

**UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA**

**Sobre polinomios de Szegő y fórmulas  
de cuadratura en la circunferencia unidad**

**Autor: Daruis Luis, María Leila**

**Director: Pablo González Vera**

**Departamento de Análisis Matemático**

En primer lugar, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a mi director de tesis, el DR. D. Pablo González Vera, Catedrático de Matemática Aplicada, que ha sabido orientarme en la dirección correcta en cada momento y darme el aliento necesario para superar las dificultades con que nos fuimos encontrando a lo largo de la elaboración de esta Memoria.

También agradezco al Gobierno de Canarias el haberme concedido una beca de posgrado para la realización de la Tesis Doctoral, que ha propiciado la elaboración del presente trabajo.

Quiero expresar mi gratitud al Pr. Olav Njåstad, con el que tuve el placer de trabajar durante mi estancia en la Universidad de Trondheim (Noruega), y que puso a mi disposición todos los medios necesarios para que pudiese avanzar en en la elaboración del trabajo.

Quisiera dar las gracias al Departamento de Análisis Matemático de La Universidad de La Laguna por las facilidades prestadas para la elaboración de esta Memoria, en especial a los profesores D. Santiago Luis García y D. Carlos Javier Díaz Mendoza por sus acertadas sugerencias, y en general a todos aquellos que, sin saberlo, han colaborado en la realización de este trabajo.

Finalmente, quisiera agradecer el apoyo y la ayuda que he tenido de mis padres y de Alejandro en todo momento.

# Índice General

Prólogo	v
<b>1 Algunas notas sobre cuadratura, interpolación y ortogonalidad</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.2 Fórmulas de cuadratura sobre un intervalo de la recta real . . . . .	3
1.3 Polinomios de Szegő . . . . .	10
1.4 Fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad . . . . .	15
1.5 Aproximantes a la Transformada de Herglotz- Riesz . . . . .	25
<b>2 Interpolación con nodos sobre la circunferencia unidad</b>	<b>35</b>
2.1 Introducción . . . . .	35
2.2 Interpolación de funciones continuas . . . . .	37
2.3 Interpolación de funciones analíticas . . . . .	50
2.4 Cotas de error para las fórmulas de cuadratura . . . . .	58
<b>3 Algunos resultados sobre fórmulas de Szegő</b>	<b>65</b>
3.1 Introducción . . . . .	65
3.2 Preliminares . . . . .	66
3.3 Ejemplos ilustrativos . . . . .	81
3.4 Aplicación al intervalo $[-1, 1]$ . . . . .	92

3.4.1	Fórmulas de cuadratura Gaussianas . . . . .	96
3.4.2	Fórmulas de cuadratura de Gauss-Lobatto y Gauss-Radau . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Fórmulas de cuadratura de Szegő para las funciones peso de Chebyshev</b>	<b>105</b>
4.1	Introducción . . . . .	105
4.2	Cálculo de nodos y coeficientes . . . . .	106
4.3	Estimación del error . . . . .	118
4.4	Resultados numéricos . . . . .	123
4.5	Aplicación al intervalo $[-1, 1]$ . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio para las funciones peso de Chebyshev</b>	<b>133</b>
5.1	Introducción . . . . .	133
5.2	Coeficientes . . . . .	135
5.3	Cotas de error . . . . .	138
5.4	Resultados numéricos . . . . .	143
5.5	Aplicación al intervalo $[-1, 1]$ . . . . .	148
<b>6</b>	<b>Fórmulas de cuadratura Gaussianas</b>	<b>161</b>
6.1	Introducción . . . . .	161
6.2	Fórmulas Gaussianas . . . . .	163
6.3	Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio y Aproximantes de Padé en dos puntos . . . . .	170
6.3.1	Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio . . . . .	170
6.3.2	Aproximantes de Padé en dos puntos . . . . .	173
6.4	Estimación del error y convergencia . . . . .	176
6.5	Resultados numéricos . . . . .	186

<b>A</b>	<b>Estimaciones numéricas de la transformada de Herglotz- Riesz</b>	<b>191</b>
A.1	Cotas de Error . . . . .	193
A.2	Ejemplos numéricos . . . . .	194
A.3	Velocidad de convergencia . . . . .	199
<b>B</b>	<b>Problemas abiertos y aplicaciones</b>	<b>203</b>
B.1	Problemas abiertos . . . . .	203
B.1.1	Constante de Lebesgue . . . . .	203
B.1.2	Convergencia en norma $L_p$ de sucesiones de polinomios interpoladores de Laurent . . . . .	205
B.1.3	Convergencia uniforme de sucesiones de polinomios interpoladores de Laurent. . . . .	206
B.1.4	Velocidad exacta de convergencia . . . . .	206
B.1.5	Fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad con coeficientes iguales . . . . .	207
B.2	Aplicaciones . . . . .	208
	<b>Bibliografía</b>	<b>213</b>



# Prólogo

El objetivo de esta Memoria es el de calcular, de forma aproximada, integrales sobre la circunferencia unidad. Los métodos de integración aproximada más usuales están basados en las llamadas *Fórmulas de Cuadratura*, cuya construcción, como se verá, está íntimamente relacionada con la *interpolación* y la *ortogonalidad*. Las fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad que hemos considerado son, por un lado, las *fórmulas de tipo interpolatorio* exactas en ciertos subespacios de los llamados *polinomios de Laurent* y por otro lado, las llamadas *fórmulas de Szegő* donde los polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad o *polinomios de Szegő* juegan un importante papel. Estas fórmulas, como también se verá, son exactas en un cierto subespacio de Laurent de dimensión  $2n - 1$ , siendo  $n$  el número de nodos utilizados en la cuadratura.

En el Capítulo 1 hemos hecho un resumen con los resultados que se han necesitado a lo largo de la Memoria comenzando por analizar el caso de integrales sobre un intervalo finito del eje real, para luego pasar a la aproximación de integrales sobre la circunferencia unidad.

En el Capítulo 2 nos hemos centrado en la interpolación de funciones definidas sobre la circunferencia unidad. Para el caso de integrandos continuos se han tomado como interpolantes los polinomios de Laurent, sobre los que hemos estudiado tanto su convergencia en norma  $L_2$  como en norma uniforme. En este Capítulo también se verá una extensión a la circunferencia unidad del teorema clásico de Hermite- Fejér.

Para integrandos analíticos se han elegido varias clases de interpolantes: sucesiones de polinomios algebraicos o polinomios de Laurent o bien los llamados polinomios de tipo quasi- Hermite, dependiendo del dominio de analiticidad de la función. En cada uno de estos casos hemos estudiado su convergencia en norma uniforme y, para estas dos últimas sucesiones de interpolantes, su aplicación a las fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad. Las sucesiones de polinomios de Laurent interpolantes darán lugar a las fórmulas de tipo interpolatorio y las sucesiones de polinomios de tipo quasi- Hermite a las fórmulas de Szegő que ya hemos mencionado. En ambos casos se han dado cotas de error y se ha obtenido convergencia geométrica.

En el Capítulo 3 hemos estudiado por un lado, algunas propiedades y aplicaciones de las fórmulas de Szegő en relación con los llamados polinomios para-ortogonales y con la Teoría del potencial, así como también, y con carácter ilustrativo, hemos calculado los coeficientes de la fórmula de cuadratura de Szegő para varias familias de funciones peso, y por otro lado, hemos visto que existe una conexión entre las fórmulas de Szegő y las fórmulas de cuadratura Gaussianas para el intervalo  $[-1, 1]$ .

En el Capítulo 4, se han calculado explícitamente fórmulas de cuadratura de Szegő. A tal fin se han elegido casos particulares de las llamadas *funciones peso de tipo Jacobi* que reciben el nombre de *funciones peso de Chebyshev*. Para dichas funciones obtendremos también cotas de error para las correspondientes fórmulas de Szegő y con carácter ilustrativo se han elegido varios integrandos con el propósito de comparar, por un lado, el valor exacto del error con tales cotas, y por otro, los resultados proporcionados mediante las fórmulas de Szegő con la que ofrecen las fórmulas de Gauss- Legendre.

Al mismo tiempo, y haciendo uso del Capítulo anterior donde se establece una conexión entre las fórmulas tipo Gauss y las de Szegő, hemos aplicado toda esta teoría a las funciones peso de Chebyshev.



En el Capítulo 5 nos hemos centrado en construir fórmulas de cuadratura ahora de tipo interpolatorio para las funciones peso de Chebyshev, tomando como nodos a las raíces  $n$ -ésimas de un complejo arbitrario unimodular. Para estos casos particulares también hemos dado cotas de error y con carácter ilustrativo, se han comparado numéricamente dichas fórmulas con las de Szegő obtenidas en el Capítulo 4.

Asimismo, en este Capítulo se verá cómo aproximar integrales en el intervalo  $[-1, 1]$  haciendo uso de las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio sobre la circunferencia unidad. Se ofrecen también varios ejemplos para los que se han obtenido, en algunos casos, fórmulas de cuadratura en  $[-1, 1]$  bien conocidas.

Dado que las fórmulas de Szegő son exactas en un cierto subespacio de Laurent de dimensión  $2n - 1$  tal y como habíamos mencionado en un principio, en el Capítulo 6 se han construido fórmulas de cuadratura con el máximo grado de precisión, es decir, exactas en un subespacio de Laurent de dimensión  $2n$ . Por esta razón las hemos denominado Gaussianas. Para estas fórmulas de cuadratura hemos dado resultados sobre convergencia y velocidad de convergencia analizando su conexión con las fórmulas de tipo interpolatorio y ciertos aproximantes de Padé en dos puntos a la llamada *transformada de Herglotz-Riesz*. También se ha hecho una comparación numérica con las fórmulas de Szegő.

En esta Memoria, por último, se han incluido también dos Apéndices. En el Apéndice A hemos dado algunos resultados numéricos en los que se han comparado los aproximantes de Padé en dos puntos, los llamados *aproximantes modificados* y los aproximantes tipo-Padé en dos puntos a la transformada de Herglotz-Riesz con respecto a las funciones peso de Chebyshev. También se ha obtenido, en estos casos, velocidad exacta de convergencia.

En el Apéndice B es donde se han incluido por un lado, algunos problemas abiertos que podrían ser abordados en el futuro y por otro, se menciona una de las aplicaciones de los polinomios de Szegő y de los para-ortogonales como es la teoría de señales digitales.



# Capítulo 1

## Algunas notas sobre cuadratura, interpolación y ortogonalidad

### 1.1 Introducción

Como se ha dicho en el prólogo, el objetivo de esta Memoria se centra fundamentalmente en el cálculo aproximado de integrales sobre la circunferencia unidad mediante fórmulas de cuadratura donde, como veremos, la interpolación y la ortogonalidad van a jugar un papel importante.

Para dar una idea genérica del problema, comenzaremos con el caso de integrales sobre un intervalo finito  $[a, b]$  de la recta real, es decir, supongamos que queremos aproximar integrales de la forma:

$$J_\mu(f) = \int_a^b f(x)d\alpha(x) \tag{1.1}$$

donde  $[a, b]$  es un intervalo finito y  $d\alpha$  una medida en general compleja. A efectos de las reglas de integración, supondremos, mientras no se indique lo contrario, que  $d\alpha$  es absolutamente continua, es decir, que existe  $\mu(x)$  tal que  $d\alpha(x) = \mu(x)dx$  y que  $\int_a^b |\mu(x)|dx < \infty$ .

Las integrales dadas por (1.1) se aproximarán mediante una expresión del tipo

$$J_n(f) = \sum_{j=1}^n A_{j,n} f(x_{j,n}) \quad (1.2)$$

que recibe el nombre de *Fórmula de cuadratura* siendo  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$  los *nodos* o *abscisas*, y  $\{A_{j,n}\}_{j=1}^n$  los *coeficientes* o *pesos* de la misma y donde  $n$  representa un natural arbitrario pero fijo.

Si la función  $f$  es continua en el intervalo  $[a, b]$ , por el Teorema de Weierstrass, parece natural pensar que si en (1.1) reemplazamos el integrando  $f$  por el polinomio  $L_n(f, x)$  que interpola a dicha función en los nodos  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$  elegidos convenientemente entonces  $J_\mu(L_n)$  nos puede proporcionar una estimación de (1.1) de fácil computación si suponemos que las integrales  $\int_a^b x^k \mu(x) dx$  existen para todo entero  $k$  no negativo y se pueden calcular explícitamente. Esto dará lugar a una fórmula de cuadratura del tipo (1.2) donde, una vez fijados los nodos, los coeficientes se pueden expresar de manera única en términos del polinomio interpolador. Por tanto, los nodos siguen estando a nuestra disposición y es aquí donde la ortogonalidad nos va a proporcionar su elección más adecuada.

Si  $\mu(x)$  es una función peso en  $[a, b]$ , la mejor elección de nodos consistirá en tomar los ceros del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal respecto a  $\mu(x)$ , en el sentido que  $J_n(f)$  integra polinomios hasta el mayor grado posible.

Sin embargo, y como ya hemos mencionado en un principio, en vez de integrales sobre un intervalo finito de la recta real, nos ocuparemos de la aproximación de integrales sobre la circunferencia unidad y a lo largo de este primer Capítulo trataremos de establecer un paralelismo entre las fórmulas de cuadratura en el eje real y las fórmulas sobre la circunferencia unidad. En ambos casos estudiaremos la construcción de dichas fórmulas, su convergencia y velocidad de convergencia donde aparecerá su relación, tanto con la interpolación como con la ortogonalidad.

Por otro lado, este Capítulo también tiene como objetivo dar los resultados que se van

a necesitar a lo largo de la Memoria. Así pues, en la primera Sección haremos un resumen de los resultados más relevantes en cuanto a la construcción de fórmulas de cuadratura sobre el eje real, su convergencia y velocidad de convergencia, tal y como acabamos de mencionar.

Antes de pasar a estudiar directamente las fórmulas sobre la circunferencia unidad, en la Sección 2 empezaremos por definir los llamados *polinomios de Szegő*, los *polinomios de Szegő asociados* y la *transformada de Herglotz-Riesz* que jugarán un papel fundamental tanto en la Sección 3, donde estudiaremos la construcción de dichas fórmulas y su convergencia, como en la Sección 4 donde nos ocuparemos de la velocidad de convergencia.

## 1.2 Fórmulas de cuadratura sobre un intervalo de la recta real

Supongamos que queremos aproximar integrales de la forma (1.1), donde la función  $\mu(x)$  es en general compleja y tal que  $\int_a^b |\mu(x)|dx < \infty$ , mediante una fórmula de cuadratura como la dada en (1.2). A efectos de terminología, cuando  $\mu(x) \geq 0$  en  $[a, b]$  y  $\int_a^b \mu(x)dx > 0$  diremos que  $\mu(x)$  es una función peso. Como ya se ha dicho a lo largo de la Memoria también cabría integrar respecto a una medida en general compleja o también respecto a una función de distribución, esto es, una función real, no decreciente con infinitos puntos de crecimiento. No obstante, desde el punto de vista de la cuadratura en el que estamos mayormente interesados, es suficiente considerar funciones peso. (Obsérvese que si  $\mu$ , medida o distribución, es absolutamente continua, entonces  $d\mu(x) = \mu'(x)dx$  (en el sentido de Radon Nykodin)).

Como se puede ver, la fórmula de cuadratura dada por (1.2) depende de  $2n$  parámetros los cuales fijaremos utilizando el criterio del “máximo grado de precisión”, es decir, los

nodos  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$  y los coeficientes  $\{A_{j,n}\}_{j=1}^n$  serán determinados de forma que si  $\mathbb{P}_n$  denota el espacio de los polinomios de grado a lo sumo  $n$  :

$$J_\mu(f) = J_n(f), \quad \forall f \in \mathbb{P}_N$$

con  $N$  lo más grande posible.

Este criterio de determinación de dichos parámetros depende en gran medida del conocido Teorema de Weierstrass como ya hemos mencionado en la Introducción, el cual garantiza que cualquier función continua en  $[a, b]$  se puede aproximar uniformemente por polinomios. Por tanto, si en (1.1) el integrando  $f$  se reemplaza por un polinomio  $P$ , “apropiado”, entonces parece natural pensar que  $J_\mu(P)$  nos proporcionará una estimación de (1.1) de fácil computación. Si tomamos como polinomio  $P$  el polinomio interpolador de Lagrange  $L_n(f, x)$ , es decir, el único polinomio de grado  $n$  que verifica las siguientes condiciones:

$$L_n(f, x_{j,n}) = f(x_{j,n}), \quad 1 \leq j \leq n,$$

entonces dicho polinomio vendrá dado por

$$L_n(f, x) = \sum_{j=1}^n l_{j,n}(x) f(x_{j,n}),$$

donde

$$l_{j,n}(x) = \frac{W_n(x)}{(x - x_{j,n})W'_n(x_{j,n})}, \quad (1.3)$$

son los polinomios fundamentales de Lagrange, siendo  $W_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_{j,n})$  el polinomio nodal. Ahora bien, si en la integral (1.1) reemplazamos el integrando  $f$  por  $L_n(f, x)$ , obtendremos una fórmula de cuadratura  $J_n(f) = \sum_{j=1}^n A_{j,n} f(x_{j,n})$  donde los coeficientes  $\{A_{j,n}\}_{j=1}^n$  están unívocamente determinados y vienen dados, en términos de los polinomios fundamentales de Lagrange, por:

$$A_{j,n} = \int_a^b l_{j,n}(x) \mu(x) dx; \quad 1 \leq k \leq n. \quad (1.4)$$

Por tanto, se tiene que  $J_\mu(L_n) = \sum_{j=1}^n J_\mu(l_{j,n})f(x_{j,n}) = \sum_{j=1}^n A_{j,n}f(x_{j,n}) = J_n(f)$ . A estas fórmulas, donde los coeficientes vienen dados por (1.4), se les denominan de tipo interpolatorio y se puede ver ([34, p. 80]) que esta definición es equivalente a que la fórmula sea exacta en  $\mathbb{P}_{n-1}$ , es decir, a que  $J_n(f) = J_\mu(f)$  para toda función  $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ .

Así pues, la estimación del error en las fórmulas de tipo interpolatorio está mayorada por el error en la interpolación, es decir:

$$|J_\mu(f) - J_n(f)| \leq \int_a^b |f(x) - L_n(f, x)| |\mu(x)| dx, \quad (1.5)$$

y la convergencia en norma  $L_p$ ,  $p \geq 1$  respecto a  $|\mu(x)|$  de estos interpolantes a la función  $f$  nos proporcionará la convergencia en la fórmula de cuadratura. En particular, si quisiéramos utilizar la norma uniforme, se sabe, (ver [50]), que dada una matriz  $X$  de nodos, esto es,  $X = \{x_{j,n}; j = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}, \text{ con } x_{j,n} \neq x_{k,n} \text{ si } j \neq k\}$ , el polinomio de Lagrange no converge en dicha norma para toda función continua. Por esta razón se han considerado otros interpolantes, como pueden ser los polinomios de interpolación de Hermite-Fejér. Dado que en el Capítulo 2 extenderemos tales interpolantes a la circunferencia unidad, conviene recordar brevemente que el problema de interpolación de Hermite-Fejér consiste en encontrar un polinomio  $P_{2n-1}(f, X, x)$  de grado a lo sumo  $2n - 1$  que verifique las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} P_{2n-1}(f, X, x_{j,n}) &= f(x_{j,n}) \\ P'_{2n-1}(f, X, x_{j,n}) &= 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

En este caso, si  $X$  es la matriz de los nodos de Chebyshev, es decir,  $x_{j,n} = \frac{\cos(2j-1)\pi}{2n}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , a diferencia de la interpolación de Lagrange, Fejér probó el siguiente:

**Teorema 1.2.1.** *(Hermite-Fejér, [17, p.118]) En las condiciones anteriores, la sucesión  $\{P_{2n-1}(f, X, \cdot)\}$  converge uniformemente para toda función  $f$  continua en  $[-1, 1]$ .*

Por otro lado, como hemos visto, las fórmulas de tipo interpolatorio son, en general, exactas en  $\mathbb{P}_{n-1}$ , donde todavía existen  $n$  parámetros libres: los  $n$  nodos  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$ . Parece natural, entonces, preguntarse cómo se deben elegir los mismos para incrementar el grado de precisión de la fórmula de cuadratura, es decir, para que  $J_n(f) = J_\mu(f)$  para toda función  $f \in \mathbb{P}_N$  con  $N > n - 1$ . Cuando  $\mu(x)$  es una función peso en  $[a, b]$ , se sabe, [34, p. 102], que el máximo grado de precisión que se puede alcanzar es  $2n - 1$ , de modo que si se eligen como nodos los ceros del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal respecto a  $\mu$ , los cuales son simples y están en  $(a, b)$ , obtenemos las fórmulas de cuadratura con el máximo grado de precisión alcanzable. Éstas son las llamadas *fórmulas Gaussianas* cuyos coeficientes  $\{A_{j,n}\}_{j=1}^n$  son positivos, y se demuestra que convergen al valor de la integral  $J_\mu(f)$  para toda función  $f$  integrable Riemann en  $[a, b]$ . Este resultado de convergencia se puede ver como un caso particular del siguiente resultado más general (ver [47]) en el que la función  $\mu(x)$  no tiene por qué ser positiva:

**Teorema 1.2.2.** *Sea  $J_n(f) = \sum_{j=1}^n A_{j,n} f(x_{j,n})$  una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio donde los nodos  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$  son los ceros del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal respecto a una función peso  $\nu(x)$  en  $[a, b]$ . Entonces, si*

$$\int_a^b \frac{|\mu(x)|^2}{\nu(x)} dx < +\infty$$

se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n A_{j,n} f(x_{j,n}) = J_\mu(f) = \int_a^b f(x) \mu(x) dx$$

para toda función integrable Riemann en  $[a, b]$  siendo  $\mu(x)$  una función absolutamente integrable en  $[a, b]$  y además se tiene también que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |A_{j,n}| f(x_{j,n}) = \int_a^b f(x) |\mu(x)| dx$$



Supongamos que  $\mu(x)$  es una función peso en  $[a, b]$  y que  $E_n(f)$  denota el error en la correspondiente fórmula de cuadratura Gaussiana. Nos centraremos ahora en estimar la velocidad de convergencia de dichas fórmulas de cuadratura. Para ello, veremos que la transformada de Cauchy y los aproximantes de Padé en el infinito juegan un papel fundamental, y que existe una conexión entre dichos aproximantes y los polinomios ortogonales respecto a la función peso  $\mu$  en  $[a, b]$ . La transformada de Cauchy aparece como solución al *problema de Riemann- Hilbert* que consiste en que, dada una función continua  $\mu$  en  $[a, b]$ , debemos encontrar una función  $F$  que verifique las siguientes propiedades:

(i)  $F$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$

(ii)  $F_+(x) - F_-(x) = -2\pi i \mu(x)$ ,  $x \in [a, b]$  (condición de salto) donde

$$F_{\pm}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(x \pm i\epsilon), \quad (\epsilon > 0).$$

(iii)  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$  (condición de crecimiento).

Se sabe que este problema tiene una única solución que se puede expresar de la forma

$$F_{\mu}(z) = \int_a^b \frac{\mu(x)}{z-x} dx.$$

Esta fórmula es la conocida transformada de Cauchy de la función  $\mu(x)$  en  $[a, b]$  y se puede ver fácilmente que

$$F_{\mu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{z^{j+1}}, \quad \text{para } |z| > \max\{|a|, |b|\}$$

donde  $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$  representa la sucesión de momentos respecto a  $\mu$ , es decir  $c_j = \int_a^b x^j \mu(x) dx$ ,  $j \geq 0$ .

Por otro lado, podemos considerar a  $\frac{1}{z-x}$  como una función en la variable  $x$  siendo  $z$  un parámetro y por tanto para la transformada de Cauchy se tiene  $F_{\mu}(z) = J_{\mu}\left(\frac{1}{z-x}\right)$ .

En estas condiciones se puede aproximar la integral  $F_{\mu}(z)$  por medio de la fórmula Gaussiana con  $n$  nodos respecto a la función peso  $\mu$  y obtenemos

$$J_n\left(\frac{1}{z-x}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{A_{j,n}}{z-x_{j,n}} = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}$$

donde  $P_{n-1}(z) \in \mathbb{P}_{n-1}$  y  $Q_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - x_j)$ . Es decir, el denominador  $Q_n(z)$  coincide con el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal mónico respecto a  $\mu$ . Como consecuencia de la precisión de las fórmulas Gaussianas, la función racional  $\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}$  verifica

$$F_\mu(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \quad (|z| \rightarrow \infty).$$

Por tanto,  $\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}$  representa el aproximante de Padé en el infinito a la transformada de Cauchy, es decir,  $[n - 1/n]_{F_\mu}(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}$ . Además se tiene que la sucesión  $\left\{\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}\right\}$  converge uniformemente a  $F_\mu(z)$  en compactos de  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ .

Al polinomio  $P_{n-1}(z)$  se le denomina *polinomio de segunda especie* y se puede expresar en términos del polinomio ortogonal  $Q_n(z)$  de la siguiente manera: ([48, p. 151])

$$P_{n-1}(z) = \int_a^b \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x} \mu(x) dx.$$

y el error  $F_\mu(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}$  se puede expresar como

$$F_\mu(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \frac{1}{Q_n^2(z)} \int_a^b \frac{Q_n^2(x)}{z - x} \mu(x) dx. \quad (1.7)$$

Supongamos ahora que  $f$  es una función analítica en un dominio  $G$  que contenga al intervalo  $[a, b]$  y continua en  $\Gamma$  siendo  $\Gamma = \partial G$ . Entonces, haciendo uso de la fórmula integral de Cauchy y del teorema de Fubini, se tiene que:

$$E_n(f) = J_\mu(f) - J_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left( F_\mu(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} \right) f(z) dz.$$

Por tanto, cuando el integrando  $f$  es analítico, el error en la fórmula de cuadratura Gaussiana está “controlado” por el error del correspondiente aproximante de Padé.

Haciendo uso de la fórmula anterior, podemos conseguir la siguiente estimación del error:

$$|E_n(f)| \leq M(\Gamma) \max_{z \in \Gamma} |f(z)| \max_{z \in \Gamma} \left| F_\mu(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} \right|$$

donde  $M(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |dz|$  es una constante positiva y se tiene que:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |E_n(f)|^{1/n} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in \Gamma} \left| F_{\mu}(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} \right|^{1/n} \\ &\leq \max_{z \in \Gamma} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| F_{\mu}(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} \right|^{1/n}. \end{aligned}$$

Sea  $K$  un compacto de  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ , si  $z \in K$  entonces, mediante (1.7), se puede ver que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| F_{\mu}(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} \right|^{1/n} \leq \frac{\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b |Q_n|^2 \mu(x) dx \right)^{1/n}}{\liminf_{n \rightarrow \infty} |Q_n(z)|^{2/n}}. \quad (1.8)$$

Observar que  $\int_a^b |Q_n|^2 \mu(x) dx \leq \|Q_n\|_{[a,b]}^2 \int_a^b \mu(x) dx$ , siendo  $\|Q_n\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} \{|Q_n(x)|\}$ .

Por tanto, cuando se desee estudiar la velocidad de convergencia de las fórmulas de cuadratura Gaussianas, aparece de forma natural el comportamiento asintótico de la raíz  $n$ -ésima en los polinomios ortogonales. En esta dirección se tiene el siguiente resultado: (por comodidad tomaremos  $[a, b] = [-1, 1]$ )

**Teorema 1.2.3.** ([48, p. 237]) *Sea  $\{Q_n(x)\}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a una función peso  $\mu(x)$  en  $[-1, 1]$ . Entonces*

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_n\|_{[-1,1]}^{1/n} = 1/2$
- (ii)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} |Q_n(z)|^{1/n} = \frac{1}{2} |z + \sqrt{z^2 - 1}|$  uniformemente en compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

De este teorema y de la fórmula (1.8) se deduce que si  $f$  analítica en un dominio  $G$  que contenga a  $[-1, 1]$ , siendo  $\Gamma$  su frontera, entonces si  $E_n(f)$  denota el error en la  $n$ -ésima fórmula Gaussiana respecto a la función peso  $\mu(x)$  en  $[-1, 1]$ , se tiene que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |E_n(f)|^{1/n} \leq \max_{z \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{|z + \sqrt{z^2 - 1}|} \right\} < 1.$$

En resumen, hemos visto que las fórmulas Gaussianas convergen al valor de la integral con velocidad al menos geométrica cuando el integrando es analítico en un entorno de  $[-1, 1]$ . Para  $f_z(x) = \frac{1}{z-x}$ , donde  $x$  es la variable y  $z$  una parámetro tal que  $z \notin [-1, 1]$ , se tiene que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |E_n(f)|^{1/n} = \max_{z \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{|z + \sqrt{z^2 - 1}|} \right\}.$$

### 1.3 Polinomios de Szegő

En esta Sección nos ocuparemos de dar algunas definiciones y propiedades que nos serán de gran utilidad en la última Sección de este Capítulo y en el resto de la Memoria.

Comenzaremos por definir los *polinomios de Szegő*. Para ello, supongamos que  $\omega(\theta)$  es una función peso en  $[-\pi, \pi]$ . Entonces podremos definir el siguiente producto Hermitiano,

$$(f, g)_\omega = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} \omega(\theta) d\theta.$$

Aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a  $\{1, z, \dots, z^n\}$ , se obtiene una base ortogonal  $\{\Phi_k(z)\}_0^n$  de polinomios mónicos. La sucesión  $\{\Phi_k(z)\}_0^n$  representa un sistema de polinomios ortogonales con respecto a la función peso  $\omega(\theta)$  sobre la circunferencia unidad, verificando:  $(\Phi_p, \Phi_m)_\omega = K_p \delta_{p,m}$ ,  $K_p > 0$ . A estos polinomios se les denomina *polinomios de Szegő*.

Ya que en el Capítulo 3 estudiaremos la conexión entre fórmulas de cuadratura sobre el eje real y sobre la circunferencia unidad, convendría recordar ahora que existe una íntima relación entre los polinomios ortogonales mónicos sobre la circunferencia unidad  $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$  y los polinomios ortogonales mónicos sobre un intervalo finito del eje real (ver [51, p. 94]) que por comodidad tomaremos  $[-1, 1]$ .

En efecto, sean  $\{p_n(x)\}$  y  $\{q_n(x)\}$  las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos respecto a las funciones peso  $\mu(x)$  y  $(1-x^2)\mu(x)$  sobre  $[-1, 1]$ , respectivamente. Sea  $\omega(\theta)$  una función peso en  $[-\pi, \pi]$  definida por

$$\omega(\theta) = \mu(\cos \theta) |\sin \theta| \tag{1.9}$$

y  $\{\Phi_n(z)\}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a  $\omega(\theta)$ . Entonces si  $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$ ,  $z = e^{i\theta}$ , se tiene, para todo  $n \geq 1$ :

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n(1 + \Phi_{2n}(0))} (z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(z^{-1})) \tag{1.10}$$

y

$$q_n(x) = \frac{1}{2^n(1 - \Phi_{2n+2}(0))} \left( \frac{z^{-n-1}\Phi_{2n+2}(z) - z^{n+1}\Phi_{2n+2}(z^{-1})}{z - z^{-1}} \right). \quad (1.11)$$

Es bueno hacer notar que se conocen pocas expresiones explícitas de polinomios de Szegő. Así por ejemplo, para la medida de Lebesgue es fácil ver que el polinomio de Szegő viene dado por  $\Phi_n(z) = z^n$ . Si ahora consideramos modificaciones racionales de la medida de Lebesgue, es decir,  $\omega(\theta)d\theta = \frac{d\theta}{2\pi|h(e^{i\theta})|^2}$  donde  $h$  es un polinomio de grado  $k$  tal que  $h(z) = \prod_{j=1}^k (z - \alpha_j)$ ,  $|\alpha_j| \neq 1$  y  $\alpha_i \neq \alpha_j$  si  $i \neq j$ , el correspondiente polinomio ortogonal vendrá dado por  $\Phi_n(z) = z^{n-k}h(z)$ ,  $n \geq k$ , ([28]). También se ha estudiado el caso de modificaciones racionales de una medida dada sobre la circunferencia unidad, ([26].) Para la familia de funciones peso de tipo Jacobi  $\omega(\theta)$ , que se obtiene a partir de la fórmula (1.9) tomando  $\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  con  $\alpha, \beta > -1$ , esto es,

$$\begin{aligned} \omega(\theta) &= (1 - \cos \theta)^\alpha (1 + \cos \theta)^\beta |\sin \theta| \\ &= (1 - \cos \theta)^{\alpha+1/2} (1 + \cos \theta)^{\beta+1/2}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

también se conocen explícitamente los polinomios de Szegő (ver [25],[36]). Pero, en general, los polinomios ortogonales  $\Phi_n(z)$  se calculan haciendo uso del llamado *algoritmo de Levinson* ([6]) que está basado en las siguientes relaciones de recurrencia (forward) que verifican los polinomios  $\{\Phi_n(z)\}$  de Szegő:

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \Phi_0^*(z) = 1 \\ \Phi_n(z) &= z\Phi_{n-1}(z) + \delta_n \Phi_{n-1}^*(z) \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \Phi_n^*(z) &= \bar{\delta}_n z\Phi_{n-1}(z) + \Phi_{n-1}^*(z) \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde  $\delta_n = \Phi_n(0)$   $n = 1, 2, 3..$  son los llamados *coeficientes de reflexión* y  $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n(\frac{1}{z})}$  son los denominados *polinomios recíprocos*. Estos coeficientes de reflexión se pueden escribir en la forma:

$$\Phi_n(0) = -\frac{(z\Phi_{n-1}(z), 1)_\omega}{(\Phi_{n-1}^*(z), 1)_\omega} = -\frac{\sum_{j=0}^{n-1} r_j^{(n-1)}(z^{j+1}, 1)_\omega}{\sum_{j=0}^{n-1} \bar{r}_j^{(n-1)}(z^{n-j-1}, 1)_\omega} = -\frac{\sum_{j=0}^{n-1} r_j^{(n-1)} \mu_{-j-1}}{\sum_{j=0}^{n-1} \bar{r}_j^{(n-1)} \mu_{j+1-n}},$$

donde  $\Phi_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} r_j^{(n-1)} z^j$  y  $\mu_j = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ij\theta} \omega(\theta) d\theta$ ;  $j \geq 0$ . Como  $\Phi_0(z) = \Phi_0^*(z) = 1$ , podemos calcular  $\Phi_1(0)$ ,  $\Phi_1(z)$  y  $\Phi_1^*(z)$  ( $r_0^{(1)} = r_1^{(1)} = 1$ ). Alternando estas fórmulas sucesivamente finalmente podremos calcular  $\{\Phi_n(0)\}$ ,  $\{\Phi_n(z)\}$  y  $\{\Phi_n^*(z)\}$ .

Por último, y con respecto a la localización de los ceros de los polinomios de Szegő, se sabe que para cada  $n$ , los ceros de  $\Phi_n$  están en  $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$  (ver [3, p. 184]) y que, por tanto, los ceros del polinomio recíproco  $\Phi_n^*(z)$  están en  $\mathbb{E} = \{z : |z| > 1\}$ .

Por otro lado, los *polinomios de Szegő asociados de segunda especie*, a los que denotaremos por  $\Omega_n(z)$ , se definen en términos de los polinomios de Szegő  $\Phi_n(z)$  en la forma

$$\Omega_n(z) := \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z+e^{i\theta}}{z-e^{i\theta}} (\Phi_n(e^{i\theta}) - \Phi_n(z)) \omega(\theta) d\theta & \text{si } n = 1, 2, 3, \dots \\ -\mu_0 & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Estos polinomios satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned} \Omega_0(z) &:= -\mu_0, \quad (\text{dato inicial}) \\ z\Omega_{n-1}(z) - \delta_n \Omega_{n-1}^*(z) &= \Omega_n(z), \quad n = 1, 2, \dots \\ \bar{\delta}_n z \Omega_{n-1}(z) - \Omega_{n-1}^*(z) &= -\Omega_n^*(z), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde  $\delta_n = \Phi_n(0)$  son los coeficientes de reflexión y  $\Omega_n^*(z) = z^n \overline{\Omega_n(1/\bar{z})}$ . En base a estas fórmulas de recurrencia dadas por (1.15), y por el Teorema de Favard ([30]) se puede deducir que la sucesión  $\{\Omega_n\}$  de polinomios de Szegő asociados son también ortogonales con respecto a una medida  $d\tilde{\omega}$  a la que se le denomina *medida de segunda especie asociada a  $\omega$* .

La medida de segunda especie se puede calcular haciendo uso de la llamada *transformada de Herglotz-Riesz* que aparece como solución al problema de interpolación de Caratheodory-Fejér el cual se enuncia como sigue: Dada una sucesión  $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$  de números complejos, consiste en encontrar una función  $F(z)$  definida en  $\mathbb{D}$  con  $\Re(F(z)) > 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$  y tal que

$$F(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \dots, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Este problema está íntimamente relacionado con el problema trigonométrico de los momentos, que consiste en lo siguiente: Dada una sucesión  $\{\mu_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  de números complejos, encontrar una medida positiva  $d\omega(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$  tal que

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\omega(\theta), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.16)$$

Se sabe, ([30]), que este problema tiene solución sí y sólo si los determinantes de Toeplitz

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}$$

verifican  $\Delta_n > 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $\mu_k = \bar{\mu}_{-k}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Además dicha solución es única. A la sucesión  $\{\mu_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  donde para cada  $k \in \mathbb{Z}$ , los  $\mu_k$  viene dado por la fórmula (1.16), se le denomina sucesión de momentos.

Es fácil ver, ([3, p. 91]), que la solución  $F(z)$  al problema de interpolación de Carathéodory-Fejér, siendo  $\omega(\theta)$  la solución al problema trigonométrico de los momentos, se puede escribir de la forma

$$F(z) = F_\omega(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\omega(\theta) + i\Im(F_\omega(0)), \quad (1.17)$$

siendo  $\Im(z)$ , en general, la parte imaginaria del complejo  $z$ . Esta fórmula es la llamada *transformada de Herglotz-Riesz* para  $\omega(\theta)$ . Observar que  $F_\omega(z)$  es una función analítica en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}$  que satisface la siguiente propiedad:

$$\overline{F_\omega\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = -F_\omega(z). \quad (1.18)$$

Como hemos dicho anteriormente, la transformada de Herglotz-Riesz nos va a permitir calcular la medida de segunda especie respecto a la cual los polinomios de Szegő asociados  $\{\Omega_n(z)\}$  son ortogonales. A tal fin enunciaremos el siguiente

**Teorema 1.3.1.** ([38]) Sea  $F$  analítica en  $\mathbb{D}$  y supongamos que  $F$  tiene polos simples en  $\{z_k\}_{k=1}^n$  con  $|z_k| = 1$  de forma que

$$\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k)F(z) = \gamma_k \quad (1.19)$$

y  $\bar{z}_k \gamma_k \in \mathbb{R}$ . Supongamos que los límites no tangenciales

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \Re \left\{ F(z) - \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{z - z_k} \right\}$$

existen casi por todo en  $[-\pi, \pi]$  y son  $L_p$ -integrables en  $[-\pi, \pi]$  con  $p \in (1, +\infty)$ . (Aquí  $\Re(z)$  es, en general, la parte real del complejo  $z$ ). Entonces

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\omega(\theta) + i\Im(F(0))$$

con

$$d\omega(\theta) = (\Re(F(e^{i\theta}))) d\theta - \sum_{k=1}^n \frac{2\pi\gamma_k}{z_k} \delta(e^{i\theta} - z_k) \quad (1.20)$$

donde  $\Re(F(e^{i\theta})) = \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \Re(f(z))$  es el límite no tangencial y donde

$$\delta(e^{i\theta} - z_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } e^{i\theta} = z_k \\ 0 & \text{si } e^{i\theta} \neq z_k \end{cases}$$

Por otro lado, se puede probar, ver [39], que:

**Teorema 1.3.2.** Si  $F$  es la función de Carathéodory con respecto a  $\omega$  y  $\tilde{\omega}$  es la función peso de segunda especie asociada  $\omega$ , entonces,  $G = \frac{1}{F}$  es la función de Carathéodory asociada a  $\tilde{\omega}$ .

En la última Sección se pondrá de manifiesto el papel que juega la transformada de Herglotz- Riesz en relación con las fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad.



## 1.4 Fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad

Como ya se ha venido comentando a lo largo de la Memoria nos centraremos en el cálculo aproximado de integrales, no sobre un intervalo  $[a, b]$  de la recta real como las dadas por (1.1), sino sobre la circunferencia unidad  $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ , de la forma

$$I_\sigma(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \sigma(\theta) d\theta \quad (1.21)$$

siendo  $f$  una función continua en  $\mathbb{T}$  y  $\sigma(\theta)$  una función en general compleja y  $L_1$ -integrable en  $[-\pi, \pi]$ . Aproximaremos dichas integrales mediante una fórmula de cuadratura

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) \quad (1.22)$$

con nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  distintos y sobre  $\mathbb{T}$ . Ahora, en vez de aproximar la función  $f$  por polinomios algebraicos, utilizaremos los llamados *polinomios de Laurent* o *L-polinomios* que se definen como sigue: Dados  $p$  y  $q$  enteros no negativos, denotaremos por  $\Lambda_{-p,q}$  al espacio de polinomios de Laurent o funciones de la forma  $L(z) = \sum_{j=-p}^q \alpha_j z^j$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{C}$ . La razón por la cual se eligen tales funciones viene dada por el siguiente ([52, p. 39])

**Teorema 1.4.1.** *Sea  $\mathcal{C}$  una curva de Jordan y  $f(z)$  continua en  $\mathcal{C}$ . Entonces  $f$  se puede aproximar uniformemente en  $\mathcal{C}$  por la suma de un polinomio en  $z$  y un polinomio en  $\bar{z}$ .*

Y como consecuencia se tiene

**Corolario 1.4.2.** *Sea  $f(z)$  continua en  $\mathbb{T}$ . Entonces  $f$  se puede aproximar uniformemente en  $\mathbb{T}$  por L-polinomios.*

De la misma forma que en el caso real, una vez fijados los nodos  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$  distintos y sobre  $\mathbb{T}$ , existe un único polinomio de Laurent  $R_n(f, x)$  en  $\Lambda_{-p,q}$  ( $p + q = n - 1$ ) que

interpola a la función  $f$  en dichos nodos. Además  $R_n(f, x)$  se puede escribir como

$$R_n(f, z) = \sum_{j=1}^n L_{j,n}(z) f(x_{j,n})$$

donde ahora  $L_{j,n} \in \Lambda_{-p,q}$  con

$$L_{j,n}(x) = \frac{x_{j,n}^p W_n(z)}{z^p (z - x_{j,n}) W_n'(x_{j,n})} \quad (1.23)$$

siendo  $W_n$  el polinomio nodal, esto es  $W_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - x_{j,n})$ .

Si en (1.21) reemplazamos  $f(e^{i\theta})$  por  $R_n(f, e^{i\theta})$  obtenemos la siguiente fórmula de cuadratura:

$$I_\sigma(R_n(f, \cdot)) = \sum_{j=1}^n I_\sigma(L_j) f(x_{j,n}) = \sum_{j=1}^n A_{j,n} f(x_{j,n}) = I_n(f)$$

donde los coeficientes  $\{A_{j,n}\}_{j=1}^n$  vienen dados por

$$A_{j,n} = \int_{-\pi}^{\pi} L_{j,n}(e^{i\theta}) \sigma(\theta) d\theta. \quad (1.24)$$

A estas fórmulas de cuadratura donde los coeficientes vienen dados por (1.24) se les denomina de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-p,q}$  y claramente  $I_n(f) = I_\sigma(f)$  para toda función  $f \in \Lambda_{-p,q}$ , ( $p + q = n - 1$ ).

Existen otros interpolantes de Laurent que también tendremos en cuenta y son los denominados de tipo *quasi-Hermite* que se definen de la siguiente forma: Sean  $\{x_j\}_{j=1}^n$   $n$  puntos distintos en  $\mathbb{T}$ , entonces existe un único interpolante  $H_{2n-2}$  en  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$ , que satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} H_{2n-2}(x_j) &= f(x_j), \quad j = 1, \dots, n \\ H'_{2n-2}(x_j) &= f'(x_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq k \end{aligned} \quad (1.25)$$

siendo  $k$  un número natural en  $\{1, \dots, n\}$ . La razón de considerar estos interpolantes viene dada por el hecho de que las fórmulas de cuadratura a las que darán lugar son las llamadas fórmulas de Szegő que a continuación definiremos y que se consideran, en cierta

manera, como las análogas, en la circunferencia unidad, a las fórmulas Gaussianas sobre un intervalo de la recta real.

Vamos a suponer que  $\sigma(\theta) = \omega(\theta)$  es una función peso en  $[-\pi, \pi]$ . Como acabamos de ver, fijados los  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$  en  $\mathbb{T}$ , los coeficientes  $\{A_{j,n}\}_{j=1}^n$  vienen dados por (1.24) y la correspondiente fórmula de tipo interpolatorio es exacta en  $\Lambda_{-p,q}$  con  $p$  y  $q$  dos enteros no negativos tales que  $p + q = n - 1$ . De igual forma que en el caso real, podríamos preguntarnos cómo elegir los nodos distintos en  $\mathbb{T}$  de manera que la fórmula sea exacta en  $\Lambda_{-p,q}$  con  $p$  y  $q$  lo más grandes posibles. Siguiendo los mismos pasos que en el caso real podríamos pensar en los ceros de polinomios ortogonales respecto a  $\omega$ , pero, a diferencia de los polinomios ortogonales en la recta real, hemos visto que para cada  $n$ , los ceros de  $\Phi_n$  están en  $\mathbb{D}$  por lo que no se pueden tomar como nodos de interpolación.

Con el fin de motivar la forma de encontrar los nodos para la fórmula de cuadratura, vamos a analizar primero qué ocurre cuando tenemos integrales del tipo

$$I(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

donde  $f$  es una función periódica de periodo  $2\pi$ . En [34, p. 73-74], para aproximar estas integrales, se toman fórmulas de cuadratura de la forma

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_{j,n} f(\theta_{j,n}), \quad \theta_j \in [-\pi, \pi], \quad j = 1, \dots, n \quad (1.26)$$

donde los coeficientes y los nodos se determinan de manera que la fórmula sea exacta para polinomios, en vez de algebraicos, trigonométricos de grado lo mayor posible, ya que la función  $f$  es periódica. Como se sabe, tales polinomios, en general, se pueden escribir en la forma (grado  $m$ ):

$$T_m(\theta) = a_0 + \sum_{j=1}^m (a_j \cos j\theta + b_j \operatorname{sen} j\theta). \quad (1.27)$$

Entonces, es fácil comprobar que para cualquier elección de nodos  $\{\theta_{j,n}\}_{j=1}^n$  y coeficientes  $\{A_{j,n}\}_{j=1}^n$  la fórmula de cuadratura (1.26) no puede ser exacta para todo polinomio

trigonométrico de grado  $n$ . Por tanto, el máximo grado de precisión que se puede alcanzar es  $n - 1$ . También se demuestra que este grado máximo de precisión se alcanza únicamente cuando los coeficientes vienen dados por

$$A_{j,n} = \frac{2\pi}{n}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{coeficientes iguales})$$

y los nodos están equiespaciados, es decir

$$\theta_{j,n} = \alpha + (j - 1)h, \quad j = 1, \dots, n$$

donde  $h = \frac{2\pi}{n}$  y  $\alpha$  es  $-\pi$  o en su defecto es el nodo más cercano a  $-\pi$ . Entonces, podemos expresar (1.26) como

$$I_n(f) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\alpha + (j - 1)\frac{2\pi}{n}\right)$$

siendo  $I_n(f)$  exacta para cualquier polinomio trigonométrico  $T(\theta)$  de grado menor o igual que  $n - 1$ , es decir,

$$\int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^n T(\theta_{j,n}). \quad (1.28)$$

Por otro lado, como  $\cos j\theta = \frac{e^{ij\theta} + e^{-ij\theta}}{2}$  y  $\sin j\theta = \frac{e^{ij\theta} - e^{-ij\theta}}{2i}$ , entonces (1.27) se puede expresar como

$$T_m(\theta) = a_0 + \sum_{j=1}^m (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta) = \sum_{j=-m}^m c_j e^{ij\theta}, \quad c_j \in \mathbb{C}, \quad -m \leq j \leq m,$$

es decir,  $T_m(\theta) = L(x)$  donde  $L \in \Lambda_{-m,m}$ , ( $x = e^{i\theta}$ ).

Por tanto, podemos reescribir (1.28) como

$$\int_{-\pi}^{\pi} L(e^{i\theta}) d\theta = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^n L(x_{j,n}), \quad \forall L \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$$

donde  $x_{j,n} = e^{i(\alpha + (j-1)\frac{2\pi}{n})}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Observar que, como  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces  $x_j = \tau^{1/n}$  con  $|\tau| = 1$ .

En resumen, dada la integral sobre la circunferencia unidad

$$I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})d\theta, \quad (\omega(\theta) = 1) \quad (1.29)$$

podemos construir una fórmula de cuadratura con nodos distintos y sobre  $\mathbb{T}$ , con coeficientes positivos y exacta en  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$ .

En [28] se demuestra que si una fórmula de cuadratura tiene todos sus nodos distintos y sobre  $\mathbb{T}$  y además los coeficientes son reales, entonces dicha fórmula es exacta en  $\Lambda_{-r,r}$  donde  $r \leq n - 1$ . Es decir, que el subespacio de polinomios de Laurent más amplio que se puede esperar es precisamente  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$ . Por esta razón, al subespacio  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$  se le denomina *dominio máximo de validez*.

Una cuestión interesante sería, si en vez de integrales como (1.29), tuviésemos integrales de la forma

$$I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta,$$

con  $\omega(\theta)$  una función peso arbitraria en  $[-\pi, \pi]$ , ¿ podríamos construir en este caso una fórmula de cuadratura con nodos distintos en  $\mathbb{T}$ , con coeficientes positivos y exacta en  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$  ?

Con el fin de dar una respuesta, consideremos el polinomio nodal  $W_n(z)$  que en este caso vendrá dado por

$$W_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - x_j), \quad x_j \in \mathbb{T}, \quad x_i \neq x_j, \quad \forall i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

y veamos qué propiedades debe tener.

En primer lugar, si suponemos que la fórmula de cuadratura es exacta en  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$  entonces, como  $\frac{W_n(z)}{z^j} \in \Lambda_{-j,n-j}$  se tiene que

$$(W_n(z), z^j)_\omega = I_\omega \left( \frac{W_n(z)}{z^j} \right) = I_n \left( \frac{W_n(z)}{z^j} \right) = 0, \quad \text{si } 1 \leq j \leq n - 1.$$

Por otro lado, y haciendo uso de la propiedad de que los polinomios de Szegő respecto a  $\omega$  y sus recíprocos tienen sus ceros en  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{E}$  respectivamente, se puede demostrar fácilmente que  $(W_n(z), 1)_\omega \neq 0$  y  $(W_n(z), z^n)_\omega \neq 0$ .

En resumen, hemos demostrado que el polinomio nodal satisface las siguientes condiciones de ortogonalidad respecto a  $\omega$  :

$$(W_n(z), 1)_\omega \neq 0, \quad (W_n(z), z^j)_\omega = 0, \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad (W_n(z), z^n)_\omega \neq 0.$$

En segundo lugar, es fácil ver también, teniendo en cuenta que los nodos están sobre la circunferencia unidad, que el polinomio nodal  $W_n(z)$  verifica la siguiente propiedad:

$$W_n^*(z) = k_n W_n(z)$$

donde  $W_n^*(z) = z^n \overline{W_n(1/\bar{z})}$  y  $k_n = \frac{(-1)^n}{x_j^n}$ .

En base a estas dos propiedades del polinomio nodal  $W_n(z)$ , W. B. Jones et al. introdujeron en [30] las siguientes definiciones:

**Definición 1.4.3.** *Una sucesión  $\{X_n\}$  de polinomios se dice que es una sucesión de polinomios para-ortogonales con respecto a  $\omega$  si para cada  $n \geq 1$ ,  $X_n$  es de grado  $n$  y satisface*

$$(X_n, 1)_\omega \neq 0, \quad (X_n, z^k)_\omega = 0 \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (X_n, z^n)_\omega \neq 0.$$

**Definición 1.4.4.** *Para  $k \in \mathbb{C}$ ,  $k \neq 0$ , un polinomio  $X(z)$  se denomina  $k$ -invariante si*

$$X^*(z) = kX(z) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

*Una sucesión de polinomios  $\{X_n\}$  se dice  $k_n$ -invariante si  $X_n$  es  $k_n$ -invariante para cada  $n$ .*

En [30] se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 1.4.5.** *Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de polinomios para-ortogonales y  $k_n$ -invariantes con respecto a  $\omega$ . Entonces, para cada  $n \geq 1$ , los ceros de  $X_n(z)$  son simples y están sobre la circunferencia unidad  $\mathbb{T}$ . Además  $X_n(z)$  es de la forma*

$$X_n(z) = c_n (\Phi_n(z) + \tau_n \Phi_n^*(z)), \quad c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad |\tau_n| = 1$$

donde  $\Phi_n(z)$  es el  $n$ -ésimo polinomio de Szegő respecto a  $\omega$ .

Para cuestiones relativas a propiedades de los ceros de polinomios para-ortogonales, tales como alternancia, separación o estimaciones de la distancia entre dos ceros consecutivos, véase el reciente trabajo [27].

Supongamos entonces que  $\{\xi_{j,n}\}_{j=1}^n$  son los ceros del polinomio para-ortogonal  $B_n(z, \tau_n) = \Phi_n(z) + \tau_n \Phi_n^*(z)$ , ( $|\tau_n| = 1$ ) con respecto a la función peso  $\omega$  que sabemos, por el teorema anterior, que son distintos y están sobre  $\mathbb{T}$ . Entonces, (ver también [30]), se obtiene el siguiente

**Teorema 1.4.6.** *En las condiciones anteriores, existen números positivos  $\lambda_{j,n}$ ,  $j = 1, \dots, n$  tales que la fórmula de cuadratura  $\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(\xi_{j,n})$  integra exactamente  $L$ - polinomios  $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ , es decir  $I_\omega(f) = \tilde{I}_n(f)$ ,  $\forall f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ . Además, no existen fórmulas de cuadratura con nodos sobre  $\mathbb{T}$  que sean exactas en  $\Lambda_{-(n-1),n}$  ó en  $\Lambda_{-n,n-1}$ .*

Por otro lado, en [10] se tiene el siguiente teorema de caracterización:

**Teorema 1.4.7.** *Una fórmula de cuadratura  $\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\xi_j)$  con nodos distintos sobre  $\mathbb{T}$  es exacta en  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$  sí y sólo si*

(i)  $\tilde{I}_n(f)$  es exacta en  $\Lambda_{-p,q}$  siendo  $p$  y  $q$  enteros no negativos arbitrarios tales que  $p + q = n - 1$ .

(ii) Existen complejos no nulos  $\tau$  y  $C$  con  $|\tau| = 1$  y relacionados mediante  $C \left(1 + \tau \overline{\Phi_n(0)}\right) = 1$ , tales que

$$W_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - \xi_j) = C (\Phi_n(z) + \tau \Phi_n^*(z))$$

siendo  $\Phi_n(z)$  el  $n$ -ésimo polinomio mónico de Szegő.

Las fórmulas de cuadratura  $\{\tilde{I}_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$  dadas en estos Teoremas, se denominan fórmulas de cuadratura de Szegő. En [29] el autor introduce estas fórmulas bajo un enfoque distinto donde, los nodos aparecen como autovalores de ciertas matrices llamadas *matrices de Hessenberg*.

Por otro lado, la conexión entre las fórmulas de Szegő y los interpolantes que hemos llamado *quasi-Hermite* queda patente en el siguiente ([10])

**Teorema 1.4.8.** *Sea*

$$\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(\xi_{j,n})$$

la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő, entonces, para cualquier función  $f(z)$  analítica en una región  $\mathbb{T} \subset \mathbb{B}$ , se tiene que:

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta - \tilde{I}_n(f) = \int_0^{2\pi} (f(e^{i\theta}) - H_{2n-2}(e^{i\theta})) \omega(\theta) d\theta.$$

con  $H_{2n-2}$  dado por (1.25).

Con todo, se conocen pocos ejemplos de fórmulas de Szegő como es el caso de la medida de Lebesgue que ya hemos analizado. También se conocen para la medida de Poisson [?], para modificaciones racionales de la medida de Lebesgue ([28]) y para una cierta medida que tiene que ver con funciones  $q$ -starlike [41]. Al respecto, en el Capítulo 4 de esta Memoria estudiaremos el caso de las llamadas *funciones peso de Chebyshev* que vienen a ser casos particulares de las funciones peso de tipo Jacobi que ya hemos definido en la Sección anterior.



Por otro lado, conviene tener en cuenta que las fórmulas de Szegő se pueden ver como un caso particular de las de tipo interpolatorio en el sentido de que, si  $\sigma(\theta) = \omega(\theta)$  es una función peso y tomamos los nodos que sean los ceros del  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal con respecto a  $\omega(\theta)$ , obtendremos automáticamente dichas fórmulas. Por tanto, haciendo uso de la fórmula (1.24) y tomando  $p = 0$  en el Teorema 1.4.7 obtenemos la siguiente expresión para los coeficientes en la fórmula de Szegő:

$$\lambda_{j,n} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_n(e^{i\theta}, \tau)}{(e^{i\theta} - \xi_{j,n})B'_n(\xi_{j,n}, \tau)} \omega(\theta) d\theta, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (|\tau| = 1).$$

donde  $B_n(z, \tau)$  es el  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal con respecto a  $\omega$  y  $\xi_{j,n}$ ,  $1 \leq j \leq n$  son sus ceros.

De la misma forma que construimos los polinomios para-ortogonales  $B_n(z, \tau)$  y con el fin de dar otra expresión para estos coeficientes, podemos construir los llamados polinomios asociados a  $B_n$  que denotaremos por  $A_n(z, \tau)$  y que vienen expresados por

$$A_n(z, \tau) = \Omega_n(z) - \tau \Omega_n^*(z),$$

siendo  $\Omega_n(z)$  el  $n$ -ésimo polinomio asociado de Szegő que definimos en la Sección anterior. De este modo, se obtiene la siguiente expresión para los coeficientes de la fórmula de cuadratura de Szegő: ([28])

$$\lambda_{j,n} = \frac{-1}{2\xi_j} \frac{A_n(\xi_{j,n}, \tau)}{B'_n(\xi_{j,n}, \tau)}, \quad 1 \leq j \leq n \quad (1.30)$$

donde  $\xi_{j,n}$ ,  $1 \leq j \leq n$  son los ceros de  $B_n(z, \tau)$ .

En [28] también se puede ver una expresión distinta para estos coeficientes en términos de los polinomios ortonormales de Szegő  $\{\varphi_n(z)\}$  que viene dada por (véase también [29])

$$\lambda_{j,n} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_n(\xi_{j,n})|^2}$$

siendo  $\xi_{j,n}$ ,  $1 \leq j \leq n$  los ceros de  $\chi_n(z, \tau) = \varphi_n(z) + \tau \varphi_n^*(z)$ , ( $|\tau| = 1$ ).

En relación a la convergencia, (ver [10]), las fórmulas de Szegő convergen para toda función  $f$  integrable en  $\mathbb{T}$ . En general, cuando la función  $\sigma(\theta)$  es compleja, en [11] se prueba un resultado para un caso más general relativo a fórmulas de cuadratura basadas en funciones racionales con nodos prefijados fuera de la circunferencia unidad y en el que aparecen, como caso particular, los polinomios de Laurent. Enunciaremos aquí el teorema para el caso de los polinomios de Laurent:

**Teorema 1.4.9.** *Sea  $\sigma(\theta)$  una función compleja en  $[-\pi, \pi]$  y absolutamente integrable. Sea  $\omega(\theta)$  una función peso en  $[-\pi, \pi]$  tal que  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sigma(\theta)|^2}{\omega(\theta)} d\theta < +\infty$ . Sean  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$  los ceros del  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal con respecto a  $\omega(\theta)$ . Sea  $I_n(f)$  una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-p_n, q_n}$  siendo  $\{p_n\}$  y  $\{q_n\}$  dos sucesiones de enteros no negativos que satisfacen  $p_n + q_n = n - 1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I_\sigma(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \sigma(\theta) d\theta$$

para toda función  $f$  acotada en  $\mathbb{T}$  y para la que la integral  $I_\sigma(f)$  exista como integral de Riemann y además se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |A_{j,n}| f(x_{j,n}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) |\sigma(\theta)| d\theta.$$

Sin embargo, y como cabría esperar, numéricamente se ha comprobado que la presencia de singularidades del integrando  $f$  cerca de  $\mathbb{T}$  afecta adversamente a la estimación de las integrales, tanto cuando se toman las fórmulas de tipo interpolatorio como las de Szegő. Al respecto, en [42] se estudia un método para sustraer dichas singularidades.

????????????referencia????????????

## 1.5 Aproximantes a la Transformada de Herglotz- Riesz

Recuérdese que en el caso real, y para integrandos analíticos, hicimos uso de la transformada de Cauchy donde las fórmulas Gaussianas estaban íntimamente ligadas a los aproximantes de Padé en el infinito a dicha transformada. En la circunferencia unidad haremos uso de la transformada de Herglotz- Riesz para la que hemos considerado tres tipos de aproximantes: los aproximantes de Padé bipuntuales (AP2), los aproximantes modificados (APM) y los aproximantes tipo Padé bipuntuales (ATP2).

Empezaremos por definir los AP2. En general, supongamos que  $L_0$  y  $L_\infty$  son dos series formales dadas por

$$\begin{aligned} L_0(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j & |z| \rightarrow 0 \\ L_\infty(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} c_{-j}^* z^{-j} & |z| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

donde  $c_j, c_{-j}^* \in \mathbb{C}$ ,  $j \geq 0$ . Sean  $k$  y  $n$  dos enteros tales que  $0 \leq k \leq 2n + 1$ . Estamos interesados en construir dos polinomios  $P_{k,n}(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$  y  $Q_{k,n}(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j$  de grado a lo sumo  $n$  tal que

$$\begin{aligned} L_0(z)Q_{k,n}(z) - P_{k,n}(z) &= O(z^k) \\ L_\infty(z)Q_{k,n}(z) - P_{k,n}(z) &= O\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{n-k+1}\right). \end{aligned} \tag{1.31}$$

La función racional  $\frac{P_{k,n}(z)}{Q_{k,n}(z)}$  que satisface (1.31) se llama aproximante de Padé en dos puntos (AP2) para el par  $(L_0, L_\infty)$  de orden  $(k, 2n + 1 - k)$  en sentido débil. Tal función racional existe y es única, ver [19, p. 448] y se le suele denotar por  $[k/n]_{L_0, L_\infty}(z)$ .

Si  $Q_{k,n}(z)$  tiene grado exacto  $n$  y  $Q_{k,n}(0) \neq 0$  entonces, de (1.31) se deduce que

$$\begin{aligned} L_0(z) - \frac{P_{k,n}(z)}{Q_{k,n}(z)} &= O(z^k) \\ L_\infty(z) - \frac{P_{k,n}(z)}{Q_{k,n}(z)} &= O\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{2n-k+1}\right). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Ahora, a la función racional  $\frac{P_{k,n}(z)}{Q_{k,n}(z)}$  se le denomina aproximante de Padé en dos puntos para el par  $(L_0, L_\infty)$  de orden  $(k, 2n + 1 - k)$  en sentido fuerte.

Es bien conocido (ver [24, Teorema 13.1, p. 20]) que  $F_\omega(z)$  admite los siguientes desarrollos en el origen y en el infinito:

$$\begin{aligned} L_0(z) &= \mu_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k; & |z| < 1, \\ L_\infty(z) &= -\mu_0 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k} z^{-k}; & |z| > 1. \end{aligned}$$

En relación a los AP2, sean  $k$  y  $n$  dos enteros tales que  $0 \leq k \leq 2n + 1$ , y veamos como determinar los polinomios  $P_{k,n}(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$  y  $Q_{k,n}(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j$  de grado a lo sumo  $n$  que verifiquen las ecuaciones dadas por (1.31). De dichas ecuaciones se puede deducir fácilmente que

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n \mu_{-(j+i)} b_m &= 0 \quad \text{si } n - k \leq j \leq 0 \\ \sum_{m=0}^n \mu_{j-i} b_m &= 0 \quad \text{si } 1 \leq j \leq k - 1. \end{aligned}$$

Entonces, haciendo uso de (1.16), se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n b_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{(j+m)i\theta} \omega(\theta) d\theta &= 0 \quad \text{si } n - k \leq j \leq 0 \\ \sum_{m=0}^n b_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{(m-j)i\theta} \omega(\theta) d\theta &= 0 \quad \text{si } 1 \leq j \leq k - 1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-k)\theta} e^{ij\theta} Q_{k,n}(e^{i\theta}) e^{i(n-k)\theta} \omega(\theta) d\theta &= 0 \quad \text{si } n - k \leq j \leq 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-k)\theta} e^{-ij\theta} Q_{k,n}(e^{i\theta}) e^{i(n-k)\theta} \omega(\theta) d\theta &= 0 \quad \text{si } 1 \leq j \leq k - 1. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-k-j)\theta} Q_{k,n}(e^{i\theta}) e^{i(n-k)\theta} \omega(\theta) d\theta &= 0 \quad \text{si } n - k \leq j \leq 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-k+j)\theta} Q_{k,n}(e^{i\theta}) e^{i(n-k)\theta} \omega(\theta) d\theta &= 0 \quad \text{si } 1 \leq j \leq k - 1. \end{aligned}$$

Sea  $p = n - k - j$ , como  $n - k \leq j \leq 0$ , entonces  $0 \leq p \leq n - k$ . Por otro lado, si  $q = j + n - k$ , como  $1 \leq j \leq k - 1$  se tiene que  $n - k + 1 \leq q \leq n - 1$ . Por tanto, el polinomio  $Q_{k,n}(z)$  satisface:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-il\theta} Q_{k,n}(e^{i\theta}) e^{i(n-k)\theta} \omega(\theta) d\theta = 0, \quad 0 \leq l \leq n - 1. \quad (1.33)$$

En base a estas ideas, vemos que los polinomios de Szegő surgen de forma natural como los denominadores de ciertos AP2. En efecto, por (1.33), se tiene que el polinomio  $Q_{k,n}(z)$  es ortogonal con respecto a la medida compleja variante  $d\sigma_{n,k}(\theta) = e^{i(n-k)\theta}\omega(\theta)d\theta$ . Así pues, si tomamos  $k = n$ , entonces, el denominador  $Q_{n,n}(z)$  verifica  $(Q_{n,n}(z), z^j)_\omega = 0$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ , o lo que es lo mismo, el polinomio  $Q_{n,n}(z)$  coincide, salvo por una constante multiplicativa, con el  $n$ -ésimo polinomio mónico de Szegő  $\Phi_n(z)$ . Por otro lado, si ahora elegimos  $k = n + 1$ , entonces, de la misma manera obtenemos que  $Q_{n+1,n}(z)$  coincide, salvo por una constante multiplicativa ahora con  $\Phi_n^*(z)$ .

Al respecto se sabe que si  $\Omega_n(z)$  es el  $n$ -ésimo polinomio asociado, (ver [30]),  $\frac{\Omega_n}{\Phi_n}$  es el AP2 en sentido fuerte al par  $(L_0, L_\infty)$  de orden  $(n, n + 1)$  sí y sólo si  $\Phi_n(0) \neq 0$  y que la función racional  $\frac{-\Omega_n^*}{\Phi_n^*}$  representa el AP2 en sentido fuerte a  $(L_0, L_\infty)$  de orden  $(n + 1, n)$ , de nuevo, sí y sólo si  $\Phi_n(0) \neq 0$ .

En [30], Jones et al., haciendo uso de ciertas fracciones continuas de tipo Perron-Carathéodory, demostraron la convergencia uniforme de las sucesiones  $\left\{\frac{\Omega_n}{\Phi_n}\right\}$  y  $\left\{\frac{-\Omega_n^*}{\Phi_n^*}\right\}$  a la función  $F_\omega(z)$  en compactos de  $\mathbb{E}$  y  $\mathbb{D}$  respectivamente. Además, en [14], se probó la convergencia geométrica haciendo uso, como en el caso real, de la siguiente expresión del error:

$$F_\mu(z) - \frac{\Omega_n(z)}{\Phi_n(z)} = \frac{2z^n}{\Phi_n^2(z)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi_n^2(x)}{x^{n-1}(x-z)} d\mu(\theta); \quad (x = e^{i\theta}). \quad (1.34)$$

y del comportamiento asintótico de la raíz  $n$ -ésima para los polinomios ortonormales respecto a una medida  $\mu$  regular. Recordemos que si  $\mu$  es una medida de Borel finita en  $\mathbb{C}$  con soporte compacto  $S(\mu)$ ,  $\Omega$  la componente no acotada de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu)$  y  $\partial\Omega$  su frontera, donde  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , entonces, se tiene la siguiente:

**Definición 1.5.1.** *Una medida  $\mu$  se dice que es regular si*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(z)|^{1/n} = 1$$

en  $\partial\Omega$ , salvo en un conjunto de capacidad logarítmica cero, donde  $\varphi_n(z)$  es el polinomio ortonormal con respecto a  $\mu$ .

Para otras definiciones equivalentes ver [48, p. 60, Teorema 3.1.1]. Además, vale la siguiente

**Proposición 1.5.2.** ([48, p. 59]) *Sea  $\{\varphi_n(z)\}$  una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a una medida regular  $\mu$  soportada sobre  $\mathbb{T}$ . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(z)|^{1/n} = |z|$$

uniformemente en  $\bar{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \cup \mathbb{T}$ .

Por otra parte, dado que la función  $F_\omega(z)$  es analítica en  $\bar{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}$ , parece natural intentar encontrar una función racional que aproxime a  $F_\omega(z)$  en  $\bar{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}$ . Por tanto, los polos de tales aproximantes, si existen, deben estar en  $\mathbb{T}$ . Con el propósito de construir estos aproximantes con polos sobre la circunferencia unidad, tomaremos los aproximantes modificados  $R_n(z, \tau_n)$ ,  $|\tau_n| = 1$  (APM) que vienen dados por

$$R_n(z, \tau) = \frac{A_n(z, \tau)}{B_n(z, \tau)} \quad (1.35)$$

donde  $B_n(z, \tau)$  es el  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal con respecto a la función peso  $\omega$  y  $A_n(z, \tau)$  es su polinomio asociado.

Los APM satisfacen las siguientes relaciones: (ver [30])

$$\begin{aligned} F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n) &= O(z^n), \quad (|z| \rightarrow 0) \\ F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n) &= O(z^{-n}), \quad (|z| \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Obsérvese que tales aproximantes no pueden ser de Padé bipuntuales, pues falta una condición de interpolación en el origen o en el infinito. Además, por el Teorema 1.4.6, la restricción de tener los polos sobre  $\mathbb{T}$  hace tal condición inalcanzable.

En cuanto a la convergencia, se tiene, ([30]), que la sucesión  $\{R_n(z, \tau_n)\}$  converge uniformemente a  $F_\omega(z)$  en subconjuntos compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}$ . En este caso también se obtiene convergencia geométrica (ver [28]) haciendo uso de la expresión del error

$$F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n) = \frac{2z^n}{Q_n(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(n-1)\theta} Q_n(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} \omega(\theta) d\theta.$$

y del siguiente resultado que tiene que ver con el comportamiento asintótico de la raíz  $n$ -ésima para los polinomios, ahora para-ortonormales: (ver [28])

**Teorema 1.5.3.** *Si  $\{\varphi_n\}$  es la sucesión de polinomios ortonormales de Szegő y*

$$\chi_n(z) = \chi_n(z, \tau_n) = \varphi_n(z) + \tau_n \varphi_n^*(z), \quad (|\tau_n| = 1)$$

*entonces se cumple que*

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\chi_n(z)|^{1/n} = |z|$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{E}$ .
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\chi_n(z)|^{1/n} = 1$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{D}$ .
- (3) Sea  $M_n = \max_{z \in \mathbb{T}} |\chi_n(z)|$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = 1$ .

Así pues, hemos encontrado una función racional  $R_n(z, \tau_n)$  que aproxima a  $F_\omega(z)$  en subconjuntos compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}$ , (aproximantes modificados). Ahora bien, para computar estos aproximantes necesitaremos primero calcular los polinomios de Szegő  $\Phi_n(z)$ . Como ya se ha visto, resulta difícil obtener expresiones explícitas para tales polinomios y, en general, hay que hacer uso del algoritmo de Levinson. Por tanto, para la construcción de los aproximantes modificados se necesita un coste computacional considerable. Por otro lado, como hemos visto, los AP2 definidos anteriormente también requieren el cálculo de los polinomios de Szegő. Además, tanto los AP2 como los modificados, tienen polos libres y esto también puede resultar una desventaja si se sabe dónde están las singularidades de la función a aproximar. Estas consideraciones nos llevaron a manejar los llamados aproximantes tipo Padé bipuntuales.

Tales aproximantes surgen cuando fijamos el denominador  $Q_n(z)$  que aparece en la definición de los AP2. En este caso, dado un polinomio  $Q_n(z)$  de grado  $n$  con  $Q_n(0) \neq 0$ , se tiene que existe un único polinomio  $P_n(z)$  de grado a lo sumo  $n$  tal que

$$\begin{aligned} L_0(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} &= O(z^{p+1}), & (|z| \rightarrow 0) \\ L_\infty(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} &= O\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{q+1}\right) & (|z| \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

A la función racional  $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$  se le denomina aproximante tipo Padé en dos puntos (ATP2) de orden  $(p+1, q+1)$  para el par  $(L_0, L_\infty)$ , donde  $p+q = n-1$ ;  $0 \leq p \leq n-1$ . A los ATP2 se les suele denotar también por  $(p/n)_{L_0, L_\infty}(z)$ .

En términos de convergencia, y con carácter general, si  $\{p_n\}$  y  $\{q_n\}$  son dos sucesiones de enteros no negativos con  $p_n + q_n = n-1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n} = s$ ,  $0 < s < 1$  y si  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , son los ceros del polinomio para-ortogonal de grado  $n$  con respecto a una función peso dada  $\omega$  en  $[-\pi, \pi]$ , entonces se puede probar, ([28]), que la sucesión de ATP2 de orden  $(p_n + 1, q_n + 1)$  con denominador  $Q_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - x_{j,n})$  converge uniforme y geoméricamente a  $F_\omega(z)$  en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ . A tal efecto se considera la siguiente expresión del error:

$$F_\omega(z) - (p/n)_{F_\omega}(z) = \frac{2z^{p+1}}{Q_n(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ip\theta} Q_n(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} \omega(\theta) d\theta. \quad (1.37)$$

y el Teorema 1.5.3, (ver [28]).

Una elección frecuente del polinomio  $Q_n(z)$  es  $Q_n(z) = z^n - \tau_n$ , donde  $|\tau_n| = 1$  y cuyos ceros serán, por tanto, rotaciones de las raíces de la unidad que son fácilmente computables. En este sentido conviene hacer notar que este polinomio es el  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal mónico con respecto a la medida de Lebesgue.

En conexión, tanto con las fórmulas de tipo interpolatorio como con las de Szegő, el papel que juegan tanto los ATP2 como los APM es el siguiente: Consideremos la función  $h_z(w) = \frac{w+z}{w-z}$  en la variable  $w$  siendo  $z$  un parámetro, es fácil ver, ([28]), que los ATP2 se



pueden expresar en la forma:

$$(p/n)_{F_\omega}(z) = I_n(h_z(w)) = \sum_{j=1}^n A_j \frac{x_j + z}{x_j - z}$$

donde  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$  representa la  $n$ -ésima fórmula de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-p,q}$ , ( $p+q = n-1$ ) con nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  distintos y sobre  $\mathbb{T}$ .

Supongamos que  $E_n(f)$  representa el error en la fórmula de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-p,q}$  con  $p+q = n-1$ , donde el denominador  $Q_n(z)$  del ATP2 coincide con el polinomio nodal, es decir,  $Q_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - x_j)$  con  $x_j \in \mathbb{T}$ ,  $x_i \neq x_j$ ,  $1 \leq i \neq j \leq n$ . Entonces se tiene el siguiente

**Lema 1.5.4.** (Ver [28]) *Sea  $f$  una función analítica en un entorno  $G$  de  $\mathbb{T}$ . Supongamos que  $f(0) = 0$  (de otra manera, trabajaríamos con la función  $f(z) - f(0)$ ). Entonces, para cada  $n = 1, 2, \dots$  se tiene que*

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (F_\omega(z) - (p/n)_{F_\omega}(z)) g(z) dz$$

donde  $\Gamma$  es la frontera de  $G$ , y  $g(z) = -\frac{f(z)}{2z}$  que es también analítica en  $G$ .

Por tanto, es fácil ver que

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{4\pi} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \int_{\Gamma} |F_\omega(z) - (p/n)_{F_\omega}(z)| |dz|.$$

En [44] se calculan cotas de error en las fórmulas de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-p_n, q_n}$  para integrandos analíticos salvo en un número finito de polos fuera de  $\mathbb{T}$ . Además, para los casos particulares en los que el integrando tiene todos sus polos fuera del disco unidad cerrado o es una función racional, se determinan los valores de los parámetros  $p_n$  y  $q_n$  con el fin de minimizar dicha cota de error.

En el caso de los APM, si tomamos de nuevo la función  $h_z(w) = \frac{w+z}{w-z}$  en la variable  $w$  siendo  $z$  un parámetro, es fácil ver, ([30]), que estos aproximantes se pueden expresar en

la forma

$$R_n(z, \tau) = \tilde{I}_n(h_z(w)) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\xi_j + z}{\xi_j - z}$$

donde  $\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\xi_j)$  representa la  $n$ -ésima fórmula de Szegő.

Si ahora  $\tilde{E}_n(f)$  denota el error en la fórmula de cuadratura de Szegő, se tiene que (ver [28])

$$\tilde{E}_n(f) = I_\omega(f) - \tilde{I}_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n)) g(z) dz \quad (1.38)$$

donde  $f$  es una función analítica en un dominio  $G$  que contiene a la circunferencia unidad, siendo  $\Gamma$  su frontera y  $g(z) = -\frac{f(z)}{2z}$ . Entonces, se tiene la siguiente cota superior:

$$\left| \tilde{E}_n(f) \right| \leq \frac{1}{4\pi} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \int_{\Gamma} |F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n)| dz. \quad (1.39)$$

Para cotas superiores del término  $|F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n)|$ ,  $z \in \mathbb{D}$  véase [33].

Como hemos podido ver, tanto para el caso de las fórmulas de tipo interpolatorio como para las de Szegő, los errores en ambas fórmulas de cuadratura están dominados respectivamente por el error en los aproximantes *ATP2* y *APM* a la transformada de Herglotz- Riesz. El papel que juegan los *AP2* se pondrá de manifiesto en el Capítulo 6, en el que se estudian ciertas fórmulas sobre la circunferencia unidad que hemos denominado *Gaussianas*.

Por otro lado, como la función  $h_z(w) = \frac{w+z}{w-z}$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ , si el parámetro  $z$  está suficientemente lejos de  $\mathbb{T}$ , las fórmulas de tipo interpolatorio o las de Szegő darán buenos resultados para aproximar  $F_\omega(z)$ . Sin embargo, si  $z$  está muy cerca de  $\mathbb{T}$  esto va a afectar desfavorablemente a los resultados numéricos para ambas fórmulas. En [43] se propone un método para aproximar  $F_\omega(z)$  cuando  $z$  está lo suficientemente cerca de  $\mathbb{T}$  como para que las fórmulas de tipo interpolatorio y de Szegő no puedan dar buenos resultados. Además, también se estudia su aplicación a la aproximación de integrales de la forma  $\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta$  donde  $f$  es analítica en un dominio  $G$  que contiene a la circunferencia

unidad dando lugar a fórmulas de cuadratura que, al compararlas numéricamente con las de Szegő y las de tipo interpolatorio basadas en las raíces  $n$ -ésimas de la unidad, dan mejores resultados.

Con todo, hemos de señalar que el cálculo aproximado de integrales sobre la circunferencia unidad se ha revelado como un problema a su vez reciente y clásico, sumamente interesante. Varios son los factores que han contribuido a tal interés. Por un lado está el problema trigonométrico de los momentos y su conexión con el procesamiento de señales digitales y, por otro, que integrales del tipo  $\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta$  surgen de modo natural en la solución de ciertos problemas de contorno sobre la circunferencia unidad (integral de Poisson). En tal sentido, estimamos que las fórmulas de Szegő u otras fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio sobre la circunferencia unidad, ofrecen grandes posibilidades de estudio, no sólo por su propia e intrínseca naturaleza sino por su relación con otras parcelas de la Matemática Aplicada. El profundizar sobre algunos aspectos de estas cuadraturas es el objetivo fundamental de la presente Memoria.



# Capítulo 2

## Interpolación con nodos sobre la circunferencia unidad

### 2.1 Introducción

Como se dijo en el Capítulo 1, una de las razones en la que estriba el interés de la interpolación de funciones viene dado por el hecho de que ciertas fórmulas de cuadratura que permiten estimar el valor exacto de la integral, se suelen construir a partir de polinomios interpoladores, de modo que la convergencia en norma  $L_p$ ,  $p \geq 1$  de sucesiones de polinomios de interpolación de Lagrange nos asegura la convergencia de los procesos de cuadratura de tipo interpolatorio. Pero se sabe, (ver [50]), que dada una matriz  $X$ , la interpolación de Lagrange no converge en norma uniforme para toda función continua. Por esta razón se ha considerado el problema de estudiar, por ejemplo, su convergencia en norma  $L_2$ , o bien pensar en otros interpolantes como son los polinomios de interpolación de Hermite-Fejér.

En este capítulo nos ocuparemos de funciones definidas no sobre un intervalo de la recta real, sino sobre la circunferencia unidad  $\mathbb{T}$  y en vez de tratar con polinomios algebraicos,

dado que cualquier función continua sobre  $\mathbb{T}$  se puede aproximar uniformemente por polinomios de Laurent ó L-polinomios, consideraremos interpolantes de Laurent.

En la Sección 2 nos ocuparemos de la interpolación de funciones continuas sobre  $\mathbb{T}$ . En primer lugar estudiaremos la convergencia en norma  $L_2$  de sucesiones de interpolantes de Laurent para una cierta familia de nodos y veremos que, bajo ciertas condiciones sobre la función  $f$  y los nodos, se puede obtener un resultado de convergencia en norma uniforme. En segundo lugar, veremos que para una elección muy particular de nodos e interpolantes se obtiene una extensión, a la circunferencia unidad, del Teorema clásico de Hermite-Fejér.

En la Sección 3 nos centraremos en la interpolación de funciones analíticas en ciertas regiones del plano complejo. Para funciones analíticas en el disco unidad  $\mathbb{D}$  y continuas en  $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ , tomaremos como interpolantes sucesiones de polinomios algebraicos, ya que bajo estas hipótesis la función se puede aproximar uniformemente en compactos de  $\mathbb{D}$  por tales polinomios. En este caso se obtendrá convergencia uniforme en compactos de  $\mathbb{D}$ . Consideraremos también funciones analíticas en un anillo que contenga a la circunferencia unidad. En este caso, elegiremos como interpolantes los polinomios de Laurent y también los polinomios de Laurent de tipo quasi-Hermite, al que denotaremos por  $H_n(z)$ . La razón por la cual se han considerado estos interpolantes es el Teorema 1.4.8.

Tanto para los interpolantes de Laurent como para los de tipo quasi-Hermite, se calcularán cotas de error y se darán resultados de convergencia en norma uniforme sobre  $\mathbb{T}$  utilizando como nodos los ceros de polinomios para-ortogonales. Además, en el caso de los polinomios interpoladores de Laurent, veremos también que este dominio de convergencia se puede ampliar a un anillo que contiene a  $\mathbb{T}$ , bajo ciertas condiciones de simetría sobre dicho anillo y sobre los interpolantes.

En la Sección 4 continuaremos con funciones analíticas en una región que tenga a

$\mathbb{T}$  en su interior, dándose cotas del error de interpolación, tanto para los interpoladores de Laurent como para los de tipo quasi-Hermite. Los primeros nos permitirán deducir cotas de error y establecer la convergencia geométrica en las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio. Por otro lado, los polinomios de interpolación de Laurent de tipo quasi-Hermite nos permitirán dar cotas de error y obtener convergencia geométrica, en este caso, para las fórmulas de cuadratura de Szegő.

## 2.2 Interpolación de funciones continuas

A lo largo de esta sección vamos a considerar funciones  $f$  continuas sobre  $\mathbb{T}$  construyéndose sucesiones de interpolantes de Laurent convergentes a  $f$  en norma  $L_2$ . A tal efecto, recordemos que para el caso real vale el siguiente resultado clásico de convergencia: ([15])

**Teorema 2.2.1.** (*Erdős-Turán*) *Sea  $f$  una función de periodo  $2\pi$  y  $t_n(\theta)$  el único polinomio trigonométrico de orden  $n$  que interpola a  $f$  en  $(2n+1)$  nodos equiespaciados sobre un intervalo de longitud  $2\pi$ . Entonces  $t_n(\theta)$  converge a  $f$  en norma  $L_2$  en dicho intervalo con respecto a la medida de Lebesgue, es decir*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - t_n(\theta)|^2 d\theta = 0. \quad (2.1)$$

Un primer resultado, en el caso de interpoladores de Laurent, se puede deducir directamente del Teorema anterior de la siguiente forma: Sea  $f$  una función continua en  $\mathbb{T}$ . Entonces podemos escribir

$$f(x) = f(e^{i\theta}) = f_1(\theta) + if_2(\theta) \quad (2.2)$$

donde  $f_j$  una función de periodo  $2\pi$ , ( $j = 1, 2$ ). Tomemos  $\theta_{j,n} = \frac{2\pi j}{2n+1}$ ,  $j = 1, \dots, 2n+1$  y  $x_{j,n} = e^{i\theta_{j,n}}$ ,  $j = 1, \dots, 2n+1$ . Consideremos  $t_{j,n}(\theta)$ ,  $j = 1, 2$  el correspondiente polinomio trigonométrico de grado  $n$  que interpola a  $f_j(\theta)$  en los nodos  $\theta_{k,n}$ ,  $k = 1, \dots, 2n+1$ ,  $j = 1, 2$ .

Sea  $T_n(x) = T_n(e^{i\theta}) = t_{n,1}(\theta) + it_{n,2}(\theta)$ , entonces  $T_n \in \Lambda_{-n,n}$  y claramente se verifica que  $T_n(x_{j,n}) = f(x_{j,n})$ ,  $j = 1, \dots, 2n + 1$ . Por unicidad,  $T_n(x)$  coincide con el único polinomio de Laurent en  $\Lambda_{-n,n}$  que interpola a  $f(x)$  en los nodos  $x_{j,n}$ ,  $n = 1, \dots, 2n + 1$ . Además, se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x) - T_n(x)|^2 |dx| = \int_{-\pi}^{\pi} |f_1(\theta) - t_{n,1}(\theta)|^2 d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(\theta) - t_{n,2}(\theta)|^2 d\theta. \quad (2.3)$$

Aplicando ahora el Teorema de Erdős-Turán se tiene finalmente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} |f(x) - T_n(x)|^2 |dx| = 0. \quad (2.4)$$

Este resultado se puede generalizar para otras elecciones de nodos. En efecto, sean  $\{p(n)\}$  y  $\{q(n)\}$  dos sucesiones no decrecientes de números enteros no negativos tales que  $p(n) + q(n) = n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \infty \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty. \quad (2.5)$$

Sea también  $\omega(\theta)$  una función peso en  $[-\pi, \pi]$  tal que  $\int_{-\pi}^{\pi} \omega(\theta) d\theta = 1$  (condición de normalización) y consideremos el  $(n + 1)$ -ésimo polinomio para-ortogonal con respecto a  $\omega(\theta)$ ,  $B_{n+1}(z, \tau_{n+1})$ , donde  $\{\tau_n\}$  es una sucesión de números complejos de módulo uno. Sean  $\{x_{j,n} : j = 1, \dots, n + 1\}$  los ceros de  $B_{n+1}(z, \tau_{n+1})$ ,  $f$  una función continua sobre  $\mathbb{T}$  y  $R_n(f, z) \in \Lambda_{-p,q}$  el  $L$ -polinomio que interpola a  $f$  en los nodos  $\{x_{j,n} : j = 1, \dots, n + 1\}$  donde  $p$  y  $q$  son enteros no negativos tales que  $p + q = n$ . El  $L$ -polinomio  $R_n(f, z)$  se puede expresar en la forma  $R_n(f, z) = \sum_{j=1}^{n+1} L_{j,n}(f, z) f(x_{j,n})$  donde (ver fórmula (1.23))

$$L_{j,n}(f, z) = \frac{x_{j,n}^p B_{n+1}(z, \tau_{n+1})}{x^p B'_{n+1}(x_{j,n}, \tau_{n+1})(z - x_{j,n})} \quad j = 1, \dots, n + 1.$$

Es fácil ver que

$$\int_{\mathbb{T}} L_{j,n}(f, x) \overline{L_{k,n}(f, x)} \omega(\theta) d\theta = \delta_{j,k} \lambda_{j,n+1}, \quad (x = e^{i\theta}), \quad (2.6)$$



donde  $\lambda_{j,n+1}$ ;  $j = 1, \dots, n+1$  son los coeficientes de la fórmula de cuadratura de Szegő.

Sea  $T_n$  el  $L$ -polinomio en  $\Lambda_{-p,q}$  de mejor aproximación uniforme a  $f$  en  $\mathbb{T}$ . Denotemos por

$$r_n(z) = f(z) - T_n(z) \quad \text{y} \quad E_n(f) = \max_{z \in \mathbb{T}} |r_n(z)|. \quad (2.7)$$

Sea  $P_n$  el  $L$ -polinomio en  $\Lambda_{-p,q}$  que interpola a  $r_n$  en los nodos  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n+1}$ . Entonces

$$P_n(z) = R_n(f, z) - T_n(z)$$

y, por tanto, si  $x = e^{i\theta}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |f(x) - R_n(f, x)|^2 \omega(\theta) d\theta &= \int_{\mathbb{T}} |r_n(x) - P_n(x)|^2 \omega(\theta) d\theta \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{T}} |r_n(x)|^2 \omega(\theta) d\theta + 2 \int_{\mathbb{T}} |P_n(x)|^2 \omega(\theta) d\theta \\ &= I'_n + I''_n. \end{aligned}$$

Claramente se puede ver que  $I'_n \leq 2E_n^2(f)$ . Y para  $I''_n$  se tiene, utilizando la fórmula (2.6),

$$\begin{aligned} I''_n &= 2 \int_{\mathbb{T}} |P_n(x)|^2 \omega(\theta) d\theta = 2 \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{j=1}^{n+1} L_{j,n}(f, x) r_n(x_{j,n}) \right|^2 \omega(\theta) d\theta \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \left| r_n(x_{j,n}) \overline{r_n(x_{k,n})} \right| \left| \int_{\mathbb{T}} L_{j,n}(f, x) \overline{L_{k,n}(f, x)} \omega(\theta) d\theta \right| \\ &\leq 2E_n^2(f) \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \left| \int_{\mathbb{T}} L_{j,n}(f, x) \overline{L_{k,n}(f, x)} \omega(\theta) d\theta \right| \\ &= 2E_n^2(f) \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{j,n+1} = 2E_n^2(f) \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\theta) d\theta = 2E_n^2(f). \end{aligned}$$

Por tanto,  $I''_n \leq 2E_n^2(f)$ . Y finalmente

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x) - R_n(f, x)|^2 \omega(\theta) d\theta \leq 4E_n^2(f). \quad (2.8)$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0$ , concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} |f(x) - R_n(f, x)|^2 \omega(\theta) d\theta = 0. \quad (2.9)$$

En otras palabras, hemos demostrado el siguiente

**Teorema 2.2.2.** *Sea  $f$  una función continua sobre  $\mathbb{T}$  y sean  $\{x_{j,n} : j = 1, \dots, n+1\}$  los ceros del  $(n+1)$ -ésimo polinomio para-ortogonal  $B_{n+1}(z, \tau_{n+1})$  con respecto a la función*

peso  $\omega(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$ . Denotemos por  $R_n(f, z)$  el  $L$ -polinomio en  $\Lambda_{-p,q}$  que interpola a  $f$  en los nodos  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n+1}$  con  $p = p(n)$  y  $q = q(n)$  verificando (2.5) y  $p + q = n$ . Entonces,  $R_n(f, z)$  converge a  $f$  en norma  $L_{2,\omega}$ , es decir, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} |f(x) - R_n(f, x)|^2 \omega(\theta) d\theta = 0.$$

**Observación 2.2.3.** *El Teorema 2.2.2 fue probado con anterioridad por A. Bultheel et al. en [8] (ver también [9]) en un contexto más general donde se consideran como interpolantes ciertas funciones racionales con nodos prefijados fuera de  $\mathbb{T}$ . Obsérvese que los  $L$ -polinomios son funciones racionales con polos en el origen y en el infinito. Sin embargo, la demostración aquí dada es más constructiva en el sentido de que se dan cotas de error como en la fórmula (2.8) para la norma  $L_{2,\omega}$ .*

Bajo ciertas condiciones sobre la función  $f$  y eligiendo los nodos convenientemente, veremos ahora que se puede obtener convergencia uniforme de los polinomios interpoladores de Laurent.

Si consideramos la medida de Lebesgue, tal y como mencionamos en el Capítulo 1, el correspondiente  $n$ -ésimo polinomio de Szegő viene dado por  $\Phi_n(z) = z^n$  y, por tanto, el polinomio para-ortogonal será  $B_n(z, w) = z^n + w$ , ( $|w| = 1$ ). Vamos a tomar entonces como nodos los ceros del  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal respecto a la medida de Lebesgue, es decir, rotaciones de las raíces de la unidad.

Para esta elección de nodos, demostraremos, en primer lugar, el siguiente

**Lema 2.2.4.** *Sea  $L_{j,n}(z)$  como en fórmula (1.23) y sean  $x_{j,n}$ ,  $j = 1, \dots, n + 1$  las raíces  $(n + 1)$ -ésimas de  $w$  con  $|w| = 1$ . Entonces*

$$\sum_{j=1}^{n+1} |L_{j,n}(z)|^2 = 1, \quad \forall z \in \mathbb{T}$$

*Demostración:* El polinomio nodal viene dado por  $W_n(z) = z^{n+1} - \tau_n$ . Por la fórmula (1.23), sigue:

$$L_{j,n}(z) = \frac{x_{j,n}^p W_n(z)}{z^p W_n'(x_{j,n})(z - x_{j,n})} \in \Lambda_{-p,q}, \quad (p + q = n - 1) \quad j = 1, \dots, n + 1.$$

Por tanto, si  $z \in \mathbb{T}$ , se tiene que

$$|L_{j,n}(z)|^2 = \frac{|W_n(z)|^2}{(n+1)^2 |z - x_{j,n}|^2}.$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n+1} |L_{j,n}(z)|^2 = \frac{|W_n(z)|^2}{(n+1)^2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{|z - x_{j,n}|^2}. \quad (2.10)$$

Pero para todo  $z \in \mathbb{T}$ ,

$$|z - x_{j,n}|^2 = (z - x_{j,n})\overline{(z - x_{j,n})} = -\frac{(z - x_{j,n})^2}{zx_{j,n}}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{|z - x_{j,n}|^2} &= -z \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_{j,n}}{(z - x_{j,n})^2} = z \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(z - x_{j,n}) - z}{(z - x_{j,n})^2} \\ &= z \left( \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(z - x_{j,n})} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(z - x_{j,n})} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(z - x_{j,n})} = \frac{W_n'(z)}{W_n(z)} = \frac{(n+1)z^n}{z^{n+1} - \tau_n}$$

y

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(z - x_{j,n})^2} &= (n+1) \frac{nz^{n-1}(z^{n+1} - \tau_n) - (n+1)z^{2n}}{(z^{n+1} - \tau_n)^2} \\ &= -\frac{(n+1)z^{n-1}(z^{n+1} + n\tau_n)}{(z^{n+1} - \tau_n)^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, se obtiene que:

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{|z - x_{j,n}|^2} &= z \left( \frac{(n+1)z^n}{z^{n+1} - \tau_n} - z \frac{(n+1)z^{n-1}(z^{n+1} + n\tau_n)}{(z^{n+1} - \tau_n)^2} \right) \\ &= -\frac{\tau_n(n+1)^2 z^{n+1}}{(z^{n+1} - \tau_n)^2} = \frac{(n+1)^2}{|z^{n+1} - \tau_n|^2} = \frac{(n+1)^2}{|\tau_n(z)|^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Finalmente, por (2.10), y (2.11), para todo  $z \in \mathbb{T}$ , se tiene  $\sum_{j=1}^{n+1} |L_{j,n}(z)|^2 = 1$ . ■

Utilizando el Lema anterior, si definimos  $H_n(z) = \sum_{j=1}^{n+1} |L_{j,n}(z)|$  y  $\|H_n\|_{\mathbb{T}} = \max_{z \in \mathbb{T}} H_n(z)$ , entonces, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, resulta:

$$\|H_n\|_{\mathbb{T}} = \max_{z \in \mathbb{T}} \sum_{j=1}^{n+1} |L_{j,n}(z)| \leq \sqrt{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

**Observación 2.2.5.** Recordemos que si  $X$  representa una tabla triangular de nodos en un intervalo finito  $[a, b]$ , es decir,

$$X = \{x_{j,n} : 1 \leq j \leq n, n = 1, 2, \dots\} \subset [a, b].$$

Entonces se sabe que  $\lambda_{k+1}(X, x) = \sum_{j=1}^{k+1} |l_{j,k+1}(X, x)|$  es la llamada función de Lebesgue de orden  $k+1$  para  $X$ , donde  $l_{j,k+1}$  son los polinomios fundamentales de Lagrange para los nodos  $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{k+1}^{(k+1)}$  y  $\lambda_{k+1}(X) = \max_{x \in [a,b]} \lambda_{k+1}(X, x)$  es la constante de Lebesgue de orden  $k+1$  para  $X$ .

Conviene, por tanto, observar que la cantidad  $\|H_n\|_{\mathbb{T}}$  que acabamos de definir, juega el mismo papel que la constante de Lebesgue pero en este caso respecto al sistema de nodos sobre  $\mathbb{T}$  formado por las raíces  $n$ -ésima de un complejo unimodular. Por otro lado, se sabe que existe una estimación mejor que la que acabamos de obtener en la fórmula (2.12), (ver [5]).

Otro resultado que vamos a necesitar es el siguiente

**Teorema 2.2.6.** (Teorema de Jackson [15]) Para toda función  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ , se tiene que

$$\gamma_n(f) \leq \lambda\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)$$

donde  $\gamma_n(f) = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(\theta) - t_n(\theta)|$ , siendo  $t_n(\theta)$  el polinomio trigonométrico de grado  $n$  de mejor aproximación y donde  $\lambda$  denota el módulo de continuidad de  $f$ .

Como consecuencia inmediata de este Teorema se tiene la siguiente

**Proposición 2.2.7.** *Sea  $f$  una función continua sobre  $\mathbb{T}$  y  $p$  y  $q$  enteros no negativos tales que  $p + q = n$ . Entonces,*

$$E_n(f) \leq 2\lambda\left(f, \frac{\pi}{s+1}\right)$$

donde  $s = \min(p, q)$  y  $E_n(f)$  dado en la fórmula (2.7).

*Demostración:* Podemos escribir  $f$  de la forma  $f(x) = f(e^{i\theta}) = f_1(\theta) + if_2(\theta)$ ,  $f_j \in \mathcal{C}_{2\pi}$ ,  $j = 1, 2$  Por el Teorema 2.2.6,

$$\gamma_s(f_j) \leq \lambda\left(f_j, \frac{\pi}{s+1}\right), \quad j = 1, 2, \quad s = \min(p, q).$$

Aquí,  $\gamma_s(f_j) = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f_j(\theta) - t_j(\theta)| = \|f_j - t_j\|_{[-\pi, \pi]}$ ,  $j = 1, 2$ , siendo  $t_j$  el polinomio trigonométrico de mejor aproximación de grado a lo sumo  $s$  en norma uniforme a  $f_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Sea  $L(x) = L(e^{i\theta}) = t_1(\theta) + it_2(\theta) \in \Lambda_{-s, s} \subset \Lambda_{-p, q}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \|f - L\|_{\mathbb{T}} \leq \|f_1 - t_1\|_{[-\pi, \pi]} + \|f_2 - t_2\|_{[-\pi, \pi]} \\ &\leq \lambda\left(f_1, \frac{\pi}{s+1}\right) + \lambda\left(f_2, \frac{\pi}{s+1}\right) \leq 2\lambda\left(f, \frac{\pi}{s+1}\right). \end{aligned}$$

■

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente

**Teorema 2.2.8.** *Sea  $f$  una función continua sobre  $\mathbb{T}$  y  $\{p(n)\}$  y  $\{q(n)\}$  sucesiones de enteros no negativos tales que  $p(n) + q(n) = n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  verificando*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = r; \quad 0 < r < 1.$$

*Supongamos que  $\lambda(f, \delta) = O(\delta^p)$ ;  $p > 1/2$  si  $\delta \rightarrow 0$ . Denotemos por  $R_n(f, z)$  el polinomio en  $\Lambda_{-p(n), q(n)}$  que interpola a  $f$  en los nodos  $x_{j, n}$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , que son las  $(n+1)$  raíces de  $\tau_n$ , con  $|\tau_n| = 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, z) = f(z)$$

*uniformemente sobre  $\mathbb{T}$ .*

*Demostración:* Sea  $T_n$  el  $L$ -polinomio en  $\Lambda_{-p(n),q(n)}$  de mejor aproximación a  $f$  con respecto a la norma uniforme. Entonces, para todo  $z \in \mathbb{T}$ ,

$$f(z) - R_n(f, z) = f(z) - T_n(z) + T_n(z) - R_n(f, z).$$

Como  $T_n \in \Lambda_{-p(n),q(n)}$ , se tiene que  $R_n(T_n, z) = T_n(z)$ . Por tanto

$$f(z) - R_n(f, z) = f(z) - T_n(z) - R_n(f - T_n, z).$$

Recordar que  $R_n(f - T_n, z) = \sum_{k=1}^{n+1} L_k(z) (f(x_{k,n}) - T_n(x_{k,n}))$ . Luego, para todo  $z \in \mathbb{T}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} |f(z) - R_n(f, z)| &\leq E_n(f) + \sum_{k=1}^{n+1} |L_k(z)| |f(x_{k,n}) - T_n(x_{k,n})| \\ &\leq E_n(f) \left(1 + \sum_{k=1}^{n+1} |L_k(z)|\right). \end{aligned}$$

Utilizando la Proposición 2.2.7 y la fórmula (2.12), que como vimos se obtuvo como consecuencia del Lema 2.2.4, se tiene, para todo  $z \in \mathbb{T}$ ,

$$|f(z) - R_n(f, z)| \leq E_n(f) \left(1 + \sqrt{n+1}\right) \leq 2\lambda\left(f, \frac{\pi}{s(n)+1}\right) \left(1 + \sqrt{n+1}\right) \quad (2.13)$$

donde  $s(n) = \min(p(n), q(n)) = \frac{1}{2}(p(n) + q(n) + |p(n) - q(n)|)$ . Se puede comprobar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(n)}{n} = \frac{1}{2} + \left|r - \frac{1}{2}\right| = \begin{cases} r & \text{si } 0 < r < 1/2 \\ 1 - r & \text{si } 1/2 < r < 1 \end{cases}. \quad (2.14)$$

Finalmente, haciendo uso de (2.13) y (2.14), se obtiene lo que queríamos demostrar. ■

Vemos que se ha probado, por un lado, la convergencia en norma  $L_2$  de los polinomios interpoladores de Laurent para una cierta familia de nodos (ceros de polinomios para-ortogonales respecto a una función peso en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ ), y por otro lado, la convergencia en norma uniforme para una elección particular de nodos (rotaciones de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad o, lo que es lo mismo, ceros de los polinomios para-ortogonales respecto de la medida de Lebesgue). Vamos a considerar ahora otro tipo de interpolantes como son los  $L$ -polinomios interpolantes de Hermite-Fejér.

En tal sentido conviene recordar que en el caso real, los nodos que aparecen en el Teorema clásico de Hermite- Fejér, son los nodos de Chebyshev anteriormente definidos. Son, además, los ceros de los llamados polinomios de Chebyshev de primera especie  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ , que son ortogonales en  $[-1, 1]$  respecto a la medida positiva  $d\mu(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ . Como en nuestro caso estamos considerando funciones definidas en  $\mathbb{T}$ , debemos elegir los nodos también sobre  $\mathbb{T}$ . De forma similar, y ya que los ceros de polinomios ortogonales (o polinomios de Szegő) no están en  $\mathbb{T}$ , tomaremos como nodos los ceros de ciertos polinomios para-ortogonales, más concretamente, los ceros del polinomio para-ortogonal con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, los nodos serán rotaciones de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad. Esto viene motivado por lo siguiente: Supongamos que  $\mu$  es una medida de probabilidad en el intervalo  $[-1, 1]$ , entonces podemos definir una medida  $\omega$  en  $[-\pi, \pi]$  dada por (1.9). Si tomamos  $d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$  entonces, la medida asociada en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  es la medida de *Lebesgue*  $d\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi}d\theta$  y los polinomios para-ortogonales, tal y como hemos dicho, en este caso son  $B_n(z, \tau) = z^n + \tau$ ,  $|\tau| = 1$ ,  $\forall n$ . Por tanto, se puede ver que los ceros de los correspondientes polinomios para-ortogonales son rotaciones de las raíces de la unidad.

Para esta elección de nodos y ciertos interpolantes de Laurent se obtiene una extensión, a la circunferencia unidad, del Teorema clásico de Hermite- Fejér. Para construir dichos interpolantes tomemos una función  $f$  diferenciable en  $\mathbb{T}$  y  $x_k \in \mathbb{T}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , con  $x_k \neq x_j$  para  $k \neq j$ . Entonces sabemos que existe un único polinomio  $P \in \mathbb{P}_{2n-1}$  tal que

$$\begin{aligned} P(x_k) &= f(x_k) \\ P'(x_k) &= f'(x_k), \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

pudiendo expresarse  $P(z)$  de la forma (fórmula de interpolación de Hermite, [49, p. 52-53])

$$P(z) = \sum_{k=1}^n A_k(z) f(x_k) + \sum_{k=1}^n B_k(z) f'(x_k) \quad (2.15)$$

donde

$$A_k(z) = \left(1 - 2(z - x_k)l'_k(x_k)\right) l_k^2(z), \quad k = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

y

$$B_k(z) = (z - x_k) l_k^2(z), \quad k = 1, \dots, n \quad (2.17)$$

siendo  $l_k$  los polinomios fundamentales de Lagrange.

Sean ahora  $p$  y  $q$  dos sucesiones no decrecientes de enteros no negativos tales que

$$p + q = 2n - 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

Entonces, se tiene la siguiente

**Proposición 2.2.9.** *Si  $f$  una función diferenciable sobre  $\mathbb{T}$ , entonces existe un único polinomio  $L \in \Lambda_{-p,q}$ , con  $p$  y  $q$  verificando (2.18), tal que*

$$\begin{aligned} L(x_k) &= f(x_k) \\ L'(x_k) &= f'(x_k), \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde  $\{x_k\}_{k=1}^n$  son las raíces de  $z^n + \tau = 0$ , ( $|\tau| = 1$ ). El  $L$ -polinomio se puede escribir explícitamente como

$$L(z) = \sum_{k=1}^n A_k^*(z) f(x_k) + \sum_{k=1}^n B_k^*(z) f'(x_k) \quad (2.20)$$

con

$$A_k^*(z) = \frac{x_k^{p+2}(z^n + \tau)^2}{z^p n^2 \tau^2 (z - x_k)^2} + \frac{(p - n + 1)x_k^{p+1}(z^n + \tau)^2}{z^p n^2 \tau^2 (z - x_k)} \quad (2.21)$$

y

$$B_k^*(z) = \frac{x_k^{p+2}(z^n + \tau)^2}{z^p n^2 \tau^2 (z - x_k)}. \quad (2.22)$$

*Demostración:* La existencia y unicidad del  $L$ -polinomio que satisface (2.19) es una consecuencia del hecho de que  $\Lambda_{-p,q}$  es un sistema de Chebyshev en  $\mathbb{T}$ , (ver [17, p. 31]).

Sea entonces  $L \in \Lambda_{-p,q}$  dicha solución. Podemos escribir  $L(z) = \frac{P(z)}{z^p}$  donde  $P \in \mathbb{P}_{2n-1}$  y

$$L'(z) = \frac{P'(z)z^p - P(z)pz^{p-1}}{z^{2p}}.$$



Como  $L(x_k) = f(x_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$  entonces

$$P(x_k) = x_k^p f(x_k).$$

Por otro lado, como  $L'(x_k) = f'(x_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$  entonces

$$P'(x_k) = px_k^{p-1} f(x_k) + x_k^p f'(x_k).$$

Sea  $g(z) = z^p f(z)$ , entonces  $g$  es diferenciable en  $\mathbb{T}$  y  $g'(z) = pz^{p-1} f(z) + z^p f'(z)$ .

Por tanto, se tiene que  $P \in \mathbb{P}_{2n-1}$  y satisface,

$$\begin{aligned} P(x_k) &= g(x_k) \\ P'(x_k) &= g'(x_k), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Por la fórmula (2.15) se tiene  $P(z) = \sum_{k=1}^n A_k(z)g(x_k) + \sum_{k=1}^n B_k(z)g'(x_k)$ , donde  $A_k(z)$  y  $B_k(z)$  vienen dadas en (2.16) y (2.17), respectivamente. En este caso, como  $W_n(z) = z^n + \tau$ ,

$$l_k(z) = -\frac{x_k(z^n + \tau)}{n\tau(z - x_k)}$$

y

$$l'_k(z) = -\frac{x_k}{n\tau} \left( \frac{(n-1)z^n - nx_k z^{n-1} - \tau}{(z - x_k)^2} \right).$$

Entonces, aplicando la regla de l'Hpital dos veces,

$$\begin{aligned} l'_k(x_k) &= -\frac{x_k}{n\tau} \lim_{z \rightarrow x_k} \left( \frac{n(n-1)z^{n-1} - n(n-1)x_k z^{n-2}}{2(z-x_k)} \right) \\ &= -\frac{x_k}{2n\tau} \lim_{z \rightarrow x_k} (n(n-1)^2 z^{n-2} - n(n-1)(n-2)x_k z^{n-3}) \\ &= -\frac{x_k}{2n\tau} (n(n-1)^2 x_k^{n-2} - n(n-1)(n-2)x_k^{n-2}) \\ &= -\frac{x_k}{2n\tau} (n(n-1)x_k^{n-2}) \\ &= -\frac{(n-1)x_k^{n-1}}{2\tau} = \frac{(n-1)\tau}{2x_k\tau} = \frac{n-1}{2x_k} \end{aligned}$$

y se tiene:

$$\begin{aligned} A_k(z) &= \frac{x_k^2(z^n + \tau)^2}{n^2\tau^2(z-x_k)^2} - \frac{(n-1)x_k(z^n + \tau)^2}{n^2\tau^2(z-x_k)} \\ B_k(z) &= \frac{x_k^2(z^n + \tau)^2}{n^2\tau^2(z-x_k)}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} L(z) = \frac{P(z)}{z^p} &= \sum_{k=1}^n \frac{A_k(z)x_k^p}{z^p} f(x_k) + \sum_{k=1}^n \frac{B_k(z)}{z^p} (px_k^{p-1}f(x_k) + x_k^p f'(x_k)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{A_k(z)x_k^p + B_k(z)px_k^{p-1}}{z^p} f(x_k) + \sum_{k=1}^n \frac{B_k(z)x_k^p}{z^p} f'(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^n A_k^*(z)f(x_k) + \sum_{k=1}^n B_k^*(z)f'(x_k) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_k^*(z) &= \frac{\frac{x_k^{p+2}(z^n+\tau)^2}{n^2\tau^2(z-x_k)^2} - \frac{(n-1)x_k^{p+1}(z^n+\tau)^2}{n^2\tau^2(z-x_k)} + \frac{px_k^{p+1}(z^n+\tau)^2}{n^2\tau^2(z-x_k)}}{z^p} \\ &= \frac{x_k^{p+2}(z^n+\tau)^2}{z^p n^2 \tau^2 (z-x_k)^2} + \frac{(p-n+1)x_k^{p+1}(z^n+\tau)^2}{z^p n^2 \tau^2 (z-x_k)}, \end{aligned}$$

y

$$B_k^*(z) = \frac{x_k^{p+2}(z^n+\tau)^2}{z^p n^2 \tau^2 (z-x_k)}.$$

■

Supongamos ahora que  $p(n)$  y  $q(n)$  son dos sucesiones de enteros no negativos verificando (2.5), tales que  $p(n)+q(n) = 2n-1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  y la sucesión  $\{p(n) - n + 1\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada. Entonces se tiene, finalmente, el siguiente Teorema análogo del caso polinómico ([17, p. 118])

**Teorema 2.2.10.** *Sea  $f$  una función continua sobre  $\mathbb{T}$ , es decir,  $f \in C(\mathbb{T})$  y sea  $L_n$  el único elemento de  $\Lambda_{-p(n),q(n)}$  verificando*

$$\begin{aligned} L_n(x_k) &= f(x_k) \\ L_n'(x_k) &= 0, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde  $\{x_k\}_{k=1}^n$  son las raíces de  $z^n + \tau_n = 0$ , siendo  $\{\tau_n\}$  una sucesión de números en  $\mathbb{T}$ .

Entonces la sucesión  $L_n$  converge a  $f$  uniformemente en  $\mathbb{T}$ .

*Demostración:* Por la Proposición 2.2.9 podemos escribir

$$L_n(z) = \sum_{k=1}^n A_k^*(z)f(x_k)$$

con  $A_k^*$  como en fórmula (2.21). Por unicidad, se tiene que  $\sum_{k=1}^n A_k^*(z) = 1$  y por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^n A_k^*(z)f(z) = f(z).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |f(z) - \sum_{k=1}^n A_k^*(z)f(x_k)| &= |\sum_{k=1}^n A_k^*(z)f(z) - \sum_{k=1}^n A_k^*(z)f(x_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |A_k^*(z)| |f(z) - f(x_k)|. \end{aligned}$$

Como  $f \in C(\mathbb{T})$ , debido a la continuidad uniforme, dado  $\epsilon$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $|z - x_k| < \delta$  entonces  $|f(z) - f(x_k)| < \epsilon$ . Por tanto

$$\begin{aligned} |f(z) - \sum_{k=1}^n A_k^*(z)f(x_k)| &\leq \epsilon \sum_{k=1, |z-x_k| < \delta}^n |A_k^*(z)| + \sum_{k=1, |z-x_k| \geq \delta}^n |A_k^*(z)| |f(z) - f(x_k)| \\ &= I_{1,n} + I_{2,n}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Si  $|z - x_k| \geq \delta$ , por la fórmula (2.21) y como  $z, x_k \in \mathbb{T}, k = 1, \dots, n$ ,

$$|A_k^*(z)| \leq \frac{|z^n + \tau_n|^2}{n^2 \delta^2} + \frac{|p(n) - n + 1| |z^n + \tau_n|^2}{n^2 \delta}.$$

Ahora bien,  $f \in C(\mathbb{T})$  y  $\mathbb{T}$  es un compacto, existe entonces  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{T}$ . Por tanto,

$$|f(z) - f(x_k)| \leq 2M, \forall z \in \mathbb{T}, \forall k = 1, \dots, n$$

y ya que para todo  $z \in \mathbb{T}, |z^n + \tau_n|^2 \leq 4$ , se obtiene

$$I_{2,n} \leq \frac{8M}{n\delta^2} + \frac{8M}{\delta} \frac{|p(n) - n + 1|}{n}.$$

Como  $\{p(n) - n + 1\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada,  $I_{2,n} < \epsilon$  para  $n$  suficientemente grande.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} I_{1,n} &= \epsilon \sum_{k=1, |z-x_k| < \delta}^n |A_k^*(z)| \\ &= \epsilon \left( \frac{|z^n + \tau_n|^2}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{|z-x_k|^2} \right) + \epsilon (|p(n) - n + 1|) \frac{|z^n + \tau_n|^2}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{|z-x_k|}{|z-x_k|^2} \\ &\leq \epsilon \left( \frac{|z^n + \tau_n|^2}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{|z-x_k|^2} \right) + \epsilon \delta (|p(n) - n + 1|) \left( \frac{|z^n + \tau_n|^2}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{|z-x_k|^2} \right). \end{aligned}$$

Por el Lemma 2.2.4,

$$I_{1,n} < \epsilon + \epsilon \delta |p(n) - n + 1| = (1 + \delta |p(n) - n + 1|) \epsilon.$$

De nuevo, como  $\{p(n) - n + 1\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada,  $I_{1,n} < \epsilon$ . ■

Veremos ahora un ejemplo muy sencillo donde para un cierto valor del parámetro  $p = p(n)$ , la expresión de  $A_k^*(z)$  resulta más manejable:

**Ejemplo.** Si  $p(n) = n - 1$  entonces  $L_n \in \Lambda_{-(n-1),n}$  y

$$L_n(z) = \sum_{k=1}^n A_k^*(z) f(z_k)$$

donde ahora  $A_k^*(z)$  se simplifica de la siguiente forma:

$$A_k^*(z) = \frac{z_k^{n+1}(z^n + \tau_n)^2}{z^{n-1}n^2\tau_n^2(z - z_k)^2} = -\frac{z_k(z^n + \tau_n)^2}{z^{n-1}n^2\tau_n(z - z_k)^2}.$$

## 2.3 Interpolación de funciones analíticas

En primer lugar consideraremos funciones  $f$  analíticas en  $\mathbb{D}$  y continuas en  $\overline{\mathbb{D}}$ . Se sabe que, bajo estas condiciones,  $f$  se puede aproximar uniformemente por polinomios en subconjuntos compactos de  $\mathbb{D}$ .

El siguiente Lema nos va a permitir deducir la convergencia uniforme en compactos de  $\mathbb{D}$  de ciertas sucesiones de polinomios interpoladores con nodos sobre  $\mathbb{T}$ .

**Lema 2.3.1.** *En las condiciones anteriores sobre la función  $f$ , sea  $T_{n,p}$  el polinomio de Laurent de mejor aproximación uniforme a  $f$  en  $\Lambda_{-p,n}$  donde  $p$  y  $n$  son enteros no negativos. Entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - T_{n,p}\|_{\mathbb{T}} = 0, \quad (p \text{ fijo}).$$

*Demostración:* Sea  $g(z) = z^p f(z)$ . Claramente  $g$  es una función analítica en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ .

Sea  $P_n$  el polinomio en  $\mathbb{P}_{n+p}$  de mejor aproximación uniforme a  $g$ . Si

$$R_n(z) = z^{-p}P_n(z) \in \Lambda_{-p,n}.$$

Entonces,

$$\|f - T_{n,p}\|_{\mathbb{T}} \leq \|f - R_n\|_{\mathbb{T}} = \|g - P_n\|_{\mathbb{T}} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

■

Procediendo como en el Teorema 2.2.2 y usando el Lema 2.3.1 se puede deducir también la siguiente

**Proposición 2.3.2.** *Sea  $f$  una función analítica en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ . Sean  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n+1}$  los ceros de  $B_{n+1}(z, \tau_{n+1})$ , el correspondiente polinomio para-ortogonal respecto a una función peso  $\omega(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$ . Sea  $R_n(f, z)$  el polinomio de Laurent en  $\Lambda_{-p(n), q(n)}$  que interpola a  $f$  en los nodos  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n+1}$ , siendo  $\{p(n)\}$  y  $\{q(n)\}$  dos sucesiones no decrecientes de enteros no negativos verificando  $p(n) + q(n) = n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty$ . Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} |f(x) - R_n(x)|^2 \omega(\theta) d\theta = 0$ ,  $x = e^{i\theta}$ .*

Ahora podemos probar el siguiente

**Teorema 2.3.3.** *Sea  $\omega(\theta)$  una función peso en  $[-\pi, \pi]$  tal que  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\omega(\theta)} < +\infty$ . Sea  $\{\tau_n\}$  una sucesión de números complejos de módulo unidad y sea*

$$B_n(z, \tau_n) = \Phi_n(z) + \tau_n \Phi_n^*(z) \quad n = 1, 2, \dots$$

*el polinomio para-ortogonal con respecto a  $\omega(\theta)$ . Si  $\{x_{j,n+1}\}_{j=1}^{n+1}$  son los ceros de  $B_{n+1}(z, \tau_{n+1})$  y consideramos el polinomio  $P_n \in \mathbb{P}_n$  que interpola a  $f$  en dichos nodos, entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = f(z)$$

*uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{D}$ .*

*Demostración:* Por la fórmula integral de Cauchy, se tiene que

$$f(z) - P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(t) - P_n(t)}{t - z} dt, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Sea  $K$  un compacto en  $\mathbb{D}$  tal que  $\text{dist}(K, \mathbb{T}) = \delta > 0$ . Entonces, para todo  $t \in K$  y para todo  $z \in \mathbb{T}$ ,  $|t - z| \geq \delta$ :

$$\begin{aligned} |f(z) - P_n(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{|f(t) - P_n(t)|}{|t - z|} |dt| \\ &\leq \frac{1}{2\pi\delta} \int_{\mathbb{T}} |f(t) - P_n(t)| |dt| \\ &= \frac{1}{2\pi\delta} \int_{\mathbb{T}} |f(t) - P_n(t)| \frac{\sqrt{\omega(\theta)}}{\sqrt{\omega(\theta)}} |dt|. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales, se obtiene

$$|f(z) - P_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi\delta} \left( \int_{\mathbb{T}} |f(t) - P_n(t)|^2 \omega(\theta) |dt| \right)^{1/2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\omega(\theta)} \right)^{1/2}.$$

Finalmente, utilizando la Proposición 2.3.2 y tomando  $p(n) = 0$ , se tiene lo que queríamos.

■

**Observación 2.3.4.** Si  $\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ , ya hemos visto que  $B_n(z, \tau_n) = z^n + \tau_n$ . Entonces, si  $\tau_n = -1$ , para cada  $n$ , se recupera el Teorema 1 en [53].

Hasta el momento se han venido manejando funciones analíticas en  $\mathbb{D}$  y continuas en  $\overline{\mathbb{D}}$ . Vamos a suponer ahora que  $f(z)$  es analítica en el anillo  $\{z : r < |z| < R\}$  con  $0 < r < 1 < R$ . En este caso tomaremos dos clases de interpolantes: Los  $L$ -polinomios interpolantes de Lagrange y los  $L$ -polinomios interpolantes de tipo quasi-Hermite. Demostraremos que ambos interpolantes convergen uniforme y geoméricamente a la función  $f$  en compactos de  $\mathbb{T}$ . A tal fin, haremos uso de ciertas expresiones del error en la interpolación tanto para los interpolantes de Lagrange como para los interpolantes de tipo quasi-Hermite.

Así pues, sean  $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$  ( $n+1$ ) nodos distintos sobre  $\mathbb{T}$  y sea  $R_n$  el polinomio de Laurent en  $\Lambda_{-p,q}$  ( $p + q = n$ ,  $p \geq 0$ ,  $q \geq 0$ ) que interpola a  $f$  en dichos nodos (interpolante de

Lagrange). Usando la fórmula de Hermite para el error en la interpolación polinómica [52, p. 50], se tiene, para todo  $z \in \mathbb{B}$ ,  $z \neq 0$ , con  $\mathbb{B}$  una región del plano complejo donde  $f$  es analítica y que contiene a  $\mathbb{T}$  :

$$f(z) - R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{t}{z}\right)^p \frac{(z-x_1)\dots(z-x_{n+1})}{(t-x_1)\dots(t-x_{n+1})} \frac{f(t)}{t-z} dt. \quad (2.27)$$

siendo  $C$  la frontera de  $\mathbb{B}$ .

Para los interpolantes de tipo quasi-Hermite definidos por (1.25) en relación a  $n$  nodos  $x_j$  distintos sobre  $\mathbb{T}$ , se tiene la siguiente expresión integral del error en la interpolación para todo  $z \in \mathbb{B}$ ,  $z \neq 0$  : ([52, p. 50])

$$f(z) - H_{2n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{t}{z}\right)^n \frac{(z-x_1)^2\dots(z-x_n)^2(z-x_{n+1})}{(t-x_1)^2\dots(t-x_n)^2(t-x_{n+1})} \frac{f(t)}{t-z} dt. \quad (2.28)$$

Sean ahora  $\{p(n)\}$  y  $\{q(n)\}$  dos sucesiones de enteros no negativos tales que  $p(n) + q(n) = n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = s$ ,  $0 < s < 1$ . Sea  $\varphi_n(z)$  el  $n$ -ésimo polinomio ortonormal con respecto a una función peso  $\omega(\theta)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Supongamos que  $\{x_j\}_{j=1}^{n+1}$  son los ceros del polinomio para-ortogonal  $\chi_{n+1}(z) = \varphi_n(z) + \tau\varphi_n^*(z)$ , ( $|\tau| = 1$ ). Para cada  $n$ , denotaremos por  $R_n(z)$  el interpolante a  $f(z)$  en  $\Lambda_{-p(n), q(n)}$  en los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^{n+1}$ . Entonces se tiene el siguiente resultado de convergencia:

**Teorema 2.3.5.** *En las condiciones anteriores se tiene que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(z) - R_n(z)|^{\frac{1}{n+1}} \leq \lambda < 1$$

uniformemente en  $\mathbb{T}$ , donde  $\lambda = \max(r^s, \frac{1}{R^{1-s}})$ .

*Demostración:* Por fórmula (2.27) y para todo  $z \in \mathbb{T}$ , se tiene

$$\begin{aligned} f(z) - R_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \left(\frac{t}{z}\right)^p \frac{\chi_{n+1}(z)}{\chi_{n+1}(t)} \frac{f(t)}{t-z} dt \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \left(\frac{t}{z}\right)^p \frac{\chi_{n+1}(z)}{\chi_{n+1}(t)} \frac{f(t)}{t-z} dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Entonces,

$$|f(z) - R_n(z)| \leq |I_1| + |I_2|. \quad (2.30)$$

Definamos  $M_r(f) = \max_{t \in C_r} \{|f(z)|\}$ ,  $M_R(f) = \max_{t \in C_R} \{|f(z)|\}$  y  $M_n = \max_{z \in \mathbb{T}} |\chi_n(z)|$ , entonces

$$|I_1| \leq \frac{M_r(f)}{1-r} r^{p(n)+1} M_n \max_{t \in C_r} |g_n(z)|$$

donde  $g_n(z) = \frac{1}{\chi_{n+1}(z)}$ . Por tanto,

$$|I_1|^{\frac{1}{n+1}} \leq \left( \frac{M_r(f)}{1-r} \right)^{\frac{1}{n+1}} r^{\frac{p(n)+1}{n+1}} M_n^{\frac{1}{n+1}} \left( \max_{t \in C_r} |g_n(z)| \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Como  $g_n(z)$  es una función continua en  $C_r$ ,  $\max_{t \in C_r} |g_n(t)| = |g_n(t_n)|$ ,  $t_n \in C_r$ . Entonces,

$$\left( \max_{t \in C_r} |g_n(t)| \right)^{1/n} = |g_n(t_n)|^{1/n} \leq \max_{t \in C_r} |g_n(t)|^{1/n}.$$

Por (3) en Teorema 1.5.3  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = 1$  y en consecuencia,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |I_1|^{\frac{1}{n+1}} &\leq r^s \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \max_{t \in C_r} |g_n(t)|^{1/(n+1)} \right) \\ &\leq r^s \max_{t \in C_r} \limsup_{n \rightarrow \infty} |g_n(t)|^{1/(n+1)} \\ &= r^s \max_{t \in C_r} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\chi_{n+1}(t)} \right|^{1/(n+1)} \\ &\leq r^s \max_{t \in C_r} \left\{ \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} |\chi_{n+1}(t)|^{1/(n+1)}} \right\}. \end{aligned}$$

Por (2) en Teorema 1.5.3 se tiene que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |I_1|^{\frac{1}{n+1}} \leq r^s < 1.$$

De forma similar, por (1) en Teorema 1.5.3 se puede deducir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |I_2|^{\frac{1}{n+1}} \leq \left( \frac{1}{R} \right)^{1-s} < 1.$$

Ahora, utilizando (2.30), se llega a:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |f(z) - R_n(z)|^{\frac{1}{n+1}} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (|I_1| + |I_2|)^{\frac{1}{n+1}} \\ &\leq \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} |I_1|^{1/(n+1)}, \limsup_{n \rightarrow \infty} |I_2|^{1/(n+1)} \right\} \\ &= \max \left\{ r^s, \left( \frac{1}{R} \right)^{1-s} \right\}. \end{aligned}$$

■



**Corolario 2.3.6.** *En las condiciones anteriores, la sucesión  $\{R_n(z)\}$  de interpolantes converge a  $f$  uniforme y geoméricamente en  $\mathbb{T}$ .*

Para los interpolantes de tipo quasi-Hermite, utilizando (2.28) y procediendo de igual forma que en la demostración del Teorema 2.3.5, se puede probar el siguiente

**Teorema 2.3.7.** *En las condiciones anteriores, se tiene que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(z) - H_{2n}(z)|^{1/(n+1)} \leq \max(r, \frac{1}{R}) < 1$$

*uniformemente en  $\mathbb{T}$ . Por tanto, la sucesión  $\{H_{2n}\}$  converge a  $f$  uniforme y geoméricamente en  $\mathbb{T}$ .*

Vemos pues que, para una función analítica en un anillo  $\mathbb{B} = \{z : r < |z| < R, 0 < r < 1 < R\}$ , se ha probado la convergencia uniforme y geométrica de los interpolantes en  $\mathbb{T}$ . Nos podríamos preguntar si este dominio de convergencia se puede ampliar, es decir, si, bajo ciertas hipótesis se puede probar la convergencia uniforme y geométrica en un anillo que contenga a  $\mathbb{T}$ . Esto se puede conseguir si se cumplen ciertas condiciones de simetría, tanto para los interpolantes como para el anillo.

En efecto, sea  $\rho = \min(R, \frac{1}{r})$  de modo que el anillo  $\mathbb{B}_\rho = \{z : \frac{1}{\rho} < |z| < \rho\} \subset \mathbb{B}$  y por consiguiente  $f$  es analítica en  $\mathbb{B}_\rho$ . Sea  $R_{2n} \in \Lambda_{-n,n}$  el interpolante a  $f$  en los nodos  $\{x_{j,2n}\}_{j=1}^{2n+1}$  tales que  $x_{j,2n}$  son las  $(2n+1)$ -raíces de  $\tau \in \mathbb{T}$ . Entonces se tiene el siguiente

**Teorema 2.3.8.** *La sucesión  $\{R_{2n}\}$  converge a  $f$  uniforme y geoméricamente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{B}_\rho = \{z : \frac{1}{\rho} < |z| < \rho\}$ .*

*Demostración:* Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $\mathbb{B}_\rho$ , entonces podemos escribir  $K = K_1 \cup K_2$  donde  $K_1$  y  $K_2$  están contenidos en  $\{z : \frac{1}{\rho} < |z| \leq 1\}$  y en  $\{z : 1 \leq |z| < \rho\}$ , respectivamente. Obsérvese que tanto  $K_1$  como  $K_2$  pueden ser conjuntos vacíos. Cuando los dos conjuntos son no vacíos el análisis para  $K_2$  se reduce al de  $K_1$  haciendo el cambio de variable  $x = \frac{1}{z}$ . Es decir, si  $z \in K_2$  entonces  $x \in K_2' \subset \{x : \frac{1}{\rho} < |x| \leq 1\}$ .

Sea  $\tilde{R}_{2n}(x) = R_{2n}(\frac{1}{x}) \in \Lambda_{-n,n}$  y  $g(x) = f(\frac{1}{x})$ . Entonces

$$\tilde{R}_{2n}(\bar{x}_j) = \tilde{R}_{2n}(\frac{1}{x_j}) = R_{2n}(x_j) = f(x_j) = g(\frac{1}{x_j}) = g(\bar{x}_j), \quad j = 1, \dots, 2n + 1.$$

Por tanto,

$$\sup_{z \in K_2} |f(z) - R_{2n}(z)| = \sup_{x \in K'_2} \left| g(x) - \tilde{R}_{2n}(x) \right|$$

siendo  $\tilde{R}_{2n}$  el interpolante en  $\Lambda_{-n,n}$  a  $g(x)$  en los nodos  $\bar{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, 2n + 1$  que son las  $(2n + 1)$ -raíces de  $\bar{\tau}$ . Observar que la función  $g$  es claramente analítica en  $\{z : \frac{1}{\rho} < |z| < \rho\}$ .

Si  $K_1$  es un compacto y  $K_1 \subset \{z : \frac{1}{\rho} < |z| \leq 1\}$ , entonces existe  $r' > 0$  tal que, para todo  $z \in K_1$ :

$$\frac{1}{\rho} < r' \leq |z| \leq 1.$$

Pero, para todo  $z \in K_1$ :

$$f(z) - R_{2n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{z^{2n+1} - \tau}{z^n} \left( \int_{C_{\frac{1}{\rho}}} \frac{t^n f(t)}{(t^{2n+1} - \tau)(t - z)} dt + \int_{C_\rho} \frac{t^n f(t)}{(t^{2n+1} - \tau)(t - z)} dt \right).$$

Sea  $M(f) = \sup_{t \in C_{\frac{1}{\rho}} \cup C_\rho} \{|f(z)|\}$  entonces:

$$\begin{aligned} |f(z) - R_{2n}(z)| &\leq \frac{2M(f)}{(r')^n} \left( \frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\rho^{2n+1}}} \frac{1}{r' - \frac{1}{\rho}} + \frac{\rho^{n+1}}{(\rho^{2n+1} - 1)(\rho - 1)} \right) \\ &= \frac{2M(f)}{\rho} \left( \frac{1}{\rho(r' - \frac{1}{\rho})(1 - \frac{1}{\rho^{2n+1}})} \left( \frac{1}{\rho r'} \right)^n + \left( \frac{1}{\rho r'} \right)^n \frac{1}{(1 - \frac{1}{\rho^{2n+1}})(\rho - 1)} \right) \end{aligned}$$

y esto implica que, para todo  $z \in K_1$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(z) - R_{2n}(z)|^{\frac{1}{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{\rho r'}}.$$

Como  $\rho r' > 1$ , se tiene lo que queríamos demostrar. ■

Veamos ahora cómo se puede obtener un resultado similar considerando otra distribución más general de nodos, como son los ceros de polinomios para-ortogonales. En efecto, teniendo en cuenta que en la demostración de este último Teorema se necesita la interpolación en los nodos  $\bar{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, 2n + 1$ , asumamos que, en general,  $x_1, \dots, x_n$  son los ceros

del polinomio para-ortogonal  $B_n(z, \tau) = B_n(z) = \Phi_n(z) + \tau\Phi_n^*(z)$ ,  $\tau \in \mathbb{T}$ , con respecto a la función peso  $\omega(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$ . La cuestión ahora es: ¿Son  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  ceros de algún polinomio para-ortogonal?

Si suponemos que todos los momentos trigonométricos  $c_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \omega(\theta) d\theta$  son reales, entonces el polinomio de Szegő  $\Phi_n(z)$  tendrá coeficientes reales. Si

$$Q_n(z) = (z - \bar{x}_1) \dots (z - \bar{x}_n),$$

entonces podemos escribir

$$Q_n(z) = \alpha_n z^n B_n\left(\frac{1}{z}\right) = \alpha_n \tau (\Phi_n(z) + \bar{\tau} \Phi_n^*(z)); \quad \alpha_n \neq 0.$$

Por tanto,  $Q_n(z)$  es también para-ortogonal con respecto a  $\omega(\theta)$ .

Haciendo uso del Teorema 1.5.3 se puede deducir fácilmente el siguiente

**Teorema 2.3.9.** *Sea  $\omega(\theta)$  una función peso en  $[-\pi, \pi]$  con todos sus momentos*

$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \omega(\theta) d\theta$  reales. Sean  $\{x_{j,2n}\}_{j=1}^{2n+1}$  los ceros de  $\chi_{2n+1}(z, \tau_{2n+1})$ ,  $\tau_{2n+1} \in \mathbb{T}$ , siendo  $\{\chi_n(z, \tau_n)\}$  una sucesión de polinomios para-ortogonales con respecto a  $\omega(\theta)$ , ( $|\tau_n| = 1$ ).

Sea  $f$  analítica en  $\{z : \frac{1}{\rho} < |z| < \rho, \rho > 1\}$  y sea  $R_{2n}(z)$  el interpolante a  $f$  en  $\Lambda_{-n,n}$  en los nodos  $\{x_{j,2n}\}_{j=1}^{2n+1}$ . Entonces, la sucesión  $\{R_{2n}(z)\}$  converge a  $f$  uniforme y geométricamente en cualquier compacto  $K$  de  $\{z : \frac{1}{\rho} < |z| < \rho, \rho > 1\}$ .

**Observación 2.3.10.** *Una familia de funciones peso con momentos trigonométricos reales, se puede construir de la siguiente manera: Sea  $\nu(x)$  una función peso en  $[-1, 1]$  y definamos la función  $\omega(\theta)$  como en (1.9). Entonces,  $\omega(\theta)$  es una función peso, inducida por  $\nu(x)$ , en  $[-\pi, \pi]$  que es simétrica en el sentido de que*

$$z = e^{i\theta} : \int_{-\pi}^{\pi} z^k \omega(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z}^k \omega(\theta) d\theta; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, los momentos trigonométricos son reales y vienen dados por

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \omega(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} \omega(\theta) \cos k\theta d\theta$$

**Observación 2.3.11.** *Los últimos dos Teoremas son también válidos para los interpolantes quasi-Hermite dados en el Teorema 2.3.7.*

**Observación 2.3.12.** *Si  $f$  es una función entera, entonces  $\rho$  se puede tomar tan grande como se quiera. Por tanto, la convergencia tanto uniforme como geométrica, se dará en cualquier compacto  $K$  de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .*

## 2.4 Cotas de error para las fórmulas de cuadratura

Las expresiones del error, que vienen dadas en las fórmulas (2.27) y (2.28), nos van a permitir calcular cotas de error para las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio y para las fórmulas de cuadratura de Szegő, respectivamente. Al error en la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio con  $n + 1$  nodos, lo denotaremos por  $E_{n+1}(f) = I_\sigma(f) - I_{n+1}(f)$  donde  $\sigma$  es, en general, una función compleja en  $[-\pi, \pi]$  y al error en la fórmula de cuadratura de Szegő (también con  $n + 1$  nodos) por  $\tilde{E}_{n+1}(f) = I_\omega(f) - \tilde{I}_{n+1}(f)$ , donde ahora  $\omega(\theta)$  es una función peso en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Se puede deducir fácilmente (recuérdese que suponíamos  $\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma(\theta)| d\theta = 1$ ) que:

$$|E_{n+1}(f)| = |I_\omega(f) - I_{n+1}(f)| \leq \max_{x \in \mathbb{T}} |f(x) - R_n(f, x)| = \|f - R_n(f, \cdot)\|_{\mathbb{T}}. \quad (2.31)$$

Demostremos ahora el siguiente Lema que vamos a necesitar después:

**Lema 2.4.1.** *Sea  $W_n(t) = \prod_{j=1}^n (t - x_{j,n})$  con  $x_{i,n} \neq x_{j,n}$  si  $i \neq j$  y  $|x_{j,n}| = 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ .*

*Definimos:  $C_R = \{z : |z| = R\}$  y  $C_r = \{z : |z| = r\}$  con  $0 < r < 1 < R$ . Entonces,*

$$\begin{aligned} a) \int_{C_R} \frac{|dt|}{|W_n(t)|^2} &= \frac{2\pi}{R^{2n-1}} \sum_{j=1}^n \frac{x_{j,n}^{n-1}}{W_n'(x_{j,n})W_n(\frac{x_{j,n}}{R^2})} \\ b) \int_{C_r} \frac{|dt|}{|W_n(t)|^2} &= \frac{2\pi}{r} \sum_{j=1}^n \frac{x_{j,n}^{n-1}}{W_n'(x_{j,n})W_n(x_{j,n}r^2)} \end{aligned}$$

*Demostración:* Sólo probaremos a) ya que b) se demuestra de forma similar.

Sea  $I = \int_{C_R} \frac{|dt|}{|W_n(t)|^2}$ . Entonces, para todo  $t \in C_R$ , dado que  $t = Re^{i\theta}$ , resultará

$$\begin{aligned} |W_n(t)|^2 &= (t - x_1) \dots (t - x_n) \left(\frac{R^2}{t} - \frac{1}{x_1}\right) \dots \left(\frac{R^2}{t} - \frac{1}{x_n}\right) \\ &= \frac{W_n(t) (-1)^n W_n\left(\frac{t}{R^2}\right) R^{2n}}{t^n x_1 \dots x_n}. \end{aligned}$$

Como  $W_n(0) = (-1)^n x_1 \dots x_n$ , se tiene,  $|W_n(t)|^2 = \frac{R^{2n} W_n(t) W_n\left(\frac{t}{R^2}\right)}{t^n W_n(0)}$ . Por tanto,

$$I = \frac{R}{i} \int_{C_R} \frac{dt}{t |W_n(t)|^2} = \frac{W_n(0)}{i R^{2n-1}} \int_{C_R} \frac{t^{n-1} dt}{W_n(t) W_n\left(\frac{t}{R^2}\right)} \text{ entonces, } I = \frac{2\pi W_n(0)}{R^{2n-1}} \sum_{j=1}^n \text{Res}(t = x_{j,n}).$$

$$\text{Ahora bien, } \text{Res}(t = x_{j,n}) = \lim_{t \rightarrow x_{j,n}} \frac{(t - x_{j,n}) t^{n-1}}{W_n(t) W_n\left(\frac{t}{R^2}\right)} = \frac{x_{j,n}^{n-1}}{W'_n(x_{j,n}) W_n\left(\frac{x_{j,n}}{R^2}\right)}. \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.4.2.** *Sea  $f(z)$  una función analítica en el anillo:*

$$\mathbb{B} = \{z : r < |z| < R; 0 < r < 1 < R\}$$

Sea  $I_{n+1}(f) = \sum_{j=1}^{n+1} A_j f(x_{j,n})$  una fórmula de cuadratura con  $n+1$  nodos distintos sobre  $\mathbb{T}$  y exacta en  $\Lambda_{-p,q}$  ( $p+q=n$ ). Sea  $W_{n+1}(x) = (x - x_1) \dots (x - x_{n+1})$ . Entonces,

$$\begin{aligned} |E_{n+1}(f)| &\leq M(f) \|W_{n+1}\|_{\mathbb{T}} \left( \left(\frac{1}{R}\right)^{n-p} \frac{1}{R-1} \left( \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_{j,n}^n}{W'_{n+1}(x_{j,n}) W_{n+1}\left(\frac{x_{j,n}}{R^2}\right)} \right)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + r^p \frac{1}{1-r} \left( \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_{j,n}^n}{W'_{n+1}(x_{j,n}) W_{n+1}(x_{j,n} r^2)} \right)^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde  $M(f) = \max_{x \in C} |f(x)|$  y  $\|W_{n+1}\|_{\mathbb{T}} = \max_{x \in \mathbb{T}} |W_{n+1}(x)|$ , siendo  $C$  la frontera de  $\mathbb{B}$ .

*Demostración:* Dado que,  $C = \partial\mathbb{B} = C_r \cup C_R$ , entonces, para todo  $x \in \mathbb{T}$ , podemos escribir ([52, p. 50])  $f(x) - R_n(f, x) = \frac{W_{n+1}(x)}{x^p 2\pi i} \int_C \frac{t^p f(t) dt}{W_{n+1}(t)(t-x)}$  siendo  $R_n(f, \cdot)$  el L-polinomio en  $\Lambda_{-p,q}$ , ( $p+q=n$ ) que interpola a  $f$  en los nodos  $x_{j,n}$ ;  $j = 1, \dots, n+1$ . Así pues, para todo  $x \in \mathbb{T}$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - R_n(f, x)| &\leq \frac{\|W_{n+1}\|_{\mathbb{T}}}{2\pi} \left| \int_C \frac{t^p f(t) dt}{W_{n+1}(t)(t-x)} \right| \\ &\leq \frac{\|W_{n+1}\|_{\mathbb{T}}}{2\pi} \left( \int_{C_R} \frac{|t^p f(t)| |dt|}{|W_{n+1}(t)| |t-x|} + \int_{C_r} \frac{|t^p f(t)| |dt|}{|W_{n+1}(t)| |t-x|} \right) \\ &\leq \frac{M(f) \|W_{n+1}\|_{\mathbb{T}}}{2\pi} \left( \frac{R^p}{R-1} \int_{C_R} \frac{|dt|}{|W_{n+1}(t)|} + \frac{r^p}{1-r} \int_{C_r} \frac{|dt|}{|W_{n+1}(t)|} \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Por otro lado, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{C_R} \frac{|dt|}{|W_{n+1}(t)|} \leq \left( \int_{C_R} \frac{|dt|}{|W_{n+1}(t)|^2} \right)^{1/2} \left( \int_{C_R} |dt| \right)^{1/2} = \sqrt{2\pi R} \sqrt{\int_{C_R} \frac{|dt|}{|W_{n+1}(t)|^2}}.$$

De forma similar se tiene que:  $\int_{C_r} \frac{|dt|}{|W_{n+1}(t)|} \leq \sqrt{2\pi r} \sqrt{\int_{C_r} \frac{|dt|}{|W_{n+1}(t)|^2}}$ . De (2.33) y Lema 2.4.1 se puede deducir, para todo  $x \in \mathbb{T}$ , que

$$|f(x) - R_n(f, x)| \leq M(f) \|W_{n+1}\|_{\mathbb{T}} \left( \left( \frac{1}{R} \right)^{n-p} \frac{1}{R-1} \left( \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_{j,n}^n}{W'_{n+1}(x_{j,n}) W_{n+1}\left(\frac{x_{j,n}}{R^2}\right)} \right)^{1/2} + r^p \frac{1}{1-r} \left( \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_{j,n}^n}{W'_{n+1}(x_{j,n}) W_{n+1}(x_{j,n} r^2)} \right)^{1/2} \right).$$

Finalmente, por (2.31) se tiene lo que queríamos. ■

Si  $f$  es analítica en  $\{z : |z| < R; R > 1\}$  y continua en  $C_R = \{z : |z| = R\}$ , entonces podemos hacer en (2.32) tender  $r$  a cero y se tiene el siguiente

**Corolario 2.4.3.** *Sea  $I_{n+1}(f) = \sum_{j=1}^{n+1} A_j f(x_{j,n})$  una fórmula de cuadratura con  $n+1$  nodos distintos sobre  $\mathbb{T}$  y exacta en  $\Lambda_{-p,q}$  ( $p+q=n$ ). Sea  $f(z)$  una función analítica en  $\{z : |z| < R; R > 1\}$  y continua en  $C_R = \{z : |z| = R\}$ . Entonces:*

$$|E_{n+1}(f)| \leq M(f) \|W_{n+1}\|_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{R} \right)^{n-p} \frac{1}{R-1} \left( \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_{j,n}^n}{W'_{n+1}(x_{j,n}) W_{n+1}\left(\frac{x_{j,n}}{R^2}\right)} \right)^{1/2}$$

donde  $M(f) = \max_{x \in C_R} |f(x)|$ .

Análogamente, si ahora  $f$  es analítica en  $\{z : |z| > r; 0 < r < 1\}$  y continua en  $C_r = \{z : |z| = r\}$ , tomando  $R$ , en (2.32), suficientemente grande, se tiene:

**Corolario 2.4.4.** *Sea  $I_{n+1}(f) = \sum_{j=1}^{n+1} A_j f(x_{j,n})$  una fórmula de cuadratura con  $n+1$  nodos distintos sobre  $\mathbb{T}$  y exacta en  $\Lambda_{-p,q}$  ( $p+q=n$ ). Sea  $f(z)$  una función analítica en  $\{z : |z| > r; 0 < r < 1\}$  y continua en  $C_r = \{z : |z| = r\}$ . Entonces*

$$|E_{n+1}(f)| \leq M(f) \|W_{n+1}\|_{\mathbb{T}} r^p \frac{1}{1-r} \left( \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_{j,n}^n}{W'_{n+1}(x_{j,n}) W_{n+1}(x_{j,n} r^2)} \right)^{1/2}$$

con  $M(f) = \max_{x \in C_r} |f(x)|$ .

**Observación 2.4.5.** *Téngase en cuenta que, a partir de  $(n+1)$  nodos distintos en  $\mathbb{T}$ , hemos obtenido una cota superior para  $|E_{n+1}(f)|$ . Esto es, por el Teorema 2.4.2 podemos*

escribir,

$$|E_{n+1}(f)| \leq M(f) \|W_{n+1}\|_{\mathbb{T}} (\lambda_n + \gamma_n)$$

donde el factor  $\|W_{n+1}\|_{\mathbb{T}} (\lambda_n + \gamma_n)$  depende de la elección de los nodos  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n+1}$ . La siguiente pregunta surge entonces de inmediato: ¿Cuándo se puede afirmar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|W_{n+1}\|_{\mathbb{T}} (\lambda_n + \gamma_n) = 0$ ? Hay que tener en cuenta que tal sucesión depende exclusivamente de los polinomios  $\{Q_n\}$  y de los radios  $r$  y  $R$ . Ahora bien, si  $\varphi_n(z)$  es el  $n$ -ésimo polinomio ortonormal con respecto a una función peso  $\omega(\theta)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y si tomamos como nodos  $\{x_j\}_{j=1}^{n+1}$  los ceros del polinomio para-ortogonal  $\chi_{n+1}(z) = \varphi_n(z) + \tau \varphi_n^*(z)$ , ( $|\tau| = 1$ ), entonces, se puede probar el siguiente resultado:

**Corolario 2.4.6.** *Bajo las mismas condiciones del Teorema 2.3.5 se tiene que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |E_{n+1}(f)|^{\frac{1}{n+1}} \leq \max \left\{ r^s, \left( \frac{1}{R} \right)^{1-s} \right\} = \lambda < 1,$$

es decir,  $E_{n+1}(f)$  converge a cero con velocidad geométrica.

Para los interpolantes de tipo quasi-Hermite se tiene, por (2.28), el Lema 2.4.1 y, procediendo de igual forma que en la demostración del Teorema 2.4.2, el siguiente

**Teorema 2.4.7.** *En las condiciones anteriores, sea  $f(z)$  una función analítica en el anillo*

$\mathbb{B} = \{z : r < |z| < R; 0 < r < 1 < R\}$ , *entonces:*

$$\begin{aligned} \left| \tilde{E}_{n+1}(f) \right| &= \left| I_\omega(f) - \tilde{I}_{n+1}(f) \right| \\ &\leq \|S_{n+1}\|_{\mathbb{T}} M(f) \left( \left( \frac{R+1}{R-1} \right) \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_{j,n}^n}{W'_{n+1}(x_{j,n}) W_{n+1}\left(\frac{x_{j,n}}{R^2}\right)} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{r+1}{1-r} \right) r^{n-1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_{j,n}^n}{W'_{n+1}(x_{j,n}) W_{n+1}(x_{j,n} r^2)} \right) \end{aligned}$$

donde  $S_{n+1}(z) = \frac{W_{n+1}^2(z)}{z-x_1}$ ; y  $M(f) = \sup_{z \in C} |f(z)|$ ,  $C = C_R \cup C_r$ .

**Corolario 2.4.8.** *Bajo las condiciones del Teorema 2.4.7, se puede ver que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \tilde{E}_{n+1}(f) \right|^{\frac{1}{n+1}} \leq \max \left\{ r, \frac{1}{R} \right\} < 1.$$

## Ejemplos

Sean  $x_{j,n}$  las  $(n+1)$  raíces de  $\tau \in \mathbb{T}$ , es decir,  $x_{j,n}^{n+1} = \tau$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ . Entonces:  $Q_{n+1}(x) = x^{n+1} - \tau$  y por tanto  $S_{n+1}(z) = (z^{n+1} - \tau)(z^n + x_1 z^{n-1} + \dots + x_1^{n-1} z + x_1^n)$ . Como  $\|Q_{n+1}\|_{\mathbb{T}} = 2$ , se tiene que  $\|S_{n+1}\|_{\mathbb{T}} \leq 2(n+1)$ . Por otro lado,

$$0 < \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_{j,n}^n}{Q'_{n+1}(x_{j,n})Q_{n+1}\left(\frac{x_{j,n}}{R^2}\right)} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\frac{x_{j,n}^{n+1}}{R^{2n+2}} - \tau} = \frac{1}{1 - \frac{1}{R^{2n+2}}}.$$

De la misma manera:

$$0 < \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_{j,n}^n}{Q'_{n+1}(x_{j,n})Q_{n+1}(x_{j,n}r^2)} = \frac{1}{1 - r^{2n+2}}.$$

Así pues, si  $I_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} A_j f(x_{j,n})$  denota la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-p,q}$ , ( $p+q = n$ ) basada en las  $(n+1)$  raíces de  $\tau$ ;  $\tau \in \mathbb{T}$ , del Teorema 2.4.2 y Corolario 2.4.3 deducimos las siguientes estimaciones del error:

$$\begin{aligned} |E_{n+1}(f)| &= |I_\sigma(f) - I_{n+1}(f)| \\ &\leq 2M(f) \left( \left(\frac{1}{R}\right)^q \frac{1}{R-1} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{R^{2n+2}}}\right)^{1/2} + r^p \frac{1}{1-r} \left(\frac{1}{1-r^{2n+2}}\right)^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$|E_{n+1}(f)| = |I_\sigma(f) - I_{n+1}(f)| \leq 2M(f) \left(\frac{1}{R}\right)^q \frac{1}{R-1} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{R^{2n+2}}}\right)^{1/2} \quad (2.35)$$

siendo  $\sigma(\theta)$  cualquier función  $L_1$ -integrable en  $[-\pi, \pi]$  tal que  $\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma(\theta)| d\theta = 1$ .

Por otro lado, teniendo en cuenta que el polinomio  $Q_{n+1}(x) = x^{n+1} - \tau$ ,  $\tau \in \mathbb{T}$  es para-ortogonal respecto a la medida normalizada de Lebesgue, podemos deducir para la correspondiente  $(n+1)$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő, la siguiente acotación del error:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{E}_{n+1}(f) \right| &= \left| I_\omega(f) - \tilde{I}_{n+1}(f) \right| \\ &\leq 2(n+1)M(f) \left( \left(\frac{R+1}{R-1}\right) \frac{1}{R^{n+1}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{R^{2n+2}}}\right) + \left(\frac{r+1}{1-r}\right) r^{n-1} \left(\frac{1}{1-r^{2n+2}}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Análogamente se tiene, por los Corolarios 2.4.3 y 2.4.4

$$\left| \tilde{E}_{n+1}(f) \right| = \left| I_\omega(f) - \tilde{I}_{n+1}(f) \right| \leq 2(n+1)M(f) \left(\frac{R+1}{R-1}\right) \frac{1}{R^{n+1}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{R^{2n+2}}}\right). \quad (2.37)$$



$$\left| \tilde{E}_{n+1}(f) \right| = \left| I_\omega(f) - \tilde{I}_{n+1}(f) \right| \leq 2(n+1)M(f) \left( \frac{r+1}{1-r} \right) r^{n-1} \left( \frac{1}{1-r^{2n+2}} \right). \quad (2.38)$$

A continuación vamos a tomar las funciones:

$$f_1(z) = \frac{\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}{z-0.5}, \quad f_2(z) = \frac{\text{sen}(z)}{4-z} \quad y \quad f_3(z) = \frac{\text{sen}(z)}{(4-z)(z-0.5)}.$$

Con carácter ilustrativo hemos calculado (2.36), (2.37) y (2.38) (ver Tablas 1,2,3 respectivamente) para varios valores de  $n$ ,  $r$  y  $R$ . Hemos calculado también (2.35) para la función  $f_2(z)$  anteriormente definida con  $R = 3.8$ , tomando  $n=10$  y distintos valores de  $p$ . Los resultados se muestran en la Tabla 4. Como puede observarse de las Tablas 2 y 4, la cota (2.37) es peor que la dada en (2.35) debido al factor  $2(n+1)$ .

<i>Tabla 1 (para <math>f_3</math>)</i>	
R=3.8,r=0.55	cotas
n=30	1.9561E-05
n=35	1.14326E-06
n=40	6.55299E-08
n=45	3.70022E-09
n=50	2.06468E-10

<i>Tabla 2 (para <math>f_2</math>)</i>	
R=3.8	cotas
n=10	6.79759E-05
n=15	1.24785E-07
n=20	2.06702E-10
n=25	3.22984E-13
n=30	4.86017E-16

<i>Tabla 3 (para <math>f_1</math>)</i>	
r=0.55	cotas
n=30	3.0288E-05
n=35	1.77021E-06
n=40	1.01466E-07
n=45	5.72937E-09
n=50	3.19692E-10

<i>Tabla 4 (para <math>f_2</math>)</i>	
R=3.8,n=10	cotas
p=0	4.892202821E-06
p=1	1.859037072E-05
p=2	7.064340874E-05
p=3	2.684449532E-04
p=4	1.020090822E-04
p=5	3.876345124E-03
p=6	1.473011147E-02
p=7	5.597442359E-02
p=8	2.127028097E-01
p=9	8.082706767E-01
p=10	3.071428571

Como se puede observar en la Tabla 4, el mejor resultado se obtiene para  $p = 0$ . Pero es que si  $p = 0$  el subespacio de Laurent  $\Lambda_{-p,q}$  coincide con el subespacio  $\mathbb{P}_q$  de polinomios de grado a lo sumo  $q = n - 1$  y sabemos que, como la función  $f_2(z)$  es analítica en un disco, se puede aproximar uniformemente por polinomios.

# Capítulo 3

## Algunos resultados sobre fórmulas de Szegő

### 3.1 Introducción

Las fórmulas de cuadratura de Szegő, como ya hemos mencionado en el Capítulo anterior, fueron introducidas por Jones et al. en [30] con el objetivo de aproximar integrales sobre la circunferencia unidad del tipo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta. \quad (3.1)$$

De esta forma, si  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\xi_j)$  representa la  $n$ -ésima fórmula de Szegő, entonces los coeficientes  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  son todos positivos y los nodos  $\{\xi_j\}_{j=1}^n$  son los ceros del  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal  $B_n(z, \tau)$ , ( $|\tau| = 1$ ) con respecto a  $\omega(\theta)$ , que se sabe son distintos y están sobre  $\mathbb{T}$ . Además, tal fórmula de cuadratura es exacta en  $\Lambda_{-(n-1), n-1}$  siendo éste su dominio máximo de validez.

En este Capítulo estudiaremos algunas propiedades y aplicaciones de tales fórmulas. Así pues, en la Sección 2 daremos algunos resultados sobre los polinomios para-ortogonales

$B_n(z, \tau)$ , ( $|\tau| = 1$ ) que nos van a permitir reducir el coste computacional de los mismos y, en términos de la Teoría del Potencial, demostraremos que el polinomio ortogonal  $\Phi_n(z) = z^n$  respecto a la medida de Lebesgue y su correspondiente polinomio para-ortogonal  $B_n(z, \tau) = z^n + \tau$ , ( $|\tau| = 1$ ) son respectivamente, el polinomio de Chebyhev y el de Chebyshev modificado para el compacto  $\mathbb{T}$ . Finalmente, probaremos de forma más sencilla, un resultado clásico haciendo uso de las fórmulas de Szegő.

En la Sección 3 y con carácter ilustrativo, calcularemos los coeficientes de la fórmula de cuadratura de Szegő para varias familias de funciones peso. En el siguiente Capítulo haremos un estudio exhaustivo de las fórmulas de Szegő para las llamadas *funciones peso de Chebyshev*, donde calcularemos los coeficientes y nodos de forma explícita, así como cotas superiores del error.

En la cuarta Sección veremos que existe una conexión entre las fórmulas de tipo Gauss para el intervalo  $[-1, 1]$ , que aproximan integrales de la forma  $J_\mu(F) = \int_{-1}^1 F(x)\mu(x)dx$ , y las fórmulas de cuadratura de Szegő que aproximan integrales, ahora de la forma dada por (3.1) cuando las funciones peso  $\mu(x)$  y  $\omega(\theta)$  se relacionan mediante la fórmula (1.9). Obtendremos además relaciones ya conocidas entre los polinomios ortogonales respecto a  $\mu(x)$  y  $\omega(\theta)$  respectivamente utilizando dicha conexión. Las fórmulas de cuadratura sobre  $[-1, 1]$  que vamos a considerar son las Gaussianas, las de Gauss- Lobatto y las de Gauss-Radau que, como veremos, se deducen a partir de las de Szegő.

## 3.2 Preliminares

Como hemos mencionado en la Introducción, los nodos en las fórmulas de cuadratura de Szegő son los ceros del  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal  $B_n(z, \tau) = \Phi_n(z) + \tau\Phi_n^*(z)$ ,  $|\tau| = 1$  con respecto a la función peso  $\omega(\theta)$ , donde  $\Phi_n(z)$  representa el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal o polinomio de Szegő respecto a  $\omega(\theta)$ . Por tanto, el cómputo de los polinomios

para-ortogonales  $B_n(z, \tau)$  está íntimamente relacionado con el cálculo de los polinomios de Szegő  $\Phi_n$ . Como ya hemos dicho en el Capítulo 1, se conocen pocas expresiones explícitas de estos polinomios ortogonales y en general se calculan haciendo uso del algoritmo de Levinson (ver fórmula (1.13)).

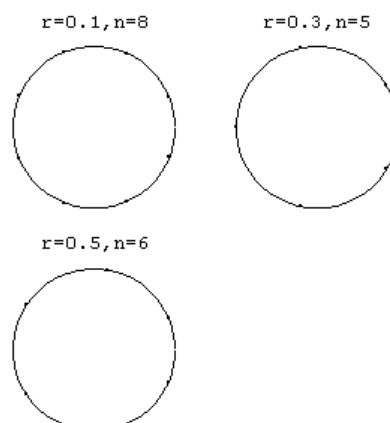
Seguidamente, y con carácter ilustrativo, daremos algunos ejemplos de polinomios ortogonales y para-ortogonales respecto a ciertas funciones peso e ilustraremos la distribución de sus ceros en las Figuras 1-5.

**Ejemplo 2.1:** (Medida de Poisson) Tomemos la función peso  $\omega(\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi(1-2\cos\theta+r^2)}$ ,  $0 < r < 1$ . Como  $\omega(\theta)$  es una modificación racional de la medida de Lebesgue, los polinomios de Szegő vienen dados por  $\Phi_n(z) = z^{n-1}(z-r)$  y por tanto

$$B_n(z, \tau) = z^n - rz^{n-1} + \tau(1 - rz), \quad (|\tau| = 1).$$

Los ceros de los polinomios para-ortogonales se muestran en el siguiente gráfico para diferentes valores del parámetro  $r$  y tomando siempre  $\tau = 1$ :

*Figura 1*

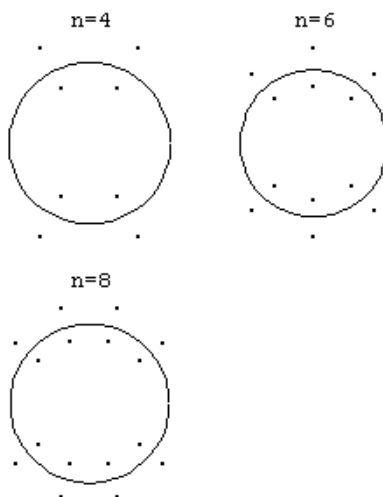


**Ejemplo 2.2:** Consideremos ahora la función peso  $\omega(\theta) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}$ .

En este caso, los polinomios de Szegő se pueden computar recursivamente por el algoritmo de Levinson. Sin embargo, teniendo en cuenta las relaciones de recurrencia, sólo necesitaremos calcular los polinomios de grado par, ya que en este caso, los polinomios ortogonales verifican  $\Phi_{2n-1}(z) = z\Phi_{2n-2}(z)$ . Para los recíprocos se tiene que:  $\Phi_{2n-1}^*(z) = \Phi_{2n-2}^*(z)$ .

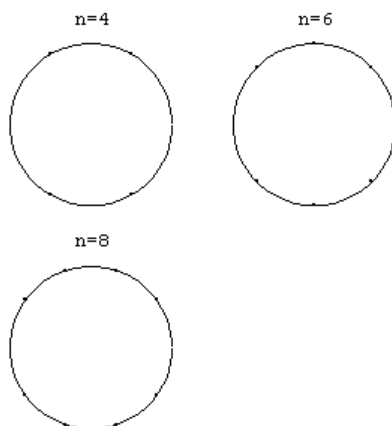
Los ceros de  $\Phi_n(z)$  y  $\Phi_n^*(z)$  para  $n = 4, 6, 8$  se pueden ver en la siguiente Figura:

*Figura 2*



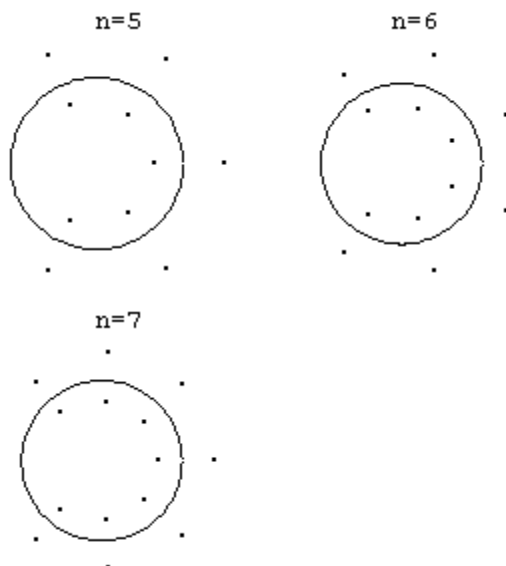
Para los correspondientes polinomios para-ortogonales de grado  $n = 4, 6, 8$  y tomando  $\tau = 1$  se tiene:

Figura 3



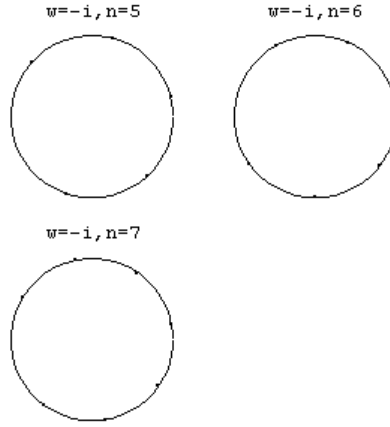
**Ejemplo 2.3:** Finalmente para la función peso  $\omega(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$ , los ceros de  $\Phi_n(z)$  y  $\Phi_n^*(z)$  para  $n = 5, 6, 7$  se muestran en la Figura 4

Figura 4



y los ceros de los correspondientes polinomios para-ortogonales, ahora con  $\tau = -i$ , para  $n = 5, 6, 7$  en la Figura 5

Figura 5



A continuación veremos que el coste computacional para el cálculo de los polinomios  $B_n(z, \tau)$  se puede reducir fijando un punto  $\xi$  sobre  $\mathbb{T}$  y eligiendo convenientemente el valor del parámetro  $\tau$  (en función de  $\xi$ ). En efecto, se tiene la siguiente

**Proposición 3.2.1.** *Si  $\xi$  es un cero de  $B_n(z, \tau_n)$ , entonces  $B_n(z, \tau_n) = (z - \xi)U_{n-1}(z, \gamma_n)$ , donde  $\{U_{n-1}(z, \gamma_n)\}$  es para-ortogonal y  $\overline{\gamma_n}$ -invariante con respecto a  $\varphi$  donde  $\varphi(\theta) = |e^{i\theta} - \xi|^2 \omega(\theta)$ , y  $\gamma_n = -\overline{\xi} \tau_n$ .*

*Demostración:* Tenemos que

$$\begin{aligned}
 (U_{n-1}(z, \gamma_n), z^k)_\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi} U_{n-1}(e^{i\theta}, \gamma_n) e^{-ik\theta} |e^{i\theta} - \xi|^2 \omega(\theta) d\theta \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} B_n(e^{i\theta}, \tau_n) e^{-ik\theta} \overline{(e^{i\theta} - \xi)} \omega(\theta) d\theta \\
 &= \xi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} B_n(e^{i\theta}, \tau_n) e^{-i(k+1)\theta} (\xi - e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} B_n(e^{i\theta}, \tau_n) e^{-i(k+1)\theta} \omega(\theta) d\theta - \xi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} B_n(e^{i\theta}, \tau_n) e^{-ik\theta} \omega(\theta) d\theta.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por tanto, como  $B_n(z, \tau_n)$  es para-ortogonal, por (3.2) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 (U_{n-1}(z, \gamma_n), z^k)_\varphi &= 0, \quad \text{si } 1 \leq k \leq n-2 \\
 (U_{n-1}(z, \gamma_n), 1)_\varphi &= -\xi^{-1} (B_n(z, \tau_n), 1)_\omega \neq 0 \\
 (U_{n-1}(z, \gamma_n), z^{n-1})_\varphi &= (B_n(z, \tau_n), z^n)_\omega \neq 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$



Ahora bien,  $\{B_n(z, \tau_n)\}$  es una sucesión de polinomios  $\bar{\tau}_n$ -invariantes y, por tanto,  $B_n^*(z, \tau_n) = \bar{\tau}_n B_n(z, \tau_n)$ . Así pues, por un lado, tenemos

$$\begin{aligned} B_n^*(z, \tau_n) &= z^n \overline{B_n(1/\bar{z}, \tau_n)} = z^n \overline{\left(\frac{1}{z} - \xi\right) U_{n-1}\left(\frac{1}{z}, \gamma_n\right)} \\ &= \frac{\xi - z}{\xi} U_{n-1}^*(z, \gamma_n) \end{aligned} \quad (3.4)$$

y, por otro,

$$\bar{\tau}_n B_n(z, \tau_n) = \bar{\tau}_n (z - \xi) U_{n-1}(z, \gamma_n). \quad (3.5)$$

Entonces

$$U_{n-1}^*(z, \tau_n) = (-\xi \bar{\tau}_n) U_{n-1}(z, \gamma_n). \quad (3.6)$$

En consecuencia, queda probado que  $U_{n-1}(z, \gamma_n)$  es para-ortogonal y  $\bar{\gamma}_n$ -invariante con respecto a  $\varphi$ , donde  $\gamma_n = -\bar{\xi} \tau_n$  y podemos escribir

$$U_{n-1}(z, \gamma_n) = \tilde{\Phi}_{n-1}(z) + \gamma_n \tilde{\Phi}_{n-1}^*(z) \quad (3.7)$$

donde  $\tilde{\Phi}_{n-1}$  es el  $n$ -ésimo polinomio de Szegő con respecto a  $\varphi$ . ■

**Observación 3.2.2.** Si

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \omega(\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

son los momentos asociados a  $\omega$  y

$$b_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \varphi(\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

los asociados a  $\varphi$ , entonces es fácil comprobar que se verifica la siguiente relación entre ambas familias de momentos:

$$b_k = 2c_k - \frac{1}{\xi} c_{k-1} - \xi c_{k+1}.$$

Ahora veremos que cualquier complejo  $\xi$  sobre  $\mathbb{T}$  es cero de algún polinomio para-ortogonal. En efecto, vale la siguiente

**Proposición 3.2.3.** *Sea  $\xi$  un número complejo sobre  $\mathbb{T}$ , entonces podemos encontrar  $\tau_n$  (en función de  $\xi$ ) tal que  $\xi$  es un cero de  $B_n(z, \tau_n)$ .*

*Demostración:* Como  $B_n(z, \tau_n) = \Phi_n(z) + \tau_n \Phi_n^*(z)$  entonces

$$B_n(\xi, \tau_n) = 0 \quad \text{sii} \quad \tau_n = -\frac{\Phi_n(\xi)}{\Phi_n^*(\xi)}$$

pero ya que  $|\xi| = 1$ ,  $\Phi_n^*(\xi) = \xi^n \overline{\Phi_n(1/\bar{\xi})} = \xi^n \overline{\Phi_n(\xi)}$  por tanto  $\tau_n = -\frac{\Phi_n(\xi)}{\xi^n \overline{\Phi_n(\xi)}}$ . Téngase en cuenta que  $\Phi_n(\xi) \neq 0$  ya que los ceros de  $\Phi_n$  están en  $\mathbb{D}$ . ■

**Observación 3.2.4.** *Una vez que  $\xi \in \mathbb{T}$  ha sido fijado en la Proposición 3.2.3 como cero de  $B_n(z, \tau_n)$ , con el fin de calcular este polinomio, será suficiente computar recursivamente  $U_{n-1}(z, \gamma_n)$ , que es un polinomio de grado  $n - 1$ , por el algoritmo de Levinson.*

En la Proposición 3.2.3 cuando tomamos  $\xi = 1$  se puede determinar una fórmula de cuadratura de Szegő de forma que uno de los extremos del intervalo de integración sea nodo en la fórmula de cuadratura.

Por tanto, se puede ver que la dependencia de las fórmulas de cuadratura de Szegő con respecto al parámetro  $\tau$  nos permite fijar uno de los nodos y la fórmula sigue teniendo el máximo dominio de validez  $\Lambda_{-(n-1), n-1}$ .

Estas ideas están íntimamente relacionadas con el problema de construir fórmulas de cuadratura con el máximo grado de precisión con nodos prefijados en intervalos  $[a, b]$  de la recta real. Las dos reglas más comunes de este tipo, son las conocidas fórmulas de Radau y de Lobatto. En la próxima Sección veremos que existe una conexión entre las fórmulas de Szegő sobre la circunferencia unidad y las fórmulas de Gauss, Gauss-Radau y Gauss-Lobatto sobre el intervalo  $[-1, 1]$ .

**Observación 3.2.5.** *Por las fórmulas de recurrencia en las que se basa el algoritmo de Levinson ([6]), podemos deducir que si los coeficientes de reflexión  $\delta_n := \Phi_n(0)$  son*

reales entonces  $\Phi_n(z)$  tiene coeficientes reales. Si tomamos  $\xi = 1$  en la Proposición 3.2.3, para  $\tau_n$  se tiene  $\tau_n = -\frac{\Phi_n(1)}{\Phi_n(-1)} = -1$  para cada  $n = 1, 2, \dots$ . También obtenemos la misma conclusión si la sucesión de momentos  $\{c_k\}_{-\infty}^{+\infty}$  es real. Por tanto, sería conveniente buscar condiciones suficientes para que la sucesión  $\{c_k\}_{-\infty}^{+\infty}$  sea real.

En primer lugar, sabemos que

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \omega(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\theta) \cos k\theta d\theta - i \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\theta) \operatorname{sen} k\theta d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, si suponemos que  $\omega$  satisface  $\omega(\theta) = -\omega(2\pi - \theta)$ , se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \omega(\theta) \operatorname{sen} k\theta d\theta = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

y la sucesión  $\{c_k\}_{-\infty}^{+\infty}$  es real.

Supongamos ahora que  $\mu$  es una función peso positiva en el intervalo  $[-1, 1]$ . Entonces podemos definir una medida  $\omega$  en  $[-\pi, \pi]$  de la siguiente manera:

$$\omega(\theta) = \mu(\cos \theta) |\operatorname{sen} \theta| \quad (3.8)$$

y como ya hemos visto en el Capítulo anterior, la correspondiente sucesión de momentos  $\{c_k\}_{-\infty}^{+\infty}$  es real.

Por otro lado, la fórmula (3.8) nos va a permitir motivar y extender a la circunferencia unidad, ciertas propiedades que se dan para los polinomios ortogonales en el intervalo  $[-1, 1]$  del eje real. Así pues, sabemos que si  $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , el correspondiente polinomio ortogonal de grado  $n$  respecto de  $\mu$  es el  $n$ -ésimo polinomio de Chebyshev de primera especie  $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$  el cual satisface la siguiente propiedad: ([34, p. 28])

$$\|T_n\|_{[-1,1]} := \max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| \leq \|P\|_{[-1,1]} \quad (3.9)$$

siendo  $P$  un polinomio mónico arbitrario de grado  $n$ .

Para  $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  y por la fórmula (3.8), la correspondiente función peso en  $\mathbb{T}$  es la medida de Lebesgue para la cual sabemos que  $\Phi_n(z) = z^n$  es el  $n$ -ésimo polinomio mónico de Szegő. Escribiendo:  $\tilde{T}_n(z) = z^n$  se tiene el siguiente resultado análogo a la fórmula (3.9) :

**Teorema 3.2.6.** *El polinomio  $\tilde{T}_n(z) = z^n$ , con  $n \geq 1$ , es el único que satisface*

$$\|\tilde{T}_n\|_{\mathbb{T}} = \max_{z \in \mathbb{T}} |\tilde{T}_n(z)| \leq \|P\|_{\mathbb{T}}$$

para todo polinomio mónico  $P$  de grado  $n$ .

*Demostración:* Sea  $P_n(z)$  un polinomio mónico de grado  $n$ . Entonces podemos escribir

$$P_n(z) = z^n + a_{n,n-1}z^{n-1} + \dots + a_{n,1}z + a_{n,0}, \quad a_{n,j} \in \mathbb{C}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Como  $\|\tilde{T}_n\|_{\mathbb{T}} = 1$  veremos que  $\|P_n\|_{\mathbb{T}} \geq 1$ . Supongamos que  $a_0 \neq 0$ , caso contrario se tendría:

$$P_n(z) = z(z^{n-1} + \dots + a_{n,1})$$

y haríamos todo el análisis para el polinomio  $Q_n(z) = z^{n-1} + \dots + a_{n,1}$ .

Existen dos posibilidades para  $a_{n,0}$ :

Si  $|a_{n,0}| \geq 1$  entonces, por el Teorema del Módulo Máximo

$$\|P_n\|_{\mathbb{T}} = \max_{z \in \mathbb{T}} |P_n(z)| > |P_n(0)| = |a_{n,0}| \geq 1.$$

Supongamos ahora que  $0 < |a_{n,0}| < 1$ , entonces podemos escribir

$$P_n(z) = a_{n,0}z^n \left( \frac{1}{a_{n,0}} + \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,0}z} + \dots + \frac{a_{n,1}}{a_{n,0}z^{n-1}} + \frac{1}{z^n} \right).$$

Por tanto, para todo  $z \in \mathbb{T}$

$$|P_n(z)| = |a_{n,0}| \left| \frac{1}{a_{n,0}} + \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,0}z} + \dots + \frac{a_{n,1}}{a_{n,0}z^{n-1}} + \frac{1}{z^n} \right|$$

y

$$\max_{z \in \mathbb{T}} |P_n(z)| = |a_{n,0}| \max_{z \in \mathbb{T}} \left| \frac{1}{a_{n,0}} + \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,0}z} + \dots + \frac{a_{n,1}}{a_{n,0}z^{n-1}} + \frac{1}{z^n} \right|.$$

Si  $Q(w) = \frac{1}{a_{n,0}} + \frac{a_{n,n-1}w}{a_{n,0}} + \dots + \frac{a_{n,1}w^{n-1}}{a_{n,0}} + w^n$  y haciendo uso otra vez del Teorema del Módulo Máximo, se tiene,

$$\max_{z \in \mathbb{T}} |P_n(z)| = |a_{n,0}| \max_{w \in \mathbb{T}} |Q(w)| = |a_{n,0}| \max_{|w| \leq 1} |Q(w)| > |a_{n,0}| |Q(0)| = \frac{|a_{n,0}|}{|a_{n,0}|} = 1.$$

Demostremos ahora la unicidad:

Sea  $P_n(z)$  un polinomio mónico de grado  $n$  tal que

$$P_n(z) = z^n + a_{n,n-1}z^{n-1} + \dots + a_{n,1}z + a_{n,0} \quad a_{n,j} \in \mathbb{C}, \quad a_{n,j} \neq 0 \text{ para algún } j = 0, \dots, n-1.$$

Dado que  $\|P_n\|_{\mathbb{T}} \geq 1$ , tenemos que ver que  $\|P_n\|_{\mathbb{T}} > 1$ . Por tanto, supongamos que  $\|P_n\|_{\mathbb{T}} = 1$ . Sin pérdida de generalidad, podemos también suponer que  $a_{n,0} \neq 0$  y tenemos

$$1 = \max_{z \in \mathbb{T}} |P_n(z)| = |a_{n,0}| \max_{w \in \mathbb{T}} |Q(w)| = |a_{n,0}| \max_{|w| \leq 1} |Q(w)| > |a_{n,0}| |Q(0)| = \frac{|a_{n,0}|}{|a_{n,0}|} = 1.$$

lo cual es una contradicción. ■

Por otro lado, un resultado similar al dado en el Teorema 3.2.6 se puede obtener para el correspondiente polinomio para-ortogonal respecto a la medida de Lebesgue. En efecto, se tiene el siguiente

**Teorema 3.2.7.** *Sea  $P(z)$  un polinomio mónico de grado  $n$  con todos sus ceros sobre  $\mathbb{T}$ , es decir,*

$$P(z) = \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j), \quad |\alpha_j| = 1 \quad j = 1, \dots, n.$$

*Entonces  $\|P\|_{\mathbb{T}} = \max_{z \in \mathbb{T}} |P(z)| \geq 2$ . Además, si  $\|P\|_{\mathbb{T}} = 2$  entonces el polinomio  $P$  es de la forma  $P(z) = z^n + \tau_n$ , siendo  $\tau_n$  un número complejo de módulo uno.*

*Demostración:* Supongamos que  $\|P\|_{\mathbb{T}} = \max_{z \in \mathbb{T}} |P(z)| = r < 2$ . Podemos escribir

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

y entonces se tiene que

$$a_0 = (-1)^n \prod_{j=1}^n \alpha_j \quad \text{siendo } |a_0| = 1.$$

Definamos ahora,  $Q(z) = -2z^n$  entonces  $|Q(z)| = 2$  para todo  $z \in \mathbb{T}$ . Como  $|P(z)| < |Q(z)|$  para todo  $z \in \mathbb{T}$ , por el Teorema de Rouché, (ver [16, p. 125]), podemos concluir que el polinomio  $S(z) = P(z) + Q(z)$  tiene  $n$  ceros en  $\mathbb{D}$ .

Ahora bien,  $S(z) = -z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ . Sean  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  los  $n$  ceros de  $S$ , entonces

$$-S(z) = \prod_{j=1}^n (z - \gamma_j) = z^n + \dots + (-1)^n \prod_{j=1}^n \gamma_j, \quad |\gamma_j| < 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Por otro lado, como  $S(0) = a_0$ , se tiene que  $(-1)^{n+1} \prod_{j=1}^n \gamma_j = a_0$  y, por tanto,  $\prod_{j=1}^n |\gamma_j| = |a_0| < 1$  lo cual es una contradicción.

Supongamos que  $\|P\|_{\mathbb{T}} = \max_{z \in \mathbb{T}} |P(z)| = 2$ . Sabemos que  $|a_0| = 1$ . Supongamos, en primer lugar, que  $a_0 = 1$ , entonces

$$P(z) = z^n + 1 + q(z)$$

donde  $q$  es un polinomio de grado a lo sumo  $n - 1$  y  $q(0) = 0$ .

Sea  $q(z) = \sum_{j=1}^{n-1} q_j z^j$ . Si tomamos  $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$  y si consideramos  $\xi^k$  para  $k = 0, \dots, n - 1$  tenemos que:

$$P(\xi^k) = 2 + q(\xi^k) = 2 + \Re(q(\xi^k)) + i\Im(q(\xi^k)) \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Entonces,

$$\Re(q(\xi^k)) = \Re(P(\xi^k)) - 2 \leq |P(\xi^k)| - 2 \leq 0.$$

Por tanto,  $\Re(q(\xi^k)) \leq 0 \quad k = 0, \dots, n - 1$ .

Por otro lado,

$$\sum_{k=0}^{n-1} q(\xi^k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} q_j \xi^{kj} = \sum_{j=0}^{n-1} q_j \sum_{k=0}^{n-1} (\xi^j)^k.$$

Pero,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\xi^j)^k = \frac{\xi^{(n-1)j} \xi^j - 1}{\xi^j - 1} = 0.$$

Entonces  $\sum_{k=0}^{n-1} \Re(q(\xi^k)) = 0$  y como consecuencia  $\Re(q(\xi^k)) = 0$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ .

Ahora podemos escribir

$$P(\xi^k) = 2 + i\Im(P(\xi^k)), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Por tanto

$$|P(\xi^k)| = \sqrt{4 + (\Im(P(\xi^k)))^2} \leq 2.$$

Entonces,  $(\Im(P(\xi^k)))^2 \leq 0$  y  $\Im(P(\xi^k)) = 0$   $k = 0, \dots, n-1$ , por lo que  $q(\xi^k) = 0$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ . Como  $q$  es un polinomio de grado  $n-1$  y como  $\xi^j \neq \xi^k$  si  $j \neq k$ , se tiene que  $q \equiv 0$  como queríamos demostrar

Supongamos ahora que  $a_0 \neq 1$ , entonces

$$P_n(z) = a_0 \left( \frac{z^n}{a_0} + \frac{a_{n-1}}{a_0} z^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_0} z + 1 \right).$$

Sea  $\alpha$  una raíz  $n$ -ésima de  $a_0$ , es decir,  $\alpha^n = a_0$ , entonces

$$P_n(z) = a_0 \left( \left( \frac{z}{\alpha} \right)^n + \frac{a_{n-1}}{\alpha} \left( \frac{z}{\alpha} \right)^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{\alpha^{n-1}} \left( \frac{z}{\alpha} \right) + 1 \right).$$

Tomando  $x = \frac{z}{\alpha}$  y  $b_j = \frac{a_j}{\alpha^{n-j}}$   $j = 1, \dots, n$ , se tiene

$$P(z) = a_0 (x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + 1) = a_0 \tilde{P}(x).$$

Observar que cuando  $z \in \mathbb{T}$ , entonces  $x \in \mathbb{T}$  y por tanto

$$\|P\|_{\mathbb{T}} = \|\tilde{P}\|_{\mathbb{T}} = 2.$$

Ahora podremos trabajar con el polinomio  $\tilde{P}(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + 1$ .

Hemos visto que  $b_j = 0$   $j = 1, \dots, n-1$  por lo que  $a_j = 0$   $j = 1, \dots, n-1$ .

Finalmente, se tiene que

$$P(z) = a_0 \left( \frac{z^n}{a_0} + 1 \right) = z^n + a_0.$$

■

**Observación 3.2.8.** *En realidad, el Teorema 3.2.7 es ya conocido. Se puede ver en [46, p. 353, Teorema 2]. Sin embargo, aquí hemos incluido una demostración que consideramos más sencilla que la dada en dicha referencia.*

Los Teoremas 3.2.6 y 3.2.7 guardan relación con algunos conceptos elementales de la Teoría del Potencial. Con el fin de establecer dicha relación, definiremos, para todo compacto  $E$  de  $\mathbb{C}$  :

$$\Delta_n(E) := \max_{z_1, \dots, z_n \in E} \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} |z_i - z_j|.$$

A  $\Delta_n(E)$  se le denomina *Diámetro transfinito*. Entonces, la *capacidad logarítmica* de  $E$  se define de la siguiente manera: (ver por ejemplo [52], [4])

$$\text{Cap}(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta_n(E))^{\frac{1}{n(n-1)}}.$$

Por otro lado, sea

$$M_n := \left\{ p \in \mathbb{P}_n : p(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j), z_j \in E \right\}$$

y definamos:

$$m_n(E) := \inf \{ \|p\|_E : p \in \mathbb{P}_n \}$$

y

$$\tilde{m}_n(E) := \inf \{ \|p\|_E : p \in M_n \}.$$



Además, el ínfimo en tales definiciones es realmente un mínimo y los polinomios para los que se alcanzan dichos mínimos, son los llamados *polinomios de Chebyshev* y los *polinomios de Chebyshev modificados* para  $E$  respectivamente.

Por otro lado, los números

$$\mu(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} (m_n(E))^{\frac{1}{n}} \quad y \quad \tilde{\mu}(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{m}_n(E))^{\frac{1}{n}}$$

son, respectivamente, las llamadas *constantes de Chebyshev* y *constantes modificadas de Chebyshev* asociadas a  $E$ , y se sabe que

$$Cap(E) = \mu(E) = \tilde{\mu}(E).$$

Supongamos que  $E = \mathbb{T}$ . Entonces por Teorema 3.2.6,

$$m_n(\mathbb{T}) = \inf\{\|p\|_{\mathbb{T}} : p \in \mathbb{P}_n\} = \|z^n\|_{\mathbb{T}} = 1$$

y por el teorema 3.2.7,

$$\tilde{m}_n(\mathbb{T}) = \inf\{\|p\|_{\mathbb{T}} : p \in M_n\} = \|z^n + \tau_n\|_{\mathbb{T}} = 2.$$

Entonces

$$\mu(\mathbb{T}) := \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \tilde{\mu}(\mathbb{T}) := \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Por tanto, se concluye que

$$Cap(\mathbb{T}) = \mu(\mathbb{T}) = \tilde{\mu}(\mathbb{T}) = 1.$$

En este sentido cabe recordar que  $Cap(E) = Cap(\partial E)$  y que  $Cap(\overline{D_\rho}) = \rho$ , donde  $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ .

En resumen, hemos visto que el polinomio  $z^n$  representa el polinomio de Chebyshev de grado  $n$  para  $\mathbb{T}$  mientras que  $z^n + \tau_n$ ,  $\tau_n \in \mathbb{T}$ , es el polinomio de Chebyshev modificado para  $\mathbb{T}$ .

Para finalizar esta Sección consideraremos algunas aplicaciones de las fórmulas de Szegő. Se sabe, (ver [28]) que los coeficientes de la fórmula de cuadratura de Szegő respecto a la medida normalizada de Lebesgue  $\frac{d\theta}{2\pi}$  vienen dados por  $\lambda_j = \frac{1}{n}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Entonces, se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 3.2.9.** *Sea  $f$  una función analítica en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\mathbb{T}$ . Sea  $\{\tau_n\}$  una sucesión de números complejos sobre  $\mathbb{T}$  y  $\{\xi_{j,n}\}_{j=1}^n$  las raíces  $n$ -ésimas de  $\tau_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_{j,n}) = f(0).$$

*Demostración:* Por la fórmula integral de Cauchy,  $f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z} dz$ . Si  $z = e^{i\theta}$  se tiene que  $f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$ . Haciendo uso de la convergencia de las fórmulas de cuadratura de Szegő (ver [10]), podemos escribir

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(\xi_{j,n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_{j,n}).$$

■

Otra de las aplicaciones de las fórmulas de Szegő viene dada en la siguiente Proposición en la que se obtiene directamente un resultado clásico que tiene que ver con la interpolación de polinomios trigonométricos (ver por ejemplo [55]).

**Proposición 3.2.10.** *Sea  $T(\theta)$  un polinomio trigonométrico de grado  $n$  y  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2n+1}$ ,  $(2n+1)$  puntos equidistantes en el intervalo  $[-\pi, \pi)$ . Entonces*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T(\theta)|^2 d\theta = \sum_{k=1}^{2n+1} |T(\theta_k)|^2 \Delta\theta_k, \quad \Delta\theta_k = \frac{2\pi}{2n+1}.$$

*Demostración:* Consideremos las fórmulas de cuadratura de Szegő con  $(2n+1)$  nodos para una función peso  $\omega(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$ . Entonces, si  $z = e^{i\theta}$ , podemos escribir

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(z) \omega(\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{2n+1} \lambda_k^{(2n+1)} R(\xi_k^{(2n+1)}),$$

para todo  $R \in \Lambda_{-2n, 2n}$ . Sean  $P, Q \in \mathbb{P}_{2n}$ . Si  $z = e^{i\theta}$ , tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(z) \overline{Q(z)} \omega(\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{2n+1} \lambda_k^{(2n+1)} P(\xi_k^{(2n+1)}) \overline{Q(\xi_k^{(2n+1)})}.$$

En particular,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |P(z)|^2 \omega(\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{2n+1} \lambda_k^{(2n+1)} |P(\xi_k^{(2n+1)})|^2.$$

Como  $T(\theta)$  es un polinomio trigonométrico de grado  $n$ , podemos escribir,

$$T(\theta) = \sum_{j=0}^n (a_j \cos j\theta + b_j \operatorname{sen} j\theta) = z^{-n} P(z), \quad z = e^{i\theta}$$

siendo  $P(z)$  un polinomio de grado  $2n$ . Por tanto,  $|T(\theta)|^2 = |P(z)|^2$ . Tomando  $\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ , se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T(\theta)|^2 d\theta = \sum_{k=1}^{2n+1} |T(\theta_k)|^2 \Delta\theta_k, \quad \Delta\theta_k = \frac{2\pi}{2n+1}.$$

■

### 3.3 Ejemplos ilustrativos

En esta Sección, y con carácter ilustrativo, calcularemos los coeficientes de la fórmula de cuadratura de Szegő con respecto a las funciones peso de tipo Jacobi dadas por (1.12), tomando en dicha fórmula  $p = \alpha + 1/2$  y  $q = \beta + 1/2$  con  $p$  y  $q$  dos enteros no negativos, es decir,

$$\omega(\theta) = (1 + \cos \theta)^p (1 - \cos \theta)^q, \quad p, q \in \mathbb{Z}, p, q \geq 0. \quad (3.10)$$

Como hemos ya mencionado, el error en la fórmula de cuadratura de Szegő respecto a una función peso  $\omega$ , se puede escribir en términos de la diferencia entre la transformada de Herglotz- Riesz y los aproximantes modificados para dicha función peso, es decir,

$$F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n).$$

En este sentido computaremos dicha diferencia con respecto a las funciones tipo Jacobi dadas por (3.10), así como para ciertas modificaciones racionales de la medida de Lebesgue:

$$\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi |h(e^{i\theta})|^2} \quad (3.11)$$

donde  $h(z) = \prod_{j=1}^k (z - \alpha_j)$  con  $|\alpha_j| < 1$ ,  $1 \leq j \leq k$ .

Para el caso particular en el que tengamos la medida de Lebesgue,  $\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ , deduciremos una cota superior para  $|F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n)|$  que compararemos con las cotas dadas en [33]. Al propio tiempo utilizaremos dicha estimación para dar una cota superior del error en la fórmula de Szegő respecto a la medida de Lebesgue y la compararemos con el valor exacto para varios integrandos analíticos.

Supongamos que  $\omega$  viene dada por (3.10). Entonces si  $B_n(z, \tau_n)$  es el  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal respecto a dicha función peso y  $\{\xi_{j,n}\}_{j=1}^n$  son sus ceros, podemos escribir

$$\frac{B_n(z, \tau_n)}{z - \xi_{j,n}} = \sum_{i=0}^{n-1} d_i^{(j)} z^i \quad (3.12)$$

donde  $d_i^{(j)}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  se pueden calcular fácilmente utilizando el algoritmo de Horner.

Haciendo uso de la fórmula (1.30), tenemos que los coeficientes  $\{\lambda_{j,n}\}_{j=1}^n$  de la fórmula de cuadratura de Szegő respecto a la función peso  $\omega$ , vienen dados por:

$$\lambda_{j,n} = \frac{1}{B_n'(z, \tau_n)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_n(e^{i\theta}, \tau_n) (1 - \cos \theta)^p (1 + \cos \theta)^q}{e^{i\theta} - \xi_{j,n}} \frac{d\theta}{2\pi} \quad j = 1, \dots, n.$$

Sea  $x = e^{i\theta}$  entonces, podemos escribir

$$(1 - \cos \theta)^p = \left( -\frac{(x^2 - 2x + 1)}{2x} \right)^p = (-1)^p \frac{(x-1)^{2p}}{2^p x^p}$$

y, de la misma forma,

$$(1 + \cos \theta)^q = \left( \frac{(x^2 + 2x + 1)}{2x} \right)^q = \frac{(x+1)^{2q}}{2^q x^q}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\lambda_{j,n} &= \frac{1}{B'_n(\xi_{j,n}, \tau_n)} \int_T \frac{B_n(x, \tau_n)}{x - \xi_{j,n}} \frac{(-1)^p (x-1)^{2p} (1+x)^{2q}}{2^{p+q} x^{p+q+1}} dx \\ &= \frac{1}{B'_n(\xi_{j,n}, \tau_n)} \frac{1}{2^{p+q}} \text{Res}(x=0) \quad j = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Sea

$$(-1)^p (x-1)^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} (-1)^{p+k} \binom{2p}{k} x^k \quad \text{y} \quad (1+x)^{2q} = \sum_{j=0}^{2q} \binom{2q}{j} x^j.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(-1)^p (x-1)^{2p} (1+x)^{2q} &= \sum_{k=0}^{2p} \sum_{j=0}^{2q} (-1)^{p+k} \binom{2p}{k} \binom{2q}{j} x^{j+k} \\ &= \sum_{i=0}^{2p+2q} b_i x^i,\end{aligned}$$

donde

$$b_i = \sum_{k=0}^i (-1)^{p+k} \binom{2p}{k} \binom{2q}{i-k} \quad i = 0, \dots, 2p+2q.$$

Entonces, haciendo uso de (3.12), se tiene

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^p (x-1)^{2p} (1+x)^{2q} B_n(x, \tau_n)}{x^{p+q+1} (x - \xi_{j,n})} &= \frac{1}{x^{p+q+1}} \left( \sum_{j=0}^{2p+2q} b_j x^j \right) \left( \sum_{i=0}^{n-1} d_i^{(j)} x^i \right) \\ &= \frac{1}{x^{p+q+1}} \sum_{i=0}^{2p+2q+n-1} c_i^{(j)} x^i,\end{aligned}$$

donde

$$c_i^{(j)} = \sum_{k=0}^i b_k d_{i-k}^{(j)} \quad i = 0, \dots, 2p+2q+n-1. \quad (3.13)$$

Por tanto,

$$\text{Res}(x=0) = c_{p+q}^{(j)} = \sum_{k=0}^{p+q} b_k d_{p+q-k}^{(j)}$$

y

$$\lambda_{j,n} = \frac{c_{p+q}^{(j)}}{2^{p+q} B'_n(\xi_{j,n}, \tau_n)} \quad j = 1, \dots, n.$$

En otra palabras, hemos probado la siguiente

**Proposición 3.3.1.** Sea  $\omega(\theta) = \frac{(1-\cos\theta)^p(1+\cos\theta)^q}{2\pi}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  una función peso con  $p, q \geq 0$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Entonces, los correspondientes coeficientes  $\{\lambda_{j,n}\}_{j=1}^n$  de la fórmula de cuadratura de Szegő vienen dados por

$$\lambda_{j,n} = \frac{c_{p+q}^{(j)}}{2^{p+q} B_n'(\xi_{j,n}, \tau_n)} \quad j = 1, \dots, n$$

donde  $B_n(z, \tau_n)$  es el  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal con respecto a  $\omega(\theta)$ , siendo  $\xi_{j,n}$   $j = 1, \dots, n$  sus ceros y  $c_{p+q}^{(j)}$  como en (3.13).

Por otro lado, sabemos, por la fórmula (1.38), que el error en la fórmula de cuadratura de Szegő con respecto a una función peso  $\omega$ , se puede expresar en términos de la transformada de Herglotz- Riesz  $F_\omega(z)$  y el aproximante modificado  $R_n(z, \tau) = \frac{A_n(z, \tau)}{B_n(z, \tau)}$ ,  $|\tau| = 1$  donde  $B_n(z, \tau)$  es el  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal con respecto a  $\omega$  y  $A_n(z, \tau)$  su polinomio asociado. Además de dicha expresión del error, se puede deducir una cota superior que viene dada por (ver fórmula (1.39)):

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{4\pi} \left( \max \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| : \xi \in \Gamma \right\} \right) \int_\Gamma |F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n)| |dz|.$$

Con el propósito de calcular la diferencia  $F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n)$ , usaremos la siguiente representación integral: (ver [28])

$$F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n) = \frac{2z^n}{B_n(z, \tau_n)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(n-1)\theta} B_n(e^{i\theta}, \tau_n)}{e^{i\theta} - z} \omega(\theta) d\theta, \quad (3.14)$$

para varias elecciones de la función peso  $\omega$  que se mostrarán en los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 3.1:** Consideraremos, en primer lugar, las modificaciones racionales de la medida de Lebesgue dada por (3.11).

En este caso,  $B_n(z, \tau_n) = z^{n-k}h(z) + \tau_n h^*(z)$  y por fórmula (3.14) se tiene que

$$\begin{aligned} F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n) &= \frac{2z^n}{B_n(z, \tau_n)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(n-1)\theta} e^{i(n-k)h(e^{i\theta})}}{e^{i\theta} - z} \frac{d\theta}{2\pi |h(e^{i\theta})|^2} \\ &+ \frac{2\tau_n z^n}{B_n(z, \tau_n)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(n-1)\theta} e^{i(n-k)h^*(e^{i\theta})}}{e^{i\theta} - z} \frac{d\theta}{2\pi |h(e^{i\theta})|^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pero

$$\frac{h(e^{i\theta})}{|h(e^{i\theta})|^2} = \frac{(-1)^k e^{ik\theta}}{\alpha_1 \dots \alpha_k \prod_{j=1}^k (e^{i\theta} - \frac{1}{\alpha_j})} \quad \text{y} \quad \frac{h^*(e^{i\theta})}{|h(e^{i\theta})|^2} = \frac{e^{ik\theta}}{\prod_{j=1}^k (e^{i\theta} - \alpha_j)}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n) &= \frac{2(-1)^k z^n}{\alpha_1 \dots \alpha_k B_n(z, \tau_n)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - z) \prod_{j=1}^k (e^{i\theta} - \frac{1}{\alpha_j})} d\theta \\ &+ \frac{2\tau_n z^n}{B_n(z, \tau_n)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{e^{i(n-k-1)\theta} (e^{i\theta} - z) \prod_{j=1}^k (e^{i\theta} - \alpha_j)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Si  $x = e^{i\theta}$  entonces,

$$\begin{aligned} F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n) &= \frac{2(-1)^k z^n}{\alpha_1 \dots \alpha_k B_n(z, \tau_n)} \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{dx}{(x-z) \prod_{j=1}^k (x - \frac{1}{\alpha_j})} d\theta \\ &+ \frac{2\tau_n z^n}{B_n(z, \tau_n)} \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{dx}{x^{n-k} (x-z) \prod_{j=1}^k (x - \alpha_j)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si  $|z| < 1$  entonces

$$\begin{aligned} F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n) &= \frac{2(-1)^k z^n}{\alpha_1 \dots \alpha_k B_n(z, \tau_n)} \text{Res}(x = z) \\ &+ \frac{2\tau_n z^n}{B_n(z, \tau_n)} (\text{Res}(x = 0) + \text{Res}(x = z) + \sum_{j=1}^k \text{Res}(x = \alpha_j)). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para la primera integral se tiene que  $\text{Res}(x = z) = \frac{(-1)^k \alpha_1 \dots \alpha_k}{h^*(z)}$ . Para calcular el residuo en  $x = 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-z)(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_k)} &= \frac{A_0}{x-z} + \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \dots + \frac{A_k}{x-\alpha_k} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} - \left( \frac{A_0}{z^{j+1}} + \frac{A_1}{\alpha_1^{j+1}} + \dots + \frac{A_k}{\alpha_k^{j+1}} \right) x^j. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{x^{n-k}(x-z) \prod_{j=1}^k (x - \alpha_j)} = \sum_{j=0}^{\infty} - \left( \frac{A_0}{z^{j+1}} + \frac{A_1}{\alpha_1^{j+1}} + \dots + \frac{A_k}{\alpha_k^{j+1}} \right) x^{j-n+k},$$

donde  $A_0 = \frac{1}{h(z)}$  y  $A_j = \frac{1}{(\alpha_j - z)h'(\alpha_j)}$   $j = 1, \dots, k$  y, por tanto,

$$\text{Res}(x = 0) = - \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{\alpha_j^{n-k} (\alpha_j - z) h'(\alpha_j)} + \frac{1}{z^{n-k} h(z)} \right).$$

Para los residuos en  $x = z$  y  $x = \alpha_j$   $j = 1, \dots, k$  tenemos lo siguiente:

$$\text{Res}(x = z) = \frac{1}{z^{n-k} h(z)} \quad \text{Res}(x = \alpha_j) = \frac{1}{\alpha_j^{n-k} (\alpha_j - z) h'(\alpha_j)}.$$

Por tanto,  $Res(x=0) + Res(x=z) + \sum_{j=1}^k Res(x=\alpha_j) = 0$  y

$$\begin{aligned} F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n) &= \frac{2(-1)^k z^n}{\alpha_1 \dots \alpha_k B_n(z, \tau_n)} Res(x=z) \\ &= \frac{2z^n}{h^*(z) B_n(z, \tau_n)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por otro lado, si  $|z| > 1$ , entonces

$$\begin{aligned} F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n) &= 0 + \frac{2\tau_n z^n}{B_n(z, \tau_n)} (Res(x=z) + \sum_{j=1}^k Res(x=\alpha_j)) \\ &= \frac{-2\tau_n z^k}{h(z) B_n(z, \tau_n)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por tanto

$$F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n) = \begin{cases} \frac{2z^n}{h^*(z) B_n(z, \tau_n)} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{-2\tau_n z^k}{h(z) B_n(z, \tau_n)} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (3.21)$$

Si  $\alpha_j = 0$  para todo  $j = 1, \dots, k$ , entonces  $|h(e^{i\theta})|^2 = \prod_{j=1}^k |e^{i\theta}|^2 = 1$  y  $\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ , que es la medida de Lebesgue. En este caso sabemos que  $B_n(z, \tau_n) = z^n + \tau_n$  y para (3.21) se tiene

$$F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n) = \begin{cases} \frac{2z^n}{z^n + \tau_n} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{-2\tau_n}{z^n + \tau_n} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (3.22)$$

**Ejemplo 3.2:** Vamos a tomar, como segundo ejemplo, otra vez la función peso dada por (3.10). Si hacemos  $x = e^{i\theta}$  en (3.14), para  $|z| > 1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n) &= \frac{2z^n}{B_n(z, \tau_n)} \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{(-1)^p (x-1)^{2p} (1+x)^{2q} B_n(x, \tau_n)}{2^{p+q} x^{p+q+n} (x-z)} dx \\ &= \frac{2z^n}{B_n(z, \tau_n)} Res(f_z, 0) \end{aligned}$$

donde  $f_z(x) = \frac{(-1)^p (x-1)^{2p} (1+x)^{2q} B_n(x, \tau_n)}{2^{p+q} x^{p+q+n} (x-z)}$ .

Sea  $B_n(x, \tau_n) = \sum_{j=1}^n a_j x^j$ , podemos expresar  $f_z(x)$  en la forma

$$f_z(x) = \frac{1}{2^{p+q} x^{p+q}} \sum_{k=0}^{2p+2q+n} c_k x^k$$

con

$$c_k = \sum_{j=0}^k b_j a_{k-j} = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j (-1)^{p+k} \binom{2p}{k} \binom{2q}{j-k} a_{k-j}$$



donde  $k = 0, \dots, 2p + 2q + n$  y  $a_j = 0$  si  $j > n$  ó  $j < 0$ .

Como  $|z| > 1$ , tenemos  $\frac{1}{x-z} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{j+1}} x^j$ , por tanto

$$f_z(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2p+2q+n} \frac{-c_k}{2^{p+q} z^{j+1}} x^{j+k-n-p-q}.$$

Entonces,  $Res(f_z, 0) = \sum_{j=0}^{p+q+n} \frac{-c_{p+q+n-j}}{2^{p+q} z^j}$ .

Supongamos ahora que  $|z| < 1$ . Entonces, dado que

$$F_{\omega}(z) - R_n(z, \tau_n) = -\overline{\left(F_{\omega}\left(\frac{1}{z}\right) - R_n\left(\frac{1}{z}, \tau_n\right)\right)}. \quad (3.23)$$

podemos deducir la siguiente expresión:

$$F_{\omega}(z) - R_n(z, \tau_n) = \begin{cases} \frac{2}{B_n^*(z, \tau_n)} \sum_{j=1}^{p+q+n} \frac{c_{p+q+n-j}}{2^{p+q}} z^j & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{-2z^n}{B_n(z, \tau_n)} \sum_{j=1}^{p+q+n} \frac{c_{p+q+n-j}}{2^{p+q}} z^j & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

Como caso particular, si tomamos  $p = q = 0$  entonces  $\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi}$  que es la medida Lebesgue y

$$c_k = \sum_{j=0}^k b_j a_{k-j} = a_k, \quad k = 0, \dots, n$$

El  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal viene dado por  $B_n(z, \tau_n) = z^n + \tau_n$  y como consecuencia  $B_n^*(z, \tau_n) = 1 + \bar{\tau}_n z^n$ . Entonces

$$F_{\omega}(z) - R_n(z, \tau_n) = \begin{cases} \frac{2}{1 + \bar{w}_n z^n} \sum_{j=0}^{p+q+n} \bar{a}_{n-j} z^j & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{-2z^n}{z^n + \tau_n} \sum_{j=0}^n a_{n-j} \frac{1}{z^j} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (3.25)$$

Pero  $a_n = 1$ ,  $a_0 = \tau_n$  y  $a_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ . Por tanto, volvemos a obtener

$$F_{\omega}(z) - R_n(z, \tau_n) = \begin{cases} \frac{2z^n}{z^n + \tau_n} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{-2\tau_n}{z^n + \tau_n} & \text{si } |z| > 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

Con el fin de dar una estimación del error en la fórmula de Szegő, definimos una cota superior  $C_1$  para  $|F_{\omega}(z) - R_n(z, \tau_n)|$  que viene dada por

$$C_1 = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} |F_{\omega}(z) - R_n(z, \tau_n)|, \quad z = r e^{i\theta}, \quad r > 0. \quad (3.27)$$

Compararemos dicha cota superior con las cuatro cotas superiores dadas en [33] y a las que denotaremos por  $C_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Dichas cotas, para  $|z| < 1$ , vienen dadas por

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{2|z|^n \delta_0 \prod_{j=1}^n (1-|\delta_j|^2) (|1+\tau_n g_n(z)| |z|^2 + |z| |1+\tau_n g_n(z)|)}{|\Phi_n^*(z)|^2 (1-|z|^2 |g_n(z)|^2) |1+\tau_n g_n(z)|} \\
C_3 &= \frac{2|z|^n \delta_0 \prod_{j=1}^n (1-|\delta_j|^2) (1+|z|)}{|\Phi_n^*(z)|^2 (1-|z g_n(z)|) |1+\tau_n g_n(z)|} \\
C_4 &= \frac{2|z|^n \delta_0 (|1+\tau_n g_n(z)| |z|^2 + |z| |1+\tau_n g_n(z)|)}{(1-|z|^2) |1+\tau_n g_n(z)|} \\
C_5 &= \frac{8|z|^n}{1-|z|^2}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

donde  $g_n(z) = \frac{\Phi_n(z)}{\Phi_n^*(z)}$  y siendo  $\delta_j$  con  $0 \leq j \leq n$  los coeficientes de reflexión. En [33] se demuestra que las cotas satisfacen  $C_2 \leq C_4 \leq C_5$  y  $C_2 \leq C_3$ .

A partir de ahora supondremos que  $\tau_n = -1$  para todo  $n$ .

Tomemos de nuevo la medida de Lebesgue. Entonces, en este caso, las cotas vendrán dadas por

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{2|z|^n}{1-|z|^n} \\
C_2 &= \frac{2|z|^n (|1-z^n| |z|^2 + |z| |1-z^n|)}{(1-|z|^{2n+2}) |1-z^n|} \\
C_3 &= \frac{2|z|^n (1+|z|)}{(1-|z|^{n+1}) |1-z^n|} \\
C_4 &= \frac{2|z|^n (|1-z^n| |z|^2 + |z| |1-z^n|)}{(1-|z|^2) |1-z^n|} \\
C_5 &= \frac{8|z|^n}{1-|z|^2}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

A continuación haremos una comparación entre las cotas dadas por (3.29) para varios números complejos  $z$  con  $|z| < 1$ . Los resultados se pueden ver en las siguientes Tablas:

$z=0.5+0.5i$	$n=3$	$n=5$	$n=8$
Error exacto	0.5547001	0.3123475	0.1333333
$C_1$	1.0938363	0.4294744	0.1333333
$C_2$	1.2030698	0.5916880	0.2179807
$C_3$	1.2625766	0.6093835	0.2381385
$C_4$	2.2557559	1.1648858	0.4351100
$C_5$	5.6568542	2.8284271	1

$z=-0.8$	$n=5$	$n=7$	$n=8$
Error exacto	0.4936129	0.3467183	0.4031880
$C_1$	0.9747739	0.5307332	0.4031880
$C_2$	1.2041689	0.7499063	0.6398581
$C_3$	1.2041689	0.7499063	083824595
$C_4$	3.1150529	2.0244399	1.7453653
$C_5$	7.2817777	4.6603377	3.7282702

$z=0.5i$	$n=3$	$n=5$	$n=8$
Error exacto	0.2480694	0.0624695	0.0078431
$C_1$	0.2857142	0.0645161	0.0078431
$C_2$	0.3746540	0.0937442	0.0117417
$C_3$	0.3969111	0.0951916	0.0117877
$C_4$	0.4975874	0.1249618	0.0156556
$C_5$	1.3333333	0.3333333	0.0416666

$z=-0.1i$	$n=2$	$n=3$	$n=5$
Error exacto	0.0198019	0.0019999	0.0000199
$C_1$	0.0202020	0.0020202	0.0000200
$C_2$	0.0218039	0.0021999	0.0000219
$C_3$	0.0218039	0.0022002	0.0000220
$C_4$	0.0220242	0.0022222	0.0000222
$C_5$	0.0808080	0.0808080	0.0808080

Como se puede observar en las tablas:  $C_1 < C_j$ ,  $j = 2, \dots, 5$ .

Finalmente, para concluir esta Sección, haremos uso de la fórmula (1.39) para dar estimaciones del error en la fórmula de cuadratura de Szegő  $\tilde{I}_n(f)$ , siendo  $f$  una función analítica en un dominio  $G$  que contenga a  $\mathbb{T}$ . A tal efecto, utilizaremos la cota superior  $C_1$ .

Tomaremos de nuevo  $\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi}$  (medida de Lebesgue), entonces, para  $\tau_n = -1$ , acabamos de ver que,

$$C_1 = \begin{cases} \frac{2|z|^n}{1-|z|^n} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{2}{|z|^n-1} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (3.30)$$

Como integrandos elegiremos las siguientes funciones:

$$f_1(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-\frac{1}{2}}, \quad f_2(z) = \frac{e^z}{z-2}, \quad f_3(z) = e^z.$$

Obsérvese que  $f_1(z)$  es analítica en el dominio  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r, \frac{1}{2} < r\}$ . Para  $f_2(z)$  tomaremos  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r, 1 < r < 2\}$  y para  $f_3(z)$  consideraremos el dominio  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r, r > 1\}$ . En lo que sigue  $\Gamma$  denotará la frontera de  $G$ .

En primer lugar, para  $f_1(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-\frac{1}{2}}$  se tiene que

$$\max_{z \in \Gamma} \left| \frac{f_1(z)}{z} \right| = \frac{e^{\frac{1}{r}}}{r(r-\frac{1}{2})}$$

y por (1.39) podemos escribir

$$\begin{aligned} |E_n(f)| &\leq \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\frac{1}{r}}}{r(r-\frac{1}{2})} \int_{\Gamma} |F_{\omega}(z) - R_n(z, -1)| |dz| \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\frac{1}{r}}}{r(r-\frac{1}{2})} \int_{\Gamma} \frac{2|z|^n}{1-|z|^n} |dz| \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\frac{1}{r}}}{r(r-\frac{1}{2})} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2r^{n+1}}{1-r^n} d\theta \\ &= \frac{r^n e^{\frac{1}{r}}}{(r-\frac{1}{2})(1-r^n)}. \end{aligned}$$

Sea  $h_n(r) = \frac{r^n e^{\frac{1}{r}}}{(r-\frac{1}{2})(1-r^n)}$ . A continuación calculamos el mínimo de esta función (en la variable  $r$ ) para diferentes valores de  $n$  obteniéndose la siguiente Tabla:

n	Error Exacto	mínimo	$h_n(r)$
10	0.0144451	r=0.552199	0.0879543
20	0.000014	r=0.52560733	0.000677
25	4.404227E-7	r=0.52039	0.0000271244

Para la función  $f_2(z) = \frac{e^z}{z-2}$  tenemos que

$$\max_{z \in \Gamma} \left| \frac{f_2(z)}{z} \right| = \frac{e^r}{r(2-r)}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} |E_n(f)| &\leq \frac{1}{4\pi} \frac{e^r}{r(2-r)} \int_{\Gamma} |F_{\omega}(z) - R_n(z, -1)| |dz| \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \frac{e^r}{r(2-r)} \int_{\Gamma} \frac{2}{|z|^{n-1}} |dz| \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{e^r}{r(2-r)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2r}{r^{n-1}} d\theta \\ &= \frac{e^r}{(2-r)(r^{n-1})}. \end{aligned}$$

En este caso,  $h_n(r) = \frac{e^r}{(2-r)(r^{n-1})}$  y ahora la tabla viene dada por:

n	Error exacto	mínimo	$h_n(r)$
10	0.0036114	r=1.78371	0.0846663
20	0.00001409	r=1.89531	0.00017767
25	1.101055E-7	r=1.91695	0.0000070455

Finalmente, para la función  $f_3(z) = e^z$  podemos escribir

$$\max_{z \in \Gamma} \left| \frac{f_3(z)}{z} \right| = \frac{e^r}{r}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
 |E_n(f)| &\leq \frac{1}{4\pi} \frac{e^r}{r} \int_{\Gamma} |F_{\omega}(z) - R_n(z, -1)| |dz| \\
 &\leq \frac{1}{4\pi} \frac{e^r}{r} \int_{\Gamma} \frac{2}{|z|^{n-1}} |dz| \\
 &= \frac{1}{4\pi} \frac{e^r}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2r}{r^{n-1}} d\theta \\
 &= \frac{e^r}{r^{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Ahora  $h_n(r) = \frac{e^r}{r^{n-1}}$  y se tiene la siguiente Tabla:

n	Error exacto	mínimo	$h_n(r)$
10	2.75573E-7	r=10	2.20265E-6
20	4.11031E-19	r=20	4.6269E-18
25	6.44695E-26	r=25	8.10703E-25

A partir de estas tres tablas se puede apreciar la “bondad” de las cotas de error, constatándose numéricamente que se acercan bastante al error exacto para cada uno de los integrandos.

### 3.4 Aplicación al intervalo $[-1, 1]$

En esta Sección analizaremos otra de las aplicaciones de las fórmulas de Szegő. En efecto, estableceremos una relación entre las fórmulas Gaussianas para el intervalo  $[-1, 1]$ , que aproximan integrales de la forma  $J_{\mu}(F) = \int_{-1}^1 F(x)\mu(x)dx$ , y las fórmulas de cuadratura de Szegő que aproximan integrales, ahora de la forma,  $I_{\omega}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta$ , cuando las funciones peso  $\mu(x)$  y  $\omega(\theta)$  se relacionan por la fórmula (1.9). En tal sentido, si tomamos  $z = e^{i\theta}$  y  $x = \frac{z+z^{-1}}{2} = \cos \theta$ , podemos escribir

$$\int_{-1}^1 F(x)\mu(x)dx = - \int_{-\pi}^0 F(\cos \theta)\mu(\cos \theta)\text{sen}\theta d\theta.$$

Por otro lado, si  $\zeta = -\theta$ , se tiene que

$$\int_{-1}^1 F(x)\mu(x)dx = \int_0^\pi F(\cos \zeta)\mu(\cos \zeta)\text{sen}\zeta d\zeta.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 F(x)\mu(x)dx &= - \int_{-\pi}^0 F(\cos \theta)\mu(\cos \theta)\text{sen}\theta d\theta + \\ &+ \int_0^\pi F(\cos \zeta)\mu(\cos \zeta)\text{sen}\zeta d\zeta \\ &= \int_{-\pi}^\pi F(\cos \theta)\mu(\cos \theta)|\text{sen}\theta|d\theta, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\int_{-1}^1 F(x)\mu(x)dx = \int_{-\pi}^\pi f(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta \quad (3.31)$$

donde  $f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}F\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) = \frac{1}{2}F(\cos \theta)$ .

Dada la simetría de la función peso  $\omega(\theta)$ , los momentos trigonométricos  $\{c_k\}$  son reales y, por lo tanto, también lo son los coeficientes de los polinomios de Szegő  $\Phi_n(z)$ . Para que los coeficientes de los correspondientes polinomios para-ortogonales  $B_n(z, \tau) = \Phi_n(z) + \tau\Phi_n^*(z)$  sean reales, debemos tomar  $\tau = \pm 1$ . Para tales valores de  $\tau$ , los ceros  $\{\xi_j\}_{j=1}^n$  de  $B_n(z, \tau)$ , que sabemos son distintos y están sobre  $\mathbb{T}$ , cumplen también cierta simetría en el sentido que aparecen en pares conjugados o son reales ( $z = \pm 1$ ).

Tomemos en primer lugar  $\tau = 1$ . Entonces, como  $\Phi_n(1) = \Phi_n^*(1) \neq 0$ , (recuérdese que los ceros de  $\Phi_n(z)$  están en la región  $|z| < 1$  y los de  $\Phi_n^*(z)$  por tanto están en la región  $|z| > 1$ ) el punto  $z = 1$  no puede ser un cero de  $B_n(z, 1)$ . Así pues, para  $n$  par, todos los ceros de  $B_n(z, 1)$  están sobre  $\mathbb{T}$  en pares conjugados. Si por el contrario  $n$  es impar, el único cero real es  $z = -1$  y los  $(n-1)$  ceros restantes aparecen sobre  $\mathbb{T}$  en pares conjugados.

Si ahora tomamos  $\tau = -1$ , claramente el punto  $z = 1$  es un cero de  $B_n(z, -1) = \Phi_n(z) - \Phi_n^*(z)$ . Para  $n$  par el punto  $z = -1$  sería también un cero (observar que  $\Phi_n(-1) = \Phi_n^*(-1)$ ). Si  $n$  es impar, el punto  $z = 1$  es el único cero real. En ambos casos, los restantes ceros aparecen en pares conjugados sobre  $\mathbb{T}$ .

Teniendo en cuenta si  $n$  es par o impar y los valores del parámetro  $\tau$  que elijamos ( $\tau = 1$  ó  $\tau = -1$ ), las correspondientes  $n$ -ésimas fórmulas de Szegő adquieren una determinada expresión. En efecto, supongamos que  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\xi_j)$  es la  $n$ -ésima fórmula de Szegő respecto a  $\omega(\theta)$ . Entonces, sabemos, por la fórmula (1.30) que los coeficientes  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  vienen dados por:

$$\lambda_j = -\frac{1}{2\xi_j} \frac{A_n(\xi_j, \tau)}{B_n'(\xi_j, \tau)}$$

donde  $A_n(z, \tau) = \Omega_n(z) - \tau \Omega_n^*(z)$ , siendo  $\Omega_n(z)$  el  $n$ -ésimo polinomio asociado a  $\Phi_n(z)$ . Si  $\tau = \pm 1$  entonces, tanto  $A_n$  como  $B_n$  tienen coeficientes reales.

Por otro lado, si denotamos por  $\tilde{\lambda}_j$  el coeficiente en la fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  correspondiente al nodo  $\bar{\xi}_j$ , siendo  $\xi_j$  un cero de  $B_n(z, \pm 1)$ , entonces se tiene que

$$\tilde{\lambda}_j = -\frac{1}{2\bar{\xi}_j} \frac{A_n(\bar{\xi}_j, \tau)}{B_n'(\bar{\xi}_j, \tau)} = -\frac{1}{2\bar{\xi}_j} \frac{\overline{A_n(\xi_j, \tau)}}{\overline{B_n'(\xi_j, \tau)}} = \bar{\lambda}_j.$$

Como  $\lambda_j > 0$ , se tiene que  $\tilde{\lambda}_j = \bar{\lambda}_j = \lambda_j$ . Así pues, hemos probado la siguiente:

**Proposición 3.4.1.** *Sea  $\omega(\theta)$  una función peso simétrica en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\xi_j)$  la  $n$ -ésima fórmula de Szegő respecto a  $\omega(\theta)$  donde sabemos que los nodos son los ceros del polinomio para-ortogonal  $B_n(z, \tau)$ ,  $|\tau| = 1$ . Entonces*

(1) Si  $\tau = 1$  se tiene

(a) Si  $n$  es par:  $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n/2} \lambda_j (f(\xi_j) + f(\bar{\xi}_j))$ .

(b) Si  $n$  es impar:  $I_n(f) = \lambda^- f(-1) + \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \lambda_j (f(\xi_j) + f(\bar{\xi}_j))$ .

(2) Si  $\tau = -1$

(a) Si  $n$  es par:  $I_n(f) = \lambda^+ f(1) + \lambda^- f(-1) + \sum_{j=1}^{(n-2)/2} \lambda_j (f(\xi_j) + f(\bar{\xi}_j))$ .

(b) Si  $n$  es impar:  $I_n(f) = \lambda^+ f(1) + \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \lambda_j (f(\xi_j) + f(\bar{\xi}_j))$ , donde todos los

coeficientes  $\lambda^+$ ,  $\lambda^-$  y  $\lambda_j$  son positivos.

**Observación 3.4.2.** *Conviene señalar que debido a la simetría de la función peso  $\omega(\theta)$ , sólo tendremos que calcular la mitad de los coeficientes y nodos en la fórmula de cuadratura*



de Szegő.

Haciendo uso de la conexión que existe entre los polinomios ortogonales sobre el intervalo  $[-1, 1]$  y sobre  $\mathbb{T}$  se tiene, mediante la fórmula (1.10), que la expresión  $z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(z^{-1})$  se puede escribir de la siguiente forma:

$$z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(z^{-1}) = \frac{\Phi_{2n}(z) + \Phi_{2n}^*(z)}{z^n} = \frac{B_{2n}(z, 1)}{z^n}.$$

Por la Proposición 3.4.1 sabemos que los ceros de  $B_{2n}(z, 1)$  aparecen sobre  $\mathbb{T}$  en pares conjugados. Sean  $\xi_1, \dots, \xi_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n$  dichos ceros. Si  $\xi_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$  entonces los ceros de  $p_n(x)$  vienen dados por  $x_j = \cos \theta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

De forma similar se tiene, por fórmula (1.11), que:

$$\frac{z^{-n-1}\Phi_{2n+2}(z) - z^{n+1}\Phi_{2n+2}(z^{-1})}{z - z^{-1}} = \frac{\Phi_{2n+2}(z) - \Phi_{2n+2}^*(z)}{z^n(z^2 - 1)} = \frac{B_{2n+2}(z, -1)}{z^n(z^2 - 1)}$$

y otra vez, por la Proposición 3.4.1 sabemos que  $z = \pm 1$  son ceros de  $B_{2n+2}(z, -1)$  y el resto aparecen sobre  $\mathbb{T}$  en pares conjugados. Sean  $\xi_1, \dots, \xi_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n$  dichos ceros. Si  $\xi_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$  entonces los ceros de  $q_n(x)$  vienen dados por  $x_j = \cos \theta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Según los valores del parámetro  $\tau$  ( $\tau = 1$  ó  $\tau = -1$ ) y según  $n$  sea par o impar, obtendremos, partiendo de fórmulas de Szegő sobre la circunferencia unidad  $I_n(f)$ , fórmulas de cuadratura  $J_n(F)$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , que serán fórmulas Gaussianas, fórmulas de Gauss-Lobatto o bien de Gauss-Radau. Así pues, para  $\tau = 1$  y  $n$  par se obtendrán las fórmulas Gaussianas. Si  $\tau = -1$  y  $n$  es par obtendremos las fórmulas de Gauss-Lobatto, mientras que, para  $\tau = \pm 1$  y  $n$  impar, se tendrán las de Gauss-Radau.

Por tanto, dividiremos esta Sección en dos subsecciones con el fin de estudiar, por un lado, la conexión con las fórmulas Gaussianas, y por otro lado, la conexión con las fórmulas de Gauss-Lobatto y Gauss-Radau.

### 3.4.1 Fórmulas de cuadratura Gaussianas

Supongamos que queremos aproximar integrales sobre el intervalo  $[-1, 1]$  de la forma  $\int_{-1}^1 F(x)\mu(x)dx$  donde  $\mu(x)$  es una función peso en  $[-1, 1]$ . Entonces si denotamos por  $J_n(F) = \sum_{j=1}^n A_j F(x_j)$  a la correspondiente  $n$ -ésima fórmula Gaussiana, sabemos que todos los coeficientes  $\{A_j\}_{j=1}^n$  son positivos y los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  son los ceros del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal respecto a  $\mu(x)$ . Además, esta fórmula de cuadratura alcanza el máximo grado de precisión que es  $2n - 1$ , es decir,  $J_\mu(F) = J_n(F)$ ,  $\forall F \in \mathbb{P}_{2n-1}$ .

Una conexión entre las fórmulas de cuadratura Gaussianas y las de Szegő, viene dada en el siguiente

**Teorema 3.4.3.** *Sea  $J_n(F) = \sum_{j=1}^n A_j F(x_j)$  la  $n$ -ésima fórmula Gaussiana para  $J_\mu(F) = \int_{-1}^1 F(x)\mu(x)dx$ . Sea  $x_j = \cos \theta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  y definamos  $\{\xi_j\}_{j=1}^{2n}$  y  $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$  de la siguiente forma:*

$$\xi_j = e^{i\theta_j}, \quad \xi_{n+j} = \bar{z}_j; \quad j = 1, \dots, n$$

y

$$\lambda_j = A_j, \quad \lambda_{n+j} = A_j; \quad j = 1, \dots, n.$$

Entonces  $I_n(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\xi_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (f(\xi_j) + f(\bar{\xi}_j))$  es la  $2n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő para  $I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta$  donde  $\omega(\theta)$  y  $\mu(x)$  están relacionadas por la fórmula (1.9) y los nodos son los ceros de  $B_{2n}(z, 1)$ .

*Demostración:* Por la caracterización de las fórmulas de cuadratura de Szegő (ver [30]), bastaría con probar que  $I_n(L) = I_\omega(L)$  para todo  $L \in \Lambda_{-(2n-1), 2n-1}$ , o, lo que es lo mismo, que  $I_n(z^k) = I_\omega(z^k)$ ,  $-(2n - 1) \leq k \leq (2n - 1)$ .

Vamos a suponer que  $k \geq 0$  (el caso  $k < 0$  es similar). Entonces

$$I_{2n}(z^k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\xi_j^k + \bar{\xi}_j^k) = 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \cos k\theta_j.$$

Si  $T_k(x)$  es el  $k$ -ésimo polinomio de Chebyshev de primera especie, entonces podemos escribir  $\cos k\theta = T_k(\cos \theta)$ . Como  $0 \leq k \leq 2n - 1$  se tiene que

$$I_{2n}(z^k) = 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j T_k(\cos \theta_j) = 2 \sum_{j=1}^n A_j T_k(x_j) = 2 \int_{-1}^1 T_k(x) \mu(x) dx.$$

Por (3.31) tendremos que

$$2 \int_{-1}^1 T_k(x) \mu(x) dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta$$

donde  $p(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} T_k \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) = \frac{1}{2} T_k(\cos \theta) = \frac{1}{2} \cos k\theta$ . En resumen, hemos probado que  $I_{2n}(z^k) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos k\theta \omega(\theta) d\theta$ .

Por otro lado,

$$I_{\omega}(z^k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} \omega(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\theta) \cos k\theta d\theta + i \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\theta) \operatorname{sen} k\theta d\theta.$$

Pero como  $\omega(\theta)$  es simétrica podemos escribir  $I_{\omega}(z^k) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos k\theta \omega(\theta) d\theta$ , para  $0 \leq k \leq 2n - 1$ . ■

El recíproco también es cierto. En efecto, se tiene el siguiente

**Teorema 3.4.4.** *Sea  $I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\xi_j)$  la  $2n$ -ésima fórmula de Szegő para  $I_{\omega}(f)$  con  $\omega(\theta)$  dada en términos de  $\mu$  mediante (1.9) y cuyos nodos son los ceros de  $B_{2n}(z, 1)$ . Sea  $\xi_{n+j} = \bar{\xi}_j$  y  $\xi_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Entonces, si definimos  $x_j = \cos \theta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , la fórmula  $J_n(F) = \sum_{j=1}^n \lambda_j F(x_j)$  es la  $n$ -ésima fórmula Gaussiana para  $J_{\mu}(F)$ .*

*Demostración:* Hemos de ver que  $J_n(p) = J_{\mu}(p)$ , para todo  $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ , o, lo que es lo mismo, que

$$J_n(x^k) = J_{\mu}(x^k), \quad 0 \leq k \leq 2n - 1$$

Como  $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$  se tiene que

$$x^k = \left( \frac{z+z^{-1}}{2} \right)^k = p(z) + p(z^{-1}) = L(z) \in \Lambda_{-k,k}, \quad (3.32)$$

donde  $p$  es un polinomio de grado  $k$  con coeficientes reales. Por tanto

$$\overline{L(z)} = L(\bar{z}) = L(z^{-1}) = L(z), \quad z = e^{i\theta}. \quad (3.33)$$

Sabemos que  $\lambda_{n+j} = \lambda_j$  y  $\xi_{n+j} = \xi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Entonces, como  $L \in \Lambda_{-k,k} \subset \Lambda_{-(2n-1),2n-1}$ ,

$$\begin{aligned} J_n(x^k) &= \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^k = \sum_{j=1}^n \lambda_j L(\xi_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j + \lambda_j}{2} L(\xi_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j L(\xi_j) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} L(e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Por otro lado, por la fórmula (3.31) :

$$J_\mu(x^k) = \int_{-1}^1 x^k \mu(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta)^k \mu(\cos \theta) |\sin \theta| d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} L(e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta = J_n(x^k)$$

para  $0 \leq k \leq 2n - 1$ . ■

**Observación 3.4.5.** *Supongamos que  $p_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$  es el polinomio nodal en la fórmula Gaussiana que sabemos coincide con el polinomio ortogonal mónico respecto de la función peso  $\mu(x)$ . Como  $x_j = \cos \theta_j$  siendo  $\xi_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$  podemos escribir*

$$\begin{aligned} B_{2n}(z, 1) &= \Phi_{2n}(z) + \Phi_{2n}^*(z) = (1 + \Phi_{2n}(0)) \prod_{j=1}^n (z - \xi_j)(z - \bar{\xi}_j) \\ &= (1 + \Phi_{2n}(0)) z^n \prod_{j=1}^n (z - \xi_j)(1 - \bar{\xi}_j/z). \end{aligned}$$

Si  $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$ , entonces  $(z - \xi_j)(z - \bar{\xi}_j/z) = (z + z^{-1}) - (\xi_j + \bar{\xi}_j) = 2(x - x_j)$ . Por tanto,

$$B_{2n}(z, 1) = (1 + \Phi_{2n}(0)) z^n 2^n p_n(x)$$

y obtenemos

$$p_n(x) = \frac{z^{-n}}{2^n(1 + \Phi_{2n}(0))} (\Phi_{2n}(z) + z^{2n}\Phi_{2n}(z^{-1})) = \frac{z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(z^{-1})}{2^n(1 + \Phi_{2n}(0))}.$$

Hemos deducido, por tanto, la fórmula (1.10) de una forma diferente y más sencilla, haciendo uso simplemente de la conexión entre las fórmulas de cuadratura.

### 3.4.2 Fórmulas de cuadratura de Gauss-Lobatto y Gauss-Radau

Supongamos inicialmente que se desea aproximar  $J_\mu(F)$  mediante una fórmula de cuadratura donde alguno de los nodos  $\{a_j\}_{j=1}^m$  han sido prefijados y los restantes  $\{x_j\}_{j=1}^n$  a determinar de modo que

$$J_n(F) = \sum_{j=1}^m B_j F(a_j) + \sum_{j=1}^n A_j F(x_j) \quad (3.34)$$

tenga el máximo grado de precisión  $2n + m - 1$ , es decir,  $J_\mu(F) = J_n(F)$  para todo  $F \in \mathbb{P}_{2n+m-1}$ . (Obsérvese que disponemos de  $2n + m$  parámetros). Entonces, tenemos el siguiente resultado de caracterización: ([18, p. 101 ])

**Teorema 3.4.6.** *La fórmula de cuadratura  $J_n(F)$  dada mediante (3.34) es exacta en  $\mathbb{P}_{2n+m-1}$  sí y sólo si*

- (1)  $J_n(F)$  es de tipo interpolatorio en  $\mathbb{P}_{n+m-1}$ .
- (2) Los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  son los ceros del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal respecto a la función  $\nu(x)\mu(x)$  donde  $\nu(x) = (x - a_1) \dots (x - a_m)$ . Además, si  $\nu(x_k) \neq 0$  para  $k = 1, \dots, n$  entonces los coeficientes  $\{B_j\}_{j=1}^m$  y  $\{A_j\}_{j=1}^n$  son positivos.

Obsérvese que en general  $\nu(x)$  cambia de signo, por lo que no puede asegurarse que el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal tenga grado  $n$  y que sus ceros estén en  $[-1, 1]$ , (ver [18, p. 106], (fórmulas de Gauss- Kronrod)).

Para  $m = 2$ ,  $a_1 = -1$  y  $a_2 = 1$  se obtienen las fórmulas de Gauss- Lobatto. En este caso, los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  son los ceros del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto a la función peso  $(1 - x^2)\mu(x)$ . Por la fórmula (1.10), los nodos vienen dados en términos de los ceros del polinomio para-ortogonal  $B_{2n+2}(z, -1)$ , el cual tiene  $2n$  ceros complejos que aparecen en pares conjugados sobre  $\mathbb{T}$  y los dos restantes son  $z = \pm 1$ . Sean  $\xi_1, \dots, \xi_{2n}$  los  $2n$  ceros complejos. Si  $\xi_{n+j} = \bar{\xi}_j = e^{-i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , vemos que, por (1.11), los ceros de  $q_n(x)$  y por tanto los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  en la fórmula (3.34) vienen dados por  $x_j = \cos \theta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

De forma análoga al Teorema 3.4.3 podemos demostrar el siguiente

**Teorema 3.4.7.** *Sea  $J_n(F) = A^+F(1) + A^-F(-1) + \sum_{j=1}^n A_jF(x_j)$  la  $n$ -ésima fórmula de Gauss- Lobatto para  $J_\mu(F) = \int_{-1}^1 F(x)\mu(x)dx$ . Sea  $x_j = \cos \theta_j$  y definamos  $\{\xi_j\}_{j=1}^{2n}$  y  $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$  de la siguiente forma:*

$$\xi_j = e^{i\theta}, \quad \xi_{n+j} = \bar{\xi}_j; \quad j = 1, \dots, n$$

y

$$\lambda^+ = A^+, \quad \lambda^- = A^-, \quad \lambda_j = A_j, \quad \lambda_{n+j} = A_j; \quad j = 1, \dots, n.$$

Entonces:

$$I_n(f) = 2\lambda^+f(1) + 2\lambda^-f(-1) + \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\xi_j) = 2\lambda^+f(1) + 2\lambda^-f(-1) + \sum_{j=1}^n \lambda_j (f(\xi_j) + f(\bar{\xi}_j))$$

es la  $(2n+2)$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő para  $I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta$  donde  $\omega(\theta)$  y  $\mu(x)$  están relacionadas por (1.9) y los nodos son los ceros de  $B_{2n+2}(z, -1)$ .

Haciendo uso de las fórmulas (3.32) y (3.33), y procediendo igual que en el Teorema 3.4.4 se tiene:

**Teorema 3.4.8.** *Sea  $I_{2n+2}(f) = \sum_{j=1}^{2n+2} \lambda_j f(\xi_j)$  la  $(2n+2)$ -ésima fórmula de Szegő para  $I_\omega(f)$  con  $\omega(\theta)$  dada en términos de  $\mu$  como en la fórmula (1.9) y cuyos nodos son los ceros de  $B_{2n+2}(z, -1)$ . Sea  $\xi_{2n+1} = 1$ ,  $\xi_{2n+2} = -1$  y  $\xi_{n+j} = \bar{\xi}_j$  con  $\xi_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Entonces si definimos  $x_j = \cos \theta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  y tomando  $\lambda^+ = \lambda_{2n+1}$  y  $\lambda^- = \lambda_{2n+2}$ , la fórmula  $J_n(F) = \frac{\lambda^+}{2}F(1) + \frac{\lambda^-}{2}F(-1) + \sum_{j=1}^n \lambda_j F(x_j)$  es la  $n$ -ésima fórmula de Gauss- Lobatto para  $J_\mu(F)$ .*

**Observación 3.4.9.** *Supongamos que  $q_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$  es el polinomio nodal en la fórmula de Gauss- Lobatto, que sabemos que coincide con el polinomio ortogonal mónico*

respecto de la función peso  $(1 - x^2)\mu(x)$ . Como  $x_j = \cos \theta_j$  siendo  $\xi_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$  podemos escribir

$$\begin{aligned} B_{2n+2}(z, -1) &= \Phi_{2n+2}(z) - \Phi_{2n+2}^*(z) = (1 - \Phi_{2n+2}(0))(z^2 - 1) \prod_{j=1}^n (z - \xi_j)(z - \bar{\xi}_j) \\ &= (1 - \Phi_{2n+2}(0))z^n(z^2 - 1) \prod_{j=1}^n (z - \xi_j)(1 - \bar{\xi}_j/z). \end{aligned}$$

Si  $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$ , entonces  $(z - \xi_j)(1 - \bar{\xi}_j/z) = (z + z^{-1}) - (\xi_j + \bar{\xi}_j) = 2(x - x_j)$ . Por tanto,

$$B_{2n+2}(z, -1) = (1 - \Phi_{2n+2}(0))z^n 2^n (z^2 - 1) q_n(x)$$

y obtenemos

$$q_n(x) = \frac{z^{-n}}{2^n(1 - \Phi_{2n+2}(0))} \left( \frac{\Phi_{2n+2}(z) - z^{2n+2}\Phi_{2n+2}(z^{-1})}{z^2 - 1} \right) = \frac{z^{-n-1}\Phi_{2n+2}(z) + z^{n+1}\Phi_{2n+2}(z^{-1})}{2^n(1 - \Phi_{2n+2}(0))(z - z^{-1})}.$$

Hemos deducido, por tanto, la fórmula (1.11) de una forma diferente y más sencilla, haciendo uso, de nuevo, de la conexión entre las fórmulas de cuadratura.

Supongamos ahora que en (3.34) elegimos  $m = 1$  y  $a_1 = 1$  ó bien  $a_1 = -1$ . En ambos casos obtendremos las fórmulas de Gauss- Radau donde los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  son los ceros del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto a la función peso  $(1 + x)\mu(x)$  (si  $a_1 = 1$ ) y  $(1 - x)\mu(x)$  (si  $a_1 = -1$ ). Dichos nodos vendrán dados en términos de los ceros de los polinomios para-ortogonales  $B_{2n+1}(z, -1)$ , (si  $a_1 = 1$ ) y  $B_{2n+1}(z, 1)$ , (si  $a_1 = -1$ ). Para fijar ideas, supongamos que  $a_1 = 1$ . Entonces el polinomio  $B_{2n+1}(z, -1)$  tiene un único cero real que es el punto  $z = 1$  y los  $2n$  restantes aparecen sobre  $\mathbb{T}$  en pares conjugados. Podemos formular teoremas para el caso de las fórmulas de Gauss- Radau análogos a los Teoremas 3.4.7 y 3.4.8 dados en el caso Gauss- Lobatto:

**Teorema 3.4.10.** *Sea  $J_n(F) = A^+F(1) + \sum_{j=1}^n A_jF(x_j)$  la  $n$ -ésima fórmula de Gauss- Radau para  $J_\mu(F) = \int_{-1}^1 F(x)\mu(x)dx$ . Sea  $x_j = \cos \theta_j$  y definamos  $\{\xi_j\}_{j=1}^{2n+1}$  y  $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n+1}$  de*

la siguiente forma:

$$\xi_j = e^{i\theta}, \quad \xi_{n+j} = \bar{\xi}_j; \quad j = 1, \dots, n, \quad \xi_{2n+1} = 1$$

y

$$\lambda_j = A_j, \quad \lambda_{n+j} = A_j; \quad j = 1, \dots, n, \quad \lambda^+ = \lambda_{2n+1} = A^+$$

Entonces  $I_n(f) = 2\lambda^+ f(1) + \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\xi_j) = 2\lambda^+ f(1) + \sum_{j=1}^n \lambda_j (f(\xi_j) + f(\bar{\xi}_j))$  es la  $(2n+1)$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő para  $I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta$  donde  $\omega(\theta)$  y  $\mu(x)$  están relacionadas por la fórmula (1.9) y los nodos son los ceros de  $B_{2n+1}(z, -1)$ .

Recíprocamente se tiene también el siguiente

**Teorema 3.4.11.** *Sea  $I_{2n+1}(f) = \sum_{j=1}^{2n+1} \lambda_j f(\xi_j)$  la  $(2n+1)$ -ésima fórmula de Szegő para  $I_\omega(f)$  con  $\omega(\theta)$  dada en términos de  $\mu$  a través de (1.9) y cuyos nodos son los ceros de  $B_{2n+1}(z, -1)$ . Sea  $\xi_{2n+1} = 1$  y  $\xi_{n+j} = \bar{\xi}_j$  con  $\xi_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Entonces si definimos  $x_j = \cos \theta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  y tomando  $\lambda^+ = \lambda_{2n+1}$ , la fórmula  $J_n(F) = \frac{\lambda^+}{2} F(1) + \sum_{j=1}^n \lambda_j F(x_j)$  es la  $n$ -ésima fórmula de Gauss-Radau para  $J_\mu(F)$ .*

Finalmente, veamos cómo puede deducirse una expresión para los polinomios ortogonales mónicos relativos a las funciones peso  $(1+x)\mu(x)$  y  $(1-x)\mu(x)$ , respectivamente, utilizando, nuevamente, la conexión entre las fórmulas de cuadratura. Así pues, tenemos el siguiente Teorema:

**Teorema 3.4.12.** *Sea  $\mu(x)$  una función peso en el intervalo  $[-1, 1]$  y consideremos las siguientes funciones peso asociadas a  $\mu(x)$  en  $[-1, 1]$ :*

$$\mu^+(x) = (1+x)\mu(x) \quad \text{y} \quad \mu^-(x) = (1-x)\mu(x).$$

Sean  $\{Q_n^+(x)\}$  y  $\{Q_n^-(x)\}$  las sucesiones de los polinomios mónicos respecto de  $\mu^+(x)$  y  $\mu^-(x)$  respectivamente. Si definimos  $\omega(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$  como en (1.9), entonces si



$x = \frac{z+z^{-1}}{2}$ , ( $z = e^{i\theta}$ ), se tiene que

$$Q_n^\pm(x) = \frac{1}{2^n(1 \pm \Phi_{2n+1}(0))} \left( \frac{z^{-n}\Phi_{2n+1}(z) \pm z^{n+1}\Phi_{2n+1}(z^{-1})}{z \pm 1} \right),$$

siendo como siempre  $\{\Phi_n(z)\}$  la sucesión de polinomios mónicos de Szegő para  $\omega(\theta)$ .

*Demostración:* Sea  $I_{2n+1}(f)$  la  $(2n+1)$ -ésima fórmula de Szegő para  $I_\omega(f)$ , donde los nodos son los ceros del polinomio para-ortogonal  $B_{2n+1}(z, 1)$ . Sabemos que, en este caso, el único cero real es el punto  $z = -1$  y los  $2n$  ceros restantes  $\{\xi_j\}_{j=1}^{2n}$  aparecen sobre  $\mathbb{T}$  en pares conjugados. Es decir,

$$I_{2n+1}(f) = \lambda^- f(-1) + \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\xi_j) = \lambda^- f(-1) + \sum_{j=1}^n \lambda_j (f(\xi_j) + f(\bar{\xi}_j)).$$

Entonces, si definimos  $x_j = \cos \theta_j$  siendo  $\xi_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , se tiene que la fórmula de cuadratura

$$J_n(F) = \lambda^- F(-1) + \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$$

para  $J_\mu(F)$  es exacta en  $\mathbb{P}_{2n}$ . Es decir, hemos obtenido la fórmula de Gauss- Radau ( $m = 1$ ) tomando ahora  $a_1 = -1$  en la fórmula (3.34).

Si  $Q_n^+(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$ , por el Teorema 3.4.6, sabemos que es el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal respecto a  $(1+x)\mu(x)$ . Entonces

$$\begin{aligned} B_{2n+1}(z, 1) &= \Phi_{2n+1}(z) + \Phi_{2n+1}^*(z) = (1 + \Phi_{2n+1}(0))(z + 1) \prod_{j=1}^n (z - \xi_j)(z - \bar{\xi}_j) \\ &= (1 + \Phi_{2n+1}(0))z^n(z + 1) \prod_{j=1}^n (z - \xi_j)(1 - \bar{\xi}_j/z) \\ &= (1 + \Phi_{2n+1}(0))2^n z^n (z + 1) Q_n^+(x). \end{aligned}$$

El caso  $\mu^-(x)$  se demuestra de forma similar. ■

En el Capítulo siguiente ilustraremos la conexión exhibida entre fórmulas de cuadratura para  $[-1, 1]$  y  $\mathbb{T}$  a través de diferentes ejemplos.



# Capítulo 4

## Fórmulas de cuadratura de Szegő para las funciones peso de Chebyshev

### 4.1 Introducción

Con la finalidad de calcular explícitamente fórmulas de cuadratura de Szegő, tomaremos casos particulares de las funciones peso de tipo Jacobi que, como ya hemos indicado, se pueden expresar en la forma:

$$\omega(\theta) = (1 - \cos \theta)^{\alpha+1/2} (1 + \cos \theta)^{\beta+1/2}, \quad \alpha, \beta > -1. \quad (4.1)$$

Más concretamente, nos centraremos en los siguientes casos:

$$\begin{aligned} \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \omega_1(\theta) &= 1 + \cos \theta \\ \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \omega_2(\theta) &= 1 - \cos \theta \\ \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \omega_3(\theta) &= \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Tales funciones representan tres de las llamadas funciones peso de Chebyshev, es decir,

funciones peso de tipo Jacobi donde  $\alpha, \beta \in \{\pm \frac{1}{2}\}$ . El caso que falta es  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  y da lugar a la función  $\omega_4(\theta) = 1$  (medida de Lebesgue) para la que se conocen muy bien las fórmulas de Szegő (ver por ejemplo [28]).

En la Sección 2 calcularemos, en primer lugar, para cada una de las funciones peso  $\omega_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , tanto los polinomios de Szegő  $\Phi_n(z)$  como sus asociados  $\Omega_n(z)$ .

Por otro lado, construiremos los polinomios para-ortogonales  $B_n(z, \tau)$  para determinados valores del parámetro  $\tau$  así como los asociados  $A_n(z, \tau)$  con el fin de dar fórmulas explícitas para los nodos y coeficientes de las correspondientes fórmulas de Szegő.

No en todos los casos se podrán construir estas fórmulas explícitamente, pero en los que esto sea posible, daremos también, en la Sección 3, cotas de error para la fórmula de cuadratura de Szegő, basándonos en la cota superior dada por (1.39), así como las medidas  $d\tilde{\omega}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  asociadas a  $\omega_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , respectivamente, respecto de las cuales se sabe que los polinomios  $\Omega_n(z)$  son ortogonales (medidas de segunda especie).

En la Sección 4, y con carácter ilustrativo, compararemos el error en las fórmulas de Szegő con las conocidas fórmulas de Gauss- Legendre. También, con el propósito de ver cómo se comportan las cotas de error, eligiremos varios integrandos y haremos una comparación entre el valor exacto del error en las fórmulas de Szegő y dichas cotas.

Finalmente, en la Sección 5 aplicaremos toda la teoría de la Sección 4 del Capítulo anterior a las funciones peso de Chebyshev, es decir, partiendo de las fórmulas de Szegő deduciremos las correspondientes fórmulas de tipo Gauss en el intervalo  $[-1, 1]$ .

## 4.2 Cálculo de nodos y coeficientes

Considerando las funciones peso (4.1) y tal y como hemos mencionado ya en la Introducción, para calcular las fórmulas de Szegő, (sus nodos y coeficientes), nos centraremos en las funciones peso  $\omega_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  dadas por (4.2).

A la hora de computar los polinomios de Szegő  $\Phi_n(z)$  a través de las relaciones de recurrencia, se hace preciso determinar los coeficientes de reflexión  $\delta_n := \Phi_n(0)$ . En este sentido, cabe señalar que, teniendo en cuenta la conexión entre los polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad y sobre el intervalo  $[-1, 1]$ , en [36] se probó que para las funciones peso de tipo Jacobi, los polinomios de Szegő mónicos satisfacen:

$$\Phi_n(0) = \frac{\alpha + \frac{1}{2} + (-1)^n(\beta + \frac{1}{2})}{n + \alpha + \beta + 1}. \quad (4.3)$$

En primer lugar, estudiaremos en detalle todo lo relativo a la función peso de Chebyshev normalizada  $\omega_3(\theta) = \frac{\text{sen}^2(\theta)}{2\pi}$ . En este caso la sucesión de momentos viene dada por  $\mu_0 = 1/2$ ,  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = -1/4$  y  $\mu_k = 0 \forall k \geq 3$ . Por la fórmula (4.3) los coeficientes de reflexión son  $\delta_n := \Phi_n(0) = \frac{1+(-1)^n}{n+2}$ . Así pues, los polinomios de Szegő se pueden computar recursivamente obteniéndose, para los primeros valores de  $n$ , lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= \frac{1}{2} + z^2 & \Phi_3(z) &= z \left( \frac{1}{2} + z^2 \right) \\ \Phi_4(z) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^2 + z^4 & \Phi_5(z) &= z \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^2 + z^4 \right). \end{aligned}$$

Como regla general, hemos deducido la siguiente

**Proposición 4.2.1.** *La sucesión  $\{\Phi_n\}$ , donde*

$$\Phi_n(z) = \begin{cases} \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^{n/2} (k+1)z^{2k} & \text{si } n \text{ es par} \\ z \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (k+1)z^{2k} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (4.4)$$

*es la sucesión de los polinomios mónicos de Szegő con respecto a la función peso  $\omega(\theta) = \frac{\text{sen}^2(\theta)}{2\pi}$ , para todo  $n$ .*

*Demostración:* Supongamos que  $n$  es par, entonces:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n(z), z^k \rangle_{\omega_3} &= \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} \frac{\text{sen}^2(\theta)}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\left( \frac{-1}{2n+4} \sum_{j=0}^{n/2} (j+1)z^{2j} \right) (z^2-1)^2}{z^{k+3}} dz \\ &= \text{Res}(h, 0) \end{aligned}$$

donde  $h(z) = \frac{\left(\frac{-1}{2n+4} \sum_{j=0}^{n/2} (j+1)z^{2j}\right)(z^2-1)^2}{z^{k+3}}$ . Por tanto:

$$h(z) = \frac{-1}{2n+4} \left( \sum_{j=0}^{n/2} \frac{j+1}{z^{k-2j-1}} + \sum_{j=0}^{n/2} \frac{-2(j+1)}{z^{k-2j+1}} + \sum_{j=0}^{n/2} \frac{j+1}{z^{k-2j+3}} \right).$$

Observar que, si  $k$  es impar entonces  $Res(h, 0) = 0$ . Si  $k = 0$  se tiene

$$Res(h, 0) = \frac{-1}{2n+4}(-2+2) = 0.$$

Si  $2 \leq k \leq n-2$

$$Res(h, 0) = \frac{-1}{2n+4} \left( \frac{k-2}{2} + 1 - 2 \left( \frac{k}{2} + 1 \right) + \frac{k+2}{2} + 1 \right) = 0.$$

Si  $k = n$

$$Res(h, 0) = \frac{-1}{2n+4} \left( \frac{n}{2} - n - 2 \right) = \frac{n+4}{4(n+2)} \neq 0.$$

Si  $n$  es impar, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n(z), z^k \rangle_{\omega_3} &= \langle z\Phi_{n-1}(z), z^k \rangle_{\omega_3} \\ &= \langle \Phi_{n-1}(z), z^{k-1} \rangle_{\omega_3} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq k \leq n-1 \\ \frac{n+4}{4(n+2)} & \text{si } k = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $k = 0$ ,

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n(z), 1 \rangle_{\omega_3} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{z\Phi_{n-1}(z)(z^2-1)^2}{-4z^3} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_{n-1}(z)(z^2-1)^2}{-4z^2} dz \\ &= Res(h, 0) \end{aligned}$$

donde

$$h(z) = \frac{-1}{2(n+1)} \left( \sum_{j=0}^{(n-1)/2} (j+1)(z^{2j+2}) + \sum_{j=0}^{(n-1)/2} (-2(j+1))(z^{2j}) + \sum_{j=0}^{(n-1)/2} (j+1)(z^{2j-2}) \right).$$

Por tanto,  $Res(h, 0) = 0$  y para todo  $n$ , tenemos que:

$$\langle \Phi_n(z), z^k \rangle_{\omega_3} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ \frac{n+4}{4(n+2)} & \text{si } k = n. \end{cases}$$

■

**Observación 4.2.2.** *La expresión (4.4) de los polinomios de Szegő con respecto a la función peso  $\omega_3(\theta) = \frac{\text{sen}\theta}{2\pi}$  (y en general también para  $\omega_1$  y  $\omega_2$ ) ya ha sido obtenida con anterioridad. Por ejemplo ver [26], teniendo en cuenta que  $\frac{\text{sen}\theta}{2\pi} = \frac{|1-z^2|^2}{2} \frac{1}{2\pi}$ , (modificación racional de la medida de Lebesgue). Ver también [25] y [36].*

Los correspondientes polinomios asociados para los primeros valores de  $n$  vienen dados por: (recuérdese que satisfacen la misma ley de recurrencia que los  $\Phi_n(z)$ )

$$\begin{aligned}\Omega_0(z) &= -\frac{1}{2} & \Omega_1(z) &= -\frac{1}{2}z \\ \Omega_2(z) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}z^2 & \Omega_3(z) &= z\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}z^2\right) \\ \Omega_4(z) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{2}z^4 & \Omega_5(z) &= z\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{2}z^4\right).\end{aligned}$$

Como regla general se tiene la siguiente

**Proposición 4.2.3.** *La sucesión  $\{\Omega_n\}$ , donde*

$$\begin{aligned}\Omega_n(z) &= \frac{1}{n+2} \frac{1-z^n}{1-z^2} - \frac{1}{2}z^n & \text{para } n \text{ par} \\ \Omega_n(z) &= z \left( \frac{1}{n+1} \frac{1-z^{n-1}}{1-z^2} - \frac{1}{2}z^{n-1} \right) = z\Omega_{n-1}(z) & \text{para } n \text{ impar}\end{aligned}\tag{4.5}$$

es la sucesión de polinomios asociados con respecto a la función peso  $\omega(\theta) = \frac{\text{sen}^2(\theta)}{2\pi}$ , para todo  $n$ .

*Demostración:* Para  $n$  par:

$$\begin{aligned}z\Omega_{n-1}(z) - \delta_n\Omega_{n-1}^*(z) &= z^2\Omega_{n-2}(z) - \delta_n\Omega_{n-2}^*(z) \\ &= z^2 \left( \frac{1}{n} \frac{1-z^{n-2}}{1-z^2} - \frac{1}{2}z^{n-2} \right) - \frac{2}{n+2} \left( \frac{1}{n} \frac{z^2(1-z^{n-2})}{1-z^2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{z^2(1-z^{n-2})}{1-z^2} - \frac{1}{n(n+2)} \frac{z^2(1-z^{n-2})}{1-z^2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}z^{n-2} \\ &= \frac{1}{n(n+2)(1-z^2)} \left( (n+2)z^2(1-z^{n-2}) - 2z^2(1-z^{n-2}) + (1-z^2)n \right) - \frac{1}{2}z^n \\ &= \frac{1}{n(n+2)(1-z^2)} \left( (n+2)z^2 - (n+2)z^n - 2z^2 + 2z^n + n - nz^2 \right) - \frac{1}{2}z^n \\ &= \frac{1}{n(n+2)(1-z^2)} \left( -nz^n + n \right) - \frac{1}{2}z^n \\ &= \frac{1}{n+2} \frac{1-z^n}{1-z^2} - \frac{1}{2}z^n \\ &= \Omega_n(z).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\delta_n z \Omega_{n-1}(z) - \Omega_{n-1}^*(z) &= \delta_n z^2 \Omega_{n-2}(z) - \Omega_{n-2}^*(z) \\
&= \frac{2}{n+2} z^2 \left( \frac{1}{n} \frac{1-z^{n-2}}{1-z^2} - \frac{1}{2} z^{n-2} \right) - \left( \frac{1}{n} \frac{z^2(1-z^{n-2})}{1-z^2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{2}{n(n+2)} \frac{z^2(1-z^{n-2})}{1-z^2} - \frac{1}{n} \frac{z^2(1-z^{n-2})}{1-z^2} - \frac{1}{n+2} z^n + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{n(n+2)(1-z^2)} (2z^2(1-z^{n-2}) - (n+2)z^2(1-z^{n-2}) - (1-z^2)nz^n) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{n(n+2)(1-z^2)} (-nz^2 + nz^n - nz^n + nz^{n+2}) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{n(n+2)(1-z^2)} (-nz^2(1-z^n)) + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{n+2} \frac{z^2(1-z^n)}{1-z^2} + \frac{1}{2} \\
&= -\Omega_n^*(z).
\end{aligned}$$

Para  $n$  impar, como  $\delta_n = 0$ ,

$$z \Omega_{n-1}(z) - \delta_n \Omega_{n-1}^*(z) = z \Omega_{n-1}(z) = \Omega_n(z)$$

$$\delta_n z \Omega_{n-1}(z) - \Omega_{n-1}^*(z) = -\Omega_{n-1}^*(z) = -\Omega_n^*(z).$$

Acabamos de ver que los polinomios  $\Omega_n$ , definidos anteriormente, con  $\Omega_0(z) = -\frac{1}{2}$ , satisfacen las relaciones de recurrencia dadas por (1.14). ■

Una vez deducida la sucesión  $\{\Phi_n(z)\}$  de polinomios mónicos de Szegő dada por (4.4), podemos construir los polinomios para-ortogonales  $B_n(z, \tau_n) = \Phi_n(z) + \tau_n \Phi_n^*(z)$  con  $|\tau_n| = 1$ . Si tomamos  $\tau_n = 1$  y  $\tau_n = -1$ ,  $\forall n$  tenemos las siguientes expresiones para los polinomios para-ortogonales:

**Proposición 4.2.4.**

$$B_{2n}(z, 1) = \frac{(n+2)}{n+1} \frac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}, \quad B_{2n}(z, -1) = \frac{1}{n+1} \frac{-n(1-z^{2n+4}) + (n+2)z^2(1-z^{2n})}{(1-z^2)^2} \quad (4.6)$$

y

$$B_{2n+1}(z, 1) = \frac{(n+1)(1-z^{2n+4}) + (n+2)z(1-z^{2n+2})}{(n+1)(1-z^2)(1+z)} \quad (4.7)$$

$$B_{2n+1}(z, -1) = \frac{-(n+1)(1-z^{2n+4}) + (n+2)z(1-z^{2n+2})}{(n+1)(1-z^2)(1-z)}.$$



*Demostración:*

$$\begin{aligned}
B_{2n}(z, 1) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1)z^{2k} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (n-k+1)z^{2k} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n ((k+1) + (n-k+1)) z^{2k} = \frac{n+2}{n+1} \sum_{k=0}^n z^{2k} \\
&= \frac{(n+2)}{n+1} \frac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}.
\end{aligned}$$

De forma análoga se tiene

$$\begin{aligned}
B_{2n}(z, -1) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1)z^{2k} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (n-k+1)z^{2k} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n ((k+1) - (n-k+1)) z^{2k} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (2k-n)z^{2k} \\
&= \frac{1}{n+1} \left( 2 \sum_{k=0}^n k(z^2)^k - n \sum_{k=0}^n (z^2)^k \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{2z^2 - 2(n+1)z^{2n+2} + 2nz^{2n+4}}{(1-z^2)^2} - n \frac{1-z^{2n+2}}{1-z^2} \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{2z^2 - 2(n+1)z^{2n+2} + 2nz^{2n+4} - n(-z^{2n+2})(1-z^2)}{(1-z^2)^2} \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{(n+2)z^2 - (n+2)z^{2n+2} + nz^{2n+4} - n}{(1-z^2)^2} \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{-n(1-z^{2n+4}) + (n+2)z^2(1-z^{2n})}{(1-z^2)^2}.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
B_{2n+1}(z, 1) &= \Phi_{2n+1}(z) + \Phi_{2n+1}^*(z) = z\Phi_{2n}(z) + \Phi_{2n}^*(z) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1)z^{2k+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (n-k+1)z^{2k} \\
&= \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=0}^n (k+1)z^{2k+1} + \sum_{k=0}^n (n-k+1)z^{2k} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} (z-1) \sum_{k=0}^n k(z^2)^k + (z+1+n) \sum_{k=0}^n (z^2)^k \\
&= \frac{1}{n+1} \left( (z-1) \frac{z^2 - (n+1)z^{2n+2} + nz^{2n+4}}{(1-z^2)^2} + (1+z) \frac{1-z^{2n+2}}{1-z^2} + n \frac{1-z^{2n+2}}{1-z^2} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left( \frac{z^2 - (n+1)z^{2n+2} + nz^{2n+4}}{(1+z)^2(z-1)} + \frac{1-z^{2n+2}}{1-z} + n \frac{1-z^{2n+2}}{(1-z)(1+z)} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left( \frac{z^2 - (n+1)z^{2n+2} + nz^{2n+4} - (1+z)^2(1-z^{2n+2}) - n(1+z)(1-z^{2n+2})}{(z^2-1)(1+z)} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left( \frac{(n+1)z^{2n+4} - (n+1) - (n+2)z + (n+2)z^{2n+3}}{(z^2-1)(1+z)} \right) \\
&= \frac{(n+1)(1-z^{2n+4}) + (n+2)z(1-z^{2n+2})}{(n+1)(1-z^2)(1+z)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{2n+1}(z, -1) &= \Phi_{2n+1}(z) - \Phi_{2n+1}^*(z) = z\Phi_{2n}(z) - \Phi_{2n}^*(z) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1)z^{2k+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (n-k+1)z^{2k} \\
&= \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=0}^n (k+1)z^{2k+1} - \sum_{k=0}^n (n-k+1)z^{2k} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} (z+1) \sum_{k=0}^n k(z^2)^k + (z-1-n) \sum_{k=0}^n (z^2)^k \\
&= \frac{1}{n+1} \left( (z+1) \frac{z^2-(n+1)z^{2n+2}+nz^{2n+4}}{(1-z^2)^2} + (z-1) \frac{1-z^{2n+2}}{1-z^2} - n \frac{1-z^{2n+2}}{1-z^2} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left( \frac{z^2-(n+1)z^{2n+2}+nz^{2n+4}}{(1-z)^2(z+1)} - \frac{1-z^{2n+2}}{1-z} - n \frac{1-z^{2n+2}}{(1-z)(1+z)} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left( \frac{z^2-(n+1)z^{2n+2}+nz^{2n+4}-(z-1)^2(1-z^{2n+2})+n(z-1)(1-z^{2n+2})}{(z^2-1)(z-1)} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left( \frac{(n+1)z^{2n+4}-(n+1)+(n+2)z-(n+2)z^{2n+3}}{(z^2-1)(1+z)} \right) \\
&= \frac{-(n+1)(1-z^{2n+4})+(n+2)z(1-z^{2n+2})}{(n+1)(1-z^2)(1-z)}.
\end{aligned}$$

■

De la misma manera podemos construir los polinomios,  $A_n(z, \tau_n) = \Omega_n(z) - \tau_n \Omega_n^*(z)$ , tomando  $\tau_n = \pm 1, \forall n$ . En efecto, si la sucesión  $\{\Omega_n\}$  es la dada por la fórmula (4.5), vale la siguiente

### Proposición 4.2.5.

$$A_{2n}(z, 1) = \frac{n+2}{2(n+1)}(1 - z^{2n}), \quad A_{2n}(z, -1) = \frac{n(z^{2n+2}-1)}{2(n+1)(1-z^2)} + \frac{(n+2)z^2(1-z^{2n-2})}{2(n+1)(1-z^2)} \quad (4.8)$$

y

$$A_{2n+1}(z, 1) = \frac{z(1-z^{2n})}{2(n+1)(1+z)} + \frac{1}{2}(1 - z^{2n+1}), \quad A_{2n+1}(z, -1) = \frac{z(1-z^{2n})}{2(n+1)(1-z)} - \frac{1}{2}(1 + z^{2n+1}). \quad (4.9)$$

*Demostración:*

$$\begin{aligned}
A_{2n}(z, 1) &= \left( \frac{1}{2n+2} \frac{1-z^{2n}}{1-z^2} - \frac{1}{2} z^{2n} \right) - \left( \frac{1}{2n+2} \frac{z^2(1-z^{2n})}{1-z^2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2(2n+2)(1-z^2)} (2(1-z^{2n}) - 2z^2(1-z^{2n}) + (1-z^{2n})(2n+2)(1-z^2)) \\
&= \frac{1}{2(2n+2)(1-z^2)} ((2n+4) - (2n+4)z^2 - (2n+4)z^{2n} + (2n+4)z^{2n+2}) \\
&= \frac{n+4}{2(2n+2)(1-z^2)} (1-z^2 - z^{2n} + z^{2n+2}) \\
&= \frac{2n+4}{2(2n+2)(1-z^2)} ((1-z^2)(1-z^{2n})) \\
&= \frac{n+2}{2(n+1)} (1-z^{2n}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2n}(z, -1) &= \left( \frac{1}{2n+2} \frac{1-z^{2n}}{1-z^2} - \frac{1}{2} z^{2n} \right) + \left( \frac{1}{2n+2} \frac{z^2(1-z^{2n})}{1-z^2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2(2n+2)(1-z^2)} (2(1-z^{2n}) + 2z^2(1-z^{2n}) - (1+z^{2n})(2n+2)(1-z^2)) \\
&= \frac{1}{2(2n+2)(1-z^2)} (-2n - (2n+4)z^2 - (2n+4)z^{2n} + 2nz^{2n+2}) \\
&= \frac{n(z^{2n+2}-1)}{2(n+1)(1-z^2)} + \frac{(n+2)z^2(1-z^{2n-2})}{2(n+1)(1-z^2)}.
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
A_{2n+1}(z, 1) &= \Omega_{2n+1}(z) - \Omega_{2n+1}^*(z) = z\Omega_{2n}(z) - \Omega_{2n}^*(z) \\
&= z \left( \frac{1}{2(n+1)} \frac{1-z^{2n}}{1-z^2} - \frac{1}{2} z^{2n} \right) - \left( \frac{1}{2(n+1)} \frac{z^2(1-z^{2n})}{1-z^2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2(n+1)(1-z^2)} (z(1-z^{2n}) - z^2(1-z^{2n}) + (1-z^{2n+1})(n+1)(1-z^2)) \\
&= \frac{1}{2(n+1)(1-z^2)} (z(1-z^{2n})(1-z) + (1-z^{2n+1})(n+1)(1-z^2)) \\
&= \frac{z(1-z^{2n})}{2(n+1)(1+z)} + \frac{1}{2}(1-z^{2n+1}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2n+1}(z, -1) &= \Omega_{2n+1}(z) + \Omega_{2n+1}^*(z) = z\Omega_{2n}(z) + \Omega_{2n}^*(z) \\
&= z \left( \frac{1}{2(n+1)} \frac{1-z^{2n}}{1-z^2} - \frac{1}{2} z^{2n} \right) + \left( \frac{1}{2(n+1)} \frac{z^2(1-z^{2n})}{1-z^2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2(n+1)(1-z^2)} (z(1-z^{2n}) + z^2(1-z^{2n}) - (1+z^{2n+1})(n+1)(1-z^2)) \\
&= \frac{1}{2(n+1)(1-z^2)} (z(1-z^{2n})(1+z) - (1+z^{2n+1})(n+1)(1-z^2)) \\
&= \frac{z(1-z^{2n})}{2(n+1)(1-z)} - \frac{1}{2}(1+z^{2n+1}).
\end{aligned}$$

■

Una vez hechos estos cálculos preliminares, estamos ahora en disposición de determinar los nodos y coeficientes de las fórmulas de Szegő. En efecto, sabemos que si  $\{\xi_k\}_{k=1}^n$

denotan los ceros de  $B_n(z, \tau)$  entonces, los coeficientes de la fórmula de cuadratura de Szegő se pueden escribir en la forma  $\lambda_k = \frac{-1}{2\xi_k} \frac{A_n(\xi_k, \tau)}{B'_n(\xi_k, \tau)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . De modo que si  $A_n$  y  $B_n$  vienen dados por (4.8) y (4.6) respectivamente, para  $n$  par, obtenemos:

$$\begin{aligned} B'_n(z, 1) &= \frac{n+4}{n+2} \frac{-(n+2)z^{n+1}(1-z^2) - (1-z^{n+2})(-2z)}{(1-z^2)^2} \\ &= \frac{n+4}{n+2} \frac{-(n+2)z^{n+1} + (n+2)z^{n+3} + 2z - 2z^{n+3}}{(1+z)^2} \\ &= \frac{n+4}{n+2} z \left( \frac{2 - (n+2)z^n + nz^{n+2}}{(1-z^2)^2} \right). \end{aligned}$$

En este caso, los nodos son  $\xi_k = e^{i\theta_k} = e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}}$ ,  $k = 2, \dots, n+2$ ,  $k \neq \frac{n}{2} + 2$ . Por tanto, para estos valores del parámetro  $k$  y por fórmula (1.30) resultará:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{-1}{2e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}}} \frac{1 - \left(-e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}}\right)^n}{2e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}} \frac{2(k-1)\pi i}{- (n+2) \left(e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}}\right)^n + n+2}} \\ &= -\frac{1}{4e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}}} \frac{1 - e^{\frac{2(k-1)n\pi i}{n+2}}}{(n+2)(1 - e^{\frac{2(k-1)n\pi i}{n+2}})} \left(1 - e^{\frac{4(k-1)n\pi i}{n+2}}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{4(n+2)} \frac{1 - 2e^{\frac{4(k-1)\pi i}{n+2}} + e^{\frac{8(k-1)\pi i}{n+2}}}{e^{\frac{4(k-1)\pi i}{n+2}}} \\ &= -\frac{1}{4(n+2)} \left(-2 + 2\Re\left(e^{\frac{4(k-1)\pi i}{n+2}}\right)\right) \\ &= \frac{1 - \cos\left(\frac{4(k-1)\pi}{n+2}\right)}{2(n+2)} = \frac{2\pi\omega_3(\theta_k)}{n+2}. \end{aligned}$$

En resumen, hemos probado el siguiente

**Teorema 4.2.6.** *Los coeficientes de la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő para  $n$  par y  $\tau_n = 1$ , con respecto a la función peso  $\omega_3(\theta) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}$ , son:*

$$\lambda_k = \frac{2\pi\omega_3(\theta_k)}{n+2}, \quad k = 2, \dots, n+2, \quad k \neq \frac{n}{2} + 2$$

viniendo los nodos dados explícitamente por  $\xi_k = e^{i\theta_k} = e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}}$ ,  $k = 2, \dots, n+2$ ,  $k \neq \frac{n}{2} + 2$ .

**Observación 4.2.7.** *Téngase en cuenta que la correspondiente  $n$ -ésima fórmula de Szegő*

calculada anteriormente se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega_3(\theta)d\theta &\approx \sum_{k=2, k \neq \frac{n}{2}+2}^{n+2} \lambda_k f(e^{i\theta_k}) \\ &= \sum_{k=2, k \neq \frac{n}{2}+2}^{n+2} \frac{2\pi\omega_3(\theta_k)}{n+2} f(e^{i\theta_k}) \\ &= \frac{2\pi}{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} f(e^{i\theta_k})\omega_3(\theta_k) \end{aligned}$$

con  $\theta_k = \frac{2(k-1)\pi}{n+2}$ ,  $k = 1, \dots, 2n+2$ .

Vemos pues que la  $n$ -ésima fórmula de Szegő con respecto a  $\omega_3$  coincide con la  $(n+2)$ -ésima fórmula de Szegő respecto a la medida de Lebesgue, si consideramos todo el integrando  $f(e^{i\theta})\omega_3(\theta)$ .

Cuando  $\tau_n \neq 1$  no hemos podido, en general, obtener fórmulas explícitas para los nodos y coeficientes. Con el objetivo de ilustrarlo, se han calculado los coeficientes y nodos para algunos valores de  $n$  par siendo  $\tau_n = -1$ . Si tomamos, por ejemplo,  $n = 4$  entonces:

$$B_4(z, -1) = \frac{2}{3}(z^4 - 1) \quad \text{y} \quad A_4(z, -1) = -\frac{1}{3}(z^4 - z^2 + 1).$$

En consecuencia, los nodos  $\{\xi_k\}_{k=1}^4$  y los coeficientes  $\{\lambda_k\}_{k=1}^4$  vendrán dados por

$$\xi_1 = 1 \quad \xi_2 = -1 \quad \xi_3 = i \quad \xi_4 = -i$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.0625 \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0.1875.$$

Si ahora  $n = 6$  en este caso se tiene que

$$B_6(z, -1) = \frac{1}{4}(3z^6 + z^4 - z^2 - 3) \quad \text{y} \quad A_6(z, -1) = -\frac{1}{8}(3z^6 - 2z^4 - 2z^2 + 3)$$

y los pesos  $\{\xi_k\}_{k=1}^6$  y coeficientes  $\{\lambda_k\}_{k=1}^6$  serán

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1 & \xi_2 &= -1 \\ \xi_3 &= 0.408248 + 0.912871i & \xi_4 &= 0.408248 - 0.912871i \\ \xi_5 &= -0.408248 - 0.912871i & \xi_6 &= -0.408248 + 0.912871i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 0.025 && \text{si } k = 1, 2 \\ \lambda_k &= 0.1125000066 && \text{si } 3 \leq k \leq 6. \end{aligned}$$

Como para el resto de las funciones peso de Chebyshev normalizadas, es decir,  $\omega_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$  y  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$ , los cálculos son muy parecidos a los efectuados para  $\omega_3(\theta)$ , los omitiremos y expondremos los resultados directamente.

En la Tabla 1 se puede ver la expresión de los polinomios de Szegő  $\Phi_n(z)$  y de los asociados  $\Omega_n(z)$  con respecto a  $\omega_1(\theta)$  y  $\omega_2(\theta)$ .

<i>Tabla 1</i>		
$\omega(\theta)$	$\Phi_n(z)$	$\Omega_n(z)$
$\omega_1(\theta)$	$\Phi_n(z) = \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k (k+1) z^k$	$\Omega_n(z) = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1+(-1)^{n-1} z^n}{1+z} - z^n$
$\omega_2(\theta)$	$\Phi_n(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1) z^k$	$\Omega_n(z) = \frac{1}{n+1} \frac{1-z^n}{1-z} - z^n$

**Observación 4.2.8.** *Procediendo de igual forma que en la demostración de la Proposición 3.1, se puede comprobar que*

$$\langle \Phi_n(z), z^k \rangle_{\omega_j} = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad j = 1, 2.$$

Los polinomios para-ortogonales  $B_n(z, \tau)$  y los asociados  $A_n(z, \tau)$ , ( $|\tau| = 1$ ), se han calculado para  $\tau = \pm 1$ . Los resultados se muestran en las Tablas 2 y 3:

<i>Tabla 2</i>	
$\omega(\theta)$	$B_n(z, \tau)$
$\omega_1(\theta)$	$B_n(z, (-1)^n) = \frac{(-1)^n(n+2)}{n+1} \frac{1+(-1)^n z^{n+1}}{1+z}$ $B_n(z, (-1)^{n+1}) = \frac{1}{n+1} \frac{n(z^{n+2}-(-1)^n) + (n+2)z(z^n - (-1)^n)}{(1+z)^2}$
$\omega_2(\theta)$	$B_n(z, 1) = \frac{(n+2)}{n+1} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ $B_n(z, -1) = \frac{1}{n+1} \frac{n(z^{n+2}-1) - (n+2)z(z^n - 1)}{(1-z)^2}$

<i>Tabla 3</i>	
$\omega(\theta)$	$A_n(z, \tau)$
$\omega_1(\theta)$	$A_n(z, (-1)^n) = \frac{(-1)^n(n+2)}{n+1} (1 - z^n)$ $A_n(z, (-1)^{n+1}) = \frac{(-1)^n n(1 - (-1)^{n+1} z^{n+1})}{(n+1)(1-z)} + \frac{(-1)^n(n+2)z(1 + (-1)^n z^{n-1})}{(n+1)(1+z)}$
$\omega_2(\theta)$	$A_n(z, 1) = \frac{n+2}{n+1} (1 - z^n)$ $A_n(z, -1) = \frac{n(z^{n+1}-1)}{(n+1)(1-z)} + \frac{(n+2)z(1-z^{n-1})}{(n+1)(1-z)}$

Si en el caso de la función peso  $\omega_1$  tomamos  $\tau = (-1)^n$  para el cual las expresiones de  $B_n(z, (-1)^n)$  y  $A_n(z, (-1)^n)$  son más sencillas, obtenemos el siguiente teorema donde se dan, tanto los nodos como los coeficientes de la fórmula de cuadratura de Szegő con respecto a dicha función peso:

**Teorema 4.2.9.** *Los coeficientes de la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő con respecto a la función peso  $\omega_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$  tomando  $\tau_n = (-1)^n$  son:*

$$\lambda_k = \begin{cases} \frac{2\pi}{n+1} \omega_1(\theta_k) & \text{si } n \text{ es impar, } 1 \leq k \leq n+1, k \neq \frac{n+1}{2} + 1 \\ \frac{2\pi}{n+1} \omega_1(\theta_k) & \text{si } n \text{ es par, } 1 \leq k \leq n+1, k \neq \frac{n}{2} + 1 \end{cases}$$

y los nodos vienen dados por  $\xi_k = e^{i\theta_k}$  siendo

$$\theta_k = \begin{cases} \frac{2(k-1)\pi}{n+1} & \text{si } n \text{ es impar, } 1 \leq k \leq n+1, k \neq \frac{n+1}{2} + 1 \\ \frac{(2k-1)\pi}{n+1} & \text{si } n \text{ es par, } 1 \leq k \leq n+1, k \neq \frac{n}{2} + 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

Si para la función peso  $\omega_2$  elegimos  $\tau = 1$ , tendremos el siguiente

**Teorema 4.2.10.** *Los coeficientes de la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő con respecto a la función peso  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$  y  $\tau_n = 1$  son:*

$$\lambda_k = \frac{2\pi}{n+1} \omega_2(\theta_k)$$

y los nodos son  $\xi_k = e^{i\theta_k}$  con  $\theta_k = \frac{2(k-1)\pi}{n+1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Finalmente, digamos que para estas dos funciones peso,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , se puede obtener un resultado análogo al dado en la observación 4.2.7.

### 4.3 Estimación del error

En esta Sección daremos estimaciones del error para la fórmula de cuadratura de Szegő respecto a las funciones peso  $\omega_k(\theta)$ ,  $k = 1, 2, 3$  definidas en la Sección anterior. También calcularemos las medidas respecto de las cuales los polinomios de Szegő asociados  $\{\Omega_n(z)\}$  son ortogonales (medidas de segunda especie).

Con el fin de obtener una cota superior como la dada en la fórmula (1.39) así como la medida de segunda especie asociada a la función peso  $\omega(\theta) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}$ , vamos a calcular la transformada de Herglotz-Riesz:

$$\begin{aligned} F_{\omega_3}(z) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \frac{\text{sen}^2(\theta)}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{-(w+z)(w^2-1)^2}{4w^3(w-z)} dw \\ &= \begin{cases} \text{Res}(h, 0) + \text{Res}(h, z) & \text{si } |z| < 1 \\ \text{Res}(h, 0) & \text{si } |z| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$



donde  $h(w) = \frac{-(w+z)(w^2-1)^2}{4w^3(w-z)}$ . Como

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{-1}{z^{j+1}} \right) w^j$$

y

$$\frac{-(w+z)(w^2-1)^2}{4w^3(w-z)} = \frac{-w^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{-1}{4w^2} + \frac{-zw}{4} + \frac{z}{2w} + \frac{-z}{4w^3}$$

entonces

$$\text{Res}(h, 0) = \frac{1}{4z^2} + \frac{-z}{2z} + \frac{z}{4z^3} = \frac{1-z^2}{2z^2} \quad \text{y} \quad \text{Res}(h, z) = \frac{-2z(z^2-1)^2}{4z^3} = \frac{-(z^2-1)^2}{2z^2}.$$

Por tanto

$$F_{\omega_3}(z) = \begin{cases} \frac{1-z^2}{2} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{1-z^2}{2z^2} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (4.11)$$

Téngase en cuenta que como los únicos momentos no nulos son  $\mu_0$  y  $\mu_2$ , entonces

$$F_{\omega_3}(z) = \mu_0 + 2\mu_2 z^2 = \frac{1-z^2}{2}, \quad \text{si } |z| < 1.$$

En resumen, tenemos la siguiente

**Proposición 4.3.1.** *La transformada de Herglotz-Riesz asociada la función peso  $\omega_3(\theta) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}$ , viene dada por*

$$F_{\omega_3}(z) = \begin{cases} \frac{1-z^2}{2} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{1-z^2}{2z^2} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (4.12)$$

De aquí podemos establecer inmediatamente el siguiente

**Corolario 4.3.2.**  $d\tilde{\omega}_3(\theta) = d\theta + \pi (\delta(e^{i\theta} - z_1) + \delta(e^{i\theta} - z_2))$  es la medida de segunda especie asociada a  $\omega_3(\theta) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}$  donde  $z_1 = 1$  y  $z_2 = -1$ .

*Demostración:* Por (4.11), si  $|z| < 1$  entonces  $F(z) = \frac{1-z^2}{2}$  es la función de Carathéodory correspondiente a la función peso  $\omega(\theta)d\theta = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}d\theta$ . Haciendo uso del Teorema 1.3.2, se

tiene que  $G(z) = \frac{2}{1-z^2}$  es la función de Carathéodory correspondiente a  $d\tilde{\omega}_3$  dada en el Teorema 1.3.1. Por la fórmula (1.19),

$$z_1 = 1, \quad \gamma_1 = -1$$

$$z_2 = -1, \quad \gamma_2 = 1$$

y

$$\begin{aligned} G(e^{i\theta}) &= 2 \frac{1}{1 - \cos 2\theta - i \operatorname{sen} 2\theta} = 2 \frac{1 - \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta}{2 - 2 \cos 2\theta} \\ &= 1 + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{1 - \cos 2\theta} i. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\Re(G(e^{i\theta})) = 1$  y, por fórmula (1.20),  $d\tilde{\omega}_3(\theta) = d\theta + \pi (\delta(e^{i\theta} - z_1) + \delta(e^{i\theta} - z_2))$  y la sucesión  $\{\Omega_n\}$ , dada en (4.5), es ortogonal con respecto a  $d\tilde{\omega}_3$ . ■

Por otro lado, si  $A_n$  y  $B_n$  vienen dados por (4.8) y (4.6) respectivamente, para  $n$  par, podemos calcular los aproximantes modificados:  $R_n(z, 1) = \frac{A_n(z, 1)}{B_n(z, 1)}$  y obtenemos

$$R_n(z, 1) = \frac{(1 - z^n)(1 - z^2)}{2(1 - z^{n+2})}.$$

Entonces, el error para la transformada de Herglotz-Riesz viene dado por

$$F_{\omega_3}(z) - R_n(z, 1) = \begin{cases} \frac{z^n(1-z^2)^2}{2(1-z^{n+2})} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{(1-z^2)^2}{2z^2(1-z^{n+2})} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (4.13)$$

Por el Lema 2.1, si  $G = \{z : r < |z| < R, r < 1, R > 1\}$ , entonces  $\delta G = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , donde

$$\Gamma_1 = \{z : |z| = r, 0 < r < 1\} \quad \text{y} \quad \Gamma_2 = \{z : |z| = R, R > 1\}. \quad (4.14)$$

En este caso, por las fórmulas (4.13) y (1.39)

$$\begin{aligned} |E_n(f)| &\leq \frac{1}{4\pi} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \int_{\Gamma_1} \frac{|z|^n |1-z^2|^2}{2|1-z^{n+2}|} + \int_{\Gamma_2} \frac{|1-z^2|^2}{2|z|^2 |1-z^{n+2}|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n (1-2r^2 \cos 2\theta + r^4)}{2(1-r^{n+2})} r d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-2R^2 \cos 2\theta + R^4}{2R^2(R^{n+2}-1)} R d\theta \right) \\ &= \frac{1}{4} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \frac{r^{n+1}(1+r^4)}{1-r^{n+2}} + \frac{(1+R^4)}{R(R^{n+2}-1)} \right). \end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado el siguiente

**Teorema 4.3.3.** *Sea  $f$  analítica en  $G = \{z : r < |z| < R, r < 1, R > 1\}$ . Entonces, para cada  $n$  par*

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{4} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \frac{r^{n+1}(1+r^4)}{1-r^{n+2}} + \frac{(1+R^4)}{R(R^{n+2}-1)} \right). \quad (4.15)$$

donde  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , siendo  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  como en la fórmula (4.14).

**Observación 4.3.4.** *Téngase en cuenta que si  $f(z)$  es analítica en  $\{z : |z| < R; R > 1\}$ , entonces podemos hacer  $r \rightarrow 0$  y*

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{4} \max_{\xi \in \Gamma_2} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \frac{(1+R^4)}{R(R^{n+2}-1)} \right).$$

Por otro lado, si  $f(z)$  es analítica en  $\{z : r < |z| \leq \infty; 0 < r < 1\}$ , podemos ahora hacer  $R \rightarrow \infty$  y se tiene

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{4} \max_{\xi \in \Gamma_1} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \frac{r^{n+1}(1+r^4)}{1-r^{n+2}} \right).$$

Con el propósito de calcular la medida de segunda especie y de dar cotas de error en la fórmula de cuadratura de Szegő con respecto a las funciones peso  $\omega_k(\theta)$ ,  $k = 1, 2$  es fácil ver que la transformada de Herglotz- Riesz viene dada, con respecto a  $\omega_1$  por

$$F_{\omega_1}(z) = \begin{cases} 1+z & \text{si } |z| < 1 \\ -\frac{1+z}{z} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (4.16)$$

y con respecto a  $\omega_2$  por

$$F_{\omega_2}(z) = \begin{cases} 1-z & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{1-z}{z} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (4.17)$$

Como consecuencia y procediendo igual que en el Corolario 4.3.2, se tiene por un lado que  $d\tilde{\omega}(\theta)_1 = \frac{1}{2}d\theta + \pi\delta(e^{i\theta} - z_1)$  es la medida de segunda especie asociada a  $\omega_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$ , donde  $z_1 = -1$ .

Y por otro lado, que  $d\tilde{\omega}_2(\theta) = \frac{1}{2}d\theta + \pi\delta(e^{i\theta} - z_1)$  es la medida de segunda especie asociada a  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$ , donde ahora  $z_1 = 1$ .

Veremos que las cotas de error que vamos a calcular, coinciden para ambas funciones peso. Si para  $\omega_1$  tomamos  $\tau = (-1)^n$  y para  $\omega_2$ , elegimos  $\tau = 1$ , los aproximantes modificados vienen dados por

$$R_n(z, (-1)^n) = \frac{(1 - (-1)^n z^n)(1 + z)}{1 + (-1)^n z^{n+1}}$$

y

$$R_n(z, 1) = \frac{(1 - z^n)(1 - z)}{1 - z^{n+1}},$$

respectivamente.

Por tanto, el error para la transformada de Herglotz-Riesz, en el caso de  $\omega_1$ , vendrá dada por

$$F_{\omega_1}(z) - R_n(z, (-1)^n) = \begin{cases} \frac{(-1)^n z^n (1+z)^2}{1 + (-1)^n z^{n+1}} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{-(1+z)^2}{z(1 + (-1)^n z^{n+1})} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (4.18)$$

y con respecto a  $\omega_2$  se obtiene

$$F_{\omega_2}(z) - R_n(z, 1) = \begin{cases} \frac{z^n (1-z)^2}{1 - z^{n+1}} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{(1-z)^2}{z(1 - z^{n+1})} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

Para ambas funciones peso tenemos el siguiente

**Teorema 4.3.5.** *Sea  $f$  analítica en  $G = \{z : r < |z| < R, r < 1, R > 1\}$ . Entonces, para cada  $n$*

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \frac{r^{n+1}(1+r^2)}{1-r^{n+1}} + \frac{(1+R^2)}{R^{n+1}-1} \right). \quad (4.20)$$

donde  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , siendo  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  como en fórmula (4.14) y denotando  $E_n(f)$  el error en la  $n$ -ésima fórmula de Szegő para las funciones peso  $\omega_1(\theta)$  y  $\omega_2(\theta)$ .

Obsérvese que para estas funciones peso también se obtiene un resultado similar al dado en la Observación 4.3.4.

## 4.4 Resultados numéricos

En esta Sección, y con carácter ilustrativo, compararemos el error exacto en las fórmulas de Szegő con las cotas de error dadas por las fórmulas (4.15) y (4.20). Al propio tiempo, los resultados numéricos referidos a las fórmulas de Szegő se compararán con los que se obtienen aplicando las fórmulas de Gauss- Legendre. Tales fórmulas de cuadratura deben entenderse en el siguiente sentido: (ver [23],[28]). Sea  $f(e^{i\theta}) = f_1(\theta) + if_2(\theta)$ . Entonces,

$$I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} F_1(\theta)d\theta + i \int_{-\pi}^{\pi} F_2(\theta)d\theta$$

donde  $F_i(\theta) = f_i(\theta)\omega(\theta)$ ,  $i = 1, 2$ . Si aproximamos estas dos últimas integrales por la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre en  $[-\pi, \pi]$ ,  $\sum_{j=1}^n A_j F_i(\theta_j)$ ,  $i = 1, 2$  podemos escribir:

$$I_\omega(f) \approx \sum_{j=1}^n A_j (F_1(\theta_j) + iF_2(\theta_j)) = \sum_{j=1}^n A_j f(e^{i\theta_j})\omega(\theta_j) = \sum_{j=1}^n B_j f(e^{i\theta_j}),$$

con  $B_j = A_j\omega(\theta_j) \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

A tal efecto elegiremos las siguientes funciones como integrandos:

$$f_1(z) = \frac{\text{sen}(z)}{4-z}, \quad f_2(z) = \frac{\text{sen}(\frac{1}{z})}{z-\frac{1}{4}}, \quad \text{y} \quad f_3(z) = \frac{\text{sen}(z)}{(4-z)(z-\frac{1}{4})}.$$

Observar que  $\frac{f_1(z)}{z}$  es analítica en  $0 \leq |z| \leq R$  para  $R < 4$ , la función  $\frac{f_2(z)}{z}$  es ahora analítica en  $r \leq |z| \leq \infty$  si  $r > \frac{1}{4}$  y, finalmente, la función  $\frac{f_3(z)}{z}$  es analítica en  $r \leq |z| \leq R$  para  $\frac{1}{4} < r < R < 4$ .

Para estas funciones, hemos calculado el error exacto en las fórmulas de Szegő en base a los Teoremas 4.2.6, 4.2.9 y 4.2.10, con respecto a las funciones peso  $\omega_3(\theta) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}$ ,  $\omega_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$  y  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$ , respectivamente.

Para  $\omega_3(\theta) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}$ , tenemos los siguientes resultados que aparecen en las Tablas 1–3 :

<i>Tabla 1-<math>f_1(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Cota (R=3.8)	Error exacto (Gauss-Legendre)
n=8	1.24397935E-06	2.431076E-05	1.71024787E-03
n=16	9.68002240E-12	5.591511E-10	1.48264889E-07
n=24	1.54390389E-16	1.286057E-14	1.18979947E-11

<i>Tabla 2-<math>f_2(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Cota (r=0.27)	Error exacto (Gauss-Legendre)
n=8	1.990366E-05	4.071163E-04	3.156266E-02
n=16	1.548800E-10	1.149814E-08	4.977121E-06
n=24	2.178812E-15	3.247415E-13	7.953741E-08

<i>Tabla 3-<math>f_3(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Cota (R=3.8, r=0.27)	Error exacto (Gauss-Legendre)
n=8	7.400192E-07	3.161199E-04	3.116131E-04
n=16	1.091954E-11	7.403863E-09	2.943992E-10
n=24	2.775557E-17	1.740482E-13	4.424738E-09

Para  $\omega_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$ , se tienen los siguientes resultados en las Tablas 4 – 6 :

<i>Tabla 4-<math>f_1(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Cota (R=3.8)	Error exacto ( Gauss-Legendre)
n=8	3.34996165E-06	5.174076E-05	3.50150187E-04
n=16	3.44166917E-11	1.190039E-09	1.43798826E-08
n=24	5.27355936E-16	2.737112E-14	1.26720897E-10

<i>Tabla 5-<math>f_2(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Cota ( $r=0.27$ )	Error exacto (Gauss-Legendre)
n=8	6.462231E-05	8.689770E-04	1.718254E-02
n=16	5.506783E-10	2.454229E-08	9.102588E-07
n=24	8.409939E-15	6.931467E-13	8.015859E-07

<i>Tabla 6-<math>f_3(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Error bound ( $R=3.8, r=0.27$ )	Error exacto (Gauss-Legendre)
n=8	2.614782E-06	6.729565E-04	1.895428E-04
n=16	3.882527E-11	1.576203E-08	1.192112E-07
n=24	4.996003E-16	3.705510E-13	9.867432E-08

Finalmente, para la función peso  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$ , tenemos los correspondientes resultados numéricos que vienen dados en las Tablas 7 – 9.

<i>Tabla 7-<math>f_1(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Cota ( $R=3.8$ )	Error exacto (Gauss-Legendre)
n=8	2.08782660E-06	5.174076E-05	9.61621164E-04
n=16	1.23908591E-11	1.190039E-09	3.25547073E-08
n=24	1.90819582E-16	2.737112E-14	2.32242974E-11

<i>Tabla 8-<math>f_2(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Cota ( $r=0.27$ )	Error exacto (Gauss-Legendre)
n=8	2.238229E-05	8.689770E-04	6.482502E-03
n=16	1.982434E-10	2.454229E-08	8.908710E-07
n=24	2.955968E-15	6.931467E-13	5.565306E-08

<i>Tabla 9-<math>f_3(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Cota ( $R=3.8, r=0.27$ )	Error exacto (Gauss-Legendre)
n=8	9.413287E-07	6.729565E-04	1.330823E-04
n=16	1.397712E-11	1.576203E-08	2.980441E-08
n=24	2.220446E-16	3.705510E-13	7.450711E-08

A partir de estos resultados numéricos se puede ver que las cotas de error se aproximan bastante al valor exacto y que las fórmulas de Szegő compiten favorablemente con las de Gauss- Legendre.

## 4.5 Aplicación al intervalo $[-1, 1]$

En esta Sección aplicaremos toda la teoría de la Sección 4 del Capítulo anterior a las funciones peso de Chebyshev. La relación entre  $\mu$  y  $\omega$ , que viene dada por la fórmula  $\omega(\theta) = \mu(\cos \theta)|\text{sen}\theta|$  se puede ver en la siguiente Tabla:



<i>Tabla 1</i>				
caso	$\alpha$	$\beta$	$\mu(x)$	$\omega$
1	-1/2	1/2	$\mu_1(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$	$\omega_1(\theta) = 1 + \cos \theta$
2	1/2	-1/2	$\mu_2(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$	$\omega_2(\theta) = 1 - \cos \theta$
3	1/2	1/2	$\mu_3(x) = \sqrt{1-x^2}$	$\omega_3(\theta) = \text{sen}^2 \theta$
4	-1/2	-1/2	$\mu_4(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\omega_4(\theta) = 1$

Los polinomios ortogonales respecto a las funciones peso  $\mu_k(x)$  y  $(1-x^2)\mu_k(x)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  los habíamos denotado en el Capítulo anterior por  $p_n(x)$  y  $q_n(x)$  respectivamente. Estos polinomios, en los diferentes casos dados en la Tabla anterior, tienen cierta relación. Por ejemplo, en el último caso, sabemos que el  $n$ -ésimo polinomio de Szegő viene dado por  $\Phi_n(z) = z^n$  y el polinomio ortogonal mónico  $p_n(x)$  coincide con el polinomio de Chebyshev de primera especie  $2^{-n}T_n(x)$ . Por la fórmula (1.11) podemos contruir el polinomio  $q_n(x)$  para el caso 4 el cual coincidirá con el polinomio  $p_n(x)$  para el caso 3 que es precisamente el polinomio de Chebyshev de segunda especie  $2^{-n}U_n(x)$ .

En el Capítulo anterior, los polinomios ortogonales respecto a las funciones peso  $(1 \pm x)\mu_k(x)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  se habían denotado por  $Q_n^\pm(x)$  respectivamente y, haciendo uso del Teorema 3.4.12 para la función peso del caso 4, se puede ver que los polinomios ortogonales  $Q_n^\pm(x)$  coinciden con los polinomios  $p_n(x)$  para los casos 1 y 2.

Una vez se hayan calculado los coeficientes y nodos en las fórmulas de Szegő podremos obtener las fórmulas de cuadratura de Gauss ( $G$ ), Gauss- Lobatto ( $GL$ ) o Gauss- Radau bien cuando incluyamos el punto 1 ( $GR(1)$ ) o bien el punto -1 ( $GR(-1)$ ). Por ejemplo, para la función peso  $\omega_1(\theta) = 1 + \cos \theta$ , los coeficientes de la  $(2n)$ -ésima fórmula de Szegő

para  $\tau = 1$  vienen dados por

$$\lambda_k = \frac{2\pi}{2n+1} \left( 1 + \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n+1} \right) \right), \quad 1 \leq k \leq 2n+1, \quad k \neq n+1$$

y los nodos son los ceros del polinomio para-ortogonal  $B_{2n}(z, 1)$  que vienen dados por

$$\xi_k = e^{i\theta_k} = e^{\frac{(2k-1)\pi i}{2n+1}}, \quad 1 \leq k \leq 2n+1, \quad k \neq n+1.$$

Por tanto, los nodos para la fórmula de cuadratura de Gauss con respecto a  $\mu_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$  son  $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n+1}$ ,  $1 \leq k \leq n$  y la  $n$ -ésima fórmula de Gauss será

$$\int_{-1}^1 F(x) \mu_1(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \left( \frac{2\pi}{2n+1} \left( 1 + \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n+1} \right) \right) \right) F \left( \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n+1} \right) \right)$$

que es exacta para todo polinomio de grado a lo sumo  $2n-1$ .

Como los cálculos son similares para las restantes funciones peso, haciendo uso de la Sección anterior, en la siguiente Tabla daremos los correspondientes coeficientes y nodos para los casos en los que estos se conozcan explícitamente.

<i>Tabla 2</i>				
caso	G	GL	GR(1)	GR(-1)
	$k = 1, \dots, n$	$k = 0, \dots, n+1$	$k = 0, \dots, n$	$k = 1, \dots, n+1$
1	$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n+1}$ $A_k = \frac{2\pi\omega_3(\theta_k)}{2n+1}$	[f]	$x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$ $A_k = \frac{\pi\omega_3(\theta_k)}{n+1}$	[g]
2	$x_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1}$ $A_k = \frac{2\pi\omega_2(\theta_k)}{2n+1}$	[d]	[e]	$x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$ $A_k = \frac{\pi\omega_2(\theta_k)}{n+1}$
3	$x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$ $A_k = \frac{\pi\omega_1(\theta_k)}{n+1}$	[a]	[b]	[c]
4	$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ $A_k = \frac{1}{n}$	$x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$ $A_k = \frac{\pi}{n+1}$	$x_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1}$ $A_k = \frac{2\pi}{2n+1}$	$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n+1}$ $A_k = \frac{2\pi}{2n+1}$

Aquí, las fórmulas de Gauss con  $n$  nodos serán denotadas por  $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ , las de Gauss- Lobatto, por  $\sum_{k=0}^{n+1} A_k f(x_k)$ , las de Gauss- Radau, incluyendo el 1, por  $\sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$  y las de Radau, con el -1, por  $\sum_{k=1}^{n+1} A_k f(x_k)$ .

En las casillas donde aparecen  $[a - d]$ , no hemos podido deducir expresiones explícitas de los nodos o de los coeficientes. No obstante, se pueden establecer algunas relaciones entre ellas y conclusiones acerca de la localización de los nodos.

Por ejemplo, para el caso  $[b]$  el numerador en la expresión obtenida para el polinomio para-ortogonal  $B_{2n+1}(z, -1)$  puede verse que es proporcional (haciendo  $z = e^{i\theta}$ ), a:

$$(n + 1)\text{sen}(n + 2)\theta - (n + 2)\text{sen}(n + 1)\theta.$$

Si hacemos lo mismo para el caso  $[c]$ , el polinomio para-ortogonal es  $B_{2n+1}(z, 1)$  y el numerador de la expresión que lo representa será proporcional a

$$(n + 1)\text{sen}(n + 2)\theta + (n + 2)\text{sen}(n + 1)\theta.$$

Haciendo uso de relaciones trigonométricas conocidas, se tiene que

$$\begin{aligned} & (n + 1)\text{sen}(n + 2)(\pi - \theta) - (n + 2)\text{sen}(n + 1)(\pi - \theta) = \\ & (-1)^{n+1} ((n + 1)\text{sen}(n + 2)\theta + (n + 2)\text{sen}(n + 1)\theta). \end{aligned}$$

Con lo cual, los nodos del caso  $[b]$  se obtienen de los de  $[c]$  reemplazando  $\theta_j$  por  $\pi - \theta_j$ .

Se puede ver fácilmente que la misma relación existe entre los casos  $[g]$  y  $[e]$ .

Por otro lado, en el caso  $[d]$ , el numerador  $B_{2n+2}(z, -1)$  es proporcional a:

$$(n + 1)\text{sen}(n + 2)\theta - (n + 2)\text{sen}(n + 1)\theta.$$

Por tanto, si a las soluciones de  $[b]$  ( $(2n + 1)$  soluciones) le añadimos  $\theta = \pi$  ( $z = -1$ ) obtendremos las soluciones de  $[d]$ , ( $(2n + 2)$  soluciones).

De la misma manera, en el caso  $[f]$  se tiene que el numerador, ahora de  $B_{2n+2}(z, -1)$ , es proporcional a

$$(n+1)\text{sen}(n+2)\theta + (n+2)\text{sen}(n+1)\theta. \quad (4.21)$$

Entonces, si a las soluciones de  $[c]$  ( $(2n+1)$  soluciones) le añadimos  $\theta = 0$  ( $z = 1$ ) obtendremos las soluciones de  $[f]$ , ( $(2n+2)$  soluciones).

En cuanto a la localización de los nodos, estudiaremos sólo los casos  $[a]$ ,  $[e]$  y  $[f]$  ya que el resto se puede deducir a partir de éstos mediante las relaciones que acabamos de establecer.

El caso  $[a]$  representa la fórmula de Gauss- Lobatto con respecto a la función peso  $\mu(x) = \sqrt{1-x^2}$ . Entonces necesitaremos los ceros del polinomio para-ortogonal  $B_{2n+2}(z, -1)$  con respecto a  $\omega_3(\theta) = \text{sen}^2\theta$ . Si en la expresión de  $B_{2n+2}(z, -1)$  hacemos  $z = e^{i\theta}$ , se puede ver que el numerador es proporcional a

$$(n+1)\text{sen}(n+3)\theta - (n+3)\text{sen}(n+1)\theta.$$

Esta expresión se puede reducir, después de algunas manipulaciones trigonométricas, a

$$(n+2)\cos(n+2)\theta\text{sen}\theta = \text{sen}(n+2)\theta\cos\theta.$$

Obsérvese que  $0$  y  $\pi$  son soluciones de la ecuación y que para  $n$  impar habría que añadir  $\pi/2$ . El resto de las soluciones son simétricas con respecto a  $\pi/2$  y tienen que computarse numéricamente. Para  $n$  impar dichas soluciones están muy cerca de  $\pi/2 \pm j\pi/(n+2)$ ,  $j = 0, \dots, (n-1)/2$  y para  $n$  par,  $\pi/2$  no sería solución y el resto están cerca de  $\pi/2 \pm (2j+1)\pi/(2n+4)$ ,  $j = 0, \dots, (n-2)/2$ .

Para el caso  $[e]$ , los nodos se corresponden con las soluciones de la ecuación

$$(2n+1)\text{sen}\left(\frac{2n+3}{2}\theta\right) - (2n+3)\text{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) = 0.$$

Una solución es  $\theta = 0$  y las restantes están muy cerca de

$$\pi/2 \pm (2j+1)\pi/(2n+2), \quad j = -(n-1)/2, \dots, (n-1)/2, \quad \text{para } n \text{ impar}$$

y

$$\pi/2 \pm j\pi/(n+1), \quad j = -(n-2)/2, \dots, n/2, \quad \text{para } n \text{ par.}$$

Finalmente, en el caso  $[f]$  y haciendo uso de la fórmula (4.21), se tiene que dos soluciones son  $0$  y  $\pi$  y el resto se encuentran cerca de  $2j\pi/(2n+3)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , para todo  $n$ .



# Capítulo 5

## Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio para las funciones peso de Chebyshev

### 5.1 Introducción

En este capítulo nos centraremos, de nuevo, en la aproximación de integrales sobre  $\mathbb{T}$  de la forma:

$$I_\sigma(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\sigma(\theta)d\theta$$

mediante una fórmula de cuadratura del tipo  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$  con nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  a ser posible distintos y sobre la circunferencia unidad y donde ahora  $\sigma(\theta)$  puede ser una función compleja absolutamente integrable. Como, en general, la función  $\sigma(\theta)$  puede no ser positiva, carece de sentido, en tal caso, utilizar las fórmulas de cuadratura de Szegő a las que nos hemos referido en los dos Capítulos anteriores. Como alternativa, tomaremos fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-p,q}$ , ( $p+q = n-1$ ) con nodos distintos sobre  $\mathbb{T}$ .

Si los coeficientes  $\{A_j\}_{j=1}^n$  de la fórmula de tipo interpolatorio, son positivos y  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty$ , tenemos garantizada la convergencia de las fórmulas de cuadratura para toda función  $f$  acotada e integrable en  $[-\pi, \pi]$ . Por otro lado, la positividad de los coeficientes es fundamental (véase por ejemplo [34]) a la hora de estudiar la estabilidad numérica de los procesos de cuadratura. Así pues, en términos de convergencia y estabilidad, nos interesa construir fórmulas de cuadratura con coeficientes positivos. A tal fin, veremos que, con respecto a las funciones peso de Chebyshev, los coeficientes de las correspondientes fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio  $I_n(f)$  en  $\Lambda_{-p,q}$ , ( $p+q = n-1$ ), cuyos nodos son rotaciones de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad, son no negativos para casi todos los valores del parámetro  $p$ . Conviene recordar que las funciones peso de Chebyshev son de la forma  $\omega(\theta) = (1 + \cos \theta)^{\alpha+1/2}(1 - \cos \theta)^{\beta+1/2}$ , donde  $\alpha, \beta \in \{\pm 1/2\}$ .

Así pues, en la Sección 2 calcularemos los coeficientes de dichas fórmulas de cuadratura. Hay que tener en cuenta que para  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  obtendremos la medida de Lebesgue  $\frac{d\theta}{2\pi}$  y se sabe ([28]) que si elegimos los nodos como las raíces  $n$ -ésimas de un complejo  $\tau$ , de módulo uno, entonces la correspondiente fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio coincide con la fórmula de Szegő, con lo cual nos ocuparemos sólo de las funciones peso de Chebyshev normalizadas:  $\omega_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$ ,  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$  y  $\omega_3(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{2\pi}$ .

En la Sección 3 daremos cotas de error para las tres fórmulas de cuadratura construidas en la Sección 2.2. A tal efecto, utilizaremos la transformada de Herglotz- Riesz con respecto a las tres funciones peso y ciertos aproximantes tipo Padé en dos puntos a dicha transformada.

En la Sección 4 y con carácter ilustrativo, compararemos numéricamente nuestras fórmulas de tipo interpolatorio con las correspondientes fórmulas de Szegő. Comprobaremos también la efectividad de las cotas de error obtenidas en la Sección anterior.



Finalmente, en la Sección 5 nos centraremos en aproximar integrales en el intervalo  $[-1, 1]$  haciendo uso de fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-p,q}$ , ( $p + q = n - 1$ ) cuyos nodos sobre  $\mathbb{T}$  verifican ciertas hipótesis. Al final de esta Sección aplicaremos los resultados obtenidos a nuestras tres funciones peso, dando lugar, en algunos casos, a fórmulas de cuadratura en  $[-1, 1]$  bien conocidas.

## 5.2 Coeficientes de las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio

Como es sabido, una cuestión clave en la construcción de fórmulas de tipo interpolatorio, bien sea sobre un intervalo  $[a, b]$  del eje real o sobre  $\mathbb{T}$ , es suministrar una elección adecuada de los nodos en los que se basan tales fórmulas en el sentido que los mismos sean de fácil computación y permitan asegurar un cierto grado de exactitud, tanto teórica como práctica, en los resultados proporcionados.

En esta Sección construiremos fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio con respecto a las medidas de Chebyshev normalizadas, tomando como nodos las raíces  $n$ -ésimas de  $\tau \in \mathbb{T}$ . Así pues, el polinomio nodal será  $W_n(x) = x^n - \tau$  y si  $\tau = e^{i\phi}$ , los nodos vendrán dados por  $x_j = e^{\frac{\phi + 2(j-1)\pi}{n}i}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Solamente calcularemos de forma detallada los coeficientes de la fórmula de cuadratura con respecto a la función peso  $\omega_1(\theta)$ , ya que para  $\omega_2(\theta)$  y  $\omega_3(\theta)$  los cálculos son muy similares.

Por (1.24) se tiene que

$$A_j = \int_{-\pi}^{\pi} L_j(e^{i\theta}) \frac{1 + \cos \theta}{2\pi} d\theta$$

donde  $L_j$  viene dado por (1.23). Entonces, podemos escribir:

$$A_j = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x_j^{p-n+1}}{n} \frac{e^{in\theta} - \tau}{e^{ip\theta}(e^{i\theta} - x_j)} \frac{1 + \cos\theta}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{x_j^{p-n+1} (z^n - \tau)(z+1)^2}{2nz^{p+2}(z-x_j)} dz = \text{Res}(f, 0)$$

donde  $f(z) = \frac{x_j^{p-n+1}(z^n - \tau)(z+1)^2}{2nz^{p+2}(z-x_j)}$ . Observar que  $\tau = x_j^n$  y, por tanto,  $\frac{z^n - \tau}{z - x_j} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k x_j^{n-k-1}$ .

El residuo entonces puede calcularse de la siguiente forma:

$$A_j = \frac{x_j^{p-n+1}}{2n} \frac{1}{(p+1)!} \frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}} \left\{ (z+1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} z^k x_j^{n-k-1} \right\}_{z=0} \quad (5.1)$$

por lo que sólo habría que encontrar el coeficiente que acompaña a  $z^{p+1}$  en la expresión que está entre corchetes. Para ello tenemos que distinguir varios casos. Si  $p = 0$  se tiene,

$$A_j = \frac{x_j^{-n+1}}{2n} (x_j^{n-1} + 2x_j^n) = \frac{1}{2n} \left( 2 + \frac{1}{x_j} \right) = \frac{2x_j + 1}{2nx_j}.$$

Si  $p = n - 1$ :

$$A_j = \frac{1}{2n} (x_j + 2) = \frac{2 + x_j}{2n}$$

y finalmente, si  $1 \leq p \leq n - 2$  entonces,

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{x_j^{p-n+1}}{2n} (x_j^{n-p-2} + 2x_j^{n-p-1} + x_j^{n-p}) \\ &= \frac{1}{2n} \left( x_j + 2 + \frac{1}{x_j} \right) = \frac{1}{2n} (x_j + 2 + \bar{x}_j) = \frac{1}{2n} (2 + 2\Re(x_j)) \\ &= \frac{1 + \cos(\frac{\phi + 2(j-1)\pi}{n})}{n} \\ &= \frac{2\pi}{n} \omega_1(\theta_j), \end{aligned}$$

donde  $x_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 3$ . Hemos demostrado, por tanto, la siguiente

**Proposición 5.2.1.** *Los coeficientes de la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio con respecto a la función peso  $\omega_1(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2\pi}$  y donde los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$ , ( $x_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ) son las raíces  $n$ -ésimas de  $\tau = e^{i\phi}$ , vienen dados por*

$$A_j = \begin{cases} \frac{2x_j + 1}{2nx_j} & \text{si } p = 0 \\ \frac{2\pi}{n} \omega_1(\theta_j) & \text{si } 1 \leq p \leq n - 2, \quad j = 1, \dots, n, \quad n \geq 3. \\ \frac{2 + x_j}{2n} & \text{si } p = n - 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

Análogamente, para  $\omega_2(\theta)$  se obtiene:

**Proposición 5.2.2.** *Los coeficientes de la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio con respecto a la función peso  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$  y donde los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$ , ( $x_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ) son las raíces  $n$ -ésimas de  $\tau = e^{i\phi}$ , vienen dados por*

$$A_j = \begin{cases} \frac{2x_j-1}{2nx_j} & \text{si } p = 0 \\ \frac{2\pi}{n}\omega_2(\theta_j) & \text{si } 1 \leq p \leq n-2, \quad j = 1, \dots, n, \quad n \geq 3. \\ \frac{2-x_j}{2n} & \text{si } p = n-1 \end{cases} \quad (5.3)$$

Finalmente, para la función peso  $\omega_3(\theta)$  se tiene

**Proposición 5.2.3.** *Los coeficientes de la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio con respecto a la función peso  $\omega_3(\theta) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}$  y donde los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$ , ( $x_j = e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ) son las raíces  $n$ -ésimas de  $\tau = e^{i\phi}$ , vienen dados por*

$$A_j = \begin{cases} \frac{2x_j^2-1}{4nx_j^2} & \text{si } p = 0, 1 \\ \frac{2\pi}{n}\omega_3(\theta_j) & \text{si } 2 \leq p \leq n-3, \quad j = 1, \dots, n, \quad n \geq 5. \\ \frac{2-x_j^2}{4n} & \text{si } p = n-2, n-1 \end{cases} \quad (5.4)$$

**Observación 5.2.4.** *Por (5.2) y (5.3), se puede ver que los coeficientes son no negativos para  $1 \leq p \leq n-2$  y también, por (5.4) podemos garantizar lo mismo pero ahora para  $2 \leq p \leq n-3$ . Para propiedades relativas a la positividad de los coeficientes de fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio sobre  $\mathbb{T}$ , ver [45].*

**Observación 5.2.5.** *Conviene resaltar que para las funciones peso en consideración  $\omega_k(\theta)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-p,q}$  ( $p+q = n-1$ ), basada en las raíces de  $\tau$  ( $|\tau| = 1$ ), coincide con la  $n$ -ésima fórmula de Szegő si  $1 \leq p \leq n-2$  para  $\omega_k(\theta)$ ;  $k = 1, 2$  y  $2 \leq p \leq n-3$  para  $\omega_3(\theta)$  cuando la aplicamos a todo el integrando  $f(e^{i\theta})\omega_k(\theta)$ ;  $k = 1, 2, 3$ .*

**Observación 5.2.6.** *Hay que tener en cuenta que, los casos  $n = 1, 2$  no están contemplados en las fórmulas (5.2) y (5.3) ni tampoco en (5.4), para  $n = 1, 2, 3, 4$ . Consideremos como ejemplo la función peso  $\omega_2$ . Entonces, para  $n = 1$  y como  $p + q = 0$ , se tiene que  $p = 0$  y haciendo uso de (5.1), el coeficiente de la fórmula de cuadratura viene dado por  $A_1 = 1$ . Si  $n = 2$ , entonces  $p = 0$  ó  $p = 1$ . Para  $p = 0$  y utilizando de nuevo la expresión dada por (5.1), los coeficientes son  $A_j = \frac{2x_j+1}{4x_j}$ ,  $j = 1, 2$  y para  $p = 1$  obtenemos  $A_j = \frac{x_j+2}{4x_j^2}$ ,  $j = 1, 2$ .*

### 5.3 Cotas de error

En esta Sección nos ocuparemos de calcular cotas de error para las fórmulas de cuadratura respecto a las tres funciones peso  $\omega_1(\theta)$ ,  $\omega_2(\theta)$  y  $\omega_3(\theta)$  introducidas en la Sección anterior. A tal efecto vamos a calcular el error en la transformada de Herglotz- Riesz  $F_{\omega_k}(z)$ ,  $k = 1, 2, 3$  con respecto a ciertos aproximantes tipo Padé asociadas a las mismas. Para ello, sea  $\omega(\theta)$  una función peso en  $[-\pi, \pi]$  y supongamos que  $W_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - x_j)$  es el polinomio nodal de la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-p,q}$ , con  $0 \leq p \leq n - 1$ ;  $q = n - 1 - p$  y nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  sobre  $\mathbb{T}$ . Entonces, si

$$(p/n)_{F_\omega}(z) = \frac{Q_n(z)}{W_n(z)}, \quad 0 \leq p \leq n - 1$$

representa el aproximante tipo Padé a  $F_\omega(z)$  cuyo denominador coincide con el polinomio nodal  $W_n(z)$ , el papel que juegan  $F_\omega(z)$  y  $(p/n)_{F_\omega}(z)$  con respecto a la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio, como ya hemos visto, viene dado por el Lema 1.5.4 y como consecuencia se tiene la siguiente cota superior, siendo  $f$  analítica en un dominio que contenga a  $\mathbb{T}$  y  $\Gamma$  la frontera del mismo:

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{4\pi} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \int_{\Gamma} |F_\omega(z) - (p/n)_{F_\omega}(z)| |dz|. \quad (5.5)$$

Para calcular  $F_\omega(z) - (p/n)_{F_\omega}(z)$  utilizaremos la siguiente expresión integral: (ver fórmula (1.37) del Capítulo 1)

$$F_\omega(z) - (p/n)_{F_\omega}(z) = \frac{2z^{p+1}}{W_n(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ip\theta} W_n(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} \omega(\theta) d\theta.$$

En la Sección anterior habíamos elegido los nodos que fueran rotaciones de las raíces de la unidad por lo que el polinomio nodal, con el cual haremos todos los cálculos, será, de nuevo,  $W_n(z) = z^n - \tau$ , donde  $|\tau| = 1$ .

En primer lugar, para la función peso  $\omega_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} F_{\omega_1}(z) - (p/n)_{F_{\omega_1}}(z) &= \frac{2z^{p+1}}{z^n - \tau} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ip\theta} (e^{in\theta} - \tau) \frac{1+\cos\theta}{2\pi}}{e^{i\theta} - z} d\theta \\ &= \frac{2z^{p+1}}{z^n - \tau} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{(w^n - \tau)(w+1)^2}{2w^{p+2}(w-z)} dw \end{aligned}$$

Sea  $h(w) = \frac{(w^n - \tau)(w+1)^2}{2w^{p+2}(w-z)}$ , entonces

$$F_{\omega_1}(z) - (p/n)_{F_{\omega_1}}(z) = \begin{cases} \frac{2z^{p+1}}{z^n - \tau} (Res(h, 0) + Res(h, z)) & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{2z^{p+1}}{z^n - \tau} Res(h, 0) & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

Como  $\frac{z^n - \tau}{z - x_j} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k x_j^{n-k-1}$ , el residuo se puede calcular de la siguiente manera:

$$Res(h, 0) = \frac{2z^{p+1}}{z^n - \tau} \frac{1}{(p+1)!} \frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}} \left\{ \frac{1}{2} (z+1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} z^k x_j^{n-k-1} \right\}_{z=0}$$

Tendremos que distinguir ahora varios casos según los valores del parámetro  $p$ . Así, si  $p = 0$ ,  $Res(h, 0) = \frac{1}{z^1} + \frac{1}{2z^2} = \frac{2z+1}{2z^2}$ . Por tanto, si  $|z| < 1$ :

$$\begin{aligned} F_{\omega_1}(z) - (p/n)_{F_{\omega_1}}(z) &= \frac{2z}{z^n - \tau} (Res(h, 0) + Res(h, z)) \\ &= \frac{2z}{z^n - \tau} \left( \frac{2z+1}{2z^2} + \frac{(z^n - \tau)(z+1)^2}{2z^2} \right) \\ &= \frac{z^n(z+1)^2 - \tau z^2 + 2(1-\tau)z + 1 - \tau}{z(z^n - \tau)}. \end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir:

$$F_{\omega_1}(z) - (p/n)_{F_{\omega_1}}(z) = \begin{cases} \frac{z^n(z+1)^2 - \tau z^2 + 2(1-\tau)z + 1 - \tau}{z(z^n - \tau)} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{2z+1}{z(z^n - \tau)} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Ahora, si  $1 \leq p \leq n - 2$ , se tiene:

$$Res(h, 0) = \frac{1}{2z^p} + \frac{1}{z^{p+1}} + \frac{1}{2z^{p+2}} = \frac{(z+1)^2}{2z^{p+2}}.$$

Por lo que, si  $|z| < 1$ :

$$\begin{aligned} F_{\omega_1}(z) - (p/n)_{F_{\omega_1}}(z) &= \frac{2z^{p+1}}{z^n - \tau} (Res(h, 0) + Res(h, z)) \\ &= \frac{2z^{p+1}}{z^n - \tau} \left( \frac{(z+1)^2}{2z^{p+2}} + \frac{(z^n - \tau)(z+1)^2}{2z^{p+2}} \right) \\ &= \frac{(z^n + 1 - \tau)(z+1)^2}{z(z^n - \tau)} \end{aligned}$$

y por tanto:

$$F_{\omega_1}(z) - (p/n)_{F_{\omega_1}}(z) = \begin{cases} \frac{(z^n + 1 - \tau)(z+1)^2}{z(z^n - \tau)} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{(z+1)^2}{z(z^n - \tau)} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (5.7)$$

Finalmente, si  $p = n - 1$ ,  $Res(h, 0) = \frac{1}{2z} + \frac{(z+1)^2}{2z^{n+1}} = \frac{z^n + (z+1)^2}{2z^{n+1}}$ . y si  $|z| < 1$

$$\begin{aligned} F_{\omega_1}(z) - (p/n)_{F_{\omega_1}}(z) &= \frac{2z^n}{z^n - \tau} (Res(h, 0) + Res(h, z)) \\ &= \frac{2z^n}{z^n - \tau} \left( \frac{z^n + (z+1)^2}{2z^{n+1}} + \frac{(z^n - \tau)(z+1)^2}{2z^{n+1}} \right) \\ &= \frac{z^n + (z^n + 1 - \tau)(z+1)^2}{z(z^n - \tau)}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$F_{\omega_1}(z) - (p/n)_{F_{\omega_1}}(z) = \begin{cases} \frac{z^n + (z^n + 1 - \tau)(z+1)^2}{z(z^n - \tau)} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{z^n + (z+1)^2}{z(z^n - \tau)} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Si tomamos como dominio el anillo  $G = \{z : r < |z| < R, r < 1, R > 1\}$ , entonces  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , donde

$$\Gamma_1 = \{z : |z| = r, 0 < r < 1\} \quad y \quad \Gamma_2 = \{z : |z| = R, R > 1\}. \quad (5.9)$$

En consecuencia, por las fórmulas (5.7) y (5.5), se deduce la siguiente cota de error:

$$\begin{aligned} |E_n(f)| &\leq \frac{1}{4\pi} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \int_{\Gamma_1} \frac{(|z|^{n+1} - \tau)|1+z|^2}{|z||\tau - z^n|} |dz| + \int_{\Gamma_2} \frac{|1+z|^2}{|z||\tau - z^n|} |dz| \right) \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r^n + |1-\tau|)(1+2r \cos \theta + r^2)}{r(1-r^n)} r d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2R \cos \theta + R^2}{R(R^n - 1)} R d\theta \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \frac{2\pi(r^n + |1-\tau|)(1+r^2)}{1-r^n} + \frac{2\pi(1+R^2)}{R^n - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \frac{(r^n + |1-\tau|)(1+r^2)}{1-r^n} + \frac{(1+R^2)}{R^n - 1} \right). \end{aligned}$$

Hemos probado, pues, el siguiente

**Teorema 5.3.1.** *Sea  $f$  una función analítica en el anillo  $G = \{z : r < |z| < R, r < 1, R > 1\}$ . Entonces, una cota del error para la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio anteriormente definida con respecto a  $\omega_1(\theta)$  viene dada, para cada  $n$ , por ( $1 \leq p \leq n-2$ )*

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \frac{(r^n + |1-\tau|)(1+r^2)}{1-r^n} + \frac{(1+R^2)}{R^{n-1}} \right) \quad (5.10)$$

donde  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Siendo  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  como en (5.9). De forma similar se pueden obtener las siguientes cotas para  $p = 0$  y  $p = n-1$  respectivamente:

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \frac{r^n(1+r^2)+r^2+(2r+1)|1-\tau|}{1-r^n} + \frac{(1+2R)}{R^{n-1}} \right)$$

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \frac{r^n(2+r^2)+(r^2+1)|1-\tau|}{1-r^n} + \frac{(1+R^2+R^n)}{R^{n-1}} \right).$$

Para las dos funciones peso  $\omega_k(\theta)$ ,  $k = 2, 3$ , omitiremos los cálculos ya que son muy similares a los ya hechos para  $\omega_1(\theta)$ .

Para  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$ , si  $p = 0$ , se tiene que:

$$F_{\omega_2}(z) - (p/n)_{F_{\omega_2}}(z) = \begin{cases} \frac{-z^{n-1}(z-1)^2 + \tau z^2 + 2(1-\tau)z + \tau - 1}{z(z^n - \tau)} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{2z-1}{z(z^n - \tau)} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Si  $1 \leq p \leq n-2$ , entonces:

$$F_{\omega_2}(z) - (p/n)_{F_{\omega_2}}(z) = \begin{cases} \frac{(z^n + 1 - \tau)(z-1)^2}{z(\tau - z^n)} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{(z-1)^2}{z(\tau - z^n)} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (5.12)$$

Finalmente, si  $p = n-1$ ,

$$F_{\omega_2}(z) - (p/n)_{F_{\omega_2}}(z) = \begin{cases} \frac{(z^n + 1 - \tau)(z-1)^2 + z^n}{z(\tau - z^n)} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{z^n + (z-1)^2}{z(\tau - z^n)} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (5.13)$$

Por otro lado, es fácil ver que las cotas de error dadas en el Teorema 5.3.1 son las mismas que para la función peso  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$ .

Para  $\omega_3(\theta) = \frac{\text{sen}^2(\theta)}{2\pi}$  tenemos la siguiente expresión del error para  $p = 0, 1$  :

$$F_{\omega_3}(z) - (p/n)_{F_{\omega_3}}(z) = \begin{cases} \frac{-z^{n-2}(z^2-1)^2 + \tau z^4 + 2(1-\tau)z + 1 - \tau}{2z^2(z^n - \tau)} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{2z^2 - 1}{2z^2(z^n - \tau)} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (5.14)$$

Para  $1 \leq p \leq n - 3$ , se tiene:

$$F_{\omega_3}(z) - (p/n)_{F_{\omega_3}}(z) = \begin{cases} \frac{(z^n + 1 - \tau)(z^2 - 1)^2}{2z^2(\tau - z^n)} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{(z^2 - 1)^2}{2z^2(\tau - z^n)} & \text{si } |z| > 1 \end{cases} \quad (5.15)$$

y si  $p = n - 2, n - 1$ ,

$$F_{\omega_3}(z) - (p/n)_{F_{\omega_3}}(z) = \begin{cases} \frac{z^n - (z^2 - 1)^2(z^n + 1 - \tau)}{2z^2(z^n - \tau)} & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{z^n - (z^2 - 1)^2}{2z^2(z^n - \tau)} & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (5.16)$$

De forma análoga al Teorema 5.3.1, y usando las fórmulas (5.14), (5.15) y (5.16), se puede deducir fácilmente el siguiente

**Teorema 5.3.2.** *Sea  $f$  una función analítica en el anillo  $G = \{z : r < |z| < R, r < 1, R > 1\}$ . Entonces, una cota de error para la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio anteriormente definida con respecto a  $\omega_3(\theta)$  viene dada, para cada  $n$ , por ( $2 \leq p \leq n - 3$ )*

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{4} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \frac{(r^n + |1 - \tau|)(1 + r^4)}{r(1 - r^n)} + \frac{(1 + R^4)}{R(R^n - 1)} \right) \quad (5.17)$$

donde  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , con  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  como en (5.9). Para  $p = 0, 1$  y  $p = n - 2, n - 1$  se tiene:

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{4} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \frac{r^n(1 + r^4) + r^4 + (2r^2 + 1)|1 - \tau|}{r(1 - r^n)} + \frac{(1 + 2R^2)}{R(R^n - 1)} \right)$$

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{4} \max_{\xi \in \Gamma} \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| \right\} \left( \frac{r^n + (r^4 + 1)(r^n + |1 - \tau|)}{r(1 - r^n)} + \frac{(1 + R^4 + R^n)}{R(R^n - 1)} \right)$$

respectivamente.



## 5.4 Resultados numéricos

Como habíamos mencionado en el Capítulo 1, las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio sobre la circunferencia unidad han sido estudiadas desde un punto de vista más general y donde las funciones racionales ortogonales con polos fuera de  $\mathbb{T}$  juegan un importante papel, (ver [7]). Sin embargo, e incluso en el caso de los polinomios de Laurent, pocos experimentos numéricos se han hecho. Así pues, con carácter ilustrativo y para evaluar la efectividad de nuestras fórmulas de cuadratura, vamos a tomar las siguientes funciones analíticas como integrandos:

$$f_1(z) = \frac{\text{sen}(z)}{4-z}, \quad f_2(z) = \frac{\text{sen}(\frac{1}{z})}{z-\frac{1}{4}}, \quad \text{y} \quad f_3(z) = \frac{\text{sen}(z)}{(4-z)(z-\frac{1}{4})}.$$

Para estas funciones, hemos calculado los errores exactos en la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio con respecto a las funciones peso  $\omega_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$ ,  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$ , y  $\omega_3(\theta) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}$ , así como las cotas de error dadas en (5.10) y (5.17). Como polinomio nodal hemos elegido  $W_n(z) = z^n - 1$ . Además, hemos calculado también el error para las correspondientes fórmulas de cuadratura de Szegő que se han computado en el Capítulo anterior.

Como es usual, si se pretende llevar a cabo una comparación coherente entre las dos fórmulas de cuadratura (la de Szegő y la de tipo interpolatorio), ambas deben tener el mismo dominio de validez. Para ello, denotaremos por  $N$  el número de nodos en las fórmulas de tipo interpolatorio, donde también hemos tomado  $p = q$ . Entonces se tiene que  $N = 2n - 1$ , siendo  $n$  el número de nodos en las fórmulas de Szegő.

Para la función peso  $\omega_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$ , los resultados se pueden ver en las Tablas 1 – 3.

<i>Tabla 1-<math>f_1(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Error exacto (Interpolación)	Cota (R=3.8)
n=8,N=15	3.34996165E-06	5.50297488E-10	1.71841736E-08
n=10,N=19	1.30302390E-07	2.15101547E-12	8.24127231E-11
n=12,N=23	8.88161369E-09	8.42382595E-15	3.95239078E-13

<i>Tabla 2-<math>f_2(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Error exacto (Interpolación)	Cota (r=0.27)
n=8,N=15	6.462231E-05	8.80170097E-09	3.36656929E-07
n=10,N=19	1.984629E-06	3.44152206E-11	1.78913294E-09
n=12,N=23	1.427481E-07	1.31420252E-13	9.50818602E-12

<i>Tabla 3-<math>f_3(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Error exacto (Interpolación)	Cota (R=3.8, r=0.27)
n=8,N=15	2.614782E-06	6.21195594E-10	2.26498285E-07
n=10,N=19	1.585648E-07	2.42644793E-12	1.09713504E-09
n=12,N=23	9.941509E-09	9.43689570E-15	5.31953309E-12

Para  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$ , se tiene los correspondientes resultados numéricos en las Tablas 4 – 6.

<i>Tabla 4-<math>f_1(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Error exacto (Interpolación)	Cota (R=3.8)
n=8,N=15	2.08782660E-06	1.97862407E-10	1.71841736E-08
n=10,N=19	3.889221E-08	7.74331987E-13	8.24127231E-11
n=12,N=23	3.24876996E-09	3.06699105E-15	3.95239078E-13

<i>Tabla 5-<math>f_2(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Error exacto (Interpolación)	Cota ( $r=0.27$ )
n=8,N=15	2.238229E-05	3.16885709E-09	3.36656929E-07
n=10,N=19	7.224837E-07	1.23896171E-11	1.78913294E-09
n=12,N=23	5.133795E-08	4.84612350E-14	9.50818602E-12

<i>Tabla 6-<math>f_3(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Error exacto (Interpolación)	Cota ( $R=3.8, r=0.27$ )
n=8,N=15	9.413287E-07	2.23630447E-10	2.26498285E-07
n=10,N=19	5.708336E-08	8.73606742E-13	1.09713504E-09
n=12,N=23	3.578943E-09	3.41393581E-15	5.31953309E-12

Finalmente, para la función peso:  $\omega_3(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{2\pi}$ , los resultados aparecen en las Tablas 7 – 9.

<i>Tabla 7-<math>f_1(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Error exacto (Interpolación)	Cota ( $R=3.8$ )
n=8,N=15	1.24397935E-06	6.18749933E-10	3.06817398E-08
n=10,N=19	3.390497E-08	2.41981087E-12	1.47145029E-10
n=12,N=23	2.515530E-09	9.45077349E-15	7.05685524E-13

<i>Tabla 8-<math>f_2(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Error exacto (Interpolación)	Cota ( $r=0.27$ )
n=8,N=15	1.990366E-05	1.00621216E-08	5.84166247E-07
n=10,N=19	5.424796E-07	3.87201659E-11	3.10449894E-09
n=12,N=23	4.024848E-08	1.51198498E-13	1.64985802E-11

<i>Tabla 9-<math>f_3(z)</math></i>			
Nodos	Error exacto (Szegő)	Error exacto (Interpolación)	Cota ( $R=3.8, r=0.27$ )
n=8,N=15	7.400192E-07	6.99035468E-10	4.03349770E-07
n=10,N=19	4.456684E-08	2.72981637E-12	1.95328957E-09
n=12,N=23	2.796190E-09	1.05471187E-14	9.46804415E-12

De los resultados obtenidos en estas Tablas se puede ver, claramente, que las fórmulas de tipo interpolatorio dan mejores resultados que las de Szegő. Por otro lado resulta constatable, al menos numéricamente, la efectividad de las cotas de error calculadas en la Sección anterior.

Seguidamente haremos una nueva comparación entre las fórmulas de Szegő y las de tipo interpolatorio pero, ahora, utilizando el mismo número de nodos  $n$  en ambas fórmulas. Tomaremos de nuevo  $p = q$  y como  $p + q = n - 1$ , el número  $n$  debe ser impar. Nos restringiremos a la función peso  $\omega_2(\theta) = \frac{1 - \cos \theta}{2\pi}$ . Los resultados se dan en las Tablas 10 – 12.

<i>Tabla 10-<math>f_1(z)</math></i>		
Nodos	Error exacto (Szegő)	Error exacto (Interpolación)
n=7	5.595611E-06	7.544544E-05
n=9	1.806210E-07	2.087826E-06
n=11	1.283448E-08	3.889221E-08

<i>Tabla 11-<math>f_2(z)</math></i>		
Nodos	Error exacto (Szegő)	Error exacto (Interpolación)
n=7	3.017841E-04	4.134759E-04
n=9	8.351297E-06	2.238229E-05
n=11	1.555688E-07	7.224837E-07

<i>Tabla 12-<math>f_3(z)</math></i>		
Nodos	Error exacto (Szegő)	Error exacto (Interpolación)
n=7	2.394534E-06	1.199183E-05
n=9	2.408145E-07	9.413287E-07
n=11	1.423569E-08	5.708336E-08

Podemos ver que, utilizando el mismo número de nodos en ambas fórmulas de cuadratura, los resultados son muy similares. Además, hay que tener en cuenta que los nodos en nuestras fórmulas de cuadratura son muy fáciles de calcular.

Finalmente, vamos a considerar otros integrandos  $f(z)$  con singularidades cerca de  $\mathbb{T}$  con el objetivo de apreciar en qué medida influye esto en los resultados numéricos para el error en las fórmulas de tipo interpolatorio. Así pues, vamos a tomar como integrandos

las siguientes funciones:

$$f_4(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{1.25-z} \quad y \quad f_5(z) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{z}}{z-0.8}.$$

Los resultados se pueden ver en las Tablas 13 y 14 para las funciones  $f_4(z)$  y  $f_5(z)$  respectivamente y en relación a las tres funciones peso  $\omega_k(\theta)$ ;  $k = 1, 2, 3$ .

<i>Tabla 13 - <math>f_4(z)</math></i>			
Nodos	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
n=15	5.606342E-02	6.921411E-04	1.401585E-03
n=19	2.247958E-02	2.775257E-04	5.619896E-04
n=23	9.128829E-03	1.127016E-04	2.282207E-04

<i>Tabla 14 - <math>f_5(z)</math></i>			
Nodos	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
n=15	8.759910E-02	1.081470E-03	2.189977E-03
n=19	3.512435E-02	4.336340E-04	8.781088E-04
n=23	1.426379E-02	1.760962E-04	3.565949E-04

Como parecía previsible, de estas últimas Tablas se puede ver que la eficiencia numérica de las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio depende fuertemente de la presencia de polos del integrando  $f$  cerca de  $\mathbb{T}$ .

## 5.5 Aplicación al intervalo $[-1, 1]$

En esta Sección nos centraremos en aproximar integrales sobre un intervalo finito  $[a, b]$  del eje real, el cual, para fijar ideas, se tomará como el  $[-1, 1]$ , estableciéndose una conexión

entre fórmulas de cuadratura con nodos sobre  $[-1, 1]$  y exactas en ciertos subespacios de  $\mathbb{P}$  y las de tipo interpolatorio con nodos sobre  $\mathbb{T}$  y exactas en ciertos subespacios, ahora del espacio  $\Lambda$  de los polinomios de Laurent.

En efecto, supongamos que deseamos aproximar la integral  $\int_{-1}^1 F(x)\mu(x)dx$  siendo  $\mu(x)$  una función peso en  $[-1, 1]$ . Como ya se ha visto, podemos construir una función peso simétrica  $\omega(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$  por medio de la relación dada en la fórmula (1.9).

Sea  $I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta$ , siendo  $\omega$  como en (1.9) y sea  $I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n} A_j f(z_j)$  una fórmula de cuadratura para  $I_\omega(f)$  exacta en  $\Lambda_{-p,q}$  con  $p$  y  $q$  enteros no negativos tales que  $p + q = 2n - 1$ . Supongamos que los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$  están en  $\mathbb{T}$  y aparecen en pares conjugados, es decir,  $z_{n+j} = \bar{z}_j$ ;  $j = 1, \dots, n$ , donde  $z_j = e^{i\theta_j}$ ;  $j = 1, \dots, n$ . Entonces se tiene, como un primer resultado, la siguiente

**Proposición 5.5.1.** *Definamos  $B_j = \Re(A_j)$ ;  $j = 1, \dots, n$  y  $x_j = \cos \theta_j$ ;  $j = 1, \dots, n$ . Entonces, la fórmula de cuadratura  $J_n(F) = \sum_{j=1}^n B_j F(x_j)$  para  $I_\mu(F) = \int_{-1}^1 F(x)\mu(x)dx$  es exacta en  $\mathbb{P}_r$  donde  $r = \min(p, q)$  y  $\mu(x)$  satisface (1.9).*

*Demostración:* El polinomio nodal vendrá dado por  $W_{2n}(z) = \prod_{j=1}^{2n} (z - z_j) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)(z - \bar{z}_j)$ . Por tanto,  $W_{2n}(z)$  tiene coeficientes reales. Por otro lado, como  $\omega$  es simétrica, los momentos trigonométricos  $c_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}\omega(\theta)d\theta$ ;  $k \in \mathbb{Z}$  son reales. Entonces, el polinomio

$$Q_{2n}(z) = I_\omega \left\{ W_{2n}(z) + \frac{2z}{x-z} \left( W_{2n}(z) - \frac{z^p}{x^p} W_{2n}(x) \right) \right\}; \quad x = e^{i\theta} \quad (5.18)$$

tiene también coeficientes reales.

Por fórmulas (3.13)-(3.14) en [28], sabemos que los coeficientes se pueden expresar como

$$A_j = -\frac{1}{2z_j} \frac{Q_{2n}(z_j)}{W'_{2n}(z_j)}; \quad j = 1, 2, \dots, 2n. \quad (5.19)$$

Por tanto,

$$A_{n+j} = -\frac{1}{2z_{n+j}} \frac{Q_{2n}(z_{n+j})}{W'_{2n}(z_{n+j})} = -\frac{1}{2\bar{z}_j} \frac{Q_{2n}(\bar{z}_j)}{W'_{2n}(\bar{z}_j)} = \bar{A}_j; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Ahora veremos que  $J_n(p) = I_\mu(p)$  para todo  $p \in \mathbb{P}_r$ , ( $r = \min(p, q)$ ) o lo que es lo mismo,

$$J_n(x^k) = I_\mu(x^k); \quad k = 0, 1, \dots, r.$$

Sea  $z = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$  y  $x = \cos \theta$ , entonces

$$x^k = \left( \frac{z + z^{-1}}{2} \right)^k = p(z) + p(z^{-1}) = L(z) \in \Lambda_{-k,k}$$

siendo  $p$  un polinomio de grado  $k$  con coeficientes reales.

Por tanto,

$$\overline{L(z)} = L(\bar{z}) = L(z^{-1}) = L(z); \quad z = e^{i\theta}$$

y podemos escribir

$$\begin{aligned} J_n(x^k) &= \sum_{j=1}^n B_j x_j^k = \sum_{j=1}^n \frac{A_j + \bar{A}_j}{2} L(z_j) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n A_j L(z_j) + \sum_{j=1}^n \bar{A}_j L(z_j) \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} A_j L(z_j) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} L(e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta \end{aligned}$$

ya que  $L \in \Lambda_{-k,k} \subset \Lambda_{-r,r} \subset \Lambda_{-p,q}$ .

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^k \mu(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta)^k \mu(\cos \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} L(e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta \\ &= I_\mu(x^k); \quad k = 0, \dots, r \end{aligned} \tag{5.20}$$

■

Analizaremos ahora el caso particular en el que  $r = \min(p, q) = n - 1$ . Observar que  $r = \min(p, q) = n - 1$  sí y sólo si  $p = n - 1$  ó  $p = n$  ( $p + q = 2n - 1$ ). Veremos que para ambos valores del parámetro  $p$  se obtiene la misma fórmula de cuadratura para  $I_\mu(F)$ .



Supongamos en primer lugar que  $p = n - 1$  ( $q = n$ ) y sean  $\{A_j\}_{j=1}^{2n}$  los coeficientes de la  $2n$ -ésima fórmula de cuadratura exacta en  $\Lambda_{-(n-1),n}$ . Esto da lugar a una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio para  $I_\mu(f)$  donde los nodos vienen dados por  $x_j = \cos \theta_j$ ;  $j = 1, \dots, n$  y los coeficientes por  $B_j = \Re(A_j)$ ;  $j = 1, \dots, n$ , es decir

$$\forall p \in \mathbb{P}_{n-1} : I_\mu(p) = \int_{-1}^1 p(x)\mu(x)dx = \sum_{j=1}^n B_j p(x_j). \quad (5.21)$$

Por otro lado, si  $p = n$  ( $q = n - 1$ ), podemos obtener otra  $2n$ -ésima fórmula de cuadratura exacta ahora en  $\Lambda_{-n,n-1}$ . Sean  $\{\tilde{A}_j\}_{j=1}^{2n}$  los coeficientes de dicha fórmula de cuadratura (con los mismos nodos  $z_j = e^{i\theta_j}$ ,  $z_{n+j} = \bar{z}_j$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ .) Entonces si definimos  $\tilde{B}_j = \Re(\tilde{A}_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , se puede deducir que

$$\forall p \in \mathbb{P}_{n-1} : I_\mu(p) = \int_{-1}^1 p(x)\mu(x)dx = \sum_{j=1}^n \tilde{B}_j p(x_j). \quad (5.22)$$

Como ambas fórmulas de cuadratura ((5.21) y (5.22)) son exactas en  $\mathbb{P}_{n-1}$  y tienen los mismos nodos, se tiene que

$$B_j = \tilde{B}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Por tanto,  $\Re(A_j) = \Re(\tilde{A}_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n$ .

Por consiguiente, cuando los coeficientes  $\{A_j\}_{j=1}^{2n}$  y  $\{\tilde{A}_j\}_{j=1}^{2n}$  son reales, podemos escribir:

$$I_\omega(R) = I_{2n}(R) = \sum_{j=1}^{2n} A_j f(z_j) = \sum_{j=1}^{2n} \tilde{A}_j f(z_j) = \tilde{I}_{2n}(R); \quad \forall R \in \Lambda_{-n,n}.$$

En general, se tiene la siguiente

**Proposición 5.5.2.** *Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(z_j)$  una fórmula de cuadratura para  $I_\omega(f)$  exacta en  $\Lambda_{-p,q}$  con  $p$  y  $q$  dos enteros no negativos tales que  $p + q = n - 1$  y siendo  $\omega(\theta)$  simétrica en  $[-\pi, \pi]$ . Supongamos que  $z = 1$  ó  $z = -1$  ó ambos puedan ser nodos en la fórmula de cuadratura y que el resto aparezca en pares conjugados sobre  $\mathbb{T}$ . Entonces,*

si todos los coeficientes  $A_j$ ;  $j = 1, \dots, n$  son reales,  $I_n(f)$  es exacta en  $\Lambda_{-s,s}$  donde  $s = \max(p, q)$ .

*Demostración:* Para fijar ideas, supongamos que  $z = \pm 1$  son nodos en la fórmula de cuadratura. En ese caso  $n$  tiene que ser un número par ( $n = 2m$ ) y podemos escribir,

$$I_{2m}(f) = A^+ f(1) + A^- f(-1) + \sum_{j=1}^{m-1} A_j (f(z_j) + f(\bar{z}_j)).$$

Es suficiente ver que si para un cierto entero  $k$ ,  $I_{2m}(z^k) = I_\omega(z^k)$  entonces,  $I_{2m}(z^{-k}) = I_\omega(z^{-k})$ .

Sea  $k \geq 0$ , como  $\omega(\theta)$  es simétrica, los momentos  $c_k$  son reales. Por tanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} \omega(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \omega(\theta) d\theta.$$

Entonces:

$$I_{2m}(z^k) = I_\omega(z^k) = I_\omega(z^{-k}).$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} I_{2m}(z^{-k}) &= A^+ + A^- (-1)^k + \sum_{j=1}^{m-1} A_j ((z_j)^{-k} + (\bar{z}_j)^{-k}) \\ &= A^+ + A^- (-1)^k + \sum_{j=1}^{m-1} A_j ((z_j)^{-k} + (z_j)^k) \\ &= I_{2m}(z^k). \end{aligned}$$

■

Como consecuencia inmediata de las Proposiciones 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 y (5.5.2) se tiene el siguiente

**Corolario 5.5.3.** *En las mismas condiciones que en la Proposición anterior, la fórmula de tipo interpolatorio  $I_n(f)$  con respecto a las funciones peso  $\omega_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$  y  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$  para  $p = n - 2$ , son exactas en  $\Lambda_{-(n-2),n-2}$ . Por tanto, la fórmula de cuadratura  $J_n$  en  $[-1, 1]$  dada en la Proposición 5.5.1 es exacta en  $\mathbb{P}_{2n-2}$ . La fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio con respecto a  $\omega_3(\theta) = \frac{\sin^2(\theta)}{2\pi}$  para  $p = n - 3$ , es exacta en  $\Lambda_{-(n-3),n-3}$  y, de nuevo,  $J_n$  es exacta en  $\mathbb{P}_{2n-3}$ .*

**Observación 5.5.4.** *Convendría señalar que las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio con respecto a las tres funciones peso mencionadas anteriormente, están muy cerca (en términos de dominio de validez) de las fórmulas de Szegő que son exactas en  $\Lambda_{-(n-1), n-1}$ . Esto explica los excelentes resultados numéricos de la Sección anterior. Por otro lado, las correspondientes fórmulas de cuadratura  $J_n$  en  $[-1, 1]$  están, también, muy próximas a las fórmulas de cuadratura Gaussianas que se sabe son exactas en  $\mathbb{P}_{2n-1}$ .*

En la Proposición 5.5.1 hemos construido fórmulas de cuadratura en el intervalo  $[-1, 1]$  con nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  en  $(-1, 1)$ . Sería interesante que uno de los dos extremos del intervalo, o los dos, fuesen también nodos en la fórmula de cuadratura. En esta dirección se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 5.5.5.** *Sea  $\mu(x)$  una función peso en  $[-1, 1]$  y sea  $\omega(\theta)$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi)$  dada por (1.9). Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(z_j)$  con  $n$  par una fórmula de cuadratura para  $I_\omega(f)$  exacta en  $\Lambda_{-p, q}$  con  $p, q$  enteros no negativos tales que  $p + q = n - 1$ , y donde  $z = \pm 1$  son nodos y el resto aparecen en pares conjugados sobre  $\mathbb{T}$  de forma que se puede escribir:  $I_n(f) = A^+ f(1) + A^- f(-1) + \sum_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} A_j f(z_j)$  con  $z_j = e^{i\theta_j}$ ;  $j = 1, \dots, \frac{n-2}{2}$ ,  $\theta_j \notin \{-\pi, 0\}$ . Entonces, si  $x_j = \cos \theta_j$  y  $B_j = \Re(A_j)$ ;  $j = 1, \dots, \frac{n-2}{2}$ , se tiene que*

$$J_{\frac{n+2}{2}}(f) = B^+ f(1) + B^- f(-1) + \sum_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} B_j f(x_j)$$

es una fórmula de cuadratura para  $I_\mu(f)$ , exacta en  $\mathbb{P}_r$ ,  $r = \min(p, q)$  con  $B^+ = \frac{A^+}{2}$  y  $B^- = \frac{A^-}{2}$ .

*Demostración:* Como  $n$  debe ser par,  $n = 2m$ . Tenemos que probar que

$$J_{m+1}(x^k) = I_\mu(x^k); \quad k = 0, 1, \dots, r.$$

Por (5.19), y como el polinomio nodal  $W_{2m}$  y el polinomio  $Q_{2m}$  definido por (5.18), tienen coeficientes reales, entonces  $A_{m+j} = \bar{A}_j$ ;  $j = 1, \dots, m$  y  $A^+, A^- \in \mathbb{R}$ . Como ya hemos

visto anteriormente, si  $z = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$  y  $x = \cos \theta$ , se tiene que

$$x^k = \left( \frac{z + z^{-1}}{2} \right)^k = p(z) + p(z^{-1}) = L(z) \in \Lambda_{-k,k}$$

siendo  $p$  un polinomio de grado  $k$  con coeficientes reales.

Por tanto,

$$\overline{L(z)} = L(\bar{z}) = L(z^{-1}) = L(z); \quad z = e^{i\theta}.$$

Observar que  $L(\pm 1) = (\pm 1)^k$ . Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} J_{m+1}(x^k) &= B^+ f(1) + B^- f(-1) + \sum_{j=1}^{m-1} B_j x_j^k \\ &= \frac{A^+}{2} L(1) + \frac{A^-}{2} L(-1) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{A_j + \bar{A}_j}{2} L(z_j) \\ &= \frac{1}{2} \left( A^+ L(1) + A^- L(-1) + \sum_{j=1}^{m-1} A_j L(z_j) + \sum_{j=1}^{m-1} \bar{A}_j L(z_j) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( A^+ L(1) + A^- L(-1) + \sum_{j=1}^{2m-2} A_j L(z_j) \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} L(e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} I_{\omega}(L) \end{aligned}$$

ya que  $L \in \Lambda_{-k,k} \subset \Lambda_{-r,r} \subset \Lambda_{-p,q}$ . Finalmente, por (5.20) tenemos  $\frac{1}{2} I_{\omega}(L) = I_{\mu}(x^k)$ ,  $k = 0, \dots, r$ . ■

**Observación 5.5.6.** *Supongamos  $n = 2m$ . Entonces, como  $r = \min(p, q) = m - 1$  sí y sólo si  $p = m - 1$  ó  $p = m$  ( $p + q = 2n - 1$ ), se tendrá en este caso que  $J_{m+1}$  es exacta en  $\mathbb{P}_{m-1}$  y en general no podemos asegurar que sea propiamente una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio. Sin embargo, si los coeficientes  $A_j$ ;  $j = 1, \dots, 2m$  son reales,  $J_{m+1}$  automáticamente pasa a ser de tipo interpolatorio, es decir, exacta en  $\mathbb{P}_m$ .*

De forma análoga, se puede demostrar fácilmente la siguiente

**Proposición 5.5.7.** *Sea  $\mu(x)$  una función peso en  $[-1, 1]$  y  $\omega(\theta)$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$  dada por (1.9). Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(z_j)$  con  $n$  par una fórmula de cuadratura para  $I_{\omega}(f)$  exacta en  $\Lambda_{-p,q}$  siendo  $p, q$  enteros no negativos tales que  $p + q = n - 1$ , donde  $z = 1$  ó*

$z = -1$  es uno de los nodos y el resto aparece en pares conjugados sobre  $\mathbb{T}$ . Sea  $I_n(f) = A^\pm f(\pm 1) + \sum_{j=1}^{n-1} A_j f(z_j)$  con  $z_j = e^{i\theta_j}$ ;  $j = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ ,  $\theta_j \notin \{-\pi, 0\}$ . Entonces, si  $x_j = \cos \theta_j$ ;  $j = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$  y  $B_j = \Re(A_j)$ ;  $j = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ ,

$$J_{\frac{n+1}{2}}(f) = B^\pm f(\pm 1) + \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} B_j f(x_j)$$

es una fórmula de cuadratura para  $I_\mu(f)$ , exacta en  $\mathbb{P}_r$ ,  $r = \min(p, q)$  con  $B^\pm = \frac{A^\pm}{2}$ .

**Observación 5.5.8.** Escribamos  $n = 2m + 1$ . Entonces como  $r = \min(p, q) = m$  sí y sólo si  $p = q = m$ , ( $p + q = 2m$ ), entonces  $J_{m+1}$  es exacta en  $\mathbb{P}_m$  y en ambos casos  $J_{m+1}$  será una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio.

Supongamos que el polinomio nodal en la fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  sobre  $\mathbb{T}$  es  $W_n(z) = z^n - \tau$ , con  $\tau = \pm 1$ . Entonces, si  $\tau = -1$  el polinomio  $W_n(z)$  vendrá dado por  $W_n(z) = z^n + 1$ . Para  $n$  par, sus ceros  $\{z_j\}_{j=1}^n$  están en  $\mathbb{T}$  y aparecen en pares conjugados. Para  $n$  impar,  $z = -1$  es un cero de  $W_n(z)$  y los  $n - 1$  restantes aparecen en pares conjugados sobre  $\mathbb{T}$ .

Si ahora tomamos  $\tau = 1$ , para  $n$  par,  $z = \pm 1$ , son ceros de  $W_n(z)$  y si  $n$  es impar,  $z = -1$  es la única raíz real. En ambos casos, el resto de las raíces aparecen en pares conjugados sobre  $\mathbb{T}$ .

Aplicaremos toda esta teoría a las tres funciones peso de Chebyshev  $\omega_1(\theta) = 1 + \cos \theta$ ,  $\omega_2(\theta) = 1 - \cos \theta$  y  $\omega_3(\theta) = \sin^2 \theta$ . La relación entre  $\mu$  y  $\omega$ , que viene dada por la fórmula (1.9), se puede ver en la Tabla 5.1 del Capítulo 3 (recuérdese que  $\omega(\theta) = (1 + \cos \theta)^{\alpha+1/2} (1 - \cos \theta)^{\beta+1/2}$ ,  $\alpha, \beta \in \{\pm 1/2\}$  y donde el caso  $\alpha = \beta = -1/2$  queda incluido en la Sección 5 del Capítulo anterior).

Hemos tomado los valores de  $\tau = -1$  y  $\tau = 1$  para calcular, en ambos casos, tanto los coeficientes de la  $2n$ -ésima fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio como los de la

$(2n + 1)$ -ésima fórmula con respecto a  $\omega_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  haciendo uso de (5.2), (5.3) y (5.4) respectivamente y donde la elección del parámetro  $p$  será especificado convenientemente. Esto nos permitirá deducir las correspondientes fórmulas de cuadratura en  $[-1, 1]$  con respecto a  $\mu_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Consideremos primero la función peso  $\omega_1(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2\pi}$ .

Si  $\tau = -1$ , entonces, por (5.2) y tomando  $p = 2n - 2$ , los coeficientes de la  $2n$ -ésima fórmula de cuadratura con respecto a  $\omega_1$  vienen dados por:

$$A_j = \pi \frac{1 + \cos \left( \frac{(2j-1)\pi}{2n} \right)}{n}; \quad j = 1, \dots, 2n$$

y por lo tanto  $B_j = \Re(A_j) = \pi \frac{1 + \cos \left( \frac{(2j-1)\pi}{2n} \right)}{n}; j = 1, \dots, n$ .

Para los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  se tiene

$$x_j = \Re(z_j) = \cos \left( \frac{(2j-1)\pi}{2n} \right); \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{nodos de Chebyshev}).$$

Entonces, por las Proposiciones 5.5.1 y 5.5.5

$$I_\mu(p) = \int_{-1}^1 p(x) \mu(x) dx = \sum_{j=1}^n \left( \pi \frac{1 + \cos \left( \frac{(2j-1)\pi}{2n} \right)}{2n} \right) p \left( \cos \left( \frac{(2j-1)\pi}{2n} \right) \right) \quad (5.23)$$

para todo  $p \in \mathbb{P}_{2n-2}$  siendo  $\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .

Por otro lado, por (5.2) tenemos que los coeficientes de la  $(2n + 1)$ -ésima fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio con respecto a  $\omega_1$  serán (tomando ahora  $p = 2n - 1$ )

$$A_j = 2\pi \frac{1 + \cos \left( \frac{(2j-1)\pi}{2n+1} \right)}{2n+1}; \quad j = 1, \dots, 2n.$$

$$A^- = A_{n+1} = 2\pi \frac{1 + \cos \left( \frac{(2(n+1)-1)\pi}{2n+1} \right)}{2n+1} = 2\pi \frac{1 + \cos \pi}{2n+1} = 0.$$

Y los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  vienen dados por

$$x_j = \cos \left( \frac{(2j-1)\pi}{2n+1} \right); \quad j = 1, \dots, n.$$

siendo  $x_{n+1} = -1$ .

Por tanto, por las Proposiciones 5.5.7 y 5.5.5

$$I_\mu(p) = \int_{-1}^1 p(x)\mu(x)dx = \sum_{j=1}^n \left( 2\pi \frac{1 + \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n+1}\right)}{2n+1} \right) p\left(\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n+1}\right)\right) \quad (5.24)$$

para todo  $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ , coincidiendo con la correspondiente  $n$ -ésima fórmula Gaussiana para la función peso  $\mu(x)$ .

En el caso en el que  $\tau = 1$ , los cálculos son muy similares. Dado que lo mismo ocurre para las dos funciones peso restantes, omitiremos los detalles y simplemente expondremos los resultados en las Tablas dadas a continuación.

Para  $\omega_1$ , los resultados se pueden ver en las Tablas 1 y 2 con  $\tau = -1$  (para el que ya hemos hecho los cálculos) y  $\tau = 1$ , respectivamente.

<i>Tabla 1</i>		
$\tau = -1$	$p = 2n - 2$	$p = 2n - 1$
$\omega_1$	$A_j = \frac{\pi}{n}\omega_1(\theta_j), \quad 1 \leq j \leq n$ $\theta_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad 1 \leq j \leq n$	$A_j = \frac{2\pi}{2n+1}\omega_1(\theta_j), \quad 1 \leq j \leq n+1$ $A^- = A_{n+1} = 0$ $\theta_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n+1}, \quad 1 \leq j \leq n+1$

<i>Tabla 2</i>		
$\tau = 1$	$p = 2n - 2$	$p = 2n - 1$
$\omega_1$	$A_j = \frac{\pi}{n}\omega_1(\theta_j), \quad 1 \leq j \leq n+1$ $A^+ = A_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad A^- = A_{n+1} = 0$ $\theta_j = \frac{(j-1)\pi}{n}, \quad 1 \leq j \leq n+1$	$A_j = \frac{2\pi}{2n+1}\omega_1(\theta_j), \quad 0 \leq j \leq n$ $A^+ = A_0 = \frac{4\pi}{2n+1}$ $\theta_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad 0 \leq j \leq n$

Para  $\omega_2$  los resultados vienen dados en las Tablas 3 y 4.

<i>Tabla 3</i>		
$\tau = -1$	$p = 2n - 2$	$p = 2n - 1$
$\omega_2$	$A_j = \frac{\pi}{n} \omega_2(\theta_j), \quad 1 \leq j \leq n$ $\theta_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad 1 \leq j \leq n$	$A_j = \frac{2\pi}{2n+1} \omega_2(\theta_j), \quad 1 \leq j \leq n+1$ $A^- = A_{n+1} = \frac{4\pi}{2n+1}$ $\theta_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n+1}, \quad 1 \leq j \leq n+1$

<i>Tabla 4</i>		
$\tau = 1$	$p = 2n - 2$	$p = 2n - 1$
$\omega_2$	$A_j = \frac{\pi}{n} \omega_2(\theta_j), \quad 1 \leq j \leq n+1$ $A^+ = A_1 = 0, \quad A^- = A_{n+1} = \frac{2\pi}{n}$ $\theta_j = \frac{(j-1)\pi}{n}, \quad 1 \leq j \leq n+1$	$A_j = \frac{2\pi}{2n+1} \omega_2(\theta_j), \quad 0 \leq j \leq n$ $A^+ = A_0 = 0$ $\theta_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad 0 \leq j \leq n$

Finalmente, para  $\omega_3$ , los coeficientes y nodos de la  $2n$ -ésima fórmula de cuadratura y la  $2n + 1$ -ésima fórmula de cuadratura con  $p = 2n - 3$  y  $p = 2n - 2$  respectivamente, aparecen en las Tablas 5 y 6.

<i>Tabla 5</i>		
$\tau = -1$	$p = 2n - 3$	$p = 2n - 2$
$\omega_3$	$A_j = \frac{\pi}{n} \omega_3(\theta_j), \quad 1 \leq j \leq n$ $\theta_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad 1 \leq j \leq n$	$A_j = \frac{2\pi}{2n+1} \omega_3(\theta_j), \quad 1 \leq j \leq n+1$ $A^- = A_{n+1} = 0$ $\theta_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n+1}, \quad 1 \leq j \leq n+1$



<i>Tabla 6</i>		
$\tau = 1$	$p = 2n - 3$	$p = 2n - 2$
$\omega_3$	$A_j = \frac{\pi}{n}\omega_3(\theta_j), \quad 1 \leq j \leq n + 1$ $A^+ = A_1 = 0, \quad A^- = A_{n+1} = 0$ $\theta_j = \frac{(j-1)\pi}{n}, \quad 1 \leq j \leq n + 1$	$A_j = \frac{2\pi}{2n+1}\omega_3(\theta_j), \quad 0 \leq j \leq n$ $A^+ = A_0 = 0$ $\theta_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad 0 \leq j \leq n$

De las Tablas anteriores podemos ahora deducir las correspondientes fórmulas de cuadratura para  $I_{\mu_j}(F)$ ,  $j = 1, 2, 3$  de forma análoga a (5.23) y (5.24). En particular, de la Tabla 4, cuando  $p = 2n - 1$  obtenemos la correspondiente  $n$ -ésima fórmula Gaussiana para  $I_{\mu_2}(F)$ . En los restantes casos obtenemos fórmulas de cuadratura muy próximas a las del máximo grado de precisión, bien Gaussianas o bien del tipo Gauss-Radau o Gauss-Lobatto.



# Capítulo 6

## Fórmulas de cuadratura Gaussianas

### 6.1 Introducción

Sea  $\mu$  una medida de probabilidad en  $[-\pi, \pi]$ , es decir  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = 1$ . A lo largo de este Capítulo seguimos interesados en aproximar integrales del tipo

$$I_{\mu}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\mu(\theta),$$

pero ahora mediante la siguiente fórmula de cuadratura:

$$I_n(f) = \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} A_{m,j} f^{(j)}(x_{n,m}); \quad \sum_{m=1}^s \alpha_m = n, \quad (6.1)$$

que sea exacta en  $\Lambda_{-p,q}$ , con  $p = p(n)$ ,  $q = q(n)$  y  $p \simeq q$  lo más grande posible.

Si se pretende que los nodos estén sobre  $\mathbb{T}$ , entonces tomando éstos como los ceros del  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal  $B_n(z, w)$  respecto de  $\mu$ , llegamos a que la fórmula de cuadratura  $I_n(f)$ , dada por (6.1),  $(\alpha_j = 1; j = 1, \dots, s)$  coincide con la de Szegő que, como se sabe, es exacta en  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$ , siendo éste, además, su dominio máximo de validez. En tal fórmula de cuadratura se dispone de  $2n$  parámetros, a saber, los  $n$  nodos y los  $n$  coeficientes y, sin embargo, la dimensión del espacio  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$  es  $2n - 1$ . Así pues,

cabría preguntarse por la existencia de fórmulas de cuadratura exactas en subespacios de  $\Lambda$  de dimensión  $2n$ . Por esta razón y una vez constatada su existencia, las llamaremos *fórmulas de cuadratura Gaussianas sobre la circunferencia unidad*.

Más concretamente, en este Capítulo, construiremos fórmulas de cuadratura como en (6.1), tomando como nodos los ceros de los polinomios de Szegő. De forma similar se pueden obtener fórmulas de cuadratura basados en los ceros de los polinomios recíprocos de Szegő.

Dado que los ceros de los polinomios de Szegő están en  $\mathbb{D}$  y, en general, no son simples, necesitaremos evaluar el integrando  $f(z)$  en puntos de  $\mathbb{D}$ , así como sus derivadas. Estamos forzados, por tanto, a considerar funciones  $f$  analíticas en  $\mathbb{D}$ .

Nuestro punto de partida será el siguiente resultado, (ver [22, p. 198]), que dice:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) d\mu(\theta) = \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P(x)}{|\Phi_n(x)|^2} d\theta; \quad x = e^{i\theta} \quad (6.2)$$

para todo  $P \in \mathbb{P}_n$  donde  $k_n = (\Phi_n(z), \Phi_n(z))_{\mu}$ .

Esto nos permite tomar inicialmente como aproximación a  $I_{\mu}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\mu(\theta)$ ,  $x = e^{i\theta}$ , lo siguiente:

$$I_n(f) = \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{|\Phi_n(x)|^2} d\theta; \quad x = e^{i\theta}. \quad (6.3)$$

En la Sección 2, nos centraremos en fórmulas del tipo (6.1), donde los nodos son los ceros de los polinomios de Szegő con respecto a  $\mu$ . Caracterizaremos dicha fórmula de cuadratura en términos de su máximo dominio de validez, dándose varias alternativas al cálculo de sus coeficientes teniendo en cuenta su relación con (6.3).

En la Sección 3, estudiaremos, tanto la relación que existe entre estas fórmulas de cuadratura y las de tipo interpolatorio, como la que existe con ciertos aproximantes de Padé en dos puntos a la transformada de Herglotz-Riesz de  $\mu$ .

En la Sección 4, analizaremos dichas fórmulas de cuadratura en términos de expresiones del error, utilizando polinomios interpoladores de Laurent y Laurent-Hermite. En ambos

casos daremos estimaciones de la velocidad de convergencia para integrandos analíticos en un dominio que contenga a  $\mathbb{D}$ . Obtendremos también resultados de convergencia considerando hipótesis más débiles para el integrando.

Finalmente, en la Sección 5 se hará una comparación numérica, con carácter ilustrativo, entre las fórmulas Gaussianas y las fórmulas de Szegő para ciertas elecciones de la medida  $\mu$ .

## 6.2 Fórmulas Gaussianas

Consideremos la fórmula  $I_n(f)$  dada por (6.3) siendo  $\Phi_n(z)$  el polinomio mónico de Szegő de grado  $n$  con respecto a  $\mu$ . Como todos sus ceros están en  $\mathbb{D}$  podemos escribir  $\Phi_n(z) = z^\alpha \prod_{m=1}^s (z - x_{n,m})^{\alpha_m}$  con  $\alpha = \alpha(n)$ ,  $0 \leq \alpha \leq n$ ,  $\sum_{m=1}^s \alpha_m = n - \alpha$  y  $x_{n,m} \neq 0$ ,  $\forall m = 1, \dots, s$ .

Supongamos, en primer lugar, el caso extremo  $\alpha = n$ . Entonces  $\Phi_n(z) = z^n$  y para todo  $j : 1 \leq j \leq n$  si  $x = e^{i\theta}$ , se tiene

$$I_\mu(x^j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^j d\mu(\theta) = \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^j}{|\Phi_n(x)|^2} d\theta = \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\theta} d\theta = 0.$$

Por tanto,  $\overline{I_\mu(x^j)} = I_\mu(x^{-j}) = 0$ ;  $1 \leq j \leq n$ .

Por otro lado, si  $j \geq 1$ ,

$$I_n(x^{-j}) = \frac{k_n}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{x^{j+1}} dx = 0.$$

Para  $j = 0$  tenemos que  $I_\mu(1) = I_n(1) = 1$  y como consecuencia, si  $L \in \Lambda_{-n,n}$ , es decir,  $L(z) = \sum_{j=-n}^n \beta_j z^j$ , entonces  $I_\mu(L) = I_n(L) = \beta_0$ .

Vemos, pues, que  $I_n(f)$  dada por (6.3) es exacta en  $\Lambda_{-n,n}$  (su dimensión es  $2n+1$ ) pero no puede escribirse en la forma (6.1) con un único nodo en este caso  $z = 0$ . Ciertamente, estamos trabajando con la medida de Lebesgue y la fórmula (6.2), en esta situación, carece

de interés. Así pues, con objeto de evitar este caso trivial vamos a suponer de aquí en adelante que  $\alpha \neq n$ , es decir,

$$\Phi_n(z) = z^\alpha \tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z), \quad 0 \leq \alpha \leq n-1 \quad (6.4)$$

donde

$$\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z) = \prod_{m=1}^s (z - x_m)^{\alpha_m}, \quad 0 < |x_m| < 1 \quad \text{y} \quad \sum_{m=1}^s \alpha_m = n - \alpha. \quad (6.5)$$

Ahora, con carácter general y a efecto de dar una primera caracterización del polinomio nodal para la fórmula (6.1), tenemos la siguiente

**Proposición 6.2.1.** *Sea  $\alpha$  un entero no negativo  $0 \leq \alpha \leq n-1$  y sea*

$$I_n(f) = \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} A_{m,j} f^{(j)}(x_m), \quad x_m \neq 0, \quad m = 1, \dots, s$$

una fórmula de cuadratura exacta en  $\Lambda_{-(k-\alpha), 2n-k-1}$ ,  $0 \leq k \leq 2n$ . Entonces, el polinomio

$$\sigma_n(z) = z^\alpha \prod_{m=1}^s (z - x_m)^{\alpha_m}$$

donde  $\sum_{m=1}^s \alpha_m = n - \alpha$ , satisface las siguientes condiciones de ortogonalidad respecto a la medida positiva  $\mu$ :

$$(\sigma_n(z), z^p)_\mu = 0 \quad \text{para todo} \quad k - n + 1 \leq p \leq k, \quad 0 \leq k \leq 2n. \quad (6.6)$$

*Demostración:*

$$(\sigma_n(z), z^p)_\mu = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(e^{i\theta}) \overline{e^{ip\theta}} d\mu(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{i(p-\alpha)\theta}} \prod_{m=1}^s (e^{i\theta} - x_m)^{\alpha_m} d\mu(\theta)$$

Sea  $\tilde{\sigma}_{n-\alpha}(z) = \prod_{m=1}^s (z - x_m)^{\alpha_m}$ , entonces, como  $I_n(f)$  es exacta en  $\Lambda_{-(k-\alpha), 2n-k-1}$ , para todo  $k - n + 1 \leq p \leq k$ ,  $0 \leq k \leq 2n$ , se tiene:

$$\begin{aligned} (\sigma_n(z), z^p)_\mu &= \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} A_{m,j} \frac{d^j}{dz^j} (\tilde{\sigma}_{n-\alpha}(z) z^{-(p-\alpha)}) (x_m) \\ &= \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} A_{m,j} \left( \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (z^{-(p-\alpha)})^{(j-l)}(x_m) \tilde{\sigma}_{n-\alpha}^{(l)}(x_m) \right). \end{aligned}$$

Como  $x_m$  es una raíz de  $\tilde{\sigma}_{n-\alpha}$  de multiplicidad  $\alpha_m$  para todo  $m = 1, \dots, s$ , entonces  $\tilde{\sigma}_n^{(l)}(x_m) = 0, \forall l = 0, \dots, j, j = 0, \dots, \alpha_m - 1$ . Por tanto,

$$(\sigma_n(z), z^p)_\mu = 0, \quad \forall k - n + 1 \leq p \leq k.$$

■

En particular, para  $k = n - 1$ ,  $I_n(f)$  es exacta en  $\Lambda_{-(n-\alpha-1),n}$  teniéndose  $\sigma_n \equiv \Phi_n$ .

Por otro lado, si  $k = n$ ,  $I_n(f)$  es exacta en  $\Lambda_{-(n-\alpha),n-1}$  y en este caso  $\sigma_n \equiv \Phi_n^*$ , donde, como ya sabemos,  $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n(\frac{1}{z})}$ .

Veamos ahora que  $I_n(f)$  dada por (6.3) se puede escribir como (6.1) al propio tiempo que calculamos explícitamente los coeficientes  $A_{n,j}$  en dicha fórmula. En efecto, consideremos primero el caso en el que la función  $f$  sea analítica en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ . Ahora bien, si  $x \in \mathbb{T}$  entonces  $\Phi_n^*(x) = x^n \overline{\Phi_n(x)}$ . Así pues, poniendo  $x = e^{i\theta}$  y aplicando el Teorema de los Residuos, se tiene:

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)x^n}{\Phi_n(x)\Phi_n^*(x)} d\theta = \frac{k_n}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(x)x^{n-1}}{\Phi_n(x)\Phi_n^*(x)} dx = \frac{k_n}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(x)x^{n-\alpha-1}}{\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(x)\Phi_n^*(x)} dx \\ &= k_n \sum_{m=1}^s \operatorname{Res}(z = x_m) = k_n \sum_{m=1}^s \frac{1}{(\alpha_m-1)!} \lim_{z \rightarrow x_m} \frac{d^{\alpha_m-1}}{dz^{\alpha_m-1}} \left( \frac{(z-x_m)^{\alpha_m} z^{n-\alpha-1}}{\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z)\Phi_n^*(z)} f(z) \right) \\ &= k_n \sum_{m=1}^s \frac{1}{(\alpha_m-1)!} \lim_{z \rightarrow x_m} \left( \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} \binom{\alpha_m-1}{j} \frac{d^{\alpha_m-1-j}}{dz^{\alpha_m-1-j}} \left( \frac{(z-x_m)^{\alpha_m} z^{n-\alpha-1}}{\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z)\Phi_n^*(z)} \frac{d^j}{z^j} f(z) \right) \right) \\ &= \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} \left( \frac{k_n}{(\alpha_m-1-j)!} \lim_{z \rightarrow x_m} \frac{d^{\alpha_m-1-j}}{dz^{\alpha_m-1-j}} \left( \frac{(z-x_m)^{\alpha_m} z^{n-\alpha-1}}{\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z)\Phi_n^*(z)} \right) \right) f^{(j)}(x_m). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$I_n(f) = \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} A_{m,j} f^{(j)}(x_m) \quad (6.7)$$

donde

$$A_{m,j} = \frac{k_n}{(\alpha_m-1-j)!} \lim_{z \rightarrow x_m} \frac{d^{\alpha_m-1-j}}{dz^{\alpha_m-1-j}} \left( \frac{(z-x_m)^{\alpha_m} z^{n-\alpha-1}}{\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z)\Phi_n^*(z)} \right). \quad (6.8)$$

En particular si todos los ceros son simples y  $\alpha = 0$ , entonces los coeficientes vienen

dados por

$$A_j = \frac{k_n x_j^{n-1}}{\Phi'_n(x_j) \Phi_n^*(x_j)}; \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.9)$$

**Observación 6.2.2.** Si  $\alpha \neq 0$ , la fórmula (6.7) sigue siendo válida para una función  $f(z)$  meromorfa en  $\mathbb{D}$ , continua en  $\mathbb{T}$  tal que  $z = 0$  es el único polo con cierta multiplicidad.

**Observación 6.2.3.** Conviene remarcar que  $I_n(f)$  definida como en (6.3) se puede computar para cualquier función integrable  $f$  en  $\mathbb{T}$ . Sin embargo, sólo se obtiene una fórmula como (6.1) cuando la función es analítica en  $\mathbb{D}$ . Estamos interesados en esta discretización ya que de otra forma tendríamos que calcular la integral (6.3).

Supongamos ahora que la función  $f$  es analítica en  $\mathbb{E}$  y continua en  $\overline{\mathbb{E}}$ . Entonces

$$\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n(1/\bar{z})} = z^n \left( \frac{1}{z^\alpha} \prod_{m=1}^s \left( \frac{1}{z} - \bar{x}_m \right)^{\alpha_m} \right) = \prod_{m=1}^s (1 - z\bar{x}_m)^{\alpha_m}.$$

Por lo tanto, los ceros de  $\Phi_n^*(z)$  son  $z_m = \frac{1}{\bar{x}_m}$ ,  $m = 1, \dots, s$  con multiplicidades  $\alpha_m$ ,  $m = 1, \dots, s$ . Entonces

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)x^n}{\Phi_n(x)\Phi_n^*(x)} d\theta = \frac{k_n}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(x)x^{n-1}}{\Phi_n(x)\Phi_n^*(x)} dx = \frac{k_n}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(x)x^{n-\alpha-1}}{\Phi_{n-\alpha}(x)\Phi_n^*(x)} dx \\ &= k_n \sum_{m=1}^s \operatorname{Res}(z = z_m) = k_n \sum_{m=1}^s \frac{1}{(\alpha_m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_m} \frac{d^{\alpha_m-1}}{dz^{\alpha_m-1}} \left( \frac{(z-z_m)^{\alpha_m} z^{n-\alpha-1}}{\Phi_{n-\alpha}(z)\Phi_n^*(z)} f(z) \right) \\ &= k_n \sum_{m=1}^s \frac{1}{(\alpha_m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_m} \left( \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} \binom{\alpha_m-1}{j} \frac{d^{\alpha_m-1-j}}{dz^{\alpha_m-1-j}} \left( \frac{(z-z_m)^{\alpha_m} z^{n-\alpha-1}}{\Phi_{n-\alpha}(z)\Phi_n^*(z)} \frac{d^j}{dz^j} f(z) \right) \right) \\ &= \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} \left( \frac{k_n}{(\alpha_m-1-j)! j!} \lim_{z \rightarrow z_m} \frac{d^{\alpha_m-1-j}}{dz^{\alpha_m-1-j}} \left( \frac{(z-z_m)^{\alpha_m} z^{n-\alpha-1}}{\Phi_{n-\alpha}(z)\Phi_n^*(z)} \right) \right) f^{(j)}(z_m). \end{aligned}$$

Por lo que los coeficientes vienen dados por

$$A_{m,j} = \frac{k_n}{(\alpha_m-1-j)! j!} \lim_{z \rightarrow z_m} \frac{d^{\alpha_m-1-j}}{dz^{\alpha_m-1-j}} \left( \frac{(z-z_m)^{\alpha_m} z^{n-\alpha-1}}{\Phi_{n-\alpha}(z)\Phi_n^*(z)} \right).$$

Como estamos interesados en funciones  $f$  que sean analíticas en  $\mathbb{D}$  y continuas en  $\overline{\mathbb{D}}$ , nos centraremos en el estudio de fórmulas de cuadratura  $I_n(f)$  dadas por (6.7) a las cuales



denominaremos, como hemos dicho con anterioridad, fórmulas de cuadratura Gaussianas sobre la circunferencia unidad.

A continuación probaremos el siguiente resultado que caracteriza dichas fórmulas de cuadratura:

**Proposición 6.2.4.** *Una fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  es exacta en  $\Lambda_{-(n-\alpha-1),n}$  sí y sólo si los coeficientes vienen dados por la fórmula (6.8) y los nodos son las raíces no nulas del polinomio mónico de Szegő  $\Phi_n(z)$  con respecto a  $\mu$ , donde  $\Phi_n(z) = z^\alpha \tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z)$  y  $\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(0) \neq 0$ .*

*Demostración:*

”  $\Rightarrow$  ” Si  $I_n(f)$  es exacta en  $\Lambda_{-(n-\alpha-1),n}$ , entonces acabamos de demostrar que los coeficientes  $A_{m,j}$ ,  $j = 0, \dots, \alpha_m - 1$ ,  $m = 1, \dots, s$ , vienen dados como en la fórmula (6.8). Por la Proposición 6.2.1 ( $k = n - 1$ ), sabemos que los nodos  $x_m$ ,  $m = 1, \dots, s$  son las raíces no nulas del polinomio mónico de Szegő con respecto a  $\mu$ .

”  $\Leftarrow$  ” Si  $0 \leq p \leq n$ , por (6.2), se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^p d\mu(\theta) = \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^p}{|\Phi_n(x)|^2} d\theta; \quad (x = e^{i\theta}).$$

Entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^{-p} d\mu(\theta) = \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^{-p}}{|\Phi_n(x)|^2} d\theta; \quad 1 \leq p \leq n.$$

Sea  $1 \leq p \leq n - \alpha - 1$ . Como  $1 \leq \alpha \leq n - 1$ , se tiene

$$\begin{aligned} I_\mu(x^{-p}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^{-p} d\mu(\theta) = \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^{-p}}{|\Phi_n(x)|^2} d\theta \\ &= \frac{k_n}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{x^{n-p-1}}{\Phi_n(x)\Phi_n^*(x)} dx = \frac{k_n}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{x^{n-p-\alpha}}{x\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(x)\Phi_n^*(x)} dx \\ &= \text{Res}(z=0) + \sum_{m=1}^s \text{Res}(z=x_m) = \text{Res}(z=0) + I_n(x^{-p}). \end{aligned}$$

Pero, en este caso  $\text{Res}(z=0) = 0$ , luego  $I_\mu(x^{-p}) = I_n(x^{-p})$ . Sea  $n - \alpha \leq p \leq n$ . Entonces, se tiene de nuevo que

$$I_\mu(x^{-p}) = \text{Res}(z=0) + I_n(x^{-p}).$$

Si  $q = p - n + \alpha + 1$ , entonces  $1 \leq q \leq \alpha$  y

$$\text{Res}(z = 0) = \frac{k_n}{(q-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \left( \frac{1}{\widetilde{\Phi}_{n-\alpha}(z) \Phi_n^*(z)} \right) \neq 0.$$

■

Hemos visto que los coeficientes de la fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  se pueden expresar mediante (6.8). Seguidamente proporcionaremos una alternativa al cálculo de dichos coeficientes.

Sea pues,

$$L_l^p(z) = \frac{\Phi_n(z)}{(z-x_p)^{\alpha_p-l}}, \quad l = 0, \dots, \alpha_p - 1, \quad p = 1, \dots, m. \quad (6.10)$$

Como  $L_l^p \in \Lambda_{-(n-1),n}$  se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_l^p(e^{i\theta}) d\mu(\theta) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha_k-1} A_{k,j} \lim_{z \rightarrow x_k} \frac{d^j}{dz^j} \left( \frac{\Phi_n(z)}{(z-x_p)^{\alpha_p-l}} \right), \quad l = 0, \dots, \alpha_p - 1, \quad p = 1, \dots, m.$$

Sea

$$M_j^q = \lim_{z \rightarrow x_k} \frac{d^j}{dz^j} \left( \frac{\Phi_n(z)}{(z-x_k)^q} \right).$$

$$\begin{aligned} \frac{d^j}{dz^j} \left( \frac{\Phi_n(z)}{(z-x_k)^q} \right) &= \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \frac{d^{j-l}}{dz^{j-l}} \left( (z-x_k)^{-q} \right) \frac{d^l}{dz^l} (\Phi_n(z)) \\ &= \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^{j-l} (q)_{j-l} (z-x_k)^{-(q+j-l)} \Phi_n^{(l)}(z) \end{aligned}$$

donde  $(q)_{j-l} = q(q+1)\dots(q+j-l-1)$  es el *símbolo de Pochhammer*. Entonces,

$$\begin{aligned}
M_j^q &= \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^{j-l} (q)_{j-l} \lim_{z \rightarrow x_k} \frac{\Phi_n^{(l)}(z)}{(z-x_k)^{q+j-l}} \\
&= \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^{j-l} (q)_{j-l} \frac{\Phi_n^{(q+j)}(x_k)}{(q+j-l)!} \\
&= \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^{j-l} \frac{\Phi_n^{(q+j)}(x_k)}{(q+j-l)(q-1)!} \\
&= \frac{\Phi_n^{(q+j)}(x_k)}{(q-1)!} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^{j-l} \frac{1}{q+j-l}.
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$M_j^q = \frac{\Phi_n^{(q+j)}(x_k)}{(q-1)!} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^{j-l} \frac{1}{q+j-l}. \quad (6.11)$$

Para todos los coeficientes de la forma  $A_{k,\alpha_k-1}$ ,  $\forall k = 1, \dots, m$ , se obtiene

$$A_{k,\alpha_k-1} = \frac{1}{M_{\alpha_k-1}^1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_{\alpha_k-1}^k(e^{i\theta}) d\mu(\theta), \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Para los coeficientes  $A_{k,\alpha_k-2}$ ,  $\forall k = 1, \dots, m$ , se tiene

$$M_{\alpha_k-2}^2 A_{k,\alpha_k-2} + M_{\alpha_k-1}^2 A_{k,\alpha_k-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_{\alpha_k-2}^k(e^{i\theta}) d\mu(\theta), \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Entonces

$$A_{k,\alpha_k-2} = \frac{1}{M_{\alpha_k-2}^2} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_{\alpha_k-1}^k(e^{i\theta}) d\mu(\theta) - M_{\alpha_k-1}^2 A_{k,\alpha_k-1} \right), \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Para  $A_{k,\alpha_k-3}$ ,  $\forall k = 1, \dots, m$ ,

$$M_{\alpha_k-3}^3 A_{k,\alpha_k-3} + M_{\alpha_k-2}^3 A_{k,\alpha_k-2} + M_{\alpha_k-1}^3 A_{k,\alpha_k-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_{\alpha_k-3}^k(e^{i\theta}) d\mu(\theta),$$

$\forall k = 1, \dots, m$ . Por tanto,

$$A_{k,\alpha_k-3} = \frac{1}{M_{\alpha_k-3}^3} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_{\alpha_k-3}^k(e^{i\theta}) d\mu(\theta) - (M_{\alpha_k-2}^3 A_{k,\alpha_k-2} + M_{\alpha_k-1}^3 A_{k,\alpha_k-1}) \right),$$

$\forall k = 1, \dots, m$ . Y en general

$$A_{k,j} = \frac{1}{M_j^{\alpha_k-j}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_j^k(e^{i\theta}) d\mu(\theta) - \sum_{r=j+1}^{\alpha_k-1} M_r^{\alpha_k-j} A_{k,r} \right), \quad \forall j = 0, \dots, \alpha_k - 1,$$

$\forall k = 1, \dots, m$ .

Si todos los ceros son simples, es decir, si  $\alpha_k = 1$ ,  $\forall k = 1, \dots, m$ , entonces por (6.10) se tiene  $L_0^p(z) = \frac{\Phi_n(z)}{(z-x_p)}$  y por (6.8)

$$A_{k,0} = \frac{1}{M_0^1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi_n(z)}{z-x_k} d\mu(\theta) = \frac{k_n}{M_0^1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{z^{n-1}}{(z-x_k)\Phi_n^*(z)} dz.$$

Si aplicamos el Teorema de los Residuos, se obtiene

$$A_{k,0} = \frac{k_n}{M_0^1} \frac{x_k^{n-1}}{\Phi_n^*(x_k)}.$$

Por (6.11)  $M_0^1 = \Phi_n'(x_k)$  y volvemos a obtener la fórmula (6.9). Las integrales  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_l^p(e^{i\theta}) d\mu(\theta)$  se pueden calcular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_l^p(e^{i\theta}) d\mu(\theta) &= \frac{k_n}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{L_l^p(z) z^{n-1}}{\Phi_n(z)\Phi_n^*(z)} dz \\ &= \frac{k_n}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{z^{n-1}}{(z-x_p)^{\alpha_p-1} \Phi_n^*(z)} dz. \end{aligned}$$

Por el Teorema de los Residuos, se obtiene finalmente que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_l^p(e^{i\theta}) d\mu(\theta) = \frac{k_n}{(\alpha_p - l - 1)!} \lim_{z \rightarrow x_p} \frac{d^{\alpha_p-l-1}}{dz^{\alpha_p-l-1}} \left( \frac{z^{n-1}}{\Phi_n^*(z)} \right).$$

## 6.3 Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio y Aproximantes de Padé en dos puntos

### 6.3.1 Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio

Sea, como siempre,  $\Phi_n(z)$  el  $n$ -ésimo polinomio mónico de Szegő con respecto a  $\mu$ . Hemos visto que  $\Phi_n(z)$  se puede escribir como en (6.4) verificando las condiciones dadas en (6.5).

Como los ceros  $\{x_m\}_{m=1}^s$  de  $\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z)$  son todos distintos de cero y  $\{z^j\}_{j=-p}^q$  ( $p+q = n-\alpha-1$ ) es un sistema de Chebyshev en cualquier conjunto  $A \subset \mathbb{C}$  tal que  $0 \notin A$ , los coeficientes  $A_{m,j}$ ;  $0 \leq j \leq \alpha_m - 1$ ,  $m = 1, \dots, s$  se pueden determinar unívocamente de forma que la correspondiente fórmula de cuadratura  $I_n(f) = \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} A_{m,j} f^{(j)}(x_m)$  satisface  $I_\mu(f(z)) = I_n(f)$  para toda  $f \in \Lambda_{-p,q}$ , ( $p+q = n-\alpha-1$ ). Por otro lado, si fijamos los nodos  $\{x_m\}_{m=1}^s$ , se puede probar que existe un único polinomio de Laurent  $L_n(z) \in \Lambda_{-p,q}$  tal que

$$L_n^{(j)}(x_m) = f^{(j)}(x_m); \quad j = 0, \dots, \alpha_m - 1; \quad m = 1, \dots, s.$$

Además,  $L_n(z) = \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} \tilde{L}_{m,j}(z) f^{(j)}(x_m)$  donde  $\tilde{L}_{m,j} \in \Lambda_{-p,q}$  y

$$\tilde{L}_{m,j}^{(l)}(x_k) = \delta_{m,k} \delta_{j,l}, \quad l, j = 0, \dots, \alpha_m - 1; \quad m, k = 1, \dots, s. \quad (6.12)$$

Ahora, procediendo de forma análoga a [34, p. 80] se tiene

$$I_\mu(L_n(z)) = \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} I_\mu(\tilde{L}_{m,j}(z)) f^{(j)}(x_m) = I_n(f), \quad j = 0, \dots, \alpha_m - 1, \quad m = 1, \dots, s$$

donde  $I_\mu(\tilde{L}_{m,j}(z)) = A_{m,j}$ ,  $j = 0, \dots, \alpha_m - 1$ ,  $m = 1, \dots, s$ . Por esta razón, la fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  definida anteriormente, se dice que es de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-p,q}$ . Paralelamente al caso polinómico (véase [34, p. 101]) daremos, en el siguiente resultado, una conexión entre las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio y las fórmulas Gaussianas definidas en la Sección 2:

**Teorema 6.3.1.** *Sea  $\alpha$  un entero tal que  $0 \leq \alpha \leq n-1$ . Entonces la fórmula de cuadratura*

$$I_n(f) = \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} A_{m,j} f^{(j)}(x_m), \quad x_m \neq 0, \quad m = 1, \dots, s$$

*es exacta en  $\Lambda_{-(n-1-\alpha),n}$  sí y sólo sí*

(i) *La fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  es de tipo interpolatorio en  $\Lambda_{-p,q}$  donde  $p$  y  $q$  son enteros no negativos tales que  $p+q = n-\alpha-1$ .*

(ii) Los nodos  $\{x_m\}_{m=1}^s$  con multiplicidades  $\{\alpha_m\}_{m=1}^s$ ,  $\sum_{m=1}^s \alpha_m = n - \alpha$ , son las raíces no nulas de  $\Phi_n(z)$ , es decir, los ceros del polinomio  $\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z)$ .

*Demostración:*

”  $\Rightarrow$  ” El apartado (i) es trivial mientras que el apartado (ii) sigue por la Proposición 3.2.1.

”  $\Leftarrow$  ” Supongamos que  $I_n(f) = \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} A_{m,j} f^{(j)}(x_m)$  es exacta en  $\Lambda_{-p,q}$  ( $p+q = n - \alpha - 1$ ).

Para cada  $L \in \Lambda_{-(n-\alpha-1),n}$ , sea

$$R(z) = L(z) - \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} \tilde{L}_{m,j}(z) L^{(j)}(x_m) \in \Lambda_{-(n-\alpha-1),n},$$

donde  $\tilde{L}_{m,j} \in \Lambda_{-p,q}$  satisface (6.12).

Como  $R \in \Lambda_{-(n-\alpha-1),n}$  y  $R^{(i)}(x_m) = 0$ ,  $i = 0, \dots, \alpha_m - 1$ ,  $m = 1, \dots, s$ , se tiene que

$$R(z) = \frac{S(z)\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z)}{z^{n-\alpha-1}} = \frac{P(z)}{z^{n-\alpha-1}}; \quad P \in \mathbb{P}_{2n-\alpha-1}, \quad S \in \mathbb{P}_{n-1}$$

y  $L(z) = R(z) + \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} \tilde{L}_{m,j}(z) L^{(j)}(x_m)$ . Entonces, como  $I_\mu(\tilde{L}_{m,j}(z)) = A_{m,j}$ ,  $j = 0, \dots, \alpha_m - 1$ ,  $m = 1, \dots, s$ ,

$$I_\mu(L) = I_\mu(R) + \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} I_\mu(\tilde{L}_{m,j}(z)) L^{(j)}(x_m) = I_\mu(R) + I_n(L).$$

Sea  $x = e^{i\theta}$  entonces, teniendo en cuenta las condiciones de ortogonalidad de  $\Phi_n(z)$ .

$$\begin{aligned} I_\mu(R) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(x) d\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S(x)\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(x)}{x^{n-\alpha-1}} d\mu(\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^\alpha S(x)\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(x)}{x^{n-1}} d\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S(x)\Phi_n(x)}{x^{n-1}} d\mu(\theta) = 0 \end{aligned}$$

Sólo faltaría probar que  $I_n(f)$  no depende de la elección de  $p$ . Pero, esto se deduce inmediatamente de la Proposición 6.2.4 y la fórmula (6.8). ■

### 6.3.2 Aproximantes de Padé en dos puntos

Para todo  $z \notin \mathbb{T}$ , consideremos la transformada de Herglotz-Riesz de la medida  $\mu$ , es decir

$$F_\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x+z}{x-z} d\mu(\theta); \quad x = e^{i\theta}. \quad (6.13)$$

Como ya vimos en el primer Capítulo,  $F_\mu(z)$  admite los siguientes desarrollos en serie en el origen y en el infinito:

$$\begin{aligned} L_0(z) &= \mu_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j z^j, & |z| < 1 \\ L_\infty(z) &= -\mu_0 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{-j} z^{-j}, & |z| > 1 \end{aligned}$$

con  $\mu_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\mu(\theta)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

Sea  $\Omega_n(z)$  el  $n$ -ésimo polinomio de Szegő asociado con respecto a  $\mu$ . Dicho polinomio sabemos que viene dado por la expresión (1.14) en términos del polinomio mónico de Szegő  $\Phi_n(z)$  con respecto a  $\mu$ . Observar que existe una diferencia en la notación para dicho polinomio  $\Omega_n$  entre la dada en [30] y la tradicional de la teoría de polinomios ortogonales (ver por ejemplo [20]). A partir de [30], se comprueba que la función racional  $\frac{\Omega_n(z)}{\Phi_n(z)}$  satisface

$$\Phi_n(z)L_0(z) - \Omega_n(z) = O(z^n), \quad \Phi_n(z)L_\infty(z) - \Omega_n(z) = O\left(\frac{1}{z}\right).$$

En otras palabras, esta función racional representa el aproximante de Padé en dos puntos de orden  $(n, n+1)$  para el par  $(L_0, L_\infty)$ , en sentido débil (ver [30]).

Si  $\Phi_n(0) \neq 0$ , es decir,  $\alpha = 0$ , entonces se puede probar que

$$L_0(z) - \frac{\Omega_n(z)}{\Phi_n(z)} = O(z^n), \quad L_\infty(z) - \frac{\Omega_n(z)}{\Phi_n(z)} = O\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}\right).$$

En este caso, la función racional representa el aproximante de Padé en dos puntos de orden  $(n, n+1)$  para el par  $(L_0, L_\infty)$  en sentido fuerte.

Ahora, veremos cómo estos aproximantes se pueden deducir a partir de las fórmulas Gaussianas. En efecto, consideremos la siguiente función, donde  $x$  es la variable y  $z$  un

parámetro,

$$h(x, z) = \frac{x + z}{x - z}; \quad z \in \mathbb{E} \quad (6.14)$$

que es analítica en  $\overline{\mathbb{D}}$ . Aplicando nuestra fórmula de cuadratura  $I_n(f)$ , exacta en  $\Lambda_{-(n-\alpha-1),n}$ , se tiene

$$I_n(h(\bullet, z)) = \frac{\tilde{Q}_n(z)}{P_n(z)} \quad (6.15)$$

donde  $P_n(z) = \prod_{m=1}^s (z - x_m)^{\alpha_m} = \tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z)$  y  $\tilde{Q}_n(z)$  es un polinomio de grado a lo sumo  $n - \alpha$ .

Por otro lado, sea  $R_n(x, z) \in \Lambda_{-p,q}$  (siendo  $z$  un parámetro) el polinomio de Laurent que interpola a  $h(x, z)$  en los nodos  $\{x_j\}_{m=1}^s$ , con multiplicidades  $\alpha_m$ , respectivamente, ( $m = 1, \dots, s$ ;  $\sum_{m=1}^s \alpha_m = n - \alpha$  y  $p + q = n - \alpha - 1$ ). Entonces, por el Teorema 6.3.1 se tiene

$$\frac{\tilde{Q}_n(z)}{\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z)} = I_\mu(R_n(\bullet, z)).$$

Además, se puede comprobar fácilmente que  $R_n(x, z)$  queda expresado como:

$$R_n(x, z) = 1 + \frac{2z}{x - z} \left( 1 - \frac{z^p \tilde{\Phi}_{n-\alpha}(x)}{x^p \tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z)} \right). \quad (6.16)$$

Esto nos permite obtener la siguiente representación integral para el polinomio  $\tilde{Q}_n(z)$ , a saber:

$$\tilde{Q}_n(z) = I_\mu \left\{ \tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z) + \frac{2z}{x - z} \left( \tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z) - \frac{z^p}{x^p} \tilde{\Phi}_{n-\alpha}(x) \right) \right\}; \quad 0 \leq p \leq n - \alpha - 1. \quad (6.17)$$

Después de hacer algunos cálculos elementales y teniendo en cuenta la ortogonalidad de  $\Phi_n(x)$ , se tiene que ( $x = e^{i\theta}$ )

$$\tilde{Q}_n(z) = I_\mu \left\{ \frac{z + x}{z - x} \left( \frac{z^p}{x^p} \tilde{\Phi}_{n-\alpha}(x) - \tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z) \right) \right\}$$

siendo  $p$  un entero no negativo tal que  $0 \leq p \leq n - \alpha - 1$ .



Además,

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_n(z) &= I_\mu \left\{ \frac{z+x}{z-x} \left( \frac{z^p}{x^p} \tilde{\Phi}_{n-\alpha}(x) - \tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z) \right) \right\} = I_\mu \left\{ \frac{z+x}{z-x} \left( \frac{z^p}{x^{p+\alpha}} \Phi_n(x) - \frac{1}{z^\alpha} \Phi_n(z) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{z^\alpha} I_\mu \left\{ \frac{z+x}{z-x} \left( \frac{z^{p+\alpha}}{x^{p+\alpha}} \Phi_n(x) - \Phi_n(z) \right) \right\}; \quad 0 \leq p \leq n - \alpha - 1.\end{aligned}$$

Entonces,

$$Q_n(z) = z^\alpha \tilde{Q}_n(z) = I_\mu \left\{ \frac{z+x}{z-x} \left( \frac{z^{p+\alpha}}{x^{p+\alpha}} \Phi_n(x) - \Phi_n(z) \right) \right\}. \quad (6.18)$$

Como  $0 \leq p \leq n - \alpha - 1$ , entonces  $\alpha \leq p + \alpha \leq n - 1$ , ( $0 \leq \alpha \leq n - 1$ ). Por tanto, utilizando [30, Teorema 4.1] se deduce que:

$$Q_n(z) = \Omega_n(z)$$

donde  $\Omega_n(z)$  viene dado en (1.14). Hemos probado entonces la siguiente

**Proposición 6.3.2.** *La función racional*

$$I_n(h(\bullet, z)) = \frac{\tilde{Q}_n(z)}{P_n(z)} = \frac{z^\alpha \tilde{Q}_n(z)}{z^\alpha P_n(z)} = \frac{\Omega_n(z)}{\Phi_n(z)}$$

representa el aproximante de Padé en dos puntos de orden  $(n, n+1)$  al par  $(L_0, L_\infty)$  en sentido débil. Si  $\Phi_n(0) \neq 0$ , es decir,  $\alpha = 0$ , entonces, la función racional representa el aproximante de Padé en dos puntos de orden  $(n, n+1)$  al par  $(L_0, L_\infty)$  en sentido fuerte.

En particular, si todos los ceros son simples y  $\alpha = 0$ , los coeficientes  $\{A_{n,j}\}_{j=1}^n$  de la fórmula Gaussiana vendrán dados por

$$A_{n,j} = -\frac{\Omega_n(x_j)}{2x_j \Phi'_n(x_j)}; \quad 1 \leq j \leq n. \quad (6.19)$$

Si tomamos  $p = 0$  en (6.18), se tiene

$$\Omega_n(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}} (\Phi_n(e^{i\theta}) - \Phi_n(z)) d\mu(\theta).$$

Entonces, para  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\Omega_n(x_j) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x_j + e^{i\theta}}{x_j - e^{i\theta}} \Phi_n(e^{i\theta}) d\mu(\theta) = \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x_j + e^{i\theta}}{x_j - e^{i\theta}} \frac{\Phi_n(e^{i\theta})}{|\Phi_n(e^{i\theta})|^2} d\theta = \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x_j + e^{i\theta}}{x_j - e^{i\theta}} \frac{e^{(n-1)i\theta}}{\Phi_n^*(e^{i\theta})} d\theta.$$

Por el Teorema de los Residuos

$$\Omega_n(x_j) = \frac{-2x_j k_n}{\Phi_n^*(x_j)}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Sustituyendo en (6.19), obtenemos, de nuevo, que

$$A_{n,j} = -\frac{\Omega_n(x_j)}{2x_j \Phi_n'(x_j)} = \frac{k_n x_j^{n-1}}{\Phi_n'(x_j) \Phi_n^*(x_j)}; \quad 1 \leq j \leq n.$$

coincide con la fórmula (6.9).

Finalmente, convendría observar que existe otra caracterización de las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos con respecto a una medida (ver [39] o [2]) en términos de la sucesión  $\{\Omega_n(z)\}$ :

**Proposición 6.3.3.** *Sean  $\{\Phi_n\}$  y  $\{\Omega_n\}$  dos sucesiones de polinomios siendo  $\Phi_n$  de grado  $n$ . Entonces,  $\{\Phi_n\}$  es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a una medida positiva  $\mu$  sí y sólo si  $\{\Phi_n\}$  y  $\{\Omega_n\}$  satisfacen*

$$\begin{aligned} \Phi_n(z)L_0(z) - \Omega_n(z) &= O(z^n), \quad |z| < 1 \\ \Phi_n(z)L_\infty(z) - \Omega_n(z) &= O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

donde  $\Omega_n$  es el polinomio asociado de Szegő dado en (1.14) y  $L_0$  y  $L_\infty$  son los desarrollos en serie en 0 y en  $\infty$ , respectivamente, de la transformada de Herglotz-Riesz con respecto a  $\mu$ .

El papel que juega la función racional  $\frac{\Omega_n(z)}{\Phi_n(z)}$  se pondrá de manifiesto claramente en la siguiente Sección.

## 6.4 Estimación del error y convergencia

Estamos ahora interesados en dar diferentes expresiones del error en la fórmula de cuadratura, es decir, de  $I_\mu(f) - I_n(f)$ . A tal fin vamos a considerar, en primer lugar, la función

$h(x, z)$  dada en fórmula (6.14). De este modo, por (6.15), podemos escribir

$$\begin{aligned} I_n(h) &= \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} A_{m,j} h^{(j)}(x_m) = \sum_{m=1}^s A_{m,0} h(x_m) + \sum_{m=1}^s \sum_{j=1}^{\alpha_m-1} A_{m,j} h^{(j)}(x_m) \\ &= \sum_{m=1}^s A_{m,0} \frac{x_m+z}{x_m-z} + 2z \sum_{m=1}^s \sum_{j=1}^{\alpha_m-1} \frac{(-1)^j j! A_{m,j}}{(x_m-z)^{j+1}} = \frac{\Omega_n(z)}{\Phi_n(z)}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Obsérvese que para  $j \geq 1$

$$h^{(j)}(x_m) = 2z \frac{(-1)^j j!}{(x-z)^{j+1}}; \quad \left( \frac{x+z}{x-z} = 1 + \frac{2z}{x-z} \right).$$

Supongamos ahora que  $f(z)$  es analítica en un dominio acotado  $G$  que contenga a  $\overline{\mathbb{D}}$ . Sea  $\Gamma$  la frontera de  $G$ . Supongamos que  $f(0) = 0$  (de otra manera, trabajaríamos con la función  $f(z) - f(0)$ ). Entonces, por la fórmula integral de Cauchy y el Teorema de Fubini,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\mu(\theta) = I_\mu(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F_\mu(z) g(z) dz \quad (6.21)$$

con  $F_\mu(z)$  dada en la fórmula (6.13) y  $g(z) = \frac{-f(z)}{2z}$  que es también analítica en  $G$ .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} A_{m,j} f^{(j)}(x_m) = \sum_{m=1}^s A_{m,0} f(x_m) + \sum_{m=1}^s \sum_{j=1}^{\alpha_m-1} A_{m,j} f^{(j)}(x_m) \\ &= \sum_{m=1}^s A_{m,0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x_m+z}{x_m-z} g(z) dz + \sum_{m=1}^s \sum_{j=1}^{\alpha_m-1} A_{m,j} f^{(j)}(x_m). \end{aligned}$$

Pero  $f^{(j)}(x_m) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-x_m)^{j+1}} dz$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \sum_{m=1}^s A_{m,0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x_m+z}{x_m-z} g(z) dz + \sum_{m=1}^s \sum_{j=1}^{\alpha_m-1} A_{m,j} \frac{j!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-x_m)^{j+1}} dz \\ &= \sum_{m=1}^s A_{m,0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x_m+z}{x_m-z} g(z) dz - \sum_{m=1}^s \sum_{j=1}^{\alpha_m-1} A_{m,j} \frac{j!(-1)^j}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(x_m-z)^{j+1}} dz. \end{aligned}$$

Entonces,

$$I_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \sum_{m=1}^s A_{m,0} \left( \frac{x_m+z}{x_m-z} \right) g(z) + 2z \sum_{m=1}^s \sum_{j=1}^{\alpha_m-1} \frac{j!(-1)^j A_{m,j} f(z)}{(x_m-z)^{j+1} - 2z} \right) dz$$

y finalmente, por (6.20), se puede deducir

$$I_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_n(z)}{\Phi_n(z)} g(z) dz. \quad (6.22)$$

Por (6.21) y (6.22), hemos probado el siguiente resultado:

**Teorema 6.4.1.** *Sea  $f(z)$  una función analítica en un dominio acotado  $G$  que contenga a  $\overline{\mathbb{D}}$  y sea  $\Gamma$  su frontera. Entonces,*

$$I_\mu(f) - I_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left( F_\mu(z) - \frac{\Omega_n(z)}{\Phi_n(z)} \right) g(z) dz \quad (6.23)$$

donde  $g(z) = \frac{f(z)}{-2z}$ .

Por tanto, el error en la fórmula de cuadratura está dominado esencialmente por  $F_\mu(z) - \frac{\Omega_n(z)}{\Phi_n(z)}$ . Como ya hemos dicho, la sucesión  $\left\{ \frac{\Omega_n(z)}{\Phi_n(z)} \right\}$  converge uniformemente a  $F_\mu(z)$  en cualquier compacto de  $\mathbb{E}$ . Como la frontera  $\Gamma$  del dominio  $G$ , definido anteriormente, está contenido en  $\mathbb{E}$ , entonces  $I_n(f)$  converge a  $I_\mu(f)$  donde  $f$  viene dada como en el Teorema 6.4.2.

Para obtener una estimación de la velocidad de convergencia, consideraremos ahora los polinomios de Laurent  $L_n$  en  $\Lambda_{-p,q}$ ; ( $p+q = n - \alpha - 1$ ) que interpolan a  $f$  en los nodos  $x_m$  con multiplicidades  $\alpha_m$  respectivamente, para todo  $m = 1, \dots, s$ , pudiendo escribirse:

$$L_n(z) = \sum_{m=1}^s \sum_{j=0}^{\alpha_m-1} \tilde{L}_{m,j}(z) f^{(j)}(x_m)$$

donde  $\tilde{L}_{m,j}(z)$  satisface las condiciones dadas en la fórmula (6.12). Otra vez, por el Teorema 6.3.1

$$I_n(f) = I_\mu(L_n)$$

y, por tanto,  $I_\mu(f) - I_n(f) = I_\mu(f - L_n)$ . Sea  $f$ , en general, una función analítica en un dominio acotado  $G$  que contenga a  $\overline{\mathbb{D}}$  y sea  $\Gamma$  su frontera. Entonces por [52, p. 50], tenemos la siguiente expresión del error en la interpolación:

$$f(z) - L_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left( \frac{t}{z} \right)^p \frac{\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z)}{\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(t)} \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left( \frac{t}{z} \right)^{p+\alpha} \frac{\Phi_n(z)}{\Phi_n(t)} \frac{f(t)}{t-z} dt. \quad (6.24)$$

Para demostrar la convergencia geométrica de estos interpolantes, además de la fórmula (6.24), vamos a hacer uso de la Proposición 1.5.2 que vimos en el primer Capítulo sobre el comportamiento asintótico de los polinomios ortonormales de Szegő  $\{\varphi_n(z)\}$ .

Así pues, se tiene el siguiente

**Teorema 6.4.2.** *Sea  $f$  una función analítica en un dominio acotado  $G$  que contenga a  $\overline{\mathbb{D}}$  y sea  $\Gamma$  su frontera. Si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n) + \alpha(n)}{n} = s; \quad 0 < s < 1,$$

entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |I_\mu(f) - I_n(f)|^{1/n} = r(\Gamma, s) = \max_{t \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{|t|^{1-s}} \right\} < 1.$$

Aquí  $\alpha(n)$ ,  $0 \leq \alpha(n) \leq n - 1$  denota la multiplicidad de  $z = 0$  en  $\Phi_n(z)$  y  $\{p(n)\}$  es una sucesión arbitraria de enteros no negativos tales que  $0 \leq p(n) \leq n - \alpha(n) - 1$ .

*Demostración:* Sea  $z \in \mathbb{T}$  y  $t \in \Gamma$ . Entonces por (6.24)

$$\begin{aligned} |f(z) - L_n(z)| &\leq \max_{t \in \Gamma} |t|^{p(n)+\alpha(n)} \max_{t \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{|t|-1} \right\} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n(t)} \right| |f(t)| |dt| \\ &= M(f) l(\Gamma) \max_{t \in \Gamma} |t|^{p(n)+\alpha(n)} \max_{t \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{|t|-1} \right\} \max_{z \in \mathbb{T}} |\varphi_n(z)| \max_{t \in \Gamma} \left| \frac{1}{\varphi_n(t)} \right|. \end{aligned}$$

donde  $M(f) = \max_{t \in \Gamma} |f(t)|$  y  $l(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |dt|$ . Por otro lado, como  $\varphi_n$  es una función continua en  $\mathbb{T}$ , entonces  $\max_{z \in \mathbb{T}} |\varphi_n(z)| = |\varphi_n(z_n)|$ ,  $z_n \in \mathbb{T}$ . Por tanto,

$$\left( \max_{z \in \mathbb{T}} |\varphi_n(z)| \right)^{1/n} = |\varphi_n(z_n)|^{1/n} \leq \max_{z \in \mathbb{T}} |\varphi_n(z)|^{1/n}.$$

Por el Lema 1.5.2

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \max_{z \in \mathbb{T}} |\varphi_n(z)| \right)^{1/n} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in \mathbb{T}} |\varphi_n(z)|^{1/n} \\ &\leq \max_{z \in \mathbb{T}} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(z)|^{1/n} \\ &= \max_{z \in \mathbb{T}} \{|z|\} = 1. \end{aligned} \tag{6.25}$$

De forma análoga, se tiene que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \max_{t \in \Gamma} \left| \frac{1}{\varphi_n(t)} \right| \right)^{1/n} \leq \max_{t \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(t)|^{1/n}} \right\} = \max_{t \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{|t|} \right\}. \tag{6.26}$$

Entonces, por (6.25) y (6.26),

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(z) - L_n(z)|^{1/n} \leq \max_{t \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{|t|^{1-s}} \right\} < 1.$$

Dado que  $I_\mu(f) - I_n(f) = I_\mu(f - L_n)$  se sigue el enunciado. ■

Veremos ahora cómo se puede mejorar esta estimación de la velocidad de convergencia. Para ello, obtendremos otra expresión del error en términos de polinomios interpoladores de Laurent-Hermite. Dados los nodos  $x_m$ ,  $m = 1, \dots, s$ , ( $x_m \neq 0$ ) con multiplicidades  $\alpha_m$ ,  $m = 1, \dots, s$ , ( $\sum_{m=1}^s \alpha_m = n - \alpha$ ), entonces, existe un único polinomio de Laurent  $H_n \in \Lambda_{-(n-2\alpha-1), n}$  tal que

$$H_n^{(j)}(x_m) = f^{(j)}(x_m); \quad j = 0, \dots, 2\alpha_m - 1; \quad m = 1, \dots, s.$$

Podemos escribir:

$$H_n(x) = \sum_{m=1}^s \sum_{l=0}^{\alpha_m-1} H_{m,l}(x) f^{(l)}(x_m) + \sum_{m=1}^s \sum_{l=\alpha_m}^{2\alpha_m-1} \tilde{H}_{m,l}(x) f^{(l)}(x_m)$$

donde  $H_{m,l}, \tilde{H}_{m,l} \in \Lambda_{-(n-2\alpha-1), n}$ . Estos  $L$ -polinomios verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} H_{m,l}^{(k)}(x_j) &= \delta_{m,j} \delta_{l,k}; \quad l = 0, \dots, \alpha_m - 1, \\ \tilde{H}_{m,l}^{(k)}(x_m) &= \delta_{m,j} \delta_{l,k}; \quad l = \alpha_m, \dots, 2\alpha_m - 1, \end{aligned}$$

para todo  $k = 0, \dots, 2\alpha_m - 1$  y  $m, j = 1, 2, \dots, s$ . Como  $\tilde{H}_{m,l} \in \Lambda_{-(n-2\alpha-1), n}$  y  $\tilde{H}_{m,l}^{(k)}(x_m) = 0$ ;  $k = 0, \dots, \alpha_m - 1$ , se tiene

$$\tilde{H}_{m,l}(x) = \frac{\Phi_n(x)}{x^{n-\alpha-1}} S(x)$$

donde  $S \in \mathbb{P}_{n-\alpha-1}$ . Sea  $S(x) = \sum_{j=0}^{n-\alpha-1} a_j x^j$ . Entonces

$$\frac{S(x)}{x^{n-\alpha-1}} = \sum_{j=0}^{n-\alpha-1} a_{n-\alpha-1-j} x^{-j}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I_\mu(\tilde{H}_{m,l}) &= \sum_{j=0}^{n-\alpha-1} a_{n-\alpha-1-j} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x) x^{-j} d\mu(\theta) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-\alpha-1} a_{n-\alpha-1-j} (\Phi_n(z), z^j)_\mu = 0. \end{aligned}$$

Entonces,

$$I_\mu(\tilde{H}_{m,l}) = 0, \quad \forall l = \alpha_m, \dots, 2\alpha_m - 1, \quad m = 1, \dots, s.$$

Definamos ahora

$$\begin{aligned}\tilde{I}_n(f) &= I_\mu(H_n) = \sum_{m=1}^s \sum_{l=0}^{\alpha_m-1} I_\mu(H_{m,l}) f^{(l)}(x_m) + \sum_{m=1}^s \sum_{l=\alpha_m}^{2\alpha_m-1} I_\mu(\tilde{H}_{m,l}) f^{(l)}(x_m) \\ &= \sum_{m=1}^s \sum_{l=0}^{\alpha_m-1} I_\mu(H_{m,l}) f^{(l)}(x_m) = \sum_{m=1}^s \sum_{l=0}^{\alpha_m-1} B_{l,m} f^{(l)}(x_m).\end{aligned}$$

Observar que  $\tilde{I}_n(f)$  es exacta en  $\Lambda_{-(n-2\alpha-1),n}$  y por tanto

$$I_\mu(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\mu(\theta) = I_n(f) = \tilde{I}_n(f),$$

es decir,

$$\sum_{m=1}^s \sum_{l=0}^{\alpha_m-1} A_{l,m} f^{(l)}(x_m) = \sum_{m=1}^s \sum_{l=0}^{\alpha_m-1} B_{l,m} f^{(l)}(x_m).$$

En particular, si tomamos  $f = H_{m,l}$ , como  $H_{m,l}^{(k)}(x_m) = \delta_{m,l}$ ;  $k = 0, \dots, \alpha_m - 1$ , se tiene que  $A_{l,m} = B_{l,m}$ ;  $\forall l = 0, \dots, \alpha_m - 1$ ;  $m = 1, \dots, s$ .

Hemos probado entonces la siguiente

**Proposición 6.4.3.** *Sea  $H_n$  el único polinomio de interpolación de Hermite- Laurent en  $\Lambda_{-(n-2\alpha-1),n}$  tal que*

$$H_n^{(j)}(x_m) = f^{(j)}(x_m); \quad j = 0, \dots, 2\alpha_m - 1; \quad m = 1, \dots, s$$

donde  $x_m$ ;  $m = 1, \dots, s$  son las raíces no nulas del polinomio ortogonal mónico  $\Phi_n(z)$  con respecto a la medida positiva  $\mu$ . Entonces

$$I_n(f) = I_\mu(H_n)$$

donde,  $I_n(f)$  denota la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura Gaussiana dada en la Sección 2.

Por la Proposición anterior podemos obtener la siguiente expresión para el error en la fórmula de cuadratura:

$$I_\mu(f) - I_n(f) = I_\mu(f) - I_\mu(H_n) = I_\mu(f - H_n).$$

Sea ahora  $f$  una función analítica en un dominio acotado  $G$  que contenga a  $\overline{\mathbb{D}}$  y sea  $\Gamma$  su frontera. Por [52, p. 50] tenemos de nuevo:

$$f(z) - H_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{t}{z}\right)^{n-2\alpha-1} \frac{\widetilde{\Phi}_{n-\alpha}^2(z)}{\widetilde{\Phi}_{n-\alpha}^2(t)} \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{t}{z}\right)^{n-1} \frac{\Phi_n^2(z)}{\Phi_n^2(t)} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

Entonces, por el Teorema de Fubini ( $z = e^{i\theta}$ )

$$\begin{aligned} I_{\mu}(f) - I_n(f) &= I_{\mu}(f - H_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{t}{z}\right)^{n-1} \frac{\Phi_n^2(z)}{\Phi_n^2(t)} \frac{f(t)}{t-z} dt \right) d\mu(\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{t^{n-1}}{\Phi_n^2(t)} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi_n^2(z)}{z^{n-1}(t-z)} d\mu(\theta) \right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{2t^n}{\Phi_n^2(t)} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi_n^2(z)}{z^{n-1}(z-t)} d\mu(\theta) \right) g(t) dt \end{aligned} \quad (6.27)$$

siendo  $g(z) = -\frac{f(z)}{2z}$ .

**Observación 6.4.4.** Por (6.23) y (6.27) hemos obtenido, para todo  $z \in \mathbb{E}$ , la siguiente representación integral del error para el aproximante de Padé en dos puntos: (ver fórmula (1.34))

$$F_{\mu}(z) - \frac{\Omega_n(z)}{\Phi_n(z)} = \frac{2z^n}{\Phi_n^2(z)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi_n^2(x)}{x^{n-1}(x-z)} d\mu(\theta); \quad (x = e^{i\theta}). \quad (6.28)$$

donde  $\Omega_n$  viene dado como en la fórmula (1.14). Obsérvese que la fórmula (6.28) se obtuvo ya en [14] de diferente manera.

Igual que en el Teorema 6.4.2 pero sin la condición  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)+\alpha(n)}{n} = s$ ,  $0 < s < 1$ , podemos demostrar el siguiente

**Teorema 6.4.5.** Sea  $f$  una función analítica en un dominio acotado  $G$  que contenga a  $\overline{\mathbb{D}}$  y sea  $\Gamma$  su frontera. Entonces, si  $H_n$  es el polinomio de Laurent-Hermite definido anteriormente, se tiene que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(z) - H_n(z)|^{1/n} \leq \max_{t \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{|t|} \right\} < 1$$

uniformemente en  $\mathbb{T}$ . Como consecuencia,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |I_{\mu}(f) - I_n(f)|^{1/n} = r(\Gamma) = \max_{t \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{|t|} \right\} < 1.$$



**Observación 6.4.6.** Si  $f$  es una función entera, entonces podemos tomar un valor de  $|t|$  suficientemente grande de forma que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_\mu(f) - I_n(f)|^{1/n} = 0$ .

En resumen, para una función analítica en un entorno de  $\overline{\mathbb{D}}$ , hemos demostrado que las fórmulas de cuadratura Gaussianas convergen geoméricamente. Seguidamente debilitaremos las hipótesis tomando, en primer lugar, funciones  $f$  analíticas en  $\mathbb{D}$  y continuas en  $\overline{\mathbb{D}}$ , y, en segundo lugar, funciones  $f$  analíticas en  $\mathbb{D}$  e integrables en  $\overline{\mathbb{D}}$ . En ambos casos se puede probar la convergencia de las fórmulas de cuadratura, aunque no ha sido posible, por el momento, dar estimaciones de la velocidad de convergencia.

En efecto, tenemos la siguiente

**Proposición 6.4.7.** Sean  $\mu_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\mu(\theta)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  los momentos normalizados con respecto a la medida positiva  $\mu$ . Sea  $f$  analítica en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I_\mu(f).$$

siendo  $\{I_n(f)\}$  la correspondiente sucesión de fórmulas Gaussianas.

*Demostración:* Como  $f$  es analítica en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ , se tiene  $\forall \epsilon > 0, \exists P \in \mathbb{P} : |f(x) - P(x)| < \epsilon, \forall x \in \mathbb{T}$ . Sea  $P(z) = \sum_{j=0}^N p_j z^j$ . Entonces, para todo  $n \geq N$  tenemos

$$|I_\mu(f) - I_n(f)| = |I_\mu(f) - I_\mu(P) + I_\mu(P) - I_n(f)| \leq |I_\mu(f - P)| + |I_n(P - f)|.$$

Entonces (recordar que  $\mu_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = 1$ )

$$|I_\mu(f - P)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(e^{i\theta}) - P(e^{i\theta})) d\mu(\theta) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) - P(e^{i\theta})| d\mu(\theta) < \epsilon.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} |I_n(P - f)| &= \frac{|k_n|}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\theta}) - P(e^{i\theta})}{|\Phi_n(e^{i\theta})|^2} d\theta \right| \leq \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(e^{i\theta}) - P(e^{i\theta})|}{|\Phi_n(e^{i\theta})|^2} d\theta \\ &< \epsilon \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|\Phi_n(e^{i\theta})|^2} d\theta = \epsilon \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$|I_\mu(f) - I_n(f)| < 2\epsilon.$$

■

En las condiciones anteriores, podemos obtener un resultado similar para funciones integrables. En ese caso el siguiente Lema será de gran utilidad:

**Lema 6.4.8.** (Ver [51, p. 11, Theorem 1.5.3]) Sea  $f$  una función real acotada en  $[-\pi, \pi]$ ,  $\mu(\theta)$  una medida positiva y supongamos que la integral de Riemann-Stieltjes  $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\mu(\theta)$  existe. Entonces, para todo  $\epsilon > 0$ , existen polinomios trigonométricos  $p(\theta)$  y  $P(\theta)$  tales que

$$\inf f - \epsilon \leq p(\theta) \leq f(\theta) \leq P(\theta) \leq \sup f + \epsilon \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (P(\theta) - p(\theta)) d\mu(\theta) < \epsilon.$$

Este resultado nos permite probar la siguiente

**Proposición 6.4.9.** Sea  $f$  analítica en  $\mathbb{D}$  e integrable en  $\overline{\mathbb{D}}$ . Entonces, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \alpha(n)) = \infty$$

se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I_\mu(f).$$

siendo como antes  $\{I_n(f)\}$  la sucesión de fórmulas Gaussianas.

*Demostración:* Podemos expresar la función  $f$  de la forma  $f(e^{i\theta}) = f_1(\theta) + if_2(\theta)$ . Además,  $f_1$  y  $f_2$  son dos funciones reales en  $[-\pi, \pi]$ , de modo que  $I_\mu(f) = I_\mu(f_1) + iI_\mu(f_2)$ .

Sea  $\epsilon > 0$ . Entonces, por el Lema 6.4.8, existen polinomios trigonométricos  $p(\theta)$  y  $P(\theta)$  tales que

$$p(\theta) \leq f_1(\theta) \leq P(\theta) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (P(\theta) - p(\theta)) d\mu(\theta) < \epsilon. \quad (6.29)$$

Teniendo en cuenta las conocidas relaciones

$$\cos k\theta = \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2}, \quad \operatorname{sen} k\theta = \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i},$$

se tiene ( $z = e^{i\theta}$ )

$$p(\theta) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k z^k = T_N(z) \in \Lambda_{-N,N}, \quad y \quad P(\theta) = \sum_{k=-M}^M \beta_k z^k = T_M(z) \in \Lambda_{-M,M}.$$

Si  $n \geq \max\{M + \alpha + 1, N + \alpha + 1\}$ , por (6.29), obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (T_M(e^{i\theta}) - f_1(\theta)) d\mu(\theta) < \epsilon \quad y \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_1(\theta) - T_N(e^{i\theta})) d\mu(\theta) < \epsilon.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I_\mu(f_1) - \epsilon &< \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta) d\mu(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_1(\theta) - T_N(e^{i\theta})) d\mu(\theta) \\ &= I_\mu(T_N) = I_n(T_N) = \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{T_N(e^{i\theta})}{|\Phi_n(e^{i\theta})|^2} d\theta \\ &< \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_1(\theta)}{|\Phi_n(e^{i\theta})|^2} d\theta < \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{T_M(e^{i\theta})}{|\Phi_n(e^{i\theta})|^2} d\theta. \end{aligned}$$

Entonces, como  $\Re(I_n(f)) = \frac{k_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_1(\theta)}{|\Phi_n(e^{i\theta})|^2} d\theta$ , se tiene

$$I_\mu(f_1) - \epsilon < I_n(T_N) < \Re(I_n(f)) < I_n(T_M) = I_\mu(T_M) = I_\mu(f_1) + I_\mu(T_M - f_1) = I_\mu(f_1) + \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$|I_\mu(f_1) - \Re(I_n(f))| < \epsilon. \quad (6.30)$$

De forma similar,

$$|I_\mu(f_2) - \Im(I_n(f))| < \epsilon. \quad (6.31)$$

Finalmente, por (6.30) y (6.31) se obtiene lo que queríamos demostrar. ■

**Observación 6.4.10.** Cabe señalar que la Proposición 6.4.9 sigue siendo válida para toda función  $f$  únicamente integrable en  $\mathbb{T}$ . Además, se sabe, (ver [20]), que la Proposición 6.4.7 también sigue siendo válida para toda función continua  $f$  en  $\mathbb{T}$ . La demostración dada en

[20] utiliza los Teoremas de Helly ([22, p. 56]), siendo por tanto diferente a la dada aquí. Sin embargo, debemos usar en ambos casos, como definición de  $I_n(f)$ , la integral (6.3) ya que ahora  $I_n(f)$  dada en la fórmula (6.1) carece, en general, de sentido al fallar la analiticidad de  $f$ .

## 6.5 Resultados numéricos

En esta Sección presentaremos algunos experimentos numéricos con las fórmulas Gaussianas introducidas a lo largo del Capítulo. Se trata de ver, con carácter ilustrativo, la efectividad de las mismas. Así pues, consideremos las siguientes medidas positivas:

$$d\mu_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}d\theta, \quad d\mu_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}d\theta \quad \text{y} \quad d\mu_3(\theta) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}d\theta.$$

Para  $n = 8$  hemos calculado los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^8$  y coeficientes  $\{A_j\}_{j=1}^8$  con respecto a las medidas anteriores. Dado que éstas son simétricas, los correspondientes polinomios de Szegő tienen coeficientes reales y sus ceros aparecen en pares conjugados como puede verse en las Tablas que siguen.

$\mu_1(\theta)$	
Nodos	Coeficientes
$x_1 = -0.567289 - 0.570292I$	$A_1 = 0.0284838 + 0.0204506I$
$x_2 = -0.567289 + 0.570292I$	$A_2 = 0.0284838 - 0.0204506I$
$x_3 = -0.0792246 - 0.758031I$	$A_3 = 0.0940173 + 0.0345958I$
$x_4 = -0.0792246 + 0.758031I$	$A_4 = 0.0940173 - 0.0345958I$
$x_5 = 0.398567 - 0.625602I$	$A_5 = 0.165726 + 0.0318851I$
$x_6 = 0.398567 + 0.625602I$	$A_6 = 0.165726 - 0.0318851I$
$x_7 = 0.692391 - 0.24052I$	$A_7 = 0.211773 + 0.0128452I$
$x_8 = 0.692391 + 0.24052I$	$A_8 = 0.211773 - 0.0128452I$

$\mu_2(\theta)$	
Nodos	Coefficientes
$x_1 = -0.692391 - 0.24052I$	$A_1 = 0.211773 - 0.0128452I$
$x_2 = -0.692391 + 0.24052I$	$A_2 = 0.211773 + 0.0128452I$
$x_3 = -0.398567 - 0.625602I$	$A_3 = 0.165726 - 0.0318851I$
$x_4 = -0.398567 + 0.625602I$	$A_4 = 0.165726 + 0.0318851I$
$x_5 = 0.0792246 - 0.758031I$	$A_5 = 0.0940173 - 0.0345958I$
$x_6 = 0.0792246 + 0.758031I$	$A_6 = 0.0940173 + 0.0345958I$
$x_7 = 0.567289 - 0.570292I$	$A_7 = 0.0284838 - 0.0204506I$
$x_8 = 0.567289 + 0.570292I$	$A_8 = 0.0284838 + 0.0204506I$

$\mu_3(\theta)$	
Nodos	Coefficientes
$x_1 = -0.644147 - 0.526397I$	$A_1 = 0.0357665 + 0.0212742I$
$x_2 = -0.644147 + 0.526397I$	$A_2 = 0.0357665 - 0.0212742I$
$x_3 = 0.644147 - 0.526397I$	$A_3 = 0.0357665 - 0.0212742I$
$x_4 = 0.644147 + 0.526397I$	$A_4 = 0.0357665 + 0.0212742I$
$x_5 = 0.232822 + 0.76944I$	$A_5 = 0.0892335 + 0.0139831I$
$x_6 = 0.232822 - 0.76944I$	$A_6 = 0.0892335 - 0.0139831I$
$x_7 = -0.232822 + 0.76944I$	$A_7 = 0.0892335 - 0.0139831I$
$x_8 = -0.232822 - 0.76944I$	$A_8 = 0.0892335 + 0.0139831I$

Sean ahora los integrandos:

$$f_1(z) = \frac{\text{sen}(z)}{1.5-z}, \quad f_2(z) = \frac{\text{sen}(z)}{4-z}, \quad f_3(z) = \frac{\text{sen}(z)}{10-z}.$$

Para estas funciones hemos calculado el error exacto en la fórmula de cuadratura, tanto para la Gaussiana como para la de Szegő, con respecto a las medidas  $\mu_1(\theta)$ ,  $\mu_2(\theta)$ , y  $\mu_3(\theta)$ , respectivamente. En cada uno de estos casos, y para  $n = 4, 6, 8$ , las raíces de los polinomios de Szegő son todas simples y diferentes de cero, es decir,  $\alpha = 0$  y los ceros de  $\tilde{\Phi}_{n-\alpha}(z) = \Phi_n(z)$  son simples. Para la función  $f_1(z)$  los resultados aparecen en las Tablas 1, 2 y 3

<i>Tabla 1</i>		
Nodos	Error exacto (Szegő) $\mu_1$	Error exacto (Gauss) $\mu_1$
n=4	1.576456E-01	1.342812E-02
n=6	7.669225E-02	4.368393E-03
n=8	3.512272E-02	1.532380E-03

<i>Tabla 2</i>		
Nodos	Error exacto (Szegő) $\mu_2$	Error exacto (Gauss) $\mu_2$
n=4	4.261750E-03	4.485824E-03
n=6	3.543889E-03	1.267323E-03
n=8	1.478630E-03	4.088199E-04

<i>Tabla 3</i>		
Nodos	Error exacto (Szegő) $\mu_3$	Error exacto (Gauss) $\mu_3$
n=4	9.039074E-03	3.587872E-03
n=6	4.737054E-03	1.115100E-03
n=8	2.036738E-03	3.800699E-04

Para  $f_2(z)$  tenemos los siguientes resultados en las Tablas 4, 5 y 6:

<i>Tabla 4</i>		
Nodos	Error exacto (Szegő) $\mu_1$	Error exacto (Gauss) $\mu_1$
n=4	2.74201E-03	5.46331E-05
n=6	3.32082E-05	1.96088E-06
n=8	3.34996E-06	5.34858E-08

<i>Tabla 5</i>		
Nodos	Error exacto (Szegő) $\mu_2$	Error exacto (Gauss) $\mu_2$
n=4	3.65415E-03	3.6313E-05
n=6	7.54454E-05	1.3048E-06
n=8	2.0878E-06	2.10162E-09

<i>Tabla 6</i>		
Nodos	Error exacto (Szegő) $\mu_3$	Error exacto (Gauss) $\mu_3$
n=4	1.68592E-03	9.79090E-06
n=6	3.10834E-05	3.30104E-07
n=8	1.24397E-06	5.46841E-09

Finalmente, para la función  $f_3(z)$  los resultados vienen dados en las Tablas 7, 8 y 9.

<i>Tabla 7</i>		
Nodos	Error exacto (Szegő) $\mu_1$	Error exacto (Gauss) $\mu_1$
n=4	7.291970E-05	7.302898E-05
n=6	2.010499E-05	1.065462E-06
n=8	5.016616E-07	3.728045E-08

<i>Tabla 8</i>		
Nodos	Error exacto (Szegő) $\mu_2$	Error exacto (Gauss) $\mu_2$
n=4	1.426109E-03	6.218423E-05
n=6	4.625420E-05	9.036871E-07
n=8	7.913159E-07	2.536029E-08

<i>Tabla 9</i>		
Nodos	Error exacto (Szegő) $\mu_3$	Error exacto (Gauss) $\mu_3$
n=4	4.258231E-04	5.712364E-06
n=6	1.757401E-05	8.372155E-08
n=8	3.341328E-07	1.279191E-09

De los resultados numéricos anteriormente expuestos cabe inferir que las fórmulas de cuadratura Gaussianas dan mejores resultados que las de Szegő y que ambas dependen de la localización de las singularidades del integrando  $f(z)$  con respecto a la circunferencia unidad. El coste computacional en ambas se puede decir que es similar ya que las dos requieren el cálculo de los correspondientes polinomios de Szegő.



# Apéndice A

## Estimaciones numéricas de la transformada de Herglotz- Riesz

En este Apéndice incluiremos algunos resultados numéricos con los que se pretende comparar la eficiencia de los aproximantes de Padé en dos puntos (AP2), los aproximantes modificados (APM) y los aproximantes tipo Padé en dos puntos (ATP2) con denominador  $Q_n(z) = z^n - \tau_n$ , ( $|\tau_n| = 1$ ), a la transformada de Herglotz- Riesz para las funciones peso de Chebyshev normalizadas, a saber  $\omega_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$ ,  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$  y  $\omega_3(\theta) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}$ . También daremos resultados que tienen que ver con la velocidad exacta de convergencia para los APM con respecto a las tres funciones peso anteriores.

Recordemos que si  $\omega(\theta)$  es una función peso en  $[-\pi, \pi]$ , la función de Carathéodory  $F_\omega$ , asociada a dicha función viene dada por

$$F_\omega(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \omega(\theta) d\theta + i\Im F_\omega(0). \quad (\text{A.1})$$

Como hemos mencionado anteriormente, esta expresión se conoce como la transformada de Herglotz-Riesz para la función peso  $\omega$ .

En el primer Capítulo vimos que  $F_\omega(z)$  admite los siguientes desarrollos en el cero y

en el infinito:

$$L_0(z) = \mu_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k; \quad |z| < 1$$

$$L_{\infty}(z) = -\mu_0 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k} z^{-k}; \quad |z| > 1$$

siendo  $\{\mu_k\}_{-\infty}^{\infty}$  la sucesión de momentos con respecto a  $\omega$ , es decir,

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \omega(\theta) d\theta; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En cuanto a los AP2, si denotamos por  $\Phi_n(z)$  al  $n$ -ésimo polinomio de Szegő respecto a  $\omega$  y  $\Omega_n(z)$  al  $n$ -ésimo polinomio asociado, se sabe, (ver [30]), que  $\frac{\Omega_n(z)}{\Phi_n(z)}$  es el AP2 en sentido fuerte al par  $(L_0, L_{\infty})$  de orden  $(n, n+1)$  (si  $\Phi_n(0) \neq 0$ ) y que la función racional  $\frac{-\Omega_n^*}{\Phi_n^*}$  representa el AP2 en sentido fuerte a  $(L_0, L_{\infty})$  de orden  $(n+1, n)$ , (si  $\Phi_n(0) \neq 0$ ). Tales aproximantes ya se han calculado previamente con respecto a las tres funciones peso de Chebyshev  $\omega_k(\theta)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . En efecto, se pueden construir a partir de las fórmulas explícitas que hemos obtenido tanto para los polinomios de Szegő como para los asociados en el Capítulo 3. Para  $\omega_1$  y  $\omega_2$  la expresión de los polinomios de Szegő  $\{\Phi_n\}$  y los asociados  $\{\Omega_n\}$  se pueden ver en la Tabla 1 de la Sección 2 y para la función peso  $\omega_3$ , los polinomios  $\{\Phi_n\}$  y  $\{\Omega_n\}$  vienen dados por (4.4) y (4.5) respectivamente.

El error para los aproximantes modificados, es decir,  $|F_{\omega_k}(z) - R_n(z, \tau)|$ ,  $k = 1, 2, 3$ , también se ha calculado para ciertos valores del parámetro  $\tau$  en el Capítulo 3 y vienen dadas por la expresiones (4.18), (4.19) y (4.13) con respecto a la funciones peso  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$ , respectivamente.

Por último, el error para los ATP2 con denominador  $Q_n(z) = z^n - \tau_n$ , es decir:  $|F_{\omega_k}(z) - (p/n)_{F_{\omega_k}}(z)|$ ,  $k = 1, 2, 3$ , se ha obtenido en la Sección 3 del Capítulo 4. Para cada una de las funciones peso se han calculado tres expresiones del error según el valor que tome el parámetro  $p = p(n)$ . Para las funciones peso  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se tienen las fórmulas (5.6) y (5.11) si  $p = 0$ , (5.7) y (5.12) para  $1 \leq p \leq n-2$  y (5.8) y (5.13) si  $p = n-1$  respectivamente. Para la función peso  $\omega_3$  se han obtenido las expresiones de error (5.14),

(5.15) y (5.16) pero ahora para los valores de  $p = 0, 1, 2 \leq p \leq n - 3$  y  $p = n - 2, n - 1$  respectivamente.

## A.1 Cotas de Error

En esta Sección daremos ciertas cotas de error para los aproximantes con respecto a las tres funciones peso  $\omega_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  para el caso de los APM y los ATP2, ya que las expresiones del error en los AP2 no resultan muy manejables teniendo en cuenta las fórmulas que se han obtenido tanto para los polinomios de Szegő como para los asociados. Por otro lado, y como ya hemos mencionado en el primer Capítulo, en [33] se dan cotas de error para los APM válidas para cualquier función peso  $\omega(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$ .

Las cotas de error para los aproximantes modificados respecto a las funciones  $\omega_1$  y  $\omega_2$  coinciden y se han calculado atendiendo a las expresiones del error que acabamos de referenciar. Tales cotas vienen dadas por

$$\begin{aligned} \frac{r^n(1+r)^2}{1-r^{n+1}} & \quad \text{si } |z| = r < 1 \\ \frac{(1+R)^2}{R(R^{n+1}-1)} & \quad \text{si } |z| = R > 1. \end{aligned}$$

Y con respecto a  $\omega_3$ , hemos obtenido:

$$\begin{aligned} \frac{r^n(1+r^2)^2}{2(1-r^{n+1})} & \quad \text{si } |z| = r < 1 \\ \frac{(1+R^2)^2}{2R^2(R^{n+1}-1)} & \quad \text{si } |z| = R > 1. \end{aligned}$$

Las cotas de error para los ATP2 respecto a las funciones peso  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en este caso también coinciden y vienen dadas por los siguientes casos:

Para  $p = 0$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{r^n(r+1)^2+r^2+2r|1-\tau_n|+|1-\tau_n|}{r(1-r^n)} & \quad \text{si } |z| = r < 1 \\ \frac{2R+1}{R(R^n-1)} & \quad \text{si } |z| = R > 1. \end{aligned}$$

Si  $1 \leq p \leq n - 2$

$$\begin{aligned} \frac{(r^n + |1 - \tau_n|)(1+r)^2}{r(1-r^n)} & \text{ si } |z| = r < 1 \\ \frac{(1+R)^2}{R(R^n-1)} & \text{ si } |z| = R > 1. \end{aligned}$$

Finalmente, si  $p = n - 1$

$$\begin{aligned} \frac{r^n + (r^n + |1 - \tau_n|)(1+r)^2}{r(1-r^n)} & \text{ si } |z| = r < 1 \\ \frac{R^n + (1+R)^2}{R(R^n-1)} & \text{ si } |z| = R > 1. \end{aligned}$$

Con respecto a la función peso  $\omega_3$  valen las siguientes cotas de error:

Para  $p = 0, 1$

$$\begin{aligned} \frac{r^n(r^2+1)^2 + r^4 + 2r^2|1-\tau_n| + |1-\tau_n|}{2r^2(1-r^n)} & \text{ si } |z| = r < 1 \\ \frac{R^n + (1+R^2)^2}{2R^2(R^n-1)} & \text{ si } |z| = R > 1. \end{aligned}$$

Si  $2 \leq p \leq n - 3$

$$\begin{aligned} \frac{(r^n + |1 - \tau_n|)(1+r^2)^2}{2r^2(1-r^n)} & \text{ si } |z| = r < 1 \\ \frac{(1+R^2)^2}{2R^2(R^n-1)} & \text{ si } |z| = R > 1. \end{aligned}$$

Por último, para  $p = n - 2, n - 1$

$$\begin{aligned} \frac{r^n + (r^n + |1 - \tau_n|)(1+r^2)^2}{2r^2(1-r^n)} & \text{ si } |z| = r < 1 \\ \frac{R^n + (1+R^2)^2}{2R^2(R^n-1)} & \text{ si } |z| = R > 1. \end{aligned}$$

## A.2 Ejemplos numéricos

En esta Sección nos ocuparemos de comparar numéricamente los tres aproximantes: AP2, APM y ATP2 con respecto a las funciones peso  $\omega_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . A tal fin, tomaremos los siguientes puntos en  $\mathbb{D}$  :

$$z_1 = 0.8e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = 0.5e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_3 = 0.3e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{y} \quad z_4 = 0.2e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

En el caso de los ATP2 tomaremos las fórmulas (5.7), (5.12) y (5.15)) para  $\tau_n = 1$ . Además del valor exacto del error, computaremos también las cotas en cada caso. Los resultados

se pueden ver en las Tablas 1 y 2 para  $\omega_1(\theta)$ , en las Tablas 3 y 4 para la función peso  $\omega_2(\theta)$ , y en las Tablas 5 y 6 para  $\omega_3(\theta)$ .

<i>Tabla 1</i>			
n=10	Error exacto(AP2)	Error exacto(APM)	Cota de error(APM)
$z_1$	1.254574E-02	3.161567E-01	3.805842E-01
$z_2$	6.039869E-05	1.911897E-03	2.198339E-03
$z_3$	1.946261E-07	8.941589E-06	9.979298E-06
$z_4$	2.114901E-09	1.354590E-07	1.474560E-07

<i>Tabla 2</i>		
n=10	Error exacto(ATP2)	Cota de error(ATP2)
$z_1$	2.394273E-01	4.871755E-01
$z_2$	9.556190E-04	3.054740E-03
$z_3$	2.682473E-06	2.338551E-05
$z_4$	2.709181E-08	5.537792E-07

<i>Tabla 3</i>			
n=10	Error exacto(AP2)	Error exacto(APM)	Cota de error(APM)
$z_1$	5.493869E-03	5.140215E-02	3.805842E-01
$z_2$	3.322430E-05	5.299861E-04	2.198339E-03
$z_3$	1.335696E-07	3.931099E-06	9.979298E-06
$z_4$	1.639786E-09	7.753290E-08	1.474560E-07

<i>Tabla 4</i>		
n=10	Error exacto(ATP2)	Cota de error(ATP2)
$z_1$	4.394205E-02	4.871755E-01
$z_2$	2.650847E-04	3.054740E-03
$z_3$	1.179331E-06	2.338551E-05
$z_4$	1.550658E-08	5.537792E-07

<i>Tabla 5</i>			
n=10	Error exacto(AP2)	Error exacto(APM)	Cota de error(APM)
$z_1$	6.445412E-03	7.081121E-02	1.579659E-01
$z_2$	2.075189E-05	5.186721E-04	7.633312E-04
$z_3$	4.440138E-08	2.976363E-06	3.507812E-06
$z_4$	3.415078E-10	5.128191E-08	5.537795E-08

<i>Tabla 6</i>		
n=10	Error exacto(ATP2)	Cota de error(ATP2)
$z_1$	1.948475E-01	2.527598E-01
$z_2$	5.187990E-04	3.054740E-03
$z_3$	1.071491E-06	3.897585E-05
$z_4$	8.205107E-09	1.384448E-06

Como era de esperar, los mejores resultados se corresponden con los obtenidos para los AP2. Sin embargo, no debe olvidarse que estos aproximantes pueden requerir, en general, un coste computacional alto. Conviene resaltar los excelentes resultados que dan

también los ATP2, siendo éstos mucho más fáciles de calcular. Las cotas de error, tanto para los APM como para los ATP2, están bastante cerca del valor exacto. Por otro lado, también era de esperar, debido a la definición de estos tres aproximantes, que los peores resultados se corresponden con los puntos más cercanos a  $\mathbb{T}$ . En general, para estimar  $F_\omega(z)$  en puntos próximos a  $\mathbb{T}$ , véase [43].

A continuación elijiremos puntos  $y_1, y_2, y_3$  y  $y_4$  en  $\mathbb{E}$ .

Sean  $y_1 = 1.1e^{i\pi}$ ,  $y_2 = 1.4e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $y_3 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$  y  $y_4 = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$ . Con respecto a la función peso  $\omega_1(\theta)$  tenemos los siguiente resultados:

n=10	Error exacto(AP2)	Error exacto(APM)	Cota de error(APM)
$y_1$	2.131222E-02	4.905740E-03	2.163431
$y_2$	2.538000	7.594930E-02	1.041705E-01
$y_3$	3.471700E-04	2.446172E-05	3.010699E-05
$y_4$	1.680885E-06	1.269759E-07	1.474560E-07

n=10	Error exacto(ATP2)	Cota de error(ATP2)
$y_1$	5.704126E-03	2.515519
$y_2$	1.057906E-01	1.473309E-01
$y_3$	7.338475E-05	9.032199E-05
$y_4$	6.348799E-07	7.372800E-07

Tomando ahora los puntos  $y_1 = 1.1$ ,  $y_2 = 1.4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ,  $y_3 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$  y  $y_4 = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$ , entonces, con respecto a la función peso  $\omega_2(\theta)$  se tienen las siguientes Tablas:

n=10	Error exacto(AP2)	Error exacto(APM)	Cota de error(APM)
$y_1$	2.131222E-02	4.905740E-03	2.163431
$y_2$	1.251296	9.298596E-02	1.041705E-01
$y_3$	1.402943E-04	1.317177E-05	3.010699E-05
$y_4$	9.517895E-07	8.601600E-08	1.474560E-07

n=10	Error exacto(ATP2)	Cota de error(ATP2)
$y_1$	5.704126E-03	2.515519
$y_2$	1.352502E-01	1.473309E-01
$y_3$	3.951487E-05	9.032199E-05
$y_4$	4.300799E-07	7.372800E-07

Finalmente, para la función peso  $\omega_3(\theta)$  y tomando los puntos  $y_1 = 1.1$ ,  $y_2 = 1.4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ,  $y_3 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$  y  $y_4 = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$ , los resultados se pueden ver en las siguientes Tablas:

n=10	Error exacto(AP2)	Error exacto(APM)	Cota de error(APM)
$y_1$	3.390675E-02	8.521744E-03	1.089096
$y_2$	1.027767	7.358739E-02	1.265162E-01
$y_3$	6.997824E-05	9.512937E-06	3.136145E-05
$y_4$	3.798707E-07	5.332992E-08	2.768896E-07

n=10	Error exacto(ATP2)	Cota de error(ATP2)
$y_1$	1.143418E-02	1.266342
$y_2$	1.146485E-01	1.674396E-01
$y_3$	8.561555E-05	9.408541E-05
$y_4$	1.333247E-06	1.384448E-06



Como puede observarse, la presencia de polos en  $\mathbb{E}$  para los AP2 hace que los resultados obtenidos para dichos aproximantes no sean tan buenos. Sin embargo, tanto los APM como los ATP2 siguen proporcionando estimaciones numéricas relativamente aceptables.

### A.3 Velocidad de convergencia

Si consideramos una medida  $\mu$  sobre el intervalo real  $[-1, 1]$ , las velocidades exactas de convergencia, tanto para los aproximantes de Padé como para los tipo Padé en el infinito a su transformada de Cauchy

$$F_\mu(z) = \int_{-1}^1 \frac{d\mu(x)}{z-x}; \quad z \notin [-1, 1]$$

son bien conocidas (ver [13]) y así como para el caso de los aproximantes de Padé multipuntuales (ver [48, p. 149]). En general, dada una sucesión  $\{H_n(z)\}_{n=1}^\infty$ , de aproximantes racionales a la función  $F_\mu(z)$ , por velocidad exacta de convergencia entendemos que existe una función  $\lambda(z)$  no negativa ( $z \notin [-1, 1]$ ) de forma que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F_\mu(z) - H_n(z)|^{1/n} = \lambda(z).$$

Ahora, nos podríamos preguntar cuándo se pueden obtener resultados análogos si reemplazamos la transformada de Cauchy por la de Herglotz-Riesz. En este aspecto, se han dado estimaciones de la velocidad de convergencia en [28] para los APM y los ATP2 y en [14] para los AP2. (Ver también [12] para el caso multipuntual). Con todo, los resultados numéricos nos hacen sospechar que tales estimaciones de la velocidad de convergencia podrían ser exactas. Esta conjetura se verifica para el caso de las funciones peso  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$  cuando se toman los APM como se verá a continuación. Demostrar esto en general, hasta donde nosotros sabemos, sigue siendo un problema abierto. En [28] se

obtuvieron las siguientes estimaciones para los APM:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n)|^{1/n} &\leq |z| \quad \text{si } |z| < 1 \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} |F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n)|^{1/n} &\leq \frac{1}{|z|} \quad \text{si } |z| > 1. \end{aligned}$$

Con respecto a la función peso de Chebyshev  $\omega_1(\theta)$  se tiene el siguiente resultado:

**Proposición A.3.1.** *Sea  $R_n(z, \tau_n)$ ;  $n = 1, 2, \dots$  el aproximante modificado para la transformada de Herglotz-Riesz con respecto a la función peso  $\omega_1(\theta)$ , donde  $\tau_n = (-1)^n$ . Entonces se tiene que*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |F_{\omega_1}(z) - R_n(z, \tau_n)|^{\frac{1}{n}} &= |z| \quad \text{si } |z| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |F_{\omega_1}(z) - R_n(z, \tau_n)|^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{|z|} \quad \text{si } |z| > 1. \end{aligned} \tag{A.2}$$

*Demostración:* Para  $|z| < 1$  tenemos

$$|F_{\omega_1}(z) - R_n(z, (-1)^n)| = \left| \frac{(-1)^n z^n (1+z)^2}{1 + (-1)^n z^{n+1}} \right| = \frac{|z|^n |z+1|^2}{|1 + (-1)^n z^{n+1}|}.$$

Pero,  $|1 + (-1)^n z^{n+1}| \leq 1 + |z|^{n+1}$ . Como  $|z| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + |z|^{n+1})^{1/n} = 1$  y, por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |1 + (-1)^n z^{n+1}|^{\frac{1}{n}} \leq 1. \tag{A.3}$$

Por otro lado,  $|1 + (-1)^n z^{n+1}| \geq 1 - |z|^{n+1}$  y, de forma similar, se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - |z|^{n+1})^{1/n} = 1$ . Por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |1 + (-1)^n z^{n+1}|^{\frac{1}{n}} \geq 1. \tag{A.4}$$

Haciendo uso de (A.3) y (A.4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |1 + (-1)^n z^{n+1}|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Entonces, por la fórmula anterior podemos escribir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F_{\omega_1}(z) - R_n(z, (-1)^n)|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z| |z+1|^{2/n}}{|1 + (-1)^n z^{n+1}|^{1/n}} = |z|.$$

Para  $|z| > 1$  bastaría cambiar  $z$  por  $\frac{1}{z}$ . ■

De forma similar se puede demostrar la siguiente Proposición:

**Proposición A.3.2.** *Sea  $R_n^k(z, \tau_n)$ ;  $n = 1, 2, \dots$ , ( $k = 2, 3$ ) la sucesión de aproximantes modificados para la transformada de Herglotz-Riesz con respecto a las funciones peso  $\omega_k(\theta)$ ,  $k = 2, 3$  donde  $\tau_n = 1$ . Entonces se tiene que, para  $k = 2, 3$*

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} |F_{\omega_k}(z) - R_n^k(z, \tau_n)|^{\frac{1}{n}} &= |z| \quad \text{si } |z| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |F_{\omega_k}(z) - R_n^k(z, \tau_n)|^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{|z|} \quad \text{si } |z| > 1.\end{aligned}$$



# Apéndice B

## Problemas abiertos y aplicaciones

En este Apéndice se incluirán algunas cuestiones que podrían ser abordadas en el futuro como continuación del trabajo llevado a cabo en esta Memoria. También incluiremos una de las aplicaciones de los polinomios ortogonales sobre  $\mathbb{T}$  y los para-ortogonales como es la Teoría de señales digitales.

### B.1 Problemas abiertos

#### B.1.1 Constante de Lebesgue

En el Capítulo 2 habíamos obtenido una estimación de la constante de Lebesgue  $\|H_n\|_{\mathbb{T}}$  (ver fórmula (2.12)) donde los nodos eran los ceros de  $z^n + \tau$ , ( $|\tau| = 1$ ).

Como las raíces de cualquier complejo unimodular son los ceros de polinomios para-ortogonales respecto a la medida de Lebesgue, con el propósito de calcular estimaciones de  $\|H_n\|_{\mathbb{T}}$ , podríamos considerar otros sistemas de nodos, como pueden ser los ceros de polinomios para-ortogonales con respecto a otras funciones peso. Para ello, hemos tomado la medida  $d\mu$  inducida por el núcleo de Poisson, esto es,  $d\mu(\theta) = \frac{(1-r^2)d\theta}{2\pi(1-2\cos\theta+r^2)}$ ,  $0 \leq r < 1$ . Observar que para  $r = 0$  se recupera la medida de Lebesgue. Con la finalidad de obtener

estimaciones de  $\|H_n\|_{\mathbb{T}}$ , hemos calculado  $H_n(x)$  para varios valores de  $x \in \mathbb{T}$ . Estos resultados aparecen en la siguiente Tabla:

<i>Tabla 1</i>					
$r = 0.5, w_n = 1$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$
$x = 1$	1.397784	1.57992	1.723141	1.910335	1.9392
$x = -1$	2.449491	2.373997	2.933358	3.029046	3.208695
$x = e^{\frac{\pi}{2}i}$	1.962709	1.682776	2.397946	1.8378	2.645338
$x = e^{\frac{\pi}{4}i}$	1.430733	1.933975	1.948278	1.359033	1.706982
$x = e^{\frac{\pi}{6}i}$	1.056523	1.377201	1.803354	2.109312	1.144155
$x = e^{\frac{\pi}{3}i}$	1.817217	1.923035	0.0372543	2.316734	2.323518
$x = e^{\frac{\pi}{5}i}$	1.127013	1.657399	2.002495	2.039703	1.573344
$x = e^{\frac{3\pi}{10}i}$	1.683758	2.00178	1.483753	1.756832	2.472193
$x = e^{\frac{\pi}{7}i}$	1.143668	1.141888	1.560843	1.955481	2.11586
$x = e^{\frac{5\pi}{14}i}$	1.89301	1.807811	1.441098	2.515929	1.893633

Si aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz a  $H_n(x)$  se tiene que, para todo  $x \in \mathbb{T}$ ,

$$H_n(x) = \sum_{j=1}^{n+1} |L_j(x)| \leq \left( \sum_{j=1}^{n+1} |L_j(x)|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{n+1} 1 \right)^{1/2}$$

Hemos calculado también  $\sum_{j=1}^{n+1} |L_j(x)|^2$  para varios  $x \in \mathbb{T}$ . Los resultados se pueden ver en la siguiente Tabla :

<i>Tabla 2</i>					
$r = 0.5, w_n = 1$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$
$x = 1$	0.6969723	0.7441738	0.7819141	0.822225	0.8336556
$x = -1$	1.545455	1.383746	1.297395	1.218227	1.205489
$x = e^{\frac{\pi}{2}i}$	1.121215	1.154252	1.091594	1.09958	1.069524
$x = e^{\frac{\pi}{4}i}$	1.16407	1.090565	0.9031604	0.9434807	1.083503
$x = e^{\frac{\pi}{6}i}$	0.96376	1.080369	1.051778	0.9604875	0.8898444
$x = e^{\frac{\pi}{3}i}$	1.272731	0.9463865	0.001387876	1.163986	0.9842566
$x = e^{\frac{\pi}{5}i}$	1.049032	1.11499	0.997557	0.8971838	0.9199576
$x = e^{\frac{3\pi}{10}i}$	1.244905	1.004661	0.9151806	1.110349	1.078075
$x = e^{\frac{\pi}{7}i}$	0.9034595	1.03289	1.05977	1.012111	0.932241
$x = e^{\frac{5\pi}{14}i}$	1.278674	0.918635	1.079651	1.14263	0.9504793

A partir de las Tablas 1 y 2 cabría conjeturar que existe una constante positiva  $K$  tal que

$$\|H_n\|_{\mathbb{T}} \leq K\sqrt{n+1}.$$

### B.1.2 Convergencia en norma $L_p$ de sucesiones de polinomios interpoladores de Laurent

En el Capítulo 2, (Teorema 2.2.2), vimos que para toda función  $f$  continua sobre  $\mathbb{T}$ , si  $\{x_{j,n} : j = 1, \dots, n+1\}$  son los ceros del  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal  $B_{n+1}(z, \tau_{n+1})$  con respecto a la función peso  $\omega(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$  y  $R_n(f, z)$  el  $L$ -polinomio en  $\Lambda_{-p,q}$  que interpola a  $f$  en los nodos  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n+1}$  con  $p = p(n)$  y  $q = q(n)$  verificando (2.5) y  $p+q = n$ ,

entonces,  $R_n(f, z)$  converge a  $f$  en norma  $L_{2,\omega}$ , es decir, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} |f(x) - R_n(x)|^2 \omega(\theta) d\theta = 0.$$

La cuestión sería si este resultado de convergencia en norma  $L_2$  se puede extender a norma  $L_p$  con  $p > 2$ .

### B.1.3 Convergencia uniforme de sucesiones de polinomios interpoladores de Laurent.

También en el Capítulo 2, Teorema 2.2.8, demostramos que si  $f$  es una función continua sobre  $\mathbb{T}$ ,  $\{p(n)\}$  y  $\{q(n)\}$  dos sucesiones de enteros no negativos tales que  $p(n) + q(n) = n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  verificando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = r; \quad 0 < r < 1,$$

y, si además, suponemos que el módulo de continuidad  $\lambda(f, \delta) = O(\delta^p)$ ;  $p > 1/2$  si  $\delta \rightarrow 0$  y  $R_n(f, z)$  es el polinomio en  $\Lambda_{-p(n), q(n)}$  que interpola a  $f$  en los nodos  $x_{j,n}$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , que son las  $(n+1)$  raíces de  $\tau_n$ , con  $|\tau_n| = 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, z) = f(z)$$

uniformemente sobre  $\mathbb{T}$ .

Cabría preguntarse si, por un lado, la hipótesis  $\lambda(f, \delta) = O(\delta^p)$ ;  $p > 1/2$  pudiera debilitarse, y por otro, si este resultado sigue siendo válido para otras elecciones más generales de nodos, como pueden ser los ceros de polinomios para-ortogonales con respecto a una función peso  $\omega(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$  arbitraria.

### B.1.4 Velocidad exacta de convergencia

Acabamos de ver en el Apéndice A, que para los aproximantes modificados (AP2)  $R_n(z, \tau)$ , ( $|\tau| = 1$ ) a la transformada de Herglotz -Riesz  $F_\omega(z)$  donde  $\omega(\theta)$  es una función peso



arbitraria en  $[-\pi, \pi]$ , se tiene la siguiente estimación de la velocidad de convergencia:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n)|^{1/n} &\leq |z| \quad \text{si } |z| < 1 \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} |F_\omega(z) - R_n(z, \tau_n)|^{1/n} &\leq \frac{1}{|z|} \quad \text{si } |z| > 1. \end{aligned}$$

Vimos, que con respecto a las funciones peso de Chebyshev normalizadas:  $\omega_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$ ,  $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$  y  $\omega_3(\theta) = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2\pi}$ , se obtuvo velocidad exacta de convergencia, es decir, que para  $k = 1, 2, 3$  se tiene,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |F_{\omega_k}(z) - R_n(z, \tau_n)|^{1/n} &= |z| \quad \text{si } |z| < 1 \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} |F_{\omega_k}(z) - R_n(z, \tau_n)|^{1/n} &= \frac{1}{|z|} \quad \text{si } |z| > 1. \end{aligned}$$

¿ Sería posible extender este resultado a cualquier función peso  $\omega(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$  ?

### B.1.5 Fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad con coeficientes iguales

En el caso de fórmulas de cuadratura sobre un intervalo  $[a, b]$  del eje real para la integral  $\int_a^b f(x)\mu(x)dx$ , se sabe que la única fórmula de cuadratura con coeficientes iguales, es decir, de la forma  $\sum_{j=1}^n A_j f(x_j) = A \sum_{j=1}^n f(x_j)$  exacta en  $\mathbb{P}_N$ , ( $N \geq n$ ) es la correspondiente fórmula Gaussiana respecto a la función peso  $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x \in (-1, 1)$  donde  $A = \frac{\pi}{n}$ . ([34, p. 183]).

Respecto a las fórmulas de cuadratura sobre  $\mathbb{T}$ , sabemos que con respecto a la medida de Lebesgue se obtiene una fórmula de cuadratura  $\sum_{j=1}^n \lambda_j f(\xi_j)$  con  $\lambda_j = \frac{2\pi}{n}$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ . Nos podríamos plantear si, al igual que en el caso real, ésta sería la única fórmula de cuadratura sobre  $\mathbb{T}$  con coeficientes iguales, exacta en  $\Lambda_{-p,q}$  con  $p$  y  $q$  enteros no negativos tales que  $p + q = N$ , ( $N \geq n$ ).

## B.2 Aplicaciones

Es bien sabido que una de las aplicaciones de los polinomios de Szegő, los polinomios para-ortogonales y las fórmulas de Szegő ha sido la llamada *teoría de señal*.

Así pues, sea  $\{x(m)\}_{-\infty}^{\infty}$  una sucesión de números reales. A esta sucesión la denominaremos con el término *señal discreta*. Nos centraremos en el estudio de señales periódicas de la forma:

$$x(m) = \begin{cases} \sum_{j=-I}^I \alpha_j e^{im\omega_j}, & m = 0, 1, \dots \\ 0, & m < 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

donde  $I$  es un entero positivo, las frecuencias  $\omega_j$  satisfacen  $\omega_j \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_{-j} = -\omega_j$ ,

$0 = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_I < \pi$  y las amplitudes  $\alpha_j$  verifican  $\alpha_0 \geq 0$ ,  $\alpha_{-j} = -\alpha_j \in \mathbb{C}$ .

El problema clásico del análisis de frecuencias consiste en determinar  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_I$  a partir de  $N$  observaciones de la señal (B.1), es decir,

$$x_N(m) = \begin{cases} \sum_{j=-I}^I \alpha_j e^{im\omega_j}, & 0 \leq m \leq N-1 \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Existe un método para resolver este problema que viene a ser una reformulación del llamado *método de Wiener-Levinson* ([35],[54]). El punto de partida de este método lo constituyen los *coeficientes de autocorrelación*:

$$\mu_k^{(N)} := \sum_{m=0}^{N-1} x_N(m)x_N(m+k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se puede ver fácilmente que la sucesión  $\{\mu_k^{(N)}\}$  es la sucesión de momentos con respecto a la función de distribución

$$d\psi_N(\theta) := |X_N(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

donde

$$X_N(z) = \sum_{m=0}^{N-1} x_N(m)z^{-m}.$$

Es decir

$$\mu_k^{(N)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\psi_N(\theta), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sea  $\tilde{\mu}_k^{(N)} = \frac{\mu_k^{(N)}}{N}$ . Entonces la función de distribución  $d\psi_N(\theta)/N$  da lugar a un producto interior y por tanto a una sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $\{\Phi_n(\psi_N; z)\}$ . Estos polinomios  $\{\Phi_n(\psi_N; z)\}$  que, como sabemos, también se les llama polinomios de Szegő, juegan un papel fundamental en la resolución del problema de análisis de frecuencias cuando  $n \geq n_0$ , donde  $n_0 = 2I + L$ , con  $L = 1$  si  $\alpha_0 \neq 0$  y  $L = 0$  en otro caso. En efecto, si  $n_0$  es conocido, entonces se tiene que ([37],[32])

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_{n_0}(\psi_N; z) = (z - 1)^L \prod_{j=1}^I (z - e^{i\omega_j})(z - e^{-i\omega_j})$$

uniformemente en compactos de  $\mathbb{C}$ . Esto implica, haciendo uso del Teorema de Hurwitz ([16, p. 152]), que los ceros del polinomio de Szegő se aproximarán a los puntos  $e^{\pm i\omega_j}$ ,  $-I \leq j \leq I$ .

Sin embargo, el número  $n_0$  de frecuencias suele ser desconocido. Supongamos, en primer lugar, que  $n < n_0$ , entonces ([37],[32])

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_n(\psi_N; z) = Q_n(z)$$

donde  $Q_n$  es el polinomio de Szegő con respecto a la medida discreta

$$d\psi(\theta) = \sum_{j=-I}^I |\alpha_j|^2 \delta_{\beta_j}, \quad \beta_j = e^{i\omega_j}, \quad j = -I, \dots, I. \tag{B.3}$$

y, por lo tanto, sus ceros están en  $\mathbb{D}$ .

Por otro lado, si  $n > n_0$  entonces ([37],[32]) existe una subsucesión  $\{N_k\}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_n(\psi_{N_k}; z) = Q_{n-n_0}(z)(z - 1)^L \prod_{j=1}^I (z - e^{i\omega_j})(z - e^{-i\omega_j}).$$

De nuevo, haciendo uso del Teorema de Hurwitz, se tiene que  $n_0$  ceros del polinomio de Szegő se aproximarán a los puntos  $e^{\pm i\omega_j}$ ,  $-I \leq j \leq I$  y que el resto de los  $(n - n_0)$

se aproximarán a los ceros del polinomio  $Q_{n-n_0}(z)$  que dependerá de la subsucesión que se tome. Los  $(n - n_0)$  ceros se denominan, a menudo, “uninteresting points” y se puede demostrar ([37]) que estos ceros están en la región  $|z| < 1$ , es decir, que los “uninteresting” ceros permanecen fuera de la circunferencia unidad. Entonces, si  $x_j^N$ ,  $j = 1, \dots, n - n_0$  son los  $n - n_0$  ceros del polinomio  $Q_{n-n_0}(z)$ , para todo  $n > n_0$  existe un número  $K_n \in (0, 1)$  que depende de  $n$  y de la señal dada tal que

$$|x_j^N| \leq K_n < 1, \quad j = 1, \dots, n - n_0. \quad (\text{B.4})$$

Este método es, por tanto, muy útil a la hora de determinar las frecuencias. Sin embargo, si bien sabemos que los “uninteresting points” se mantienen separados de los ceros que van a aproximar los puntos  $e^{\pm i\omega_j}$ ,  $-I \leq j \leq I$ , no se sabe calcular con exactitud el número  $K_n \in (0, 1)$ , ni siquiera se han podido obtener, hasta ahora, estimaciones del mismo.

Por este motivo, en vez de tomar los polinomios de Szegő  $\{\Phi_n(\psi_N; z)\}$  se han considerado los polinomios para-ortogonales  $B_n(\psi_N, \tau; z) = \Phi_n(\psi_N; z) + \tau \Phi_n^*(\psi_N; z)$ ,  $|\tau| = 1$ , ya que, en este caso, se tiene el siguiente resultado: ([31])

**Teorema B.2.1.** *Sea  $\{N_k\}_{k=1}^\infty$  una subsucesión arbitraria de la sucesión de números naturales. Entonces existe una subsucesión  $\{N_{k_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$  y la correspondiente sucesión de polinomios  $\{W_n(N_{k_\nu}, \tau; z)\}$  de grado a lo sumo  $n - n_0$ , tal que, para cada  $n \geq n_0$ ,  $|\tau| = 1$ , se tiene que*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} B_n(\psi_{N_{k_\nu}}, \tau; z) = W_n(N_{k_\nu}, \tau; z)(z - 1)^L \prod_{j=1}^I (z - e^{i\omega_j})(z - e^{-i\omega_j}),$$

*uniformemente en compactos de  $\mathbb{C}$ .*

Por tanto, estos polinomios también se pueden utilizar para resolver el problema de análisis de frecuencias. Sin embargo, para los ceros de estos polinomios no se tiene ninguna propiedad como la dada en la fórmula (B.4) que separe los “uninteresting” ceros de los que se aproximan a los puntos  $e^{i\omega_j}$ ,  $-I \leq j \leq I$ .

En estos momentos se está investigando si los coeficientes  $\lambda_j^N$ ,  $j = 1, \dots, n$  de la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő respecto a  $d\psi_N$  se podrán utilizar con el fin de separar dichos ceros.



# Bibliografía

- [1] **G. S. Ammar, D. Calvetti, W. B. Gragg, L. Reichel.** *Polynomial zerofinders based on Szegő polynomials.* J. Comp. Appl. Math., 127, (2001), 1-16. 1983.
- [2] **M. Alfaro, F. Marcellán.** *Carathéodory functions and orthogonal polynomials on the unit circle.* Complex Methods in Approximation Theory, Servicio de Publicaciones Universidad de Almería, (1997), pp. 1-22.
- [3] **N. I. Akhiezer.** *The classical moment problem and some related questions in Analysis.* Hafner, New York, (1965).
- [4] **P. Borwein and T. Erdélyi.** *Polynomials and Polynomial Inequalities.* Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, (1995).
- [5] **L. Brutman.** *On the Polynomial and Rational Projections in the Complex Plane.* SIAM J. Numer. Anal., Vol. 17, No. 3, (1980).
- [6] **A. Bultheel.** *Algorithms to compute the reflection coefficients of digital filters.* Numerical Methods of Approximation Theory, Vol. 7, L. Collatz, G. Meinardus and H. Werner eds., (Birkhäuser, Basel, 1984), pp. 33-50.
- [7] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendrksen, and O. Njåstad .** *Orthogonal rational functions .* Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, Cambridge University Press, (1999).

- [8] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, O. Njåstad.** *Orthogonal rational functions and interpolatory product rules on the unit circle. II Quadrature and convergence.* Analysis, 18, (1998), pp. 185-200.
- [9] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, O. Njåstad.** *Orthogonal rational functions and interpolatory product rules on the unit circle. III Convergence of general sequences.* Analysis, 20, pp. 99-120, (2000).
- [10] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, O. Njåstad.** *Orthogonality and quadrature on the unit circle.* IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, Vol. 9, Brezinski et al editors, Basel(1991) pp. 205-210, J.C. Baltzer AG.
- [11] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, O. Njåstad.** *Quadrature formulas on the unit circle based on rational functions.* Proceedings of the Fifth International Congress on Computational and Applied Mathematics (Leuven, 1992), J. Comp. Appl. Math., 50, (1994), no. 1-3, pp. 159-170.
- [12] **A. Bultheel, P. González, E. Hendriksen and O. Njåstad.** *Rates of convergence of multipoint rational approximants and quadrature formulas on the unit circle.* J. Comp. Appl. Math., 77, (1997), 71-101.
- [13] **F. Cala, G. López Lagomasiano.** *From Padé to Padé-type approximants. Exact rate of convergence.* Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Intern. Conference on Approximation and Optimization. M. Florenzano et al. eds. Peter Lang Series in Approximation and Optimization, Vol. 8, (1995), 155-163.
- [14] **M. Camacho, P. González-Vera.** *Rational function associated with double infinite sequence of complex numbers.* J. Comp. Appl. Math., 85, (1997), 37-51.
- [15] **E. W. Cheney.** *Introduction to Approximation Theory.* Chelsea, New York, (1966).



- [16] **J.B. Conway.** *Functions of One Complex Variable.* Springer-Verlag New York, (1978).
- [17] **P.J. Davis.** *Interpolation and Approximation .* Dover Publications, INC. New York, (1975).
- [18] **P. J. Davis and P. Rabinowitz.** *Methods of Numerical Integration.* Academic Press, New York, (1984).
- [19] **A. Draux.** *Polynomes orthogonaux formel, applications.* Lecture Notes in Math., vol. 974, Springer Verlag, Berlín, 1983.
- [20] **T. Erdelyi, P. Nevai, J. Zhang, J.S. Geronimo.** *A simple proof of “Favard theorem” in the unit circle.* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 39, (1991), 551-556.
- [21] **P. Erdős and P. Turán.** *On interpolation, quadrature and mean convergence in the Lagrange interpolation.* Annals of Mathematics, 38, (1937), pp. 142-155.
- [22] **G. Freud.** *Orthogonal Polynomials.* Pergamon Press- Akadémiai Kiadó, Budapest, (1971).
- [23] **W. Gautschi and G. V. Milovanović.** *Polynomials orthogonal on the semicircle.* Journal of Approximation Theory, 46, (3), (1986) 230-250.
- [24] **Ya. L. Geronimus.** *Polynomials orthogonal on a circle and their applications.* Series and Approximations, Translation Series 1, Volume 3, American Math. Soc. Providence, R.I., (1962), 1-78.
- [25] **C. Glader.** *A Two Parameter Family of Orthogonal Polynomials with Respect to a Jacobi-Type Weight function on the Unit Circle.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 240, (1999), pp. 583-599.

- [26] **E. Godoy, F. Marcellán.** *An Analog of the Christoffel Formula for Polynomial Modification of a Measure on the Unit Circle.* Boll. Mat. Ital., (7), 5-A, (1991), pp. 1-12.
- [27] **L. Golinskii.** *Quadrature Formula and Zeros of Para-orthogonal Polynomials on the Unit Circle.* Preprint.
- [28] **P. González-Vera, J. C Santos-León and O. Njåstad.** *Some results about numerical quadrature on the unit circle.* Advances in Computational Mathematics, 5, (1996), pp. 297-328.
- [29] **W. B. Gragg.** *Positive definite Toeplitz matrices, the Arnoldi process for isometric operators, and Gaussian quadrature on the unit circle.* J. Comp. Appl. Math., 46, (1993), pp. 183-198.
- [30] **W. B. Jones, O. Njåstad, and W. J. Thron.** *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle.* Bull. London Math. Soc., 21, (1989), pp. 113-152.
- [31] **W. B. Jones, O. Njåstad, and H. Waadeland.** *Asymptotics of Zeros of Orthogonal and Para-Orthogonal Szegő Polynomials in Frequency Analysis.* Continued Fractions and Orthogonal Functions, S. C. Cooper and W. J. Thron (editors), Marcel Dekker, New York, (1994), pp. 153-190.
- [32] **W. B. Jones, W. J. Thron.** *Szegő polynomials applied to frequency analysis.* J. Comp. Appl. Math., 46, (1993), pp. 217-228.
- [33] **W.B. Jones, H. Waadeland.** *Bounds for remainder terms in Szegő quadrature on the unit circle.* Approximation and Computation, R.V.M. Zahar Editor. International Series of Numerical Mathematics, Vol. 119, Birkhäuser, Basel, (1994), pp. 325-346.

- [34] **V.I. Krylov.** *Approximate Calculation of Integrals* Mc Millan Co., New York, (1962).
- [35] **N. Levinson.** *The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter desing and prediction* J. Math. Phys., 25, (1947), 261-278.
- [36] **A. Magnus.** *Semiclassical orthogonal polynomials on the unit circle.* MAPA 3072. Special topics in Approximation Theory. Preprint. (1999).
- [37] **K. Pan, E. B. Saff.** *Asymptotics for Zeros of Szegő Polynomials Associated with Trigonometric Polynomial Signals.* Journal of Approximation Theory, Vol. 71, No. 3, (1992), pp. 239-251.
- [38] **F. Peherstorfer.** *A Special Class of Polynomials Orthogonal on the Unit Circle including the Associated Polynomials.* Constr. Approx., 12, (1996), pp. 161-185.
- [39] **F. Peherstorfer, R. Steinbauer.** *Characterization of general orthogonal polynomials with respect to a functional.* J. Comp. Appl. Math., 65, (1995), pp. 339-355.
- [40] **T. J. Rivlin.** *The Chebyshev Polynomials.* New York, 1974.
- [41] **F. RØnning.** *A Szegő Quadrature Formula Arising from  $q$ -Starlike Functions.* Continued fractions and orthogonal functions (Loen, 1992), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 154, Marcel Dekker, New York, 1994, pp. 345-352.
- [42] **J. C. Santos.** *Computation of integrals over the unit circle with nearby poles.* Aceptado en la revista Applied Numerical Mathematics.
- [43] **J. C. Santos.** *Computation of the Riesz- Herglotz transform and its application to quadrature formulas over the unit circle.* Preprint.
- [44] **J. C. Santos.** *Error bound for interpolatory quadrature rules on the unit circle* Aceptado en la revista Mathematics of Computation.

- [45] **J. C. Santos.** *Product rules on the unit circle with uniformly distributed nodes. Error bounds for analytic function.* J. Comp. Appl. Math., 108, (1999), pp. 195-208.
- [46] **V.I. Smirnov, N.A. Lebedev.** *Functions of complex variable (constructive theory).* MIT Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, U.S.A, (1968).
- [47] **I. H. Sloan and W. E. Smith.** *Properties of interpolatory product integration rules.* SIAM J. Numer. Anal., 19, (1982), pp. 427-442.
- [48] **H. Stahl, V. Totik.** *General Orthogonal Polynomials.* Cambridge University Press, (1992).
- [49] **J. Stoer, R. Bulirsch.** *Introduction to Numerical Analysis.* Springer Verlag, New York, (1980).
- [50] **J. Szabados and P. Vértesi.** *A survey on mean convergence of interpolation process* J. comp. Appl. Math., 43, (1992), pp. 3-18.
- [51] **G. Szegő.** *Orthogonal Polynomials* A.M.S., 4th Ed. Vol. 23, (Colloquium Publications), (1975).
- [52] **H. Waadeland.** *A Szegő quadrature formula for the Poisson integral* J. Comp. Appl. Math. I, (eds., C. Brezinski and U. Kulish), Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), (1992) IMACS, pp. 479-486.
- [53] **J. L. Walsh.** *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain.* Amer. Math. Soc. Coll. Pubs., 20, Amer. Math. Soc. Providence R.J., (1969).
- [54] **J. L. Walsh and A. Sharma.** *Least Squares and interpolation in roots of unity.* Pacific J. Math., 38, (1964), pp. 727-730.

- [55] **N. Wiener.** *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*  
MIT Press, Cambridge, MA/Wiley, New York, (1949).
- [56] **E.H. Zarantonello.** *On trigonometric interpolation.* Proc. Amer. Math. Soc., 3,  
(1952), pp.770-782.



# Trabajos contenidos en la Tesis

Esta Memoria contiene trabajos que han sido ya publicados o aceptados en diferentes revistas. Así pues, en el Capítulo 2 se encuentran los siguientes artículos:

*Some results about interpolation with nodes on the unit circle.* Coautor: Pablo González Vera. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 31 (10), (2000), pp. 1273-1296.

*A note on Hermite- Fejér interpolation for the unit circle.* Coautor: Pablo González Vera. Aceptado en Applied Mathematics Letters.

*Cotas de error para fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad.* Coautor: Pablo González Vera. Actas del congreso CEDYA99. Vol. 2, (1999), pp. 1037-1045.

*En el Capítulo 3 está incluido el trabajo:*

*Szegő polynomials and quadrature formulas on the unit circle.* Coautor: Pablo González Vera. Applied Numerical Mathematics, 36, (2000), pp. 79-112.

*En el Capítulo 4 están incluidos los siguientes artículos*

*Szegő quadrature formulas for certain Jacobi-type weight functions.* Coautores: O. Njastad, Pablo González Vera. Aceptado en Mathematics of Computation.

*A connection between quadrature formulas on the unit circle and the interval  $[-1,1]$ .* Coautores: A. Bultheel, Pablo González Vera. Aceptado en J. Comp. Appl. Math.

*En el Capítulo 5:*

*Interpolatory quadrature formulas on the unit circle for Chebyshev weight functions.*  
Coautor: Pablo González Vera. Aceptado en *Numerische Mathematice*.

*En el Capítulo 6:*

*Gaussian quadrature formulas on the unit circle.* Coautores: Pablo González Vera,  
Francisco Marcellán. Aceptado en *J. Comp. Appl. Math*.

*Finalmente, en el Apéndice A se encuentra el siguiente trabajo:*

*Numerical Estimation of the Herglotz-Riesz Transform by Using Two-point Padé Approximants.* Coautor: Pablo González Vera. Publicado en *Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions*. Vol. VIII, (2000), pp. 57-73.