídeo grabados, y a los del CSE, por ser mayores de edad, se les pidió su participación voluntaria.

El estudio de las entrevistas se llevó a cabo siguiendo las categorías de análisis definidas y el esquema de análisis.

3.4 DISEÑO DEL CUESTIONARIO DEFINITIVO

En lo que sigue expondremos las características del primero y segundo cuestionario y cómo a partir del análisis de éstos se generó el cuestionario definitivo (Anexo 1).

El primer cuestionario está formado por 6 problemas de encontrar bien y mal definidos, que incluyen cuatro problemas de encontrar mal definidos y dos problemas de encontrar bien definidos, entre los cuales hay de contexto aritmético, algebraico y geométrico. De los mal definidos, tres son del tipo T_2 (faltan datos): problemas A1, A2 y B1, y uno es del tipo T_3 (sobran datos): problema B2. Los dos problemas bien definidos son el A3 y B3.

	Grupo A	Grupo B
Mal definido	A1 (Tipo T ₂ de contexto algebraico)	B1 (Tipo T ₂ de contexto algebraico)
	A2 (Tipo T ₂ de contexto aritmético)	B2 (Tipo T ₃ de contexto aritmético)
Bien definido	A3 (contexto aritmético)	B3 (contexto geométrico)

Tabla 3.10

De la aplicación de este primer cuestionario se vio la necesidad de aumentar el número de problemas de manera que estuviesen representados de igual manera, tanto en la opción A como la B, los problemas mal definidos de tipo T₂ y T₃ y los problemas bien definidos, así como los diferentes contextos. Esto nos condujo a su vez, a eliminar el problema B2 y modificar el problema B1. De esta forma se elabora un cuestionario de 19 problemas, que se distribuye así:

	Mal definido Tipo T ₂	Mal definido Tipo T ₃	Bien definido
Contexto aritmético	A1, A3 y B1	A4 y B4	A7 y B7
Contexto algebraico	A2 y B2	A5 y B5	A8 y B8
Contexto geométrico	B3 y B10	A6 y B6	A9 y B9

Tabla 3.11

De la aplicación del segundo cuestionario se vio la necesidad de llevar a cabo ciertas modificaciones, para poder presentar un cuestionario donde estuviesen representados, los problemas bien definidos propios e impropios, los problemas mal definidos de tipo T₂ donde $E'_0 \subset E_0$ (T₂A) y donde $E'_0 \not\subset E_0$ (T₂B y T₂C), y los problemas mal definidos T₃ donde la solución esté incluida entre los datos añadidos (T₃A) y donde la solución no esté incluida entre los datos añadidos (T₃B y T₃C). Todo esto en los diferentes contextos.

Esto nos condujo a su vez, a eliminar el problema A1, por haber varios

problemas de la misma tipología.

De esta forma se elabora un cuestionario de 21 problemas, que se distribuye así:

	Mal definido Tipo T ₂ A	Mal definido Tipo T ₂ B yT ₂ C	Mal definido Tipo T ₃ A	Mal definido Tipo T ₃ B yT ₃ C	Bien definido
Contexto aritmético	1	4	13	7 y 10	16 (impropio) 19 (propio)
Contexto algebraico	2	5	8 y 14	11	17 (impropio) 20 (propio)
Contexto geométrico	3	6	15	9 y 12	18 (impropio) 21 (propio)

Tabla 3.12

Los problemas utilizados en los protocolos se construyen, siguiendo nuestro modelo de competencias, a partir de un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido.

Surge la necesidad de contextualizar los problemas a utilizar en el estudio y decidimos elegir tres contextos diferentes: aritmético, algebraico y geométrico. Se nos presentó de inmediato delimitar ¿qué entendemos por problema aritmético, algebraico y geométrico?, en especial los dos primeros (Palarea y Socas, 1995) y optamos por el siguiente criterio: Considerar dentro de los problemas algebraicos dos tipos de problemas, los algebraicos propiamente dichos, cuando los problemas están en los textos de matemáticas elementales en álgebra, y además responden a una estructura del tipo:

a) Ecuación lineal $ax + b = cx + d$ con a y $c \neq 0 \wedge b \text{ ó } d \neq 0$

b) Sistema lineal $\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right.$

c) Ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

Y los problemas prealgebraicos, cuando responden a una estructura del tipo:

$$a) ax + b = c \quad \text{con } a \neq 0 \wedge b \text{ ó } c \neq 0$$

$$b) \frac{x}{a} = \frac{b}{c} \quad \text{con } a, b, c \neq 0 \text{ (regla de tres, proporcionalidad),}$$

donde no hay que operar con los términos que poseen la incógnita.

En las demás situaciones los consideramos aritméticos. Para los geométricos no tomamos ningunas referencias específicas.

A continuación exponemos la construcción de los problemas del tercer cuestionario, especificando la denominación de los mismos en los otros cuestionarios.

PROBLEMA 1.

Presente en el segundo cuestionario como A3. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. ¿Cuál es la edad del profesor de inglés, si éste tiene tantos años como el doble del número de alumnos y alumnas?

Eliminando datos, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_2 de contexto aritmético, caracterizado, desde la competencia por T_2A , con $E_0 \not\subset E'_0 \wedge E'_0 \subset E_0$, (es decir, obtenemos el E'_0 eliminando datos al E_0):

En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. ¿Cuál es la edad del profesor de inglés?

PROBLEMA 2.

Presente en el primer cuestionario como A1 y en el segundo cuestionario como A2. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar

caracterizado desde la competencia como bien definido:

En un corral hay gallinas y conejos. Hay 32 animales y 116 patas.

¿Cuántas gallinas y conejos hay en el corral?

Eliminando datos, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_2 de contexto algebraico, caracterizado, desde la competencia por T_2A , con $E_0 \not\subset E'_0 \wedge E'_0 \subset E_0$, (es decir, obtenemos el E'_0 eliminando datos al E_0):

En el corral de Antonio hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay en dicho corral?

PROBLEMA 3.

Presente en el segundo cuestionario como B3. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

Dibuja el cuadrilátero $A(-2,-1)$, $B(1,4)$, $C(4,3)$ y $D(4,4)$ y calcula los puntos medios de cada lado del cuadrilátero.

Eliminando datos, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_2 de contexto geométrico, caracterizado, desde la competencia por T_2A , con $E_0 \not\subset E'_0 \wedge E'_0 \subset E_0$, (es decir, obtenemos el E'_0 eliminando datos al E_0):

Dibuja el cuadrilátero $A(-2,-1)$, $B(1,4)$, $C(4,3)$ y calcula los puntos medios de cada lado del cuadrilátero.

PROBLEMA 4.

Presente en el segundo cuestionario como B1. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

Pedro compra una botella de leche y 3 barras de pan. La botella de leche cuesta 150 pesetas y cada barra de pan 45 ptas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?

Añadiendo y eliminando datos, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_2 de contexto aritmético, caracterizado, desde la competencia por T_2B , con $E_0 \not\subset E'_0 \wedge E'_0 \not\subset E_0 \wedge E_0 \cap E'_0 \neq \emptyset$, (es decir, obtenemos el E'_0 añadiendo y eliminando datos al E_0):

Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?

PROBLEMA 5.

Presente en el segundo cuestionario como B2. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa a la plaza del pueblo hay 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

Añadiendo y eliminando datos, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_2 de contexto algebraico, caracterizado, desde la competencia por T_2B , con $E_0 \not\subset E'_0 \wedge E'_0 \not\subset E_0 \wedge E_0 \cap E'_0 \neq \emptyset$, (es decir, obtenemos el E'_0 añadiendo y eliminando datos al E_0):

A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa al instituto hay 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

PROBLEMA 6.

Presente en el segundo cuestionario como B10. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

En el pueblo hay una plaza rectangular. En un vértice de la misma está

tu casa y en el vértice opuesto está el colegio. Si tiene 90 m de largo y 60 m de ancho, ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa, si te desplazas por la diagonal de la plaza?

Eliminando datos, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_2 de contexto geométrico, caracterizado, desde la competencia por T_2A , con $E_0 \not\subset E'_0 \wedge E'_0 \subset E_0$, (es decir, obtenemos el E'_0 eliminando datos al E_0):

Si la plaza que hay delante de tu casa es rectangular y tiene 90 m y 60 m de dimensiones, ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa?

PROBLEMA 7.

Sólo presente en el tercer cuestionario. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

Un librero vendió en el mes de marzo 24 libretas a 315 pesetas cada una, 12 bolígrafos a 125 pesetas cada uno, 10 diccionarios a 12.000 pesetas cada uno, 20 bestsellers a 2.500 pesetas cada uno, 20 novelas a 1.250 pesetas cada una. ¿Cuánto dinero obtuvo de la venta?

Eliminando datos y añadiendo otros datos entre los que se encuentra la solución, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_3 de contexto aritmético, caracterizado, desde la competencia por T_3C , con $E_0 \not\subset E'_0 \wedge R \subset E'_0$, (es decir, obtenemos el E'_0 eliminando datos al E_0 y añadiendo otros datos y la solución):

Un librero cuya librería está situada a 60 metros del centro de la ciudad, obtuvo en ventas durante el mes de marzo 204.060 pesetas. Si vendió 24 libretas a 315 pesetas cada una, 12 bolígrafos a 125 pesetas cada uno, 10 diccionarios a 12.000 pesetas cada uno y 20 bestsellers a 2.500 pesetas cada uno, ¿cuánto dinero obtuvo de la venta?

PROBLEMA 8.

Sólo presente en el tercer cuestionario. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

Tenemos tres gallinas, A, B y C. La gallina A ha puesto 3 más que el doble de la gallina C, y la gallina B, 4 menos que el triple de la gallina C. Si la gallina C ha puesto 3 huevos, ¿cuántos huevos han puesto cada una de las gallinas?

Añadiendo datos, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_3 de contexto algebraico, caracterizado, desde la competencia por T_3A , con $E_0 \subset E_0' \wedge R \not\subset E_0'$, (es decir, obtenemos el E_0' añadiendo datos al E_0):

Tres gallinas, A, B y C, que pesan juntas 4'5 kg han puesto 17 huevos. La gallina A ha puesto 3 más que el doble de la gallina C, y la gallina B, 4 menos que el triple de la gallina C. Si la gallina C ha puesto 3 huevos, ¿cuántos huevos han puesto cada una de las gallinas?

PROBLEMA 9.

Sólo presente en el tercer cuestionario. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

Una escalera tiene 100 cm de longitud y está apoyada en la pared a 125 cm del suelo. ¿Cuál es la distancia mayor de la pared a la escalera?

Añadiendo datos entre los que se encuentra la solución, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_3 de contexto geométrico, caracterizado, desde la competencia por T_3B , con $E_0 \subset E_0' \wedge R \subset E_0'$, (es decir, obtenemos el E_0' añadiendo datos al E_0 , entre los que se encuentra la solución):

El pie de una escalera dista de la pared 75 cm. Si la escalera, que tiene 100 cm de longitud y pesa 3 kg, está apoyada en la pared a 125 cm del suelo ¿cuál es la distancia mayor de la pared a la escalera?

PROBLEMA 10.

Presente en el segundo cuestionario como B4. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

Una señora cría animales. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen 632 gramos, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana?

Eliminando y añadiendo datos entre los que se encuentra la solución, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_3 de contexto aritmético, caracterizado, desde la competencia por T_3C , con $E_0 \not\subset E'_0 \wedge E'_0 \subset E_0$, (es decir, obtenemos el E'_0 eliminando y añadiendo datos al E_0 , entre los que se encuentra la solución):

Una señora cría durante 52 semanas una cabra y 3 conejos. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen todo el pienso menos 128 gramos, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana?

PROBLEMA 11.

Presente en el segundo cuestionario como B5. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió $\frac{2}{3}$ de la distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

Eliminando y añadiendo datos entre los que se encuentra la solución, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_3 de

contexto algebraico, caracterizado, desde la competencia por T_3C , con $E_0 \not\subset E'_0 \wedge E'_0 \subset E_0$, (es decir, obtenemos el E'_0 , eliminando y añadiendo datos al E_0 , entre los que se encuentra la solución):

A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa al colegio es de 15 km y de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió la distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo quedándole 6 km por recorrer. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

PROBLEMA 12.

Presente en el segundo cuestionario como A6. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro da 340 vueltas?

Eliminando y añadiendo datos entre los que se encuentra la solución, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_3 de contexto geométrico, caracterizado, desde la competencia por T_3C , con $E_0 \not\subset E'_0 \wedge E'_0 \subset E_0$, (es decir, obtenemos el E'_0 , eliminando y añadiendo datos al E_0 , entre los que se encuentra la solución):

¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro recorre 640 metros y tardamos 2 horas?

PROBLEMA 13.

Presente en el segundo cuestionario como A4. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el vendedor le dice que por comprarla a

plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Si hace una entrega inicial de 9.000 pesetas, ¿cuánto tiene que pagar mensualmente?

Añadiendo datos, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_3 de contexto aritmético, caracterizado, desde la competencia por T_3A , con $E_0 \subset E'_0 \wedge R \not\subset E'_0$, (es decir, obtenemos el E'_0 añadiendo datos al E_0):

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el vendedor le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. Si comienza a pagarla 4 meses más tarde, ¿cuánto tiene que pagar mensualmente?

PROBLEMA 14.

Presente en el segundo cuestionario como A5. Se construye a partir del siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

Añadiendo datos, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_3 de contexto algebraico, caracterizado, desde la competencia por T_3A , con $E_0 \subset E'_0 \wedge R \not\subset E'_0$, (es decir, obtenemos el E'_0 añadiendo datos al E_0):

Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. En total se gastaron 2.400 pesetas. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

PROBLEMA 15.

Presente en el segundo cuestionario como B6. Se construye a partir del

siguiente problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido:

Necesitamos láminas de dibujo de 23 cm de largo y 18 cm de ancho. Si se deja un margen de 2 cm a cada lado, ¿cuánto medirá la superficie destinada a escribir de cada hoja?

Añadiendo datos, obtenemos el siguiente problema de encontrar mal definido del Tipo T_3 de contexto geométrico, caracterizado, desde la competencia por T_3A , con $E_0 \subset E'_0 \wedge R \not\subset E'_0$, (es decir, obtenemos el E'_0 añadiendo datos al E_0):

Necesitamos 5 láminas de dibujo de 23 cm de largo y 18 cm de ancho. Si se deja un margen de 2 cm a cada lado, ¿cuánto medirá la superficie destinada a escribir de cada hoja?

CAPÍTULO 4

ESTUDIO PILOTO

- **INTRODUCCIÓN**

- **FASE I DEL ESTUDIO PILOTO**
 - RESULTADOS GLOBALES
 - ANÁLISIS DE DATOS
 - DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES

- **FASE II DEL ESTUDIO PILOTO**
 - RESULTADOS GLOBALES
 - ANÁLISIS DE DATOS
 - DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES

- **FASE III DEL ESTUDIO PILOTO**
 - RESULTADOS GLOBALES
 - ANÁLISIS DE DATOS
 - DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES

- **FASE IV DEL ESTUDIO PILOTO**
 - RESULTADOS GLOBALES
 - DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES

- **CONCLUSIONES DEL ESTUDIO PILOTO**

4.1 INTRODUCCIÓN

Una vez descrito el diseño de investigación y los instrumentos de recogida de datos de la misma en el Capítulo 3, en este Capítulo 4, la finalidad es presentar los datos obtenidos sobre la actuación de los alumnos en la fase de “preparación” al enfrentarse a problemas de encontrar bien y mal definidos, así como un análisis del proceso de resolución seguido y de las justificaciones que usaban los resolutores en términos de prueba y argumentación.

Como hemos indicado en el apartado 3.2.1 del capítulo 3, los estudios pilotos comprendieron cuatro fases diferentes, que pasamos a describir en este capítulo.

4.2 FASE I DEL ESTUDIO PILOTO

Durante el curso 1995-96, realizamos la primera prueba del estudio piloto, con nueve alumnos de tercer curso de Maestro de la Especialidad de Educación Infantil del Centro Superior de Educación de la Universidad de La Laguna (Tenerife), a los que se les pasó una colección de seis problemas de encontrar bien y mal definidos en los contextos aritmético, algebraico y geométrico, dos problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos (A3 y B3) y cuatro problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos (A1, A2, B1 y B2) (Anexo 1, primer cuestionario). Estos problemas fueron presentados a los alumnos de manera individual y por escrito (ver apartado 3.2 del capítulo 3).

El objetivo era analizar el comportamiento de los resolutores frente a problemas de encontrar bien y mal definidos, observando: cómo identifican las situaciones problema en términos de bien o mal definidos, cómo las caracterizan, cómo establecen relaciones entre los datos y el objetivo en este tipo de situaciones, qué situaciones se crean cuando el

alumno se enfrenta con problemas de encontrar bien y mal definidos, y de qué manera influye la presencia o ausencia de indicaciones de que puede haber un problema mal planteado.

Con todas estas observaciones, pretendíamos “analizar la existencia o no de comportamientos regulares e invariantes, en las actuaciones de los resolutores, en la fase de preparación, antes de abordar las fases de producción o enjuiciamiento”.

Para el análisis de los datos utilizamos nuestro Modelo de Competencia Formal y las tres categorías de análisis derivadas del mismo (Anexo 2).

4.2.1 Resultados globales

Presentamos en este apartado, los resultados globales de los distintos comportamientos de los resolutores frente a los diferentes problemas pasados en esta prueba (Anexo 4, tablas: [1-4]).

- Con respecto a la categoría de análisis (1), encontramos que:
 - a) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien definidos (problemas A3 y B3), el comportamiento más frecuente es identificarlos como bien definidos [C1B] (el 78% en el problema A3 y el 89% en el B3). Cuando son identificados por los resolutores como mal definidos [C1A], la totalidad de los resolutores que presentan este comportamiento, si el problema es de contexto aritmético, lo identifican como mal definido del tipo T_3 (el 22%), en cambio si el problema es de contexto geométrico, lo identifican como mal definido del tipo T_2 (el 11%).
 - b) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos (problemas A1, A2, B1 y B2), observamos asimetrías según el contexto, de manera que en el contexto aritmético, el

comportamiento más frecuente es: identificarlos como mal definidos [C1A] (el 78% en el problema A2 y el 89% en el B2), en cambio en el contexto algebraico, se dan en igual medida, los comportamientos de identificarlos como bien definidos [C1B] (el 56% en el problema A1) e identificarlos como mal definidos [C1A] (el 44% en el problema A1 y el 100% en el problema B1).

Con respecto a la tipología, observamos que la totalidad de los resolutores que identifican estos problemas como mal definidos, cuando se trata de un problema de encontrar, caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_2 , lo identifican como tal un 78% en el problema A2, un 44% en el A1 y un 100% en el B1, y cuando se trata de un problema de encontrar, caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_3 , lo identifican como tal un 89% en el problema B2.

- Con respecto a la categoría de análisis (2).
 - a) En los problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos, observamos que, en una prueba escrita, es difícil establecer si las acciones de los resolutores están dirigidas por los datos o por el objetivo cuando son interpretados por el resolutor como bien definidos, ya que se limitan a operar con todos los datos dados sin ninguna explicación ni comentario. Sin embargo, en todos los resolutores que los identifican como mal definidos [C1A], sus acciones están dirigidas por el objetivo [C2B] (un 22% en el problema A3 y un 11% en el B3).
 - b) En los problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos, encontramos diferencias según el contexto, de manera que en el contexto aritmético, el comportamiento más frecuente es que sus acciones estén dirigidas por el objetivo [C2B] (un 78% en el problema A2 y un 67% en el B2), sin embargo en el contexto algebraico, se observa el comportamiento: acciones estén dirigidas por los datos [C1A] (un 78% en

el problema A1) y el comportamiento: acciones dirigidas por el objetivo [C2B] (un 100% en el problema B1).

- Con respecto a la categoría de análisis (3).
 - a) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien definidos (A3 y B3), el total de los resolutores que los identifican como mal definidos y los replantean (un 22% en el problema A3), presentan el comportamiento: eliminar datos [C2B].
 - b) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos, el comportamiento más frecuente entre los resolutores que transforman el problema es el de añadir datos [C3A], cuando es un problema caracterizado desde la competencia del tipo T_2 , y eliminar datos [C3B], cuando es un problema caracterizado desde la competencia del tipo T_3 .

En los problemas A2 y B1 (Tipo T_2), todos los resolutores que replantean el problema lo hacen añadiendo datos [C3A]. En el problema A1 (Tipo T_2), los resolutores que replantean el problema lo hacen añadiendo datos [C3A] un 11% y manteniendo los datos pero modificando el objetivo un 22%.

En el problema B2 (Tipo T_3), todos los resolutores que transforman el problema, lo hacen eliminando datos [C3B].

Con respecto a las diferentes indicaciones dadas ante cada grupo de problemas (A y B), observamos que no seguían, en general, las indicaciones dadas, de manera que la tendencia era replantear los problemas que identificaban como mal definidos, independientemente de dichas indicaciones. Incluso, se dan situaciones donde la totalidad de los resolutores que identifican un problema del grupo A como mal definido, lo replantean.

4.2.2 Análisis de datos

Presentamos aquí, un análisis detallado de los diferentes problemas pasados en esta prueba (Anexo 5, tabla 35).

Antes de comenzar dicho análisis, queremos aclarar dos cuestiones:

a) Al finalizar el análisis de cada uno de los problemas, presentamos unos diagramas que muestran, de manera esquemática, la actuación ante dicho problema tanto desde la competencia como desde la ejecución. La parte derecha del diagrama muestra las acciones que realiza la investigadora desde la competencia, sobre el estado inicial (E_0) del problema de encontrar bien definido para transformarlo en el estado inicial (E_0') del problema de encontrar mal definido que se presenta al alumno. La parte central del diagrama muestra cómo es identificado por los resolutores el estado E_0' y las acciones realizadas por ellos cuando replantean el problema obteniendo un estado E_0'' . La parte izquierda del diagrama expone la categorización asignada a la secuencia de comportamientos observados en los resolutores. En lo que sigue los diagramas con los bordes enfatizados reflejan tanto los comportamientos invariantes como los comportamientos regulares más significativos, es decir aquellos que superan el 50%.

b) Cuando en una prueba escrita, decimos: *“identifican el problema presentado implícitamente como...”*, nos referimos a que el resolutor explícitamente identifica el problema de una manera pero actúa sobre él de forma diferente a lo expresado.

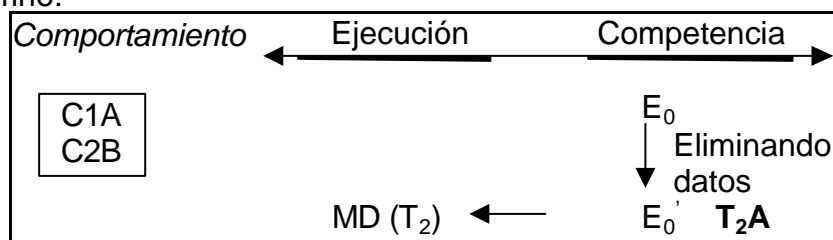
Es decir, que en este apartado, describimos análisis de los problemas pasados en esta prueba, indicando las diferentes actuaciones de los alumnos frente a cada uno de ellos, además de presentar los diferentes comportamientos de manera esquemática.

PROBLEMA A1

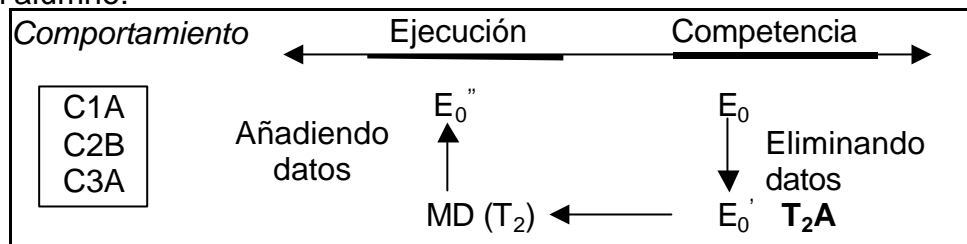
- Un alumno se da cuenta que no es posible a partir del estado inicial obtener una solución, ya que no está bien determinado dicho estado porque faltan datos, pero no lo replantea. Es decir, lo identifica como mal definido tipo T_2 [C1A], estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], y no lo replantea.
- Un alumno se da cuenta que no es posible a partir del estado inicial obtener una solución, ya que no está bien determinado dicho estado, porque faltan datos, replanteándolo. Por lo tanto, lo identifica como mal definido tipo T_2 [C1A], estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B] y lo replantea añadiendo datos [C3A].
- Dos alumnos identifican el problema mal definido como un problema bien definido [C1B], pero de manera implícita lo transforman modificando el objetivo. Es decir, que estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], lo identifican implícitamente como mal definido [C1B-C1A] y lo transforman en otro problema, modificando el objetivo y manteniendo los datos.
- Cinco alumnos identifican el problema como un problema bien definido, de manera que, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], lo identifican como bien definido [C1B] e interpretan el estado E_0' como el E_0 .

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

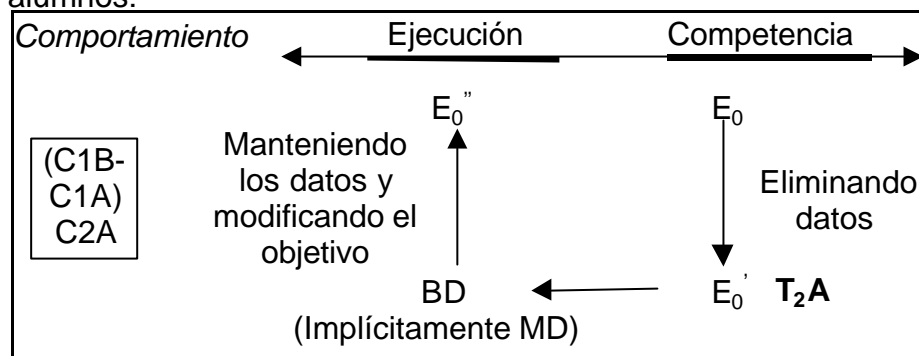
Un alumno:



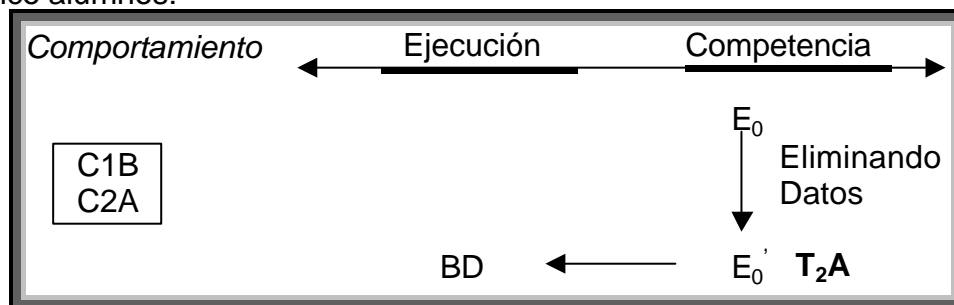
Un alumno:



Dos alumnos:



Cinco alumnos:



Se trata de un comportamiento regular, presente en un 55'5% de los resolutores.

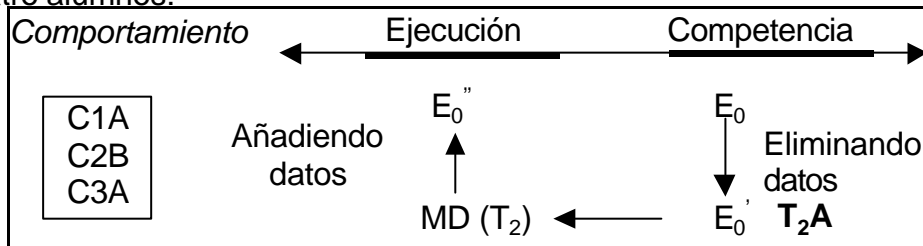
PROBLEMA B1

- Cuatro alumnos observan que no es posible a partir del estado inicial obtener una solución, ya que no está bien determinado dicho estado porque faltan datos, replanteándolo. En definitiva, lo identifican como mal definido tipo T₂ [C1A], sus acciones están dirigidas por el objetivo [C2B] y lo replantean añadiendo nuevos datos [C3A].
- Cinco alumnos observan que no es posible a partir del estado inicial

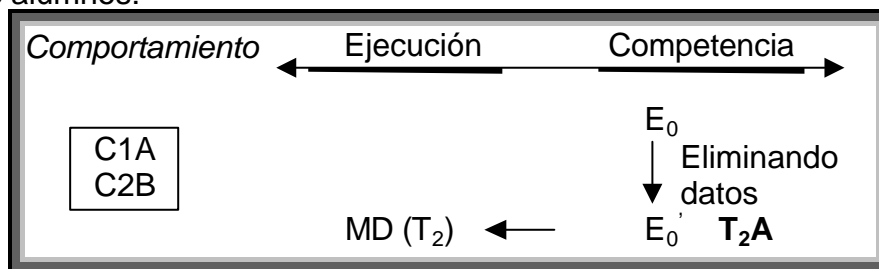
obtener una solución, ya que no está bien determinado dicho estado porque faltan datos, pero no lo replantean. Por lo tanto, lo identifican como mal definido tipo T_2 [C1A] y sus acciones están dirigidas por el objetivo [C2B].

De manera esquemática mostramos los distintos comportamientos observados que, en este caso, son comportamientos regulares (en un 44% y en un 55'5% de los resolutores) determinados, respectivamente, por la secuencia [C1A-C2B-C3A] que se concreta en: identificarlo como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo y replantearlo añadiendo datos, y la secuencia [C1A-C2B] que se concreta en: identificarlos como mal definido porque faltan datos y acciones dirigidas por el objetivo.

Cuatro alumnos:



Cinco alumnos:



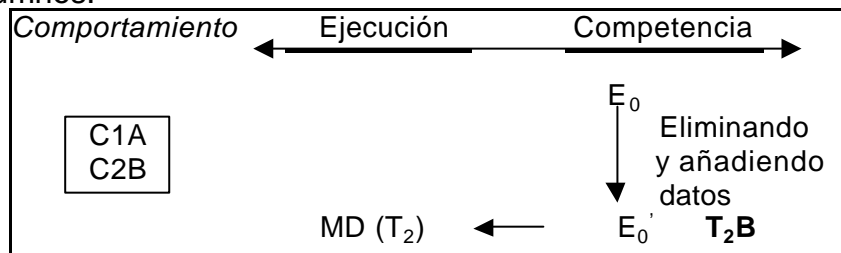
PROBLEMA A2.

- Dos alumnos se dan cuenta que no es posible a partir del estado inicial (E_0') obtener una solución, ya que no está bien determinado dicho estado, justificando que “es imposible resolverlo, porque no nos dicen que consume”, pero no lo replantean. En definitiva, lo identifican como mal definido tipo T_2 [C1A] y acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

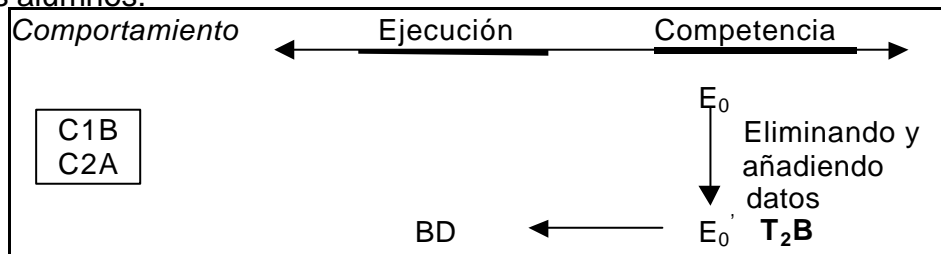
- Dos alumnos identifican el problema mal definido como un problema bien definido [C1B] de manera que interpretan el estado E_0' como el E_0 , estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A].
- Cinco alumnos comentan que el problema con los datos dados no se puede resolver y hacen un nuevo replanteamiento del problema añadiendo nuevos datos. Es decir, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como mal definido tipo T_2 [C1A] y lo transforman añadiendo datos [C3A] y manteniendo el objetivo.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

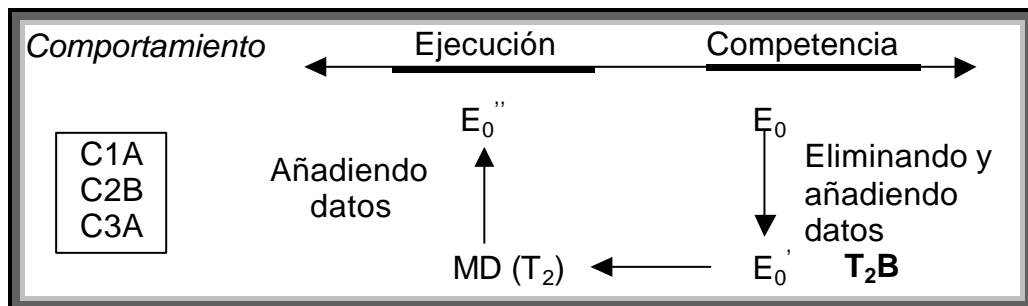
Dos alumnos:



Dos alumnos:



Cinco alumnos:



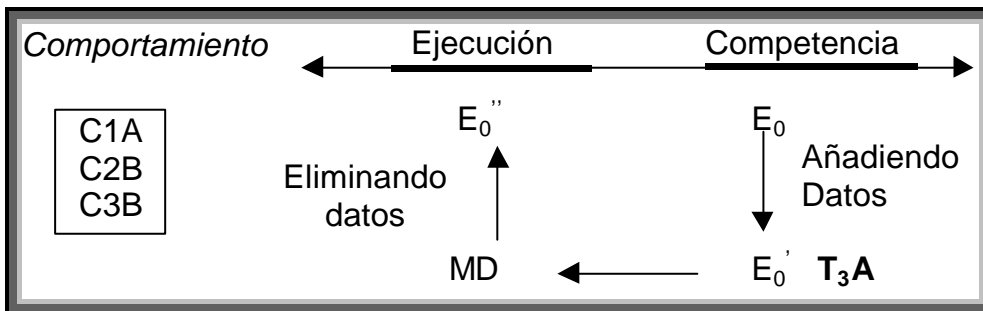
Se trata de un comportamiento regular, presente en un 55'5% de los resolutores.

PROBLEMA B2.

- Un alumno lo interpreta como bien definido pero dice que no sabe hacerlo [C1B], no pudiendo determinarse si sus acciones están dirigidas por los datos o por el objetivo, ya que no hace ningún comentario.
- Dos alumnos comentan que el objetivo no está bien determinado, ya que en el estado inicial (E_0') se dispone de datos que no se pueden utilizar, pero no lo replantean. Es decir, que estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], lo identifican como mal definido [C1A].
- Seis alumnos comentan que sobran datos, replanteando el problema. Por lo tanto, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como mal definido tipo T_3 [C1A], y lo transforman eliminando datos [C3B].

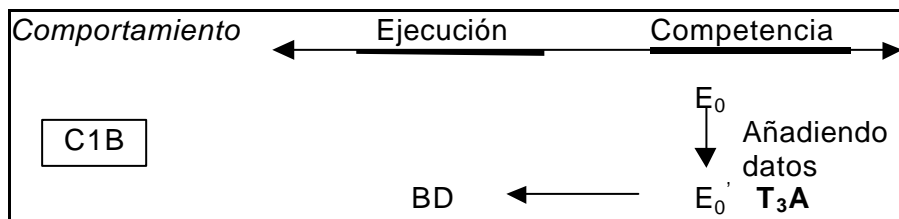
Esquemáticamente, los diferentes comportamientos observados son:

Seis alumnos:

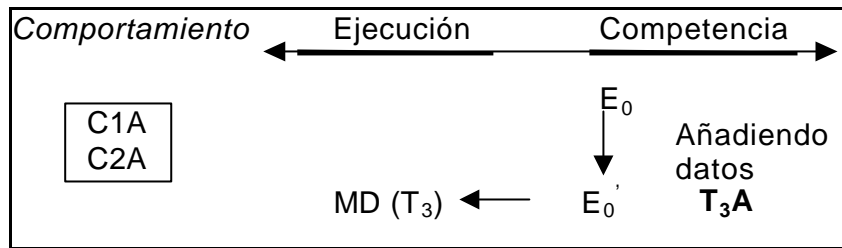


Se trata de un comportamiento regular, presente en un 66% de los resolutores.

Un alumno:



Dos alumnos:



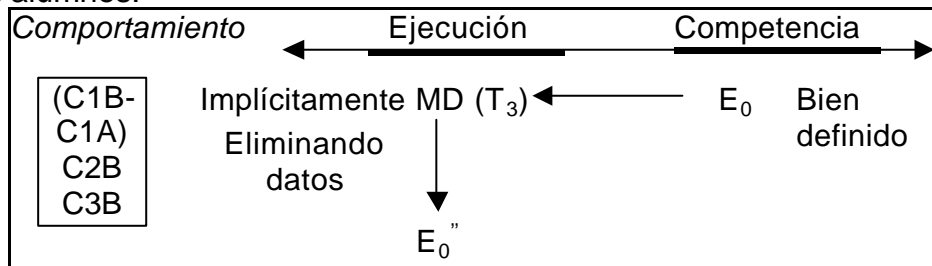
PROBLEMA A3.

- Dos alumnos, sin hacer ningún comentario, lo resuelven ignorando algunos datos y utilizando el resto de los datos para obtener el objetivo. Es decir, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican implícitamente como mal definido tipo T₃ [C1B-C1A] y lo transforman en mal definido del tipo T₂, eliminando datos [C3B] y manteniendo el objetivo.

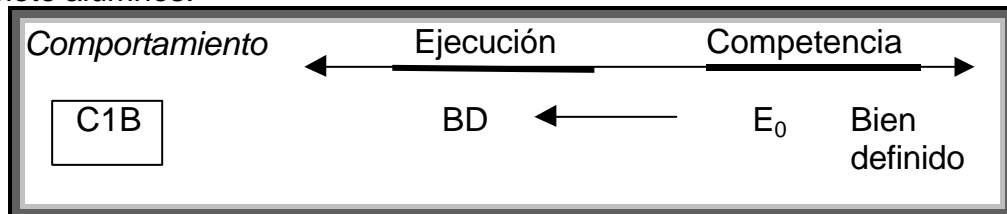
- Siete alumnos lo interpretan como un problema bien definido y lo resuelven sin hacer comentarios [C1B].

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Dos alumnos:



Siete alumnos:



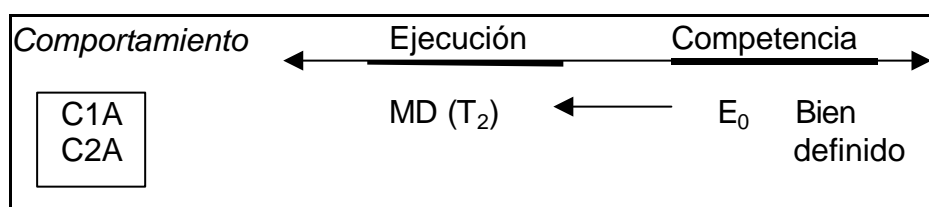
Se trata de un comportamiento invariante, presente en un 78% de los resolutores.

PROBLEMA B3.

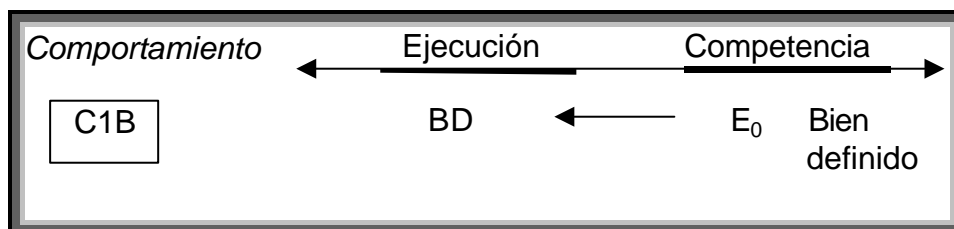
- Un alumno, al encontrarse frente a un problema que tiene una estructura diferente y que no sabe resolver, comenta que no es posible encontrar una solución por estar mal planteado, porque le falta un dato. Por lo tanto, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], lo identifica como mal definido tipo T_2 [C1A].
- Los ocho alumnos restantes lo interpretan como un problema bien definido y lo resuelven sin hacer comentarios [C1B].

Esquemáticamente, los diferentes comportamientos observados son:

Un alumno:



Ocho alumnos:



Se trata de un comportamiento invariante, presente en un 89% de los resolutores.

4.2.3 Discusión y consideraciones

A la vista de los resultados de la primera prueba del estudio piloto, consideramos lo siguiente:

- En los problemas de encontrar identificados desde la competencia como bien definidos, los distintos comportamientos observados en estos resolutores son:

a) Con respecto a la categoría de análisis (1), aunque observamos un comportamiento que podemos identificar como invariante: identificarlos como bien definidos [C1B], se observa también, en menor proporción, el comportamiento de identificarlos como mal definidos [C1A].

b) Con respecto a la categoría de análisis (2), no podemos determinar en muchos casos si sus acciones están dirigidas por los datos o por el objetivo, ya que al ser una prueba escrita, los alumnos se limitan, en la mayoría de los casos, a operar sin hacer ningún comentario, o decir “*no sé hacerlo*”.

c) Con respecto a la categoría de análisis (3), el comportamiento observado en estos alumnos, que podemos caracterizar como invariante, cuando identifican el problema presentado como mal definido y lo transforman, es: eliminar datos [C3B].

- Frente a los problemas de encontrar mal definidos, los distintos comportamientos observados son:

a) Con respecto a la categoría de análisis (1), observamos diferencias según el contexto: en los problemas de contexto aritmético, la tendencia de los alumnos es a identificar los problemas como mal definidos, en cambio, en los de contexto algebraico, la tendencia es a identificarlos como bien definidos y como mal definidos.

b) Con respecto a la categoría de análisis (2), observamos diferencias según el contexto: en los problemas de contexto aritmético, la tendencia de los alumnos es a que sus acciones estén dirigidas por el objetivo [C2B], en cambio, en los de contexto algebraico, las acciones de estos resolutores están dirigidas tanto por los datos [C2A] como por el objetivo [C2B]. Queremos mencionar, que en los casos donde el problema mal definido es identificado como bien definido, las acciones están dirigidas por los datos.

c) Con respecto a la categoría (3), la tendencia de los resolutores que transforman el problema, cuando actúan sobre los datos, es añadir datos [C3A] cuando el problema es de tipo T_2 o eliminar datos [C3B] cuando el problema es de tipo T_3 .

- Del análisis conjunto de las tres categorías de análisis, observamos los siguientes comportamientos regulares e invariantes:

a) Ante los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, el comportamiento invariante observado en estos resolutores es: interpretarlos como bien definidos [C1B], no pudiendo establecerse si sus acciones están dirigidas por los datos o por el objetivo, ya que al ser una prueba escrita, los resolutores se limitan, en la mayoría de los casos, a operar con todos los datos y dar una solución sin hacer ningún comentario.

b) Ante los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos, no observamos comportamientos invariantes. Con respecto a los comportamientos regulares, encontramos diferencias respecto al contexto, de manera que en el contexto aritmético los comportamientos regulares observados quedarían determinados por las secuencias: [C1A-C2B-C3A] en el problema A2, que se concreta en: identificarlo como mal definido y transformarlo en otro problema añadiendo datos, y la secuencia [C1A-C2B-C3B] en el problema B2, que se concreta en: identificarlo como mal definido y transformarlo en otro problema eliminando datos. En los problemas de contexto algebraico, observamos los siguientes comportamientos regulares, determinados por las secuencias: [C1A-C2B-C3A] y [C1A-C2B] en el problema B2, que se concreta en: identificarlo como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo y transformarlo o no en otro problema añadiendo datos, y la secuencia [C1B-C2A] en el problema A1, que se concreta en: identificarlo

como bien definido y acciones dirigidas por los datos.

- Con respecto a las diferentes indicaciones dadas a los grupos de problemas A y B, encontramos diferencias en el análisis e interpretación de los datos disponibles inicialmente, en las restricciones y en la identificación del criterio de solución. Su actuación, en la fase de preparación, no es la misma cuando se advierte que puede haber un problema mal planteado que cuando se omite. No obstante, parece que la indicación más influyente es: "Resolver los siguientes problemas. Si alguno no puedes resolverlo por estar mal planteado, indicar por qué está mal planteado, plantearlo bien y resolverlo", ya que la tendencia es replantear el problema presentado, cuando lo identifican como mal definido.

De manera general podemos indicar que:

- El Modelo de Competencia Formal construido nos parece de gran utilidad porque permite caracterizar los diferentes problemas de encontrar bien y mal definidos y analizar las actuaciones de los resolutores.
- La incorporación de problemas "mal definidos" hace más rica la fase de preparación en la resolución de un problema, facilitando al investigador la interpretación y análisis que hace el resolutor de los datos disponibles inicialmente, de las restricciones y modificación de los datos y de los criterios de resolución.
- Las indicaciones dadas en los grupos de problemas A y B parecen tener consecuencias en la manera de actuar de los alumnos.
- Al analizar las distintas categorías de análisis, observamos situaciones no «categorizadas» que creemos tienen importancia, en el estudio del comportamiento de los resolutores en la fase de preparación de la resolución de problemas, objeto de esta investigación: a) Al identificar el

problema planteado, hay situaciones donde los alumnos no saben cómo identificarlo, no pudiendo determinar si está bien o mal definido; b) Al replantear el problema presentado, los resolutores no sólo modifican los datos, sino que modifican los datos y el objetivo o bien modifican únicamente el objetivo; c) Cuando modifican los datos hay situaciones donde añaden y eliminan datos al mismo tiempo; d) Cuando replantean el problema presentado, lo transforman en diferentes tipos de problemas: en bien definido, en mal definido tipo T_2 y en mal definido tipo T_3 .

De las consideraciones expuestas anteriormente, vemos la necesidad de:

1. Incorporar al estudio, todos los tipos de problemas que conforman nuestro Modelo de Competencia Formal.
2. Confirmar la necesidad de eliminar o no, de nuestro trabajo de investigación, las diferentes sugerencias indicadas (grupo A y grupo B), ya que es objetivo de nuestro estudio el analizar qué ocurre al replantearlo.
3. Ampliar las categorías de análisis derivadas de nuestro Modelo de Competencia Formal, de manera que recojan los distintos comportamientos de los resolutores. Las modificaciones que surgen del análisis de los datos obtenidos en la Fase I del estudio piloto son las siguientes:
 - a) En la categoría de análisis (1), incorporar un nuevo comportamiento: no saben identificarlo.
 - b) En la categoría de análisis (2), incorporar qué es lo que modifican cuando replantean el problema: sólo los datos, sólo el objetivo o los datos y el objetivo.
 - c) En la categoría de análisis (3), detallar si al modificar los datos, añaden otros, eliminan o añaden o solamente eliminan datos.

d) Incorporar una cuarta categoría de análisis, que recoja en qué tipo de problema, transforman el problema dado.

4.3 FASE II DEL ESTUDIO PILOTO

Durante el curso 1996-97, llevamos a cabo la segunda prueba del estudio piloto, con trece alumnos de tercer curso de Maestro de la Especialidad de Educación Infantil, del Centro Superior de Educación de la Universidad de La Laguna (Tenerife), a los que se les pasó una colección de diecinueve problemas de encontrar bien y mal definidos en los contextos aritmético, algebraico y geométrico. Estos incluyen siete mal definidos del Tipo T_2 (problemas A1, A2, A3, B1, B2, B3 y B10), seis mal definidos del Tipo T_3 (problemas A4, A5, A6, B4, B5 y B6) y seis bien definidos (problemas A7, A8, A9, B7, B8 y B9) (Anexo 1, segundo cuestionario). Estos problemas fueron presentados a los alumnos de manera individual y por escrito (ver apartado 3.2.1 del capítulo 3).

El objetivo era confirmar los resultados obtenidos en la primera prueba exploratoria, analizando la existencia o no, de comportamientos regulares e invariantes, en las actuaciones de los resolutores en la fase de preparación.

Para el análisis de los datos utilizamos nuestro Modelo de Competencia Formal y las cuatro categorías de análisis derivadas del mismo, ampliadas a partir del análisis de los datos de la primera prueba del estudio piloto (Anexo 2).

4.3.1 Resultados globales

Presentamos en este apartado, los resultados globales de los distintos comportamientos de los resolutores frente a los diferentes pasados en esta prueba (Anexo 4, tablas: [5-10]).

- Con respecto a la categoría de análisis (1), encontramos que:
 - a) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien definidos (problemas A7, A8, A9, B7, B8 y B9), encontramos diferencias según el contexto: en el contexto aritmético, el comportamiento más habitual, es identificarlos como bien definidos [C1B] (el 100% ante el problema B7 y el 77% ante el A7), en algunos casos los identifican como mal definidos (un 23% el problema A7) y no se observa el comportamiento no saber identificarlo [C1C]. En el contexto algebraico, el único comportamiento observado es identificarlo como bien definido [C1B] (el 100% en los problemas B7 y A8). En el contexto geométrico, se dan tres comportamientos diferentes: no saber identificarlos [C1C] (el 46% ante el problema A9 y el 38'5% ante el B9), identificarlos como bien definidos [C1C] (el 31% ante el problema A9 y el 38'5% ante el B9), e identificarlos como mal definidos [C1A] (el 23% ante el A9 y el B9).

Cuando son identificados por los resolutores como mal definidos [C1A], observamos que, si el problema es de contexto aritmético, todos los resolutores que presentan este comportamiento, lo identifican como mal definido del tipo T_3 (un 23% del total, en el problema A7), en cambio si el problema es de contexto geométrico, los comportamientos observados son: identificarlo como mal definido tipo T_2 en el problema A9 y como mal definido tipo T_3 en el problema B9.

- b) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos (problemas A1, A2, A3, A4, A5, A6, B1, B2, B3, B4, B5, B6 y B10), el comportamiento más habitual, es identificarlos como mal definidos [C1A] (el 100% en los problemas A3, B1, B2, B6 y B10; el 92% en el problema A1; el 85% en el B4; el 77% en el A4 y B5; el 69% en el A5; el 62% en el A6 y B3; el 54% en el A2).

Con respecto a la tipología, es decir, cuando son caracterizados desde

la competencia como mal definidos tipo T_2 y tipo T_3 , observamos que, los problemas A1, B1, A3, A2, B3 y B10, que son mal definidos tipo T_2 , son identificados como mal definidos tipo T_2 , por todos los resolutores que los identifican como mal definidos [C1A]. En cambio, ante el problema B2, el 62% lo identifican como mal definido tipo T_2 y el 38% como mal definido tipo T_3 .

En los problemas A4, B5 y B6, que son mal definidos tipo T_3 , todos los resolutores que los identifican como mal definidos, lo hacen como mal definidos del tipo T_3 . En cambio, los problemas B4 y A5 son identificados como mal definidos tipo T_2 o T_3 (de los resolutores que los identifican como mal definidos, un 62% lo hacen como mal definidos del tipo T_2 y un 23% como mal definidos del tipo T_3 en el problema B4, y en el problema A5, un 46% como mal definidos tipo T_2 y un 23% como mal definidos tipo T_3).

Por lo tanto, observamos que el comportamiento más frecuente en estos resolutores, cuando se encuentran ante un problema de encontrar, caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_2 , es identificarlo como mal definido tipo T_2 , en cambio, cuando se encuentran ante un problema de encontrar, caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_3 , los comportamientos que aparecen son: identificarlos como mal definidos tipo T_2 o como mal definidos tipo T_3 .

c) Con relación al comportamiento no saber identificarlos [C1C], si el análisis lo hacemos según la tipología del problema presentado, observamos que este comportamiento aparece, tanto en los caracterizados desde la competencia como bien definidos (el 46% en el problema A9 y el 38'5% en el B9), como en los caracterizados desde la competencia como mal definidos, sean del tipo T_2 (el 15% en los problemas A2 y B3) o del tipo T_3 (23% en el A5).

Sin embargo, si el análisis lo hacemos según el contexto del problema presentado, encontramos asimetrías, de manera, que este comportamiento se da en los contextos algebraico y geométrico (el 46% ante el problema A9, el 38'5% ante el B9, el 23% ante el A5 y el 15% ante los problemas A2 y B3), y no en el aritmético.

- Con respecto a la categoría de análisis (2), encontramos que:
 - a) Con relación a si las acciones están dirigidas por los datos o por el objetivo, aunque el comportamiento más habitual es que las acciones estén dirigidas por el objetivo [C2B], independientemente de la tipología y del contexto, observamos el comportamiento acciones dirigidas por los datos [C2A] en los tres contextos estudiados.

Ante los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos propios, cuando los alumnos comentan lo que hacen se observa una tendencia a que las acciones estén dirigidas por el objetivo. Ante los caracterizados desde la competencia como mal definidos, en los problemas de contexto algebraico y geométrico el comportamiento: acciones dirigidas por los datos [C2A], es más frecuente que en los de contexto aritmético.

- b) Con relación a lo que modifican cuando replantean el problema presentado, si el análisis lo hacemos por la tipología, observamos que ante los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, el único comportamiento que se da es el de mantener el objetivo y modificar los datos [C21], en cambio en los caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 y tipo T_3 , se dan los tres comportamientos: mantener el objetivo y modificar los datos [C21], mantener los datos y modificar el objetivo [C22] y modificar los datos y el objetivo [C23].

Si el análisis lo hacemos por el contexto observamos que, en los

problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos, en los contextos aritmético y algebraico, se dan los tres comportamientos anteriores, en cambio en el contexto geométrico, se dan únicamente dos comportamientos: mantener el objetivo y modificar los datos [C21], y mantener los datos y modificar el objetivo [C22].

De esta manera, analizando los problemas en contexto aritmético que son replanteados por los resolutores (A7, A1, A4, B1 y B4) observamos que en los problemas A7, A1 y A4, todos los resolutores que los transforman (un 23%, un 69% y un 62%, respectivamente), lo hacen manteniendo el objetivo y modificando los datos [C21]; en el problema B1, el 77% lo hace manteniendo el objetivo y modificando los datos [C21] y el 23% lo hace modificando los datos y el objetivo [C23]; y en el problema B4, el 70% lo hace manteniendo el objetivo y modificando los datos [C21] y el 15% restante lo hace manteniendo los datos y modificando el objetivo [C22].

Analizando los problemas en contexto algebraico que son replanteados por los resolutores (A2, A5, B2 y B5), observamos que en el problema A2, de los resolutores que transforman el problema, un 23% lo hace manteniendo el objetivo y modificando los datos [C21], un 8% manteniendo los datos y modificando el objetivo [C22] y el 23% restante, lo hace modificando los datos y el objetivo [C23]; en el problema B2, el 62% de los resolutores transforman el problema manteniendo el objetivo y modificando los datos [C21] y el 38% restante, lo hace modificando los datos y el objetivo [C23]; en el problema A5, todos los resolutores que transforman el problema (un 69%), lo hacen manteniendo el objetivo y modificando los datos [C21]; y en el problema B5, un 69% de los resolutores que transforman el problema, lo hacen manteniendo el objetivo y modificando los datos [C21] y el 8% restante, lo hacen modificando los datos y el objetivo [C23].

Analizando los problemas en contexto geométrico que son replanteados por los resolutores (A6, B3, B6, B9 y B10) observamos que en los problemas B9 y A6 todos los resolutores que los transforman (un 23% y un 38%, respectivamente), lo hacen manteniendo el objetivo y modificando los datos [C21]; en el problema B3, un 46% de los resolutores que transforman el problema lo hacen manteniendo el objetivo y modificando los datos [C21] y el 15% restante, lo hacen manteniendo los datos y modificando el objetivo [C22]; en el problema B10, el 85% de los resolutores, transforma el problema manteniendo el objetivo y modificando los datos [C21] y el 15% restante, lo hace manteniendo los datos y modificando el objetivo [C23]; y en el problema B6, el 92% de los resolutores transforma el problema manteniendo el objetivo y modificando los datos [C21] y el 8% restante, lo hace manteniendo los datos y modificando el objetivo [C23].

- Con respecto a la categoría de análisis (3), encontramos que:
 - a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, todos los resolutores que identifican estos problemas como mal definidos y los replantean, (un 23% en los problemas A7 y B9), los transforman eliminando datos [C3B].
 - b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , los comportamientos más frecuentes son: transformarlos añadiendo datos [C3A] y añadiendo y eliminando datos [C3C], en cambio, frente a los caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 observamos los tres comportamientos: transformarlos añadiendo datos [C3A], eliminando datos [C3B] y añadiendo y eliminando datos [C3C].

Si el análisis lo hacemos por el contexto del problema, los caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , si son

de contextos aritmético y algebraico, observamos los comportamientos: transformarlos añadiendo datos [C3A] y transformarlos añadiendo y eliminando datos [C3C], en cambio, si son de contexto geométrico el único comportamiento observado es: transformarlos añadiendo y eliminando datos [C3C]. Los caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , si son de contexto aritmético, observamos los comportamientos: transformarlos eliminando datos [C3B] y transformarlos añadiendo y eliminando datos [C3B]; si son de contexto algebraico, observamos los tres comportamientos: transformarlos añadiendo datos [C3A], eliminando datos [C3B] y añadiendo y eliminando datos [C3C]; si son de contexto geométrico, los comportamientos observados son transformarlos añadiendo datos [C3A] y transformarlos eliminando datos [C3B].

- Con respecto a la categoría de análisis (4), encontramos que:
 - a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, todos los resolutores que identifican estos problemas como mal definidos y los replantean (un 23% en los problemas A7 y B9), los transforman en un problema mal definido tipo T_2 [C4A].
 - b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , observamos que todos los alumnos que transforman el problema, lo hacen en un problema bien definido [C4B] excepto en el problema A2 de contexto algebraico, donde del 54% de los resolutores que replantean el problema, un 31% lo hacen en uno bien definido y un 23% en uno mal definido tipo T_2 .
 - c) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , los comportamientos más frecuentes son: transformarlos en un problema bien definido [C4B] y transformarlos en un problema mal definido tipo T_3 [C4C], observando en el problema A5 de

contexto algebraico el comportamiento: transformarlo en un problema mal definido tipo T_2 [C4A].

En el problema A4, todos los resolutores que lo transforman (un 62%), lo hacen en uno bien definido [C4B]. En el problema A5, del 69% de los que lo transforman, un 31% lo hacen en mal definido tipo T_2 [C4A], un 15% en mal definido tipo T_3 [C4C] y un 23% en un problema bien definido [C4B]. En el problema A6, todos los que lo transforman (un 38%) lo hacen en uno mal definido tipo T_3 [C4C]. En el problema B4, del 85% de los que lo transforman, un 62% lo hacen en uno mal definido tipo T_3 [C4C] y un 23% en uno bien definido [C4B]. En el problema B6, el 100% de los resolutores, lo transforman en uno bien definido [C4B].

- Con respecto al tercer objetivo: “Observar, si las diferentes indicaciones dadas en los dos grupos de problemas, influyen o no en la actuación de los resolutores”, encontramos que la tendencia de los resolutores, cuando identifican el problema presentado, como mal definido, es replantearlo independientemente de las indicaciones dadas en A y B, observando además, de igual manera que en la Fase I del estudio piloto, que la actuación de los alumnos, en la fase de preparación, no es la misma cuando se advierte que puede haber un problema mal planteado, que cuando se omite.

4.3.2 Análisis de datos

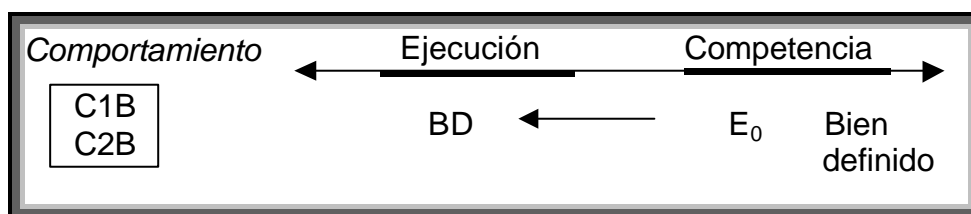
Presentamos un análisis detallado de los diferentes problemas pasados en esta prueba (Anexo 5, tablas 36a y 36b), indicando las diferentes actuaciones de los alumnos frente a cada uno de ellos y presentando de manera esquemática únicamente los comportamientos regulares e invariantes.

El análisis de los problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos (A7, B7, A8, B8, A9 y B9) es el siguiente:

PROBLEMA A7.

- Dos alumnos lo identifican como bien definido [C1B], estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], ya que utilizan todos los datos disponibles.
- Tres alumnos lo identifican como mal definido [C1A] porque sobran datos, de manera que estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], mantienen el objetivo y modifican los datos [C21], eliminando datos [C3B] y transformándolo en mal definido tipo T_2 [C4A], quedando caracterizado como T_2A .
- Ocho alumnos lo identifican como bien definido [C1B], estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B]. Se trata de un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido impropio. Los alumnos no comentan nada y se limitan a operar, sin embargo se puede observar que no utilizan los datos redundantes.

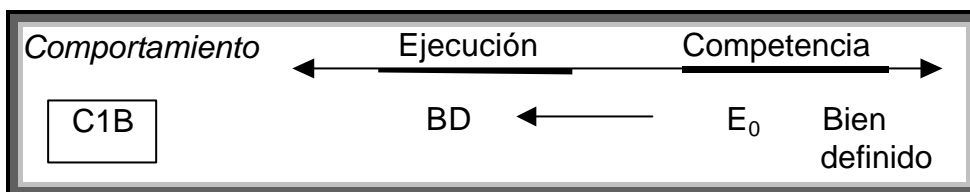
Ocho alumnos:



Se trata de un comportamiento regular, presente en un 62% de los resolutores.

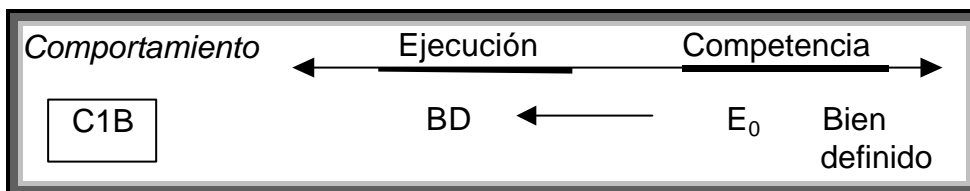
PROBLEMA B7.

- Los trece alumnos lo identifican como bien definido [C1B], siendo éste un comportamiento invariante (en el 100% de los resolutores), que de manera esquemática sería:



PROBLEMA A8.

- Los trece alumnos lo identifican como bien definido [C1B], siendo por ello, un comportamiento invariante (en el 100% de los resolutores), que de manera esquemática sería:

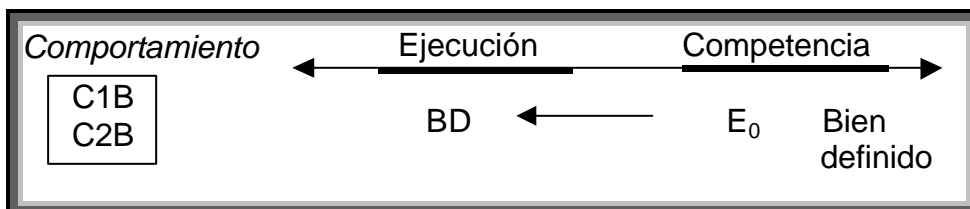


PROBLEMA B8.

- Un alumno lo identifica como bien definido [C1B] (opera con todos los datos dados) estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A].
- Doce alumnos lo identifican como bien definido [C1B] (ocho de los alumnos comentan que el dato redundante puede ser utilizado indistintamente) estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

Esquemáticamente:

Doce alumnos



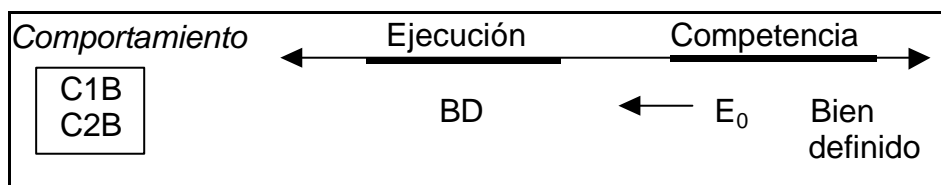
Se trata de un comportamiento invariante presente en el 92% de los resolutores.

PROBLEMA A9.

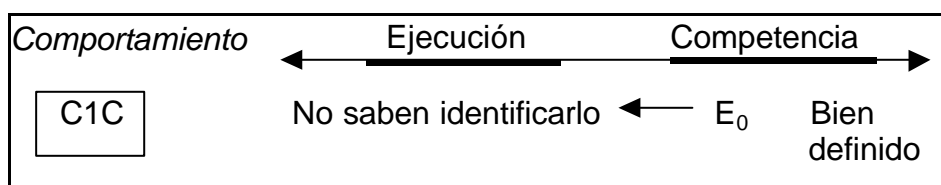
- Tres alumnos lo identifican como mal definido porque le faltan datos [C1A], estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], pero no lo replantean ni comentan nada más.
- Cuatro alumnos lo identifican como bien definido [C1B], estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], abordándolo sin más y no utilizan el dato redundante.
- Seis alumnos no están seguros de si está bien o mal planteado. Comentan que no saben, pues no se acuerdan de las fórmulas (cinco alumnos) o que no saben hacerlo porque nunca han hecho un problema parecido [C1C].

Esquemáticamente, los comportamientos regulares observados en este problema presentes en un 31% y un 46% de los resolutores, respectivamente, son:

Cuatro alumnos



Seis alumnos



PROBLEMA B9.

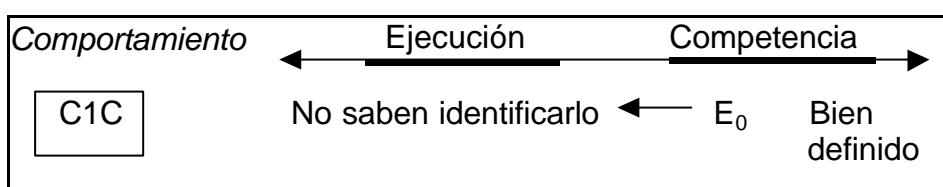
- Tres alumnos lo identifican como mal definido porque le sobran datos [C1A], de manera que estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo replantean en mal definido del tipo T₂ [C4A], eliminando datos y

manteniendo el objetivo [C21–C3B], quedando caracterizado como T₂A.

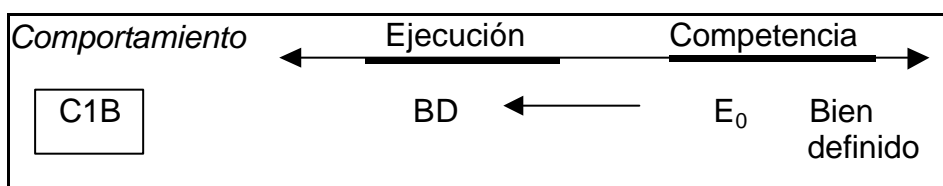
- Cinco alumnos no saben identificarlo [C1C].
- Cinco alumnos lo identifican como bien definido [C1B].

Esquemáticamente, los dos comportamientos regulares observados en este problema presentes en un en un 38% de los resolutores, cada uno, son:

Cinco alumnos:



Cinco alumnos:



El análisis de los problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos (problemas A1, A2, A3, A4, A5, A6, B1, B2, B3, B4, B5, B6 y B10) es el siguiente:

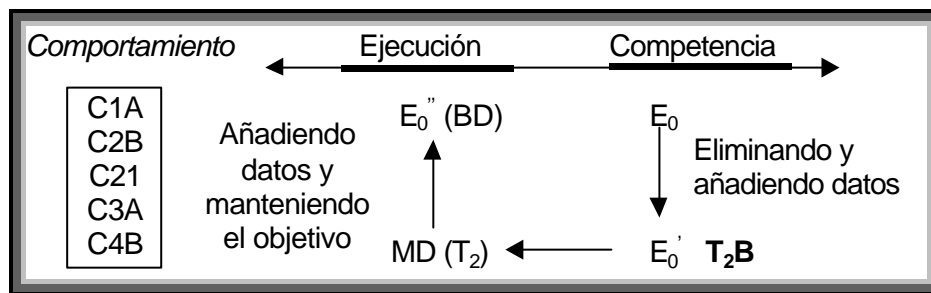
PROBLEMA A1.

- Un alumno lo identifica como bien definido [C1B], es decir, que estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], interpreta el estado E₀' como el estado E₀ y mantiene el objetivo.
- Tres alumnos comentan que el problema con los datos dados no se puede resolver. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican explícitamente como mal definido tipo T₂ [C1A] y no lo replantean.

- Nueve alumnos comentan que el problema con los datos dados no se puede resolver, porque no nos dice que consumió y hacen un nuevo replanteamiento del problema añadiendo nuevos datos y manteniendo el objetivo o pregunta planteada. Es decir, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican explícitamente como mal definido tipo T_2 [C1A] y lo transforman en un problema bien definido [C4B], añadiendo datos y manteniendo el objetivo [C21-C3A].

Esquemáticamente:

Nueve alumnos



Se trata de un comportamiento regular, presente en un 69% de los resolutores.

PROBLEMA A2.

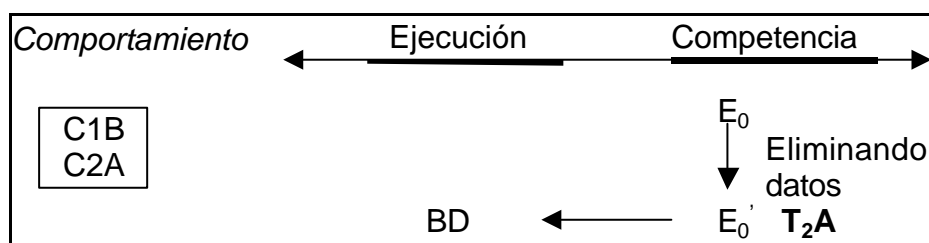
- Dos alumnos no saben identificar el problema [C1C].
- Cuatro alumnos lo identifican como bien definido [C1B], de manera que estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], interpretan el estado E_0' como el estado E_0 y mantienen el objetivo.
- Un alumno lo identifica implícitamente como mal definido. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], lo identifica como mal definido [C1A] y lo transforma en un problema bien definido [C4B], manteniendo los datos y modificando el objetivo [C22]².

² El objetivo lo interpreta como ¿cuántas parejas de soluciones posibles hay?

- Tres alumnos comentan que el problema con los datos dados no se puede resolver y hacen un nuevo replanteamiento del problema añadiendo nuevos datos y manteniendo el objetivo. Luego, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como mal definido [C1A] tipo T_2 , y lo transforman en un problema mal definido tipo T_2 [C4A], añadiendo datos y manteniendo el objetivo [C21-C3A], quedando identificado como T_2B .
- Tres alumnos comentan que el problema con los datos dados no se puede resolver y hacen un nuevo replanteamiento del problema añadiendo nuevos datos y modificando el objetivo. Por lo tanto, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como mal definido [C1A] tipo T_2 , y lo transforman en un problema diferente bien definido [C4B], añadiendo datos y modificando el objetivo [C23-C3A].

Esquemáticamente, el comportamiento regular observado en este problema, presente en un 31% de los resolutores, es el siguiente:

Cuatro alumnos



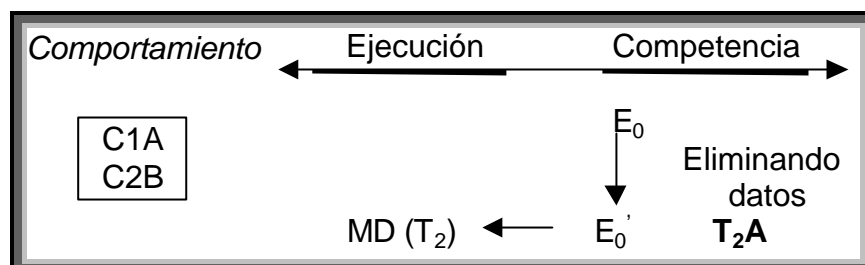
PROBLEMA A3.

- Los trece alumnos lo identifican como mal definido, por diferentes motivos: un alumno comenta que el problema no puede resolverse porque le faltan datos; dos alumnos comentan que el problema no puede resolverse porque le faltan y sobran datos; diez alumnos comentan que el problema no puede resolverse porque no hay relación entre los datos y la pregunta. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por el objetivo

[C2B], lo identifican como mal definido tipo T_2 [C1A], y no lo replantean.

Esquemáticamente:

Trece alumnos



Se trata de un comportamiento un invariante, presente en un 100% de los resolutores.

PROBLEMA A4.

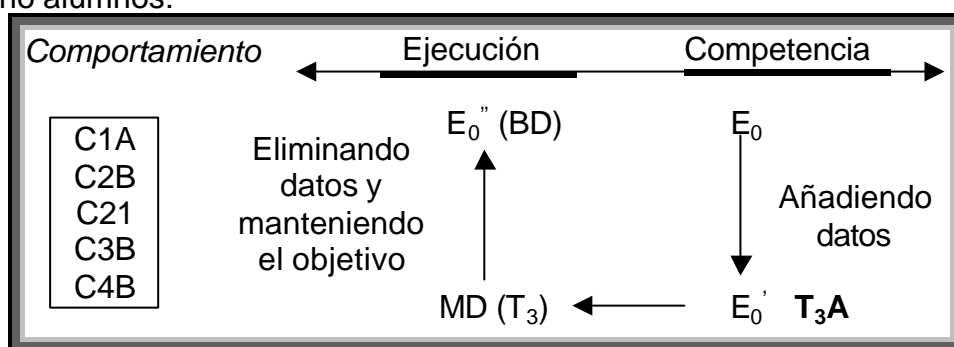
- Tres alumnos lo identifican como bien definido, de manera que estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], interpretan el estado E_0' como el estado E_0 y mantienen el objetivo [C1B].
- Dos alumnos comentan que el problema tiene datos que no intervienen para alcanzar el objetivo pedido y no lo replantean. Luego, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican explícitamente como mal definido tipo T_3 [C1A] y no lo replantean.
- Ocho alumnos comentan que el problema tiene datos que no intervienen para alcanzar el objetivo pedido y hacen un nuevo replanteamiento del problema, eliminando datos y manteniendo el objetivo. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], reconocen explícitamente que está mal definido [C1A] y lo transforman en un problema bien definido [C4B], eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3B].

Por lo tanto, el comportamiento regular observado en este problema (en un 62% de los resolutores), estaría determinado por la secuencia

[C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido tipo T_3 , acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.

Esquemáticamente, el comportamiento regular observado en este problema, presente en un 62% de los resolutores, es:

Ocho alumnos:



PROBLEMA A5.

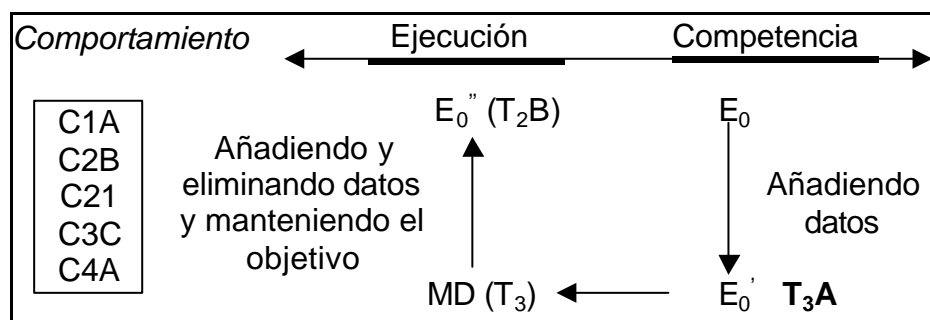
- Un alumno lo identifica como bien definido, de manera que estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], interpreta el estado E_0' como el estado E_0 y mantiene el objetivo [C1B].
- Tres alumnos no saben identificarlo [C1C].
- Tres alumnos comentan que el problema tiene datos que no intervienen para alcanzar el objetivo pedido y hacen un nuevo replanteamiento del problema, eliminando datos y manteniendo el objetivo. En definitiva, el comportamiento estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido tipo T_3 , acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.
- Dos alumnos comentan que el problema no puede resolverse porque le

faltan datos para alcanzar el objetivo pedido y hacen un nuevo replanteamiento del problema, añadiendo datos y manteniendo el objetivo. En definitiva, el comportamiento estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifican el problema como mal definido tipo T_2 , acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y lo transforman en un problema mal definido tipo T_3 quedando caracterizado como T_3A .

- Cuatro alumnos comentan que el problema no puede resolverse porque le faltan y le sobran datos para alcanzar el objetivo pedido y hacen un nuevo replanteamiento del problema, añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo o pregunta planteada. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como mal definido tipo T_2 [C1A] y lo transforman en un problema mal definido tipo T_2 [C4A], eliminando y añadiendo datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C], quedando caracterizado como T_2B .

De manera esquemática, el comportamiento regular observado en este problema, presente en un 31% de los resolutores, es el siguiente:

Cuatro alumnos



PROBLEMA A6.

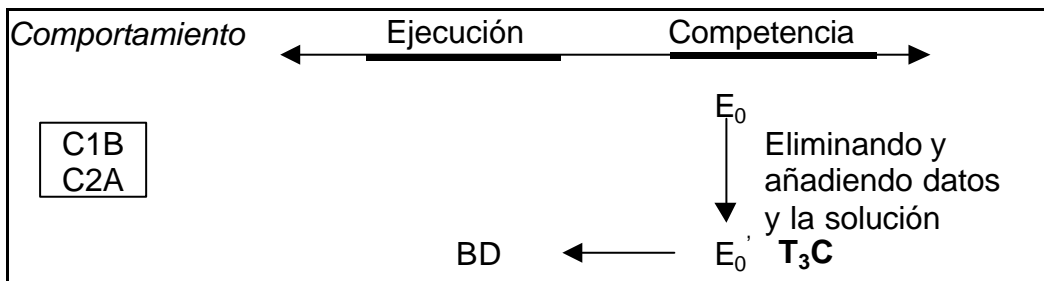
- Tres alumnos comentan que no es un problema pues dan la solución, de manera que lo identifican como mal definido [C1A], estando sus

acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

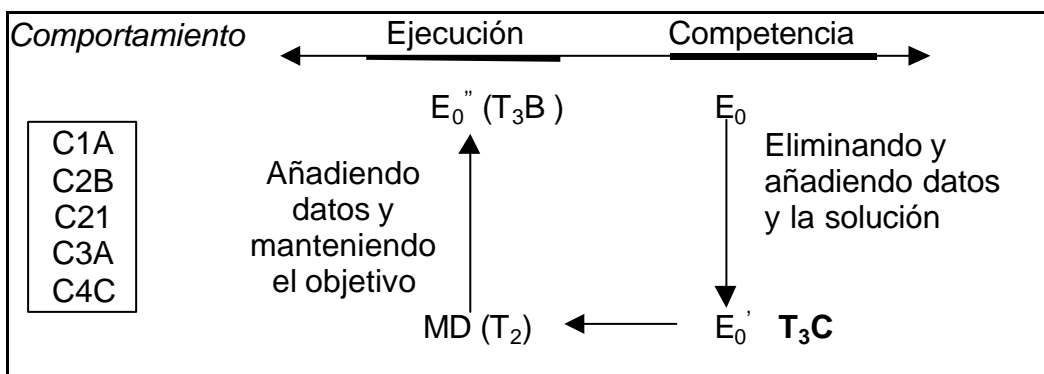
- Cinco alumnos lo identifican como bien definido aunque comentan, que no saben hacerlo porque no se acuerdan de la fórmula. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], lo identifican como bien definido [C1B], de manera que interpretan el estado E_0' como el estado E_0 .
- Cinco alumnos comentan que el problema no puede resolverse porque le faltan datos y hacen un nuevo replanteamiento, añadiendo datos y manteniendo el objetivo. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como mal definido tipo T2 [C1A] y lo transforman en un problema mal definido tipo T3 [C4C], añadiendo datos y manteniendo el objetivo [C21-C3A], quedando caracterizado como T3B.

Por lo tanto, en este problema encontramos dos comportamientos regulares presentes, en un 38% de los resolutores.

Cinco alumnos:



Cinco alumnos:

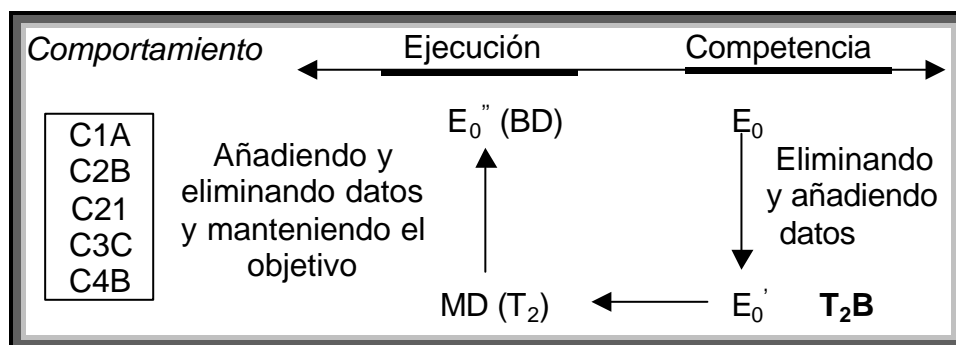


PROBLEMA B1.

- Tres alumnos comentan que el problema con los datos dados no se puede resolver porque faltan y sobran datos y hacen un nuevo replanteamiento del problema, eliminando y añadiendo datos y modificando el objetivo. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A] lo identifican como mal definido tipo T_2 [C1A] y lo transforman en un problema diferente bien definido [C4B], añadiendo y eliminando datos y modificando el objetivo [C23-C3C].
- Diez alumnos comentan que el problema con los datos dados no se puede resolver porque faltan datos y hacen un nuevo replanteamiento del mismo, añadiendo nuevos datos y manteniendo el objetivo. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como mal definido tipo T_2 [C1A] y lo transforman en un problema bien definido [C4B] añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C].

Observamos por tanto la existencia de un comportamiento invariante presente en un 77% de los resolutores, que esquemáticamente sería:

Diez alumnos:



PROBLEMA B2.

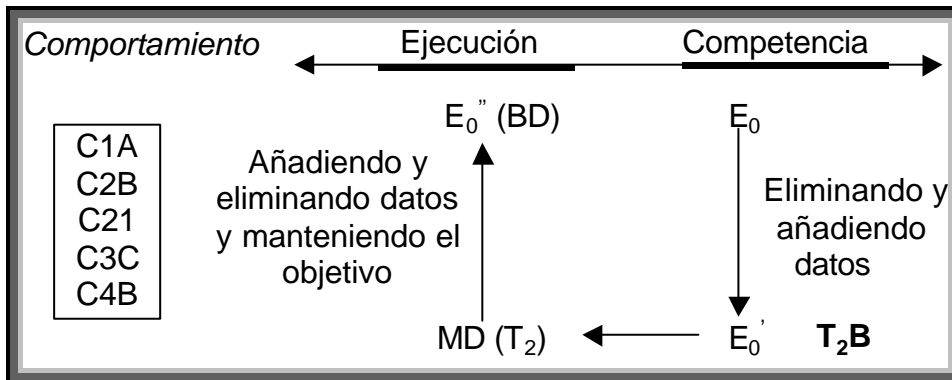
- Ocho alumnos comentan que el problema no se puede resolver porque faltan datos y hacen un nuevo replanteamiento del problema añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo. En definitiva, estando sus

acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como mal definido tipo T_2 [C1A] y lo transforman en un problema bien definido [C4B], añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C].

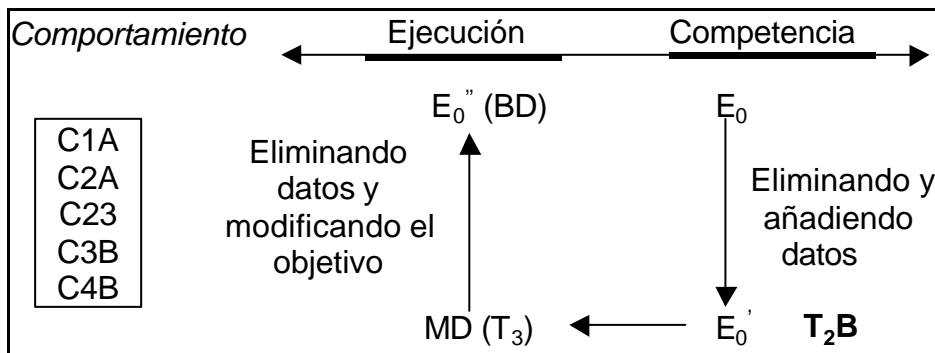
- Cinco alumnos comentan que el problema no se puede resolver porque sobran datos y la pregunta está mal, haciendo un nuevo replanteamiento, eliminando datos y modificando el objetivo. Por lo tanto, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A] lo identifican como mal definido tipo T_3 [C1A] y lo transforman en un problema diferente bien definido [C4B] eliminando datos y modificando el objetivo [C23-C3B].

Luego, en este problema observamos dos comportamientos regulares, presentes en un 62% y un 38% de los resolutores, que esquemáticamente serían, respectivamente:

Ocho alumnos:



Cinco alumnos:



PROBLEMA B3.

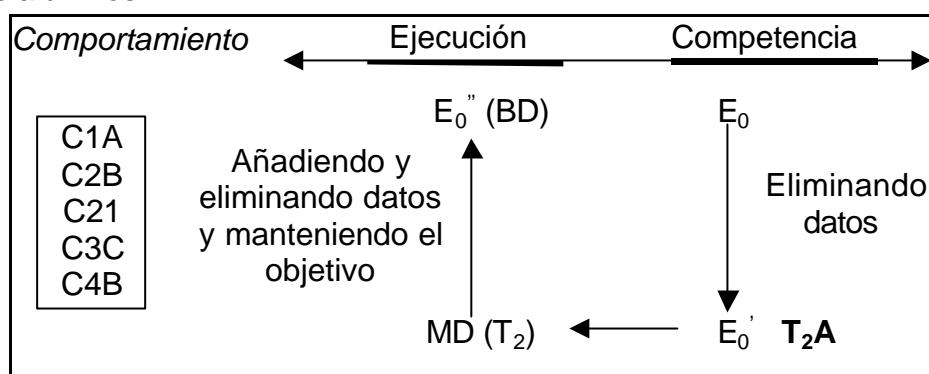
- Dos alumnos no saben identificarlo [C1C].
- Tres alumnos lo identifican como bien definido [C1B], de manera que estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A] identifican el estado E_0' como el estado E_0 .
- Seis alumnos comentan que el problema no se puede resolver porque falta un dato y hacen un nuevo replanteamiento del problema añadiendo un nuevo dato y manteniendo el objetivo. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como mal definido tipo T_2 [C1A] y lo transforman en un problema bien definido [C4B], añadiendo y eliminando datos [C21-C3C] y manteniendo el objetivo.

Dentro de este grupo de actuación, tres de los alumnos muestran un desconocimiento del contenido matemático inherente a la tarea, y hacen comentarios del siguiente tipo: *“el problema no se puede resolver, pues falta un dato y los datos dados son incorrectos ya que no puede haber números negativos”*, o bien *“el problema no se puede resolver pues falta un dato y los datos dados son incorrectos, ya que un cuadrilátero tiene que tener todos los lados iguales”*, o bien *“el problema no se puede resolver pues falta un dato y los datos dados son incorrectos ya que al representarlos se cortarían las líneas”*.

- Dos alumnos comentan que el problema no se puede resolver porque la pregunta está mal, es decir, que estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], lo identifican como mal definido [C1A] y lo transforman en otro problema diferente bien definido [C4B] manteniendo los datos y modificando el objetivo [C22].

El esquema del comportamiento regular observado en este problema, presente en un 46% de los resolutores, sería:

Seis alumnos:



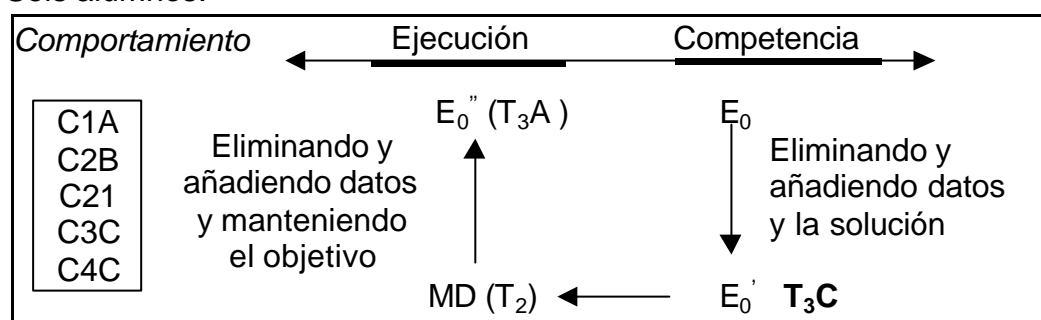
PROBLEMA B4.

- Dos alumnos lo identifican como bien definido [C1B], de manera que estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A] identifican el estado E_0' como el estado E_0 .
- Tres alumnos lo identifican implícitamente como mal definido tipo T_3 [C1B-C1A], sus acciones están dirigidas por el objetivo [C2B] y lo transforman implícitamente en un problema bien definido [C4B], eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3B].
- Seis alumnos comentan que el problema está mal definido pues sobran y faltan datos y lo replantean en otro mal definido tipo T_3 , eliminando y añadiendo datos y manteniendo el objetivo. Es decir, que estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como mal definido tipo T_2 [C1A] y lo transforman en mal definido tipo T_3 [C4C] añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C], quedando caracterizado por T_3A (dos de estos alumnos comentan además que no es un problema, pues la solución no se la pueden pedir y dar al mismo tiempo).
- Dos alumnos manifiestan que la pregunta está mal hecha y replantean el problema, manteniendo los datos y modificando el objetivo. Por lo tanto, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], lo identifican como

mal definido [C1A] y lo transforman en un problema diferente mal definido tipo T_3 [C4C], manteniendo los datos y modificando el objetivo [C22]. (Esta actuación no es caracterizada con respecto al problema bien definido del que partimos, al haber modificado la pregunta).

Esquemáticamente, el comportamiento regular observado en este problema, presente en un 46% de los resolutores, es:

Seis alumnos:



PROBLEMA B5.

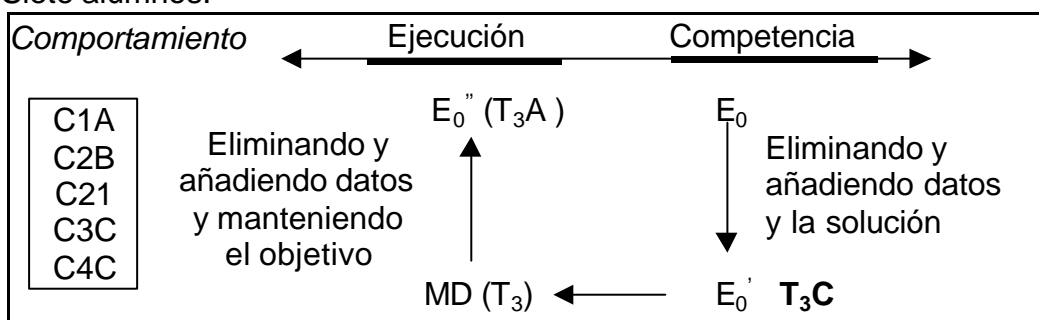
- Tres alumnos lo identifican como bien definido [C1B], de manera que estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A] identifican el estado E_0' como el estado E_0 .
- Siete alumnos, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como mal definido tipo T_3 [C1A] y lo transforman en un problema mal definido tipo T_3 [C4C] añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C] (uno de estos alumnos, comenta que en realidad esto no es un problema pues no hay ningún objetivo ya que el propio problema lo da), quedando caracterizado por T_3A .
- Dos alumnos comentan que el problema tiene datos que no intervienen en el mismo y hacen un nuevo replanteamiento del problema, eliminando y añadiendo datos y manteniendo el objetivo o pregunta planteada. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo

identifican como mal definido tipo T_3 [C1A] y lo transforman en un problema bien definido [C4B], eliminando y añadiendo datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C].

- Un alumno comenta que la pregunta está mal y que el problema tiene datos que no intervienen en el mismo y hace un nuevo replanteamiento del problema eliminando datos y modificando el objetivo. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], lo identifica como mal definido tipo T_3 [C1A] y lo transforma en un problema bien definido [C4B], eliminando datos y modificando el objetivo [C23-C3B].

De manera esquemática, el comportamiento regular observado en este problema presente en un 54% de los resolutores, es el siguiente:

Siete alumnos:



PROBLEMA B6.

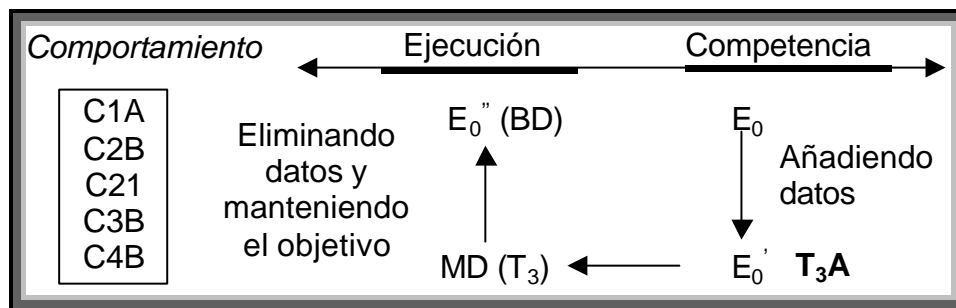
- Doce alumnos lo identifican como mal definido porque sobran datos y lo replantean en un problema bien definido. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como mal definido tipo T_3 [C1A] y lo transforman en un problema bien definido [C4B], eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3B].

Hay que destacar que dentro de la actuación anteriormente descrita, hacen una interpretación errónea y, a veces, disparatada del enunciado del problema, un 50 % de los alumnos.

- Un alumno lo identifica como mal definido porque sobran datos y lo replantea en un problema diferente bien definido. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifica como mal definido tipo T_3 [C1A] y lo transforma en un problema diferente bien definido [C4B], manteniendo los datos y modificando el objetivo [C22].

Por lo tanto, en este problema observamos un comportamiento invariante presente en un 92% de los resolutores, que de manera esquemática quedaría de la siguiente manera:

Doce alumnos:

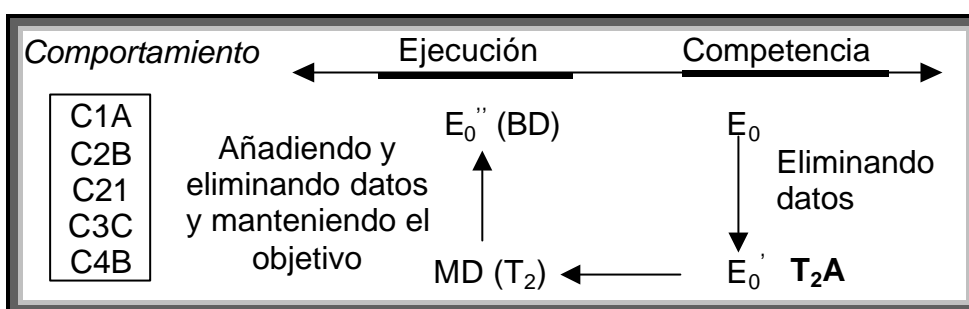


PROBLEMA B10.

- Once alumnos comentan que los datos no sirven para dar respuesta a lo pedido y hacen un nuevo replanteamiento, eliminando y añadiendo datos y manteniendo el objetivo planteado. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como mal definido tipo T_2 [C1A] y lo transforman en un problema bien definido [C4B], eliminando y añadiendo datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C].
- Dos alumnos comentan que la pregunta está mal, pues con los datos dados no se puede dar respuesta a lo pedido y hacen un nuevo replanteamiento, manteniendo los datos y modificando el objetivo. En definitiva, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], lo identifican como mal definido [C1A] y lo transforman en un problema diferente bien definido [C4B], manteniendo los datos y modificando el objetivo [C22].

Por lo tanto, en este problema observamos un comportamiento invariante presente en un 85% de los resolutores, que de manera esquemática quedaría de la siguiente manera:

Once alumnos



4.3.3 Discusión y consideraciones de la segunda prueba

A la vista de los resultados de la segunda prueba piloto podemos indicar las siguientes consideraciones:

- El planteamiento conjunto de problemas bien y mal definidos no parece generar confusión en estos alumnos.
- En los problemas de encontrar identificados desde la competencia como bien definidos, los distintos comportamientos observados son los siguientes:

a) Con respecto a la categoría de análisis (1), observamos diferencias según el contexto, de manera, que en los contextos aritmético y algebraico, el comportamiento invariante observado es: “identificarlos como bien definidos” [C1B], en cambio en el contexto geométrico, no hay comportamientos invariantes sino diferentes comportamientos regulares determinados por la secuencia [C1B] (identificarlos como bien definidos), por la secuencia [C1C] (no saber identificarlos) y por la secuencia [C1A] (identificarlos como mal definidos, tanto tipo T₂ como tipo T₃).

Cuando los alumnos identifican el problema presentado como mal definido, encontramos diferencias según el contexto, de manera que, si el problema presentado es de contexto aritmético, el único comportamiento observado es: “identificarlo como mal definido tipo T_3 ”; si es de contexto geométrico, los comportamientos observados son: “identificarlo como mal definido tipo T_3 ” e “identificarlo como mal definido tipo T_2 ”; si es de contexto algebraico, el comportamiento: “identificarlo como mal definido”, no se observa.

b) Con respecto a la categoría de análisis (2), la tendencia es: “acciones dirigidas por el objetivo” [C2B], y en los casos en que transforman el problema, el único comportamiento observado es: “modificar los datos y mantener el objetivo” [C21].

c) Con respecto a la categoría de análisis (3) y (4), observamos que la actuación “transformar el problema presentado”, se da únicamente en los contextos aritmético y geométrico, siendo el único comportamiento observado: “transformar el problema presentado, en un problema mal definido del tipo T_2 [C4A], eliminando datos” [C3B].

d) Del análisis conjunto de las cuatro categorías de análisis, observamos los comportamientos invariantes determinados por la secuencia [C1B] (identificarlos como bien definidos) y por la secuencia [C1B-C2A] (identificarlos como bien definidos y acciones dirigidas por el objetivo) en los problemas de contextos algebraico y aritmético, no observando comportamientos invariantes en el contexto geométrico, en el que sí aparecen los comportamientos regulares determinados por la secuencia [C1C] (no saber identificarlos), y por la secuencia [C1B-C2B] (identificarlos como bien definidos y acciones dirigidas por el objetivo).

e) En cuanto a la interpretación de datos redundantes presentes en los problemas bien definidos impropios, la actuación de los alumnos es

diferente según el contexto. En los problemas de contexto aritmético, no los utilizan, ni hacen, ni comentan nada sobre ellos; en los problemas de contexto algebraico es donde mejor identifican explícitamente estos datos y en los problemas de contexto geométrico, no identifican estos datos como redundantes, sino como otros datos necesarios para obtener el objetivo.

- En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos, los distintos comportamientos observados son:

a) Con respecto a la categoría de análisis (1), aunque el comportamiento más frecuente en estos resolutores es: “identificarlos como mal definidos” [C1A], observamos ciertas diferencias según el contexto, siendo en algunos problemas de contextos algebraico y geométrico, donde este comportamiento es menos frecuente y donde aparece el comportamiento: “no saber identificarlo” [C1C].

b) Con respecto a la categoría de análisis (2), el comportamiento más frecuente es: “acciones dirigidas por el objetivo” [C2B], independientemente de la tipología y del contexto”, aunque el comportamiento: “acciones dirigidas por los datos” [C2A] es un comportamiento regular en muchos de los problemas presentados, tanto mal definidos tipo T_2 como tipo T_3 , principalmente en los contextos algebraico y geométrico.

Con respecto a las modificaciones que realizan los resolutores al replantear el problema dado, el comportamiento más frecuente en estos resolutores es: “modificar los datos y mantener el objetivo” [C21]. Sin embargo, observamos que los comportamientos: “modificar el objetivo” y “modificar el objetivo y los datos”, es más frecuente ante los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 de contextos algebraico y geométrico.

c) Con respecto a la categoría de análisis (3), observamos asimetrías según el contexto y la tipología del problema.

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , los comportamientos observados en estos resolutores, cuando al replantearlos actúan sobre los datos, son: “transformar el problema presentado añadiendo datos” [C3A] y “transformar el problema presentado añadiendo y eliminando datos” [C3C], aunque en el contexto geométrico sólo se observa este último comportamiento [C3C].

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , los comportamientos observados en estos resolutores, cuando al replantearlos actúan sobre los datos, son: “transformar el problema presentado eliminando datos” [C3B] y “transformar el problema presentado añadiendo y eliminando datos” [C3C], observando en el contexto algebraico, un tercer comportamiento, además de los dos anteriores, que consiste en: “transformar el problema presentado añadiendo datos” [C3A].

d) Con respecto a la categoría de análisis (4), observamos diferencias según el contexto y la tipología del problema.

Ante los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , el comportamiento más frecuente en estos resolutores es: “transformar el problema presentado en un problema bien definido [C4B], observándose que donde único aparece el comportamiento: “transformar el problema presentado en un problema mal definido tipo T_2 ” [C4A], es en el contexto algebraico.

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , los comportamientos más frecuentes observados en estos resolutores son: “transformar el problema

presentado en un problema bien definido” [C4B] y “transformar el problema presentado en un problema mal definido tipo T_3 ” [C4C], siendo en el contexto algebraico donde se observan los tres comportamientos: “transformar el problema presentado en un problema bien definido [C4B], en un problema mal definido tipo T_2 [C4A] y en un problema mal definido tipo T_3 [C4C]”.

e) Con respecto a los comportamientos regulares e invariantes, obtenidos del análisis conjunto de las cuatro categorías de análisis, observamos, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , comportamientos invariantes en los contextos aritmético y geométrico, y en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , en el contexto geométrico. En el contexto algebraico no se observan comportamientos invariantes para los problemas de tipo T_3 . Por otra parte, comportamientos regulares se observan en todos los problemas presentados.

- Con respecto a las diferentes indicaciones dadas a los grupos de problemas A y B, observamos, de igual manera que en las pruebas anteriores: a) no siguen las indicaciones dadas, b) la actuación aparenta ser la misma cuando se advierte que puede haber un problema mal planteado, que cuando se omite, siendo más frecuente, en problemas del grupo A, el comportamiento de operar con todos los datos, es decir, interpretar el problema presentado como bien definido, sin plantearse que pueda estar mal definido, y siendo en los problemas del grupo B más reflexivos en su lectura, c) presentan un cambio de actitud, en los distintos grupos de problemas (A y B), en los problemas donde sobran datos o la solución la da el problema, de manera que si el problema se presenta dentro del grupo A, intentan utilizar todos los datos, y en caso de no llegar a ver una solución, comentan que no se puede resolver porque *faltan datos*, y si están incluidos en el grupo B, y se dan cuenta de que la

solución viene dada, lo replantean de manera que la solución nunca esté incluida en el problema.

4.4. FASE III DEL ESTUDIO PILOTO

Durante el curso 1996-97, llevamos a cabo la tercera prueba del estudio piloto, con tres alumnos de tercer curso de Maestro de la Especialidad de Educación Infantil, del Centro Superior de Educación de la Universidad de La Laguna (Tenerife), de niveles académicos medio-alto, medio y bajo. El nivel académico de estos alumnos fue extraído de su expediente académico.

Se les pasó una colección de trece problemas de encontrar mal definidos en los contextos aritmético, algebraico y geométrico (Anexo 1, segundo cuestionario). Estos incluyen 7 problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (A1, A2, A3, B1, B2, B3 y B10) y 6 caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (A4, A5, A6, B4, B5 y B6). Se realizaron sesiones videograbadas, de dos grupos: la alumna de nivel académico medio-alto y la pareja formada por una alumna de nivel académico medio y un alumno de nivel académico bajo (apartado 3.4.1 del capítulo 3).

De los trece problemas, analizamos en este apartado seis de ellos (problemas A1, A2 y B10 mal definidos tipo T_2 y A5, A6 y B4 mal definidos tipo T_3), que son los que consideramos aportan más datos significativos para el diseño de los estudios finales.

Los objetivos eran confirmar o no los resultados obtenidos en las fases primera y segunda del estudio piloto y estudiar las diferencias según el nivel académico. Pero, al ser una prueba videograbada, se añadió un nuevo objetivo: estudiar las justificaciones que utilizan los resolutores para validar o refutar los problemas presentados, en términos de prueba o

argumentación.

Para el análisis de los datos, utilizamos el Sistema de Categorías ampliado después de la primera fase del estudio piloto, el esquema de análisis y el primer sistema de categorías de análisis para las justificaciones.

4.4.1 Resultados globales.

Presentamos en este apartado, los resultados globales de los diferentes comportamientos de los resolutores frente a seis de los trece problemas presentados en esta prueba (Anexo 4, tablas: [11-14]).

Los comportamientos de la pareja de resolutores se comentan de manera individual en cada problema, ya que se limitan a comentar lo que opina cada uno del problema presentado, de manera que actúan como resolutores que discuten sobre el problema y no ejercen en ningún momento como entrevistadores.

CON RELACIÓN A LOS COMPORTAMIENTOS REGULARES E INVARIANTES:

- Respecto a la categoría de análisis (1), observamos que:

En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos, se observan diferencias según el contexto y la tipología del problema presentado y según el nivel académico de los resolutores.

a) En problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (problemas A1, A2 y B10), los comportamientos que aparecen en los tres resolutores son: identificarlos explícitamente como mal definidos tipo T_2 [C1A] (problemas A1 y B10) e identificarlo explícitamente como bien definido [C1B] (problema A2). Sin embargo, en el resolutor de nivel académico medio, en el problema A1, se observa el

comportamiento: identificarlo explícitamente como bien definido [C1B], y comportarse como si estuviese ante un problema mal definido tipo T_2 , es decir identificarlo implícitamente como mal definido [C1A].

b) En problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas A5, A6 y B4), los comportamientos que observamos son los siguientes:

El resolutor de nivel académico medio-alto, identifica el problema como mal definido tipo T_3 [C1A], aunque observamos que, cuando en su actuación presenta varios espacios semióticos (situación que se da en los contextos aritmético y algebraico, problemas A5 y B4), en el espacio semiótico inicial, el comportamiento es identificarlos explícitamente como bien definidos aunque implícitamente, se comporta como si estuviese ante un problema de encontrar mal definido tipo T_3 [C1B-C1A], y en el espacio semiótico final, identificarlo como mal definido [C1A] tanto tipo T_2 como tipo T_3 .

En los resolutores de niveles académicos medio y bajo, el comportamiento más frecuente es identificarlos explícitamente como bien definidos, aunque implícitamente se comportan como si estuviesen ante un problema mal definido tipo T_3 , es decir, que implícitamente lo identifican como mal definido tipo T_3 [C1B-C1A].

Según el contexto, observamos que es en el contexto algebraico, donde los tres resolutores tienen mayor dificultad para identificarlos como mal definidos (problemas A2 y A5), siendo identificado explícitamente como bien definido [C1B] el problema A2, e identificado explícitamente como bien definido e implícitamente como mal definido [C1B-C1A] el problema A5.

c) El comportamiento: no saber identificarlo [C1C], no se observa en ningún caso, en estos resolutores.

- Respecto a la categoría de análisis (2), encontramos que:
 - a) Con relación a: si las acciones están dirigidas por los datos o por el objetivo, observamos nuevamente asimetrías según el contexto y la tipología del problema presentado, y según el nivel académico de los resolutores.

Según la tipología del problema presentado, observamos que, ante problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (A1, A2 y B10), los comportamientos de los resolutores de niveles académicos medio-alto y medio son: acciones dirigidas por los datos [C2A], en los problemas de contexto algebraico y geométrico (problemas A2 y B10) y acciones dirigidas por el objetivo [C2B] en el contexto aritmético (problema A1). En cambio, los comportamientos del resolutor de nivel académico bajo son: acciones dirigidas por el objetivo [C2B] en los problemas de contextos aritmético y geométrico (problemas A1 y B10) y acciones dirigidas por los datos [C2A] en el de contexto algebraico (problema A2).

En los caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas A5, A6 y B4), el comportamiento del resolutor de nivel académico medio-alto es: acciones dirigidas por el objetivo [C2B], en los tres problemas presentados, y el comportamiento en los resolutores de niveles académicos medio y bajo es: acciones dirigidas por los datos [C2A], en los tres problemas presentados.

Según el contexto del problema presentado, independientemente de que sean del tipo T_2 o T_3 , observamos que en los problemas de contexto aritmético, el comportamiento del resolutor de nivel académico medio-alto es: acciones dirigidas por el objetivo [C2B], y en los contextos algebraico y geométrico presenta los comportamientos: acciones dirigidas por el objetivo [C2B] y acciones dirigidas por los datos [C2A]. En la pareja de

resolutores (niveles académicos medio y bajo), el comportamiento en el contexto algebraico es: acciones dirigidas por los datos [C2A] y en los contextos aritmético y geométrico presentan los comportamientos: acciones dirigidas por el objetivo [C2B] y acciones dirigidas por los datos [C2A].

b) Con relación a: “qué modifican, cuando replantean el problema presentado”, encontramos diferencias según el contexto y la tipología del problema presentado, y según el nivel académico de los resolutores.

Atendiendo al nivel académico de los resolutores observamos que, el comportamiento más frecuente en el resolutor de nivel académico medio-alto es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] (en uno de los 2 que replantea del tipo T_2 y en los tres problemas del tipo T_3). En el resolutor de nivel académico medio se dan los tres comportamientos: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] (en un problema de tipo T_2); mantener los datos y modificar el objetivo [C22] (en un problema de tipo T_2 y en un problema de tipo T_3); modificar los datos y el objetivo [C23] (en dos problemas tipo T_3). En el resolutor de nivel académico bajo se dan, también, los tres comportamientos: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] (en dos problema de tipo T_2); mantener los datos y modificar el objetivo [C22] (en un problema de tipo T_3); modificar los datos y el objetivo [C23] (en dos problemas de tipo T_3).

Es decir, que en los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , los resolutores de niveles académicos medio-alto y medio, presentan los comportamientos: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] en el contexto aritmético (problema A1) y mantener los datos y modificar el objetivo [C22] en el contexto geométrico (problema B10), sin embargo el resolutor de nivel académico bajo presenta un único comportamiento: modificar los datos y

mantener el objetivo [C21] (problemas A1 y B10). La actuación en el contexto algebraico no la podemos determinar pues no replantean ningún problema.

En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , el resolutor de nivel académico medio-alto presenta un único comportamiento: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] (en los tres contextos) y los resolutores de niveles académicos medio y bajo presentan los tres comportamientos: modificar los datos y mantener el objetivo [C21], mantener los datos y modificar el objetivo [C22] y modificar datos y objetivo [C23].

Atendiendo al contexto del problema presentado, observamos que el comportamiento modificar los datos y el objetivo [C23] no aparece en el resolutor de nivel académico medio-alto, en cambio sí aparece en los resolutores de niveles académicos medio y bajo en los contextos algebraico y aritmético, respectivamente. El comportamiento modificar los datos y mantener el objetivo [C21] se da en los tres contextos en los resolutores de niveles académicos medio-alto y bajo, en cambio el resolutor de nivel académico medio no presenta este comportamiento en el geométrico. El comportamiento mantener los datos y modificar el objetivo [C22] se observa en el contexto geométrico en el resolutor de nivel académico medio-alto y en los contextos aritmético y geométrico en los resolutores de niveles académicos medio y bajo.

- Respecto a la categoría de análisis (3), el resolutor de nivel académico medio-alto, ante el único problema en el que actúa sobre los datos (A1) el comportamiento que presenta es añadir datos [C3A], en cambio, ante los mal definidos tipo T_3 , presenta los tres comportamientos: añadir y eliminar datos [C3C] en el contexto aritmético, añadir datos [C3A] y eliminar datos [C3B] en el contexto algebraico, y añadir datos [C3A] en el geométrico. La

pareja de alumnos, de niveles académicos medio y bajo, frente a los problemas mal definidos tipo T_2 , el comportamiento que presentan es añadir datos [C3A] (problemas A1 y B10 de contextos aritmético y geométrico, respectivamente) y frente a los mal definidos tipo T_3 , el resolutor de nivel académico medio presenta el comportamiento eliminar datos [C3B] (problema A5 de contexto algebraico) y el resolutor de nivel académico bajo presenta los comportamientos eliminar datos [C3B] (problema A5 de contexto algebraico) y añadir y eliminar datos [C3C] (problema B4 de contexto aritmético).

- Respecto a las categorías de análisis (4), observamos que en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (problemas A1, A2 y B10), el comportamiento que presentan estos resolutores es: transformarlos en un problema bien definido [C4B] (en los dos que replantean, problemas A1 y B10). En cambio, ante los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas A5, A6 y B4), los comportamientos observados son los siguientes: transformarlos en un problema mal definido tipo T_3 , en el resolutor de nivel académico medio-alto, sin embargo la pareja de alumnos presenta los tres comportamientos, transformarlo en un problema bien definido [C4B] (el problema A6 de contexto geométrico), transformarlo en un problema mal definido tipo T_2 [C4A] (el problema A5 de contexto algebraico) y transformarlo en un problema mal definido tipo T_3 [C4C] (el problema B4 de contexto aritmético).

- En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , donde la solución está incluida en los datos dados (problemas A6 y B4), observamos diferencias según el nivel académico de los resolutores, de manera que el resolutor de nivel académico medio-alto, en el problema A6, ve la solución como un dato

más, necesario para alcanzar el objetivo, y en el problema B4, en el espacio semiótico inicial, ve la solución, también, como un dato necesario para alcanzar el objetivo, y en el espacio semiótico final identifica la solución como tal, y la elimina en su replanteamiento. Los resolutores de niveles académicos medio y bajo, en los dos problemas presentados, en el espacio semiótico inicial, interpretan la solución dada como un dato más del problema, necesario para la obtención del objetivo. En el espacio semiótico final, la identifican como tal, pero la mantienen en su replanteamiento, e incorporan otro objetivo más.

- Con relación a la fase de verificación-transición de nuestro esquema de análisis (capítulo 2, apartado 2.3.2), observamos diferencias según el nivel académico de los resolutores, la tipología y el contexto del problema presentado.

En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas A5, A6 y B4), los tres resolutores presentan diferentes espacios semióticos, en cambio, ante los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , el comportamiento general es presentar un único espacio semiótico.

Según el contexto, el resolutor de nivel académico medio-alto presenta diferentes espacios semióticos en los contextos aritmético y algebraico, en cambio la pareja de resolutores presenta diferentes espacios semióticos en los tres contextos.

Según la tipología del problema, observamos que en los caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , los resolutores de niveles académicos medio-alto y bajo, presentan un único espacio semiótico y el resolutor de nivel académico medio, en el problema A1 de contexto aritmético, desarrolla su actuación en dos espacios semióticos.

En los caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , el resolutor de nivel académico medio-alto, en los problemas de contextos aritmético y algebraico, presenta diferentes espacios semióticos y, en el contexto geométrico, su actuación se desarrolla en un espacio semiótico; en cambio, la pareja de resolutores presenta en los tres contextos estudiados diferentes espacios semióticos.

En la tabla siguiente, quedan reflejados los distintos espacios semióticos que presentan los resolutores:

Tipo	Contexto	Problema	Nivel académico medio-alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
T_2	Aritmético	A1	1	2	1
	Algebraico	A2	1	1	1
	Geométrico	B10	1	1	1
T_3	Aritmético	B4	2	1	2
	Algebraico	A5	3	2	2
	Geométrico	A6	1	2	2

Tabla 4.1

- Respecto a las diferentes indicaciones dadas ante cada grupo de problemas (A y B), observamos que en todos los problemas planteados, sean del grupo A o del grupo B, cuando los identifican como mal definidos, los replantean.

CON RELACIÓN A LAS JUSTIFICACIONES UTILIZADAS (apartado 2.3.3 del capítulo 2), distinguiremos:

- Problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (problemas A1, A2 y B10).
- Problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas A5, A6 y B4).

En los primeros, problemas A1, A2 y B10, observamos la utilización de los siguientes recursos:

PROBLEMA A1.

El resolutor de nivel académico medio-alto lo refuta con recursos de prueba. Relaciona las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas por él, tomando del problema diferentes situaciones que le llevan a la confusión y que propicia la refutación, para luego dar un ejemplo sacado de la misma situación.

El resolutor de nivel académico medio, en el espacio semiótico inicial, lo valida, con recursos de argumentación y prueba. En un primer momento, explicita las características de la situación sin poner en relación las cantidades numéricas, tratando de dar una idea de la situación (enumera los pasos del procedimiento y explicita cada paso), luego, relaciona las cantidades numéricas. En el espacio semiótico final, refuta el problema mediante la utilización de recursos de prueba, afirmando que el problema está mal planteado, involucrando y relacionando las cantidades explícitas, atendiendo a factores externos, más que a requerimientos matemáticos. Es decir, que el nivel de sistematización en la justificación hace referencia a actitudes sobre las matemáticas, siguiendo un procedimiento establecido por la disciplina, de manera que la justificación tiene como referente la autoridad del compañero competente.

El resolutor de nivel académico bajo lo refuta utilizando recursos de prueba, involucrando y relacionando las cantidades explícitas.

PROBLEMA A2.

Los tres resolutores validan el problema con recursos de prueba, relacionando las cantidades explícitas, situándose en el campo de la demostración matemática. Sin embargo, los resolutores de niveles académicos medio y bajo se bloquean y la alumna de nivel académico medio, atendiendo más a factores externos que a requerimientos matemáticos, se apoya en algo que goza de absoluta credibilidad para

ella, como es el haber realizado una tarea similar por un procedimiento determinado.

PROBLEMA B10.

Los tres resolutores lo refutan con recursos de argumentación y prueba. En un primer momento, el problema planteado les produce risa, les resulta extraño, exteriorizando conceptos y procesos acerca de los problemas, sin poner en relación las cantidades explícitas. A continuación, relacionan las cantidades numéricas, recurriendo a experiencias cuantificables, como el hecho de relacionar unos conceptos con otros, como son las dimensiones de una figura geométrica con el cálculo del área (los resolutores de niveles académicos medio-alto y medio) y situándose en el campo de la demostración matemática, realizando transformaciones en la situación problema (el resolutor de nivel académico bajo).

En los segundos, problemas A5, A6 y B4, observamos lo siguiente:

PROBLEMA A5.

El resolutor de nivel académico medio-alto, en el espacio semiótico inicial, lo valida con recursos de prueba, y en el espacio semiótico intermedio y final lo refuta con recursos de prueba y argumentación, respectivamente. La validación del problema la hace relacionando las cantidades explícitas, situándose en el campo de la demostración matemática. Las justificaciones de refutación, las hace, en el espacio semiótico intermedio, relacionando las cantidades explícitas, dando un ejemplo sacado de la misma situación, para pasar en el espacio semiótico final, a la explicación verbal, identificando y proyectando las características de la situación, sin poner en relación las cantidades explícitas.

Los resolutores de niveles académicos medio y bajo lo validan con recursos de prueba. En el espacio semiótico inicial, relacionan las cantidades explícitas, situándose en el campo de la demostración matemática. En el espacio semiótico final, el alumno de nivel académico bajo, no convencido de su actuación ([...] *un problema no puede ser tan fácil*), atendiendo ahora más a factores externos que a requerimientos matemáticos, recurre a un proceso impuesto por la costumbre, comentando [...] *si nos dan esos datos es para algo*. Sin embargo, la alumna de nivel académico medio lo valida relacionando las cantidades explícitas, pero atendiendo también a factores externos más que a requerimientos matemáticos, de manera que se apoya en la actuación de su compañero.

PROBLEMA A6.

El resolutor de nivel académico medio-alto lo refuta con recursos de prueba, relacionando las cantidades numéricas, recurriendo a experiencias cuantificables, como el hecho de relacionar unos conceptos con otros, como son el tiempo y la velocidad.

Los resolutores de niveles académicos medio y bajo lo validan, con recursos de prueba. En el espacio semiótico inicial, relacionan las cantidades explícitas, basándose en imágenes, en las cuales no están presentes habilidades de transformación, buscando una relación que les genera conflicto. En el espacio semiótico final, relacionan las cantidades explícitas, siguiendo, en un primer momento, un procedimiento establecido por la disciplina, de manera que la justificación tiene como referente una fuente que goza de absoluta credibilidad, como es la tarea en sí misma. Posteriormente, se sitúan en el campo de la demostración matemática, realizando transformaciones en la situación problema.

PROBLEMA B4.

El resolutor de nivel académico medio-alto, en el espacio semiótico inicial, lo valida con recursos de prueba, involucrando y relacionando las cantidades explícitas, situándose en el campo de la demostración matemática. En el espacio semiótico final, lo refuta con recursos de argumentación y prueba, recurriendo a la explicación verbal, identificando y explicitando las características de la situación, tratando de dar una idea de la situación. Luego se sitúa en el campo de la demostración matemática, estableciendo relaciones entre las cantidades.

La pareja de resolutores lo valida con recursos de prueba, relacionando las cantidades explícitas, atendiendo en un primer momento a factores externos más que a requerimientos matemáticos, ya que su justificación tiene como referente una fuente que goza de absoluta credibilidad como es la tarea en sí misma. Por último, relacionan las cantidades numéricas, situándose en el campo de la demostración matemática, realizando transformaciones en la situación problema.

En la siguiente tabla (tabla 4.2), se muestran los recursos utilizados para validar o refutar los problemas presentados, en términos de prueba y argumentación.

	Nivel académico medio-alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
Problema A1	REFUTA Prueba	VALIDA Argumentación y Prueba REFUTA Prueba	REFUTA Prueba
Problema A2	VALIDA Prueba	VALIDA Prueba	VALIDA Prueba
Problema B10	REFUTA Argumentación y Prueba	REFUTA Argumentación y Prueba	REFUTA Argumentación y Prueba

	Nivel académico medio-alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
Problema A5	VALIDA Prueba REFUTA Prueba REFUTA Argumentación	VALIDA Prueba	VALIDA Prueba
Problema A6	REFUTA Prueba	VALIDA Prueba	VALIDA Prueba
Problema B4	VALIDA Prueba REFUTA Argumentación y Prueba	VALIDA Prueba	VALIDA Prueba

Tabla 4.2

Observamos, por tanto, que en la mayoría de los casos los recursos utilizados para validar son recursos de prueba; en cambio para refutar utilizan recursos de prueba y de argumentación, observando situaciones donde son utilizados los dos tipos de recursos.

4.4.2 Análisis de datos

En este apartado presentamos un análisis detallado de los diferentes problemas pasados en la tercera prueba del estudio piloto (Anexo 5, tablas 37 y 38). De ellos, hemos elegido los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos (problemas A1, A2, A5, A6, B4 y B10).

A modo de ejemplo, presentamos el análisis detallado de un problema (A1), presentando la transcripción de cada alumno y siguiendo paso a paso nuestro esquema de análisis. A continuación, comentaremos los demás problemas de manera resumida de los dos grupos de alumnos videograbados.

PROBLEMA A1:

- Alumna de nivel académico medio-alto.

TRANSCRIPCIÓN: Alumna (A), entrevistador (E).

A: Lee en voz alta el problema y nada más terminar, sin hacer ninguna anotación en la pizarra, dice: *depende de lo que coma, pues si elige de la carta las tostadas y el café con leche paga por el desayuno cien pesetas más setenta y cinco pesetas, que serían ciento setenta y cinco pesetas, pero teniendo en cuenta que a lo mejor le gustan otras cosas para desayunar, se sumarían las cantidades correspondientes.*

E: *Entonces, ¿cuál sería la solución del problema realmente?*

A: *Pues yo respondería que no se sabe, pues depende de lo que él haya desayunado.*

E: *Bueno, para ti ¿a ese problema crees que le falta o le sobra algo o está bien planteado?*

A: *Le falta enunciado, por ejemplo: “La carta de un bar es la siguiente: Perros calientes 100 ptas., café con leche 75 ptas., papas fritas 85 ptas., coca cola 125 ptas., tostadas 100 ptas. y hamburguesa 175 ptas. Si Luis tiene tanto dinero ¿Qué podría comer?”*

Otra posibilidad sería “La carta de un bar es la siguiente: Perros calientes 100 ptas., café con leche 75 ptas., papas fritas 85 ptas., coca cola 125 ptas., tostadas 100 ptas. y hamburguesa 175 ptas. Si a Luis le gusta desayunar esto y esto, ¿cuánto pagará por el desayuno?” Pero tal y como está planteado no podemos responder pues no sabes lo que ha desayunado ni lo que le gusta desayunar.

ESQUEMA DE ANÁLISIS.

Tras la lectura, la alumna no hace ninguna anotación de las condiciones ni de los objetivos del problema, y comenta verbalmente lo

que opina del mismo. Con relación a la tarea, se observa su seguridad de saber que es lo que tiene que hacer y el conocimiento necesario para abordar la tarea.

En el episodio de análisis-exploración, se observa que busca una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, la alumna reconoce explícitamente que el problema está mal definido porque faltan datos y lo transforma explícitamente en un problema bien definido mediante la introducción de datos. Por lo tanto, lo identifica como mal definido tipo T_2 [C1A] y lo replantea, transformándolo en un problema bien definido [C4B], modificando los datos y manteniendo el objetivo [C21], de manera que la modificación de los datos la realiza añadiendo y eliminando datos [C3C].

A: Depende de lo que coma, pues si elige de la carta las tostadas y el café con leche paga por el desayuno cien pesetas más setenta y cinco pesetas, que serían ciento setenta y cinco pesetas, pero teniendo en cuenta que a lo mejor le gustan otras cosas para desayunar, se sumarían las cantidades correspondientes.

[...]

A: Le falta enunciado, por ejemplo: La carta de un bar es la siguiente: Perros calientes 100 ptas., café con leche 75 ptas., papas fritas 85 ptas., coca cola 125 ptas., tostadas 100 ptas. y hamburguesa 175 ptas. Si a Luis le gusta desayunar esto y esto, ¿cuánto pagará por el desayuno? Pero tal y como está planteado no podemos responder, pues no sabes lo que ha desayunado ni lo que le gusta desayunar.

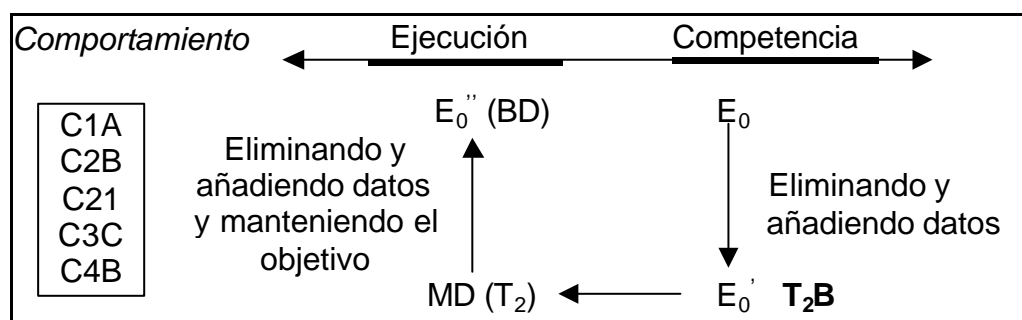
Con esta actuación, refuta el problema presentado, con la utilización de recursos de prueba, de manera que justifica que no se puede resolver, relacionando las cantidades explícitas, tomando del problema diferentes

situaciones que le llevan a la confusión que genera la refutación y luego da un ejemplo sacado de la misma situación.

La actuación de la alumna es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisa su actuación, por lo que ésta se desarrolla en un único espacio semiótico.

EN RESUMEN:

- a) Justificación de su actuación: Refuta el problema mediante la utilización de recursos de prueba.
- b) Espacios semióticos: Desarrolla su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.
- c) Actuación: El comportamiento en este problema, estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido tipo T_2 , acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido. Esquemáticamente:



- Pareja de alumnos.

TRANSCRIPCIÓN: La alumna de nivel académico medio (Ella) y el alumno de nivel académico bajo (Él).

Él: Lee el problema en voz alta.

Ella: Anota los datos del problema en forma de tabla con dos columnas, la

de la izquierda para el texto y la de la derecha para los datos numéricos a medida que él va leyendo el problema. Cuando él termina de leer el problema la alumna le pregunta... *¿Qué pide el problema?*

Él: *Que cuánto pagó por el desayuno.*

Ella: No anota la pregunta, e inmediatamente dice: *pues si comió papas fritas, tostadas, café con leche...* (hace una pausa muy pequeña y continúa). *pues coca cola no puede tomar, pues no va a mezclar la coca cola con el café con leche.*

Hace una pausa y contesta... *Pues, mira, si tomó hamburguesa y coca cola* (escribiendo en la pizarra hamburguesa con coca cola y debajo del texto los datos numéricos $125 + 175 = 300$ ptas., realizando el cálculo en voz un poco más baja) *pagó por el desayuno trescientas pesetas.*

Él: *¡Ay! ¿Y por qué sabes que comió hamburguesa y coca cola y no se comió papas fritas, tostadas, café con leche, coca cola y hamburguesa, menos los perros calientes porque sabes que no le gustan? Si el problema no te dice que comió, ¿cómo lo vas a saber tú? Este problema es un disparate, porque entonces cualquier solución es correcta.*

Ella: *¡Hombre, pedazo de tontería!. Además, si mezcla café con leche y coca cola se pone malo del estómago.*

Él: *Bueno, eso dices tú, pero de Luis tú no lo sabes.*

Ella: *Bueno, pues ponemos que comió tostadas, café con leche y papas fritas.*

Él: *¿Y por qué no todo menos lo que no le gusta que son los perros calientes? pues el problema no te dice otra cosa.*

Ella: *También. Pues entonces diremos que se gastó en el desayuno* (pasa a poner en la pizarra todos los datos numéricos y a realizar la operación en voz alta $85+100+75+125+175=560$ ptas.) *quinientas sesenta pesetas, ¿vale?, aunque también pudo tomar* (pasa a decir todos los posibles casos tomando en cada uno de ellos dos alimentos)

papas fritas y café con leche, o tostadas y café con leche, o.. , es decir que lo que paga depende de lo que coma. Cualquier solución es buena.

ÉL: *Yo digo que al problema le falta decir qué es lo que come, pues si no, no podemos dar una respuesta cierta.*

Ella: Levanta las cejas, con expresión de no estar de acuerdo y comenta... *Sí, claro.*

ESQUEMA DE ANÁLISIS:

Tras la lectura, la alumna anota las condiciones del problema mediante una representación numérica. El objetivo del problema no lo anota.

En el episodio de análisis-exploración, se observa que buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, en el espacio semiótico inicial, la alumna identifica el problema, explícitamente, como bien definido, aunque implícitamente lo identifica como mal definido porque faltan datos y lo replantea en un problema bien definido, añadiendo lo que consume Luis y manteniendo el objetivo. Es decir, lo identifica implícitamente como mal definido tipo T_2 [C1B-C1A] y lo transforma en bien definido [C4B], modificando los datos y manteniendo el objetivo [C21], de manera que la modificación de los datos la realiza añadiendo datos [C3A].

Ella: No anota la pregunta, e inmediatamente dice: *pues si comió papas fritas, tostadas, café con leche...* (hace una pausa muy pequeña y continúa). *pues coca cola no puede tomar, pues no va a mezclar la coca cola con el café con leche.*

Hace una pausa y contesta... *Pues mira, si tomó hamburguesa y coca cola* (escribiendo en la pizarra hamburguesa con coca cola y debajo del texto los datos numéricos $125 + 175 = 300$ ptas., realizando el cálculo

en voz un poco más baja) *pagó por el desayuno trescientas pesetas.*

La alumna valida el problema, utilizando recursos de argumentación y prueba, de manera que recurre a la explicación verbal, proyectando las características de la situación sin poner en relación las cantidades explícitas, dando una idea de la situación (enumeración de los pasos del procedimiento y explicitación de cada paso). Luego, relaciona las cantidades explícitas, situándose en el campo de la demostración matemática.

El alumno no está de acuerdo:

ÉL: *¡Ay! ¿Y por qué sabes que comió hamburguesa y coca cola y no se comió papas fritas, tostadas, café con leche, coca cola y hamburguesa menos los perros calientes porque sabes que no le gustan? Si el problema no te dice que comió, ¿cómo lo vas a saber tú? Este problema es un disparate, porque entonces cualquier solución es correcta.*

Ella: *¡Hombre, pedazo de tontería!. Además, si mezcla café con leche y coca cola se pone malo del estómago.*

ÉL: *Bueno, eso dices tú, pero de Luis tú no lo sabes.*

Es decir, que el alumno, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifica como mal definido tipo T_2 [C1A], y lo transforma en un problema bien definido [C4B] modificando los datos y manteniendo el objetivo [C21], de manera que la modificación de los datos la realiza añadiendo datos [C3A].

Con esta actuación, refuta el problema presentado, con la utilización de recursos de prueba, relacionando las cantidades explícitas, determinando una pluralidad de interpretaciones que al ser tomadas simultáneamente, le generan, estados de contradicción.

La alumna le dice que no son lógicos los desayunos que él plantea.

Exponen sus diferentes puntos de vista y, en el espacio semiótico final, la alumna se pone de acuerdo con su compañero.

ÉL: *Yo digo que al problema le falta decir que es lo que come, pues si no, no podemos dar una respuesta cierta.*

Ella: Levanta las cejas, con expresión de no estar de acuerdo y comenta [...] *Sí, claro.*

Es decir, que en el espacio semiótico final, sus acciones están dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifican como un problema mal definido tipo T_2 [C1A], y lo transforman en un problema bien definido [C4B], modificando los datos y manteniendo el objetivo [C21], de manera que la modificación de los datos la realizan añadiendo datos [C3A].

Con esto, la alumna refuta el problema, mediante la utilización de recursos de prueba, relacionando las cantidades explícitas, atendiendo a factores externos, más que a requerimientos matemáticos, ya que la justificación tiene como referente el razonamiento utilizado por su compañero.

La actuación del alumno es directa, de manera que no pasa por un período de verificación-transición, sin embargo, la actuación de la alumna no es directa tras la lectura, sino que hay un período de verificación-transición donde revisa el proceso de su actuación y modifica su plan.

EN RESUMEN:

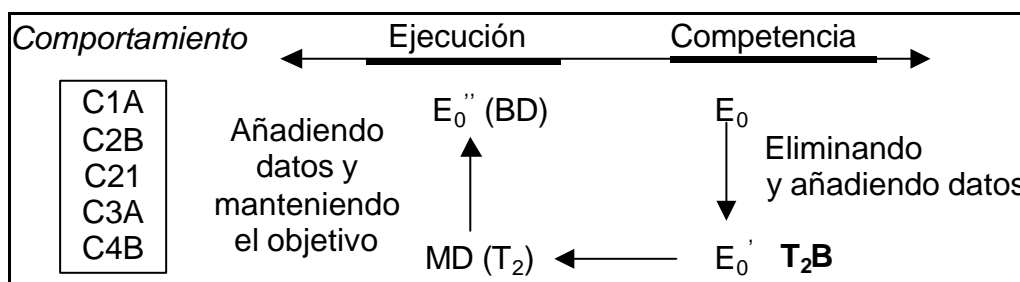
a) Justificaciones: La alumna, en el espacio semiótico inicial, valida el problema con recursos de argumentación y prueba, y en el espacio semiótico final lo refuta con recursos de prueba. El alumno refuta el problema, mediante la utilización de recursos de prueba.

b) Espacios semióticos: El resolutor de nivel académico bajo (él) desarrolla su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por

períodos de verificación-transición, en cambio la alumna de nivel académico medio desarrolla su actuación en diferentes espacios semióticos, pasando por un período de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento en este problema es el siguiente: la alumna, en el espacio semiótico inicial, presenta un comportamiento determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como bien definido, pero implícitamente lo identifica como mal definido tipo T_2 , acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido. En el espacio semiótico final, el comportamiento de ambos resolutores estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado, como mal definido tipo T_2 , acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido.

Esquemáticamente, el espacio semiótico final de la pareja de alumnos sería el siguiente:



A continuación, describimos el análisis del resto de los problemas, presentando sólo las partes de las transcripciones que hacen referencias concretas a algún aspecto descrito.

PROBLEMA A2

- Alumna de nivel académico medio-alto.

Durante la lectura la alumna no hace ninguna anotación de las condiciones ni de los objetivos del problema y comenta verbalmente lo que opina del problema. Se observa una falta de comprensión de la tarea

En el episodio de análisis-exploración, no busca una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A].

En el episodio de actuación, lo aborda como si estuviese En un problema bien definido [C1B].

A: *Se puede resolver por un sistema de tres ecuaciones o mediante un pictograma, dibujando animales y poniendo patas de 4 en 4 y de 2 en 2. Comienza a dibujar patas y dice: En clase hemos hecho alguno parecido, de esta manera, pero es una lata, pues son muchas patas.*

Pasa a plantear ecuaciones:

$$xc + yg = 116$$

$$1c \rightarrow 4p$$

$$1g \rightarrow 2p$$

$$xc \rightarrow xp$$

$$xg \rightarrow xp$$

Por lo tanto $\frac{4xpc}{1cxp}$

Se queda en silencio durante un rato y comenta: *No sé qué hacer. Estoy liada, pero sé que se resuelve así. Es que estoy un poco nerviosa. Si el problema dijese: en un corral hay tantas gallinas y tantos conejos y preguntase el número de patas, sería más fácil.*

E: *¿Por qué replanteas el problema? ¿Está mal planteado?*

A: *No, está bien planteado, pero como no me sale, lo que yo digo es que así (refiriéndose a su replanteamiento), sería más fácil.*

Con esta actuación, valida el problema presentado, con la utilización de recursos de prueba, de manera que relaciona las cantidades explícitas,

recurriendo a experiencias cuantificables y se sitúa en el campo de la demostración matemática.

La actuación, por tanto, es directa, sin pasar por un período de verificación-transición.

- Pareja de alumnos (ella de nivel académico medio y él de nivel académico bajo).

Tras la lectura, el alumno anota las condiciones y el objetivo del problema mediante una representación numérica. Releen el problema los dos juntos.

En el episodio de análisis-exploración, se observa que no buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A].

En el episodio de actuación, identifican el problema como bien definido [C1B].

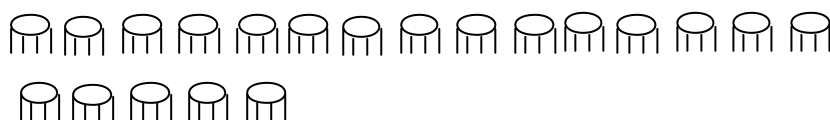
Alumnos: Tras leer el problema, ambos alumnos pasan a la pizarra:

$$\frac{116}{4} = 29 \text{ conejos.} \quad \frac{116}{2} = 58 \text{ gallinas.} \quad \frac{116}{6} = \textit{imposible}$$

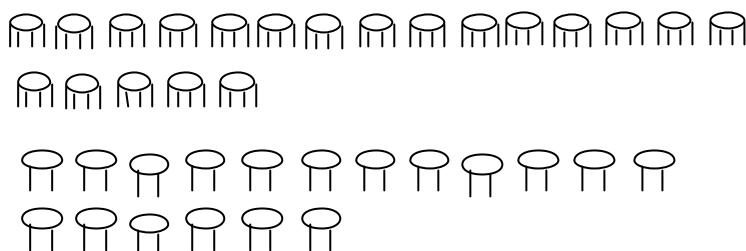
Él: *¿Y qué hacemos con esto?*

Ella: *Ni idea.* Tras un período de silencio... *Vamos a dibujar animalitos y ponerles patas. ¿Te acuerdas que la profesora hizo uno en clase?*

Al azar colocan 4 patas a 20 animales y dicen: *ya tenemos 80 patas que son 20 conejos*



Siguen dibujando de dos en dos hasta completar las 116 patas.



Luego hay 20 conejos y 18 gallinas.

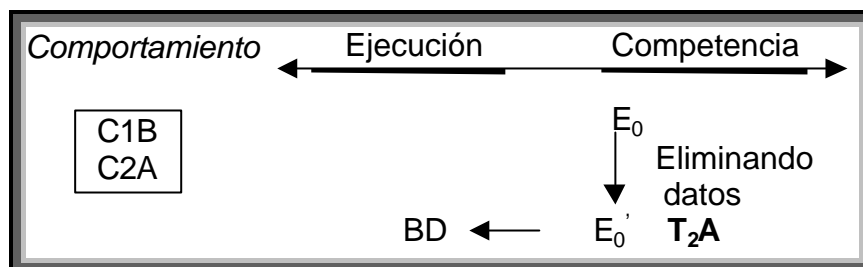
Con esta actuación, los alumnos validan el problema presentado, con la utilización de recursos de prueba. Tras leer el problema, relacionan las cantidades explícitas, situándose en el campo de la demostración matemática. Se bloquean y la alumna, atendiendo más a factores externos que a requerimientos matemáticos, recurre a un procedimiento establecido por la disciplina, apoyándose en algo que goza de absoluta credibilidad para ella, como es el haber realizado en clase una tarea similar por un procedimiento determinado.

La actuación no es directa tras la lectura, sino que hay un período de verificación-transición donde revisan el proceso de su actuación y cambian su plan de actuación. En ningún momento dudan que el problema esté bien definido.

Resumen del comportamiento de los tres resolutores En el problema A2:

- a) Justificaciones: Los tres resolutores validan el problema con diferentes recursos de prueba.
- b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.
- c) Actuación: El comportamiento de los tres resolutores, estaría determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifican

el problema presentado como bien definido, es decir interpretan el espacio E_0' como el espacio E_0 y acciones dirigidas por los datos.



Se trata de un comportamiento invariante desarrollado por los tres resolutores.

PROBLEMA A5.

- Alumna de nivel académico medio-alto.

Relee el problema varias veces y en ningún momento hace anotaciones, sino comenta que está confusa pues el problema tiene muchos datos.

El contexto de la tarea (algebraico) condiciona de manera desfavorable la comprensión del problema, ya que se observa una incomprensión de la tarea y una interpretación incorrecta de la misma.

En el episodio de análisis-exploración, no busca una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, en el espacio semiótico inicial, lo identifica como bien definido, pero de manera implícita lo identifica como mal definido tipo T_3 [C1B-C1A] y lo transforma en un problema mal definido tipo T_2 [C4A], modificando los datos y manteniendo el objetivo [C21], de manera que la modificación de los datos la realiza eliminando datos [C3B], quedando caracterizado por T_2A .

A. Lee el problema varias veces. *No sé qué hacer. Tiene muchos datos.*

Vuelve a leerlo y comienza a operar:

$100 \cdot 6 = 600$, es decir que almacenaron 600 kg

Con esta actuación, la alumna valida el problema presentado, utilizando recursos de prueba.

Afirma que el problema está bien planteado, mediante un proceso que involucra y relaciona las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas, situándose en el campo de la demostración matemática.

Posteriormente (espacio semiótico intermedio), después de volver a leer el problema, reconoce explícitamente que el problema está mal definido porque le faltan datos y lo transforma en un problema mal definido tipo T_3 , añadiendo datos. Es decir, que estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], lo identifica como mal definido tipo T_2 [C1A], y lo replantea, transformándolo en un problema mal definido tipo T_3 [C4C], modificando los datos y manteniendo el objetivo [C21], de manera que la modificación de los datos la hace añadiendo datos [C3A], quedando caracterizado por T_3A .

A: Vuelve a leer el problema. *Si me dijiesen el precio del kg de heno, sí podría resolverlo, pues como me dan el dinero que se gastan, con estos datos puedo saber lo que almacenaron.*

E: *¿Cómo lo replantarías?*

A: *Todo igual pero añadiendo el precio del kilogramo y de esa manera puedo calcular lo que consume.*

Con esta actuación, refuta el problema presentado, con la utilización de recursos de prueba.

Justifica que no se puede resolver, mediante un proceso que involucra y relaciona las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas por el resolutor dando un ejemplo sacado de la

misma situación.

Por último (espacio semiótico final), vuelve a revisar su actuación, y basándose en los resultados de sus actuaciones anteriores, lo identifica explícitamente como mal definido porque faltan y sobran datos, pero no sabe replantearlo. Es decir, que estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifica como mal definido tipo T_2 [C1A], y no lo replantea.

A. Vuelve a leer el problema y anota en la pizarra los datos del problema, de forma numérica:

Para 4 días

ahorraron 100 kg por día

Duró 6 días

Gastaron 1.200 pesetas

Las 1200 ptas., no me sirven para nada y además creo que le faltan datos, pero no me doy cuenta de cuáles.

Con esta actuación, refuta el problema presentado con la utilización de recursos de argumentación como la explicación verbal, identificando las características de la situación, sin poner en relación las cantidades explícitas.

La actuación, por tanto, no es directa tras la lectura, sino que hay períodos de verificación-transición donde revisa el proceso de su actuación, modificando en varias ocasiones su actuación.

- Pareja de alumnos (ella de nivel académico medio y él de nivel académico bajo)

Tras la lectura, el alumno anota las condiciones del problema mediante una representación numérica. El objetivo del problema no lo anota. Tras finalizar la lectura y anotar las condiciones del problema, releen varias veces el problema antes de pasar al análisis-exploración.

El contexto de la tarea (algebraico) condiciona de manera desfavorable la comprensión del problema ya que se observa una incompreensión de la tarea y una interpretación incorrecta de la misma.

En el episodio de análisis-exploración, estos alumnos no buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, en el espacio semiótico inicial, ambos alumnos lo identifican explícitamente como bien definido, sin embargo, implícitamente lo identifican como mal definido [C1B-C1A], y lo transforman en un problema mal definido tipo T_2 [C4A], modificando los datos y manteniendo el objetivo [C21], de manera que la modificación de los datos la hacen eliminando datos [C3B], quedando caracterizado por T_2A . En el espacio semiótico final, lo identifican de nuevo como bien definido, aunque implícitamente lo identifican como mal definido [C1B-C1A], y lo transforman en un problema mal definido tipo T_2 [C4A], modificando los datos y el objetivo [C23], de manera que la modificación de los datos la hacen eliminando datos [C3B] (esta actuación no es caracterizada con respecto al problema bien definido del que partimos, al haber modificado la pregunta).

Alumnos: *Está bien planteado. Pasan a la pizarra...*

100 . 6 = 600 kg almacenaron

Él: *Espera, esto tiene truco. Demasiado facilito. Relee en voz alta el problema... ¡Claro! Hay que ver a cuánto sale el kg. Pasa a la pizarra...*

1200/600 = 2 ptas. el kg

Ella: *Dejándose llevar por su compañero comenta... ¡Es verdad!*

Alumnos: *Es decir que almacenaron 600 kg de heno a 2 pesetas el kg*

Con esta actuación, los resolutores validan el problema presentado, con la utilización de recursos de prueba. En el espacio semiótico inicial

relacionan las cantidades explícitas, situándose en el campo de la demostración matemática. Posteriormente, en el espacio semiótico final, el alumno, de nivel académico bajo, no convencido de su actuación (duda, pues un problema no puede ser tan fácil), valida el problema, atendiendo ahora más a factores externos que a requerimientos matemáticos, recurriendo a un proceso impuesto por la costumbre, como el hecho que si nos dan esos datos es para algo. La alumna, de nivel académico medio, sin embargo, lo valida relacionando las cantidades explícitas, pero atendiendo a factores externos más que a requerimientos matemáticos, ya que el nivel de sistematización en la justificación, hace referencia a actitudes sobre las matemáticas más que a verdaderos procesos de inferencia matemática, de manera que la justificación tiene como referente la autoridad del compañero.

La actuación no es directa tras la lectura, sino que pasan por un período de verificación-transición, sin dudar nunca que el problema está bien planteado.

Resumen del comportamiento de los tres resolutores En el problema A5.

a) Justificaciones: En el espacio semiótico inicial, los tres resolutores validan el problema utilizando recursos de prueba. En el espacio semiótico intermedio, la alumna de nivel académico medio-alto lo refuta con la utilización de recursos de prueba. En el espacio semiótico final, la alumna de nivel académico medio-alto lo refuta mediante la utilización de recursos de argumentación, y la pareja de alumnos lo validan con recursos de prueba.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en diferentes espacios semióticos, pasando por períodos de verificación-transición, donde revisan el proceso de su actuación.

c) Actuación: Los comportamientos observados en este problema son los siguientes:

En el espacio semiótico inicial, el comportamiento de los tres resolutores estaría determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4A], que se concreta en: identifican el problema presentado, de manera implícita, como mal definido tipo T_3 , sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado por T_2A .

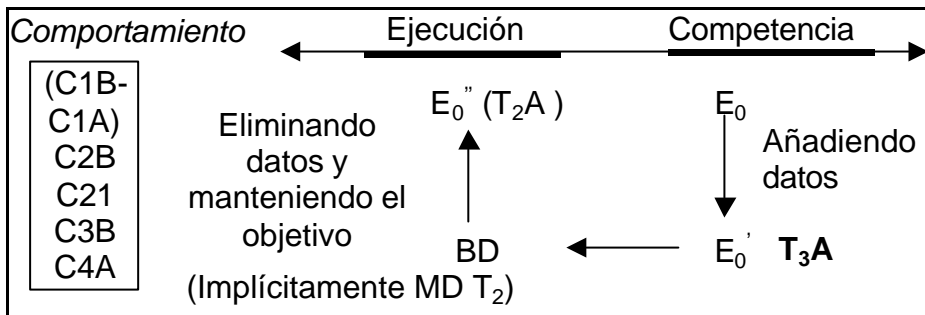
En el espacio semiótico intermedio (presente únicamente en la alumna de nivel académico medio-alto), el comportamiento estaría determinado por la secuencia [C1A-C2A-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado, como mal definido tipo T_3 , sus acciones están dirigidas por los datos, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .

En el espacio semiótico final, el comportamiento de la alumna de nivel académico medio-alto estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido tipo T_2 y acciones dirigidas por el objetivo (no lo replantea). El comportamiento de la pareja de alumnos estaría determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2A-C23-C3B-C4A], que se concreta en: identifican explícitamente el problema presentado como bien definido, pero implícitamente lo identifican como mal definido tipo T_3 , sus acciones están dirigidas por los datos, modifican los datos y el objetivo, la modificación de los datos la realizan eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema mal definido tipo T_2 . (Esta actuación

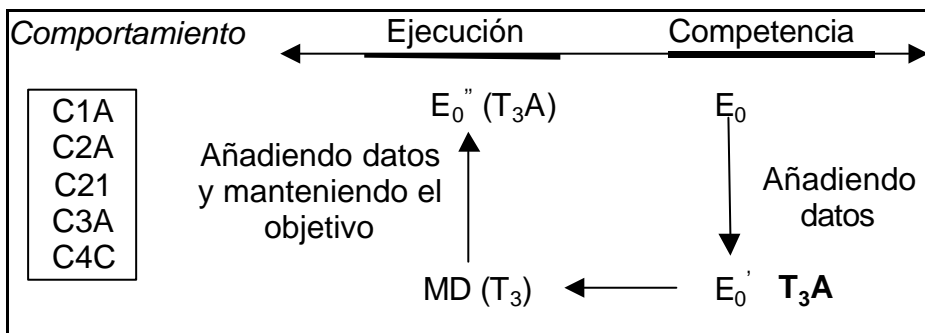
no es caracterizada con respecto al problema bien definido del que partimos, al haber modificado la pregunta).

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

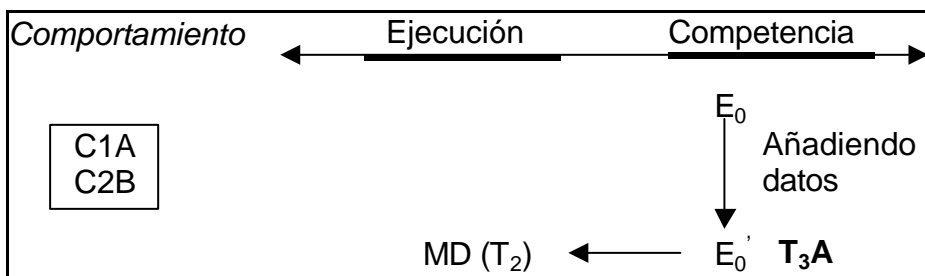
Espacio semiótico inicial de los tres resolutores:



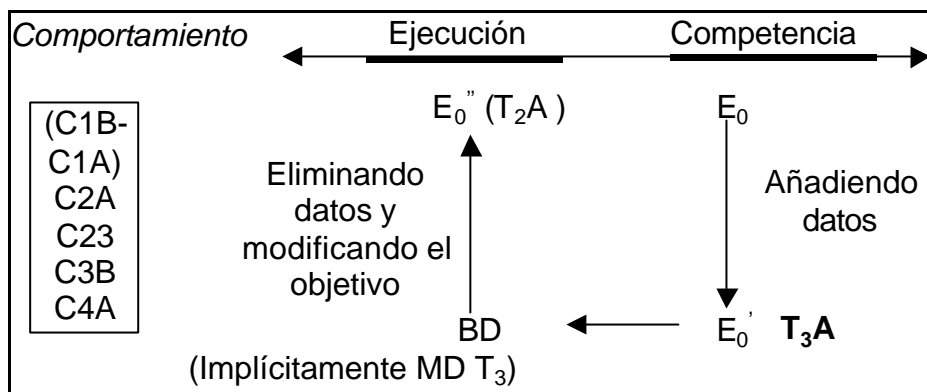
Espacio semiótico intermedio de la alumna de nivel académico medio-alto:



Espacio semiótico final de la alumna de nivel académico medio-alto:



Espacio semiótico final de la pareja de alumnos:



PROBLEMA A6.

- Alumna de nivel académico medio-alto.

Tras la lectura inicial, la alumna vuelve a leer el problema y anota explícitamente las condiciones y los objetivos del problema mediante una representación gráfica. Posteriormente hay un momento de silencio tras el cual vuelve a leer el problema. Se observa una incomprensión de la tarea, debido a una mala interpretación del enunciado

En el episodio de análisis-exploración, no interpreta los 62 metros como la solución del problema, incluso tras preguntárselo la investigadora, interpreta este dato, como una parte del recorrido total que desconoce.

Busca una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, reconoce explícitamente que el problema está mal definido porque faltan datos, y lo replantea transformándolo en un problema mal definido añadiendo datos. Es decir, lo identifica como mal definido tipo T₂ [C1A], y lo transforma en un problema mal definido

tipo T_3 [C4C], modificando los datos y manteniendo el objetivo [C21], de manera que la modificación de los datos la realiza añadiendo datos [C3A], quedando caracterizado por T_3A .

A: *El problema no se puede resolver porque le faltan datos, como por ejemplo el número de horas que tarda en todo el recorrido.*

E: *¿Para qué necesitas el número de horas?*

A: *Porque como me dan el número de horas que tarda en recorrer 62 metros, si me dan el número de horas del recorrido total puedo calcular lo que me piden, si no es imposible.*

E: *¿Cómo plantearías entonces el problema?*

A: *¿Qué distancia separa el colegio del parque si sabemos que tardamos 8 horas con una bicicleta cuya rueda de 60 cm de diámetro recorre 62 metros en 6 horas?*

De esta manera, refuta el problema planteado con recursos de prueba, relacionando las cantidades explícitas, recurriendo a experiencias cuantificables, como el hecho de relacionar unos conceptos con otros, como son el tiempo y la velocidad.

La actuación de la alumna es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisa su actuación.

- Pareja de alumnos (nivel académico medio y nivel académico bajo).

Durante la lectura, el alumno anota explícitamente las condiciones y los objetivos del problema mediante una representación numérica. Posteriormente hay un momento de silencio tras el cual vuelven a leer el problema.

El contexto de la tarea (geométrico) condiciona de manera desfavorable la comprensión del problema, observándose una cierta incompreensión de la tarea.

En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A].

En el episodio de actuación, en el espacio semiótico inicial, lo identifican como bien definido [C1B].

Alumnos: Lo leen varias veces [...] *No sabemos qué hacer para calcular la distancia recorrida.*

Ella: *Es que los problemas de geometría, con tantas fórmulas son un rollo.*

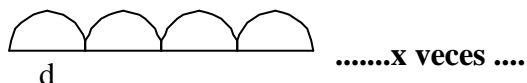
Lo vuelven a leer y se plantean lo que hace la rueda.

Ella: *Hay que averiguar...* hace un gesto con la mano, describiendo media circunferencia... *bueno...* pasa a la pizarra y dibuja lo siguiente:



Alumnos: Haciendo referencia al dibujo realizado comentan... *Esto es lo que hace la rueda.*

Ella: *Lo que hace la rueda es recorrer el diámetro un número de veces que no sabemos, durante 6 horas.*



Entre ellos comentan: *¡...qué hacemos para calcular esto!*

Con esta actuación, validan el problema presentado, mediante la utilización de recursos de prueba, basándose en imágenes, en las cuales no están presentes habilidades de transformación.

Posteriormente, después de volver a leer el problema, observan que la solución la da el problema y, sin embargo, continúan buscando objetivos no pedidos para poder utilizar todos los datos que aparecen en el enunciado del problema. Es decir, que no buscan una relación entre los datos y el objetivo, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], implícitamente lo identifican como mal definido [C1B-C1A] y lo

transforman en un problema bien definido [C4B], manteniendo los datos y modificando el objetivo [C22].

Él: *La distancia ya la da el problema, 62 metros, ¿pero qué hacemos con la rueda? ¿Y con las 6 horas? ¡Esto tiene truco!*

Alumnos: Lo discuten y terminan diciendo: *Si en 6 horas recorren 62 metros, en una hora recorren 10'3 metros (plantean una regla de tres). Entonces recorre 62 metros a 10,3 metros por hora.*

De nuevo validan el problema, utilizando recursos de prueba, relacionando las cantidades explícitas, atendiendo a factores externos, más que a requerimientos matemáticos, ya que hacen referencia a actitudes sobre las matemáticas más que a verdaderos procesos de inferencia matemática, como es la tarea en sí misma. A continuación, relacionan las cantidades explícitas, situándose en el campo de la demostración matemática, realizando transformaciones en la situación problema.

La actuación no es directa tras la lectura y relectura, sino que hay un período de verificación-transición donde revisan el proceso de su actuación modificando su plan.

Resumen del comportamiento de los resolutores en el problema A6.

a) Justificaciones: La alumna de nivel académico medio-alto refuta el problema mediante la utilización de recursos cognitivos internos, en cambio, la pareja de resolutores lo validan mediante la utilización de recursos cognitivos internos y en espacio semiótico final, lo validan con recursos cognitivos externos e internos.

b) Espacios semióticos: El resolutor de nivel académico medio-alto, desarrolla su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición, en cambio la pareja de resolutores, desarrollan su actuación en diferentes espacios semióticos, pasando por

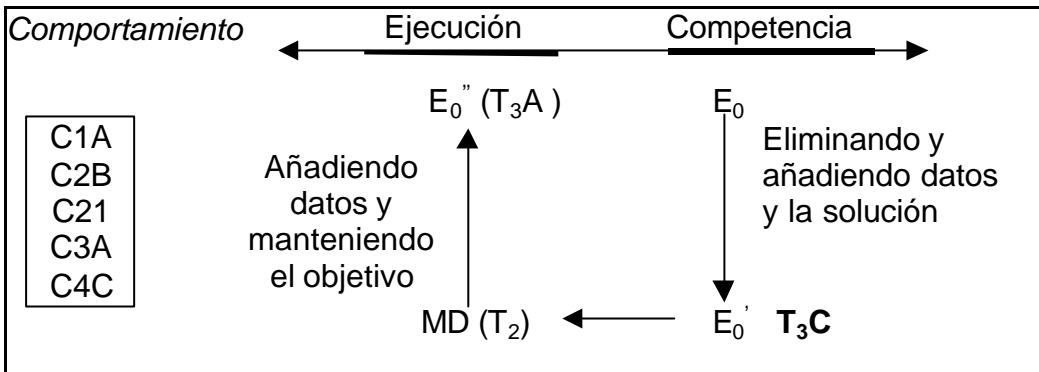
períodos de verificación-transición, donde revisan el proceso de su actuación.

c) Actuación desde nuestra propuesta de caracterización: El comportamiento de la alumna de nivel académico medio-alto estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido tipo T_2 , sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .

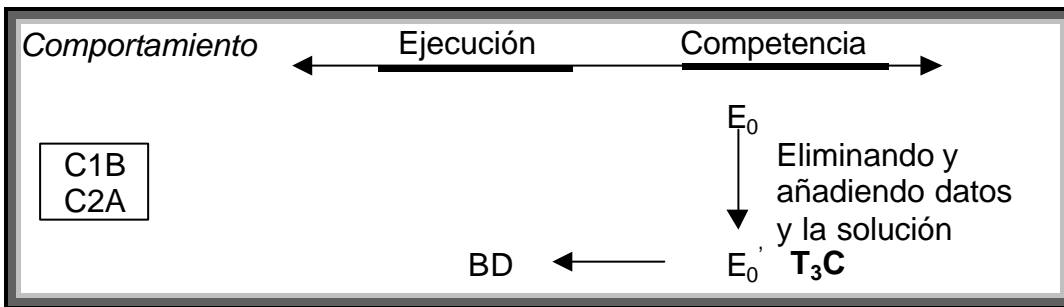
El comportamiento de la pareja de alumnos estaría determinado, en el espacio semiótico inicial, por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido - sus acciones están dirigidas por los datos y en el espacio semiótico final, estaría determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2A-C22-C4B], que se concreta en: identifican explícitamente el problema presentado como bien definido, pero implícitamente lo identifican como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, mantienen los datos y modifican el objetivo y transforman el problema planteado en un problema bien definido.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

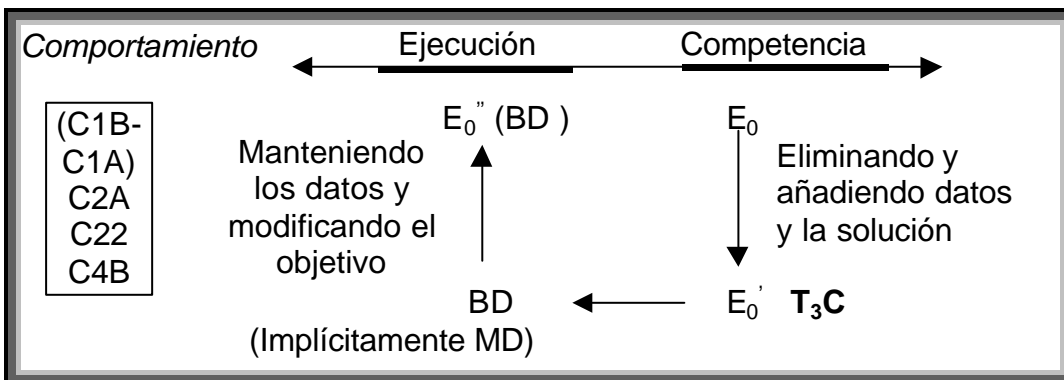
Alumna de nivel académico medio-alto:



Espacio semiótico inicial de la pareja de alumnos (niveles académicos medio y bajo):



Espacio semiótico final de la pareja de alumnos (niveles académicos medio y bajo):



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por los resolutores de niveles académicos medio y bajo.

PROBLEMA B4

- Alumna de nivel académico medio-alto.

Tras la lectura, la alumna no hace ninguna anotación de las condiciones del problema ni de los objetivos del mismo y comenta verbalmente lo que opina del problema. Relee el problema varias veces y se observa que la alumna interpreta mal el enunciado del problema.

En el episodio de análisis-exploración, busca una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, se observa que en el espacio semiótico inicial, lo identifica explícitamente como bien definido, pero implícitamente lo identifica como un problema mal definido tipo T_3 [C1B-C1A] y lo replantea en un problema bien definido [C4B], modificando los datos y manteniendo el objetivo [C21], de manera que la actuación sobre los datos consiste en eliminar y añadir datos [C3C].

A: Lee el problema y pasa a la pizarra... *Si se comen ciento veintiocho gramos $760 - 128 = 632$ gramos le sobran.*

Con esta actuación valida el problema con la utilización de recursos de prueba, relacionando las cantidades explícitas, situándose en el campo de la demostración matemática.

Posteriormente, en el espacio semiótico final, se da cuenta que ha interpretado mal el problema y observa que la solución está entre los datos del problema, y que además sobran datos, replanteándolo en un problema mal definido. Por lo tanto, sus acciones están dirigidas por el objetivo [C2B], lo identifica explícitamente como mal definido tipo T_3 [C1A], y lo transforma en un problema mal definido tipo T_3 [C4C] añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C], quedando caracterizado el problema por T_3A .

A: Se queda un rato mirando el enunciado del problema y posteriormente comenta... *¡632 son los gramos que se comieron! ¡Lo que pide el problema ya lo dan, los 128 gramos! Además, hay datos que no intervienen en el problema, pues no nos dicen que cantidad comió cada animal. Se podría resolver si dijese: Una señora cría, durante 52 semanas, animales. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen 500 gramos, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana?*

Con esta actuación refuta el problema mediante recursos de argumentación y prueba. La justificación de refutación la hace mediante la explicación verbal, identificando las características de la situación. Luego se sitúa en el campo de la demostración matemática.

La actuación no es directa tras la lectura y relectura, sino que hay un período de verificación-transición donde revisa el proceso de su actuación.

- Pareja de alumnos (nivel académico medio y nivel académico bajo).

Tras la lectura, el alumno anota las condiciones del problema mediante una representación numérica. El objetivo del problema no lo anota. Posteriormente hay un momento de silencio tras el cual intentan realizar algunos cálculos y deciden volver a leer el problema. El contexto de la tarea (aritmético) parece que no condiciona la comprensión del problema.

En el episodio de análisis-exploración, no buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A].

En el episodio de actuación, en el espacio semiótico inicial, el alumno lo identifica explícitamente como bien definido, aunque implícitamente lo identifica como mal definido [C1B-C1A] y lo transforma en un problema bien definido [C4B], añadiendo y eliminando datos y manteniendo el

objetivo [C21-C3C].

Alumnos: Leen el problema.

Él: $760 - 128 = 632$ *gramos sobran.*

Con esta actuación, validan el problema presentado, mediante la utilización de recursos de prueba, relacionando las cantidades explícitas, situándose en el campo de la demostración matemática.

La alumna no está de acuerdo con su compañero y le comenta que lo que sobró ya lo da el problema y lo que él calculó, es lo que se comieron en una semana. El alumno releo el problema y está de acuerdo con su compañera, sin embargo, continúan buscando un objetivo no pedido. Por lo tanto, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], lo identifican explícitamente como bien definido aunque implícitamente lo identifican como mal definido tipo T_3 [C1B-C1A] y lo transforman en mal definido tipo T_3 [C4C], manteniendo los datos y modificando el objetivo [C22]. (Esta actuación no es caracterizada con respecto al problema bien definido del que partimos, al haber modificado la pregunta).

Ella: *Eso es lo que se comen* (refiriéndose al dato calculado por su compañero) *y lo que sobró ya te lo dice el problema.*

Él: *Vuelve a leer el problema... Es verdad, leí mal el problema, pero de todas formas, esto es para confundir al alumno.*

Alumnos: *Entonces, para saber lo que le sobró en las 52 semanas...*

Pasan a la pizarra...

$632 \cdot 52 = 32864$ *gramos que consumen los animales en las 52 semanas.*

Investigadora: *¿Qué opinan del problema?*

Alumnos: Leen de nuevo el problema y ella comenta que sí, asintiendo su compañero con la cabeza.

Investigadora: *¿Sí qué?*

Alumnos: *Que está bien planteado.*

Por lo tanto, en el espacio semiótico final, validan el problema con recursos de prueba, relacionando las cantidades explícitas, atendiendo, en un primer momento, a factores externos, más que a requerimientos matemáticos, ya que el nivel de sistematización en la justificación, hace referencia a actitudes sobre las matemáticas más que a verdaderos procesos de inferencia matemática, siguiendo un proceso impuesto por la costumbre. A continuación, se sitúan en el campo de la demostración matemática, realizando transformaciones en la situación problema.

La actuación del alumno, no es directa, sino que hay un período de verificación-transición, donde revisa el proceso de su actuación.

Resumen del comportamiento de los tres resolutores en el problema B4.

a) Justificaciones: Los resolutores de niveles académicos medio-alto y bajo, en el espacio semiótico inicial, validan el problema mediante la utilización de recursos de prueba. En el espacio semiótico final, la alumna de nivel académico medio-alto lo refuta con recursos de prueba y argumentación, y la pareja de alumnos lo validan mediante la utilización de recursos de prueba.

b) Espacios semióticos: Los resolutores de niveles académicos medio-alto y bajo desarrollan su actuación en diferentes espacios semióticos, pasando por períodos de verificación-transición, donde revisan el proceso de su actuación, en cambio la alumna de nivel académico medio desarrolla su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

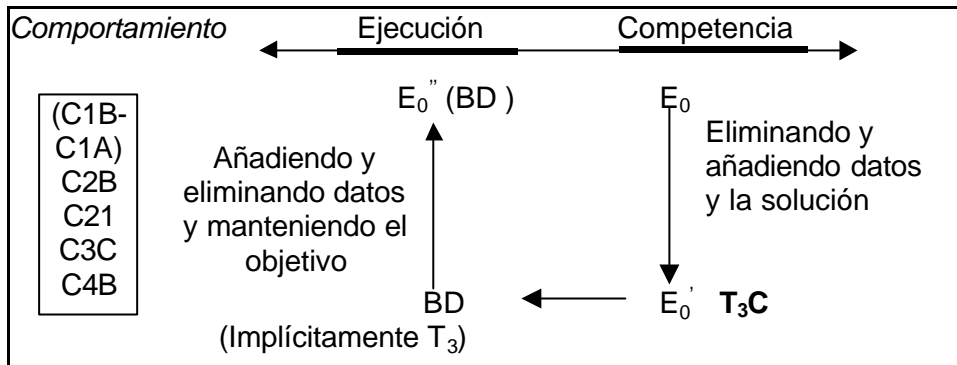
c) Actuación: El comportamiento en este problema es el siguiente: En el espacio semiótico inicial, el comportamiento de la alumna de nivel académico medio-alto estaría determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema

presentado, implícitamente, como mal definido tipo T_3 , sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido. En cambio, el comportamiento del alumno de nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2A-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como bien definido, aunque implícitamente lo identifica como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

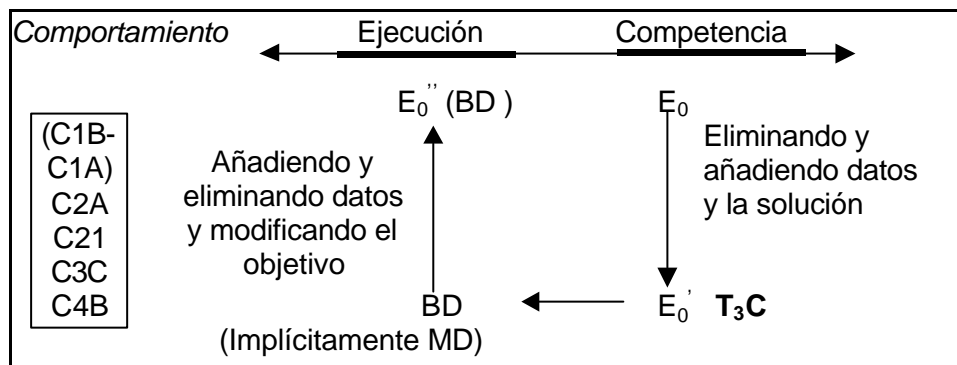
En el espacio semiótico final, el comportamiento de la alumna de nivel académico medio-alto estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido tipo T_3 , sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A . En cambio, el comportamiento de la pareja de alumnos (niveles académicos medio y bajo) estaría determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2A-C22-C4C], que se concreta en: identifican el problema presentado, implícitamente, como mal definido tipo T_3 , sus acciones están dirigidas por los datos, mantienen los datos y modifican el objetivo y transforman el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 (esta actuación no es caracterizada con respecto al problema bien definido del que partimos, al haber modificado la pregunta).

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

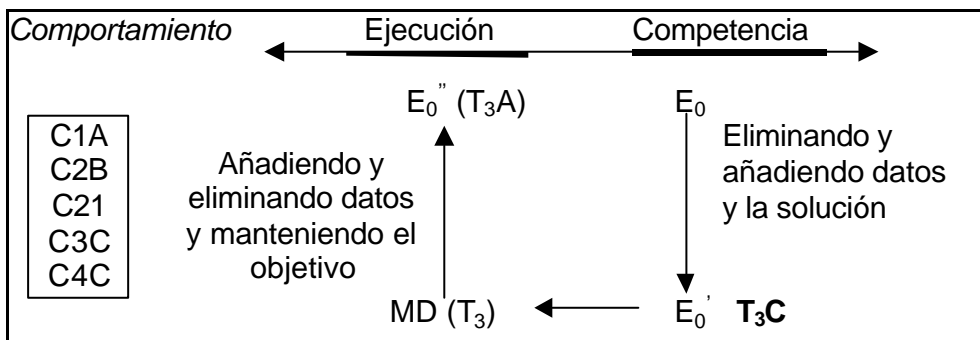
Espacio semiótico inicial de la alumna de nivel académico medio-alto:



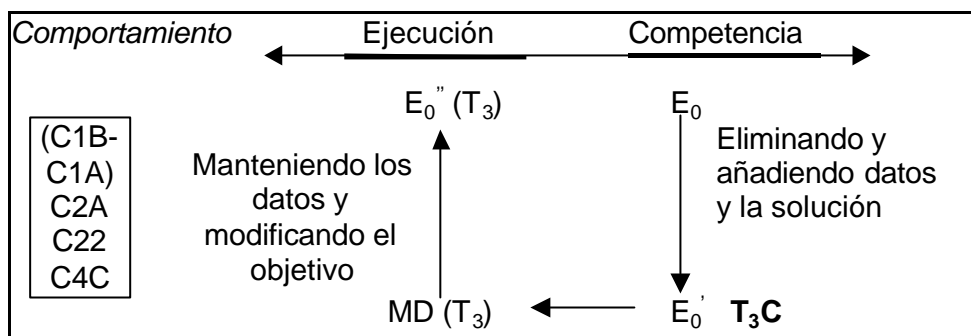
Espacio semiótico inicial del alumno de nivel académico bajo:



Espacio semiótico final de la alumna de nivel académico medio-alto.



Espacio semiótico final de la pareja de alumnos:



PROBLEMA B10.

- Alumna de nivel académico medio-alto.

Durante la lectura anota explícitamente las condiciones del problema mediante una representación gráfica. Los objetivos del problema no los anota.

En el episodio de análisis-exploración, se observa que busca una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A].

A. Se sonrío y comenta: *¿Esto qué es? Este problema no se puede resolver, pues la pregunta no tiene nada que ver con los datos. Sería preguntando, ¿cuál es el área de la plaza?*

En el episodio de actuación, reconoce explícitamente que el problema está mal definido transformándolo explícitamente en un problema bien definido. Por lo tanto, lo identifica como mal definido [C1A] y lo transforma en un problema bien definido [C4B], manteniendo los datos y modificando el objetivo [C22].

De esta manera, refuta el problema con la utilización de recursos de argumentación y prueba. El problema planteado inhabitual, le produce risa, de manera que exterioriza conceptos y procesos acerca de los problemas, sin poner en relación las cantidades explícitas. A continuación, relaciona las cantidades explícitas, recurriendo a experiencias

cuantificables como el hecho de relacionar unos conceptos con otros, como son las dimensiones de una figura geométrica con el cálculo del área.

La actuación es directa tras la lectura, sin la existencia de un período de verificación-transición.

- Pareja de alumnos (niveles académicos medio y bajo).

Durante la lectura anotan las condiciones del problema mediante una representación gráfica. Los objetivos del problema no los anotan. El contexto de la tarea (geométrico) no condiciona la lectura del problema.

Se observa que buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A] en la alumna, y por el objetivo [C2B] en el alumno.

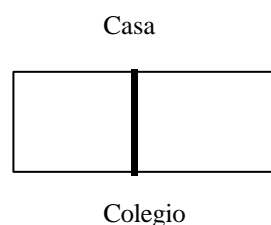
En el episodio de actuación, el comportamiento de la alumna es: identificarlo como mal definido [C1A] y transformarlo en un problema bien definido [C4B], modificando el objetivo [C22]. El comportamiento del alumno es: identificarlo como mal definido [C1A] y transformarlo en bien definido [C4B], añadiendo datos y manteniendo el objetivo [C21-C3A].

Alumnos: Se sonríen y comentan... *¡esto es una quedada!*

Investigadora: *¿Qué les induce a hacer ese comentario?*

Ella: *Es que no tiene sentido. Tendría que preguntar la superficie de la plaza.*

Él: *No, lo que pasa es que le faltan datos, como por ejemplo decir que el colegio está situado frente a la casa y a distintos lados de la plaza (señalando sobre el dibujo realizado en la pizarra).*



Con esta actuación, la pareja de alumnos refuta el problema mediante la utilización de recursos de argumentación y prueba. El problema

planteado, por su rareza, les produce risa, de manera que exteriorizan conceptos y procesos acerca de los problemas, sin poner en relación las cantidades explícitas. A continuación, relacionan las cantidades explícitas, recurriendo, en el caso de la alumna, a experiencias cuantificables, como el hecho de relacionar unos conceptos con otros, como son las dimensiones de una figura geométrica con el cálculo del área. Por último, se sitúan en el campo de la demostración matemática, realizando transformaciones en la situación problema.

La actuación de los alumnos es directa tras la lectura, sin un período de verificación-transición.

Resumen del comportamiento de los resolutores En el problema B10.

a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema mediante la utilización de recursos de argumentación y prueba.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

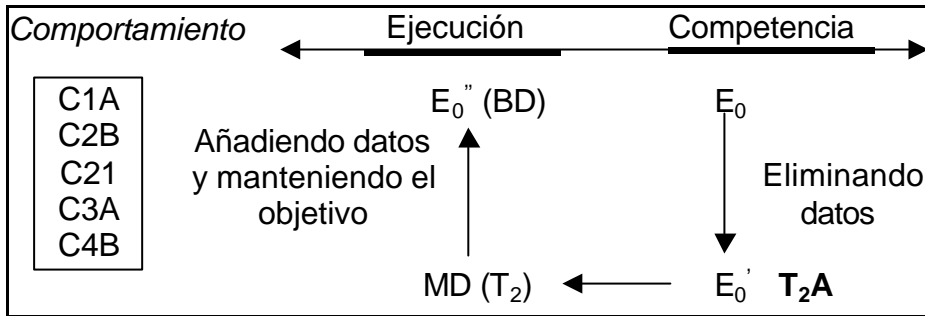
c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos medio-alto y medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2A-C22-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, mantienen los datos y modifican el objetivo y transforman el problema planteado en un problema bien definido.

El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, las modificaciones las realiza añadiendo datos y transforma el problema

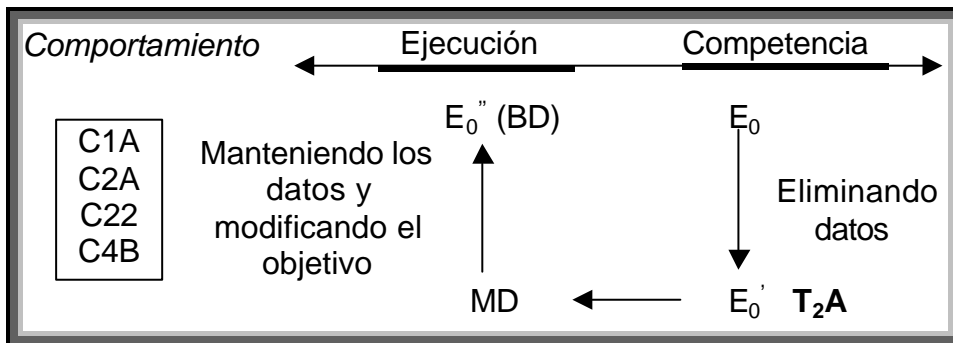
planteado en un problema bien definido.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico bajo:



Alumna de nivel académico medio-alto y alumna de nivel académico medio:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

4.4.3. Discusión y consideraciones, del tercer estudio piloto

La discusión y consideraciones se presentarán, con relación a los comportamientos regulares e invariantes y con las justificaciones dadas por los tres resolutores.

CON RELACIÓN A LOS COMPORTAMIENTOS REGULARES E INVARIANTES.

- Con respecto a la categoría de análisis (1), observamos algunas diferencias significativas, según el nivel académico de los resolutores y la tipología del problema, al enfrentarse a problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos.

a) En los tres resolutores, el comportamiento más habitual, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (problemas A1, A2 y B10) es: identificarlos como mal definidos [C1A] en los contextos aritmético y geométrico e identificarlos como bien definidos en el contexto algebraico.

b) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas A5, A6 y B4), observamos diferencias según el nivel académico de los resolutores, de manera que, el resolutor de nivel académico medio-alto, en los contextos aritmético y algebraico, en el espacio semiótico inicial, presenta el comportamiento: identificarlos explícitamente como bien definidos y comportarse como si estuviese ante un problema de encontrar mal definido [C1A], es decir que implícitamente los identifica como mal definidos [C1B-C1A], y en el contexto geométrico, el comportamiento observado es: identificarlos explícitamente como mal definidos [C1A].

Los resolutores de niveles académicos medio y bajo presentan siempre el comportamiento: identificarlos explícitamente como bien definidos y comportarse como si estuviesen ante un problema de encontrar mal definido, es decir que implícitamente los identifican como mal definidos [C1B-C1A].

Por lo tanto, de lo anteriormente descrito, vemos como el comportamiento: identificarlos explícitamente como bien definidos e identificarlos implícitamente como mal definido [C1B-C1A], se da principalmente en los problemas de encontrar caracterizados desde la

competencia como mal definidos tipo T_3 , en los tres resolutores, aunque en el resolutor de nivel académico medio-alto solamente en el espacio semiótico inicial y en los resolutores de nivel académico medio y nivel académico bajo, en todos los espacios semióticos presentes, es decir, que presentan este comportamiento a lo largo de toda su actuación.

El comportamiento: no saber identificarlos [C1C] no lo observamos en ninguno de los tres resolutores estudiados.

- Con respecto a la categoría de análisis (2), observamos diferencias según el nivel académico de los resolutores.

a) Con relación a: acciones dirigidas por los datos o por el objetivo, observamos que el comportamiento más frecuente en el resolutor de nivel académico medio-alto es: acciones dirigidas por el objetivo [C2B], sin embargo, en los resolutores de niveles académicos bajo y medio, el comportamiento es: acciones dirigidas por los datos [C2A].

b) Con relación a: qué modifican al replantear el problema dado, observamos que el comportamiento más frecuente en el resolutor de nivel académico medio-alto es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21], en cambio, en los resolutores de niveles académicos medio y bajo, se dan los tres comportamientos: modificar los datos y mantener el objetivo [C21], modificar el objetivo y mantener los datos [C22] y modificar los datos y el objetivo [C23].

Queremos destacar lo siguiente:

El comportamiento: modificar los datos y el objetivo [C23] no se observa en el resolutor de nivel académico medio-alto y en los resolutores de nivel académico medio y nivel académico bajo sólo aparece en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 de contexto geométrico.

El comportamiento: modificar los datos y mantener el objetivo [C21], que es el más frecuente en el resolutor de nivel académico medio-alto, no se observa en los resolutores de niveles académicos medio y bajo, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 .

En los tres resolutores estudiados, cuando el comportamiento es: acciones dirigidas por los datos [C2A], el comportamiento respecto a lo que modifican es: modificar el objetivo y mantener los datos [C22] o modificar los datos y el objetivo [C23], no observando ninguna situación donde el comportamiento es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21].

- Con respecto a la categoría de análisis (3) observamos que:

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , el único comportamiento observado en estos resolutores es: transformarlos añadiendo datos [C3A], y en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , los comportamientos observados son: en el resolutor de nivel académico medio-alto: transformarlos añadiendo datos [C3A] o añadiendo y eliminando datos [C3C], y en los resolutores de niveles académicos medio y bajo: transformarlos eliminando datos [C3B].

- Con respecto a la categoría de análisis (4) observamos que:

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , el único comportamiento observado en estos resolutores es: transformarlos en bien definidos [C4B], y en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , los comportamientos observados son: en el resolutor de nivel académico medio-alto: transformarlos en mal definido tipo T_3 , [C4C] y en los resolutores de niveles académicos medio y bajo, los tres

comportamientos: transformarlos en mal definido tipo T_2 [C4A], tipo T_3 [C4C] y bien definido [C4B].

- Con respecto a los comportamientos regulares e invariantes obtenidos del análisis conjunto de las cuatro categorías de análisis:

En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , observamos comportamientos invariantes en los contextos aritmético y algebraico, determinados, respectivamente, por la secuencia: [C1A-C2B-C21-C3A-C4B] que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido tipo T_2 , sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la hacen añadiendo datos y transforman el problema presentado en un problema bien definido, y la secuencia [C1B-C2A] que se concreta en: identificarlo como bien definido y acciones dirigidas por los datos.

En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , observamos un comportamiento regular en los resolutores de niveles académicos medio-alto y medio, determinado por la secuencia [C1A-C2A-C22-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, mantienen los datos y modifican el objetivo y transforman el problema presentado en un problema bien definido.

Por lo tanto, observamos la existencia de comportamientos invariantes en problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 de contextos aritmético y algebraico (problemas A1 y A2, respectivamente). En cambio, En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , sólo observamos comportamientos regulares en los resolutores de niveles académicos medio-alto y medio en el contexto geométrico.

- Con relación a la fase de verificación–transición, de nuestro esquema de análisis (capítulo 2, apartado 2.3.2), observamos que, el resolutor de nivel académico medio-alto, donde único presenta diferentes espacios semióticos es En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , en cambio, los resolutores de niveles académicos medio y bajo presentan diferentes espacios semióticos En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 y tipo T_3 . Si el análisis lo hacemos por contextos, observamos que el resolutor de nivel académico medio-alto presenta diferentes espacios semióticos en los problemas de contexto aritmético y algebraico, en cambio, los resolutores de niveles académicos medio y bajo presentan diferentes espacios semióticos en los tres contextos estudiados.
- Con respecto a las diferentes indicaciones dadas a los grupos de problemas A y B, observamos que no siguen las indicaciones dadas, ya que replantean tanto los problemas del grupo A como los del grupo B, siendo la actuación de estos resolutores, en la fase de preparación, la misma cuando se advierte que puede haber un problema mal planteado, que cuando se omite. Creemos que esto es debido a la presencia del entrevistador que conduce al resolutor hacia el replanteamiento.

CON RELACIÓN A LAS JUSTIFICACIONES UTILIZADAS por los resolutores podemos señalar lo siguiente:

Con respecto a si los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos son validados o refutados, observamos que mientras el comportamiento más frecuente del resolutor de nivel académico medio-alto es refutarlos explícitamente, es decir no aceptarlos como bien definidos, el comportamiento más frecuente de los resolutores de niveles académicos medio y bajo es validarlos, es decir aceptarlos

explícitamente como bien definidos.

Con respecto a los recursos de pruebas o argumentaciones utilizados para refutar o validar los problemas presentados, observamos que, en los tres resolutores estudiados, los recursos de prueba predominan sobre los recursos de argumentación; la argumentación no la suelen utilizar en sus justificaciones, como único recurso; cuando validan el problema presentado, utilizan recursos de pruebas, en cambio, cuando refutan el problema presentado, se dan situaciones donde utilizan recursos de prueba y situaciones donde utilizan recursos de argumentación y prueba.

En la siguiente tabla queda reflejado el número de problemas que, en el espacio semiótico final, son validados o refutados y los recursos, de prueba y argumentación, que utilizan los resolutores:

JUSTIFICACIONES		Nivel académico medio-alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
Validan	Prueba	1	4	4
	Argumentación	--	--	--
	Prueba y argumentación	--	--	--
Refutan	Prueba	2	1	1
	Argumentación	1	--	--
	Prueba y argumentación	2	1	1

Tabla 4.3

Si el análisis lo hacemos teniendo en cuenta las justificaciones utilizadas en los distintos espacios semióticos, observamos que cuando su actuación se desarrolla en diferentes espacios semióticos, el resolutor de nivel académico medio-alto, primero valida y luego refuta, en cambio, los resolutores de niveles académicos medio y bajo, validan en los diferentes espacios semióticos.

Tras observar cómo justifican los resolutores sus actuaciones, observamos diferentes tipos de pruebas y argumentaciones, tanto cuando

validan como cuando refutan. De esta manera, con respecto a la utilización de recursos de prueba, observamos diferentes tipos de recursos de la Matemática, de manera que hay situaciones donde recurren a experiencias cuantificables o se sitúan en el campo de la demostración matemática, o dan un ejemplo sacado de la situación planteada e incluso toman, del problema planteado, situaciones que pueden ser falsas y verdaderas a la vez. Con respecto a las argumentaciones, observamos también la utilización de diferentes recursos, de manera que en unos casos, justifican su actuación describiendo otra situación con la que establecen diferencias o semejanzas, plantean casos particulares que ilustran la validez de sus justificaciones, se apoyan en los juicios hechos por personas con algún prestigio social e incluso recurren a la risa frente a situaciones que por su rareza les resulta de poca consideración.

De manera resumida, la actuación de los alumnos, con respecto a las categorías: cómo identifican el problema presentado (categoría de análisis 1); si actúan o no sobre las condiciones y/o el objetivo es decir, si replantean o no el problema presentado (categorías de análisis 2, 3 y 4), y cómo justifican su actuación, en términos de validar o refutar, manifestadas en los diferentes espacios semióticos, al enfrentarse, con problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien o mal definidos, se recogen en los siguientes comportamientos: A) Refutan el problema planteado, identificándolo explícitamente como mal definido y no actuando sobre él, de manera que no lo replantean. B) Refutan el problema planteado, identificándolo explícitamente como mal definido y actuando sobre él, transformándolo en un problema bien o mal definido. C) Validan el problema presentado, interpretándolo explícitamente como bien definido y por lo tanto no lo replantean. D) Validan el problema presentado, interpretándolo explícitamente como bien

definido y caracterizándolo implícitamente como mal definido, transformándolo en un problema bien o mal definido. E) Ni validan ni refutan el problema presentado, pues no saben identificarlo.

4.5 FASE IV DEL ESTUDIO PILOTO

Durante el curso 1996-97, realizamos la cuarta prueba del estudio piloto, con veintiún alumnos de tercer curso de Maestro de la Especialidad de Educación Infantil del Centro Superior de Educación de la Universidad de La Laguna (Tenerife), a los que se les pasó una colección de trece problemas de encontrar mal definidos, en los contextos aritmético, algebraico y geométrico. Estos incluyen siete problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (problemas A1, A2, A3, B1, B2, B3 y B10) y seis caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas A4, A5, A6, B4, B5 y B6) (Anexo 1, segundo cuestionario).

Para realizar la prueba dividimos a los alumnos, al azar, en dos grupos, llevando a cada grupo a un aula diferente, de manera que, al mismo tiempo, un grupo realizaba los problemas del grupo A, con la indicación: "Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo, indicar las razones", y el otro, los problemas del grupo B, con la indicación: "Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo por estar mal planteado, indicar por qué está mal planteado, plantearlo bien y resolverlo".

Esto lo realizan los alumnos de manera individual y por escrito.

El objetivo era confirmar o no los resultados obtenidos en las pruebas exploratorias anteriores, respecto a las diferentes indicaciones dadas a los dos grupos de problemas, y decidir la conveniencia o no de mantener dichas indicaciones en la prueba final. De esta manera, el objetivo de esta cuarta prueba, era confirmar lo observado en las pruebas anteriores, con respecto a la *“actuación de los estudiantes En las diferentes indicaciones*

dadas a los diferentes grupos de problemas”.

4.5.1 Resultados globales

Los resultados globales obtenidos con relación al objetivo: *“Observar, si las diferentes indicaciones dadas en los dos grupos de problemas influyen o no en la actuación de los resolutores”*, coinciden con las pruebas exploratorias anteriores, de manera que:

a) La tendencia de los resolutores, cuando identifican el problema presentado como mal definido, es a replantearlo independientemente de las indicaciones dadas en A y B.

b) Presentan diferentes comportamientos, en los grupos A y B de problemas, en cuanto al análisis e interpretación de los datos disponibles inicialmente, en las restricciones y en la identificación del criterio de solución, de manera que, frente a problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos, si se presentaban dentro del grupo A, tendían más a identificarlos como bien definidos, que si se presentaban dentro del grupo B donde eran más reflexivos en su lectura (Anexo 4, tablas 15-16).

c) Además, observamos un cambio de actitud en los distintos grupos de problemas (A y B), En aquellos problemas donde sobran datos y/o la solución la daba el problema. Si eran del grupo A, había una tendencia a utilizar todos los datos, y en caso de no llegar a ver una solución, comentaban: *“no se puede resolver porque faltan datos”*. En cambio, si estaban incluidos en el grupo B, e identificaban la solución entre los datos dados, la tendencia era replantear el problema, de manera que la solución nunca estuviese incluida en los datos.

4.5.2 Discusión y Consideraciones

El análisis de esta prueba confirmó, por tanto, los resultados obtenidos

en las pruebas escritas anteriores. Sin embargo, debido a que los que nos interesaba estudiar era: *“cómo interpretan los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos, y cómo actúan sobre ellos, en la fase de preparación”*, decidimos eliminar de la prueba final la indicación del grupo A *“Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo, indicar las razones”* y mantener en todos los problemas presentados una única indicación: *“Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo por estar mal planteado, indicar por qué está mal planteado, plantearlo bien y resolverlo”*, con la intención, además, de hacer hincapié en que los alumnos lean dicha indicación antes de abordar los problemas presentados.

Los diferentes resultados obtenidos en las cuatro fases que comprenden los estudios pilotos, nos permitieron diseñar e implementar los estudios definitivos, que pasamos a presentar en los capítulos 5 y 6, respectivamente.

CAPÍTULO 5

ESTUDIO DEFINITIVO: ALUMNOS DEL CENTRO SUPERIOR DE EDUCACIÓN

- **INTRODUCCIÓN**

- **ESTUDIOS DEFINITIVOS: ALUMNOS DEL CENTRO SUPERIOR DE EDUCACIÓN**

- **RESULTADOS GLOBALES**
- **ANÁLISIS DE DATOS**
- **DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES**

5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo y en el siguiente, presentamos el análisis de los resultados de los estudios definitivos. Lo hemos dividido en dos para analizar por separado los resultados obtenidos con los alumnos del CSE y con los alumnos de la ESO, dado que son dos niveles académicos distintos.

La exposición de los resultados la haremos siguiendo el mismo orden que en los estudios pilotos, esto es, comenzaremos con los resultados globales, después expondremos el análisis de dichos datos para acabar con la discusión de los mismos.

5.2 ESTUDIOS DEFINITIVOS: ALUMNOS DEL CSE

Durante el curso 1997-98, realizamos uno de los estudios definitivos de la investigación, con dos grupos de alumnos de Maestro de la Especialidad de Educación Infantil del CSE de la Universidad de La Laguna (Tenerife). Un grupo estaba formado por veintitrés alumnos y el otro por tres alumnas., de niveles académicos alto, medio y bajo. El nivel académico de estos alumnos fue extraído de su expediente académico.

Se les pasó una colección de veintiún problemas de encontrar, bien y mal definidos, en los contextos aritmético, algebraico y geométrico (Anexo 1, cuestionario definitivo). Seis de ellos caracterizados desde la competencia como mal definidos del tipo T_2 (faltan datos), denominados 1, 2, 3, 4, 5 y 6, nueve caracterizados desde la competencia como mal definidos del tipo T_3 (sobran datos), denominados 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15, tres caracterizados desde la competencia como bien definidos impropios, denominados 16, 17 y 18, y tres caracterizados desde la competencia como bien definidos propios, denominados, 19, 20 y 21. Este estudio se realiza en sesiones videograbadas (ver apartados 3.2.2 y 3.3 del capítulo 3).

El objetivo de este estudio era confirmar lo observado en el estudio piloto, con respecto a: 1) la existencia o no de comportamientos regulares e invariantes, en las actuaciones de los resolutores en la fase de "preparación", 2) las justificaciones utilizadas por los resolutores en sus actuaciones, en términos de validación y refutación.

Se utilizó el sistema de categorías derivado del Modelo de Competencia Formal, el Esquema de Análisis establecido junto con las categorías de análisis de las justificaciones obtenidas de la fase III del estudio piloto y descritas en el capítulo 2 (apartado 2.3.3).

En este estudio final no comentamos las pruebas escritas de los alumnos del CSE, por ser los resultados análogos a los resultados obtenidos en los estudios pilotos.

5.2.1 Resultados globales

Presentamos en este apartado, los resultados globales de los diferentes comportamientos de los resolutores del CSE, en los diferentes problemas pasados en esta prueba (Anexo 4, tablas [17-22]), con relación a los comportamientos regulares e invariantes y a las justificaciones.

CON RELACIÓN A LOS COMPORTAMIENTOS REGULARES E INVARIANTES.

- Respecto a la categoría de análisis (1), encontramos que:
 - a) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien definidos (problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21), observamos diferencias según el contexto del problema presentado y el nivel académico de los resolutores.

El comportamiento más habitual en los resolutores de niveles académicos alto y medio es: identificarlos como bien definidos [C1B] (en un 83% de los problemas presentados, el resolutor de nivel académico

alto y en un 67% el resolutor de nivel académico medio), en cambio, el resolutor de nivel académico bajo presenta dos comportamientos: identificarlos como bien definidos [C1B] (en un 50% de los problemas presentados) e identificarlos como mal definidos [C1A] (en un 50% de los problemas presentados).

b) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos (problemas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15), observamos que:

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , el comportamiento más frecuente que observamos en estos resolutores es: identificarlos como mal definidos [C1A] (el resolutor de nivel académico alto en un 100% de los problemas presentados, y los resolutores de niveles académicos medio y bajo en un 83%).

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , el comportamiento más frecuente que observamos en estos resolutores es: identificarlos como mal definidos [C1A] (los resolutores de niveles académicos alto y medio en un 83% de los problemas presentados, y el resolutor de nivel académico bajo en un 67%).

Queremos destacar, que cuando los identifican como mal definidos, los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos, si son del tipo T_2 , los identifican como mal definidos del tipo T_2 , en cambio si son del tipo T_3 , los resolutores de niveles académicos alto y medio los identifican como mal definidos de tipo T_3 , sin embargo, el resolutor de nivel académico bajo los identifica como mal definidos tipo T_2 (problemas 9, 10 y 14) y mal definidos T_3 (problemas 7, 8, 11 y 15).

El comportamiento: no saber caracterizarlos [C1C] no lo observamos

en el resolutor de nivel académico bajo. En el resolutor de nivel académico alto, este comportamiento se da en un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido de contexto geométrico (problema 18) y en el resolutor de nivel académico medio, en un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido de contexto algebraico (problema 20) y en un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_2 de contexto geométrico (problema 3), ambos en el espacio semiótico final, siendo identificados previamente, en el espacio semiótico inicial, como mal definido y bien definido, respectivamente.

- Respecto a la categoría de análisis (2), encontramos que:

a) Con relación a: “si las acciones están dirigidas por los datos o por el objetivo”, el comportamiento más habitual, en los tres resolutores estudiados, cuando se encuentran ante problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos es: acciones dirigidas por el objetivo [C2B], aunque en los tres resolutores, se dan situaciones donde las acciones están dirigidas por los datos [C2A], siendo el contexto algebraico en el que esta actuación es menos frecuente (solamente un caso en el resolutor de nivel académico medio).

b) Con relación a: “qué modifican, cuando replantean el problema presentado”, observamos diferencias según la tipología del problema presentado y el nivel académico de los resolutores.

En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien definidos, estos comportamientos analizados aquí [C21, C22 y C23] no se observan en el resolutor de nivel académico alto, ya que no replantea ninguno de los problemas. El único comportamiento que observamos en el resolutor de nivel académico medio es: modificar los datos y el objetivo [C23] (problemas 18 y 20, de contextos geométrico y

algebraico, respectivamente) en cambio, el comportamiento que presenta el resolutor de nivel académico bajo es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] (problemas 18, 19 y 20, de los tres contextos presentados).

En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos, observamos que aunque el comportamiento más habitual en los tres resolutores es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21], también presentan los comportamientos: modificar el objetivo y mantener los datos [C22] en los tres contextos estudiados (problemas 1 y 6 el resolutor de nivel académico alto; problemas 1 y 14 el resolutor de nivel académico medio; problema 1 el resolutor de nivel académico bajo), y modificar los datos y el objetivo [C23] en los contextos aritmético y algebraico (el resolutor de nivel académico alto en los problemas 2, 10 y 11; el resolutor de nivel académico medio en el problema 2; y el resolutor de nivel académico bajo en el problema 9).

- Respecto a la categoría de análisis (3), encontramos nuevamente diferencias según la tipología del problema presentado y el nivel académico de los resolutores.

a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, estas categorías no se observan en el resolutor de nivel académico alto, ya que no replantea ninguno de ellos. El comportamiento que presenta el resolutor de nivel académico medio en el único problema que replantea (problema 20 de contexto algebraico), es: transformarlo añadiendo y eliminando datos [C3C]. El resolutor de nivel académico bajo presenta los tres comportamientos: transformarlo añadiendo y eliminando datos [C3C] (problema 18 de contexto geométrico); transformarlo eliminando datos [C3B] (problema 19 de contexto aritmético) y transformarlo añadiendo datos [C3A] (problema 20 de contexto algebraico).

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , los comportamientos que presentan los resolutores de niveles académicos alto y medio son: transformarlos añadiendo datos [C3A] (contextos algebraico y geométrico) y transformarlos añadiendo y eliminando datos [C3C] (en los tres contextos). El resolutor de nivel académico bajo presenta los comportamientos: transformarlos añadiendo datos [C3A] en el contexto geométrico y transformarlos añadiendo y eliminando datos [C3C] en los tres contextos.

c) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , los comportamientos observados en el resolutor de nivel académico alto es: transformarlos eliminando datos [C3B] (en cuatro problemas de los nueve presentados) y transformarlos añadiendo y eliminando datos [C3C] (en tres problemas de los nueve presentados).

En el resolutor de nivel académico medio, aunque el comportamiento más frecuente que presenta es: transformarlos eliminando datos [C3B], observamos situaciones donde el comportamiento presentado es: transformarlos añadiendo y eliminando datos [C3C] (contexto geométrico).

El resolutor de nivel académico bajo presenta los comportamientos: transformarlos eliminando datos [C3B], añadiendo y eliminando datos [C3C] y, añadiendo datos [C3A] (este último comportamiento se observa en el contexto algebraico).

- Respecto a la categoría de análisis (4), observamos que:

a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, el resolutor de nivel académico alto no replantea ninguno de ellos. El comportamiento que presenta el resolutor de nivel

académico medio, en el único problema que replantea (problema 20 de contexto algebraico), es: transformarlo en uno diferente bien definido [C4B], en cambio, los comportamientos que presenta el resolutor de nivel académico bajo son: transformarlos en bien definidos [C4B] (problemas 18 y 19 de contextos geométrico y aritmético, respectivamente) y transformarlo en mal definido tipo T_3 [C4C] (problema 20 de contexto algebraico).

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , el único comportamiento observado en el resolutor de nivel académico alto es: transformarlos en un problema bien definido [C4B] y en los resolutores de niveles académicos medio y bajo, los comportamientos observados son: transformarlos en un problema bien definido [C4B] y transformarlos en un problema mal definido tipo T_3 (en el contexto geométrico) [C4C].

c) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , los comportamientos observados en los resolutores de niveles académicos alto y medio son: transformarlos en un problema bien definido [C4B] y transformarlos en un problema mal definido tipo T_3 (en los contextos aritmético y algebraico) [C4C]. En cambio, el resolutor de nivel académico bajo presenta un único comportamiento: transformarlos en un problema bien definido [C4B]. Queremos destacar que, en los casos en que los problemas presentados son transformados en mal definidos (problemas 8, 10 y 14), lo hacen en mal definidos tipo T_3 , añadiendo y eliminando datos [C3C-C4C].

- Respecto a los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , donde la solución está incluida en los datos dados (problemas 7, 9, 10, 11 y 12), observamos diferencias según el nivel académico de los resolutores. El comportamiento del

resolutor de nivel académico alto es: identificar la solución como tal y eliminarla en su replanteamiento en todos los contextos, los resolutores de niveles académicos medio y bajo varían según el contexto, de manera que, el resolutor de nivel académico medio, cuando se encuentra con un problema de contexto geométrico (problemas 9 y 12), su comportamiento es: identificar la solución como tal y eliminarla en su replanteamiento, en cambio en problemas de contexto aritmético y algebraico (problemas 7, 10 y 11), su comportamiento es: interpretar la solución como un dato necesario, manteniéndola en su replanteamiento. El resolutor de nivel académico bajo, cuando el problema presentado es de contexto geométrico (problemas 9 y 12), su comportamiento es: no identificar la solución como tal, sino como un dato más del problema, necesario para lograr el objetivo.

- Respecto a los problemas bien definidos impropios (problemas 16, 17 y 18), los resolutores de niveles académicos alto y medio, identifican los datos redundantes como tales y no ven la necesidad de eliminarlos, sin embargo, el resolutor de nivel académico bajo, presenta diferencias según el contexto, de manera que en el problema de contexto geométrico, no identifica los datos redundantes como tales y comenta que no sabe identificar el problema.
- En relación a la fase de verificación-transición, de nuestro esquema de análisis (capítulo 2, apartado 2.3.2), aunque el comportamiento más habitual en estos resolutores es presentar un único espacio semiótico, observamos pequeñas diferencias según el nivel académico de los resolutores y según la tipología y el contexto del problema presentado.

El resolutor de nivel académico alto, en todos los problemas presentados, presenta un único comportamiento general, es decir, su actuación se desarrolla siempre en un único espacio semiótico, de

manera que no pasa por períodos de verificación y cambio de plan de actuación, en cambio los resolutores de niveles académicos medio y bajo, presentan situaciones donde su actuación se desarrolla en diferentes espacios semióticos, es decir, que pasan por períodos de verificación y cambio de plan de actuación. Esta situación la observamos en los contextos algebraico y geométrico (el resolutor de nivel académico medio en los problemas 3 y 20 y, el resolutor de nivel académico bajo en el problema 6).

Si nos fijamos en la tipología del problema presentado, observamos que el resolutor de nivel académico medio presenta diferentes espacios semióticos en problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos tipo T_2 , en cambio el resolutor de nivel académico bajo presenta este comportamiento únicamente en un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_2 .

CON RELACIÓN A LAS JUSTIFICACIONES UTILIZADAS POR LOS RESOLUTORES.

Tras analizar, en la fase III del estudio piloto, las justificaciones utilizadas por los resolutores, en términos de PRUEBAS y ARGUMENTACIONES, para validar o refutar un problema de encontrar bien o mal definido, y observar la existencia de diferentes recursos de prueba y argumentaciones, nos vimos en la necesidad de construir un sistema de observación focalizado, basado en los resultados obtenidos en dicha fase, con el objetivo de utilizarlo en el análisis de las justificaciones, en los estudios definitivos (apartado 2.3.3 del capítulo 2).

A continuación pasamos a describir las justificaciones observadas en este estudio.

a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia

como bien definidos (problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21), el comportamiento más habitual, en el resolutor de nivel académico alto es validarlos con un recurso de prueba como el razonamiento analítico. El problema 18, no es capaz de validar ni refutar.

En el resolutor de nivel académico medio observamos, que aunque su comportamiento más habitual es validarlos, mediante el razonamiento analítico (problemas 16, 17, 19 y 21), se observa una situación donde el problema presentado es refutado con la utilización de recursos de prueba como la contradicción (problema 20). Además, el problema 18 y el problema 20 en el espacio semiótico final no es capaz de validar ni de refutar.

El resolutor de nivel académico bajo, tanto los valida (problemas 16, 17 y 21) como los refuta (problemas 18, 19 y 20), utilizando para ello, el razonamiento analítico (problemas 16, 17 y 19), el razonamiento empírico (en el problema 18 relaciona unos conceptos con otros, como son las dimensiones de una figura geométrica con el cálculo del perímetro o el área, que denominaremos empírico P2), recursos de argumentación como el ridículo (problema 21) y un recurso de prueba no categorizado inicialmente donde hace referencia a actitudes y creencias sobre las matemáticas, que denominaremos Ritual (problema 20).

En la siguiente tabla (tabla 5.1), quedan reflejados los recursos utilizados por los resolutores para justificar sus actuaciones, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos:

Problemas bien definidos	Nivel académico alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
16	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico
17	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico
18	No sabe	No sabe	REFUTA Prueba: R. Empírico (P2)
19	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Analítico
20	VALIDA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: Contradicción No sabe	REFUTA Prueba: (Ritual)
21	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico.	VALIDA Argumentación: Ridículo

Tabla 5.1

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (problemas 1, 2, 3, 4, 5 y 6), aunque el comportamiento más habitual en los tres resolutores es refutarlos, observamos, en los resolutores de niveles académicos medio y bajo el comportamiento de validarlos (problemas 3 y 2, respectivamente). Los recursos de prueba utilizados por estos resolutores son: el contraejemplo, el razonamiento analítico y el razonamiento empírico (P2). Los recursos de argumentación observados son: el ridículo y otro no categorizado inicialmente donde describen las características de la situación planteada, que denominaremos Descripción. En la siguiente tabla (5.2), quedan reflejados los recursos utilizados por los resolutores para justificar sus actuaciones, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 :

Problemas mal definidos T ₂	Nivel académico alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
1	REFUTA Prueba: Contraejemplo Argumentación: Ridículo	REFUTA Argumentación: Ridículo	REFUTA Argumentación: Ridículo Prueba: Contraejemplo
2	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: Contradicción y Contraejemplo	VALIDA Prueba: R. Analítico y R. Empírico (P2)
3	REFUTA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Empírico (P2) No sabe	REFUTA Prueba: R. Empírico (P2)
4	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Analítico
5	REFUTA Prueba: R. Analítico Argumentación: Ridículo	REFUTA Prueba: R. Analítico y Contraejemplo	REFUTA Prueba: R. Analítico y Contraejemplo
6	REFUTA Prueba: R. Empírico (P2) Argumentación: Ridículo	REFUTA Argumentación: (Descripción) Prueba: Contraejemplo	REFUTA Prueba: R. Empírico (P2) REFUTA Prueba: Contraejemplo

Tabla 5.2

c) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T₃ (problemas 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15), observamos que el comportamiento más frecuente en estos resolutores es el de refutar los problemas presentados, siendo el problema 13 validado por los tres resolutores y el problema 12 validado por el resolutor de nivel académico bajo.

Los diferentes recursos de prueba utilizados por estos resolutores son: el contraejemplo, el razonamiento analítico, el ritual y el razonamiento empírico (P2 y otro no categorizado inicialmente de manera que relacionan cantidades homogéneas que denominaremos P1). Los

recursos de argumentación son: el ridículo, la comparación o analogía y la descripción.

En la siguiente tabla (5.3), quedan reflejados los recursos utilizados por los resolutores para justificar sus actuaciones, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 :

Problemas mal definidos T_3	Nivel académico Alto	Nivel académico Medio	Nivel académico Bajo
7	REFUTA Prueba: (Ritual)	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Empírico (P1) (y Ritual)
8	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Analítico y R. Empírico (P1)	REFUTA Prueba: R. Analítico
9	REFUTA Prueba: (Ritual)	REFUTA Prueba: R. Empírico (P2)	REFUTA Argumentación: Analogía
10	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: (Ritual)
11	REFUTA Prueba: Contraejemplo	REFUTA Prueba: R. Analítico (y Ritual)	REFUTA Prueba: R. Analítico (y Ritual)
12	REFUTA Prueba: R. Empírico (P2) (y Ritual)	REFUTA Prueba: R. Empírico (P2) (y Ritual)	VALIDA Prueba: R. Empírico (P2)
13	VALIDA Argumentación: (Descripción) Prueba: R. Analítico	VALIDA Argumentación: (Descripción) Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico
14	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Empírico (P1) y Contraejemplo	REFUTA Prueba: R. Empírico (P1) y Contraejemplo
15	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Analítico

Tabla 5.3

5.2.2 Análisis de datos

En este apartado, presentamos un análisis detallado de los problemas pasados en esta prueba, indicando las diferentes actuaciones de los alumnos frente a cada uno de ellos y presentando de manera esquemática los comportamientos observados (Anexo 5, tablas [39-41]).

El análisis de los problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos (problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21) es el siguiente.

PROBLEMA 16.

Tras la lectura del problema, las alumnas de niveles académicos alto y bajo no hacen ninguna anotación de las condiciones del problema ni de los objetivos del mismo, y comentan lo que opinan sobre el mismo, en cambio, la alumna de nivel académico medio anota las condiciones del problema, y antes de dar su opinión del mismo, pasa a operar con los datos del problema. Con relación a la tarea, se observa una seguridad al saber que es lo que tienen que hacer y el conocimiento necesario para abordarla.

En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, reconocen explícitamente que el problema está bien definido [C1B], validando el problema planteado, mediante el razonamiento analítico, ya que analizan las cantidades que intervienen y establecen relaciones entre ellas.

Alumna de nivel académico alto:

A. [...] *El precio del cuarto de kg no hace falta, pues dan el del kg, que es lo mismo, y con los demás datos se trata de hacer operaciones y ya está.*

Alumna de nivel académico medio:

A. [...] *Lo del cuarto kilo no hace falta, pues con el precio del kg se puede resolver.*

E. *¿Tal y como está planteado, le sobra un dato?*

A. *Bueno no, está bien planteado, pues está claro que ese dato no confunde.*

Alumna de nivel académico bajo:

A: [...] *El cuarto kilo no hace falta, pues ya dan el kg. Este problema está bien planteado, pues se hacen multiplicaciones y sumas y ya está...*

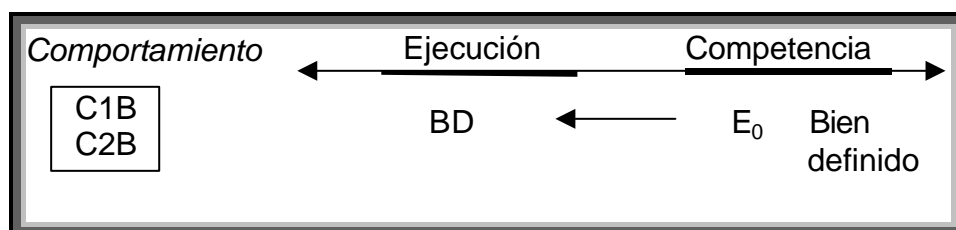
La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 16.

a) Justificaciones: Los tres resolutores validan el problema con recursos de prueba, como el razonamiento analítico.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento de los tres resolutores, estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.



Se trata de un comportamiento invariante desarrollado por los tres resolutores.

PROBLEMA 17.

Tras la lectura del problema, ninguno de los tres resolutores, anotan las condiciones del problema ni los objetivos del mismo. Las alumnas de niveles académicos alto y bajo, tras la lectura del problema dan su opinión sobre el mismo, en cambio, la alumna de nivel académico medio, antes de dar su opinión del problema, pasa a operar con los datos del mismo.

En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, reconocen explícitamente que el problema está bien definido [C1B], validando el problema planteado, mediante el razonamiento analítico, ya que involucran y relacionan las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas entre ellas, situándose en el campo de la demostración matemática.

Alumna de nivel académico alto:

A [...] *Este problema se hace con una regla de tres, pero para saber si está bien planteado tendría que ver si las dos reglas de tres son equivalentes.*

E. *¿Puedes explicarme lo que opinas del problema y lo de las dos reglas de tres, por favor?*

A. *Sí. Una es con 8 litros y 15 km y la otra con 16 litros y 30 km*

$$\begin{array}{ll} 8 \rightarrow 15 & 16 \rightarrow 30 \\ x \rightarrow 150 & x \rightarrow 150 \end{array}$$

Sí son equivalentes, se puede hacer con una o con otra.

Alumna de nivel académico medio:

A. [...] *Lo de cada 30 km no hace falta utilizarlo porque es lo mismo que utilizar el de 15 km.*

E. *¿Podrías explicarme lo que acabas de comentar?*

A. Sí, que es lo mismo 8 l cada 15 km que 16 l cada 30 km.

Alumna de nivel académico bajo:

A. [...] Puedes utilizar 8 litros de gasolina cada 15 kilómetros o 16 litros cada 30 km, es lo mismo pues con los dos se puede resolver...

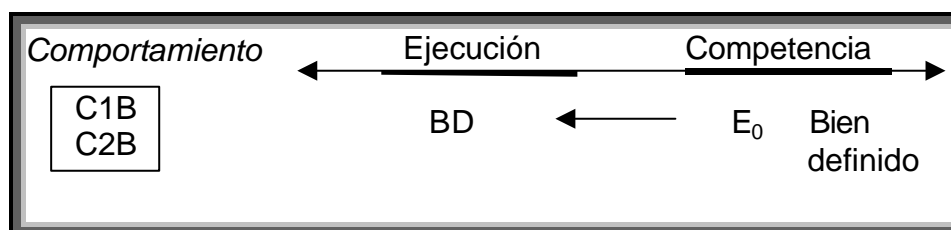
La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 17.

a) Justificaciones: Los tres resolutores validan el problema con recursos de prueba, como el razonamiento analítico.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento de los tres resolutores, estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.



Se trata de un comportamiento invariante desarrollado por los tres resolutores.

PROBLEMA 18.

Tras la lectura y relectura del problema, ninguno de los tres resolutores anota las condiciones del problema ni los objetivos del mismo, y comentan lo que opinan del problema.

En el episodio de análisis-exploración, se observa que buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A].

En el episodio de actuación, los comportamientos son diferentes en los tres resolutores. La alumna de nivel académico alto reconoce explícitamente que no sabe identificar el problema [C1C]:

A. [...] *Si dan el radio no hace falta el diámetro y si dan el diámetro no hace falta el radio, pero no sé si está mal planteado, sólo que yo no sé hacerlo.*

E. *¿Ni siquiera lo intentas?*

A. *Es que yo los problema de vueltas, radios y eso no sé hacerlos.*

Por lo tanto, no valida ni refuta el problema.

La alumna de nivel académico medio cree que está mal definido, pero no está segura si el problema está mal definido o es que ella no sabe hacerlo [C1C]:

A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta...
Yo no le veo relación a lo de la rueda con la distancia del colegio al parque.

E. *¿Puede resolverse este problema?*

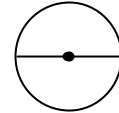
A. *No lo sé. No estoy segura.*

Posteriormente, sugiere un replanteamiento del problema, de manera que lo transforma explícitamente en un problema mal definido tipo T_3 mediante la eliminación de datos. Por lo tanto, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A], no sabe identificarlo [C1C] y comenta un posible replanteamiento, eliminando datos y modificando el objetivo y transformándolo en un problema mal definido.

E. *Si en clase de matemáticas, tu profesor te plantease este problema, ¿qué harías?*

A. *Lo intentaría resolver con los datos del problema y si no me sale es que no lo sé hacer, porque nunca en clase me ponen problemas que pueden estar mal planteados, y la solución siempre se puede encontrar.*

[...] La rueda tiene que ver con el diámetro y el radio... Señala en el dibujo el diámetro y el radio y comenta [...] Si me preguntasen cuántos cm tiene esto ... Señala la longitud de la circunferencia dibujada [...] a lo mejor se podría resolver, multiplicando el diámetro por el número de vueltas pero no estoy segura, porque nunca he hecho problemas de este tipo.

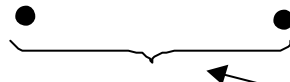


De esta manera, ni refuta ni valida el problema.

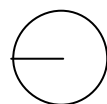
La alumna de nivel académico bajo lo identifica como mal definido [C1A]:

A. *[...] Pasa a la pizarra y luego comenta sobre el dibujo...*

Piden una distancia



Te dan



*30 r. y 60 d.
340 vueltas*

Esto no tiene nada que ver con esto

Con estos datos no se puede hacer nada, pues te piden una distancia y te dan el radio de una bicicleta que no viene a cuenta... Se para un momento y comenta ...Sería dar por ejemplo, los km que recorre en una vuelta o preguntar por la longitud de la rueda y además si te dan el radio no hace falta que te den el diámetro.

Por lo tanto, replantea el problema, de manera que lo transforma explícitamente en un problema bien definido [C4B], añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C].

A. *¿Qué distancia separa el colegio del parque si para ir de un sitio a otro*

la rueda de una bicicleta da 340 vueltas y recorre tantos km en una vuelta? O bien ¿Cuál es la longitud o el área de una rueda de bicicleta de 60 cm de diámetro?

De esta manera, refuta el problema, utilizando un razonamiento empírico ya que relaciona las cantidades explícitas, relacionando unos conceptos con otros, como son las dimensiones de una figura geométrica con el cálculo del perímetro o el área (P2).

La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

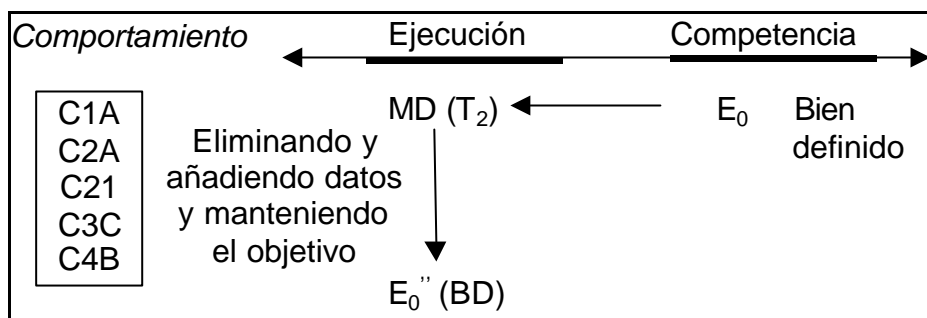
Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 18.

- a) Justificaciones: Los resolutores de niveles académicos alto y medio, ni validan ni refutan el problema. El resolutor de nivel académico bajo lo refuta con recursos de prueba, como el razonamiento empírico (P2).
- b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.
- c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y medio, estaría determinado por la secuencia [C1C-C2A], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado y acciones dirigidas por los datos.

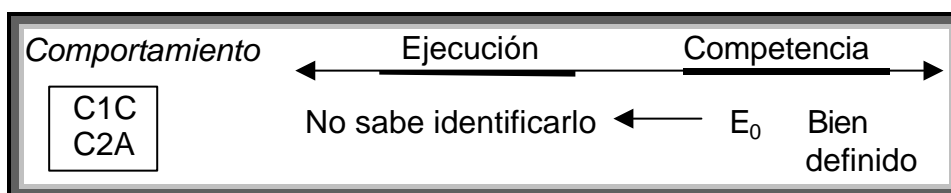
El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo, estaría determinado por la secuencia [C1A-C2A-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido tipo T_2 , sus acciones están dirigidas por los datos, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación de los datos la realiza añadiendo y eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico bajo:



Resolutores de niveles académicos alto y medio:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

PROBLEMA 19.

Tras la lectura del problema, la tres alumnas anotan las condiciones del mismo. La alumna de nivel académico alto comenta lo que opina del problema, en cambio, los resolutores de niveles académicos medio y bajo, operan con los datos y luego comentan lo que opinan del problema.

Con relación a la tarea se observa su seguridad al saber que es lo que tienen que hacer y el conocimiento necesario para abordar la tarea.

En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, los resolutores de niveles académicos alto y medio, reconocen explícitamente que el problema está bien definido [C1B], en cambio el resolutor de nivel académico bajo lo identifica como un problema mal definido [C1A] tipo T_3 (sobran datos), replanteándolo en un problema bien definido [C4B], eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3B].

De esta manera, los resolutores de niveles académicos alto y medio, validan el problema planteado, mediante un razonamiento analítico, ya que relacionan las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas por ellos, situándose en el campo de la demostración matemática, en cambio el resolutor de nivel académico bajo lo refuta utilizando también un razonamiento analítico.

Alumna de nivel académico alto:

A. [...] *Está bien planteado, pues se halla el precio total de la lavadora sumando el precio más el recargo. Luego se resta la entrega inicial y luego se divide entre 6 para saber lo que hay que pagar mensualmente.*

Alumna de nivel académico medio:

6 plazos mensuales



recargo de 5370 ptas.

Entrega inicial de 9000 ptas.

$$\begin{array}{r}
 82475 \\
 + 5370 \\
 \hline
 87845 \quad | \quad 6 \\
 27 \quad \quad \quad | \quad 14940 \text{ ptas. en cada plazo, pero a uno de los plazos le quitaría } 9000 \\
 38 \\
 24 \\
 05 \\
 \hline
 \end{array}$$

Entonces hace 5 plazos de 14940 ptas. cada uno y un plazo de 14940 ptas. menos 9000 ptas.

E. *¿Qué opinas de este problema?*

A. *Que está bien planteado y no tengo ninguna duda, como me ha ocurrido en los otros.*

Alumna de nivel académico bajo:

A. *Sumo el recargo y el precio total de la lavadora y lo que da lo divido entre 6. Pasa a la pizarra, opera y comenta:*

$$\begin{array}{r} 82475 \\ + 5370 \\ \hline 87845 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ \hline 14640 \end{array}$$

Tiene que pagar 14640 ptas. mensualmente

E. *Por lo tanto, ¿el problema está bien planteado?*

A. *No, yo quité el dato de las 9000 ptas.*

E. *¿Por qué crees que sobra ese dato?*

A. *Porque lo que tiene que pagar es lo que vale más el recargo por pagarla a plazos. Los demás datos sobran, porque no hay que hacer más operaciones para calcular lo que piden..*

La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 19.

a) Justificaciones: Los resolutores de niveles académicos alto y medio validan el problema presentado con un razonamiento analítico, en cambio, el resolutor de nivel académico bajo lo refuta con recursos de prueba, como el razonamiento analítico.

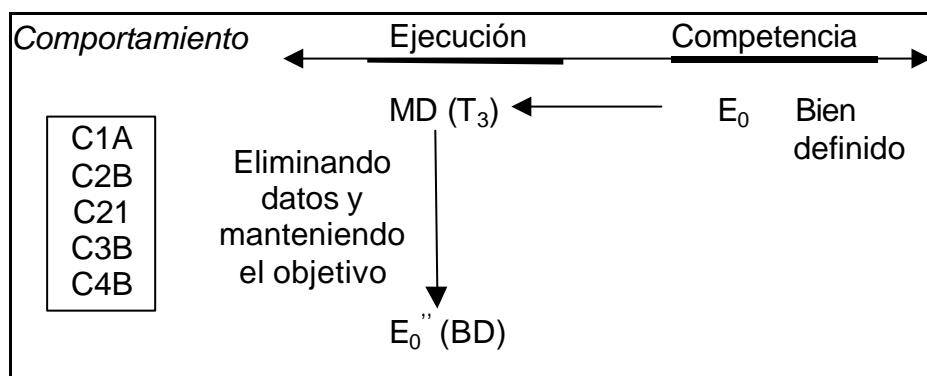
b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y medio estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifica el problema presentado, como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo, en cambio el del resolutor de

nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Alumna de nivel académico bajo:



Alumnos de nivel académico alto y medio:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

PROBLEMA 20.

Tras la lectura del problema, ninguna de las alumnas anota las condiciones del problema, comentando inmediatamente lo que opinan del mismo.

Con relación a la tarea, se observa en el resolutor de nivel académico

alto, seguridad al saber que es lo que tiene que hacer y el conocimiento necesario para abordar la tarea, en cambio, en los resolutores de niveles académicos medio y bajo se observa cierta inseguridad.

En el episodio de análisis-exploración, se observa que buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, el resolutor de nivel académico alto reconoce explícitamente que el problema está bien definido [C1B].

Él: Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta...

Está bien, se hace con una ecuación... Pasa a la pizarra, comenta... Si gallinas hay x , y conejos hay y y realiza lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\} x + y = 11$$

Entonces
 $2x + 4y = 32$
 $x + y = 11$

$$\left. \begin{array}{l} 2x \\ 4y \end{array} \right\} 32 \text{ patas}$$

Se resuelve el sistema y ya está

El resolutor de nivel académico medio, en el espacio semiótico inicial, lo identifica como mal definido [C1A] y lo transforma en un problema bien definido [C4B] añadiendo y eliminando datos y modificando la pregunta [C23-C3C]. En el espacio semiótico final comenta que no está seguro si está mal definido o es que no sabe hacerlo [C1C].

A. [...] *No lo sé, pero le falta algo relacionado con las patas, porque...*

Pasa a la pizarra

11 animales

32 patas

Le faltan datos seguro

E. *¿En qué te apoyas para afirmar que al problema le faltan datos?*

A. *Pasa a la pizarra y comenta...*

$$\begin{array}{r|l} 32 & 4 \\ \hline 0 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ \hline 12 & 16 \\ 0 & \end{array}$$

Podría haber 8 conejos o 16 gallinas, pero el problema dice que hay 11 animales, por eso digo que faltan datos, ya que tendría que decir por ejemplo, el número de gallinas o el de conejos.

E. *Entonces, ¿el problema no se puede resolver tal y como está planteado?*

A. *No lo sé... Vuelve a leer en voz baja el problema y comenta... no sé si es correcto, pero lo que sí sé es que si dijese: "En un corral hay 5 conejos y 32 patas. ¿Cuántas gallinas hay?, si estaría bien planteado.*

E. *¿Qué es lo que te hace dudar?*

A. *No sé... pero estos problemas siempre me ha costado resolverlos y por eso no estoy segura.*

El resolutor de nivel académico bajo lo identifica como mal definido [C1A] y lo transforma en un problema mal definido [C4C] tipo T_3 , añadiendo datos y manteniendo la pregunta [C21-C3A], quedando caracterizado por T_3A .

A. *¿Tengo que suponer que la mitad son gallinas y la mitad son conejos?*

E. *¿Te dice eso el problema?*

A. *No, pero es que entonces faltan datos.*

E. *¿Por qué crees eso?*

A. *Porque si no, pueden haber muchas soluciones, ya que con once animales, pueden ser 5 gallinas y 6 conejos, o 10 gallinas y un conejo o todas las combinaciones que queramos, y eso es un disparate.*

E. *¿Tú crees que todas esas soluciones son posibles? ¿No te indica nada el dato del número de patas?*

A. *No, porque no dice por ejemplo que 10 patas son de gallinas y el resto de conejos.*

De esta manera, el resolutor de nivel académico alto valida el problema planteado, con un razonamiento analítico, ya que involucra y relaciona las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas por él, situándose en el campo de la demostración matemática.

El resolutor de nivel académico medio, en el espacio semiótico inicial, refuta el problema presentado con un recurso de prueba como la contradicción, ya que relaciona las cantidades explícitas, tomando del problema situaciones que pueden ser consideradas como falsas y verdaderas a la vez lo que le lleva a la confusión que genera la refutación. *Razona: si sólo tomo esto, se puede resolver, pero si tomo además esto otro, no se puede resolver.* Concluye que el problema está mal definido por estas razones. En el espacio semiótico final no sabe cómo identificarlo, por lo tanto no lo valida ni lo refuta, comentando [...] *estos problemas siempre me ha costado resolverlos y por eso no estoy segura.*

El resolutor de nivel académico bajo refuta el problema presentado con un recurso de prueba, haciendo referencia más a actitudes sobre las matemáticas que a verdaderos procesos de inferencia matemática (Ritual).

La actuación de las alumnas de niveles académicos alto y bajo es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación, en cambio la alumna de nivel académico medio pasa por períodos de verificación-transición.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 20.

a) Justificaciones: El resolutor de nivel académico alto valida el problema,

con un razonamiento analítico; el resolutor de nivel académico medio, en el espacio semiótico inicial, lo refuta con un recurso de prueba como la contradicción y en el espacio semiótico final ni lo valida ni lo refuta; el resolutor de nivel académico bajo lo refuta con recursos de prueba, apoyándose en un proceso impuesto por la costumbre (Ritual).

b) Espacios semióticos: Los resolutores de niveles académicos alto y bajo desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición, en cambio el resolutor de nivel académico medio desarrolla su actuación en dos espacios semióticos.

c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifica el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.

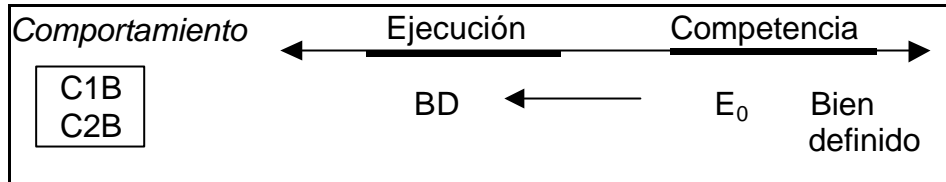
El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado en el espacio semiótico inicial por la secuencia [C1A-C2B-C23-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y el objetivo, la modificación de los datos la realiza añadiendo y eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido. En el espacio semiótico final, el comportamiento estaría determinado por la secuencia [C1C] que se concreta en no sabe identificarlo.

El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido tipo T_2 , sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación de los datos la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 ,

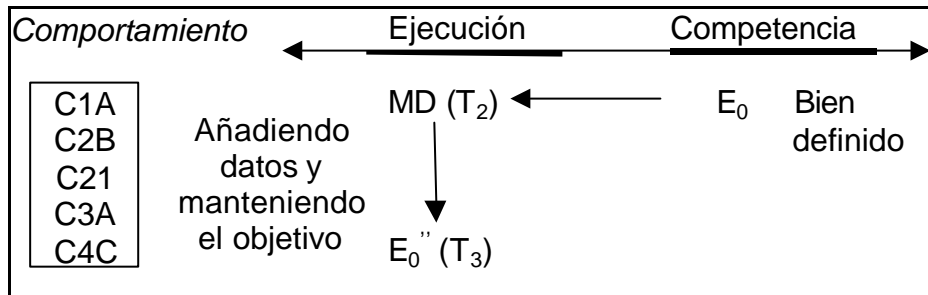
quedando caracterizado por T₃A.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

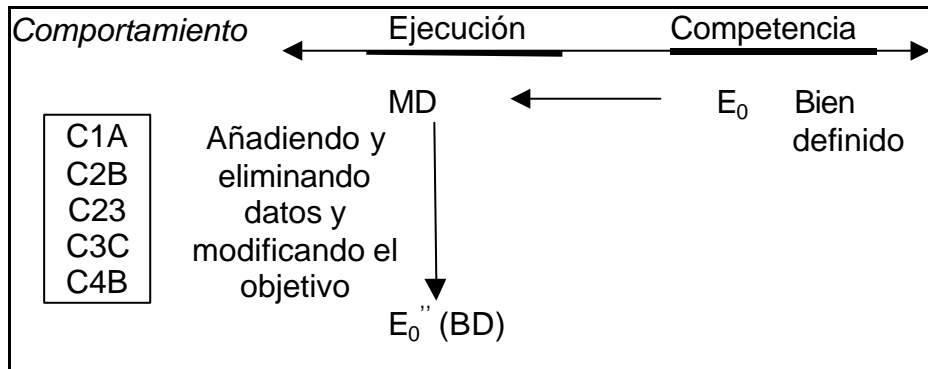
Resolutor de nivel académico alto:



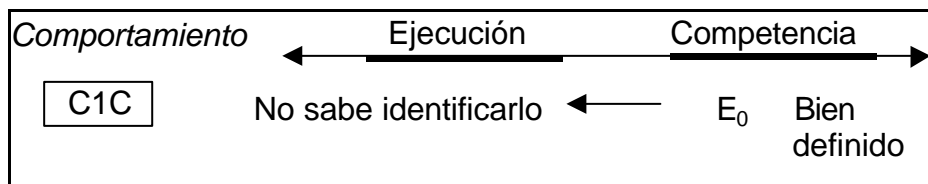
Resolutor de nivel académico bajo:



Resolutor de nivel académico medio (espacio semiótico inicial):



Resolutor de nivel académico medio (espacio semiótico final):



PROBLEMA 21.

Tras la lectura del problema, las alumnas anotan las condiciones y comentan lo que opinan del mismo. Con relación a la tarea, se observa su seguridad al saber que es lo que tienen que hacer.

En el episodio de análisis-exploración, se observa que buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

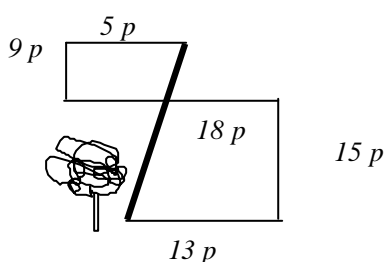
En el episodio de actuación, reconocen explícitamente que el problema está bien definido [C1B].

De esta manera, validan el problema planteado, utilizando diferentes recursos en sus justificaciones.

Alumna de nivel académico alto:

Valida el problema planteado, con un recurso de prueba como es el razonamiento analítico, ya que involucra y relaciona las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas por ella, situándose en el campo de la demostración matemática.

A. [...] Tengo que hacer un dibujo para saber si se puede resolver... Pasa



a la pizarra y posteriormente comenta... El resultado sería la distancia ésta (señalando la línea de trazo grueso). [...] Tendría que usar regla y cada paso sería por ejemplo 1 cm y luego vería cómo calcular esa

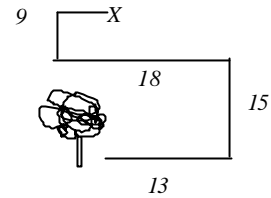
distancia (la línea marcada más oscura) por Geometría.

Alumna de nivel académico medio:

Valida el problema planteado, con un recurso de prueba como el razonamiento analítico, poniendo en relación las cantidades explícitas, en

función de relaciones matemáticas observadas por el resolutor.

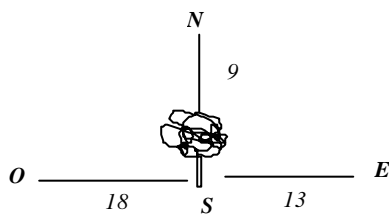
A. ... El resultado es la suma de todos los pasos, porque siempre camina en línea recta, por lo tanto sumas los datos y ya está.



Alumna de nivel académico bajo:

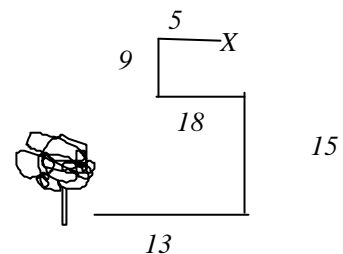
Valida el problema planteado, con un recurso de argumentación como el ridículo, ya que exterioriza conceptos y procesos acerca de los problemas, sin poner en relación las cantidades explícitas de manera que la situación planteada, por su rareza o extravagancia le produce risa.

A: Pasa a la pizarra y realiza el dibujo siguiente:



Posteriormente borra la pizarra, hace otro dibujo, y se sonríe comentando con ironía... ¡camina en línea curva!

E: ¿Puedes explicarme qué es exactamente lo que te produce risa, al leer el problema?



A: Porque siempre se camina en línea recta... Se sonríe y continúa... a no ser que estés borracha.

E. ¿Cuál es tu opinión del problema?

A: Que está bien planteado.

La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

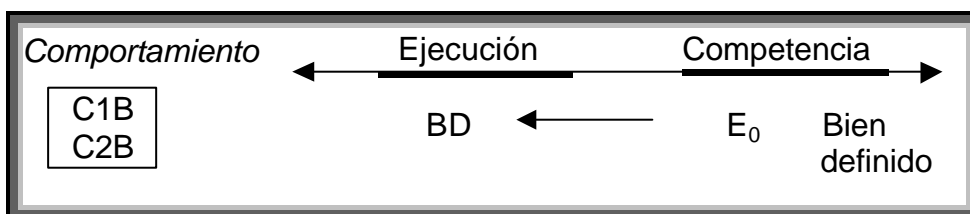
Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 21.

a) Justificaciones: Los tres resolutores validan el problema, con distintos recursos, de manera que los de niveles académicos alto y medio utilizan un recurso de prueba como el razonamiento analítico, mientras que el resolutor de nivel académico bajo utiliza un recurso de argumentación como el ridículo.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento de los tres resolutores estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:



Se trata de un comportamiento invariante desarrollado por los tres resolutores.

A continuación describimos el análisis de los problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T₂ (problemas 1, 2, 3, 4, 5 y 6).

PROBLEMA 1

Tras la lectura, las alumnas no hacen ninguna anotación de las condiciones ni del objetivo del problema, y directamente comentan lo que opinan del mismo.

Con relación a la tarea, se observa su seguridad sobre cómo abordarla.

En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por los datos [C2A].

En el episodio de actuación, reconocen explícitamente que el problema está mal definido [C1A], porque no hay relación entre los datos y el objetivo y lo replantean transformándolo en un problema bien definido [C4B], manteniendo los datos y modificando el objetivo [C22]. El resolutor de nivel académico alto también sugiere un replanteamiento añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C].

Alumna de nivel académico alto:

A. Lee el problema en voz alta y se echa a reír.

E. *¿Qué es lo que te causa risa?*

A. *Que no tiene sentido.*

E. *¿Por qué piensas que el problema no tiene sentido?*

A. *Porque no hay relación entre lo que te piden y los datos que te dan, ya que si dijese: En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. ¿Cuántos alumnos tiene el profesor de inglés?, entonces sí se podría resolver. Se queda releendo el problema y comenta... o bien: "Si en una clase de inglés los alumnos tienen 14 años y su profesor tiene el doble de la edad de los alumnos. ¿Cuál es la edad del profesor de inglés?, así sí se podría resolver, pues de esa manera puedes operar.*

Alumna de nivel académico medio:

A. Lee el problema en voz alta, se sonríe y lo vuelve a leer en voz baja. Mira al entrevistador, sonriendo, y comenta... *¿pero esto qué es?*

E. *¿Qué es lo que te causa risa?*

A. *Pues que no tiene nada que ver el número de chicos y chicas, con la edad del profesor.*

E. *¿Puedes responder lo que te preguntan?*

A. *No. Es absurdo.*

E. *Si a ti te plantearan en clase este problema, ¿qué harías?*

A. *Se sonríe y contesta... pensaría que me está tomando el pelo.*

Alumna de nivel académico bajo:

A. *Lee el problema en voz alta, se sonríe y comenta...No se puede hacer, pues con estos datos el profesor de inglés poco tiene que hacer aquí. Si preguntase cuántos alumnos hay en total, entonces sí.*

De esta manera, los tres resolutores refutan el problema. Los de niveles académicos alto y bajo con recursos de argumentación como el ridículo y recursos de prueba como el contraejemplo, ya que la justificación la realizan mediante la explicación verbal, proyectando las características de la situación, que por su rareza o extravagancia les mueve a risa y luego, relacionan las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas, dando un ejemplo, sacado de la misma situación. El resolutor de nivel académico medio utiliza en su justificación recursos de argumentación como el ridículo.

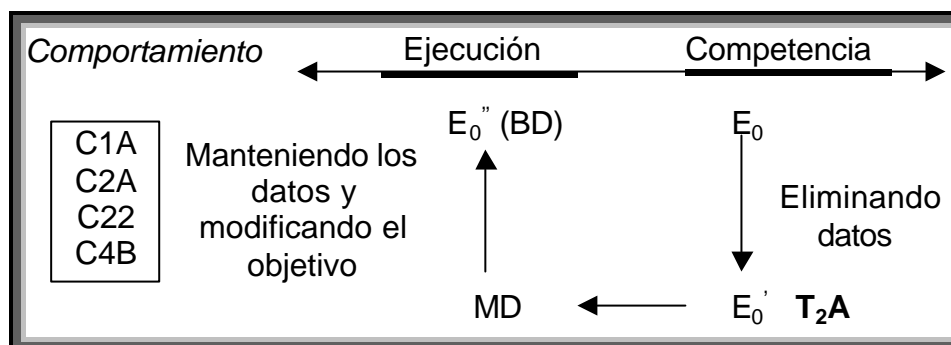
La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 1.

a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema. Los de niveles académicos alto y bajo con recursos de argumentación como el ridículo y recursos de prueba como el contraejemplo, y el resolutor de nivel académico medio, con recursos de argumentación como el ridículo.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento de los tres resolutores, estaría determinado por la secuencia [C1A-C2A-C22-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, acciones dirigidas por los datos, mantienen los datos y modifican el objetivo y transforman el problema planteado en un problema bien definido.



Se trata de un comportamiento invariante desarrollado por los tres resolutores.

PROBLEMA 2

Tras la lectura del problema, la alumna de nivel académico alto anota las condiciones del problema y comenta lo que opina del mismo, en cambio, las de niveles académicos medio y bajo, no anotan las condiciones del problema y tras la lectura comentan lo que opinan del mismo.

En el episodio de análisis-exploración, se observa que buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, los resolutores de niveles académicos alto y medio, identifican el problema explícitamente como mal definido porque faltan datos [C1A] y lo replantean, transformándolo en un problema bien definido [C4B], modificando los datos y el objetivo [C23]. En cambio, el resolutor de nivel académico bajo lo identifica como bien definido [C1B].

Alumna de nivel académico alto:

Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra

$T = 116$ patas

A. *No se puede resolver, le faltan datos.*

E. *¿Porqué crees que le faltan datos?*

A. *Porque si tenemos 116 patas y sabemos que las gallinas tienen 2 patas y los conejos 4 patas... ¿Puedo explicarlo en la pizarra?*

E. *Sí sí, claro.*

A. Pasa a la pizarra y realiza lo siguiente :

$T = 116$ patas

Gallinas = 2 patas

Conejos = 4 patas

Si hay x gallinas e y conejos

Gallinas = 2 patas = x

Conejos = 4 patas = y

$2x + 4y = 116$

Tenemos una ecuación y dos incógnitas, y esto es absurdo, no se puede resolver.

Alumna de nivel académico medio:

A. [...] *Creo que faltan datos, pero vamos a ver...* Pasa a operar en la pizarra

Gallinas ———— 50

Se queda callada mirando el enunciado del problema.

E. *¿Me podrías comentar qué es lo que estás pensando y qué significa lo que escribiste en la pizarra?*

A. *Es que le faltan datos. Se podría resolver si dijese: “En el corral de Antonio, hay gallinas y conejos. Hay 116 patas y 50 gallinas. ¿Cuántos conejos hay en el corral?, de manera que... Pasa a la pizarra y comienza a operar:*

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 2 \\ \hline 100 \text{ patas de gallinas} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 116 \\ - 100 \\ \hline 16 \text{ patas de conejos} \end{array}$$

$$16 \overline{)4} \text{ } \\ 4 \text{ conejos hay en el corral}$$

E. De acuerdo, pero vamos a ver, ¿cómo estás segura de que no se puede resolver porque faltan datos?

A. Bueno, es que yo dividiría entre 4 y todas las patas serían de conejos,

$116 \overline{)4} \text{ } \\ 36 \quad 29 \\ 0$	es decir tendría 29 conejos, o bien dividiría entre 2 y entonces todas las patas serían de gallinas, es decir	$116 \overline{)2} \text{ } \\ 16 \quad 58 \\ 0$
--	---	--

hay 58 gallinas, y eso es lo único que se puede hacer.

Alumna de nivel académico bajo:

A. [...] Puedo también dividir 116 entre 2 patas de las gallinas y 116 entre 4 patas de los conejos. Pasa a la pizarra y comienza a operar

$$116 \overline{)2} \text{ } \\ 16 \quad 58 \quad \overline{)3} \text{ } \\ 0 \quad 28 \quad 19 \\ \quad \quad \underline{1}$$

Hay 58 gallinas y 19 conejos. Se queda mirando a la pizarra y comenta... Tiene que estar mal, porque no puede sobrar una pata.

E. ¿Puedes explicarme lo que hiciste?

A. Divido 116 patas entre 2 porque son las patas de las gallinas y salen 58 gallinas y luego las otras 58 patas son de conejos y [...] Se queda mirando a la pizarra y comenta... ¡Ay!, la segunda división está mal,

$$116 \overline{)2} \text{ } \\ 16 \quad 58 \quad \overline{)4} \text{ } \\ 0 \quad 18 \quad 14 \\ \quad \quad \underline{2}$$

porque era entre 4 y yo dividí entre 3... Pasa a la pizarra, opera y comenta... Hay 58 gallinas y 14 conejos, pero como sobran 2 patas será, 59 gallinas y 14 conejos.

E. Entonces, ¿está bien planteado el problema?

A. Sí.

E. *¿En qué te apoyas para estar segura?*

A. *En que yo me imagino las patas y lo que hay que hacer son grupitos y como agrupar es dividir, está bien.*

E. *¿Crees que puede haber otra solución distinta a la obtenida?*

A. *No, porque las gallinas tienen siempre 2 patas y los conejos 4.*

De esta manera, el resolutor de nivel académico alto refuta el problema, con recursos de prueba como el razonamiento analítico; el de nivel académico medio lo refuta con recursos de prueba como el contraejemplo y la contradicción, ya que relaciona las cantidades explícitas tomando del problema situaciones que considera como verdaderas y falsas a la vez lo que le lleva a la refutación, dando luego un ejemplo sacado de la misma situación; en cambio, el resolutor de nivel académico bajo valida el problema con recursos de prueba como el razonamiento analítico y el empírico (P2), ya que relaciona las cantidades explícitas pero basándose en imágenes mentales rudimentarias en las cuales no están presentes habilidades de verificación o transformación como es el hecho de asociar hacer grupos con dividir.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 2.

a) Justificaciones: El resolutor de nivel académico alto refuta el problema con recursos de prueba como el razonamiento analítico, el de nivel académico medio lo refuta con recursos de prueba como la contradicción y el contraejemplo, y el resolutor de nivel académico bajo, valida el problema con recursos de prueba como el razonamiento analítico y el razonamiento empírico (P2).

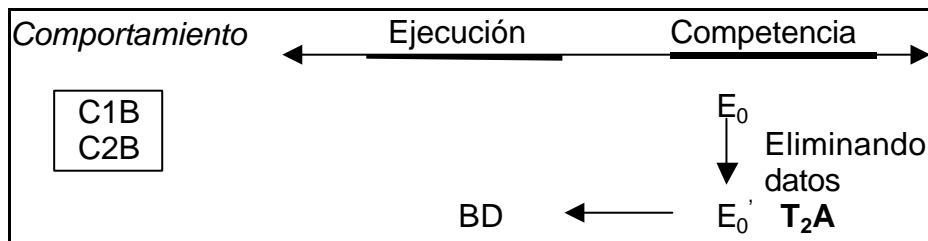
b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-

transición.

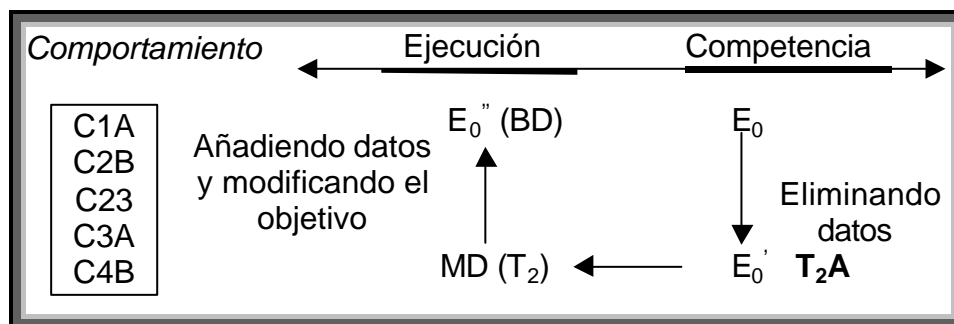
c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C23-C3A-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido tipo T_2 , sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y transforman el problema planteado en un problema diferente bien definido. En cambio, el comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifica el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico bajo:



Resolutores de niveles académicos alto y medio:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

PROBLEMA 3

Tras la lectura del problema, las alumnas no anotan las condiciones ni el objetivo del mismo y tras finalizar dicha lectura, comentan lo que opinan del problema.

En el episodio de análisis-exploración, se observa que buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B], en los resolutores de niveles académicos alto y bajo y dirigidas por los datos [C2A] en el resolutor de nivel académico medio.

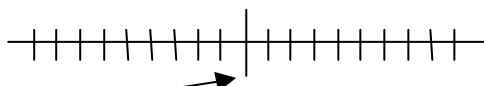
En el episodio de actuación, los resolutores de niveles académicos alto y bajo reconocen explícitamente que el problema está mal definido porque faltan datos [C1A] y lo replantean transformándolo en un problema bien definido [C4B], añadiendo datos y manteniendo el objetivo [C21-C3A]. El resolutor de nivel académico medio, en el espacio semiótico inicial, lo identifica como bien definido [C1B] y, en el espacio semiótico final comenta que no sabe si está bien o mal definido, pues ella en geometría nunca se ha enterado [C1C].

Alumna de nivel académico alto:

A. Lee el problema en voz alta y comenta... *No se puede dibujar un cuadrilátero porque no me dan sino tres puntos, y el cuadrilátero tiene cuatro puntos.*

Alumna de nivel académico medio:

... *cuadrilátero es cuatro lados ¿no?* Sin esperar la respuesta de la entrevistadora continúa... *este problema está bien planteado. Para mí,*
... Pasa a la pizarra y comenta...



De aquí para la derecha es positivo, y para la izquierda es negativo.

Se queda mirando a la pizarra y comenta... *¿qué tiene que ver esto con un cuadrilátero? Es que nunca me he encontrado con un problema similar, donde te dan número negativos para dibujar una figura. Además, ¿qué es esto de A, B y C? ¿Son lados?*

E. *¿Tú qué opinas?*

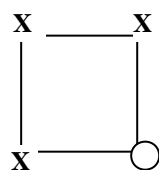
A. *Si A, B y C son los lados y los números son las longitudes de los lados, me faltaría un lado. Se queda en silencio un rato y comenta ...No sé, es que las medidas negativas en geometría no sé que significan.*

E. *Entonces, ¿cuál es tú opinión sobre el problema planteado?*

A. *No sé, pues yo de geometría no tengo ni idea.*

Alumna de nivel académico bajo:

A. *Lee el problema en voz alta y comenta... No se puede resolver porque*



le falta un lado para dibujar el cuadrilátero

.Me dan esto, esto y esto... Señalando lo marcado con una cruz... y me falta esto...Señalando lo marcado con un círculo.

De esta manera, los resolutores de niveles académicos alto y bajo refutan el problema, con recursos de prueba, como el razonamiento analítico y el razonamiento empírico (P2), respectivamente, en cambio el resolutor de nivel académico medio lo valida en el espacio semiótico inicial con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2), ya que su justificación la realiza recurriendo a un procedimiento fundado en mera práctica o rutina, basándose en imágenes mentales rudimentarias en las cuales no están presentes habilidades de verificación o transformación y en el espacio semiótico final, no sabe validarlo ni refutarlo.

La actuación de las alumnas de niveles académicos alto y bajo es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación, en cambio la de la alumna de nivel

académico medio se desarrolla en dos espacios semióticos.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 3.

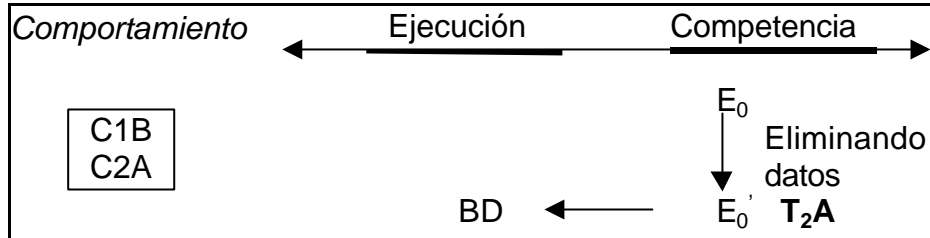
a) Justificaciones: Los resolutores de niveles académicos alto y bajo refutan el problema, con recursos de prueba como el razonamiento analítico (resolutor de nivel académico alto) y el razonamiento empírico (P2) (resolutor de nivel académico bajo). El resolutor de nivel académico medio valida el problema con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2) y no sabe validar ni refutar.

b) Espacios semióticos: Los resolutores de niveles académicos alto y bajo desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición, en cambio, el resolutor de nivel académico medio desarrolla su actuación en dos espacios semióticos.

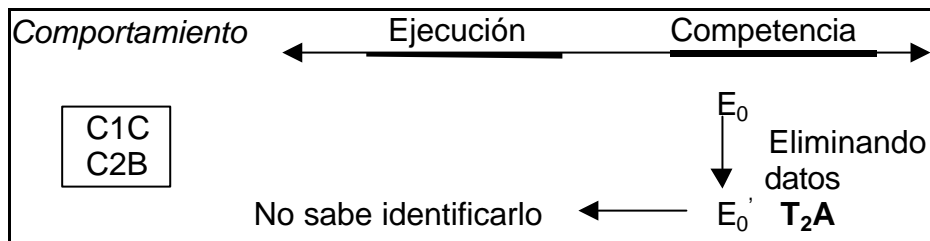
c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido. El comportamiento del resolutor de nivel académico medio, en el espacio semiótico inicial, estaría determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifica el problema presentado como bien definido y sus acciones están dirigidas por los datos, y en el espacio semiótico final estaría determinado por la secuencia: [C1C-C2B], que se concreta en: no sabe identificar el problema presentado y acciones dirigidas por el objetivo.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

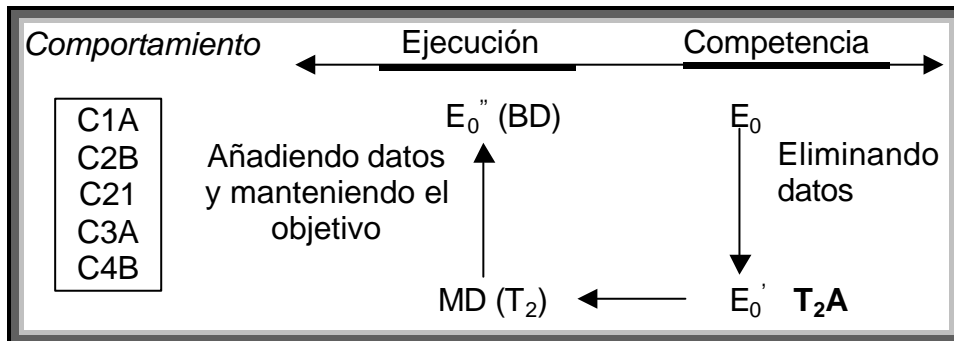
Resolutor de nivel académico medio (estado semiótico inicial):



Resolutor de nivel académico medio (estado semiótico final):



Resolutores de niveles académicos alto y bajo:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

PROBLEMA 4

Tras la lectura del problema, las alumnas de niveles académicos alto y medio anotan las condiciones del problema y posteriormente comentan lo que opinan del mismo, en cambio, el resolutor de nivel académico bajo no anota las condiciones ni el objetivo del problema, y tras la lectura da su

opinión sobre el mismo.

En el episodio de análisis-exploración buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, reconocen explícitamente que el problema está mal definido porque faltan datos [C1A] y lo replantean transformándolo en un problema bien definido [C4B], añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C], los resolutores de niveles académicos alto y medio y añadiendo datos [C3A] el resolutor de nivel académico bajo.

Alumna de nivel académico alto:

A. Se queda leyendo el enunciado y comenta... *Es que el dato de los 200 gramos de jamón sobra.*

[...]

A. *Porque si no lo paga, es que no lo compra... Sigue leyendo el problema y comenta... además falta el dato del precio de la barra de pan. No se puede resolver, porque le falta un dato y le sobra otro.*

Alumna de nivel académico medio:

[...]

A. *Claro, es que sólo me dan el precio de la leche. Si al menos me dijeran el precio de la barra de pan, entonces sí se podría resolver.*

E. *¿Por qué crees que con ese dato sí se puede resolver?*

A. *Porque así puedo multiplicar 3 por el precio del pan y así.*

Alumna de nivel académico bajo:

A. Lee el problema en voz alta y comenta... *No se puede resolver pues no dicen el precio del jamón ni del pan.*

E. *¿Por qué crees que son necesarios esos datos?*

A. *¡Oh!, ¿cómo sabes lo que te devuelven si no sabes lo que te cuesta la compra?*

De esta manera, refutan el problema, con recursos de prueba como el razonamiento analítico, ya que relacionan las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas por ellos, situándose en el campo de la demostración matemática.

La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 4.

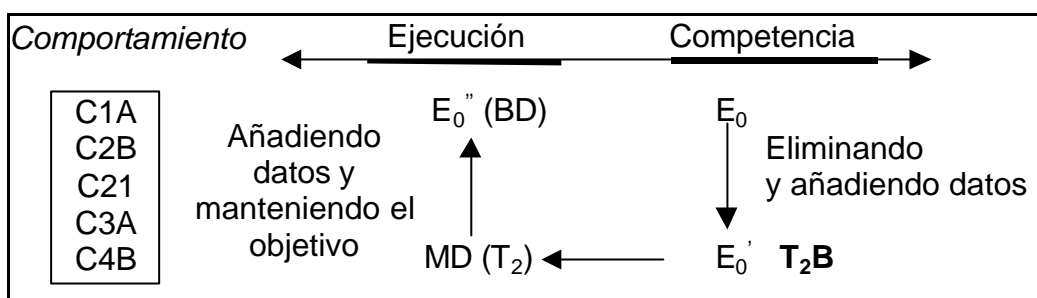
a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema, con recursos de prueba como el razonamiento analítico.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

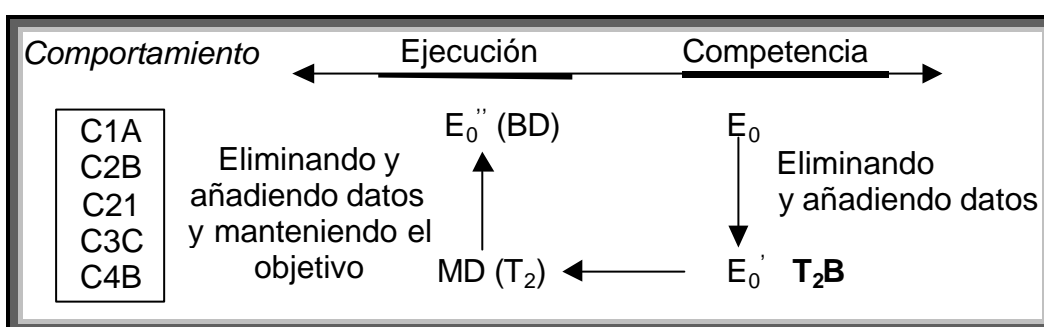
c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo y eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido. El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico bajo:



Resolutores de niveles académicos alto y medio:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

PROBLEMA 5

Tras la lectura del problema, las alumnas de niveles académicos alto y medio no anotan las condiciones ni el objetivo del problema y directamente comentan lo que opinan del mismo, en cambio la alumna de nivel académico bajo, apoyándose en un dibujo, plantea los datos y luego da su opinión sobre el problema.

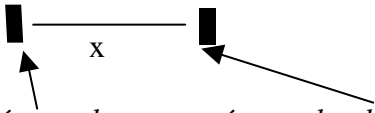
En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, los tres resolutores reconocen explícitamente que el problema está mal definido [C1A]. Los resolutores de niveles académicos alto y medio, dicen que faltan y sobran datos, y lo

transforman en un problema bien definido [C4B], añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C]. El resolutor de nivel académico bajo lo identifica como mal definido porque faltan datos [C1A] y lo transforma en un problema bien definido [C4B] añadiendo datos y manteniendo el objetivo [C21-C3A].

Alumna de nivel académico alto:

A. Lee el problema en voz alta y se sonríe, comentando... *Esto no tiene sentido. Bueno... lo lee de nuevo en voz alta y comenta... el dato de la distancia de su casa al instituto hay que quitarlo, pues no preguntan nada del instituto, y con los otros datos... Se queda en silencio un momento y comenta... Tengo que plantear una ecuación para saber si se puede o no resolver... Pasa a la pizarra*



Si ésta es la casa, y ésta es la plaza, x es la distancia.

$$\frac{x}{2} + 3 + \blacksquare = x$$

Esto es lo que tengo que hallar. Entonces me falta un dato, el de la x, que sería la distancia que hay de su casa a la plaza.

Alumna de nivel académico medio:

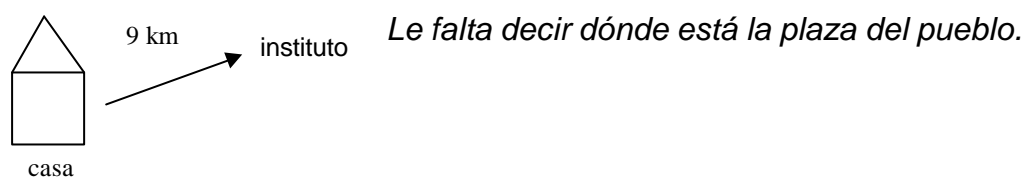
A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta [...] *No se puede resolver, pues te dan la distancia de su casa al instituto, no la de su casa a la plaza.*

E. *¿Qué te hace pensar que ese dato es necesario para resolver el problema?*

A. *Es que si no es así no puedo operar, porque ¿cuánto es la mitad si no sé el total?*

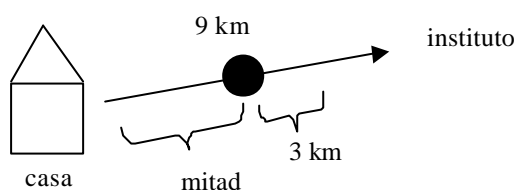
Alumna de nivel académico bajo:

A. Lee el problema en voz alta y comenta... *Voy a hacer un dibujo*



E. ¿No se puede resolver porque le falta un dato?

A. Vuelve a la pizarra dibuja y comenta... Sí, le falta un dato.



De esta manera, el resolutor de nivel académico alto refuta el problema con recursos de argumentación como el ridículo y de prueba como el razonamiento analítico, y los resolutores de niveles académicos medio y bajo lo refutan únicamente con recursos de prueba como el razonamiento analítico y contraejemplo.

La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 5.

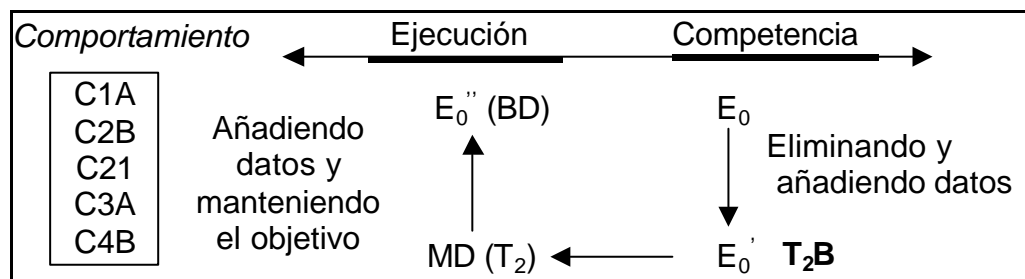
a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema. El resolutor de nivel académico alto con recursos de argumentación como el ridículo y recursos de prueba como el razonamiento analítico, y los resolutores de niveles académicos medio y bajo, con recursos de prueba como el razonamiento analítico y el contraejemplo.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

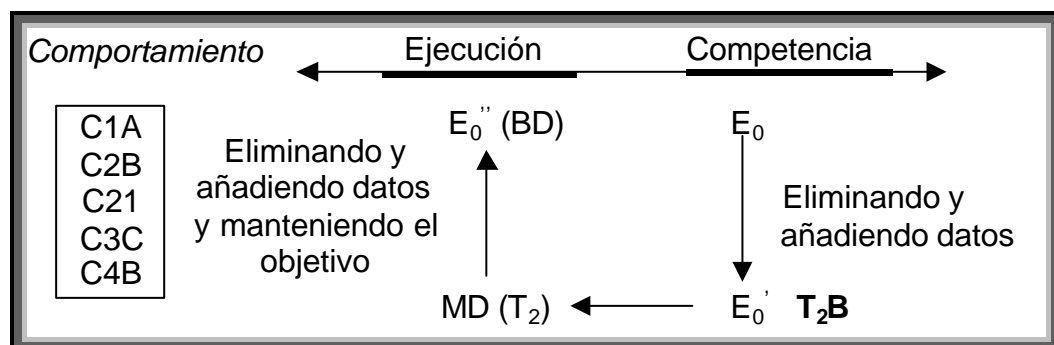
c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo y eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido. El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo, estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico bajo:



Resolutores de niveles académicos alto y medio:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

PROBLEMA 6

Durante la lectura del problema, las alumnas no anotan las condiciones ni el objetivo del problema y tras finalizar dicha lectura, comentan lo que opinan del mismo.

En el episodio de análisis-exploración, se observa que buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo. En el resolutor de nivel académico alto, sus acciones están dirigidas por los datos [C2A], en el de nivel académico medio por el objetivo [C2B] y en el de nivel académico bajo, en el espacio semiótico inicial por los datos [C1A], y en el espacio semiótico final, por el objetivo [C1B].

En el episodio de actuación, reconocen explícitamente que el problema está mal definido porque no hay relación entre los datos y el objetivo, y lo replantean transformándolo en un problema bien definido [C4B] el resolutor de nivel académico alto y en un problema mal definido tipo T_3 [C4C], los resolutores de niveles académicos medio y bajo². La transformación la llevan a cabo de diferente manera. El resolutor de nivel académico alto mantiene los datos y modifica el objetivo [C22]; el resolutor de nivel académico medio añade datos y mantiene el objetivo [C21-C3A] y el resolutor de nivel académico bajo, en el espacio semiótico inicial, mantiene los datos y modifica el objetivo [C22] y en el espacio semiótico final, añade datos y mantiene el objetivo [C21-C3A].

Alumna de nivel académico alto:

A. [...] *Es que no tiene sentido. Es un disparate.*

A. [...] *Porque tendría que preguntar cuál es el área de la plaza y no ese disparate, porque si te dan las dimensiones de un rectángulo es para calcular áreas, perímetros o eso.*

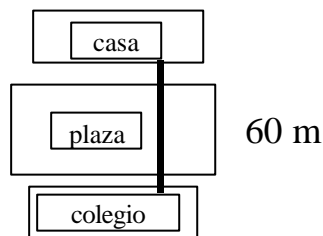
Alumna de nivel académico medio:

A. Lee el problema en voz alta. Pone cara de extrañeza. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta... *el colegio está ahí ... Señalando con el dedo un lugar de la pizarra [...] la plaza...*

Se queda en silencio un rato y comenta [...] *es que no dice la situación de nada. No se puede resolver pues le faltan datos o no tienen relación los datos con la pregunta.*

E. Entonces, ¿cuál es tu opinión sobre el problema?

A. *Supongamos ... Pasa a dibujar en la pizarra y va comentando lo que hace...*

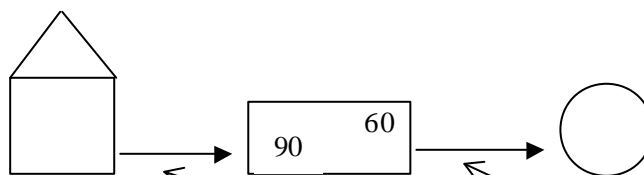


Si la plaza que hay delante de tu casa es rectangular y tiene 90 m y 60 m de dimensiones. Justo en el otro lado mayor de la plaza, enfrente de la casa está el colegio. Si atraviesas directamente la plaza,... señalando sobre el dibujo... ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa? Así sí podemos operar.

Alumna de nivel académico bajo:

A. Lee el problema en voz alta, se sonríe y comenta... *¡Como no me hagan otra pregunta!, por ejemplo, cuál es el área de la plaza.*

Se queda durante un rato leyendo el problema en voz baja y pasa a la pizarra



Bueno, es que le faltan datos, porque si te dicen esta distancia y ésta, entonces ya puedes resolverlo.

² En el espacio semiótico inicial, el resolutor de nivel académico bajo lo transforma en un problema bien definido.

De esta manera, refutan el problema, con diferentes recursos. El resolutor de nivel académico alto con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2), ya que relaciona las cantidades explícitas, relacionando unos conceptos con otros, como son las dimensiones de una figura geométrica con el cálculo del área y un recurso de argumentación como el ridículo. El resolutor de nivel académico medio, con recursos de argumentación describiendo verbalmente las características de la situación (descripción), y recursos de prueba como el contraejemplo, ya que relaciona las cantidades explícitas, dando un ejemplo, sacado de la misma situación. El resolutor de nivel académico bajo, en el espacio semiótico inicial, lo refuta con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2), ya que relaciona las cantidades explícitas, relacionando unos conceptos con otros, como son las dimensiones de una figura geométrica con el cálculo del área, y en el espacio semiótico final, lo refuta con recursos de prueba como el contraejemplo, ya que relaciona las cantidades explícitas, pero dando un ejemplo sacado de la misma situación.

La actuación de las alumnas de niveles académicos alto y medio es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación, en cambio, la alumna de nivel académico bajo desarrolla su actuación en dos espacios semióticos.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 6.

a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema. El resolutor de nivel académico alto, con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2) y de argumentación como el ridículo; el resolutor de nivel académico medio, con recursos de argumentación como la descripción y recursos de prueba como el contraejemplo; y, el resolutor de nivel

académico bajo, con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2) (en el espacio semiótico inicial) y el contraejemplo (en el espacio semiótico final).

b) Espacios semióticos: Los resolutores de niveles académicos alto y medio, desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición, en cambio, el resolutor de nivel académico bajo desarrolla su actuación en dos espacios semióticos.

c) Actuación desde nuestra propuesta de caracterización: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto estaría determinado por la secuencia [C1A-C2A-C22-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, mantiene los datos y modifica el objetivo y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

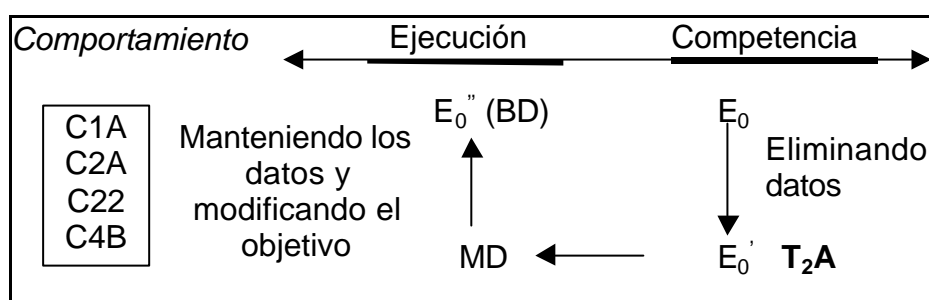
El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .

El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado en el espacio semiótico inicial por la secuencia [C1A-C2A-C22-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, mantiene los datos y modifica el objetivo y transforma el problema planteado en un problema bien definido, y en el espacio semiótico final por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el

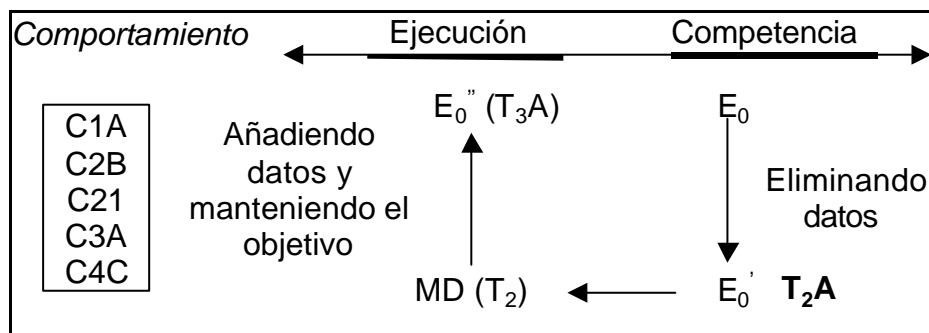
objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son los siguientes:

Resolutor de nivel académico alto y espacio semiótico inicial del resolutor de nivel académico bajo:



Resolutor de nivel académico medio y espacio semiótico final del resolutor de nivel académico bajo:



A continuación mostramos el análisis de los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15).

PROBLEMA 7

Durante la lectura del problema, las alumnas no anotan las condiciones ni el objetivo del problema y tras finalizar dicha lectura, comentan lo que opinan del mismo.

En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, reconocen explícitamente que el problema está mal definido [C1A] porque sobran datos, y lo replantean transformándolo en un problema bien definido [C4B], eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3B].

Alumna de nivel académico alto:

A. Con una expresión de extrañeza comenta... *Si ya me dicen que obtuvo 204.060 pesetas, no hay que hacer nada. No es un problema.*

Alumna de nivel académico medio:

A. Lee en voz alta el problema. Lo vuelve a leer en voz baja y pasa a la pizarra

315	125	120000 ptas. diccionarios
x 24 libretas	x 12 bolígrafos	
1260	250	2500
626	125	x 20
7520 ptas.	1500 ptas.	50000 ptas. bestsellers

[...] *Ahora sumaría todo y ya está esa parte del problema. Luego lo de los 60 metros y lo que obtuvo en la venta sobra ¿no?*

[...] *Porque el problema me da una serie de datos para que opere y obtenga el resultado, así que eso sobra, porque en un problema hay que operar con los datos. Bueno eso es lo que nos han enseñado.*

Alumna de nivel académico bajo:

A. Lee el problema en voz alta y comenta... *El dato de los 60 metros sobra, pues no tiene nada que ver los metros con las ventas y además te dan la solución, pues ya te dicen que obtuvo en ventas 204.060 pesetas.*

E. *¿Entonces?*

A. *Que está mal planteado. Es absurdo que te den la solución.*

De esta manera, refutan el problema con diferentes recursos de

prueba. El resolutor de nivel académico alto justifica su actuación mediante un proceso que involucra las cantidades explícitas, haciendo referencia a actitudes sobre las matemáticas más que a verdaderos procesos de inferencia matemática, pues se apoya en un proceso impuesto por la costumbre (Ritual). El resolutor de nivel académico medio utiliza el razonamiento analítico, relacionando las cantidades explícitas y situándose en el campo de la demostración matemática. El resolutor de nivel académico bajo justifica su actuación con recursos de prueba, involucrando las cantidades explícitas, haciendo referencia a actitudes sobre las matemáticas más que a verdaderos procesos de inferencia matemática, pues se apoya en un proceso impuesto por la costumbre (Ritual) y con el razonamiento empírico (P1).

La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

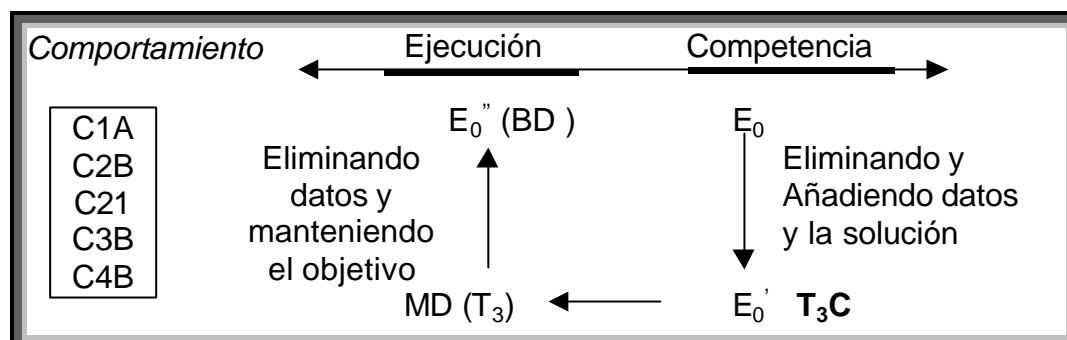
Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 7.

a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema con diferentes recursos de prueba. El resolutor de nivel académico alto con el ritual, el de nivel académico medio con el razonamiento analítico y el de nivel académico bajo con el ritual y el razonamiento empírico (P1).

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento observado en los tres resolutores estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y transforman el problema

planteado en un problema bien definido.



Se trata de un comportamiento invariante desarrollado por los tres resolutores.

PROBLEMA 8

Durante la lectura del problema, las alumnas anotan las condiciones del problema y tras finalizar dicha lectura, comentan lo que opinan del mismo.

En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, reconocen explícitamente que el problema está mal definido [C1A] porque sobran datos, y lo replantean. Los resolutores de niveles académicos alto y medio lo transforman en un problema mal definido donde sobran datos [C4C], y el resolutor de nivel académico bajo en uno bien definido [C4B]. La transformación la realizan eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3B].

Alumna de nivel académico alto:

A. [...] *Ahora sustituyo el valor de C. Pasa a la pizarra escribe y comenta:*

$$A = 9$$

$$B = 3C - 4 = 5$$

$$C = 3$$

Entonces el dato de los 4'5 kg sobra, pues el peso no tiene nada que ver con los huevos que ponen.

Alumna de nivel académico medio:

A. [...] *¿Este problema es del tipo: "Si fulanita tiene tres hermanos rubios y tal, tal..."?*

[...] *Se queda pensando un rato y comenta... ¿éstos no son los de las ecuaciones esas que sustituyen C en tal y así?*

A. [...] *Ahora, si sustituyo en C, se supone que la suma de A, B y C tiene que ser igual a 17, por lo tanto, el problema sí se puede resolver, pero quitando los kg, pues no tiene nada que ver los kg con el número de huevos.*

Alumna de nivel académico bajo:

A. *Lee el problema en voz alta, se sonríe y comenta... Fuerte rollo.*

E. *¿Por qué dices eso?*

A. *Se sonríe y comenta... Por lo del doble de tal, más 3 que cual, eso es un rollo... Vuelve a leerlo en voz baja y pasa a la pizarra*

$$A = 3 + 2C$$

$$B = 4 - 3C$$

$$C = 3$$

17 huevos

El peso no tiene nada que ver con los huevos que ponen, así que sobra.

Ahora sustituyo la C por 3 y tenemos... Pasa a escribir de nuevo en la pizarra:

$$A = 6$$

$$B = 4 - 3C = 5$$

$$C = 3$$

De esta manera, refutan el problema con un recurso de prueba como el razonamiento analítico, ya que relacionan las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas, situándose en el campo de la

demostración matemática. Además, el resolutor de nivel académico medio utiliza un recurso de prueba como el razonamiento empírico (P1).

La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 8.

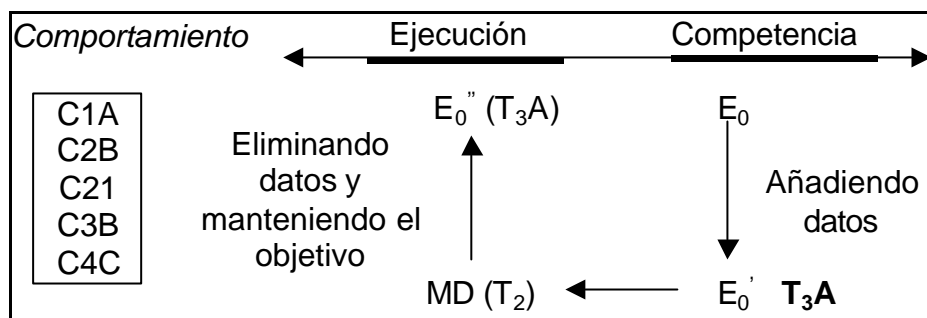
a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema. Los de niveles académico alto y bajo con recursos de prueba como el razonamiento analítico, y el de nivel medio, utiliza además el razonamiento empírico (P2).

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

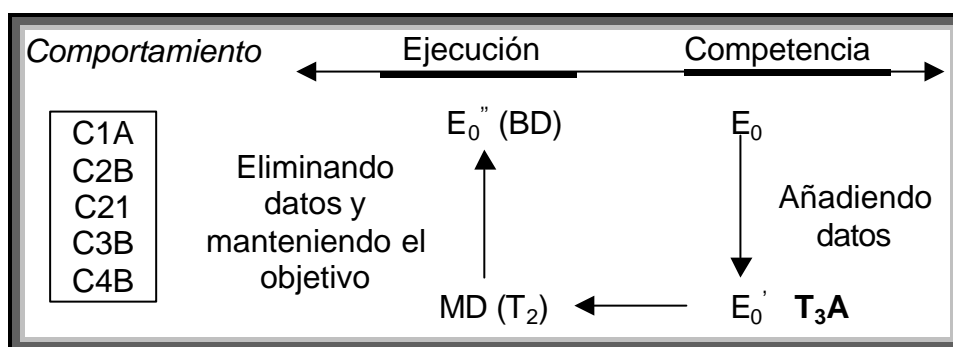
c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4C], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A . El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico medio:



Resolutores de niveles académicos bajo y alto:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

PROBLEMA 9

Tras la lectura del problema, las alumnas de niveles académicos alto y bajo anotan las condiciones del problema y comentan lo que opinan del mismo, en cambio la de nivel académico medio sin anotar los datos, da su opinión del mismo. Se observa, en el resolutor de nivel académico alto, una comprensión de la tarea, y en los resolutores de niveles académicos medio y bajo, una incomprensión de la misma.

En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, reconocen explícitamente que el problema está mal definido [C1A] porque sobran datos. Los resolutores de niveles

académicos alto y medio lo replantean transformándolo en un problema bien definido [C4B], eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3B] el de nivel académico alto, y eliminando datos y modificando el objetivo [C23-C3B] el de nivel académico medio. El resolutor de nivel académico bajo comenta que no sabe replantearlo.

Alumna de nivel académico alto:

A. [...] *El dato de lo que pesa sobra...* Sigue leyendo el problema, se sonríe y comenta... *¡Te dan la solución!, 70 cm*

E. *¿Y qué ocurre?*

A. *¿Cómo te van a dar la solución? Entonces no es un problema.*

E. *¿Por qué crees que con la solución no es un problema?*

A. *Porque lo tradicional es que en un problema tienes que realizar operaciones para encontrar la solución.*

Alumna de nivel académico medio:

A. [...] *Yo veo que está mal planteado, porque sobran datos como los 3 kg y los 133 cm del suelo que no sé a qué viene.*

E. *Entonces, ¿puedes resolver el problema?*

A. *No. Hay algo raro pero no sé lo que es. Estos problemas se resuelven por eso de si te dan un lado y otro... señalando en el dibujo... halla el otro lado con esa fórmula que hay, pero es que no me acuerdo de ella.*

E. *¿Aplicando el teorema de Pitágoras?*

A. *Eso, es que no me acordaba.*

E. *Por lo tanto, tal y como está planteado el problema, ¿lo puedes resolver de esa manera?*

A. *No, lo plantearía como : “El pie de una escalera dista de la pared 70 cm. Si la escalera tiene 150 cm de longitud ¿cuál es la distancia desde el suelo hasta donde finaliza la escalera?”*

Alumna de nivel académico bajo:

A. [...] *Está mal, porque ¿qué tiene que ver el peso?... Se queda en*

silencio mirando el enunciado y comenta... *De todas formas, la pregunta está mal, porque ¿cómo van a preguntar la distancia de la pared a la escalera si están pegadas? Por ejemplo ...* Pasa a dibujar en la pizarra y a explicar su razonamiento apoyándose en el dibujo [...]



Si tengo una silla y una mesa, y me preguntan la distancia entre ellas si es correcto, pero si la escalera está pegada a

la pared, ya no hay distancia. Yo creo que lo que piden es esto... subraya el interior de la figura... pero ya es meterse con el volumen y es muy difícil.



E. *Entonces, ¿el problema está mal planteado o es muy difícil?*

A. *Está mal planteado, porque para calcular el volumen faltan más datos. Estaría bien si quitaran el peso y pidiesen el área esa.*

E. *¿Cómo lo plantearías?*

A. *No sé. Sé que le faltan datos, pero no se me ocurre como plantearlo.*

De esta manera, refutan el problema, con diferentes recursos. El resolutor de nivel académico alto lo refuta con recursos de prueba, relacionando las cantidades explícitas y atendiendo a factores externos más que a requerimientos matemáticos, ya que hace referencia a actitudes sobre las matemáticas más que a verdaderos procesos de inferencia matemática, pues se apoya en un proceso impuesto por la costumbre (Ritual). El resolutor de nivel académico medio lo refuta con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2), ya que relaciona las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas, recurriendo a experiencias cuantificables, como el hecho de relacionar unos conceptos con otros, como son las dimensiones del triángulo rectángulo con la aplicación del teorema de Pitágoras. El resolutor de nivel académico bajo lo refuta con recursos de argumentación como la comparación o analogía, ya que utiliza la explicación verbal, pero tomando

otra situación para establecer diferencias o semejanzas.

La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 9.

a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema con diferentes recursos. El de nivel académico alto, con recursos de prueba como el ritual; el resolutor de nivel académico medio, con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2), y el resolutor de nivel académico bajo, con recursos de argumentación como la comparación o analogía.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

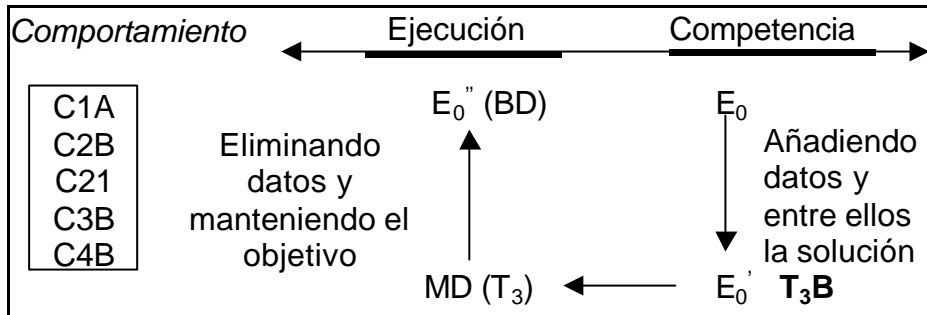
c) Actuación: Los comportamientos de los resolutores de niveles académicos alto y medio varían únicamente en que el primero, al transformar el problema, elimina datos y mantiene el objetivo, en cambio el de nivel académico medio, elimina datos y modifica el objetivo. De esta manera el comportamiento de estos dos resolutores estaría determinado por las secuencias [C1A-C2B-C21-C3B-C4B] y [C1A-C2B-C23-C3B-C4B], que se concretan en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo (el resolutor de nivel académico alto) y modifica los datos y el objetivo objetivo (el resolutor de nivel académico medio), la modificación la realizan eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido.

El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifica el

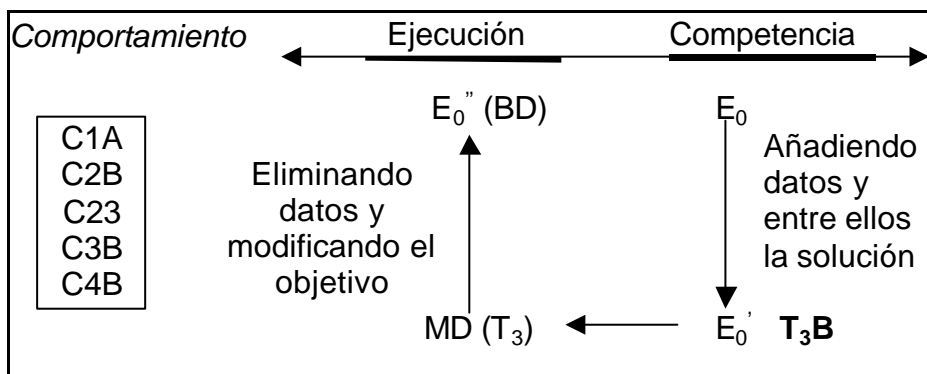
problema presentado como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

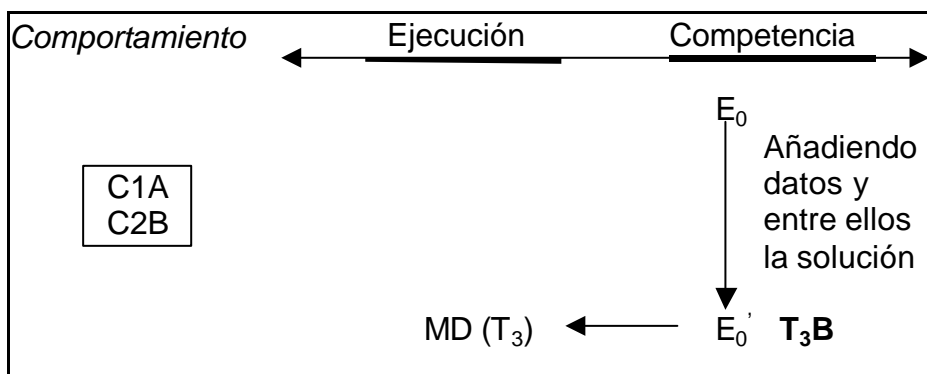
Resolutor de nivel académico alto:



Resolutor de nivel académico medio:



Resolutor de nivel académico bajo:



PROBLEMA 10

Durante la lectura del problema, las alumnas no anotan ni las condiciones ni el objetivo y tras finalizar dicha lectura, comentan lo que opinan del problema.

En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo. En los resolutores de niveles académicos alto y medio, sus acciones están dirigidas por los datos [C2A] y en el resolutor de nivel académico bajo por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, reconocen explícitamente que el problema está mal definido [C1A], y lo replantean, transformándolo en un problema mal definido donde sobran datos [C4C], los resolutores de niveles académicos alto y medio, y en un problema bien definido [C4B] el resolutor de nivel académico bajo. La transformación la realizan eliminando datos y modificando el objetivo [C23-C3B] el resolutor de nivel académico alto; eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3B] el resolutor de nivel académico medio y, añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C], el resolutor de nivel académico bajo.

Alumna de nivel académico alto:

A. Lee el problema en voz alta y comenta... *Ya te dan la solución o es que hicieron mal la pregunta, porque sería ¿cuánto pienso se comieron?, ya que tienes el total y lo que dejaron.*

Alumna de nivel académico medio:

A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta [...] *Pues se resta 760 menos 128... Pasa a la pizarra*

$$\begin{array}{r} 760 \\ - 128 \\ \hline 632 \end{array} \text{ son los gramos que le sobran}$$

Luego las 52 semanas las quitaría pues no preguntan lo que sobra al

finalizar las 52 semanas.

E. Es decir, que el problema está bien planteado.

A. No, hay que quitarle ese dato que sobra.

Alumna de nivel académico bajo:

A. Lee el problema en voz alta, se sonríe y comenta... ¡128 gramos!

E. ¿Por qué te sonríes?

A. Porque esto no es un problema. Si dijese lo que come, sí.

E. ¿Por qué crees que tendría que decir lo que comen?

A. Porque así sí podemos restar.

De esta manera, refutan el problema, con recursos de prueba como el razonamiento analítico, y el resolutor de nivel académico bajo, además de este recurso utiliza el ritual.

La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 10.

a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema. Los resolutores de niveles académicos alto y medio con recursos de prueba como el razonamiento analítico y el resolutor de nivel académico bajo igualmente con recursos de prueba como el razonamiento analítico y recursos de argumentación como el ridículo.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto estaría determinado por la secuencia [C1A-C2A-C23-C3B-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus

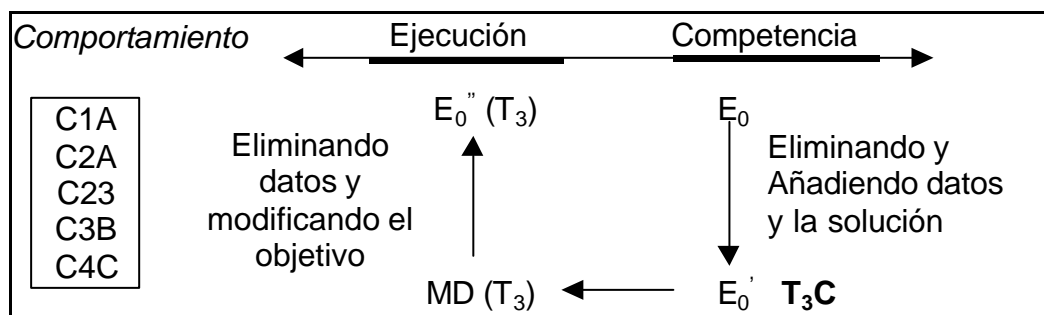
acciones están dirigidas por los datos, modifica los datos y el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 (Esta actuación no es caracterizada con respecto al problema bien definido del que partimos, al haber modificado la pregunta).

El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2A-C21-C3B-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .

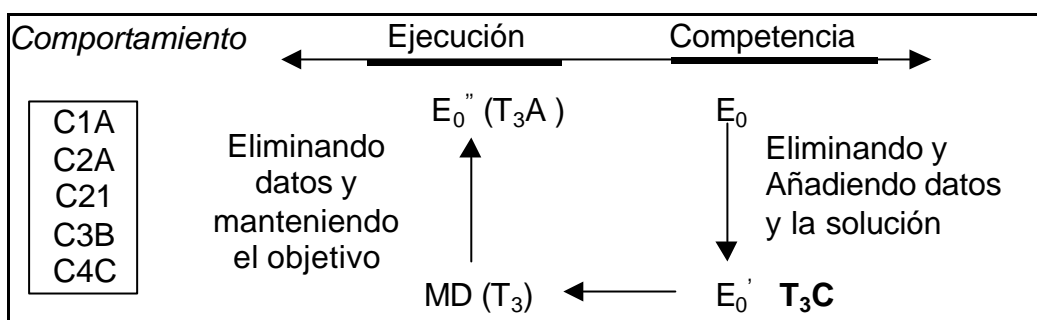
El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

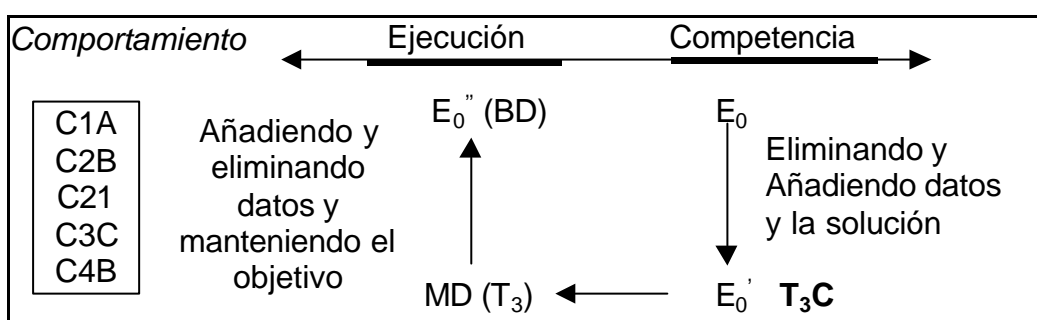
Resolutor de nivel académico alto:



Resolutor de nivel académico medio:



Resolutor de nivel académico bajo:



PROBLEMA 11

Durante la lectura del problema, la alumna de nivel académico alto no anota ni las condiciones ni el objetivo y tras finalizar dicha lectura, comenta lo que opina del problema, en cambio las alumnas de niveles académicos medio y bajo anotan los datos y luego dan su opinión del problema.

En el episodio de análisis-exploración, se observa una comprensión de la tarea. Buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, reconocen explícitamente que el problema está mal definido [C1A] porque sobran datos, y lo replantean. Los resolutores de niveles académicos alto y bajo, lo transforman en un problema bien definido [C4B], y el resolutor de nivel académico medio en un problema mal definido tipo T₃ [C4C]. El resolutor de nivel académico

alto replantea el problema, eliminando datos y modificando el objetivo [C23-C3B], el resolutor de nivel académico medio lo replantea eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3B] y el resolutor de nivel académico bajo lo replantea añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C].

Alumna de nivel académico alto:

A. Lee en voz alta el problema y comenta... *Te dan el resultado y además sobran datos. Si dijese: A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió la distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo quedándole 6 km por recorrer. ¿Cuántos kilómetros recorrió esa mañana?, entonces sí se podría resolver.*

Alumna de nivel académico medio:

15 km

Casa → colegio

18 km

Casa → plaza

$$\begin{array}{r} 18 \\ - 6 \\ \hline 12 \text{ km} \end{array}$$

¿Lo explico?

E. *Sí, por favor.*

A. *El problema dice que de la casa a la plaza del pueblo hay 18 km. Como el sábado recorrió la mitad del camino de la casa a la plaza, le resto a 18 km los 6 que faltan y me da 12 km*

E. *Entonces, el problema está bien planteado.*

A. *Mira el enunciado del problema y comenta... no, hay que quitarle el dato que sobra, que es la distancia de la casa al colegio, pues si no hay que utilizarlo, no tiene que estar en el enunciado.*

Alumna de nivel académico bajo:

[...]

A. Se sonríe y comenta, *... el problema está mal, porque te dice que le faltan 6 km, y eso no va a ser lo que pregunten, además sobra la distancia de la casa al colegio.*

De esta manera, refutan el problema con diferentes recursos de prueba. El resolutor de nivel académico alto, con el contraejemplo, y los de niveles académicos medio y bajo con el razonamiento analítico y el ritual.

El resolutor de nivel académico alto, en su justificación de refutación, relaciona las cantidades explícitas, dando un ejemplo sacado de la misma situación. Los resolutores de niveles académicos medio y bajo relacionan las cantidades explícitas, haciendo referencia a actitudes sobre las matemáticas más que a verdaderos procesos de inferencia matemática, pues se apoya en un proceso impuesto por la costumbre (Ritual) y situándose en el campo de la demostración matemática.

La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 11.

a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema con recursos de prueba. El resolutor de nivel académico alto, con el contraejemplo, y los de niveles académicos medio y bajo, con el razonamiento analítico y el ritual.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

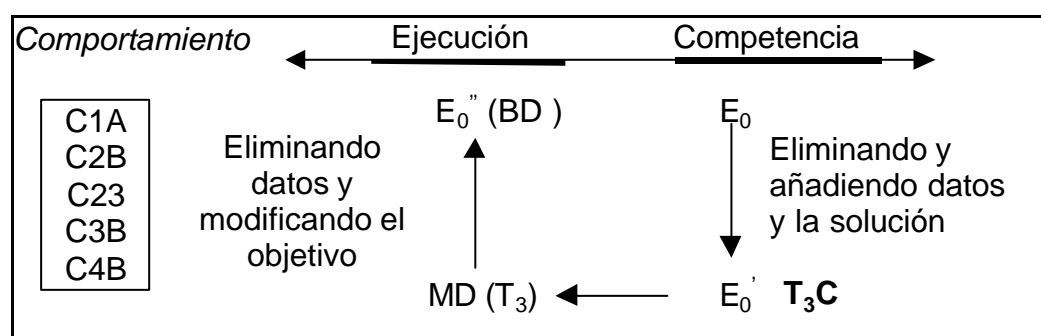
c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C23-C3B-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 .

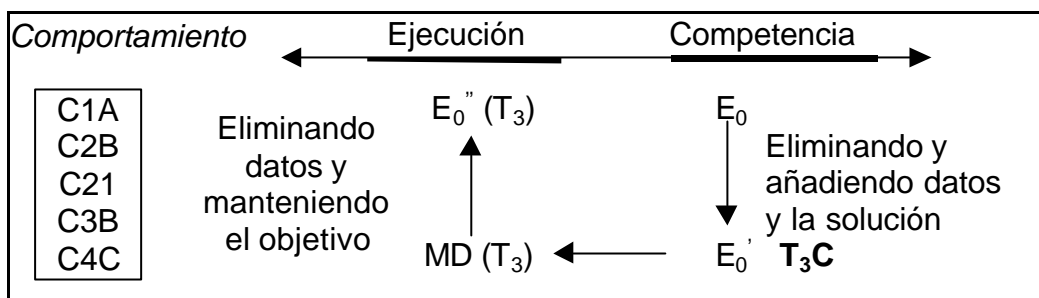
El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo, estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

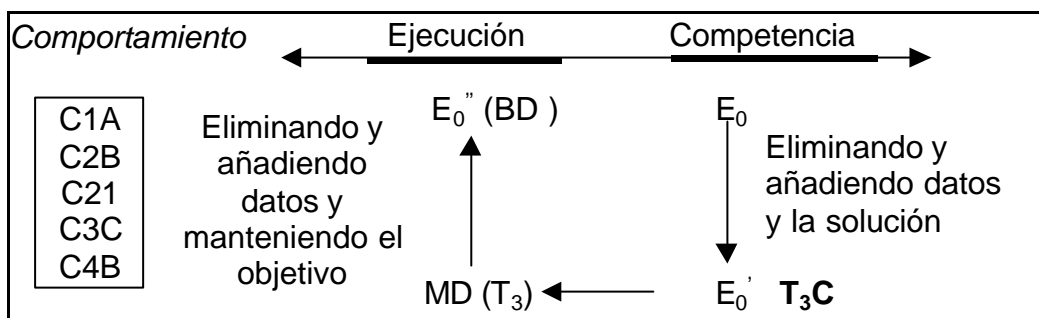
Resolutor de nivel académico alto:



Resolutor de nivel académico medio:



Resolutor de nivel académico bajo:



PROBLEMA 12

Durante la lectura del problema, las alumnas de niveles académicos alto y medio no anotan ni las condiciones ni el objetivo y tras finalizar dicha lectura, comentan lo que opinan del problema, en cambio, la alumna de nivel académico bajo anota los datos y luego da su opinión del problema.

En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, los resolutores de niveles académicos alto y medio reconocen explícitamente que el problema está mal definido [C1A] porque sobran datos, y lo replantean transformándolo en un problema bien definido [C4B], añadiendo datos y manteniendo el objetivo (C21-C3C). En cambio, el resolutor de nivel académico bajo, lo identifica como bien definido [C1B].

Alumna de nivel académico alto:

A. Lee el problema en voz alta y comenta... *El problema está mal. Las horas no intervienen en el problema, porque no hablan de velocidad sino de metros y diámetro. Además ya dan la solución, 640 metros...*

Alumna de nivel académico medio:

A. ... *¿los 640 metros no es lo que pide el problema?*

E. *¿Tu qué opinas?*

A. Lo lee en voz alta y comenta con cara de sorpresa... *¡Sí! ¡La solución ya te la da el problema!*

E. *¿Tienes algo que comentar del problema?*

A. *Que esto no es un problema, porque un problema es el que te plantean para que tú tengas que hacer algo. Además, ¿qué tiene que ver la rueda con lo que piden? Tendrían que pedir la longitud o el área del círculo.*

E. *Bueno, pero tú has hecho algo, como leerlo, entenderlo y darte cuenta que la solución te la da el problema.*

A. Se sonríe y comenta... *No, yo me refiero a tener que hacer alguna operación.*

Alumna de nivel académico bajo:

A. *El dato de las 2 horas sobra, porque piden la distancia no las horas, pero yo no sé hacerlo... Se queda mirando a la pizarra y comenta... no, no, el dato sí hace falta pues me da el tiempo que tarda. Es que si supiera la fórmula podría hacerlo, porque me dan todo, el tiempo, el diámetro y la distancia, pero la verdad es que no sé hacerlo.*

E. *¿Qué opinas del problema?*

A. *Que está bien planteado, pero no me acuerdo de la fórmula.*

De esta manera, refutan el problema, con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2), ya que relacionan las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas, recurriendo a experiencias cuantificables, como el hecho de relacionar unos conceptos con otros,

como la distancia con el diámetro y radio, o el diámetro y radio con el cálculo del área o del perímetro, o una serie de datos con una fórmula determinada. Además, los resolutores de niveles académicos alto y medio utilizan otro recurso de prueba que hace referencia a actitudes sobre las matemáticas más que a verdaderos procesos de inferencia matemática (Ritual).

La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 12.

a) Justificaciones: Los resolutores de niveles académicos alto y medio refutan el problema con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2) y Ritual. El resolutor de nivel académico bajo lo refuta con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2).

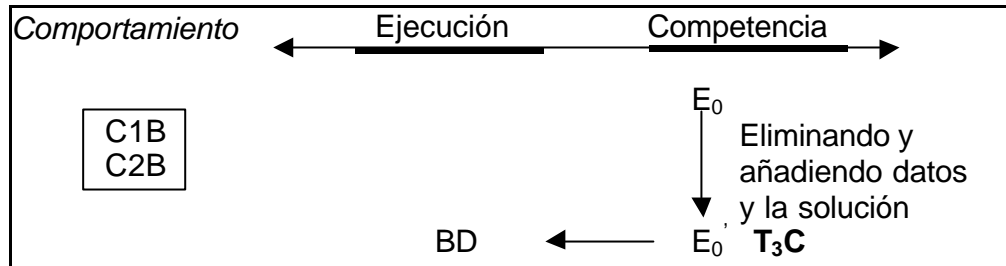
b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando y añadiendo datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido.

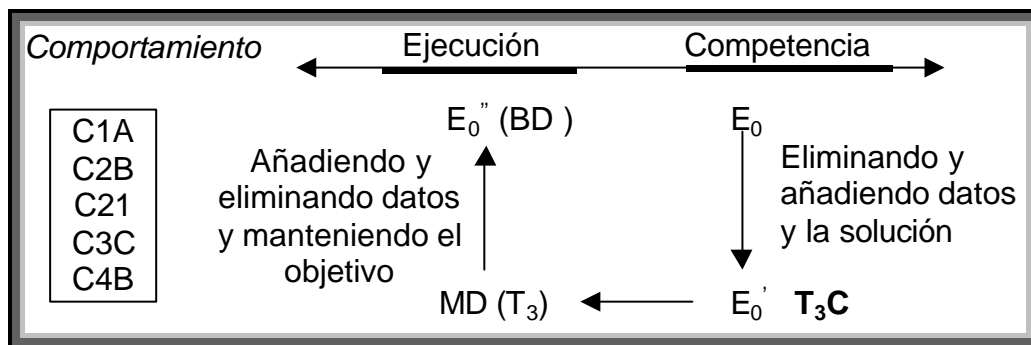
El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifica el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico bajo:



Resolutores de niveles académicos alto y medio:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

PROBLEMA 13

Durante la lectura del problema, los tres resolutores anotan las condiciones y luego dan su opinión del problema.

En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

En el episodio de actuación, identifican explícitamente el problema, como bien definido [C1B].

Alumna de nivel académico alto:

A. [...] *Creo que el que empiece a pagar 4 meses más tarde no tiene nada*

que ver, pues lo que va a pagar cada mes no varía, sólo que empieza a pagarla más tarde. Sería, al precio total quitarle la entrega inicial, luego dividir entre 6 para ver las mensualidades y como tiene un recargo mensual, éste se suma a cada mensualidad.

E. Si tuvieses que plantear a tus compañeros este problema, ¿quitarías el dato que dice que sobra?

A. No, pues eso es una realidad.

Alumna de nivel académico medio:

A. Lo de que empieza a pagar cuatro meses más tarde no influye para nada, pues lo que paga mensualmente no varía... Continúa en la pizarra [...] Como 9000 es la entrega inicial y 5370 el recargo, le quito a la entrega inicial el recargo y el resultado se lo sumo al precio de la lavadora. Pero quiero comprobar una cosa... Mira a la pizarra, borra las operaciones realizadas y hace una nueva operación

[...]

E. ¿Cuál es tu opinión del problema?

A. Que está bien planteado.

E. ¿Sobra el dato: comienza a pagar 4 meses más tarde?

A. No, porque eso es lo que ocurre normalmente.

Alumna de nivel académico bajo:

Lavadora 82475
6 plazos
recargo 5370
E. I. 9000
4 meses más tarde

$$\begin{array}{r} 82475 \\ + \underline{5370} \\ \hline 87845 \text{ tiene que pagar} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 87845 \\ - \underline{9000} \\ \hline 78845 \end{array} \left| \begin{array}{l} 4 \\ \hline 19711 \text{ ptas. cada mes.} \end{array} \right.$$

E. *¿Cuál es tu opinión sobre este problema?*

A. *Que está bien planteado y el dato de los 6 meses está para despistar al alumno a ver si sabe y se da cuenta.*

E. *¿Por qué crees que ese dato es para despistar?*

A. *Porque con el dato de empezar a pagar 4 meses más tarde ya puedes calcular lo que tiene que pagar mensualmente, que es lo que te piden.*

De esta manera, los tres resolutores validan el problema. Los de niveles académicos alto y medio utilizan en sus justificaciones recursos de argumentación, describiendo situaciones cotidianas de nuestra vida social (Descripción) y además utilizan recursos de prueba como el razonamiento analítico, ya que involucran y relacionan las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas por ellos, situándose en el campo de la demostración matemática. El resolutor de nivel académico bajo utiliza en su justificación de validación un recurso de prueba como el razonamiento analítico.

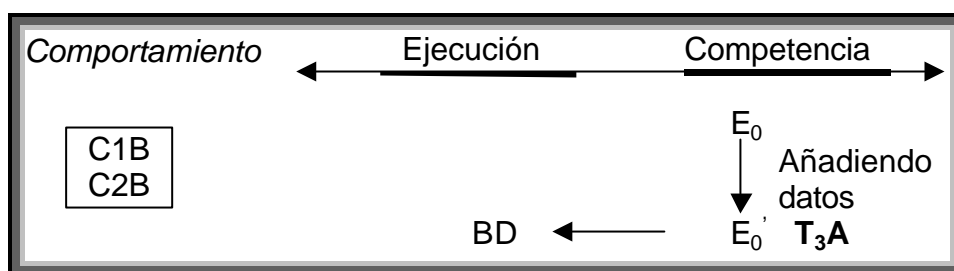
La actuación de los resolutores es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 13.

a) Justificaciones: Los tres resolutores validan el problema. Los de niveles académicos alto y medio con recursos de argumentación como la descripción y recursos de prueba como el razonamiento analítico, y el resolutor de nivel académico bajo con recursos de prueba como el razonamiento analítico.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento de los tres resolutores estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.



Se trata de un comportamiento invariante desarrollado por los tres resolutores.

PROBLEMA 14

Durante la lectura del problema, los resolutores de niveles académicos alto y medio no anotan las condiciones y tras terminar la lectura, dan su opinión del problema, en cambio el resolutor de nivel académico bajo, tras la lectura anota las condiciones del problema y luego da su opinión del mismo.

En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las condiciones del problema y el objetivo del mismo, de manera que, en los resolutores de niveles académicos alto y bajo, sus acciones están dirigidas por el objetivo [C2B] y en el resolutor de nivel académico medio por los datos [C2A].

En el episodio de actuación, identifican explícitamente el problema, como mal definido [C1A]. Los resolutores de niveles académicos alto y medio lo transforman en uno mal definido tipo T₃ [C4C] y el de nivel bajo lo transforma en uno bien definido [C4B]. La transformación la realizan añadiendo y eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3C], los resolutores de niveles académicos alto y bajo, y, manteniendo los datos y

modificando el objetivo [C22], el resolutor de nivel académico medio.

Alumna de nivel académico alto:

A. ...Lo de "gastaron 2400 pesetas" sobra porque no dicen a cuánto sale el kg de heno, sino el total gastado. Si te dijiesen el precio total gastado y el precio del kg, sí podría utilizarse ese dato... Se queda mirando el enunciado del problema y comenta... No sé. No se puede hacer este problema.

E. ¿Cuál es tu opinión del problema?

A. Sé que le faltan datos, como por ejemplo decir además de lo que ahorraron por día, lo que comieron cada día o algo así, pero tal y como está planteado no se puede resolver.

Alumna de nivel académico medio:

A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta... lo de gastaron 2400 pesetas sobra, pues está hablando de kilogramos y días y las pesetas no tienen nada que ver con eso...

[...]

A. Pero es que la pregunta está mal hecha, porque si dijese: Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. ¿Cuántos kilos de heno ahorraron?, entonces sí, pues sería 100 por 4.

Alumna de nivel académico bajo:

A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta... No sé, pero a primera vista parece que faltan datos... Lo vuelve a leer en voz baja y pasa a la pizarra

100 kg/día ahorraron

gastaron 2400 ptas.

Heno 6 días

Necesita volver a leer el problema en voz baja, y comenta, con cierta

inseguridad... *Sí, le falta el dato del precio del kg...* Nuevamente vuelve a leerlo en voz alta y se queda callada durante un rato.

E. *¿Qué piensas?*

A: *Estoy buscando cuánto se gastaron en realidad, si ahorraron...* Hace una pausa y continúa... *faltan datos seguro. Es que hay algo que me choca. Este problema tiene truco...* Se queda mirando el enunciado del problema y comenta... *De todas forma, si dijese: Unos granjeros almacenaron heno. En total se gastaron 2.400 pesetas. Si el kg está a tantas pesetas, ¿cuántos kilos de heno almacenaron?, sí se podría resolver.*

De esta manera, los tres resolutores refutan el problema. El de nivel académico alto con recursos de prueba como el razonamiento analítico, ya que relaciona las cantidades explícitas situándose en el campo de la demostración matemática. Los resolutores de niveles académicos medio y bajo utilizan el razonamiento empírico (P1) y el contraejemplo, pues recurren a experiencias cuantificables, como el hecho de relacionar cantidades homogéneas y además, dan un ejemplo sacado de la misma situación.

La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 14.

a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema. El de nivel académico alto, con recursos de prueba como el razonamiento analítico y los resolutores de niveles académicos medio y bajo, con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P1) y el contraejemplo.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores, desarrollan su actuación en

un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

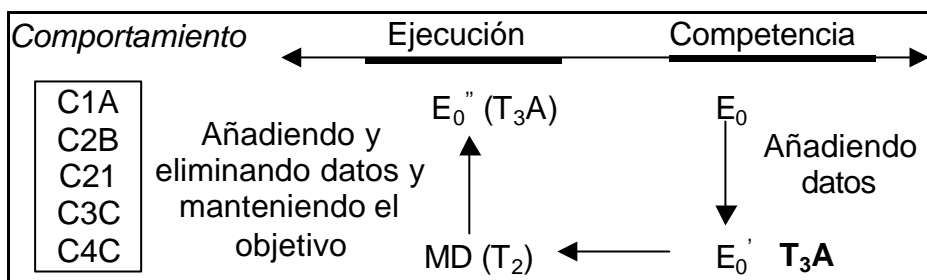
c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto, estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .

El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2A-C22-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, mantiene los datos y modifica el objetivo y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 . (Esta actuación no es caracterizada con respecto al problema bien definido del que partimos, al haber modificado la pregunta).

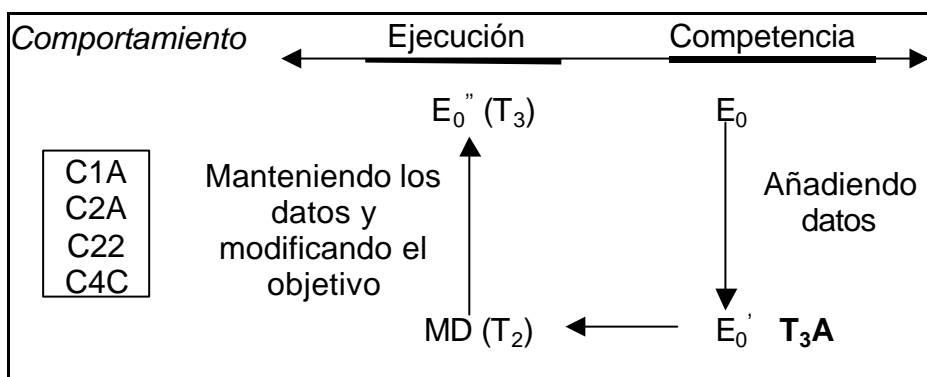
El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

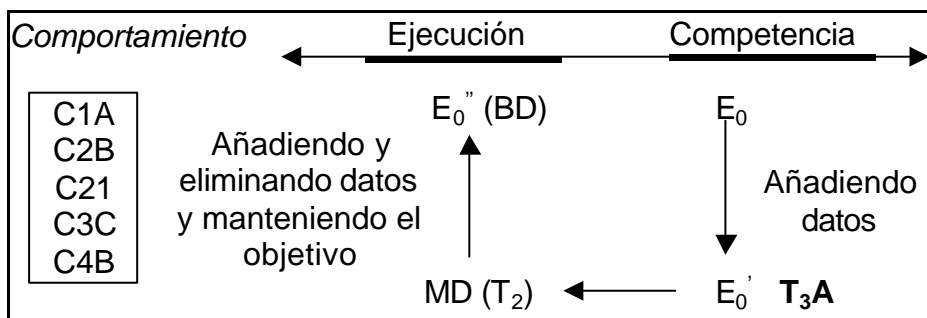
Resolutor de nivel académico alto:



Resolutor de nivel académico medio:



Resolutor de nivel académico bajo:



PROBLEMA 15

Durante la lectura del problema, el resolutor de nivel académico alto no anota las condiciones y tras terminar la lectura, da su opinión del problema, en cambio los resolutores de niveles académicos medio y bajo, tras la lectura, anotan las condiciones del problema y luego dan su opinión del mismo.

En el episodio de análisis-exploración, buscan una relación entre las

condiciones del problema y el objetivo del mismo, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

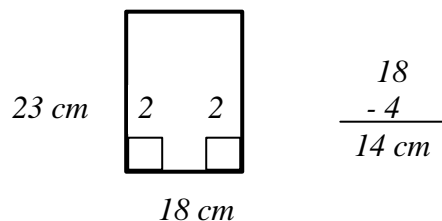
En el episodio de actuación, identifican explícitamente el problema, como mal definido [C1A], y lo transforman en uno bien definido [C4B], eliminando datos y manteniendo el objetivo [C21-C3B].

Alumna de nivel académico alto:

A. Lee el problema en voz alta y comenta... *El dato de las 5 láminas sobra, pues no te preguntan la superficie de 5 láminas, sino de cada lámina. El resto es correcto pues simplemente se trata de quitar 2 cm a cada lado, 18-4 y 23-4, y luego hallar la superficie, que es largo por ancho.*

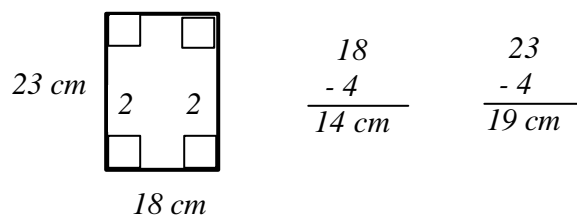
Alumna de nivel académico medio:

A. Pasa a la pizarra, escribe y comenta... *¿Hay que dejar también, margen por arriba?*



E. Claro.

A. Pues entonces sería.. Pasa a la pizarra, escribe y comenta...



Sumamos 14 y 19... Se queda mirando a la pizarra y comenta... ¿la superficie es el área?

E. ¿Tú qué crees?

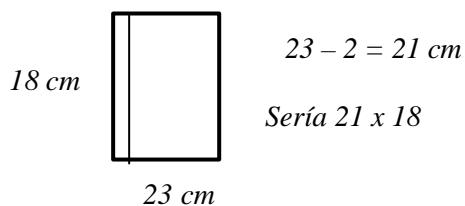
A. Que sí, ¿no? Entonces no es sumando, sino multiplicando 14 por 19, lo que daría la superficie destinada a escribir.

E. ¿Tienes algo que decir de este problema?

A. Sí, que el dato de las 5 láminas hay que quitarlo, porque no pregunta la superficie de las 5 hojas sino de una hoja.

Alumna de nivel académico bajo:

A. Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra



E. Entonces, ¿este problema está bien planteado?

A. Bueno, quitando lo de las 5 láminas, pues no te piden sino la superficie de una.

De esta manera, los tres resolutores refutan el problema con recursos de prueba como el razonamiento analítico, ya que relacionan las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas por ellos, situándose en el campo de la demostración matemática.

La actuación de las alumnas es directa tras la lectura, sin pasar por un período de verificación-transición, es decir, no revisan su actuación.

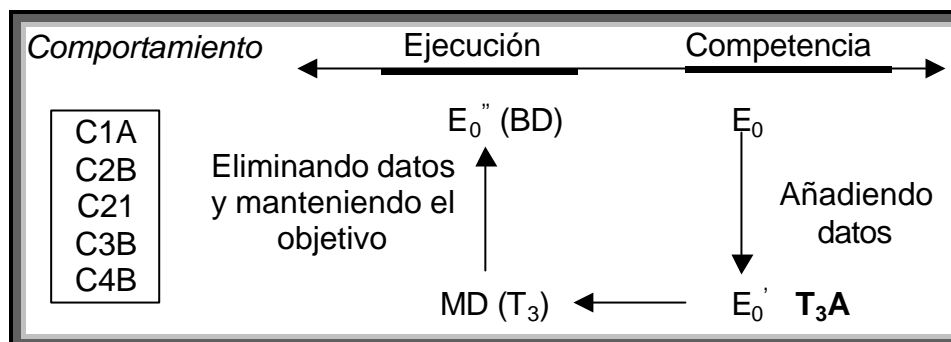
Resumen de los comportamientos de los tres resolutores, en el problema 15.

a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema con recursos de prueba como el razonamiento analítico.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento de los resolutores estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están

dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido.



Se trata de un comportamiento invariante desarrollado por los tres resolutores.

5.2.3 Discusión y consideraciones

La discusión y consideraciones se presentará, igualmente, con relación a los comportamientos regulares e invariantes y con las justificaciones dadas por los tres resolutores.

CON RELACIÓN A LOS COMPORTAMIENTOS REGULARES E INVARIANTES.

- Con respecto a la categoría de análisis (1), observamos que:
 - a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos (problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21), el resolutor de nivel académico alto presenta un comportamiento invariante: identificarlos como bien definidos [C1B], en cambio, los resolutores de niveles académicos medio y bajo presentan comportamientos regulares: El resolutor de nivel académico medio presenta un comportamiento regular: identificarlos como bien definidos [C1B], en cambio, el resolutor de nivel académico bajo, presenta dos comportamientos regulares: identificarlos como bien definidos [C1B] y identificarlos como mal definidos [C1A].

El comportamiento: No saber identificarlos [C1C], se observa en los

resolutores de niveles académicos alto y medio.

Si el análisis lo hacemos por el contexto, observamos que es en el contexto geométrico, donde los tres resolutores presentan, además del comportamiento: identificarlos como bien definido, los comportamientos: no saber identificarlos (niveles académicos alto y medio) e identificarlos como mal definidos (niveles académicos medio y bajo). En el contexto algebraico, los resolutores de niveles académicos medio y bajo presentan, además del comportamiento: identificarlos como bien definidos, los comportamientos: identificarlos como mal definidos y no saber identificarlos. En el contexto aritmético, el resolutor de nivel académico bajo es el único que presenta el comportamiento de identificarlos como mal definidos, además del comportamiento de identificarlos como bien definidos.

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (problemas 1, 2, 3, 4, 5 y 6), los tres resolutores presentan un comportamiento invariante: identificarlos como mal definidos [C1A] tipo T_2 . Sin embargo, observamos como el resolutor de nivel académico medio, en un problema de contexto geométrico, presenta los comportamientos: identificarlo como bien definido [C1B] en el espacio semiótico inicial y no saber identificarlo [C1C] en el espacio semiótico final, y el resolutor de nivel académico bajo, en un problema de contexto algebraico presenta el comportamiento: identificarlo como bien definido [C1B].

c) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16), los tres resolutores presentan el comportamiento invariante: identificarlo explícitamente como mal definido [C1A], de manera que mientras los resolutores de niveles académicos alto y medio tienden a identificarlos como mal definidos tipo T_3 , el resolutor de nivel académico bajo los

identifica como mal definidos tipo T_3 y tipo T_2 .

Con respecto al comportamiento: identificarlo explícitamente como bien definido e implícitamente como mal definido [C1B-C1A], que aparece en los tres resolutores, observamos que el resolutor de nivel académico bajo identifica todos los datos como necesarios para obtener el resultado pedido, sin embargo, los resolutores de niveles académicos alto y medio, en el único problema donde presentan este comportamiento (problema 13), observan que el dato no es necesario para obtener el resultado pedido, pero no lo identifican como tal, pues argumentan que en la vida cotidiana, la situación que plantea el problema es real y, que dicho dato no sobra.

Con relación a esta categoría, se detecta la influencia del contexto, en la identificación correcta de los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos. La mayor dificultad se presenta en los problemas de contexto algebraico y geométrico, principalmente en los resolutores de niveles académicos medio y bajo, al tratar de identificarlos correctamente.

- Con respecto a la categoría de análisis (2), observamos que:
 - a) Con relación a si las acciones están dirigidas por los datos o por el objetivo, el comportamiento regular observado en estos resolutores es: acciones dirigidas por el objetivo [C2B]. Con respecto al comportamiento acciones dirigidas por los datos [C2A], presente en los tres resolutores, queremos destacar que es observado principalmente en el contexto geométrico, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos; en los contextos aritmético y geométrico, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , y en los contextos aritmético y algebraico, en los problemas de encontrar caracterizados desde la

competencia como mal definidos tipo T_3 .

b) Con relación a: qué modifican al replantear el problema dado, observamos:

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, estas categorías no se observan en el resolutor de nivel académico alto, pues identifica todos los problemas presentados como bien definidos y por lo tanto no replantea ninguno. En el resolutor de nivel académico medio, observamos un comportamiento invariante: modificar los datos y el objetivo [C23] y en el resolutor de nivel académico bajo, observamos el comportamiento invariante: modificar los datos y mantener el objetivo [C21].

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , aunque el comportamiento regular presente en los tres resolutores es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21], observamos que, los resolutores de niveles académicos alto y medio presentan, además, los comportamientos: modificar el objetivo y mantener los datos [C22] y modificar los datos y el objetivo [C23], en cambio el resolutor de nivel académico bajo no presenta el comportamiento: modificar los datos y el objetivo [C23].

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , el resolutor de nivel académico alto presenta los comportamientos: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] y modificar los datos y el objetivo [C23]; el resolutor de nivel académico medio presenta los comportamientos: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] y modificar el objetivo y mantener los datos [C22]; el resolutor de nivel académico bajo presenta un único comportamiento: modificar los datos y el objetivo [C23].

Es decir, que el comportamiento: modificar los datos y mantener el

objetivo [C21] es el comportamiento regular observado en los resolutores de niveles académicos alto y medio, y el comportamiento invariante en el resolutor de nivel académico bajo.

Nuevamente, la influencia del contexto influye en estos resolutores, , de manera que en los problemas de contextos aritmético y geométrico es donde con mayor frecuencia las acciones de los mismos están dirigidas por los datos, pasando el objetivo del problema a un segundo lugar. Se observa sin embargo, que en estos casos, al replantear el problema no siempre modifican el objetivo sino que modifican sólo los datos o bien los datos y el objetivo. En cambio, cuando las acciones están dirigidas por el objetivo, al replantear el problema modifican los datos y en menor medida los datos y el objetivo, no observando situaciones donde modifiquen únicamente el objetivo.

- Con respecto a la categoría de análisis (3), observamos que:

Cuando replantean un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido (situación que se da en los resolutores de niveles académicos medio y bajo), el resolutor de nivel académico medio presenta un comportamiento invariante: añadir datos [C3A], y el resolutor de nivel académico bajo presenta los tres comportamientos de esta categoría: añadir datos [C3A], eliminar datos [C3B] y añadir y eliminar datos [C3C].

Cuando replantean un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como mal definido (situación que se da en los tres resolutores), observamos que si el problema es del tipo T_2 , los comportamientos de los resolutores de niveles académicos alto y medio son: añadir datos [C3A] y añadir y eliminar datos [C3C], y los comportamientos del resolutor de nivel académico bajo son: añadir datos [C3A] y eliminar datos [C3B].

En cambio, si el problema es del tipo T_3 , los comportamientos de los resolutores de niveles académicos alto y medio son: eliminar datos [C3B] y añadir y eliminar datos [C3C], y el resolutor de nivel académico bajo presenta los tres comportamientos de esta categoría: añadir datos [C3A], eliminar datos [C3B] y añadir y eliminar datos [C3C].

- Con respecto a la categoría de análisis (4), observamos que:

Los problemas presentados, caracterizados desde la competencia como bien o mal definidos, son transformados en un problema bien definido [C1B] o en un problema mal definido tipo T_3 [C1C], no observando ninguna situación donde el problema es transformado en mal definido tipo T_2 [C1A].

El comportamiento: identificar el problema planteado como mal definido pero no saber replantearlo, se da únicamente en el resolutor de nivel académico bajo en un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_3 , de contexto geométrico.

El análisis de las categorías 3 y 4 nos muestra que no siempre, el hecho de añadir datos cuando un problema es caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_2 , o eliminar datos cuando es mal definido tipo T_3 , significa que estos resolutores hayan establecido relaciones correctas entre los datos y el objetivo, ya que, el resultado de estas acciones les conduce, observada en los tres niveles académicos, a obtener un problema mal definido porque sobren datos.

- Con respecto a los comportamientos regulares e invariantes, obtenidos del análisis conjunto de las cuatro categorías de análisis, observamos:

a) Analizando cada problema en particular, encontramos comportamientos invariantes (cuando los tres resolutores presentan la misma secuencia de comportamientos) en los tres tipos de problemas analizados: bien

definidos (en un 50% de los problemas presentados, de los tres contextos), mal definidos tipo T_2 (en un 17% de los problemas presentados, de contexto aritmético) y mal definidos tipo T_3 (en un 33% de los problemas presentados, de contextos aritmético y geométrico).

En cuanto a los comportamientos regulares (cuando dos de los resolutores presentan la misma secuencia de comportamientos), observamos que se presentan entre los resolutores de niveles académicos alto y medio en los tres tipos de problemas y en los tres contextos, observando sólo un comportamiento regular entre los resolutores de niveles académicos alto y bajo, y otro entre los resolutores de niveles académicos medio y bajo.

De manera detallada exponemos a continuación, lo descrito:

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, observamos un comportamiento invariante en los problemas 16, 17 y 21, determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido—sus acciones están dirigidas por el objetivo. En cuanto a la presencia de comportamientos regulares, observamos uno en el problema 19 (resolutores de niveles académicos alto y medio) determinado por la secuencia [C1B-C2B].

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , observamos un comportamiento invariante en el problema 1 de contexto aritmético, determinado por la secuencia [C1A-C2A-C22-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, mantienen los datos y modifican el objetivo y transforman el problema en uno bien definido. En cuanto a la presencia de comportamientos regulares, éstos se observan en los problemas 2, 4 y 5 (resolutores de niveles académicos alto y

medio), en el problema 3 (resolutores de niveles académicos alto y bajo) y en el problema 6 (resolutores de niveles académicos medio y bajo).

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , observamos comportamientos invariantes en los problemas 7 y 13, de contexto aritmético, y en el problema 15, de contexto geométrico. El comportamiento de los problemas 7 y 15 quedaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y transforman el problema en uno bien definido. El comportamiento del problema 13 quedaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo. En cuanto a la presencia de comportamientos regulares, éstos se observan, en los problemas 8 y 12 (resolutores de niveles académicos alto y medio).

De esta manera, analizando problema a problema, observamos la existencia de comportamientos invariantes en un problema caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_2 de contexto aritmético, en tres problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , de contexto aritmético y geométrico y en tres problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos, de contexto aritmético, algebraico y geométrico, como se refleja en la siguiente tabla:.

Comportamientos INVARIANTES			
(Problema a problema)			
	Bien definido	Mal definido T_2	Mal definido T_3
Aritmético	X	X	X
Algebraico	X	--	--
Geométrico	X	--	X

Tabla 5.4

b) Analizando cada resolutor en particular.

El resolutor de nivel académico alto presenta un único comportamiento invariante, y es en los problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos (en el 83% de los problemas presentados), determinado por la secuencia [C1B-C2B]. En cuanto a la presencia de comportamientos regulares, observamos dos comportamientos regulares en los problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (en un 33% de los problemas presentados, cada uno), determinados por las secuencias: [C1A-C2A-C22-C4B] y [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], y un comportamiento regular en los problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (en un 33% de los problemas presentados), determinado por la secuencia: [C1A-C2B-C21-C3B-C4B].

El resolutor de nivel académico medio no presenta ningún comportamiento invariante. En cuanto a la presencia de comportamientos regulares, observamos dos comportamientos regulares, uno en los problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos (en un 67% de los problemas presentados), determinado por la secuencia: [C1B-C2B], y uno en los problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (en un 33% de los problemas presentados), determinado por la secuencia: [C1A-C2B-C21-C3C-C4B].

El resolutor de nivel académico bajo no presenta ningún comportamiento invariante. En cuanto a la presencia de comportamientos regulares, observamos tres comportamientos regulares, uno en los problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos (en un 50% de los problemas presentados), determinado por la secuencia: [C1B-C2B], uno en los problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (en un 50% de los problemas presentados),

determinado por la secuencia: [C1A-C2B-C21-C3A-C4B] y uno en los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T₃, (en un 33% de los problemas presentados), determinado por la secuencia: [C1A-C2B-C21-C3B-C4B].

Es decir, que sólo se observa un comportamiento invariante en el resolutor de nivel académico alto, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos. En cuanto a los comportamientos regulares, éstos se observan en los tres resolutores, excepto en el de nivel académico medio en los mal definido T₃, como se recoge en la siguiente tabla:

COMPORTAMIENTOS REGULARES e INVARIANTES				
Tipo	Comportamiento	Nivel académico alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
BD	Invariante	[C1B-C2B] (82%)	--	--
	Regular	--	[C1B-C2B] (67%)	[C1B-C2B] (50%)
MD T ₂	Invariante	--	--	--
	Regular	[C1A-C2A-C22-C4B] (33%)	[C1A-C2B-C21-C3C-C4B] (33%)	[C1A-C2B-C21-C3A-C4B] (33%)
		[C1A-C2B-C21-C3C-C4B] (33%)		
MD T ₃	Invariante	--	--	--
	Regular	[C1A-C2B-C21-C3B-C4B] (33%)	--	[C1A-C2B-C21-C3B-C4B] (33%)

Tabla 5.5

El análisis de los comportamientos regulares e invariantes pone de manifiesto que:

1. La presencia de problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos no parece generar confusión en la actuación de estos resolutores ante los bien definidos, como se deduce de la existencia del comportamiento “identificarlos como bien definidos” [C1B] presente en un 82% de los problemas presentados en el resolutor

de nivel académico alto, un 67% en el de nivel académico medio y un 50% en el de nivel académico bajo.

2. La significatividad de los problemas presentados, que a pesar de ser de un nivel conceptual inferior al que corresponde a los resolutores estudiados, se observa una presencia muy baja de comportamientos regulares que muestran el establecimiento de relaciones correctas entre los datos y el objetivo.

3. Los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 son los que presentan en estos resolutores mayor dificultad en el establecimiento de relaciones correctas entre los datos y el objetivo.

- Respecto a los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas 7, 9, 10, 11 y 12), donde la solución está incluida en los datos dados, observamos que el comportamiento del resolutor de nivel académico alto es: *identificar la solución como tal y eliminarla en su replanteamiento*, en cambio los resolutores de niveles académicos medio y bajo presentan, además de éste, otros comportamientos. De esta manera, el resolutor de nivel académico medio, en problemas de contexto geométrico, presenta el comportamiento: *identificar la solución como tal y eliminarla en su replanteamiento*, en cambio en problemas de contextos aritmético y algebraico, su comportamiento es: *interpretar la solución como un dato necesario, manteniéndola en su replanteamiento*. El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo, cuando el problema presentado es de contexto geométrico, es: *no identificar la solución como tal, sino como un dato más del problema, necesario para lograr el objetivo*.

Es decir, que mientras el resolutor de nivel académico alto no tiene ninguna dificultad en identificar la solución como tal, los resolutores de niveles académicos medio y bajo presentan dificultad para interpretarla de

forma correcta, de manera que la interpretan como un dato más del enunciado, necesario para la obtención del objetivo.

- Respecto a los problemas bien definidos impropios, observamos como los resolutores de niveles académicos alto y medio, no tienen dificultad en identificar los datos redundantes y no ven la necesidad de eliminarlos, en cambio, el resolutor de nivel académico bajo, en el contexto geométrico, tiene dificultad en identificar los datos redundantes como tales.

Sin embargo, los resolutores de niveles académicos alto y medio, que no tienen dificultad para interpretar los datos de forma correcta, en el contexto geométrico establecen relaciones falsas entre los datos y el objetivo al igual que el resolutor de nivel académico bajo.

También conviene considerar, que el hecho de que un resolutor identifique de forma correcta un problema bien definido impropio, tampoco significa que haya establecido relaciones correctas entre los datos y el objetivo, ya que se dan situaciones donde los datos redundantes son identificados como datos necesarios y el problema es identificado por ellos de forma correcta como bien definido. Esta situación es importante tenerla en cuenta al analizar toda la fase de la resolución de problemas, ya que el que una actuación sea correcta en la fase de preparación no indica una actuación correcta en la resolución del problema

- En relación a la fase de verificación-transición, de nuestro Esquema de Análisis (capítulo 2, apartado 2.3.2), observamos que el resolutor de nivel académico alto, en todos los problemas presentados, presenta un único comportamiento general en cada uno de ellos, es decir, su actuación se desarrolla siempre, en un único espacio semiótico, de manera que no pasa por períodos de verificación y cambio de plan de actuación, en cambio los resolutores de niveles académicos medio y bajo presentan situaciones donde su actuación se desarrolla en diferentes espacios semióticos, es decir, que pasan por períodos de verificación y cambio de

plan de actuación. Esta situación la observamos en problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien definidos y mal definidos tipo T_2 , y en contextos algebraico y geométrico.

Observamos que en los problemas donde sobran datos (caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3), los resolutores no pasan por períodos de verificación-transición.

Si observamos que es ante los problemas donde sobran datos (caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3), donde los resolutores no pasan por períodos de verificación-transición y, sin embargo, como hemos comentado anteriormente, son los problemas T_3 , los que presentan en estos resolutores mayor dificultad en el establecimiento de relaciones correctas entre los datos y el objetivo.

Además, se observa que el desarrollo de múltiples espacios semióticos es más frecuente en los resolutores de niveles académicos medio y bajo, y que éstos se dan en los problemas de encontrar de contextos algebraico y geométrico.

Los diferentes espacios semióticos que presentan los resolutores de niveles académicos medio y bajo, muestran las dificultades de estos alumnos ante los problemas planteados y manifiestan su inseguridad, y por ello cambian en general de plan de actuación.

CON RELACIÓN A LAS JUSTIFICACIONES UTILIZADAS:

a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, observamos que mientras el comportamiento en el resolutor de nivel académico alto es validarlos con recursos de prueba como el razonamiento analítico, en los resolutores de niveles académicos medio y bajo se dan los comportamientos de validarlos y de refutarlos, siendo en el resolutor de nivel académico bajo, donde el comportamiento de refutarlos es más frecuente. El comportamiento de no saber validar ni

refutar los problemas presentados se observa en los resolutores de niveles académicos alto y bajo en los contextos algebraico y geométrico. Los recursos utilizados por estos resolutores son los siguientes: el resolutor de nivel académico alto utiliza únicamente un recurso de prueba como el razonamiento analítico; el de nivel académico medio utiliza recursos de prueba como el razonamiento analítico y la contradicción; y, en el resolutor de nivel académico bajo, utiliza recursos de prueba como el razonamiento analítico, el razonamiento empírico (P2) y el ritual y un recurso de argumentación como el ridículo.

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , observamos que el comportamiento del resolutor de nivel académico alto es refutarlos con recursos de prueba como el contraejemplo, el razonamiento analítico y el razonamiento empírico (P2) y, en algunos casos, se observa la utilización de recursos de argumentación como el ridículo. En los resolutores de niveles académicos medio y bajo, aunque el comportamiento más frecuente es refutarlos se observa el comportamiento de validarlos. Los recursos utilizados por estos dos resolutores son: de prueba como el razonamiento analítico, el razonamiento empírico (P2), el contraejemplo y la contradicción, y recursos de argumentación como el ridículo y la descripción.

c) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , aunque el comportamiento general es refutarlos con recursos de prueba, observamos, en los tres resolutores, problemas que son validados con recursos de prueba (el de nivel académico bajo) y recursos de prueba y argumentación (los resolutores de niveles académicos alto y bajo). Los recursos de prueba observados son: el razonamiento analítico, el razonamiento empírico (P1 y P2), el contraejemplo y el ritual, y los recursos de argumentación son: el ridículo,

la comparación o analogía y la descripción. Sin embargo, observamos que el resolutor de nivel académico alto no utiliza el razonamiento empírico P1 ni la comparación, el de nivel académico medio no utiliza la comparación y el de nivel académico bajo no utiliza la descripción.

De todo lo observado respecto a las justificaciones utilizadas por los tres resolutores estudiados, al enfrentarse con la tarea de resolver problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos, señalamos que:

1. La utilización de recursos de prueba predomina sobre los recursos de argumentación, tanto para validar como para refutar el problema presentado.

2. Los recursos de argumentación no suelen ser utilizados como único recurso.

3. Aparecen nuevos recursos de prueba y argumentación:

a) Con respecto a los recursos de prueba, observamos situaciones donde la justificación está en función de relaciones matemáticas observadas por el resolutor y de comportamientos matemáticos en los procedimientos seguidos: recurren a experiencias cuantificables como el hecho de relacionar cantidades homogéneas que hemos denominado razonamiento empírico P1, o recurren a experiencias cuantificables para relacionar conceptos que hemos denominado razonamiento empírico P2.

En otras ocasiones, las justificaciones se hacen recurriendo a concepciones establecidas culturalmente, haciendo referencia a creencias, actitudes, etc., sobre las matemáticas más que a verdaderos procesos de inferencia matemática, como cuando se apoyan en procesos impuestos por la costumbre, que hemos denominado ritual.

b) Con respecto a las argumentaciones, observamos también la utilización de diferentes recursos, de manera que en unos casos, justifican su actuación recurriendo a la explicación verbal para explicar las características de la situación que hemos denominado descripción.

4. Observamos la utilización de recursos de prueba utilizados únicamente para refutar, como el contraejemplo, la comparación, la contradicción, el razonamiento empírico P1, y el ritual, no observando recursos específicos para validar.

De forma resumida y con relación a los cinco grupos de comportamientos ya descritos en la fase III del estudio piloto (capítulo 4, apartado 4.4.3), relativos a las categorías de análisis: cómo identifican el problema presentado (categoría de análisis 1), si actúan o no sobre las condiciones y/o el objetivo es decir, si replantean o no el problema presentado (categorías de análisis 2, 3 y 4) y cómo justifican su actuación, en términos de validar o refutar, observamos que:

a) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien definidos, observamos que el resolutor de nivel académico alto valida siempre³ el problema presentado, interpretándolo explícitamente como bien definido y no lo transforma ni explícita ni implícitamente (comportamiento C), en cambio, en los resolutores de niveles académicos medio y bajo observamos actuaciones donde validan el problema presentado, interpretándolo explícitamente como bien definido y no lo transforman ni explícita ni implícitamente (comportamiento C) y, actuaciones donde refutan el problema presentado de manera que lo identifican explícitamente como mal definido y lo transforman explícitamente en un problema bien o mal definido (comportamiento B).

³ El problema 18, de contexto geométrico, no sabe identificarlo.

Esta última actuación descrita, se observa en el resolutor de nivel académico medio en problemas de contexto geométrico y algebraico y, en el resolutor de nivel académico bajo en problemas de los tres contextos estudiados. Además, observamos, en los resolutores de niveles académicos alto y medio actuaciones donde ni validan ni refutan el problema presentado (comportamiento E), en problemas de contextos geométrico y algebraico, no observando esta actuación en el resolutor de nivel académico bajo. Es decir, que es en el contexto geométrico, donde los tres resolutores presentan una mayor dificultad para identificar estos problemas de forma correcta.

b) En problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 y T_3 , observamos que, la actuación del resolutor de nivel académico alto es refutar los problemas presentados⁴, interpretándolos explícitamente como mal definidos y transformándolos explícitamente en un problema bien o mal definido (comportamiento B), en cambio, en los resolutores de niveles académicos medio y bajo, observamos actuaciones donde refutan el problema presentado, de manera que lo identifican explícitamente como mal definido y lo transforman explícitamente en un problema bien o mal definido (comportamiento B) y, actuaciones donde validan el problema presentado interpretándolo explícitamente como bien definido y no lo transforman ni explícita ni implícitamente (comportamiento C).

Esta última actuación descrita, se observa en el resolutor de nivel académico medio en problemas de contextos aritmético y geométrico y, en el resolutor de nivel académico bajo en problemas de los tres contextos estudiados. Además, observamos en el resolutor de nivel académico medio la actuación de no validar ni refutar el problema por no

⁴ El problema 13 de contexto aritmético, es validado, identificándolo como bien definido y por lo tanto no lo transforma.

saber identificarlo (comportamiento E) en un problema de encontrar mal definido del tipo T_2 de contexto geométrico.

En la siguiente tabla se muestra en qué grupo de comportamiento se engloban las actuaciones de los resolutores, en los problemas de encontrar bien y mal definidos, a lo largo de los diferentes espacios semióticos que presentan en cada uno de los problemas:

Tipo	Problemas	Nivel académico alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
T_2	1	B	B	B
	2	B	B	C
	3	B	C y E	B
	4	B	B	B
	5	B	B	B
	6	B	B	B
T_3	7	B	B	B
	8	B	B	B
	9	B	B	A
	10	B	B	B
	11	B	B	B
	12	B	B	C
	13	C	C	C
	14	B	B	B
	15	B	B	B
BD	16	C	C	C
	17	C	C	C
	18	E	B y E	B
	19	C	C	B
	20	C	B y E	B
	21	C	C	C

Tabla 5.6

Observamos que los resolutores de niveles académicos alto y medio, presentan el comportamiento E en problemas de contexto geométrico y algebraico, no observando este comportamiento en el resolutor de nivel académico bajo. El comportamiento D no lo observamos en ninguno de estos resolutores.

Por lo tanto actúan de forma incorrecta (presentan el comportamiento C o E cuando es un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como mal definido, o presentan el comportamiento A, B, D o

E cuando es un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido), los resolutores de niveles académicos medio y bajo, en los tres tipos de problemas y en los tres contextos estudiados, y el resolutor de nivel académico alto, en un problema T_3 y en uno bien definido, de contextos aritmético y geométrico, respectivamente.

CAPÍTULO 6

ESTUDIO DEFINITIVO: ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

- **INTRODUCCIÓN**

- **ESTUDIOS DEFINITIVOS CON ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA**
 - **PRUEBA VIDEOGRABADA**
 - RESULTADOS GLOBALES**
 - ANÁLISIS DE DATOS**
 - DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES**

 - **PRUEBA ESCRITA**
 - RESULTADOS GLOBALES**
 - ANÁLISIS DE DATOS**
 - DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES**

6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos los datos obtenidos en los estudios definitivos con los alumnos del Primer Ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, tanto de la prueba videograbada como de la prueba escrita.

6.2 ESTUDIOS DEFINITIVOS CON ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

Durante el curso 1997-98, realizamos el segundo de los estudios definitivos de la investigación, con dos grupos de alumnos de segundo curso de la ESO. Un grupo estaba formado por 20 alumnos, pertenecientes al colegio público Isabel la Católica, de Santa Cruz de Tenerife. El otro grupo estaba formado por 3 alumnos, pertenecientes al Instituto de Enseñanza Secundaria El Chapatal, de Santa Cruz de Tenerife. Estos alumnos tienen edades comprendidas entre 13 y 14 años, y fueron seleccionados por su expediente académico en Matemáticas (alto, medio y bajo) y la opinión de sus respectivos profesores en dicha materia (ver apartado 3.2.2. del capítulo 3).

A los dos grupos de alumnos se les pasó una colección de 21 problemas de encontrar, bien y mal definidos, en los contextos aritmético, algebraico y geométrico (Anexo 1, cuestionario definitivo), como ya hemos señalado en el apartado 3.2.2 del capítulo 3.

Al grupo de 20 alumnos, se les pasó el cuestionario de forma individual y por escrito y al grupo de tres alumnos, a través de entrevistas individuales videograbadas (ver apartado 3.2.2. del capítulo 3).

El objetivo de este estudio era confirmar lo observado en el estudio piloto, con respecto a 1) la existencia o no de comportamientos regulares, en las actuaciones de los resolutores en la fase de "preparación" y 2) observar las justificaciones utilizadas por los resolutores en sus actuaciones, en términos de validación y refutación, especialmente con el

grupo al que se le realizó entrevistas individuales videograbadas.

Se utilizó el mismo Sistema de categorías derivado del Modelo de Competencia Formal y el Esquema de análisis, al igual que en las fases del estudio piloto, así como las categorías de análisis de las justificaciones obtenidas de la fase III del estudio piloto y descritas en el capítulo 2 (apartado 2.3.3).

6.2.1 Prueba videograbada.

6.2.1.1 Resultados globales (Anexo 4, tablas [23-28])

Presentamos en este apartado, los resultados globales, de los diferentes comportamientos de los tres resolutores de la ESO, en los diferentes problemas pasados en esta prueba (Anexo 4, tablas: [23-28]), con relación a los comportamientos regulares e invariantes y a las justificaciones.

CON RELACIÓN A LOS COMPORTAMIENTOS REGULARES E INVARIANTES.

- Respecto a la categoría de análisis (1), observamos que:

a) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien definidos (problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21), observamos diferencias según el contexto del problema presentado y el nivel académico de los resolutores.

El comportamiento más frecuente en los resolutores de niveles académicos alto y medio es: identificarlos explícitamente como bien definidos [C1B] (cinco problemas de los seis presentados¹), en cambio, el resolutor de nivel académico bajo presenta los siguientes comportamientos: identificarlos explícitamente como bien definidos [C1B]

¹ En el problema 20, de contexto algebraico, el resolutor de nivel académico alto presenta el comportamiento: no saber identificarlo [C1C], y el resolutor de nivel académico medio, presenta el comportamiento: identificarlo como mal definido [C1A].

(los problemas 17 y 19), identificarlos explícitamente como mal definidos [C1A] (el problema 16), identificarlos explícitamente como bien definidos e implícitamente como mal definidos [C1B-C1A] (problemas 20 y 21), y no saber identificarlo (problema 18).

b) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos (problemas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15), observamos también diferencias según el contexto del problema presentado, la tipología y el nivel académico de los resolutores.

El comportamiento más frecuente del resolutor de nivel académico alto es: identificarlos como mal definidos [C1A], excepto los problemas 8 y 12 de contextos algebraico y geométrico, respectivamente, que son identificados explícitamente como bien definido e implícitamente como mal definidos, y el problema 2 de contexto algebraico que es identificado como bien definido en el espacio semiótico inicial y como mal definido en el espacio semiótico final.

El comportamiento más frecuente en el resolutor de nivel académico medio, es: identificarlos como mal definidos [C1A], (nueve problemas de los quince presentados), sin embargo observamos, que en problemas de contexto geométrico, es donde tiene mayor dificultad para identificarlos de forma correcta, presentando los siguientes comportamientos: no saber identificarlo [C1C], en los problemas 3 y 9; identificarlos explícitamente como bien definido y de manera implícita como mal definido [C1B-C1A] en los problemas 7 y 15 e identificarlos en el espacio semiótico inicial como bien definido [C1B] y en el espacio semiótico final como mal definido [C1A] en el problema 6.

El comportamiento más frecuente en el resolutor de nivel académico bajo, es: identificarlos como mal definidos [C1A], (nueve problemas de los 15 presentados), sin embargo observamos, que en problemas de contexto

geométrico y algebraico, es donde tiene mayor dificultad para identificar los problemas de forma correcta, presentando los siguientes comportamientos: no saber identificarlo [C1C], en el problema 14; identificarlos explícitamente como bien definido y de manera implícita identificarlo como mal definido [C1B-C1A] en los problemas 2 y 15, e identificarlo en el espacio semiótico inicial como bien definido [C1B] y en el espacio semiótico final como mal definido [C1A] en el problema 3.

c) El comportamiento: no saber identificarlos [C1C], lo observamos en los tres resolutores, de manera que el resolutor de nivel académico alto presenta este comportamiento en un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido de contexto algebraico (problema 20), el resolutor de nivel académico medio, en dos problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definido tipo T_2 y T_3 , de contexto geométrico (problemas 3 y 9) y el resolutor de nivel académico bajo, en un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_3 de contexto algebraico (problema 14) y en uno caracterizado desde la competencia como bien definido de contexto geométrico (problema 18).

- Respecto a la categoría de análisis (2), encontramos que:

a) Con relación a: “si las acciones están dirigidas por los datos o por el objetivo”, el comportamiento observado en los tres resolutores estudiados, cuando se encuentran ante problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos es: acciones dirigidas por el objetivo [C2B]. En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , observamos diferencias según el nivel académico de los resolutores, de manera que, el resolutor de nivel académico alto, el único comportamiento que presenta es: acciones dirigidas por el objetivo [C2B]; el resolutor de nivel académico medio,

tiene como comportamiento más frecuente: acciones dirigidas por el objetivo [C2B], presenta, en los problemas de contexto geométrico, el comportamiento: acciones dirigidas por los datos [C2A]; el resolutor de nivel académico bajo presenta en igual medida, e independientemente del contexto, los comportamientos: acciones dirigidas por el objetivo [C2B] y acciones dirigidas por los datos [C2A].

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , observamos diferencias según el nivel académico de los resolutores, de manera que, el resolutor de nivel académico alto, el comportamiento más frecuente que presenta es: acciones dirigidas por el objetivo [C2B], en cambio, los resolutores de niveles académicos medio y bajo presentan los comportamientos: acciones dirigidas por los datos [C2A] y acciones dirigidas por el objetivo [C2B].

b) Con relación a: “qué modifican, cuando replantean el problema presentado”, observamos también, diferencias según la tipología del problema presentado y el nivel académico de los resolutores.

En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien definidos, esta situación no se da, en el resolutor de nivel académico alto, ya que no replantea ninguno de ellos. El comportamiento que presentan los resolutores de niveles académicos medio y bajo es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21].

En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos, observamos que aunque el comportamiento más habitual en los tres resolutores es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21], también presentan los comportamientos: modificar el objetivo y mantener los datos [C22] (problemas 10 y 15 el resolutor de nivel académico medio y problemas 2 y 15 el resolutor de nivel académico

bajo), y modificar los datos y el objetivo [C23] (problema 11 el resolutor de nivel académico alto; problema 2 el resolutor de nivel académico medio; problemas 2 y 5 el resolutor de nivel académico bajo).

- Respecto a la categoría de análisis (3), encontramos nuevamente diferencias según la tipología del problema presentado y el nivel académico de los resolutores.

a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, esta categoría no aparece en el resolutor de nivel académico alto, ya que no replantea ninguno de ellos. El comportamiento que presenta el resolutor de nivel académico medio en el único problema que replantea (problema 20 de contexto algebraico) es: transformarlo añadiendo datos [C3A] y el resolutor de nivel académico bajo: transformarlo eliminando datos [C3B] (problemas 16, 20 y 21, de contextos aritmético, algebraico y geométrico, respectivamente).

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , los comportamientos que presentan los tres resolutores son: transformarlos añadiendo datos [C3A] y eliminando y añadiendo datos [C3C].

c) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , aunque el comportamiento más frecuente en los tres resolutores es: transformarlos eliminando datos [C3B], observamos en ellos el comportamiento: eliminar y añadir datos [C3C] y en el resolutor de nivel académico bajo, además de los mencionados, el comportamiento: añadir datos [C3A], en el contexto geométrico.

- Respecto a la categoría de análisis (4), encontramos diferencias según la tipología del problema presentado y el nivel académico de los resolutores.

a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, esta categoría no aparece en el resolutor de nivel académico alto, ya que no replantea ninguno de ellos. El comportamiento que presenta el resolutor de nivel académico medio en el único problema que replantea (problema 20 de contexto algebraico), es: transformarlo en uno diferente mal definido tipo T_3 [C4C] y el resolutor de nivel académico bajo: transformarlo en mal definido tipo T_2 [C4A] (problemas 16, 20 y 21, de contextos aritmético, algebraico y geométrico, respectivamente).

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , el comportamiento más frecuente que presentan los tres resolutores es: transformarlos en un problema bien definido [C4B]. Sin embargo, en algunos casos, en los tres se observan los comportamientos de transformar el problema presentado en mal definido, así, el resolutor de nivel académico alto transforma el problema 4 en mal definido tipo T_3 ; el resolutor de nivel académico medio transforma los problemas 4 y 6 en mal definidos tipo T_3 , y el resolutor de nivel académico bajo, transforma el problema 2 en mal definido tipo T_2 .

c) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , aunque el comportamiento más frecuente en los tres resolutores es: transformarlos en un problema bien definido [C4B], observamos los comportamientos: transformarlo en mal definido tipo T_2 [C4A] y mal definido tipo T_3 [C4C] en los contextos algebraico y geométrico principalmente.

- Respecto a los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , donde la solución está incluida en los datos dados (problemas 7, 9, 10, 11 y 12), observamos diferencias según el nivel académico de los resolutores. El comportamiento del resolutor de nivel académico alto es: identificar la solución como tal y

eliminarla en su replanteamiento (problemas 7, 9 y 10) o modificar el objetivo para mantener el dato de la solución como un dato necesario (problema 11). Los comportamientos observados en el resolutor de nivel académico medio son: identificar la solución como tal y eliminarla en su replanteamiento (problemas 10 y 11), no identificar la solución como tal, sino como un dato innecesario y eliminarla (problema 7)². En el resolutor de nivel académico bajo observamos diferencias según el contexto, ya que en problemas de contexto aritmético (7 y 10) elimina la solución porque la interpreta como un dato innecesario (problema 7) o porque la identifica como tal (problema 10), en cambio en los problemas de contexto algebraico y geométrico (9 y 11), la interpreta como un dato necesario para alcanzar el objetivo pedido, y la utiliza en la búsqueda del objetivo.

- Respecto a los problemas bien definidos impropios (problemas 16, 17 y 18), el resolutor de nivel académico alto identifica siempre los datos redundantes como tales y no ve la necesidad de eliminarlos en su replanteamiento. El resolutor de nivel académico medio, en los problemas de contextos aritmético y algebraico (problemas 16 y 17), igualmente, identifica los datos redundantes como tales y no ve la necesidad de eliminarlos en su replanteamiento, en cambio, en el problema 18, de contexto geométrico, identifica los datos redundantes como datos necesarios para la obtención del objetivo. Mientras el resolutor de nivel académico bajo, en el problema 17 de contexto algebraico, identifica los datos redundantes como tales (porque el problema dice que es lo que hace el coche) y no ve la necesidad de eliminarlos, en los problemas 16 y 18, de contextos aritmético y geométrico, identifica los datos redundantes como datos necesarios para la obtención del objetivo.

- Con relación a la fase de verificación–transición, del Esquema de

² En el problema 9, no identifica la solución como tal, pero comenta que no sabe si el problema está mal definido o es que ella no sabe resolverlo.

Análisis, aunque el comportamiento más habitual en estos resolutores es presentar un único espacio semiótico, observamos pequeñas diferencias según el nivel académico de los resolutores y según la tipología y el contexto del problema presentado.

Los resolutores de niveles académicos alto y medio, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, presentan un único comportamiento general, es decir, su actuación se desarrolla en un único espacio semiótico, de manera que no pasan por períodos de verificación y cambio de plan de actuación; en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos, su actuación se desarrolla igualmente en un único espacio semiótico, de manera que no pasan por períodos de verificación y cambio de plan de actuación, excepto ante el problema 12 de contexto geométrico (resolutor de nivel académico alto) y el problema 6 de contexto geométrico (resolutor de nivel académico medio), en el cual presentan dos espacios semióticos. En cambio, el resolutor de nivel académico bajo, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos y como mal definidos, presenta situaciones donde su actuación se desarrolla en diferentes espacios semióticos, es decir, que pasa por períodos de verificación y cambio de plan de actuación. Esta situación la observamos en los contextos algebraico y geométrico (problemas 2, 3, 10, 12 y 18).

CON RELACIÓN A LAS JUSTIFICACIONES UTILIZADAS POR LOS RESOLUTORES:

a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos (problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21), observamos que el comportamiento más frecuente del resolutor de nivel académico alto es validarlos utilizando un razonamiento analítico (problemas 16, 17, 18, 19 y

21)³; En el resolutor de nivel académico medio observamos que, aunque su comportamiento más habitual es validarlos mediante el razonamiento analítico (problemas 16, 17, 19 y 21) o el razonamiento empírico (P2) (problema 18), se observa una situación (problema 20 de contexto algebraico) donde el problema es refutado con la utilización de un recurso de prueba como el contraejemplo. En el resolutor de nivel académico bajo observamos que aunque su comportamiento más habitual es validarlos mediante el razonamiento analítico (problemas 19 y 20), el ritual (problema 21) o con recursos que hacen referencia a creencias y actitudes hacia las matemáticas más que a verdaderos procesos de inferencia matemática, de manera que se apoya en una fuente que goza de credibilidad como puede ser la situación planteada en sí misma que denominaremos Creencias por autoridad de la tarea, se observa una situación donde refuta (problema 16), con un recurso de prueba como el razonamiento empírico (P1) y otra situación donde ni valida ni refuta (problema 18).

En la siguiente tabla (tabla 6.1), quedan reflejados los recursos utilizados en las justificaciones realizadas por los resolutores, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos:

Problemas bien definidos	Nivel académico alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
16	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Empírico (P1)
17	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba (Creencias)
18	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Empírico (P2)	Ni valida ni refuta

³ El problema 20 no sabe identificarlo y, por lo tanto, ni lo valida ni lo refuta.

Problemas bien definidos	Nivel académico alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
19	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico
20	Ni valida ni refuta	REFUTA Prueba: Contraejemplo	VALIDA Prueba: R. Analítico
21	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: (Ritual)

Tabla 6.1

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (problemas 1, 2, 3, 4, 5 y 6), aunque el comportamiento más habitual en los tres resolutores es refutar los problemas presentados, también se observa el comportamiento de validarlos: el resolutor de nivel académico alto en el espacio semiótico inicial en el problema 2, el de nivel académico medio en el espacio semiótico inicial en el problema 6, y el de nivel académico bajo en el espacio semiótico inicial en los problemas 2 y 3. El resolutor de nivel académico medio, el problema 3 de contexto geométrico, no sabe identificarlo y, por lo tanto, ni lo valida ni lo refuta. Los recursos de prueba utilizados por estos resolutores son los siguientes: el contraejemplo, el razonamiento analítico y el razonamiento empírico (P1 y P2), observando que el resolutor de nivel académico alto no utiliza el razonamiento empírico, y el de nivel medio no utiliza el razonamiento empírico (P1). Con respecto a los recursos de argumentación utilizados, observamos la ausencia de los mismos, excepto ante un problema, donde los resolutores de niveles académicos alto y medio utilizan como único recurso el ridículo, para refutarlo.

En la siguiente tabla (6.2), quedan reflejados los recursos utilizados en las justificaciones realizadas por los resolutores, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos del

tipo T₂:

Problemas mal definidos T ₂	Nivel académico alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
1	REFUTA Argumentación: Ridículo	REFUTA Argumentación: Ridículo	REFUTA Prueba: Contraejemplo
2	VALIDA Prueba: R. Analítico REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico REFUTA Prueba: Contraejemplo
3	REFUTA Prueba: R. Analítico	Ni valida ni refuta	VALIDA Prueba: R. Empírico (P2) REFUTA Prueba: R. Empírico (P2)
4	REFUTA Prueba: Contraejemplo	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Analítico
5	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Analítico
6	REFUTA Prueba: R. Analítico y Contraejemplo	VALIDA Prueba: R. Empírico (P2) REFUTA Prueba: Contraejemplo	REFUTA Prueba: R. Empírico (P1)

Tabla 6.2

c) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T₃ (problemas 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15), observamos que aunque el comportamiento más frecuente en estos resolutores es el de refutar los problemas presentados, se dan situaciones donde los problemas son validados: el resolutor de nivel académico alto, los problema 8 y 12, el de nivel académico medio los problemas 7, 13 y 15, y el de nivel académico bajo los problemas 13 y 15. También observamos, en los resolutores de niveles académicos medio y bajo el comportamiento de no validar ni refutar, pues no saben identificar el

problema presentado, en el problema 9 el resolutor de nivel académico medio y en el problema 14 el resolutor de nivel académico bajo.

Los diferentes recursos utilizados por estos resolutores difieren según el nivel académico de los mismos. Los recursos de prueba utilizados son: el resolutor de nivel académico alto, el contraejemplo y el razonamiento analítico; el de nivel académico medio, el contraejemplo, el razonamiento analítico y el razonamiento empírico (P2); y el de nivel académico bajo, el razonamiento analítico y el empírico (P1). Además de los mencionados, observamos en los tres resolutores, situaciones donde su justificación se apoya en procesos impuestos por la costumbre (Ritual).

Los recursos de argumentación no son observados en los resolutores de niveles académicos alto y Bajo, de manera que los utilizados por el resolutor de nivel académico medio son la descripción y el ridículo.

En la siguiente tabla (6.3), quedan reflejados los recursos utilizados en las justificaciones realizadas por los resolutores, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 :

Problemas mal definidos T_3	Nivel académico alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
7	REFUTA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Empírico (P1) y Analítico
8	VALIDA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: R. Analítico
9	REFUTA Prueba: Contraejemplo (y Ritual)	Ni valida ni refuta	REFUTA Prueba: R. Analítico
10	REFUTA Prueba: R. Analítico (y Ritual)	REFUTA Prueba: (Ritual)	REFUTA Prueba: R. Empírico (P1) y Analítico REFUTA Prueba: (Ritual)

Problemas mal definidos T ₃	Nivel académico alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
11	REFUTA Prueba: Contraejemplo (y Ritual)	REFUTA Argumentación: Ridículo Prueba: (Ritual)	REFUTA Prueba: R. Analítico
12	VALIDA Prueba: R. Analítico Refuta Prueba: Contraejemplo (y Ritual)	REFUTA Prueba: R. Empírico (P2) (y Ritual)	REFUTA Prueba: R. Empírico (P2) REFUTA Prueba: (Ritual)
13	REFUTA Prueba: R. Analítico	VALIDA Argumentación: (Descripción) Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico
14	REFUTA Prueba: R. Analítico	REFUTA Prueba: Contraejemplo	Ni valida ni refuta
15	REFUTA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico	VALIDA Prueba: R. Analítico

Tabla 6.3

6.2.1.2 Análisis de datos

En este apartado, se presenta un resumen del análisis de los diferentes problemas pasados en la prueba final, de manera conjunta, con los tres alumnos del segundo curso de la ESO (Anexo 5, tablas [42-44])

Consideramos en primer lugar los problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos (problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21). Cada problema se describe, con un resumen de los comportamientos de los resolutores, siguiendo el mismo procedimiento que el utilizado en el estudio final con los alumnos del CSE.

PROBLEMA 16.

a) Justificaciones: Los resolutores de niveles académicos alto y medio validan el problema con recursos de prueba, como el razonamiento

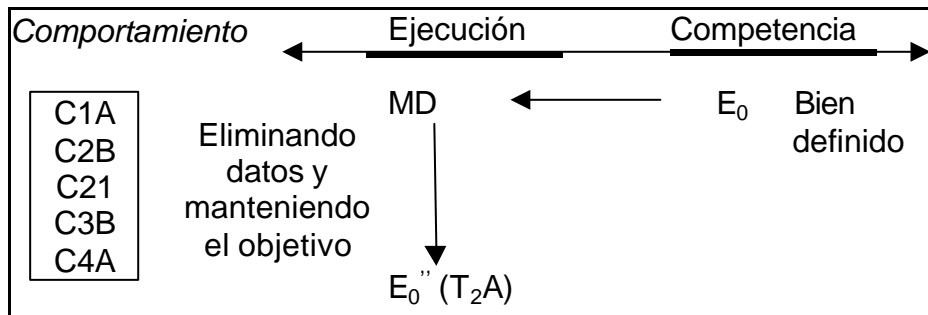
analítico. El resolutor de nivel académico bajo lo refuta con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P1), de manera que se fija en palabras del objetivo para justificar que los datos que no tienen relación con él, no intervienen en el problema.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

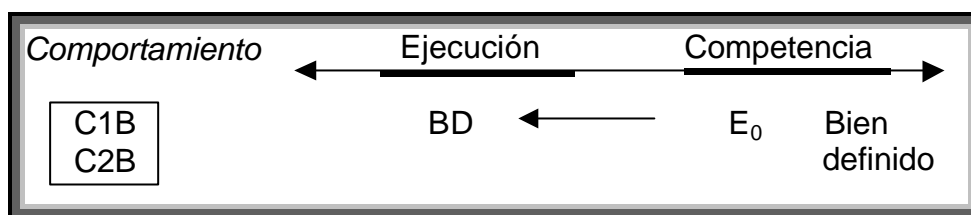
c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y medio estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo. El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4A], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y transforma el problema presentado en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado por T_2A .

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico bajo:



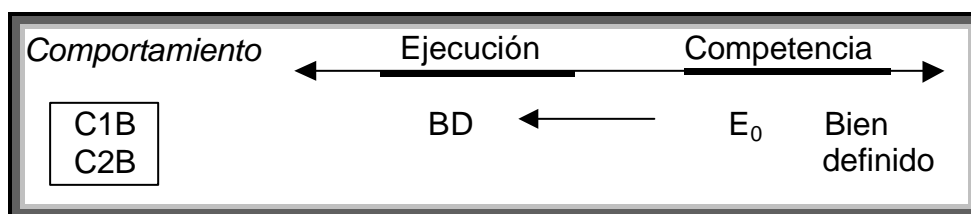
Resolutores de niveles académicos alto y medio:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

PROBLEMA 17.

- a) Justificaciones: Los tres resolutores validan el problema. Los resolutores de niveles académicos alto y medio con recursos de prueba como el razonamiento analítico y el resolutor de nivel académico bajo con recursos de prueba que hacen referencia a actitudes sobre las matemáticas, apoyándose en la autoridad que le confiere la tarea en sí misma (creencias por autoridad de la tarea)
- b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.
- c) Actuación: El comportamiento de los tres resolutores estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.



Se trata de un comportamiento invariante desarrollado por los tres resolutores.

PROBLEMA 18.

a) Justificaciones: Los resolutores de niveles académicos alto y medio validan el problema con recursos de prueba como el razonamiento analítico y el razonamiento empírico (P2), respectivamente. El resolutor de nivel académico bajo ni valida ni refuta pues no sabe identificar el problema.

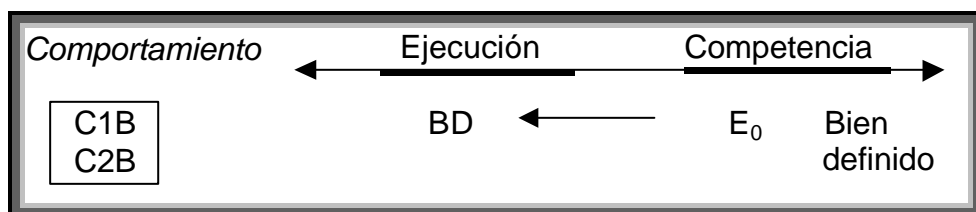
b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y medio estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.

El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado, por la secuencia [C1C-C2A], que se concreta en: no sabe identificar el problema presentado y acciones dirigidas por los datos.

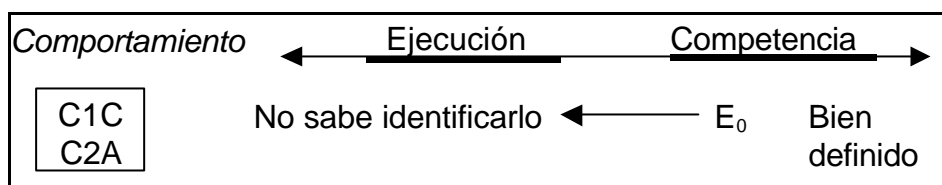
De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutores de niveles académicos alto y medio, y espacio semiótico final del resolutor de nivel académico bajo:



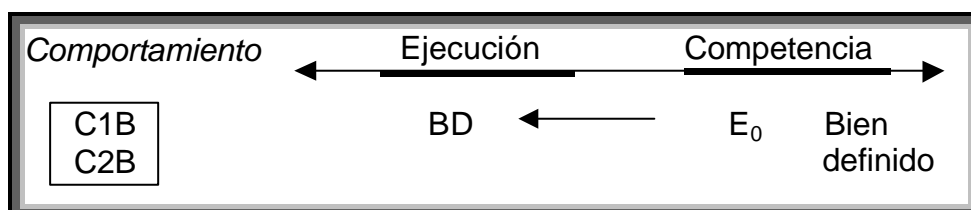
Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

Espacio semiótico inicial del resolutor de nivel académico bajo:



PROBLEMA 19.

- a) Justificaciones: Los tres resolutores validan el problema presentado, con recursos de prueba como el razonamiento analítico.
- b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.
- c) Actuación: El comportamiento de los tres resolutores estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado, como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.



Se trata de un comportamiento invariante desarrollado por los tres resolutores.

PROBLEMA 20.

- a) Justificaciones: El resolutor de nivel académico alto no valida ni refuta el problema presentado, pues comenta que no sabe si está bien o mal definido. El resolutor de nivel académico medio lo refuta con un recurso de prueba como el contraejemplo. El resolutor de nivel académico bajo lo valida con recursos de prueba como el razonamiento analítico.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

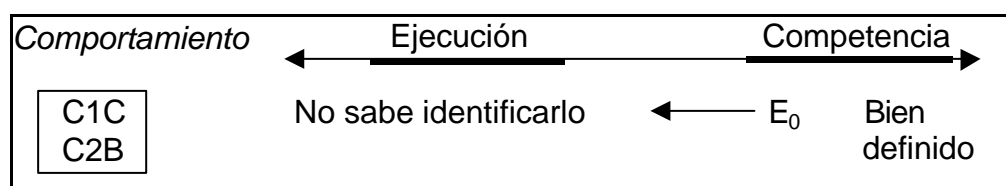
c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto estaría determinado por la secuencia [C1C-C2B], que se concreta en: no sabe cómo identificar el problema presentado y acciones dirigidas por el objetivo.

El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación de los datos la realiza añadiendo datos y transforman el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .

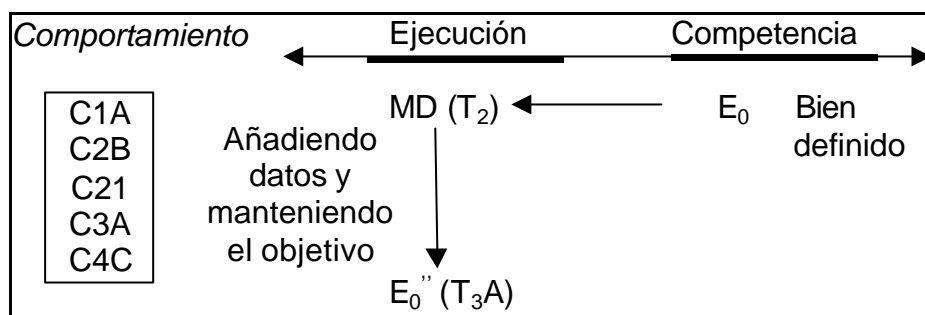
El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo, estaría determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4A], que se concreta en: identifica implícitamente el problema presentado, como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación de los datos la realiza eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado por T_2A .

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

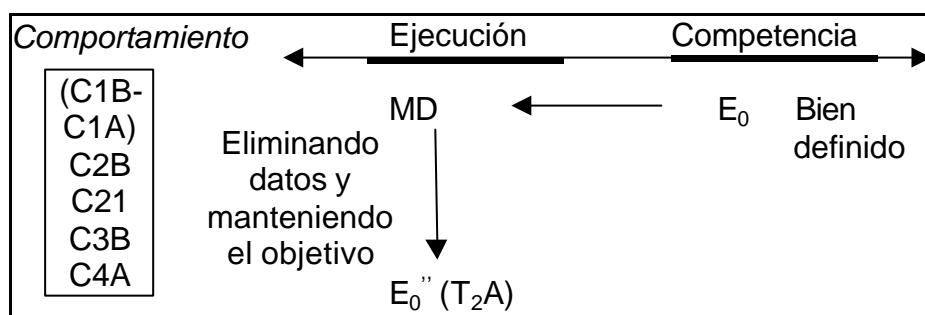
Resolutor de nivel académico alto:



Resolutor de nivel académico medio:



Resolutor de nivel académico bajo:



PROBLEMA 21.

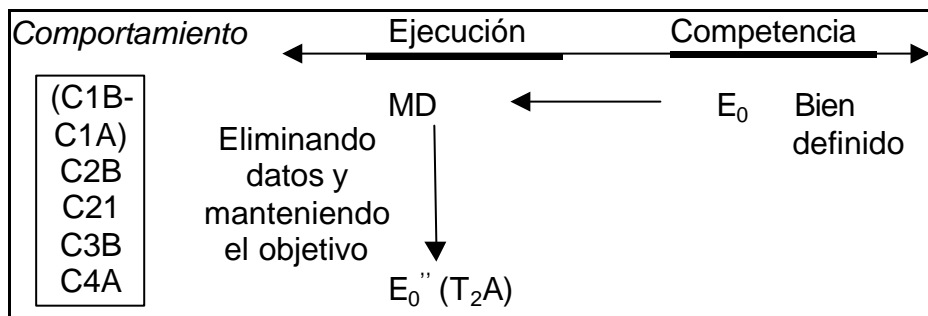
- a) Justificaciones: Los tres resolutores validan el problema con recursos de prueba. Los resolutores de niveles académicos alto y medio utilizan el razonamiento analítico, y el resolutor de nivel académico bajo utiliza el ritual.
- b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.
- c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y medio estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.

El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría

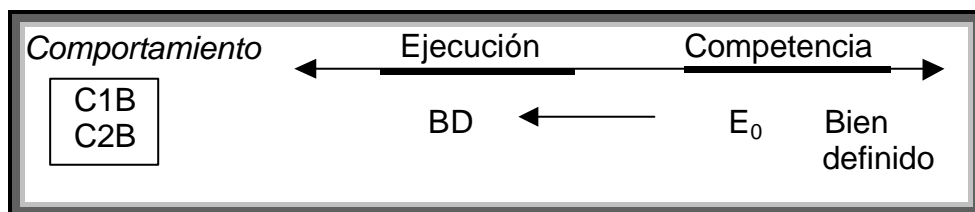
determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4A], que se concreta en: identifica implícitamente el problema presentado, como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación de los datos la realiza eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado por T_2A .

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico bajo:



Resolutores de niveles académicos alto y medio:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

El análisis de los problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (problemas 1, 2, 3, 4, 5 y 6) es el siguiente:

PROBLEMA 1

a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema. Los de niveles académicos alto y medio, con recursos de argumentación como el

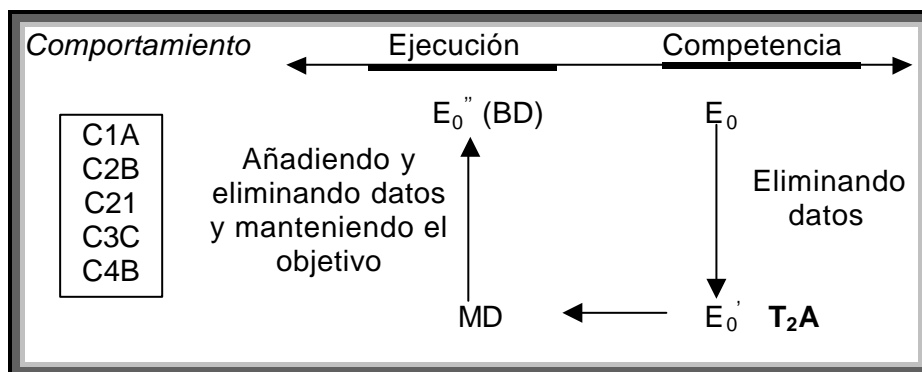
ridículo, y el de nivel académico bajo, con un recurso de prueba como el contraejemplo.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos medio y bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo y eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido. El comportamiento del resolutor de nivel académico alto difiere de los otros resolutores, solamente en que al modificar el problema, lo hace añadiendo datos [C3A].

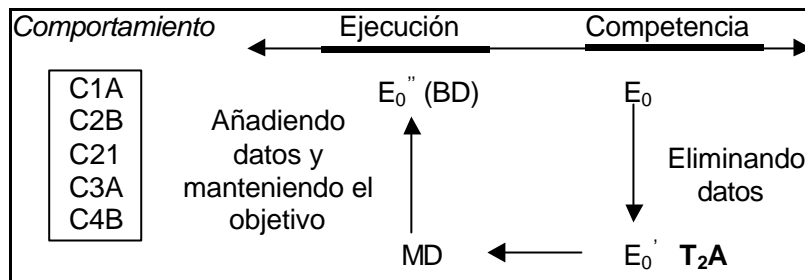
De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de niveles académicos medio y bajo:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

Resolutor de nivel académico alto:



PROBLEMA 2.

a) Justificaciones: El resolutor de nivel académicos alto en el espacio semiótico inicial lo valida con recursos de prueba como el razonamiento analítico y en el espacio semiótico final lo refuta, nuevamente con recursos de prueba como el razonamiento analítico. El resolutor de nivel académico medio lo refuta con recursos de prueba como el razonamiento analítico. El resolutor de nivel académico bajo, en el espacio semiótico inicial lo valida con recursos de prueba como el razonamiento analítico y en el espacio semiótico final lo refuta con recursos de prueba como el contraejemplo.

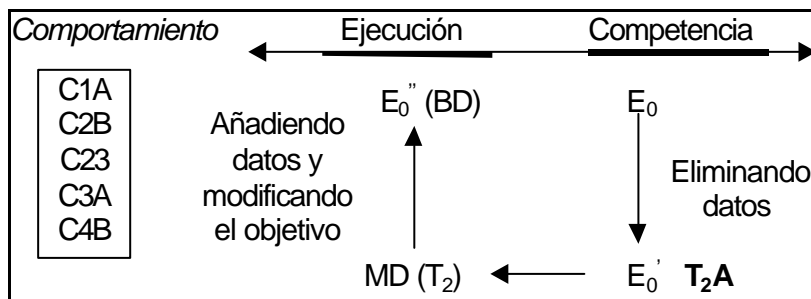
b) Espacios semióticos: El resolutor de nivel académico medio, desarrolla su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición, en cambio, los resolutores de niveles académicos alto y bajo desarrollan su actuación en diferentes espacios semióticos, es decir, pasan por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto, en el espacio semiótico inicial, estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifica el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo, y en el espacio semiótico final, por la secuencia: [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido tipo T_2 , sus acciones

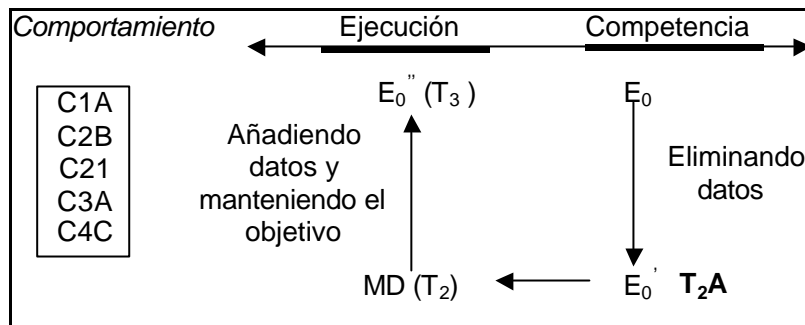
están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 . El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C23-C3A-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido tipo T_2 , sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema diferente bien definido. En cambio, el comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado, en el espacio semiótico inicial, por la secuencia [(C1B-C1A)-C2A-C22-C4A], que se concreta en: identifica el problema presentado explícitamente como bien definido e implícitamente como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, modifica el objetivo, y transforma el problema presentado en un problema mal definido tipo T_2 , y, en el espacio semiótico final, estaría determinado por la secuencia: [C1A-C2B-C23-C3A-C4B]. que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido tipo T_2 , sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema diferente bien definido.

Esquemáticamente (los espacios semióticos finales):

Resolutor de nivel académicos medio y espacio semiótico final del resolutor de nivel académico bajo.



Resolutor de nivel académico alto:



PROBLEMA 3

a) Justificaciones: El resolutor de nivel académico alto refuta el problema presentado con recursos de prueba como el razonamiento analítico. El resolutor de nivel académico medio ni lo valida ni lo refuta, pues comenta que no sabe si el problema está bien o mal definido. El resolutor de nivel académico bajo, en el espacio semiótico inicial, lo valida con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P_2) y en el espacio semiótico final, lo refuta con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P_2).

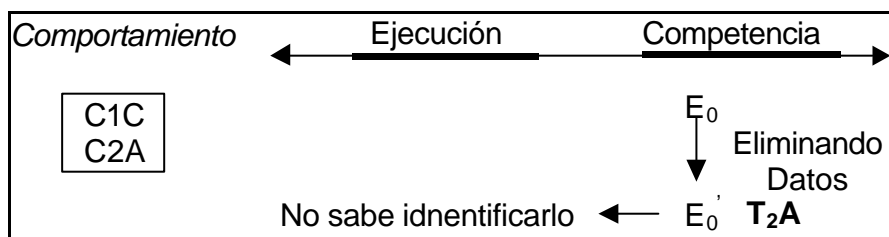
b) Espacios semióticos: Los resolutores de niveles académicos alto y medio desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición, en cambio, el resolutor de nivel académico bajo desarrolla su actuación en dos espacios semióticos.

c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido. El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia

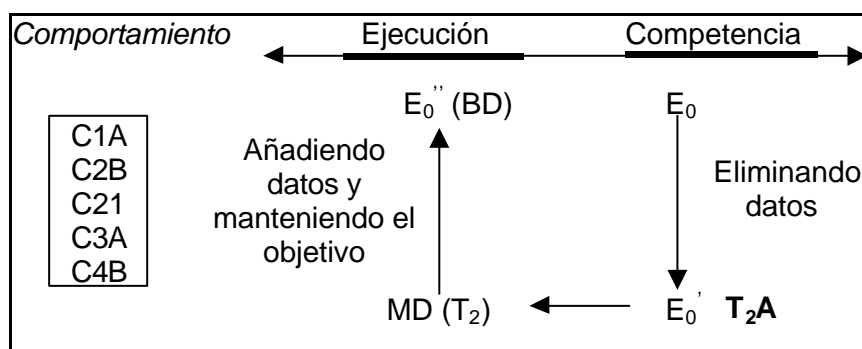
[C1C-C2A], que se concreta en: no sabe cómo identificar el problema presentado y acciones dirigidas por los datos. El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado, en el espacio semiótico inicial, por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifica el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por los datos, y en el espacio semiótico final estaría determinado por la secuencia: [C1A-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

Esquemáticamente (los espacios semióticos finales):

Resolutor de nivel académico medio:



Resolutor de nivel académico alto y espacio semiótico final del resolutor de nivel académico bajo:

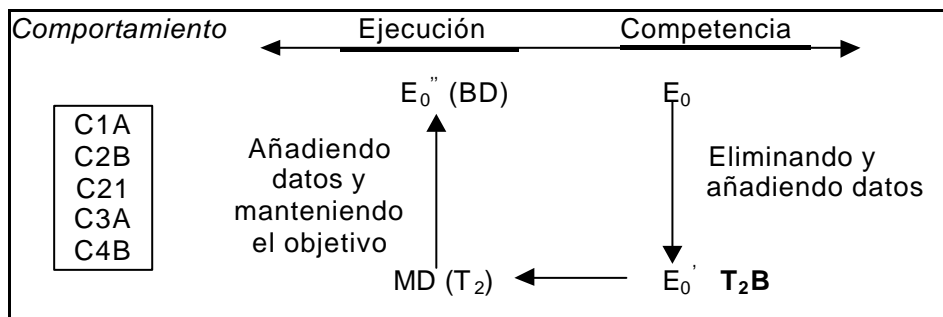


PROBLEMA 4

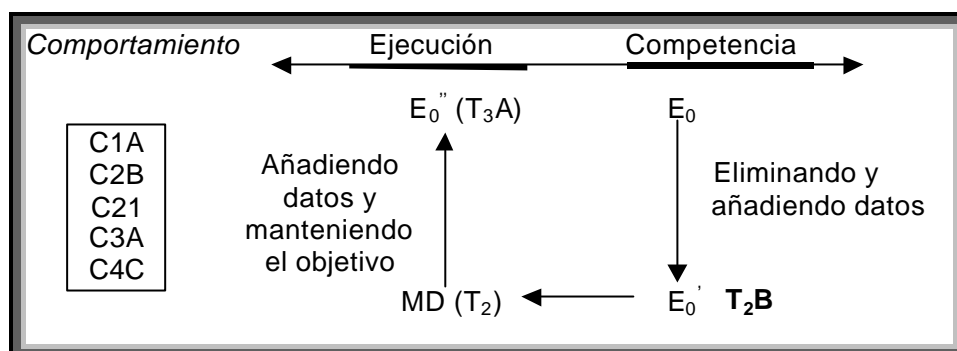
- a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema con recursos de prueba. El resolutor de nivel académico alto con el contraejemplo, y los resolutores de niveles académicos medio y bajo, con el razonamiento analítico.
- b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.
- c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y transforman el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A . El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo difiere de los otros resolutores, en que transforma el problema en uno bien definido [C4B].

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico bajo:



Resolutores de niveles académicos alto y medio:



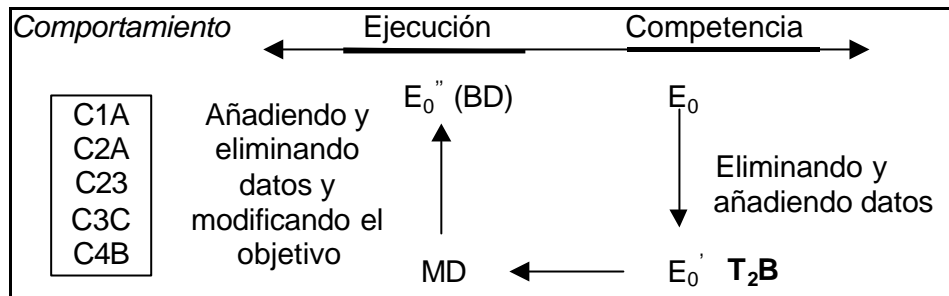
Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

PROBLEMA 5

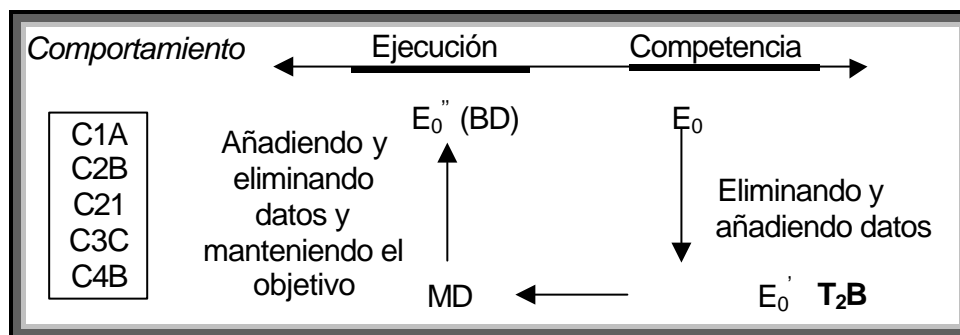
- a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema, con recursos de prueba como el razonamiento analítico.
- b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.
- c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo y eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido. El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo difiere de los otros resolutores en que, además de modificar los datos, modifica el objetivo [C23] y sus acciones están dirigidas por los datos [C2A].

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico bajo:



Resolutores de niveles académicos alto y medio:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

PROBLEMA 6

a) Justificaciones: El resolutor de nivel académico alto refuta el problema con recursos de prueba como el razonamiento analítico y el contraejemplo. El resolutor de nivel académico medio, en el espacio semiótico inicial, valida el problema con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2) y, en el espacio semiótico final, lo refuta con recursos de prueba como el contraejemplo. El resolutor de nivel académico bajo lo refuta con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P1).

b) Espacios semióticos: Los resolutores de niveles académicos alto y bajo desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición, en cambio, el resolutor de nivel

académico medio desarrolla su actuación en dos espacios semióticos.

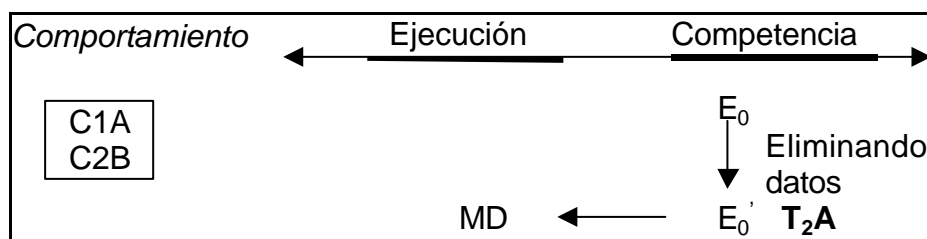
c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado, en el espacio semiótico inicial, por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifica el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por los datos. En el espacio semiótico final, el comportamiento estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .

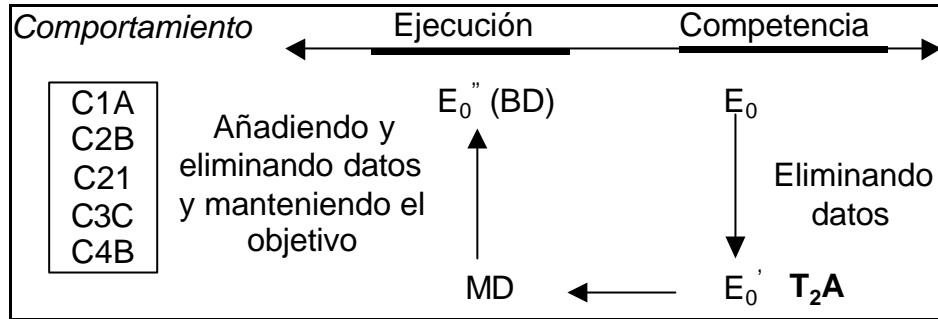
El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo (no sabe replantearlo).

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

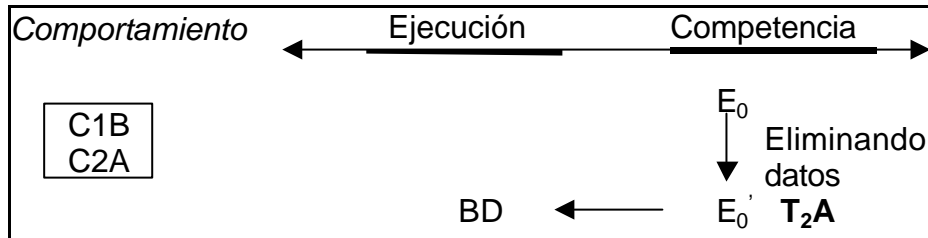
Resolutor de nivel académico bajo:



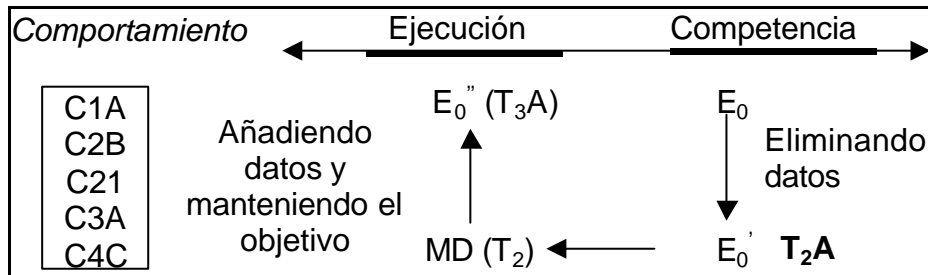
Resolutor de nivel académico alto:



Espacio semiótico inicial del resolutor de nivel académico medio:



Espacio semiótico final del resolutor de nivel académico medio:



El análisis de los caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15) es el siguiente:

PROBLEMA 7

a) Justificaciones: Los resolutores de niveles académicos alto y bajo refutan el problema con recursos de prueba como el razonamiento analítico y además de éste, el de nivel académico bajo con el razonamiento empírico (P1). El resolutor de nivel académico medio lo

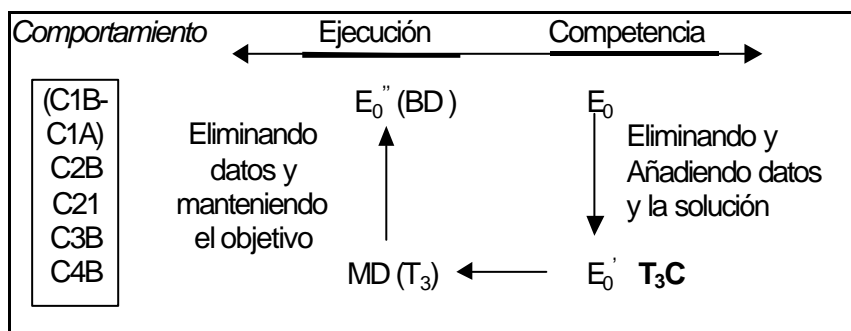
valida con recursos de prueba como el razonamiento analítico.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

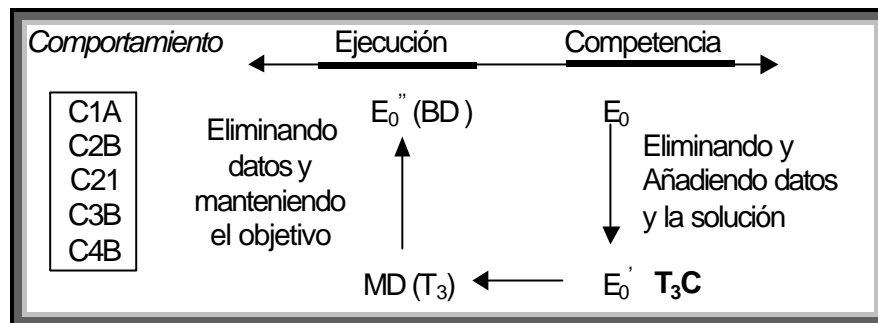
c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académico alto y bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido. El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica explícitamente el problema presentado como bien definido e implícitamente como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico medio:



Resolutores de niveles académicos alto y bajo:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

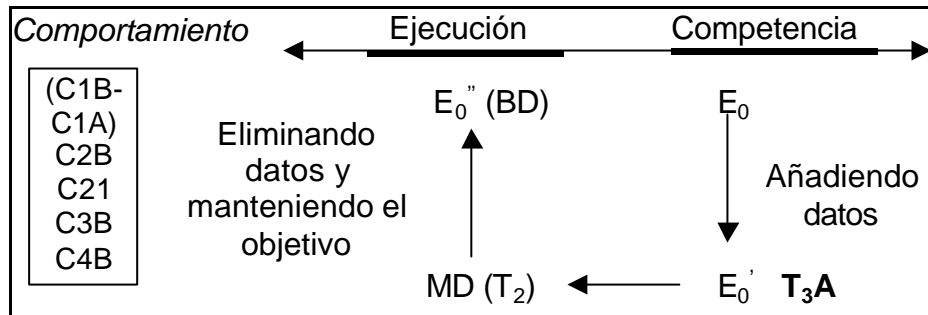
PROBLEMA 8

- a) Justificaciones: Los resolutores de niveles académicos medio y bajo refutan el problema con recursos de prueba como el razonamiento analítico y el de nivel académico alto lo valida con recursos de prueba como el razonamiento analítico.
- b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.
- c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos medio y bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido. El comportamiento del resolutor de nivel académicos alto estaría determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica implícitamente el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la

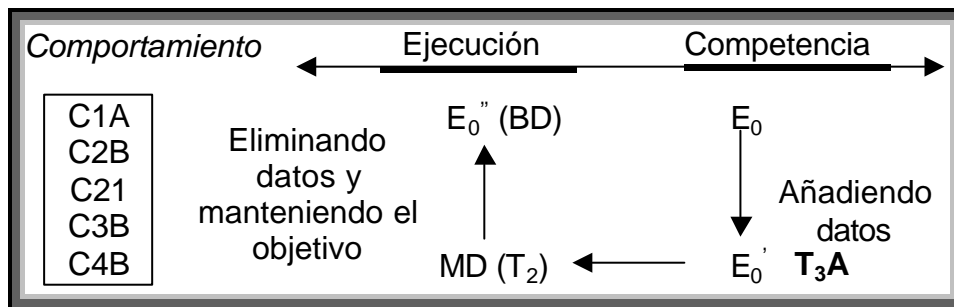
realizan eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico alto:



Resolutores de niveles académicos medio y bajo:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

PROBLEMA 9

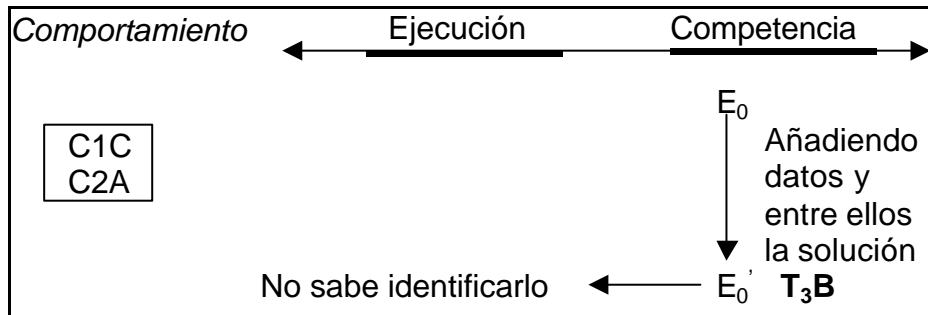
a) Justificaciones: El resolutor de nivel académico alto refuta el problema con recursos de prueba como el contraejemplo y el ritual. El resolutor de nivel académico medio ni refuta ni valida el problema, pues comenta que no sabe si está bien o mal definido. El resolutor de nivel académico bajo lo refuta con recursos de prueba como el razonamiento analítico.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico.

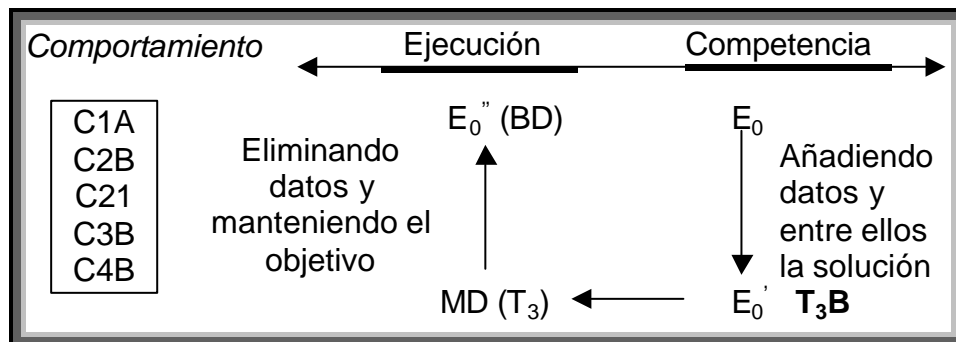
c) Actuación: El comportamiento de los resolutores de niveles académicos alto y bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo y modifica los datos y el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y transforman el problema planteado en un problema bien definido. El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [C1C-C2A], que se concreta en: no sabe cómo identificar el problema y acciones dirigidas por los datos.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico medio:



Resolutor de niveles académicos alto y bajo:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

PROBLEMA 10

a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema. El resolutor de nivel académico alto, con recursos de prueba como el razonamiento analítico y el ritual. El resolutor de nivel académico medio lo refuta con recursos de prueba como el ritual. El resolutor de nivel académico bajo lo refuta, en el espacio semiótico inicial, con recursos de prueba como el razonamiento analítico y el razonamiento empírico (P1), y en el espacio semiótico final, con recursos de prueba como el ritual.

b) Espacios semióticos: Los resolutores de niveles académicos alto y medio desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición, en cambio el resolutor de nivel académico bajo desarrolla su actuación en diferentes espacios semióticos, pasando por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando y añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

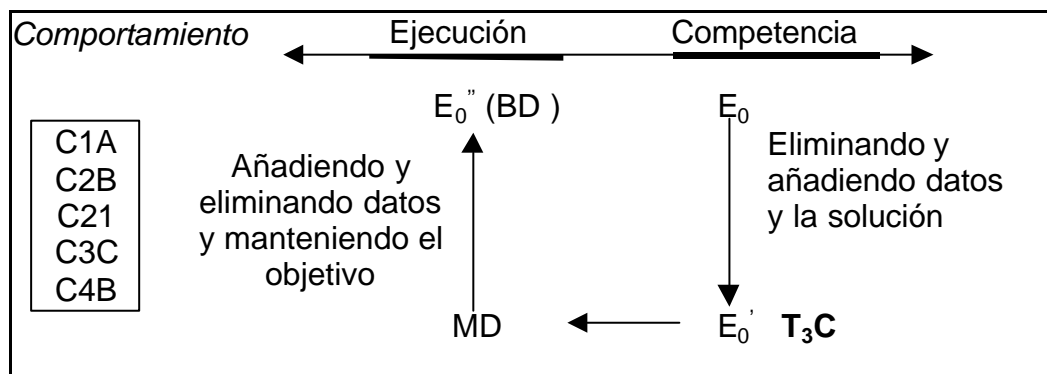
El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2A-C22-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, mantiene los datos y modifica el objetivo y transforma el problema planteado en un problema tipo T_3 (Esta actuación no es caracterizada con respecto al problema bien definido del que partimos, al haber modificado la pregunta).

El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado, en el espacio semiótico inicial, por la secuencia [C1A-C2B-

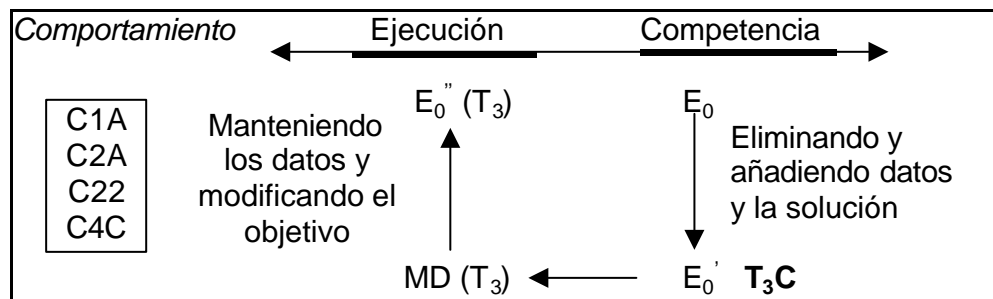
C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido. En el espacio final, el comportamiento estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando y añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

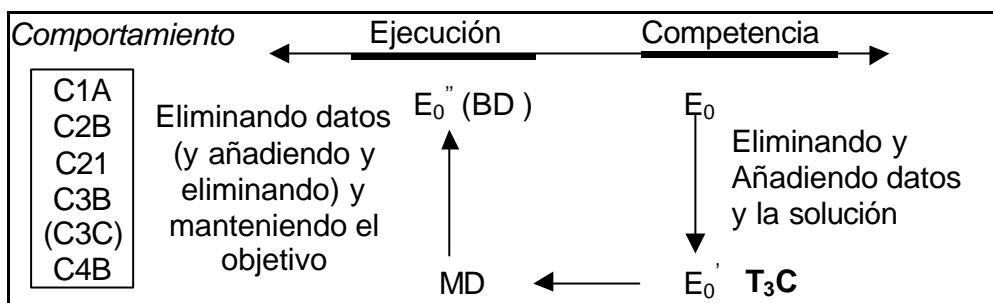
Resolutor de nivel académico alto:



Resolutor de nivel académico medio:



Resolutor de nivel académico bajo (entre paréntesis el estado semiótico final):



PROBLEMA 11

a) Justificaciones: Los tres resolutores refutan el problema. El resolutor de nivel académico alto, con recursos de prueba, como el contraejemplo y el ritual. El resolutor de nivel académico medio con recursos de argumentación como el ridículo y recursos de prueba como el ritual. El resolutor de nivel académico medio lo refuta con recursos de prueba como el razonamiento analítico.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto estaría determinado por la secuencia [C1A-C2A-C23-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, modifica los datos y el objetivo, la modificación la realiza eliminando y añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

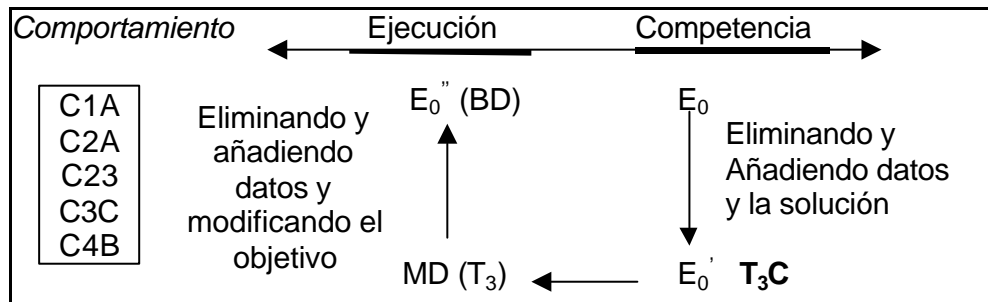
El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones

están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando y añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

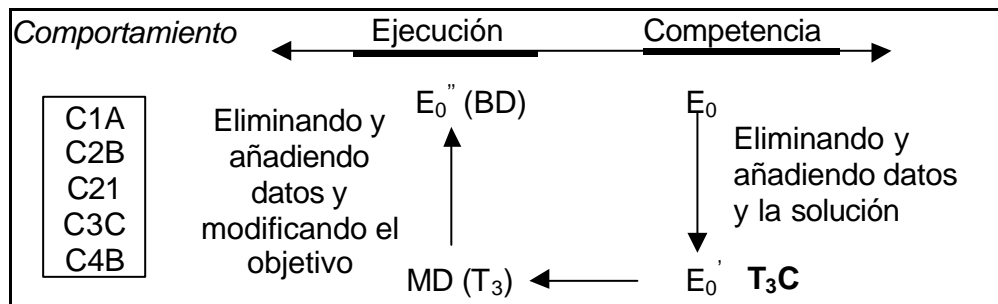
El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 , caracterizado por T_3C .

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

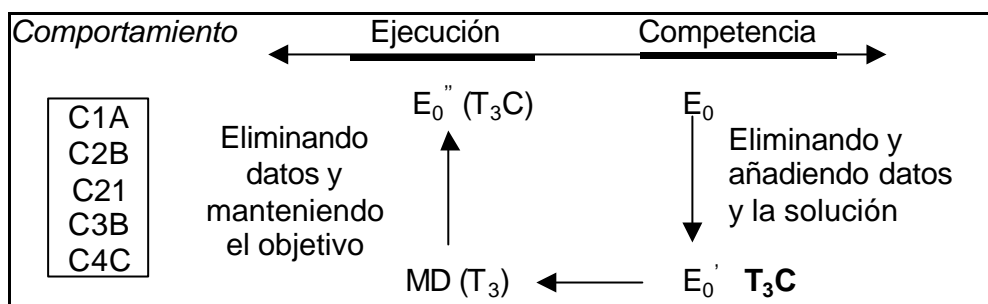
Resolutor de nivel académico alto:



Resolutor de nivel académico medio:



Resolutor de nivel académico bajo:



PROBLEMA 12

a) Justificaciones: El resolutor de nivel académico alto, en el espacio semiótico inicial, valida el problema con recursos de prueba como el razonamiento analítico y en el espacio semiótico final lo refuta, con recursos de prueba como el contraejemplo y el ritual. El resolutor de nivel académico medio lo refuta con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2) (y el ritual). El resolutor de nivel académico bajo, en el espacio semiótico inicial, refuta el problema con recursos de prueba como el razonamiento empírico (P2) y en el espacio semiótico final, lo refuta con recursos de prueba como el ritual.

b) Espacios semióticos: El resolutor de nivel académico medio desarrolla su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición, en cambio, los resolutores de niveles académicos alto y bajo desarrollan su actuación en diferentes espacios semióticos, pasando por un período de verificación transición.

c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto estaría determinado, en el espacio semiótico inicial, por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado implícitamente como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y transforma el problema

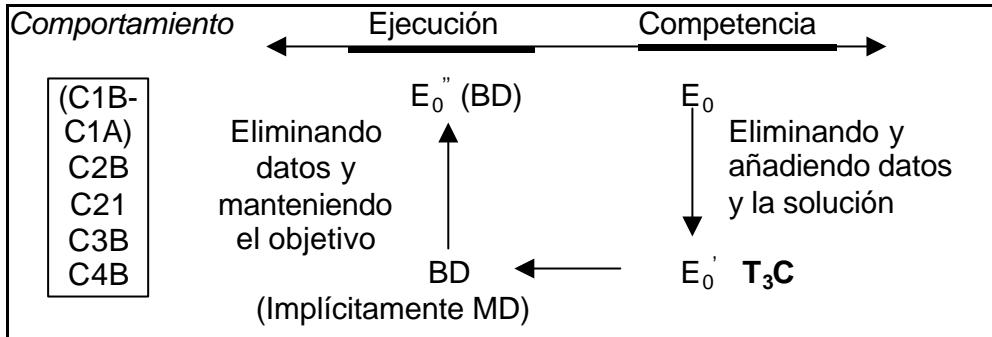
planteado en un problema bien definido. En el espacio semiótico final, el comportamiento estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado explícitamente como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando y añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4A], que se concreta en: identifica el problema presentado explícitamente como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando y añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_2 , caracterizado por T_2B .

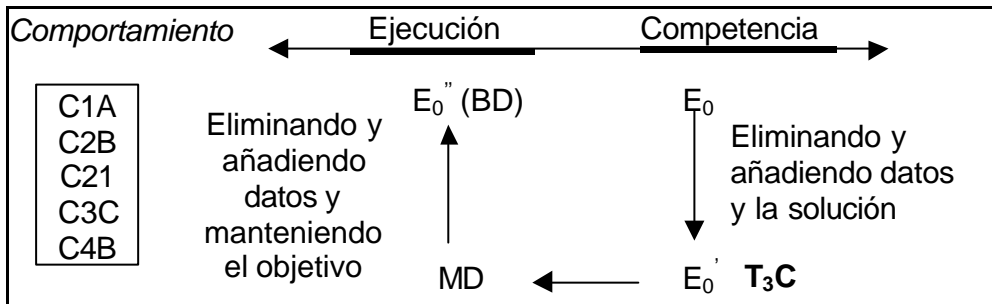
El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado, en el espacio semiótico inicial, por la secuencia [C1A-C2A-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifica el problema presentado explícitamente como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_3 , caracterizado por T_3C . En el espacio semiótico final, el comportamiento estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4A], que se concreta en: identifica el problema presentado explícitamente como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando y añadiendo datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_2 , caracterizado por T_2B .

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

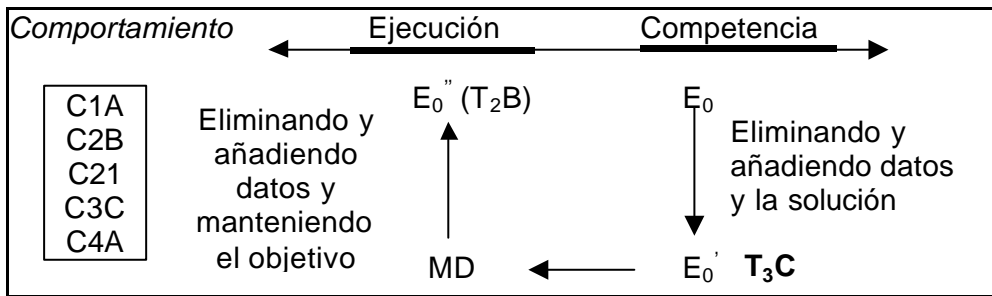
Espacio semiótico inicial del resolutor de nivel académico alto:



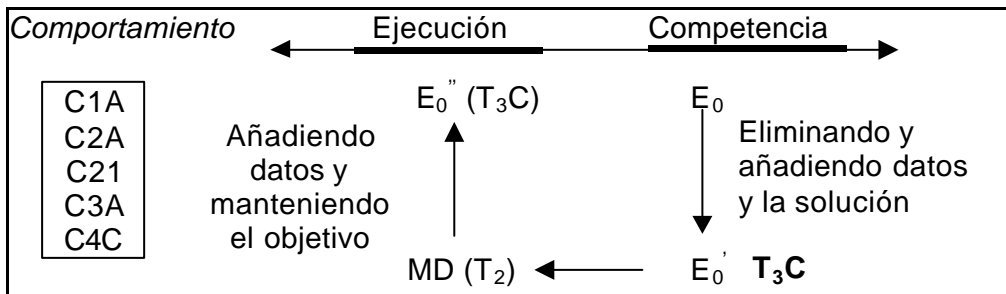
Espacio semiótico final del resolutor de nivel académico alto:



Resolutor de nivel académico medio y espacio semiótico final del resolutor de nivel académico bajo:



Espacio semiótico inicial del resolutor de nivel académico bajo:



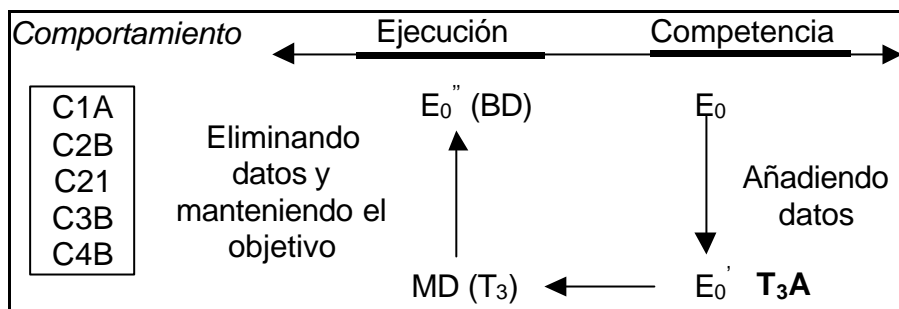
PROBLEMA 13

- a) Justificaciones: El resolutor de nivel académico alto refuta el problema con recursos de prueba como el razonamiento analítico. Los resolutores de niveles académicos medio y bajo lo validan, con recursos de argumentación como la descripción y recursos de prueba como el razonamiento analítico, el resolutor de nivel académico medio, y con recursos de prueba como el razonamiento analítico el resolutor de nivel académico bajo.
- b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.
- c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

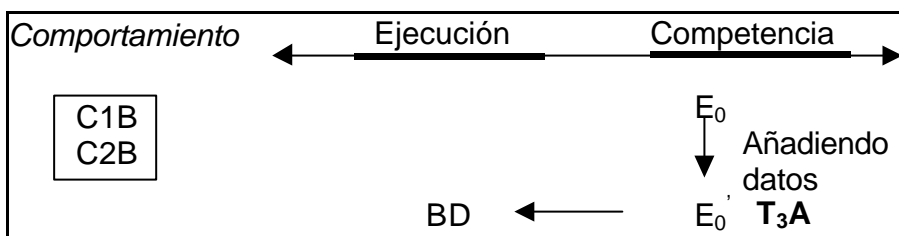
El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifica el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo y el comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifica el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por los datos.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados en este problema son:

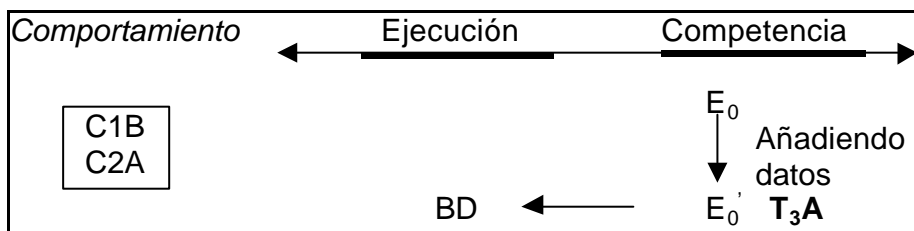
Resolutor de nivel académico alto:



Resolutor de nivel académico medio:



Resolutor de nivel académico bajo:



PROBLEMA 14

a) Justificaciones: El resolutor de nivel académico bajo ni lo refuta ni lo valida, pues comenta que no sabe si está bien o mal definido. Los resolutores de niveles académicos alto y medio lo refutan con recursos de prueba como el razonamiento analítico y el contraejemplo, respectivamente.

b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.

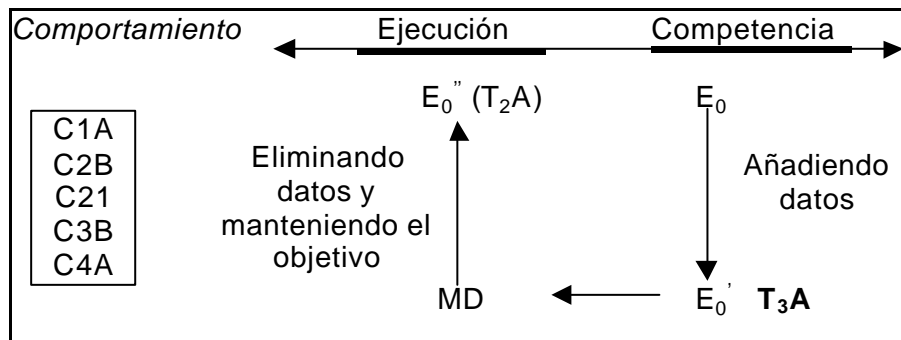
c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4A], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado por T_2A .

El comportamiento del resolutor de nivel académico medio estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

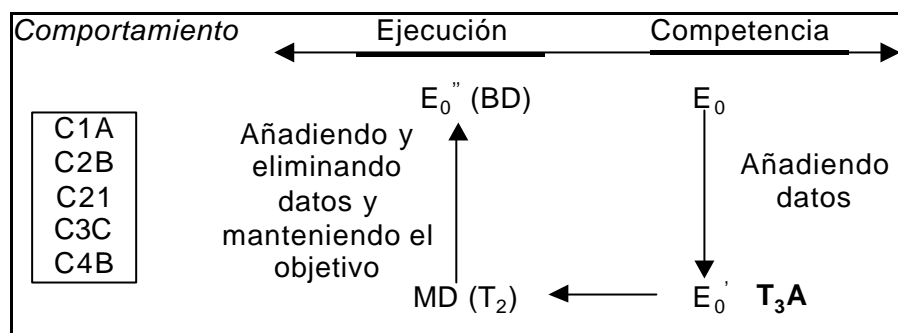
El comportamiento del resolutor de nivel académico bajo estaría determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no sabe cómo identificar el problema.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

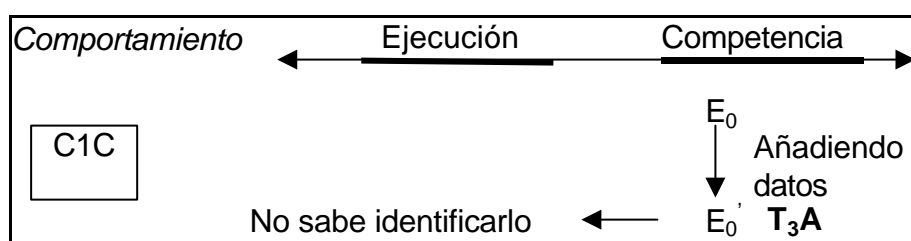
Resolutor de nivel académico alto:



Resolutor de nivel académico medio:



Resolutor de nivel académico bajo:



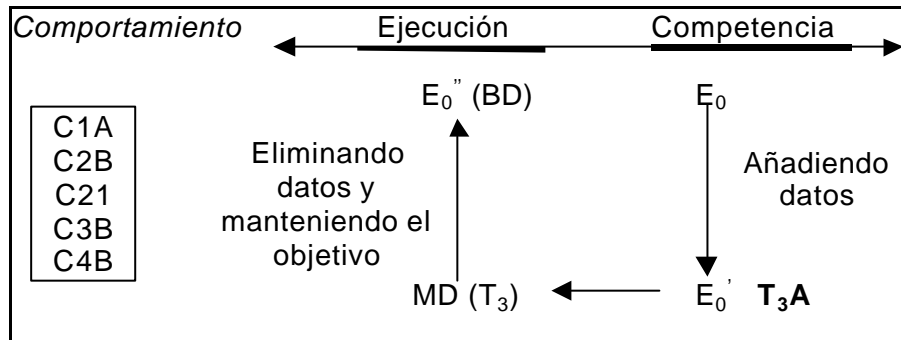
PROBLEMA 15

- a) Justificaciones: El resolutor de nivel académico alto refuta el problema presentado con recursos de prueba como el razonamiento analítico, en cambio, los resolutores de niveles académicos medio y bajo lo validan con recursos de prueba como el razonamiento analítico.
- b) Espacios semióticos: Los tres resolutores desarrollan su actuación en un único espacio semiótico, sin pasar por períodos de verificación-transición.
- c) Actuación: El comportamiento del resolutor de nivel académico alto estaría determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y transforma el problema planteado en un problema bien definido.

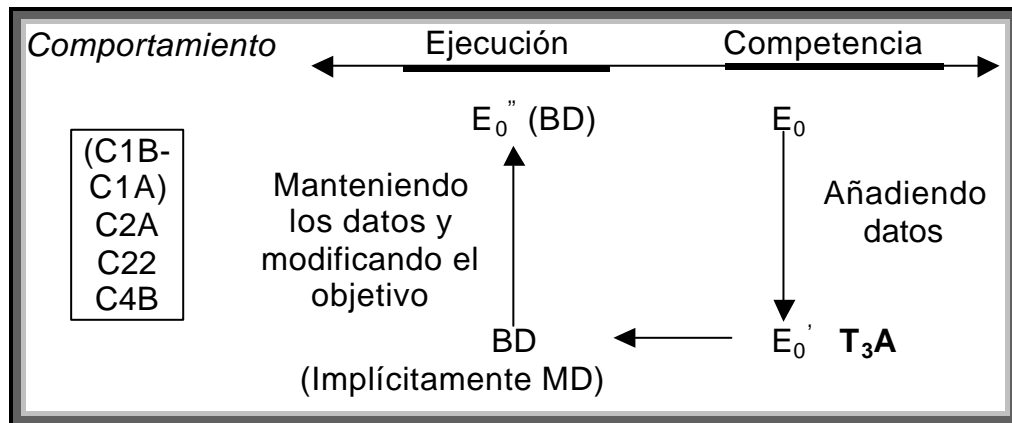
El comportamiento de los resolutores de niveles académicos medio y bajo estaría determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2A-C22-C4B], que se concreta en: identifican el problema presentado implícitamente como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, mantienen los datos y modifican el objetivo y transforman el problema planteado en un problema bien definido.

De manera esquemática, los diferentes comportamientos observados son:

Resolutor de nivel académico alto:



Resolutores de niveles académicos medio y bajo:



Se trata de un comportamiento regular desarrollado por dos resolutores.

6.2.1.3 Discusión y consideraciones

La discusión y consideraciones se presentará con relación a los comportamientos regulares e invariantes y con las justificaciones dadas por los tres resolutores.

CON RELACIÓN A LOS COMPORTAMIENTOS REGULARES E INVARIANTES.

- Con respecto a la categoría de análisis (1), observamos algunas diferencias significativas, según el nivel académico de los resolutores y la tipología y el contexto del problema presentado.

a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos (problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21), observamos un comportamiento invariante en los resolutores de niveles académicos alto y medio: identificarlos como bien definidos [C1B], en cambio, el resolutor de nivel académico bajo tiene mayor dificultad en identificarlos como bien definidos, presentando los tres comportamientos de esta categoría: identificarlos como bien definidos [C1B], identificarlos explícitamente como mal definidos [C1A] e identificarlos explícitamente como bien definidos e implícitamente como mal definidos [C1B-C1A].

Si el análisis lo hacemos por contexto, observamos que es en el contexto algebraico, donde los tres resolutores presentan mayor dificultad para identificar los problemas presentados como bien definidos, observando esta situación en los tres contextos estudiados, en el resolutor de nivel académico bajo.

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (problemas 1, 2, 3, 4, 5 y 6), aunque el comportamiento más habitual, en los tres resolutores es: identificarlos como mal definidos [C1A] tipo T_2 , observamos situaciones donde presentan el comportamiento: identificarlo como bien definido [C1B] y no saber identificarlo [C1C] en los contextos algebraico y geométrico.

c) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16), aunque el comportamiento más habitual en los tres resolutores es: identificarlo explícitamente, como mal definido [C1A], observamos situaciones donde los resolutores de niveles académicos medio y bajo presentan dificultad en identificarlos de forma correcta.

d) El comportamiento: no saber identificarlos [C1C], lo observamos en los tres resolutores. Si la observación la realizamos por la tipología y el contexto del problema, vemos este comportamiento en problemas bien y mal definidos y en los contextos algebraico y geométrico.

La influencia del contexto, aparece como un factor determinante en la identificación correcta de los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos. La mayor dificultad se presenta en los problemas de contexto algebraico y geométrico, principalmente en el resolutor de nivel académico medio. El resolutor de nivel académico bajo, tiene este comportamiento en los tres contextos estudiados.

- Con respecto a la categoría de análisis (2), observamos que:

a) Con relación a: acciones dirigidas por los datos o por el objetivo, el comportamiento invariante de estos resolutores, en problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos es: acciones dirigidas por el objetivo [C2B]. Ante problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos, observamos diferencias según el nivel académico de los resolutores, de manera que, el resolutor de nivel académico alto presenta el comportamiento invariante: acciones dirigidas por el objetivo [C2B]; el resolutor de nivel académico medio, aunque el comportamiento más frecuente es: acciones dirigidas por el objetivo [C2B], presenta, en los problemas de contexto

geométrico, el comportamiento: acciones dirigidas por los datos [C2A]; el resolutor de nivel académico bajo, presenta en igual medida, e independientemente del contexto, los comportamientos: acciones dirigidas por el objetivo [C2B] y acciones dirigidas por los datos [C2A].

b) Con relación a: qué modifican al replantear el problema dado, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, el resolutor de nivel académico alto no presenta estos comportamientos, pues los identifica todos como bien definidos y, por lo tanto, no replantea ninguno, en cambio, los resolutores de niveles académicos medio y bajo presentan el comportamiento: modificar los datos y mantener el objetivo [C21].

En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos, observamos que aunque el comportamiento más habitual en los tres resolutores es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21], también presentan los comportamientos: modificar el objetivo y mantener los datos [C22] en los tres contextos estudiados (resolutores de niveles académicos medio y bajo), y modificar los datos y el objetivo [C23] en el contexto algebraico, situación que se da en los tres resolutores.

De todo ello, podemos concluir que mientras en los resolutores de niveles académicos medio y bajo aparecen los tres comportamientos de señalados, en el resolutor de nivel académico alto observamos el comportamiento: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] y sólo en un problema el comportamiento: modificar los datos y el objetivo [C23]. Por otro lado, los comportamientos: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] y modificar el objetivo y mantener los datos [C22] se observan en los tres contextos estudiados, en cambio, el comportamiento: modificar los datos y el objetivo [C23], aparece únicamente en el contexto algebraico.

En resumen, aunque los tres resolutores presentan actuaciones donde sus acciones están dirigidas por los datos de manera que el objetivo del problema pasa a un segundo lugar, el resolutor de nivel académico bajo, es el que con mayor frecuencia presenta este comportamiento. Se observa cierta coherencia con esta actuación al replantear el problema, ya que lo habitual en estos resolutores es que modifiquen el objetivo o los datos y el objetivo, es únicamente el resolutor de nivel académico bajo el que en algún caso modifica los datos. En cambio, cuando las acciones están dirigidas por el objetivo, al replantear el problema, modifican los datos y en menor medida los datos y el objetivo, no se observan situaciones donde modifiquen únicamente el objetivo.

- Con respecto a la categoría de análisis (3), observamos que:
 - a) En los problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos, el resolutor de nivel académico alto no presenta estos comportamientos, pues los identifica todos como bien definidos y, por lo tanto, no actúa sobre los datos. Los comportamientos observados en los otros resolutores son: transformarlos añadiendo datos [C3A] (resolutor de nivel académico medio) y transformarlos eliminando datos [C3B] (resolutor de nivel académico bajo).
 - b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , los comportamientos observados en los tres resolutores son: transformarlos añadiendo datos [C3A] y transformarlos eliminando y añadiendo datos [C3C], no observando en ningún caso el comportamiento: transformarlos eliminando datos [C3B].
 - c) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definido tipo T_3 , el comportamiento que presenta el resolutor de nivel académico alto es: transformarlos eliminando datos [C3B] y en algún problema de contexto geométrico: transformarlos eliminando y añadiendo

datos [C3C]. El resolutor de nivel académico medio presenta los comportamientos: transformarlos eliminando datos [C3B] y transformarlos eliminando y añadiendo datos [C3C] en igual medida. El resolutor de nivel académico medio, presenta el comportamiento: transformarlos eliminando datos [C3B] y en algún problema de contexto geométrico: transformarlos añadiendo datos [C3A].

En general, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 no observamos, en estos resolutores, el comportamiento de añadir datos [C3A], excepto en una situación en el resolutor de nivel académico bajo.

- Con respecto a la categoría de análisis(4), observamos que:

a) En los problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos, los comportamientos que aparecen son: transformarlos en un problema mal definido tipo T_3 [C4C] (resolutor de nivel académico medio) y transformarlos en un problema mal definido tipo T_2 [C4A], (resolutor de nivel académico bajo) no observando ninguna situación donde el problema es transformado en bien definido [C4B].

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , los comportamientos que presenta el resolutor de nivel académico alto son: transformarlos en un problema bien definido [C4B], y en un problema de contexto aritmético: transformarlos en un problema mal definido tipo T_3 [C4C]. El resolutor de nivel académico medio, presenta los comportamientos: transformarlos en un problema bien definido [C4B] y transformarlos en un problema mal definido tipo T_3 [C4C], en igual medida. El resolutor de nivel académico bajo, presenta los comportamientos: transformarlos en un problema bien definido [C4B] y en algún problema de contexto algebraico: transformarlos en un problema mal definido tipo T_2 [C4B].

c) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definido tipo T_3 , el comportamiento más frecuente en los tres resolutores es: transformarlos en un problema bien definido [C4B], observando situaciones donde son transformados en un problema mal definido tipo T_2 [C4A] (resolutor de nivel académico alto en contexto algebraico y resolutores de niveles académicos medio y bajo en contexto geométrico), y situaciones donde son transformados en un problema mal definido tipo T_3 [C4C] (resolutor de nivel académico medio en contexto aritmético y resolutor de nivel académico bajo en contexto algebraico).

Es decir, que frente a problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definido tipo T_3 , observamos en el resolutor de nivel académico alto los comportamientos [C4A y C4B] y en los resolutores de niveles académicos medio y bajo los tres comportamientos [C4A, C4B y C4C].

El comportamiento de identificar el problema planteado como mal definido pero no saber replantearlo, se da únicamente en el resolutor de nivel académico bajo en un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido, de contexto geométrico.

El análisis de las categorías 3 y 4 nos muestra, que no siempre, el hecho de añadir datos cuando es un problema caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_2 o eliminar datos cuando mal definido tipo T_3 , significa que estos resolutores hayan establecido relaciones correctas entre los datos y el objetivo ya, que el resultado de estas acciones les conduce a obtener un problema mal definido porque faltan o sobran datos, situación observada en los tres niveles académicos.

- Con respecto a los comportamiento regulares e invariantes obtenidos del análisis conjunto de las cuatro categorías de análisis, observamos que:

a) Analizando cada problema observamos comportamientos invariantes, únicamente en los caracterizados desde la competencia como bien definidos, en un 33% de los problemas presentados.

En cuanto a los comportamientos regulares, observamos que éstos se presentan principalmente entre los resolutores de niveles académicos alto y medio (en tres problemas de los caracterizados desde la competencia como bien definidos de contextos aritmético y geométrico, y en dos de los caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 de contextos aritmético y algebraico). Entre los resolutores de niveles académicos medio y bajo observamos tres comportamientos regulares (en un problema caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_2 de contexto aritmético y en dos problemas caracterizados desde la competencia como mal definido tipo T_3 de contexto algebraico y geométrico); entre los resolutores de niveles académicos alto y bajo observamos un comportamiento regular, en un problema caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_3 de contexto geométrico, y, entre los de niveles académicos medio y bajo, un comportamiento regular en un problema caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_2 de contexto aritmético.

De manera detallada exponemos a continuación lo descrito:

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, observamos un comportamiento invariante en los problemas 17 y 19, determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo. En cuanto a la presencia de comportamientos regulares, éstos se observan en los problemas 16, 18 y 21, determinados también por la secuencia [C1B-C2B], entre los resolutores de niveles académicos alto y medio.

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , no observamos comportamientos invariantes. En cuanto a los comportamientos regulares, éstos se dan en los problemas 4 y 5, entre los resolutores de niveles académicos alto y medio determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B] y la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C]; y entre los resolutores de niveles académicos medio y bajo, en el problema 1, determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B].

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , no observamos comportamientos invariantes. En cuanto a los comportamientos regulares, observamos uno en los problemas 8 y 15, entre los resolutores de niveles académicos medio y bajo, determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2A-C22-C4B], y otro en los problemas 7 y 9, entre los resolutores de niveles académicos alto y bajo, determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B]

En las tablas 6.4 y 6.5 quedan reflejados los diferentes comportamientos invariantes y regulares observados:

COMPORTAMIENTOS INVARIANTES			
	Bien definido	Mal definido T_2	Mal definido T_3
Aritmético	[C1B-C2B]	--	--
Algebraico	[C1B-C2B]	--	--
Geométrico	--	--	--

Tabla 6. 4

COMPORTAMIENTOS REGULARES			
	Nivel académico alto y medio	Nivel académico alto y bajo	Nivel académico medio y bajo
Bien definido	[C1B-C2B]	--	--
Mal definido tipo T_2	[C1A-C2B-C21-C3A-C4C] [C1A-C2B-C21-C3C-C4B]	--	[C1A-C2B-C21-C3C-C4B]
Mal definido tipo T_3	--	[C1A-C2B-C21-C3B-C4B]	[(C1B-C1A)-C2A-C22-C4B]

Tabla 6. 5

b) Analizando cada resolutor en particular.

El resolutor de nivel académico alto presenta un comportamiento invariante, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos (en el 83% de los problemas presentados), determinado por la secuencia [C1B-C2B]. En cuanto a los comportamientos regulares, observamos, en los problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos de tipo T_2 , dos comportamientos regulares determinados por las secuencias [C1A-C2B-C21-C3A-C4B] y [C1A-C2B-C21-C3A-C4C] (en un 33% de los problemas presentados, cada uno) y un comportamiento regular en los problemas caracterizados desde la competencia como mal definido de tipo T_3 , determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B] (en un 56% de los problemas presentados).

El resolutor de nivel académico medio presenta un único comportamiento invariante, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos (en el 83% de los problemas presentados), determinado por la secuencia [C1B-C2B]. En cuanto a los comportamientos regulares, se observa uno en los problemas caracterizados desde la competencia como mal definido de tipo T_2 (en un 33% de los problemas presentados), determinado por la secuencia: [C1A-C2B-C21-C3C-C4B].

El resolutor de nivel académico bajo no presenta comportamientos invariantes. En cuanto a los comportamientos regulares, observamos dos en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, determinados por la secuencia [C1B-C2B] y la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4A] en un 33% de los problemas presentados, respectivamente. Además, presenta un comportamiento regular en los caracterizados desde la competencia como mal definidos

tipo T_3 , determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B] en un 33% de los problemas presentados.

Es decir, que sólo se observa un comportamiento invariante en los resolutores de niveles académicos alto y medio, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos. En cuanto a los comportamientos regulares, éstos se observan en los tres resolutores. El de nivel académico, en los problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 y T_3 , el de nivel académico medio en los mal definidos T_2 , y el resolutor de nivel académico bajo en los mal definidos tipo T_3 y en los bien definidos, como se recoge en la tabla 6.6.

COMPORTAMIENTOS REGULARES e INVARIANTES				
Tipo	Comportamiento	Nivel académico Alto	Nivel académico Medio	Nivel académico Bajo
BD	Invariante	[C1B-C2B] (83%)	[C1B-C2B] (83%)	--
	Regular	--	--	[(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4B] (33%) [C1B-C2B] (33%)
MD T_2	Invariante	--	--	--
	Regular	[C1A-C2B-C21-C3A-C4B] (33%) [C1A-C2B-C21-C3C-C4B] (33%)	[C1A-C2B-C21-C3C-C4B] (33%)	--
MD T_3	Invariante	--	--	--
	Regular	[C1A-C2B-C21-C3B-C4B] (44'5%)	--	[C1A-C2B-C21-C3B-C4B] (33%)

Tabla 6. 6

El análisis de los comportamientos regulares e invariantes muestra que:

1. La presencia de problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos no parece generar confusión

en la actuación de los resolutores de niveles académicos alto y medio ante los bien definidos, como se deduce de la existencia del comportamiento “identificarlos como bien definidos” [C1B] presente en un 83% de los problemas presentados. En cambio, el resolutor de nivel académico bajo, presenta este comportamiento en sólo un 33% de los problemas, no dejando determinar si esta situación está influenciada por la presencia de problemas mal definidos.

2. Observamos la escasa presencia de comportamientos regulares que indiquen el establecimiento de relaciones correctas entre los datos y el objetivo, principalmente en los resolutores de niveles académicos medio y bajo.

- Respecto a los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , donde la solución está incluida en los datos dados (problemas 7, 9, 10, 11 y 12), observamos que el comportamiento del resolutor de nivel académico alto es identificar la solución como tal, eliminándola en su replanteamiento o manteniéndola como un dato necesario y modificando el objetivo. Los comportamientos del resolutor de nivel académico medio son: identificar la solución como tal y eliminarla o, considerar la solución como un dato innecesario eliminándolo en su replanteamiento. En cambio, el comportamiento más frecuente del resolutor de nivel académico bajo es interpretar la solución como un dato necesario para encontrar el objetivo pedido.

- Respecto a los problemas bien definidos impropios (problemas 16, 17 y 18), observamos que el resolutor de nivel académico alto no tiene dificultad en identificar los datos redundantes de forma correcta y no ve la necesidad de eliminarlos. El resolutor de nivel académico medio es en el contexto geométrico donde tiene dificultad para identificar el dato redundante, de manera que lo interpreta como un dato necesario. El resolutor de nivel académico bajo interpreta los datos redundantes, como

datos necesarios del problema para obtener el objetivo pedido, aunque en el problema de contexto algebraico (17), comenta que no hace falta operar con esos datos, pues si el problema dice que el coche recorre y gasta esas dos cantidades, es que las dos cantidades son ciertas y entonces da lo mismo utilizar unas u otras.

El hecho de que un resolutor identifique de forma correcta un problema, no significa que haya establecido relaciones correctas entre los datos y el objetivo, ya que vemos que el resolutor de nivel académico medio, tiene dificultad para interpretar estos datos de forma correcta en el problema de contexto geométrico, y sin embargo éste es identificado de forma correcta como bien definido.

- Con relación a la fase de verificación–transición, observamos que aunque el comportamiento regular de los resolutores de niveles académicos alto y medio, es presentar un único comportamiento general, es decir, que sus actuaciones se desarrollan en un único espacio semiótico, es sólo en problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos de contextos algebraico y geométrico, donde su actuación se desarrolla en diferentes espacios semióticos, es decir, que pasan por períodos de verificación y cambio de plan de actuación. En cambio, el resolutor de nivel académico bajo, presenta el comportamiento de desarrollar su actuación en diferentes espacios semióticos, pasando por períodos de verificación-transición, en problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos en los tres contextos estudiados.

Se observa en estos resolutores, que presentan cambios en el plan de actuación en los problemas de contexto geométrico y algebraico, que se pone de manifiesto en los diferentes espacios semióticos que desarrollan, es decir, que en estos contextos es donde muestran dificultades e inseguridad en su plan de actuación.

CON RELACIÓN A LAS JUSTIFICACIONES UTILIZADAS:

- a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, observamos que mientras el comportamiento en el resolutor de nivel académico alto es validarlos con recursos de prueba como el razonamiento analítico, en los resolutores de niveles académicos medio y bajo se dan los comportamientos de validarlos y de refutarlos, utilizando para ello, diferentes recursos de prueba.
- b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , observamos que aunque el comportamiento más habitual de los tres resolutores es refutarlos con recursos de prueba, se observan los comportamientos de validarlos, con diferentes recursos de prueba. Los problemas validados son, en general, de los contextos algebraico y geométrico.
- c) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , aunque el comportamiento general es refutarlos con recursos de prueba, observamos, en los tres resolutores, situaciones donde el problema es validado, en los tres contextos estudiados, con recursos de prueba (resolutores de niveles académicos alto y bajo) o de prueba y argumentación (resolutor de nivel académico medio). Además, los resolutores de niveles académicos medio y bajo, en problemas de contextos geométrico y algebraico, ni validan ni refutan, pues no saben identificar el problema.

De esta manera, frente a problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos observamos, que:

1. En los tres resolutores estudiados, predominan los recursos de prueba sobre los recursos de argumentación, tanto para validar como para refutar el problema presentado.

2. Hay recursos de prueba que son utilizados únicamente para validar, como las Creencias, y recursos de prueba y argumentación utilizados únicamente para refutar, como el contraejemplo y el ridículo, respectivamente.

3. Los diferentes recursos de prueba, utilizados por estos resolutores son los siguientes: el razonamiento analítico, el razonamiento empírico (P1 y P2), el contraejemplo y el ritual.

Los diferentes recursos de argumentación, utilizados por estos resolutores, son los siguientes: el ridículo, la descripción y las creencias.

Nuevamente y de forma resumida presentamos las consideraciones más relevantes con relación a los cinco grupos de comportamientos ya descritos en la fase III del estudio piloto (capítulo 4, apartado 4.4.3), relativos a las categorías de análisis: cómo identifican el problema presentado (categoría de análisis 1), si actúan o no sobre las condiciones y/o el objetivo es decir, si replantean o no el problema presentado (categorías de análisis 2, 3 y 4) y cómo justifican su actuación, en términos de validar o refutar.

a) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien definidos, observamos diferencias según el nivel académico de los resolutores, de manera que, la actuación más frecuente del resolutor de nivel académico alto es validar el problema presentado, interpretándolo explícitamente como bien definido y no transformándolo ni explícita ni implícitamente (comportamiento C), siendo su actuación en un problema de contexto algebraico, no validar ni refutar el problema por no saber identificarlo (comportamiento E). La actuación del resolutor de nivel académico medio, es la misma que la del resolutor de nivel académico alto, excepto en un problema de contexto algebraico, el cual refuta

identificándolo explícitamente como mal definido y transformándolo explícitamente en un problema mal definido (comportamiento B). En cambio, el resolutor de nivel académico bajo, presenta actuaciones que se sitúan en cuatro de los cinco grupos de comportamientos descritos: A, B, C y D.

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 y T_3 , observamos también diferencias según el nivel académico de los resolutores. La actuación del resolutor de nivel académico alto es refutar los problemas presentados, interpretándolos explícitamente como mal definidos y transformándolos explícitamente en un problema bien o mal definido (comportamiento B)⁵. En el resolutor de nivel académico medio, observamos que, además de presentar la actuación descrita en el resolutor de nivel académico alto, es en los contextos aritmético y geométrico, donde sus actuaciones se sitúan en los grupos C, D o E. En el resolutor de nivel académico bajo, observamos que es en los contextos geométrico y algebraico, donde se sitúa en los grupos A, B, C, D y E.

En la tabla 6.7, se muestra en qué grupo de comportamiento se engloban las actuaciones de los resolutores, frente a problemas de encontrar bien y mal definidos, a lo largo de los diferentes espacios semióticos que presentan en cada uno de los problemas presentados:

Tipo	Problema	Nivel académico alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
T_2	1	B	B	B
	2	B	B	D y B
	3	B	E	C y B
	4	B	B	B
	5	B	B	B
	6	B	C y B	A

⁵ En los problemas 8 y 12 de contexto algebraico y geométrico, presenta el comportamiento D.

Tipo	Problema	Nivel académico alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
T ₃	7	B	D	B
	8	D	B	B
	9	B	E	B
	10	B	B	B
	11	B	B	B
	12	D y B	B	B
	13	B	C	C
	14	B	B	E
	15	B	D	D
BD	16	C	C	B
	17	C	C	C
	18	C	C	A y C
	19	C	C	C
	20	E	B	D
	21	C	C	D

Tabla 6. 7

Es decir, el comportamiento E: no validar ni refutar el problema presentado, por no saber identificar el problema presentado, se observa en los tres resolutores: en el resolutor de nivel académico alto, en un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido de contexto algebraico; en el resolutor de nivel académico medio, en dos problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definido tipo T₂ y T₃ de contexto geométrico; en el resolutor de nivel académico bajo, en un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T₃ de contexto algebraico.

El comportamiento D, es observado en los tres resolutores, de manera que, en los de niveles académicos alto y medio, esta situación se observa en problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T₃, y en el resolutor de nivel académico bajo, en los tres tipos de problemas y en los contextos algebraico y geométrico.

Por lo tanto, actúan de forma incorrecta (presentan el comportamiento C o E cuando es un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como mal definido, o presentan el comportamiento A, B, D o

E cuando es un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido), los resolutores de niveles académicos medio y bajo, en los tres tipos de problemas y en los tres contextos estudiados, en cambio, el resolutor de nivel académico alto, actúa de forma incorrecta, en un problema caracterizado desde la competencia como bien definido, de contexto algebraico.

6.2.2 Prueba escrita

6.2.2.1 Resultados globales (Anexo 4, tablas [29-34])

En este apartado describimos los comportamientos observados en los alumnos del primer ciclo de la ESO con relación a los comportamientos regulares e invariantes y a las justificaciones dadas por estos resolutores.

CON RELACIÓN A LOS COMPORTAMIENTOS REGULARES E INVARIANTES.

- Con respecto a la categoría de análisis (1), observamos que:
 - a) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien definidos (problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21), observamos la existencia de los comportamientos: no saber identificarlos [C1C], identificarlos explícitamente como bien definidos [C1B], identificarlos explícitamente como mal definidos [C1A] e identificarlos explícitamente como bien definidos e implícitamente como mal definidos [C1B-C1A], en los tres contextos estudiados, siendo el comportamiento menos frecuente: identificarlos explícitamente como bien definidos e implícitamente como mal definidos [C1B-C1A] (un 5% en el problema 16 de contexto aritmético, y un 15% en el problema 21 de contexto geométrico. En los problemas de contexto geométrico, el comportamiento más frecuente es: no saber identificarlos [C1C], con un 45% en el problema 18 y un 40% en el problema 21. En los problemas de contexto aritmético, el comportamiento más frecuente es: identificarlos explícitamente como bien definidos [C1B],

con un 45% en el problema 16 y un 40% en el problema 19. En los problemas de contexto algebraico, los comportamientos más frecuente son: identificarlos explícitamente como bien definidos [C1B] en el problema 17 con un 60% y no saber identificarlos [C1C], en el problema 20 con un 50%.

En la siguiente tabla, quedan expresados en porcentajes, los diferentes comportamientos observados, en los problemas de encontrar identificados desde la competencia como bien definidos y agrupados por contexto⁶:

CATEGORÍA 1 (%)				
Contexto	Problema	C1B	C1C	C1A y (C1B-C1A)
Aritmético	16	45	20	30 (5)
	19	40	25	10
Algebraico	17	60	25	15
	20	10	50	40
Geométrico	18	35	45	20
	21	25	40	20 (15)

Tabla 6. 8

b) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (problemas 1, 2, 3, 4, 5 y 6), no observamos el comportamiento: identificarlos explícitamente como bien definidos e implícitamente como mal definidos [C1B-C1A], en ninguno de los contextos estudiados, observando el resto de los comportamientos de la categoría de análisis (1) en los tres contextos estudiados.

En los problemas de contexto aritmético, el comportamiento más frecuente es: identificarlos como mal definidos [C1A], con un 80% en el problema 1 y un 75% en el problema 4. En los problemas de contexto algebraico, el comportamiento más frecuente es: identificarlo como bien definidos [C1B], con un 60% en el problema 2 y un 50% en el problema 5.

⁶ Los comportamientos C1A y [C1B-C1A] los hemos colocado en la misma columna, ya que ambos indican el comportamiento de identificarlos como mal definidos de manera explícita o implícita, respectivamente. Por otra parte, en el problema 19 un 25% de alumnos comentan que este problema está repetido por lo que no se incluyen en ninguno de los comportamientos de esta categoría.

En los problemas de contexto geométrico, los comportamientos más frecuentes son: no saber identificarlos [C1C], con un 90% en el problema 3 y identificarlos como mal definidos [C1A], con un 60% en el problema 6.

En la tabla 6.9, quedan expresados, en porcentajes, los diferentes comportamientos observados, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 y agrupados por contexto:

CATEGORÍA 1 (%)					
Contexto	Problema	C1B	C1C	C1A	(C1B-C1A)
Aritmético	1	15	5	80	0
	4	10	15	75	0
Algebraico	2	60	5	35	0
	5	50	10	40	0
Geométrico	3	0	90	10	0
	6	15	25	60	0

Tabla 6. 9

c) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15), observamos la existencia de los comportamientos: no saber identificarlos [C1C], identificarlos explícitamente como bien definidos [C1B], identificarlos explícitamente como mal definidos [C1A], e identificarlos explícitamente como bien definidos e implícitamente como mal definidos [C1B-C1A], en los tres contextos estudiados.

En los problemas de contexto aritmético, observamos que el comportamiento más frecuente es: identificarlos como mal definidos, explícita o implícitamente [C1A o (C1B-C1A)]. En los problemas de contexto algebraico, no hay un único comportamiento frecuente, sino que cada uno de los problemas presenta un comportamiento diferente, de manera que, en el problema 8, el comportamiento más frecuente es: identificarlo implícitamente como mal definido [C1B-C1A] con un 60%; en el problema 14, el comportamiento más frecuente es no saber identificarlos [C1C] con un 55% y en el problema 11 hay dos

comportamientos frecuentes: identificarlos explícitamente o implícitamente como mal definidos [C1B-C1A] con un 45% y identificarlo como bien definido [C1B] con un 50%. En los problemas de contexto geométrico, los comportamientos más frecuentes son: en los problemas 9 y 12, no saber identificarlos [C1C] con un 70% y un 45%, respectivamente, y en el problema 15 identificarlo implícitamente como mal definido [C1B-C1A] con un 65%.

En la tabla 6,10, quedan expresados en porcentajes, los diferentes comportamientos observados, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 y agrupados por contextos:

CATEGORÍA 1 (%)					
Contexto	Problema	C1B	C1C	C1A	(C1B-C1A)
Aritmético	7	20	10	45	25
	10	35	20	25	20
	13	25	15	30	30
Algebraico	8	5	20	15	60
	11	50	5	35	10
	14	10	55	15	20
Geométrico	9	15	70	15	0
	12	35	45	20	0
	15	5	10	20	65

Tabla 6. 10

- Respecto a la categoría de análisis (2), encontramos que:

Con relación a: “acciones dirigidas por los datos o por el objetivo”, nos encontramos con situaciones que no podemos categorizar, como en las que el resolutor escribe: “Está mal planteado” o “no se puede resolver” o “no sé si está mal o bien planteado, pero yo no sé hacerlo” o “este problema ya lo hicimos” o “está bien planteado, pero no me acuerdo como se hace”. De esta manera, al analizar esta categoría, incluimos las situaciones descritas como situaciones (*).

De esta manera, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, observamos los comportamientos:

acciones dirigidas por los datos [C2A] y acciones dirigidas por el objetivo [C2B]. El comportamiento más frecuente en los problemas de contexto aritmético es: acciones dirigidas por el objetivo [C2B], y en los problemas de contextos algebraico y geométrico: acciones dirigidas por el objetivo [C2B], aunque esta tendencia no está tan clara por el alto porcentaje de problemas, que no saben hacer (NS). El comportamiento: acciones dirigidas por los datos [C2A] se presenta en el contexto algebraico ligeramente superior al contexto aritmético y geométrico.

En la tabla 6.11, quedan expresados en porcentajes, los diferentes comportamientos observados, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, agrupados por contexto:

CATEGORÍA 2 (%)				
Contexto	Problema	Acciones dirigidas por los datos [C2A]	Acciones dirigidas por el objetivo [C2B]	Otras acciones
Aritmético	16	5	75	20 (NS)
	19	5	45	25 (está hecho) 25 (NS)
Algebraico	17	10	65	25 (NS)
	20	10	35	55 (NS)
Geométrico	18	5	50	45 (NS)
	21	5	55	40 (NS)

Tabla 6. 11

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , observamos que en los de contexto aritmético predomina el comportamiento: acciones dirigidas por el objetivo [C2B], en los de contexto algebraico, predomina el comportamiento: acciones dirigidas por los datos [C2A] y en los de contexto geométrico predominan los comportamientos: acciones dirigidas por el objetivo [C2B], aunque nuevamente esta tendencia no está tan clara por el alto porcentaje de problemas, que no saben hacer (NS) o que se limitan a identificar el problema presentado, como bien definido (BD) o mal definido (MD).

En la tabla 6.12, quedan expresados en porcentajes, los diferentes comportamientos observados, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , agrupados por contexto:

CATEGORÍA 2 (%)				
Contexto	Problema	Acciones dirigidas por los datos [C2A]	Acciones dirigidas por el objetivo [C2B]	Otras acciones
Aritmético	1	35	60	5 (MD y NS)
	4	10	75	15 (NS)
Algebraico	2	75	20	5 (BD y NS)
	5	50	40	10 (NS)
Geométrico	3	0	10	90 (NS)
	6	15	60	25 (NS)

Tabla 6. 12

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , observamos que en los tres contextos estudiados, el comportamiento que predomina es: acciones dirigidas por el objetivo [C2B], sin embargo, en los problemas de contexto geométrico, es nuevamente superior el porcentaje de problemas donde el resolutor comenta que no lo sabe hacer o que se limita a comentar que está mal definido.

En la tabla 6.13, quedan expresados en porcentajes, los diferentes comportamientos observados, en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , agrupados por contexto:

CATEGORÍA 2 (%)				
Contexto	Problema	Acciones dirigidas por los datos [C2A]	Acciones dirigidas por el objetivo [C2B]	Otras acciones
Aritmético	7	10	80	10 (NS)
	10	15	65	20 (NS)
	13	20	55	25 (MD y NS)
Algebraico	8	5	75	20 (NS)
	11	25	70	10 (NS)
	14	10	35	55 (NS)

CATEGORÍA 2 (%)				
Contexto	Problema	Acciones dirigidas por los datos [C2A]	Acciones dirigidas por el objetivo [C2B]	Otras acciones
Geométrico	9	5	25	70 (NS)
	12	15	40	45 (NS)
	15	5	85	10 (NS)

Tabla 6. 13

a) Con relación a: “qué modifican al replantear el problema dado”, observamos asimetrías según la tipología y el contexto del problema presentado.

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, el único comportamiento que observamos es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] (la totalidad de los resolutores que los identifican como mal definidos y los replantean), como queda reflejado en la tabla 6.14:

CATEGORÍA 2 (%)						
Contexto	Problema	Identifican MD	Replantean			No replantean
			Modifican Datos [C21]	Modifican Objetivo [C22]	Modifican datos y objetivo [C23]	
Aritmético	16	35	25	--	--	10
	19	10	5	--	--	5
Algebraico	17	15	15	--	--	0
	20	40	25	--	--	15
Geométrico	18	20	5	--	--	15
	21	35	15	--	--	20

Tabla 6. 14

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos, observamos los tres comportamientos de esta categoría, de manera que el comportamiento modificar los datos y mantener el objetivo [C21] se observa en los tres contextos; el comportamiento mantener los datos y modificar el objetivo [C22] se observa en los contextos aritmético y geométrico y el comportamiento: modificar los datos y el objetivo [C23] se observa principalmente en los

problemas de contexto algebraico.

Los porcentajes de estos comportamientos quedan reflejados en la siguiente tabla:

CATEGORÍA 2 (%)						
Contexto	Problema	Identifican MD [C1A y (C1B-C1A)]	Replantean			No replantean
			Modifican datos C21	Modifican objetivo C22	Modifican datos y objetivo C23	
Aritmético	1	80	20	20	--	40
	4	75	60	--	--	15
Algebraico	2	35	10	--	25	0
	5	40	35	--	--	5
Geométrico	3	10	5	--	--	5
	6	60	5	15	5	35
Aritmético	7	70	70	--	--	0
	10	45	30	5	--	10
	13	60	50	--	--	10
Algebraico	8	75	65	--	--	10
	11	45	20	--	5	20
	14	35	25	--	10	0
Geométrico	9	15	15	--	--	0
	12	20	5	--	--	15
	15	85	75			10

Tabla 6. 15

- Respecto a la categoría de análisis (3), encontramos asimetrías según la tipología y el contexto del problema presentado (Anexo 4, tablas 31 y 34).

a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, el único comportamiento que observamos en el contexto aritmético es: transformarlos eliminando datos [C3B]; en el contexto algebraico observamos los tres comportamientos de esta categoría: transformarlos añadiendo datos [C3A], eliminando datos [C3B] o añadiendo y eliminando datos [C3C]; en el contexto geométrico, los comportamientos que observamos son: transformarlos eliminando datos [C3B] o añadiendo y eliminando datos [C3C].

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , el único comportamiento observado en el contexto aritmético es: transformarlos añadiendo datos [C3A] y en el contexto algebraico y geométrico, los comportamientos observados son: transformarlos añadiendo datos [C3A] y añadiendo y eliminando datos [C3C].

c) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , en los contextos aritmético y algebraico observamos los tres comportamientos de esta categoría: transformarlos añadiendo datos [C3A], eliminando datos [C3B] y añadiendo y eliminando datos [C3C] y en el contexto geométrico, los comportamientos observados son: transformarlos eliminando datos [C3B] y añadiendo y eliminando datos [C3C].

- Respecto a la categoría de análisis (4), encontramos diferencias según la tipología y el contexto del problema presentado (Anexo 4, tablas 31 y 34).

a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, los comportamientos que observamos en el contexto aritmético y geométrico son transformarlos en bien definidos [C4B] o en mal definidos tipo T_2 [C4A] y en el contexto algebraico observamos los tres comportamientos de esta categoría: transformarlos en bien definidos [C4B], en mal definidos tipo T_2 [C4A] y en mal definidos tipo T_3 [C4C].

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , los comportamientos observados en el contexto aritmético son transformarlos en bien definidos [C4B] y en mal definidos tipo T_3 [C4C]; en el contexto algebraico, observamos los tres comportamientos de esta categoría: transformarlos en bien definidos [C4B], en mal definidos tipo T_2 [C4A] y en mal definidos tipo T_3 [C4C],

añadiendo datos [C3A] o añadiendo y eliminando datos [C3C]; en el contexto geométrico: transformarlos en bien definidos [C4B] o en mal definidos tipo T_2 [C4A].

c) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , los comportamientos que observamos en el contexto aritmético son transformarlos en bien definidos [C4B] y en mal definidos tipo T_3 [C4C]; en el contexto algebraico, los tres comportamientos de esta categoría: transformarlos en bien definidos [C4B], en mal definidos tipo T_2 [C4A] y en mal definidos tipo T_3 [C4C], eliminando datos [C3B] o añadiendo y eliminando datos [C3C]; en el contexto geométrico: transformarlos en bien definidos [C4B] y en mal definidos tipo T_2 [C4A].

- Respecto a los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , donde la solución está incluida en los datos dados (problemas 7, 9, 10, 11 y 12), los comportamientos que observamos en estos resolutores son: Identificar la solución como tal y no identificarla como tal sino como un dato de más (están incluidos los que explícitamente así lo expresan y aquellos que sin hacer ningún comentario no la utilizan o la eliminan en su replanteamiento), o como un dato necesario para encontrar el objetivo. Los porcentajes de estos comportamientos quedan reflejados en la tabla 6.16:

Contexto	Problema	Identifican explícitamente la solución (%)	No identifican la solución (%)		
			La identifican como un dato de más, explícita e implícitamente	La identifican como un dato necesario	Otras razones
Aritmético	7	30	50	10	10
	10	30	0	50	20
Algebraico	11	50	0	40	10
Geométrico	9	20	0	10	70
	12	30	0	15	55

Tabla 6. 16

• Respecto a los problemas bien definidos impropios (problemas 16, 17 y 18), los comportamientos que observamos en estos resolutores son: Identificar los datos redundantes como tales (están incluidos los que explícitamente así lo expresan y aquellos que sin hacer ningún comentario no los utilizan), identificar los datos redundantes como datos necesarios para encontrar el objetivo y no identificarlos (dentro de este comportamiento están incluidos los que no saben identificar el problema). Los porcentajes de estos comportamientos quedan reflejados en la siguiente tabla:

Contexto	Problema	Identifican los datos redundantes (%)	No identifican los datos redundantes (%)	
			Los identifican como datos necesarios	Otras razones
Aritmético	16	65	10	25
Algebraico	17	60	25	15
Geométrico	18	30	15	55

Tabla 6. 17

Es decir, estos resolutores, en los problemas de contexto aritmético es donde mejor identifican los datos redundantes.

6.2.2.2 Análisis de datos

En este apartado describimos el análisis de los diferentes problemas pasados en esta prueba (Anexo 5, tabla 45), indicando las diferentes actuaciones de los alumnos frente a cada uno de los problemas, además de presentar los comportamientos regulares e invariantes de manera esquemática.

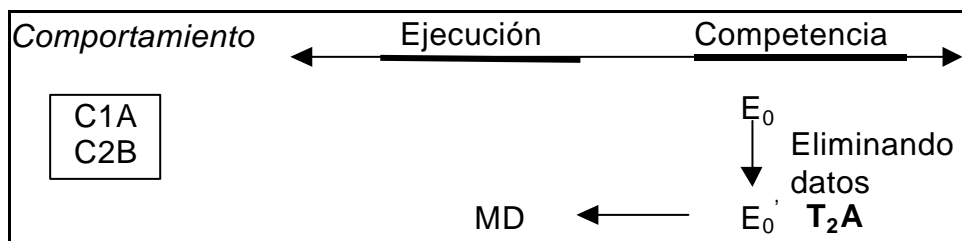
PROBLEMA 1

- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en no sabe identificar el problema presentado.
- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la

secuencia [C1B-C2A], que se concreta en identificar el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.

- Ocho alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en identificar el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo (no lo replantean).
- Cuatro alumnos presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2A-C22-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido acciones dirigidas por los datos, modifican el objetivo y mantienen los datos y lo transforman en un problema bien definido.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y lo transforman en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y lo transforman en un problema bien definido.

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 40%) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:

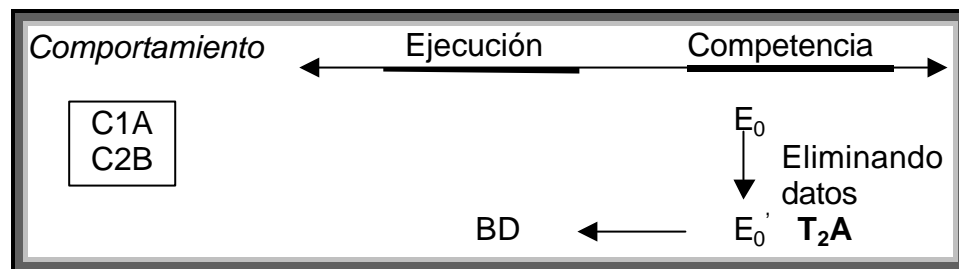


PROBLEMA 2

- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no sabe identificar el problema presentado.
- Doce alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2A-C23-C3A-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por los datos, modifican los datos y el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y lo transforman en un problema bien definido.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C23-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia

[C1A-C2B-C23-C3A-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y lo transforma en un problema bien definido.

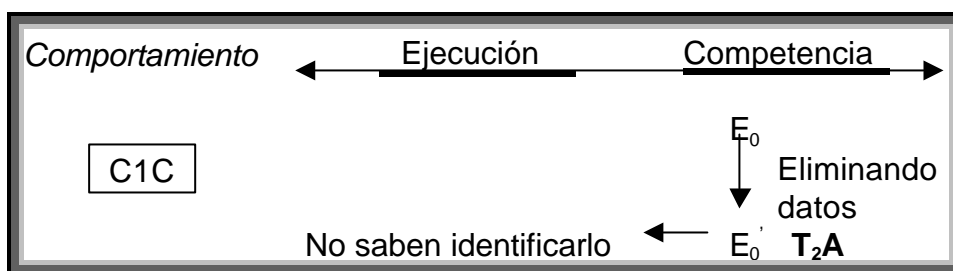
Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 60 %) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:



PROBLEMA 3

- Dieciocho alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Un alumno presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo (no lo replantea).
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y lo transforma en un problema bien definido.

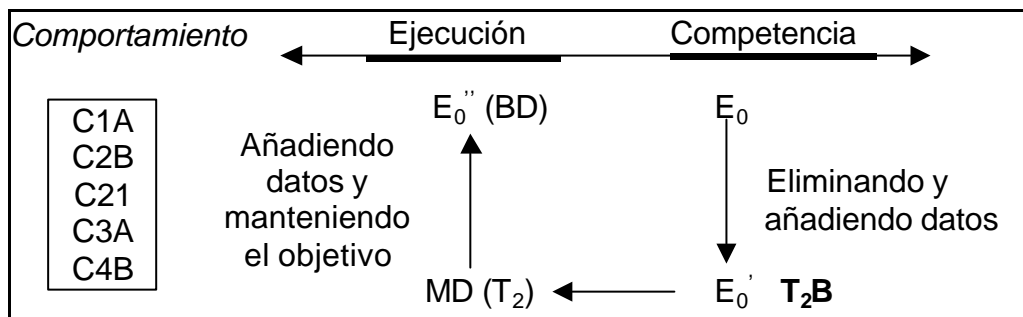
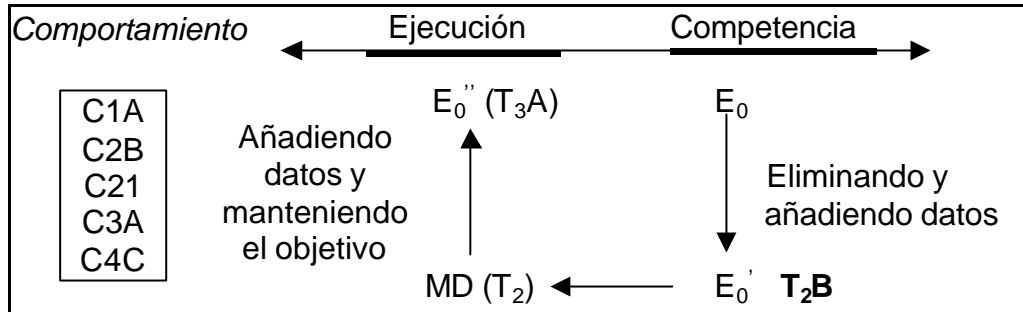
Por lo tanto, en este problema se observa un comportamiento invariante (un 90 %), reflejado en el siguiente diagrama:



PROBLEMA 4

- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo (no lo replantean).
- Seis alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y lo transforman en un problema bien definido.
- Seis alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y lo transforman en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .

Por lo tanto, los comportamientos regulares observados (un 30% cada uno), quedan reflejados en los siguientes diagramas:



PROBLEMA 5

- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Diez alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4A], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y

mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y lo transforma en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado por T_2B .

- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y lo transforman en un problema bien definido.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y lo transforman en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo y eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 50%) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:

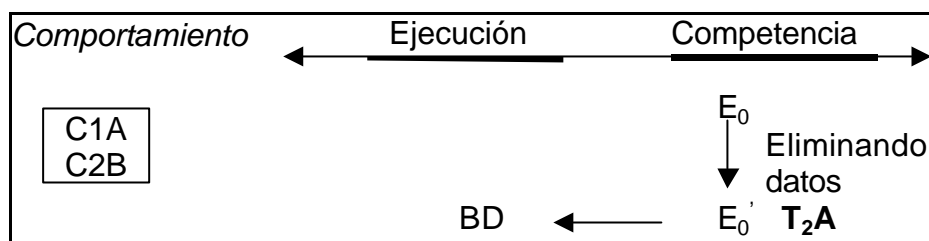


PROBLEMA 6

- Cinco alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Siete alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4A], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos, lo transforma en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado por T_2B .
- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C22-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, mantienen los datos y modifican el objetivo y lo transforman en un problema bien definido.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C23-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 35%)

en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:

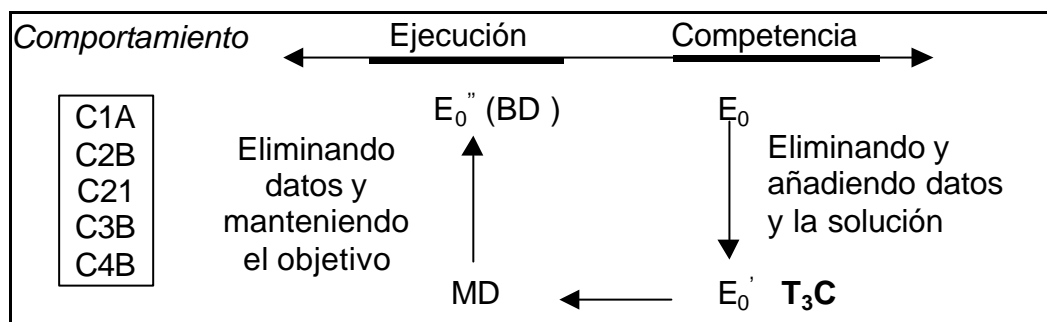


PROBLEMA 7

- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y lo transforman en un problema bien definido.
- Siete alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.
- Cinco alumnos presentan un comportamiento determinado por la

secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican explícitamente el problema como bien definido e implícitamente como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 35%) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:

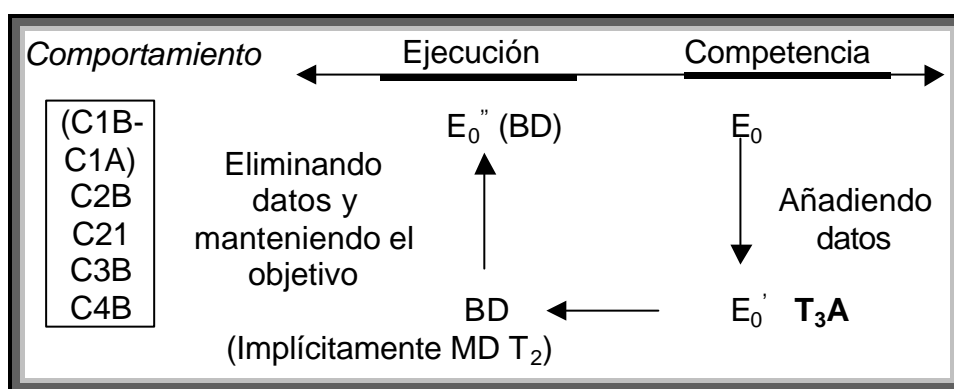


PROBLEMA 8

- Cuatro alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifica el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.

- Doce alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican explícitamente el problema como bien definido e implícitamente como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 60 %) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:

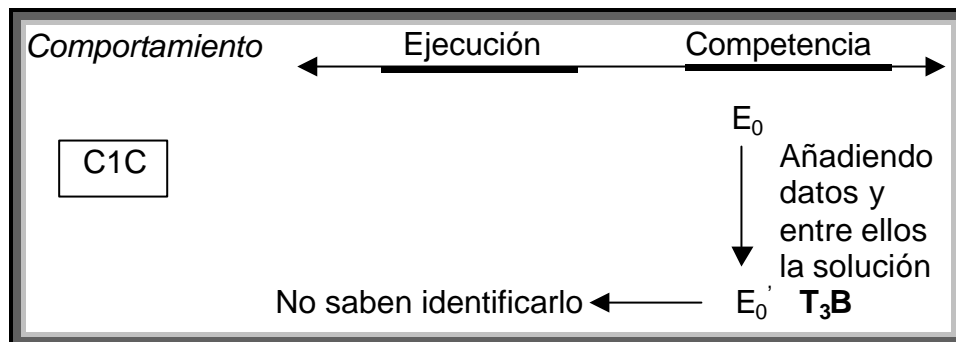


PROBLEMA 9

- Catorce alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifica el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican el

problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 70 %) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:



PROBLEMA 10

- Cuatro alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Cuatro alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifican el

problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y lo transforman en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3C .

- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifican explícitamente el problema como bien definido e implícitamente como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo y eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.

- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4C], que se concreta en: identifican el problema explícitamente como bien definido e implícitamente como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3C .

- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C22-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, mantiene los datos y modifica el objetivo y lo transforma en un problema bien definido.

De esta manera, en este problema no observamos comportamientos regulares.

PROBLEMA 11

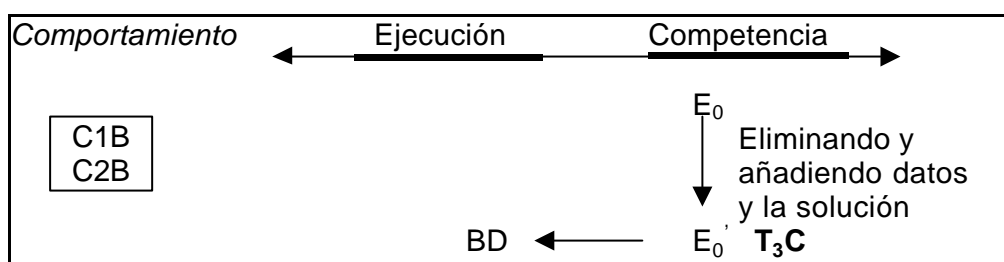
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no sabe identificar el problema presentado.
- Cuatro alumnos presentan un comportamiento determinado por la

secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.

- Cuatro alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Seis alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo y eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C23-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica explícitamente el problema como bien definido e implícitamente como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C1A-C2A-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica

explícitamente el problema como bien definido e implícitamente como mal definido, sus acciones están dirigidas por los datos, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 30%) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:

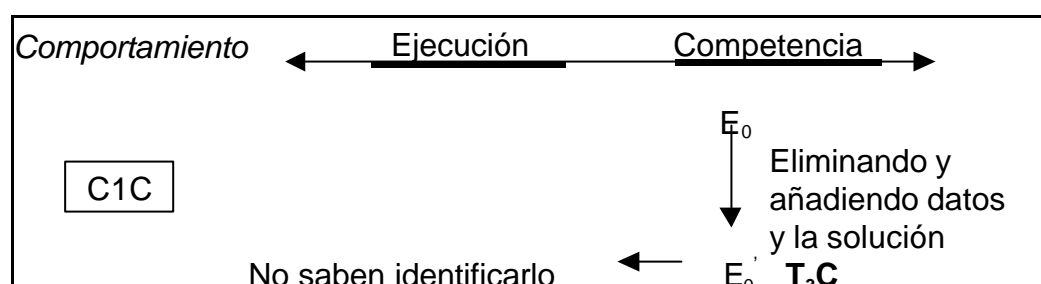


PROBLEMA 12

- Nueve alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Cinco alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2A], que se concreta en: identifica el problema como mal definido y acciones dirigidas por los datos.

- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 45%) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:



PROBLEMA 13

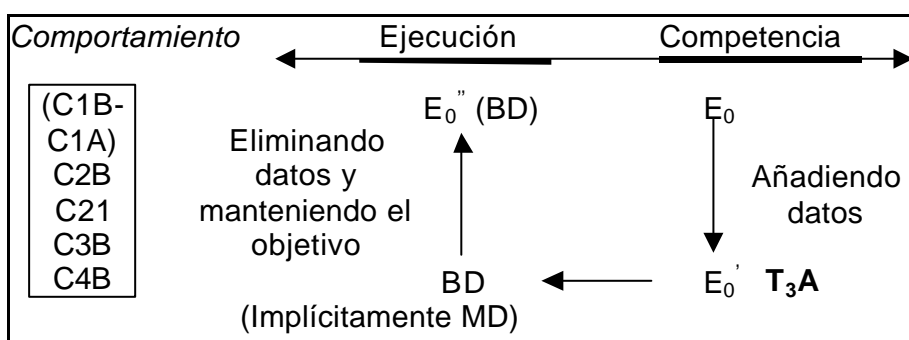
- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Cuatro alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A], que se concreta en: identifican el problema como mal definido.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifica el problema como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4C], que se concreta en: identifica el problema

como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y lo transforma en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado por T_2A .

- Seis alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican explícitamente el problema como bien definido e implícitamente como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.

- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 30%) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:



PROBLEMA 14

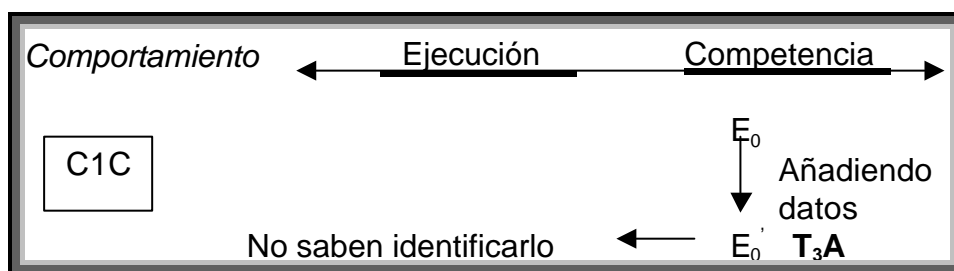
- Once alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.

- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C23-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo datos y lo transforma en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C23-C3C-C4C], que se concreta en: identifica explícitamente el problema como bien definido e implícitamente como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y lo transforma en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica explícitamente el problema como bien definido e implícitamente como mal

definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.

- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4A], que se concreta en: identifica explícitamente el problema como bien definido e implícitamente como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y lo transforma en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado por T_2A .

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 55 %) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:



PROBLEMA 15

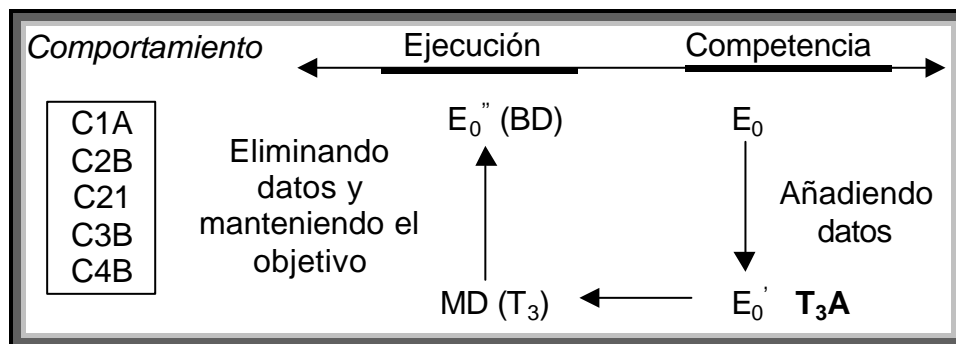
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifica el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la

secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.

- Once alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican explícitamente el problema como bien definido e implícitamente como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.

- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4A], que se concreta en: identifican explícitamente el problema como bien definido e implícitamente como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado por T_2A .

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 55%) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:



PROBLEMA 16

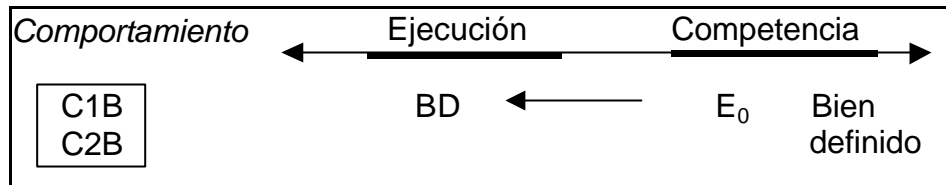
- Cuatro alumnos presentan un comportamiento determinado por la

secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.

- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifica el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Ocho alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4A], que se concreta en: identifica explícitamente el problema como bien definido e implícitamente como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y lo transforma en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado por T_2A .
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4A], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y lo transforma en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado

por T_2A .

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 40%) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:

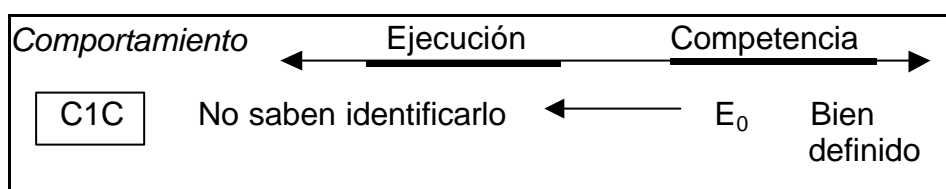
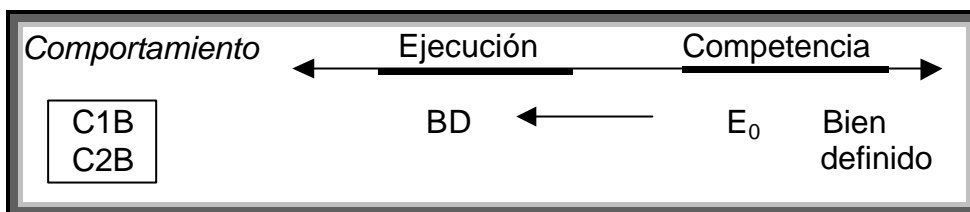


PROBLEMA 17

- Cinco alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Diez alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4A], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado por T_2A .
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y lo

transforma en un problema bien definido.

Por lo tanto, los comportamientos regulares de estos resolutores (un 50% y un 25%) en este problema, quedan reflejados en los siguientes diagramas:

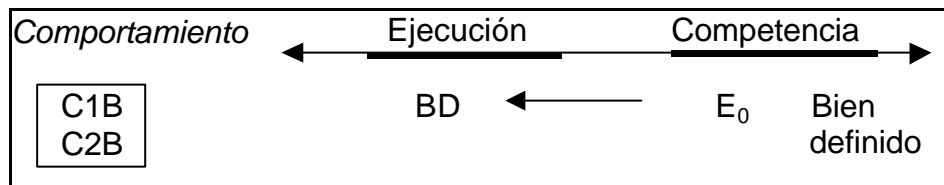
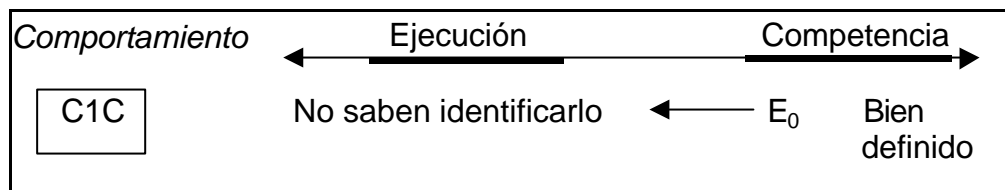


PROBLEMA 18

- Nueve alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Seis alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifica el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza añadiendo y eliminando datos y lo transforma en un problema bien definido.

- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo.

Por lo tanto, los comportamientos regulares de estos resolutores (un 45% y un 30%) en este problema, quedan reflejados en los siguientes diagramas:



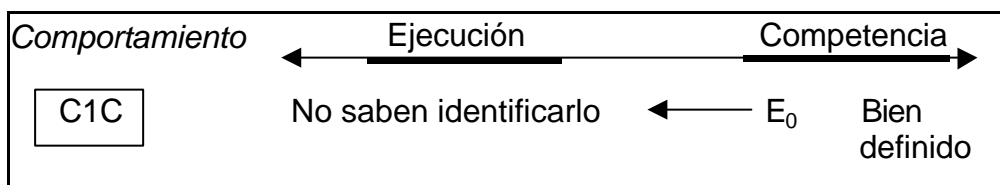
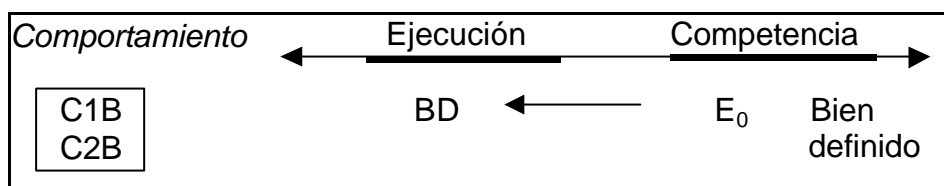
PROBLEMA 19

- Cinco alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Ocho alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por los datos.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2A], que se concreta en: identifica el problema como mal definido y acciones dirigidas por los datos.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifica los datos y mantiene el objetivo, la modificación la realiza eliminando datos y lo

transforma en un problema bien definido.

- Cinco alumnos comentan que el problema ya está hecho pues es similar a uno que habían hecho el día anterior.

Por lo tanto, los comportamientos regulares de estos resolutores (un 40% y un 25%) en este problema, quedan reflejados en los siguientes diagramas:



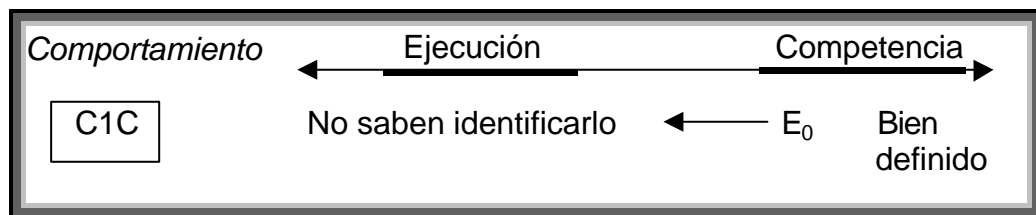
PROBLEMA 20

- Diez alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifica el problema como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1B], que se concreta en: identifica el problema como bien definido, las acciones no podemos saber si están dirigidas por los datos o por el objetivo.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2A], que se concreta en: identifican el problema como

mal definido y acciones dirigidas por los datos.

- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Dos alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3C-C4B], que se concreta en: identifica el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo y eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.
- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], que se concreta en: identifican el problema como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y lo transforman en un problema mal definido tipo T_3 , quedando caracterizado por T_3A .

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 50 %) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:



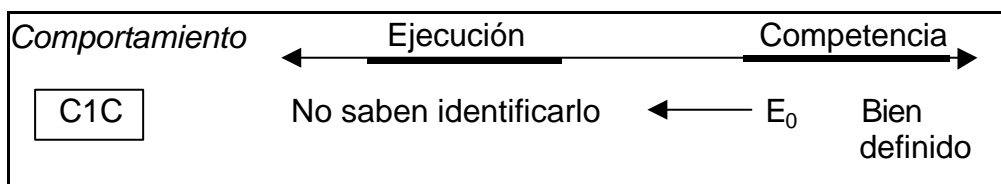
PROBLEMA 21

- Ocho alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.
- Un alumno presenta un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2A], que se concreta en: identifica el problema como bien definido

y acciones dirigidas por los datos.

- Cuatro alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema como bien definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Cuatro alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [C1A-C2B], que se concreta en: identifican el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo.
- Tres alumnos presentan un comportamiento determinado por la secuencia [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4A], que se concreta en: identifican explícitamente el problema como bien definido e implícitamente como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema mal definido tipo T_2 , quedando caracterizado por T_2A .

Por lo tanto, el comportamiento regular de estos resolutores (un 40 %) en este problema, queda reflejado en el siguiente diagrama:



6.2.2.3 Discusión y consideraciones.

La discusión y consideraciones se presentará con relación a los comportamientos regulares e invariantes de estos resolutores.

CON RELACIÓN A LOS COMPORTAMIENTOS REGULARES E INVARIANTES

- Con respecto a la categoría de análisis (1), observamos que (Anexo 4, tablas 29 y 32):

a) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos (problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21), los comportamientos más frecuentes en estos resolutores, difieren según el contexto, de manera que: en el contexto aritmético, el comportamiento más frecuente es: identificarlos como bien definidos [C1B]; en el contexto algebraico, los comportamientos más frecuentes son: identificarlos como bien definidos [C1B] y no saber identificarlos [C1C]; en el contexto geométrico, el comportamiento más frecuente es: no saber identificarlos [C1C].

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 (problemas 1, 2, 3, 4, 5 y 6), observamos diferencias según el contexto, de manera que: el comportamiento más frecuente en el contexto aritmético es: identificarlos como mal definidos [C1A]; en el contexto algebraico, identificarlos como bien definidos [C1B]; en el contexto geométrico, no saber identificarlos [C1C] y identificarlos como mal definidos [C1A].

c) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 (problemas 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16), observamos diferencias según el contexto, de manera que: el comportamiento más frecuente en el contexto aritmético es: identificarlos como mal definidos [C1A]; en el contexto algebraico, identificarlos como mal definidos [C1A] y no saber identificarlos [C1C]; en el contexto geométrico, no saber identificarlos [C1C] y identificarlos como mal definidos [C1A].

Observamos que, el comportamiento: no saber identificarlos [C1C], lo observamos en todos los problemas presentados, principalmente en el contexto geométrico.

En resumen, podemos indicar, que se detecta la influencia del contexto, en la identificación correcta de los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos, de manera que es el contexto aritmético donde menor dificultad presentan estos resolutores para identificarlos correctamente, y es el contexto algebraico donde mayor dificultad presentan, siendo los contextos algebraico y geométrico donde más situaciones se observan, en las que no saben identificar el problema.

- Con respecto a la categoría de análisis (2), observamos que (anexo 4, tablas 30 y 33):

a) Con relación a: acciones dirigidas por los datos o por el objetivo, el comportamiento de estos resolutores, en problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos y como mal definido tipo T_3 es: acciones dirigidas por el objetivo [C2B], independientemente del contexto, en cambio, en los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , observamos que mientras en el contexto aritmético y geométrico el comportamiento más frecuente es acciones dirigidas por el objetivo [C2B], en el contexto algebraico es acciones dirigidas por los datos [C1A].

b) Con relación a: qué modifican al replantear el problema dado, observamos diferencias según el contexto y la tipología del problema presentado. En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, el único comportamiento que observamos es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] independientemente del contexto. Ante los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , hay diferencias según el contexto, de manera que, en el contexto aritmético, los comportamientos observados son: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] y modificar el objetivo y mantener los datos [C22]: en el

contexto algebraico, los comportamientos observados son: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] y modificar los datos y el objetivo [C23]; en el contexto geométrico, aunque el comportamiento más frecuente es modificar el objetivo y mantener los datos [C22], observamos los comportamientos: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] y modificar los datos y el objetivo [C23].

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , hay diferencias según el contexto, de manera que, en el contexto aritmético, aunque el comportamiento más frecuente es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] también se observa el comportamiento: modificar el objetivo y mantener los datos [C22]; en el contexto algebraico, aunque el comportamiento más frecuente es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21] también se observa el comportamiento: modificar los datos y el objetivo [C23]; en el contexto geométrico, el único comportamiento observado es: modificar los datos y mantener el objetivo [C21].

Es decir, que el comportamiento: modificar los datos y el objetivo [C23], aparece únicamente en el contexto algebraico.

Podemos señalar con relación a esta categoría, que es en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 de contexto algebraico, donde con mayor frecuencia las acciones de estos resolutores están dirigidas por los datos, observando que en estos casos, los problemas son identificados incorrectamente como bien definidos, sin embargo, cuando las acciones están dirigidas por el objetivo, los problemas son identificados tanto de forma correcta como incorrecta.

Además, cuando las acciones están dirigidas por el objetivo, al replantear el problema modifican los datos y en menor medida los datos y

el objetivo, no encontrando situaciones donde modifiquen únicamente el objetivo.

- Con respecto a la categoría de análisis (3), observamos que (anexo 4, tablas 31 y 34):

a) En los problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos, encontramos diferencias según el contexto, de manera que en el contexto aritmético, el único comportamiento que aparece, cuando modifican los datos al replantear el problema dado, es: eliminar datos [C3B]; en el contexto algebraico observamos los tres comportamientos de esta categoría: añadir datos [C3A], eliminar datos [C3B] y añadir y eliminar datos [C3C]; en el contexto geométrico, los comportamientos observados son: eliminar datos [C3B] y añadir y eliminar datos [C3C].

Es decir, que frente a problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, el comportamiento: añadir datos [C3A] se observa únicamente en el contexto algebraico.

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , los comportamientos que presentan estos resolutores en los contextos geométrico y algebraico son: añadir datos [C3A] y añadir y eliminar datos [C3C], en cambio en el contexto aritmético es: añadir datos [C3A].

Es decir, que frente a problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , el comportamiento: eliminar datos [C3B] no se observa en ningún contexto.

c) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definido tipo T_3 , observamos que, en los contextos aritmético y algebraico, estos resolutores presentan los tres comportamientos de esta categoría: añadir datos [C3A], eliminar datos [C3B] y añadir y eliminar

datos [C3C], en cambio en el contexto geométrico los comportamientos observados son: eliminar datos [C3B] y añadir y eliminar datos [C3C].

Es decir, que frente a problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , el comportamiento: añadir datos [C3A] no se observa en el contexto geométrico.

- Con respecto a la categoría de análisis (4), observamos que (Anexo 4, tablas 31 y 34):

a) En los problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos, encontramos diferencias según el contexto, de manera que en los contextos aritmético y geométrico, los comportamientos que aparecen son: transformarlos en un problema mal definido tipo T_2 [C4A] y transformarlos en un problema bien definido [C4B], en cambio, en el contexto algebraico observamos todos los comportamientos de esta categoría: transformarlos en un problema bien definido [C4B], transformarlos en un problema mal definido tipo T_2 [C4A] y transformarlos en un problema mal definido tipo T_3 [C4C].

Es decir, que frente a problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, el comportamiento: transformar el problema en un problema mal definido tipo T_3 [C4C] lo observamos únicamente en el contexto algebraico.

b) En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 y tipo T_3 , los comportamientos que presentan estos resolutores son los siguientes: en el contexto aritmético, transformarlos en un problema bien definido [C4B] y transformarlos en un problema mal definido tipo T_3 [C4C]; en el contexto algebraico observamos los tres comportamientos de esta categoría, transformarlos en un problema bien definido [C4B], transformarlos en un problema mal definido tipo T_2 [C4A] y transformarlos en un problema mal definido tipo T_3

[C4C]; en el contexto geométrico, los comportamientos observados son transformarlos en un problema bien definido [C4B] y transformarlos en un problema mal definido tipo T_2 [C4A].

Es decir, que frente a problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 y tipo T_3 , el comportamiento: transformarlos en un problema mal definido tipo T_3 [C4C], no se observa en el contexto geométrico.

El comportamiento de identificar el problema planteado como mal definido pero no saber replantearlo, se observa en los todos los tipos de problemas planteados y en los tres contextos analizados.

El análisis de las categorías 3 y 4 nos permite indicar, nuevamente, que no siempre, el hecho de añadir datos cuando un problema es caracterizado desde la competencia como mal definido tipo T_2 o eliminar datos cuando es mal definido tipo T_3 , indica que estos resolutores hayan establecido relaciones correctas entre los datos y el objetivo ya, que el resultado de estas acciones les conduce a obtener un problema mal definido porque faltan o sobran datos.

- Con respecto a los comportamientos regulares e invariantes obtenidos del análisis conjunto de las cuatro categorías de análisis, observamos que:

Analizando cada problema observamos únicamente un comportamiento invariante, ante un problema caracterizado como mal definido tipo T_2 de contexto geométrico, determinado por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado. En cuanto a la existencia de comportamientos regulares, éstos se observan en todos los problemas presentados, excepto en un problema caracterizado como mal definido tipo T_3 de contexto aritmético, que describimos a continuación.

En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien definidos, observamos dos comportamientos regulares, en los tres contextos estudiados, determinados por las secuencias siguientes: [C1B-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido y sus acciones están dirigidas por el objetivo, y por la secuencia [C1C], que se concreta en: no saben identificar el problema presentado.

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definido de tipo T_2 , observamos cuatro comportamientos regulares, determinados por las secuencias siguientes: [C1A-C2B], que se concreta en: identifican el problema presentado como mal definido, sus acciones están dirigidas por el objetivo y no lo replantean; [C1B-C2A], que se concreta en: identifican el problema presentado como bien definido y sus acciones están dirigidas por los datos; [C1A-C2B-C21-C3A-C4B] que se concreta en: identifican el problema explícitamente como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y lo transforman en un problema bien definido; [C1A-C2B-C21-C3A-C4C] que se concreta en: identifican el problema explícitamente como mal definido, acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan añadiendo datos y lo transforman en un problema mal definido tipo T_3 .

En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos de tipo T_3 , observamos cuatro comportamientos regulares, determinados por las secuencias siguientes: [C1A-C2B] que se concreta en: identifican el problema como mal definido y acciones dirigidas por el objetivo; [C1A-C2B-C21-C3B-C4B] y [(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4B], que se concretan en: identifican el problema explícitamente mal definido (o bien, explícitamente como bien definido e

implícitamente como mal definido), acciones dirigidas por el objetivo, modifican los datos y mantienen el objetivo, la modificación la realizan eliminando datos y lo transforman en un problema bien definido.

En la siguiente tabla quedan recogidos los comportamientos regulares e invariantes observados:

Comportamientos REGULARES e INVARIANTES				
Tipo	Comportamiento	Contexto aritmético	Contexto algebraico	Contexto geométrico
BD	INVARIANTE	--	--	--
	REGULAR	[C1B-C2B] [C1C]	[C1B-C2B] [C1C]	[C1B-C2B] [C1C]
MD T₂	INVARIANTE	--	--	[C1C]
	REGULAR	[C1A-C2B] [C1A-C2B-C21-C3A-C4B] [C1A-C2B-C21-C3A-C4C]	[C1B-C2A]	[C1A-C2B]
MD T₃	INVARIANTE	--	--	--
	REGULAR	[(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4B] [C1A-C2B-C21-C3B-C4B]	[(C1B-C1A)-C2B-C21-C3B-C4B] [C1B-C2B]	[C1C]

Tabla 6. 18

Del análisis de los comportamientos regulares e invariantes podemos considerar que:

1. En estos resolutores no podemos asegurar que la presencia de problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos no genera confusión en la actuación ante los bien definidos, ya que tanto el comportamiento identificarlos como bien definidos [C1B], como el comportamiento no saber identificarlos [C1C], aparecen como comportamientos regulares.

2. Observamos también, la baja presencia de comportamientos regulares que indican el establecimiento de relaciones correctas entre los datos y el objetivo, en los tres tipos de problemas y en los tres contextos, pero especialmente en los problemas de encontrar mal definidos de contexto algebraico.

3. Los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 son los que presentan mayor dificultad en el establecimiento de relaciones correctas entre los datos y el objetivo.

- Respecto a los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , donde la solución está incluida en los datos dados (ver tabla 6.18), los comportamientos observados en estos resolutores nos indican la dificultad que presentan para identificar la solución como tal, siendo muy frecuente el identificarla como un dato más del problema, necesario para la obtención del objetivo pedido o como un dato que sobra.
- Respecto a los problemas bien definidos impropios (ver tabla 6.19) observamos de nuevo, la influencia del contexto en la identificación de los datos redundantes como tales, de manera que es en los problemas de contexto geométrico donde mayor dificultad se presenta.

Sin embargo, debemos nuevamente considerar, que el hecho de que un resolutor identifique de forma correcta un problema bien definido impropio, no significa que haya establecido relaciones correctas entre los datos y el objetivo. Encontramos situaciones donde los datos redundantes son identificados como datos necesarios y el problema es identificado por los resolutores como bien definido.

- De forma resumida presentamos las consideraciones más significativas con respecto a los cinco grupos de comportamientos, descritos en la fase III del estudio piloto (capítulo 4, apartado 4.4.3), respecto al análisis de:

cómo identifican (categoría de análisis 1), si actúan o no sobre las condiciones y/o el objetivo es decir, si replantean o no el problema presentado (categorías de análisis 2, 3 y 4) y si validan o refutan el problema.

a) En los problemas de encontrar, caracterizados desde la competencia como bien definidos, la actuación menos frecuente es: interpretarlo explícitamente como bien definido e implícitamente como mal definido transformándolos en un problema bien o mal definido (comportamiento D). En los problemas de contexto aritmético, la actuación más frecuente es: interpretarlo explícitamente como bien definido y no transformarlo ni explícita ni implícitamente (comportamiento C). En los problemas de contexto algebraico, las actuaciones más frecuentes son: interpretarlo explícitamente como bien definido y no transformarlo ni explícita ni implícitamente (comportamiento C) y no saber cómo identificar el problema (E). En los problemas de contexto geométrico, la actuación más frecuente es no saber cómo identificar el problema (comportamiento E).

b) En problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 , la actuación: interpretarlo explícitamente como bien definido e implícitamente como mal definido transformándolo en un problema bien o mal definido (comportamiento D) no se observa en ningún caso. En los problemas de contexto aritmético, la actuación más frecuente es: interpretarlo explícitamente como mal definido y transformarlo explícitamente en un problema bien o mal definido (comportamiento B). En los problemas de contexto algebraico, la actuación más frecuente es: interpretarlo explícitamente como bien definido y no transformarlo ni explícita ni implícitamente (comportamiento C). En los problemas de contexto geométrico, las actuaciones más frecuentes son: interpretarlo explícitamente como mal definido y no replantearlo (comportamiento A) y no saber cómo identificar el problema

(comportamiento E).

c) En problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , observamos que: En los problemas de contexto aritmético, las actuaciones más frecuentes son: interpretarlo explícitamente como mal definido e implícitamente como mal definido transformándolo en un problema bien o mal definido (comportamiento B), interpretarlo explícitamente como bien definido y no transformarlo ni explícita ni implícitamente (comportamiento C) e interpretarlo explícitamente como bien definido y transformarlo implícitamente en un problema bien o mal definido (comportamiento D). En los problemas de contexto algebraico, las actuaciones más frecuentes son: interpretarlo explícitamente como mal definido y transformarlo explícitamente en un problema bien o mal definido (comportamiento B), interpretarlo explícitamente como bien definido y no transformarlo ni explícita ni implícitamente (comportamiento C) y no saber identificarlo (comportamiento E). En los problemas de contexto geométrico, las actuaciones más frecuentes son: interpretarlo explícitamente como bien definido y transformarlo implícitamente en un problema bien o mal definido (comportamiento D) y no saber identificarlo (comportamiento E).

La siguiente tabla, muestra los porcentajes observados en cada uno de los comportamientos:

Tipo	Contexto	Problema	A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	E (%)
MDT ₂	Aritmético	1	40	40	15	--	5
		4	15	60	10	--	5
	Algebraico	2	--	35	60	--	5
		5	5	35	50	--	10
	Geométrico	3	5	5	--	--	90
		6	35	25	15	--	25
MDT ₃	Aritmético	7	20	70	--	--	10
		10	10	15	35	--	20
		13	10	20	25	30	15

Tipo	Contexto	Problema	A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	E (%)
	Algebraico	8	10	65	5	--	20
		11	20	15	50	10	5
		14	--	15	10	20	55
	Geométrico	9	--	15	15	--	70
		12	15	5	35	--	45
		15	10	10	5	65	10
BD	Aritmético	16	10	20	45	5	20
		19	5	5	40	--	25
	Algebraico	17	--	10	60	5	25
		20	15	25	10	--	50
	Geométrico	18	15	5	35	--	45
		21	20	15	25	--	40

Tabla 6. 19

De esta manera observamos los siguientes comportamientos regulares:

1 No saber identificar el problema por no saber si está bien o mal definido (comportamiento E), en los problemas de contextos algebraico y geométrico, caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos.

2 Aceptar como válido el problema presentado, identificándolo explícitamente como bien definido e implícitamente como mal definido y transformándolo en un problema bien o mal definido (comportamiento D), en los problemas mal definidos tipo T_3 de contextos aritmético y geométrico.

3 Aceptar como válido el problema presentado, identificándolo como bien definido, (comportamiento C), en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos y en los tres contextos.

4 No aceptar como válido el problema presentado, identificándolo como mal definido y replanteándolo en un problema bien o mal definido (comportamiento B) en los contextos aritmético y algebraico de los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia mal

definidos.

5 No aceptar como válido el problema presentado, identificándolo como mal definido y no replanteándolo (comportamiento A), en los problemas mal definidos tipo T_2 de contextos aritmético y geométrico.

El análisis de los comportamientos regulares, nos permite observar la dificultad que presenta el contexto en la actuación correcta en la fase de preparación, ante los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos. De esta manera, observamos actuaciones incorrectas (presentan el comportamiento C o E cuando es un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como mal definido, o presentan el comportamiento A, B, D o E cuando es un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido) en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos de contextos algebraico y geométrico, y en los caracterizados desde la competencia como mal definidos en los tres contextos.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

- **ESQUEMA GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN: OBJETIVOS**

- **CONCLUSIONES GENERALES RESPECTO A LOS OBJETIVOS**

- **CONCLUSIONES GENERALES**
 - **Respecto a la metodología e instrumentos utilizados**
 - **Respecto a los estudios específicos sobre la resolución de problemas de encontrar bien y mal definidos**

- **PERSPECTIVAS FUTURAS**

7.1 ESQUEMA GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN: OBJETIVOS

En este capítulo presentamos un resumen global de la investigación donde se relatan los principales resultados obtenidos. Se hace también una breve exposición de las líneas de investigación que nos proponemos seguir en el futuro.

Como queda reflejado a lo largo de la presente memoria, nuestro trabajo se encuentra dentro de la resolución de problemas y dentro de éstos se consideran los problemas de encontrar, bien y mal definidos. Se presenta como un estudio descriptivo de las actuaciones de los estudiantes, a fin de construir una comprensión coherente de la naturaleza de los procesos de solución asociados con dichos problemas y del impacto que el experimentar con estos problemas puede tener sobre el estudiante que aprende importantes ideas matemáticas.

Consideramos en nuestro trabajo la *fase de preparación* del modelo de Bourne y otros (1971) (*Preparación, Producción y Enjuiciamiento*), centrándonos en la actuación de los alumnos en esta fase, que traducida al modelo de Dewey (1933) se concreta en: *identificación de la situación problema, caracterización del problema y análisis de medios-fines*, esto es, cómo analizan e interpretan los resolutores los datos disponibles inicialmente, las restricciones y cómo identifican el criterio de solución. Los modelos propuestos anteriormente presentan ciertas analogías con las fases propuestas por Polya (1957), de manera que, la *preparación* supone la comprensión de los datos disponibles inicialmente y de las restricciones, además de una identificación del criterio de solución (*comprender y concebir un plan*).

Por otra parte, recurrimos también al modelo de actuación de resolutores reales de Schoenfeld (1985), el cual modificamos y adaptamos a nuestra investigación, apoyándonos en las ideas de Polya y

en la observación del proceso de resolución de problemas por sujetos reales.

La delimitación del estudio, establecida en el capítulo 1, se concreta en los tres objetivos generales de la investigación que se presentan en los capítulos 4, 5 y 6, donde fueron analizados.

Los tres objetivos generales son:

PRIMER OBJETIVO: Presentar una propuesta de organización conceptual de los términos usados. Elaborar un Modelo de Competencia Formal.

SEGUNDO OBJETIVO: Estudiar la naturaleza de las actuaciones de los resolutores en la fase de preparación, frente a los problemas de encontrar bien y mal definidos, determinando los comportamientos regulares e invariantes.

TERCER OBJETIVO: Estudiar las justificaciones que utilizan los alumnos en la fase de preparación, para validar y refutar los problemas de encontrar bien y mal definidos. Establecer categorías de análisis de las justificaciones utilizadas.

7.2 CONCLUSIONES GENERALES RESPECTO A LOS OBJETIVOS

Con relación al primer objetivo: *Presentar una propuesta de organización conceptual de los términos usados. Elaborar un Modelo de Competencia Formal*, señalamos que, para elaborar el Modelo de Competencia de los problemas de encontrar, es decir, un modelo formal abstracto de problema, tenemos en cuenta, únicamente, al problema en su organización lógico formal de los objetos implicados, es decir, conceptos, relaciones y procedimientos que le caracterizan. En la elaboración de este modelo, consideramos los “problemas de encontrar” de la clasificación de Polya (1962) y adaptamos algunos elementos utilizados en la definición de espacio problema de Newell y Simon (1972),

señalando que mientras estos autores se refieren en su definición a las diferentes representaciones cognitivas del problema que hace el resolutor a partir del entorno de la tarea, nosotros hablamos de un Modelo de Competencia Formal y de las representaciones semióticas posibles de las soluciones lógicas del problema.

El Modelo de Competencia Formal construido nos permitió caracterizar los diferentes problemas de encontrar, bien y mal definidos y, a partir de él, establecer categorías de análisis que permitiera estudiar las actuaciones de los resolutores.

Caracterizados los problemas de encontrar, decidimos llamarles “bien definidos” por su correspondencia con algunos problemas del ámbito escolar y al negar las condiciones del problema de encontrar bien definido, las situaciones restantes obtenidas las llamaríamos problemas de encontrar “mal definidos”.

Partiendo de esta caracterización, nos encontramos con siete posibles categorías de problemas de encontrar mal definidos que se concretaron en tres tipos diferentes que tenían sentido, que denominamos tipo T_1 , T_2 y T_3 .

Con relación al segundo objetivo: *Estudiar la naturaleza de las actuaciones de los resolutores en la fase de preparación, con los problemas de encontrar bien y mal definidos, determinando los comportamientos regulares e invariantes*, hemos observado que, a pesar de que los problemas presentados implicaban contenidos matemáticos, de niveles de enseñanza anteriores a los que cursaban los alumnos objeto de estudio, éstos tuvieron dificultades para identificar de forma correcta dichos problemas.

Se pone de manifiesto en la investigación que, el contexto del problema presentado así como la tipología del mismo, tienen influencia en los

comportamientos de los resolutores, tanto de la ESO como del CSE. Es en los problemas de contextos geométrico y algebraico, así como en los mal definidos tipo del T_3 (faltan datos), donde más actuaciones incorrectas observamos, con respecto a su identificación y a las acciones realizadas sobre los datos. También es en estos contextos donde los estudiantes tienen mayor dificultad para identificar los datos redundantes cuando los problemas son bien definidos impropios, y, donde mayor dificultad tienen para identificar la solución como tal, cuando la solución está incluida en los datos.

Si el análisis lo hacemos atendiendo al nivel académico de los resolutores, observamos que las actuaciones más incorrectas en todas las categorías estudiadas, se dan en los resolutores de niveles académicos medio y bajo, tanto del CSE como de la ESO.

Determinamos comportamientos invariantes, que reflejan tanto actuaciones correctas como incorrectas, en las dos poblaciones de estudio: CSE y ESO, destacando que la existencia de comportamientos invariantes es más frecuente en los alumnos del CSE, y que cuando estos comportamientos invariantes indican comportamientos incorrectos se observan principalmente en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos, tanto en los alumnos del CSE como en los de la ESO.

Con relación a los comportamientos regulares, éstos son más frecuentes entre los resolutores de niveles académicos alto y medio, tanto en los alumnos del CSE como en los de la ESO.

Constatamos que el trabajo con problemas mal definidos hace más rica la fase de preparación, que si únicamente propusiéramos problemas bien definidos. El planteamiento conjunto de problemas de encontrar bien y mal definidos no parece generar confusión en los resolutores, por lo que

pensamos que puede favorecer la resolución de problemas bien definidos, el potenciar la fase de preparación, incluyendo también los problemas mal definidos.

Los comportamientos invariantes con relación a las actuaciones correctas (entendidas cuando identifican el problema presentado de forma correcta y, si se trata de un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como mal definido, lo transforman en un problema bien definido) son:

1. *Identificarlo como bien definido, estando sus acciones dirigidas por el objetivo [C1B-C2B], comportamiento observado en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, tanto en los alumnos de la ESO como en los del CSE.*
2. *Identificarlo como mal definido, estando sus acciones dirigidas por el objetivo y transformarlo en un problema bien definido, eliminando datos y manteniendo el objetivo [C1A-C2B-C21-C3B-C4B], comportamiento observado en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos porque sobran datos (T_3), en los alumnos del CSE.*
3. *Identificarlo como mal definido, estando sus acciones dirigidas por los datos y transformarlo en un problema bien definido, manteniendo los datos y modificando el objetivo [C1A-C2A-C22-C4B], comportamiento observado en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos porque faltan datos (T_2), en los alumnos del CSE.*

Los comportamientos invariantes con relación a las actuaciones incorrectas (entendidas como que identifican el problema presentado de forma incorrecta y/o lo transforman en un problema mal definido), observados principalmente en los problemas de encontrar caracterizados

desde la competencia como mal definidos, tanto en los alumnos del CSE como en los de la ESO son:

1. *No saber identificarlo* [C1C], comportamiento observado en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos porque faltan datos (T_2) de contexto geométrico, en los alumnos de la ESO.
2. *Identificarlo como bien definido, estando sus acciones dirigidas por el objetivo* [C1B-C2B], comportamiento observado en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos porque sobran datos (T_3) de contexto aritmético, comportamiento invariante presente en los alumnos del CSE.

Si nos fijamos en el nivel académico de los resolutores, y considerando los datos obtenidos de las entrevistas videograbadas, observamos la presencia de un único comportamiento invariante: *identificarlo como bien definido, estando sus acciones dirigidas por el objetivo* [C1B-C2B], en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos, situación detectada, especialmente, en los resolutores de nivel académico alto del CSE y niveles académicos alto y medio de la ESO.

Los comportamientos regulares, con relación a las actuaciones correctas e incorrectas, se encuentran en las dos poblaciones de estudio: CSE y ESO y en los tres tipos de problemas estudiados: bien definidos, mal definidos porque faltan datos (Tipo T_2) y mal definidos porque sobran datos (Tipo T_3).

Los comportamientos regulares, determinados en las pruebas videograbadas, son más frecuentes entre los resolutores de niveles académicos medio y alto, tanto si son alumnos del CSE como si son de la ESO.

Los comportamientos regulares que muestran actuaciones incorrectas son:

1. *No saber identificarlo* [C1C], comportamiento observado en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien definidos. Se dan en los alumnos de la ESO y en los tres contextos, y en alumnos del CSE en el contexto geométrico; y, también, en problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 en alumnos de la ESO en el contexto algebraico.
2. *Identificarlo como bien definido, estando sus acciones dirigidas por el objetivo* [C1B-C2B], comportamiento observado en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , en los alumnos de la ESO en el contexto algebraico.
3. *Identificarlo como bien definido, estando sus acciones dirigidas por los datos* [C1B-C2A], comportamiento observado en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_2 de contexto algebraico, en los alumnos de la ESO y del CSE y en problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , de contexto geométrico, en los alumnos del CSE.
4. *Identificarlo como mal definido, estando sus acciones dirigidas por el objetivo y transformarlo en un problema mal definido, añadiendo datos y manteniendo el objetivo* [C1A-C2B-C21-C3A-C4C], comportamiento observado en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos porque faltan datos (T_2), de contexto geométrico, en los alumnos de la ESO
5. *Identificarlo como mal definido, estando sus acciones dirigidas por el objetivo y transformarlo en un problema mal definido, eliminando datos y manteniendo el objetivo* [C1A-C2B-C21-C3B-C4C], comportamiento observado en los problemas de encontrar caracterizados desde la

competencia como mal definidos porque sobran datos (T_3), de contextos algebraico y geométrico, en los alumnos del CSE.

Con relación al tercer objetivo: *Estudiar las justificaciones que utilizan los alumnos en la fase de preparación, para validar y refutar los problemas de encontrar bien y mal definidos. Establecer categorías de análisis de las justificaciones utilizadas.*

El estudio de las justificaciones en términos de prueba y argumentación (primera fase de observación descriptiva de las justificaciones, descrita en el apartado 2.3.3 del capítulo 2), muestra diferencias con respecto al nivel académico de los resolutores, de manera que, cuando el resolutor se enfrenta a problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como bien y mal definidos, si es de nivel académico alto, su comportamiento más habitual es validarlos, en cambio si es de nivel académico medio o bajo, se dan los comportamientos validarlos y refutarlos. En los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos tipo T_3 , de contexto geométrico, encontramos diversas situaciones de validación que se manifiestan en los tres niveles académicos estudiados. En los resolutores de los tres niveles académicos, encontramos el comportamiento: no saber validar ni refutar el problema presentado, en general cuando el problema es de contexto geométrico.

La utilización de recursos de prueba predominan sobre los de Argumentación, tanto para validar como para refutar, independientemente del nivel académico de los resolutores.

Los recursos de argumentación no se suelen utilizar sólo en las justificaciones, sino que normalmente van acompañados del uso de recursos de prueba. Encontramos, no obstante, algunas situaciones donde se utiliza como único recurso la argumentación, en situación de

refutar.

Podemos concluir de la muestra analizada, que los alumnos validan frecuentemente mediante el uso de recursos de prueba y refutan mediante los recursos de prueba y de prueba y argumentación.

En las justificaciones desarrolladas por los resolutores, encontramos el uso de diferentes tipos de pruebas y argumentaciones, tanto cuando validan como cuando refutan. De esta manera, con respecto a los recursos de prueba, encontramos diferentes tipos de recursos. En primer lugar los referidos a la Matemática como disciplina, de manera que hay situaciones en las que los alumnos recurren a experiencias cuantificables o bien se sitúan en el campo de la demostración matemática, o dan un ejemplo sacado de la situación planteada e incluso toman, del problema planteado, situaciones que pueden ser falsas y verdaderas a la vez. Análogamente a las argumentaciones, observamos también la utilización de diferentes recursos, de manera que en unos casos, justifican su actuación describiendo otra situación con la que establecen diferencias o semejanzas, o bien plantean casos particulares que ilustran la validez de sus justificaciones, o bien se apoyan en los juicios hechos por personas con algún prestigio social e incluso recurren a la risa frente a situaciones, que por no ser habituales, les resulta de poca consideración.

Los resultados obtenidos, nos permiten construir un primer sistema de categorías de justificaciones usadas por los resolutores en términos de prueba. Esta situación se da cuando la justificación está en función de relaciones matemáticas observadas por el resolutor (en relación con la disciplina) o de comportamientos matemáticos determinados por el resolutor en los procedimientos seguidos, que involucran y relacionan las cantidades numéricas o las magnitudes explícitas (apartado 2.3.3 del capítulo 2).

Los cuatro recursos de prueba de la Matemática establecidos inicialmente fueron:

- a) El *razonamiento empírico*, se trata de la justificación que se realiza recurriendo a hechos físicos o experiencias cuantificables, es decir, es un sistema o procedimiento fundado en mera práctica o rutina, de manera que la justificación se basa en imágenes mentales rudimentarias en las cuales no están presentes habilidades de verificación o transformación.
- b) El *razonamiento analítico*, se trata de la justificación que se basa en la demostración matemática, pasando del todo a las partes.
- c) La *contradicción*, se trata de la justificación que se basa en considerar situaciones del problema que pueden ser presentadas como falsas y verdaderas a la vez, lo que le lleva a la confusión. Los estudiantes razonan: si sólo tomo “esto”, se puede resolver, pero si tomo además “esto otro”, no se puede resolver.
- d) El *contraejemplo*, se trata de la justificación basada en un ejemplo, sacado de la misma situación.

Los resultados obtenidos nos permiten construir un sistema de categorías de justificaciones usadas por los resolutores en términos de argumentación. Esta situación se da cuando la justificación está en función de formas verbales, escritas o habladas, que exteriorizan y evidencian conceptos y procesos acerca de los problemas o situaciones problemas bien y mal definidos, pero que no ponen en relación las cantidades explícitas.

Los dos tipos de argumentaciones establecidos inicialmente fueron:

- a) Los *argumentos de comparación o simplemente analogía*, se trata de la justificación que se realiza mediante la explicación verbal, pero tomando otro objeto (situación) para establecer diferencias o semejanzas.

b) El *ridículo*, se trata de la justificación que se realiza dando a entender lo contrario de lo que se dice literalmente (justificación indirecta) o que la situación planteada, por su rareza o extravagancia puede mover a risa, e incluso cuando la situación planteada les resulta extraña, irregular y de poco aprecio y consideración.

Al ampliar estas investigaciones en los estudios definitivos encontramos nuevamente los recursos descritos con anterioridad, además de recursos de prueba y argumentación no categorizados hasta ahora (descritos en los capítulos 5 y 6):

Con respecto a los recursos de prueba, la utilización de recursos procedentes de la Matemática, junto con nuevas situaciones donde la justificación se hace recurriendo a concepciones establecidas culturalmente para justificar las matemáticas, de manera que estos nuevos recursos hacen referencia a creencias y actitudes sobre las mismas, y se apoyan en procesos impuestos por la costumbre o en fuentes diversas que gozan de absoluta credibilidad, como puede ser la tarea, el estatus del profesor, la opinión del compañero competente, etc. Esta investigación posterior, nos permite establecer la distinción entre recursos de naturaleza interna y recursos de naturaleza externa, de manera que obtenemos una organización más fina del recurso “prueba”.

La Prueba se considera como los criterios de tipo conceptual y procedimental que manifiestan los resolutores y exponen como justificación de la validación o refutación de los espacios semióticos construidos, es decir, se trata de un sistema conformado por objetos, procesos, conceptos, registros y representaciones matemáticas, que utilizan los resolutores y que implican y relacionan las cantidades numéricas o de magnitudes explícitas.

Encontramos que en los recursos de pruebas utilizados por los

alumnos, podemos hacer distinción entre los de naturaleza interna y recursos de naturaleza externa. Los recursos de naturaleza interna son los que están en relación con la disciplina, es decir, los consideramos cuando la justificación está en función de relaciones matemáticas observadas por el resolutor o de comportamientos matemáticos determinados por el resolutor en los procedimientos seguidos. Los de naturaleza externa son los que atienden a factores externos, más que a requerimientos matemáticos, es decir, los consideramos cuando la justificación se hace recurriendo a concepciones establecidas culturalmente para justificar las matemáticas, de manera que el nivel de sistematización en la justificación hace referencia a creencias, actitudes, etc., sobre las matemáticas, más que a verdaderos procesos de inferencia matemática.

De esta manera, los cuatro recursos que hemos denominado de la matemática ya descritos: el razonamiento empírico, el razonamiento analítico, el contraejemplo y la contradicción, los consideramos recursos de naturaleza interna.

A estos recursos de prueba de naturaleza interna podemos añadir otros recursos de prueba, más específicos, que se dan cuando relacionan cantidades homogéneas (por ejemplo: *si me dan kg y me piden precio, los kg sobran pues kg y pesetas no tienen nada que ver*), o cuando recurren a experiencias cuantificables buscando una relación que les genera conflicto, o recurren a experiencias cuantificables para relacionar conceptos (por ejemplo: *“si me dan las dimensiones de una figura, lo único que hay que hacer es calcular áreas o perímetros”*; *“si me dan una magnitud de tiempo, tengo que calcular una velocidad”*; etc.). Análogamente encontramos situaciones donde el resolutor muestra una pluralidad de interpretaciones que, al ser tomadas simultáneamente, le generan contradicción.

Con relación a las argumentaciones, observamos también la utilización de los diferentes recursos ya descritos, como la comparación o analogía y el ridículo. Sin embargo, en algunos casos, encontramos situaciones en las que justifican su actuación recurriendo a la explicación verbal para explicar las características ellas, o para dar a entender lo contrario de lo que se dice literalmente, ironizando la situación planteada donde incluso observamos situaciones donde el resolutor se apoya en sucesos cotidianos de su entorno social para justificar su actuación.

Los resultados obtenidos en estos estudios, capítulos 4, 5 y 6, no sólo nos permiten confirmar y ampliar los tipos de justificaciones utilizadas, sino, también precisar mejor algunas de las justificaciones descritas.

Describimos ahora, estas nuevas categorías de prueba:

Con relación a los recursos de prueba de naturaleza interna pudimos determinar una organización más fina del recurso: *razonamiento empírico*, que denominaremos de tipo P1 y P2.

El recurso: razonamiento empírico tipo P1, se da cuando el resolutor relaciona las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas, recurriendo a experiencias cuantificables, como el hecho de relacionar o no cantidades homogéneas.

El recurso: razonamiento empírico tipo P2, se da cuando el resolutor relaciona las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas, recurriendo a experiencias cuantificables, como el hecho de relacionar unos conceptos con otros, como son, por ejemplo, las dimensiones de una figura geométrica con el cálculo del área, o el tiempo con la velocidad, etc.

La ampliación de los recursos de prueba a recursos de naturaleza externa nos permite organizar de manera coherente los tipos de

justificaciones usadas por los resolutores, llegando a determinar dos tipos de justificaciones: el ritual y las creencias, y en este último hasta tres formas diferentes: autoridad de la tarea, del profesor y del compañero competente.

Presentamos brevemente cada una de ellas:

El *ritual*, se da cuando el resolutor justifica su actuación, atendiendo a factores externos, más que a requerimientos matemáticos, pues se apoya en un proceso impuesto por la costumbre.

Las *creencias por autoridad*, se dan cuando el resolutor justifica su actuación teniendo como referente una fuente que goza de absoluta credibilidad, bien por la tarea en sí misma (*creencias por autoridad de la tarea*), bien por el profesor (*creencias por autoridad del profesor*) o bien por un compañero (*creencias por autoridad del compañero competente*).

Los recursos de argumentación se amplían con un nuevo tipo de argumentación, que denominaremos *descripción*, además de los ya descritos: argumentos de comparación o analogía y el ridículo o ironía. La *descripción* se da cuando la justificación se realiza mediante la explicación verbal, identificando, explicitando o proyectando las características de la situación. Podemos decir, que se trata de dar la idea de una cosa, de un proceso o de una situación (enumeración de los pasos del procedimiento y explicitación de cada paso).

De esta manera los resultados obtenidos en los diferentes estudios de la investigación, reseñados en los capítulos 4, 5 y 6, nos permiten aportar un sistema organizado de categorías de las justificaciones utilizadas por los resolutores en la fase de preparación en problemas de encontrar bien y mal definidos. De forma esquemática, resumimos el sistema de categorías obtenido en el siguiente cuadro:

RECURSOS		
PRUEBA		ARGUMENTACIÓN
Naturaleza interna	Naturaleza externa	
<ul style="list-style-type: none"> •Empírico •Analítico 	<ul style="list-style-type: none"> - P1 - P2 •Ritual 	<ul style="list-style-type: none"> •Descripción-Explicación •Comparación-Analogía •Ridículo o ironía
<ul style="list-style-type: none"> •Contradicción •Contraejemplo 	<ul style="list-style-type: none"> •Creencias -Autoridad de la tarea -Autoridad del profesor -Autoridad del compañero competente 	

7.3 CONCLUSIONES GENERALES

7.3.1 Respecto a la metodología e instrumentos utilizados

Con el objeto de poder desarrollar la investigación, nos vimos en la necesidad de elaborar modelos de competencias desde los puntos de vista epistemológico y cognitivo. De esta manera, nuestras aportaciones, a nivel metodológico, se concretan en:

1. Elaboración de un Modelo de Competencia Formal, de los problemas de encontrar bien y mal definidos, en el que consideramos el problema únicamente en su organización lógico formal de los objetos implicados, es decir, conceptos, relaciones y procedimientos que le caracterizan. Este Modelo de Competencia Formal construido nos parece de gran utilidad porque permite caracterizar los diferentes problemas de encontrar bien y mal definidos y caracterizar también las actuaciones de los resolutores.
2. Elaboración de un Esquema de análisis para observar la actuación de los resolutores reales en la fase de preparación con problemas de

encontrar bien y mal definidos. La construcción de este modelo de actuación es una adaptación del modelo de Schoenfeld (1985), que se concreta después de varios trabajos preparatorios.

3. Elaboración de un sistema de categorías que configuran un instrumento de análisis y valoración de los comportamientos de los resolutores, que permitió categorizar las actuaciones de los mismos, y determinar la existencia o no, de comportamientos regulares e invariantes.

4. Construcción de un sistema de Categorías de análisis de las justificaciones utilizadas, que se convierte en un instrumento teórico que relaciona y tipifica las justificaciones de los estudiantes frente a problemas de encontrar bien y mal definidos, en la fase de preparación.

Estas cuatro elaboraciones dan consistencia al marco teórico y al modelo metodológico elaborado para la investigación que constituyen una aportación propia, presentada en los diferentes capítulos de esta memoria.

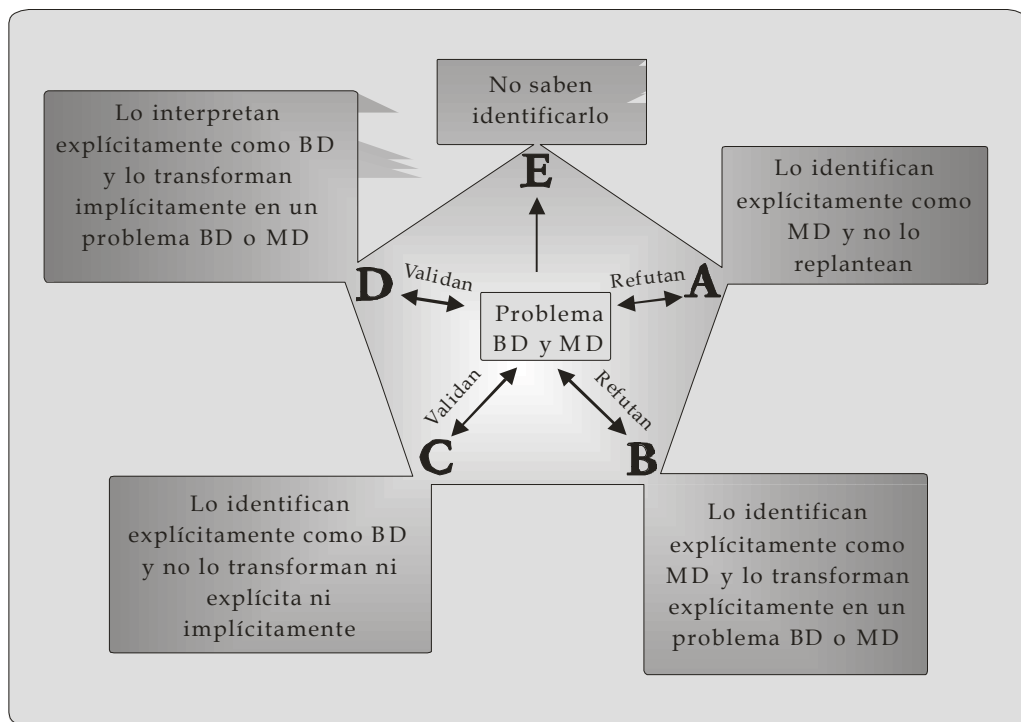
7.3.2 Respecto a los estudios específicos sobre la resolución de problemas de encontrar bien y mal definidos

Tras analizar los datos obtenidos con respecto a la naturaleza de las actuaciones de los resolutores en la fase de preparación los problemas de encontrar bien y mal definidos, en cuanto a los comportamientos regulares e invariantes, observamos, que si tomamos la primera parte de las secuencias de comportamientos regulares e invariantes (categoría de análisis 1) que nos indica cómo identifican el problema presentado, y englobamos el resto de las secuencias, que indican si actúan o no sobre el problema planteado, encontramos cinco grupos de comportamientos:

A) Identifican explícitamente el problema planteado, como mal definido y no lo transforman [C1A-C2A] o [C1A-C2B].

- B) Identifican explícitamente el problema planteado, como mal definido y lo transforman en un problema bien o mal definido [C1A-C2..-C3..-C4..].
- C) Identifican explícitamente el problema planteado, como bien definido y por lo tanto no lo transforman [C1B-C2A] o [C1B-C2B].
- D) Identifican explícitamente el problema planteado, como bien definido y lo identifican implícitamente como mal definido, transformándolo en un problema bien o mal definido [(C1B-C1A)-C2..-C3..-C4..].
- E) El quinto grupo, describe el comportamiento: *no saben identificar el problema planteado* [C1C].

Si ahora, incorporamos las justificaciones utilizadas en su actuación en términos de validar o refutar, podemos expresar mediante un gráfico, cinco comportamientos, que permite describir las actuaciones de los resolutores en la fase de preparación, en los problemas de encontrar bien y mal definidos.



Cada uno de los alumnos investigados puede ser identificado mediante un itinerario descrito a través de los diferentes vértices del gráfico:

Vértice **A**: Resolutores que refutan el problema planteado, identificándolo explícitamente como mal definido y no actuando sobre él, de manera que no lo replantean.

Vértice **B**: Resolutores que refutan el problema planteado, identificándolo explícitamente como mal definido y actuando sobre él, transformándolo en un problema bien o mal definido.

Vértice **C**: Resolutores que validan el problema presentado, interpretándolo explícitamente como bien definido y, por lo tanto no lo replantean.

Vértice **D**: Resolutores que validan el problema presentado, interpretándolo explícitamente como bien definido e implícitamente como mal definido, transformándolo en un problema bien o mal definido.

Vértice **E**: Resolutores que no validan ni refutan al no saber identificar el problema planteado.

De esta manera, los resultados obtenidos en los diferentes estudios de esta investigación se pueden presentar, de manera general, observando que:

1. La existencia de actuaciones incorrectas, es decir, las que presentan el comportamiento C o E cuando es un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como mal definido, y el comportamiento A, B, D o E, cuando es un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como bien definido, se observa en los alumnos del CSE y de la ESO en los problemas caracterizados desde la competencia como mal definidos de los tres contextos; y, en los caracterizados desde la competencia como bien definidos de contextos algebraico y geométrico.

2. La existencia de desplazamientos entre los vértices del gráfico se observa, principalmente, en los problemas caracterizados desde la competencia como bien definidos y como mal definidos del tipo T_2 de contextos algebraico y geométrico.
3. Los resolutores ubicados en el vértice D son alumnos de la ESO, concretamente, los de niveles académicos alto y medio si el problema es mal definido porque sobran datos (T_3), y el de nivel académico bajo, en los tres tipos de problemas.
4. Los resolutores situados en el vértice E son alumnos del CSE de niveles académicos alto y medio, en problemas de contextos algebraico y geométrico, y alumnos de la ESO de los tres niveles académicos, en los contextos algebraico y geométrico.

7.4 PERSPECTIVAS FUTURAS

A lo largo del desarrollo y en la formulación de todo este trabajo de investigación, han surgido numerosos aspectos que nos proponemos abordar en el futuro.

- a) El replanteamiento de problemas, que en nuestra investigación surge de las transformaciones realizadas sobre el problema dado, nos planteó un nuevo interrogante: ¿qué ocurrirá en las fases de producción y enjuiciamiento, cuando el resolutor replantea un problema dado en otro mal definido?, ¿cómo lo identificará?, ¿cómo justificará su actuación?
- b) El estudio de potencialidades y dificultades que genera la implementación en el aula de los problemas de encontrar bien y mal definidos, mediante el diseño de materiales curriculares, consensuado con los profesores de Primaria y Secundaria Obligatoria. Este tipo de investigación, muy relacionado con la práctica, podría ayudar al estudio acerca del desarrollo de habilidades útiles para la resolución de problemas en general.

c) Aplicación de los instrumentos teóricos elaborados, en términos de modelos de competencias, desde el punto de vista epistemológico (Modelo de Competencia Formal de problemas de encontrar bien y mal definidos) y, desde el punto de vista cognitivo (el Esquema de análisis o modelo de actuación; el sistema de categorías que configura un instrumento de análisis y valoración de los comportamientos de los resolutores; el sistema de categorías de análisis de las justificaciones utilizadas, que relaciona y tipifica las justificaciones de los estudiantes; y el gráfico que permite ubicar el comportamiento de los resolutores a lo largo de los diferentes espacios semióticos que presentan en sus actuaciones).

d) En particular, queda abierto el análisis de los diferentes comportamientos que surgen en la resolución de problemas de encontrar bien y mal definidos, en todas sus fases: preparación, producción y enjuiciamiento (Bourne y otros, 1971).

Bibliografía

- Avital, S. (1992). Exploratory problems as a Motivational Factor in the Learning of Mathematics. *Paper presented in the Working Group 5 of the ICME-7 Conference*. Quebec.
- Association of Teachers of Mathematics (1985). ATM at Wesminster. *Mathematics Teaching*, 111, pp. 44-46.
- Banerji, R. B. (1980). *Artificial Intelligence. A Theoretical Approach*. Elsevier North Holland, inc: New York.
- Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine*. Editions du Seuil: Paris.
- Bauersfeld, H. y Skowronek, H. (1976). Research related to the mathematical learning process. En H. Athen y H. Kunle (Eds.) *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education*. Universität Karlsruhe, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: Karlsruhe.
- Bell, A.W., Costello, J. y Küchemann, D. (1983). *A Review of Research in Mathematics Education. Research on learning and teaching*. NFER-Nelson.
- Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética: Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas*. Paidós: Barcelona.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects –state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp.37-68.
- Booker, G., Coob, P. y Navarro de Mendicuti, T. (Eds) (1990). *Proceedings of the fourteenth PME Conference*. Mexico.

BIBLIOGRAFÍA

- Borassi, R. (1986). On the Nature of Problems. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 17, pp. 125-142.
- Bourne, L.E.; Ekstrand, B.R. y Dominowski, R.L. (1971). *The Psychology of Thinking*. (Traducida al castellano: 1975. *Psicología del pensamiento*. Ed. Trillas: Mexico).
- Branca, N.A. (1980). Problem solving as a Goal, Process and Basic Skill. En S. Krulik y R.E. Reys (Eds). *Problem Solving in School Mathematics*. NCTM: Reston, Virginia.
- Bransford, J.D. y Stein, B.S. (1984). *The IDEAL Problem Solver*. (Traducción al castellano: 1986. Solución IDEAL de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear. Ed. Labor: Barcelona).
- Brown, N. (1978). Cognitive development and the learning of mathematics. En A. Floyd (Ed.), *Cognitive Development in the School Years*. Croom Helm: London.
- Brown, S.I. y Walter, M.I. (1983). *The art of problem posing*. Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ.
- Butts, T. (1980). Posing Problems Properly. En S. Krulik y R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics*, pp 23-33. National Council of Teachers of Mathematics: Reston, Virginia.
- Carl, I.M. (1989). Essential Mathematics for the Twenty-first Century: The Position of the National Council of Supervisors of Mathematics. *Mathematics Teacher*, 82 (6), pp. 470-474.
- Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Castro, E. y Castro, E. (1996). Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de magisterio sobre la estructura multiplicativa. En J. Giménez, S. Llinares y M^a V. Sánchez (Eds), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, pp. 119-141. Edit. Comares: Granada.

- Castro, E., Morcillo, N. y Castro, E. (1999). Representation produced by Secondary Education Pupils in Mathematical Problem Solving. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the PME-NA*. Eric: Columbus, Oh.
- Carrillo Yáñez, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de alumnos de más de 14 años. Aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva.
- Carrillo Yáñez, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva: Huelva.
- Charles, R. y Lester, F. (1982). *Teaching problem solving. What, Why, How* Dale Seymour: Palo Alto.
- Charles, R. y Silver, E. (Eds) (1988). *The teaching and assessing of Mathematical Problem Solving. Research Agenda for Mathematics Education*. Vol. 3. LEA y NCTM: Reston, Virginia.
- Chi, M. y Glaser, R. (1986). Capacidad de resolución de problemas. En R. J. Sternberg (Ed.). *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información*, pp 303-324. Labor: Barcelona.
- Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Ed. La Muralla: Madrid.
- Consejería de Educación de Canarias (1993). *Diseños curriculares. Educación Primaria*. Gobierno de Canarias. Tenerife.
- Craig Loewen, A. (1995). Creative use of worksheets: lessons my daughter taught me. *Teaching children Mathematics*. Vol. 2, nº 2, pp 96-99.
- Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts. Report of the Committee of Inquiry into the teaching of Mathematics in School* (Traducción al castellano: 1985. Las Matemáticas sí cuentan. MEC: Madrid).

BIBLIOGRAFÍA

- Davis, P.J. y Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*. MEC y Labor: Barcelona.
- De Corte, E. y Verschaffel, L. (1989). Teaching word problems in the Primary School: What Research has to say to the teacher. En B. Greer y G. Mulhern: *New Directions in Mathematics Education*. Routledge: London.
- Dewey, J. (1933). *How We Think*. D. C. Heath: Boston. (Traducción al castellano: 1989. *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Paidós: Barcelona).
- Duncker, K. (1945). On problem solving. *Psychological Monographs*, 58.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang: Suisse.
- Eco, U. (1984). *Obra abierta*. Ariel: Barcelona.
- Ellerton, N.F. (1986). Children's made-up mathematics problems. A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17, pp. 261-271.
- English, L.D. (1998). Childrens Problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*. 29 (1), pp. 83-106.
- Frederiksen, N. (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *Review of Educational Research*, 54, pp 363-407.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel: Dordrecht.
- Gil Pérez, D. (1997). Capítulo 0. En J. Carrascosa y S. Martínez, *Problemas de Física*. Ed. Santillana: Madrid.
- Goldin, G.A. (1985) Thinking scientifically and Thinking Mathematically. En E.A. Silver (Ed), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*. Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ.

- Goldin, G.A. (1987). Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving. En C. Janvier (Ed), *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ.
- Goldin, G.A. (1988). Affective representation and mathematical problem solving. En J. Behr, C.B. Lacampagne y M.M. Wheeler (Eds), *Proceedings of the Tenth Annual Meeting of PME-NA*. DeKalb, IL: Northern Illinois.
- Goldin, G.A (1989). The development of a model for competence in mathematical problem solving based on systems of cognitive representation. En A. Borbás (Ed), *Proceedings of the Twelfth Conference PME*. OOK Printing House: Veszprem. Hungary.
- Goldin, G.A. (1993). The IGPME Working Group on Representations. *Paper presentado en el XVII PME*. Japan.
- Goldin, G. y McClintock, E. (Eds) (1984). *Task Variables in Mathematical Problem Solving*. The Franklin Institute Press: Philadelphia, Pennsylvania.
- Greeno, J. G. (1978). Natures of problem solving abilities. En W. K. Estes (Ed.), *Handbook of learning and cognitive processes*. Vol. 5, pp 239-270. Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ.
- Guzmán, M. de (1991). *Para pensar mejor*. Ed. Labor: Barcelona.
- Hadamard (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press: Princeton.
- Hashimoto, Y. (1987). Classroom practice of problem solving in Japanese elementary schools. En J. Becker, T. Miwa (Eds), *Proceedings of the U.S.-Japan seminar on mathematical problem solving*, pp. 94-119. Southern Illinois University: Carbondale, IL.

BIBLIOGRAFÍA

- Hashimoto, Y. y Sawada, T. (1984). Research on the mathematics teaching by developmental treatment of mathematical problems. E. T. Kawaguchi (Ed.), *Proceedings of the ICMI-JSME regional Conference on mathematical education*, pp. 309-313. Japan Society of Mathematical Education: Japan.
- Hernández, J. y Socas, M.M. (1994a). A verbal arithmetic problem solving model, that juxtapose two self-sufficient representational systems. En J.P. Da Ponte y J.F. Matos (Eds), *Proceedings of the XVIII PME Conference*, pp. 72. Lisbon, Portugal.
- Hernández, J. y Socas, M.M. (1994b). Modelos de competencia para la resolución de problemas basado en los sistemas de representación en Matemáticas. Monográfico del I Seminario Nacional sobre Lenguaje y Matemáticas. *Suma*, 16, pp. 82-90. Madrid.
- Hernández, J. y Socas, M.M. (2000). Arithmetic word problems invented by children on the basis of an arithmetic operation. *Focus on learning problems in mathematics*. USA. (En prensa).
- Hernández, J., Noda, A. y Socas, M.M. (1996). La enseñanza de los problemas mal definidos. *Actas ICME-8*, pp. 518. Sevilla.
- Kantowski, M.G. (1981). Problem solving. En E. Fennema (Ed.) *Mathematics Education research: Implications for the 80's*. NCTM: Reston, VA.
- Kleijne, W. y Schuring, H. (1993). Assessment of examinations in the Netherlands. En M. Niss (Ed.), *Cases of assessment in mathematics education: An ICMI study*. Kluwer: Dordrecht.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem Formulating: Where Do Good Problems come From? En A. Schoenfeld (Ed.). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ.

- Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press: Chicago.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 235-264.
- Lesh, R. (1997). Matematización: la necesidad “real” de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 15 (3), pp. 377-391.
- Lester, F. K. y Garofalo, J. (Eds.) (1982). *Mathematical problem solving. Issues in research*. The Franklin Institute Press: Philadelphia.
- Leung, S.S. (1993). *The relation of mathematical knowledge and creative thinking to the mathematical problem solving of prospective elementary school teachers on tasks differing in numerical information content*. Doctoral Diss. University of Pittsburgh: Pittsburgh, PA.
- Little, C. (1993). The School Mathematics Project: Some secondary school assessment initiatives in England. En M. Niss (Ed.), *Cases of assessment in mathematics education: An ICMI study*. Kluwer: Dordrecht.
- Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1982). *Pensar matemáticamente*. MEC y Labor: Barcelona.
- Mayer, R.E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Ed. Paidós Ibérica: Barcelona.
- Maza Gómez, C. (1989). *Sumar y restar*. Editorial Visor: Madrid.
- Maza Gómez, C. (1991a). *Enseñanza de la suma y de la resta*. Editorial Síntesis: Madrid.
- Maza Gómez, C. (1991b). *Multiplicar y dividir: A través de la resolución de problemas*. Editorial Visor: Madrid.
- Maza Gómez, C. (1991c). *Enseñanza de la multiplicación y división*. Editorial Síntesis: Madrid.

BIBLIOGRAFÍA

- Maza Gómez, C. (1995). *Aritmética y representación: De la comprensión del texto al uso de materiales*. Paidós: Barcelona.
- MEC (1989). *Diseño Curricular base. Educación Primaria*. Servicio de publicaciones del MEC: Madrid.
- NCTM (1980). *An agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. NCTM: Reston, Va.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. NCTM: Reston, Va. (Traducción al castellano: 1991, *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. SAEM THALES: Granada).
- NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Maths*. NCTM: Reston, Va.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM: Reston, Va.
- Newel, A. y Simon, H. (1972). *Human Problem Solving*. Prentice Hall: New Jersey.
- Nohda, N. (1986). A study of “open-approach” method in school mathematics. *Tsukuba Journal Educational Study in Mathematics*. 5, pp. 119-131.
- Nohda, N. (1993). Teaching and evaluating using “open-ended problems” in classroom. *ZDM*, 95/2, pp.57-61.
- Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (1996). El uso de sistemas de representación no verbales en problemas aritméticos en el DCB de Primaria. *Números*, vol. 27, pp. 13-31. SCPM “Isaac Newton”. Tenerife.
- Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (1997). Study of the preparation stage in the resolution of badly defined problems. En *Proceedings of the 21st Conference PME*, vol. 1, pp. 282. Finland.

- Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (1998a). Analysis of students' behaviour regarding badly defined problems. En *Proceedings of the PME-22*. Vol. 4, pp. 291. South Africa.
- Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (1998b). Estudio del comportamiento de alumnos de Magisterio en la resolución de problemas mal definidos. *Guinigüada*. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- Noda, A., Hernández, J., y Socas, M. M. (1999a). La resolución de Problemas de Matemáticas mal definidos. *Educación Matemática*. (Enviado).
- Noda, A., Hernández, J., y Socas, M. M. (1999b). Study of justifications made by students at the "Preparation stage" of badly defined problems. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the International Group for the PME-23*. Vol. 3, pp. 345-352. Haifa, Israel.
- Noda, A.; Hernández, J. y Socas, M. M. (1999c). Acciones e invariantes en la resolución de problemas mal definidos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 12, tomo 1, pp. 179-184. Grupo Editorial Iberoamérica: Mexico.
- Noda, A.; Hernández, J. y Socas, M. M. (1999d). Problemas de encontrar bien y mal definidos. Una propuesta de caracterización. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, pp. 187-200. Universidad de La Laguna.
- Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (2000a). Argumentaciones y Pruebas de validación o refutación, utilizadas por alumnos del CSE y de la ESO, en la fase de "preparación" ante problemas de encontrar bien y mal definidos. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*. Universidad de La Laguna.

BIBLIOGRAFÍA

- Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (2000b). Study about the problem solving badly defined. Actions e invariants. *Nordisk Matematikdidactikk (Nordic Studies in Mathematics Education)*. (Enviado).
- Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (2000c). Study about proofs and arguments who use the students in the resolution of well and ill problems. *Hiroshima Journal of Mathematics education*. (Enviado).
- Owen, E. y Sweller, J. (1985) What do students learn while solving mathematics problems? *Journal Educational Psychology*, 77, pp. 272-284.
- Palarea, M.M. y Socas, M.M. (1995). Sistemas de Representación en la Resolución de Problemas Algebraicos. *Suma*, 20, pp. 29-35.
- Pehkonen, E. (1991). Problem solving in Mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, vol. 1, pp 1-4.
- Pehkonen, E. (1995). Using open-ended problems in mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, vol. 2, pp. 55-57.
- Perelman, Ch. y Olbrech-Tyteca, L. (1989). *Tratado de la argumentación*. Gredos: Barcelona.
- Pérez, M.P. y Pozo, J.L. (1994). Aprender a resolver problemas y resolver problemas para aprender. En J.L. Pozo Muncio (Ed), *La solución de problemas*. Aula XXI. Santillana: Madrid.
- Pluinage, F. (1996). Diferentes formas de razonamiento matemático. En F. Hitt (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa*, pp. 77-91. Grupo Editorial Iberoamericana: Mexico.
- Poincaré, H. (1948). Mathematical creation. En *Scientific American*, 179, pp. 54-57.
- Pollak, H.O. (1987). Cognitive science and mathematics education: A mathematician's perspective. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*. Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ.

- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton. University Press. (Traducción al castellano: 1966. Matemáticas y razonamiento plausible. Tecnos: Madrid).
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton University Press: New Jersey. (Traducción al castellano: 1976. Cómo plantear y resolver problemas. Ed. Trillas: Mexico).
- Polya, G. (1962). *Mathematical discovery*. John Wiley and Sons: New York.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Ed. Síntesis: Madrid.
- Puig, L. (1993). *Elementos para la instrucción en resolución de problemas de matemáticas*. Tesis doctoral. Universitat de Valencia (Publicado en 1996. *Elementos de resolución de Problemas*. Colección Mathema. Ed. Comares: Granada).
- Reitman, W. R. (1965). *Cognition and thought: An information processing approach*. Wiley: New York.
- Sanz, I. (1989). Comunicación, lenguaje y matemáticas. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds), *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Alfar: Sevilla.
- Schoenfeld, A. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical problem solving. En R. Lesh y M. Landau (Eds), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Academic Press: New York.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press: New York.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D.A. Grouws (Ed), *Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning*. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company: New York.

BIBLIOGRAFÍA

- Shimada, S. (Ed.) (1977). *On lessons using open-ended problems in mathematics teaching*. Mizuumishobo: Tokyo.
- Silver, E. (Ed) (1985). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple research Perspectives*. Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ.
- Silver, E.A. (1993). On mathematical problem solving. En I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, F.L. Lin (Eds), *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. I. Japan.
- Silver, E.A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. *ZDM* 95 (2), pp. 67-72.
- Silver, E.A. y Adams, V.M. (1987). Using open-ended problems. *Arithmetic Teacher*, 34 (9), pp. 34-35.
- Silver, E. A. y Cai, J.F. (1996). An Analysis of Arithmetic Problem Posing by Middle School students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (5), pp. 521-539.
- Silver, E. A., Kilpatrick, J. y Schlesinger, B. (1990). *Thinking through mathematics*. The College Entrance Examination Board: New York.
- Simon, H. A. (1973). The structure of ill structured problems. *Artificial Intelligence*, 4, pp 181-201.
- Simon, H. A. (1975). Learning with understanding. *Mathematics Education Information Reports*. ERIC/SMEAC: Columbus, Ohio.
- Socas, M.M. y Hernández, J. (1996). Sobre la resolución de problemas verbales aritméticos de estructuras aditivas y multiplicativas en la Educación Primaria. *25 años de Matemáticas en la Universidad de La Laguna*, pp. 485-496. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.

- Socas, M.M., Hernández, J. y Noda, A. (1997). Estructura de los problemas aditivos en el campo conceptual de las magnitudes discretas relativas. *Actas Relme-11*, pp. 11-14. Mexico.
- Socas, M.M., Hernández, J. y Noda, A. (1998a). Modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas. *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (2), pp. 261-269.
- Socas, M.M., Hernández, J. y Noda, A. (1998b). Clasificación de PAEV aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas. En L. Rico y M. Sierra (Eds), *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 51-67. Universidad de Salamanca.
- Socas, M.M., Hernández, J. y Noda, A. (2000). Sobre una organización de problemas bien y mal definidos. *Cuadrante* (Enviado).
- Stacey, K. (1995). The challenges of keeping open problem-solving open in school mathematics. *ZDM* 27 (2), pp. 62-67.
- Stanic, G.M.A. y Kilpatrick. J. (1988). Historical perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. En R.I. Charles y E.A. Silver (Eds), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Vol 3. LEA y NCTM.
- Stephens, M. y Money, R. (1993). New development in senior secondary assessment in Australia. En M. Niss (Ed.), *Cases of assessment in mathematics education: An ICMI study*. Kluwer: Dordrecht.
- Sweller, J., Mawer, R. F. y Ward, M.R. (1983). Development of expertise in mathematical problem solving. *Journal of Experimental Psychology*, 112, pp. 639-661.
- Takahashi, A. (1996). Open-Ended problem solving in Japanese Elementary Schools. *Actas ICME-8*. Sevilla.

BIBLIOGRAFÍA

- Tortosa, A. y Castro E. (1997). Invención de problemas a través de situaciones ambientales. En J. Gutiérrez, J. Perales, J. Benayas y S. Calvo (Eds.), *Líneas de Investigación en Educación Ambiental*, pp. 81-85. Proyecto Sur de Ediciones: Granada.
- Verschaffel, L. y De Corte, E. (1995). Teaching realistic Mathematics modelling in the Elementary School. A teaching experiment with Fifth Graders'. *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 3, pp. 105-112. Brazil.
- Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. En A. J. Bishop; K. Clements; C. Keitel; J. Kilpatrick; C. Laborde (Eds). *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer: Dordrecht.
- Voss, J. F., Sherman, W. T. y Yeng, L. A. (1983). Individual differences in the solving of social science problems. En R. F. Dillon y R. R. Schmeck (Eds), *Individual differences in cognition*. Academic Press: New York.
- Voss, J. F. y Means, M. L. (1989). Towards a model of creativity based upon problem solving in the social sciences. En J.A. Glover, R.R. Ronning y C. R. Reynolds (Eds), *Handbook of creativity*. Plenum Press: New York.
- Wallas, G. (1926). *The Art of Thought*. Harcourt Brace: New York.
- Wertheimer, M. (1954). *Productive thinking*. Harper and Brothers Publishers: New York. (Traducido al castellano: 1991. *El pensamiento productivo*. Paidós: Barcelona).
- Yerushalmy, M.; Chazan, D. y Gordon, M. (1993). Posing problems: One aspect of bringing inquiry into classroom. En J. Schwartz, M. Yerushalmy y B. Wilson (Eds), *The Geometric Supposer: What is it a case of?*, pp. 117-142. Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ.

ÍNDICE

ANEXO 1: CUESTIONARIOS	1
Primer cuestionario utilizado en la fase I del estudio piloto.	3
Segundo cuestionario utilizado en la fase II, III y IV del estudio piloto.	4
Cuestionario definitivo utilizado en los estudios finales.	7
ANEXO 2: INSTRUMENTOS DE ANÁLISIS	11
Categorías de análisis utilizadas en la fase I del estudio piloto.	13
Categorías de análisis utilizadas en la fase II, III y IV del estudio piloto y en los estudios definitivos.	13
Esquema de análisis para observar la actuación de los alumnos en la resolución de problemas.	14
Primera fase de observación descriptiva de las justificaciones utilizadas por los alumnos.	15
Segunda fase de observación descriptiva focalizada de las justificaciones utilizadas por los alumnos.	16
ANEXO 3: TRANSCRIPCIONES.....	19
Alumnos del Centro Superior de Educación.	21
<i>Nivel académico alto</i>	21
<i>Nivel académico medio</i>	31
<i>Nivel académico bajo</i>	46
Alumnos del primer ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.	60
<i>Nivel académico alto</i>	60
<i>Nivel académico medio</i>	74
<i>Nivel académico bajo</i>	86
ANEXO 4: RESULTADOS GLOBALES.....	105
Fase I del estudio piloto.	108

<i>Resultados globales expresados en porcentajes:</i>	
<i>Tablas 1 y 2</i>	108
<i>Resultados globales expresados en número de alumnos:</i>	
<i>Tablas 3 y 4</i>	110
Fase II del estudio piloto	112
<i>Resultados globales expresados en porcentajes:</i>	
<i>Tablas 5, 6 y 7</i>	112
<i>Resultados globales expresados en número de alumnos:</i>	
<i>Tablas 8, 9 y 10</i>	115
Fase III del estudio piloto	118
<i>Resultados globales de la alumna de nivel académico medio-alto:</i>	
<i>Tablas 11 y 12</i>	118
<i>Resultados globales de la pareja de alumnos, de niveles académicos medio (Ella) y bajo (Él): Tablas 13 y 14</i>	120
Fase IV del estudio piloto	122
<i>Resultados globales expresados en porcentajes:</i>	
<i>Tabla 15</i>	122
<i>Resultados globales expresados en número de alumnos:</i>	
<i>Tabla 16</i>	123
Estudio definitivo con alumnos del Centro Superior de Educación.	124
<i>Resultados globales de la alumna de nivel académico alto:</i>	
<i>Tablas 17 y 18</i>	124
<i>Resultados globales de la alumna de nivel académico medio:</i>	
<i>Tablas 19 y 20</i>	129
<i>Resultados globales de la alumna de nivel académico bajo:</i>	
<i>Tablas 21 y 22</i>	134
Estudio definitivo con alumnos del primer Ciclo de la ESO	139
<i>Resultados globales del alumno de nivel académico alto:</i>	
<i>Tablas 23 y 24</i>	139

<i>Resultados globales del alumno de nivel académico medio:</i>	
<i>Tablas 25 y 26.....</i>	<i>144</i>
<i>Resultados globales del alumno de nivel académico bajo:</i>	
<i>Tablas 27 y 28.....</i>	<i>149</i>
Estudio definitivo con alumnos del primer Ciclo de la ESO.....	154
<i>Resultados globales de la prueba escrita expresados en porcentajes:</i>	
<i>Tablas 29, 30 y 31</i>	<i>154</i>
<i>Resultados globales de la prueba escrita expresados en número de</i>	
<i>alumnos: Tablas 32, 33 y 34.....</i>	<i>157</i>
ANEXO 5: COMPORTAMIENTOS GENERADOS DE LAS CATEGORÍAS	
DE ANÁLISIS.....	161
Fase I del estudio piloto.....	163
Fase II del estudio piloto.....	164
Fase III del estudio piloto.....	166
<i>Alumna de nivel académico medio-alto.....</i>	<i>166</i>
<i>Pareja de alumnos, de nivel académico medio (Ella) y nivel académico</i>	
<i>bajo (Él)</i>	<i>166</i>
Estudio final con alumnos del Centro Superior de Educación.	167
<i>Alumna de nivel académico alto</i>	<i>167</i>
<i>Alumna de nivel académico medio.....</i>	<i>168</i>
<i>Alumna de nivel académico bajo.....</i>	<i>169</i>
Estudio final con alumnos del Primer Ciclo de la ESO.....	170
<i>Alumno de nivel académico alto</i>	<i>170</i>
<i>Alumna de nivel académico medio.....</i>	<i>171</i>
<i>Alumno de nivel académico bajo.....</i>	<i>172</i>
<i>Prueba Escrita.....</i>	<i>173</i>

ANEXO 1

CUESTIONARIOS

- **PRIMER CUESTIONARIO: FASE I DEL ESTUDIO PILOTO**
- **SEGUNDO CUESTIONARIO: FASES II, III Y IV DEL ESTUDIO PILOTO**
- **CUESTIONARIO DEFINITIVO: ESTUDIOS FINALES**

PRIMER CUESTIONARIO UTILIZADO EN LA FASE I DEL ESTUDIO PILOTO

PROBLEMA A1.

En el corral de Antonio, hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay en el corral?

PROBLEMA B1.

A María le gusta pasear en bicicleta. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

PROBLEMA A2.

La carta de un bar es la siguiente:

Perros calientes	100 pesetas	Café con leche	75 pesetas
Papas fritas	85 pesetas	Coca cola	125 pesetas
Tostadas	100 pesetas	Hamburguesa	175 pesetas

Si a Luis no le gustan los perros calientes, ¿cuánto pagó por el desayuno?

PROBLEMA B2.

Un conejo come 3 raciones de 460 g de alimento cada semana. Una gallina come 2 raciones de 460 g de alimento cada semana. Un año tiene 52 semanas. ¿Cuánto alimento comerán 5 gallinas en una semana?

PROBLEMA A3.

Tenemos 10 jaulas con 12 pavos cada una y 6 jaulas con 8 conejos cada una. Si el kilo de pavo vale 900 pesetas y cada pavo pesa 4 kg y el kilo de conejo vale 550 pesetas y cada conejo pesa 3 kg, ¿cuánto valdrán todos los pavos y conejos juntos?

PROBLEMA B3.

Algunos estudiantes encontraron un mapa de un tesoro pirata con las siguientes pistas: Caminar 13 pasos al este del roble, 15 al norte y 18 al oeste; ahí caminar 9 pasos al norte y otros 5 al este; aquí podrán encontrar el tesoro. ¿Cuántos pasos en línea recta tendrán que caminar desde el árbol hasta el tesoro?

SEGUNDO CUESTIONARIO UTILIZADO EN LAS FASES II, III Y IV DEL ESTUDIO PILOTO

PROBLEMA A1.

La carta de un bar es la siguiente:

Perros calientes	100 pesetas	Café con leche	75 pesetas
Papas fritas	85 pesetas	Coca cola	125 pesetas
Tostadas	100 pesetas	Hamburguesa	175 pesetas

Si a Luis no le gustan los perros calientes, ¿cuánto pagó por el desayuno?

PROBLEMA A2.

En el corral de Antonio, hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay en el corral?

PROBLEMA A3.

En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. ¿Cuál es la edad del profesor de inglés?

PROBLEMA A4.

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el comprador le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. Si comienza a pagarla 4 meses más tarde, ¿cuánto tiene que pagar mensualmente?

PROBLEMA A5.

Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. En total se gastaron 1.200 pesetas. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

PROBLEMA A6.

¿Qué distancia separa el colegio del parque si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro recorre 62 metros y tardamos 6 horas?

PROBLEMA A7.

Tenemos 10 jaulas con 12 pavos cada una y 6 jaulas con 8 conejos cada una. El kilo de pavo vale 900 ptas., el cuarto kilo vale 225 ptas. y cada pavo pesa 4 kg; el kilo de conejo vale 550 ptas. y cada conejo pesa 3 kg ¿Cuánto valdrán todos los pavos y conejos juntos?

PROBLEMA A8.

En un corral hay gallinas y conejos. Hay 11 animales. Entre todos tienen 32 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

PROBLEMA A9.

¿Qué distancia separa el colegio del parque si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro y 30 cm de radio, da 315 vueltas?

PROBLEMA B1.

Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas. Paga la leche y el pan con un billete de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?

PROBLEMA B2.

A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa al instituto hay 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

PROBLEMA B3.

Dibuja el cuadrilátero A(-2,-1), B(1,4), C(4,3)) y calcula los puntos medios de cada lado del cuadrilátero..

PROBLEMA B4.

Una señora cría durante 52 semanas una cabra y 3 conejos. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen todo el pienso menos 128 gramos, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana?

PROBLEMA B5.

A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa al colegio es de 15 km y de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió la distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo quedándole 6 km por recorrer. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

PROBLEMA B6.

Necesitamos 5 láminas de dibujo de 23 cm de largo y 18 cm de ancho. Si se deja un margen de 2 cm a cada lado, ¿cuánto medirá la superficie destinada a escribir de cada hoja?

PROBLEMA B7.

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el comprador le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. ¿Cuánto tiene que pagar mensualmente?

PROBLEMA B8.

Daniel para ir al trabajo utiliza su coche y éste consume 8 litros de gasolina cada 15 kilómetros, y 16 litros cada 30 km. ¿Cuántos litros consumirá en un trayecto de 150 km?

PROBLEMA B9.

Algunos estudiantes encontraron un mapa de un tesoro pirata con las siguientes pistas: "Caminar 13 pasos al este del roble, 15 al norte y 18 al oeste; ahí caminar 9 pasos al norte y otros 5 al este; aquí podrán encontrar el tesoro". ¿Cuántos pasos en línea recta tendrán que caminar desde el árbol hasta el tesoro?

PROBLEMA B10.

Si la plaza que hay delante de tu casa es rectangular y tiene 90 m y 60 m de dimensiones, ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa?

CUESTIONARIO DEFINITIVO UTILIZADO EN LOS ESTUDIOS FINALES

PROBLEMA 1.

En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. ¿Cuál es la edad del profesor de inglés?

PROBLEMA 2.

En el corral de Antonio hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay en dicho corral?

PROBLEMA 3.

Dibuja el cuadrilátero $A(-2,-1)$, $B(1,4)$, $C(4,3)$ y calcula los puntos medios de cada lado del cuadrilátero.

PROBLEMA 4.

Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?

PROBLEMA 5.

A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa al instituto hay 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

PROBLEMA 6.

Si la plaza que hay delante de tu casa es rectangular y tiene 90 m y 60 m de dimensiones, ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa?

PROBLEMA 7.

Un librero cuya librería está situada a 60 metros del centro de la ciudad, obtuvo en ventas durante el mes de marzo 204.060 pesetas. Si vendió 24 libretas a 315 pesetas cada una, 12 bolígrafos a 125 pesetas cada uno, 10 diccionarios a 12.000 pesetas cada uno y 20 bestsellers a 2.500 pesetas cada uno, ¿cuánto dinero obtuvo de la venta?

PROBLEMA 8.

Tres gallinas, A, B y C, que pesan juntas 4'5 kg han puesto 17 huevos. La gallina A ha puesto 3 más que el doble de la gallina C, y la gallina B, 4 menos que el triple de la gallina C. Si la gallina C ha puesto 3 huevos, ¿cuántos huevos han puesto cada una de las gallinas?

PROBLEMA 9.

El pie de una escalera dista de la pared 75 cm. Si la escalera, que tiene 100 cm de longitud y pesa 3 kg, está apoyada en la pared a 125 cm del suelo ¿cuál es la distancia mayor de la pared a la escalera?

PROBLEMA 10.

Una señora cría durante 52 semanas una cabra y 3 conejos. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen todo el pienso menos 128 gramos, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana?

PROBLEMA 11.

A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa al colegio es de 15 km y de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió la distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo quedándole 6 km por recorrer. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

PROBLEMA 12.

¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro recorre 640 metros y tardamos 2 horas?

PROBLEMA 13.

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el vendedor le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. Si comienza a pagarla 4 meses más tarde, ¿cuánto tiene que pagar mensualmente?

PROBLEMA 14.

Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. En total se gastaron 2.400 pesetas. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

PROBLEMA 15.

Necesitamos 5 láminas de dibujo de 23 cm de largo y 18 cm de ancho. Si se deja un margen de 2 cm a cada lado, ¿cuánto medirá la superficie destinada a escribir de cada hoja?

PROBLEMA 16.

Tenemos 10 jaulas con 12 pavos cada una y 6 jaulas con 8 conejos cada una. El kilo de pavo vale 900 ptas., el cuarto kilo vale 225 ptas. y cada pavo pesa 4 kg; el kilo de conejo vale 550 ptas. y cada conejo pesa 3 kg
¿Cuánto valdrán todos los pavos y conejos juntos?

PROBLEMA 17.

Daniel para ir al trabajo utiliza su coche y éste consume 8 litros de gasolina cada 15 kilómetros, y 16 litros cada 30 km. ¿Cuántos litros consumirá en un trayecto de 150 km?

PROBLEMA 18.

¿Qué distancia separa el colegio del parque si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro y 30 cm de radio, da 340 vueltas?

PROBLEMA 19.

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el comprador le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. ¿Cuánto tiene que pagar mensualmente?

PROBLEMA 20.

En un corral hay gallinas y conejos. Hay 11 animales. Entre todos tienen 32 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

PROBLEMA 21.

Algunos estudiantes encontraron un mapa de un tesoro pirata con las siguientes pistas: "Caminar 13 pasos al este del roble, 15 al norte y 18 al oeste; ahí caminar 9 pasos al norte y otros 5 al este; aquí podrán encontrar el tesoro". ¿Cuántos pasos en línea recta tendrán que caminar desde el árbol hasta el tesoro?

ANEXO 2

INSTRUMENTOS DE ANÁLISIS

- **CATEGORÍAS DE ANÁLISIS DE LA FASE I DEL ESTUDIO PILOTO**
- **CATEGORÍAS DE ANÁLISIS DE LAS FASES II, III Y IV DEL ESTUDIO PILOTO Y DE LOS ESTUDIOS DEFINITIVOS**
- **PRIMERA FASE DE OBSERVACIÓN DESCRIPTIVA DE LAS JUSTIFICACIONES DE LOS ALUMNOS**
- **SEGUNDA FASE DE OBSERVACIÓN DESCRIPTIVA FOCALIZADA DE LAS JUSTIFICACIONES DE LOS ALUMNOS**

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS UTILIZADAS EN LA FASE I DEL ESTUDIO PILOTO

En la categoría 1, analizamos cómo identifican el problema dado; en la categoría 2, analizamos las acciones llevadas a cabo en dos elementos de la terna: el conjunto de datos y la pregunta y en la categoría 3, analizamos las acciones ejecutadas sobre un elemento de la tematerna el conjunto de datos.

Categoría 1 -. Análisis de la identificación del problema dado.

C1A. Identifican al problema presentado como mal definido.

C1B. Identifican al problema presentado como bien definido.

Categoría 2: Análisis de las acciones que realizan.

C.2.A. Acciones dirigidas por las condiciones (datos).

C.2.B. Acciones dirigidas por el objetivo (pregunta).

Categoría 3: Análisis de las acciones sobre las condiciones del problema.

C3A. Añaden datos.

C3B. Eliminan datos.

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS UTILIZADAS EN LA FASES II, III Y IV DEL ESTUDIO PILOTO Y EN LOS ESTUDIOS DEFINITIVOS

En la categoría 1, analizamos cómo identifican el problema dado; en la categoría 2, analizamos las acciones llevadas a cabo en dos elementos de la terna: el conjunto de datos y la pregunta; en la categoría 3, analizamos las acciones ejecutadas sobre un elemento de la terna: el conjunto de datos; en la categoría 4, analizamos en qué transforman el problema dado.

Categoría 1 -. Análisis de la identificación del problema dado.

C1A. Identifican al problema presentado como mal definido.

C1B. Identifican al problema presentado como bien definido.

C1C. No saben cómo identificar el problema.

Categoría 2: Análisis de las acciones que realizan.

C.2.A. Acciones dirigidas por las condiciones (datos).

C.2.B. Acciones dirigidas por el objetivo (pregunta).

C.2.1. Mantienen el objetivo y modifican los datos para adecuarlos al objetivo.

C.2.2. Mantienen los datos y cambian el objetivo, de manera que este nuevo objetivo tenga relación con los datos dados.

C.2.3. Modifican tanto los datos como el objetivo.

C.2.4. Otras situaciones.

Categoría 3: Análisis de las acciones sobre las condiciones del problema.

C3A. Añaden datos.

C3B. Eliminan datos.

C3C. Añaden y eliminan datos.

Categoría 4: Análisis de en qué transforman el problema dado.

C4A. Transforman el problema en uno mal definido tipo T_2 .

C4B. Transforman el problema en uno bien definido

C4C. Transforman el problema en uno mal definido tipo T_3 .

ESQUEMA DE ANÁLISIS PARA OBSERVAR LA ACTUACIÓN DE LOS ALUMNOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lectura: *lectura, silencio, relectura.*

L1 ¿Se han anotado todas las condiciones del problema?

L2 ¿Se ha anotado correctamente el objetivo del problema?

Análisis - Exploración: *Comprensión, acciones razonables.*

E1 ¿Se busca alguna relación, verdadera o falsa, entre las condiciones y el objetivo del problema?

E2 ¿Las acciones están dirigidas por las condiciones del problema (los datos)?

E3 ¿Las acciones están dirigidas por los objetivos del problema (la pregunta)?

Actuación. Reformulación, introducción de elementos, simplificación de elementos.

A1 ¿Reconoce explícitamente o implícitamente que el problema está bien o mal definido? ¿Lo justifica?

A2 ¿Lo replantea? ¿Lo transforma en un problema bien o mal definido? ¿Explícitamente? ¿Implícitamente? ¿Cómo? ¿Justifica la transformación realizada?

A3 ¿No lo transforma ni explícita ni implícitamente? ¿Lo justifica?

Verificación - Transición.

V1 ¿Revisa el resolutor su actuación? ¿Cómo consecuencia del proceso o del resultado obtenido? ¿Lo justifica?

V2 ¿Cambia su plan de actuación? ¿Lo justifica?

V3 ¿El plan seguido es pertinente con el cambio realizado?

PRIMERA FASE DE OBSERVACIÓN DESCRIPTIVA DE LAS JUSTIFICACIONES UTILIZADAS POR LOS ALUMNOS

Métodos demostrativos: Basados en las categorías de verdad y evidencia. Son los asociados a la lógica formal, a la lógica de la demostración, a las pruebas de naturaleza matemática (PRUEBAS).

Tomamos como criterio de PRUEBAS, cuando el resolutor usa un sistema conformado por objetos, procesos, conceptos, registros y representaciones matemáticas, que involucran y relacionan las cantidades numéricas o de magnitudes explícitas. Es decir, a los criterios de tipo conceptual y procedimental típico de la Matemática, que manifiestan los resolutores y exponen como justificación de la validación o refutación de los espacios semióticos construidos.

Métodos argumentativos: Basados en las categorías de lo verosímil y de lo razonable. Son los asociados a una lógica no formalizada, es decir, a la retórica y a la dialéctica (ARGUMENTACIONES).

Tomamos como criterio de ARGUMENTACIONES, al uso por el resolutor de formas verbales, escritas o habladas, que exteriorizan y evidencian conceptos y procesos acerca de los problemas o situaciones problema bien y mal definidos, pero que no ponen en relación las cantidades numéricas o de magnitudes explícitas.

SEGUNDA FASE DE OBSERVACIÓN DESCRIPTIVA FOCALIZADA DE LAS JUSTIFICACIONES UTILIZADAS POR LOS ALUMNOS

RECURSOS	
PRUEBA	ARGUMENTACIÓN
<p>Recursos de la Matemática</p> <ul style="list-style-type: none"> • Razonamiento empírico. • Razonamiento analítico. • Contradicción. • Contraejemplo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Comparación-Analogía. • Ridículo.

PRUEBA: En relación con la disciplina. La justificación está en función de relaciones matemáticas observadas por el resolutor o de comportamientos matemáticos determinados por el resolutor en los procedimientos seguidos.

Los cuatro procedimientos observados inicialmente son:

Razonamiento Empírico: La justificación se realiza recurriendo a hechos físicos o experiencias cuantificables. Es decir, es un sistema o

procedimiento fundado en mera práctica o rutina, de manera que la justificación se basa en imágenes mentales rudimentarias en las cuales no están presentes habilidades de verificación o transformación.

Razonamiento Analítico: La justificación la hace mediante un proceso que involucra y relaciona las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas por el resolutor, situándose en el campo de la demostración matemática.

Contradicción: La justificación la hace mediante un proceso que involucra y relaciona las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas por el resolutor, tomando del problema situaciones que pueden ser consideradas como falsas y verdaderas a la vez lo que le lleva a la confusión que genera la refutación. Razonan: si sólo tomo esto, se puede resolver, pero si tomo además esto otro, no se puede resolver. Concluye que el problema está mal definido por estas razones.

Contraejemplo: La justificación la hace mediante un proceso que involucra y relaciona las cantidades explícitas, en función de relaciones matemáticas observadas por el resolutor, dando un ejemplo, sacado de la misma situación.

ARGUMENTACIÓN: Las justificaciones se realizan mediante formas verbales, escritas o habladas, que exteriorizan y evidencian conceptos y procesos acerca de los problemas sin poner en relación las cantidades numéricas o magnitudes explícitas.

Los dos tipos de argumentaciones seguidas inicialmente son:

Argumento de comparación o analogía: Exterioriza conceptos y procesos acerca de los problemas, sin poner en relación las cantidades explícitas. La justificación se realiza mediante la explicación verbal, pero

tomando otro objeto (situación) para establecer diferencias o semejanzas. Exige esfuerzos de análisis más fuertes que la simple descripción o explicación.

Ridículo: Exterioriza conceptos y procesos acerca de los problemas, sin poner en relación las cantidades explícitas. La justificación se realiza dando a entender lo contrario de lo que se dice literalmente (justificación indirecta) o que la situación planteada, por su rareza o extravagancia puede mover a risa. Extraño, irregular y de poco aprecio y consideración.

ANEXO 3

TRANSCRIPCIONES

- **ALUMNOS DEL CENTRO SUPERIOR DE EDUCACIÓN**
- **ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA**

ALUMNOS DEL CENTRO SUPERIOR DE EDUCACIÓN

Nivel académico alto.

PROBLEMA 1.

En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. ¿Cuál es la edad del profesor de inglés?

- A. Lee el problema en voz alta y se echa a reír.
 E. *¿Qué es lo que te causa risa?*
 A. *Que no tiene sentido.*
 E. *¿Por qué piensas que el problema no tiene sentido?*
 A. *Porque no hay relación entre lo que te piden y los datos que te dan, ya que si dijese: En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. ¿Cuántos alumnos tiene el profesor de inglés?, entonces sí se podría resolver. Se queda releendo el problema y comenta... o bien: "Si en una clase de inglés los alumnos tienen 14 años y su profesor tiene el doble de la edad de los alumnos. ¿Cuál es la edad del profesor de inglés?, así sí se podría resolver, pues de esa manera puedes operar.*

PROBLEMA 2.

En el corral de Antonio hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay en el corral?

- A. Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra
 $T = 116 \text{ patas}$
No se puede resolver, le faltan datos.
 E. *¿Por qué crees que le faltan datos?*
 A. *Porque si tenemos 116 patas y sabemos que las gallinas tienen 2 patas y los conejos 4 patas... ¿Puedo explicarlo en la pizarra?*
 E. *Sí, sí, claro.*
 A. Pasa a la pizarra
 $T = 116 \text{ patas}$
 $Gallinas = 2 \text{ patas}$
 $Conejos = 4 \text{ patas}$
Si hay x gallinas e y conejos
 $Gallinas = 2 \text{ patas} = x$
 $Conejos = 4 \text{ patas} = y$
 $2x + 4y = 116$
Tenemos una ecuación y dos incógnitas, y esto es absurdo, no se puede resolver.
 E. *¿En qué pensaste cuando leíste el problema?*
 A. *En una ecuación, y vi que le faltaba algo.*

E. ¿Cómo plantearías el problema?

A. Dando el dato del número de gallinas o conejos y preguntando el número de cuántos conejos o gallinas hay.

E. ¿Y si mantienes la misma pregunta?

A. No sé. Con la misma pregunta no podría plantearlo.

PROBLEMA 3.

Dibuja el cuadrilátero A(-2,-1), B(1,4), C(4,3) y calcula los puntos medios de cada lado del cuadrilátero.

A. Lee el problema en voz alta y comenta... *No se puede dibujar un cuadrilátero porque no me dan sino tres puntos, y el cuadrilátero tiene cuatro puntos.*

E. ¿Cómo lo plantearías?

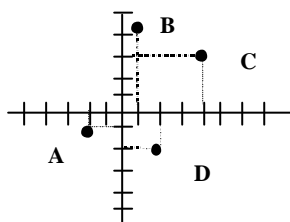
A. ¿Añadiendo otro punto?

E. ¿Puedes decirme cuál?

A. ¿Puedo hacerlo en la pizarra?

E. Como tú quieras.

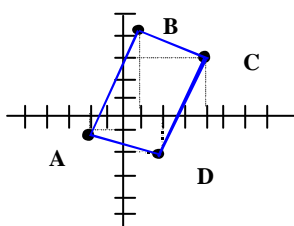
A. Pasa a dibujar en la pizarra



Añado el punto D (2, -2)

E. ¿Por qué representas primero los puntos dados y después das el punto que falta?

A. Para que no quede una figura muy rara... Sigue en la pizarra y dibuja la figura pedida.



PROBLEMA 4.

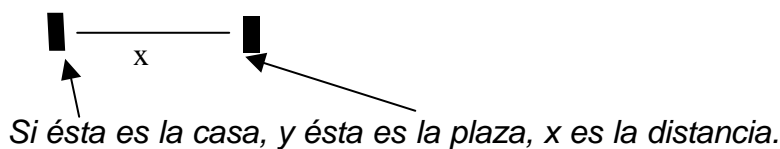
Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?

- A. Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra anotando los datos
- | | |
|---------------------|-----------|
| 1 botella de leche | 150 ptas. |
| 3 barras de pan | ? |
| 200 gramos de jamón | ? |
- Paga la leche y el pan 500 ptas.
¿El jamón no lo paga?
- E. Yo sé lo mismo que tú, lo que dice el enunciado.
- A. Se queda leyendo el enunciado y comenta... *Es que el dato de los 200 gramos de jamón sobra.*
- E. ¿Por qué crees que sobra?
- A. *Porque si no lo paga, es que no lo compra...* Sigue leyendo el problema y comenta... *además falta el dato del precio de la barra de pan. No se puede resolver, porque le falta un dato y le sobra otro.*
- E. ¿Cómo lo plantearías?
- A. *Pedro compra una botella de leche y 3 barras de pan. La botella de leche cuesta 150 pesetas y la barra de pan 35 ptas. Paga con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?*

PROBLEMA 5.

A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa al instituto hay 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

- A. Lee el problema en voz alta y se sonríe, comentando... *Esto no tiene sentido. Bueno...* lo lee de nuevo en voz alta y comenta... *el dato de la distancia de su casa al instituto hay que quitarlo, pues no preguntan nada del instituto, y con los otros datos...* Se queda en silencio un momento y comenta... *Tengo que plantear una ecuación para saber si se puede o no resolver...* Pasa a la pizarra



$$\frac{x}{2} + 3 + \blacksquare = x$$

Esto es lo que tengo que hallar. Entonces me falta un dato, el de la x, que sería la distancia que hay de su

- E. ¿Cómo lo replantearías?
- A. *Pues que en lugar de su casa al instituto hay 9 km, poner que de su casa a la plaza hay 9 km*

PROBLEMA 6.

Si la plaza que hay delante de tu casa es rectangular y tiene 90 m y 60 m de dimensiones, ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa?

- A. Lee el problema en voz alta y se sonríe, comentando... *Es que no tiene sentido. Es un disparate.*
- E. *¿Por qué crees que es un disparate?*
- A. *Porque tendría que preguntar cuál es el área de la plaza y no ese disparate, porque si te dan las dimensiones de un rectángulo es para calcular áreas, perímetros o eso.*

PROBLEMA 7.

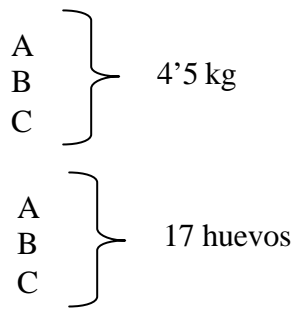
Un librero cuya librería está situada a 60 metros del centro de la ciudad, obtuvo en ventas durante el mes de marzo 204.060 pesetas. Si vendió 24 libretas a 315 pesetas cada una, 12 bolígrafos a 125 pesetas cada uno, 10 diccionarios a 12.000 pesetas cada uno y 20 bestsellers a 2.500 pesetas cada uno, ¿cuánto dinero obtuvo de la venta?

- A. Lee el problema en voz alta y comenta... *Es que te dan el resultado.*
- E. *¿Puedes responder lo que te piden?*
- A. *Con una expresión de extrañeza comenta... Si ya me dicen que obtuvo 204060 pesetas, no hay que hacer nada. No es un problema.*
- E. *Si en clase te ponen este problema, ¿cuál sería tu reacción?*
- A. *Operar con todos los datos dados y comprobar que tengo bien el problema, si coincide con la solución que me dan.*
- E. *¿Está entonces bien planteado el problema?*
- A. *No. Yo quitaría todo lo que sobra, para que sea de verdad un problema.*
- E. *¿Qué es lo que crees que sobra?*
- A. *El dato de los 60 metros y la solución.*

PROBLEMA 8.

Tres gallinas, A, B y C, que pesan juntas 4'5 kg han puesto 17 huevos. La gallina A ha puesto 3 más que el doble de la gallina C, y la gallina B, 4 menos que el triple de la gallina C. Si la gallina C ha puesto 3 huevos, ¿cuántos huevos han puesto cada una de las gallinas?

- A. Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra
Ahora sustituyo el valor de C



$$A = 9$$

$$B = 3C - 4 = 5$$

$$C = 3$$

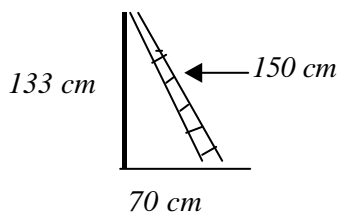
Entonces el dato de 4'5 kg sobra, pues el peso no tiene nada que ver con los huevos que ponen.

- E. ¿Qué ocurre con el dato de los 17 huevos?
 A. Ese dato no sobra porque sirve para comprobar si el resultado está bien o mal.
 E. ¿Cómo lo plantearías?
 A. Igual pero quitando el dato de los kg que pesan.
 E. ¿Qué opinas de los problemas donde sobran datos?
 A. Que confunden, pues yo si estuviese en clase de matemáticas, le daría mil vueltas al problema a ver que es lo que hay que hacer con ese dato, pues si lo ponen es por algo.

PROBLEMA 9.

El pie de una escalera dista de la pared 70 cm. Si la escalera, que tiene 150 cm de longitud y pesa 3 kg, está apoyada en la pared a 133 cm del suelo ¿cuál es la distancia de la pared a la escalera?

- A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y pasa a la pizarra



El dato de lo que pesa sobra... Sigue leyendo el problema, se sonríe y comenta...
 Te dan la solución, 70 cm

- E. ¿Y qué ocurre?
 A. ¿Cómo te van a dar la solución? Entonces no es un problema.
 E. ¿Por qué crees que con la solución no es un problema?
 A. Porque lo tradicional es que en un problema tienes que realizar

operaciones para encontrar la solución.

E. *¿Cómo plantearías este problema?*

A. *Igual, pero quitando el dato de lo que pesa la escalera y la solución.*

E. *¿Puedes decirme exactamente, cómo replantearías el problema?*

A. *Una escalera, que tiene 150 cm de longitud, está apoyada en la pared a 133 cm del suelo ¿cuál es la distancia de la pared a la escalera?*

PROBLEMA 10.

Una señora cría durante 52 semanas una cabra y 3 conejos. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen todo el pienso menos 128 gramos, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana?

A. *Lee el problema en voz alta y comenta... Ya te dan la solución o es que hicieron mal la pregunta, porque sería ¿cuánto pienso se comieron?, ya que tienes el total y lo que dejaron.*

E. *¿Puedes decirme cómo lo plantearías?*

A. *Una señora cría 1 cabra y 3 conejos. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen todo el pienso menos 128 gramos, ¿cuánto pienso se comieron durante la semana?*

PROBLEMA 11.

A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa al colegio es de 15 km y de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió la distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo quedándole 6 km por recorrer. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

A. *Lee en voz alta el problema y comenta... Te dan el resultado y además sobran datos. Si dijese: A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió la distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo quedándole 6 km por recorrer. ¿Cuántos kilómetros recorrió esa mañana?, entonces sí se podría resolver.*

PROBLEMA 12.

¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro recorre 640 metros y tardamos 2 horas?

A. *Lee el problema en voz alta y comenta... El problema está mal. Las horas no intervienen en el problema, porque no hablan de velocidad sino de metros y diámetro. Además ya dan la solución, 640 metros... Se queda durante un rato leyendo de nuevo el problema en voz baja y comenta... No sé. Es que yo estos problemas de vueltas, ruedas y*

bicicletas no los sé hacer. Lo único que tengo claro es que la solución no pueden dártela.

- E. *Intenta hacer un planteamiento del problema que creas correcto.*
 A. *No sé. Es difícil para mí plantearlo.*
 E. *Bueno, ¿qué harías si en clase te pusiesen este problema?*
 A. *¿Lo que yo quiera?*
 E. *Sí, sí.*
 A. *Pues yo dejaría los datos del problema y lo que haría sería añadir algo de la velocidad.*
 E. *¿Puedes decirme el enunciado del problema?*
 A. *¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro, un niño con una bicicleta o una moto, tarda 2 horas, con una velocidad de tantos km por hora?*

PROBLEMA 13.

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el vendedor le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. Si comienza a pagarla 4 meses más tarde, ¿cuánto tiene que pagar mensualmente?

- A. Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra...

$$P_L = 82.975 \text{ ptas.}$$

6 meses

$$c/m + 5370 \text{ ptas.}$$

Entrega inicial 9.000 ptas.

Vuelve a leer el problema en voz baja y comenta... *Creo que el que empiece a pagar 4 meses más tarde no tiene nada que ver, sobra, pues lo que va a pagar cada mes no varía, sólo que empieza a pagarla más tarde. Sería, al precio total quitarle la entrega inicial, luego dividir entre 6 para ver las mensualidades y como tiene un recargo mensual, éste se suma a cada mensualidad.*

$$\begin{array}{r} 82975 \\ - 9000 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{l} 6 \\ \hline \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{○} \\ \text{○} + 5370 \end{array}$$

- E. *Si tuvieses que plantear a tus compañeros este problema, ¿quitarías el dato que dice que sobra?*
 A. *No, pues eso es una realidad.*

PROBLEMA 14.

Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. En total se gastaron 2.400 pesetas. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

A. Lee el problema en voz alta. Lo lee varias veces más en voz baja y pasa a la pizarra

1^{er} día 100 kg

2^o día 100 “

3^{er} día 100 “

4^o día 100 “

5^o día

6^o día

Lo de gastaron 2400 pesetas sobra porque no dicen a cuánto sale el kg de heno, sino el total gastado. Si te dijiesen el precio total gastado y el precio del kg, sí podría utilizarse ese dato... Se queda mirando el enunciado del problema y comenta... No sé. No se puede hacer este problema.

E. ¿Cuál es tu opinión del problema?

A. *Sé que le faltan datos, como por ejemplo decir además de lo que ahorraron por día, lo que comieron cada día o algo así, pero tal y como está planteado no se puede resolver.*

E. ¿Puedes decirme como lo plantearías tu exactamente?

A. *Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, sólo se comieron tanto y ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?*

PROBLEMA 15.

Necesitamos 5 láminas de dibujo de 23 cm de largo y 18 cm de ancho. Si se deja un margen de 2 cm a cada lado, ¿cuánto medirá la superficie destinada a escribir de cada hoja?

A. Lee el problema en voz alta y comenta... *El dato de las 5 láminas sobra, pues no te preguntan la superficie de 5 láminas, sino de cada lámina. El resto es correcto pues simplemente se trata de quitar 2 cm a cada lado, 18-4 y 23-4, y luego hallar la superficie, que es largo por ancho.*

PROBLEMA 16.

Tenemos 10 jaulas con 12 pavos cada una y 6 jaulas con 8 conejos cada una. El kilo de pavo vale 900 ptas., el cuarto kilo vale 225 ptas. y cada pavo pesa 4 kg; el kilo de conejo vale 550 ptas. y cada conejo pesa 3 kg ¿Cuánto valdrán todos los pavos y conejos juntos?

- A. Lee el problema en voz alta y comenta... *El precio del kg no hace falta, pues dan el cuarto de kg, que es lo mismo, y con los demás datos se trata de hacer operaciones y ya está.*
- E. *¿Qué opinas del problema?*
- A. *Que está bien planteado*

PROBLEMA 17.

Daniel para ir al trabajo utiliza su coche y éste consume 8 litros de gasolina cada 15 kilómetros, y 16 litros cada 30 km ¿Cuántos litros consumirá en un trayecto de 150 km?

- A. Lee el problema en voz alta y comenta... *Este problema se hace con una regla de tres, pero para saber si está bien planteado tendría que ver si las dos reglas de tres son equivalentes.*
- E. *¿Puedes explicarme lo que opinas del problema y lo de las dos reglas de tres, por favor?*
- A. *Sí. Una es con 8 litros y 15 km y la otra con 16 litros y 30 km*
- | | | | |
|-----|-----|------|-----|
| 8 → | 15 | 16 → | 30 |
| x → | 150 | x → | 150 |

Sí, son equivalentes. Se puede hacer con una o con otra.

PROBLEMA 18.

¿Qué distancia separa el colegio del parque si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro y 30 cm de radio, da 340 vueltas?

- A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja varias veces y comenta... *Si dan el radio no hace falta el diámetro y si dan el diámetro no hace falta el radio, pero no sé si está mal planteado, sólo que yo no sé hacerlo.*
- E. *¿Ni siquiera lo intentas?*
- A. *Es que yo los problemas de vueltas, radios y eso no sé hacerlos.*

PROBLEMA 19.

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el comprador le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. ¿Cuánto tiene que pagar mensualmente?

- A. Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra a anotar los datos
- Pago 82475 ptas. A plazos*
- Recargo de 5370 ptas.*
- Entrega inicial 9000 ptas.*
- Está bien planteado, pues se halla el precio total de la lavadora*

sumando el precio más el recargo. Luego se resta la entrega inicial y luego se divide entre 6 para saber lo que hay que pagar mensualmente.

PROBLEMA 20.

En un corral hay gallinas y conejos. Hay 11 animales. Entre todos tienen 32 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

- A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta...
Está bien, se hace con una ecuación... Pasa a la pizarra
Si gallinas hay x, y conejos hay y

$$\left. \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\} x + y = 11$$

Entonces
 $2x + 4y = 32$
 $x + y = 11$

$$\left. \begin{array}{l} 2x \\ 4y \end{array} \right\} 32 \text{ patas}$$

Se resuelve el sistema y ya está

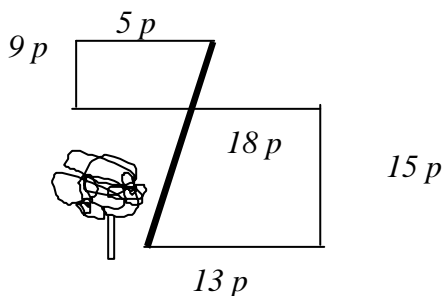
E. ¿En qué pensaste al leer el problema?

- A. *En que es un problema de los que se resuelven planteando ecuaciones.*

PROBLEMA 21.

Algunos estudiantes encontraron un mapa de un tesoro pirata con las siguientes pistas: "Caminar 13 pasos al este del roble, 15 al norte y 18 al oeste; ahí caminar 9 pasos al norte y otros 5 al este; aquí podrán encontrar el tesoro". ¿Cuántos pasos en línea recta tendrán que caminar desde el árbol hasta el tesoro?

- A. Lee el problema en voz alta y comenta... *Tengo que hacer un dibujo para saber si se puede resolver...* Pasa a la pizarra



- El resultado sería la distancia ésta (señalando la línea de trazo grueso).*
- E. *¿El dibujo está bien construido?*
- A. *No. Tendría que usar regla y cada paso sería por ejemplo 1 cm y luego vería cómo calcular esa distancia por Geometría.*

Nivel académico medio.

PROBLEMA 1.

En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. ¿Cuál es la edad del profesor de inglés?

- A. Lee el problema en voz alta, se sonríe y lo vuelve a leer en voz baja. Mira al entrevistador, sonriendo, y comenta... *¿pero esto qué es?*
- E. *¿Qué es lo que te causa risa?*
- A. *Pues que no tiene nada que ver el número de chicos y chicas, con la edad del profesor.*
- E. *¿Puedes responder lo que te preguntan?*
- A. *No. Es absurdo.*
- E. *Si a ti te plantearan en clase este problema, ¿qué harías?*
- A. Se sonríe y contesta... *pensaría que me está tomando el pelo.*
- E. *¿Cómo plantearías tú el problema?*
- A. *La edad del profesor la quitaría, y diría: “En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. ¿Cuántos alumnos hay en total?, Porque ¿qué tiene que ver la edad con el número de alumnos?*

PROBLEMA 2.

En el corral de Antonio, hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay en el corral?

- A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja, y comenta... *parto de que las gallinas tienen dos patas y los conejos cuatro patas. Se queda un instante en silencio y comenta... creo que faltan datos, pero vamos a ver... Pasa a operar en la pizarra*
Gallinas ——— 50
 Se queda callada mirando el enunciado del problema.
- E. *¿Me podrías comentar qué es lo que estás pensando y qué significa lo que escribiste en la pizarra?*
- A. *Es que le faltan datos. Se podría resolver si dijese: “En el corral de Antonio, hay gallinas y conejos. Hay 116 patas y 50 gallinas. ¿Cuántos conejos hay en el corral?, de manera que... Pasa a la pizarra*

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 2 \\ \hline 100 \text{ patas de gallinas} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 116 \\ - 100 \\ \hline 16 \text{ patas de conejos} \end{array}$$

$$16 \overline{)4} \text{ } \\ 4 \text{ conejos hay en el corral}$$

E. De acuerdo, pero vamos a ver, ¿cómo estás segura de que no se puede resolver porque faltan datos?

A. Bueno, es que yo dividiría entre 4 y todas las patas serían de conejos, es decir tendría 29 conejos, o bien dividiría entre 2 y entonces todas las patas serían de gallinas, es decir hay 58 gallinas, y eso es lo único que se puede

$$116 \overline{)4} \text{ } \\ 36 \ 29 \\ 0$$

$$116 \overline{)2} \text{ } \\ 16 \ 58 \\ 0$$

hacer.

Se queda pensativa un rato, mirando a la pizarra, y comenta... es que no se puede resolver... bueno, a lo mejor, haciendo combinaciones de unas operaciones y otras podría dar una cantidad, pero no sé.

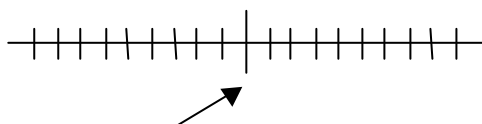
E. Muy bien Ana, ¿podrías intentarlo?

A. Es que no se puede. Creo que faltan datos para resolverlo.

PROBLEMA 3.

Dibuja el cuadrilátero A(-2,-1), B(1,4), C(4,3) y calcula los puntos medios de cada lado.

A. Lee en voz alta el problema y comenta... cuadrilátero es cuatro lados ¿no? Sin esperar la respuesta de la entrevistadora continúa... este problema está bien planteado. Para mí,... Pasa a la pizarra



De aquí para la derecha es positivo, y para la izquierda es negativo

Se queda mirando a la pizarra y comenta... ¿qué tiene que ver esto con un cuadrilátero? Es que nunca me he encontrado con un problema similar, donde te dan números negativos para dibujar una figura. Además, ¿qué es esto de A, B y C? ¿Son lados?

E. ¿Tú qué opinas?

- A. Si A , B y C son los lados y los números son las longitudes de los lados, me faltaría un lado. No sé, es que las medidas negativas en geometría no sé que significan.
- E. Entonces, ¿cuál es tú opinión sobre el problema planteado?
- A. No sé, pues yo de geometría no tengo ni idea.

PROBLEMA 4.

Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?

- A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y pasa a la pizarra a anotar los datos

<i>Botella de leche</i>	<i>150 pesetas</i>
<i>3 barras de pan</i>	<i>?</i>
<i>200 g de jamón</i>	<i>?</i>

Se queda mirando el enunciado del problema y comenta... ¿no faltan datos?

- E. ¿Tú que crees?
- A. Claro, es que sólo me dan el precio de la leche. Si al menos me dijeran el precio de la barra de pan, entonces sí se podría resolver.
- E. ¿Por qué crees que con ese dato sí se puede resolver?
- A. Porque así puedo multiplicar 3 por el precio del pan y así.
- E. Entonces, ¿qué opinas del problema?
- A. Que no se puede resolver porque le faltan datos. Pasa a la pizarra
- | | |
|-------------------------|----------------------|
| <i>Botella de leche</i> | <i>150 pesetas</i> |
| <i>3 barras de pan</i> | <i>30 ptas/barra</i> |
| <i>200 g de jamón</i> | <i>200 pesetas</i> |
- E. Entonces, ¿cómo plantearías tú el problema?
- A. Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas, cada barra de pan 30 pesetas y los 200 gramos de jamón 200 pesetas. Si paga con un billete de 1000 pesetas, ¿cuánto dinero le devuelven?
- E. Ana, cuando te encuentras con un problema como éste, ¿qué es lo que piensas?
- A. Que el profesor se equivocó y me planteó mal el problema.

PROBLEMA 5.

A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa al instituto hay 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

- A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta...
No se puede resolver, pues te dan la distancia de su casa al instituto, no la de su casa a la plaza.
- E. *¿Qué te hace pensar que ese dato es necesario para resolver el problema?*
- A. *Es que si no es así no puedo operar, porque ¿cuánto es la mitad si no sé el total?*
- E. *Entonces, ¿el problema tal y como está planteado no se puede resolver?*
- A. *No. Si dijese que la distancia de su casa a la plaza es de 9 km, en vez de la de su casa al instituto, entonces sí.*
- E. *¿Cómo plantearías el problema?*
- A. *A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa a la plaza hay 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?... Pasa a la pizarra*

9 km
Casa \longrightarrow plaza

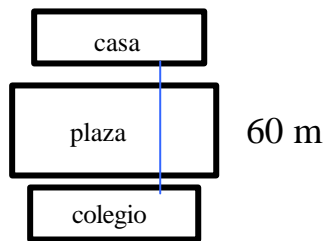
$$\begin{array}{r} 9 \quad | \quad 2 \\ 10 \quad 4'5 \\ \hline 0 \end{array} \quad 4'5 \text{ km} + 3 = 7'5 \text{ km es lo que ha recorrido}$$

$$\begin{array}{r} \text{Luego } 9 \\ - 7'5 \\ \hline 5 \text{ km le faltan por recorrer} \end{array}$$

PROBLEMA 6.

Si la plaza que hay delante de tu casa es rectangular y tiene 90 m y 60 m de dimensiones, ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa?

- A. Lee el problema en voz alta. Pone cara de extrañeza. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta... *el colegio está ahí...* Señalando con el dedo un lugar de la pizarra... *la plaza...* se queda en silencio un rato y comenta... *es que no dice la situación de nada. No se puede resolver pues le faltan datos o no tienen relación los datos con la pregunta.*
- E. *Entonces, ¿cuál es tu opinión sobre el problema?*
- A. *Supongamos...* Pasa a dibujar en la pizarra y va comentando lo que hace



Si la plaza que hay delante de tu casa es rectangular y tiene 90 m y 60 m de dimensiones. Justo en el otro lado mayor de la plaza, enfrente de la casa está el colegio. Si atraviesas directamente la plaza,... señalando sobre el dibujo... ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa? Así si podemos operar.

PROBLEMA 7.

Un librero cuya librería está situada a 60 metros del centro de la ciudad, obtuvo en ventas durante el mes de marzo 204.060 pesetas. Si vendió 24 libretas a 315 pesetas cada una, 12 bolígrafos a 125 pesetas cada uno, 10 diccionarios a 12.000 pesetas cada uno y 20 bestsellers a 2.500 pesetas cada uno, ¿cuánto dinero obtuvo de la venta?

A. Lee en voz alta el problema. Lo vuelve a leer en voz baja y pasa a la pizarra

$$\begin{array}{r} 315 \\ \times 24 \text{ libretas} \\ \hline 1260 \\ 626 \\ \hline 7520 \text{ ptas.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 12 \text{ bolígrafos} \\ \hline 250 \\ 125 \\ \hline 1500 \text{ ptas.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120000 \text{ ptas. diccionarios} \\ 2500 \\ \times 20 \\ \hline 50000 \text{ ptas. bestsellers} \end{array}$$

Ahora sumaría todo y ya está esa parte del problema. Luego lo de los 60 metros y lo que obtuvo en la venta sobra ¿no?

E. ¿Qué te induce a pensar eso?

A. Porque el problema me da una serie de datos para que opere y obtenga el resultado, así que eso sobra, porque en un problema hay que operar con los datos. Bueno eso es lo que nos han enseñado.

PROBLEMA 8.

Tres gallinas, A, B y C, que pesan juntas 4'5 kg han puesto 17 huevos. La gallina A ha puesto 3 más que el doble de la gallina C, y la gallina B, 4 menos que el triple de la gallina C. Si la gallina C ha puesto 3 huevos, ¿cuántos huevos han puesto cada una de las gallinas?

A. Lee en voz alta el problema. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta... ¿Este problema es del tipo: "Si fulanita tiene tres hermanos rubios y tal, tal..."?

E. Es decir, ¿cuando lees un problema, piensas en otro parecido que ya has hecho?

A. Muy convencida contesta... *Sí claro, siempre...* Pasa a la pizarra

A, B C

Pesan 4'5 kg

$$A = 3 + 2C$$

Ponen 17 huevos

$$B = 4 - 3C$$

$$C = 3$$

Se queda pensando un rato y comenta... *¿éstos no son los de las ecuaciones esas que sustituyen C en tal y así?*

E. *Razónalo como tú creas*

A. *Bueno, yo estoy poniendo esto así y a lo mejor está mal.*

E. *¿A qué te refieres?*

A. *A lo de $4 - 3C$*

E. *Vamos a ver, si yo te digo que tengo 40 años y tú tienes 10 años menos que yo, ¿cómo lo expresarías?*

A. *$40 - 10 = 30$*

E. *Entonces, vuelve a leer el enunciado del problema*

A. *Claro, es $3C - 4$ Ahora, si sustituyo en C, se supone que la suma de A, B y C tiene que ser igual a 17, por lo tanto, el problema sí se puede resolver, pero quitando los kg, pues no tiene nada que ver los kg con el número de huevos.*

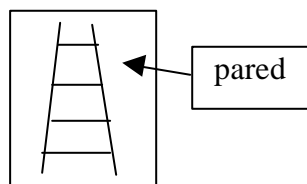
PROBLEMA 9.

El pie de una escalera dista de la pared 70 cm. Si la escalera, que tiene 150 cm de longitud y pesa 3 kg, está apoyada en la pared a 133 cm del suelo ¿cuál es la distancia de la pared a la escalera?

A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta... *aquí están mezclando un montón de cosas, ¿verdad?*

E. *A ver, explícate.*

A. *Vamos a ver. El pie es la parte de abajo, ¿no? Vuelve a leer el problema en voz alta y comenta... voy a hacer un dibujo, pues en estos casos siempre ayuda... pasa a dibujar a la pizarra*



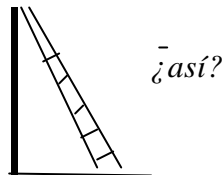
Lo de los tres kg no interesa, sobra, porque piden la distancia y el peso no influye... se queda mirando el enunciado del problema y comenta... lo de está apoyada en la pared a 133 cm del suelo, ¿qué es?

E. *¿Cómo te imaginas la escalera?*

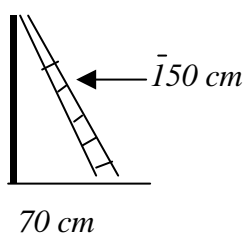
A. *Es que no me la imagino. ¿Cómo es que si mide 150 cm, está a 133 cm del suelo? ¿Cómo va a medir más la escalera?*

E. *¿Qué dificultad le ves a eso?*

- A. *¿Es que no me sé explicar?*
 E. *¿Puedes intentarlo con el dibujo?*
 A. Pasa a la pizarra



- E. *Muy bien.*
 A. Continúa en la pizarra



Si ya me dice que dista 70 cm de la pared, ¿cómo es que me pregunta cuál es la distancia de la pared a la escalera?

- E. *¿Tu qué opinas?*
 A. *Yo veo que está mal planteado, porque sobran datos como los 3 kg y los 133 cm del suelo, que no se a qué viene.*
 E. *Entonces, ¿puedes resolver el problema?*
 A. *No. Hay algo raro pero no sé lo que es. Estos problemas se resuelven por eso de si te dan un lado y otro... señalando en el dibujo... halla el otro lado con esa fórmula que hay, pero es que no me acuerdo de ella.*
 E. *¿Aplicando el teorema de Pitágoras?*
 A. *Eso, es que no me acordaba.*
 E. *Por lo tanto, tal y como está planteado el problema, ¿lo puedes resolver de esa manera?*
 A. *No, lo plantearía como: "El pie de una escalera dista de la pared 70 cm. Si la escalera, tiene 150 cm de longitud ¿cuál es la distancia desde el suelo hasta donde finaliza la escalera?"*

PROBLEMA 10.

Una señora cría durante 52 semanas una cabra y 3 conejos. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen todo el pienso menos 128 gramos, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana?

- A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta...
 Pues se resta 760 menos 128... Pasa a la pizarra

$$\begin{array}{r} 760 \\ - 128 \\ \hline 632 \end{array}$$

son los gramos que le sobran

Luego las 52 semanas las quitaría pues no preguntan lo que sobra al finalizar las 52 semanas.

- E. *Es decir, que el problema está bien planteado.*
 A. *No, hay que quitarle ese dato que sobra.*
 E. *¿Cómo sería entonces el problema?*
 A. *Una señora cría una cabra y 3 conejos. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen todo el pienso menos 128 gramos, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana?*

PROBLEMA 11.

A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa al colegio es de 15 km y de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió la distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo quedándole 6 km por recorrer. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

- A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y sin hacer ningún comentario pasa a la pizarra y anota los datos del problema:

15 km
 Casa \longrightarrow colegio

18 km
 Casa \longrightarrow plaza

$$\begin{array}{r} 18 \\ - 6 \\ \hline 12 \text{ km} \end{array}$$

¿Lo explico?

- E. *Sí, por favor.*
 A. *El problema dice que de la casa a la plaza del pueblo hay 18 km. Como el sábado recorrió la mitad del camino de la casa a la plaza, le resto a 18 km los 6 que faltan y me da 12 km*
 E. *Entonces, el problema está bien planteado.*
 A. *Mira el enunciado del problema y comenta... no, hay que quitarle el dato que sobra, que es la distancia de la casa al colegio, pues si no hay que utilizarlo, no tiene que estar en el enunciado.*

PROBLEMA 12.

¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro recorre 640 metros y

tardamos 2 horas?

A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y se queda en silencio, durante un rato, mirando el enunciado del problema.

E. *¿En qué piensas, Ana?*

A. *En los problemas que yo hacía de ruedas y eso. Sigue leyendo en voz baja el problema y comenta... ¿los 640 metros, no es lo que pide el problema?*

E. *¿Tú qué opinas?*

A. Lo lee en voz alta y comenta con cara de sorpresa... *Sí, la solución ya te la da el problema.*

E. *¿Tienes algo que comentar del problema?*

A. *Que esto no es un problema, porque un problema es el que te plantean para que tú tengas que hacer algo. Además, ¿qué tiene que ver la rueda con lo que piden? Tendrían que pedir la longitud o el área del círculo.*

E. *Bueno, pero tú has hecho algo, como leerlo, entenderlo y darte cuenta que la solución te la da el problema.*

A. Se sonríe y comenta... *No, yo me refiero a tener que hacer alguna operación.*

E. *¿Plantearías un problema de esta manera?*

A. *No, quitaría lo de la rueda, porque no tiene nada que ver una rueda con lo que se pide, y lo único que hace es confundir al alumno.*

E. *¿Cómo lo plantearías entonces?*

A. Pasa a la pizarra

?

Colegio → parque

Velocidad bicicleta 50 m/hora

Tardamos 2 horas

Diría: "¿Qué distancia separa el colegio del parque, si la velocidad de la bicicleta es de 50 metros por hora y tardamos 2 horas?"

PROBLEMA 13.

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el vendedor le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. Si comienza a pagarla 4 meses más tarde, ¿cuánto tiene que pagar mensualmente?

A. Lee el problema en voz alta y pasa directamente a la pizarra

6 plazos mensuales

5370 ptas. (recargo)

Entrega inicial (9000 ptas.)

Lo de que empieza a pagar cuatro meses más tarde no influye para nada, pues lo que paga mensualmente no varía... Continúa en la pizarra

$$\begin{array}{r} 9000 \\ - 5370 \\ \hline 3630 \text{ ptas.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 82475 \\ \quad 3630 \\ \hline 86105 \text{ ptas.} \end{array}$$

Voy a comprobar una cosa.

- E. Perdona Ana, ¿me puedes explicar que es lo que haces?
 A. Como 9000 es la entrega inicial y 5370 el recargo, le quito a la entrega inicial el recargo y el resultado se lo sumo al precio de la lavadora. Pero quiero comprobar una cosa... Mira a la pizarra, borra las operaciones realizadas y hace una nueva operación

$$\begin{array}{r} 82475 \\ - 9000 \\ \hline 73475 \text{ ptas.} \\ + 5730 \\ \hline 79205 \text{ ptas} \end{array}$$

Me equivoqué y sumé en vez de restar... Continúa en la pizarra

$$\begin{array}{r} 79205 \\ \quad \underline{6} \\ \hline \end{array} \quad \text{lo que paga mensualmente.}$$

- E. ¿Cuál es tu opinión del problema?
 A. Que está bien planteado.
 E. ¿Sobra el dato: comienza a pagar 4 meses más tarde?
 A. No porque eso es lo que ocurre normalmente.

PROBLEMA 14.

Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. En total se gastaron 2.400 pesetas. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

- A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta... lo de gastaron 2400 pesetas sobra, pues está hablando de kilogramos y días y las pesetas no tienen nada que ver con eso... Sigue leyendo el problema en voz baja... no sé hacerlo... Vuelve a leerlo en voz baja y pasa a la pizarra

Heno → 4 días

Como almacenaron 100 kg por día, almacenaron en total 400 kg

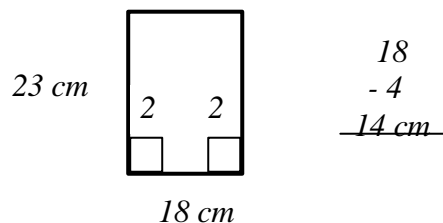
Pero es que la pregunta está mal hecha, porque si dijese: Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. ¿Cuántos kilos de heno ahorraron?, entonces sí.

- E. Pero eso es otro problema. ¿Qué ocurre con el problema planteado?
- A. Que está mal planteado porque le faltan datos y además el dinero sobra.
- E. Entonces, ¿tampoco se puede resolver como tú lo planteaste?
- A. Bueno, como yo lo planteé sí.
- E. ¿Qué dato es el que falta?
- A. Ninguno, pero es que así sería muy fácil. De la otra forma no sé plantearlo.

PROBLEMA 15.

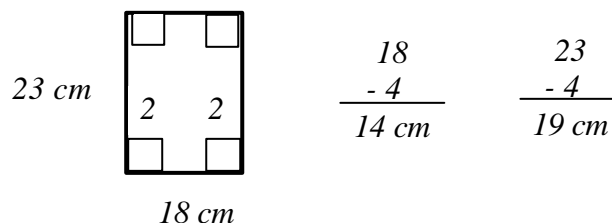
Necesitamos 5 láminas de dibujo de 23 cm de largo y 18 cm de ancho. Si se deja un margen de 2 cm a cada lado, ¿cuánto medirá la superficie destinada a escribir de cada hoja?

- A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y pasa a la pizarra



¿Hay que dejar también, margen por arriba?

- E. Claro.
- A. Pues entonces sería



Sumamos 14 y 19... Se queda mirando a la pizarra y comenta... ¿la superficie es el área?

E. *¿Tú que crees?*

A. *Que sí, ¿no? Entonces no es sumando, sino multiplicando 14 por 19, lo que daría la superficie destinada a escribir.*

E. *¿Tienes algo que decir de este problema?*

A. *Sí, que el dato de las 5 láminas hay que quitarlo, porque no pregunta la superficie de las 5 hojas sino de una hoja.*

PROBLEMA 16.

Tenemos 10 jaulas con 12 pavos cada una y 6 jaulas con 8 conejos cada una. El kilo de pavo vale 900 ptas., el cuarto kilo vale 225 ptas. y cada pavo pesa 4 kg; el kilo de conejo vale 550 ptas. y cada conejo pesa 3 kg
 ¿Cuánto valdrán todos los pavos y conejos juntos?

A. Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra

10 jaulas → 12 pavos

6 jaulas → 8 conejos

kg pavos → 900 ptas.



Peso: 4 kg

kg conejos 550 ptas.



Peso: 3 kg

Ahora empiezo a hacer operaciones... Vuelve a la pizarra

10 jaulas → 12 pavos 120 pavos

6 jaulas → 8 conejos 48 conejos

kg pavos → 900 ptas.

$$\begin{array}{r} 900 \\ \times 4 \\ \hline 3600 \text{ kg x } 120 \end{array}$$



Peso: 4 kg

kg conejos → 550 ptas.

$$\begin{array}{r} 550 \\ \times 3 \\ \hline 1050 \text{ kg x } 48 \end{array}$$



Peso: 3 kg

} Lo sumaría todo y el resultado es lo pedido

Lo del cuarto kilo no hace falta, pues con el precio del kg se puede resolver.

E. *¿Tal y como está planteado le sobra un dato?*

A. *Bueno no, está bien planteado pues está claro que ese dato no confunde.*

PROBLEMA 17.

Daniel para ir al trabajo utiliza su coche y éste consume 8 litros de gasolina cada 15 kilómetros, y 16 litros cada 30 km. ¿Cuántos litros consumirá en un trayecto de 150 km?

A. Lee en voz alta el problema. Lo vuelve a leer en voz baja y pasa a la pizarra

8 litros → 15 km
x → 150 km

$$x = \frac{150 \times 8}{15} \quad \text{y el resultado es lo que pide el problema}$$

Lo de cada 30 km no hace falta utilizarlo porque es lo mismo que utilizar el de 15 km

E. ¿Podrías explicarme lo que acabas de comentar?

A. Sí, que es lo mismo 8 l cada 15 km que 16 l cada 30 km.

PROBLEMA 18.

¿Qué distancia separa el colegio del parque si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro y 30 cm de radio, da 340 vueltas?

A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta...
Yo no le veo relación a lo de la rueda con la distancia del colegio al parque.

E. ¿Puede resolverse este problema?

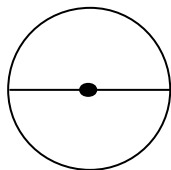
A. No lo sé. No estoy segura.

E. Si en clase de matemáticas, tu profesor te plantease este problema, ¿qué harías?

A. Lo intentaría resolver con los datos del problema y si no me sale es que no lo sé hacer, porque nunca en clase me ponen problemas que pueden estar mal planteados, y la solución siempre se puede encontrar.

E. Bien, pues imagínate que estás en clase y yo soy tu profesora y planteo este problema.

A. Pasa a la pizarra



La rueda tiene que ver con el diámetro y el radio... Señala en el dibujo diámetro y radio... Si me preguntan ¿cuántos cm tiene esto?... Señala la longitud de la circunferencia dibujada... a lo mejor se podría resolver, multiplicando el diámetro por el número de vueltas pero no estoy segura, porque nunca he hecho problemas de este tipo.

PROBLEMA 19.

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el comprador le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. ¿Cuánto tiene que pagar mensualmente?

A. Lee en voz alta el problema y pasa a la pizarra

6 plazos mensuales



recargo de 5370 ptas.

Entrega inicial de 9000 ptas.

$$\begin{array}{r} 82475 \\ + 5370 \\ \hline 87845 \\ - 9000 \\ \hline 78845 \quad | \quad \end{array}$$

Lo que no sé, es si la entrega inicial es un plazo o es aparte de los plazos.

E. *Interpreta el problema como creas que es correcto.*

A. *Vale, entonces yo haría...* Pasa a la pizarra, borra algunas partes realizadas y continúa

6 plazos mensuales



recargo de 5370 ptas.

Entrega inicial de 9000 ptas.

$$\begin{array}{r} 82475 \\ + 5370 \\ \hline 87845 \quad | \quad 6 \\ 27 \quad | \quad 14940 \text{ ptas. en cada plazo, pero a uno de los plazos le quitaría } 9000 \\ 38 \\ 24 \\ 05 \\ \hline \end{array}$$

Entonces hace 5 plazos de 14940 ptas. cada uno y un plazo de 14940 ptas. menos 9000 ptas.

E. *¿Qué opinas de este problema?*

A. *Que está bien planteado y no tengo ninguna duda, como me ha ocurrido en los otros.*

PROBLEMA 20.

En un corral hay gallinas y conejos. Hay 11 animales. Entre todos tienen 32 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta...
Yo creo que le falta algo. Una pista.

E. *¿Qué es lo que te induce a ello?*

A. *No lo sé, pero le falta algo relacionado con las patas, porque... Pasa a la pizarra*

$$\begin{array}{r} 11 \text{ animales} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 32 \text{ patas} \end{array}$$

Le faltan datos seguro.

E. *¿En qué te apoyas para afirmar que al problema le faltan datos?*

A. Pasa a la pizarra

$$\begin{array}{r} 32 \overline{)4} \quad 32 \overline{)2} \\ 0 \quad 8 \quad 12 \quad 16 \\ 0 \end{array}$$

Es decir, hay 8 conejos o 16 gallinas, pero el problema dice que hay 11 animales, y eso es imposible, por eso digo que faltan datos, ya que tendría que decir por ejemplo, el número de gallinas o el de conejos.

E. *Entonces, ¿el problema no se puede resolver tal y como está planteado?*

A. *No lo sé... Vuelve a leer en voz baja el problema y comenta... no se si es correcto, pero lo que sí sé es que si dijese: "En un corral hay 5 conejos y 32 patas. ¿Cuántas gallinas hay?, si estaría bien planteado.*

E. *¿Qué es lo que te hace dudar?*

A. *No sé... pero estos problemas siempre me han costado resolverlos y por eso no estoy segura.*

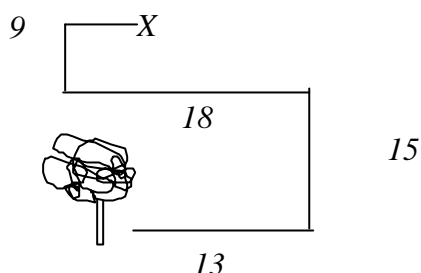
E. *De acuerdo, Ana. Cuando lees un problema, ¿qué es lo primero que pasa por tu mente?*

A. *Se sonríe... Primero que tengo que resolverlo. Luego anoto los datos, por costumbre y luego busco la operación más fácil porque lo de ecuaciones y eso a mí no se me da.*

PROBLEMA 21.

Algunos estudiantes encontraron un mapa de un tesoro pirata con las siguientes pistas: "Caminar 13 pasos al este del roble, 15 al norte y 18 al oeste; ahí caminar 9 pasos al norte y otros 5 al este; aquí podrán encontrar el tesoro". ¿Cuántos pasos en línea recta tendrán que caminar desde el árbol hasta el tesoro?

A. Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra



El resultado es la suma de todos los pasos, porque siempre camina en línea recta, por lo tanto sumas los datos y ya está.

Nivel académico bajo.

PROBLEMA 1.

En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. ¿Cuál es la edad del profesor de inglés?

- A. Lee el problema en voz alta, se sonríe y comenta... *No se puede hacer, pues con estos datos el profesor de inglés poco tiene que hacer aquí. Si preguntase cuántos alumnos hay en total, entonces sí.*
- E. *¿Por qué crees que de esa manera sí se puede resolver?*
- A. *Porque entonces sí puedes sumar.*
- E. *¿Y si mantienes la pregunta?*
- A. *Pues añadiría que si la edad de los alumnos es de 15 años y el profesor tiene el doble, ¿cuál es la edad del profesor de inglés?*

PROBLEMA 2.

En el corral de Antonio hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay en el corral?

- A. Lee el problema en voz alta y comenta... *Hay que dibujar 116 patas y agrupar de 2 en 2 y de 4 en 4 para averiguar lo que piden... Se queda mirando a la pizarra y comenta... Así no voy a terminar nunca. Puedo también dividir 116 entre 2 patas de las gallinas y 116 entre 4 patas de los conejos.*
- E. *Como tú quieras.*
- A. *Pasa a la pizarra*

$$\begin{array}{r|l}
 116 & 2 \\
 \hline
 16 & 58 \\
 0 & 28 \\
 \hline
 & 19
 \end{array}$$

Hay 58 gallinas
y 19 conejos.

Se queda mirando a la pizarra y comenta... *Tiene que estar mal, porque no puede sobrar una pata.*

E. *¿Puedes explicarme lo que hiciste?*

A. *116 patas entre 2 porque son las patas de las gallinas y salen 58 gallinas y luego las otras 58 patas son de conejos y... Se queda mirando a la pizarra y comenta... ¡Ay!, la segunda división está mal, porque era entre 4 y yo dividí entre 3... Pasa a la pizarra*

$$\begin{array}{r|l}
 116 & 2 \\
 \hline
 16 & 58 \\
 0 & 18 \\
 \hline
 & 14
 \end{array}$$

Hay 58 gallinas y 14 conejos, pero como sobran 2 patas será, 59 gallinas y 14 conejos.

E. *Entonces, ¿está bien planteado el problema?*

A. *Sí.*

E. *¿En qué te apoyas para estar segura?*

A. *En que yo me imagino las patas y lo que hay que hacer son grupitos y como agrupar es dividir, está bien.*

E. *¿Crees que puede haber otra solución distinta a la obtenida?*

A. *No, porque las gallinas tienen siempre 2 patas y los conejos 4.*

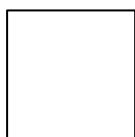
PROBLEMA 3.

Dibuja el cuadrilátero A(-2,-1), B(1,4), C(4,3) y calcula los puntos medios de cada lado.

A. *Lee el problema en voz alta y comenta... No se puede resolver porque le falta un lado para dibujar el cuadrilátero.*

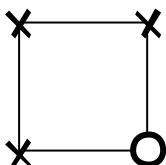
E. *¿En qué pensaste antes de responder?*

A. *Pasa a la pizarra*



*Un cuadrilátero
sería así*

Me dan esto, esto y esto... Señalando lo marcado con una cruz... y me falta esto...Señalando lo marcado con un círculo.



E. *¿Esa es la figura que te pide el problema?*

A. *Sí. Bueno, a lo mejor un poco más pequeña o más grande.*

E. *¿Cómo lo replantearías?*

A. *Añadiendo el punto ese que le falta.*

PROBLEMA 4.

Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?

A. *Lee el problema en voz alta y comenta... No se puede resolver pues no dicen el precio del jamón ni del pan.*

E. *¿Por qué crees que son necesarios esos datos?*

A. *¡Oh!, ¿cómo sabes lo que te devuelven si no sabes lo que te cuesta la compra?*

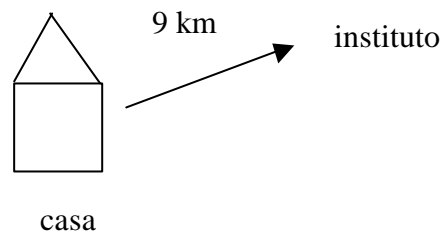
E. *¿Cómo lo plantearías?*

A. *Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas, el pan vale tanto y el jamón tanto. Paga todo con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?*

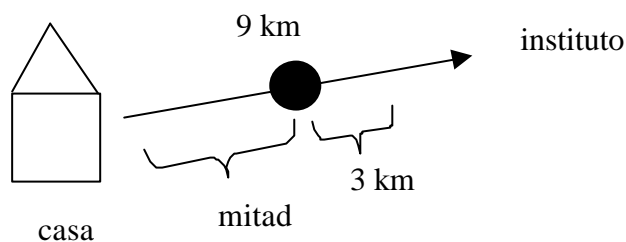
PROBLEMA 5.

A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa al instituto hay 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

A. *Lee el problema en voz alta y comenta... Voy a hacer un dibujo*



- Le falta decir dónde está la plaza del pueblo.
 E. ¿No se puede resolver porque le falta un dato?
 A. Vuelve a la pizarra

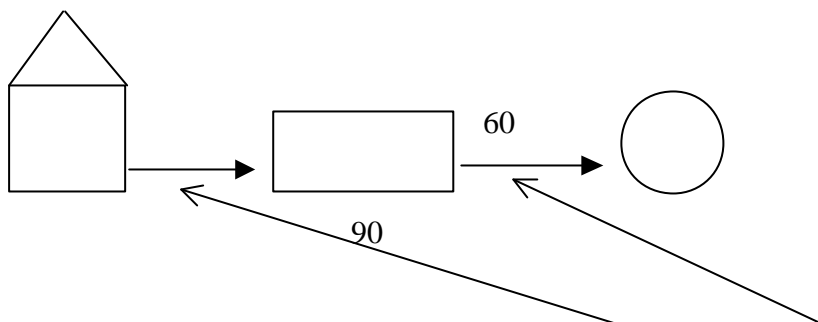


Sí, le falta un dato, tiene que decir: A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa al instituto hay 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, que es la mitad del camino de su casa al instituto y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?
 Entonces sería $4'5 + 3 = 7'5$ y luego $9 - 7'5 = 1'5$ km le faltan.

PROBLEMA 6.

Si la plaza que hay delante de tu casa es rectangular y tiene 90 m y 60 m de dimensiones, ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa?

- A. Lee el problema en voz alta, se sonríe y comenta... ¡Como no me hagan otra pregunta!, por ejemplo, cuál es el área de la plaza.
 E. ¿No se puede resolver tal y como está planteado?
 A. ¡Qué va!
 E. ¿Cómo lo plantearías?
 A. Se queda durante un rato leyendo el problema en voz baja y pasa a la pizarra



Bueno, es que le faltan datos, porque si te dicen esta distancia y ésta, entonces ya puedes resolverlo.

E. ¿Cómo sería entonces el problema?

A. Tu casa, la plaza y el colegio están en horizontal. La plaza es rectangular y tiene 90 m y 60 m de dimensiones, y la distancia entre tu casa y la plaza es tanto y entre la plaza y el colegio es tanto, ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa?

PROBLEMA 7.

Un librero cuya librería está situada a 60 metros del centro de la ciudad, obtuvo en ventas durante el mes de marzo 204.060 pesetas. Si vendió 24 libretas a 315 pesetas cada una, 12 bolígrafos a 125 pesetas cada uno, 10 diccionarios a 12.000 pesetas cada uno y 20 bestsellers a 2.500 pesetas cada uno, ¿cuánto dinero obtuvo de la venta?

A. Lee el problema en voz alta y comenta... *El dato de los 60 metros sobra, pues no tiene nada que ver los metros con las ventas y además te dan la solución, pues ya te dicen que obtuvo en ventas 204060 pesetas.*

E. ¿Entonces?

A. *Que está mal planteado. Es absurdo que te den la solución.*

E. ¿Cómo lo plantearías?

A. *Igual pero quitando la solución y el dato de los metros, a no ser que el profesor quiera confundir a los alumnos.*

E. ¿Tú crees que los datos que no intervienen en la resolución de un problema confunden?

A. *Claro, porque intentas operar con todos los datos, pues por algo están ahí.*

PROBLEMA 8.

Tres gallinas, A, B y C, que pesan juntas 4'5 kg han puesto 17 huevos. La

gallina A ha puesto 3 más que el doble de la gallina C, y la gallina B, 4 menos que el triple de la gallina C. Si la gallina C ha puesto 3 huevos, ¿cuántos huevos han puesto cada una de las gallinas?

- A. Lee el problema en voz alta, se sonríe y comenta... *Fuerte un rollo.*
 E. ¿Por qué dices eso?
 A. Se sonríe y comenta... *Por lo del doble de tal, más 3 que cual, eso es un rollo...* Vuelve a leerlo en voz baja y pasa a la pizarra
- $$A = 3 + 2C$$
- $$B = 4 - 3C$$
- $$C = 3$$
- 17 huevos

El peso no tiene nada que ver con los huevos que ponen, así que sobra. Ahora sustituyo la C por 3 y tenemos

$$A = 6$$

$$B = 4 - 3C = 5$$

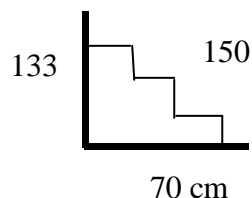
$$C = 3$$

- E. ¿Qué opinas del problema?
 A. *Que está mal planteado porque sobra el dato del peso y el de los 17 huevos.*
 E. ¿Por qué crees que sobra el dato de los 17 huevos?
 A. *Porque está mal, porque no ponen 17 huevos, ponen 14.*
 E. ¿En qué te basas para estar segura de que ese dato está mal?
 A. *En que el problema es muy fácil y sé que las operaciones las tengo bien, porque si no estuviese segura, intentaría de hacerlo de otra manera para que coincidiese.*

PROBLEMA 9.

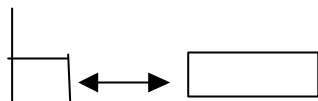
El pie de una escalera dista de la pared 70 cm. Si la escalera, que tiene 150 cm de longitud y pesa 3 kg, está apoyada en la pared a 133 cm del suelo ¿cuál es la distancia de la pared a la escalera?

- A. Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra



Longitud 150
 Peso 3 kg

Está mal, porque ¿qué tiene que ver el peso?... Se queda en silencio mirando el enunciado y comenta... De todas formas, la pregunta está mal, porque ¿cómo van a preguntar la distancia de la pared a la escalera si están pegadas? Por ejemplo si tengo una silla y una mesa, y me preguntan la distancia entre ellas si es correcto, pero si la escalera está pegada a la pared, ya no hay distancia.



Yo creo que lo que piden es esto... subraya el interior de la



figura... pero ya es meterse con el volumen y es muy difícil.

- E. *¿Entonces el problema está mal planteado o es muy difícil?*
- A. *Está mal planteado, porque para calcular el volumen faltan más datos. Estaría bien si quitaran el peso y pidiesen el área esa.*
- E. *¿Cómo lo plantearías?*
- A. *No sé. Sé que le faltan datos, pero no se me ocurre como plantearlo.*

PROBLEMA 10.

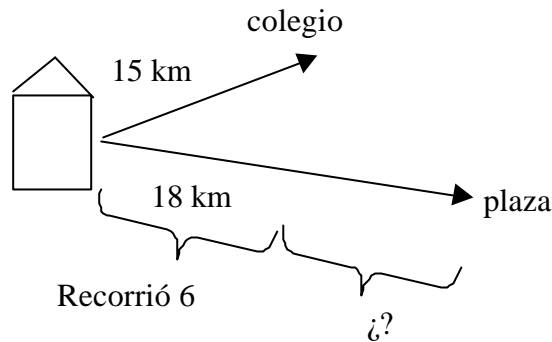
Una señora cría durante 52 semanas una cabra y 3 conejos. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen todo el pienso menos 128 gramos, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana?

- A. *Lee el problema en voz alta, se sonrío y comenta... ¡128 gramos!*
- E. *¿Por qué te sonrías?*
- A. *Porque esto no es un problema. Si dijese lo que come, sí.*
- E. *¿Por qué crees que tendría que decir lo que comen?*
- A. *Porque así sí podemos restar.*
- E. *¿Cómo estaría bien planteado?*
- A. *Una señora cría durante animales. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen tantos gramos de pienso, ¿cuánto pienso le sobra al finalizar la semana?*

PROBLEMA 11.

A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa al colegio es de 15 km y de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió la distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo quedándole 6 km por recorrer. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

- A. *Lee en voz alta el problema y pasa a la pizarra*



Se sonríe y comenta,... *el problema está mal, porque te dice que le faltan 6 km, y eso no va a ser lo que pregunten, además sobra la distancia de la casa al colegio.*

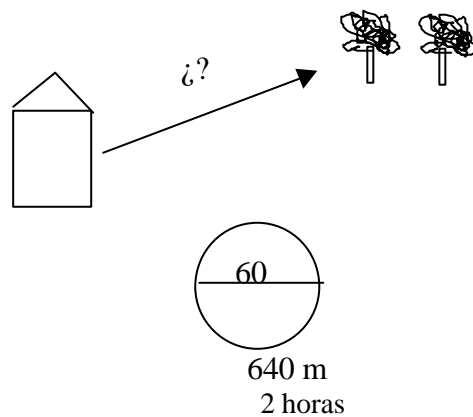
E. *¿Cómo sería correcto el planteamiento de este problema?*

A. *A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió 3 km. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?*

PROBLEMA 12.

¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro recorre 640 metros y tardamos 2 horas?

A. *Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y pasa a la pizarra*



El dato de las 2 horas sobra, porque piden la distancia no las horas, pero yo no sé hacerlo... Se queda mirando a la pizarra y comenta... no, no, el dato sí hace falta pues me da el tiempo que tarda. Es que si supiera la fórmula podría hacerlo, porque me dan todo, el tiempo, el diámetro y la distancia, pero la verdad es que no sé hacerlo.

E. *¿Qué opinas del problema?*

A. *Que está bien planteado, pero no me acuerdo de la fórmula.*

PROBLEMA 13.

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el vendedor le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. Si comienza a pagarla 4 meses más tarde, ¿cuánto tiene que pagar mensualmente?

A. Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra

Lavadora 82475

6 plazos

recargo 5370

E. I. 9000

4 meses más tarde

$$\begin{array}{r} 82475 \\ + 5370 \\ \hline 87845 \text{ tiene que pagar} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 87845 \\ - 9000 \\ \hline 78845 \quad | 4 \\ \hline 19711 \text{ ptas. cada mes.} \end{array}$$

E. *¿Cuál es tu opinión sobre este problema?*

A. *Que está bien planteado y el dato de los 6 meses está para despistar al alumno a ver si sabe y se da cuenta.*

E. *¿Por qué crees que ese dato es para despistar?*

A. *Porque con el dato de empezar a pagar 4 meses más tarde ya puedes calcular lo que tiene que pagar mensualmente, que es lo que te piden.*

PROBLEMA 14.

Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. En total se gastaron 2.400 pesetas. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta... *No sé, pero a primera vista parece que faltan datos...* Lo vuelve a leer en voz baja y pasa a la pizarra

*100 kg/día ahorraron
gastaron 2400 ptas.
Heno 6 días*

Vuelve a leer el problema en voz baja y comenta, con cierta inseguridad... *Sí, le falta el dato del precio del kg...* Vuelve a leerlo en voz alta y se queda callada durante un rato.

E. *¿Qué piensas?*

A. *Estoy buscando cuánto se gastaron en realidad, si ahorraron... Hace una pausa y continúa... faltan datos seguro. Es que hay algo que me choca. Este problema tiene truco... Se queda mirando el enunciado del problema y comenta... De todas forma, si dijese: Unos granjeros almacenaron heno. En total se gastaron 2.400 pesetas. Si el kg está a tantas pesetas, ¿cuántos kilos de heno almacenaron?, si se podría resolver.*

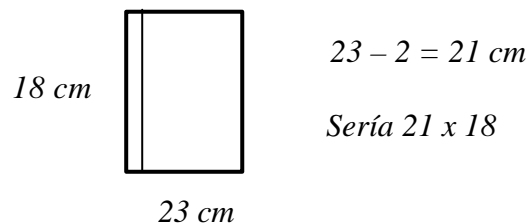
E. *¿Entonces el problema está mal planteado porque le faltan y sobran datos?*

A. *No, yo creo que le faltan otros datos, pero no sé plantearlo como es, sino quitando eso de los días y añadiendo el precio del kg*

PROBLEMA 15.

Necesitamos 5 láminas de dibujo de 23 cm de largo y 18 cm de ancho. Si se deja un margen de 2 cm a cada lado, ¿cuánto medirá la superficie destinada a escribir de cada hoja?

A. Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra



E. *Entonces, ¿este problema está bien planteado?*

A. *Bueno, quitando lo de las 5 láminas, pues no te piden sino la superficie de una.*

PROBLEMA 16.

Tenemos 10 jaulas con 12 pavos cada una y 6 jaulas con 8 conejos cada una. El kilo de pavo vale 900 ptas., el cuarto kilo vale 225 ptas. y cada pavo pesa 4 kg; el kilo de conejo vale 550 ptas. y cada conejo pesa 3 kg ¿Cuánto valdrán todos los pavos y conejos juntos?

- A. Lee en voz alta el problema y comenta... *El cuarto kilo no hace falta, pues ya dan el kg. Este problema está bien planteado, pues se hacen multiplicaciones y sumas y ya está...* Pasa a la pizarra

$$\begin{array}{l}
 10 \times 12 = 120 \text{ pavos} \\
 6 \times 8 = 48 \text{ conejos}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \\
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 1 \text{ kg } 9000 \\
 4 \text{ kg/c} \\
 1 \text{ kg } 550 \\
 3 \text{ kg/c}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 120 \times 4 = 480 \text{ kg de pavos} \\
 48 \times 3 = 154 \text{ kg de conejos}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 480 \\
 \times 9000 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 154 \\
 \times 550 \\
 \hline
 \end{array}$$

Se suman estas cantidades y ya está.

PROBLEMA 17.

Daniel para ir al trabajo utiliza su coche y éste consume 8 litros de gasolina cada 15 kilómetros, y 16 litros cada 30 km. ¿Cuántos litros consumirá en un trayecto de 150 km?

- A. Lee en voz alta el problema y comenta... *Puedes utilizar 8 litros de gasolina cada 15 kilómetros o 16 litros cada 30 km, es lo mismo pues con los dos se puede resolver...* Pasa a la pizarra y comenta... *Voy a ver que ocurre en un km*

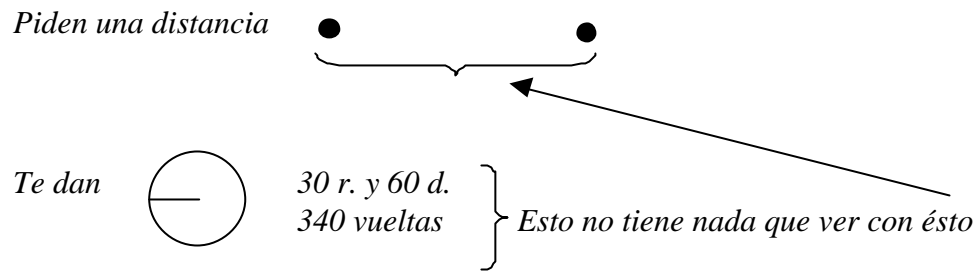
$$8 : 15 = 0'63 \text{ l/km}$$

$$150 \times 0'65 = 80 \text{ litros que es lo que consume.}$$

PROBLEMA 18.

¿Qué distancia separa el colegio del parque si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro y 30 cm de radio, da 340 vueltas?

- A. Lee el problema en voz alta y comenta... *Con estos datos no se puede hacer nada, pues te piden una distancia y te dan el radio de una bicicleta que no viene a cuenta...* Pasa a la pizarra



Sería dar por ejemplo, los km que recorre en una vuelta o preguntar por la longitud de la rueda y además si te dan el radio no hace falta que te den el diámetro.

- E. ¿Cuál es entonces tu opinión sobre este problema?
- A. Que está planteado porque faltan datos o que está mal hecha la pregunta.
- E. ¿Cómo tendría que estar planteado?
- A. ¿Qué distancia separa el colegio del parque si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta da 340 vueltas y recorre tantos km en una vuelta? O bien ¿Cuál es la longitud o el área de una rueda de bicicleta de 60 cm de diámetro?

PROBLEMA 19.

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el comprador le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. ¿Cuánto tiene que pagar mensualmente?

- A. Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra

82475 ptas.

6 plazos mensuales

recargo 5370 ptas.

E. I. 9000 ptas.

Sumo el recargo y el precio total de la lavadora y lo que da lo divido entre 6.

$$\begin{array}{r}
 82475 \\
 + 5370 \\
 \hline
 87845 \quad | \quad 6 \\
 27 \quad \quad 14640 \\
 38 \\
 24 \\
 05
 \end{array}$$

Tiene que pagar 14 640 ptas. mensualmente.

E. *Por lo tanto, ¿el problema está bien planteado?*

A. *No, yo quité el dato de las 9000 ptas.*

E. *¿Por qué crees que sobra ese dato?*

A. *Porque lo que tiene que pagar es lo que vale más el recargo por pagarla a plazos. Los demás datos sobran, porque no hay que hacer más operaciones para calcular lo que piden.*

PROBLEMA 20.

En un corral hay gallinas y conejos. Hay 11 animales. Entre todos tienen 32 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y pasa a la pizarra

| | | | | | | | | | animales

¿Tengo que suponer que la mitad son gallinas y la mitad son conejos?

E. *¿Te dice eso el problema?*

A. *No, pero es que entonces faltan datos.*

E. *¿Por qué crees eso?*

A. *Porque si no pueden haber muchas soluciones, ya que con once animales, pueden ser 5 gallinas y 6 conejos, o 10 gallinas y un conejo o todas las combinaciones que queramos, y eso es un disparate.*

E. *¿Tu crees que todas esas combinaciones son posibles? ¿No te indica nada el dato del número de patas?*

A. *No, porque no dice por ejemplo que 10 patas son de gallinas y el resto de conejos.*

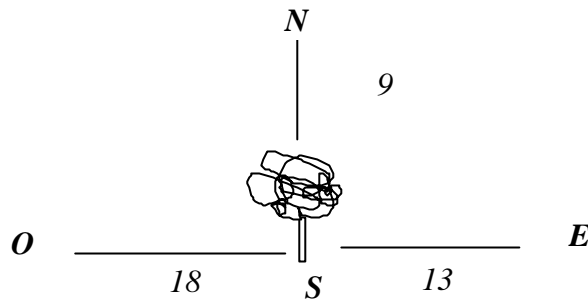
E. *Entonces, ¿cómo tendría que estar planteado el problema?*

A. *En un corral hay gallinas y conejos. Hay 11 animales. Entre todos tienen 32 patas. Si 10 patas son de gallinas y el resto de conejos, ¿cuántas gallinas y conejos hay?*

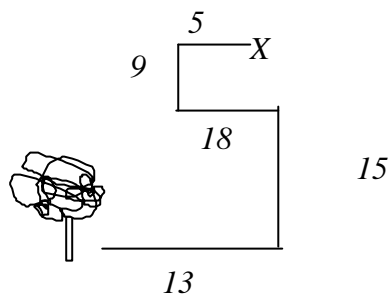
PROBLEMA 21.

Algunos estudiantes encontraron un mapa de un tesoro pirata con las siguientes pistas: "Caminar 13 pasos al este del roble, 15 al norte y 18 al oeste; ahí caminar 9 pasos al norte y otros 5 al este; aquí podrán encontrar el tesoro". ¿Cuántos pasos en línea recta tendrán que caminar desde el árbol hasta el tesoro?

A. Lee el problema en voz alta y pasa a la pizarra



Borra la pizarra y hace otro esquema



Se sonríe y comenta con ironía... *¡camina en línea curva!*

- E. *¿Puedes explicarme qué es exactamente lo que te produce risa, al leer el problema?*
- A. *Porque siempre se camina en línea recta... Se sonríe y continúa... a no ser que estés borracha.*
- E. *¿Cuál es tu opinión del problema?*
- A: *Que está bien planteado.*

ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

Nivel académico alto

PROBLEMA 1

En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. ¿Cuál es la edad del profesor de inglés?

- A. Lo lee en voz alta y se echa a reír, comentando a continuación *no se puede hacer*. ¿Cuál es la edad? ¡A saber! (Hace un gesto con la mano).
- E. ¿No se puede resolver?
- A. No, pues no hay relación entre los datos del problema y la pregunta.
- E. ¿Cómo plantearías tú el problema?
- A. Pues diría,... (hace una pausa), *En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. Si la edad del profesor es el doble de la cantidad de chicos que hay menos la tercera parte de la cantidad de chicas, ¿cuál es la edad del profesor de inglés?*

PROBLEMA 2

En un corral hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay en el corral?

- E: ¿Ya lo has leído?
- A: Sí
- E: ¿Sueles hacer una lectura rápida?
- A: Sí, una rápida, y si no lo comprendo vuelvo a leerlo.
(Escribe en la pizarra los cálculos sin decir nada)

$$2x + 4x = 116 \quad \text{gallinas: } 19 \times 2 + 1 = 39 \text{ patas - gallinas}$$

$$6x = 116$$

$$x = 116/6$$

$$\begin{array}{r} 116 \overline{) 6} \\ \underline{56} \\ 2 \end{array}$$

$$\text{conejos} = 19 \cdot 4$$

- A: Serían 19 gallinas.
- E: Las gallinas serían 19 y ¿los conejos?
- A: De la división me sobran dos patas y los conejos tienen 4, entonces sería y medio más ...Juega con la tiza, callado. Serían 19 . 4 conejos.
- E: Vamos a repasar un poco lo que has hecho. Lo que se te ocurrió en este problema fue plantear una ecuación.

- A: Sí, 2x las gallinas y 4x los conejos. Me dio la x 19 y ahora pues lo lógico sería multiplicar por la cantidad que tiene al lado, más la cantidad que sobró de la división que son dos patas que sería una gallina... Ahora sería los conejos,... sería "por 4".
- Hay una cosa que no comprendo, porque si multiplico por 4 saldrían los conejos, y serían menos y no puede ser,... es que a más patas serían menos...*
- E: *¿Por qué multiplicas por 19?*
- A: *Porque 19 es la cantidad que me dio, porque 19 es la x y 4 son las patas de los conejos.*
- E: *¿No sale bien?*
- A: *Saldrían más conejos que gallinas. Claro, $19 \times 2 + 1$ es menos que 19×4*
- E: *Pero si multiplicas 19×4 , entonces ¿eso serían las patas?*
- A: *No, las patas son 116 y 19 son la x.*
- E: *¿La x es el número de animales?*
- A: *¡Ajá!*
- E: *¿No será que estás mezclando las patas con los animales?*
- A: *Vamos a ver, si aquí he multiplicado [señala 19.4] es lo mismo y entonces da más.*
- E: *Pero es que arriba cuando multiplicaste $19 \cdot 2$ ¿qué estás multiplicando: patas o ...?*
- A: *Es que... Uh.*
- E: *La x ¿qué representa arriba: las patas o los animales?*
- A: *Los animales. Son 19 animales por 2 patas.*
- E: *Son 19 animales*
- A: *[Vuelve a escribir en la pizarra, multiplica $19 \cdot 4 = 76$ conejos]*
- A: *76 conejos*
- E: *76 conejos y 19 gallinas ¿no?*
- A: *¿Este problema está bien planteado?*
- E: *Es que no está claro, yo pienso que al tener más patas deben ser menos conejos y en cambio me da más.*
- E: *¿Crees que no está bien?*
- A: *Bueno sí está bien planteado, pero no lo veo claro.*
- E: *¿Tu lógica te dice que ese problema no debe dar esa solución?*
- A: *No, tendría que ser menor.*
- E: *¿Estará mal planteado? ¿Te faltará algún dato?*
- A: *Pues no sé, número de animales... son x por el número de patas... En este caso, esto son gallinas y conejos: son x por el número de patas...*
- E: *Pero ¿son los mismos?*
- A: *¿El mismo número?*
- E: *Pero si a los dos los has llamado x ¿son iguales?*
- A: *Pero es que x multiplica a algo distinto.*
- E: *Entonces calculaste el número de animales. Te dio 19.*

- A: *Que tuviesen 2 patas son 39.*
 E: *¿39 animales ó 39 patas?*
 A: *39 animales... Que salía de la división.*
 E: *Si tú has dicho que x son los animales y cuando hiciste la división dijiste que eran animales.*
 A: *¿Serían patas? Entonces son... 19 gallinas.*
 E: *Y los conejos, ¿cómo podrías calcularlos?*
 A: *Pues,... si son 19 gallinas..., yo ¿para qué quiero las gallinas y los conejos?... me he quedado en blanco.*
 E: *Imagínate que yo te dijese que en un corral hay 12 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay?*
 A: *Puede haber muchas gallinas o muchos conejos. No hay una cifra exacta. Puede haber x de dos patas y x de 4 patas.*
 E: *¿Tú crees que se puede resolver este problema?*
 A: *Me faltarían datos. Al principio lo vi claro, pero ahora que me lo plantea así...*
 A: *Pueden haber tantos conejos y a lo mejor una gallina.*
 E: *¿Se te ocurre como redactarlo para que se pueda resolver?*
 A: *Pues hay 116 patas y $\frac{2}{4}$ son tal y que me digan cuántos conejos.*
 E: *¿Te hará falta algún dato?*
 A: *Un dato que te diga cuántas son gallinas o una fracción de tal o algo por el estilo.*

PROBLEMA 3

Dibuja el cuadrilátero A(-2,-1), B(1,4), C(4,3) y calcula los puntos medios de cada lado.

- A. *Lo lee en voz alta y a continuación comenta no se puede dibujar un cuadrilátero pues sólo hay 3 lados. Sale un triángulo, ¿lo dibujo? Y sin esperar la respuesta del entrevistador, pasa a dibujar en la pizarra unos ejes de coordenadas, representando los puntos dados y uniéndolos obteniendo un triángulo (pone cara de satisfacción).*
 E. *Has dibujado un triángulo. ¿Eso es lo que te pide el problema?*
 A. *No, me pide un cuadrilátero pero me falta un dato.*
 E. *Es decir, que el problema está mal planteado.*
 A. *Sí, le falta un punto.*
 E. *O sea, que este problema no se puede resolver.*
 A. *No, lo que te piden no.*
 E. *¿Cómo tendría que estar redactado el problema para que lo pudieras resolver?*
 A. *Poner un punto más. Bueno, no está mal planteado, sino que le falta un punto.*

PROBLEMA 4

Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?

A. Lee el problema en voz baja y a continuación comenta... *pero ¿si no sé cuánto vale el pan, cómo lo voy a hacer?*

E. *Entonces explícame el problema.*

A. Lo vuelve a leer en voz alta y se queda callado mirándome.

E. *Álvaro, ¿no lo puedes resolver? ¿Está mal planteado?*

A. *No, le faltan datos.*

E. *¿Qué datos le faltan?*

A. *El precio de las barras de pan y el precio del jamón, por ejemplo: Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas y la barra de pan 50 pesetas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven? Como 50 por tres es 150 (pasa a operar en la pizarra)*

$$\begin{array}{r} 150 \\ + 150 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 500 \\ - 300 \\ \hline 200 \end{array} \text{ ptas. le devuelven}$$

E. *Pero tú has añadido un dato, el precio del pan, y antes me habías comentado que también faltaba el dato del precio del jamón.*

A. *Pero el precio del jamón no hace falta para resolver el problema.*

E. *Entonces, ¿para qué sirve el dato del jamón?*

A. *Para despistarte un poco.*

E. *Y tú, ¿quitarías ese dato o lo dejarías?*

A. *Lo dejaría para confundirlos un poco, para que planteen ecuaciones, pues es lo que estamos dando.*

PROBLEMA 5

A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa al instituto hay 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

A. Lee el problema en voz baja y a continuación comenta... *me falta el dato de los kilómetros que hay de su casa a la plaza y sobra el dato de su casa al instituto. Así, con el dato que me falta, lo dividiría entre 2 y le sumaría 3. (Hace una pausa). No, perdón, (lee en voz alta la pregunta) ¿cuántos kilómetros faltan para llegar a la plaza? Entonces sobra el dato de 3 kilómetros más y los 9 km de su casa al instituto y me falta el dato de la casa a la plaza del pueblo. (Hace un gesto como que se está liando y a continuación comenta lo siguiente) El problema sería "A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa a la plaza del pueblo hay*

tantos kilómetros. El sábado recorrió la mitad del camino. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

- E. *¿Por qué crees que sobra el dato de los 3 km que recorrió por la tarde?*
 A. *Porque no especifica que esos tres kilómetros son recorridos en la dirección de la plaza, caminando desde donde se paró.*

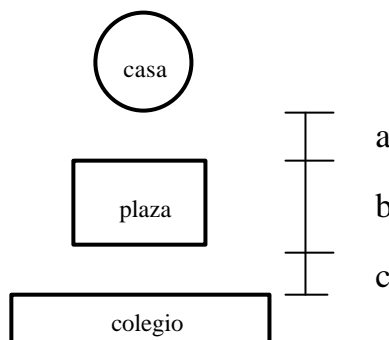
PROBLEMA 6.

Si la plaza que hay delante de tu casa es rectangular y tiene 90 m y 60 m de dimensiones, ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa?

- A. *Lee el problema en voz alta y comenta... no se puede resolver, pues falta el dato de la distancia que hay de mi casa a la plaza y de la plaza al colegio... (Se para un momento y comenta)... me falta el dato de la distancia que hay del colegio a la plaza y de la plaza a mi casa.*

- E. *¿Puedes explicarme mejor lo que dices?*

- A. *Sí claro, porque se supone que la plaza está aquí... (pasa a dibujar en la pizarra y señala el lugar indicado)... y mi casa aquí y el colegio aquí... (señala los lugares indicados como su casa y su colegio), como sé la distancia ésta... (señala la distancia **b**)... puedo sumarle ésta... (señala la distancia **a**)... más ésta... (señala la distancia **c**)... y calcular la distancia del colegio a mi casa.*



- E. *¿Cuáles son esas distancias que has indicado?*

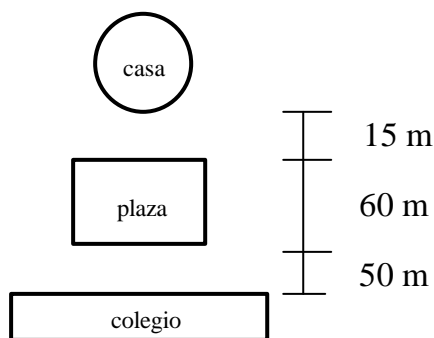
- A. *Bueno, el problema me tiene que decir situaciones exactas para poder resolver el problema.*

- E. *Es decir, que este problema tiene unos datos... (el alumno interrumpe a la entrevistadora y pasa a terminar la frase él)*

- A.... *Que no me sirven para resolver el problema.*

- E. *Entonces, ¿cómo debería estar planteado el problema?*

- A. *(En voz alta y dibujando en la pizarra al mismo tiempo)... enfrente de mi casa hay una plaza a 15 metros; la plaza es rectangular y su altura mide 60 m y el colegio está justo enfrente a 50 m ¿Cuál es la distancia que hay del colegio a la casa?*



PROBLEMA 7.

Un librero cuya librería está situada a 60 metros del centro de la ciudad, obtuvo en ventas durante el mes de marzo 204.060 pesetas. Si vendió 24 libretas a 315 pesetas cada una, 12 bolígrafos a 125 pesetas cada uno, 10 diccionarios a 12.000 pesetas cada uno y 20 bestsellers a 2.500 pesetas cada uno, ¿cuánto dinero obtuvo de la venta?

- A. Lee en voz alta el problema, y al terminar la lectura comenta... *¡Lo veo fácil! Hallo el precio de todas las libretas multiplicando 24 por 315, igual con los bolígrafos y todo lo demás...* (hace una pausa relejendo el problema en voz baja y comenta)... *pero ¿para qué me da el dato de los 60 metros? No tiene nada que ver.*
- E. *Es decir, que para ti al problema le sobran datos.*
- A. *Sí. Yo lo quitaría pues ese dato confunde ya que te podrías quedar pensando que hace ese dato ahí. Yo dejaría el problema así: Un librero obtuvo en ventas durante el mes de marzo 204.060 pesetas. Si vendió 24 libretas a 315 pesetas cada una, 12 bolígrafos a 125 pesetas cada uno, 10 diccionarios a 12.000 pesetas cada uno y 20 bestsellers a 2.500 pesetas cada uno, ¿cuánto dinero obtuvo de la venta?*
- E. *De esa manera al problema ¿no le faltaría ni le sobraría ningún dato?*
- A. *No. Así estaría bien.* (No hace ningún comentario sobre el dato que no utiliza).

PROBLEMA 8

Tres gallinas, A, B y C, que pesan juntas 4'5 kg han puesto 17 huevos. La gallina A ha puesto 3 más que el doble de la gallina C, y la gallina B, 4 menos que el triple de la gallina C. Si la gallina C ha puesto 3 huevos, ¿cuántos huevos han puesto cada una de las gallinas?

- A. Lo lee en voz alta. Inmediatamente pasa a anotar los datos del problema en la pizarra y a plantearlo al mismo, comentando siempre en voz alta lo que va realizando sobre la pizarra.
- A. *Escribe en la pizarra... $A = 3...$ (comentando)... *A ha puesto 3 más...* (sigue leyendo en voz baja, y a continuación continúa escribiendo en la pizarra y comentando lo que hace en voz alta)... *y como C ha puesto 3 huevos, sería $A = 3 + 2 \cdot 3$, la B ha puesto 4 menos el triple de 3, $B = 3 \cdot 3 - 4$ y $C = 3$**
- A ver, sería, mm...* (se queda pensativo un rato mirando las anotaciones hechas en la pizarra y pasa a operar, repitiendo en voz alta lo que hace)...

$$A = 3 + 6 = 9 \text{ huevos la A}$$

$$B = 9 - 4 = 5 \text{ huevos la B}$$

$$C = 3 \text{ o } 3 \text{ la C y eso es igual a}$$

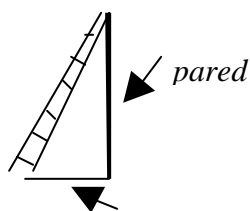
17 huevos en total

- E. *¿El problema qué es lo que te pide?*
 A. *Los huevos que ha puesto cada gallina*
 E. *¿Para qué calculaste los huevos que ponen las tres gallinas juntas?*
 A. *Porque me sirve de referencia para saber si los resultados están bien.*
 E. *Luego ¿el problema está bien planteado o le sobran datos?*
 A. *Para mí está bien planteado, porque el dato de los huevos que ponen todas juntas es necesario para comprobar el resultado y el dato de lo que pesan juntas no molesta para calcular lo pedido pues no despista ya que no te piden nada sobre el peso.*

PROBLEMA 9

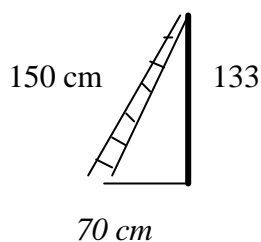
El pie de una escalera dista de la pared 70 cm. Si la escalera, que tiene 150 cm de longitud y pesa 3 kg, está apoyada en la pared a 133 cm del suelo ¿cuál es la distancia de la pared a la escalera?

- A. *Comienza a leer el problema en voz alta y sin terminar la lectura pregunta... ¿el pie es donde pisas primero?*
 E. *El pie es donde la escalera toca el suelo.*
 A. *Sigue leyendo y de nuevo interrumpe la lectura y pregunta... ¿qué significa dista?*
 E. *La distancia del pie de la escalera a la pared.*
 A. *¿Cómo que la distancia a la pared?*
 E. *¿Cómo te imaginas tú la escalera y la pared?*
 A. *Dibuja en la pizarra*



¿Esto es la distancia?

- E. *Sí.*
 A. *Ah... (continúa leyendo y anotando los datos sobre el dibujo, al mismo tiempo que lo comenta en voz alta)*



(Cuando terminar de colocar los datos comenta)
¡70 cm! ¡Qué bobería!

- E. *¿Por qué es una bobería?*
 A. *Porque te da unos datos pero también te da la solución y entonces no tienes que hacer nada. Sería, por ejemplo, si te dan el dato de la longitud de la escalera, 150 cm, y la distancia del suelo a donde está apoyada la escalera, 133, para que por Pitágoras halle la distancia de la pared al pie de la escalera.*
 E. *¿Cómo sería entonces el problema?*
 A. *Una escalera tiene 150 cm de longitud y está apoyada en la pared a 133 cm del suelo. ¿Cuál es la distancia de la pared a la escalera?*
 E. *Y del resto de los datos del problema, ¿qué comentas?*
 A. *El peso es un dato que sobra y por eso lo quitaría.*

PROBLEMA 10

Una señora cría durante 52 semanas una cabra y 3 conejos. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen todo el pienso menos 128 gramos, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana?

- A. *Lee en voz alta, y con asombro comenta... ¡La solución la da el problema! Además sobran las 52 semanas y los animales.*
 E. *¿El resto de los datos son necesarios?*
 A. *No. Los 760 gramos sobran, sólo es útil el dato de los 128 gramos.*
 E. *Es decir, que al problema le sobran datos.*
 A. *Sí, y le faltan otros.*
 E. *¿Cómo lo plantearías?*
 A. *Una señora cría una cabra y 3 conejos. La cabra come “tanto” y los tres conejos “tanto”. Si compra 760 gramos de pienso para una semana, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana? Es decir, que sumaría lo que come la cabra y los tres conejos y se lo restaría a los 760 gramos. Quitaría las 52 semanas y la solución.*
 E. *Para tí es correcto que un problema te dé la solución.*
 A. *Sí. Bueno, normal no pero sí para despistar al alumno.*

PROBLEMA 11

A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa al

colegio es de 15 km y de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió la distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo quedándole 6 km por recorrer. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

- A. Lee el problema en voz alta... *Pues... me parece una bobería. El problema dice que de la casa a la plaza hay 18 km, le quito los 6... (se para un momento como releendo el problema y continúa)... no, no había leído bien la pregunta. ¡Le faltan para llegar a la plaza 6 km!*
- E. ¿Qué pasa entonces con este problema?
- A. *Que no tiene sentido los datos que te dan y la pregunta, porque te dan el resultado.*
- E. *Si no tiene sentido, ¿qué ocurre?*
- A. *Que tendría que decir, por ejemplo: A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa al colegio es de 15 km y de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. ¿Cuántos kilómetros recorre Laura si va del colegio a su casa y de su casa a la plaza y le falta 6 km por recorrer?*

PROBLEMA 12

¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro recorre 640 metros y tardamos 2 horas?

- A. Lee el problema en voz alta. Se para y lo vuelve a leer en voz baja... *Hay que hallar la longitud de la circunferencia. Sería... (pasa a escribir en la pizarra comentando en voz alta todo lo que hace)*
Sería 30×30 , no, perdón, me equivoqué
 $30 \times 2 \times 3'1416 =$
lo que me dé lo multiplico por 640 y obtengo la distancia.
- E. *Álvaro, ¿me puedes decir en qué pensaste al multiplicar el resultado indicado por 640?*
- A. *Porque son las vueltas que da, ya que la longitud... (pinta una circunferencia en la pizarra)... es una vuelta.*
- E. *¿Es decir que el dato 640 te indica las vueltas que da?*
- A. *Sí.*
- E. *Lee de nuevo el problema, por favor.*
- A. *Lo lee en voz baja y comenta... ¡Ah, es verdad! 640 no son las vueltas, son los metros... (borra los cálculos que había realizado en la pizarra y vuelve a leer el problema en voz baja)... ¡los 640 metros es la distancia pedida!*
- E. *¿Entonces?*
- A. *Que está mal, sobran todos los datos menos los 640 metros.*

- E. *Si sobran todos los datos menos el de los 640 metros, ¿por qué está mal?*
- A. *Porque no sería un problema. Sería: ¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro da “tantas” vueltas?*

PROBLEMA 13

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el vendedor le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. Si comienza a pagarla 4 meses más tarde, ¿cuánto tiene que pagar mensualmente?

- A. *Lee el problema en voz baja. Al terminar pregunta... Si comienza a pagarla 4 meses más tarde ¿los 4 primeros meses de los 6 meses no los pagó?*
- E. *¿Tú qué entiendes por empezar a pagar meses más tarde de adquirir un objeto?*
- A. *¡Ah!, entonces... (no responde a la investigadora, pero se muestra seguro y comienza a operar en la pizarra comentando lo que va haciendo)...*

$$\begin{array}{r}
 82.475 \\
 + \quad 5.370 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 6 \\
 \hline
 \end{array} \right.$$

paga mensualmente

Y el dato de los 4 meses más tarde sobra. Además es para despistar pues no influye para nada.

- E. *¿Tu lo quitarías?*
- A. *Bueno... (hace una expresión con la cara como que no sabe que hacer, si quitarlo o no).*
- E. *Pero en la vida real, ¿eso es lo que ocurre normalmente con las compras a plazo?.*
- A. *Ya claro, para que dé tiempo para ahorrar.*
- E. *¿Entonces?*
- A. *Que no influye.*

PROBLEMA 14

Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. En total se gastaron 2.400 pesetas. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

- A. Lo lee en voz alta... *Si ahorraron 100 gramos por día y tuvieron para 6 días entonces...* (escribe en la pizarra y comenta en voz alta)... $100 \times 6 = 600$ kg almacenaron.
- E. *¿Qué opinas del problema?*
- A. *Que le sobran datos. En principio los 4 días sobran, porque dice en 6 días, y lo que gastaron también.*
- E. *¿Cómo lo replantearías?*
- A. *Unos granjeros almacenaron heno para unos días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?*

PROBLEMA 15

Necesitamos 5 láminas de dibujo de 23 cm de largo y 18 cm de ancho. Si se deja un margen de 2 cm a cada lado, ¿cuánto medirá la superficie destinada a escribir de cada hoja?

- A. Lee el problema en voz alta, y antes de terminar de leerlo pregunta... *¿el margen es por la derecha e izquierda o por todos los lados?*
- E. *Por todos los lados.*
- A. *Pues sería...* (pasa a la pizarra y comenta en voz alta lo que hace)...

23×18 para conocer la superficie de la hoja

$$23 \times 18 = 418 \text{ cm}^2 \text{ a esto le restaría el margen que sería } 2 \times 2 = 4$$

$$418$$

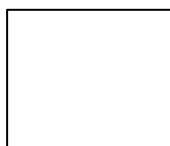
$$\underline{- 4}$$

$$414 \text{ cm}^2$$

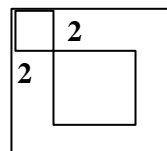
es la superficie que queda para escribir de una hoja. El dato de las 5 láminas sobra porque me preguntan la superficie de una no de cinco.

- E. *¿Podrías hacer un dibujo de cómo te imaginas esa hoja?*

- A. Pasa a la pizarra, dibuja y comenta:



Si quito dos cm a cada lado, todo el espacio del margen es lo mismo que un cuadradito de $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$.



PROBLEMA 16

Tenemos 10 jaulas con 12 pavos cada una y 6 jaulas con 8 conejos cada


una. El kilo de pavo vale 900 ptas., el cuarto kilo vale 225 ptas. y cada pavo pesa 4 kg; el kilo de conejo vale 550 ptas. y cada conejo pesa 3 kg
¿Cuánto valdrán todos los pavos y conejos juntos?

- A. Lee el problema en voz baja y hace un gesto con los ojos expresando que es muy largo. Una vez termina de leerlo, coge la tiza y comenta...
Si el kg de pavo cuesta 900 pesetas sería... (pasa a operar en la pizarra)... $900 \times 4 = 3600$ ptas. que vale un pavo y ahora lo multiplico por doce para saber cuánto valen los doce pavos. Igual haría con los conejos quinientas cincuenta por tres y luego por ocho y luego sumo las dos cantidades.
- E. *A ver Álvaro, hay datos que no has utilizado. ¿Me podrías decir por qué?*
- A. *Sí, sobra el dato del número de jaulas y el del precio del cuarto kilo.*
- E. *¿Por qué crees que sobran esos datos?*
- A. Sin responder a la investigadora, vuelve a leer el problema en voz baja y comenta... *¡Ay es verdad!, No son doce pavos sino ciento veinte y cuarenta y ocho conejos.*
- E. *¿Qué me puedes decir del dato que no has utilizado?*
- A. *El del cuarto kilo en este caso no hace falta porque me dan el precio del kg, si no sí lo utilizaría para calcular el precio del kg, siempre que fuese exacto claro, que fuese proporcional.*

PROBLEMA 17

Daniel para ir al trabajo utiliza su coche y éste consume 8 litros de gasolina cada 15 kilómetros, y 16 litros cada 30 km. ¿Cuántos litros consumirá en un trayecto de 150 km?

- A. Lee el problema en voz baja. Coge la tiza y comenta... *Tendría que dividir ciento cincuenta entre una cualquiera de las dos cantidades que recorre, porque son proporcionales, y luego el resultado por la cantidad de litros... (pasa a operar en la pizarra).*

$$150 \overline{) 15}$$


lo que me da lo multiplico por ocho.

- E. *Luego el problema está bien planteado.*
- A. *Sí, aunque sobran datos pues si consume ocho litros cada quince km se sabe que consume 16 litros cada 30 km pues son cantidades proporcionales. Uno de los dos sobra.*

PROBLEMA 18

¿Qué distancia separa el colegio del parque si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro y 30 cm de radio, da 340 vueltas?

A. Lee el problema en voz baja y pregunta... *¿pongo todo en la pizarra o lo puedo hacer directamente?*

E. *¿Tienes claro lo que vas a hacer? Haz lo que para ti es mejor.*

A. *Sí. Tengo que hallar eh... (se queda un instante dudando)... el diámetro no,... (vuelve a hacer una pausa)... La longitud de la circunferencia y luego multiplicarla por el número de vueltas para hallar los metros, pero claro los cm los tengo que pasar a metros... (pasa a escribir en la pizarra)...*

$$L = r \cdot \pi \cdot 2 \text{ sería } 30 \cdot \pi \cdot 2 \text{ sería } 60 \times 3'1416 = 190 \text{ cm} = 1'9 \text{ m}$$

Ahora multiplico este resultado por el número de vueltas que da la rueda

1'9 x 340 y el resultado es la distancia que separa el colegio del parque.

E. *¿El problema está bien planteado?*

A. *Sí.*

E. *¿Utilizas todos los datos?*

A. *No. El diámetro no lo utilizo pues cojo el radio. O sea que con el diámetro y el número de vueltas o el radio y el número de vueltas se puede resolver.*

PROBLEMA 19

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el comprador le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. ¿Cuánto tiene que pagar mensualmente?

A. Lee el problema en voz alta. Pregunta... *¿qué significa el recargo? ¿Que por pagar a plazos paga más dinero?*

E. *Sí.*

A. *Y las 9000 pesetas de la entrega inicial no van incluidas en el precio de la lavadora, ¿es un dinero aparte?*

E. *Sí.*

A. *¿Y la entrega inicial entra en los plazos o es un dinero aparte?*

E. *Es una cantidad aparte de las mensualidades.*

A. *¿Y el recargo no va incluido en las mensualidades?*

E. *Explica lo que quieres decir.*

A. *Sí, al dinero que vale la lavadora le quito la entrega inicial, luego lo divido entre las 6 mensualidades y yo lo que quiero saber es si el recargo lo pago dentro de cada mensualidad o lo pago aparte de las*

mensualidades, pues si no las cantidades mensuales serían diferentes.

E. *Como tú creas o decidas.*

A. *Vale...* (comienza a operar en la pizarra, mientras comenta en voz alta lo que hace)

$$\begin{array}{r} 82.475 \\ - 9.000 \\ \hline 73.475 \\ + 5.370 \\ \hline 78.845 \end{array} \quad \begin{array}{l} \underline{\quad 6 \quad} \\ 12. \dots \end{array}$$

E. *Luego, este problema está bien planteado.*

A. *Sí.*

E. *¿Son problemas que suelen hacer en clase?*

A. *No, solemos hacer más de ecuaciones. Por ejemplo el padre tiene el doble de la edad de su hijo, o así.*

E. *Pero el problema que has resuelto es un problema de la vida real.*

A. *Sí. Está bien ¿no?.*

E. *Sí, sí.*

PROBLEMA 20

En un corral hay gallinas y conejos. Hay 11 animales. Entre todos tienen 32 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

A. *Lee en voz alta. A continuación comenta... Pues,... pueden haber más gallinas que conejos o más conejos que gallinas.*

E. *De acuerdo.*

A. *Pero,...* (duda durante un instante)... *bueno, pero...* (lee de nuevo en voz baja y se queda pensando con la cabeza agachada)... *Serían pues,... No sé, no sé hacerlo.*

E. *¿Podría ayudarte el realizar un esquema o dibujo sobre lo que te dice el problema?*

A. *No sé, a lo mejor...* (coge la tiza y pinta 32 patas en la pizarra, y dice)... *¿como tiene que haber once animales dividido entre 11?*

E. *¿Para qué?*

A. *Bueno, tendría que hacer grupos de 4 en 4 y de 2 en 2, pero claro como 4 y 2 son pares este problema no se puede resolver. Es inexacto pues puede haber un número de animales u otro.*

E. *¿Entonces, cuál es tu opinión del problema?*

A. *Que me tendría que decir, por ejemplo, cuatro más de la mitad de los animales son gallinas...* (lo vuelve a leer y comenta)... *bueno, a lo mejor se podría resolver. Vamos a ver...* (pasa a operar en la pizarra y opera)

$$\begin{array}{r} 32 \quad \underline{\quad 11 \quad} \\ 100 \quad 2' \quad \underline{\quad} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(Borra la pizarra)... mm... no, no encuentro la} \\ \text{manera de hacerlo.} \end{array}$$

E. *¿Y utilizando el álgebra podrías?*

A. *No, porque x serían gallinas e y conejos, pero todavía eso no lo hemos dado. Mi padre me lo explicó el otro día, pero aún no lo hemos dado.*

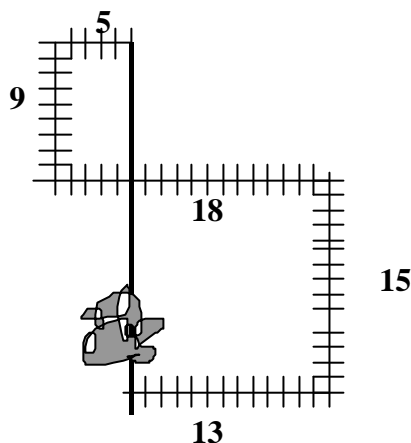
E. *Luego, ¿el problema está bien planteado y no sabes cómo resolverlo o está mal planteado?*

A. *No lo sé, pero si me dieran el dato que dije antes sí lo podría hacer.*

PROBLEMA 21

Algunos estudiantes encontraron un mapa de un tesoro pirata con las siguientes pistas: "Caminar 13 pasos al este del roble, 15 al norte y 18 al oeste; ahí caminar 9 pasos al norte y otros 5 al este; aquí podrán encontrar el tesoro". ¿Cuántos pasos en línea recta tendrán que caminar desde el árbol hasta el tesoro?

A. Lee el problema en voz alta y comienza a dibujar en la pizarra anotando los datos. Como no tiene una regla a mano utiliza rayas para marcar las unidades. Una vez terminada la realización del dibujo con los datos anotados en el mismo, comenta... *24 pasos, pues quince más nueve es 24...* señalando sobre el dibujo realizado.



Nivel académico medio.

PROBLEMA 1

En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. ¿Cuál es la edad del profesor de inglés?

A. *Lo lee en voz alta y se sonríe.*

E. *¿Por qué te sonríes Natalia?*

A. *Porque no tiene que ver una cosa con otra. Es un disparate.*

E. *¿A qué te refieres, a los datos y la pregunta?*

A. *Sí, que los datos no tienen que ver con la pregunta*

E. *¿Cómo tendría que estar planteado el problema para que si tuviese sentido?*

- A. *Pues,... en un curso de inglés hay alumnos de 15 años. ¿Cuál es la edad del profesor si su edad es el doble o el triple de la de los alumnos?*

PROBLEMA 2

En un corral hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay en el corral?

- A. Lee en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y va anotando los datos en la pizarra

1 gallina ----- 2 patas

1 conejo ----- 4 patas

Se para y pregunta a la entrevistadora... *señor, ¿pongo que un conejo tiene 4 patas?*

- E. *Sí, pon lo que tú creas que es necesario. ¿Por qué dudas que un conejo tiene 4 patas?*

A. Se sonríe y contesta... *No...* (vuelve a leer el problema en voz baja)

E. *En este momento, ¿en qué piensas Natalia?*

A. *Eh... voy a ver si puedo hacer alguna operación...* (se pone a operar en la pizarra)

116 | _____ (se queda sin hacer nada durante un momento y dice)... *¡no sé!*

E. *Vamos a ver, ¿qué es lo que ibas a hacer?*

A. *A dividir entre 4, pero no.*

E. *¿Por qué crees que no es correcto?*

A. *Porque entre 2 me da la mitad y entre 4 tampoco. No sé...* (sigue leyendo en voz baja)... *el total de todas las patas es 116.*

E. *De acuerdo.*

A. *¡Pero si me dijese cuántas gallinas hay, por ejemplo! Sí se podría resolver.*

E. *Es decir, que tú crees que te falta algún dato.*

A. *Sí, el número de gallinas o el de conejos.*

E. *¿Cómo crees que debería estar planteado el problema?*

A. *En un corral hay gallinas y conejos. Si hay 3 gallinas y en total hay 116 patas, ¿cuántos conejos hay en el corral?*

E. *Muy bien, pero Natalia, ¿tú estás segura de que tal y como está planteado no se puede resolver?*

A. *Yo creo que sí, además, si fuese como yo le dije sí lo sabría resolver.*

PROBLEMA 3

Dibuja el cuadrilátero A(-2,-1), B(1,4), C(4,3) y calcula los puntos medios de cada lado.

- A. Lee el problema en voz alta y pregunta... *¿eso es lo que mide cada lado?*
- E. *Vamos a ver, tu con los datos del problema intenta hacer lo que puedas.*
- A. *Es que lo de -2 y -1 yo no sé hacerlo.*
- E. *Es decir, que tú no sabes qué significa A(-2,-1).*
- A. *No, eso nunca lo he hecho.*
- E. *De acuerdo, pues pasamos a resolver otro problema*

PROBLEMA 4

Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?

- A. Lee el problema en voz alta, y lo vuelve a leer por segunda vez en voz baja al mismo tiempo que va colocando los datos en la pizarra
- 1 bocadillo ----- 150 ptas.*
3 barras de pan --- x ptas.
200 g de jamón
- Se para y pregunta... *seño, si no me dice qué vale la barra de pan no puedo resolver el problema porque no puedo multiplicar.*
- E. *Entonces, tu crees que el problema no se puede resolver porque le falta algún dato.*
- A. *Sí.*
- E. *¿Cómo lo replantearías tú?*
- A. *Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas y la barra de pan cuesta 30 ptas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?*
- E. *¿Y qué opinas del dato del jamón?*
- A. *Nada, porque él lo compró pero el problema te pregunta que le sobra al pagar la leche y el pan.*
- E. *Entonces, ese dato no sobra.*
- A. *No, está ahí y ya está.*

PROBLEMA 5

A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa al instituto hay 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

- A. Lee el problema en voz alta y dice... *pues necesito saber cuánto hay de*

su casa a la plaza.

E. *Tal y como está planteado no se puede resolver.*

A. *No.*

E. *¿Cómo tendría que estar planteado el problema?*

A. *A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa a la plaza hay 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?*

E. *Muy bien, ¿por qué crees que así sí se puede resolver?*

A. *Pues... (pasa a operar en la pizarra)*

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 2} \\ 4'5 \text{ km} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4'5 \\ + 3 \\ \hline 7'5 \end{array}$$

y a 9 le quito 7'5

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 7'5 \\ \hline 1'5 \end{array}$$

1'5 km le faltan por recorrer.

PROBLEMA 6

Si la plaza que hay delante de tu casa es rectangular y tiene 90 m y 60 m de dimensiones, ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa?

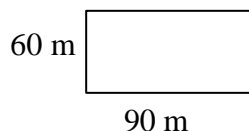
A. *Lee el problema en voz alta y comenta... los datos de este problema no tienen nada que ver, pues delante de mi casa no hay ninguna plaza.*

E. *Natalia, vamos a suponer que vives en una casa en la que sí hay una plaza.*

A. *Pues... calculo lo que mide la plaza, ... señalando con el dedo el perímetro de la plaza... mm... (se queda releendo el problema en voz baja).*

E. *Natalia, intenta resolverlo en la pizarra, anotando todo lo que te haga falta.*

A. *Pasa a dibujar un rectángulo en la pizarra*

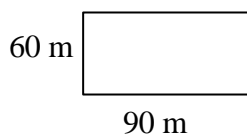


Se queda leyendo el problema en silencio.

E. *A ver, ¿en qué estás pensando?*

A. *Es que no sé que tengo que hacer. No entiendo por qué me dice lo que mide la plaza.*

- E. Con los datos que te da el problema, ¿lo puedes resolver?
 A. Si me dijese, por ejemplo, que la distancia son 4 veces la plaza sí.
 E. Es decir, que te faltan datos.
 A. No, pero yo lo haría a mi manera.
 E. De acuerdo, eso es lo que me gustaría que hicieras.
 A. Pasa a dibujar en la pizarra



Si la distancia es dos veces ésta... (señala la línea que pintó debajo del rectángulo y se queda en silencio mirando la pizarra)

- E. Natalia, vamos a suponer que yo soy tu profesora de matemáticas, y en clase te pongo este problema. ¿Tú que harías?
 A. Preguntarle qué tienen que ver los datos de la plaza con la distancia.
 E. Supón que yo te digo: "Tú resuelve el problema como creas"
 A. Se sonríe y contesta... pues yo lo haría como dije antes.
 E. A ver, repítelo por favor, porque no me acuerdo.
 A. Si la plaza que hay delante de tu casa es rectangular y tiene 90 metros y 60 metros de dimensiones, ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa, si la distancia es el doble del largo de la plaza?
 E. Y el otro dato de la plaza que no utilizas, ¿lo dejarías?
 A. Sí, porque la plaza tiene esos datos.

PROBLEMA 7

Un librero cuya librería está situada a 60 metros del centro de la ciudad, obtuvo en ventas durante el mes de marzo 204.060 pesetas. Si vendió 24 libretas a 315 pesetas cada una, 12 bolígrafos a 125 pesetas cada uno, 10 diccionarios a 12.000 pesetas cada uno y 20 bestsellers a 2.500 pesetas cada uno, ¿cuánto dinero obtuvo de la venta?

- A. Lee el problema en voz alta y comenta... pues sumo todo el dinero, a ver, por ejemplo... (pasa a operar en la pizarra)... 24×315 y así con todos y después con todo lo que me dé lo sumo y ya está.
 E. ¿Y que harías con los otros datos del problema que no has nombrado?
 A. Nada, porque no sirven para nada porque no tienen nada que ver con lo que pide el problema.
 E. ¿Qué datos son los que no utilizas?
 A. Los 60 metros y las 204.060 pesetas.
 E. Si la profesora fueses tú, ¿cómo lo plantearías a tus alumnos?
 A. Igual, bueno a lo mejor le quitaría los datos que no sirven.

PROBLEMA 8

Tres gallinas, A, B y C, que pesan juntas 4'5 kg han puesto 17 huevos. La gallina A ha puesto 3 más que el doble de la gallina C, y la gallina B, 4 menos que el triple de la gallina C. Si la gallina C ha puesto 3 huevos, ¿cuántos huevos han puesto cada una de las gallinas?

A. Lee el problema en voz alta y pasa a notar los datos en la pizarra

A:

B:

$C = 3$

Vuelve a leerlo en silencio y continúa escribiendo en la pizarra

$A = 3 \cdot 2 + 3$

$B = 3 \cdot 3 - 4$

luego A pone 9 huevos, B pone 5 y C pone 3, y no hace falta saber lo que pesan las gallinas, y el total de huevos.

PROBLEMA 9

El pie de una escalera dista de la pared 70 cm. Si la escalera, que tiene 150 cm de longitud y pesa 3 kg, está apoyada en la pared a 133 cm del suelo ¿cuál es la distancia mayor, de la pared a la escalera?

A. Lee en voz alta el problema y pasa a anotar los datos en la pizarra...
*pie... 70 cm... se queda relejendo el problema en voz baja y pregunta...
¿qué es el pie de la escalera?*

E. *Imagínate una escalera de que se apoya en la pared... (la investigadora hace un símil con su cuerpo y la pared)... ¿ves el pie?*

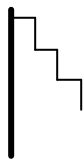
A. Se sonríe y dice... *¡Ah!...*(vuelve a leerlo en silencio y comenta)... *no sé.*

E. *¿Te podría ayudar hacer un dibujo, Natalia?*

A. *No lo veo.*

E. Vuelve a explicarle cómo es la escalera.

A. Hace un dibujo en la pizarra



E. *¿Te la imaginas de cemento?*

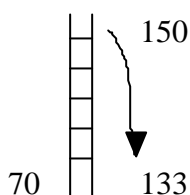
A. *Sí.*

E. *¿Y si fuese como las que usan en las obras?*

A. *¡Ah, de esas!*

E. *Sí.*

A. Borra la pizarra y dibuja otra escalera con sus datos



Posteriormente comenta... *no sé hacerlo, es muy difícil.*

E. *De acuerdo Natalia, pasamos a resolver otro problema, ¿de acuerdo?*

A. *Vale.*

PROBLEMA 10

Una señora cría durante 52 semanas una cabra y 3 conejos. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen todo el pienso menos 128 gramos, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana?

A. *Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta... el pienso que sobró, ¿quiere decir que sobró al finalizar las 52 semanas?*

E. *Léelo de nuevo Natalia.*

A. *Aquí dice que le sobró 128 g al finalizar la semana, pero yo no sé si lo que quiere preguntar es lo que sobró al finalizar las 52 semanas.*

E. *¿Te pregunta eso el problema?*

A. *No.*

E. *Entonces, al intentar resolver este problema, la dificultad que tú encuentras es que no sabes lo que te pide exactamente.*

A. *Sí, yo dudaría si esa es la pregunta, porque la solución no te la van a dar.*

E. *Entonces, ¿cómo plantearías el problema?*

A. *Una señora cría durante 52 semanas 1 cabra y 3 conejos. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen todo el pienso menos 128 gramos, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar las 52 semanas?*

E. *¿Qué pasa con los otros datos?*

A. *No intervienen, pero nos dicen los animales que tiene.*

PROBLEMA 11

A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa al colegio es de 15 km y de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió la distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo quedándole 6 km por recorrer. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

- A. Lee el problema en voz alta y lo relea en voz baja. Tras finalizar la lectura sonrío y dice... *¡6 km!, Ya me da el resultado.*
- E. *¿Y por qué te sonríes?*
- A. *Porque ¿cómo te van a dar la solución?*
- E. *¿Cómo lo plantearías tú?*
- A. *Quitaría el dato de los 15 km porque sobra y diría "A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió 10 km ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?"*

PROBLEMA 12

¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro recorre 640 metros y tardamos 2 horas?

- A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en silencio y comenta... *¡640 metros! Ya me da la solución.*
- E. *¿Y qué ocurre?*
- A. *¡Que está mal! Sería: "¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro y 40 cm de radio recorre?"... (se para y con apuro dice)... no, así no,... a ver... (se queda en silencio un rato intentando replantearlo)... no sé replantearlo.*
- E. *A ver, haz un esfuerzo e inténtalo con tus palabras.*
- A. *Pues diría el diámetro es tanto y el radio es tanto, así aplico la fórmula y ya tendría lo que recorre,... ¿no?*
- E. *¿Y quitarías las horas?*
- A. *Creo que sí, pues en la fórmula no necesito el tiempo.*

PROBLEMA 13

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el vendedor le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. Si comienza a pagarla 4 meses más tarde, ¿cuánto tiene que pagar mensualmente?

- A. Lee el problema en voz alta y comenta... *el que empieza a pagarla 4 meses más tarde no tiene nada que ver pues tiene que pagar lo mismo, pues las mensualidades no varían.*
- E. *Entonces, ¿tú quitarías ese dato?*
- A. *No, porque existe.*
- E. *De acuerdo. Continúa.*
- A. *Pasa a la pizarra...*

$$\begin{array}{r} 82.475 \\ + 5.370 \\ \hline 87.845 \end{array}$$

Ahora le quito las 9000 y lo que me da lo divido entre 5 pues ya pagó una mensualidad, ¡ah, no!, aunque entregue 9000 de adelanto lo divido entre 6, para ver cuánto paga cada mes.

PROBLEMA 14

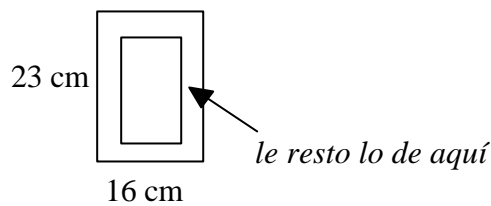
Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. En total se gastaron 2.400 pesetas. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

- A. Lee el problema en voz alta. Lo lee varias veces en voz baja, y comienza a morderse las uñas mientras lo relee.
- E. *Natalia, ¿en qué piensas mientras estás leyendo el problema?*
- A. *Es que no sé.*
- E. *¿Qué es lo que buscas?*
- A. *Busco la cantidad de heno que compraron, ¿almacenaron quiere decir que compraron?*
- E. *Sí.*
- A. *Necesito saber qué compraron para resolver el problema.*
- E. *Pero eso es lo que te pide el problema.*
- A. *Pero... es que me faltan datos pero no sé cuál.*
- E. *¿Te faltan datos o no sabes hacerlo?*
- A. *No, me faltan datos.*
- E. *¿Por qué estas segura de eso?*
- A. *Porque si dijese: Unos granjeros almacenaron heno. Cada 100 g costaba 300 pesetas y en total se gastaron 2.400 pesetas. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?... (pasa a operar en la pizarra*
- $$2400 \div 100 = 24 \text{ kg almacenaron.}$$

PROBLEMA 15

Necesitamos 5 láminas de dibujo de 23 cm de largo y 18 cm de ancho. Si se deja un margen de 2 cm a cada lado, ¿cuánto medirá la superficie destinada a escribir de cada hoja?

- A. Lee el problema en voz alta y comenta... *pues le resto...* Pasa a dibujar y comentar lo que hace



Como hay dos lados... (señala el borde superior e inferior)... le resto 2 por 2,
 $23 - 2 \cdot 2 = 19$,... (hace la sustracción con los dedos)... y los otros dos lados igual,
 $16 - 2 \cdot 2 = 12$... (hace la sustracción con los dedos)... es decir, que la superficie de la hoja sería 19 por 12, y luego lo multiplico por 5 para saber la superficie de las 5 láminas.

PROBLEMA 16

Tenemos 10 jaulas con 12 pavos cada una y 6 jaulas con 8 conejos cada una. El kilo de pavo vale 900 ptas., el cuarto kilo vale 225 ptas. y cada pavo pesa 4 kg; el kilo de conejo vale 550 ptas. y cada conejo pesa 3 kg ¿Cuánto valdrán todos los pavos y conejos juntos?

A. Lee en voz alta el problema y al terminar comenta... pues... ¿hago las operaciones?

E. Sí.

A. Pasa a operar en la pizarra comentando al mismo tiempo el motivo por el que realiza cada operación...

Primero quiero saber lo que vale un pavo y lo que vale un conejo

$$\begin{array}{r} 9000 \\ \times 4 \\ \hline 3600 \text{ pavo} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 550 \\ \times 3 \\ \hline 1650 \text{ conejo} \end{array}$$

luego veo los pavos y los conejos que hay

$$\begin{array}{l} 6 \times 8 = 48 \text{ conejos} \\ 10 \times 12 = 120 \text{ pavos} \end{array}$$

luego veo lo que valen todos los pavos juntos. Igual con los conejos.

$$\begin{array}{r} 3600 \\ \times 120 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1650 \\ \times 48 \\ \hline \end{array}$$

Después los sumo.

E. *¿Utilizas todos los datos del problema?*

A. *No, el del cuarto kilo no porque usé el del kilo. Si no me diesen el precio del kilo entonces usaría el del cuarto kilo.*

E. *¿Eliminarías ese dato o lo plantearías tal y como está?*

A. *Hace un gesto de que le es indiferente y comenta... da igual, lo dejaría.*

PROBLEMA 17

Daniel para ir al trabajo utiliza su coche y éste consume 8 litros de gasolina cada 15 kilómetros, y 16 litros cada 30 km. ¿Cuántos litros consumirá en un trayecto de 150 km?

A. *Lee el problema en voz alta y comenta... pues divido 150 y... Pasa a operar en la pizarra:*

$$150 \overline{) 15}$$

10 km y esto por 8 litros que es lo que gasta en 15 km

$$10 \times 8 = 80$$

E. *A ver Natalia, ¿para qué realizaste 150 entre 15?*

A. *Para ver cuántos 15 km hay en 150 y luego multiplicado por los 8 litros que gasta cada 15 km.*

E. *Entonces, el dato que obtienes de multiplicar 10 por 8, ¿qué significa, o qué indica?*

A. *Que gasta 80 litros en el trayecto.*

E. *¿Utilizas todos los datos del problema?*

A. *No, el dato de 16 l cada 30 km no lo usé pues usé el otro.*

E. *¿Está bien planteado este problema o le sobran datos?*

A. *Está bien pues todos los datos sirven.*

PROBLEMA 18

¿Qué distancia separa el colegio del parque si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro y 30 cm de radio, da 340 vueltas?

A. *Lee el problema en voz alta y pasa directamente a operar en la pizarra sin hacer ningún comentario*

$$D = \frac{60^2 \cdot 30^2}{360}$$

E. *¿Qué intentas buscar, Natalia?*

A. *La distancia que... (se queda leyendo el problema)... de la rueda, pero no sé si es, bueno es la superficie de la rueda.*

- E. *¿Qué es lo que anotaste en la pizarra?*
 A. *Una fórmula.*
 E. *¿Cuál? ¿Para qué?*
 A. *No sé, a ver, la del círculo es radio por mm... Pi (π) pero no sé si la fórmula de la rueda es así o... (Borra el denominador)... dividida por las vueltas que da.*
 E. *¿Qué es lo que quieres obtener?*
 A. *La superficie de la rueda*
 E. *¿Para qué quieres conocer la superficie de la rueda?*
 A. *Porque quiero saber la distancia que recorre una rueda para multiplicarla por las 340 vueltas que da y obtener la distancia que recorre.*
 E. *Entonces ¿el problema está bien planteado, y no le faltan ni le sobran datos?*
 A. *Sí, está bien planteado, pero no me acuerdo de las fórmulas.*

PROBLEMA 19

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el comprador le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. ¿Cuánto tiene que pagar mensualmente?

- A. Lee en voz alta el problema y pasa a operar en la pizarra
- $$\begin{array}{r} 82.475 \\ + 5.370 \\ \hline 87.845 \end{array}$$
- ... se queda en silencio mirando para el enunciado del problema.
- E. *¿En qué piensas Natalia?*
 A. *En que ahora le quito las 9000 y lo que me da lo divido entre 5 pues ya pagó una mensualidad, ¡ah, no!, aunque entregue 9000 de adelanto lo divido entre 6*
 E. *¿Para qué?*
 A. *Para ver cuánto paga cada mes.*
 E. *¿Alguna dificultad con este problema?*
 A. *No.*

PROBLEMA 20

En un corral hay gallinas y conejos. Hay 11 animales. Entre todos tienen 32 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

- A. Lee en voz alta el problema y lo vuelve a leer en voz baja. Sin terminar la segunda lectura, pregunta... *¿once animales diferentes?*
 E. *Bueno, once animales entre gallinas y conejos.*
 A. Continúa su relectura en voz baja y comenta... *pues... tengo que saber*

más o menos el número de gallinas que hay o el número de patas de gallinas.

E. *Es decir, que con los datos que te da el problema, ¿no lo puedes resolver?*

A. *Claro, me faltan datos.*

E. *¿Estás segura? ¿Quieres seguir intentándolo?*

A. *Estoy segura, pues tengo que saber algo... (señalando los datos del problema). Por ejemplo: En un corral hay, mm... el doble de gallinas que de conejos y hay tres conejos. Si en total hay 11 animales y entre todos hay 32 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay? Así podemos operar.*

PROBLEMA 21

Algunos estudiantes encontraron un mapa de un tesoro pirata con las siguientes pistas: "Caminar 13 pasos al este del roble, 15 al norte y 18 al oeste; ahí caminar 9 pasos al norte y otros 5 al este; aquí podrán encontrar el tesoro". ¿Cuántos pasos en línea recta tendrán que caminar desde el árbol hasta el tesoro?

A. Lee el problema en voz alta y pasa a dibujar un árbol en la pizarra preguntando... *seño, el norte está hacia arriba y el sur hacia abajo, pero ¿el este está aquí o allí?* (Señalando la derecha e izquierda del árbol dibujado en la pizarra).

E. *A la derecha.*

A. *Vale... (de nuevo pregunta con una regla en la mano)... ¿cómo pide los pasos, por cm?*

E. *¿Cómo lo harías tú?*

A. *Utilizando la regla y que cada paso sea un centímetro.*

E. *De acuerdo.*

A. *Dibuja en la pizarra el recorrido indicado en el enunciado y comenta... sumaría esto, esto,... y esto... (señalando cada una de las trayectorias dibujadas).*

Nivel académico bajo.

PROBLEMA 1

En un curso de inglés, hay 10 chicos y 15 chicas. ¿Cuál es la edad del profesor de inglés?

A. Lee en voz alta el problema. Responde... *¡No sé!*

E. *¿Qué es lo que no sabes?*

A. *La edad del profesor*

- E. *¿Por qué?*
 A. *Porque no te dice sino el número de chicas y el de chicos*
 E. *¿Y con esos datos no puedes resolver el problema?*
 A. *No, tendría que decir cuántos años tiene el profesor*
 E. *Pero eso es lo que se te pide que averigües.*
 A. *Se queda pensando un rato... Tendría que poner en un curso de inglés un chico tiene 15 años y el profesor tiene el doble. ¿Cuál es la edad del profesor de inglés?*

PROBLEMA 2

En un corral hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay en el corral?

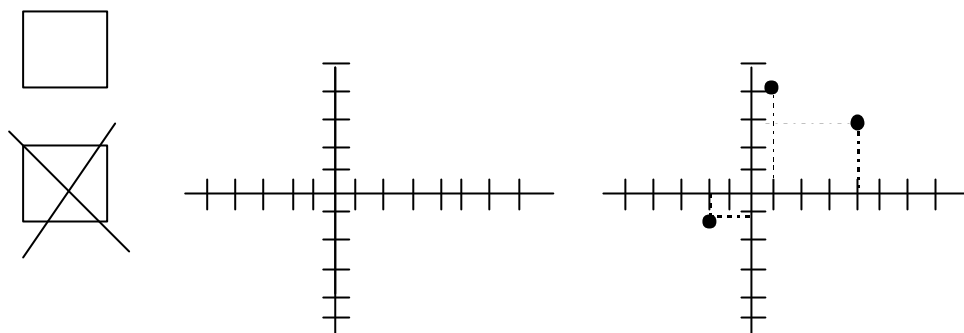
- A. Lee el problema en voz alta. Hace un gesto con los ojos (levanta las cejas) expresando que no entiende o no sabe hacer el problema. Lo vuelve a leer en voz baja, y comenta... *Tienen dos patas las gallinas y cuatro los conejos ¿no?*
 E. *Sí, y 116 patas en el corral.*
 A. *Lo divido ¿no? ¡Creo!*
 E. *A ver Domingo, piensa que estás en tu casa haciendo la tarea y la pizarra es tu cuaderno.*
 A. Pasa a operar en la pizarra y comenta lo que hace
- $$\begin{array}{r} 116 \quad \underline{6} \\ 56 \quad 18 \\ 2 \end{array}$$
- divido porque 6 son las patas*
¿No da exacto! Sería 19 ¿no?
 E. *¿19 qué?*
 A. *Entre gallinas y conejos y 116 patas.*
 E. *¿Y podrías decir cuántas gallinas y cuántos conejos hay?*
 A. Vuelve a leer el problema, mira a la pizarra y dice... *creo que no se puede saber.*
 E. *¿Por qué?*
 A. *Porque no te dice cuántas gallinas hay o cuántos conejos hay ¿creo? Porque si te dicen el número de gallinas podemos hallar el número de conejos.*
En un corral hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas, y tantas gallinas, ¿cuántos conejos hay en el corral?

PROBLEMA 3

Dibuja el cuadrilátero A(-2, -1), B(1, 4), C(4, 3) y calcula los puntos medios de cada lado.

- A. Lee en voz alta, y a continuación pasa a dibujar un cuadrado en la pizarra. Después lo borra y pone un eje de coordenadas, comentando

a continuación... *ahora ¿pinto los puntos, no?*



- E. Sí.
- A. Vuelve a leer el problema en voz baja. Se queda callado mirando la hoja con el enunciado.
- E. *¿Qué te pide el problema, Domingo?*
- A. *Dibuja un cuadrilátero.* (Se queda de nuevo en silencio)... *Es que no lo entiendo bien.*
- E. *A ver, ¿sabes qué es un cuadrilátero?*
- A. *No.*
- E. *Es una figura de cuatro lados.*
- A. *¿Lo dibujo aquí?* (Señala fuera del eje de coordenadas con los tres puntos señalados)
- E. *Donde tú quieras, pero ¿para qué representaste antes los puntos que te da el problema?*
- A. *¿Haciendo así?* (Señala con la mano la trayectoria desde un punto a otro).
- E. Sí.
- A. Une los tres puntos y se queda leyendo el enunciado del problema, con una expresión de no saber qué hacer.
- E. *A ver Domingo, ¿qué dibujaste?*
- A. *¡Un triángulo! ..* (Con cara de sorpresa o de no entender qué es lo que pasa).
- E. *Entonces, ¿qué pasa?*
- A. *Que le falta otro número.*
- E. *Es decir que no puedes hacer lo que te pide el problema porque le falta un dato.*
- A. *¡Claro!*
- E. *¿Cómo lo replantearías?*
- A. *Igual pero dando 4 puntos.*
- E. *¿Qué punto añadirías tú?*
- A. Se queda un rato mirando el dibujo realizado y comenta... *no sé...* (hace un gesto con los ojos que indica que en una materia que no controla o comprende).

PROBLEMA 4

Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón. La botella de leche cuesta 150 pesetas. Paga la leche y el pan con una moneda de 500 pesetas. ¿Cuánto dinero le devuelven?

A. Lee el problema en voz alta y al terminar la lectura comenta... *pero no se sabe cuánto te devuelve.*

E. *¿Por qué?*

A. *Porque no sabes cuánto vale el pan y el jamón.*

E. *Entonces, ¿este problema no está bien planteado?*

A. *No*

E. *¿Cómo crees tú que debería estar planteado?*

A. *Con el precio de la barra de pan y eso.*

E. *A ver, plantéalo tú.*

A. Pasa a poner los datos en la pizarra...

50 ptas. (Comenta en voz alta)...la barra de pan

200 ptas. (Comenta en voz alta)...el jamón

(Comenta en voz alta)...*Entonces lo sumo todo*

$$\begin{array}{r} 50 \text{ ptas.} \\ 200 \text{ ptas.} \\ \hline 150 \text{ ptas.} \\ 400 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 500 \\ - 400 \\ \hline 100 \text{ ptas. me sobra} \end{array}$$

E. *Entonces Domingo, dime como replanteaste el problema, por favor.*

A. *Pedro compra una botella de leche, 3 barras de pan y 200 g de jamón.*

La botella de leche cuesta 150 pesetas, el pan 50 pesetas y el jamón 150 pesetas. Si paga con una moneda de 500 pesetas, ¿cuánto dinero le devuelven?

PROBLEMA 5

A María le gusta pasear en bicicleta. De su casa al instituto hay 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

A. Lee en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta... *sería si de su casa al instituto hay 9 km y el sábado recorrió la mitad del camino de su casa al instituto. Le falta la otra mitad...* pasa a operar en la pizarra

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 2} \\ 1 \quad 4 \end{array}$$

Le faltan 4 km y pico.

E. *¿Y el dato de los 3 km que recorrió por la tarde?*

ANEXO 3

A. *No vale para nada.*

E. *¿Por qué?*

A. *Porque no te dice que los recorrió para ir a la plaza o al instituto.*

E. *¿Y si los hubiese recorrido para ir a la plaza?*

A. *Los sumaría... pasa a operar en la pizarra*

$$\begin{array}{r} 4 \\ + 3 \\ \hline 7 \end{array}$$

le faltaría 7 km

E. *Es decir que entonces en vez de faltarle 4 km le faltaría 7 km*

A. *¡Ah! ¿Lo restaría?*

E. *Vamos a ver, piénsalo bien y dime que es lo que tú crees.*

A. *Se queda pensando y dice... dos km*

E. *¿Qué hiciste Domingo?*

A. *Restarlo a los 9 km*

PROBLEMA 6

Si la plaza que hay delante de tu casa es rectangular y tiene 90 m y 60 m de dimensiones, ¿cuál es la distancia que hay del colegio a tu casa?

A. *Lee en voz alta. Vuelve a leerlo en voz baja y comenta... ¿está mal planteado?*

E. *¿Qué te hace pensar eso?*

A. *Porque no te dice la distancia que hay de tu casa al colegio.*

E. *Pero eso es lo que te preguntan.*

A. *Pero no se sabe.*

E. *¿Por qué?*

A. *Porque estos datos no me sirven.*

E. *¿Por qué crees eso?*

A. *Que,... (se queda pensando)... se podría hacer si sabemos el tiempo que tarda de su casa al colegio, por ejemplo media hora y... Uf... (pone una expresión de no saber qué decir)... a ver, si de tu casa al colegio hay 50 metros ¿cuánto tardaría en llegar?*

E. *De esa manera ¿lo podrías resolver?*

A. *Se queda pensando y comenta... ¿creo que no? Es que no se me ocurre nada.*

PROBLEMA 7

Un librero cuya librería está situada a 60 metros del centro de la ciudad, obtuvo en ventas durante el mes de marzo 204.060 pesetas. Si vendió 24 libretas a 315 pesetas cada una, 12 bolígrafos a 125 pesetas cada uno, 10 diccionarios a 12.000 pesetas cada uno y 20 bestsellers a 2.500 pesetas cada uno, ¿cuánto dinero obtuvo de la venta?

- A. Lee en voz alta y comenta... *los 60 metros no tiene nada que ver. Tampoco que obtuvo...* (no termina la frase y se queda pensativo mirando la hoja con el enunciado del problema)... *bueno hay que calcular,...* (se vuelve a parar y dice)... *las 204.060 creo... tengo que calcular cuánto ganó con las libretas y todo eso.*
- E. *Domingo, explícame mejor lo que estás pensando sobre el problema, por favor.*
- A. *Hay que multiplicar 24 libretas por lo que vale cada una, que son 315 pesetas, los bolígrafos por lo que valen y así...* (refiriéndose al resto de los datos)... *y luego tenemos que saber cuánto obtuvo en la venta de todo.*
- E. *¿Qué harías para obtener ese resultado?*
- A. *Sumando después todos los datos.*
- E. *¿Todos los datos del problema?*
- A. *No, los de las multiplicaciones.*
- E. *Entonces, ¿el problema lo puedes resolver, como me has indicado?*
- A. *Sí.*
- E. *¿Le pondrías a tus compañeros este problema, o a tus alumnos si fueses el maestro?*
- A. *Sonriendo me contesta... Sí, para ver lo que saben. No bueno, se lo quitaría porque así no tiene sentido con los 60 metros.*
- E. *¿Y el dato de "obtuvo en ventas durante el mes de marzo 204.060 pesetas?"*
- A. *¡Ah! Eso tampoco sirve.*
- E. *¿Por qué crees que no sirve?*
- A. *No sé, no es nada, ni libretas ni nada de eso.*
- E. *Luego el problema ¿cómo lo plantearías?*
- A. *Igual pero sin esos datos: Un librero vendió 24 libretas a 315 pesetas cada una, 12 bolígrafos a 125 pesetas cada uno, 10 diccionarios a 12.000 pesetas cada uno y 20 bestsellers a 2.500 pesetas cada uno. ¿Cuánto dinero obtuvo de la venta?*

PROBLEMA 8

Tres gallinas, A, B y C, que pesan juntas 4'5 kg han puesto 17 huevos. La gallina A ha puesto 3 más que el doble de la gallina C, y la gallina B, 4 menos que el triple de la gallina C. Si la gallina C ha puesto 3 huevos, ¿cuántos huevos han puesto cada una de las gallinas?

- A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y comenta... *el peso no influye, y sabemos que en total ponen 17 huevos...* (Vuelve a releer el problema en voz baja y comenta)... *la gallina C ha puesto 2 huevos.*
- E. *A ver Domingo, explícame el problema.*
- A. *Sí, porque la gallina A ha puesto 3 más que el doble de la gallina C*

- ¿no?, C puso 3 entonces, la gallina A puso 6 huevos.*
- E. A ver, vamos por parte, y dime qué es lo que has hecho.*
- A. (No me contesta lo que le pido y comenta)... No se puede hacer.*
- E. ¿Por qué crees eso?*
- A. Porque no dice cuánto puso la gallina C.*
- E. Domingo, léelo otra vez.*
- A. Lo lee en voz baja y comenta... ¡Ah!, La gallina C puso 3 huevos.*
- E. De acuerdo, puedes ir anotando los datos en la pizarra.*
- A. (No me hace caso y continúa explicando el problema oralmente)... La gallina A pone 3 más... (se queda mirando el enunciado del problema).*
- E. ¿Tres más qué?*
- A. Que el doble de la gallina C*
- E. A ver, explícamelo en la pizarra.*
- A. Se sonríe, y no anota nada.*
- E. ¿No te gusta operar en la pizarra?*
- A. No.*
- E. ¿Por qué? ¿Prefieres hacerlo mentalmente?*
- A. Sí.*
- E. De acuerdo, pues continúa.*
- A. La gallina A puso 9 huevos.*
- E. ¿Cómo obtuviste ese resultado?*
- A. Multiplicando tres por tres.*
- E. Explícate.*
- A. Sí, $3 \times 2 + 3 = 9$*
- E. Vale, continúa.*
- A. La B 4 menos que el triple de C... (Se queda callado mirando el enunciado del problema y continúa hablando)... 5 ¿no?*
- E. ¿Qué hiciste?*
- A. Porque el triple de 3... (escribe en la pizarra $3 \times 3 = 9$)... es 9 menos cuatro es igual a cinco.*
- E. De acuerdo.*
- A. Pasa a operar en la pizarra y comenta... lo sumo para ver cuánto te da.*
- $$\begin{array}{r} 9 \\ + 5 \\ + 3 \\ \hline 17 \end{array}$$
- E. ¿Para qué realizaste esa operación?*
- A. No me hace falta.*
- E. ¿Entonces?*
- A. Para comprobar que lo tengo bien.*
- E. De acuerdo, luego el problema ¿tú lo plantearías así?*
- A. No, le quitaría el peso. "Tres gallinas, A, B y C, han puesto 17 huevos. La gallina A ha puesto 3 más que el doble de la gallina C, y la gallina B, 4 menos que el triple de la gallina C. Si la gallina C ha puesto 3 huevos,*

¿cuántos huevos han puesto cada una de las gallinas?

PROBLEMA 9

El pie de una escalera dista de la pared 70 cm. Si la escalera, que tiene 150 cm de longitud y pesa 3 kg, está apoyada en la pared a 133 cm del suelo ¿cuál es la distancia mayor, de la pared a la escalera?

A. Lee en voz alta. Cuando llega a “dista” comenta... *¿dista, dista?... (hace un gesto con los ojos de no entender que significa y sin preguntar nada vuelve a leer el problema en voz baja, comentando a continuación)... lo que pesa no hace falta.*

E. *¿Por qué?*

A. *Porque aquí no te pregunta cuánto pesa la escalera ni hay que hacer ninguna operación con él... (sigue leyendo el problema en voz baja y comenta)... mm... ¿cómo es el pie de una escalera?, Yo no sé.*

E. *La parte sobre la que se apoya la escalera en el suelo. Imagínate una escalera de albañil.*

A. *¡Ah!... (sigue leyendo en voz baja)... lo de 150 metros de longitud no lo entiendo.*

E. *La longitud de la escalera, lo que mide.*

A. Sigue leyendo en voz baja. Se toca y aprieta la camiseta... *mm... tendría que multiplicar ¿no?, 70 por 150 para averiguar cuánto mide toda la escalera y después restarlo ¿no?*

E. *Vamos a ver Domingo, ¿tú entiendes lo que te dice el problema?*

A. *Sí, hay que restarlo para saber a cuánta distancia está ¿no?*

E. *Si haces un dibujo en la pizarra, ¿te ayudaría a explicarme lo que piensas del problema?*

A. *No.*

E. *¿Tú te estás imaginando, de alguna manera, el problema?*

A. *Sí.*

E. *¿Puedes hacerlo en la pizarra?*

A. *Coge la tiza y escribe en la pizarra*

$$\begin{array}{r} 150 \\ \times 70 \\ \hline 10500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10500 \\ - 133 \\ \hline 19867 \end{array} \quad \text{ésto sería la distancia.}$$

E. *Es decir, que la distancia sería 19867 cm*

A. *Sí*

E. *Entonces el problema está bien planteado.*

A. *Sí, pero quitando el peso.*

PROBLEMA 10

Una señora cría durante 52 semanas una cabra y 3 conejos. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen todo el pienso menos 128 gramos, ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana?

A. Lee en voz alta el problema y comenta... *yo creo que “una señora cría” eso no sirve para nada.*

E. *¿El qué?*

A. *Sí, lo de la semana. Una cabra y tres conejos tampoco ¡creo! Sería 760 menos 128 y ya te daría cuánto pienso le sobró.*

E. *¿Por qué crees que la cabra, los tres conejos y las 52 semanas sobran?*

A: *Porque te piden el pienso que sobró, no las semanas ni eso.*

E. *¿El dato de 760 gramos qué indica?*

A. *Lo que compró de comida.*

E. *Entonces, tú dices que los gramos que compró... repíteme lo que dijo Domingo, por favor.*

A. Lee en voz baja de nuevo, echa la cabeza hacia atrás, levanta los ojos con expresión de sorpresa y comenta... *¡sobra 128 gramos!*

E. *¿Eso qué significa?*

A. *Que ya está hecho el problema.*

E. *¿Y tú qué opinas al respecto?*

A. *Yo lo cambiaría para que fuese un problema.*

E. *¿Cómo?*

A. *Mm... si se comen 60 gramos, ¿cuánto pienso le sobró?*

E. *¿Y los otros datos?*

A. *Los quitaría. “Una señora compra 760 gramos de pienso para sus animales. Si se comen 60 gramos, ¿cuánto pienso le sobró?”*

PROBLEMA 11

A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa al colegio es de 15 km y de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió la distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo quedándole 6 km por recorrer. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?

A. Lee en voz alta el problema. Lo vuelve a leer en voz baja, tardando más de lo habitual y luego comenta... *La pregunta es ¿cuántos km le faltan para llegar a la plaza?*

E. *Sí.*

A. *Lo que hay de su casa al colegio no sirve para nada pues la pregunta es lo que falta para llegar a la plaza.*

E. *Es decir, que para ti ese dato sobra.*

A. *Sí.*

- E. *Continúa.*
 A. *Es 18 más 6 ¿no?*
 E. *A ver, hazlo en la pizarra Domingo.*
 A. *Pasa a operar en la pizarra*

$$\begin{array}{r} 18 \\ + 6 \\ \hline 24 \text{ km} \end{array}$$

Le falta 24 km para llegar a la plaza.

- E. *Si tú tuvieras que plantear este problema a alguien, ¿cómo lo harías?*
 A. *Quitando los 15 km. "A Laura le gusta mucho caminar. La distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo es de 18 km. El sábado por la mañana recorrió la distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo quedándole 6 km por recorrer. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?"*

PROBLEMA 12

¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro recorre 640 metros y tardamos 2 horas?

- A. *Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja y frunce el ceño, para a continuación decir... ¡no me da el radio!*
 E. *¿Para qué lo necesitas?*
 A. *Para saber las vueltas.*
 E. *Y con el dato del diámetro, ¿no puedes?*
 A. *No, me hace falta el diámetro y el radio.*
 E. *Es decir que este problema no lo puedes resolver porque le falta ese dato.*
 A. *Claro.*
 E. *Bueno, pues vamos a suponer que te dicen que el radio es igual a 30 cm*
 A. *Vale... (pasa a operar en la pizarra)*

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 30 \\ \hline 1800 \end{array}$$

Se queda leyendo en voz baja y comenta... Como dice que en 640 tarda 2 horas, yo creo que el problema ya está hecho.

- E. *¿Por qué?*
 A. *Porque si te dicen que recorre 640 m en dos horas, es que recorre 640 m ¿no?*
 E. *Entonces no hace falta el dato del radio para resolver el problema, ya que según tú, ya está hecho.*
 A. *Bueno, sí hace falta porque si es un problema no puede estar la*

solución.

E. *Es decir, que el problema está mal planteado porque te da la solución y si se la quitas le faltaría el dato del radio.*

A. *Claro.*

E. *¿Cómo plantearías el problema?*

A. *¿Qué distancia separa el colegio del parque, si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro y 30 cm de radio tarda 2 horas?*

PROBLEMA 13

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el vendedor le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. Si comienza a pagarla 4 meses más tarde, ¿cuánto tiene que pagar mensualmente?

A. *Lee en voz alta. Al terminar la lectura comenta... Si comienza a pagar 4 meses más tarde significa que tendrá que pagar más ¿no?*

E. *Vamos a ver Domingo, Vamos a resolverlo en la pizarra y así vamos aclarando las dudas.*

A. *Pasa a operar en la pizarra*

$$\begin{array}{r} 82.475 \quad | \quad 6 \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ 13475 \end{array}$$

Esto es lo que paga mensualmente. Ahora tengo que sumar 5370 por adelanto, bueno por el recargo. ¡Ah, pero eso lo puedo sumar antes!

E. *¿Qué es exactamente lo que quieres decir? ¿Qué lo sumarías primero al precio de la lavadora que es 82 475 pesetas?*

A. *Eso.*

E. *Como tu quieras o te parezca más correcto.*

A. *Borra la pizarra y empieza a operar de nuevo*

$$\begin{array}{r} 82475 \\ + 5370 \\ \hline 87845 \quad | \quad 6 \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ 27 \quad 14640 \quad \text{paga mensualmente.} \\ 38 \\ 24 \\ 05 \end{array}$$

Si paga 9000 inicial, lo tengo que restar

$$\begin{array}{r} 14640 \\ - 9000 \\ \hline 05640 \quad \text{esto le falta por pagar inicial} \end{array}$$

E. *A ver Domingo, quedamos en que tenía que pagar 14 640 pesetas*

durante 6 meses, y ahora me dices que 5640 le falta. ¿Me lo puedes aclarar?

- A. *Sí, que un mes paga 5640 y los otros 14640.*
 E. *De acuerdo. ¿Ya terminaste de resolver el problema?*
 A. *No, ahora éste... (señala el dato de las 5640 pesetas)... tengo que multiplicarlo por 4.*
 E. *¿En qué pensaste cuando decidiste utilizar ese dato de los 4 meses más tarde?*
 A. *Que tienes que pagar más. Si pagas más tarde pagas más. Por eso tienes que multiplicar por 4 lo que pagas más tarde.*

$$\begin{array}{r} 14\ 640 \\ \times \quad 4 \\ \hline 60560 \end{array}$$

PROBLEMA 14

Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. En total se gastaron 2.400 pesetas. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

- A. *Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a releer en voz baja. Se queda durante un rato en silencio mirando el enunciado del problema.*
 E. *Domingo, cuando lo lees, ¿qué pasa por tu mente? ¿En qué piensas?*
 A. *No sé, buscar la operación que tengo que hacer.*
 E. *¿Qué te ocurre con este problema?*
 A. *No lo entiendo. No lo sé hacer.*
 E. *Bueno, no pasa nada. Te lo voy a intentar explicar... (Se lo leí detenidamente)*
 A. *Entonces, ese dinero no sirve para nada.*
 E. *¿Por qué? ¿Qué piensas tú?*
 A. *Eh... porque no dice nada de lo que vale el kg ni nada de eso.*
 E. *Es decir, que tú crees que ese dato sobra.*
 A. *Sí... (vuelve a leerlo en voz baja, frunce el ceño y dice)... no lo entiendo.*
 E. *Bien, no importa, pasamos a otro. Seguro que este problema es muy difícil para ustedes.*

PROBLEMA 15

Necesitamos 5 láminas de dibujo de 23 cm de largo y 18 cm de ancho. Si se deja un margen de 2 cm a cada lado, ¿cuánto medirá la superficie destinada a escribir de cada hoja?

- A. *Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja... mm... aquí hay que averiguar lo que mide toda la lámina.*

E. *Bien. Realiza algún dibujo, operaciones o lo que tú quieras.*

A. En silencio, pasa a operar en la pizarra

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 18 \\ \hline 414 \text{ cm} \end{array}$$

E. *¿Qué es lo que has hecho?*

A. *Multiplicar 23 por 18*

E. *¿Qué es lo que has obtenido con esa operación?*

A. *414 cm... (se queda leyendo en voz baja)... y después... (se queda en silencio un rato)... se divide entre dos para saber ¿no? Si de esos centímetros... (de nuevo se queda en silencio)... se divide entre dos.*

E. *¿Para qué divides entre dos?*

A. *Para saber el espacio a escribir que me pide el problema*

$$414 \overline{) 2 }$$

207 cm es el espacio a escribir

Ahora lo multiplico por 5 para averiguar las 5 láminas.

$$207$$

$$\times 5$$

$$1035 \text{ cm} \quad \text{¡Ya está!}$$

E. *Entonces, ¿qué solución encontraste al problema?*

A. *Que me da 1035 cm el espacio para escribir de cada hoja*

E. *¿De cada hoja?*

A. *Mira el enunciado del problema y responde... No, de las 5 hojas.*

PROBLEMA 16

Tenemos 10 jaulas con 12 pavos cada una y 6 jaulas con 8 conejos cada una. El kilo de pavo vale 900 ptas., el cuarto kilo vale 225 ptas. y cada pavo pesa 4 kg; el kilo de conejo vale 550 ptas. y cada conejo pesa 3 kg
¿Cuánto valdrán todos los pavos y conejos juntos?

A. *Lee el problema en voz alta y sin terminar de leerlo pregunta... lo de valdrán es el dinero ¿no?*

E. *Sí.*

A. *Lo vuelve a leer en voz baja... lo de arriba creo que no vale para nada ¿no?*

E. *¿A qué te refieres?*

A. *Lo de 10 jaulas con 12 pavos y 6 jaulas con 8 conejos.*

E. *¿No? ¿Por qué crees eso? ¿En qué piensas para hacer ese comentario?*

A. *En que no me piden los pavos que hay. Me piden lo que cuesta... Frunce el ceño y lo vuelve a leer en voz baja. Se detiene un momento y comenta... el kilo vale... mm... hay que averiguar cuánto pesan o cuánto valen ¿no?... (sin esperar la respuesta comenta)... entonces*

tengo que multiplicar 900 por 12.

E. ¿Para qué?

A. Porque hay 12 pavos.

E. ¿Y que el problema te diga que hay 10 jaulas con 12 pavos cada una no tiene nada que ver con el número de pavos?

A. No.

E. ¿Por qué crees eso?

A. Porque a mí no me piden nada de las jaulas ni eso. Solamente me preguntan el precio de los pavos y los conejos.

E. De acuerdo. Continúa.

A. ¿Lo hago en la pizarra?

E. Sí, sí.

A. Pasa a operar en la pizarra

$$\begin{array}{r} 900 \\ \times 12 \\ \hline 1800 \\ 900 \\ \hline \end{array}$$

10800 pesetas valen todos los pavos

E. Es decir, que has multiplicado el dato del precio del kg de pavo por todos los pavos que hay.

A. Sí, por el número... (continúa operando en la pizarra)

225

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$$

para saber lo que valen los conejos.

E. Vamos a ver, ¿225 pesetas es el valor del kg de conejo?

A. Ya, ya, 550 pesetas vale el kg de conejo

550

$$\begin{array}{r} 550 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$$

4400 pesetas valen los conejos.

E. Los datos que te da el problema sobre lo que pesa cada pavo y cada conejo, ¿no los necesitas?

A. No, porque no me piden nada del peso, solo el precio.

E. Y el dato "el cuarto kilo de pavo vale 225 ptas." ¿No lo necesitas?

A. Eso sí vale ¡creo!. ¿Se lo tenía que sumar no?

E. ¿A qué?

A. Al pavo... (pasa a operar en la pizarra)

$$\begin{array}{r} 10800 \\ + 25 \\ \hline 11025 \end{array}$$

E. ¿En qué pensaste cuando realizaste esa operación?

A. Saber que vale el cuarto kilo.

E. Domingo, si tú tuvieras que plantear este problema a tus compañeros,

¿cómo lo harías?

A. Se lo pondría igual.

E. ¿Con los datos que has dicho que no intervienen?

A. Sí, para que lo hagan, porque es fácil, bueno, medio fácil.

E. De acuerdo.

A. Y ahora sumo todo

$$\begin{array}{r} 11025 \\ + 4400 \\ \hline 15425 \end{array} \quad \text{valen todos juntos.}$$

PROBLEMA 17

Daniel para ir al trabajo utiliza su coche y éste consume 8 litros de gasolina cada 15 kilómetros, y 16 litros cada 30 km. ¿Cuántos litros consumirá en un trayecto de 150 km?

A. Lee el problema en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja... *aquí yo creo... mm... (frunce el ceño)... tengo que averiguar cuántos km ¿no? y... Cuánto consume en un km ¿no? Entonces hay que hacer 15 entre 8 para operar... (pasa a la pizarra)*

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 8} \\ 7 \quad 1 \end{array}$$

ahora 150 entre 1 te debe dar cuántos litros consumió.

E. Por lo tanto, ¿cuántos litros consumió en el trayecto?

A. 150 litros.

E. ¿Y los datos de 16 litros cada 30 km, no los utilizas?

A. No, porque es lo mismo, es lo que hace el coche.

E. Es decir, que el problema lo puedes resolver con unos o con otros y de las dos maneras está bien.

A. Dice sí con la cabeza.

E. ¿Por qué crees que es lo mismo?

A. Porque el problema dice que eso es lo que hace el coche.

E. Entonces, ¿este problema está bien planteado?

A. Sí claro.

Problema 18

¿Qué distancia separa el colegio del parque si para ir de un sitio a otro la rueda de una bicicleta de 60 cm de diámetro y 30 cm de radio, da 340 vueltas?

A. Lee el problema en voz alta y comenta... *No lo sé. No tiene sentido.*

E. ¿Qué es lo que no sabes?

A. Hacer el problema.

E. Vamos a ver, cuando lees el problema, ¿qué pasa por tu mente? ¿Qué se te ocurre?

- A. *Mm...* (se queda leyendo, o mirando, el enunciado en voz baja)
- E. *¿Qué te pide el problema?*
- A. *Te piden la distancia del colegio al parque, y aquí dice cómo es la rueda, de qué tamaño es, pero no te dice donde está el colegio ni el parque.*
- E. *No, te dice que están separados y te piden esa distancia.*
- A. *Mm... no entiendo. Es que para mí no tiene sentido, ¡creo!*
- E. *¿No?*
- A. *Con la cabeza dice que no.*
- E. *Vamos a ir por partes. Si a ti te dan el diámetro y el radio de la rueda de una bicicleta, ¿tú que harías con esos datos, o para que te servirían esos datos?*
- A. *Para saber cómo es la rueda y cómo es una vuelta completa a la bici.*
- E. *Bueno, pues ahora que sabes calcular cómo es una vuelta de esa rueda, vamos a añadirle el dato del número de vueltas que da. ¿Se te ocurre algo?*
- A. *Y,... después lo divido entre 340*
- E. *Intenta resolverlo a tu manera.*
- A. *Primero, ¿multiplico?*
- E. *Haz lo que tú creas.*
- A. *Pasa a operar en la pizarra sin hacer ningún comentario en voz alta*
- $$\begin{array}{r} 60 \\ \times 30 \\ \hline 1800 \end{array}$$
- Se queda frente a la pizarra, sin hacer nada ni comentarme nada.*
- E. *Domingo, ¿qué es lo que has hecho? ¿Multiplicaste lo que mide el diámetro por lo que mide el radio?*
- A. *Sí, para ver... (se vuelve de nuevo hacia la pizarra y sin comentar nada continúa operando*
- $$\begin{array}{r} 1800 \quad | \quad 340 \\ \hline 100 \quad 5 \end{array}$$
- E. *A ver, coméntame lo que has hecho.*
- A. *Que la distancia es 5 metros.*
- E. *Entonces, ¿ya no opinas que el problema no tiene sentido?*
- A. *Se sonríe y dice... es que no me había dado cuenta.*

PROBLEMA 19

Un señor compra una lavadora por 82.475 pesetas y quiere pagarla en 6 plazos mensuales aunque el vendedor le dice que por comprarla a plazos tiene un recargo de 5.370 pesetas. Hace una entrega inicial de 9.000 pesetas. ¿Cuánto tiene que pagar mensualmente?

- A. *Lee en voz alta. Lo vuelve a leer en voz baja.*

E. ¿Le ves alguna dificultad?

A. No. Hay que sumar mm... ¿lo hago en la pizarra?

E. Sí, sí.

A. Pasa a operar.

$$82475$$

$$5370$$

lo sumo ¿no? a 5370

E. Sí

A. Continúa en la pizarra

$$82475$$

$$+ 5370$$

84845 esto es lo que tengo que pagar y ahora tengo que averiguar lo que tiene que pagar mensualmente

$$84845 \quad | \quad 9000$$

E. ¿Para qué divides entre 9000?

A. Porque es lo que va a pagar ahora.

E. ¿Tú entiendes lo que es entregar una cantidad inicial?

A. Sí, un adelanto.

E. ¿Entonces qué es lo que tienes que hacer con esa cantidad?

A. ¿Dividir, no?

E. A ver, continúa resolviendo el problema.

A. Hace la división y comenta

$$84845 \quad | \quad 9000$$

$$8845 \quad 9$$

ésto es el dinero que tiene que pagar mensualmente.

E. Ese valor, ¿qué significa?

A. 9000 pesetas que tiene que pagar mensualmente.

E. ¿Durante cuántos meses?

A. Durante 9 meses y un poco más, el resto.

E. ¿Y el dato de los 6 meses que te dice el problema?

A. Relee el problema y dice... ¡Ah!, que tiene que pagar más.

E. ¿Más qué?

A. Más dinero, pues 9000 pesetas era lo que tenía que pagar en 9 meses. Si es 6 meses será más dinero cada mes.

E. Luego, termina el problema

A. ¿Multiplicando no?

$9 \times 6 = 54000$ pesetas cada mes.

PROBLEMA 20

En un corral hay gallinas y conejos. Hay 11 animales. Entre todos tienen 32 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

A. Lee el problema en voz alta y lo vuelve a leer en voz baja... *Sería 32 entre 6*

E. *¿Por qué crees eso?*

A. *Porque hay 32 patas y 6 son las patas de los conejos y las gallinas y entonces hay que dividir... (pasa a operar en la pizarra)*

$$\begin{array}{r} 32 \quad | \quad 6 \\ \underline{2 \quad 5} \end{array}$$

serían 1 gallina y 5 conejos.

E. *Pero el problema te dice que hay 11 animales.*

A. *Sí, pero a lo mejor hay otros animales además de las gallinas y los conejos.*

E. *Entonces, ¿el problema está bien planteado?*

A. *Sí, creo.*

PROBLEMA 21

Algunos estudiantes encontraron un mapa de un tesoro pirata con las siguientes pistas: "Caminar 13 pasos al este del roble, 15 al norte y 18 al oeste; ahí caminar 9 pasos al norte y otros 5 al este; aquí podrán encontrar el tesoro". ¿Cuántos pasos en línea recta tendrán que caminar desde el árbol hasta el tesoro?

A. Lee el problema en voz alta y comenta... *15 más 9 ¿no?, Porque son los que van al Norte.*

E. *¿No necesitas ni operar, ni hacer ningún dibujo?*

A. *No. El problema está bien, y es fácil, porque caminar recto es ir hacia el Norte.*

E. *Entonces, ¿el problema está bien planteado?*

A. *Sí.*

ANEXO 4

RESULTADOS GLOBALES

- **FASE I DEL ESTUDIO PILOTO**
- **FASES II DEL ESTUDIO PILOTO**
- **FASE III DEL ESTUDIO PILOTO**
- **FASE IV DEL ESTUDIO PILOTO**
- **ESTUDIOS DEFINITIVOS: ALUMNOS DEL CSE**
- **ESTUDIOS DEFINITIVOS: ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ESO (VIDEOGRABADOS)**
- **ESTUDIOS DEFINITIVOS: ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ESO (ESCRITA)**

Antes de comenzar a exponer las tablas de este anexo, queremos hacer algunas aclaraciones:

Con respecto al análisis de la categoría 1, de aquellos alumnos que caracterizan el problema presentado como mal definido, observamos quiénes lo replantean y quiénes no, ya que este dato nos sirve de referencia para el análisis de otras categorías.

Con respecto al análisis de la categoría 2, en el cómputo total del análisis del comportamiento: *acciones dirigidas por el objetivo o por los datos*, el porcentaje que falta es el de aquellos resolutores, que por ser una prueba escrita, no podemos determinar. Esto ocurre cuando ante un problema caracterizado desde la competencia como bien definido, el resolutor se limita a operar con todos los datos y dar una solución, o se limita a escribir [...] *No sé hacerlo*.

Por otra parte, cuando lo que analizamos es qué modifican, el cómputo total es con respecto al de aquellos resolutores que una vez han caracterizado el problema como mal definido, lo replantean.

Con respecto al análisis de la categoría 3 y 4, el cómputo total es con respecto al de aquellos resolutores que una vez han caracterizado el problema como mal definido, lo replantean.

Además, cuando el cómputo total de la categoría 3, no coincide con el de aquellos resolutores que una vez han caracterizado el problema como mal definido lo replantean, es debido a que no aparecen los que solamente modifican el objetivo en su replanteamiento, y por tanto, no actúan sobre los datos.

FASE I DEL ESTUDIO PILOTO

Resultados globales expresados en porcentajes: Tablas 1 y 2

Tipo	Contexto	Problema	CATEGORÍA 1 (%)		CATEGORÍA 2 (%)	
			Identifican como bien definido	Identifican como mal definido	Acciones	
					Dirigida Datos	Dirigida Objetivo
BD	Aritmético	A3	78	22 (T ₃)	--	22
	Geométrico	B3	89	11 (T ₂)	11	--
Tipo T ₂	Aritmético	A2	22	78 (T ₂)	22	78
	Algebraico	A1	56	44 (T ₂)	78	22
	Algebraico	B1	.	100 (T ₂)	--	100
Tipo T ₃	Aritmético	B2	11	89 (T ₃)	22	67

Tabla 1

						CATEGORÍA 3 (%)		
Tipo	Contexto	Problema	Identifican como mal definido	No replantean	Replantean	Añaden datos	Eliminan datos	Otra observación
BD	Aritmético	A3	22 (T ₃)	--	22		22	
	Geométrico	B3	11 (T ₂)	11	--			
Tipo T ₂	Aritmético	A2	78 (T ₂)	22	56	56		
	Algebraico	A1	44 (T ₂)	11	33	11		*22
	Algebraico	B1	100 (T ₂)	56	44	44		
Tipo T ₃	Aritmético	B2	89 (T ₃)	22	67		67	

Tabla 2

Resultados globales expresados en número de alumnos: Tabla 3 y 4

Tipo	Contexto	Problema	CATEGORÍA 1		CATEGORÍA 2	
			Identifican como bien definido	Identifican como mal definido	Acciones	
					Dirigida Datos	Dirigida Objetivo
BD	Aritmético	A3	7	2	--	2
	Geométrico	B3	8	1	1	--
Tipo T ₂	Aritmético	A2	2	7	2	7
	Algebraico	A1	5	4	7	2
	Algebraico	B1	0	9	--	9
Tipo T ₃	Aritmético	B2	1	8	2	6

Tabla 3

						CATEGORÍA 3		
Tipo	Contexto	Problema	Identifican como mal definido	No replantean	Replantean	Añaden datos	Eliminan datos	Otra observación
BD	Aritmético	A3	2	0	2	0	2	
	Geométrico	B3	1	1	0	0	0	
Tipo T ₂	Aritmético	A2	7	2	5	5	0	
	Algebraico	A1	4	1	3	1	0	2
	Algebraico	B1	9	5	4	4	0	
Tipo T ₃	Aritmético	B2	8	2	6	0	6	

Tabla 4

FASE II DEL ESTUDIO PILOTO

Resultados globales expresados en porcentajes: Tablas 5, 6 y 7

Tipo	Contexto	Problema	CATEGORÍA 1 (%)			Replantean	No replantean
			No saben identificarlo	Identifican como bien definido	Identifican como mal definido (E. e I.)		
BD	Aritmético	A7	0	77	23 (T ₃)	23	0
		B7	0	100	0	0	0
	Algebraico	A8	0	100	0	0	0
		B8	0	100	0	0	0
	Geométrico	A9	46	31	23 (T ₂)	0	23
		B9	38'5	38'5	23 (T ₃)	23	0
Tipo T ₂	Aritmético	A1	0	8	92 (T ₂)	69	23
		B1	0	0	100 (T ₂)	100	0
		A3	0	0	100 (T ₂)	0	100
	Algebraico	A2	15	31	54 (T ₂)	54	0
		B2	0	0	100 (T ₂) (62) (T ₃) (38)	100	0
	Geométrico	B3	15	23	62 (T ₂) (46'5) (MD) (15'5)	62	0
		B10	0	0	100 (T ₂) (69) (MD) (31)	100	0
Tipo T ₃	Aritmético	A4	0	23	77 (T ₃)	62	15
		B4	0	15	85 T ₂ (62) T ₃ (23)	85	0
	Algebraico	A5	23	8	69 T ₂ (46) T ₃ (23)	69	0
		B5	0	23	77 (T ₃)	77	0
	Geométrico	A6	0	38	62 (T ₂)	39	23
		B6	0	0	100 (T ₃)	100	0

Tabla 5

Tipo	Contexto	Problema	Replantean	CATEGORÍA 2 (%)				
				Acciones		Modifican		
				Dirigidas Datos	Dirigidas Objetivo	Datos	Objetivo	Datos y objetivos
BD	Aritmético	A7	23	15	85	23	0	0
		B7	0	0	0	0	0	0
	Algebraico	A8	0	0	0	0	0	0
		B8	0	8	92	0	0	0
	Geométrico	A9	0	0	54	0	0	0
B9	23	0	23	23	0	0	0	
Tipo	Aritmético	A1	69	8	92	69	0	0
		B1	100	23	77	77	0	23
		A3	0	0	100	0	0	0
	Algebraico	A2	54	38	46	23	8	23
		B2	100	38	62	62	0	38
	Geométrico	B3	62	38	46	46	15	0
B10	100	15	85	85	15	0		
Tipo	Aritmético	A4	62	23	77	62	0	0
		B4	85	31	69	70	15	0
	Algebraico	A5	69	8	69	69	0	0
		B5	77	31	69	69	0	8
	Geométrico	A6	38	38	62	38	0	0
		B6	100	0	100	92	8	0

Tabla 6

Tipo	Contexto	Problema	Replantean	CATEGORÍA 3 (%)			CATEGORÍA 4 (%)		
				Añaden Datos	Eliminan Datos	Añaden y eliminan Datos	Transforman		
							BD	T ₂	T ₃
BD	Aritmético	A7	23	0	23	0	0	23	0
		B7	0	0	0	0	0	0	0
	Algebraico	A8	0	0	0	0	0	0	0
		B8	0	0	0	0	0	0	0
	Geométrico	A9	0	0	0	0	0	0	0
		B9	23	0	23	0	0	23	0
Tipo	Aritmético	A1	69	69	0	0	69	0	0
		B1	100	0	0	100	100	0	0
		A3	0	0	0	0	0	0	0
	Algebraico	A2	54	46	0	0	31	23	0
		B2	100	0	0	100	100	0	0
	Geométrico	B3	62	0	0	46	62	0	0
		B10	100	0	0	85	100	0	0
Tipo	Aritmético	A4	62	0	62	0	62	0	0
		B4	85	0	23	46	23	0	62
	Algebraico	A5	69	15	23	31	23	31	15
		B5	77	0	8	69	23	0	54
	Geométrico	A6	38	38	0	0	0	0	38
		B6	100	0	92	0	100	0	0

Tabla 7

Resultados globales expresados en número de alumnos: Tablas 8, 9 y 10

Tipo	Contexto	Problema	CATEGORÍA 1			Replantean	No replantean
			No saben identificarlo	Identifican como bien definido	Identifican como mal definido		
BD	Aritmético	A7	0	10	3	3	--
		B7	0	13	0	--	--
	Algebraico	A8	0	13	0	--	--
		B8	0	13	0	--	--
	Geométrico	A9	6	4	3	--	3
		B9	5	5	3	3	--
Tipo T ₂	Aritmético	A1	0	1	12	9	3
		B1	0	0	13	13	--
		A3	0	0	13	--	--
	Algebraico	A2	2	4	7	7	--
		B2	0	0	13	13	--
	Geométrico	B3	2	3	8	8	--
		B10	0	0	13	13	--
Tipo T ₃	Aritmético	A4	0	3	10	8	3
		B4	0	2	11	11	--
	Algebraico	A5	3	1	9	9	--
		B5	0	3	10	10	--
	Geométrico	A6	0	5	8	5	--
		B6	0	0	13	13	--

Tabla 8

Tipo	Contexto	Problema	Replantean	CATEGORÍA 2				
				Acciones		Modifican		
				Dirigidas Datos	Dirigidas Objetivo	Datos	Objetivo	Datos y objetivos
BD	Aritmético	A7	3	2	11	3
		B7
	Algebraico	A8
		B8	..	1	12
	Geométrico	A9	7
		B9	3	..	3	3
Tipo T ₂	Aritmético	A1	9	1	12	9
		B1	13	3	10	10	..	3
		A3	13
	Algebraico	A2	7	5	6	3	1	3
		B2	13	5	8	8	..	4
	Geométrico	B3	8	5	6	6	2	..
		B10	13	2	11	11	2	..
Tipo T ₃	Aritmético	A4	8	3	10	8
		B4	11	4	9	9	2	..
	Algebraico	A5	9	1	9	9
		B5	10	4	9	9	..	1
	Geométrico	A6	5	5	8	5
		B6	13	..	13	12	1	..

Tabla 9

Tipo	Contexto	Problema	Replantean	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4		
				Añaden Datos	Eliminan Datos	Añaden y eliminan Datos	Transforman		
							BD	T ₂	T ₃
BD	Aritmético	A7	3	..	3	3	..
		B7
	Algebraico	A8
		B8
	Geométrico	A9
		B9	3	..	3	3	..
Tipo	Aritmético	A1	9	9	9
		B1	13	13	13
		A3
	Algebraico	A2	7	6	4	3	..
		B2	13	13	13
	Geométrico	B3	8	6	8
		B10	13	11	13
Tipo	Aritmético	A4	8	..	8	..	8
		B4	11	..	3	6	3	..	8
	Algebraico	A5	9	2	3	4	3	4	2
		B5	10	..	1	9	3	..	7
	Geométrico	A6	5	5	5
		B6	13	..	12	..	13

Tabla 10

FASE III DEL ESTUDIO PILOTO

Resultados globales de la alumna de nivel académico medio-alto: Tablas 11 y 12

Tipo	Contexto	Problema	CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2				
			No sabe identificarlo	Identifica como bien definido	Identifica como mal definido	Acciones		Modifica		
						Dirigidas Datos	Dirigidas objetivos	Datos	Objetivo	Datos y objetivo
Tipo T ₂	Aritmético	A1			T ₂		X	X		
	Algebraico	A2		BD		X				
	Geométrico	B10			MD	X			X	
Tipo T ₃	Aritmético	B4		BD	Implícitam . MD T ₃		X	X		
					MD T ₃		X	X		
	Algebraico	A5		BD	Implícitam . MD T ₃		X	X		
					MD T ₂	X		X		
					MD T ₂		X			
Geométrico	A6				MD T ₃		X	X		

Tabla 11

Tipo	Contexto	Problema	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	JUSTIFICA
			Añade datos	Elimina datos	Añade y elimina datos	Transforma	
Tipo T ₂	Aritmético	A1	X			BD	REFUTA Prueba
	Algebraico	A2					VALIDA Prueba
	Geométrico	B10				BD	REFUTA Prueba y argumentación.
Tipo T ₃	Aritmético	B4			X	BD	VALIDA Prueba
					X	MD T ₃ A	REFUTA Argumentación y prueba
	Algebraico	A5		X		MD T ₂ A	VALIDA Prueba
			X			MD T ₃ A	REFUTA Prueba
						..	REFUTA Argumentación
Geométrico	A6	X			MD T ₃ A	REFUTA Prueba	

Tabla 12

Resultados globales de la pareja de alumnos, de niveles académicos medio (Ella) y bajo (Él): Tablas 13 y 14

Tipo	Contexto	Problema	CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2				
			No saben identificarlo	Identifican como bien definido	Identifican como mal definido	Acciones		Modifican		
						Dirigidas Datos	Dirigidas objetivo	Datos	Objetivo	Datos y objetivo
Tipo T ₂	Aritmético	A1		Ella	Ella implícitamente T ₂		Ella	Ella		
					Ambos T ₂		Ambos	Ambos		
	Algebraico	A2		Ambos		Ambos				
	Geométrico	B10			Ambos	Ella	ÉL	ÉI	Ella	
Tipo T ₃	Aritmético	B4		ÉI		ÉI				ÉI
				Ambos	Ambos Implícitamente T ₃	Ambos			Ambos	
	Algebraico	A5		Ambos	Ambos Implícitamente T ₃		Ambos	Ambos		
				Ambos	Ambos implícitamente T ₃	Ambos				Ambos
	Geométrico	A6		Ambos		Ambos				
			Ambos	Ambos Implícitamente	Ambos			Ambos		

Tabla 13

			CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	
Tipo	Contexto	Problema	Añaden datos	Eliminan datos	Añaden y eliminan datos	Transforman	Justifican
Tipo T ₂	Aritmético	A1	Ella			Ambos BD	(Ella)VALIDA Argumentación y prueba
			Ambos			Ambos BD	REFUTAN Prueba
	Algebraico	A2					VALIDAN Prueba
	Geométrico	B10	Él			Ambos BD	REFUTAN Argumentación y prueba
Tipo T ₃	Aritmético	B4			Él	Él BD	(Él) VALIDA Prueba
						Ambos T ₃	VALIDAN Prueba
	Algebraico	A5		Ambos		Ambos T ₂	VALIDAN Prueba
				Ambos		Ambos T ₂	VALIDAN Prueba
	Geométrico	A6					VALIDAN Prueba
						Ambos BD	VALIDAN Prueba

Tabla 14

FASE IV DEL ESTUDIO PILOTO

Resultados globales expresados en porcentajes: Tabla 15

Tipo	Contexto	Problema	CATEGORÍA 1 (%)			Replantean	No replantean
			No saben identificarlo	Identifican como bien definido	Identifican como mal definido		
Tipo T ₂	Aritmético	A1	-	76	24	19	5
		B1	-	5	95	95	..
		A3	-	62	38	..	38
	Algebraico	A2	14	62	24	24	..
		B2	-	24	76	71	5
		B3	43	..	57	43	14
Geométrico	B10	5	..	95	95	..	
Tipo T ₃	Aritmético	A4	-	62	38	33	5
		B4	-	14	86	81	5
	Algebraico	A5	24	5	71	62	9
		B5	-	19	81	67	14
	Geométrico	A6	33	48	19	14	5
		B6	9	..	91	67	24

Tabla 15

Resultados globales expresados en número de alumnos: Tabla 16

Tipo	Contexto	Problema	CATEGORÍA 1			Replantean	No replantean
			No saben identificarlo	Identifican como bien definido	Identifican como mal definido		
Tipo T ₂	Aritmético	A1	..	16	5	4	1
		B1	..	1	20	20	..
		A3	..	13	8	..	8
	Algebraico	A2	3	13	5	5	..
		B2	..	5	16	15	1
	Geométrico	B3	9	..	12	9	3
		B10	1	..	20	20	..
Tipo T ₃	Aritmético	A4	..	13	8	7	1
		B4	..	3	18	17	1
	Algebraico	A5	5	1	15	13	2
		B5	..	4	17	14	3
	Geométrico	A6	7	10	4	3	1
		B6	2	..	19	14	5

Tabla 16

ESTUDIO DEFINITIVO CON ALUMNOS DEL CENTRO SUPERIOR DE EDUCACIÓN

Resultados globales de la alumna de nivel académico alto: Tablas 17 y 18

Tipo	Problema y su contexto	CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2				
		No sabe identificarlo	Identifica como bien definido	Identifica como mal definido	Acciones		Modifica		
					Dirigidas Datos	Dirigidas objetivo	Datos	Objetivo	Datos y Objetivo
Tipo T_2	1 Aritmético			MD	X		X	X	
	2 Algebraico		X	T_2		X			X
	3 Geométrico			T_2		X	X		
	4 Aritmético			T_2		X	X		
	5 Algebraico			T_2		X	X		
	6 Geométrico			MD	X			X	
Tipo T_3	7 Aritmético			T_3		X	X		
	8 Algebraico			T_3		X	X		
	9 Geométrico			T_3		X	X		
	10 Aritmético			T_3	X				X
	11 Algebraico			T_3	X				X

Tabla 17 a

Tipo	Problema y su contexto	CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2				
		No sabe identificarlo	Identifica como bien definido	Identifica como mal definido	Acciones		Modifica		
					Dirigidas Datos	Dirigidas objetivo	Datos	Objetivo	Datos y Objetivo
Tipo T ₃	12 Geométrico			T ₂		X	X		
	13 Aritmético		BD			X			
	14 Algebraico			T ₂		X	X		
	15 Geométrico			T ₃		X	X		
BD	16 Aritmético		BD			X			
	17 Algebraico		BD			X			
	18 Geométrico		NO SABE		X				
	19 Aritmético		BD			X			
	20 Algebraico		BD			X			
	21 Geométrico		BD			X			

Tabla 17 b

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	Justifica
		Añade datos	Elimina a datos	Añade y elimina datos	Transforma	
Tipo T ₂	1 Aritmético			X	BD	REFUTA Prueba: contraejemplo Argumentación: ridículo
	2 Algebraico	x			BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	3 Geométrico	X			BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	4 Aritmético			X	BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	5 Algebraico			X	BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico Argumentación Ridículo
	6 Geométrico				BD	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P2) Argumentación: ridículo

Tabla 18 a

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	Justifica
		Añade datos	Elimina a datos	Añade y elimina datos	Transforma	
Tipo T_3	7 Aritmético		X		BD	REFUTA Prueba: Ritual
	8 Algebraico		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	9 Geométrico		X		BD	REFUTA Prueba: (ritual
	10 Aritmético			X	T_3	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	11 Algebraico			X	BD	REFUTA Prueba: Contraejemplo
	12 Geométrico			X	BD	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P2) (y ritual)
	13 Aritmético					VALIDA Argumentación: (descripción) Prueba: razonamiento analítico
	14 Algebraico			X	T_3	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	15 Geométrico		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico

Tabla 18 b

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	Justifica
		Añade datos	Elimina datos	Añade y elimina datos	Transforma	
BD	16 Aritmético					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	17 Algebraico					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	18 Geométrico					NO SABE
	19 Aritmético					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	20 Algebraico					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	21 Geométrico					VALIDA Prueba: razonamiento analítico

Tabla 18 c

Resultados globales de la alumna de nivel académico medio: Tablas 19 y 20

Tipo	Problema y su contexto	CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2				
		No sabe identificarlo	Identifica como bien definido	Identifica como mal definido	Acciones		Modifica		
					Dirigidas Datos	Dirigidas objetivo	Datos	Objetivo	Datos y Objetivo
Tipo T ₂	1 Aritmético			MD	X			X	
	2 Algebraico			T ₂		X			X
	3 Geométrico	No Sabe	BD		X				
	4 Aritmético			T ₂		X	X		
	5 Algebraico			T ₂		X	X		
	6 Geométrico			T ₂		X	X		
Tipo T ₃	7 Aritmético			T ₃		X	X		
	8 Algebraico			T ₃		X	X		
	9 Geométrico			T ₃		X		X	
	10 Aritmético			T ₃	X		X		
	11 Algebraico			T ₃	X		X		

Tabla 19 a

Tipo	Problema y su contexto	CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2					
		No sabe identificarlo	Identifica como bien definido	Identifica como mal definido	Acciones		Modifica			
					Dirigidas Datos	Dirigidas objetivo	Datos	Objetivo	Datos y Objetivo	
Tipo T ₃	12 Geométrico			MD		X	X			
	13 Aritmético		BD			X				
	14 Algebraico			MD	X			X		
	15 Geométrico			T ₃		X	X			
BD	16 Aritmético		BD			X				
	17 Algebraico		BD			X				
	18 Geométrico	No Sabe	Y	MD	X				X	
	19 Aritmético		BD			X				
	20 Algebraico				T ₂		X			X
		No Sabe								
21 Geométrico		BD				X				

Tabla 19 b

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	Justifica
		Añade datos	Elimina datos	Añade y elimina datos	Transforma	
Tipo T_2	1 Aritmético				BD	REFUTA Argumentación: ridículo
	2 Algebraico	X			BD	REFUTA Prueba: contradicción y contraejemplo
	3 Geométrico				...	VALIDA Prueba: razonamiento empírico (P2)
					...	NO SABE
	4 Aritmético			X	BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	5 Algebraico			X	BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico y contraejemplo
	6 Geométrico	X			T_3	REFUTA Argumentación: (descripción) Prueba: contraejemplo

Tabla 20 a

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	Justifica
		Añade datos	Elimina datos	Añade y elimina datos	Transforma	
Tipo T_3	7 Aritmético		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	8 Algebraico		X		T_3	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P1) y analítico
	9 Geométrico		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P2)
	10 Aritmético		X		T_3	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	11 Algebraico		X		T_3	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	12 Geométrico			X	BD	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P2) (y ritual)
	13 Aritmético				..	VALIDA Argumentación: (descripción) Prueba: razonamiento analítico
	14 Algebraico				T_3	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P1) y contraejemplo
	15 Geométrico		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico

Tabla 20 b

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	
		Añade datos	Elimina datos	Añade y elimina datos	Transforma	Justifica
BD	16 Aritmético					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	17 Algebraico					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	18 Geométrico		X (Sugiere)		Sugiere T_3	No sabe
	19 Aritmético					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	20 Algebraico			X	BD	REFUTA Prueba: contradicción
						NO SABE
21 Geométrico					VALIDA Prueba: razonamiento analítico	

Tabla 20 c

Resultados globales de la alumna de nivel académico bajo: Tablas 21 y 22

Tipo	Problema y su contexto	CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2				
		No sabe identificarlo	Identifica como bien definido	Identifica como mal definido	Acciones		Modifica		
					Dirigidas Datos	Dirigidas objetivo	Datos	Objetivo	Datos y Objetivo
Tipo T_2	1 Aritmético			MD	X			X	
	2 Algebraico		BD			X			
	3 Geométrico			T_2		X	X		
	4 Aritmético			T_2		X	X		
	5 Algebraico			T_2		X	X		
	6 Geométrico			MD	X			X	
Tipo T_3	7 Aritmético			T_3		X	X		
	8 Algebraico			T_3		X	X		
	9 Geométrico			T_2		X			
	10 Aritmético			T_2	X		X		
	11 Algebraico			T_3		X	X		

Tabla 21 a

Tipo	Problema y su contexto	CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2				
		No sabe identificarlo	Identifica como bien definido	Identifica como mal definido	Acciones		Modifica		
					Dirigidas Datos	Dirigidas objetivo	Datos	Objetivo	Datos y Objetivo
Tipo T ₃	12 Geométrico		BD			X			
	13 Aritmético		BD			X			
	14 Algebraico			T ₂		X	X		
	15 Geométrico			T ₃		X	X		
BD	16 Aritmético		BD			X			
	17 Algebraico		BD			X			
	18 Geométrico			T ₂	X		X		
	19 Aritmético			T ₃		X	X		
	20 Algebraico			T ₂		X	X		
	21 Geométrico		BD			X			

Tabla 21 b

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	Justifica	
		Añade datos	Elimina datos	Añade y elimina datos	Transforma		
Tipo T ₂	1 Aritmético				BD	REFUTA Argumentación: ridículo Prueba: contraejemplo	
	2 Algebraico				..	VALIDA Prueba: razonamiento empírico (P2) y r. analítico	
	3 Geométrico	X			BD	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P2)	
	4 Aritmético	X			BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico	
	5 Algebraico		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico y contraejemplo	
	6 Geométrico			X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P2)
		X				T ₃	REFUTA Prueba: contraejemplo

Tabla 22 a

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	
		Añade datos	Elimina datos	Añade y elimina datos	Transforma	Justifica
Tipo T ₃	7 Aritmético		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P1) (y ritual)
	8 Algebraico		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	9 Geométrico					REFUTA Argumentación: comparación
	10 Aritmético			X	BD	REFUTA Prueba: (ritual)
	11 Algebraico			X	BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico (y ritual)
	12 Geométrico				..	VALIDA Prueba: razonamiento empírico (P2)
	13 Aritmético				..	VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	14 Algebraico	X			BD	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P1) y contraejemplo
	15 Geométrico		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico

Tabla 22 b

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	
		Añade datos	Elimina datos	Añade y elimina datos	Transforma	Justifica
BD	16 Aritmético				..	VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	17 Algebraico				..	VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	18 Geométrico			X	BD	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P2)
	19 Aritmético		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	20 Algebraico	X			T ₃	REFUTA Prueba: (ritual)
	21 Geométrico				..	VALIDA Argumentación: ridículo

Tabla 22 c

ESTUDIO DEFINITIVO CON ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ESO

Resultados globales del alumno de nivel académico alto: Tablas 23 y 24

Tipo	Problema y su contexto	CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2				
		No sabe identificarlo	Identifica como bien definido	Identifica como mal definido	Acciones		Modifica		
					Dirigidas Datos	Dirigidas objetivo	Datos	Objetivo	Datos y Objetivo
Tipo T ₂	1 Aritmético			X		X	X		
	2 Algebraico		X			X	X		
	3 Geométrico			X		X	X		
	4 Aritmético			X		X	X		
	5 Algebraico			X		X	X		
	6 Geométrico			X		X	X		
Tipo T ₃	7 Aritmético			X		X	X		
	8 Algebraico			X		X	X		
	9 Geométrico			X		X	X		
	10 Aritmético			X		X	X		
	11 Algebraico			X	X				X

Tabla 23 a

		CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2				
Tipo	Problema y su contexto	No sabe identificarlo	Identifica como bien definido	Identifica como mal definido	Acciones		Modifica		
					Dirigidas Datos	Dirigidas objetivo	Datos	Objetivo	Datos y Objetivo
Tipo T ₃	12 Geométrico		X	Implícitamente		X	X		
				X		X	X		
	13 Aritmético			X		X	X		
	14 Algebraico			X		X	X		
	15 Geométrico			X		X	X		
BD	16 Aritmético		X			X			
	17 Algebraico		X			X			
	18 Geométrico		X			X			
	19 Aritmético		X			X			
	20 Algebraico	X							
	21 Geométrico		X			X			

Tabla 23 b

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	Justifica
		Añade datos	Elimina a datos	Añade y elimina datos	Transforma	
Tipo T ₂	1 Aritmético	X			BD	REFUTA Argumentación: ridículo
	2 Algebraico					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
		X			T ₃	REFUTA Prueba: Razonamiento analítico
	3 Geométrico	X			BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	4 Aritmético	X			T ₃ A	REFUTA Prueba: contraejemplo
	5 Algebraico			X	BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	6 Geométrico			X	BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico y contraejemplo

Tabla 24 a

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	
		Añade datos	Elimina a datos	Añade y elimina datos	Transforma	Justifica
Tipo T ₃	7 Aritmético		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	8 Algebraico		X		BD	VALIDA Prueba: r. analítico
	9 Geométrico		X		BD	REFUTA Prueba: contraejemplo (y ritual)
	10 Aritmético			X	BD	REFUTA Prueba: r. analítico (y ritual)
	11 Algebraico			X	BD	REFUTA Prueba: contraejemplo (y ritual)
	12 Geométrico		X		BD	VALIDA Prueba: r. analítico
				X	BD	REFUTA Prueba: contraejemplo (y ritual)
	13 Aritmético		X		BD	REFUTA Prueba: r. analítico
	14 Algebraico		X		T ₂ A	REFUTA Prueba: r. analítico
15 Geométrico		X		BD	REFUTA Prueba: r. analítico	

Tabla 24 b

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	
		Añade datos	Elimina a datos	Añade y elimina datos	Transforma	Justifica
BD	16 Aritmético					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	17 Algebraico					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	18 Geométrico					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	19 Aritmético					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	20 Algebraico					No sabe
	21 Geométrico					VALIDA Prueba: razonamiento analítico

Tabla 24 c

Resultados globales del alumno de nivel académico medio: Tablas 25 y 26

Tipo	Problema y su contexto	CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2				
		No sabe identificarlo	Identifica como bien definido	Identifica como mal definido	Acciones		Modifica		
					Dirigidas Datos	Dirigidas objetivo	Datos	Objetivo	Datos y Objetivo
Tipo T ₂	1 Aritmético			X			X		
	2 Algebraico			X					X
	3 Geométrico	X							
	4 Aritmético			X			X		
	5 Algebraico			X			X		
	6 Geométrico		X		X		...		
Tipo T ₃	7 Aritmético			X		X	X		
	8 Algebraico			X		X	X		
	9 Geométrico	X			X				
	10 Aritmético			X	X			X	T ₃
	11 Algebraico			X		X	X		

Tabla 25 a

Tipo	Problema y su contexto	CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2				
		No sabe identificarlo	Identifica como bien definido	Identifica como mal definido	Acciones		Modifica		
					Dirigidas Datos	Dirigidas objetivo	Datos	Objetivo	Datos y Objetivo
Tipo T ₃	12 Geométrico			X		X	X		
	13 Aritmético		X			X			
	14 Algebraico			X		X	X		
	15 Geométrico		X	X Implícitamente	X			X	
BD	16 Aritmético		X			X			
	17 Algebraico		X			X			
	18 Geométrico		X			X			
	19 Aritmético		X			X			
	20 Algebraico			X		X	X		
	21 Geométrico		X			X			

Tabla 25 b

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4		
		Añade datos	Elimina a datos	Añade y elimina datos	Transforma	Justifica	
Tipo T ₂	1 Aritmético			X	BD	REFUTA Argumentación: ridículo	
	2 Algebraico	X			BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico	
	3 Geométrico				...	No sabe	
	4 Aritmético	X			T ₃ A	REFUTA Prueba: razonamiento analítico	
	5 Algebraico			X	BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico	
	6 Geométrico	VALIDA Prueba: razonamiento empírico (P2)
		X				T ₃ A	REFUTA Prueba: contraejemplo

Tabla 26 a

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	Justifica
		Añade datos	Elimina a datos	Añade y elimina datos	Transforma	
Tipo T ₃	7 Aritmético		X		BD	VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	8 Algebraico		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	9 Geométrico					No sabe
	10 Aritmético					REFUTA Prueba: (ritual)
	11 Algebraico			X	BD	REFUTA Argumentación: ridículo Prueba: (Ritual)
	12 Geométrico			X	T ₂ B	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P2) (y ritual)
	13 Aritmético					VALIDA Argumentación: (descripción) Prueba: razonamiento analítico
	14 Algebraico			X	BD	REFUTA Prueba: contraejemplo
	15 Geométrico				BD	VALIDA Prueba: razonamiento analítico

Tabla 26 b

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	Justifica
		Añade datos	Elimina datos	Añade y elimina datos	Transforma	
BD	16 Aritmético					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	17 Algebraico					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	18 Geométrico					VALIDA Prueba: razonamiento empírico (P2)
	19 Aritmético					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	20 Algebraico	X			T ₃ A	REFUTA Prueba: contraejemplo
	21 Geométrico					VALIDA Prueba: razonamiento analítico

Tabla 26 c

Resultados globales del alumno de nivel académico bajo: Tablas 27 y 28

Tipo	Problema y su contexto	CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2					
		No sabe identificarlo	Identifica como bien definido	Identifica como mal definido	Acciones		Modifica			
					Dirigidas Datos	Dirigidas objetivo	Datos	Objetivo	Datos y Objetivo	
Tipo T ₂	1 Aritmético			X		X	X			
	2 Algebraico		X	Implícitamente	X			X		
					X		X			X
	3 Geométrico		X		X					
					X		X	X		
	4 Aritmético			X	X		X			
5 Algebraico			X	X					X	
6 Geométrico				X		X				
Tipo T ₃	7 Aritmético			X		X	X			
	8 Algebraico			X		X	X			
	9 Geométrico			X		X	X			
	10 Aritmético			X		X	X			
					X		X	X		
11 Algebraico			X		X	X				

Tabla 27 a

Tipo	Problema y su contexto	CATEGORÍA 1			CATEGORÍA 2				
		No sabe identificarlo	Identifica como bien definido	Identifica como mal definido	Acciones		Modifica		
					Dirigidas Datos	Dirigidas objetivo	Datos	Objetivo	Datos y Objetivo
Tipo T ₃	12 Geométrico			X	X				
				X		X	X		
	13 Aritmético		X		X				
	14 Algebraico	X							
	15 Geométrico		X	Implícitamente	X			X	
BD	16 Aritmético			X		X	X		
	17 Algebraico		X			X			
	18 Geométrico			X		X			
			X			X			
	19 Aritmético		X			X			
	20 Algebraico		X	X Implícitamente		X	X		
	21 Geométrico		X	X Implícitamente		X	X		

Tabla 27 b

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	Justifica
		Añade datos	Elimina a datos	Añade y elimina datos	Transforma	
Tipo T_2	1 Aritmético			X	BD	REFUTA Prueba: contraejemplo
	2 Algebraico				T_2	VALIDA Prueba: razonamiento analítico
		X			BD	REFUTA Prueba: contraejemplo
	3 Geométrico					VALIDA Prueba: razonamiento empírico (P2)
		X			BD	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P2)
	4 Aritmético	X			BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	5 Algebraico			X	BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	6 Geométrico				No sabe replantear	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P1)

Tabla 28 a

TIPO	Problema y Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	
		Añade datos	Elimina datos	Añade y elimina datos	Transforma	Justifica
Tipo T ₃	7 Aritmético		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico y empírico (P1)
	8 Algebraico		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	9 Geométrico		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	10 Aritmético		X		BD	REFUTA Prueba: razonamiento analítico y r. empírico (P1)
				X	BD	REFUTA Prueba: (ritual)
	11 Algebraico		X		T ₃ C	REFUTA Prueba: razonamiento analítico
	12 Geométrico					REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P2)
				X	T ₂ B	REFUTA Prueba: (ritual)
	13 Aritmético					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	14 Algebraico					No sabe
15 Geométrico				BD	VALIDA Prueba: razonamiento analítico	

Tabla 28 b

TIPO	Contexto	CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4	Justifica
		Añade datos	Elimina datos	Añade y elimina datos	Transforma	
BD	16 Aritmético		X		T ₂ A	REFUTA Prueba: razonamiento empírico (P1)
	17 Algebraico					VALIDA Prueba: (creencias)
	18 Geométrico					No sabe
	19 Aritmético					VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	20 Algebraico		X		T ₂ A	VALIDA Prueba: razonamiento analítico
	21 Geométrico		X		T ₂ A	VALIDA Prueba: (ritual)

Tabla 28 c

ESTUDIO DEFINITIVO CON ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ESO

Resultados globales de la prueba escrita, expresados en porcentajes: Tablas 29, 30 y 31

Tipo	Contexto	Problema	CATEGORÍA 1 (%)			Replantean	No replantean
			No saben identificarlo	Identifican como bien definido	Identifican como mal definido		
BD	Aritmético	16	20	45	30 (5)	25	10
		19	25	40	10	5	5
	Algebraico	17	25	60	15	15	0
		20	50	10	40	25	15
	Geométrico	18	45	35	20	5	15
		21	40	25	20 (15)	15	20
Tipo T ₂	Aritmético	1	5	15	80	40	40
		4	15	10	75	60	15
	Algebraico	2	5	60	35	35	0
		5	10	50	40	35	5
	Geométrico	3	90	0	10	5	5
		6	25	15	60	25	35
Tipo T ₃	Aritmético	7	10	20	45 (25)	70	0
		10	20	35	25 (20)	35	10
		13	15	25	30 (30)	50	10
	Algebraico	8	20	5	15 (60)	65	10
		11	5	50	35 (10)	25	20
		14	55	10	15 (20)	35	0
	Geométrico	9	70	15	15	15	0
		12	45	35	20	5	15
		15	10	5	20 (65)	75	10

Tabla 29

Tipo	Contexto	Problema	Replantea n	CATEGORÍA 2 (%)					
				Acciones			Modifican		
				Dirigida s Datos	Dirigida s Objetivo	No determi- nado	Datos	Objetivo	Datos y objetivos
BD	Aritmético	16	25	5	75	20	25	0	0
		19	5	5	45	50	5	0	0
	Algebraico	17	15	10	65	25	15	0	0
		20	25	10	35	55	25	0	0
	Geométrico	18	5	5	50	45	5	0	0
		21	15	5	55	40	15	0	0
Tipo T ₂	Aritmético	1	40	35	60	5	20	20	0
		4	60	10	75	15	60	0	0
	Algebraico	2	35	75	20	5	10	0	25
		5	35	50	40	10	35	0	0
	Geométrico	3	5	0	10	90	5	0	0
		6	25	15	60	25	5	15	5
Tipo T ₃	Aritmético	7	70	10	80	10	70	0	0
		10	35	15	65	20	30	5	0
		13	50	20	55	25	50	0	0
	Algebraico	8	65	5	75	20	65	0	0
		11	25	25	70	10	20	0	5
		14	35	10	35	55	25	0	10
	Geométrico	9	15	5	25	70	15	0	0
		12	5	15	40	45	5	0	0
		15	75	5	85	10	75	0	0

Tabla 30

Tipo	Contexto	Problema	Replantean	CATEGORÍA 3 (%)			CATEGORÍA 4(%)		
				Añaden Datos	Eliminan Datos	Añaden y eliminan Datos	Transforman		
							T ₂	BD	T ₃
BD	Aritmético	16	25	0	25	0	10	15	0
		19	5	0	5	0	0	5	0
	Algebraico	17	15	0	15	0	10	5	0
		20	25	15	0	10	0	10	15
	Geométrico	18	5	0	0	5	0	5	0
		21	15	0	15	0	15	0	0
Tipo T ₂	Aritmético	1	40	20	0	0	0	30	10
		4	60	60	0	0	0	30	30
	Algebraico	2	35	25	0	10	0	35	0
		5	35	25	0	10	5	20	10
	Geométrico	3	5	5	0	0	0	5	0
		6	25	5	0	5	5	20	0
Tipo T ₃	Aritmético	7	70	10	60	0	0	70	0
		10	35	10	10	10	0	15	20
		13	50	0	50	0	0	45	5
	Algebraico	8	65	0	65	0	0	65	0
		11	25	0	5	20	0	25	0
		14	35	5	20	10	5	20	10
	Geométrico	9	15	0	15	0	0	15	0
		12	5	0	0	5	0	5	0
15		75	0	75	0	10	65	0	

Tabla 31

Resultados globales de la prueba escrita, expresados en número de alumnos: Tablas 32, 33 y 34

Tipo	Contexto	Problema	CATEGORÍA 1			Replantean	No replantean
			No saben identificarlo	Identifican como bien definido	Identifican como mal definido		
BD	Aritmético	16	4	9	6 (1)	5	2
		19	5	8	2	1	1
	Algebraico	17	5	12	3	3	0
		20	10	2	8	5	3
	Geométrico	18	9	7	4	1	3
		21	8	5	4 (3)	3	4
Tipo	Aritmético	1	1	3	16	8	8
		4	3	2	15	12	3
	Algebraico	2	1	12	7	7	0
		5	2	10	8	7	1
	Geométrico	3	18	0	2	1	1
		6	5	3	12	5	7
Tipo	Aritmético	7	2	4	9 (5)	14	0
		10	4	7	5 (4)	7	2
		13	3	5	6 (6)	10	2
	Algebraico	8	4	1	3 (12)	13	2
		11	1	10	7 (2)	5	4
		14	11	2	3 (4)	7	0
	Geométrico	9	14	3	3	3	0
		12	9	7	4	1	3
		15	2	1	4 (13)	15	2

Tabla 32

				CATEGORÍA 2					
Tipo	Contexto	Problema	Replantea n	Acciones			Modifican		
				Dirigida s Datos	Dirigida s Objetivo	No determi- nado	Datos	Objetivo	Datos y objetivos
BD	Aritmético	16	5	1	15	4	5	0	0
		19	1	1	9	10	1	0	0
	Algebraico	17	3	2	13	5	3	0	0
		20	5	2	7	11	5	0	0
	Geométrico	18	1	1	10	9	1	0	0
21	3	1	11	8	3	0	0		
Tipo T ₂	Aritmético	1	8	7	12	1	4	4	0
		4	12	2	15	3	12	0	0
	Algebraico	2	7	15	4	1	2	0	5
		5	7	10	8	2	7	0	0
	Geométrico	3	1	0	2	18	1	0	0
6	5	3	12	5	1	3	1		
Tipo T ₃	Aritmético	7	14	2	16	2	14	0	0
		10	7	3	11	6	6	1	0
		13	10	4	11	5	10	0	0
	Algebraico	8	13	1	15	4	13	0	0
		11	5	5	14	1	4	0	1
		14	7	2	7	11	5	0	2
	Geométrico	9	3	1	5	14	3	0	0
		12	1	3	8	9	1	0	0
		15	15	1	17	2	15	0	0

Tabla 33

				CATEGORÍA 3			CATEGORÍA 4		
Tipo	Contexto	Problema	Replantean	Añaden Datos	Eliminan Datos	Añaden y eliminan Datos	Transforman		
							T ₂	BD	T ₃
BD	Aritmético	16	5	0	5	0	2	3	0
		19	1	0	1	0	0	1	0
	Algebraico	17	3	0	3	0	2	1	0
		20	5	3	0	2	0	2	3
	Geométrico	18	1	0	0	1	0	1	0
		21	3	0	3	0	3	0	0
Tipo T ₂	Aritmético	1	8	4	0	0	0	6	2
		4	12	12	0	0	0	6	6
	Algebraico	2	7	5	0	2	0	7	0
		5	7	5	0	2	1	4	2
	Geométrico	3	1	1	0	0	0	1	0
		6	5	1	0	1	1	4	0
Tipo T ₃	Aritmético	7	14	2	12	0	0	14	0
		10	7	2	2	2	0	3	4
		13	10	0	10	0	0	9	1
	Algebraico	8	13	0	13	0	0	13	0
		11	5	0	1	4	0	5	0
		14	7	1	4	2	1	4	2
	Geométrico	9	3	0	3	0	0	3	0
		12	1	0	0	1	0	1	0
		15	15	0	15	0	2	13	0

Tabla 34

ANEXO 5

COMPORTAMIENTOS GENERADOS DE LAS CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

- **FASE I DEL ESTUDIO PILOTO**
- **FASES II DEL ESTUDIO PILOTO**
- **FASE III DEL ESTUDIO PILOTO**
- **ESTUDIOS DEFINITIVOS: ALUMNOS DEL CSE**
- **ESTUDIOS DEFINITIVOS: ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ESO (VIDEOGRABADOS)**
- **ESTUDIOS DEFINITIVOS: ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ESO (ESCRITA)**

FASE I DEL ESTUDIO PILOTO

Problema y contexto	Caracterización competencia	Comportamientos de los alumnos
A1 Algebraico	$T_2 A$	1 estudiante C1A-C2B 1 estudiante C1A-C2B-C3A 5 estudiantes C1B-C2A 2 estudiantes [C1B-C1A]-C2A
A2 Aritmético	$T_2 B$	2 estudiantes C1A-C2B 5 estudiantes C1A-C2B-C3A 2 estudiantes C1B-C2A
B1 Algebraico	$T_2 A$	4 estudiantes C1A-C2B-C3A 5 estudiantes C1A-C2B
B2 Aritmético	$T_3 A$	1 estudiante C1B 2 estudiantes C1A-C2A 6 estudiantes C1A-C2B-C3B
A3 Aritmético	BD	7 estudiantes C1B 2 estudiantes (C1B-C1A)- C2B-C3B
B3 Geométrico	BD	1 estudiante C1A-C2A 8 estudiantes C1B

Tabla 35

FASE II DEL ESTUDIO PILOTO

Problema y contexto	Caracterización competencia	Comportamientos de los alumnos
A1 Aritmético	T ₂ D	1 estudiante C1B-C2A 3 estudiantes C1A-C2B 9 estudiantes C1A-C2B-C21-C3A-C4B
A2 Algebraico	T ₂ A	2 estudiantes C1C 4 estudiantes C1B-C2A 1 estudiante C1A-C2A-C22-C4B 3 estudiantes C1A-C2B-C21-C3A-C4A 3 estudiantes C1A-C2B-C23-C3A-C4B
A3 Aritmético	T ₂ A	13 estudiantes C1A-C2B
A4 Aritmético	T ₃ A	3 estudiantes C1B-C2A 2 estudiantes C1A-C2B 8 estudiantes C1A-C2B-C21-C3B-C4B
A5 Algebraico	T ₃ A	3 estudiantes C1C 1 estudiante C1B-C2A 3 estudiantes C1A-C2B-C21-C3B-C4B 2 estudiantes C1A-C2B-C21-C3A-C4C 4 estudiantes C1A-C2B-C21-C3C-C4A
A6 Geométrico	T ₃ C	3 estudiantes C1A-C2B 5 estudiantes C1B-C2A 5 estudiantes C1A-C2B-C21-C3A-C4C
B1 Aritmético	T ₂ B	3 estudiantes C1A-C2A-C23-C3C-C4B 10 estudiantes C1A-C2B-C21-C3C-C4B
B2 Algebraico	T ₂ C	5 estudiantes C1A-C2A-C23-C3B-C4B 8 estudiantes C1A-C2B-C21-C3C-C4B
B3 Geométrico	T ₂ A	2 estudiantes C1C 3 estudiantes C1B-C2A 6 estudiantes C1A-C2B-C21-C3C-C4B 2 estudiantes C1A-C2A-C22-C4B
B4 Aritmético	T ₃ C	2 estudiantes C1B-C2A 3 estudiantes [C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4B 6 estudiantes C1A-C2B-C21-C3C-C4C 2 estudiantes C1A-C2A-C22-C4C

Tabla 36 a

Problema y contexto	Caracterización competencia	Comportamientos de los alumnos
B5 Algebraico	$T_3 C$	3 estudiantes C1B-C2A 2 estudiantes C1A-C2B-C21-C3C-C4B 1 estudiante C1A-C2A-C23-C3B-C4B 7 estudiantes C1A-C2B-C21-C3C-C4C
B6 Geométrico	$T_3 A$	1 estudiante C1A-C2B-C22-C4B 12 estudiantes C1A-C2B-C21-C3B-C4B
B10 Geométrico	$T_2 D$	2 estudiantes C1A-C2A-C22-C4B 11 estudiantes C1A-C2B-C21-C3C-C4B
A7 Aritmético	BD	8 estudiantes C1B-C2B 3 estudiantes C1A-C2B-C21-C3B-C4A 2 estudiantes C1B-C2A
B7 Aritmético	BD	12 estudiantes C1B-C2B 1 estudiantes C1B-C2A
A8 Algebraico	BD	13 estudiantes C1B
B8 Algebraico	BD	12 estudiantes C1B-C2B 1 estudiantes C1B-C2A
A9 Geométrico	BD	4 estudiantes C1B-C2B 6 estudiantes C1C 3 estudiantes C1A-C2B
B9 Geométrico	BD	5 estudiantes C1B 5 estudiantes C1C 3 estudiantes C1A-C2B-C21-C3B-C4A

Tabla 36 b

FASE III DEL ESTUDIO PILOTO.

Alumna de nivel académico medio-alto

Problema y contexto	Caracterización competencia	Comportamiento
A1 Aritmético	T ₂ B	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
A2 Algebraico	T ₂ A	C1B-C2A
A6 Geométrico	T ₃ C	C1A-C2B-C21-C3A-C4C
B4 Aritmético	T ₃ C	[C1B-C1A]-C2B-C21-C3C-C4B ----- C1A-C2B-C21-C3C-C4C
A5 Algebraico	T ₃ A	[C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4A ----- C1A-C2A-C21-C3A-C4C ----- C1A-C2B
B10 Geométrico	T ₂ C	C1A-C2A-C22-C4B

Tabla 37

Pareja de alumnos, de nivel académico medio (Ella) y nivel académico bajo (ÉL).

Problema y contexto	Caracterización competencia	Comportamiento
A1 Aritmético	T ₂ B	(Ella) [C1B-C1A]-C2B-C21-C3A-C4B ----- C1A-C2B-C21-C3A-C4B
A2 Algebraico	T ₂ A	C1B-C2A
A6 Geométrico	T ₃ C	C1B-C2A ----- [C1B-C1A]-C2A-C22-C4B
B4 Aritmético	T ₃ C	(Él) [C1B-C1A]-C2A-C23-C3C-C4B ----- [C1B-C1A]-C2A-C22-C4C
A5 Algebraico	T ₃ A	[C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4A ----- [C1B-C1A]-C2A-C23-C3B-C4A
B10 Geométrico	T ₂ C	(Ella) C1A-C2A-C22-C4B (Él) C1A-C2B-C21-C3A-C4B

Tabla 38

ESTUDIO FINAL CON ALUMNOS DEL CENTRO SUPERIOR DE EDUCACIÓN

Alumna de nivel académico alto

Problema y contexto	Caracterización competencia	Comportamiento
1 Aritmético	T ₂	C1A-C2A-C22-C4B
2 Algebraico	T ₂	C1B-C2B C1A-C2B-C23-C3A-C4B
3 Geométrico	T ₂	C1A-C2B-C21-C3A-C4B
4 Aritmético	T ₂	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
5 Algebraico	T ₂	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
6 Geométrico	T ₂	C1A-C2A-C22-C4B
7 Aritmético	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
8 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4C
9 Geométrico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
10 Aritmético	T ₃	C1A-C2A-C23-C3B-C4C
11 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C23-C3B-C4B
12 Geométrico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
13 Aritmético	T ₃	C1B-C2B
14 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3C-C4C
15 Geométrico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
16 Aritmético	BD	C1B-C2B
17 Algebraico	BD	C1B-C2B
18 Geométrico	BD	C1C-C2A
19 Aritmético	BD	C1B-C2B
20 Algebraico	BD	C1B-C2B
21 Geométrico	BD	C1B-C2B

Tabla 39

Alumna de nivel académico medio.

Problema y contexto	Caracterización Competencia	Comportamiento
1 Aritmético	T ₂	C1A-C2A-C22-C4B
2 Algebraico	T ₂	C1A-C2B-C23-C3A-C4B
3 Geométrico	T ₂	C1B-C2A C1C-C2B
4 Aritmético	T ₂	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
5 Algebraico	T ₂	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
6 Geométrico	T ₂	C1A-C2B-C21-C3A-C4C
7 Aritmético	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
8 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4C
9 Geométrico	T ₃	C1A-C2B-C23-C3B-C4B
10 Aritmético	T ₃	C1A-C2A-C21-C3B-C4C
11 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4C
12 Geométrico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
13 Aritmético	T ₃	C1B-C2B
14 Algebraico	T ₃	C1A-C2A-C22-C4C
15 Geométrico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
16 Aritmético	BD	C1B-C2B
17 Algebraico	BD	C1B-C2B
18 Geométrico	BD	C1C-C2A
19 Aritmético	BD	C1B-C2B
20 Algebraico	BD	C1A-C2B-C23-C3C-C4B C1C
21 Geométrico	BD	C1B-C2B

Tabla 40

Alumna de nivel académico bajo.

Problema y contexto	Caracterización Competencia	Comportamiento
1 Aritmético	T ₂	C1A-C2A-C22-C4B
2 Algebraico	T ₂	C1B-C2B
3 Geométrico	T ₂	C1A-C2B-C21-C3A-C4B
4 Aritmético	T ₂	C1A-C2B-C21-C3A-C4B
5 Algebraico	T ₂	C1A-C2B-C21-C3A-C4B
6 Geométrico	T ₂	C1A-C2A-C22-C4B ----- C1A-C2B-C21-C3A-C4C
7 Aritmético	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
8 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
9 Geométrico	T ₃	C1A-C2B
10 Aritmético	T ₃	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
11 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
12 Geométrico	T ₃	C1B-C2B
13 Aritmético	T ₃	C1B-C2B
14 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
15 Geométrico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
16 Aritmético	BD	C1B-C2B
17 Algebraico	BD	C1B-C2B
18 Geométrico	BD	C1A-C2A-C21-C3C-C4B
19 Aritmético	BD	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
20 Algebraico	BD	C1A-C2B-C21-C3A-C4C
21 Geométrico	BD	C1B-C2B

Tabla 41

ESTUDIO FINAL CON ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ESO.

Alumno de nivel académico alto

Problema y contexto	Caracterización Competencia	Comportamiento
1 Aritmético	T ₂	C1A-C2B-C21-C3A-C4B
2 Algebraico	T ₂	C1B-C2B C1C C1A-C2B-C21-C3A-C4C.....
3 Geométrico	T ₂	C1A-C2B-C21-C3A-C4B
4 Aritmético	T ₂	C1A-C2B-C21-C3A-C4C
5 Algebraico	T ₂	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
6 Geométrico	T ₂	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
7 Aritmético	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
8 Algebraico	T ₃	[C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4B
9 Geométrico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
10 Aritmético	T ₃	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
11 Algebraico	T ₃	C1A-C2A-C23-C3C-C4B
12 Geométrico	T ₃	[C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4B C1A-C2B-C21-C3C-C4B
13 Aritmético	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
14 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4A
15 Geométrico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
16 Aritmético	BD	C1B-C2B
17 Algebraico	BD	C1B-C2B
18 Geométrico	BD	C1B-C2B
19 Aritmético	BD	C1B-C2B
20 Algebraico	BD	C1C-C2B
21 Geométrico	BD	C1B-C2B

Tabla 42

Alumna de nivel académico medio

Problema y contexto	Caracterización Competencia	Comportamiento
1 Aritmético	T ₂	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
2 Algebraico	T ₂	C1A-C2B-C23-C3A-C4B
3 Geométrico	T ₂	C1C-C2A
4 Aritmético	T ₂	C1A-C2B-C21-C3A-C4C
5 Algebraico	T ₂	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
6 Geométrico	T ₂	C1B-C2A ----- C1A-C2B-C21-C3A-C4C
7 Aritmético	T ₃	[C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4B
8 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
9 Geométrico	T ₃	C1C-C2A
10 Aritmético	T ₃	C1A-C2A-C22-C4C
11 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
12 Geométrico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3C-C4A
13 Aritmético	T ₃	C1B-C2B
14 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
15 Geométrico	T ₃	[C1B-C1A]-C2A-C22-C4B
16 Aritmético	BD	C1B-C2B
17 Algebraico	BD	C1B-C2B
18 Geométrico	BD	C1B-C2B
19 Aritmético	BD	C1B-C2B
20 Algebraico	BD	C1A-C2B-C21-C3A-C4C
21 Geométrico	BD	C1B-C2B

Tabla 43

Alumno de nivel académico bajo.

Problema y contexto	Caracterización Competencia	Comportamiento
1 Aritmético	T ₂	C1A-C2B-C21-C3C-C4B
2 Algebraico	T ₂	[C1B-C1A]-C2A-C22-C4A C1A-C2B-C23-C3A-C4B
3 Geométrico	T ₂	C1B-C2A C1A-C2B-C21-C3A-C4B
4 Aritmético	T ₂	C1A-C2B-C21-C3A-C4B
5 Algebraico	T ₂	C1A-C2A-C23-C3C-C4B
6 Geométrico	T ₂	C1A-C2B
7 Aritmético	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
8 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
9 Geométrico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B
10 Aritmético	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4B C1A-C2B-C21-C3C-C4B
11 Algebraico	T ₃	C1A-C2B-C21-C3B-C4C
12 Geométrico	T ₃	C1A-C2A-C21-C3A-C4C C1A-C2B-C21-C3C-C4A
13 Aritmético	T ₃	C1B-C2A
14 Algebraico	T ₃	C1C
15 Geométrico	T ₃	[C1B-C1A]-C2A-C22-C4B
16 Aritmético	BD	C1A-C2B-C21-C3B-C4A
17 Algebraico	BD	C1B-C2B
18 Geométrico	BD	C1C-C2A
19 Aritmético	BD	C1B-C2B
20 Algebraico	BD	[C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4A
21 Geométrico	BD	[C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4A

Tabla 44

Prueba Escrita

Problema y contexto	Caracterización Competencia	Comportamiento
1 Aritmético	T ₂	1 alumno C1C 3 alumnos C1B-C2A 8 alumnos C1A-C2B 4 alumnos C1A-C2A-C22-C4B 2 alumnos C1A-C2B-C21-C3A-C4C 2 alumnos C1A-C2B-C21-C3A-C4B
2 Algebraico	T ₂	1 alumno C1C 12 alumnos C1B-C2A 3 alumnos C1A-C2A-C23-C3A-C4B 1 alumno C1A-C2B-C21-C3A-C4B 1 alumno C1A-C2B-C23-C3C-C4B 1 alumno C1A-C2B-C21-C3C-C4B 1 alumno C1A-C2B-C23-C3A-C4B
3 Geométrico	T ₂	18 alumnos C1C- 1 alumno C1A-C2B 1 alumno C1A-C2B-C21-C3A-C4B
4 Aritmético	T ₂	3 alumnos C1C 2 alumnos C1B-C2A 3 alumnos C1A-C2B 6 alumnos C1A-C2B-C21-C3A-C4B 6 alumnos C1A-C2B-C21-C3A-C4C
5 Algebraico	T ₂	2 alumnos C1C 10 alumnos C1B-C2A 1 alumno C1A-C2B 1 alumno C1A-C2B-C21-C3A-C4A 2 alumnos C1A-C2B-C21-C3A-C4B 2 alumnos C1A-C2B-C21-C3A-C4C 2 alumnos C1A-C2B-C21-C3C-C4B
6 Geométrico	T ₂	5 alumnos C1C 3 alumnos C1B-C2A 7 alumnos C1A-C2B 1 alumno C1A-C2B-C21-C3A-C4A 3 alumnos C1A-C2B-C22-C4B 1 alumno C1A-C2B-C23-C3C-C4B

Tabla 45 a

Problema y contexto	Caracterización Competencia	Comportamiento
7 Arimético	T ₃	2 alumnos C1C 2 alumnos C1B-C2A 2 alumnos C1B-C2B 2 alumnos C1A-C2B-C21-C3A-C4B 7 alumnos C1A-C2B-C21-C3B-C4B 5 alumnos C1B-C1A-C2B-C21-C3B-C4B
8 Algebraico	T ₃	4 alumnos C1C 1 alumno C1B-C2A 2 alumnos C1A-C2B 1 alumno C1A-C2B-C21-C3B-C4B 12 alumnos C1B-C1A-C2B-C21-C3B-C4B
9 Geométrico	T ₃	14 alumnos C1C 1 alumno C1B-C2A 2 alumnos C1B-C2B 3 alumnos C1A-C2B-C21-C3B-C4B
10 Arimético	T ₃	4 alumnos C1C 3 alumnos C1B-C2A 2 alumnos C1A-C2B 4 alumnos C1B-C2B 2 alumnos C1A-C2B-C21-C3A-C4C 2 alumnos [C1B-C1A]-C2B-C21-C3C-C4B 2 alumnos [C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4C 1 alumno C1A-C2B-C22-C4B
11 Algebraico	T ₃	1 alumno C1C 4 alumnos C1B-C2A 4 alumnos C1A-C2B 6 alumnos C1B-C2B 2 alumnos C1A-C2B-C21-C3C-C4B 1 alumno C1A-C2B-C23-C3C-C4B 1 alumno [C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4B 1 alumno [C1B-C1A]-C2A-C21-C3C-C4B
12 Geométrico	T ₃	9 alumnos C1C 5 alumnos C1B-C2B 2 alumnos C1B-C2A 2 alumnos C1A-C2B 1 alumno C1A-C2A 1 alumno C1A-C2B-C21-C3C-C4B
13 Arimético	T ₃	3 alumnos C1C 4 alumnos C1B-C2A 2 alumnos C1A - 1 alumno C1B-C2B 1 alumno C1A-C2B-C21-C3B-C4A 6 alumnos [C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4B 3 alumnos C1A-C2B-C21-C3B-C4B

Tabla 45 b

Problema y contexto	Caracterización Competencia	Comportamiento
14 Algebraico	T ₃	11 alumnos C1C 2 alumnos C1B-C2A 1 alumno C1A-C2B-C23-C3C-C4B 1 alumno C1A-C2B-C21-C3A-C4C 1 alumno C1A-C2B-C21-C3B-C4B 1 alumno [C1B-C1A]-C2B-C23-C3C-C4C 2 alumnos [C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4B 1 alumno [C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4A
15 Geométrico	T ₃	2 alumnos C1C 1 alumno C1B-C2A 2 alumnos C1A-C2B 2 alumnos C1A-C2B-C21-C3B-C4B 11 alumnos [C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4B 2 alumnos [C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4A
16 Arimético	BD	4 alumnos C1C 1 alumno C1B-C2A 2 alumnos C1A-C2B 8 alumnos C1B-C2B 3 alumnos C1A-C2B-C21-C3B-C4B 1 alumno C1B-C1A-C2B-C21-C3B-C4A 1 alumno C1A-C2B-C21-C3B-C4A
17 Algebraico	BD	5 alumnos C1C 2 alumnos C1B-C2A 10 alumnos C1B-C2B 2 alumnos C1A-C2B-C21-C3B-C4A 1 alumno C1A-C2B-C21-C3B-C4B
18 Geométrico	BD	9 alumnos C1C 6 alumnos C1B-C2B 1 alumno C1B-C2A 1 alumno C1A-C2B-C21-C3C-C4B 3 alumnos C1A-C2B
19 Arimético	BD	5 alumnos C1C 8 alumnos C1B-C2B 1 alumno C1A-C2A 1 alumno C1A-C2B-C21-C3B-C4B 5 alumno (Ya está hecho)
20 Algebraico	BD	10 alumnos C1C 1 alumno C1B-C2B 1 alumno C1B 2 alumnos C1A-C2A 1 alumno C1A-C2B 2 alumnos C1A-C2B-C21-C3C-C4B 3 alumnos C1A-C2B-C21-C3A-C4C
21 Geométrico	BD	8 alumnos C1C 1 alumno C1B-C2A 4 alumnos C1B-C2B 4 alumnos C1A-C2B 3 alumnos [C1B-C1A]-C2B-C21-C3B-C4A

Tabla 45 c