UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

Localización mediante votos en redes

Autor: Campos Rodríguez, Clara
Director: José Andrés Moreno Pérez

Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación

JOSÉ ANDRÉS MORENO PÉREZ, CATEDRÁTICO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN E INTELIGENCIA ARTIFICIAL DE LA UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA.

CERTIFICO:

Que la presente memoria, titulada

"Localización mediante votos en redes"

ha sido realizada bajo mi dirección por la licenciada Dña. Clara Campos Rodríguez, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor por la Universidad de La Laguna.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos que haya lugar, firmo la presente en La Laguna, a de Octubre del 2000.

Fdo. : José A. Moreno Pérez.

A mi familia.

Quiero agradecer al profesor José A. Moreno Pérez por su enorme trabajo en la dirección de esta memoria, la gran cantidad de tiempo que le ha dedicado y la extraordinaria paciencia que ha tenido. Gracias a él esta memoria está mejor redactada, está mejor organizada y está mucho más completa. Sus conocimientos han aclarado muchos puntos, y sus sugerencias han sido el origen de los trabajos de investigación que se encuentran aquí recogidos.

Gracias a Inmaculada, Dionisio y Marcos por su colaboración de una u otra forma. También quiero agradecer la ayuda de Alejandro F. López de Vergara Méndez. Así como los comentarios de profesores que nos han visitado principalmente Emilio Carrizosa y Martine Labbé.

Finalmente, quiero recordar a mis compañeros del departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación y del departamento de Economía Financiera y Contabilidad.

TITULO: **LOCALIZACION MEDIANTE VOTOS EN REDES.**

.

LOCALIZACIÓN MEDIANTE VOTOS EN REDES.
Clara Margarita Campos Rodríguez.

PROLOGO

La *Teoría de la Localización* se ocupa principalmente de las cuestiones relativas al establecimiento de la ubicación de servicios en un contexto espacial en referencia a los usuarios o clientes con los que interactúa. En los modelos de *localización mediante voto* se plantea la elección de la ubicación de servicios aplicando los criterios inspirados en los procesos de elección social (Kelly, (1988)). Se trata de decidir la ubicación del servicio teniendo en cuenta las preferencias de los usuarios. Usualmente estas preferencias vienen manifestadas por sistemas de votaciones y el objetivo global consiste en tratar de satisfacer a la mayoría.

Existen otros muchos criterios para elegir la ubicación de un servicio planteados desde otros puntos de vista. Generalmente se trata de satisfacer ciertos objetivos económicos como son los criterios más clásicos de la mediana y del centro. Sin embargo los resultados de la aplicación de estos criterios pueden ser rechazados por una amplia mayoría de la población. El objetivo de esta memoria es estudiar diversos aspectos derivados de la consideración de criterios con inspiración social en los modelos de localización.

En particular se aborda el modelo estándar de la localización en redes mediante votos cuando se considera que los usuarios tienen un sistema de preferencias con estructura de semiorden respecto a la distancia. Un usuario frente a dos localizaciones posibles para el servicio puede preferir una a otra o ser indiferente entre ambas, fundamentalmente en función de la distancia que lo separa de ellas. Si para decantarse por la indiferencia entre las localizaciones o la preferencia por una de ellas existe un valor umbral para la diferencia entre la distancias a ellas, la estructura de preferencias del usuario es un semiorden. La introducción de los semiordenes como estructura de preferencia de los usuarios permite considerar modelos más ajustados a la realidad que si se consideran sistemas de preferencias en los que los usuarios son indiferentes entre dos puntos sólo cuando están exactamente a la misma distancia de ambos (Pirlot y Vincke, (1995)). Además el uso de un umbral común permite graduar el grado de compromiso de los usuarios para solventar el inconveniente de que los sistemas de preferencias clásicos no garantizan la existencia de una solución para el problema de la localización mediante votos. Esta es una dificultad presente en la aplicación de los modelos de votaciones a la mayoría de los problemas de decisión colectiva (Moulin, (1991)).

En este trabajo se aborda la aplicación de los modelos estándares de la localización mediante voto tanto para el caso de servicios deseables como de servicios repulsivos. Se analiza la comparación de las soluciones mediante votos y las soluciones obtenidas al aplicar los criterios clásicos de medianas o centros siguiendo una línea similar a varios artículos publicados por diversos autores.

Tratamos los problemas de localización mediante votos en los que además de aplicar los criterios clásicos de Condorcet y Simpson se consideran sistemas de preferencias con estructuras de semiórdenes basados en un umbral uniforme para la indiferencia de los usuarios. De esta forma se obtiene una familia de problemas con un doble objetivo: que el número de usuarios que prefieran otra ubicación sea mínimo, y que la distancia que define el umbral de indiferencia sea mínima. Estos propósitos son antagónicos y se intenta combinarlos de forma que se garantice la existencia de una solución.

El reparto de los usuarios indiferentes entre varios servicios nos conduce a una familia de problemas entre los que estan los de solución plural. Estos problemas son semejantes a los de Condorcet pero usando la mayoría simple en vez de la mayoría absoluta.

El uso de modelos de localización mediante votos da una información diferente a la que se obtiene con los modelos clásicos de la mediana y el centro. En un Sistema de Ayuda a la Toma de Decisiones (DSS) la observación de distintos tipos de información puede llevar a la toma de una decisión de mayor calidad.

Igual que la Teoría de la Localización se enriquece con la introducción de conceptos de Teoría de Decisión los resultados obtenidos en el desarrollo de la localización mediante votos nos ha llevado a proponer un método de decisión en grupo aplicable cuando los miembros del grupo tiene una función de valor sobre las alternativas. También se puede considerar este método como un método de decisión multicriterio en el que las alternativas están valoradas por criterios normalizados.

En el primer capítulo de esta memoria se realiza una introducción dividida en tres apartados. En la primera sección de este capítulo se hace una revisión del estado actual de la localización mediante votos. En la segunda se aportan la notación básica y las definiciones de los conceptos fundamentales utilizados en la memoria. Por último, en el tercer apartado se exponen los resultados más importantes para la resolución práctica de los problemas planteados en este contexto.

Para realizar en la primera sección del capítulo 1 la revisión del estado actual de la localización mediante votos se exponen, en primer lugar, las cuestiones fundamentales sobre la localización. A continuación se exponen las bases de los modelos para la adopción de decisiones mediante votos y el papel que juegan en ellos la estructuras de los sistemas de preferencia de los decisores. Finalmente se exponen los fundamentos que permiten conjuntar estos paradigmas para plantear problemas de localización con criterios basados en los procesos de decisión mediante votos.

La segunda sección de este primer capítulo aporta la notación básica y las definiciones fundamentales que serán utilizadas en la memoria. Para ello se concretan las aspectos formales de los conceptos de la teoría de grafos que se utilizan para formular los modelos sobre los que se trabajará. Se establecen los términos en los que se formulan los problemas de localización sobre grafos o redes, describiendo los aspectos esenciales de los modelos clásicos de localización y como se establecen los modelos básicos de localización mediante votos.

El tercer apartado de este capítulo introductorio se exponen los resultados más importantes obtenidos por diversos autores para la resolución de problemas de localización mediante votos. Gran parte de este apartado se dedica a exponer en detalle el importante procedimiento para obtener la solución de Condorcet en grafos generales debido a Hansen y Labbé. La relevancia de este algoritmo viene determinada por abordar el problema paradigmatico de la localización mediante votos, el problema de Condorcet, y porque proporciona las ideas fundamentales del mecanismo de comparación por pares para la eliminación de candidatos que se utiliza en la práctica totalidad de algoritmos para obtener las soluciones de los problemas de localización mediante votos. La descripción del algoritmo se ha modificado para mejorar su comprensión y facilitar la descripción del algoritmo fundamental del capítulo segundo que se deriva en parte de éste.

En el segundo capítulo se expone la introducción de los semiórdenes en el modelo estándar del problema de Condorcet en redes dando lugar a la solución α-Condorcet. Algunos de de los resultados de la primera parte de este capítulo para el planteamiento y solución de este problema han sido publicados en Studies of Location Analysis. La comparación de las soluciones de este nuevo modelo y los modelos clásicos aparecerán en otro trabajo que ha sido aceptado para su publicación en la revista TOP.

El segundo capítulo arranca con una introducción motivada a la formulación de este nuevo modelo donde se contempla la existencia de un umbral para la indiferencia de los usuarios que se denota por α. Tras establecer formalmente el planteamiento del problema en la segunda sección se expone y analiza el algoritmo de solución propuesto para resolver el problema con un umbral α dado. En el siguiente apartado se aborda la determinación del mínimo valor del umbral de indiferencia, que permite la existencia de solución del problema y que representa el grado de compromiso que permite la adopción de una solución aceptable por la mayoría de los usuarios, y da lugar a la solución tolerante de Condorcet. Se plantea y analiza el correspondiente algoritmo de solución. Finalmente se exponen los resultados que permiten acotar la calidad de las soluciones aportadas por este modelo teniendo en cuenta los criterios aplicados en los modelos clásicos de localización: el criterio de la mediana o *minisum* y el del centro o criterio *minimax*. Estas cotas reflejan lo peor que puede ocurrir con las soluciones aportadas por el nuevo modelo desde dicho punto de vista, pero no reflejan la calidad de la solución que, respetando el criterio democrático que inspira el nuevo modelo, más se acerca a la solución óptima de los problemas clásicos.

El tercer capítulo se dedica a los modelos de localización mediante votos que se obtienen al generalizar los distintos aspectos que condicionan la existencia de solución. En primer lugar, siguiendo la propuesta de la solución de Simpson, se varía el número de usuarios necesarios para rechazar una localización, fijando una mayoría de rechazo por medio de un parámetro γ; la mayoría de rechazo puede ser distinta de la mitad de usuarios. La propuesta de considerar simultaneamente esta relajación que permite la existencia de solución y la que proponemos en el capítulo anterior ha sido presentada en diversos congresos especializados y forma parte de un trabajo sometido para publicación en la revista EJOR. También se estudian los conceptos relacionados con los puntos plurales, resultantes al sustituir la mayoría absoluta por la mayoría simple, al tratar la comparación de pares de localizaciones alternativas. Las soluciones de ambos planteamientos para el rechazo de una solución, mayoría absoluta (la mitad más uno de usuarios en contra) y mayoria simple (más usuarios en contra que a favor) se ha implementado para el caso discreto; el correspondiente programa PASCAL aparece como apéndice. Por último, se considera la generalización adicional de contemplar un reparto de usuarios indiferentes entre las localizaciones comparadas gobernado por un parámetro β.

El capítulo cuarto se dedica a algunos resultados de líneas de investigación en las que se ha trabajado y que aún permanecen abiertas. Este capítulo está dividido en tres partes que corresponden a la localización mediante votos de servicios no deseables, a la localización de conjuntos de varios puntos de localización, y una tercera parte que engloba las localizaciones eficientes, la aplicación de modelos generales de toma de decisión en grupo y el uso de umbrales de indiferencia proporcionales.

La memoria finaliza con la bibliografía y un apéndice en el que se encuentra el programa PASCAL usado para buscar las soluciones de los problemas discretos presentados en el tercer capítulo.

1. Introducción.

En este primer capítulo introductorio se incluye una exposición de la perspectiva general de los problemas de localización mediante votos. Se introduce la notación fundamental para formalizar los problemas aportando las definiciones básicas que permiten especificar los modelos considerados. Finalmente se realiza una exposición de las contribuciones más relevantes para la resolución de los problemas correspondientes.

1.1. La localización mediante votos.

En este primer apartado se proporciona una descripción de los aspectos más relevantes tanto de la *Teoría de la Localización* como de los *Modelos de Decisión mediante Votos* para confluir en el objeto central de la memoria: los *Problemas de Localización Mediante Votos*.

1.1.1. La localización.

En términos generales, la localización de servicios trata el problema de seleccionar uno o varios puntos para la ubicación de un servicio en función de algún criterio que refleja las características de la prestación del servicio desde la situación seleccionada. Se consideran criterios que dependen de la situación relativa de los usuarios al servicio o a los servicios que se quieren localizar en términos de la distancia entre ellos.

Los orígenes de los estudios de localización se pueden remontar hasta el siglo XVIII. Existen algunos trabajos relevantes sobre localización en la primera mitad del siglo XX. Sin embargo es a partir de los años sesenta cuando se experimenta un extraordinario crecimiento en las investigaciones en este campo. Actualmente la localización es un campo de interés para varias disciplinas. Geógrafos, economistas, ingenieros y otros profesionales abordan aspectos de la localización desde distintas perspectivas.

Desde la perspectiva matemático-formal, el problema de la localización se dice continuo cuando los puntos para los servicios y los usuarios vienen dados por variables continuas. En la localización discreta los servicios sólo pueden estar en un conjunto finito de posibles ubicaciones; el espacio en el que se seleccionan los servicios se representa por una o varias variables discretas. Los modelos de localización sobre redes son modelos que se formulan utilizando una red descrita mediante un grafo como contexto en el que se ubican los usuarios y los servicios. En estos modelos los vértices permiten describir ubicaciones de forma discreta pero los puntos a lo largo de una arista aportan formulaciones de tipo continuo más realistas que los modelos sobre regiones planas.

Los problemas de localización contínuos en redes contemplan como posibles ubicaciones de los puntos de servicios aristas completas o parte de ellas de caracter continuo. Mientras que en los problemas discretos sólo se pueden ubicar los servicios en los vértices o en un conjunto finito de puntos, en cuyo caso se suelen incorporar como nuevos vértices al modelo. En los problemas de localización continuos, tanto en redes como en espacios continuos pluridimensionales abiertos o cerrados, dado que el conjunto de posibles soluciones es infinito, uno de los primeros objetivos al analizar un problema de localización, en el que el conjunto de posibles ubicaciones del servicio es un conjunto infinito, consiste en identificar un conjunto finito dominante. Un conjunto dominante para un problema es un conjunto de ubicaciones dentro de las que podemos encontrar siempre una solución óptima. Este tipo de resultado se encuentran ya en el trabajo de Hakimi (Hakimi, (1964)) donde prueba que el conjunto de vértices es finito dominante para el problema de la p-mediana. Este tipo de resultado se conoce como principio de optimalidad de los vértices y ha sido extendido a muchos otros problemas de localización, en algunos casos incorporando otros conjuntos finitos de puntos en el interior de las aristas como los centros locales, cuellos de botellas o puntos extremos.

A veces los algoritmos que dan la solución exacta de un problema son inviables por cuestiones de recursos empleados; principalmente tiempos demasiado largos. En estos casos se plantea si el esfuerzo por encontrar una solución óptima exacta merece la pena o si es suficiente con una solución aproximada o suficientemente buena. Los problemas originales pueden ser modificados relajando algunas restricciones para permitir la búsqueda eficiente de soluciones que puedan llegar a ser aceptables. Otra alternativa sería aportar métodos que permiten obtener buenas soluciones factibles pero sin garantizar la optimalidad. Surge entonces la cuestión de cómo de buenas son las soluciones obtenidas. Las heurísticas son técnicas para proporcionar este tipo de procedimientos. Se estudia si los procedimientos obtienen buenos resultados de promedio y también en el peor de los casos.

Otro elemento relevante que se plantea en la aplicación de los modelos de localización es si la ubicación de un servicio es una decisión que se puede tomar en función de un sólo criterio o si se deben aplicar modelos multicriterio. Por ejemplo, los modelos Cent-Dian son modelos bicriterio emanados de la combinación de los criterios clásicos del centro y la mediana. La aplicación de modelos multicriterio puede llevar a la no existencia de soluciones ideales que sean las mejores para todos los criterios a la vez. Los sistemas de ayuda a la decisión en localización deben permitir a los decisores observar los resultados de varios criterios obteniéndose de forma interactiva información complementaria.

Existen otros muchos aspectos importantes en el análisis de los modelos de localización. Se puede considerar que existe sólo una empresa que facilite el servicio o que existen varias empresas que compiten. Si es deseable que el servicio esté cerca o es un servicio que se prefiere que esté lejos del usuario (en este caso se habla de servicios no deseables). Se puede estudiar la localización como una decisión estática o considerando las variaciones en el tiempo que afectarán a la localización del servicio. El cálculo y almacenamiento de las distancias de los usuarios a los servicios, el tamaño de los servicios, el número de productos que puede ofrecer un servicio, la asignación de los clientes a los servicios, son otros aspectos que se pueden tener en cuenta en localización.

En la localización de servicios en *redes* se idealiza el contexto espacial en el que se enmarcan los usuarios y los puntos de servicio en un modelo en el que una red de comunicaciones une los usuarios con los servicios. Los puntos de conexión se denominan vértices y las conexiones entre ellos aristas o arcos. En general se suele considerar que los usuarios están situados en vértices; en otro caso, cualquier punto en el que haya un usuario se toma como un nuevo vértice de la red. En la localización en redes la distancia de un usuario a un servicio se obtiene a través de la longitud del camino más corto que une los puntos en que se encuentran el usuario y el servicio. Existen algoritmos polinomiales para calcular esas distancias y esos caminos mínimos.

El origen de la localización de servicios en redes es un artículo de Hakimi (Hakimi, (1964)). A partir de entonces los criterios más utilizados son: minimizar la suma de distancias de los usuarios a los servicios, conocido como criterio de la mediana, y minimizar la máxima distancia de los usuarios a los servicios, conocido como criterio del centro. Sin embargo ni el criterio de la mediana y ni el del centro tienen en cuenta las preferencias de los usuarios; así como la generalidad de los criterios de optimización usados en la literatura sobre localización.

1.1.2. Decisión mediante votos.

Las *Decisiones colectivas* se realizan en las sociedades actuales por procedimientos que tratan de respetar los criterios basados en el concepto de mayoría. Estos procedimientos, también conocidos como de decisión en grupo, establecen la forma en la que, a partir de las preferencias de los decisores que forman el colectivo o grupo de decisores por las distintas alternativas, se obtienen conclusiones sobre la preferencia colectiva y en términos de ellas se adoptan las decisiones. En nuestro caso se trata de un colectivo de usuarios, o grupo de decisores, que comparten un servicio y deben decidir sobre su ubicación en un contexto espacial que les afecta. Cuando las decisiones colectivas consisten en la selección, dentro de un conjunto de alternativas, de la preferida por el colectivo, se habla de procedimientos de *Elección Social* (ver, por ejemplo (Kelly, (1988))). Los procesos de elección social de las sociedades democráticas están basados en la regla de la mayoría, tanto mayoría simple como absoluta. Sin embargo, ya desde el siglo XVIII se conoce como *efecto Condorcet* el hecho frecuente de que una decisión basada en la regla de la mayoría resulta imposible de adoptar. El caso más sencillo es cuando tres decisores que deben decidir entre tres alternativas manifiestan unas preferencias del tipo $a \prec b \prec c$, $b \prec c \prec a$ y $c \prec a \prec b$, donde $\prec$ debe leerse "*preferida a*", que en aplicación de la regla de la mayoría, existen 2/3 de los decisores que sustentan la preferencia cíclica $a \prec b \prec c \prec a$ que no puede llevar a ningún tipo de decisión.

Ante situaciones de este tipo, pero algo más complejas, se han propuesto diversas estrategias para seleccionar una de las alternativas tratando de respetar el principio mayoritario. Las sociedades modernas han adoptado diversos procedimientos de votación en los que los miembros del colectivo manifiestan sólo ciertos aspectos de sus preferencias y, mediante algún mecanismo que los tenga en cuenta, se alcanza una decisión razonable. Entre tales propuestas destaca la que lleva el nombre de Condorcet consistente en seleccionar una alternativa para la que no exista una mayoría que prefiera a otra. Esta elección se basa, por tanto, sólo en las comparaciones por pares, lo que la hace ampliamente aceptable en muchos contextos. Otras propuestas ampliamente utilizadas como las de *Borda* requieren más información, ya que utilizan un ranking u ordenación de las alternativas por cada decisor. Sin embargo, la solución propuesta por Condorcet no existe en numerosos casos prácticos como el relatado anteriormente, por lo que *Copeland* propone aumentar la noción de mayoría necesaria para rechazar una solución desde la mitad de los decisores o miembros del colectivo hasta la mínima cantidad que permite la existencia de solución. Este tipo de solución en los problemas de localización mediante votos se conoce como solución de Simpson. En esta memoria se describe una propuesta distinta para solventar esta dificultad, denominada solución *Tolerante de Condorcet*, que es aplicable a circunstancias aún más generales que los modelos de localización como son la decisión en grupo o la decisión multicriterio.

En la aplicación de estos mecanismos de elección social generalmente se utilizan explícita o implícitamente funciones de valor o utilidad en las alternativas en las que se basa las manifestaciones de las preferencias por parte de los decisores. Por ejemplo, en los problemas de localización donde los usuarios constituyen el colectivo de decisores para la ubicación de un servicio, el papel de la función de valor viene representado por la cercanía del usuario al servicio. Sin embargo, en los trabajos conocidos se ha utilizado una estructura de preferencias demasiado rígida en terminos de la cual dos ubicaciones son indiferentes para un usuario sólo si están exactamente a la misma distancia. Nuestra propuesta consiste fundamentalmente en asumir la existencia de un umbral por debajo del cual las diferencias no se pueden considerar suficientemente significativas como para descartar una indiferencia. El tipo de estructura de preferencia resultante es conocido como *semiorden* y está siendo utilizado en situaciones prácticas cada vez con mayor éxito y frecuencia (Pirlot y Vincke, (1995)). Dado que partimos de un tratamiento igualitario de los usuarios y que asumimos que sus preferencias están basadas en una magnitud objetiva como es la distancia entre usuario y servicio, utilizamos un umbral común a todos los usuarios para establecer la diferencia necesaria para descartar una indiferencia entre las posibles ubicaciones del servicio.

1.1.3. Semiórdenes.

A la hora de tomar una decisión generalmente se evalúan las alternativas por medio de criterios cuantitativos para que los criterios se comparen como números. Sean a y b dos alternativas y sea g la función del criterio con el cual se va a comparar a y b. Entonces se establece que a es preferido a b si $g(a) > g(b)$ y que a y b son indiferentes si $g(a) = g(b)$. La notación usual correspondiente es:

$$\begin{aligned} a &\prec b \text{ si y sólo si } g(a) > g(b). \\ a &\sim b \text{ si y sólo si } g(a) = g(b). \end{aligned}$$

Sin embargo a la hora de comparar alternativas se puede llegar a paradojas como la intransitividad de la indiferencia. Esta paradoja se refleja en el caso más sencillo en el hecho de que aunque la alternativa a sea indiferente a b, b indiferente a c, las alternativas a y c no tienen que ser indiferentes. Esto se atribuye frecuentemente a las limitaciones en la percepción; aunque dos cosas sean indiferentes para un usuario existen diferencias entre ellas. Por ello, el modelo anterior no se considera adecuado para representar la realidad del comportamiento de los usuarios de un servicio.

Los semiórdenes son una de las estructuras más usadas para establecer sistemas de preferencias más ajustados a un comportamiento racional. Los semiórdenes surgen si se considera un umbral q de diferencia entre las valoraciones de las alternativas para descartar la indiferencia entre ellas. Dado el umbral de indiferencia q, dos alternativas a y b son indiferentes si la diferencia entre sus valoraciones no alcanza el umbral

$$a \sim b \text{ si y sólo si } |g(a) - g(b)| < q.$$

En los sistemas de ayuda a la decisión las simplificaciones en la construcción de un modelo, el hecho de que las alternativas a veces son proyectos que tienen aspectos impredecibles, las herramientas empleadas para medir las funciones, las evaluaciones imprecisas y las ambigüedades son entre otras las causas que llevan a la pérdida de precisión. Por ello el uso de los semiórdenes es una herramienta que encaja de forma muy natural en estos sistemas. Los sistemas ELECTRE III (Roy y Bouyssou, (1993)) y MACBETH (Bana e Costa y Vansnick, (1994)) usan semiórdenes para los criterios o para las categorías de preferencias entre dos elementos.

Los semiórdenes tienen distintas representaciones: matrices, grafos, intervalos. Estas representaciones facilitan el tratamiento formal y práctico de los modelos que utilizan este tipo de estructuras.

1.1.4. Problemas de Localización mediante votos.

Los modelos de localización mediante votos surgen al abordar los servicios de interés público donde la localización del servicio se interpreta como el resultado de una decisión colectiva. Cada miembro del grupo o colectivo defiende sus propios intereses. Por tanto es necesario buscar un acuerdo, un compromiso entre los usuarios. La aplicación de las reglas democráticas hace que una localización no sea aceptada si la mayoría de los usuarios están en contra de esa localización porque prefieren otra alternativa. Si se establecen las preferencias de los usuarios a través de las comparaciones por pares una solución sería una localización tal que ninguna otra sea preferida por una mayoría de usuarios. Normalmente la mayoría necesaria para rechazar un servicio por preferir otro se suele tomar como la mitad de los usuarios y se considera que cada usuario prefiere el servicio lo más cerca posible; por tanto, se busca una localización tal que no haya otra más próxima a la mitad de los usuarios. Las localizaciones que cumplen estos criterios se denominan puntos de Condorcet.

Sin embargo, dado que la existencia de soluciones *de Condorcet* no puede ser garantizada se han estudiado varios tipos de relajaciones de las condiciones de Condorcet. Así, al restringir el conjunto de localizaciones comparadas se obtienen soluciones locales y al aumentar el número de usuarios necesarios para rechazar una localización se obtienen las soluciones *de Simpson*. La propuesta de la solución tolerante de Condorcet realiza la relajación de las condiciones de Condorcet al contemplar un umbral para que dos propuestas de solución sean indiferentes para un usuario.

Otras modificaciones como, asignar probabilidades de que los usuarios acudan a un servicio u otro que da lugar a las soluciones βCondorcet, implican incluso condiciones más fuertes y por tanto dificultan aún más la existencia de soluciones no rechazables. Si en la condición de Simpson, en la que se considera una mayoría de rechazo distinta de la mitad de los usuarios para rechazar una propuesta de solución, se contempla que esa mayoría pueda ser menor se tienen las soluciones γCondorcet que es más difícil de que existan. Las denominadas *soluciones plurales* surgen al sustituir la mayoría absoluta por una mayoría simple como condición para rechazar una propuesta. Una propuesta es una solución plural si no existe una alternativa tal que hay más usuarios que prefieran la alternativa a la propuesta. Dado que se ignoran los usuarios indiferentes entre la propuesta y su alternativa esta condición es más exigente que la de la solución de Condorcet.

Otro de los focos de interés en la localización mediante votos ha sido estudiar su relación con otros enfoques como los clásicos de la mediana y el centro donde prima otro tipo de cuestiones. Así se ha tratado de determinar el grado de optimalidad de las soluciones obtenidas mediante un proceso de votación, como las soluciones de Condorcet, respecto a otros criterios habituales: minimizar la suma de distancias de los usuarios a los servicios y minimizar la máxima distancia de un usuario al servicio más próximo a él.

En los modelos originales, los servicios son deseables, es decir, cada usuario es un votante que desea tener el servicio lo más cerca posible. En la presente memoria se analizan también los modelos en los que ocurre al contrario; cada usuario desea tener el servicio lo más lejos posible. Este tipo de problemas se denomina problemas de localización de servicios no deseables aunque se trate siempre de servicios que son necesarios para los usuarios por lo que su ubicación es deseable, aunque los usuarios las prefieran lo más alejadas posible. Otra de las modificaciones contempladas en la presente memoria consiste en la selección de un conjunto de localizaciones para el servicio.

La localización mediante votos tiene también relación con la localización competitiva. La *localización competitiva* estudia básicamente la localización de servicios de dos o más empresas que compiten entre sí por captar a los usuarios o clientes. En este tipo de localización se tienen en cuenta las preferencias de los usuarios para calcular la cuota de mercado captada por cada una de las empresas y se aplican conceptos de teoría de juegos no cooperativos.

Los primeros trabajos dedicados a problemas de localización mediante votos se dedican a la formulación de los primeros modelos, a proponer soluciones y a determinar los puntos que pueden ser candidatos a ser solución de dichos problemas. Los primeros en plantear un problema de la localización mediante votos en redes fueron Hansen y Thisse (Hansen y Thisse, (1981)). Proponen como soluciones la solución plural tal que ningún otro punto es preferido a éste por un número mayor de usuarios, la solución de Condorcet tal que no haya una mayoría de usuarios que prefiera otro punto, y la solución de Simpson tal que el número de usuarios que prefieren otro punto es el menor posible. La solución de Condorcet se basa en el criterio de votación propuesto por el marqués de Condorcet. La solución de Simpson se basa en la propuesta de criterio de votación de Simpson (Simpson, (1969)). En (Hansen y Thisse, (1981)) se demuestra también que si el número de usuarios es impar las soluciones de Condorcet si existen estarán situadas en los vértices. En (Rushton, McLafferty y Ghosh, (1981)) se realiza una discusión intuitiva de los procesos de votación en el análisis de localización.

Otro de los focos de interés en estos temas ha sido la comparación con las soluciones propuestas por otros criterios. En (Bandelt, (1985)) se establecen las condiciones que debe cumplir una red para que el conjunto de soluciones de Condorcet coincida con el de medianas. En (Labbé, (1985)) se calcula la mejor cota para comparar los puntos de Condorcet con las medianas en términos de la suma de las distancias a todos los usuarios. También se estudian los puntos de Condorcet en los ciclos y las redes simples. En (Bandelt y Labbé, (1986)) se comparan los puntos de Condorcet con las medianas. En (Hansen, Thisse y Wendell, (1986)) se estudian condiciones para que existan soluciones plurales que sean a la vez medianas. Además en dicho trabajo se establece que en los árboles las soluciones plurales, las soluciones de Condorcet y las de Simpson coinciden. También demuestran que en las redes en general coinciden las soluciones locales plurales, las soluciones locales de Condorcet y las soluciones locales de Simpson. Finalmente Hansen y Labbé (Hansen y Labbé, (1988)) aportan un algoritmo polinomial para el cálculo de los puntos de Condorcet. Un review de algunos de estos resultados se puede encontrar en (Hansen, Thisse y Wendell, (1990)).

Se han considerado algunos modelos derivados de los modelos estándares. (Vohra, (1989)) plantea un tipo distinto de votación asignando a los usuarios pesos en función de las potencias de las distancias. En (Labbé, (1990)) se estudian las soluciones de Condorcet para los servicios no deseables y se plantea el uso de un umbral para la indiferencia. Y en (Bauer y Domschke, (1993)) se introducen probabilidades de uso de los servicios por parte de los usuarios.

Otra serie de trabajos relacionan la localización competitiva y la localización mediante votos en redes. Así, en (Wendell y McKelvey, (1981)) los autores estudian la localización competitiva en redes y definen el concepto de solución plural. También en (Hakimi, (1983)) se estudia en redes la localización de los servicios de dos firmas que compiten entre sí. Las soluciones de Nash en localización competitiva resultan ser una pareja de soluciones plurales. Asi mismo cuando no hay usuarios indiferentes entre los elementos de la pareja que forma una solución de Stackelberg entonces la localización del lider es una solución de Simpson. Los puntos de Simpson son también denominados (1/1)-centroides.

También han aparecido diversos modelos de localización mediante votos en localización continua aportando varios resultados sobre la existencia de puntos de Condorcet y sobre la determinación de los puntos de Simpson en espacios continuos. Algunos trabajos sobre este tema en localización continua son los siguientes. (Demange, (1982) y (1983)) estudia la existencia de soluciones de Condorcet con las normas l_p en el plano dando condiciones para su existencia y contraejemplos, también demuestra que siempre existe un punto de Condorcet en el plano con la norma bloque de dos direcciones (la norma l_1 después de un cambio de coordenadas). (Durier, (1989)) da un algoritmo para obtener el conjunto de puntos de Simpson en el plano con una norma bloque. (Carrizosa, Conde, Muñoz y Puerto, (1993a), (1993b) y (1993c)) son tres documentos de trabajo en los que añaden a los problemas anteriores restricciones convexas cerradas. En uno de ellos estudian los puntos de Condorcet con la métrica de Manhattan l_1 y demuestran que con las restricciones impuestas siempre existe un punto de Condorcet restringido que además es el más próximo a la proyección del punto de Condorcet en el caso no restringido. Los otros dos estudian los puntos de Simpson en problemas planares con restricciones de localización aplicando un *calibrador (gauge)* y una *S-norma.* Otros artículos que se han planteado la existencia y determinación de puntos de Condorcet y de Simpson en localización continua han sido: (Plott, (1969)), (Wendell y Thorson, (1974)), (McKelvey y Wendell, (1976)), (Kramer, (1977)), (Wendell y McKelvey, (1981)).

Otras publicaciones en las que se tratan aspectos relacionados con la localización mediante votos en el continuo son las siguientes. (Drezner, (1982)) estudia la localización de dos facilidades que compiten en el espacio continuo. (Michelot, (1986)) analiza el conjunto central de Tovey como la menor bola euclídea que intersecta a todos los hiperplanos mediana. En (Tovey, (1992)) se da un algoritmo para calcular dicho conjunto con dimensiones fijas. (Owen y Shapley, (1989)) estudia la localización competitiva y establece la definición de punto fuerte como aquel punto que minimiza la probabilidad de ser vencido por un competidor cuya localización es aleatoria. En (Owen, (1995)) en un contexto de juegos espaciales se introduce el concepto de core que, en el caso de que las coaliciones ganadoras tengan más de la mitad de los usuarios, coincide con el concepto de Condorcet. Un review de algunos de estos resultados se puede encontrar en (Plastria, (1995)).

1.2. Notación y definiciones.

En este apartado se exponen las cuestiones más importantes relativas a la notación y terminología utilizada. En primer lugar, se abordan las aspectos formales de los conceptos de la teoría de grafos que se utilizan para formular los modelos de localización sobre grafos o redes. Se describen los aspectos esenciales de la formulación de los modelos clásicos de localización en redes y sobre como se establecen los modelos básicos de localización mediante votos.

Existen divergencias notables en los términos e identificadores empleados para describir el modelo, e incluso en el grado de formalismo, por los distintos autores. Se ha tratado de adoptar la notación y las definiciones más apropiadas en cada caso pero procurando no desviarse de las más frecuentemente utilizadas en la literatura especializada. En caso necesario se insistirá en los términos y conceptos utilizados en cada uno de los apartados en que sean utilizados.

1.2.1. Modelos de Redes.

Redes y grafos son dos términos usuales para referirse a la estructura formal que representa, entre otros contextos, las vias de comunicación utilizadas por usuarios de un servicio. El término *grafo* o *red* hace referencia a la estructura de comunicación, compuesta por elementos puntuales llamados *vértices*, *nodos* o *puntos* de la red, y elementos lineales y continuos llamados *aristas*, *arcos* o *ejes*. Sin embargo, la diferencia entre el término *grafo* y *red* radica en que el segundo tiene una clara conotación física de un sistema de comunicación (susceptible de medida) que no siempre es atribuida al primero donde lo relevante es la relación existente entre sus elementos. Por tanto, parece más razonable utilizar el término grafo para la estructura formada por vértices y aristas y denominarla red cuando se contempla algún tipo de medida (generalmente *longitud*) sobre las aristas. No obstante, se podrán aplicar a una red conceptos relativos a un grafo, interpretándose que se refiere al grafo que soporta a la red. Por tanto la estructura representada por un *grafo* que relaciona vértices y aristas se completa para formar una **red** con una medida de la magnitud de las aristas llamada *longitud* que puede representar, además de su tamaño, el consumo de recursos al recorrerlas.

Las definiciones de los términos más usuales se exponen a continuación. Definimos un grafo por:

Definición

> *Un **grafo** G es una estructura formada por un conjunto de puntos llamados **vértices** V, y un conjunto de **aristas** A, donde cada arista es un conjunto lineal y contínuo de puntos de los que sus dos extremos (y sólo estos) son vértices.*

Sin embargo, definimos una red por:

Definición

> *Una **red** N es un sistema de comunicación constituido por un grafo G y una medida sobre sus aristas l denominada **longitud** (generalmente una cantidad real y no negativa).*

Algunas de las características más relevantes, tanto de los grafos como de las redes, son las siguientes.

Se dice que el grafo o la red es conexa cuando no se puede separar en dos partes sin conexión entre ellas.

Definición

> *Un grafo o una red es **conexa** si para cualquier partición del conjunto de vértices en dos conjuntos no vacíos siempre existe alguna arista que conecta un vértice de uno de ellos con algún vértice del otro.*

Aunque la cantidad de elementos puede considerarse no finita en la presente memoria sólo se consideran conjuntos finitos de vértices y aristas.

Definición

*Una red o un grafo es **finito** si el número de vértices y de aristas es finito.*

Las aristas representarán vias de comunicación que pueden recorrerse en uno o los dos sentidos según el caso que se trate de modelizar.

Definición

*Una arista es **dirigida** si sólo se puede recorrer en uno de los dos sentidos.*

*Una arista es **no dirigida** si se puede recorrer en ambos sentidos.*

Los grafos o redes serán dirigidas o no según contemplen aristas de uno u otro tipo.

Definición

*Una red es **dirigida** si sólo hay aristas dirigidas.*

*Una red es **no dirigida** si sólo hay aristas no dirigidas.*

*Una red es **mixta** si hay aristas dirigidas y no dirigidas.*

Algún tipo de aristas puede presentar cierto tipo de multiplicidad, porque los extremos de una arista coinciden en uno sólo o porque coinciden los dos extremos de dos aristas distintas.

Definición

*Se llama **bucle** a una arista que une un vértice consigo mismo.*

Definición

*Un grafo no tiene **aristas múltiples** si dado cualquier par de vértices existe entre ellos a lo sumo una arista.*

A partir de estos conceptos podemos establecer formalmente el modelo particular de red general que se considera en la presente memoria y sobre la que se definirán los problemas de localización mediante votos.

Definición

> *Una* ***red general*** *N está constituida por un grafo $G = (V, A)$ conexo, finito, no dirigido, sin bucles ni aristas múltiples donde V es el conjunto de vértices y A es el conjunto de aristas y por una función de longitud positiva $l : A \to \Re$; se denota por $N = (G, l)$*

Por tanto N denotará una red conexa, no dirigida, sin bucles ni aristas múltiples, y con conjuntos de vértices V y de aristas A finitos y longitudes l positivas.

Para denotar el número de elementos, tamaño o cardinal de un conjunto C adoptamos la expresión $|C|$. La notación estándar de la teoría de grafos implica denotar al número de vértices de la red por $|V| = n$ y al número de aristas de la red por $|A| = m$, sin embargo reservaremos estas letras para denotar otros elementos del modelo de localización mediante votos.

Un vértice se denota generalmente por v o por v_i y una arista por $[u, v]$ o por $[v_i, v_j]$. Por $[v_i, v_j]$ se denota a la (única) arista (conjunto lineal y continuo de puntos) de A que une los vértices v_i y v_j de V. La longitud de una arista $[v_i, v_j]$ es una cantidad positiva que se denota por $l(v_i, v_j)$ independientemente de que sea dirigida o no y del orden en que aparezcan los dos vértices v_i y v_j denominados *extremos* de la arista.

El modelo de una red general N se interpreta como un espacio totalmente constituido por *puntos*; un número finito de ellos son vértices y pueden pertenecer a más de una arista (a todas las que lo unen a otro vértice) pero el resto sólo forman parte de una arista y se dice que son puntos interiores. Un punto x de la red N puede ser un vértice o un *punto interior* a una arista. Cada arista $[v_i, v_j]$ está constituida por un conjunto lineal y continuo entre sus dos puntos extremos v_i y v_j que son los únicos que son vértices; el resto son puntos interiores a la arista.

Un punto de una arista se identifica por la arista que lo contiene y por la magnitud de las dos partes en que divide a la arista. Si ambas partes son de magnitud no nula el punto es interior a ella, pero si es un vértice una de las partes es de magnitud nula.

Definición

> *Para cualquier artista $[v_i, v_j] \in A$ y $0 \leq \theta \leq l(v_i, v_j)$ se denota por $x = p([v_i, v_j], \theta)$ al* ***punto*** *de $[v_i, v_j]$ tal que la longitud del trozo de arista que une x con v_i es θ.*

Por tanto, cada arista $[v_i, v_j]$ como conjunto de puntos, es:

$$[v_i, v_j] = \{x = p([v_i, v_j], \theta) : 0 \leq \theta \leq l(v_i, v_j)\}.$$

El punto $x = p([v_i, v_j], \theta)$ se dice que está situado a una distancia θ de v_i. Los *extremos* de la arista $[v_i, v_j]$ son los puntos $v_i = p([v_i, v_j], 0)$ y $v_j = p([v_i, v_j], l(v_i, v_j))$; los demás son puntos interiores a $[v_i, v_j]$ (no vértices), denotados por:

$$I([v_i, v_j]) = \{x = p([v_i, v_j], \theta) : 0 < \theta < l(v_i, v_j)\}.$$

Definición

*El punto x de la red N se dice que es un **punto interior** a la arista $[v_i, v_j]$ si $x = p([v_i, v_j], \theta)$ con $0 < \theta < l(v_i, v_j)$.*

Algunos autores utilizan un parámetro entre 0 y 1 para especificar el punto de la arista de forma que $x = q([v_i, v_j], t)$ representaría el punto que deja un proporción t de la arista $[v_i, v_j]$ entre x y v_i. Por tanto, la equivalencia viene establecida por la relación $\theta = t \cdot l(v_i, v_j)$.

El conjunto de puntos de la red se denota también por N por lo que denotaremos $x \in N$. Entonces son válidas las expresiones:

$$N = \bigcup_{[v_i, v_j] \in A} [v_i, v_j] = V \cup I$$

donde V e I son los conjuntos (disjuntos) de vértices y puntos interiores dados por:

$$\begin{aligned} V &= \{x \in N : x = p([v_i, v_j], \theta), \theta \in \{0, l(v_i, v_j)\}, [v_i, v_j] \in A\}. \\ I &= \{x \in N : x = p([v_i, v_j], \theta), 0 < \theta < l(v_i, v_j), [v_i, v_j] \in A\}. \end{aligned}$$

Dos puntos de una misma arista (que pueden ser vértices) determinan un subconjunto de puntos de la arista entre ellos denominado *subarista*. Una subarista puede ser *abierta* o *cerrada* según que se considere que los puntos que la definen, y están situados en sus extremos, se incluyan, aunque normalmente se consideran incluidos.

Definición

*Dados dos puntos $x = p([v_i, v_j], \theta_x)$ e $y = p([v_i, v_j], \theta_y)$ con $\theta_x \leq \theta_y$, la **subarista** $[x, y]$ se define como*

$$[x, y] = \{z = p([v_i, v_j], \theta) : \theta_x \leq \theta \leq \theta_y\}.$$

El concepto de subarista abierta es similar y, en caso de ser necesaria la distinción, se puede hablar de la subarista entre x e y abierta en y que viene dada por:

$$[x, y) = \{z = p([v_i, v_j], \theta) : \theta_x \leq \theta < \theta_y\}.$$

Análogamente se puede hablar de las subaristas $(x, y]$ y (x, y). Además se pueden usar subaristas desplazadas como $[x + \theta_0, y]$, dadas para cada θ_0, por:

$$[x + \theta_0, y] = \{z = p([v_i, v_j], \theta) : \theta_x + \theta_0 \leq \theta \leq \theta_y\}.$$

Se usarán subaristas desplazadas abiertas por la derecha o por la izquierda con valores positivos y negativos de θ_0.

Consecuentemente con esta definición, dados dos puntos $x = p([v_i, v_j], \theta_x)$ e $y = p([v_i, v_j], \theta_y)$ de la arista $[v_i, v_j]$ con $\theta_x \leq \theta_y$ se denota a la longitud de la subarista $[x, y]$ por $l(x, y) = \theta_y - \theta_x$. En particular, la longitud de la subarista $[v_i, x]$ es $l(v_i, x) = \theta_x$ y la de la subarista $[x, v_j]$ es $l(x, v_j) = l(v_i, v_j) - \theta_x$.

Los *caminos* en una red corresponden a las secuencias de recorridos para acceder desde un punto a otro haciendo uso de las vías de comunicación representadas. Aunque cabe la posibilidad de contemplar caminos que repitan algún punto es formalmente conveniente adoptar una definición que los excluya sin que ello suponga pérdida de generalidad.

Definición

> *Una ruta o **camino** entre dos puntos cualesquiera de la red x e y, no necesariamente vértices, es una secuencia conexa minimal de aristas y subaristas que contienen a los puntos x e y.*

Un camino cualquiera $P(x, y)$ entre x e y viene representado por:

$$P(x, y) = ([x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{k-1}, x_k])$$

donde $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, ..., k$, es una arista o subarista de la red, $x = x_0$, $y = x_k$ y $k \geq 0$ (si $k = 0$ es un camino vacío y si $k = 1$ el camino está constituido sólo por la arista o subarista $[x, y]$). La magnitud del camino o la cantidad de recursos consumida al recorrerlo vendrá dado por la suma de las de las aristas o subaristas que lo componen.

Definición

> *La **longitud de un camino** es la suma de las longitudes de las aristas y subaristas que lo forman.*

Por tanto, la longitud del camino $P(x, y) = ([x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{k-1}, x_k])$ entre los puntos x e y es:

$$l(P(x, y)) = \sum_{i=1}^{k} l(x_{i-1}, x_i).$$

En general existirán varios caminos entre dos puntos arbitrarios de la red pero al tratar de acceder desde uno al otro se elegirá el que tenga menor longitud, llamado camino *mínimo* o camino *más corto* entre ellos.

Definición

> *Se dice que un camino entre x e y es un* ***camino mínimo*** *si la longitud es mínima entre todos los caminos que los unen.*

Un camino mínimo entre los puntos x e y se denota por $P^*(x, y)$.

El concepto fundamental en la teoría de la localización es el de distancia, interpretada fundamentalmente como una medida de la cantidad de recursos consumidos al desplazarse de un punto a otro del espacio. Se denomina *distancia* entre dos puntos x e y de la red a la longitud de un camino mínimo $P^*(x, y)$ entre ellos. El estudio de las propiedades de la distancia es crucial al analizar cualquier problema de localización y los correspondientes métodos de solución.

Definición

> *Se define la* ***distancia entre dos puntos*** *x e y de la red N, denotada $d(x, y)$, como la longitud de cualquier camino mínimo de x a y.*

Esta distancia d definida sobre el conjunto de puntos de la red N es una métrica y se cumple:

1. $d(x, x) = 0, \forall x \in N$ (no negatividad).

2. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in N$ (simetría).

3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z), \forall x, y, z \in N$ (desigualdad triangular).

A partir de este concepto matemático sobre el espacio de los puntos de la red, que le da estructura de espacio métrico compacto, se pueden utilizar diversas herramientas formales topológicas que son útiles para el análisis riguroso de algunas cuestiones relativas a las soluciones de los problemas. Por ejemplo se pueden utilizar los conceptos de entornos o bolas centradas en un punto de la red.

Definición

Dado un punto $x \in N$ y una cantidad arbitraria $\varepsilon > 0$, se llama ***bola*** *de centro x y radio ε al conjunto $B(x, \varepsilon)$ de los puntos que están a una distancia de x menor o igual que ε;*

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in N : d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Algunos conceptos importantes en los problemas de localización se establecen en términos de puntos donde se dan ciertas igualdes o equilibrios entre distancias y longitudes. En la literatura especializada han recibido diferentes denominaciones como centros locales, cuellos de botella, puntos de equilibrio, etc. Uno de los más importantes es el siguiente.

Definición

Se dice que $x \in N$ es el ***punto cuello de botella*** *para el vértice $v \in V$ en la arista $[v_k, v_l] \in A$ si*

$$d(v, v_l) + d(v_l, x) = d(v, x) = d(v, v_k) + d(v_k, x).$$

Se denota por B al conjunto de puntos cuello de botella de la red. El cardinal del conjunto B es a lo sumo $|V||A|$ ya que cada vértice v puede determinar como mucho un punto cuello de botella en cada arista $[v_k, v_l]$.

Si denotamos por $b_{kl}^i = p([v_k, v_l], \theta_{kl}(i))$ al cuello de botella determinado por el vértice v_i en la arista $[v_k, v_l]$ entonces, por definición de punto cuello de botella, la distancia $d(v_i, b_{kl}^i)$ tiene que ser la misma a través de v_k que a través de v_l, por tanto

$$\begin{aligned} d(v_i, b_{kl}^i) &= d(v_i, v_k) + \theta_{kl}(i). \\ d(v_i, b_{kl}^i) &= d(v_i, v_l) + [l(v_k, v_l) - \theta_{kl}(i)]. \end{aligned}$$

Igualando estas dos ecuaciones y despejando se obtiene el valor de $\theta_{kl}(i)$:

$$\theta_{kl}(i) = \frac{1}{2}(l(v_k, v_l) - d(v_i, v_k) + d(v_i, v_l)).$$

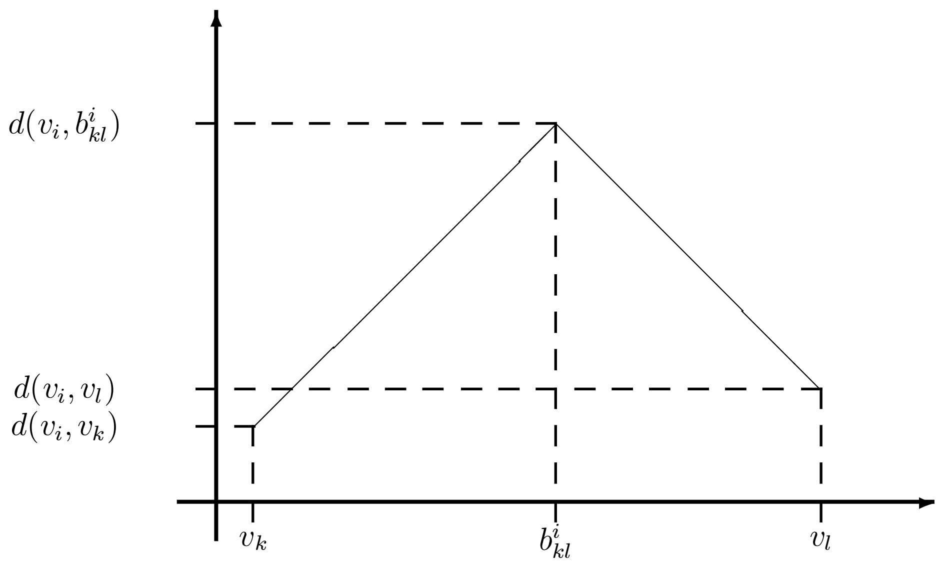
El valor de $\theta_{kl}(i)$ es un parámetro que varía entre 0 y $l(v_k, v_l)$ y da la posición del punto cuello de botella b_{kl}^i en la arista $[v_k, v_l]$.

Si de la fórmula se obtiene un valor $\theta_{kl}(i) = 0$ o $\theta_{kl}(i) = l(v_k, v_l)$ significa que el vértice v_i no tiene cuello de botella en la arista $[v_k, v_l]$. Por otro lado,

- Si $d(v_i, v_k) < d(v_i, v_l)$ entonces $\theta_{kl}(i) > l(v_k, v_l)/2$ y el punto cuello de botella está más cerca de v_l que de v_k.

- Si $d(v_i, v_k) > d(v_i, v_l)$ entonces $\theta_{kl}(i) < l(v_k, v_l)/2$ y el punto cuello de botella está más cerca de v_k que de v_l.

La figura muestra la relación entre los cuellos de botella y el comportamiento de la distancia de un punto de la arista $[v_k, v_l]$ al vértice v_i. La distancia de v_i a los puntos de la arista es creciente en $[v_k, b^i_{kl})$ y decreciente en $(b^i_{kl}, v_l]$ en términos de la distancia v_k.



Función de distancias del vértice v_i a los puntos de la arista $[v_k, v_l]$

Teorema

Sea v_i un vértice arbitrario de la red N y sea x un punto de la arista $[v_k, v_l] \in A$; $x = p([v_k, v_l], \theta)$. Entonces la función de distancia desde el vértice v_i al punto x de la arista $[v_k, v_l]$ es una función de θ continua y cóncava en $[0, l(v_k, v_l)]$. Es linealmente creciente con pendiente $+1$ en el intervalo $[0, \theta_{kl}(i))$ y linealmente decreciente con pendiente -1 en $(\theta_{kl}(i), l(v_k, v_l)]$ siendo

$$\theta_{kl}(i) = \frac{1}{2}(l(v_k, v_l) - d(v_i, v_k) + d(v_i, v_l)).$$

Una serie de conceptos relativos a la *estructura* de la red hacen referencia a los aspectos que relacionan los distintos elementos que la componen; especialmente vértices, puntos y aristas.

Definición

Se dice que un vértice v_i es ***adyacente*** *a otro vértice v_j en la red N si y sólo si*

$$[v_i, v_j] \in A.$$

Más en general, se puede decir que dos puntos son adyacentes si existe una arista o subarista que los une. Para cualquier punto x, sea vértice o no, $\Gamma(x)$ denota el conjunto de vértices adyacentes a x; si x es un punto interior $\Gamma(x)$ está constituido por los dos extremos de la arista que lo contiene, pero si es un vértice puede ser un conjunto de vértices de cualquier tamaño finito.

Un punto z se dice que está entre los puntos x e y si pertenece a algún camino mínimo entre ellos. Usando la distancia se define equivalentemente este concepto de la forma siguiente.

Definición

Se dice que un punto $z \in N$ está ***entre dos puntos*** *x e y si*

$$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y).$$

Se denota por $E(x, y)$ al conjunto de puntos que están entre x e y y que es la unión de todos los caminos mínimos entre ellos.

En algunos casos es conveniente restringirse a parte del espacio de localización manteniendo el mismo tipo de estructura. En el caso de las redes, este es el concepto de subred.

Definición

Una red N' con conjunto de vértices V', conjunto de aristas A' y longitudes l', se dice que es una ***subred*** *de la red N con conjunto de vértices V, conjunto de aristas A y longitudes l si:*

$$\begin{aligned} V' &\subseteq V. \\ A' &= \{[v_i, v_j] \in A : v_i, v_j \in V'\}. \\ l' &= l|_{A'}. \end{aligned}$$

donde $l|_{A'}$ denota la función l restringida al conjunto A'; es decir

$$l|_{A'}(v_i, v_j) = l(v_i, v_j), \forall [v_i, v_j] \in A'.$$

Algunos tipos de *redes sencillas* permiten establecer resultados específicos que facilitan la resolución de los problemas de localización en ellas. La red más sencilla es la constituida por una sóla arista. Los problemas de localización en una recta o segmento han recibido cierta atención porque permiten establecer propiedes importantes que pueden posteriormente extenderse a redes cada vez más complejas. El modelo correspondiente a este caso es el de una red constituida exclusivamente por un camino.

A un camino cuyo primer y último vértice coinciden se le llama *ciclo*. También nos podemos referir a un *ciclo* como a un tipo de red que está constituida exclusivamente por un ciclo.

Definición

Una red N es un ***ciclo*** *si el conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y el conjunto de aristas es:*

$$A = \{[v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_2, v_3], ..., [v_{n-1}, v_n], [v_n, v_1]\}.$$

Por otro lado, son muy importantes todos los problemas planteados en redes en los que no se presentan caminos de tipo ciclo; principalmente porque en estas redes los caminos entre dos vértices son únicos. Estas redes se denominan árboles.

Definición

Se dice que una red es un ***árbol*** *si para cualquier par de puntos existe un único camino que los une.*

Usualmente se denota por T a un árbol. Los conceptos de vértices hoja y diámetro, aunque aplicables a cualquier tipo de red, son especialmente importantes en el caso de los árboles. Una *hoja* es un vértice que pertenece a una sóla arista (se dice que tiene grado 1) y el *diámetro* de la red es el camino mínimo de mayor longitud.

Definición

Un vértice de una red es un ***vértice hoja*** *si sólo tiene un vértice adyacente.*

Se denota por H el conjunto de vértices hoja.

Definición

> *El **diámetro** de una red es el camino mínimo entre dos puntos de máxima longitud.*

Por tanto, si denotamos por

$$\delta = \max\{d(x,y) : x, y \in N\} = d(x^*, y^*)$$

un diámetro es un camino mínimo entre x^* e y^*; es decir un camino de $P^*(x^*, y^*)$.

En un árbol, un diámetro es un camino de máxima longitud y siempre une dos vértices hoja. En los árboles no existen puntos cuello de botella ya que no hay ciclos. Al no haber ciclos no puede haber un camino desde el usuario al punto cuello de botella pasando por un vértice adyacente v_i y otro camino que vaya desde el punto cuello de botella pasando por otro vértice adyacente distinto hasta el usuario ya que habría un ciclo lo que es absurdo.

Un tipo de red que combina los conceptos de ciclo y árbol es el denominado *cactus* o red *simple* que tiene una especial importancia en algunos problemas de localización mediante votos. La apariencia de un cactus es la misma que la de un árbol donde las aristas son sustituidas por ciclos.

Definición

> *Se dice que una **red** N es **simple** o que es un **cactus** si y sólo si la intersección de dos ciclos cualesquiera de esa red es vacía o sólo es un vértice.*

Tanto los árboles como los ciclos son casos particulares de redes simples.

1.2.2. Problemas estándares de Localización.

Un problema de localización consiste en seleccionar un punto o conjunto de puntos de un *espacio* que, verificando ciertas restricciones, optimice alguna función en la que intervienen distancias a puntos del espacio. Los problemas de localización de servicios se pueden formular en diversos espacios que representan un modelo de la realidad que se intenta analizar. En los modelos estándares de localización simple se trata de elegir un único punto de un conjunto de puntos de posible *localización* L en relación a las distancias a un conjunto U de *usuarios* ubicados en puntos del mismo espacio. En esta memoria se consideran problemas de localización definidos sobre el espacio constituido por los puntos de una red N.

El conjunto de usuarios U, en función de cuya ubicación se establece la calidad de la localización seleccionada, es un conjunto de puntos de la red; $U \subseteq N$. El número de usuarios se considera siempre finito y se representa por $|U|$. En los problemas estándares de localización en redes se considera que los usuarios están situados en vértices; en caso contrario se modifica la red considerando a las ubicaciones de los usuarios no situados en vértices como nuevos vértices de la red. Esta operación, que facilita la descripción de los resultados y los procedimientos de solución de los problemas, se puede realizar formalmente por la inserción de un punto en la red y no supone una alteración significativa del modelo. Si en cada vértice sólo puede estar un usuario se identifican los usuarios con los respectivos vértices y se puede denotar $U \subseteq V$. En el caso básico se toma $U = V$. Sin embargo en el modelo estándar varios usuarios pueden estar situados en un mismo vértice.

Se denota por $u \in U$ a un usuario cualquiera y por $v(u) \in V$ al vértice en el que está situado el usuario u. Puede ocurrir que $v(u) = v(u')$ con $u \neq u'$. Por tanto v representa una aplicación de U en V; $v : U \longrightarrow V$. Se denota por $U(v_i)$ al conjunto de usuarios que están situados en el vértice v_i;

$$U(v_i) = \{u \in U : v(u) = v_i\}.$$

Entonces se denomina peso del vértice v_i al número de usuarios que se encuentran en ese vértice y se denota w_i;

$$w_i = |U(v_i)|.$$

Se puede suponer sin pérdida de generalidad que todos los usuarios tienen la misma importancia en la decisión que se va a tomar. Si la importancia fuera distinta, ésta se podría cuantificar con un *peso* del usuario que se reflejaría en un peso global de cada vértice que es ubicación de usuario. Entonces el peso w_i representaría la suma de los pesos de los usuarios de $U(v_i)$. Si en un vértice no existe ningún usuario el peso sería nulo; $w_i = 0$. Si se considera que el peso de todos los usuarios es de una unidad entonces el peso de cada vértice viene dado por el número de usuarios ubicados en dicho vértice.

El conjunto L de las localizaciones posibles es generalmente el de todos los puntos de la red o el de todos los vértices de la red. En el *modelo continuo estándar* sobre una red es $L = N$. Sin embargo, se pueden considerar problemas donde se debe establecer el servicio en un subconjunto de puntos, finito o no; $L \subset N$. Si este conjunto de puntos es finito se denomina *modelo discreto* y se considera que todos son vértices, $L \subseteq V$. Si un punto de posible localización del servicio no es vértice sino que es interior a una arista se pueden inserta como nuevos vértices de la red. En el *modelo discreto estándar* el conjunto de posibles localizaciones es el conjunto de todos los vértices; $L = V$. En otros casos, por restricciones del modelo o porque el análisis permite descartar trozos de aristas o subaristas, el conjunto L de posibles ubicaciones estaría constituido por un conjunto de aristas, subaristas o puntos aislados.

Los *problemas clásicos* estándares simples en la Teoría de la Localización son los problemas de la *mediana*, del *centro* y, como combinación de ellos, el problema del *centdian*. Se dicen *simples* a los problemas consistentes en localizar un sólo punto frente a los problemas *múltiples* en los que se localizan varios puntos. El problema de la mediana consiste en hallar el punto de localización que minimice la suma de las distancias a los usuarios, el problema del centro consiste en hallar el punto de localización que minimice la máxima distancia a los usuarios y el problema del centdian consiste en hallar el punto de localización que minimice una combinación lineal convexa de las cantidades anteriores.

El *problema de la mediana* o problema de *Weber* en una red consiste en hallar la localización de un servicio sobre una red de forma que minimice la distancia media de los usuarios situados en la red al servicio, o lo que es lo mismo, que minimice la suma de las distancias de los usuarios al servicio. Entonces, $\forall x \in N$, la calidad de la solución propuesta se calcula como la media o la suma de las distancias a los usuarios. Estas cantidades son, respectivamente:

$$\frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} d(v(u), x) \quad \text{y} \quad \sum_{u \in U} d(v(u), x).$$

Por tanto, la diferencia entre ambas posibilidades consiste simplemente en un factor multiplicativo por lo que las soluciones de los problemas serían las mismas. Por simplicidad se toma como función objetivo estándar a minimizar en el problema de la mediana, la suma de las distancias a todos los usuarios dada por:

$$F(x) = \sum_{u \in U} d(v(u), x) = \sum_{v_i \in V} d(v_i, x) w_i.$$

Los puntos que constituyen las soluciones del problema se llaman *medianas*.

Definición

Se dice que un punto $x \in N$ es una ***mediana*** *de U en la red N si y sólo si,*

$$F(x) \leq F(y), \forall y \in N.$$

Por M se denotará al conjunto de medianas de la red. Para cualquier red siempre existe una mediana; $M \neq \emptyset$.

Proposición *(Hakimi, (1964)).*

> *Siempre existe una mediana que es un vértice;* $M \cap V \neq \emptyset$. *Además si* $|U|$ *es impar todas las medianas son vértices;* $M \subset V$.

El algoritmo usual para el cálculo de la mediana de una red es el algoritmo de Goldman.

Algoritmo de Goldman 1 *(Goldman y Witzgall, (1970))*

Paso 1

Sea $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ el conjunto de vértices del grafo. Inicialmente se toma $k = 0$, $f = F(v_1)$, y $M = \{v_1\}$.

Paso 2

Hacer $k = k + 1$ y calcular $F(v_k)$.

Si $F(v_k) > f$ no se modifican ni f ni M.

Si $F(v_k) = f$ dejar f sin cambiar pero hacer $M = M \cup \{v_k\}$.

Si $F(v_k) < f$ hacer $f = F(v_k)$ y $M = \{v_k\}$.

Si $k < n$ volver a iniciar el paso 2. En otro caso, f es le valor objetivo óptimo.

Paso 3

Si $|U|$ es impar entonces M es el conjunto de medianas de la red y f el valor óptimo.

Si $|U|$ es par entonces, para cada arista $[v_k, v_l]$ de A tal que $v_k, v_l \in M$ hacer lo siguiente.

Tomar el punto medio x_{kl} de $[v_k, v_l]$ y si $F(x_{kl}) = f$ entonces hacer $M = M \cup [v_k, v_l]$.

En el paso 2, determina el valor óptimo de la función objetivo recorriendo todos los vértices y comparando el valor de la función F en ellos. Por tanto se obtienen en M todos los vértices que son medianas. Estas son las únicas medianas en el caso impar. Para el caso par, las medianas que no son vértices son puntos interiores de aristas de forma que todos los puntos de la arista son medianas. Por ello en el paso 3 se consideran las aristas $[v_k, v_l]$ de A tales que v_k y v_l son vértices de M.

La matriz de distancias entre cada par de vértices se obtiene con el conocido algoritmo de Dijkstra en tiempo $O(|V||A|\log|V|)$ y la función F se calcula con $O(|V|)$ operaciones. El número de operaciones del paso 2 es $O(|V|^2)$ y las del paso 3, si $|U|$ es par, son $O(|V||A|)$. Por tanto, en el caso impar el número de operaciones es $O(|V|^2)$ y en el caso par es $O(|V||A|)$. Luego la complejidad del algoritmo de Goldman es $O(|V||A|)$ aunque todo el proceso de obtención de las medianas de la red implica un tiempo $O(|V||A|\log|V|)$.

En ciertos casos se puede determinar una parte de la red que por contener la mayoría de los usuarios debe contener a todas las medianas.

Definición

*Se dice que una subred S de N es **dominante** si*

$$|\{u \in U : v(u) \in S\}| \geq |\{u \in U : v(u) \in N - S\}|$$

Definición

*Se dice que una subred S de N **tiene puente** $p \in N$ si*

$$d(x,p) + d(p,y) = d(x,y), \forall x \in S, \forall y \notin S.$$

Teorema *(Goldman y Witzgall, (1970))*

Si S es una subred dominante y que tiene puentes entonces $S \cap V$ contiene una mediana.

En particular se puede aplicar este resultado a los árboles. Si se particiona un árbol en dos subárboles habrá una mediana en el subárbol de mayor número de usuarios. A partir de aquí se obtiene el siguiente algoritmo.

Algoritmo de Goldman 2 *(Goldman, (1971))*

Paso 1

Para cada vértice v_i sea w_i el número de usuarios en v_i.

Paso 2

Seleccionar un vértice hoja v_k de T.

Paso 3

Si w_k es mayor que $|U|/2$ entonces $M = \{v_k\}$.
Si w_k es igual a $|U|/2$ entonces $M = [v_k, v_l]$.
En otro caso ($w_k < |U|/2$), borrar v_k y la única arista con extremo en v_k. Si $[v_k, v_j]$ es dicha arista hacer $w_j = w_j + w_k$ y volver al paso 2.

En un árbol las distancias se obtienen en tiempo $O(|V|)$ por el algoritmo de Dijkstra. El número de operaciones de este algoritmo es $O(|V|)$. Por tanto las medianas de un árbol se obtienen en $O(|V|)$.

El *problema del centro* o de *Rawl* en una red consiste en determinar el punto de localización del servicio que hace mínima la máxima distancia a un usuario. El tipo de criterio presente en estos problemas de localización, conocidos como problemas minimax, surge de la preocupación por que los usuarios más desfavorecidos estén lo menos alejados posible. La función objetivo a minimizar en el problema del centro es, $\forall x \in N$:

$$G(x) = \max_{u \in U} d(v(u), x) = \max_{w_i > 0} d(v_i, x).$$

Las soluciones al problema se denominan *centros.*

Definición

Se dice que un punto $x \in N$ es un ***centro*** *de U en la red N, si y sólo si*

$$G(x) \leq G(y), \forall y \in N.$$

Por R se denotará al conjunto de centros de la red y por r al valor de la función objetivo que se denomina radio; $r = G(x), \forall x \in R$. Para toda red siempre existe un centro.

Al contrario de lo que ocurre con las medianas, no siempre se encuentra un centro en los vértices, sino que puede estar en ciertos puntos interiores a las aristas en los que se da un equilibrio con respecto a un par de usuarios. Estos puntos en equilibrio son denominados *centros locales.*

Definición

Un punto x interior a una arista es un ***centro local*** *si existen dos usuarios u_i y u_j tales que $d(x, v(u_i)) = d(x, v(u_j))$ y las funciones de distancia a $v(u_i)$ y a $v(u_j)$ tienen en x pendientes opuestas. A la distancia $r = d(x, v(u_i)) = d(x, v(u_j))$ se le llama* ***rango*** *del centro local.*

El conjunto de puntos interiores que son centros locales se denota R_l. Para cualquier arista $[v_k, v_l]$ existe un centro local con respecto al par de usuarios u_i y u_j si (tal vez intercambiando los papeles de u_i y u_j) se cumple:

$$\begin{array}{l} d(v_k, v(u_i)) < d(v_k, v(u_j)) \\ d(v_l, v(u_i)) > d(v_l, v(u_j)) \\ |d(v_k, v(u_i)) - d(v_l, v(u_j))| < l(v_k, v_l). \end{array}$$

Entonces el centro local es el punto $x = p([v_k, v_l], \theta)$ siendo

$$\theta = \frac{1}{2}(d(v_k, v(u_i)) + l(v_k, v_l) - d(v_l, v(u_j))$$

que tiene rango

$$r = \frac{1}{2}(d(v_k, v(u_i)) + l(v_k, v_l) + d(v_l, v(u_j)).$$

Teorema *(Minieka, (1970))*

Si $c \in N$ es un centro de la red entonces $c \in V \cup R_l$.

El algoritmo para el cálculo del centro en una red general propuesto por Minieka (Minieka, (1981)) determina la mejor localización en el interior de cada arista $[v_k, v_l]$ examinando sus centros locales.

Algoritmo de Minieka *(Minieka, (1981))*

Paso 1

a) Para cada arista $[v_k, v_l]$ se ordenan en una lista L los usuarios según su distancia al vértice v_k empezando por el más lejano y terminando por el más próximo. Tomar de la lista L el usuario u_j más alejado de v_k y eliminarlo de L.

b) Mientras la lista L no esté vacía tomar como u_i el primer usuario de la lista L y eliminarlo de L.
Si $d(v_l, v(u_i)) \leq d(v_l, v(u_j))$ volver a iniciar el paso b).
Si $d(v_l, v(u_i)) > d(v_l, v(u_j))$ y $|d(v_k, v(u_i)) - d(v_l, v(u_j))| < l(v_k, v_l)$ entonces el punto $x = p([v_k, v_l]; \theta)$ donde

$$\theta = \frac{1}{2}(d(v_k, v(u_i)) + l(v_k, v_l) - d(v_l, v(u_j))$$

es un centro local y su rango es

$$r = \frac{1}{2}(d(v_k, v(u_i)) + l(v_k, v_l) + d(v_l, v(u_j))$$

Hacer $u_j = u_i$ y volver a iniciar el paso b).

Paso 2

El radio de la red es el menor de los rangos de los centros locales detectados y cualquier centro local donde se haya alcanzado es un centro.

El algoritmo debe empezar una vez obtenida la matriz de distancias entre vértices por el algoritmo de Dijkstra en tiempo $O(|A||V|\log|V|)$. El número de operaciones de este algoritmo es $O(|A||V|\log|V|)$. Por tanto la complejidad de la resolución del problema del centro por el método de Minieka es $O(|A||V|\log|V|)$. Hakimi (Hakimi, (1964)) también propuso un algoritmo de la misma complejidad.

Para un árbol, el algoritmo de Handler proporciona un método mucho más sencillo y eficiente de obtener el centro.

Algoritmo de Handler *(Handler, (1973))*

Paso 1

Elegir un vértice cualquiera v_0 del árbol.

Paso 2

Tomar el usuario u_i más alejado de v_0.

Paso 3

Tomar el usuario u_j más alejado de $v(u_i)$.

Paso 4

El centro c es el punto medio del camino entre $v(u_i)$ y $v(u_j)$.

Dado que las distancias desde un vértice de un árbol a los demás se obtienen en tiempo $O(|V|)$, la complejidad de este algoritmo es $O(|V|)$.

El problema *centdian* resulta de una combinación de los problemas del centro y de la mediana a través de su función objetivo con el propósito de responder a la vez a los criterios que inspiran ambos problemas; optimizar la situación media de los usuarios y la del usuario más perjudicado. El problema *centdian* consiste en hallar la localización del servicio deseable de forma que minimice una combinación lineal entre la suma y el máximo de las distancias de los usuarios al punto de servicio. Sea $0 \leq \lambda \leq 1$, y

$$H(x) = \lambda F(x) + (1 - \lambda)G(x).$$

Definición

*Se dice que un punto $x \in N$ es un **centdian** de U en la red N, si y sólo si*

$$H(x) \leq H(y), \forall y \in N.$$

Se denota D al conjunto de centdianes de una red.

Teorema *(Halpern, (1978))*

Existe un centdian x que es un vértice o un centro local;

$$D \cap (V \cup R_l) \neq \emptyset.$$

A partir de este resultado se propone el siguiente procedimiento rudimentario similar al ,propuesto por Goldman para la mediana.

Algoritmo de Halpern (*Halpern, (1978)*)

Paso 1

Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ el conjunto de vértices y centros locales de la red. Inicialmente se toma $i = 0$, $h = H(x_1)$, y $D = x_1$.

Paso 2

Hacer $i = i + 1$ y calcular $H(x_i)$.
Si $H(x_i) > h$ no se modifican ni h ni D.
Si $H(x_i) = h$ hacer $D = D \cup \{x_i\}$.
Si $H(x_i) < h$ hacer $h = H(x_i)$ y $D = \{x_i\}$.
Si $i < k$ volver a iniciar el paso 2.

Dado que el número de centros locales es de la red es $O(|A||V|^2)$, la complejidad de este algoritmo es $O(|A||V|^3)$.

1.2.3. Modelos de localización mediante votos.

Los modelos de localización mediante votos tratan de reflejar el resultado de la aplicación a la localización de servicios, de los criterios democráticos de decisión basados en las preferencias de los usuarios usando el concepto de mayoría. Se parte de la idea de que son los propios usuarios los que tienen que seleccionar la localización del servicio mediante un proceso de votación de acuerdo a sus preferencias. Las situaciones del contexto de aplicación pueden ser las mismas que otros problemas de localización, como los problemas estándares descritos anteriormente. Por tanto, para establecer los modelos de localización estándar mediante votos en redes se contemplan las mismas circunstancias que las descritas para los problemas clásicos.

Se consideran principalmente dos modelos estándares: un modelo discreto y un modelo continuo. En ambos casos se supone que existe un conjunto finito U de usuarios ubicados en vértices de la red; en el modelo básico hay un usuario en cada vértice y $U = V$. En el modelo discreto el conjunto L de posibles ubicaciones está constituido por vértices y en el modelo continuo está constituido por aristas o subaristas. En los respectivos modelos estándares se considera $L = V$ y $L = N$.

Tradicionalmente se supone que dadas dos localizaciones de un servicio deseable, un usuario prefiere la localización que está situada más cerca de él. En el caso de que dos localizaciones estén a la misma distancia de un usuario, el usuario es indiferente entre las dos y se considera que va a hacer igual uso de ambas. El sistema de preferencias de cada usuario es como sigue. Dos localizaciones x e y son indiferentes para el usuario u situado en el vértice $v(u)$ si $d(v(u), x) = d(v(u), y)$. El usuario u prefiere x a y si $d(v(u), x) < d(v(u), y)$.

Para cada par de localizaciones x e y, sea $|x \prec y|$ el número de usuarios que prefieren x a y; es decir,

$$|x \prec y| = |\{u \in U : d(v(u), x) < d(v(u), y)\}|.$$

El número de usuarios indiferentes entre x e y es

$$|x \sim y| = |\{u \in U : d(v(u), x) = d(v(u), y)\}|.$$

Existen diversos *conceptos* estándares de solución para un problema de localización de un único punto de servicio mediante votos. Estos conceptos se corresponden con las propuestas usuales de soluciones a los problemas de optimización en los que se aplican criterios basados en los métodos de decisión colectiva. La solución de Condorcet, la solución de Simpson y la solución plural son las más usadas. Una localización es una solución de Condorcet si no existe una mayoría estricta de usuarios que prefiera otra localización; donde la mayoría *estricta* se interpreta en términos de más de la mitad de los usuarios. Una localización es una solución de Simpson si es la localización menos objetable; en el sentido de que la cantidad de usuarios que prefieren otra localización es la menor posible. Finalmente, una localización es una solución plural si frente a otra localización alternativa, esta no es preferida por un mayor número de usuarios que la anterior.

No siempre se puede garantizar que exista una solución plural ni una solución de Condorcet. Si se puede garantizar la existencia de una solución de Simpson si el número de usuarios es finito. Si existiera una solución plural esta sería la mejor solución, si no la mejor solución sería una solución de Condorcet si existe. Si ninguna de ambas existe se buscaría una solución de Simpson.

Sea C el conjunto de soluciones de Condorcet, S el conjunto de soluciones de Simpson y P el conjunto de soluciones plurales. Se tiene que $P \subseteq C$. Esto se deduce de que:

$$|x \prec y| + |x \sim y| + |y \prec x| = |U|.$$

Por tanto si $y \in P$ para toda localización x se cumple $|x \prec y| < |x \succ y| = |U| - |x \prec y| - |x \sim y|$. De donde despejando $2|x \prec y| < |U| - |x \sim y| \leq |U|$ y por tanto $|x \prec y| < |U|/2$ para toda localización x. Esto significa que $y \in C$. No siempre se verifica $S \subseteq C$ ni $C \subseteq S$. Pero, si existe solución de Condorcet ($C \neq \emptyset$) entonces $S \subseteq C$.

La aplicación de estos conceptos de solución a la localización de un punto sobre una red N da lugar a los conceptos de punto de Condorcet, punto de Simpson y solución plural en una red. En los trabajos publicados se suele considerar el modelo continuo estándar en el que existe un conjunto finito U de usuarios ubicados en vértices de la red y el conjunto L de posibles localizaciones es toda la red; $L = N$.

Un punto Condorcet es un punto que cumple que no existe ningún otro punto más cercano a una mayoría estricta de usuarios. Dado que $|y \prec x|$ denota el número de usuarios que están más cerca de y que de x y por tanto prefieren a y frente a x se tiene la siguiente definición aparecida en (Hansen y Thisse, (1981)).

Definición *(Hansen y Thisse, (1981))*

Se dice que un punto $x \in N$ es un ***punto de Condorcet*** *si y solo si:*

$$|y \prec x| \leq |U|/2, \forall y \in N.$$

Por C se denotará al conjunto de puntos de Condorcet de la red. En una red cualquiera no se puede garantizar la existencia de un punto de Condorcet, pudiendo ocurrir que $C = \emptyset$. En tal caso, se puede adoptar el concepto de solución de Simpson. Se puede interpretar que un punto no es de Condorcet si llega a ser objetable por una mayoría de usuarios.

$$x \notin C \Longleftrightarrow \exists y \in N : |y \prec x| > |U|/2.$$

Un punto de Simpson es un punto que es menos objetable que cualquier otro; es decir si el número máximo de usuarios que prefieren otro punto es el menor posible. Esta definición fue usada en el contexto de redes por primera vez en (Hakimi, (1983)) aunque en la teoría de la decisión en grupo esta idea se conoce como regla de Copeland.

Definición *(Hakimi, (1983))*

Se dice que un punto $x \in N$ es un ***punto de Simpson*** *si y sólo si:*

$$\max\{|y \prec x| : y \in N\} \leq \max\{|y \prec z| : y \in N\}, \forall z \in N.$$

El valor de $R(x) = \max\{|y \prec x| : y \in N\}$ es la medida de lo objetable que es el punto x y se denomina puntuación de Simpson para el punto x. El punto de Simpson de la red es el que minimiza $R(x)$.

Al contrario que con los puntos de Condorcet, dado que el número de usuarios es finito, siempre existe un punto de Simpson; $S \neq \emptyset$. Además, si $x \in N$ es un punto de Simpson tal que $R(x) \leq |U|/2$ entonces x es un punto de Condorcet; si existe x tal que $R(x) \leq |U|/2$ entonces $S \subseteq C$.

El punto de Simpson es una opción cuando el conjunto de los puntos de Condorcet es vacío. Entonces, para un punto de Simpson x, se tiene $R(x) > |U|/2$ y la diferencia entre $|U|/2$ y $R(x)$ indica lo cerca que está el punto de Simpson de ser un punto de Condorcet.

Un punto es una solución plural (podríamos decir que es un *punto plural*) si no existe ningún otro punto y más cerca de un mayor número de usuarios. En relación con el punto de Condorcet se puede interpretar que se sustituye la mayoría absoluta por la mayoría simple; en el sentido de que en lugar de que la condición para rechazar un punto sea que exista una mayoría absoluta (la mitad de los usuarios) que prefiera a otro punto, se pone como condición el que sea una mayoria simple los que lo prefieren (hay más usuarios que la prefieren que lo contrario). La solución plural fue introducida en el campo de la localización por primera vez en (Wendell y McKelvey, (1981)).

Definición *(Wendell y McKelvey, (1981))*

*Se dice que un punto $x \in N$ es una **solución plural** si y solo si*

$$|y \prec x| \leq |x \prec y|, \forall y \in N.$$

El punto x es una solución plural si el número de usuarios que prefieren otro punto y frente a x nunca es mayor de los que prefieren x frente a y. Por P se denotará al conjunto de soluciones plurales de la red. En una red cualquiera no se puede garantizar la existencia de una solución plural, pudiendo ocurrir que $P = \emptyset$. Además las soluciones plurales son también soluciones de Condorcet. $P \subseteq C$.

1.3. Resolución de problemas de localización mediante votos

En este apartado de este capítulo introductorio se exponen los resultados más importantes obtenidos por diversos autores para la resolución de problemas de localización mediante votos. Los procedimientos para resolver los distintos problemas de localización mediante votos aparecidos en la literatura especializada tienen características muy distintas. Sin embargo, desde el punto de vista teórico como práctico el mayor interés se centra en el algoritmo parta determinar el punto de Condorcet en redes generales. Gran parte de este apartado se dedica a exponer en detalle este importante procedimiento aparecido en (Hansen y Labbé (1988)). La relevancia de este algoritmo viene determinada por abordar el problema paradigmatico de la localización mediante votos, el problema de Condorcet, y porque proporciona las ideas fundamentales del mecanismo de comparación por pares para la eliminación de candidatos que se utiliza en la práctica totalidad de algoritmos para obtener las soluciones de los problemas de localización mediante votos. La descripción del algoritmo se ha modificado para mejorar su comprensión y facilitar la descripción de este algoritmo y de otros algoritmos de la presente memoria que utilizan el mismo tipo de operaciones o cálculos. El objetivo fundamental es resaltar la diferencia del papel que juegan los vértices en los resultados y procedimientos porque hay usuarios ubicados en ellos o porque representan nudos de comunicaciones.

1.3.1. La solución de Condorcet en redes generales.

Dado un conjunto U de usuarios en una red N, el conjunto de puntos de Condorcet es:

$$C = \{x \in N : |y \prec x| \leq |U|/2, \forall y \in N\}.$$

Una localización x es solución de Condorcet si no existe otra localización y que sea preferida por una mayoría estricta de usuarios; en otro caso se dice que y domina a x. Por tanto las soluciones de Condorcet son las localizaciones que no son dominadas por ninguna otra.

Definición

Un punto $x \in N$ es ***dominado*** *por el punto $y \in N$ si y está más cerca que x de más de la mitad de los usuarios.*

El punto $x \in N$ es dominado por $y \in N$ si y solo si

$$|y \prec x| = |\{u \in U : d(y, v(u)) < d(x, v(u))\}| > |U|/2.$$

El hecho de que el número de usuarios sea par o impar influye en los puntos que pueden ser soluciones de Condorcet en una red general, ya que si el número de usuarios es impar entonces los puntos de Condorcet son vértices.

Proposición *(Hansen y Thisse, (1981))*

Si $|U|$ es un número impar entonces $C \subseteq V$.

Los primeros procedimientos para obtener las soluciones de Condorcet en una red general han sido propuestos en (Hansen y Labbé, (1988)) y realizan un proceso de eliminación de las localizaciones dominadas por otras. El algoritmo expuesto a continuación implementa el procedimiento propuesto por Hansen y Labbé al que se han incorporado algunas correcciones y adaptaciones.

ALGORITMO 1 *(Hansen y Labbé, (1988))*

Algoritmo para el cálculo de Soluciones de Condorcet en redes generales.

El procedimiento para determinar las soluciones de Condorcet en una red general, cuya implementación denominamos ALGORITMO 1, propuesto en (Hansen y Labbé, (1988)) trata los casos de forma distinta según que el número de usuarios sea par (Algoritmo 1A) o impar (Algoritmo 1B).

- Si el número de usuarios es impar, sólo los vértices pueden ser soluciones por lo que a partir del conjunto de todos los vértices como soluciones posibles el algoritmo 1A elimina los vértices dominados por otro vértice o por otros puntos de las aristas. La comparación entre vértices se realiza en el paso A1 y la comparación de los vértices con las aristas en los pasos A2, A3 y A4.
- Si el número de usuarios es par, estos mismos pasos permiten determinar qué vértices son soluciones de Condorcet pero en el alogritmo 1B además tiene que determinar qué porciones de aristas o segmentos pueden contener soluciones de Condorcet. Por tanto, el paso B1 consiste en aplicar el algoritmo 1A completo como en el caso impar. Los pasos B2 y B3 determinan que segmentos pueden contener soluciones de Condorcet mediante la eliminación de aquellos dominados por vértices. Los pasos B4, B5 y B6 eliminan los segmentos que son dominados por otro segmento.

El algoritmo para obtener las *soluciones de Condorcet en una red general* es el siguiente:

ALGORITMO 1 *(Hansen y Labbé, (1988))*

Caso impar

Si $|U|$ es impar ejecutar el algoritmo 1A.

Caso par

Si $|U|$ es par ejecutar el algoritmo 1B.

El algoritmo para obtener las *soluciones de Condorcet con un número impar de usuarios* en una red general es el siguiente:

ALGORITMO 1A *(Hansen y Labbé, (1988))*

Comparación entre vértices

Eliminar los vértices dominados por otro vértice: paso A1.

Comparación de vértices con aristas

Eliminar los vértices dominados por un punto de una arista: pasos A2, A3 y A4.

El algoritmo para obtener las *soluciones de Condorcet con un número par de usuarios* en una red general es el siguiente:

ALGORITMO 1B *(Hansen y Labbé, (1988))*

Vértices Condorcet

Aplicar el Algoritmo 1A para determinar los vértices de Condorcet; paso B1.

Comparación de aristas con vértices

Eliminar los segmentos dominados por un vértice; pasos B2 y B3.

Comparación entre aristas

Eliminar los segmentos dominados por otros segmentos; pasos B4, B5 y B6

En primer lugar se describen los detalles del algoritmo 1A y a continuación los del algoritmo 1B que utiliza al anterior.

El *Algoritmo 1A* para el cálculo de Soluciones de Condorcet en redes generales con un número impar de usuarios consta de 4 pasos. El paso A1 parte de todo el conjunto de vértices como conjunto C de candidatos a soluciones de Condorcet y realiza las comparaciones entre vértices eliminando los que son dominados. Si el conjunto de candidatos no ha quedado vacío, los pasos A2, A3 y A4 eliminan los vértices dominados por puntos interiores a las aristas.

En el paso A2 se toma un vértice v_j y una arista $[v_k, v_l]$ dividiendo el conjunto V de vértices en 5 subconjuntos V_1, V_2, V_3, V_4 y V_5 según las distintas posibilidades al hacer las comparaciones entre su distancia al vértice v_j y a los puntos de la arista $[v_k, v_l]$. En el paso A3, si el número de usuarios en el subconjunto V_1 de los vértices que están más cerca del vértice v_j que de cualquier punto de la arista $[v_k, v_l]$ es superior a $|U|/2$ entonces v_j no puede ser dominado por ningún punto de la arista $[v_k, v_l]$. En tal caso se toma otra arista para reiniciar el paso A2; en otro caso se determinan y ordenan de izquierda a derecha los puntos de la arista $[v_k, v_l]$ donde algún v_i empieza o termina su preferencia por una subarista de $[v_k, v_l]$ frente a v_j. El paso A4 recorre estos puntos determinando el número de usuarios que prefieren los puntos interiores a la subarista de $[v_k, v_l]$ frente a v_j. Si en algún momento este número de usuarios llega a ser mayor que $|U|/2$ el vértice v_j es eliminado del conjunto C y se reinicia el paso A2 con otro vértice v_j del conjunto C aún no explorado. En caso contrario se reinicia el paso A2 con otra arista $[v_k, v_l]$ no comparada con v_j. El proceso finaliza cuando todos los vértices del conjunto C ya hayan sido explorados.

ALGORITMO 1A *(Hansen y Labbé, (1988))*

Comparación entre vértices

Paso A1

Sea $C = V$.
Para todo $v_j \in V$ se calcula $|v_k \prec v_j|$ para todo $v_k \in V$.
Si algún v_k verifica que $|v_k \prec v_j| > |U|/2$ se borra v_j de C.
Si $C = \emptyset$ parar. En otro caso ir al paso A2.

Comparación de los vértices con las aristas

Paso A2

Sea $v_j \in C$, sea $[v_k, v_l] \in A$, con $k < l$. Sea b^i_{kl} el punto cuello de botella de un vértice v_i en $[v_k, v_l]$. Se divide el conjunto V en cinco subconjuntos:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{v_i \in V : d(v_i, v_j) \leq \min\{d(v_i, v_k), d(v_i, v_l)\}\} \\
V_2 &= \{v_i \in V : d(v_i, v_k) < d(v_i, v_j) \leq \ d(v_i, v_l)\}. \\
V_3 &= \{v_i \in V : d(v_i, v_l) < d(v_i, v_j) \leq \ d(v_i, v_k)\}. \\
V_4 &= \{v_i \in V : \max\{d(v_i, v_k), d(v_i, v_l)\} < d(v_i, v_j) \leq d(v_i, b^i_{kl})\}. \\
V_5 &= V - (V_1 + V_2 + V_3 + V_4).
\end{aligned}$$

- El conjunto V_1 está constituido por los vértices que están más cerca del vértice v_j que de cualquier punto de la arista $[v_k, v_l]$. En V_2 están los vértices que están más cerca de una subarista con extremo en v_k que del vértice v_j y en V_3 los que están más cerca de una subarista con extremo en v_l que del vértice v_j. El conjunto V_4 está formado por los vértices que están más cerca de dos subaristas, una con extremo en v_k y otra con extremo en v_l, que del vértice v_j. Finalmente, en V_5 están los vértices que están más cerca de cualquier punto de la arista $[v_k, v_l]$ que del vértice v_j.

Paso A3

Si $|U(V_1)| = |\{u \in U : v_i = v(u) \in V_1\}| \geq |U|/2$ se toma la siguiente arista y se reinicia el paso A2.

Si $|U(V_1)| < |U|/2$ se calcula:

$$\begin{aligned} t_i^+ &= d(v_i, v_j) - d(v_i, v_k), \forall v_i \in V_2 \cup V_4 \\ t_i^- &= l(v_k, v_l) - d(v_i, v_j) + d(v_i, v_l), \forall v_i \in V_3 \cup V_4. \end{aligned}$$

- El parámetro t_i^+ determina el extremo derecho de la subarista que empieza en v_k cuyos puntos son preferidos por los usuarios ubicados en v_i al vértice v_j. El parámetro t_i^- determina el extremo izquierdo de la subarista que termina en v_l cuyos puntos son preferidos por los usuarios ubicados en v_i al vértice v_j. Ambos parámetros cumplen $0 < t_i^+ \leq l(v_k, v_l)$ y $0 \leq t_i^- < l(v_k, v_l)$.

Se ordenan los valores de t_i^+ y t_i^- en orden creciente en una lista T.

Paso A4

Se recorre la lista T computando el número de usuarios que prefieren una subarista de $[v_k, v_l]$ con extremo en el punto que determina el parámetro t, al vértice v_j.

Se parte de

$$W = |U(V_2 \cup V_4 \cup V_5)| = |\{u \in U : v_i = v(u) \in V_2 \cup V_4 \cup V_5\}|.$$

- Este valor es el número de usuarios que prefieren una subarista de $[v_k, v_l]$ con extremo en v_k al vértice v_j.

Al recorrer la lista T:

a) Cada vez que se encuentra un $t = t_i^+$ se actualiza la cantidad W restando los usuarios que están en v_i;

$$W = W - |\{u \in U : v_i = v(u)\}|.$$

b) Cada vez que se encuentra un $t = t_i^-$ se actualiza la cantidad W sumando los usuarios que están en v_i :

$$W = W + |\{u \in U : v_i = v(u)\}|.$$

Si en la lista coinciden varios t^+ y t^- se hacen a la vez las sumas y/o restas correspondientes.

Si en alguna de estas actualizaciones es $W > |U|/2$ se elimina el vértice v_j de C. Esto significa que más de la mitad de los usuarios prefieren los puntos de la subarista que empieza en el punto determinado por t, al vértice v_j.

Si todos los puntos de C han sido explorados finaliza el algoritmo. En otro caso se toma otro $v_j \in C$ que no haya sido explorado y se va al paso A2.

El algoritmo 1A determina las soluciones de Condorcet en una red general con un número impar de usuarios en un tiempo $O(|V| \cdot |A| \cdot |U| \log |U|)$.

Proposición *(Hansen y Labbé, (1988))*

La complejidad del algoritmo 1A es $O(|V| \cdot |A| \cdot |U| \log |U|)$.

Si el número de usuarios es par, el algoritmo 1A también determina los vértices que son soluciones de Condorcet. Sin embargo el proceso debe completarse para determinar las aristas o subaristas que pueden ser soluciones de Condorcet. El procedimiento propuesto en (Hansen y Labbé, (1988)) para el cálculo de soluciones de Condorcet en redes generales cuando el número de usuarios es par, cuya implementación denominamos *Algoritmo 1B,* consta de un primer paso en el que se aplica el algoritmo 1A. Por tanto, el paso B1 determina el conjunto de vértices que son soluciones de Condorcet. En los pasos B2 a B6 se determinan los segmentos de las aristas de la red que son soluciones de Condorcet.

El paso B2 del algoritmo 1B determina las aristas cuyos puntos no pueden ser candidatos a soluciones de Condorcet porque una mayoría estricta de usuarios prefieren uno de sus extremos a cualquier punto interior. También en el paso 2B se incorpora, al conjunto de puntos candidatos a soluciones de Condorcet, las aristas para las que no hay ningún cuello de botella de un vértice con usuario y el número de distancias a los usuarios crecientes es igual al de las decrecientes. Con el resto de las aristas, el paso 3B determina si algún segmento interior a la arista, comprendido entre dos cuellos de botella consecutivos, tiene el número de usuarios con distancias crecientes igual al número de usuarios con distancias decrecientes. En los pasos 4B, 5B y 6B se comparan los segmentos admitidos como candidatos a contener soluciones de Condorcet con otros segmentos para descartar los que resulten dominados. Para cada par de segmentos, el paso 4B determina si cualquier punto de un segmento o ninguno de ellos domina a los del otro. En otro caso, el paso 5B determina los pares de puntos de un segmento y del otro que están más cerca de cada vértice con usuario. Con las intersecciones entre los hiperplanos donde los puntos de un segmento son preferidos por un usuario a los del otro segmento, el paso 6B determina los trozos del segmento estudiado dominados por puntos del otro.

ALGORITMO 1B *(Hansen y Labbé, (1988))*

Soluciones de Condorcet con un número par de usuarios

Vértices soluciones de Condorcet

Paso B1

Aplicar el algoritmo 1A para calcular los vértices v tales que

$$R(v) = \max_{y \in N} |y \prec v| \leq |U|/2.$$

Estos vértices son puntos de Condorcet. Se inicializa el conjunto de posibles soluciones de Condorcet con

$$C = \{v \in V : R(v) \leq |U|/2\}.$$

Segmentos soluciones de Condorcet

Se exploran todas las aristas con el paso B2 y el paso B3 para eliminar los segmentos que no pueden contener soluciones de Condorcet porque son dominados por un vértice y, en con los restantes segmentos, los pasos B4, B5 y B6 se determinan los que tampoco son diminados por otro segmento y por tanto están formados por puntos de Condorcet.

Paso B2

Sea la arista $[v_k, v_l]$. Se divide el conjunto V en tres subconjuntos.

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{v_i \in V : d(v_i, v_l) = d((v_i, v_k) + l(v_k, v_l)\}. \\
V_2 &= \{v_i \in V : d(v_i, v_k) = d((v_i, v_l) + l(v_k, v_l)\}. \\
V_3 &= V - (V_1 \cup V_2).
\end{aligned}$$

- El subconjunto V_1 está formado por los vértices tales que la función $d(v_i, z)$ con $z \in [v_k, v_l]$ es creciente desde v_k hasta v_l mientras que V_2 está formado por los vértices tales que la función $d(v_i, z)$ es decreciemte desde v_k hasta v_l. Cada vértice v_i de V_3 determina un punto cuello de botella b_{kl}^i en la arista $[v_k, v_l]$, de forma que $d(v_i, z)$ es creciente en $[v_k, b_{kl}^i]$, y decreciente en $[b_{kl}^i, v_l]$.

Sean

$$\begin{aligned} U(V_1) &= \{u \in U : v(u) \in V_1\}. \\ U(V_2) &= \{u \in U : v(u) \in V_2\}. \end{aligned}$$

a) Si $\max\{|U(V_1)|, |U(V_2)|\} > |U|/2$ tomar otra arista y reiniciar el paso B2.

- En este caso, en la arista no hay ninguna solución de Condorcet ya que si $|U(V_1)| > |U|/2$ más de la mitad de los usuarios prefieren el vértice v_k a cualquier punto de la arista $[v_k, v_l]$ y si $|U(V_2)| > |U|/2$ más de la mitad de los usuarios prefiere el vértice v_l a cualquier punto de la arista $[v_k, v_l]$.

b) Si $|U| = |U(V_1)| + |U(V_2)|$ y $|U(V_1)| = |U(V_2)| = |U|/2$ se añade a C la arista $[v_k, v_l]$ y se toma una nueva arista para reiniciar el paso B2.

- En este caso, el número de usuarios con distancias crecientes en $[v_k, v_l]$, es igual al número de usuarios con distancias decrecientes y no hay ningún cuello de botella de un vértice con usuario. Toda la arista es un segmento que cumple la condición necesaria para que todos sus puntos sean puntos de Condorcet.

c) Si $|U(V_1)| + |U(V_2)| < |U|$, pero $|U(V_1)| \leq |U|/2$ y $|U(V_2)| \leq |U|/2|$, en la arista hay cuellos de botella correspondientes a vertices con usuarios y son los que están en V_3.
Para cada uno de los vértices $v_i \in V_3$ se calcula el cuello de botella distancias a los de v_i en la arista $[v_k, v_l]$ que viene dado por el parámetro

$$\theta_{kl}(i) = \frac{1}{2}\left(d(v_i, v_l) + l(v_k, v_l) - d(v_i, v_k)\right)$$

Paso B3

Una vez calculados los $\theta_{kl}(i)$ para cada $v_i \in V_3$, se ordenan en orden creciente en una lista L.

- Los valores de esta lista dividen la arista $[v_k, v_l]$ en segmentos de la forma $[a, b]$. Sólo si, tanto el número de usuarios con funciones de distancia crecientes a lo largo del segmento como el de usuarios con funciones de distancia decreciente a lo largo de ese segmento coinciden con $|U|/2$, el segmento puede contener puntos de Condorcet.

Ya que si el número de usuarios con función creciente es mayor que el número de usuarios con función decreciente una mayoría estricta de usuarios preferirá el extremo a al resto del segmento, y si el número de usuarios con función decreciente es mayor que el número de usuarios con función creciente una mayoría estricta de usuarios preferirá el extremo b al resto del segmento. Para comprobar esta condición se recorre $[v_k, v_l]$ desde v_k hacia v_l actualizando en cada cuello de botella b_{kl}^i la variable W con la suma del número de usuarios con funciones de distancia decrecientes a lo largo del segmento que comienza en el cuello de botella correspondiente.

Se toma inicialmente $W = |U(V_2)|$. Se recorre la lista L y para cada elemento $\theta_{kl}(i)$ de la lista se actualiza $W = W + |\{u \in U : v(u) = v_i\}|$.

- El valor inicial de W es el número de usuarios que prefieren v_l a cualquier otro punto de $[v_k, v_l]$. Cada vez que nos encontramos con un parámetro correspondiente a uno o varios cuellos de botella b_{kl}^i las funciones de distancia de los correspondentes vértices v_i pasan de ser crecientes en $[v_k, b_{kl}^i]$ a ser decreciente en $[b_{kl}^i, v_l]$. Por tanto W será el número de usuarios que tendrán función de distancias decreciente a partir de b_{kl}^i. Sólo si en el proceso de actualización W llega a valer exactamente $|U|/2$ entonces los puntos del segmento $[b_{kl}^i, b_{kl}^j]$, donde b_{kl}^j es el siguiente cuello de botella de la lista L, son posibles soluciones de Condorcet porque el número de usuarios con funciones de distancia crecientes y decrecientes son iguales en cada uno de los dos extremos del segmento.

Si $W = |U|/2$ tras actualizar la suma en un elemento $\theta_{kl}(i)$ de la lista, y $\theta_{kl}(j)$ es el siguiente elemento de la lista tal que $\theta_{kl}(i) \neq \theta_{kl}(j)$ y $\theta_{kl}(j)$ corresponde al punto cuello de botella b_{kl}^j entonces se añade $[b_{kl}^i, b_{kl}^j]$ al conjunto de posibles puntos de Condorcet C.

Una vez recorrida toda la arista $[v_k, v_l]$ se toma la siguiente arista y se repiten los pasos B2 y B3.

Tras explorar todas las aristas con el paso B2 y con el paso B3, se continua con el paso B4.

Eliminación de segmentos dominados

En los siguientes pasos se comprueba si algún segmento de los que están en C y que pueden tener puntos de Condorcet está dominado por algún otro segmento de N. Se van tomando parejas de segmentos $[x_k, y_k] \in C$ y $[x_l, y_l] \in N$. El paso B4 realiza un test previo para comprobar si cualquier punto de $[x_l, y_l]$ domina a $[x_k, y_k]$ o ningún punto de $[x_l, y_l]$ puede dominar a $[x_k, y_k]$. En caso contrario el paso B5 determina, para cada posible ubicación v_i de un usuario, los conjuntos de pares de puntos $z_l \in [x_l, y_l]$ y $z_k \in [x_k, y_k]$ tales que $d(v_i, z_l) < d(v_i, z_k)$. Finalmente, el paso B6, examinando las intersecciones de estos conjuntos, determina los trozos de $[x_k, y_k]$ que son dominados por algún punto de $[x_l, y_l]$.

Paso B4

Tomar cada segmento $[x_k, y_k] \in C$ y cada segmento $[x_l, y_l] \in N$.

a) Si cualquier punto de $[x_l, y_l]$ domina a $[x_k, y_k]$ tomar otro segmento $[x_k, y_k] \in C$ para reiniciar el paso B4 con las aristas $[x_l, y_l] \in N$

b) Si ningún punto de $[x_l, y_l]$ puede dominar a $[x_k, y_k]$ tomar otro segmento $[x_l, y_l] \in N$ y reiniciar el paso B4 con el mismo segmento $[x_k, y_k] \in C$

c) En otro caso continuar con el paso B5.

- Sea $[x_k, y_k] \in C$ y sea $[x_l, y_l] \in N$. Para ver si el segmento $[x_k, y_k]$ está dominado por el segmento $[x_l, y_l]$ se considera el espacio producto $[x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$, que corresponde al rectángulo $[0, l(x_k, y_k)] \times [0, l(x_l, y_l)]$ ya que cada punto de $[x_k, y_k]$ queda determinado por un parámetro θ_k que varía de 0 a $l(x_k, y_k)$ y cada punto de $[x_l, y_l]$ queda determinado por un parámetro θ_l que varía de 0 a $l(x_l, y_l)$; de forma que $z_k = p([x_k, y_k], \theta_k)$ y $z_l = p([x_l, y_l], \theta_l)$.

Se considera la siguiente partición del conjunto de vértices V.

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{v_i \in V : \max\{d(v_i, x_l), d(v_i, y_l)\} \leq \min\{d(v_i, x_k), d(v_i, y_k)\}\\
V_2 &= \{v_i \in V : \max\{d(v_i, x_k), d(v_i, y_k)\} \leq \min\{d(v_i, x_l), d(v_i, y_l)\}\\
V_3 &= \{v_i \in V - (V_1 \cup V_2) : d(v_i, x_l) < d(v_i, y_l), d(v_i, x_k) < d(v_i, y_k)\}\\
V_4 &= \{v_i \in V - (V_1 \cup V_2) : d(v_i, x_l) < d(v_i, y_l), d(v_i, x_k) > d(v_i, y_k)\}\\
V_5 &= \{v_i \in V - (V_1 \cup V_2) : d(v_i, x_l) > d(v_i, y_l), d(v_i, x_k) < d(v_i, y_k)\}\\
V_6 &= \{v_i \in V - (V_1 \cup V_2) : d(v_i, x_l) > d(v_i, y_l), d(v_i, x_k) > d(v_i, y_k)\}
\end{aligned}$$

- El conjunto V_1 es el conjunto de los vértices cuyos usuarios prefieren cualquier punto de $[x_l, y_l]$ a cualquier punto de $[x_k, y_k]$, y V_2 es el conjunto de los vértices cuyos usuarios prefieren cualquier punto de $[x_k, y_k]$ a cualquier punto de $[x_l, y_l]$. El resto de los vértices se distribuyen en los conjuntos V_3, V_4, V_5 y V_6. En particular, V_3 es el conjunto de estos vértices que no están ni en V_1 ni en V_2 y tienen funciones de distancia crecientes tanto en $[x_l, y_l]$ como en $[x_k, y_k]$. El conjunto V_4 está constituido por los vértices que no están ni en V_1 ni en V_2 y que tienen una función de distancia creciente en $[x_l, y_l]$ y decreciente en $[x_k, y_k]$. Simétricamente V_5 está constituido por los vértices que no están ni en V_1 ni en V_2 con una función de distancia decreciente en $[x_l, y_l]$ y creciente en $[x_k, y_k]$. Finalmente, V_6 es el conjunto de los vértices que no están ni en V_1 ni en V_2 con función de distancia decreciente en $[x_l, y_l]$ y en $[x_k, y_k]$.

Una vez determinados estos conjuntos se procede de la siguiente forma:

a) Si $|U(V_1)| > |U|/2$ entonces el segmento $[x_k, y_k]$ no puede tener soluciones de Condorcet ya que una mayoría estricta de usuarios prefieren cualquier punto de $[x_l, y_l]$ a cualquier punto de $[x_k, y_k]$. Por tanto, en tal caso se elimina de C el segmento $[x_k, y_k]$ y se reinicia el paso B4 con otro segmento de los que están en C.

b) Si $|U(V_2)| > |U|/2$ ningún punto del segmento $[x_l, y_l]$ va a dominar a ningún punto de $[x_k, y_k]$ por lo cual se reinicia el paso B4 con otro segmento de N.

c) En otro caso ($\max\{|U(V_1)|, |U(V_2)|\} \leq |U|/2$), el paso B5 examina las posibles dominancias entre puntos de los segmentos $[x_l, y_l]$ y $[x_k, y_k]$.

Paso B5

Sean los segmentos $[x_l, y_l]$ y $[x_k, y_k]$ proporcionados por el paso B4. Para cada vértice v_i con usuarios, determinar los pares de puntos $(z_k, z_l) \in [x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$ tales que los usuarios ubicados en v_i prefieren el punto z_l al punto z_k; es decir tales que $d(v_i, z_l) < d(v_i, z_k)$.

- Estos pares se determinan a través de los semiplanos de puntos del plano $(\theta_k, \theta_l) \in [0, l(x_k, y_k)] \times [0, l(x_l, y_l)]$ que determinan los correspondientes pares de puntos $(z_k, z_l) \in [x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$. Se denota por H_i al semiplano de los puntos $(\theta_k, \theta_l) \in [0, l(x_k, y_k)] \times [0, l(x_l, y_l)]$

tales que

$$d(v_i, p([x_l, y_l], \theta_l)) < d(v_i, p([x_k, y_k], \theta_k)).$$

Se procede de la siguiente forma:

a) Si $v_i \in V_3$ entonces

$$d(v_i, z_l) - d(v_i, z_k) = (d(v_i, x_l) + \theta_l) - (d(v_i, x_k) + \theta_k)$$

y la ecuación del semiplano H_i es:

$$\theta_l < \theta_k - [d(v_i, x_l) - d(v_i, x_k)].$$

Se denota $r_i^+ = d(v_i, x_l) - d(v_i, x_k)$, y se tiene $H_i : \theta_l < \theta_k - r_i^+$.

b) Si $v_i \in V_4$ entonces

$$d(v_i, z_l) - d(v_i, z_k) = (d(v_i, x_l) + \theta_l) - (d(v_i, x_k) - \theta_k)$$

y la ecuación del semiplano H_i es

$$\theta_l < -\theta_k - [d(v_i, x_l) - d(v_i, x_k)].$$

Se denota $s_i^- = d(v_i, x_l) - d(v_i, x_k)$, y se tiene $H_i : \theta_l < -\theta_k - s_i^-$.

c) Si $v_i \in V_5$ entonces

$$d(v_i, z_l) - d(v_i, z_k) = (d(v_i, x_l) - \theta_l) - (d(v_i, x_k) + \theta_k)$$

y la ecuación del semiplano H_i es:

$$\theta_l > -\theta_k + [d(v_i, x_l) - d(v_i, x_k)].$$

Se denota $s_i^+ = d(v_i, x_k) - d(v_i, x_l)$, y se tiene $H_i : \theta_l > -\theta_k - s_i^+$.

d) Si $v_i \in V_6$ entonces

$$d(v_i, z_l) - d(v_i, z_k) = (d(v_i, x_l) - \theta_l) - (d(v_i, x_k) - \theta_k)$$

y la ecuación del semiplano H_i es:

$$\theta_l > \theta_k + [d(v_i, x_l) - d(v_i, x_k)].$$

Se denota $r_i^- = d(v_i, x_k) - d(v_i, x_l)$, y se tiene $H_i : \theta_l > \theta_k - r_i^-$.

- Se obtienen dos familias de semiplanos paralelos: una familia de semiplanos paralelos a la bisectriz del primer cuadrante está formada por los semiplanos determinados por los vértices $v_i \in V_3 \cup V_6$ y la otra familia de semiplanos paralelos a la bisectriz del segundo cuadrante determinados por los vértices $v_i \in V_4 \cup V_5$.

Las ecuaciones de los correspondientes semiplanos son por tanto las siguientes:

a) Si $v_i \in V_3$ entonces H_i es: $\theta_l < +\theta_k - r_i^+$.
b) Si $v_i \in V_4$ entonces H_i es: $\theta_l < -\theta_k - s_i^-$.
c) Si $v_i \in V_5$ entonces H_i es: $\theta_l > -\theta_k - s_i^+$.
d) Si $v_i \in V_6$ entonces H_i es: $\theta_l > +\theta_k - r_i^-$.

Entonces, se calculan los valores siguientes.

a) para cada $v_i \in V_3$ los valores de r_i^+
b) para cada $v_i \in V_4$ los valores de s_i^-
c) para cada $v_i \in V_5$ los valores de s_i^+
d) para cada $v_i \in V_6$ los valores de r_i^-.

- Estas dos familias de semiplanos paralelos entre sí se organizan a través de dos listas R y S conteniendo respectivamente los valores de r_i^+ y r_i^- y los valores s_i^+ y s_i^-, ordenados de forma creciente. Los elementos de estas listas están comprendidos entre los valores correspondientes a los hiperplanos que pasan por las cuatro esquinas del rectángulo $[0, l(x_k, y_k)] \times [0, l(x_l, y_l)]$. Estos hiperplanos son los correspondientes a $r_i = -l(x_l, y_l)$ y $r_i = l(x_k, y_k)$, y a $s_i = -l(x_l, y_l) - l(x_k, y_k)$ y $s_i = 0$.

Para continuar con la descripción de este paso se necesitan los siguientes lemas.

Lema

Los valores r_i^+ y r_i^- están acotados por $l(x_k, y_k)$ como cota superior y por $-l(x_l, y_l)$ como cota inferior.

$$\begin{aligned} \forall v_i &\in V_3 : -l(x_l, y_l) \leq r_i^+ \leq l(x_k, y_k). \\ \forall v_i &\in V_6 : -l(x_l, y_l) \leq r_i^- \leq l(x_k, y_k). \end{aligned}$$

Demostración

a) Sea $v_i \in V_3$ entonces $d(v_i, y_l) \geq d(v_i, x_k)$ y además $d(v_i, y_k) \geq d(v_i, x_l)$. Ya que si $d(v_i, y_l) < d(v_i, x_k)$ entonces $v_i \in V_1$, y si $d(v_i, y_k) < d(v_i, x_l)$ entonces $v_i \in V_2$. Por tanto:

- Por un lado,

$$\begin{aligned} r_i^+ &= d(v_i, x_l) - d(v_i, x_k) = [d(v_i, y_l) - l(x_l, y_l)] - d(v_i, x_k) = \\ &= d(v_i, y_l) - d(v_i, x_k) - l(x_l, y_l) \geq -l(x_l, y_l). \end{aligned}$$

  Luego: $r_i^+ \geq -l(x_l, y_l)$.

- Por otro,

$$\begin{aligned} r_i^+ &= d(v_i, x_l) - d(v_i, x_k) = d(v_i, x_l) - [d(v_i, y_k) - l(x_k, y_k)] = \\ &= d(v_i, x_l) - d(v_i, y_k) + l(x_k, y_k) \leq l(x_k, y_k). \end{aligned}$$

  Luego: $r_i^+ \leq l(x_k, y_k)$.

b) Sea $v_i \in V_6$ entonces $d(v_i, y_l) < d(v_i, x_k)$ y además $d(v_i, y_k) < d(v_i, x_l)$. Ya que si $d(v_i, y_l) > d(v_i, x_k)$ entonces $v_i \in V_2$, y si $d(v_i, y_k) > d(v_i, x_l)$ entonces $v_i \in V_1$. Por tanto:

- Por un lado,

$$\begin{aligned} r_i^- &= d(v_i, x_k) - d(v_i, x_l) = [d(v_i, y_k) + l(x_k, y_k)] - d(v_i, x_l) = \\ &= d(v_i, y_k) - d(v_i, x_l) + l(x_k, y_k) \leq l(x_k, y_k). \end{aligned}$$

  Luego: $r_i^- \leq l(x_k, y_k)$.

- Por otro,

$$\begin{aligned} r_i^- &= d(v_i, x_k) - d(v_i, x_l) = d(v_i, x_k) - [d(v_i, y_l) + l(x_l, y_l)] = \\ &= d(v_i, x_k) - d(v_i, y_l) - l(x_l, y_l) \geq -l(x_l, y_l). \end{aligned}$$

  Luego: $r_i^- \geq -l(x_l, y_l)$. $\square$

Lema

Los valores s_i^+ y s_i^- están acotados por 0 como cota superior y por $-l(x_l, y_l) - l(x_k, y_k)$ como cota inferior.

$$\begin{aligned} \forall v_i &\in V_4 : -l(x_l, y_l) - l(x_k, y_k) \leq s_i^- \leq 0. \\ \forall v_i &\in V_5 : -l(x_l, y_l) - l(x_k, y_k) \leq s_i^+ \leq 0. \end{aligned}$$

Demostración

a) Sea $v_i \in V_4$ entonces $d(v_i, y_l) \geq d(v_i, y_k)$ y además $d(v_i, x_k) \geq d(v_i, x_l)$. Ya que si $d(v_i, y_l) < d(v_i, y_k)$ entonces $v_i \in V_1$, y si $d(v_i, x_k) < d(v_i, x_l)$ entonces $v_i \in V_2$. Por tanto:

$$\begin{aligned} 0 &\geq s_i^- = d(v_i, x_l) - d(v_i, x_k) = \\ &= [d(v_i, y_l) - l(x_l, y_l)] - [d(v_i, y_k) + l(x_k, y_k)] = \\ &= d(v_i, y_l) - d(v_i, y_k) - l(x_l, y_l) - l(x_k, y_k) \geq -l(x_l, y_l) - l(x_k, y_k). \end{aligned}$$

Luego: $0 \geq s_i^- > -l(x_l, y_l) - l(x_k, y_k)$.

b) Sea $v_i \in V_5$ entonces $d(v_i, y_k) \geq d(v_i, y_l)$ y además $d(v_i, x_l) \geq d(v_i, x_k)$. Ya que si $d(v_i, y_k) < d(v_i, y_l)$ entonces $v_i \in V_2$, y si $d(v_i, x_l) < d(v_i, x_k)$ entonces $v_i \in V_1$. Por tanto:

$$\begin{aligned} 0 &\geq s_i^+ = d(v_i, x_k) - d(v_i, x_l) = \\ &= [d(v_i, y_k) - l(x_k, y_k)] - [d(v_i, y_l) + l(x_l, y_l)] = \\ &= d(v_i, y_k) - d(v_i, y_l) - l(x_k, y_k) - l(x_l, y_l) \geq -l(x_k, y_k) - l(x_l, y_l). \end{aligned}$$

Luego: $0 \geq s_i^+ > -l(x_l, y_l) - l(x_k, y_k)$. □

Por tanto el paso B5 continua procediendo de la manera siguiente con las dos familias de semiplanos paralelos correspondientes a los valores r_i^+ y r_i^-, y a los valores s_i^+ y los s_i^-

1. Los r_i^+ y los r_i^- se reordenan juntos en orden creciente en una lista R de forma que $|R| = |V_3| + |V_6|$. Se usan nuevos subíndices de forma que la lista R es:
$$r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq ... \leq r_{(|R|)}$$
Se añade la cota inferior $r_{(0)} = -l(x_l, y_l)$ y la cota superior $r_{(|R|+1)} = l(x_k, y_k)$. Por tanto, se considera la ordenación de los valores r_i^+ y los r_i^- en la lista R que queda
$$R : r_{(0)} \leq r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq ... \leq r_{(|R|)} \leq r_{(|R|+1)}$$

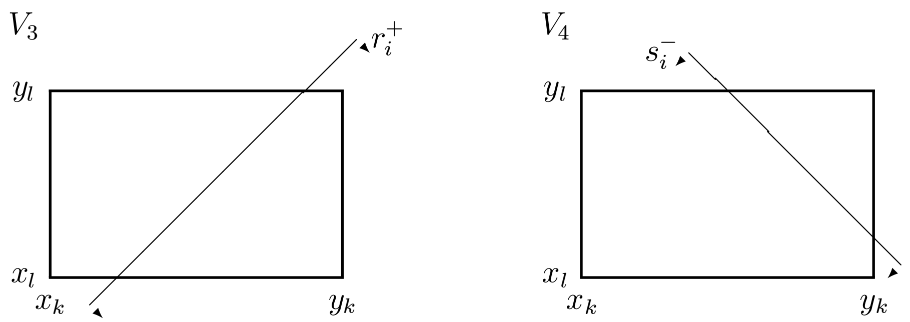
2. Los s_i^+ y los s_i^- se reordenan juntos en orden creciente en una lista S de forma que $|S| = |V_4| + |V_5|$. Se usan nuevos subíndices de forma que la lista S es:
$$s_{(1)} \leq s_{(2)} \leq ... \leq s_{(|S|)}.$$

Se añade la cota inferior $s_{(0)} = -l(x_l, y_l) - l(x_k, y_k)$ y la cota superior $s_{(|S|+1)} = 0$. Por tanto se considera la ordenación de los valores s_i^+ y los s_i^- en la lista S que queda:

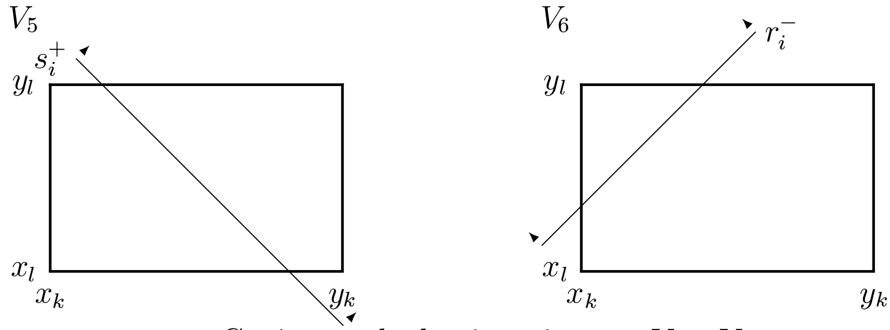
$$S : s_{(0)} \leq s_{(1)} \leq s_{(2)} \leq ... \leq s_{(|S|)} \leq s_{(|S|+1)}.$$

- De esta forma se tiene una rejilla de paralelogramos que cubren el rectángulo $[0, l(x_k, y_k)] \times [0, l(x_l, y_l)]$ generada por las dos familias de semiplanos correspondientes a las listas R y S. Entonces el espacio $[x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$ de pares de puntos (z_k, z_l) es equivalentemente representado por el rectángulo $[0, l(x_k, y_k)] \times [0, l(x_l, y_l)]$ de pares de valores (θ_k, θ_l).

Para describir el análisis del paralelogramo se utilizan los denominados conjuntos de dominancia de los vértices con usuario. Se llama *conjunto de dominancia* del vértice v_i al conjunto de pares de valores (θ_k, θ_l) o de puntos (z_k, z_l) tales que $d(v_i, z_l) < d(v_i, z_k)$ con $z_l = p([x_l, y_l], \theta_l)$ y $z_k = p([x_k, y_k]; \theta_k)$. Estos conjuntos de dominancia coinciden con la intersección de los correspondientes semiplanos H_i en el rectángulo $[x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$. El conjunto de dominancia de un vértice de V_1 es $[x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$ ya que para los usuarios situados en esos vértices cualquier punto $z_l \in [x_l, y_l]$ es preferido a cualquier punto $z_k \in [x_k, y_k]$. Por el contrario el conjunto de dominancia de un vértice de V_2 es vacío. Los conjuntos de dominancia de vértices de V_3, V_4, V_5, V_6 son de la forma que se ve en la siguiente figura:

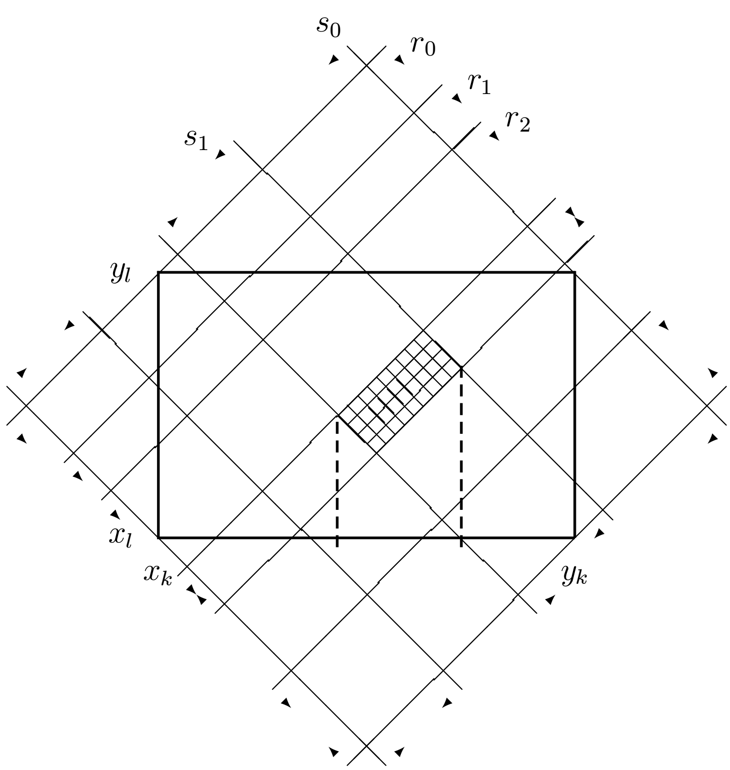


Conjuntos de dominancia para V_3 y V_4.



Conjuntos de dominancia para V_5 y V_6.

El espacio $[x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$ queda particionado por las fronteras de los semiplanos H_i en paralelogramos algunos de ellos truncados. La situación descrita queda representada en la siguiente figura.



División del rectángulo $[x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$ en paralelogramos.

El paso B6 recorre todos estos paralelogramos para detectar los segmentos que son dominados por otros puntos de la red para ser eliminados del conjunto de candidatos.

Paso B6

> Recorrer todos los paralelogramos comprobando si el número de usuarios que prefieren un punto del correspondiente segmento $[x_l, y_l]$ a un punto del segmento $[x_k, y_k]$ sobrepasa a $|U|/2$ y en tal caso eliminar de C el subsegmento que resulta de la proyección del paralelogramo en $[x_k, y_k]$.

Para el recorrido de los paralelogramos se parte del correpondiente a los primeros valores de R y S. En la variable W se va a almacenar el número de usuarios que prefieren un punto del segmento $[x_l, y_l]$ a un punto de $[x_k, y_k]$. Cuando esta cantidad sea la mayoría estricta de usuarios se eliminará el correspondiente segmento del conjunto C de candidatos.

Cada uno de los paralelogramos P_{ij} en que queda dividido el rectángulo $[x_k, y_k]\times[x_l, y_l]$ está formado por los pares (z_k, z_l) a los que les corresponde un mismo conjunto de vértices v para los que $d(v, z_l) < d(v, z_k)$. Si P_{ij} es el paralelogramo determinado por las rectas correspondientes a los valores $r_{(i)}$, $r_{(i+1)}$, $s_{(j)}$ y $s_{(j+1)}$ de las listas R y S respectivamente. Entonces este conjunto de vértices está formado por:

$$\begin{aligned} V_{(i,j)} = \; & V_1 \\ & \cup\{v_q \in V_3 : r_q^+ = r_{(t)}, t \leq i\} \\ & \cup\{v_q \in V_6 : r_q^- = r_{(t)}, t > i\} \\ & \cup\{v_q \in V_4 : s_q^- = s_{(t)}, t \leq j\} \\ & \cup\{v_q \in V_5 : s_q^+ = s_{(t)}, t > j\}. \end{aligned}$$

En el paso i se actualiza la suma de pesos o usuarios de esos vértices. Esta suma de pesos se compara con $|U|/2$. Si la suma de pesos en algún paralelogramo es mayor que $|U|/2$ significa que los puntos z_l que corresponden a ese paralelogramo son preferidos por más de la mitad de los usuarios a los puntos z_k de ese paralelogramo por lo que esos puntos z_k no pueden ser puntos de Condorcet.

En el paso B6 se recorren todos los paralelogramos en que se ha dividido el espacio $[x_k, y_k]\times[x_l, y_l]$ comenzando por el paralelogramo limitado por r_0, r_1, s_0, s_1. En este paralelogramo se toma inicialmente

$$W_1 = |U(V_1)| + |U(V_5)| + |U(V_6)|$$

ya que:

- El conjunto de dominancia de V_1 es $[x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$ ya que para los usuarios situados en esos vértices cualquier punto $z_l \in [x_l, y_l]$ es preferido a cualquier punto $z_k \in [x_k, y_k]$.

- Si $s_{(i)}$ corresponde a un vértice $v_q \in V_5$ su conjunto de dominancia llega hasta s_0. Por tanto los usuarios situados en $v_q \in V_5$ prefieren z_l a z_k para los puntos (z_k, z_l) que corresponden a los puntos (θ_k, θ_l) situados en el paralelogramo r_0, r_1, s_0, s_1.

- Si $r_{(i)}$ corresponde a un vértice $v_q \in V_6$ su conjunto de dominancia llega hasta r_0. Por tanto los usuarios situados en $v_q \in V_6$ prefieren z_l a z_k para los puntos (z_k, z_l) que corresponden a los puntos (θ_k, θ_l) situados en el paralelogramo r_0, r_1, s_0, s_1.

Al recorrer los paralelogramos si nos encontrarnos con un $r_{(i)} = r_q$ correspondiente a un $v_q \in V_3$ habrá que añadir los usuarios de ese vértice en el paralelogramo $r_{(i)}, r_{(i+1)}, s_{(j)}, s_{(j+1)}$. Si el $r_{(i)}$ corresponde a un $v_q \in V_6$ habrá que quitar los usuarios de ese vértice, ya que estos no estarán en el paralelogramo $r_{(i)}, r_{(i+1)}, s_{(j)}, s_{(j+1)}$.

Igualmente si al movernos por los paralelogramos nos encontramos con un $s_{(j)}$ que corresponde a un $v_q \in V_4$ habrá que añadir los usuarios de ese vértice en el paralelogramo $r_{(i)}, r_{(i+1)}, s_{(j)}, s_{(j+1)}$. Si el $s_{(j)}$ corresponde a un $v_q \in V_5$ habrá que quitar los usuarios de ese vértice ya que estos no estarán en el paralelogramo $r_{(i)}, r_{(i+1)}, s_{(j)}, s_{(j+1)}$.

El recorrido de todos los paralelogramos se realiza de acuerdo al siguiente esquema:

Se comienza con $i = 0$ y se recorren los índices j desde 0 hasta $|S|$.

- Para $(i, j) = (0, 0)$ se trabaja con paralelogramo limitado por las rectas correspondientes a $r_{(0)}$ y $r_{(1)}$, y por las rectas $s_{(0)}$ y $s_{(1)}$. Se tiene:

$$W_1 = |U(V_1)| + |U(V_5)| + |U(V_6)|.$$
$$W_2 = W_1.$$

- Para $(i, j) = (0, 1)$ se trata el paralelogramo limitado por r_0 y r_1, y por s_1 y s_2.

$$W_1 = |U(V_1)| + |U(V_5)| + |U(V_6)|.$$

$W_2 = W_2 \pm |U(\{v_q\})|$ según sea $s_{(1)} = s_q^+$ o s_q^-.

- Para $(i,j) = (0,2)$ es el paralelogramo limitado por $(r_{(0)}, r_{(1)})$ y por $(s_{(2)}, s_{(3)})$.

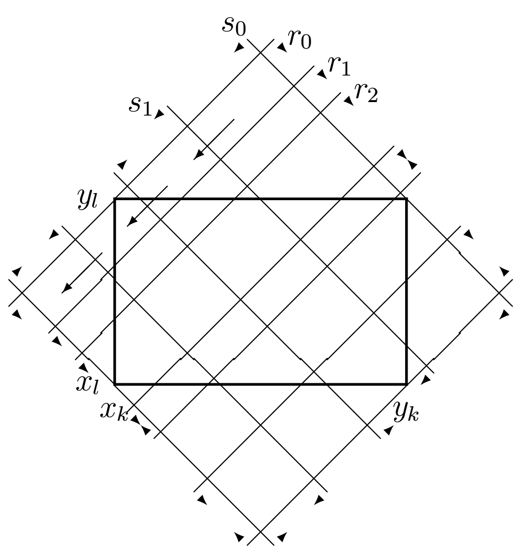
  $W_1 = |U(V_1)| + |U(V_5)| + |U(V_6)|$.
  $W_2 = W_2 \pm |U(\{v_q\})|$ según sea $s_{(2)} = s_q^+$ o s_q^-.

- En general, para $(i,j) = (0,j)$ se trabaja con el paralelogramo limitado por $r_{(0)}, r_{(1)}, s_{(j)}$ y $s_{(j+1)}$.

  $W_1 = |U(V_1)| + |U(V_5)| + |U(V_6)|$.
  $W_2 = W_2 \pm |U(\{v_q\})|$ según sea $s_{(j)} = s_q^+$ o s_q^-.

- Hasta $(i,j) = (0,|S|-1)$ donde es el paralelogramo limitado por $(r_{(0)}, r_{(1)})$ y por $(s_{(|S|-1)}, s_{(|S|)})$.

  $W_1 = |U(V_1)| + |U(V_5)| + |U(V_6)|$.
  $W_2 = W_2 \pm |U(\{v_q\})|$ según sea $s_{(|S|-1)} = s_q^+$ o s_q^-.



Orden en que se empiezan a recorrer los paralelogramos.

Una vez acabado con la lista S se incrementa el índice i. Tras hacer $i = i+1$ se vuelven a recorrer los subíndices de la lista S desde 0 hasta $|S|$.

- Para $(i,j) = (1,0)$ se trata del paralelogramo limitado por $r_{(1)}, r_{(2)}, s_{(0)}, s_{(1)}$.

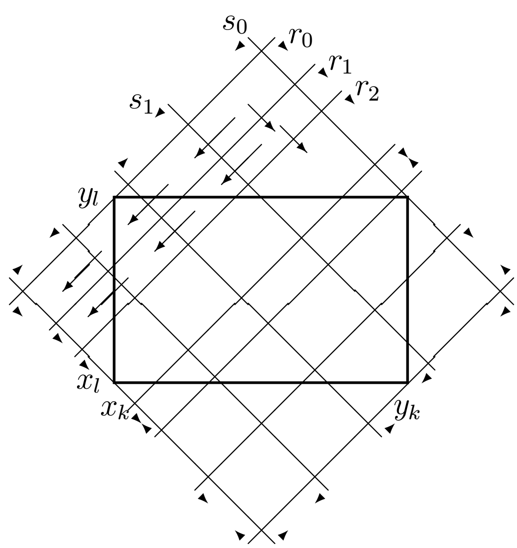
  $W_1 = W_1 \pm |U(\{v_q\})|$ según sea $r_{(1)} = r_q^+$ o r_q^-.
  $W_2 = W_1$.

- Para $(i,j) = (1,1)$ es el paralelogramo limitado por $(r_{(1)}, r_{(2)})$ y $(s_{(1)}, s_{(2)})$.

  $W_1 = W_1$.
  $W_2 = W_2 \pm |U(\{v_q\})|$ según sea $s_{(1)} = s_q^+$ o s_q^-.

Continuando así con $i = 1, j = 2$, se tiene el paralelogramo limitado por $(r_{(1)}, r_{(2)})$ y $(s_{(2)}, s_{(3)})$, hasta llegar a $i = 2, j = 0$ tratando el paralelogramo limitado por $(r_{(2)}, r_{(3)})$ y $(s_{(0)}, s_{(1)})$, luego el limitado por $(r_{(2)}, r_{(3)})$ y $(s_{(1)}, s_{(2)})$.

Se llegará a la situación general de índice i y j en el que se trata el paralelogramo limitado por $r_{(i)}, r_{(i+1)}, s_{(j)}, s_{(j+1)}$.



Orden en que se recorren los paralelogramos.

Obsérvese que, a partir de W_1 con $i = t, j = 0$, se calcula W_2 para $i = t, j = 1$, y a partir de éste se calcula W_2 para $i = t, j = 2, 3, \ldots$. Pero para $i = t+1, j = 0$, se calcula W_1 a partir de W_1 con $i = t, j = 0$. Luego partiendo de W_1 para $i = t+1, j = 0$, se calcula W_2 para $i = t+1, j = 1, 2, 3, \ldots$, y posteriormente se calcula el W_1 para $i = t+2, j = 0$.

Para cada índice i desde 0 hasta $|V_3| + |V_6| = |R|$ se ejecuta el paso siguiente que recorre la lista ordenada R mediante los $r_{(i)}$; para $i = 0, 1, \ldots |V_3| + |V_6|$.

Paso i

- Si $i = 0$ tomar $W_1 = |U(V_1)| + |U(V_5)| + |U(V_6)|$.
- Si $i \neq 0$ entonces:
  - cuando nos encontramos un r_q^+ ($r_{(i)} = r_q^+$), se hace $W_1 = W_1 + |U(v_q)|$ es decir se añaden los usuarios del vértice $v_q \in V_3$
  - cuando nos encontramos un r_q^- ($r_{(i)} = r_q^-$), se hace $W_1 = W_1 - |U(v_q)|$ es decir se restan los usuarios del vértice $v_q \in V_6$.
- Si $W_1 > |U|/2$ entonces los puntos del paralelogramo correspondientes a la arista $[x_k, y_k]$ son dominados por los de la arista $[x_l, y_l]$. El procedimiento del paralelogramo que se describe posteriormente elimina el correspondiente segmento. Aplicarlo con $j = 0$.
- Hacemos $W_2 = W_1$ y se recorre la lista ordenada S mediante los $s_{(j)}$; para $j = 0, 1, ...|V_4| + |V_5|$.
  - Cada vez que nos encontramos con un $s_{(j)} = s_q^-$ se hace $W_2 = W_2 + w(v_q)$ es decir se añaden los usuarios del vértice $v_i \in V_4$,
  - Cada vez que nos encontramos con un $s_{(j)} = s_q^+$ se hace $W_2 = W_2 - w(v_q)$ es decir se restan los usuarios del vértice $v_i \in V_5$.
- Si $W_2 > |U|/2$ aplicar el procedimiento del paralelogramo con los índices i y j actuales del orden de la listas ordenadas R y S.

Cuando se termina con la lista S de los $s_{(j)}$ finaliza el paso i.

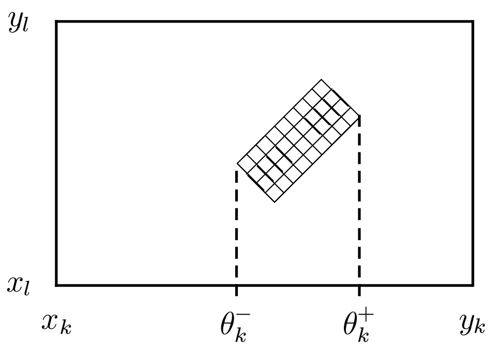
El paso B6 se completa con las instrucciones para controlar las ejecuciones del paso i. Cada vez que finaliza el paso i, se comprueba si el índice i verifica $i < |V_3| + |V_6|$. En ese caso se actualiza $i = i + 1$ y se vuelve a aplicar el paso i. Si $i = |V_3| + |V_6|$ tomar otro segmento $[x_l, y_l] \in N$ y volver al paso B4. Al terminar con todos los segmentos $[x_l, y_l] \in N$ pasar a otro segmento $[x_k, y_k] \in C$ y volver al paso B4, hasta que se han comprobado todos los segmentos de C.

El procedimiento encargado de identificar y eliminar del conjunto de candidatos los segmentos de puntos dominados es el siguiente.

Procedimiento del paralelogramo.

Si en algún momento W_1 o W_2 son mayores que $|U|/2$ significa que más de la mitad de los usuarios prefieren los puntos $z_l \in [x_l, y_l]$ a los puntos $z_k \in [x_k, y_k]$. Estos puntos z_k no podrán ser puntos de Condorcet y habrá que eliminarlos de C.

Para eliminar los puntos z_k dominados, que no pueden ser puntos de Condorcet, se proyecta el paralelogramo en el eje θ_k obteniéndose un intervalo $[\theta_k^-, \theta_k^+]$ que corresponde al subsegmento de puntos que se deben eliminar. El procedimiento tiene que identificar estos dos valores.



Proyección de un paralelogramo.

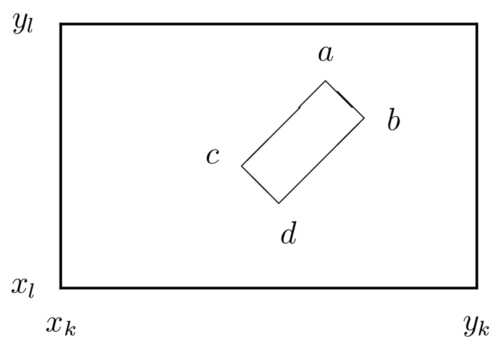
Para exponer el funcionamiento del procedimiento del paralelogramo con el limitado por $r_{(i)}, r_{(i+1)}, s_{(j)}, s_{(j+1)}$ denominemos a sus cuatro vértices de la siguiente forma:

1. Sea a el punto de intersección de $r_{(i)}$ y $s_{(j)}$.

2. Sea b el punto de intersección de $r_{(i+1)}$ y $s_{(j)}$.

3. Sea c el punto de intersección de $r_{(i)}$ y $s_{(j+1)}$.

4. Sea d el punto de intersección de $r_{(i+1)}$ y $s_{(j+1)}$.



Vértices de un paralelogramo.

Para determinar los valores del punto a, sean los semiplanos $H_{(j)}$ correspondiente a $s_{(j)}$ delimitado por la recta $s_{(j)} + \theta_l + \theta_k = 0$, y $H_{(i)}$ correspondiente a $r_{(i)}$ delimitado por la recta $r_{(i)} + \theta_l - \theta_k = 0$. En el punto de corte de las rectas correspondientes a $r_{(i)}$ y a $s_{(j)}$ los valores de θ_l coinciden y los de θ_k también. Por tanto, si restamos las ecuaciones de las rectas queda $s_{(j)} - r_{(i)} + 2\theta_k = 0$. Y despejando se obtiene

$$\theta_k = \tfrac{1}{2}(r_{(i)} - s_{(j)}).$$

Si sumamos las ecuaciones de las rectas queda $s_{(j)} + r_{(i)} + 2\theta_l = 0$. Despejando se obtiene

$$\theta_l = \tfrac{1}{2}(r_{(i)} + s_{(j)}).$$

Analogamente se obtienen los valores de los puntos b, c y d.

Por tanto, los cuatro puntos que constituyen los vértices del paralelogramo son:

1. El punto a es $a = (a_k, a_l) = \left(\frac{1}{2}(r_{(i)} - s_{(j)}), \frac{1}{2}(r_{(i)} + s_{(j)})\right)$
2. El punto b es $b = (b_k, b_l) = \left(\frac{1}{2}(r_{(i+1)} - s_{(j)}), \frac{1}{2}(r_{(i+1)} + s_{(j)})\right)$
3. El punto c es $c = (c_k, c_l) = \left(\frac{1}{2}(r_{(i)} - s_{(j+1)}), \frac{1}{2}(r_{(i)} + s_{(j+1)})\right)$
4. El punto d es $d = (d_k, d_l) = \left(\frac{1}{2}(r_{(i+1)} - s_{(j+1)}), \frac{1}{2}(r_{(i+1)} + s_{(j+1)})\right)$

El procedimiento del paralelogramo comprueba si $a_l < 0$ o si $d_l > l(x_l, y_l)$. En estos casos el paralelogramo queda por debajo o por encima del rectángulo y no se detecta ningún punto dominado. También se comprueba si $b_k < 0$ o si $c_k > l(x_k, y_k)$; en cuyo caso el paralelogramo queda a derecha o izquierda del rectángulo y tampoco hay puntos dominados que detectar. En estos cuatro casos la intersección del paralelogramo y de $[x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$ es vacía y ningún punto de $[x_l, y_l]$ domina a ningún punto de $[x_k, y_k]$. No hay que eliminar de C ningún trozo de $[x_k, y_k]$.

Si no se dan ninguno de los casos anteriores es que el paralelogramo intersecta con $[x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$. Por tanto hay puntos de $[x_k, y_k]$ dominados por $[x_l, y_l]$. Estos puntos dominados se obtienen proyectando el paralelogramo sobre el eje θ_k para después eliminar de C el trozo del segmento $[x_k, y_k]$ resultante.

Para calcular los valores θ_k^- y θ_k^+ del intervalo $[\theta_k^-, \theta_k^+]$ correspondientes al trozo del segmento $[x_k, y_k]$ a eliminar, hay que tener en cuenta los casos en que parte del paralelogramo quede fuera del rectángulo.

Para el cálculo de θ_k^+ hay que tener en cuenta si $b_l \leq 0$, si $0 < b_l < l(x_l, y_l)$ o si $b_l \geq l(x_l, y_l)$.

- Sea $b_l \leq 0$.

  Entonces θ_k^+ es la primera componente del punto de corte entre $s_{(j)}$ y $\theta_l = 0$. De $s_{(j)} + \theta_l + \theta_k = 0$ haciendo $\theta_l = 0$ y despejando queda

$$\theta_k^+ = -s_{(j)}$$

- Sea $0 < b_l < l(x_l, y_l)$.

  - Si $b_k < 0$ no hay intersección del paralelogramo con $[x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$.
  - Si $b_k > l(x_k, y_k)$ el vértice b queda fuera de $[x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$ y $\theta_k^+ = l(x_k, y_k)$ que es el mayor valor que puede tomar θ_k^+.
  - Si $0 < b_k < l(x_k, y_k)$ entonces $\theta_k^+ = b_k$.

  Por tanto, si $0 < b_l < l(x_l, y_l)$ entonces

$$\theta_k^+ = \min\{l(x_k, y_k), b_k\}.$$

- Sea $b_l \geq l(x_l, y_l)$.

  Entonces θ_k^+ es la primera componente del punto de corte entre $r_{(i+1)}$ y $\theta_l = l(x_l, y_l)$. De $r_{(i+1)} + \theta_l - \theta_k = 0$ haciendo $\theta_l = l(x_l, y_l)$ y despejando queda

$$\theta_k^+ = r_{(i+1)} + l(x_l, y_l)$$

Análogamente para calcular θ_k^- hay que tener en cuenta si $c_l \leq 0$, si $0 < c_l < l(x_l, y_l)$ o si $c_l \geq l(x_l, y_l)$.

- Sea $c_l \leq 0$.

  Entonces θ_k^- es la primera componente del punto de corte entre $r_{(i)}$ y $\theta_l = 0$. De $r_{(i)} + \theta_l - \theta_k = 0$ haciendo $\theta_l = 0$ y despejando queda

$$\theta_k^- = r_{(i)}$$

- Sea $0 < c_l < l(x_l, y_l)$.

  - Si $c_k > l(x_k, y_k)$ no hay intersección del paralelogramo con el rectángulo.
  - Si $c_k < 0$ el vértice c queda fuera del rectángulo y se tiene $\theta_k^- = 0$ que es el menor valor que puede tomar θ_k^-.
  - Si $0 < c_k < l(x_k, y_k)$ entonces $\theta_k^- = c_k$.

  Por tanto

$$\theta_k^- = \max\{0, c_k\}$$

- Sea $c_l \geq l(x_l, y_l)$.

  Entonces θ_k^- es la primera componente del punto de corte entre $s_{(j+1)}$ y $\theta_l = l(x_l, y_l)$. De $s_{(j+1)} + \theta_l + \theta_k = 0$ haciendo $\theta_l = l(x_l, y_l)$ y despejando queda

$$\theta_k^- = -(s_{(j+1)} + l(x_l, y_l))$$

Una vez calculados θ_k^+ y θ_k^- se elimina de C el subsegmento (z_k^+, z_k^-) del segmento (x_k, y_k) siendo $z_k^- = p([x_k, y_k], \theta_k^-)$ y $z_k^+ = p([x_k, y_k], \theta_k^+)$.

Finalmente, cuando se termina de recorrer los paralelogramos y de aplicar el procedimiento del paralelogramo a todos aquellos en los que había puntos dominados, los puntos que quedan en C no están dominados, es decir, que no hay más de la mitad de los usuarios que prefieran otro punto. El conjunto C estará constituido por todos los puntos de Condorcet.

El algoritmo 1B determina las soluciones de Condorcet en una red general con un número par de usuarios en un tiempo $O(|U|^3|A|^2)$.

Proposición *(Hansen y Labbé, (1988))*

La complejidad del algoritmo 1B es $O(|U|^3|A|^2 \log(|U||A|))$.

1.3.2. La solución de Condorcet en casos especiales.

En diversos tipos especiales de red la resolución del problema de Condorcet se simplifica. Analizamos la solución del problema de Condorcet en una línea o camino, en un árbol, en un ciclo, en un cactus o red simple y en un cactus generalizado.

Si un conjunto finito de usuarios están dispuestos en una *línea* continua la situación se puede describir con una red compuesta por un único camino P en cuyos vértices se encuentran los usuarios. Cualquier posible localización entre dos usuarios es dominada por otra del lado del que quedan una mayoría de usuarios. Por tanto si el número de usuarios es impar la localización de Condorcet es la ubicación del usuario que queda en medio. Si el número de usuarios es par son localizaciones de Condorcet todas las de la arista que une los dos usuarios que quedan en medio. Si los dos que quedan en medio coinciden en un vértice, es ésta la única localización de Condorcet.

Sea la red N con conjunto de vértices $V = \{v_i : i = 1, ..., n\}$ y conjunto de aristas $E = \{[v_{i-1}, v_i] : i = 2, ..., n\}$. El problema de Condorcet en N se resuelve con el siguiente procedimiento.

Algoritmo 1L

Paso 1

Hallar el número de usuarios en cada vértice dado por $w_i = |U(v_i)|$, para $i = 1, ..., n$.

Paso 2

Acumular los pesos w_i correlativamente en $a_i = (w_1 + ... + w_i)$ para $i = 1, ..., n$.

Paso 3

Determinar los índices j y k tales que $a_j = \min\{i : a_i \geq |U|/2\}$. y $a_k = \max\{i : a_i \leq |U|/2\}$.

Paso 4

Obtener el conjunto de Condorcet C de la siguiente forma:

- Si $a_j > |U|/2$ entonces $C = \{v_j\}$.
- Si $a_j = |U|/2$ entonces

$$C = \bigcup_{i=j}^{k} [v_i, v_{i+1}].$$

Es bien conocido que la solución del problema de la mediana en una línea o camino coincide con la descrita anteriormente dado que ante cualquier posible localización para la mediana, tambien conviene desplazarla hacia el lado del que se encuentre una mayoría de usuarios; disminuye la distancia a más usuarios que a los que aumenta y por tanto se mejora la función objetivo. Esta coincidencia entre la mediana y la solución de Condorcet se va destruyendo al considerar redes cada vez más generales pero se mantiene relativamente para redes sencillas.

Un árbol y un ciclo son las redes más sencillas que se derivan de un camino. En un *árbol*, dada cualquier posible localización del servicio, si una mayoría de usuarios se encuentran en una de las subredes en que queda dividido el árbol por dicho punto, conviene desplazarla hacia ese lado. Dado que esto es cierto, tanto para el problema de la mediana cómo para el problema de la localización de Condorcet, se tiene que, en un árbol $C = M \neq \emptyset$.

Proposición *(Hansen y Thisse, (1981))*

> *Si la red N es un árbol T entonces el conjunto de soluciones de Condorcet es no vacío y coincide con el conjunto de medianas.*

Por tanto para calcular C se aplica el algoritmo de Goldman2 (Goldman, (1971)) descrito anteriormente para calcular las medianas de un árbol T.

Sea la red $N = T$ con conjunto de vértices $V = \{v_i : i = 1, ..., n\}$ y conjunto de aristas E.

Algoritmo 1T

Paso 1

Tomar $T' = T$ y $C = \emptyset$. Para cada vértice v_i del árbol calcular $w_i = |U(v_i)|$, para $i = 1, ..., n$.

Paso 2 Seleccionar un vértice hoja v_k de T'.

- Si $w_k > |U|/2$ entonces $C = C \cup \{v_k\}$. Parar.
- Si $w_k = |U|/2$ entonces $C = C \cup [v_k, v_l]$.

Borrar de T' el vértice v_k y la única arista con extremo en v_k; $[v_k, v_j]$.

Hacer $w_j = w_j + w_k$ y volver al paso 2.

Un sencillo análisis de este algoritmo revela que el criterio para ir contrayendo las aristas del árbol T hasta obtener la localización de Condorcet o mediana obedece más al criterio de Condorcet que al de la mediana.

Por tanto, si la red es un camino o un árbol siempre hay un punto de Condorcet; es decir $C \neq \emptyset$. En un *ciclo*, que una línea cerrada, puede no existir localizaciones de Condorcet. El ejemplo más sencillo de una red con $C = \emptyset$ es un ciclo con tres usuarios equidistantes. Pero en caso de existir localizaciones de Condorcet en un ciclo coinciden con las medianas.

Sea la red $N = O$ con conjunto de vértices $V = \{v_i : i = 1, ..., n\}$ y conjunto de aristas $E = \{[v_{i-1}, v_i] : i = 2, ..., n\} \cup [v_n, v_1]$. Sea $l(O)$ la longitud total del ciclo;

$$l(O) = l(v_n, v_1) + \sum_{i=2}^{n} l(v_{i-1}, v_i)$$

Definición

> *La* ***antípoda*** *del punto $x \in O$ es el punto $a(x) \in O$ tal que $d(x, a(x)) = l(O)/2$.*

En (Labbé, (1983)) se obtienen los tres siguientes resultados relativos a la solución de Condorcet en un ciclo O.

a) Si c es un punto de Condorcet del ciclo O entonces para todo punto $x \in O$ se cumple que al menos la mitad de los usuarios están en el semiciclo entre x y su antípoda $a(x)$ que contiene a c (incluyendo a los que estén x pero excluyendo los que estén en $a(x)$). En otras palabras se cumple que el número de usuarios que están en el camino de x a su antípoda $a(x)$ que contiene a c menos los usuarios que están en $a(x)$, es mayor o igual que el número de usuarios que están en el camino de x a su antípoda $a(x)$ que no contiene a c menos los usuarios que están en x.

b) Si c es un punto de Condorcet del ciclo O y x e y son dos puntos cualesquiera de N de forma que c pertenece al camino mínimo que une x con y entonces el número de usuarios que están en el camino mínimo que va de x a y son más que el número de usuarios que están en el camino mínimo que va de $a(x)$, antípoda de x, a $a(y)$, antípoda de y.

c) Si c es un punto de Condorcet entonces el número de usuarios que están en c es mayor que el número de usuarios que están en su antípoda c'.

Estas relaciones permiten comprobar si cada uno de los vértices del ciclo es una solución de Condorcet lo que proporciona un procedimiento para resolver el problema de Condorcet en un ciclo.

Dados dos puntos x e y distintos del ciclo, el semiciclo de x a su antípoda $a(x)$ que contiene a y es el camino de x a su antípoda $a(x)$ que pasa por y. Ya que el camino mínimo entre dos puntos x e y se denotan $P^*(x,y)$ se tiene que el semiciclo de x a su antípoda $a(x)$ que contiene a y es $P^*(x,y) \cup P^*(y,a(x))$.

Por tanto estos resultados se formalizan en la siguiente proposición:

Proposición (*Labbé, (1983)*)

Sea la red $N = O$ un ciclo.

a) *Si $c \in C$ y $x \in O$ se tiene:*

$$|\{u \in U : a(x) \neq v(u) \in P^*(x,c) \cup P^*(c,a(x))\}| \geq |U|/2.$$

$$|U(P^*(x,c) \cup P^*(c,a(x)) - \{a(x)\})| \geq |U(P^*(x,a(c)) \cup P^*(a(c),a(x)) - \{x\})|.$$

b) *Si $c \in C$ y $x, y \in O$ son tales que $c \in P^*(x,y)$ se tiene:*

$$|\{u \in U : v(u) \in P^*(x,y)\}| \geq |\{u \in U : v(u) \in P^*(a(x),a(y))\}|$$

c) *Se tiene:*

$$|U(c)| = |\{u \in U : v(u) = c\}| \geq |\{u \in U : v(u) = a(c)\}| = |U(a(c))|.$$

Como una combinación de los árboles y los ciclos surgen las *redes simples* o *cactus*. La apariencia de un cactus es la misma que la de un árbol donde las aristas son sustituidas por ciclos. Un cactus es una red en la que la intersección de dos ciclos cualesquiera es vacía o sólo es un vértice.

Las condiciones para las localizaciones de Condorcet en un cactus se basan en la existencia de ciertos emparejamientos entre los usuarios establecidos a través de aplicaciones biyectivas. Si para algún emparejamiento entre usuarios existe un punto que pertenece a un camino mínimo entre cada pareja de usuarios para todas las parejas entonces ese punto es mediana y localización de Condorcet.

Teorema *(Hansen, Thisse y Wendell, (1981))*

Si existe alguna aplicación biyectiva $T : U \longrightarrow U$ tal que existe un punto x tal que para todo $u \in U$ el punto x pertenece a algún camino mínimo de $v(u)$ a $v(T(u))$ entonces $x \in C \cap M$.

Por tanto, se tiene que en toda red simple S, para cualquier aplicación biyectiva T se cumple:

$$\bigcap_{u \in U} P^*(v(u), v(T(u))) \subseteq C \cap M$$

Esta condición suficiente para la localización de Condorcet fué establecida también como necesaria para las redes simples en (Labbé, (1983))

Teorema *(Labbé, (1983))*

> *Si c es un punto de Condorcet que pertenece a un ciclo de un cactus entonces existe alguna aplicación biyectiva $T : U \longrightarrow U$ tal que existe un $x \in N$ que pertenece a algún camino mínimo $P^*(v(u), v(T(u)))$ de $v(u)$ a $v(T(u)$ para todo $u \in U$.*

Como corolarios de este resultado de (Labbé, (1983)), se obtiene que en una red simple toda solución de Condorcet es mediana $C \subseteq M$. Más concretamente, en una red simple toda solución de Condorcet está en un vértice que es una mediana o en una arista que pertenece por completo a $C \cap M$. Finalmente en Labbé, (1985) se prueban también los siguientes resultados:

Proposición *(Labbé, (1985))*

> *Si $S = N$ es una red simple entonces $C = M$ o $C = \emptyset$.*

Teorema *(Labbé, (1985))*

> *Si $|U|$ es par, una arista $[v_i, v_j]$ está contenida en $C \cap M$ si y solo si v_i y $v_j \in C \cap M$ y $d(v_i, v_j) = l(v_i, v_j)$.*

Parte de estos resultados se extiende a redes algo más generales denominadas *catus generalizados*. Un vértice de *corte* de una red es un vértice que divide a la red en dos partes de forma que todos los caminos entre una parte y la otra de la red pasan por dicho vértice. Un *bloque* de una red es una subred maximal sin vértices de corte. Los bloques de los árboles son las aristas. Los bloques de los cactus son los ciclos y las aristas que no están en ciclos. Un *cactus generalizado* es una red en la cual cada bloque con más de cuatro vértices es un ciclo.

Proposición *(Labbé, (1985))*

> *En un cactus generalizado un punto de Condorcet es una mediana.*

Finalmente existe una condición necesaria y suficiente para caracterizar la coincidencia de los puntos de Condorcet y las medianas en redes sin aristas redundantes. Una arista $[v_i, v_j]$ es redundante si $l(v_i, v_j) > d(v_i, v_j)$.

Teorema *(Bandelt, (1985))*

Una condición necesaria y suficiente para que $C = M$ en una red N sin aristas redundantes es que se verifiquen:

a) *Dados tres vértices v_i, v_j y v_k existe uno y sólo un vértice v_p que está entre v_i y v_k, y entre v_j y v_k (probablemente ese vértice v_p sea o v_i, o v_j o v_k).*

b) *Si para todo vértice v y para todo subconjunto de vértices V' la intersección de los puntos que están entre v y cualquier $v' \in V'$ es el propio v entonces existen dos puntos v'_1 y $v'_2 \in V'$ tales que v es el único punto que esta a la vez entre v y v'_1 y entre v y v'_2.*

1.3.3. Resolución de problemas de Simpson

Cuando no existe una localización de Condorcet se acude a la solución de Simpson. La medida de lo objetable que es un punto $x \in N$ de la red viene dada por la función:

$$R(x) = \max_{y \in N} |\{u \in U : d(y, u) < d(x, u)\}|$$

conocida como puntuación de Sipmson del punto x. Si no existe solución de Condorcet es porque ningún punto verifica $R(x) \leq |U|/2$. La solución de Simpson se determina buscando el menor γ tal que $R(x) \leq \gamma|U|$ y los puntos s tales que $R(s) \leq \gamma|U|$. Esto equivale a obtener el punto $s \in N$ tal que

$$R(s) = \min_{x \in N} R(x).$$

Sin embargo, dado que el número de puntos de la red es infinito hay que acudir a una búsqueda dicotómica de γ.

En el peor caso se tiene $R(s) = |U| - 1$ por lo que la búsqueda dicotómica de $\gamma|U|$ debe hacerse en los enteros entre 0 y $|U| - 1$. En (Hansen y Labbé, (1988)), se propone un procedimiento para realizar la búsqueda dicotómica basado en una modificación del algoritmo 1, que denominamos *algoritmo 1R*, en el que se sustituye $|U|/2$ por otro valor R entero y los candidatos se reducen a los de un subconjunto de vértices $V' \subseteq V$ y a las aristas de una subred $N' \subseteq N$. La descripción del algoritmo de (Hansen y Labbé, (1988)) para determinar las localizaciones de Simpson en redes generales que denominamos *algoritmo 1S* es la siguiente:

Algoritmo 1S *(Hansen y Labbé, (1988))*

Paso 0

Inicialmente se toma $N' = N$, $V' = V$, $R^- = 0$ y $R^+ = |U| - 1$.

Paso 1

Si $R^+ - R^- = 1$ entonces N' es el conjunto de puntos de Simpson con una puntuación $R(s) = R^+$.

En otro caso sea

$$R = \left\lceil \frac{R^+ + R^-}{2} \right\rceil$$

Paso 2

Aplicar el algoritmo 1R teniendo en cuenta que no es necesario estudiar como posibles puntos de Simpson todos los vértices, sino los que estén en V', ni todas las aristas, sino las aristas y subaristas que estén en N'.

Además el número de usuarios necesarios para que un punto sea dominado por otro es R y no $|U|/2$. Sea S el resultado de dicho algoritmo.

Paso 3

Si $S = \emptyset$ entonces hacer $R = R^-$ y volver al paso 1.

En otro caso hacer $R = R^+$, $N' = S$, $V' = V \cap S$ y volver al paso 1.

Teniendo en cuenta el número de valores enteros de la búsqueda dicotómica y las modificaciones del algoritmo 1R se obtiene la complejidad del algoritmo 1S.

Proposición

El número de operaciones del algoritmo 1S es $O(|V|^4|A|^2 \log |U| \log |V|)$.

En algunas redes especiales se puede reducir el intervalo para la búsqueda dicotómica.

Proposición *(Hansen, Thisse y Wendell, (1986))*

Si N es un árbol el conjunto de soluciones de Simpson coincide con el conjunto de medianas. $S = M$.

Proposición *(Bandlet y Labbé, (1986))*

> *Si s es una localización de Simpson en un catus generalizado o una red de cuatro puntos entonces:*
> $$R(s) \leq \frac{2}{3}|U|.$$

Estos resultados permiten reducir el intervalo de búsqueda en los árboles, los ciclos, los cactus y las redes de cuatro puntos. En las redes planares la situación es mejor que para las redes en general pero no está caracterizada. Una red es *planar* si se puede dibujar en el plano sin que se corten dos aristas. En general no se conocen redes planares en las cuales $R(s) > 3/4|U|$.

1.3.4. Resolución de problemas de puntos plurales.

La diferencia entre las soluciones de Condorcet y las soluciones plurales consiste en la sustitución de la mayoría absoluta por la mayoría simple. La dominancia entre las localizaciones se establece cuando el número de usuarios que prefieren la otra localización es más de la mitad, para la solución de Condorcet, y cuando es mayor que los que prefieren la segunda a la primera, para las localizaciones plurales. Por tanto, las diferencias vienen condicionadas por el número de usuarios que pueden permanecer indiferentes entre ambas localizaciones. De aquí que en muchas circunstancias las soluciones de Condorcet y las localizaciones plurales coincidan. Los resultados relativos a las soluciones plurales son muy similares a los de las localizaciones de Condorcet. Por ejemplo, un primer resultado establece que en los árboles las soluciones plurales coinciden con las medianas.

Proposición *(Hansen, Thisse y Wendell, (1986))*

> *Si N es un árbol el conjunto de soluciones plurales coincide con el conjunto de medianas; $P = M$.*

Por tanto si N es un árbol siempre existe una solución plural; $P \neq \emptyset$. En las redes en general existen varias condiciones suficientes pero no necesarias para la existencia de soluciones plurales como son la simetría de la red respecto a un punto, o una particular distribución de los usuarios en las subredes disconexas resultantes al eliminar un vértice de corte y las aristas adyacentes o un vértice de corte fuerte y las aristas adyacentes.

Definición

> *Se dice que un punto $x \in N$ tiene la* ***propiedad de simetría de los usuarios respecto al punto*** *si para una aplicación biyectiva T definida sobre U, entonces x es un punto que está entre $v(u)$ y $v(T(u))$ para todo $u \in U$;*
>
> $$x \in P^*(v(u), v(T(u))), \forall u \in U).$$

Es decir, que x está en un camino que va de u a $T(u)$, y eso ocurre con todos los usuarios u.

Teorema *(Hansen, Thisse y Wendell, (1986))*

> *Sea N una red cualquiera, si x tiene la propiedad de simetría de los usuarios respecto al punto para una aplicación biyectiva T sobre U entonces x es una solución plural y x es una mediana $x \in M \cap P$.*

Como corolario se obtiene que si $x \in N$ tiene la propiedad de simetría de los usuarios respecto al punto para una aplicación biyectiva T sobre U entonces x es un vértice que es una solución plural y una mediana a la vez $x \in M \cap P \cap V$ o $x \in [v_i, v_j]$ una arista de puntos que son medianas y soluciones plurales a la vez $[v_i, v_j] \in M \cap P$.

De estos resultados se obtiene el algoritmo propuesto en (Hansen, Thisse y Wendell, (1986)) para chequear la propiedad de simetría de los usuarios con respecto a un punto que denominamos *algoritmo HTW.*

Algoritmo HTW *(Hansen, Thisse y Wendell, (1986))*

Paso 1

> Se toma x un punto de N.
>
> Se construye un grafo bipartito $G = (V', V", A')$ de forma que V' tiene un número $|U|$ de elementos que corresponden con los usuarios de N. Igualmente $V"$ tiene un número $|U|$ de elementos que corresponden con los usuarios de N. Vamos a llamar $v'(u)$ a los elementos de V', y $v"(u)$ a los elementos de $V"$.
>
> Sean u_1 y u_2 dos usuarios de N pudiendo ocurrir que $u_1 = u_2$.
>
> Si $x \in E(u_1, u_2)$ añadir a A' una arista $(v'(u_1), v"(u_2))$.

Paso 2

> Determinar un conjunto de aristas de G no adyacentes y de máxima cardinalidad posible. A esto se le llama emparejamiento máximo y se puede hallar con el algoritmo de Hopcroft y Karp (Hopcroft y Karp, (1973)).
>
> Si este emparejamiento máximo está formado por un número $|U|$ de aristas, entonces ese emparejamiento define una aplicación biyectiva T sobre U, de forma que $x \in P^*(v(u), v(T(u)))$ para todo $u \in U$.

Este algoritmo tiene un orden de complejidad $O(|U|^{5/2})$. Para aplicar este algoritmo a la búsqueda de soluciones plurales sólo es necesario tomar como x los vértices de N, en virtud del corolario anterior. De todas formas la propiedad de simetría de los usuarios respecto al punto es una condición suficiente pero no necesaria. Pueden existir soluciones plurales que no cumplan la propiedad de simetría de los usuarios respecto al punto.

Al borrar de la red N un vértice de corte o punto de articulación v_i y las aristas adyacentes a él se obtiene un conjunto de subredes disconexas $N_1, N_2, ..., N_t$. Las caraterísticas de estas redes pueden permitir determinar si el vértice v_i tiene que ser la localización óptima en muchos problemas. En (Hansen, Thisse y Wendell, (1986)) se establece que si

$$|\{u \in U : v(u) \in N_k\}| \leq |U|/2 \ \forall k = 1, 2, ..., t$$

entonces x es una solución plural y x es una mediana $x \in M \cap P$.

Además una arista de corte es la que da lugar a dos subredes disconexas al ser eliminada de la red; y v_i es un vértice de corte fuerte si todas sus aristas adyacentes son aristas de corte. En (Hansen, Thisse y Wendell, (1986)) se establece que si $N_1, N_2, ..., N_t$ son las subredes disconexas que se obtienen al borrar de la red N el vértice de corte fuerte v_i y los arcos adyacentes a él entonces

$$v_i \in M \cap P \Leftrightarrow |\{u \in U : v(u) \in N_k\}| \leq |U|/2 \ \forall k = 1, 2, ..., t$$

Un resultado similar sobre las implicaciones de la concentración de una mayoría de usuarios en parte de la red ya había sido establecido por Witzgall (Witzgall, (1965)) quien prueba que:

- Si $|\{u \in U : v(u) = v_i\}| \geq |U|/2$ entonces $v_i \in M \cap P$.
- Si $|\{u \in U : v(u) = v_i\}| > |U|/2$ entonces $v_i = M = P$.

1.4. Otras soluciones.

Se han propuesto otros conceptos de solución en el contexto de la localización mediante votos. Algunos de estos conceptos, como las p-votaciones en (Vohra, (1989)) o los puntos k-óptimos introducidos en (Bauer y Domschke, (1993)) tienen muy poca relación con los problemas tratados en la presente memoria. Las soluciones locales y los puntos βCondorcet son conceptos muy próximos a los anteriormente definidos.

Las *soluciones locales* se obtienen al comparar un punto x con los puntos de su entorno, es decir, los que están a una distancia de él menor que ε. La bola de centro x y radio ε en la red N es el conjunto de puntos:

.

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in N : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Un punto $p \in N$ es una *solución local* para un problema de localización si existe un $\varepsilon > 0$ tal que ningún punto $x \in B(p, \varepsilon)$ es mejor localización que p. Así podemos considerar diferentes conceptos de soluciones locales en localización en general y en localización mediante votos en particular. Por ejemplo:

Definición

- *Un punto $p \in N$ es una solución* ***plural local*** *si existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier punto $x \in B(p, \varepsilon)$ se cumple que $|x \prec p| \leq |p \prec x|$.*
- *Un punto $c \in N$ es una solución* ***de Condorcet local*** *si existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier punto $x \in B(c, \varepsilon)$ se cumple que $|x \prec c| \leq |U|/2$.*
- *Un punto $m \in N$ es una* ***mediana local*** *si existe un $\varepsilon > 0$ tal que $F(m) \leq F(x)$ para todo $x \in B(m, \varepsilon)$.*

Se tiene el siguiente resultado.

Proposición

- *(Wendell y McKelvey, (1981))*

  En una red cualquiera siempre hay una solución local plural en un vértice. Además si el número de usuarios es impar todas las soluciones locales plurales están en los vértices.

- *(Hansen, Thisse y Wendell, (1986))*

  En una red cualquiera las soluciones locales plurales y locales de Condorcet coinciden con las medianas locales.

- *(Hansen, Thisse y Wendell, (1986))*

  En un árbol las soluciones locales plurales y locales de Condorcet coinciden con las medianas.

El concepto de *punto βCondorcet* es definido en (Bandelt, (1985)). Un punto x será un punto βCondorcet si el número de usuarios que prefieren otro punto y más una proporción β de los indiferentes entre ambos puntos son menos de la mitad de los usuarios.

Definición

El punto x es un punto βCondorcet con $0 \leq \beta \leq 1$ si y sólo si

$$|y \prec x| + \beta|y \sim x| \leq |U|/2, \forall y \in N.$$

Para $\beta = 0$ se tienen los puntos de Condorcet y para $\beta = 1/2$ los puntos plurales.

1.5. Relación con otros problemas.

Otro de los focos de interés en localización mediante votos es la comparación con otros problemas de localización. Por un lado, se determina la calidad de las soluciones aportadas por los distintos conceptos propuestos en localización mediante votos a través del grado de optimalidad con los criterios de los problemas clásicos de localización. Por otro, se establecen las concidencias con las soluciones de la localización competitiva derivados de la Teoría de Juegos.

Los principales resultados se han obtenido al comparar las soluciones de Condorcet con la mediana, el centro y con la solución de Nash en localización competitiva, y las soluciones de Simpson con la mediana y con la solución de Stackelberg en localización competitiva.

1.5.1. La solución de Condorcet y la mediana.

En algunas circunstancias los puntos de Condorcet o Simpson u otras localizaciones óptimas siguiendo criterios derivados de los procesos de votación coinciden con las medianas. Sin embargo, una solución mediante votación también puede diferir bastante de una solución en la que se busca minimizar la distancia media de los usuarios por lo que frecuentemente es calificada como ineficiente. Pero por otro lado, una mediana también puede ser insatisfactoria para un gran número de usuarios. Sea la función objetivo del problema de la mediana:

$$F(x) = \sum_{u \in U} d(v(u), x).$$

Proposición *(Hansen y Thisse, (1981))*

Sea $c \in C$ un punto de Condorcet y sea $m \in M$ una mediana de una red general. Entonces se cumple que

$$\frac{F(c)}{F(m)} \leq 3$$

Proposición *(Labbé, (1985))*

Sea $c \in C$ un punto de Condorcet y sea $m \in M$ una mediana de una red general. Entonces se cumple que

$$\frac{F(c)}{F(m)} \leq \frac{2|U| - \left\lceil \frac{|U|}{2} \right\rceil - 1}{\left\lceil \frac{|U|}{2} \right\rceil + 1}$$

Esta última es la mejor cota posible en el sentido de que es alcanzada en algún caso. El número ciclomático ν de una red cualquiera N es el número máximo de ciclos independientes de N. En redes conexas $\nu = m - n + 1$. En (Labbé, (1985)) se conjetura que

$$\frac{F(c)}{F(m)} \leq \max \left\{ 1, \frac{3\nu - 1}{\nu + 1} \right\}$$

1.5.2. La solución de Condorcet y el centro.

También se ha estudiado la relación entre los problemas de Condorcet y del centro tratando de establecer comparaciones de las soluciones de ambos problemas en terminos de la función objetivo del problema del centro. Esta función mide la distancia desde un punto x al usuario que está más alejado de él y viene dada por:

$$G(x) = \max_{u \in U} d(v(u), x)$$

En general los centros no coinciden con los puntos de Condorcet. Incluso si N es un árbol los centros y los puntos de Condorcet son distintos. Los centros generalmente no se encuentran situados en un vértice sino entre dos vértices. Por ejemplo si se tiene una única arista con usuarios en los vértices de los extremos el centro será el punto medio de la arista independientemente de cual sea el punto de Condorcet que será uno de los dos vértices o ambos según la distribución de usuarios.

Teorema *(Hansen y Thisse, (1981))*

Sea T un árbol, $c \in C$ un punto de Condorcet y $r \in R$ un centro. Entonces

$$\frac{G(c)}{G(r)} \leq 2.$$

Teorema *(Hansen y Thisse, (1981))*

Sea N una red cualquiera, $c \in C$ un punto de Condorcet y $r \in R$ un centro. Entonces

$$\frac{G(c)}{G(r)} \leq 3.$$

1.5.3. Las soluciones de Condorcet y de Nash.

Los problemas de localización mediante votos están relacionados con los problemas de localización competitiva principalmente en la medida en que se puede interpretar que las localizaciones candidatas a recibir el punto de servicio compiten por captar las preferencias del usuario. El problema estándar de localización competitiva consiste en establecer la localización de dos servicios que compiten por atraer al mayor número posible de usuarios. Se considera que dadas dos localizaciones posibles, un usuario prefiere la localización que está situada más cerca de él. En el caso de que dos localizaciones estén a la misma distancia de un usuario, el usuario es indiferente entre las dos y se considera que va a hacer igual uso de ambas. La solución de un problema de localización competitiva es un par de localizaciones de forma que ninguno de los competidores atraiga a un mayor número de usuarios al cambiar su localización por otra, considerando que el otro competidor permanece fijo. Se pueden aplicar diversos conceptos de la teoría de juegos bipersonales para fijar los criterios para determinar las localizaciones óptimas.

Definición

*Se dice que $x, y \in N$ es una **solución de Nash** si $\forall z, t \in N$*

$$|x \prec y| + \tfrac{1}{2}|x \sim y| \geq |z \prec y| + \tfrac{1}{2}|z \sim y|$$
$$|y \prec x| + \tfrac{1}{2}|x \sim y| \geq |t \prec x| + \tfrac{1}{2}|t \sim x|$$

En otras palabras, la localización x es mejor que cualquier otro punto z si el competidor se mantiene en la localización y, de igual forma la localización y es mejor que cualquier otro punto t si el poseedor de la facilidad que está situada en x la mantiene fija.

Proposición *(Wendell y McKelvey, (1981))*

Las soluciones de Nash son parejas de soluciones plurales, y por tanto son parejas de soluciones de Condorcet.

1.5.4. La solución de Simpson y la mediana

Al comparar una solución de Simpson s con la mediana m se pueden encontrar ejemplos en los que

$$F(s) = \left(\frac{2|U|}{k} - 1\right) F(m)$$

siendo $k \geq 3$.

Proposición *(Bandelt y Labbé, (1986))*

Sea N una red con $|U| \geq 3$, sea m una mediana y sea x un punto cualquiera sobre la red entonces

$$\frac{F(x)}{F(m)} \leq \frac{2|U|}{k} - 1$$

siendo $k = |U| - |m \prec x| \geq 1$.

Proposición *(Bandelt y Labbé, (1986))*

Sea N una red con $|U| \geq 3$, $m \in M$ y $x \in N$. Si $R^*(x) = \max\{|U|/2, R(x)\}$, siendo $R(x)$ la puntuación de Simpson entonces

$$\frac{F(x)}{F(m)} \leq \frac{|U| + R^*(x) - 1}{|U| - R^*(x) + 1}$$

si $R(x) < |U|$.

Proposición *(Bandelt y Labbé, (1986))*

Sea N una red con $|U| \geq 3$, sea m una mediana, entonces para todo s punto de Simpson $F(s) \leq (|U| - 1)F(m)$. Además existe al menos un punto de Simpson tal que

$$F(s) \leq \left(\frac{2|U|}{3} - 1\right) F(m).$$

Proposición *(Bandelt y Labbé, (1986))*

Si x es un punto cualquiera de un ciclo O tal que $R(x) < |U|$ y m es una mediana de O entonces

$$\frac{F(x)}{F(m)} \leq \max\left\{|U|, \frac{R(x)}{|U| - R(x)}\right\}$$

Teorema *(Bandelt y Labbé, (1986))*

Sea s un punto de Simpson, m una mediana, y sea x un punto sobre un cactus generalizado tal que $R(x) < |U|$ entonces se cumple que:

$$\frac{F(x)}{F(m)} \leq \max\left\{|U|, \frac{R(x)}{|U| - R(x)}\right\}$$

y por tanto $F(s) \leq 2F(m)$.

Existen dos únicas redes de cuatro puntos que no son cactus.

Proposición *(Bandelt y Labbé, (1986))*

Sea N una red de cuatro puntos a lo sumo, sea s un punto de Simpson, m una mediana, y x un punto sobre N tal que $R(x) < |U|$ entonces

$$\frac{F(x)}{F(m)} \leq \frac{R^*(x)}{|U| - R^*(x)}$$

En general no se conocen redes planares en las cuales $F(s) > 3F(m)$ aunque no se ha encontrado nigún resultado que refleje esta diferencia.

1.5.5. Las soluciones de Simpson y de Stackelberg

La relación entre la solución de Simpson y la solución de Stackelberg en localización competitiva se establece en los siguientes términos. La solución de Stackelberg es la solución del problema de localización competitiva en el que un competidor al que se llama lider elige primero la localización de su facilidad $x \in N$ de forma que sea cual sea la reacción que tenga algún otro competidor se garantiza la localización lo más favorable posible. Después de que el lider toma su decisión, el otro competidor que ya conoce la localización del lider elige la mejor posible, esto es, la que maximice el número de usuarios que prefieren su facilidad.

Defnción *Se dice que $x, y \in N$ es una **solución de Stackelberg** si $\forall z, t \in N$*

- $\min |x \prec r| + \frac{1}{2}|x \sim r| \geq \min |z \prec r| + \frac{1}{2}|z \sim r|$
- $|y \prec x| + \frac{1}{2}|x \sim y| \geq |t \prec x| + \frac{1}{2}|t \sim x|$

Siempre existe una solución de Stackelberg.

Si x, y es una solución de Stackelberg donde x es el lider de esa solución entonces el número de usuarios que utilizan la facilidad situada en x es $|x \prec y| + \frac{1}{2}|x \sim y|$ y es una cantidad menor o igual que el número de usuarios que utilizan la facilidad situada en y que es $|y \prec x| + \frac{1}{2}|x \sim y|$. Cuando $|x \prec y| + \frac{1}{2}|x \sim y| = |y \prec x| + \frac{1}{2}|x \sim y|$ la solución de Stackelberg es una solución de Nash.

Proposición

Sea x, y una solución de Stackelberg, si $|x \sim y| = 0$ entonces la localización del lider es una solución de Simpson.

Si x es una solución de Simpson entonces x es el lider en una solución de Stackelberg x, y en la cual $|x \sim y| = 0$.

Cuando $|x \prec y| + \frac{1}{2}|x \sim y| = |y \prec x| + \frac{1}{2}|x \sim y|$ la solución de Stackelberg es una solución de Nash. Si además $|x \sim y| = 0$ entonces x es una solución de Condorcet.

2. La solución Tolerante de Condorcet

2.1. Introducción

Una solución de Condorcet al problema de la localización de un punto de servicio mediante votos de los usuarios es una localización tal que ninguna otra localización esté más próxima a una mayoría estricta de votantes. Sin embargo no siempre existe una solución de Condorcet. Este inconveniente se puede solventar usando el concepto de solución de Simpson en el que se rebaja el numero de votantes necesario para rechazar una localización. Sin embargo, en el concepto de solución de Condorcet se considera que el sistema de preferencia de cada uno de los usuarios es el siguiente: si el usuario está más próximo a x que a y entonces el usuario prefiere localizar el servicio en x, y si ambas localizaciones x e y están a la misma distancia del usuario entonces el usuario es indiferente entre ambas. La introducción de un umbral α constante para la preferencia de los usuarios da una estructura de preferencias usual en Toma de Decisiones llamada *semiorden*. Con esta estructura dos localizaciones x e y para situar un servicio son indiferentes para un usuario u si la distancia desde el usuario u hasta x y la distancia desde el usuario u hasta y se diferencian como mucho en una cantidad α. Las soluciones αCondorcet se obtienen considerando que todos los usuarios tienen esta estructura de preferencia. En (Labbé, (1990)) se proponen los puntos α-antiCondorcet para los servicios no deseables usando esta misma idea. Sin embargo no han sido desarrollados.

En este capítulo se introduce los conceptos de solución αCondorcet y Tolerante de Condorcet y la solución al correspondiente problema continuo en redes. Una vez establecido el modelo se constata que siempre existe un valor para α tal que el conjunto de los puntos αCondorcet no es vacío. La solución *Tolerante de Condorcet* es el conjunto de puntos αCondorcet para el valor más pequeño de α tal que existe un punto αCondorcet. La primera sección de este capítulo incluye el modelo, los conceptos de solución y algunas figuras que ilustran los conceptos de puntos de Condorcet, αCondorcet y Tolerantes de Condorcet. Tras algunos resultados teóricos se aporta un algoritmo para encontrar los puntos αCondorcet para un valor fijo de α, y otro algoritmo para obtener el valor mínimo de α que garantice la existencia de una solución αCondorcet. Estos resultados han sido publicados en (Campos y Moreno, (2000a)).

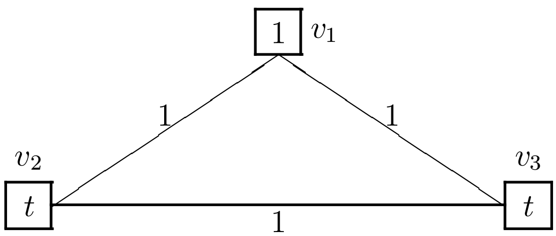
En una segunda parte del capítulo se realizan las comparaciones de las soluciones αCondorcet con las soluciones de los problemas de la mediana y el centro respectivamente (Campos y Moreno, (2000b)). Los conceptos clásicos de soluciones en teoría de localización son los bien conocidos mediana y centro. Una mediana es un punto tal que la suma de distancias desde los usuarios hasta la mediana es mínima. Un centro es un punto tal que la distancia máxima de un usuario al centro es la mínima posible. Pero ambas soluciones pueden ser completamente insatisfactorias para una mayoría estricta de usuarios. Se realiza la comparación de las soluciones αCondorcet con las medianas y los centros en términos de la satisfacción de los usuarios y de la función objetivo correspondiente; es decir la suma de distancias desde los usuarios hasta el punto para el caso de la mediana y la distancia máxima de los usuarios al punto para el centro. Se trata de encontrar cotas ajustadas para la relación de la función objetivo de los problemas de la mediana en los puntos αCondorcet y en las medianas. Igualmente se encuentran cotas para la función objetivo del centro en los puntos αCondorcet y en los centros. La sección concluye con la búsqueda de los mejores valores para la función objetivo de los puntos αCondorcet para las soluciones de la mediana y el centro.

2.2. El problema del αCondorcet

Sea N una red conexa, no dirigida, sin bucles ni aristas multiples. Consideramos el modelo continuo de localización simple en redes determinado por el espacio de localizaciones $L = N$ y un conjunto finito U de usuarios sobre los vértices de la red dados por la aplicación $v(.)$. Si N es un árbol entonces el conjunto C de los puntos de Condorcet es igual al conjunto de medianas del árbol (Hansen, Thisse y Wendell, (1986)). Por tanto, en un árbol siempre existe un punto de Condorcet. Sin embargo, para algunas redes la solución de Condorcet es un conjunto vacío.

Ejemplo

Si se toma como N un triángulo equilatero con un usuario en cada vértice, en esta red no existen puntos de Condorcet.



Una red sin solución de Condorcet

La no existencia de soluciones de Condorcet en muchos casos hace que se plantee relajar las condiciones de un punto de Condorcet para garantizar la existencia de una solución.La solución de Simpson es una de las propuestas de relajación que permite la existencia de solución. La relajación propuesta aquí es la introducción de un umbral constante para la indiferencia.

En el modelo tradicional de preferencias basado en una función de valor g que ha de ser minimizada, una alternativa a es preferida a b si $g(a)$ es más pequeño que $g(b)$. Dos alternativas son indiferentes si tienen el *mismo* valor. Si las comparaciones se basan en la percepción humana o incluso si son medidas por medio de instrumentos precisos y sofisticados, siempre existe un umbral bajo el cual las diferencias no se pueden percibir. Por tanto dadas dos alternativas no existe una preferencia entre ellas si la diferencia entre sus valores es, en valor absoluto, menor que un cierto umbral. La estructura de preferencia definida con este modelo se denomina **semiorden** (Pirlot y Vincke, (1997)). En los últimos años, estos modelos de preferencias han sido aplicados con éxito en situaciones reales.

Por tanto se supondrá que hay un umbral $\alpha \geq 0$ tal que el sistema de preferencias de cada uno de los usuarios es como sigue. Dos localizaciones x e y son indiferentes para un usuario u si la distancia desde u a x y la distancia desde u a y se diferencian en α como mucho. Si la diferencia entre las distancias desde el usuario u a las localizaciones x e y es mayor que α el usuario prefiere la localización más cercana. Por consiguiente los puntos αCondorcet son aquellas localizaciones sobre la red tales que ninguna otra localización es preferida por una mayoría estricta de usuarios.

Ahora, el número de usuarios que prefieren y a x es

$$|y \prec_\alpha x| = |\{u \in U : d(v(u), y) < d(v(u), x) - \alpha\}|$$

y el número de usuarios para los cuales y y x son indiferentes es

$$|y \sim_{\alpha} x| = |\{u \in U : |d(v(u), y) - d(v(u), x)| \leq \alpha\}|.$$

Luego la *solución αCondorcet* $C(\alpha)$ es el conjunto de localizaciones αCondorcet de la red definido reemplazando en la definición de solución de Condorcet el sistema de preferencias clásico por el determinado por el umbral α para la indiferencia.

Definición *(Campos y Moreno, (2000a))*

Un punto $c \in N$ es un punto αCondorcet si no existe otro punto $x \in N$ tal que

$$|x \prec_{\alpha} c| \leq \frac{1}{2}|U|$$

Se denota por $C(\alpha)$ a la solución αCondorcet que está consituida por el conjunto de los puntos αCondorcet ;

$$C(\alpha) = \{c \in N : |y \prec_{\alpha} c| \leq \frac{1}{2}|U|, \forall y \in N\}.$$

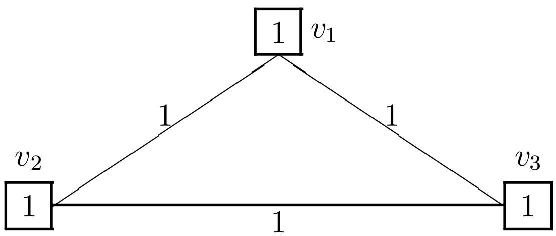
El umbral α representa una *distancia de tolerancia* que permite la existencia de soluciones. Siempre hay un valor de α lo suficientemente grande para que exista un punto αCondorcet. Por ejemplo, si α es igual al diámetro de la red entonces $C(\alpha) = N$.

Se plantea de forma natural la cuestión de cuál es el valor mínimo de α que garantiza la existencia de un punto αCondorcet. Si se adopta como distancia de tolerancia este valor mínimo α^* se obtiene la solución *Tolerante de Condorcet*. Los *puntos Tolerantes de Condorcet* son los puntos α^*Condorcet. El *problema Tolerante Condorcet* consiste en encontrar la *Distancia de Tolerancia* α^* y los puntos tolerantes de Condorcet $C(\alpha^*)$ de la red.

Si existen soluciones de Condorcet entonces la distancia de tolerancia es innecesaria y la solución tolerante de Condorcet coincide con la solución de Condorcet. Pero en general existe una diferencia entre las soluciones αCondorcet para los distintos valores de α.

Ejemplo

Consideremos la red de la figura $N = \Delta$ que consiste en un triángulo cuyos lados miden una unidad y que tiene un usuario en cada vértice.



La red $N = \Delta$

Esta red viene dada por $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E = \{[v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_1, v_3]\}$ con $l(v_1, v_2) = l(v_2, v_3) = l(v_1, v_3) = 1$.

Vamos a considerar $\alpha < \frac{1}{2}$ y sea $x = p([v_2, v_3], a)$ con $a \leq \frac{1}{2}$. Tomemos $y = p([v_1, v_3], \frac{1}{2} + a)$. Los usuarios situados en v_1 y v_3 prefieren y a x. Entonces x no es un punto αCondorcet. Por simetría no hay puntos αCondorcet en la red.

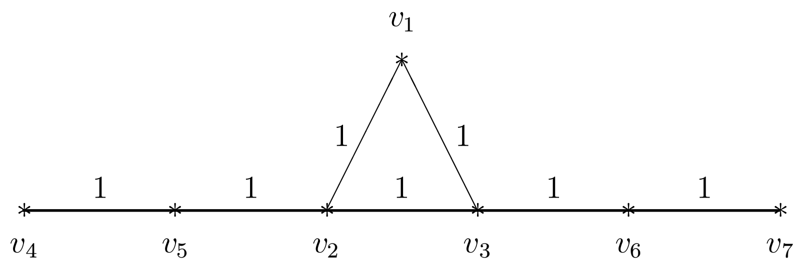
Sea ahora $\alpha \geq \frac{1}{2}$ y tomemos $x = p([v_2, v_3], a)$ siendo $a \leq \frac{1}{2}$. Si $y = p([v_1, v_3], \frac{1}{2} + a)$ entonces y no es preferido a x por los usuarios de v_1 y v_3, sino que son indiferentes entre x e y. Por lo tanto no hay ningún punto preferido a x por dos usuarios y x es un punto αCondorcet. Por simetría, todos los puntos de la red son puntos αCondorcet.

Para esta red, si $\alpha < \frac{1}{2}$ el conjunto de puntos αCondorcet es vacío. Si $\alpha \geq \frac{1}{2}$ entonces $C(\alpha) = N$. Por consiguiente $\alpha^* = \frac{1}{2}$ es la distancia de tolerancia, y $N = \Delta$ es el conjunto tolerante de Condorcet.

Si N es un árbol entonces el conjunto de puntos de Condorcet es el conjunto de medianas del árbol. Por tanto la distancia de tolerancia es $\alpha^* = 0$ y la solución tolerante de Condorcet coincide con la solución de Condorcet. La siguiente figura muestra una mezcla de estos dos casos.

Ejemplo

Sea N la red representada en la figura siguiente.



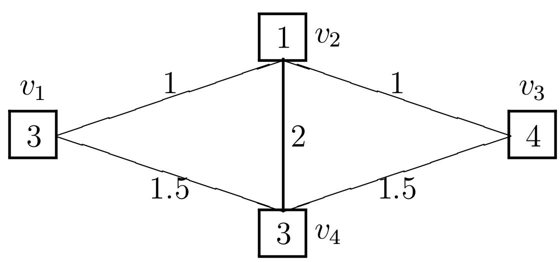
Ejemplo

Si $\alpha < \frac{1}{2}$ el conjunto de puntos αCondorcet es vacío. Si $\alpha = \frac{1}{2}$ el conjunto de los $\frac{1}{2}$-puntos de Condorcet es el triángulo con vértices v_1, v_2 y v_3. Si $\alpha > \frac{1}{2}$ el conjunto de puntos αCondorcet consiste en el triángulo y los puntos a distancia no mayor que $\alpha - \frac{1}{2}$ a partir de v_2 y v_3.

Veamos ahora un ejemplo de un caso en el que $C = \emptyset$ y $\alpha^* = \frac{1}{2}$.

Ejemplo

Sea N la red representada en la figura siguiente consistente en un cuadrilátero con una de sus diagonales.



Un ejemplo en el que $C = \emptyset$ y $\alpha^* = \frac{1}{2}$.

El conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y el conjunto E de aristas viene dado por las longitudes $l(v_1, v_2) = l(v_2, v_3) = 1$, $l(v_3, v_4) = l(v_4, v_1) = \frac{3}{2}$ y $l(v_2, v_4) = 2$. Consideremos un conjunto de 11 usuarios con $u(v_1) = u(v_4) = 3$, $u(v_2) = 1$, $u(v_4) = 4$.

Si $\alpha < \frac{1}{2}$ entonces $C(\alpha) = \emptyset$.

Para $\alpha = \frac{1}{2}$ tenemos $C(\alpha) = [p([v_1, v_4], 1), v_4] \cup [p([v_3, v_4], 1), v_4]$. Por lo tanto $\alpha^* = \frac{1}{2}$.

Para $\alpha = \frac{3}{4}$ tenemos

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= [v_2, p([v_2, v_4], \tfrac{3}{4})] \cup [p([v_2, v_4], \tfrac{7}{4}), v_4] \cup \\ &\quad [p([v_1, v_4], \tfrac{3}{4}), v_4] \cup [p([v_3, v_4], \tfrac{3}{4}), v_4]. \end{aligned}$$

Presentamos a continuación algunos resultados teóricos sobre este nuevo modelo. Primero estudiamos la relación entre los conjuntos αCondorcet cuando el valor de α aumenta o disminuye. A medida que α aumenta el conjunto de puntos αCondorcet se hace más grande y además contiene a los conjuntos de puntos α'Condorcet para los valores α' menores que α.

En segundo lugar, buscamos las condiciones bajo las cuales los extremos de las aristas son preferidos a los puntos interiores. Así se descartan los trozos de aristas que no pueden contener puntos de Condorcet. Si el número de usuarios es impar los únicos puntos que pueden ser puntos αCondorcet son los que están a distancia menor o igual que α de un vértice. En el caso de que el número de usuarios sea par, además de los trozos de aristas de longitud α alrededor de los vértices, también hay segmentos interiores que pueden contener puntos αCondorcet si el número de usuarios con función de distancias creciente a lo largo del segmento es el mismo que el número de usuarios con función de distancias decreciente.

Teorema

Si $\alpha_1 < \alpha_2$ *entonces* $C(\alpha_1) \subseteq C(\alpha_2)$.

Demostración Sea x un punto α_1Condorcet. Entonces $|y \prec_{\alpha_1} x| \leq \frac{|U|}{2}, \forall y \in N$. Si

$$d(v(u), y) + \alpha_2 < d(v(u), x)$$

entonces

$$d(v(u), y) + \alpha_1 < d(v(u), x).$$

Por tanto

$$|y \prec_{\alpha_2} x| \leq |y \prec_{\alpha_1} x| \leq \frac{|U|}{2}, \forall y \in N.$$

Luego x es también una solución α_2Condorcet. □

Corolario

Para $\alpha > 0$, $C \subseteq C(\alpha)$.

Demostracion Al tomar $\alpha_1 = 0$ se tiene que $C = C(0)$ como los valores de α siempre son positivos o cero aplicando el teorema se tiene que el conjunto de soluciones de Condorcet siempre está contenido en cualquier conjunto de soluciones αCondorcet. $\square$

Teorema

Si $x \in C(\alpha)$ *y* $d(z,x) < \xi$ *entonces* $z \in C(\alpha + \xi)$.

Demostración Si $x \in C(\alpha)$ entonces $|y \prec_\alpha x| \leq \frac{1}{2}|U|$, $\forall y \in N$.

Si $d(v(u), y) + (\alpha + \xi) < d(v(u), z)$ y $d(z, x) < \xi$ entonces

$$d(v(u), y) + \alpha < d(v(u), z) - \xi < d(v(u), x).$$

Luego

$$|y \prec_{\alpha+\xi} z| \leq |y \prec_\alpha x| \leq \frac{1}{2}|U|.$$

Por tanto, z es un punto $(\alpha + \xi)$Condorcet. $\square$

Por lo tanto, cada punto a distancia menor que α de un punto de Condorcet es un punto αCondorcet. Si todos los puntos de la subarista $[a, b]$ son puntos de Condorcet entonces todos los puntos de la subarista $[a - \alpha, b + \alpha]$ son puntos αCondorcet. Sin embargo es posible que algunos puntos αCondorcet no estén a una distancia α de un punto de Condorcet.

Para comparar los extremos de una arista con sus puntos interiores hay que analizar como varía la distancia desde un usuario a los puntos de la arista. Esta función de distancia al desplazar el punto de un extremo a otro de la arista es una función lineal a trozos con, a lo sumo, dos zonas lineales. La distancia es una función creciente y lineal con pendiente $+1$ desde el primer extremo hasta un punto de la arista y una función lineal y decreciente con pendiente -1 desde este punto hasta el otro extremo. Este punto se le llama cuello de botella del usuario, o del vértice en que se encuentra el usuario, en la arista. Denotamos por $b_{kl}(u) = b_{kl}^i$ al cuello de botella asociado al usuario u o al vértice $v(u) = v_i$ en la arista $[v_k, v_l]$.

Nótese que si el cuello de botella está en uno de los extremos de la arista la función de distancias es lineal. Cada extremo de una arista es cuello de botella del otro extremo de la arista. Las subaristas entre dos cuellos de botella consecutivos (diferentes) se denominan *segmentos* y son muy útiles para comparar los puntos de una posible localización porque todas las funciones de distancia a los usuarios son lineales en cada segmento

Cada arista $[v_k, v_l]$ está dividida por los cuellos de botella distintos que se encuentran en ella, en una serie de segmentos no vacíos denotados por $[b_{r-1}, b_r]$, para $r = 1, 2, ..., t$ donde $b_0 = v_k$ y $b_t = v_l$. El siguiente resultado muestra que:

- Si el número de usuarios con función de distancias decreciente a lo largo de la subarista $[b_r, v_l]$ es mayor que la mitad de los usuarios entonces no puede haber puntos αCondorcet en $[b_r, v_l - \alpha)$.
- Si el número de usuarios con función de distancias decreciente a lo largo de la subarista $[b_r, v_l]$ es menor que la mitad de los usuarios entonces no puede haber puntos αCondorcet en $(v_k + \alpha, b_{r+1}]$.

Si denotamos por S_r al número de usuarios con función de distancias decreciente a la derecha de b_r entonces:

$$S_r = |\{u \in U : d(v(u), b_{r+1}) < d(v(u), b_r)\}|.$$

Además se tiene que

$$S_0 < S_1 < S_2 < ... < S_{r-1} < S_r < ... < S_{t-1}.$$

donde $S_r - S_{r-1} = |\{u \in U : b_{kl}(u) = b_r\}|$.

Lema

Sean $b_0, ..., b_t$ los puntos cuello de botella de los vértices con usuario en la arista $[v_k, v_l]$ y S_r el número de usuarios con distancias decrecientes en $[b_r, v_l], 0 < r < t - 1$.

- *Si $S_r > \frac{1}{2}|U|$ entonces $|v_l \prec_\alpha y| = S_r > \frac{1}{2}|U|, \forall y \in [b_r, v_l - \alpha)$.*
- *Si $S_r < \frac{1}{2}|U|$ entonces $|v_k \prec_\alpha y| = |U| - S_r > \frac{1}{2}|U|, \forall y \in (v_k + \alpha, b_{r+1}]$.*

Demostración Los usuarios con función de distancia decreciente a lo largo de la subarista $[b_r, v_l]$ prefieren el vértice v_l a $[b_r, v_l - \alpha)$. Si el número de estos usuarios es $S_r > \frac{1}{2}|U|$ entonces v_l domina a todos los puntos de $[b_r, v_l - \alpha)$. Si $S_r < \frac{1}{2}|U|$ entonces $|U| - S_r > \frac{1}{2}|U|$ es el número de usuarios con función de distancias creciente a lo largo de la subarista $[v_k, b_{r+1}]$. Estos usuarios prefieren el vértice v_k a los puntos de $(v_k + \alpha, b_{r+1}]$ y por tanto v_k domina a los puntos de $(v_k + \alpha, b_{r+1}]$. $\square$

Además, el siguiente teorema establece que si el número de usuarios con función de distancias decreciente en los puntos de la arista no es nunca igual a la mitad del número de usuarios entonces los puntos que están a distancia mayor que α de los extremos no pueden ser puntos αCondorcet

Teorema

Sean $b_0, ..., b_t$ los puntos cuello de botella de los vértices con usuario en la arista $[v_k, v_l]$ y S_r el número de usuarios con distancias decrecientes en $[b_r, v_l], 0 < r < t-1$. Si $S_r < \frac{1}{2}|U| < S_{r+1}$ entonces:

$$(v_k + \alpha, v_l - \alpha) \cap C(\alpha) = \emptyset.$$

Demostración Sea $S_r < \frac{1}{2}|U| < S_{r+1}$. Por la primera parte del lema anterior tenemos que $[b_{r+1}, v_l - \alpha) \cap C(\alpha) = \emptyset$. Por la segunda parte del lema tenemos $(v_k + \alpha, b_{r+1}] \cap C(\alpha) = \emptyset$. Entonces

$$((v_k + \alpha, b_{r+1}] \cup [b_{r+1}, v_l - \alpha)) \cap C(\alpha) = \emptyset.$$

□

Nótese que $S_r = \frac{1}{2}|U|$ sólo es posible si $|U|$ es par. Por tanto, si el número de usuarios es impar entonces los únicos puntos que pueden ser puntos αCondorcet son los que están a distancia menor o igual que α de un vértice.

Corolario

Si $|U|$ es impar entonces

$$C(\alpha) \subseteq \bigcup_{v \in V} B(v, \alpha).$$

Demostración Si $|U|$ es impar entonces $S_r \neq \frac{1}{2}|U|$, $\forall r$. Por tanto, basándonos en el teorema anterior,

$$(v_i + \alpha, v_j - \alpha) \cap C(\alpha) = \emptyset, \ \forall [v_i, v_j] \in E.$$

Aplicando este resultado a una arista adyacente a cada vértice se tiene que un punto sólo puede estar en la solución αCondorcet si está a distancia menor o igual que α de un vértice. □

Por otro lado, si el número de usuarios es par entonces los únicos puntos que pueden ser puntos αCondorcet son, además de los que están a distancia menor o igual que α de un vértice, los de los segmentos (b_r, b_{r+1}) tales que el número de usuarios con función de distancias decreciente a lo largo de la subarista $[b_r, v_l]$ es igual a la mitad del número de usuarios.

Teorema

Sea $|U|$ par. Si existe un punto cuello de botella b_r en la arista $[v_k, v_l]$ tal que el número de usuarios con distancias decrecientes en $[b_r, v_l]$ es $S_r = \frac{1}{2}|U|$, con $0 < r < t-1$ entonces

$$(v_k + \alpha, b_r] \cap C(\alpha) = \emptyset \quad \text{y} \quad [b_{r+1}, v_l - \alpha) \cap C(\alpha) = \emptyset.$$

Demostración Si $S_r = \frac{1}{2}|U|$ y $0 < r < t-1$ entonces $S_{r-1} < \frac{1}{2}|U|$ y $\frac{1}{2}|U| < S_{r+1}$. Por el lema anterior $(v_k + \alpha, b_r] \cap C(\alpha) = \emptyset$ y $[b_{r+1}, v_l - \alpha) \cap C(\alpha) = \emptyset$. $\square$

Nótese que en las condiciones del último teorema, el segmento (b_r, b_{r+1}) no puede ser excluido de los posibles puntos αCondorcet. Si $S_r = \frac{1}{2}|U|$ entonces la mitad de los usuarios tienen una función de distancia creciente en (b_r, b_{r+1}). Estos usuarios prefieren v_k a los puntos de (b_r, b_{r+1}) si $l(v_k, b_r) > \alpha$. La otra mitad de los usuarios tienen una función de distancias decreciente en (b_r, b_{r+1}). Estos usuarios prefieren v_l a los puntos de (b_r, b_{r+1}) si $l(b_{r+1}, v_l) > \alpha$. Pero, en cualquier caso, no hay bastantes usuarios para rechazar (b_r, b_{r+1}). Todos los puntos de (b_r, b_{r+1}) son posibles puntos αCondorcet.

2.3. El algoritmo αCondorcet.

El *algoritmo αC* o *αCondorcet* implementa el procedimiento que proponemos para obtener el conjunto de puntos αCondorcet de una red y que se deriva del algoritmo 1 descrito en detalle en el capítulo 1, y que está basado en el propuesto en (Hansen y Labbé, (1988)), para el conjunto de puntos de Condorcet.

El procedimiento de eliminación natural para encontrar el conjunto de puntos αCondorcet consiste en comparar los puntos dos a dos para comprobar si uno de ellos domina al otro, es decir, si hay una mayoría estricta de usuarios que prefiera el otro punto. Así, el procedimiento toma $D = N$ como el conjunto inicial de candidatos a puntos αCondorcet. Los puntos dominados se eliminan de D en tres fases:

1. comparando los vértices dos a dos,
2. comparando cada vértice con los puntos de cada arista , y
3. comparando dos a dos todos los puntos interiores de todas las aristas.

Algoritmo αC *(Campos y Moreno, (2000a))*

Paso 1

Tomar $D = N$.
Con cada vértice $v_k \in V$ hacer lo siguiente:

Para cada vértice $v_j \in D$ calcular

$$|v_k \prec_\alpha v_j| = |\{u \in U : d(v(u), v_k) + \alpha < d(v(u), v_j)\}|.$$

Si $|v_k \prec_\alpha v_j| > \frac{1}{2}|U|$ entonces borrar v_j de D.

Paso 2

Para cada arista $[v_k, v_l]$ hacer lo siguiente:

- Si $|U|$ es impar eliminar de D la subarista $(v_k + \alpha, v_l - \alpha)$.
- Si $|U|$ es par buscar un cuello de botella b_r tal que $2S_r = |U|$. Si existe b_r eliminar de D las subaristas $(v_k + \alpha, b_r)$ y $(b_{r+1}, v_l - \alpha)$, en otro caso eliminar de D la subarista $(v_k + \alpha, v_l - \alpha)$.
- Para cada $v_j \in D$ hacer:
  - Si algún punto $x \in [v_k, v_l]$ domina a v_j eliminar v_j de D.
  - Si algún segmento de $[v_k, v_l]$ está dominado por v_j eliminarlo de D.

Paso 3

Para cada segmento $[x_k, y_k] \in D$ y cada segmento $[x_l, y_l]$ de la red, determinar los subsegmentos de $[x_k, y_k]$ dominados por algún punto de $[x_l, y_l]$ y eliminarlo de D.

La comparación de los vértices dos a dos se realiza en el paso 1. Se toma en primer lugar cada vértice $v_k \in V$ y se eliminan de D los vértices v_j dominados por v_k. Eligiendo como primeros vértices v_k buenos candidatos a solución se eliminan más rápidamente vértices del conjunto de candidatos.

La comparación de vértices y aristas se realiza en el paso 2 en varias fases. Primero se eliminan de D subaristas dominados por los extremos de la propia arista en la que se encuentran estas subaristas. En segundo lugar se eliminan de D los vértices dominados por algún punto interior a una arista. Finalmente se eliminan de D las subaristas de puntos dominados por algún vértice diferente de los extremos que la contienen.

Para la eliminación de las subaristas de $[v_k, v_l]$ dominados por v_k o por v_l consideremos un punto x sobre una arista $[v_k, v_l]$ que se mueve desde v_k hasta v_l de cuello de botella en cuello de botella. El conjunto de usuarios se puede dividir en tres subconjuntos.

- Los usuarios que tienen una función de distancias creciente a lo largo de toda la arista; es decir,

$$U_k = \{u \in U : d(v(u), v_l) = d(v(u), v_k) + l(v_k, v_l)\}.$$

- Los usuarios que tienen una función de distancias decreciente a lo largo de toda la arista; es decir,

$$U_l = \{u \in U : d(v(u), v_k) = d(v(u), v_l) + l(v_k, v_l)\}.$$

- El conjunto de los usuarios restantes; es decir,

$$U_{kl} = U - [U_k \cup U_l].$$

Nótese que los usuarios $u \in U_{kl}$ son aquellos tales que el punto cuello de botella $b_{kl}(u)$ está en el interior de la arista $[v_k, v_l]$. Por tanto la función de distancia para cada uno de estos usuarios es una función lineal y creciente con pendiente $+1$ desde v_k hasta $b_{kl}(u)$ y después una función lineal y decreciente con pendiente -1, desde este punto hasta v_l.

Luego, usando los resultados anteriores tenemos:

1. Si $|U_k| > |U|/2$ entonces $(v_k + \alpha, v_l]$ es eliminado de D; no hay puntos αCondorcet en esa subarista.

2. Si $|U_l| > |U|/2$ entonces $[v_k, v_l - \alpha)$ es eliminado de D; no hay puntos αCondorcet en esa subarista.

3. Si $|U_k| \leq |U|/2$, $|U_l| \leq |U|/2$ y $|U_{kl}| \neq \emptyset$ los usuarios en U_{kl} determinan puntos cuello de botella en el interior de la arista. Ordenamos los cuellos de botella $b_{kl}(u)$ en orden creciente con respecto a su distancia a v_k. Entonces

   - Si $|U|$ es impar entonces eliminamos $(v_k + \alpha, v_l - \alpha)$ de D; no hay posibles puntos αCondorcet en esa subarista.
   - Si $|U|$ es par y no hay un b_r tal que $S_r = \frac{1}{2}|U|$ entonces eliminamos $(v_k + \alpha, v_l - \alpha)$ de D; no hay posibles puntos αCondorcet en esa subarista.
   - Si $|U|$ es par y $S_r = \frac{1}{2}|U|$ entonces eliminamos de D las subaristas $(v_k + \alpha, b_r]$ y $[b_{r+1}, v_l - \alpha)$; no hay posibles puntos αCondorcet en esas subaristas.

Nótese que en el caso restante, en el que $|U_k| \leq |U|/2$ y $|U_l| \leq |U|/2$ con $|U_{kl}| = \emptyset$, tenemos $|U_k| = |U_l| = |U|/2$ y todos los puntos de la arista $[v_k, v_l]$ son posibles puntos αCondorcet; no se elimina ninguna subarista.

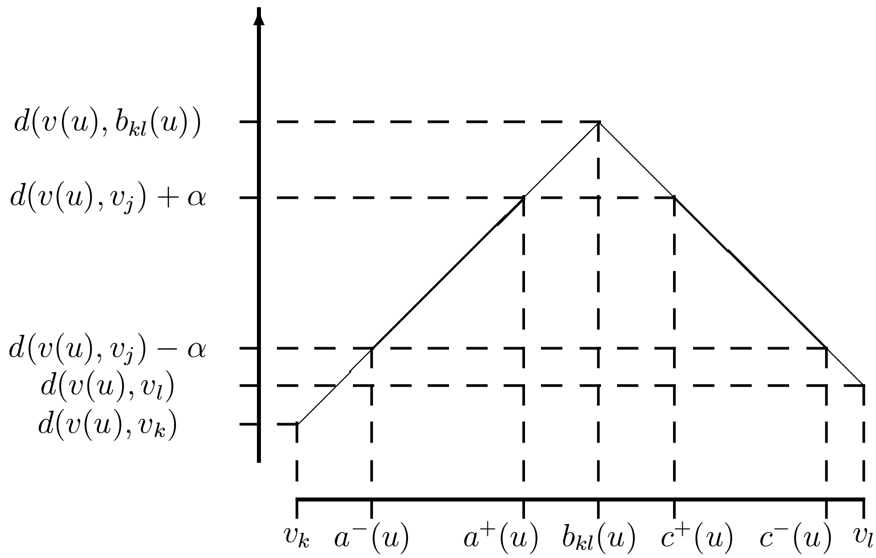
El paso 2 se completa con las comparaciones entre un vértice v_j y una arista $[v_k, v_l]$; $k \neq j \neq l$. La distancia desde un usuario u a un punto x en $[v_k, v_l]$ que se mueve desde v_k hacia v_l es una función lineal creciente con pendiente $+1$ desde v_k hasta el cuello de botella $b_{kl}(u)$ de u y una función lineal decreciente con pendiente -1 desde el cuello de botella $b_{kl}(u)$ hasta v_l.

La comparación depende de los valores relativos de las distancias desde $v(u)$ hasta v_j más α y menos α, y la distancia desde $v(u)$ a los puntos x de la arista $[v_k, v_l]$. La siguiente figura muestra el caso más general en el cual

$$\max\{d(v(u), v_k), d(v(u), v_l)\} + \alpha < d(v(u), v_j) < d(v(u), b_{kl}(u)) - \alpha.$$

Denotamos $a^-(u), a^+(u), c^+(u)$ y $c^-(u)$ los puntos de la arista $[v_k, v_l]$ dados por las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl}
d(v(u), v_k) + l(v_k, a^-(u)) & = & d(v(u), v_j) - \alpha. \\
d(v(u), v_k) + l(v_k, a^+(u)) & = & d(v(u), v_j) + \alpha. \\
d(v(u), v_l) + l(v_l, c^+(u)) & = & d(v(u), v_j) + \alpha. \\
d(v(u), v_l) + l(v_l, c^-(u)) & = & d(v(u), v_j) - \alpha.
\end{array}$$



Comparación del vértice v_j con la arista $[v_k, v_l]$.

Entonces la arista $[v_k, v_l]$ queda dividida, para cada usuario u, en a lo sumo cinco subaristas, tales que las preferencias del usuario serán:

1. La subarista $[v_k, a^-(u))$ es preferida a v_j; $x \prec_\alpha v_j, \forall x \in [v_k, a^-(u))$.
2. La subarista $[a^-(u), a^+(u)]$ y v_j son indiferentes; $x \sim_\alpha v_j, \forall x \in [a^-(u), a^+(u)]$.
3. El vértice v_j es preferido a la subarista $(a^+(u), c^+(u))$; $x \succ_\alpha v_j, \forall x \in (a^+(u), c^+(u))$.
4. La subarista $[c^+(u), c^-(u)]$ y v_j son indiferentes; $x \sim_\alpha v_j, \forall x \in [c^+(u), c^-(u)]$.
5. La subarista $(c^-(u), v_l]$ es preferida a v_j; $x \prec_\alpha v_j, \forall x \in (c^-(u), v_l]$.

En algunos casos, para ciertos usuarios, estos puntos pueden no existir confundiéndose en los extremos de la arista. En otros casos, coincidirán varios de estos a^+, a^-, c^+ o c^-, porque los usuarios están en el mismo vértice o encontrándose en vértices distintos están a la misma distancia de los extremos de la arista. Incluso puede ocurrir que $a^+(u) = a^-(u')$ o que $a^+(u) = c^-(u')$, para $u \neq u'$.

Al comparar v_j con un punto x que se mueve desde v_k hasta v_l se comprueba tanto si algún punto x domina a v_j como si las subaristas de $[v_k, v_l]$ están dominadas por v_j.

En primer lugar, los puntos a^- y c^-, para todos los usuarios, se ordenan juntos en orden creciente de su distancia a v_k en una lista $L^- = \{z_q : q = 1, 2, ...\}$. Sea R el conjunto de usuarios que prefiere x a v_j, cuando x es un punto que se mueve sobre $[v_k, v_l]$ desde v_k hacia v_l. Se comienza en $x = v_k$ con

$$R = \{u \in U : d(v(u), v_k) + \alpha < d(v(u), v_j)\}$$

y al encontrar cada punto $z_q \in L^-$ se actualiza R de la siguiente forma.

- Se quitan de R los usuarios u tales que $a^-(u) = z_q$. Por tanto,

$$R = R - \{u \in U : d(v(u), v_k) + l(v_k, z_q) + \alpha = d(v(u), v_j)\}.$$

- Se añaden a R los usuarios u tales que $c^-(u) = z_q$. Por tanto,

$$R = R + \{u \in U : d(v(u), v_l) + l(v_l, z_q) + \alpha = d(v(u), v_j)\}.$$

Si en momento de este recorrido llega a ser $|R| > \frac{1}{2}|U|$ entonces v_j está dominado por x y no es un punto αCondorcet. En este caso se borra v_j de D.

Por otro lado, al mover x desde v_k hacia v_l para buscar subaristas de $[v_k, v_l]$ dominadas por v_j se usan los puntos a^+ y c^+. Los puntos $a^+(u)$ y $c^+(u)$, para todos los usuarios, se ordenan juntos en orden creciente de su distancia a v_k en una lista $L^+ = \{z_q : q = 1, 2, ...\}$. Se empieza con

$$R = \{u \in U : d(v(u), v_j) + \alpha < d(v(u), v_k)\}$$

y al encontrar cada punto $z_q \in L^+$ se actualiza R de la siguiente forma.

- Se añaden a R los usuarios u tales que $a^+(u) = z_q$. Por tanto,

$$R = R + \{u \in U : d(v(u), v_k) + l(v_k, z_q) = d(v(u), v_j) + \alpha\}.$$

- Se eliminan de R los usuarios u tales que $c^+(u) = z_q$. Por tanto,

$$R = R - \{u \in U : d(v(u), v_l) + l(v_l, z_q) = d(v(u), v_j) + \alpha\}.$$

Cada vez que $|R| > \frac{1}{2}|U|$, encontramos una subarista de puntos dominados por v_j; por tanto sin puntos αCondorcet. Si resulta que $|R| > \frac{1}{2}|U|$ al encontrar a z_q entonces todos los puntos de la subarista (z_q, z_{q+1}) están dominados por v_j y esta subarista no tiene puntos αCondorcet. La subarista (z_q, z_{q+1}) se borra de D.

El paso 3 del procedimiento de eliminación consiste en la comparación de subaristas dos a dos. Dividimos cada arista en A (y también cada subarista en D) en segmentos limitados por dos puntos cuello de botella consecutivos o uno cuello de botella y uno de los extremos de la arista (o subarista). Nótese que los segmentos son subaristas donde las distancias a todos los usuarios son funciones lineales (con pendiente $+1$ o -1) en toda la subarista ya que no contienen ningún cuello de botella en su interior. Los extremos de las subaristas en D pueden ser vertices, cuellos de botella y también puntos a distancia α de un vértice.

Consideremos un segmento $[x_k, y_k]$ en D y un segmento $[x_l, y_l]$ en la red. Entonces $[x_k, y_k]$ se compara con $[x_l, y_l]$ para ver si hay puntos en $[x_l, y_l]$ que dominan a subsegmentos de $[x_k, y_k]$.

Representamos el par de puntos $z_k \in [x_k, y_k]$ y $z_l \in [x_l, y_l]$ en un rectángulo cuyos lados tienen longitudes $l(x_k, y_k)$ y $l(x_l, y_l)$. Este rectángulo es

$$R_{kl} = \{(\theta_k, \theta_l) : 0 \leq \theta_k \leq l(x_k, y_k), 0 \leq \theta_l \leq l(x_l, y_l)\},$$

donde $z_k = p([x_k, y_k]; \theta_k)$ y $z_l = p([x_l, y_l]; \theta_l)$. Cuando un usuario u compara $[x_k, y_k] \in D$ con $[x_l, y_l] \subset N$, las preferencias vienen dadas por el conjunto de puntos $(z_k, z_l) \in [x_k, y_k] \times [x_l, y_l]$ tales que

$$d(v(u), z_l) + \alpha < d(v(u), z_k).$$

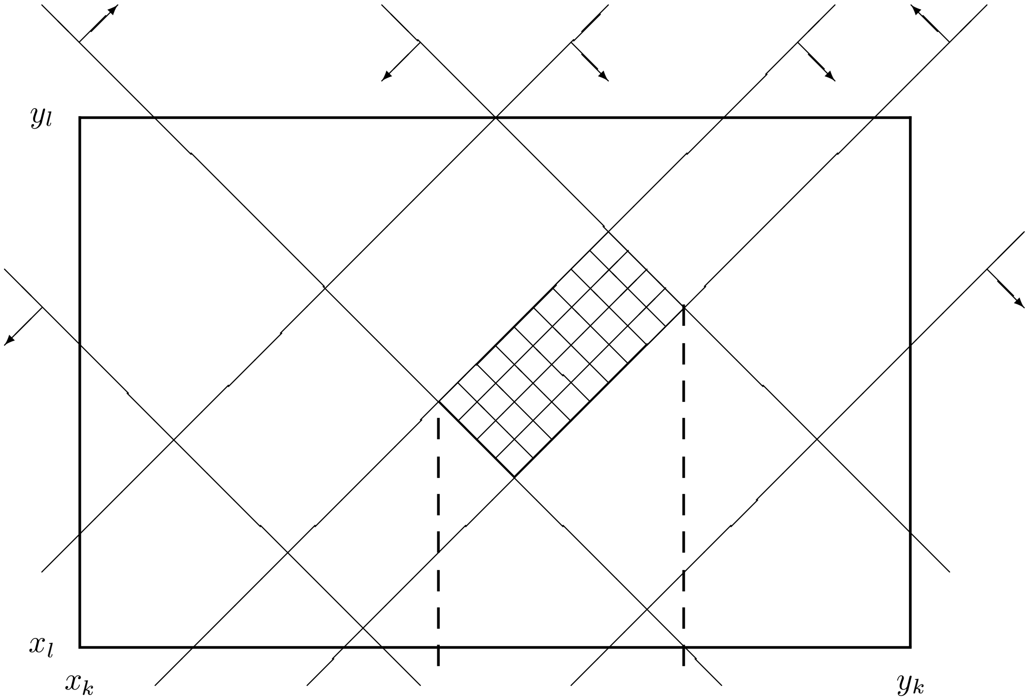
Definición

Sea el ***conjunto de dominancia*** *para cada usuario u el siguiente*

$$D(u) = \{(\theta_k, \theta_l) : d(v(u), p([x_l, y_l]; \theta_l)) + \alpha < d(v(u), p([x_k, y_k]; \theta_k))\}.$$

En el plano que incluye el rectángulo R_{kl}, un conjunto de dominancia corresponde a un semiplano $H(u)$ dado por $d(v(u), z_l) + \alpha < d(v(u), z_k)$, para algún usuario u. Cada semiplano viene dado como el conjunto de puntos por encima o por debajo de una linea recta con pendiente $+1$ o -1.

Entonces el rectángulo R_{kl} se divide en paralelogramos; cada uno de ellos consiste en la intersección de varios conjuntos de dominancia como se puede ver en la siguiente figura. Si el número de conjuntos de dominancia que hay en un paralelogramo es mayor que $\frac{1}{2}|U|$ entonces el interior de la proyección del paralelogramo en $[x_k, y_k]$ está dominado por algún punto en la proyección del paralelogramo en $[x_l, y_l]$. Se comprueban todos los paralelogramos en el rectángulo.



Proyección de un paralelogramo.

El recorrido de los paralelogramos empieza con el de la esquina inferior izquierda. El conjunto de usuarios cuyos conjuntos de dominancia incluyen este paralelogramo es

$$R = \{u \in U : d(v(u), x_l) + \alpha < d(v(u), x_k)\}.$$

Durante el recorrido de los paralelogramos se pasa de un paralelogramo a otro contiguo a él con el objeto de comprobar todos los paralelogramos en el rectángulo.

Para determinar los conjuntos de dominancia se divide el conjunto de usuarios en cuatro subconjuntos:

- U_1 es el conjunto de usuarios que tienen función de distancia creciente a lo largo de los dos segmentos $[x_k, y_k]$ y $[x_l, y_l]$.

- U_2 es el conjunto de usuarios que tienen función de distancia creciente a lo largo del segmento $[x_k, y_k]$ y función de distancia decreciente a lo largo de $[x_l, y_l]$.

- U_3 es el conjunto de usuarios que tienen función de distancia decreciente a lo largo del segmento $[x_k, y_k]$ y función de distancia creciente a lo largo de $[x_l, y_l]$.
- U_4 es el conjunto de usuarios que tienen función de distancia decreciente a lo largo de los dos segmentos $[x_k, y_k]$ y $[x_l, y_l]$.

El conjunto de dominancia para cada usuario u situado en el vértice v_i es:

- Si $u \in U_1$ entonces:
$$D(u) = \{(\theta_k, \theta_l) : d(v(u), x_l) + \theta_l + \alpha < d(v(u), x_k) + \theta_k\}.$$
- Si $u \in U_2$ entonces:
$$D(u) = \{(\theta_k, \theta_l) : d(v(u), x_l) - \theta_l + \alpha < d(v(u), x_k) + \theta_k\}.$$
- Si $u \in U_3$ entonces:
$$D(u) = \{(\theta_k, \theta_l) : \theta_l < -\theta_k + d(v(u), x_k) - d(v(u), x_l) - \alpha\}.$$
- Si $u \in U_4$ entonces:
$$D(u) = \{(\theta_k, \theta_l) : \theta_l > \theta_k + d(v(u), x_l) - d(v(u), x_k) + \alpha\}.$$

Por lo tanto, si el movimiento es a un paralelogramo por encima de aquel en el que estamos a través de una linea de un semiplano H: si el semiplano está por encima de esa linea entonces R aumenta con el conjunto de usuarios que corresponden a este semiplano, y si es un semiplano que está por debajo de esa linea entonces R disminuye en el conjunto de usuarios que corresponden a este semiplano. Es decir:

- Si el semiplano H corresponde a un usuario de $U_2 \cup U_4$ entonces R se actualiza por
$$R \leftarrow R \cup \{u \in U_2 \cup U_4 : H = H(u)\}.$$
- Si el semiplano H corresponde a un usuario de $U_1 \cup U_3$ entonces R se actualiza por
$$R \leftarrow R - \{u \in U_1 \cup U_3 : H = H(u)\}.$$

Si coinciden ambos tipos de semiplanos se realizan las actualizaciones de forma simultánea. Si el movimiento es a un paralelogramo por debajo de aquel en el que estamos R aumenta o disminuye justo al contrario. El procedimiento tiene que comprobar todos los paralelogramos en el rectángulo. Si $|R| > \frac{1}{2}|U|$ en un paralelogramo entonces eliminamos de D la proyección en $[x_k, y_k]$ del paralelogramo correspondiente.

Al final de estos tres pasos de eliminación D coincide con el conjunto de puntos αCondorcet.

El análisis del algoritmo permite establecer que es de orden $O(|U|^4|A|^2)$.

Proposición

> *El algoritmo αC determina el conjunto de puntos αCondorcet en un tiempo $O(|U|^4|A|^2)$.*

Demostración El algoritmo αC tiene tres pasos.

En el paso 1 se comparan los vértices dos a dos. En cada comparación se realizan del orden de $O(|V|)$ operaciones. Por tanto tenemos $O(|V|^3)$ operaciones en este paso.

En el paso 2 se compara cada vértice con cada arista. Se calculan los puntos a^-, a^+, c^- y c^+ para todo usuario u; es decir, $O(|U|)$ valores. Las listas ordenadas L^- y L^+ se obtienen en $O(|U| \log |U|)$ operaciones. Actualizamos y comprobamos $O(|U|)$ veces el valor de R. Por tanto tenemos $O(|V||A||U| \log |U|)$ operaciones en este paso.

Finalmente en el paso 3 se comparan las aristas dos a dos. Para cada arista hay $|U|$ puntos cuello de botella a lo sumo. Estos valores deben ser ordenados, esta tarea toma $O(|U| \log |U|)$. La red tiene a lo sumo $|U||A|$ puntos cuello de botella por tanto el número de segmentos de la red es $O(|U||A|)$. Como comparamos los segmentos en D con todos los segmentos en N y $|D| = O(|U||A|)$ tenemos $O(|U|^2|A|^2)$ comparaciones. En cada comparación tenemos $O(|U| \log |U|)$ operaciones para determinar y ordenar los semiplanos. El número de paralelogramos es $O(|U|^2)$. Explorar los paralelogramos y determinar los subsegmentos que tienen que ser eliminados toma $O(|U|^2)$ operaciones. Por lo tanto este paso requiere $O(|U|^4|A|^2)$ operaciones.

Así el algoritmo completo requiere $O(|U|^4|A|^2)$ operaciones. $\square$

2.4. Algoritmo Tolerante de Condorcet

El algoritmo Tolerante de Condorcet o algoritmo TC permite calcular el valor del umbral de tolerancia α^*. Si el conjunto de puntos de Condorcet no es vacío entonces el umbral de indiferencia mínimo necesario para que exista una solución αCondorcet es cero. Este umbral de indiferencia mínimo, llamado *distancia de tolerancia,* se denota por α^*.

Por tanto si $C \neq \emptyset$ entonces $\alpha^* = 0$ y $C(\alpha^*) = C$. En otro caso, si el conjunto de puntos de Condorcet es vacío entonces $\alpha^* \neq 0$. Si el valor de α aumenta continuamente hasta que exista algún punto αCondorcet entonces el primer valor para el que esto sucede es la distancia de tolerancia α^*. Los valores de α para los cuales puede aparecer algún punto αCondorcet son los valores para los cuales el número de usuarios implicados en las comparaciones varía. Esto puede ocurrir:

a) En una comparación entre dos vertices.

Un usuario u que prefiere un vértice v_k a otro vértice v_j cambia su preferencia entre ellos cuando $d(v(u), v_k) + \alpha = d(v(u), v_j)$. Es decir, la preferencia cambia en

$$\alpha = d(v(u), v_j) - d(v(u), v_k); \quad u \in U, \quad v_j, v_k \in V.$$

b) En una comparación entre un vértice y una arista.

Si, para un usuario u, el vértice v_j no es preferido a ningún punto de la arista $[v_k, v_l]$, entonces $d(v(u), v_j) + \alpha \geq d(v(u), b_{kl}(u))$. Por otro lado cualquier punto de la arista $[v_k, v_l]$ no es preferido a un vértice v_j, por un usuario u, si $d(v(u), v_k) + \alpha \geq d(v(u), v_j)$ y $d(v(u), v_l) + \alpha \geq d(v(u), v_j)$ (ver la Figura 2). Por tanto la preferencia entre un vértice v_j y una arista $[v_k, v_l]$ cambia

- en $\alpha = d(v(u), v_j) - d(v(u), v_k)$,
- en $\alpha = d(v(u), v_j) - d(v(u), v_l)$ o
- en $\alpha = d(v(u), b_{kl}(u)) - d(v(u), v_j)$.

c) En una comparación entre segmentos.

Consideremos la comparación entre dos segmentos $[x_k, y_k]$ y $[x_l, y_l]$ usando los paralelogramos. Mientras el valor de α crece continuamente todos los semiplanos que determinan los paralelogramos que son comprobados para encontrar un punto αCondorcet se mueven al mismo tiempo la misma cantidad. Los semiplanos que están por encima de su frontera se mueven hacia arriba y los semiplanos que están por debajo de su frontera se mueven hacia abajo. Es decir que, cuando α crece, las fronteras de los semiplanos asociados a los usuarios de $U_1 \cup U_3$ se mueven hacia abajo y los semiplanos asociados a los usuarios de $U_2 \cup U_4$ se mueven hacia arriba. Por tanto, los paralelogramos aumentan o encogen ya que sus lados se mueven en paralelo la misma cantidad. Un paralelogramo desaparece cuando un semiplano que va hacia arriba encuentra un paralelogramo que va hacia abajo.

Los semiplanos asociados a los usuarios de U_1 y U_4 son paralelos; tienen pendiente $+1$. Si las fronteras de un semiplano asociado a un usuario de U_1 situado en v_i y un semiplano asociado a un usuario de U_4 situado en v_j coinciden entonces:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left| (d(v_i, x_k) - d(v_i, x_l)) - (d(v_j, x_l) - d(v_j, x_k)) \right|$$

Igualmente si las fronteras de un semiplano asociado a $u \in U_3$ con $v(u) = v_i$ y un semiplano asociado a $u \in U_2$ con $v(u) = v_j$ coinciden entonces:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left| (d(v_i, x_k) - d(v_i, x_l)) - (d(v_j, x_l) - d(v_j, x_k)) \right|$$

Como un punto en uno de los segmentos se convierte en un punto αCondorcet cuando paralelogramos que lo dominan desaparecen, entonces los valores de α tienen que ser la semidistancia entre un semiplano que está por debajo de su frontera y un semiplano que está por encima de su frontera.

Sea Δ el conjunto finito de valores para los cuales hemos visto que el número de usuarios que aparecen en la comparación puede variar, es decir $\Delta = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ donde:

$$A_1 = \{\alpha = |d(v(u), v_j) - d(v(u), v_k)| : v_j, v_k \in V, u \in U\},$$

$$A_2 = \{\alpha = |d(v(u), b_{kl}(u)) - d(v(u), v_j)| : v_j \in V, [v_k, v_l] \in A, u \in U\}$$

$$A_3 = \left\{\alpha = \tfrac{1}{2} \left| (d(v_i, x_k) - d(v_i, x_l)) - (d(v_j, x_l) - d(v_j, x_k)) \right| : \right.$$
$$\left. v_i, v_j \in V, x_k, x_l \in B \right\}$$

Proposición

La distancia de tolerancia mínima α^* pertenece al conjunto finito Δ de valores para los que el número de usuarios que aparecen en una comparación puede variar.

Demostración Supongamos que $\alpha^* \notin \Delta$. Sea $\alpha' \in \Delta$ el valor más grande de Δ tal que $\alpha' < \alpha^*$. Sea $x \in C(\alpha^*)$, si tomamos α' en vez de α^* entonces la estructura de preferencias de todos los usuarios es la misma; es decir, los conjuntos de usuarios para los que x es preferible a cada vértice y segmento son los mismos y también son los mismos los conjuntos de usuarios para los que no es preferible cuando se compara con un vértice o un segmento. Por tanto $x \in C(\alpha')$. Entonces α^* no es el menor valor de α tal que $C(\alpha) \neq \emptyset$ y esto es una contradicción con la definición de α^*. $\square$

La búsqueda dicotómica en Δ nos permite obtener α^*.

ALGORITMO TC

Paso 1

Tomemos $\alpha = 0$ y obtengamos $C(\alpha)$.

Si $C(\alpha) \neq \emptyset$ entonces $\alpha^* = 0$.

En otro caso sea $\alpha_0 = 0$ y tomemos $\alpha_1 \in \Delta$ tal que $C(\alpha) \neq \emptyset$ (α_1 será como mucho el diámetro de la red).

Paso 2

Buscar un $\alpha \in \Delta$ tal que $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$. Si ese valor existe ir al paso 3.

Si no hay un α que cumpla la condición $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$ entonces $\alpha^* = \alpha_1$. *Parar.*

Paso 3

Aplicar el algoritmo αC para obtener $C(\alpha)$.

- Si $C(\alpha) = \emptyset$ hacer $\alpha_0 = \alpha$.
- En otro caso ($C(\alpha) \neq \emptyset$) hacer $\alpha_1 = \alpha$.

Volver al paso 2.

Proposición

La complejidad computacional de la búsqueda dicotómica para encontrar la distancia de tolerancia α^* es de orden $O(|U|^4|A|^2 \log |V|)$.

Demostración En A_1 tenemos del orden de $O(|U||V|^2)$ valores. El número de puntos cuello de botella es de orden $O(|U||A|)$ y el número de valores de A_2 es $O(|V||A||U|)$. Como el número de segmentos es $O(|U||A|)$ tenemos que $|A_3| = O(|V|^2|A|^2|U|^2)$. Por tanto el tamaño de Δ es $|\Delta| = O(|V|^2|A|^2|U|^2)$ y se ordena en $O(|V|^2|A|^2|U|^2 \log|V|)$ operaciones.

El número de problemas αCondorcet que se resuelven en la búsqueda dicotómica en Δ es $O(\log(|V|^2|A|^2|U|^2)) = O(\log|V|)$. Como cada problema se resuelve en un tiempo de orden $O(|U|^4|A|^2)$ mediante el algoritmo αC, la complejidad total del procedimiento de solución es $O(|U|^4|A|^2 \log|V|)$. $\square$

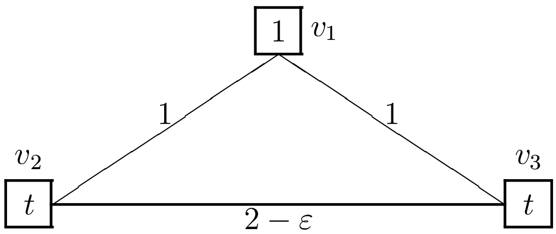
2.5. Comparación de la solución αCondorcet

En este apartado se realiza la comparación de los puntos αCondorcet con las soluciones del problema de la mediana y del centro. Se estudia en primer lugar la calidad de los puntos αCondorcet desde el punto de vista del problema de la mediana para el peor caso posible, estableciendo una cota para el valor de la función objetivo de la mediana en un punto αCondorcet. Igualmente se verá que la mediana en el peor de los casos puede ser altamente rechazada desde el punto de vista de las preferencias de los usuarios. Una comparación similar se realiza con el problema del centro. Finalmente se analiza la calidad del mejor punto αCondorcet desde el punto de vista de los criterios de la mediana y del centro.

Los puntos medianas de un conjunto de usuarios U sobre la red N son las localizaciones que minimizan la suma de distancias a los usuarios. La mediana de un conjunto de usuarios puede ser una localización muy rechazada por los usuarios ya que una gran mayoría de ellos prefieren otra localización.

Ejemplo

Sea N el triángulo que se muestra en la figura que viene a continuación con $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Las longitudes de las aristas son $l(v_1, v_2) = l(v_1, v_3) = 1$ y $l(v_2, v_3) = 2 - \varepsilon$. Consideremos que hay un usuario en el vértice v_1, t usuarios en el vértice v_2 y t usuarios en el vértice v_3. Si $\varepsilon < 1/t$ entonces la mediana de los usuarios está en v_1. Para $\alpha < \frac{1}{2}\varepsilon$, el punto medio de la arista $[v_2, v_3]$ es un punto αCondorcet y es preferido a la mediana por $2t$ usuarios.



Una mediana rechazada por una mayoría de usuarios.

La relación entre los puntos de Condorcet y las medianas fué estudiada en (Labbé, (1985)). Los resultados en (Labbé, (1985)) muestran que:

- Si $|U| = 2$ entonces $C = M$ y este conjunto consiste en todos los puntos que pertenecen a todas las rutas más cortas que unen los vértices en los que están los dos usuarios, es decir:

$$C = \{c \in N : d(v(u_1), c) + d(c, v(u_2)) = d(v(u_1), v(u_2))\}.$$

- Si $|U| = 3$ entonces el conjunto C consiste en los puntos c que pertenecen a todas las rutas más cortas que unen dos vértices en los que hay usuarios; es decir,

$$C = \{c \in N : d(v(u_i), c) + d(c, v(u_j)) = d(v(u_i), v(u_j)), \forall i \neq j\}.$$

  y si $C \neq \emptyset$ entonces $C = M$.

- Pero cuando $|U| > 3$ los conjuntos C y M pueden ser diferentes.

Además, se muestra también que para redes en general, si

$$F(x) = \sum_{u \in U} d(v(u), x)$$

denota la función objetivo del problema de la mediana del conjunto de usuarios, entonces

$$\frac{F(c)}{F(m)} \leq \frac{2|U| - (\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1)}{\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1}, \forall c \in C, m \in M. \tag{2.1}$$

Recordemos que $\lceil x \rceil$ denota el menor entero que es mayor o igual que x.

Como resultado de un teorema anterior de este capítulo, cualquier punto x que diste menos de α_2 de un punto α_1Condorcet es un punto $(\alpha_1+\alpha_2)$Condorcet.

$$\text{Si } c \in C(\alpha_1) \text{ y } d(c,x) < \alpha_2 \text{ entonces } x \in C(\alpha_1+\alpha_2). \tag{2.2}$$

Teorema

Si $c \in C$ y $d(c,x) < \alpha$ entonces $x \in C(\alpha)$ y

$$\frac{F(x)}{F(m)} \leq \frac{2|U| - (\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1)}{\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1} + \frac{\alpha|U|}{F(m)}$$

Demostración Como consecuencia de un teorema anterior de este capítulo, cualquier punto x que diste menos de α_2 de un punto α_1Condorcet es un punto $(\alpha_1+\alpha_2)$Condorcet. Por tanto, tomando $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = \alpha$, se tiene que si $c \in C$ y $d(c,x) < \alpha$ entonces $x \in C(\alpha)$.

Por la desigualdad triangular $\forall y \in N, \quad d(y,x) \leq d(y,c) + d(c,x)$. Por hipótesis $d(c,x) < \alpha$. Por tanto $F(x) \leq F(c) + |U|\alpha$.

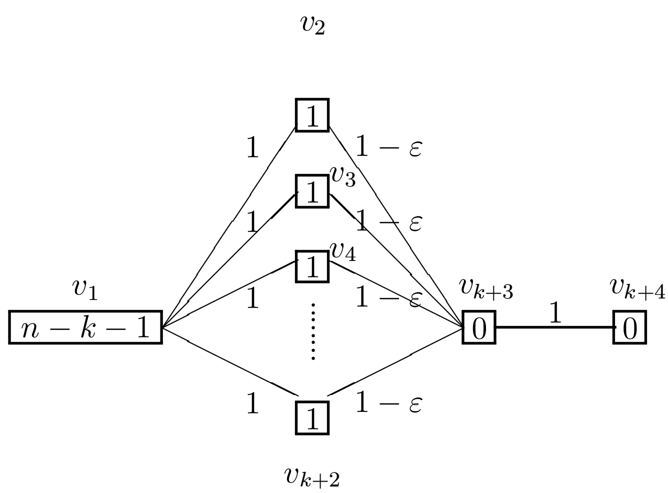
$$\frac{F(x)}{F(m)} \leq \frac{F(c)}{F(m)} + \frac{|U|\alpha}{F(m)}.$$

Usando la desigualdad (2.1) tenemos que

$$\frac{F(x)}{F(m)} \leq \frac{2|U| - (\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1)}{\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1} + \frac{\alpha|U|}{F(m)}$$

□

Esta es la mejor cota posible. La siguiente figura muestra una familia de ejemplos que se acercan asintóticamente a esta cota cuando ε disminuye.



Una familia de ejemplos que se acercan asintóticamente a la cota.

Ejemplo

Sea $n = |U|$ y $k = \lceil \frac{1}{2}n \rceil$; es decir, $n = 2k$ o $n = 2k - 1$. Tenemos una red N con $k+4$ vertices y $2k+3$ aristas. Las longitudes de estas aristas vienen dadas por

$$\begin{aligned} l(v_1, v_2) &= l(v_1, v_3) = l(v_1, v_4) = ... = l(v_1, v_{k+2}) = 1, \\ l(v_{k+3}, v_2) &= l(v_{k+3}, v_3) = l(v_{k+3}, v_4) = ... = l(v_{k+3}, v_{k+2}) = 1 - \varepsilon \\ l(v_{k+3}, v_{k+4}) &= 1. \end{aligned}$$

La localización de los n usuarios viene dada por

$$\begin{aligned} u(v_2) &= u(v_3) = u(v_4) = ... = u(v_{k+2}) = 1, \\ u(v_1) &= n - k - 1 \\ u(v_{k+3}) &= u(v_{k+4}) = 0 \end{aligned}$$

En este ejemplo si $\varepsilon < 2(n-k-1)/n$ entonces la mediana es $m = v_1$ y $F(v_1) = k+1$. Nótese que

$$F(v_{k+3}) = (n-k-1)(2-\varepsilon) + (k+1)(1-\varepsilon) = k + 1 + 2(n-k-1) - n\varepsilon.$$

Para $\alpha < \varepsilon$ el conjunto de puntos αCondorcet es la bola de centro v_{k+3} y radio α.

$$C(\alpha) = B(v_{k+3}, \alpha).$$

Para $\alpha \geq \varepsilon$ los puntos αCondorcet son aquellos a una distancia menor que α de v_{k+3} o a una distancia menor que $\alpha - \varepsilon$ de v_1; es decir

$$C(\alpha) = B(v_{k+3}, \alpha) \cup B(v_1, \alpha - \varepsilon).$$

La cota se alcanza para $\alpha \geq \varepsilon$ en el punto $x = p([v_{k+3}, v_{k+4}], \alpha)$ cuando ε tiende a 0. Nótese que

$$\begin{aligned} F(x) &= (n-k-1)(2+\alpha-\varepsilon) + (k+1)(1+\alpha-\varepsilon) = \\ &= (n-k-1) + n(1+\alpha-\varepsilon). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{F(m)} &= \frac{(n-k-1)+n(1+\alpha-\varepsilon)}{k+1} = \frac{2n-(k+1)+n(\alpha-\varepsilon)}{k+1} = \\ &= \frac{2|U| - (\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1)}{\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1} + \frac{(\alpha-\varepsilon)|U|}{F(m)}. \end{aligned}$$

Vamos a establecer ahora un teorema para los puntos αCondorcet en redes generales. Este teorema es similar al teorema para los puntos de Condorcet (Labbé, (1985)).

Sea $c \in C(\alpha)$ y $m \in M$. Consideremos el conjunto U_m de usuarios que prefieren m a c y sea U_c el conjunto de los restantes usuarios. Entonces

$$\begin{aligned} U_m &= \{u \in U : d(v(u), m) < d(v(u), c) - \alpha\}, \\ U_c &= \{u \in U : d(v(u), m) \geq d(v(u), c) - \alpha\} = U \setminus U_m. \end{aligned}$$

Denotamos la diferencia mínima para los usuarios que pertenecen a estos conjuntos por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= \min_{u \in U_m} \{(d(v(u), c) - \alpha) - d(v(u), m)\}, \\ \varepsilon_c &= \min_{u \in U_c} \{d(v(u), m) - (d(v(u), c) - \alpha)\} \end{aligned}$$

Para todo $u \in U_c$

$$\varepsilon(u) = d(v(u), m) - (d(v(u), c) - \alpha).$$

Nótese que

$$\varepsilon_m > 0, \varepsilon_c \geq 0, \varepsilon(u) \geq 0 \qquad \forall u \in U_c$$

y

$$\varepsilon_c = \min_{u \in U_c} \varepsilon(u).$$

Lema 1

Si $|U_c| = \lceil \frac{1}{2}|U| \rceil$ *y*

$$\alpha < \max_{u \in U_c} \{d(v(u), c)\}$$

entonces $\exists u^* \in U_c$ *tal que* $\varepsilon(u^*) \geq \varepsilon_m > 0$.

Demostración Si $\alpha < \max_{u \in U_c} \{d(v(u), c)\}$ entonces $\exists u^* \in U_c$ tal que $\alpha < d(v(u^*), c)$.

Supongamos que $\varepsilon(u^*) < \varepsilon_m$ y obtendremos una contradicción.

Como $\alpha < d(v(u^*), c)$ entonces $d(v(u^*), c) - \alpha > 0$ y además

$$d(v(u^*), m) > d(v(u^*), m) - (d(v(u^*), c) - \alpha) = \varepsilon(u^*).$$

Sea x un punto que pertenece a un camino mínimo entre $v(u^*)$ y la mediana m tal que $\varepsilon(u^*) < d(x, m) < \min\{\varepsilon_m, d(v(u^*), m)\}$. Como x es un punto que pertenece a un camino mínimo entre $v(u^*)$ y la mediana m tenemos

$$d(v(u^*), m) = d(v(u^*), x) + d(x, m).$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} d(v(u^*), x) & = & d(v(u^*), m) - d(x, m) < \\ & < & d(v(u^*), m) - \varepsilon(u^*) = d(v(u^*), c) - \alpha. \end{array}$$

Así

$$d(v(u^*), x) < d(v(u^*), c) - \alpha. \tag{2.3}$$

Por otro lado, $\forall u \in U_m$ usando la desigualdad triangular tenemos

$$\begin{array}{rcl} d(v(u), x) & \leq & d(v(u), m) + d(x, m) < d(v(u), m) + \varepsilon_m \leq \\ & \leq & d(v(u), m) + (d(v(u), c) - \alpha - d(v(u), m)) = d(v(u), c) - \alpha. \end{array}$$

Así

$$\forall u \in U_m : d(v(u), x) < d(v(u), c) - \alpha. \tag{2.4}$$

A partir de (2.3) y (2.4) tenemos $|x \prec_\alpha c| = |\{U_m\} \cup \{u'\}|$.

Por la hipótesis del lema $|U_c| = \lceil \frac{1}{2}|U| \rceil$. Por la definición de U_c y U_m tenemos $|U| = |U_c| + |U_m|$. Así $|x \prec_\alpha c| > \frac{1}{2}|U|$. Esto es una contradicción ya que c es un punto αCondorcet. Por lo tanto $\varepsilon(u^*) \geq \varepsilon_m$. □

Lema 2

Sea $a, b, c > 0$, $c > b$ y sea $c \geq a$.

$$\frac{a-b}{c-b} \leq \frac{a}{c}.$$

Demostración Si $c \geq a$ y $b > 0$ entonces $-bc \leq -ab$. Por tanto $ac - bc \leq ac - ab$ y $c(a-b) \leq a(c-b)$. Finalmente

$$\frac{a-b}{c-b} \leq \frac{a}{c}.$$

□

Ahora damos un teorema que extiende los resultados de (Labbé,(1985)).

Teorema

Si $C = \emptyset$ y $C(\alpha) \neq \emptyset$ entonces, $\forall c \in C(\alpha)$, $m \in M$, $\alpha < \max_{u \in U_c} \{d(v(u), c)\}$ y $\alpha < d(m, c)$.

$$\frac{F(c)}{F(m)} \leq \frac{2|U| - (\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1)}{\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1} + \frac{2\alpha(|U_c| + 1)}{F(m)}.$$

Demostración Si c es un punto αCondorcet entonces $|U_c| \geq \lceil \frac{1}{2}|U| \rceil$. Consideremos dos casos: A) $|U_c| \geq \lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1$ y B) $|U_c| = \lceil \frac{1}{2}|U| \rceil$.

A) Sea $|U_c| \geq \lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1$. Analizamos la función F en el punto αCondorcet c y en la mediana m.

Tomamos $c \in C(\alpha)$. Por definición de ε_c tenemos

$$\forall u \in U_c : \varepsilon_c \leq d(v(u), m) - (d(v(u), c) - \alpha).$$

Entonces

$$\forall u \in U_c : d(v(u), c) \leq d(v(u), m) + \alpha - \varepsilon_c. \tag{2.5}$$

Por la desigualdad triangular,

$$\forall u \in U_m : d(v(u), c) \leq d(v(u), m) + d(m, c). \tag{2.6}$$

Usando (2.5) y (2.6) tenemos:

$$F(c) = \sum_{u \in U_c} d(v(u), c) + \sum_{u \in U_m} d(v(u), c) \leq$$

$$\leq \sum_{u \in U_c} (d(v(u), m) + (\alpha - \varepsilon_c)) + \sum_{u \in U_m} (d(v(u), m) + d(m, c)) =$$

$$= \sum_{u \in U_c} d(v(u), m) + |U_c|(\alpha - \varepsilon_c) + \sum_{u \in U_m} d(v(u), m) + |U_m| d(m, c) =$$

$$= F(m) + |U_c|(\alpha - \varepsilon_c) + |U_m| d(m, c) \leq F(m) + |U_c|\alpha + |U_m| d(m, c).$$

Por tanto

$$F(c) \leq F(m) + |U_c|\alpha + |U_m| d(m, c). \tag{2.7}$$

Por otro lado, tomemos la mediana m.

$$F(m) = \sum_{u \in U_c} d(v(u), m) + \sum_{u \in U_m} d(v(u), m).$$

A partir de la desigualdad triangular

$$d(v(u), m) + d(v(u), c) \geq d(m, c).$$

Así,

$$\forall u \in U_c : d(v(u), m) \geq d(m, c) - d(v(u), c).$$

Entonces

$$\sum_{u \in U_c} d(v(u), m) \geq |U_c| d(m, c) - \sum_{u \in U_c} d(v(u), c). \tag{2.8}$$

Por la definición de ε_c, $\forall u \in U_c$, $\varepsilon_c \leq d(v(u), m) - (d(v(u), c) - \alpha)$ y

$$\varepsilon_c - d(v(u), m) - \alpha \leq -d(v(u), c).$$

Por lo tanto, remplazando esto en (2.8) tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{u\in U_c} d(v(u),m) &\geq |U_c|d(m,c)+\sum_{u\in U_c}(\varepsilon_c - d(v(u),m)-\alpha) = \\ &= |U_c|d(m,c)+|U_c|\varepsilon_c-\sum_{u\in U_c} d(v(u),m)-|U_c|\alpha.\end{aligned}$$

Entonces

$$2\sum_{u\in U_c} d(v(u),m) \geq |U_c|d(m,c)+|U_c|\varepsilon_c-|U_c|\alpha$$

y

$$\sum_{u\in U_c} d(v(u),m) \geq \frac{1}{2}|U_c|d(m,c)+\frac{1}{2}|U_c|\varepsilon_c-\frac{1}{2}|U_c|\alpha.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}F(m) &= \sum_{u\in U_c} d(v(u),m)+\sum_{u\in U_m} d(v(u),m) \geq \sum_{u\in U_c} d(v(u),m) \geq \\ &\geq \frac{1}{2}|U_c|d(m,c)+\frac{1}{2}|U_c|\varepsilon_c-\frac{1}{2}|U_c|\alpha \geq \frac{1}{2}|U_c|d(m,c)-\frac{1}{2}|U_c|\alpha.\end{aligned}$$

Así

$$F(m) \geq \frac{1}{2}|U_c|d(m,c)-\frac{1}{2}|U_c|\alpha. \tag{2.9}$$

Finalmente, de (2.7) y (2.9) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{F(c)}{F(m)} &\leq \frac{F(m)+|U_c|\alpha+|U_m|d(m,c)-|U_c|\alpha+|U_c|\alpha}{F(m)} \leq \\ &\leq 1+\frac{2|U_c|\alpha}{F(m)}+\frac{|U_m|d(m,c)-|U_c|\alpha}{\frac{1}{2}|U_c|d(m,c)-\frac{1}{2}|U_c|\alpha} \leq \\ &\leq 1+\frac{2|U_c|\alpha}{F(m)}+2\frac{|U_m|d(m,c)-|U_c|\alpha}{|U_c|d(m,c)-|U_c|\alpha}.\end{aligned}$$

Usando el lema 2 tenemos que $|U_c|\alpha$, $|U_m|d(m,c)$, y $|U_c|d(m,c)$ son números positivos. Y por hipótesis $|U_m| \leq |U_c|$ ya que $|U_c| \geq \lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1$. Entonces

$$\frac{F(c)}{F(m)} \leq 1+\frac{2|U_c|\alpha}{F(m)}+2\frac{|U_m|d(m,c)}{|U_c|d(m,c)}.$$

Tenemos $|U_c| \geq \lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1$ entonces $|U_m| \leq |U| - (\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{F(c)}{F(m)} &\leq 1 + \frac{2|U_c|\alpha}{F(m)} + 2\frac{|U| - (\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1)}{\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1} = \\
&= \frac{2|U| - (\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1)}{\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1} + \frac{2|U_c|\alpha}{F(m)} \leq \\
&\leq \frac{2|U| - (\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1)}{\lceil \frac{1}{2}|U| \rceil + 1} + \frac{2\alpha(|U_c| + 1)}{F(m)}.
\end{aligned}$$

B) Sea $|U_c| = \lceil \frac{1}{2}|U| \rceil$. Sea u' el usuario de U_m tal que

$$\varepsilon_m = (d(v(u'), c) - \alpha) - d(v(u'), m).$$

De nuevo analizamos la función F en el punto αCondorcet c y en la mediana m. Tomemos $c \in C(\alpha)$. Entonces

$$\begin{aligned}
F(c) &= \sum_{u \in U_c} d(v(u), c) + d(v(u'), c) + \sum_{u \in U_m \setminus \{u'\}} d(v(u), c) = \\
&= \sum_{u \in U_c} d(v(u), c) + (\varepsilon_m + d(v(u'), m) + \alpha) + \sum_{u \in U_m \setminus \{u'\}} d(v(u), c).
\end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular

$$d(v(u), c) \leq d(v(u), m) + d(m, c), \forall u \in U_m \setminus \{u'\}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
F(c) \leq & \sum_{u \in U_c} d(v(u), c) + \varepsilon_m + d(v(u'), m) + \alpha + \\
& + \sum_{u \in U_m \setminus \{u'\}} d(v(u), m) + (|U_m| - 1) d(m, c).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Por la definición de ε_c tenemos $\varepsilon_c \leq d(v(u), m) - d(v(u), c) + \alpha, \forall u \in U_c$. Por tanto

$$\forall u \in U_c : d(v(u), c) \leq d(v(u), m) + \alpha - \varepsilon_c. \tag{2.11}$$

Por hipótesis

$$\alpha < \max_{u \in U_c} \{d(v(u), c))\}$$

entonces $\exists u^* \in U_c$ tal que $\varepsilon(u^*) \geq \varepsilon_m > 0$. Y por definición de $\varepsilon(u^*)$ es

$$d(v(u^*), c) = d(v(u^*), m) + \alpha - \varepsilon(u^*). \tag{2.12}$$

Por lo tanto usando (2.11) y (2.12)

$$F(c) \leq \sum_{u \in U_c} d(v(u), m) + (|U_c| - 1)(\alpha - \varepsilon_c) + \alpha - \varepsilon(u^*) + \varepsilon_m +$$

$$+ d(v(u'), m) + \alpha + \sum_{u \in U_m \setminus \{u'\}} d(v(u), m) + (|U_m| - 1) d(m, c) =$$

$$= F(m) + (|U_c| - 1)(\alpha - \varepsilon_c) + \alpha - \varepsilon(u^*) + \varepsilon_m + (|U_m| - 1) d(m, c) + \alpha =$$
$$= F(m) + \alpha(|U_c| + 1) - (|U_c| - 1)\varepsilon_c - \varepsilon(u^*) + \varepsilon_m + (|U_m| - 1) d(m, c).$$

Aplicando el lema 1 tenemos que $\varepsilon(u^*) \geq \varepsilon_m > 0$. Por tanto $-\varepsilon(u^*) + \varepsilon_m$ es una cantidad negativa. Como $\varepsilon_c \geq 0$ entonces $-(|U_c| - 1)\varepsilon_c$ también es una cantidad negativa. Entonces:

$$F(c) \leq F(m) + \alpha(|U_c| + 1) + (|U_m| - 1) d(m, c). \tag{2.13}$$

Tomemos ahora la mediana m.

$$F(m) = \sum_{u \in U_c} d(v(u), m) + \sum_{u \in U_m \setminus \{u'\}} d(v(u), m) + d(v(u'), m). \tag{2.14}$$

Por la definición de ε_c, $\forall u \in U_c$, $\varepsilon_c \leq d(v(u), m) - (d(v(u), c) - \alpha)$ y

$$\varepsilon_c - d(v(u), m) - \alpha \leq -d(v(u), c).$$

Por hipótesis

$$\alpha < \max_{u \in U_c} \{d(v(u), c))\}$$

entonces $\exists u^* \in U_c$ tal que $\varepsilon(u^*) \geq \varepsilon_m > 0$. Por definición de $\varepsilon(u^*)$

$$d(v(u^*), c) = d(v(u^*), m) + \alpha - \varepsilon(u^*).$$

Por lo tanto por la desigualdad triangular :

$$\begin{aligned} \sum_{u \in U_c} d(v(u), m) &\geq \sum_{u \in U_c} (d(m, c) - d(v(u), c)) = \\ &= |U_c| d(m, c) - \sum_{u \in U_c} d(v(u), c) \geq \end{aligned}$$

$$\geq |U_c|d(m,c)+ \sum_{u\in U_c-\{u^*\}} (\varepsilon_c - d(v(u),m) - \alpha) - d(v(u^*),m) - \alpha + \varepsilon(u^*) =$$

$$= |U_c|d(m,c) + (|U_c|-1)\varepsilon_c + \varepsilon(u^*) - \sum_{u\in U_c} d(v(u),m) - |U_c|\alpha.$$

Entonces

$$2\sum_{u\in U_c} d(v(u),m) \geq |U_c|d(m,c) + (|U_c|-1)\varepsilon_c + \varepsilon(u^*) - |U_c|\alpha.$$

y

$$\sum_{u\in U_c} d(v(u),m) \geq \frac{1}{2}|U_c|d(m,c) + \frac{1}{2}(|U_c|-1)\varepsilon_c - \frac{1}{2}|U_c|\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon(u^*). \quad (2.15)$$

Por la desigualdad triangular $d(v(u'),m) + d(v(u'),c) \geq d(m,c)$, también tenemos

$$d(v(u'),m) \geq d(m,c) - d(v(u'),c). \quad (2.16)$$

Como $\varepsilon_m = (d(v(u'),c) - \alpha) - d(v(u'),m)$, por tanto tenemos

$$-d(v(u'),c) = -\alpha - d(v(u'),m) - \varepsilon_m.$$

Remplazando esto en 2.16

$$d(v(u'),m) \geq d(m,c) - \alpha - d(v(u'),m) - \varepsilon_m.$$

Por lo tanto $d(v(u'),m) \geq \frac{1}{2}(d(m,c) - \alpha - \varepsilon_m)$. Si aplicamos este resultado y (2.15) en (2.14) entonces

$$F(m) = \sum_{u\in U_c} d(v(u),m) + d(v(u'),m) + \sum_{u\in U_m\setminus\{u'\}} d(v(u),m) \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2}|U_c|d(m,c) + \frac{1}{2}(|U_c|-1)\varepsilon_c - \frac{1}{2}|U_c|\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon(u^*).\right) +$$

$$+\frac{1}{2}(d(m,c) - \alpha - \varepsilon_m) + \sum_{u\in U_m\setminus\{u'\}} d(v(u),m) =$$

$$= \frac{1}{2}(|U_c|+1)d(m,c) + \frac{1}{2}(|U_c|-1)\varepsilon_c + \frac{1}{2}\varepsilon(u^*) - \frac{1}{2}\varepsilon_m$$

$$-\frac{1}{2}(|U_c|+1)\alpha + \sum_{u\in U_m\setminus\{u'\}} d(v(u),m).$$

Usando el lema 1 tenemos que $\varepsilon(u^*) \geq \varepsilon_m > 0$. Entonces $\frac{1}{2}(\varepsilon(u^*) - \varepsilon_m)$ y $\frac{1}{2}(|U_c|-1)\varepsilon_c$ son números positivos. Por lo tanto:

$$F(m) \geq \frac{1}{2}(|U_c|+1)d(m,c) - \frac{1}{2}(|U_c|+1)\alpha. \tag{2.17}$$

Finalmente de (2.13) y (2.17) tenemos que:

$$\frac{F(c)}{F(m)} \leq \frac{F(m) + \alpha(|U_c|+1) + (|U_m|-1)d(m,c) - \alpha(|U_c|+1) + \alpha(|U_c|+1)}{F(m)} \leq$$

$$\leq 1 + \frac{(|U_m|-1)d(m,c) - \alpha(|U_c|+1)}{\frac{1}{2}(|U_c|+1)d(m,c) - \frac{1}{2}\alpha(|U_c|+1)} + \frac{2\alpha(|U_c|+1)}{F(m)} \leq$$

$$\leq 1 + 2\frac{(|U_m|-1)d(m,c) - \alpha(|U_c|+1)}{(|U_c|+1)d(m,c) - \alpha(|U_c|+1)} + \frac{2\alpha(|U_c|+1)}{F(m)}.$$

Como $|U_c| = \lceil\frac{1}{2}|U|\rceil$ tenemos $|U_m| = |U| - (\lceil\frac{1}{2}|U|\rceil)$. Usando el lema 2

$$\frac{F(c)}{F(m)} \leq 1 + 2\frac{(|U_m|-1)d(m,c)}{(|U_c|+1)d(m,c)} + \frac{2\alpha(|U_c|+1)}{F(m)}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{F(c)}{F(m)} \leq 1 + 2\frac{(|U| - \lceil\frac{1}{2}|U|\rceil - 1)}{(\lceil\frac{1}{2}|U|\rceil + 1)} + \frac{2\alpha(|U_c|+1)}{F(m)} =$$

$$= \frac{2|U| - (\lceil\frac{1}{2}|U|\rceil + 1)}{\lceil\frac{1}{2}|U|\rceil + 1} + \frac{2\alpha(|U_c|+1)}{F(m)},$$

que es la desigualdad propuesta. $\square$

Teorema

Para $\alpha < d(m,c)$, *si* $C = \emptyset$, $C(\alpha) \neq \emptyset$ *y* $\sum_{u\in U_c} \varepsilon(u) \geq \varepsilon_m$ *entonces,*

$$\forall c \in C(\alpha), m \in M: \frac{F(c)}{F(m)} \leq \frac{2|U| - (\lceil\frac{1}{2}|U|\rceil + 1)}{\lceil\frac{1}{2}|U|\rceil + 1} + \frac{2\alpha(|U_c|+1)}{F(m)}.$$

La demostración es similar a la del teorema anterior y sólo se indican aquí las diferencias. En el teorema anterior usamos la hipótesis

$$\alpha < \max_{u \in U_c} \{d(v(u), c)\}$$

para garantizar que $\exists u^* \in U_c$ tal que $\varepsilon(u^*) \geq \varepsilon_m > 0$. De esta forma en el segundo caso de la demostración anterior $|U_c| = \lceil \frac{1}{2}|U| \rceil$ cada vez que se utiliza el lema 1 lo que se busca es que $\varepsilon(u^*) - \varepsilon_m$ sea una cantidad positiva para lograr la desigualdad correspondiente. Ahora usamos $\sum\limits_{u \in U_c} \varepsilon(u) \geq \varepsilon_m$ en vez de $\varepsilon(u^*) \geq \varepsilon_m > 0$. Teniendo en cuenta que

$$\sum_{u \in U_c} \varepsilon(u) - \varepsilon_m > 0$$

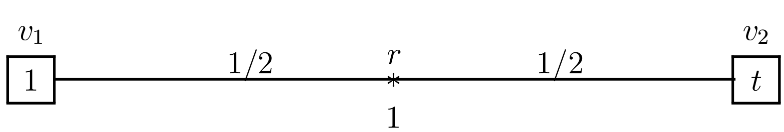
se llegarán al mismo tipo de desigualdades.

Al igual que con la mediana, la comparación del punto αCondorcet y el centro se realiza estudiando la calidad de los puntos αCondorcet desde el punto de vista del problema del centro para el peor caso posible. Pero por otro lado, desde el punto de vista de las preferencias de los usuarios, el centro en el peor de los casos, puede tener un gran rechazo.

Los puntos centro de un conjunto U de usuarios de la red N son las localizaciones que minimizan la distancia máxima a los usuarios.

Ejemplo

Consideremos la red de la figura que consta sólo de una arista que une dos vértices, v_1 y v_2 con longitud 1; es decir, $V = \{v_1, v_2\}$ y $E = \{[v_1, v_2]\}$ con $l(v_1, v_2) = 1$. Supongamos que hay un usuario en el vértice v_1, y t usuarios en el vértice v_2.



Un centro rechazado por una mayoría de usuarios.

El centro de los usuarios r es el punto medio de la arista. Para $\alpha < \frac{1}{2}$ el vértice v_2 es un punto αCondorcet que es preferido al centro r por t usuarios.

La relación entre centros y puntos de Condorcet fué estudiada en (Hansen y Thisse, (1981)). En general, los centros de una red N no se encuentran situados en un vértice sino en el interior de una arista entre dos vértices. Normalmente, los centros y los puntos de Condorcet no se encuentran situados en los mismos puntos, incluso si N es un árbol.

Si $G(x)$ es la función objetivo del problema del centro,

$$G(x) = \max_{u \in U} d(v(u), x),$$

se denota por R el conjunto de los centros, y por C el conjunto de puntos de Condorcet, en (Hansen y Thisse, (1981)) se demuestra que:

- Si N es una red en general entonces

$$\frac{G(c)}{G(r)} \leq 3, \forall c \in C, r \in R.$$

- Si N es un árbol entonces

$$\frac{G(c)}{G(r)} \leq 2, \forall c \in C, r \in R.$$

Para los puntos αCondorcet hemos llegado a los siguientes teoremas que generalizan estas desigualdades.

Teorema

Sea N una red en general entonces

$$\frac{G(c)}{G(r)} \leq 3 + \frac{\alpha}{G(r)}, \forall c \in C(\alpha), r \in R.$$

Demostración Tomamos $c \in C(\alpha)$ y $r \in R$. Sean u_r y u_c los usuarios en los que se alcanza la función objetivo G en el centro r y en el punto αCondorcet c, respectivamente; es decir, tales que

$$G(r) = \max_{u \in U} d(v(u), r) = d(v(u_r), r),$$

y

$$G(c) = \max_{u \in U} d(v(u), c) = d(v(u_c), c).$$

Como c es un punto αCondorcet, para más de la mitad de los usuarios tenemos que $d(v(u), r) \geq d(v(u), c) - \alpha$, esto es $d(v(u), c) \leq d(v(u), r) + \alpha$. En particular, hay un usuario $\overline{u}$ tal que

$$d(v(\overline{u}), c) \leq d(v(\overline{u}), r) + \alpha. \tag{2.18}$$

Por la desigualdad triangular

$$d(v(u_c), c) \leq d(v(u_c), r) + d(r, v(\overline{u})) + d(v(\overline{u}), c).$$

Usando (2.18) tenemos

$$d(v(u_c), c) \leq d(v(u_c), r) + d(r, v(\overline{u})) + d(v(\overline{u}), r) + \alpha.$$

Así, por la definición de u_r, tenemos

$$d(v(u_c), c) \leq 3d(v(u_r), r) + \alpha$$

y entonces

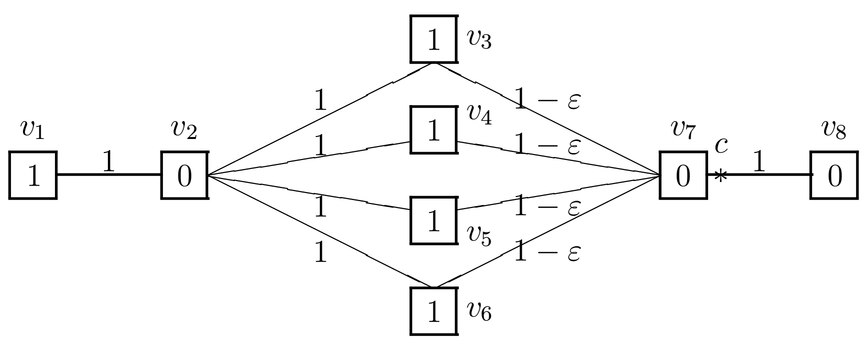
$$\frac{G(c)}{G(r)} = \frac{d(v(u_c), c)}{d(v(u_r), r)} \leq \frac{3d(v(u_r), r) + \alpha}{d(v(u_r), r)} = 3 + \frac{\alpha}{G(r)},$$

que es la desigualdad propuesta. □

Además esta cota está ajustada. Veamos una familia de casos en los que esta cota se alcanza asintóticamente.

Ejemplo

Consideremos la familia de problemas representados en la siguiente figura.



Una familia de ejemplos que se acercan asintóticamente a la cota.

Sea N una red con 8 vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ y con unas aristas cuyas longitudes vienen dadas por $l(v_1, v_2) = l(v_2, v_3) = l(v_2, v_4) = l(v_2, v_5) = l(v_2, v_6) = l(v_7, v_8) = 1$ y $l(v_3, v_7) = l(v_4, v_7) = l(v_5, v_7) = l(v_6, v_7) = 1 - \varepsilon$. Sólo hay 5 usuarios en v_1, v_3, v_4, v_5 y v_6; es decir, $u(v_1) = u(v_3) = u(v_4) = u(v_5) = u(v_6) = 1$ y $u(v_2) = u(v_7) = u(v_8) = 0$. En este ejemplo v_2 es el centro.

Para $\alpha < \varepsilon$, el conjunto de puntos αCondorcet consiste en los puntos alrededor de v_7 a una distancia no mayor que α es decir la bola centrada en v_7 con radio α denotada por $B(v_7, \alpha)$.

Para $\alpha \geq \varepsilon$, el conjunto de puntos αCondorcet consiste en $B(v_7, \alpha) \cup B(v_2, \alpha - \varepsilon)$. La cota se aproxima para $\alpha \geq \varepsilon$ en $x = p([v_7, v_8], \alpha)$ cuando ε tiende a 0.

Teorema

Sea N un árbol, entonces

$$\frac{G(c)}{G(r)} \leq 2 + \frac{\alpha}{G(r)}, \forall c \in C(\alpha), r \in R.$$

Demostración Tomemos $c \in C(\alpha), r \in R$. Sean de nuevo u_r y u_c los usuarios en los que se alcanza la función objetivo en el centro r y en el punto αCondorcet c, es decir u_c es el usuario más lejano a c y

$$G(c) = \max_{u \in U} d(v(u), c) = d(v(u_c), c).$$

Sea u_r el usuario más alejado de u_c. Es sabido (Handler y Mirchandani, (1979)) que r es el punto medio del camino entre u_c y u_r y que

$$G(r) = \max_{u \in U} d(v(u), r) = d(v(u_c), r) = d(v(u_r), r).$$

Además, el camino entre c y u_c pasa a través de r entonces $d(v(u_c), c) = d(v(u_c), r) + d(r, c)$. Por lo tanto

$$\frac{G(c)}{G(r)} = \frac{d(v(u_c), c)}{d(v(u_c), r)} = \frac{d(v(u_c), r) + d(r, c)}{d(v(u_r), r)} = 1 + \frac{d(r, c)}{d(v(u_r), r)}.$$

Vamos a ver que $d(r, c) - \alpha \leq d(v(u_r), r)$. Si

$$d(v(u_r), r) < d(r, c) - \alpha \tag{2.19}$$

estonces por definición de u_r tenemos

$$d(v(u), r) \leq d(v(u_r), r) < d(r, c) - \alpha, \forall u \in U.$$

Sabemos que $d(r, c) > \alpha$ ya que si $d(r, c) - \alpha \leq 0$ entonces

$$d(v(u_r), r) < d(r, c) - \alpha \leq 0$$

y esto es imposible. Sea z el punto entre r y c tal que $d(z, c) = \alpha$. Si quitamos z entonces dividimos el árbol en dos subárboles. Un subárbol que contiene a r y otro que contiene a c. Como c es un punto αCondorcet, más de la mitad de los usuarios están en el subárbol que contiene a c; en otro caso más de la mitad de los usuarios que están en el otro subárbol (el subárbol que contiene a r) preferirían z a c. Para los usuarios u situados en el subárbol que contiene a c tenemos $d(r, v(u)) \geq d(r, c) - \alpha$. Por lo tanto

$$d(r, c) - \alpha \leq d(v(u), r) \leq \max_{u \in U} d(v(u), r) = d(v(u_r), r) = d(v(u_c), r).$$

Y esto es una contradicción con (2.19)

Concluimos que

$$d(r, c) - \alpha \leq d(v(u_r), r)$$

entonces

$$\frac{G(c)}{G(r)} = 1 + \frac{d(r, c) - \alpha}{d(v(u_r), r)} + \frac{\alpha}{d(v(u_r), r)} \leq 2 + \frac{\alpha}{G(r)}.$$

que es la desigualdad propuesta. □

Se ha analizado la relación de la solución αCondorcet con las soluciones de la mediana y el centro.Los resultados anteriores proporcionan cotas superiores para la calidad de un punto αCondorcet desde el punto de vista de los problemas de la mediana y del centro. Estas cotas son los peores valores de las funciones objetivo de estos problemas para un punto αCondorcet. Sin embargo, para un α dado, sería mucho más interesante analizar el *mejor* punto αCondorcet en vez del peor.

Consideremos en primer lugar la función objetivo del problema de la mediana. Como no existe un punto αCondorcet para todo α, vamos a considerar para α sólo valores para los que existan puntos αCondorcet. El menor entre estos valores es α^* y, como se mostró anteriormente, puede ser hallado en tiempo polinomial. El valor de α^* da una medida de la tolerancia necesaria para que exista una solución que sea aceptada por una mayoría de usuarios. El menor valor de α tal que una mediana es a la vez un punto αCondorcet da una medida de la tolerancia necesaria para que la mediana sea aceptada por una mayoría de usuarios. Por otro lado, el mejor valor de la función objetivo del problema de la mediana en un punto Tolerante de Condorcet da una medida de la calidad de una solución de Condorcet.

Sea α' el menor valor para α tal que una mediana es a la vez un punto αCondorcet. Claramente $\alpha^* \leq \alpha'$ y cabe considerar valores de compromiso para α tales que $\alpha^* \leq \alpha \leq \alpha'$. Para unos valores intermedios de α como esos, la eficiencia de los puntos αCondorcet varía en un intervalo entre el mejor y el peor.

En los casos que se muestran en las secciones previas las cotas se alcanzan para el peor punto αCondorcet en un punto que está a una distancia $h = \alpha - \alpha^*$ de un punto Tolerante de Condorcet en la dirección contraria a la mediana. En los apartados anteriores se demostró que si $c \in C(\alpha_1)$ y $d(c,x) < \alpha_2$ entonces $x \in C(\alpha_1 + \alpha_2)$. Así, normalmente, un buen punto αCondorcet suele estar a una distancia h de un punto Tolerante de Condorcet en el camino desde éste a la mediana. Si h es la distancia desde un punto Tolerante de Condorcet a una mediana entonces esa mediana es un punto αCondorcet con $\alpha = \alpha^* + h$. Así $\alpha' \leq \alpha^* + d(m,c)$ para cada mediana m y cada punto Tolerante de Condorcet c.

Una búsqueda dicotómica entre α^* y $\alpha^* + h$ donde

$$h = \min\{d(c,m) : c \in C(\alpha^*), m \in M\}$$

nos dará el valor exacto para α', es decir, el valor mínimo para α tal que una mediana sea también un punto αCondorcet.

Analogamente sucede con el análisis de las soluciones de Condorcet para el problema del centro. Además de la distancia de tolerancia mínima

$$\alpha^* = \min\{\alpha : C(\alpha) \neq \emptyset\}$$

se tiene en cuenta la distancia de tolerancia que permite que un centro no sea rechazado por una mayoría de ususarios; es decir,

$$\alpha'' = \min\{\alpha : R \cap C(\alpha) \neq \emptyset\}.$$

Entonces

$$\alpha'' - \alpha^* \leq \min\{d(c,r) : c \in C(\alpha^*), r \in R\}.$$

Una búsqueda dicotómica nos dará el valor exacto para α''. Para $\alpha^* \leq \alpha \leq \alpha''$, el punto a distancia $\alpha - \alpha^*$ en un camino desde un punto Tolerante de Condorcet c a un centro r es un buen candidato para un punto αCondorcet con un valor mínimo para la función $G(.)$.

Dado que la complejidad computacional de los algoritmos que hemos dado es quizás muy alta se deben considerar procedimientos más eficientes para problemas reales de gran tamaño. Estos algoritmos se obtienen usando reglas heurísticas que eviten la comparación exhaustiva entre todos los segmentos y permita una mejor selección de los valores que se deban incluir en Δ.

3. El modelo generalizado.

3.1. Introducción

El problema de la localización de servicios mediante votos se enmarca en el contexto de los problemas de decisión en grupo. Se han considerado en la literatura especializada gran cantidad de procedimientos de *outranking* o reglas de decisión en grupo para seleccionar una localización teniendo en cuenta las preferencias de un conjunto de votantes. Una de las reglas más usuales es la denominada regla de Condorcet. Las aplicación de la regla de Condorcet a la localización mediante votos implica que una localización x debe ser rechazada si hay otra localización y que es preferida por una mayoría de usuarios. La localización de Condorcet es una localización no rechazada y no siempre existe.

El concepto de localización Tolerante de Condorcet introducido en el capítulo anterior se obtiene de la siguiente forma. La definición de localización de Condorcet se basa en la idea de que cada usuario considera que dos localizaciones x e y son indiferentes sólo si están a la misma distancia del usuario. Si consideramos que una cantidad positiva α nos da un umbral para la indiferencia de cualquier usuario entonces, dos localizaciones x e y para el servicio son indiferentes para un votante si las distancias hasta x y hasta y se diferencian en α como mucho. Esta estructura de preferencias, denominada *semiorden*, refleja más fielmente el comportamiento de los usuarios en situaciones reales. Una localización x es un punto α*Condorcet* si no hay otro punto y preferido por una mayoría estricta de usuarios usando un umbral α para la indiferencia de cada usuario. Las localizaciones *Tolerantes de Condorcet* son las localizaciones αCondorcet para el valor mínimo de α tal que el conjunto de localizaciones αCondorcet no es vacío.

Por otro lado, el criterio de Simpson se obtiene a partir de la solución de Condorcet de la siguiente manera. Para la solución de Condorcet la mayoría requerida para rechazar un punto es la mitad de los usuarios, pero se puede usar otra cantidad de usuarios. Sea γ la proporción de usuarios que tienen que preferir otra localización para rechazar un punto. Entonces, una localización x es un punto γ*Condorcet* si no existe otra localización y más próxima a una proporción γ de usuarios. Las *localizaciones de Simpson* son aquellos puntos tales que el número máximo de usuarios próximos a otra localización es mínimo, es decir, las localizaciones γCondorcet para el valor mínimo de γ tal que hay una localización γCondorcet. Este criterio de solución para un problema de decisión en grupo suele recibir el nombre de criterio de *Copeland.*

Ambos parametros, la distancia de tolerancia α y la mayoría cualificada γ se introducen en orden a garantizar que los conjuntos de soluciones no son vacíos. En este capítulo se dedica al modelo que surge al considerar, a la vez, las dos ideas definiendo las localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet cuando se permite que ambos parámetros sean modificados. A partir de ahí derivamos los conceptos de localizaciones αSimpson y localizaciones γCondorcet Tolerantes fijando uno de los parámetros y minimizando el otro garantizando la existencia de una solución.

A este modelo generalizado con los parámetros α y γ se le incopora también una extensión emanada de un concepto aplicado en localización competitiva. Se trata de contemplar un tercer parámetro β que establece la probabilidad de que un usuario en situación de indiferencia entre dos localizaciones se decante por una de ellas. Aunque en este contexto la justificación para introducir esta extensión no es muy robusta, si tiene especial interés el caso en que $\beta = 1/2$ ya que da lugar al concepto de *solución plural* que se correponde con la sustitución en el concepto de Condorcet de la mayoría absoluta por la relativa. Se trata de establecer como condición para rechazar una localización propuesta en favor de una alternativa, no cuando el número de usuarios que prefieren la alternativa supere a la mitad de ellos sino cuando supere a los que prefieren la localización propuesta en primer lugar. La última parte del capítulo se dedica a estas cuestiones.

3.2. El modelo generalizado de localización mediante votos

Consideremos el modelo de localización simple mediante votos en redes. Es decir el modelo en el que se va a localizar sólo un único servicio. Sea un conjunto finito de usuarios U ubicados sobre vértices de la red que quieren la ubicación de un punto de servicio lo más cerca posible. Sea L el subconjunto de puntos de la red entre los que tiene que ser escogido el punto de localización x. Denotamos por $d(u, x)$ la distancia desde el usuario $u \in U$ a una localización $x \in L$. La solución de Condorcet surge si la localización es seleccionada evitando la posibilidad de que sea rechazada en favor de otra por una mayoría absoluta de usuarios. Una *localización de Condorcet* es una localización tal que ninguna otra está más cerca a la mitad de los usuarios. Denotamos por C al conjunto de localizaciones de Condorcet. Entonces

$$C = \{x \in L : |\{u \in U : d(y,u) < d(x,u)\}| \leq |U|/2, \forall y \in L\}$$

Este concepto de solución considera, de un lado que dos localizaciones x e y son indiferentes para cualquier usuario si y sólo si están a la misma distancia del usuario, y de otro lado que la mayoría de usuarios necesaria para rechazar una localización es la mitad de los usuarios. Como para un gran conjunto de ejemplos no existe solución de Condorcet parece que las restricciones son muy fuertes y que deben ser relajadas. En el capítulo anterior se consideró el modelo en el que para cada usuario dos localizaciones son indiferentes si la diferencia de sus distancias al usuario están dentro de un umbral dado α. Entonces cada usuario u preferiría la localización x a y si la distancia a y es mayor que la distancia a x más α; es decir, si $d(u,x) + \alpha < d(u,y)$. Se obtiene así un modeo más realista y la posibilidad de modular el grado de compromiso de los usuarios.

También se puede considerar que la cantidad de usuarios que deben preferir otra alternativa para que una localización sea rechazada se fija a una proporción γ en vez de a $1/2$. Esto permite relajar (o también restringir si $\gamma < 1/2$) el conjunto de soluciones admisibles del modelo de localización simple mediante votos. Se propone el modelo que incorpora estos dos parámetros denominados *mayoría cualificada* γ y *distancia de tolerancia* α.

Por tanto, para cada mayoría cualificada γ y cada distancia de tolerancia α tenemos una familia de conceptos de solución llamadas localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet. Una localización x es una localización $\alpha\gamma$*Condorcet* si y sólo si, para cualquier otra localización y, la proporción de usuarios que están a una distancia de y menor que la distancia de x disminuida en la cantidad α, no es mayor que γ.

Definición

Un punto $x \in L$ es una ***localización*** $\alpha\gamma$***Condorcet*** *si y sólo si:*

$$|\{u \in U : d(y,u) < d(x,u) - \alpha\}| \leq \gamma|U|, \forall y \in L.$$

Denotando la preferencia con distancia de tolerancia α por $\prec_\alpha$ y el nivel de preferencia en los usuarios por:

$$|y \prec_\alpha x| = |\{u \in U : d(y,u) < d(x,u) - \alpha\}|$$

el conjunto de localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet con distancia de tolerancia α y mayoría cualificada γ, denotado por $C(\alpha,\gamma)$, viene dado por:

$$C(\alpha,\gamma) = \{x \in L : |y \prec_\alpha x| \leq \gamma|U|, \forall y \in L\}$$

Por tanto, el conjunto de las localizaciones de Condorcet viene dado por $C = C(0, 1/2)$; se trata del caso particular de localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet en el que $\gamma = 1/2$ y $\alpha = 0$. Las localizaciones αCondorcet y las localizaciones γCondorcet son los casos especiales de las localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet para $\gamma = 1/2$ y para $\alpha = 0$, respectivamente.

Definición

Para un valor de α fijo, las ***localizaciones αCondorcet*** *son las localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet para $\gamma = 1/2$.*

Definición

Para un valor de γ fijo, las ***localizaciones γCondorcet*** *son las localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet para $\alpha = 0$.*

Denotamos $C_1(\alpha) = C(\alpha, 1/2)$ y $C_2(\gamma) = C(0,\gamma)$ al conjunto de localizaciones αCondorcet y al conjunto de localizaciones γCondorcet, respectivamente. Formalmente

$$\begin{aligned} C_1(\alpha) &= \{x \in L : |\{u \in U : d(y,u) < d(x,u) - \alpha\}| \leq \tfrac{1}{2}|U|, \forall y \in L\} \\ C_2(\gamma) &= \{x \in L : |\{u \in U : d(y,u) < d(x,u)\}| \leq \gamma|U|, \forall y \in L\} \end{aligned}$$

Si no hay localización de Condorcet entonces ambos parámetros, α y γ, pueden ser usados para relajar las condiciones de Condorcet para permitir la existencia de soluciones. Incluso, aunque exista una solución de Condorcet, se puede tomar $\gamma < 1/2$, con lo que las condiciones de existencia son más restrictivas. Siempre hay una distancia de tolerancia α y una mayoría cualificada γ tal que existe una solución $\alpha\gamma$Condorcet. Las localizaciones de Simpson y las localizaciones Tolerantes de Condorcet se obtienen con las relajaciones mínimas usando sólo uno de los parámetros.

Sean α^* y γ^* los respectivos valores mínimos que permiten la existencia de localizaciones αCondorcet y γCondorcet respectivamente. Es decir,

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \min\{\alpha : C_1(\alpha) \neq \emptyset\} \qquad \text{y} \\ \gamma^* &= \min\{\gamma : C_2(\gamma) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Entonces las localizaciones *Tolerantes de Condorcet* y las localizaciones de *Simpson* son las localizaciones αCondorcet y las localizaciones γCondorcet para α^* y γ^*, respectivamente. Esto es,

Definición

Una localización $x \in L$ es una ***localización Tolerante de Condorcet*** *si $x \in C_1(\alpha^*)$ donde*

$$\alpha^* = \min\{\alpha : C_1(\alpha) \neq \emptyset\}.$$

Definición

Una localización $x \in L$ es una ***localización de Simpson*** *si $x \in C_2(\gamma^*)$ donde*

$$\gamma^* = \min\{\gamma : C_2(\gamma) \neq \emptyset\}.$$

Denotamos por $T = C_1(\alpha^*)$ y por $S = C_2(\gamma^*)$ a los conjuntos de localizaciones Tolerantes de Condorcet y de localizaciones de Simpson respectivamente.

Las relajaciones mínimas que permiten la existencia de solución pueden ser aplicadas para cualquier valor fijo del otro parámetro. Así las localizaciones αSimpson y las localizaciones γTolerantes de Condorcet se definen como siguen.

Definición

Una localización $x \in L$ es una ***localización αSimpson****, para un α fijo, si $x \in C(\alpha, \gamma^*)$ donde*

$$\gamma^* = \min\{\gamma : C(\alpha, \gamma) \neq \emptyset\}.$$

Definición

Una localización $x \in L$ es una ***localización γTolerante de Condorcet****, para un γ fijo, si $x \in C(\alpha^*, \gamma)$ donde*

$$\alpha^* = \min\{\alpha : C(\alpha, \gamma) \neq \emptyset\}.$$

Sean $\gamma^*(.)$ y $\alpha^*(.)$ las funciones que dan las relaciones entre los dos parámetros implicados en estas definiciones; es decir,

$$\begin{aligned} \gamma^*(\alpha) &= \min\{\gamma : C(\alpha, \gamma) \neq \emptyset\} \qquad \text{y} \\ \alpha^*(\gamma) &= \min\{\alpha : C(\alpha, \gamma) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Denotamos respectivamente por $S(\alpha)$ y $T(\gamma)$ a los conjuntos de localizaciones αSimpson y de localizaciones γTolerantes de Condorcet que vienen dadas por

$$\begin{array}{rcll} S(\alpha) & = & C(\alpha, \gamma^*(\alpha)) & \quad \text{y} \\ T(\gamma) & = & C(\alpha^*(\gamma), \gamma). & \end{array}$$

Sin embargo, estos dos parámetros pueden ser relajados a la vez para que $C(\alpha, \gamma) \neq \emptyset$ y localizar el servicio en una localización $\alpha\gamma$Condorcet para valores $\alpha \neq 0$ y $\gamma \neq 1/2$. Incluso se puede relajar uno de los dos aspectos a la vez que se intensifica el otro si por ejemplo $\alpha > 0$ y $\gamma < 1/2$. Podemos aplicar una relajación *mínimal* de las condiciones de Condorcet que permitan la existencia de solución; es decir seleccionar un par de valores (α, γ) tales que no exista una localización $\alpha\gamma$Condorcet para unos valores más relajados de α y γ a la vez. Estos pares de valores (α, γ) se denominan pares eficientes y las localizaciones correspondientes se denominan localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet eficientes.

Definición

Sea α una distancia de tolerancia y γ una mayoría cualificada, (α, γ) es un ***par eficiente*** *si $C(\alpha, \gamma) \neq \emptyset$ y*

$$C(\alpha', \gamma') = \emptyset, \forall \alpha' \leq \alpha, \gamma' \leq \gamma \text{ con } (\alpha', \gamma') \neq (\alpha, \gamma).$$

Denotamos por E al conjunto de pares eficientes. Este conjunto también viene dado por:

$$E = \{(\alpha, \gamma) : \alpha = \alpha^*(\gamma), \gamma = \gamma^*(\alpha)\}.$$

Denominamos localizaciones eficientes de Condorcet a las localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet para un par de valores eficientes.

Definición

Una localización $x \in L$ es ***localización eficiente de Condorcet*** *si y sólo si $x \in C(\alpha, \gamma)$ para $(\alpha, \gamma) \in E$.*

Denotamos por EC al conjunto de localizaciones eficientes de Condorcet. Estas localizaciones son definidas formalmente por:

$$EC = \bigcup_{(\alpha,\gamma)\in E} C(\alpha, \gamma)$$

Las localizaciones eficientes de Condorcet son puntos que son a la vez localizaciones αSimpson y γTolerantes de Condorcet para alguna distancia de tolerancia α y una mayoría cualificada γ relacionadas por $\alpha = \alpha^*(\gamma)$ y $\gamma = \gamma^*(\alpha)$. Por tanto para cada $(\alpha, \gamma) \in E$ se tiene la relación

$$C(\alpha, \gamma) = S(\alpha) = T(\gamma)$$

Como $(\alpha, \gamma) \in E$ si y sólo si $\alpha = \alpha^*(\gamma)$ y $\gamma = \gamma^*(\alpha)$ definimos las distancias de tolerancia eficientes y las mayorías cualificadas eficientes como sigue.

Definición

*Una **distancia de tolerancia** α es **eficiente** si y sólo si*

$$(\alpha, \gamma^*(\alpha)) \in E.$$

Definición

*Una **mayoría cualificada** γ es **eficiente** si y sólo si*

$$(\alpha^*(\gamma), \gamma) \in E.$$

Sean $E\Delta$ y $E\Gamma$ los conjuntos de las distancias de tolerancia eficientes y de las mayorías cualificadas eficientes respectivamente.

3.3. Algunos resultados teóricos

En este apartado se presentan algunos resultados teóricos que permiten obtener procedimientos para resolver los problemas.

Consideramos que el modelo está definido sobre una red en cuyos vértices están ubicados un conjunto finito U de usuarios denotado por $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$. En el modelo discreto también los posibles puntos de localización están en vértices de la red. Por tanto, denotamos por $L = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ al conjunto de localizaciones posibles para el servicio. En el caso estándar tanto el conjunto de usuarios como el de posibles localizaciones conciden con el conjunto de vértices de la red; $V = U = L$.

Nótese que en el caso continuo, el conjunto L está consituido por los puntos de ciertas aristas (o subarisrtas) de la red siendo el caso estándar cuando $U = V$ y $L = N$.

En el caso discreto, las distancias de los usuarios a las localizaciones vienen dadas por $d_{ki} = d(u_k, x_i)$, para $k = 1, 2, ..., n$ y $i = 1, 2, ..., m$. Se trata de una matriz de distancias D de orden $n \times m$. Para cada usuario u_k una localización x_i es preferida a la localización x_j si y sólo si $d(u_k, x_i) < d(u_k, x_j) - \alpha$, siendo α el umbral de indiferencia de todos los usuarios. Al alterar la distancia de tolerancia α los valores que tiene que comparar cada usuario para determinar si debe manifestar una indiferencia por dos localizaciones o una preferencia por la más cercana son las diferencias $\delta_{ij}^k = d_{kj} - d_{ki} = d(u_k, x_j) - d(u_k, x_i)$. Sea $\Delta^k = \{\delta_{ij}^k : i, j = 1, 2, ..., m\}$ el conjunto de tales diferencias. Las diferencias que se van a comparar con α para establecer las preferencias de los usuarios son las del conjunto

$$\Delta = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta^k = \Delta^k = \left\{\delta_{ij}^k : i, j = 1, 2, ..., m, k = 1, 2, ..., n\right\}.$$

Nótese que para el parámetro γ las cantidades que se van a comparar para establecer si el número de usuarios que prefieren otra alternativa alcanza la mayoría cualificada son sólo los valores en el conjunto $\Gamma = \{k/n : k = 0, 1, ..., n\}$.

Proposición

> *En el caso discreto las funciones $\alpha^*(.)$ y $\gamma^*(.)$ toman valores en Δ y Γ, respectivamente.*

En el modelo continuo estándar en el que $L = N$, tal y como se mostró en el capítulo antrerior para el caso $\gamma = 1/2$, existe un conjunto finito A que tiene estas mismas propiedades que Δ. Dicho resultado se puede extender fácilmente al caso de una mayoria cualificada γ arbitraria usando el mismo conjunto A.

Proposición

> *En el modelo continuo estándar ($L = N$ y $U = V$) discreto las funciones $\alpha^*(.)$ y $\gamma^*(.)$ toman valores en A y Γ, respectivamente.*

Por tanto, para el caso continuo estándar se puede sustituir Δ por A en los procedimientos de solución aquí descritos. En los casos en que el conjunto L esté constituido por un conjunto de aristas o subaristas (cerradas) se obtendría un resultado similar añadiendo al conjunto A las diferencias entre las distancias de cada usuario a extremos de las subaristas que determinan L.

Proposición

> *Las funciones $\alpha^*(.)$ y $\gamma^*(.)$ son escalonadas y no crecientes.*

Demostración. Primero demostraremos que $\gamma_2 < \gamma_1 \Rightarrow \alpha^*(\gamma_2) \geq \alpha^*(\gamma_1)$.

Como

$$\alpha^*(\gamma_2) = \min\{\alpha : C(\alpha, \gamma_2) \neq \emptyset\},$$

sea $\alpha_2 = \alpha^*(\gamma_2)$ y tomemos $x \in C(\alpha_2, \gamma_2)$. Entonces, para cada $y \in L$,

$$|\{u \in U : d(y,u) < d(x,u) - \alpha_2\}| \leq \gamma_2 n.$$

Así

$$|\{u \in U : d(y,u) < d(x,u) - \alpha_2\}| \leq \gamma_2 n < \gamma_1 n, \quad \forall y \in L, x \in C(\alpha_2, \gamma_1)$$

Por tanto

$$C(\alpha_2, \gamma_1) \neq \emptyset$$

y

$$\alpha^*(\gamma_2) = \alpha_2 \geq \alpha^*(\gamma_1) = \min\{\alpha : C(\alpha, \gamma_1) \neq \emptyset\}.$$

Ahora vamos a ver que $\alpha_2 < \alpha_1 \Rightarrow \gamma^*(\alpha_2) \geq \gamma^*(\alpha_1)$. Como

$$\gamma^*(\alpha_2) = \min\{\gamma : C(\alpha_2, \gamma) \neq \emptyset\},$$

sea $\gamma_2 = \gamma^*(\alpha_2)$ y tomemos $x \in C(\alpha_2, \gamma_2)$. Para cada localización $y \in L$, si $d(u,y) < d(u,x) - \alpha_1$ entonces

$$d(u,y) < d(u,x) - \alpha_1 < d(u,x) - \alpha_2.$$

Así

$$|\{u \in U : d(y,u) < d(x,u) - \alpha_1\}| \leq$$
$$\leq |\{u \in U : d(y,u) < d(x,u) - \alpha_2\}| \leq \gamma_2 n$$

Por lo tanto $x \in C(\alpha_1, \gamma_2)$ y $C(\alpha_1, \gamma_2) \neq \emptyset$. Así

$$\gamma^*(\alpha_2) = \gamma_2 \geq \gamma^*(\alpha_1) = \min\{\gamma : C(\alpha_1, \gamma) \neq \emptyset\}.$$

Finalmente nótese que $\alpha^*(.)$ y $\gamma^*(.)$ sólo toman valores en los conjuntos finitos Δ y Γ. Por lo tanto son funciones escalonadas. $\square$

Las distancias de tolerancia eficientes y las mayorías cualificadas eficientes están en los saltos de estas funciones. Pueden ser fácilmente encontradas ordenando los valores de los conjuntos Δ y Γ en orden decreciente. Denotamos por $\alpha_{(i)}$ al i-ésimo valor de Δ en orden decreciente y por $\gamma_{(i)}$ al i-ésimo valor de Γ en orden decreciente. Por tanto, se tiene $\alpha_{(i+1)} < \alpha_{(i)}$ y $\gamma_{(i+1)} < \gamma_{(i)}$, para cada i.

Proposición

Para cada índice i.

a) *Si* $\alpha^*(\gamma_{(i)}) < \alpha^*(\gamma_{(i+1)})$ *entonces* $\gamma_{(i)} \in E\Gamma$.

b) *Si* $\gamma^*(\alpha_{(i)}) < \gamma^*(\alpha_{(i+1)})$ *entonces* $\alpha_{(i)} \in E\Delta$.

Demostración. En primer lugar, si $\alpha^*(\gamma_{(i)}) < \alpha^*(\gamma_{(i+1)})$ entonces

$$\alpha^*(\gamma_{(i)}) < \alpha^*(\gamma'), \forall \gamma' < \gamma_{(i)}.$$

Así $\gamma^*(\alpha^*(\gamma_{(i)})) = \gamma_{(i)}$ y entonces $(\alpha^*(\gamma_{(i)}), \gamma_{(i)}) \in E$ y $\gamma_{(i)} \in E\Gamma$.

De la misma forma, a partir de $\gamma^*(\alpha_{(i)}) < \gamma^*(\alpha_{(i+1)})$ obtenemos

$$\gamma^*(\alpha_{(i)}) < \gamma^*(\alpha'), \forall \alpha' < \alpha_{(i)}.$$

Por lo tanto $\alpha^*(\gamma^*(\alpha_{(i)})) = \alpha_{(i)}$ y entonces $(\alpha_{(i)}, \gamma^*(\alpha_{(i)})) \in E$ y $\alpha_{(i)} \in E\Delta$.

$\square$

Como sólo tenemos que considerar los valores de $\Gamma = \{k/n : k = 0, 1, ..., n\}$ el siguiente resultado da la forma en que se obtiene el conjunto finito de mayorías cualificadas eficientes.

Proposición

Para $k > 0$,

$$\frac{k}{n} \in E\Gamma \Longleftrightarrow C\left(\alpha^*\left(\frac{k}{n}\right), \frac{k-1}{n}\right) = \emptyset.$$

Demostración. Nótese que si $\gamma_{(i)} = \frac{k}{n}$ entonces $\gamma_{(i+1)} = \frac{k-1}{n}$. Luego:

$$C\left(\alpha^*\left(\frac{k}{n}\right), \frac{k-1}{n}\right) = \emptyset \Longleftrightarrow \alpha^*\left(\frac{k}{n}\right) < \alpha^*\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

Por lo tanto esa condición es equivalente a:

$$\left(\alpha^*\left(\frac{k}{n}\right), \frac{k}{n}\right) \in E.$$

y a $\frac{k}{n} \in E\Gamma$. $\square$

Entonces el conjunto EC puede ser obtenido usando

$$EC = \bigcup_{k/n \in E\Gamma} C\left(\alpha^*\left(\frac{k}{n}\right), \frac{k}{n}\right) = \bigcup_{k/n \in E\Gamma} T\left(\frac{k}{n}\right)$$

Por otro lado, el conjunto finito Δ de valores para las distancias de tolerancias da otra forma de obtener EC usando $E\Delta$. Nótese que $\alpha_{(i)}$ denota el i-ésimo valor de Δ en orden decreciente $\alpha_{(i+1)} < \alpha_{(i)}$ para cada i. Por lo tanto

$$E\Delta = \{\alpha_{(i)} \in \Delta : C(\alpha_{(i+1)}, \gamma^*(\alpha_{(i)})) = \emptyset\}.$$

Entonces el conjunto EC puede ser obtenido usando

$$EC = \bigcup_{\alpha_{(i)} \in E\Delta} C(\alpha_{(i)}, \gamma^*(\alpha_{(i)})) = \bigcup_{\alpha_{(i)} \in E\Delta} S(\alpha_{(i)}).$$

También hay dos formas de obtener una localización $\alpha\gamma$Condorcet eficiente. Primero tomando un valor de α arbitrario y calculando $\gamma^*(\alpha)$ y $\alpha^*(\gamma^*(\alpha))$. Entonces $(\alpha^*(\gamma^*(\alpha)), \gamma^*(\alpha)) \in E$ y

$$C(\alpha^*(\gamma^*(\alpha)), \gamma^*(\alpha)) = S(\alpha^*(\gamma^*(\alpha))) = T(\gamma^*(\alpha)) \subset EC.$$

Y en segundo lugar tomando un valor γ arbitrario y calculando $\alpha^*(\gamma)$ y $\gamma^*(\alpha^*(\gamma))$. Entonces $(\alpha^*(\gamma), \gamma^*(\alpha^*(\gamma))) \in E$ y

$$C(\alpha^*(\gamma), \gamma^*(\alpha^*(\gamma))) = S(\alpha^*(\gamma)) = T(\gamma^*(\alpha^*(\gamma))) \subset EC.$$

Estas relaciones se obtienen directamente a partir de las definiciones de $S(\alpha)$, $T(\gamma)$, $\alpha^*(\gamma)$ y $\gamma^*(\alpha)$.

A partir de las definiciones se obtienen fácilmente los siguientes resultados.

Proposición

La distancia de tolerancia α es eficiente si y sólo si

$$\alpha^*(\gamma^*(\alpha)) = \alpha.$$

Proposición

La mayoría cualificada γ es eficiente si y sólo si

$$\gamma^*(\alpha^*(\gamma)) = \gamma.$$

Proposición

Se da la igualdad:

$$EC = \bigcup_{(\alpha,\gamma)\in E} C(\alpha,\gamma) = \bigcup_{\alpha\in E\Delta} S(\alpha) = \bigcup_{\gamma\in E\Gamma} T(\gamma)$$

Sea PV el conjunto de los pares de valores de los parámetros (α, γ) para los que existe una localización $\alpha\gamma$Condorcet:

$$PV = \{(\alpha, \gamma) : C(\alpha, \gamma) \neq \emptyset\}$$

Proposición

Si $(\alpha, \gamma) \in PV$ *y* $\alpha \leq \alpha', \gamma \leq \gamma'$ *con* $(\alpha', \gamma') \neq (\alpha, \gamma)$ *entonces* $(\alpha', \gamma') \in PV$.

El conjunto E es la frontera inferior de PV.

3.4. Resolución de los problemas.

En el modelo generalizado de localización mediante votos en redes se plantean diversos problemas consistentes en encontrar puntos de localización ajustados a los conceptos de solución definidos. Estos problemas son los de encontrar una localización $\alpha\gamma$Condorcet (o todas), para unos valores de α y γ dados, una localización γTolerante de Condorcet, para un valor de γ dado, una localización αSimpson para un valor de α dado, o una localización eficiente de Condorcet. Por tanto se trata de encontrar uno o todos los elementos de los conjuntos $C(\alpha, \gamma)$, $S(\alpha)$ $T(\gamma)$ y EC, respectivamente. Como casos especiales de estos problemas se plantean los de encontrar soluciones de Condorcet (localizaciones de $C = C(0, 1/2)$), de Simpson (de $S = S(0)$) y Tolerantes de Condorcet (de $T = T(1/2)$). Identificamos los problemas con el conjunto correspondiente.

Consideramos problemas sobre una red en cuyos vértices están un conjunto de usuarios $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$. En el modelo discreto los posibles puntos de localización son $L = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$.

En el caso continuo, los posibles puntos de localización son trozos de aristas.

En el caso discreto, las distancias de los usuarios a las localizaciones vienen dadas por $d_{ki} = d(u_k, x_i)$, para $k = 1, 2, ..., n$ y $i = 1, 2, ..., m$, en una matriz D de orden $n \times m$. Sean las diferencias

$$\delta^k_{ij} = d_{kj} - d_{ki} = d(u_k, x_j) - d(u_k, x_i)$$

Sea $\Delta = \{\delta^k_{ij} : i, j = 1, 2, ..., m, k = 1, 2, ..., n, \}$.

Problema $C(\alpha, \gamma)$

La localización x_j es una localización $\alpha\gamma$Condorcet si y sólo si

$$\max_i |\{k : \delta_{ij}^k > \alpha\}| \leq \gamma n.$$

Por tanto, para resolver la familia de problemas $C(\alpha, \gamma)$ a partir de la matriz de distancias D, para cada valor α del umbral calculamos la puntuación de cada localización por:

$$R_j(\alpha) = \max_i |\{k : \delta_{ij}^k > \alpha\}|, \text{ para } j = 1, 2, ..., n.$$

Entonces, las localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet vienen dadas por:

$$C(\alpha, \gamma) = \{x_j : R_j(\alpha) \leq \gamma n\}.$$

Problema C

Para obtener las localizaciones de Condorcet, tomamos $\alpha = 0$ y calculamos

$$R_j(0) = \max_i |\{k : \delta_{ij}^k > 0\}|, \text{ para } j = 1, 2, ..., n.$$

De donde obtenemos las localizaciones de Condorcet que vienen dadas por

$$C = \{x_j : R_j(0) \leq n/2\}.$$

Problema S

Para obtener las localizaciones de Simpson calculamos

$$r^* = \min_j R_j(0) \qquad \text{y} \qquad \gamma^* = \frac{r^*}{n}.$$

Entonces las localizaciones de Simpson vienen dadas por

$$S = \{x_j : R_j(0) = r^*\}.$$

Nótese que si $C = \emptyset$ entonces γ^* puede ser mayor que $1/2$, y que si $C \neq \emptyset$ entonces γ^* puede ser menor que $1/2$.

Problema $S(\alpha)$

Para obtener las localizaciones αSimpson usaremos $R_j(\alpha)$ para cada valor de $\alpha \geq 0$ en vez de $R_j(0)$ para calcular

$$r^*(\alpha) = \min_j R_j(\alpha), \qquad \text{y} \qquad \gamma^*(\alpha) = \frac{r^*(\alpha)}{n}.$$

Entonces las localizaciones αSimpson vienen dadas por

$$S(\alpha) = \{x_j : R_j(\alpha) = r^*(\alpha)\}.$$

Problema T

Para obtener las localizaciones Tolerantes de Condorcet aumentamos el valor de α hasta que $C(\alpha, 1/2) \neq \emptyset$; es decir, hasta que $r^*(\alpha) = \min_j R_j(\alpha) \leq n/2$. Nótese que cuando α aumenta, algunas funciones $R_j(\alpha)$ disminuyen cuando α alcanza un valor de

$$\Delta = \{\delta_{ij}^k : i, j = 1, 2, ..., m, k = 1, .., n\}.$$

Es decir, el valor $R_j(\alpha)$ disminuye para las localizaciones x_j tales que $\{i : \delta_{ij}^k = \alpha\} \neq \emptyset$. Entonces sólo tenemos que considerar los valores para α que estén en el conjunto Δ. Por tanto

$$\alpha^* = \min\{\alpha \in \Delta : C(\alpha, 1/2) \neq \emptyset\} \qquad \text{y} \qquad T = C(\alpha^*, 1/2).$$

Problema $T(\gamma)$

Para obtener las localizaciones γTolerantes de Condorcet se puede aplicar un procedimiento similar. Primero calculamos

$$\alpha^*(\gamma) = \min\{\alpha \in \Delta : C(\alpha, \gamma) \neq \emptyset\} \qquad \text{y} \qquad T(\gamma) = C(\alpha^*(\gamma), \gamma).$$

En estos casos, el mínimo de los valores del parámetro α para los que el conjunto $C(\alpha, \gamma)$ es no vacío implica la resolución de una cadena de problemas del $\alpha\gamma$Condorcet pero en lugar de realizar una búsqueda secuencial en Δ se debe realizar una búsqueda dicotómica. Esta búsqueda se puede incluso reducir usando la cota superior que pueda aportar cualquier solución heurística.

Problema EC

Para determinar localizaciones eficientes de Condorcet se pueden aprovechar estos procedimientos. Nótese que para γ sólo necesitamos considerar los valores en el conjunto $\Gamma = \{k/n : k = 0, 1, ..., n\}$. Entonces

$$\gamma^*(\alpha) = \min\{\gamma \in \Gamma : C(\alpha, \gamma) \neq \emptyset\} \qquad \text{y} \qquad S(\alpha) = C(\alpha, \gamma^*(\alpha)).$$

Hemos visto que para la función $\alpha^*(.)$ sólo necesitamos considerar los valores para α que estén en el conjunto finito Δ. Y para la función $\gamma^*(.)$ sólo necesitamos considerar los valores para γ que estén en el conjunto finito Γ. Por lo tanto para obtener el conjunto de pares eficientes (α, γ) sólo tenemos que considerar el conjunto finito de pares de $\Delta \times \Gamma$. Entonces

$$E = \{(\alpha, \gamma) \in \Delta \times \Gamma : \alpha^*(\gamma) = \alpha \text{ y } \gamma^*(\alpha) = \gamma\}$$

Estos conjuntos tienen tamaños: $|\Delta| = O(m^2 n)$ y $|\Gamma| = O(n)$. Luego

$$|\Delta \times \Gamma| = O(m^2 n^2).$$

Entonces el conjunto de localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet eficientes se obtiene:

$$EC = \bigcup_{(\alpha,\gamma)\in E} C(\alpha, \gamma).$$

El conjunto de distancias de tolerancia eficientes y el conjunto de mayorías cualificadas eficientes son las proyecciones del conjunto E dadas por

$$\begin{aligned} E\Delta &= \{\alpha \in \Delta : (\alpha, \gamma) \in E, \text{ para algún } \gamma\} \qquad \text{y} \\ E\Gamma &= \{\gamma \in \Gamma : (\alpha, \gamma) \in E, \text{ para algún } \alpha\}. \end{aligned}$$

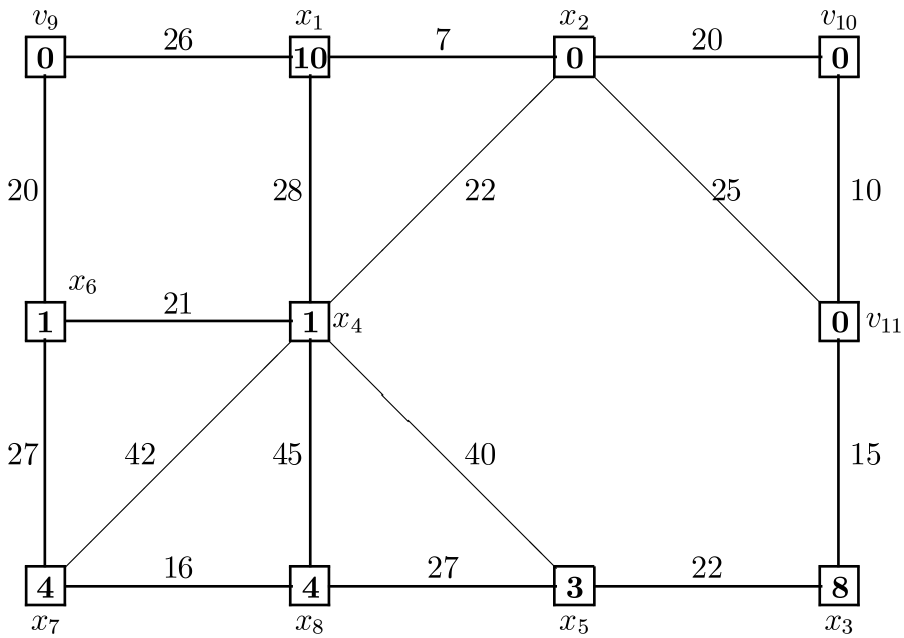
Estos conjuntos también vienen dados por:

$$\begin{aligned} E\Delta &= \{\alpha \in \Delta : \alpha = \alpha^*(\gamma^*(\alpha))\} \qquad \text{y} \\ E\Gamma &= \{\gamma \in \Gamma : \gamma = \gamma^*(\alpha^*(\gamma))\}. \end{aligned}$$

Así, para obtener el conjunto EC podemos resolver los problemas αSimpson para todos los valores α en $E\Delta$ o resolver los problemas γTolerantes de Condorcet para todos los valores γ en $E\Gamma$.

3.5. Un ejemplo

Sea el modelo de localización mediante votos representado en la siguiente figura. En ella se indica el número de usuarios en cada vértice, las longitudes de cada arista y las 8 localizaciones posibles $L = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$.



El ejemplo

La red N representada en la figura está compuesta de un grafo con 11 vertices, los 8 vértices de posible ubicación y otros tres vértices. Sean las localizaciones posibles $x_i = v_i$, para $i = 1, ..., 8$ y denominemos por v_9, v_{10} y v_{11} a los otros tres vértices. Por tanto el grafo está compuesto por el conjunto de vértices

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\},$$

y las aristas dadas por la siguiente matriz de longitudes:

$l(.,.)$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
v_1		7		28					26		
v_2	7			22						20	25
v_3					22						15
v_4	28	22			40	21	42	45			
v_5			22	40				27			
v_6				21			27		20		
v_7				42		27		16			
v_8				45	27		16				
v_9	26					20					
v_{10}		20									10
v_{11}		25	15							10	

Los 31 usuarios están ubicados en los vertices y el número de usuarios en cada vértice viene dado por:

vértices:	v_1	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
número de usuarios:	10	8	1	3	1	4	4

Por tanto, el conjunto de vértices con usuarios es $V(U) = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$.

Las posibles localizaciones de un servicio están reducidas a ocho vértices de la red $L = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ y las distancias de los vértices con usuario a los vértices de localización viene dadas por la matriz:

$$D = \left[\begin{array}{ccccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ v_1 & 0 & 7 & 47 & 28 & 68 & 46 & 70 & 73 \\ v_3 & 47 & 40 & 0 & 62 & 22 & 83 & 65 & 49 \\ v_4 & 28 & 22 & 62 & 0 & 40 & 21 & 42 & 45 \\ v_5 & 68 & 62 & 22 & 40 & 0 & 61 & 43 & 27 \\ v_6 & 46 & 43 & 83 & 21 & 61 & 0 & 27 & 43 \\ v_7 & 70 & 64 & 65 & 42 & 43 & 27 & 0 & 16 \\ v_8 & 73 & 67 & 49 & 45 & 27 & 43 & 16 & 0 \end{array}\right]$$

Donde cada entrada d_{ij} es la distancia entre el vértice de usuario $v_i \in U(V)$ y la localización $x_j \in L$.

Para obtener la solución de Condorcet calculamos el número de usuarios que prefieren una localización $x_i \in L$ a la localización $x_j \in L$ que viene dado por:

$$P_{ij} = |\{u : d(u, x_j) - d(u, x_i) > 0\}| = \sum_{d_{kj} > d_{ki}} u(k)$$

donde $u(k)$ es el número de usuarios en el vértice v_k. Por ejemplo,

$$P_{12} = |\{u : d(u, x_2) - d(u, x_1) > 0\}| = \sum_{d_{k2} > d_{k1}} u(k) = u(1) = 10,$$

$$P_{13} = |\{u : d(u, x_3) - d(u, x_1) > 0\}| = u(1) + u(4) + u(6) = 12,$$

y así sucesivamente.

Entonces la matriz P es:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 12 & 18 & 12 & 18 & 19 & 19 \\ 21 & 0 & 16 & 18 & 12 & 18 & 19 & 19 \\ 19 & 15 & 0 & 11 & 18 & 11 & 21 & 21 \\ 13 & 13 & 20 & 0 & 16 & 22 & 23 & 12 \\ 19 & 19 & 13 & 15 & 0 & 15 & 22 & 22 \\ 13 & 13 & 20 & 9 & 16 & 0 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 10 & 8 & 9 & 19 & 0 & 16 \\ 12 & 11 & 10 & 19 & 9 & 19 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Los valores de las puntuaciones $r_j = R_j(0) = \max_i P_{ij}$ vienen dados por:

$$R(0) = r = \begin{bmatrix} 21 & 19 & 20 & 19 & 18 & 22 & 23 & 22 \end{bmatrix}$$

Por tanto, no hay localización de Condorcet y la localización de Simpson es v_5 con $r_5 = 18$. Así que $r^* = 18$ y $\gamma^* = 18/31$.

Para un valor arbitrario de α necesitamos usar la matriz con el número de usuarios que prefieren una localización a otra teniendo en cuenta la distancia de tolerancia α; es decir, $P(\alpha)$ en vez de P donde

$$P_{ij}(\alpha) = |\{u : \delta_{ij}^k = d_{kj} - d_{ki} > \alpha\}| = \sum_{\delta_{ij}^k > \alpha} u(k).$$

Para $\alpha = 1$ tenemos:

$$P(\alpha) = P(1) = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 12 & 18 & 12 & 18 & 19 & 19 \\ 21 & 0 & 12 & 18 & 12 & 18 & 19 & 19 \\ 19 & 15 & 0 & 11 & 18 & 11 & 21 & 21 \\ 13 & 13 & 20 & 0 & 12 & 22 & 23 & 12 \\ 19 & 19 & 13 & 15 & 0 & 15 & 22 & 22 \\ 13 & 9 & 10 & 9 & 16 & 0 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 10 & 8 & 9 & 19 & 0 & 16 \\ 12 & 11 & 10 & 19 & 9 & 19 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que al pasar de $P = P(0)$ a $P(1)$ sólo se han modificado cuatro valores. Para $0 \leq \alpha < 3$ la matriz $P(\alpha)$ se modifica en $\alpha = 1$ y en $\alpha = 2$ pero las puntuaciones $R(\alpha)$ no cambian. Al aumentar α hasta $\alpha = 3$ el vector de puntuaciones sólo cambia en $R_1(\alpha)$ y $R_7(\alpha)$ que dan 20 y 21, pero el mínimo sigue estando en v_5 con $R_5(3) = 18$. Las puntuaciones $R(3)$ son

$$R(3) = \begin{bmatrix} 20 & 19 & 20 & 19 & 18 & 22 & 21 & 22 \end{bmatrix}$$

Con $\alpha = 4$ las puntuaciones son:

$$R(4) = \begin{bmatrix} 20 & 19 & 16 & 19 & 18 & 22 & 21 & 22 \end{bmatrix}$$

Entonces el único punto αSimpson es v_3 con un rechazo máximo de $r^*(4) = 16 > n/2$. Este es el único punto αSimpson hasta $\alpha = 17$. Para este valor:

$$R(17) = \begin{bmatrix} 19 & 19 & 16 & 18 & 18 & 22 & 21 & 18 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para $\alpha = 18$, las puntuaciones son:

$$R(18) = \begin{bmatrix} 19 & 13 & 16 & 18 & 18 & 18 & 21 & 18 \end{bmatrix}$$

Aquí obtenemos por primera vez un valor $R_j(\alpha) \leq 31/2$. Por lo tanto, la distancia de tolerancia es 18 con $\gamma^* = 13/31 < 1/2$; el único punto tolerante de Condorcet es v_2.

Para $\alpha = 19$ el valor de $\gamma^*(19)$ es también $13/31$ pero este valor mínimo es alcanzado en v_2 y en v_3. El procedimiento puede continuar hasta $\alpha = 62$ en donde $\gamma^*(62) = 0$ que es alcanzado en v_4; nótese que

$$\min_i \max_j d(v_i, v_j) = \max_j d(v_4, v_j) = 62.$$

Esto significa que si el umbral de indiferencia es 62 entonces la localización v_4 no es rechazada por ningún usuario y ninguna otra localización verifica esto con una distancia de tolerancia menor. Nótese que v_4 es el centro de los usuarios.

Finalmente tenemos:

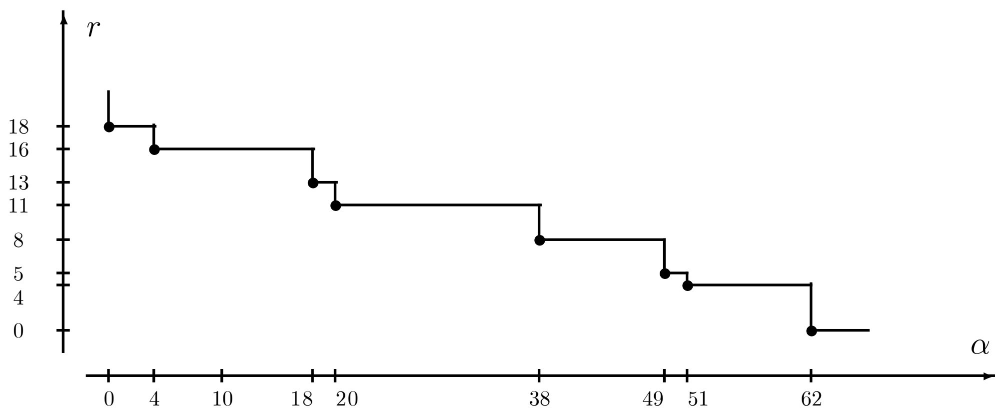
$$r^*(\alpha) = \begin{cases} 18 & \text{para} \quad \alpha \in [0, 4) \\ 16 & \text{para} \quad \alpha \in [4, 18) \\ 13 & \text{para} \quad \alpha \in [18, 20) \\ 11 & \text{para} \quad \alpha \in [20, 38) \\ 8 & \text{para} \quad \alpha \in [38, 49) \\ 5 & \text{para} \quad \alpha \in [49, 51) \\ 4 & \text{para} \quad \alpha \in [51, 62) \\ 0 & \text{para} \quad \alpha \geq 62 \end{cases}$$

y

$$\alpha^*(r) = \begin{cases} 62 & \text{para} \quad r \in [0,4) \\ 51 & \text{para} \quad r \in [4,5) \\ 49 & \text{para} \quad r \in [5,8) \\ 38 & \text{para} \quad r \in [8,11) \\ 20 & \text{para} \quad r \in [11,13) \\ 18 & \text{para} \quad r \in [13,16) \\ 4 & \text{para} \quad r \in [16,18) \\ 0 & \text{para} \quad r \in [18,31] \end{cases}$$

Los pares de valores eficientes (α, r) son:

$$E = \{(0,18),(4,16),(18,13),(20,11),(38,8),(49,5),(51,4),(62,0)\}.$$



Funciones $\alpha^*(.)$ y $r^*(.)$.
Los puntos eficientes están indicados por puntos gruesos.

Las localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet correspondientes son:

$$\begin{aligned} C(0,18) &= \{v_5\}, C(4,16) = \{v_3\}, C(18,13) = C(20,11) = C(38,8) = \{v_2\}, \\ C(49,5) &= \{v_3\}, C(51,4) = \{v_2\}, \text{ y } C(62,0) = \{v_4\}. \end{aligned}$$

Además de la localización de Simpson v_5 y de la localización Tolerante de Condorcet v_2, hay dos localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet eficientes que están en v_3 y en el centro v_4. Así

$$EC = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}.$$

3.6. Los algoritmos

A continuación se describen y analizan los algoritmos para obtener los soluciones del problema de localización mediante votos según los distintos conceptos de solución considerados en el caso discreto.

El algoritmo para encontrar un punto $\alpha\gamma$Condorcet, para α y γ fijos, es:

Algoritmo $C(\alpha, \gamma)$

Paso 1

Para $i, j = 1, 2, ..., m$ calculamos:

$$P_{ij}(\alpha) = |\{k : \delta_{ij}^k > \alpha\}| = \sum_{\delta_{ij}^k > \alpha} u(k).$$

Paso 2

Para $j = 1, 2, ..., m$ calculamos:

$$R_j(\alpha) = \max_i P_{ij}(\alpha).$$

Paso 3

Las localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet vienen dadas por:

$$C(\alpha, \gamma) = \{x_j : R_j(\alpha) \leq \gamma n\}.$$

Proposición

Para cualquier distancia de tolerancia α y cualquier mayoría cualificada γ este algoritmo $C(\alpha, \gamma)$ se ejecuta en un tiempo de orden $O(nm^2)$.

Demostración Para calcular $P_{ij}(\alpha)$ en el paso 1 necesitamos $O(n)$ operaciones. Los pasos 2 y 3 necesitan $O(m^2)$ comparaciones. Por lo tanto el algoritmo completo requiere $O(nm^2)$ operaciones. $\square$

Para obtener las localizaciones de Condorcet C aplicamos este algoritmo para $\alpha = 0$ y $\gamma = 1/2$, ya que $C = C(0, 1/2)$. Si $C = \emptyset$ entonces las localizaciones de Simpson se obtienen calculando

$$r^* = \min_j R_j(0)$$

y entonces $S = \{x_j : R_j(0) = r^*\}$.

De forma similar el algoritmo para las localizaciones αSimpson, para un α dado, es:

Algoritmo $S(\alpha)$

Paso 1

Para $i, j = 1, 2, ..., m$ calculamos:

$$P_{ij}(\alpha) = |\{k : \delta_{ij}^k > \alpha\}| = \sum_{\delta_{ij}^k > \alpha} u(k).$$

Paso 2

Para $j = 1, 2, ..., m$ calculamos:

$$R_j(\alpha) = \max_i P_{ij}(\alpha).$$

Paso 3

Calculamos

$$r^*(\alpha) = \min_j R_j(\alpha).$$

Paso 4

Las localizaciones αSimpson vienen dadas por:

$$S(\alpha) = \{x_j : R_j(\alpha) = r^*(\alpha)\}.$$

Proposición

Para cualquier distancia de tolerancia α *el algoritmo* $S(\alpha)$ *se ejecuta en un tiempo de orden* $O(nm^2)$.

Demostración El número de operaciones es el mismo que el del algoritmo anterior ya que sólo calculamos $r^*(\alpha) = \min_j R_j(\alpha)$ en el paso 3 para ser usado en vez de γn en el paso 4. □

Para obtener el punto Tolerante de Condorcet, si $C = \emptyset$, necesitamos encontrar la distancia de tolerancia:

$$\alpha^* = \min \{\alpha : C(\alpha, 1/2) \neq \emptyset\}$$

y entonces aplicamos el algoritmo $C(\alpha, \gamma)$ para $\alpha = \alpha^*$ y $\gamma = 1/2$, ya que $T = C(\alpha^*, 1/2)$. Para encontrar α^* necesitamos aplicar el algoritmo $C(\alpha, \gamma)$ para conocer si $C(\alpha, 1/2) = \emptyset$ para $\alpha \in \Delta$. Como el tamaño del conjunto Δ de distancias relevantes es $|\Delta| = O(nm^2)$, una búsqueda exhaustiva significaría aplicar el algoritmo $C(\alpha,\gamma)$ $O(nm^2)$ veces. Sin embargo con una búsqueda dicotómica el número de veces que se ejecuta el algoritmo se reducirá.

El algoritmo propuesto para encontrar las localizaciones γTolerantes de Condorcet, para cualquier mayoría cualificada γ dada, es:

Algoritmo $T(\gamma)$

Paso 1

Ordenar el conjunto de distancias de tolerancia Δ en orden creciente, es decir, $\Delta = [a_{(1)}, a_{(2)}, ..., a_{(k)}, ..., a_{(|\Delta|)}]$ tal que $a_{(k)} \leq a_{(k+1)}$ para cada k.

Paso 2

Aplicar el algoritmo $C(\alpha,\gamma)$ para $\alpha = 0$ y el valor de γ dado con el fin de obtener las localizaciones γCondorcet.

Paso 3

Si $C(0,\gamma) \neq \emptyset$ entonces tomamos $\alpha^*(\gamma) \leftarrow 0$ y $T(\gamma) \leftarrow C(0,\gamma)$; parar. En otro caso ir al paso 4.

Paso 4

Hacer $T \leftarrow C(a_{(|\Delta|)},\gamma)$, $k_1 \leftarrow 1$ y $k_2 \leftarrow |\Delta|$.

Paso 5

Tomar $k \leftarrow \lfloor (k_1 + k_2)/2 \rfloor$ y la distancia de tolerancia $\alpha \leftarrow a_{(k)}$.

Paso 6

Aplicar el algoritmo $C(\alpha,\gamma)$ para la actual distancia de tolerancia α y la mayoría cualificada dada γ.

Paso 7

Si $C(\alpha,\gamma) = \emptyset$ entonces actualizamos el índice de la distancia de tolerancia inferior a k ($k_1 \leftarrow k$). En otro caso actualizamos los candidatos a localizaciones Tolerantes de Condorcet T a $C(\alpha,\gamma)$ ($T \leftarrow C(\alpha,\gamma)$) y el índice de la distancia de tolerancia superior a k ($k_2 \leftarrow k$).

Paso 8

Si $k_1 + 1 < k_2$ entonces ir al paso 5. En otro caso tomar $\alpha^*(\gamma) \leftarrow \alpha$ y $T(\gamma) \leftarrow T$; parar.

Proposición

Para cada mayoría cualificada γ, el algoritmo $T(\gamma)$ requiere un tiempo de orden $O(nm^2(\log n + \log m))$.

Demostración Como $|\Delta| = O(nm^2)$ el conjunto Δ es ordenado en orden creciente en un tiempo de orden $O(|\Delta| \log |\Delta|) = O(nm^2(\log n + \log m))$. Además el paso 1 requiere un número de operaciones del orden $O(nm^2(\log n + \log m))$. El número de veces que el algoritmo $C(\alpha, \gamma)$ es aplicado en el paso 6 es $O(\log |\Delta|) = O(\log n + \log m)$. Por tanto el algoritmo $T(\gamma)$ requiere un tiempo $O(nm^2(\log n + \log m))$. $\square$

Por consiguiente el conjunto de las localizaciones Tolerantes de Condorcet $T(1/2)$ se obtiene en un tiempo de orden $O(nm^2(\log n + \log m))$.

Finalmente para obtener el conjunto EC de localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet eficientes usamos:

$$EC = \bigcup_{\gamma \in E\Gamma} T(\gamma) = \bigcup_{\gamma \in E\Gamma} C(\alpha^*(\gamma), \gamma)$$

y

$$E\Gamma = \{0\} \cup \left\{ \frac{k}{n} : C\left(\alpha^*\left(\frac{k}{n}\right), \frac{k-1}{n}\right) = \emptyset \right\}.$$

Por lo tanto:

$$EC = T(0) \cup \bigcup_{k=1}^{n} \left\{ T\left(\frac{k}{n}\right) : C\left(\alpha^*\left(\frac{k}{n}\right), \frac{k-1}{n}\right) = \emptyset \right\}.$$

Así, el conjunto EC se obtiene en un tiempo $O(n^2m^2(\log n + \log m))$ resolviendo un número de problemas γTolerante de Condorcet de orden $O(n)$ para valores crecientes de Γ.

Algoritmo EC

Paso 1

Aplicar el algoritmo $S(\alpha)$ para $\alpha = 0$ para obtener $\gamma^* = \gamma^*(0)$.

Paso 2

Aplicar el algoritmo $T(\gamma)$ para $\gamma = 0$ para obtener $T(0)$ y $\alpha^* = \alpha^*(0)$.

Paso 3

Inicializar $EC = T(0)$ y $E = \{(\alpha^*, 0)\}$.

Paso 4

Tomar $k \leftarrow 0$.

Paso 5

Hacer $k \leftarrow k + 1$.

Paso 6

Aplicar el algoritmo $T(\gamma)$ para $\gamma = k/n$ para obtener $T = T(k/n)$ y hacer $a \leftarrow \alpha^*(k/n)$.

Paso 7

Aplicar el algoritmo $C(\alpha, \gamma)$ para $\alpha = a$ y $\gamma = (k-1)/n$.

Paso 8

Si $C(\alpha, \gamma) = \emptyset$ entonces hacer $EC \leftarrow EC \cup T$ y $E \leftarrow E \cup \{(a, k/n)\}$.

Paso 9

Si $k/n \leq \gamma^*$ entonces ir al paso 5. En otro caso parar.

Proposición

El algoritmo EC requiere un tiempo de orden $O(n^2 m^2 (\log n + \log m))$.

Demostración Los algoritmos $S(\alpha)$ y $T(\gamma)$ se aplican una vez en los pasos 1 y 2. Como el paso 5 se ejecuta $|\Gamma| = O(n)$ veces entonces los algoritmos $T(\gamma)$ y $C(\alpha, \gamma)$ se aplican $O(n)$ veces. Estos algoritmos son de orden $O(nm^2(\log n + \log m))$ y $O(nm^2)$, respectivamente, por tanto el número de operaciones en los pasos 6 y 7 son de orden $O(n^2m^2(\log n + \log m))$ y $O(n^2m^2)$. Así, para obtener el conjunto EC, el algoritmo requiere un tiempo de orden $O(n^2m^2(\log n + \log m))$. $\square$

Las localizaciones Tolerantes de Condorcet pueden ser obtenidas comprobando en el paso 8 cuando es la primera vez que $k/n \leq 1/2$.

3.7. Las localizaciones $\alpha\beta\gamma$Condorcet

Además de la solución de Simpson y de la solución Tolerante de Condorcet tratadas anteriormente, se han propuesto otras modificaciones de las condiciones de Condorcet que pueden ser aplicadas para seleccionar la localización mediante votos. Una de las propuestas consiste en utilizar un paramétro β para la proporción de usuarios indiferentes entre dos localizaciones alternativas que se decantan por una de ellas. En (Bandelt, (1985)) se define el concepto de punto βCondorcet y se caracterizan las redes en las que las localizaciones βCondorcet coinciden con las medianas. Una solución βCondorcet es una localización x tal que el número de usuarios que prefieren otro punto y más una proporción β de los indiferentes entre ambas localizaciones son menos de la mitad de los usuarios.

Recordemos que, en el modelo clásico, para cada usuario $u \in U$, la localización x es preferida a y si $d(u,x) < d(u,y)$ y son indiferentes si $d(u,x) = d(u,y)$. El parámetro β se interpreta como la probabilidad de que un usuario acuda a otra localización cuando le es indiferente a la anterior. Entonces, el número esperado de usuarios que acuden a la nueva localización y, como alternativa a la localización x es $|y \prec x| + \beta|y \sim x|$ donde:

$$\begin{aligned} |y \quad \prec \quad x| &= |\{u \in U : d(u,x) > d(u,y)|. \\ |y \quad \sim \quad x| &= |\{u \in U : d(u,x) = d(u,y)|. \end{aligned}$$

Por tanto, la definición de localización βCondorcet es la siguiente.

Definición

*La localización $x \in L$ es una **localización βCondorcet**, con $0 \leq \beta \leq 1$ si y sólo si*

$$|y \prec x| + \beta|y \sim x| \leq |U|/2, \forall y \in L.$$

Sea βC el conjunto de localizaciones βCondorcet. Cuando $\beta = 0$ se tienen las localizaciones *de Condorcet*, caracterizadas por

$$|y \prec x| \leq |U|/2, \forall y \in L.$$

Si $\beta = 1/2$ resultan las localizaciones *plurales*, dadas por

$$|y \prec x| + \frac{1}{2}|y \sim x| \leq |U|/2, \forall y \in L.$$

Y para $\beta = 1$ se tienen las localizaciones mayoritarias, caracterizadas por

$$|y \prec x| + |y \sim x| \leq |U|/2, \forall y \in L,$$

que se consideran en (Wendell y Thorson, (1974)).

A medida que se aumenta el valor de β se restringe el conjunto de soluciones βCondorcet por lo que el concepto de soluciones βCondorcet no es una relajación del concepto de solución de Condorcet sino todo lo contrario.

Proposición

Si $\beta_1 \geq \beta_2$ entonces $\beta_1 C \subseteq \beta_2 C$.

Las soluciones plurales propuestas en (Wendell y McKelvey, (1981)) para una red son las localizaciones de la red para los que no existe otra localización preferida por una mayoría simple. Por tanto, la localización $x \in L$ es una localización plural de L si y sólo si

$$|y \prec x| \leq |x \prec y|, \forall y \in L.$$

La relación entre las dos definiciones de solución, localización o punto plural se deduce de las equivalencias:

$$\begin{aligned}
|y \quad \prec \quad & x| + 1/2|y \sim x| \leq |U|/2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2|y \prec x| + |y \sim x| \leq |U| \\
\Leftrightarrow \quad & |y \prec x| \leq |U| - |y \prec x| - |y \sim x| \\
\Leftrightarrow \quad & |y \prec x| \leq |x \prec y|.
\end{aligned}$$

Introduciendo esta nueva generalización en el modelo de las localizaciones $\alpha\gamma$Condorcet obtenemos un concepto más general que denominamos *localizaciones $\alpha\beta\gamma$Condorcet*. Recordemos que, utilizando el umbral de tolerancia α para la indiferencia, los números de usuarios que prefieren una localización a otra o les son indiferentes se contabilizan con:

$$|y \prec_\alpha x| = |\{u \in U : d(u,y) < d(u,x) - \alpha\}|.$$

$$|y \sim_\alpha x| = |\{u \in U : |d(u,y) - d(u,x)| \leq \alpha\}|.$$

Por otro lado, estableciendo la mayoría de rechazo de una localización en una proporción γ, posiblemente diferente de $1/2$, la condición para rechazar la localización x al enfrentarla a y es

$$|y \prec_\alpha x| + \beta|y \sim_\alpha x| > \gamma|U|.$$

Por tanto consideramos la definición siguiente.

Definición

*Una localización $x \in L$ es una **localización** $\alpha\beta\gamma$**Condorcet**, con $0 \leq \alpha$ y $0 \leq \beta, \gamma \leq 1$ si y sólo si*

$$|y \prec_\alpha x| + \beta|y \sim_\alpha x| \leq \gamma|U|, \forall y \in L.$$

Denotamos por $\alpha\beta\gamma C$ al conjunto de localizaciones $\alpha\beta\gamma$Condorcet de L, para cualesquiera $0 \leq \alpha$ y $0 \leq \beta, \gamma \leq 1$. Al igual que anteriormente, tenemos una familia de problemas al fijar los parámetros a los valores estándares, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 1/2$

- Fijando uno de los parámetros:
  - Tomando $\beta = 0$ tenemos las localizaciones $\alpha\gamma C$ ya definidos.

$$x \in \alpha\gamma C \Leftrightarrow |y \prec_\alpha x| \leq \gamma|U|, \forall y \in L.$$

  - Tomando $\alpha = 0$ podemos definir las localizaciones $\beta\gamma C$.

$$x \in \beta\gamma C \Leftrightarrow |y \prec x| + \beta|y \sim x| \leq \gamma|U|, \forall y \in L.$$

  - Tomando $\gamma = 1/2$ podemos definir las localizaciones $\alpha\beta C$.

$$x \in \alpha\beta C \Leftrightarrow |y \prec_\alpha x| + \beta|y \sim_\alpha x| \leq \frac{1}{2}|U|, \forall y \in L.$$

- Fijando dos de los parámetros:
  - Tomando $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ tenemos los γC ya definidos.

$$x \in \gamma C \Leftrightarrow |y \prec x| \leq \gamma|U|, \forall y \in L.$$

  - Tomando $\alpha = 0$ y $\gamma = 1/2$ tenemos las localizaciones βC ya definidos.

$$x \in \beta C \Leftrightarrow |y \prec x| + \beta|y \sim x| \leq \frac{1}{2}|U|, \forall y \in L.$$

  - Tomando $\beta = 0$ y $\gamma = 1/2$ tenemos las localizaciones αC ya definidos.

$$x \in \alpha C \Leftrightarrow |y \prec_\alpha x| \leq \frac{1}{2}|U|, \forall y \in L.$$

- Fijando los tres parámetros.
  - Tomando $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 1/2$ tenemos las localizaciones C ya definidos.

$$x \in C \Leftrightarrow |y \prec x| \leq \frac{1}{2}|U|, \forall y \in L.$$

Centrando la atención en el parámetro β, resulta de especial interés el caso $\beta = 1/2$ que da lugar a los conceptos derivados de las localizaciones plurales.

- Fijando $\beta = 1/2$ se tienen las localizaciones $\alpha\gamma$plurales.

$$x \in \alpha\gamma P \Leftrightarrow |y \prec_\alpha x| + \frac{1}{2}|y \sim_\alpha x| \leq \gamma|U|, \forall y \in L.$$

  - Tomando $\gamma = 1/2$ tenemos las localizaciones αplurales.

$$x \in \alpha P \Leftrightarrow |y \prec_\alpha x| \leq |x \prec_\alpha y|, \forall y \in L.$$

  - Tomando $\alpha = 0$ tenemos las localizaciones γplurales.

$$x \in \gamma P \Leftrightarrow |y \prec x| + \frac{1}{2}|y \sim x| \leq \gamma|U|, \forall y \in L.$$

  - Tomando $\gamma = 1/2$ y $\alpha = 0$ tenemos las localizaciones plurales.

$$x \in P \Leftrightarrow |y \prec x| \leq |x \prec y|, \forall y \in L.$$

También resulta de interés el caso $\beta = \gamma$, resultando el conjunto de soluciones $x \in P$ tales que

$$\begin{aligned} |y \prec_\alpha x| + \gamma|y \sim_\alpha x| \leq \gamma|U|, \forall y \in L \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad |y \prec_\alpha x| \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}|x \prec_\alpha y|, \forall y \in L \end{aligned}$$

Estas soluciones no siempre existen por lo que de forma análoga a lo hecho anteriormente se puede minimizar alguno de los parámetros para garantizar la existencia de una solución.

- Manteniendo β y γ fijos, las localizaciones $x^* \in \alpha^*\beta\gamma C$ donde α^* viene dado por

  - Para β y γ arbitrarios es

$$\alpha^* = \arg\min_\alpha\{\alpha : \alpha\beta\gamma C \neq \emptyset\};$$

de donde resultan las localizaciones $\beta\gamma$Tolerantes Condorcet.

– Para $\gamma = \frac{1}{2}$ y β arbitrario es

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha}\{\alpha : \alpha\beta C \neq \emptyset\};$$

de donde resultan las localizaciones βTolerantes Condorcet.

– Para $\beta = 0$ y γ arbitrario es

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha}\{\alpha : \alpha\gamma C \neq \emptyset\};$$

de donde resultan las localizaciones γTolerantes Condorcet.

– Para $\beta = \frac{1}{2}$ y γ arbitrario es

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha}\{\alpha : \alpha\gamma P \neq \emptyset\};$$

de donde resultan las localizaciones γTolerantes Plurales.

– Para $\beta = 0$ y $\gamma = \frac{1}{2}$ es

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha}\{\alpha : \alpha C \neq \emptyset\};$$

de donde resultan las localizaciones Tolerantes Condorcet (Campos y Moreno (2000a)).

– Para $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$ es

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha}\{\alpha : \alpha P \neq \emptyset\};$$

de donde resultan las localizaciones Tolerantes Plurales.

- Para α y γ fijos lo que puede tener interés es el máximo, dando lugar a las localizaciones $x^* \in \alpha\beta^*\gamma C$ donde β^* viene dado por

  – Para α y γ arbitrarios

$$\beta^* = \arg\max_{\beta}\,\{\beta : \alpha\beta\gamma C \neq \emptyset\}$$

  – Para $\alpha = 0$ y γ arbitrario

$$\beta^* = \arg\max_{\beta}\,\{\beta : \beta\gamma C \neq \emptyset\}$$

- Para $\gamma = 1/2$ y α arbitrario

$$\beta^* = \arg\max_{\beta} \{\beta : \alpha\beta C \neq \emptyset\}$$

- Para $\alpha = 0$ y $\gamma = 1/2$

$$\beta^* = \arg\max_{\beta} \{\beta : \beta C \neq \emptyset\}$$

- Manteniendo α y β fijos, las localizaciones $x^* \in \alpha\beta\gamma^* C$ donde γ^* viene dado por

  - Para α y β arbitrarios es

$$\gamma^* = \arg\min_{\gamma}\{\gamma : \alpha\beta\gamma C \neq \emptyset\}.$$

  - Para $\alpha = 0$ y β arbitrario es

$$\gamma^* = \arg\min_{\gamma}\{\gamma : \beta\gamma C \neq \emptyset\}.$$

  - Para $\beta = 0$ y α arbitrario es

$$\gamma^* = \arg\min_{\gamma}\{\gamma : \alpha\gamma C \neq \emptyset\}.$$

  - Para $\beta = \frac{1}{2}$ y α arbitrario es

$$\gamma^* = \arg\min_{\gamma}\{\gamma : \alpha\gamma P \neq \emptyset\}.$$

  - Para $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ es

$$\gamma^* = \arg\min_{\gamma}\{\gamma : \gamma C \neq \emptyset\}.$$

  - Para $\alpha = 0$ y $\beta = \frac{1}{2}$ es

$$\gamma^* = \arg\min_{\gamma}\{\gamma : \gamma P \neq \emptyset\}.$$

En estos casos, en que se mantiene α y β fijos, se puede considerar directamente una puntuación similar a la de Simpson en las localizaciones de localización lo que evita tener que considerar explícitamente al valor γ^* como paso intermedio. Las correspondientes soluciones óptimas se definirían de la forma siguiente.

- Para α y β fijos tenemos las localizaciones x^* que vienen dadas por
  - Para α y β arbitrarios tenemos las localizaciones $\alpha\beta$Simpson
$$x^* = \arg\min_x\{\max_y \{|y \prec_\alpha x| + \beta|y \sim_\alpha x|\}\}.$$
  - Para $\alpha = 0$ y β arbitrario tenemos las localizaciones βSimpson (Bandelt, (1985))
$$x^* = \arg\min_x\{\max_y \{|y \prec x| + \beta|y \sim x|\}\}.$$
  - Para $\beta = 0$ y α arbitrario tenemos las localizaciones de αSimpson
$$x^* = \arg\min_x\{\max_y \{|y \prec_\alpha x|\}\}.$$
  - Para $\beta = \frac{1}{2}$ y α arbitrario tenemos las localizaciones de αSeguridad
$$\begin{aligned} x^* &= \arg\min_x\{\max_y \{|y \prec_\alpha x| + \tfrac{1}{2}|y \sim_\alpha x|\}\} \\ &= \arg\min_x\{\max_y \{|y \prec_\alpha x| - |x \prec_\alpha y|\}\}. \end{aligned}$$
  - Para $\alpha = 0$, $\beta = 0$ tenemos las localizaciones de Simpson
$$x^* = \arg\min_x\{\max_y \{|y \prec x|\}\}.$$
  - Para $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ tenemos las localizaciones de seguridad (Slater, (1975))
$$\begin{aligned} x^* &= \arg\min_x\{\max_y \{|y \prec x| + \tfrac{1}{2}|y \sim x|\}\} \\ &= \arg\min_x\{\max_y \{|y \prec x| - |x \prec y|\}\}. \end{aligned}$$

Se hablará de localizaciones $\alpha\beta\gamma$Condorcet eficientes si y sólo si $x \in C(\alpha,\beta,\gamma) \neq \emptyset$ y $\forall \alpha' \leq \alpha$, $\beta' \geq \beta$, $\gamma' \leq \gamma$ con $(\alpha',\beta',\gamma') \neq (\alpha,\beta,\gamma)$ entonces $C(\alpha,\beta,\gamma) = \emptyset$.

Los resultados fundamentales de las soluciones de Condorcet se pueden extender a este modelo general en una red. Así si ninguna subred contiene una proporción γ de usuarios entonces algúna localización $\alpha\beta\gamma$Condorcet es un vértice o está a una distancia α de un vértice. Este resultado es una extensión de un resultado de (Hansen y Thisse, (1981)) y su demostración sigue los mismos pasos.

Proposición

Sea $0 \leq \alpha$ *y* $0 \leq \beta, \gamma \leq 1$. *Si para cualquier subred* $N' \subseteq N$ *se tiene:*

$$|\{u \in U : v(u) \in N'| \neq \gamma |U|$$

entonces $d(V, \alpha\beta\gamma C) \leq \alpha$.

Siguiendo los resultados en (Bauer y Domschke, (1993)) se establecen condiciones para garantizar que un punto sea la solución en términos de la demanda de cada una de las componentes conexas que resultan de la eliminación de dicho punto. Sea $N - x$ la subred resultante de eliminar de N el punto x y sus aristas adyacentes. Si x es un vértice se elimina junto con las aristas que lo tienen por extremo y si es un punto se elimina junto con la arista que lo contiene. Sean $N_1, N_2, ..., N_k$ las correspondientes componentes conexas de $N - x$. Se dice que x es un **corte** para N si $k > 1$; es decir si produce una desconexión en la red.

Proposición

Sea $0 \leq \alpha$ y $0 \leq \beta, \gamma \leq 1$. Si x es un punto de corte y $N_1, N_2, ..., N_k$ las componentes conexas de $N - x$ entonces

$$\forall j = 1, ..., k, |\{u \in U : v(u) \in N_j\}| \leq \gamma |U| \Longrightarrow x \in \alpha\beta\gamma C.$$

Esta proposición es una extensión del resultado aparecido en (Hansen, Thisse y Wendell, (1986)) y la demostración ha de ser similar.

3.8. Las localizaciones $\alpha\delta$Plurales

De los diferentes modelos que surgen al considerar el parámetro β, el caso más interesante desde el punto de vista de la localización mediante votos es $\beta = 1/2$, que denominamos *localizaciones plurales*. Las localizaciones plurales también resultan de sustituir, en las localizaciones Condorcet, la mayoría absoluta por la mayoría simple.

Una localización $x \in L$ *es una localización Plural si y sólo si*

$$|y \prec x| \leq |x \prec y|, \forall y \in L.$$

Las localizaciones plurales no siempre existen. De hecho la condición que se les exige es más restrictiva que la de las localizaciones de Condorcet. Al igual que en las localizaciones de Condorcet las localizaciones plurales se pueden relajar de dos formas, mediante la introducción de un umbral de indiferencia y mediante una puntuación que mida lo alejada que está una localización de ser una solución plural.

La introducción de un umbral de indiferencia α refleja el uso de una estructura de semiorden en las preferencias de los usuarios.

Definición

Una localización $x \in L$ es una localización αPlural si y sólo si

$$|y \prec_\alpha x| \leq |x \prec_\alpha y|, \forall y \in L.$$

Al conjunto de las localizaciones αPlurales se les denotará $P_1(\alpha)$.

La equivalencia entre este concepto y el de $\alpha\beta$Condorcet para $\beta = 1/2$ se obtiene de la relación:

$$|y \prec_\alpha x| + \tfrac{1}{2}|y \sim_\alpha x| \leq \tfrac{1}{2}|U| \Leftrightarrow |y \prec_\alpha x| \leq |x \prec_\alpha y|.$$

Proposición

Sea $\alpha_1 \leq \alpha_2$ entonces $P_1(\alpha_1) \subseteq P_1(\alpha_2)$.

Como no siempre tiene que existir una solución αplural de forma paralela a como se hizo con las localizaciones de Condorcet, se puede definir el concepto de solución Tolerante Plural.

Definición

Una localización $x \in L$ es una localización Tolerante Plural si y sólo si $x \in P_1(\alpha^*)$ donde

$$\alpha^* = \min\{\alpha : P_1(\alpha) \neq \emptyset\}$$

Al conjunto de las localizaciones Tolerantes Plurales se les denotará TP.

La puntuación de Simpson, al ser comparada con $1/2$, medía lo alejada que estaba una localización de ser una solución de Condorcet. En este mismo sentido se introduce la siguiente puntuación que al ser comparada con 0 mide lo alejada que está una localización de ser una solución plural. Para cada localización x se define:

$$\delta(x) = \max_y \{|y \prec x| - |x \prec y|\}.$$

Entonces una localización $x \in L$ es una localización plural si $\delta(x) \leq 0$.

Esta puntuación puede ser comparada con otros valores distintos de 0. De esta forma surgen las localizaciones δPlurales.

Definición

Una localización $x \in L$ es una localización δPlural si y sólo si

$$\delta(x) \leq \delta$$

Al conjunto de las localizaciones δPlurales se les denotará $P_2(\delta)$.

Al igual que ocurre con las localizaciones de Simpson existen localizaciones que minimizan esta puntuación.

Definición (Slater, (1975))

Una localización $x \in L$ es una localización de seguridad si y sólo si

$$x^* = \arg\min_x \{\max_y \{|y \prec x| - |x \prec y|\}\}$$

Al conjunto de las localizaciones de seguridad se les denotará Se.

La localización de seguridad es la localización x que hace mínima $\delta(x)$. Esta puntuación $\delta(x)$ no tiene porqué coincidir con la de las localizaciones $\alpha\beta$Condorcet, para $\beta = 1/2$, pero si las soluciones porque son los que minimizan

$$\gamma(x) = \max_y \{|y \prec_\alpha x| + \tfrac{1}{2}|x \sim_\alpha y|\}.$$

Si combinamos las dos relajaciones de la solución plural que hemos visto en este apartado podemos definir la puntuación

$$\delta_\alpha(x) = \max_y \{|y \prec_\alpha x| - |x \prec_\alpha y|\}.$$

Entonces una localización $x \in L$ es una localización αplural si $\delta_\alpha(x) \leq 0$. Comparando esta puntuación con otros valores no nulos se tienen las localizaciones $\alpha\delta$Plurales.

Definición

Una localización $x \in L$ es una localización $\alpha\delta$Plural si y sólo si

$$\delta_\alpha(x) \leq \delta$$

Al conjunto de las localizaciones $\alpha\delta$Plurales se les denotará $P(\alpha, \delta)$.

Fijando uno de los parámetros y minimizando el otro se obtienen los conceptos de localización de αseguridad y de localización δTolerante Plural.

Definición

Para un α fijo una localización $x \in L$ es una localización de αseguridad si y sólo si

$$x^* = \arg\min_x \{\max_y \{|y \prec_\alpha x| - |x \prec_\alpha y|\}\}$$

Al conjunto de las localizaciones de αseguridad se les denotará $Se(\alpha)$.

Definición

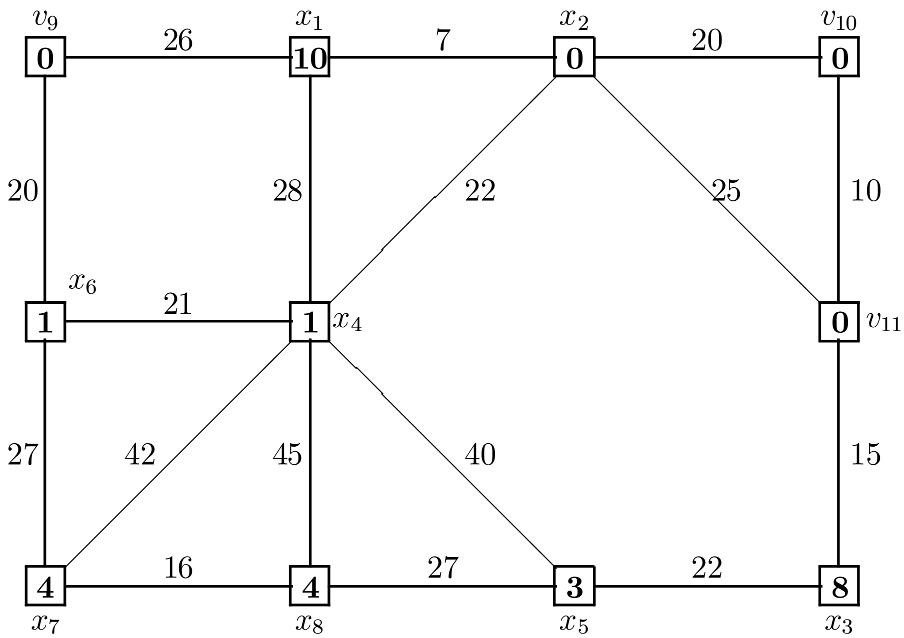
Para un δ fijo una localización $x \in L$ es una localización δTolerante Plural si y sólo si $x \in P(\alpha^*, \delta)$ donde

$$\alpha^*(\delta) = \min\{\alpha : P(\alpha, \delta) \neq \emptyset\}$$

Al conjunto de las localizaciones δTolerantes Plurales se les denotará δTP.

3.8.1. Ejemplo.

Considerando el mismo ejemplo que ilustra el modelo $\alpha\gamma$Condorcet y que se recoge en la figura se muestran estos conceptos.



El ejemplo

Las distancias entre las localizaciones y los vértices con usuarios vienen dadas en la tabla:

D	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
v_1	0	7	47	28	68	46	70	73
v_3	47	40	0	62	22	83	65	49
v_4	28	22	62	0	40	21	42	45
v_5	68	62	22	40	0	61	43	27
v_6	46	43	83	21	61	0	27	43
v_7	70	64	65	42	43	27	0	16
v_8	73	67	49	45	27	43	16	0

Si denotamos las puntuaciones $\delta_\alpha(v_i)$ para $i = 1, 2, ..., 8$ mediante un vector δ_α se obtienen los siguientes cálculos.

Para $\alpha = 0$ las puntuaciones son $\delta_\alpha = [11, 7, 9, 7, 5, 13, 15, 13]$. Por tanto no hay solución plural y la solución de seguridad es v_5 con $\delta^* = 5$.

Al aumentar el valor de α encontraremos algún valor para el que exista solución αplural. Para $\alpha = 34$ las puntuaciones son $\delta_\alpha = [1, 1, 1, 6, 3, 13, 7, 7]$, y aún no hay solución αplural. Para este valor, existen varias soluciones de αseguridad; son los vértices v_1, v_2, v_3 con $\delta^*_\alpha = 1$. Sin embargo, para $\alpha = 35$ las puntuaciones son $\delta_{35} = [1, 0, 1, 6, 3, 13, 7, 7]$, y si existe una solución αplural: el vértice v_2 para el que $\delta_{35}(v_2) = 0$. Por tanto $\alpha^* = 35$ y la solución tolerante plural es v_2.

Para los siguientes valores de α se van obteniendo los resultados que se muestran en la siguiente tabla. Nótese que, aunque las puntuaciones, en general, van disminuyendo en algunos casos aumentan dado que pueden decrecer el minuendo y el sustraendo de la definición de δ_α. Obsérvese, que por ello, hay soluciones que entran y salen del conjunto de soluciones αplurales

α	Puntuaciones δ_α	Localizaciones αplurales
36	$[1, 0, 1, 6, 3, 13, 7, 7]$	v_2
38	$[1, 0, 1, 6, 3, 17, 7, 7]$	v_2
41	$[1, 0, 0, 6, 7, 10, 7, 7]$	v_2 y v_3
43	$[1, 0, 0, 6, 7, 10, 3, 7]$	v_2 y v_3
45	$[1, 0, 0, 6, 7, 10, 3, 2]$	v_2 y v_3
46	$[0, 0, 2, 6, 7, 10, 3, 2]$	v_1 y v_2
47	$[0, 0, 0, 6, 7, 10, 3, 2]$	v_1, v_2 y v_3
48	$[0, 0, 0, 6, 7, 10, 3, 6]$	v_1, v_2 y v_3
50	$[0, 0, 0, 6, 7, 10, 3, 6]$	v_1, v_2 y v_3
53	$[0, 0, 0, 6, 7, 10, 6, 6]$	v_1, v_2 y v_3
58	$[0, 0, 0, 6, 7, 10, 6, 6]$	v_1, v_2 y v_3
62	$[0, 0, 0, 0, 7, 7, 6, 6]$	v_1, v_2, v_3 y v_4
67	$[0, 0, 0, 0, 7, 7, 6, 6]$	v_1, v_2, v_3 y v_4
68	$[0, 0, 0, 0, 0, 7, 6, 6]$	v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5
69	$[0, 0, 0, 0, 0, 7, 6, 6]$	v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5
70	$[0, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 6]$	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_7
72	$[0, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 6]$	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_7
73	$[0, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0]$	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7 y v_8
82	$[0, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0]$	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7 y v_8
83	$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 y v_8

El valor $\alpha = 83$ es el valor máximo de la función objetivo del problema del centro. Los valores de la función centro para los ocho vértices que son posibles localizaciones son: $[73, 67, 83, 62, 68, 83, 70, 73]$.

3.8.2. Algoritmos.

Las localizaciones $\alpha\delta$plurales para α y δ fijos se obtienen por el siguiente algoritmo.

Algoritmo $P(\alpha, \delta)$

Paso 1

Para $i, j = 1, 2, ..., m$ calculamos

$$\delta_{ij}(\alpha) = |x_i \prec_\alpha x_j| - |x_j \prec_\alpha x_i|.$$

Paso 2

Para $j = 1, 2, .., m$ calculamos

$$\delta_\alpha(j) = \max_i \delta_{ij}(\alpha).$$

Paso 3

Las localizaciones $\alpha\delta$plurales vienen dadas por:

$$P(\alpha, \delta) = \{x_j : \delta_\alpha(j) \leq \delta\}.$$

Proposición

Para cualquier distancia de tolerancia α este algoritmo se ejecuta en un tiempo de orden $O(nm)$.

Las soluciones αplurales se obtienen para $\delta = 0$. Las soluciones δplurales se obtienen para $\alpha = 0$. Para obtener las localizaciones plurales P aplicamos este algoritmo para $\alpha = 0$ y $\delta = 0$. Las localizaciones de αseguridad se obtienen calculando

$$\delta^* = \min_j \delta_\alpha(j).$$

Se aplica el siguiente algoritmo.

Algoritmo $Se(\alpha)$

Paso 1

Para $i, j = 1, 2, ..., m$ calculamos

$$\delta_{ij}(\alpha) = |x_i \prec_\alpha x_j| - |x_j \prec_\alpha x_i|.$$

Paso 2

Para $j = 1, 2, .., m$ calculamos

$$\delta_\alpha(j) = \max_i \delta_{ij}(\alpha).$$

Paso 3

Calculamos

$$\delta^* = \min_j \delta_\alpha(j).$$

Paso 4

Las localizaciones de αseguridad vienen dadas por:

$$Se(\alpha) = \{x_j : \delta_\alpha(j) = \delta^*\}.$$

Proposición

Para cualquier distancia de tolerancia α este algoritmo se ejecuta en un tiempo de orden $O(nm)$.

Las localizaciones de seguridad Se se obtienen aplicando este algoritmo para $\alpha = 0$.

Para obtener una localización δtolerante plural se necesita encontrar la distancia de tolerancia

$$\alpha^*(\delta) = \min\{\alpha : P(\alpha, \delta) \neq \emptyset\}.$$

Para encontrar $\alpha^*(\delta)$, para un δ fijo, se realiza una búsqueda dicotómica en el conjunto Δ.

Algoritmo δTP

Paso 1

Ordenar el conjunto de distancias de tolerancia en orden creciente

Paso 2

Aplicar el algoritmo $P(\alpha, \delta)$ para $\alpha = 0$ para ver si existen soluciones δplurales.

Paso 3

Si $P(0, \delta) \neq \emptyset$ entonces tomamos $\alpha^* \leftarrow 0$ y $\delta TP \leftarrow P(0, \delta)$. En otro caso ir al paso 4.

Paso 4

Hacer $\delta TP \leftarrow P(a_{|\Delta|}, \delta)$, $k_1 \leftarrow 1$ y $k_2 \leftarrow |\Delta|$.

Paso 5

Tomar $k \leftarrow \lfloor (k_1 + k_2) \rfloor / 2$ y $\alpha \leftarrow a_k$.

Paso 6

Aplicar el algoritmo $P(\alpha, \delta)$ para el actual valor de α.

Paso 7

Si $P(\alpha, \delta) = \emptyset$ entonces $k_1 \leftarrow k$. En otro caso $\delta TP \leftarrow P(\alpha, \delta)$ y $k_2 \leftarrow k$.

Paso 8

Si $k_1 + 1 < k_2$ ir al paso 5. En otro caso $\alpha^* \leftarrow \alpha$ y $\delta TP \leftarrow P(\alpha, \delta)$.

Proposición

Para cualquier δ este algoritmo se ejecuta en un tiempo de orden $O(nm \log n)$.

Las localizaciones Tolerantes Plurales se obtienen aplicando este algoritmo para $\delta = 0$.

4. Otros Problemas de localización mediante votos.

4.1. Localización mediante votos de servicios no deseables

Los problemas considerados en este apartado son los de la localización mediante votos que surgen cuando los usuarios desean que el servicio esté lo más alejado posible. Por tanto, se parte de que en el proceso de votación que llevaría a determinar la solución del problema, los usuarios votarían por la localización que se encuentre más lejos de ellos.

La localización de servicios *nocivos* o *no deseables* trata de los problemas que surgen al aplicar los criterios de decisión en que se inspiran los problemas de localización estándares a estos nuevos modelos. A los correspondientes problemas y conceptos de solución se les denomina con los mismos términos pero anteponiendo el prefijo *anti*. Se obtienen así los problemas correspondientes a los modelos estándares clásicos denominados problemas de la antimediana, del anticentro y del anticentdian.

Puesto que cada usuario desea el punto de servicio lo más alejado posible, será de interés conocer los puntos donde la distancia desde un usuario alcanza un máximo *relativo*. En los modelos continuos sobre redes esta idea se formaliza en el interior de las aristas con el concepto de *cuello de botella* introducido en el primer capítulo. Un cuello de botella en el interior de una arista con respecto a un usuario es el punto del interior de la arista donde la distancia al usuario alcanza su máximo. Extendiendo este principio para los vértices obtendremos la correspondiente definición de vértice cuello de botella. Por tanto, entendemos que un punto $x \in N$ es cuello de botella con respecto a un usuario u si existe un $\varepsilon > 0$ tal que $d(z, v(u)) < d(x, v(u))$, $\forall z \in B(x, \varepsilon)$.

Para detectar los vértices cuello de botella con respecto a un usuario hay que notar que por todas las aristas que parten del vértice se tiene que encontrar un camino mínimo al usuario. Si entendemos este concepto en sentido amplio incluye a los vértices hoja (el camino mínimo a cualquier usuario arranca por la única arista incidente en la hoja) y a los cuellos de botella interiores a las aristas (de las dos subaristas que genera el punto arrancan sendos caminos mínimos). Para cualquier punto $x \in N$ denotemos por $\Gamma(x)$ al conjunto de vértices *adyacentes* a x; es decir, el de los vértices v tales que $[x, v]$ es una arista o subarista de la red.

Adoptamos la siguiente defінción de cuello de botella en sentido amplio.

Definición

*Un punto x es **cuello de botella** (en sentido amplio) con respecto al usuario u de **rango** r si $d(x, v(u)) = r$ y*

$$l(x, v) + d(v, v(u)) = r, \forall v \in \Gamma(x).$$

Sea $BA(u)$ el conjunto de cuellos de botella con respecto a u y BA el conjunto de todos los cuellos de botella.

4.1.1. Problemas clásicos

En los modelos de localización clásicos o estándares, este tipo de modificación se lleva a cabo simplemente tratando de maximizar, en lugar de minimizar, la función objetivo correspondiente. Se ha considerado para los modelos clásicos de la mediana, centro y centdian (Pérez-Brito, Moreno, Rodríguez-Martín, (1997)).

El problema de la *antimediana* consiste en hallar la localización de un servicio no deseable de forma que se maximice la distancia media a los usuarios. Esto es lo mismo que maximizar la suma de las distancias de los usuarios al punto de servicio. Sea

$$F(x) = \sum_{u \in U} d(v(u), x).$$

Una localización $x \in L$ es una antimediana si y sólo si:

$$F(x) \geq F(y), \forall y \in L.$$

Se denota por AM al conjunto de las antimedianas.

En una red cualquiera N, el conjunto de los cuello de botella en sentido amplio contiene al menos una antimediana. Por tanto evaluando la función F en todos los cuellos de botella podemos obtener $AM \cap BA$. Además, la función F es lineal por pasos o a trozos en cada arista siendo los puntos de no linealidad los de alguna de las distancias $d(v(u), x)$. De donde se tiene que si a_1 y a_2 son dos antimedianas adyacentes y no existe ningún cuello de botella entre ellos la subarista que los une está constituida por antimedianas.

Proposición

Si $a_1, a_2 \in AM$ y $(a_1, a_2) \cap BA = \emptyset$ entonces $[a_1, a_2] \subseteq AM$.

Por tanto, el conjunto AM de las antimedianas de N se obtiene incorporando a $AM \cap BA$ las aristas o subaristas que unen dos puntos adyacentes de este conjunto.

Al considerar el problema del *anticentro*, invirtiendo el criterio utilizado para formular el problema del centro, se puede optar por dos planteamientos distintos. Se plantea símplemente como el problema de la maximizar la distancia del punto de servicio al usuario más cercano o al usuario más alejado.

- Si consideramos que se trata de una ubicación que se prefiere que esté lo más lejos posible y consideramos el peor caso, en lugar de el caso medio, el planteamiento consistiría en maximizar la función:

$$G(x) = \min_{u \in U} d(v(u), x).$$

- Sin embargo, si se plantea maximizar, en lugar de minimizar, la función objetivo del problema del centro se tiene que maximizar la función

$$G(x) = \max_{u \in U} d(v(u), x)$$

  lo que consiste en hallar la localización del servicio no deseable de forma que maximice la distancia máxima de los usuarios al punto de servicio.

Por tanto hablaremos del problema del anticentro maximin o del anticentro maximax, respectivamente, cuando necesitemos distinguirlos. En ambos casos, se dice que la localización $x \in L$ es un anticentro si y sólo si:

$$G(x) \geq G(y), \forall y \in L.$$

En cualquier red N los anticentros maximin o maximax se obtienen fácilmente. Si $V = U$ el anticentro maximin es el punto medio de la arista más larga (pueden existir varios anticentros si hay empates entre las aristas más largas). En otro caso, los anticentros maximin se encuentran entre los cuello de botella en sentido amplio y los centros locales. El anticentro maximax está en un cuello de botella en sentido amplio ya que tiene que estar en un máximo relativo de alguna de las distancias $d(v(u), x)$. Además, estos son los únicos anticentros posibles.

Finalmente, el problema del *anticentdian* consiste en hallar la localización del servicio no deseable de forma que maximice una combinación lineal entre las funciones objetivo de la antimediana y del anticentro. Sea $0 \leq \lambda \leq 1$, y

$$H(x) = \lambda F(x) + (1 - \lambda)G(x).$$

Una localización $x \in L$ es un anticentdian si y sólo si:

$$H(x) \geq H(y), \forall y \in L.$$

En cualquier red N el conjunto de los cuellos de botella en sentido amplio y centros locales asociados a los usuarios contiene al menos un anticentdian, tanto si la función objetivo del anticentro usada es la del problema maximin como si es la del problema maximax.

4.1.2. La localización anti-Condorcet.

El concepto de localización anti-Condorcet surge al aplicar, en el modelo estándar de localización mediante votos, el criterio derivado de la solución de Condorcet a los servicios no deseables. Se expone, en primer lugar, una descripción y adaptación resumida de los resultados equivalentes para servicios deseables de los capítulos anteriores.

El sistema de preferencia estándar de los usuarios es en principio el siguiente. Dadas dos localizaciones x e y del servicio, cada usuario u prefiere la localización que esté más alejada, y sólo si las dos localizaciones x e y están a la misma distancia del usuario u, este usuario se muestra indiferente entre ellas. Una solución de *Condorcet* es aquella para la que no existe otra preferida por una mayoría absoluta de usuarios. Manteniendo la notación empleada anteriormente, el número de usuarios que están más lejos de y que de x, y que por tanto, prefieren la localización en y que en x viene dado por

$$|y \succ x| = |\{u{\in}U : d(v(u), y) > d(v(u), x)\}|.$$

Por tanto se adopta la siguiente definición de solución anti-Condorcet.

Definición

*Una localización $x \in L$ es una **localización anti-Condorcet** de U en L si y sólo si:*

$$|y \succ x| \leq |U|/2, \forall y \in L.$$

Si el espacio L sobre el que están ubicados los usuarios del conjunto U con respecto a los que se va a localizar un punto x teniendo en cuenta sus preferencias es una red N se tiene la primera definición de este tipo aparecida en la literatura.

Definición (Labbé, (1982) y (1990))

*Un punto $x \in N$ es un **punto anti-Condorcet** en N si y sólo si:*

$$|\{u \in U : d(y, v(u)) > d(x, v(u))\}| \leq |U|/2, \forall y \in N.$$

Denotamos por AC al conjunto de los puntos anti-Condorcet. El conjunto AC de una red puede ser vacío. Como ejemplo sencillo se utiliza básicamente la misma red y el mismo caso que para servicios deseables. Se trata un triángulo equilatero con un usuario en cada vértice.

Los resultados obtenidos para determinar donde buscar, entre los puntos de una red, las soluciones anti-Condorcet depende de la ubicación y paridad del número de usuarios. Como se trata de buscar las ubicaciones más alejadas de los usuarios, se encontrarán intuitivamente en los vértices, preferentemente las hojas, o los cuellos de botella donde se hace máxima la distancia a un usuario en el interior de las aristas. Dado que todos los usuarios están en vértices, estos cuellos de botella están asociados a vértices de usuario. En el caso de que el número de usuarios sea impar, sólo los vértices y cuellos de botellas son efectivamente los puntos que pueden contener soluciones anti-Condorcet, pero no ocurre lo mismo si el número de usuarios es par.

El siguiente resultado aparecido en (Labbé, (1990)) establece que si el número de usuarios es impar las soluciones anti-Condorcet de una red N están en los cuellos de botella con respecto a usuarios, denotados por B, o las hojas de la red (denotadas por H).

Teorema (Labbé, (1982) y (1990))

Si $|U|$ es impar entonces $AC \subseteq H \cup B$.

En el capítulo 1, sólo se definió *cuello de botella* con respecto a un vértice sólo en el *interior* de las aristas. Para que este resultado sea válido, hay que considerar tambien los *vértices cuello de botella* con respecto a un usuario, además de los vértices hoja y los cuellos de botella en el interior de las aristas. Un cuello de botella en el interior de una arista con respecto a un usuario es el punto del interior de la arista donde la distancia al usuario alcanza su máximo. Extendiendo este principio para los vértices obtendremos la correspondiente definición de vértice cuello de botella. Por tanto, entendemos que un vértice v es cuello de botella con respecto a un usuario u si es un máximo relativo de su distancia a él; es decir, si existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\forall x \in B(v, \varepsilon)$ si $x \neq v$ entonces $d(x, u) < d(v, u)$. Contraejemplos sencillos donde se observa la necesidad de contar con estos cuellos de botella son, además del mismo contraejemplo aparecido en (Moreno, (1985)) que obligó a rectificar el concepto de centro local, los siguientes.

Contraejemplo 1

Sea el grafo de 5 vértices constituido por un cuadrado con sus dos diagonales que se crucan en el centro. Un usuario en cada esquina del cuadrado y otro en el centro. Sea cada lado del cuadrado de longitud 1 y las semidiagonales de longitud 10. El anti-Condorcet es el centro del cuadrado, que no es hoja ni cuello de botella.

Contraejemplo 2

Sea el grafo de 4 vértices constituido por un triangulo isóseles de altura 10 y base 2 que tienen como vértices del grafo, los tres vértices del triángulo junto con el punto medio de la base y como aristas, además de las que conforman los tres lados del triángulo, la altura. Consideremos que hay dos usuarios en cada vértice del triángulo y uno en el punto medio de la base. El anti-Condorcet es el vértice superior del triángulo, que no es hoja ni cuello de botella.

Por tanto podríamos decir que, si el número de usuarios es impar, el anti-Condorcet es un cuello de botella (en sentido amplio).

Teorema

Si $|U|$ es impar entonces $AC \subseteq BA$.

Ahora bien si el número de usuarios es par puede ocurrir que existan puntos anti-Condorcet que no sean vértices ni cuellos de botella. El ejemplo de (Labbé, (1990)) muestra un caso en el que esto ocurre. La diferencia con el caso anterior radica en que, al ser par el número de usuarios puede ocurrir, como en el ejemplo mencionado, que la mitad de los usuarios prefieran el desplazamiento del servicio en un sentido y la otra mitad en el otro.

4.1.3. Algoritmo para el anti-Condorcet

El algoritmo básico para determinar el conjunto de puntos anti-Condorcet en una red es una adaptación del *Algoritmo 1,* presentado en el capítulo 1 para encontrar el conjunto de los puntos Condorcet de una red, que denominamos Algoritmo ANTI-1. El algoritmo ANTI-1 consta, como el *Algoritmo 1*, de dos partes. El algoritmo ANTI-1A que para el caso impar determina los vértices y cuellos de botella que son anti-Condorcet, y el ANTI-1B, que, para el caso par, además de aplicar el algoritmo ANTI-1A para determinar los vértices y cuellos de botella que son anti-Condorcet determina los segmentos de aristas que son anti-Condorcet.

ALGORITMO ANTI-1

- Si $|U|$ es *impar* aplicar el algoritmo ANTI-1A.
- Si $|U|$ es *par* aplicar el algoritmo ANTI-1B.

Donde los algoritmos ANTI-1A y ANTI-1B comprenden los siguientes pasos.

ALGORITMO ANTI-1A

Paso 1
Determinar los cuellos de botella en sentido amplio BA. Tomar $AC = BA$.

Paso 2
Comparar los puntos de AC entre sí y eliminar los dominados.

Paso 3
Comparar los puntos que quedan en AC con los demás puntos y eliminar de AC los dominados.

ALGORITMO ANTI-1B

Paso 1
Aplicar el algoritmo ANTI-1A para obtener los puntos cuello de botella en sentido amplio que son anti-Condorcet.

Paso 2
Determinar los segmentos tales que el número de usuarios con función de distancias creciente en el segmento es igual al de usuarios con función de distancias decreciente en el segmento.

Paso 3

Comparar los segmentos del paso 2 entre sí aplicando un procedimiento parlelo a los pasos 4, 5 y 6 del algoritmo 1.

Más en detalle, los pasos del algoritmo ANTI-1A son los siguientes

ALGORITMO ANTI-1A.

Paso 1

Tomar

$$AC \leftarrow \emptyset.$$

Para cada vértice $v \in V$ y cada usuario u sea $r = d(v, v(u))$. Si $\forall v' \in \Gamma(v)$ es $l(v, v') + d(v', v(u)) = r$ entonces añadir v a AC;

$$AC \leftarrow AC \cup \{v\}.$$

Para cada arista $[v_i, v_j]$ y cada usuario $u \in U$ sea

$$\theta = \frac{1}{2}(d(v(u), v_i) + l(v_i, v_j) - d(v_j, v(u))).$$

Si $0 < \theta < l(v_i, v_j)$ entonces añadir $p([v_i, v_j], \theta)$ a AC;

$$AC \leftarrow AC \cup \{p([v_i, v_j], \theta)\}.$$

Paso 2

Para cada par de puntos $x, y \in AC$ se calcula $|y \succ x|$ y si $|y \succ x| > |U|/2$ entonces borrar x de AC;

$$AC \leftarrow AC - \{x\}.$$

Si $AC = \emptyset$ entonces la red no tiene puntos anti-Condorcet y finaliza el algoritmo; en otro caso continuar con el paso siguiente.

Paso 3

Para cada punto $x \in AC$ hacer lo siguiente.

Para cada arista $[v_i, v_j] \in A$ sean $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ los cuellos de botellas interiores distintos asociados a vértices con usuarios ordenados con distancia creciente a v_i. Sea $b_0 = v_i$ y $b_{k+1} = v_j$. Para cada $r = 0, 1, ..., k$ se obtienen los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{u \in U : \max\{d(b_r, v(u)), d(b_{r+1}, v(u))\} < d(x, v(u))\}. \\
U_2 &= \{u \in U : d(b_r, v(u)) \leq d(x, v(u)) < d(b_{r+1}, v(u))\}. \\
U_3 &= \{u \in U : d(b_r, v(u)) > d(x, v(u)) \geq d(b_{r+1}, v(u))\}. \\
U_4 &= \{u \in U : d(x, v(u)) < \min\{d(b_r, v(u)), d(b_{r+1}, v(u))\}\}
\end{aligned}$$

De estos conjuntos de usuarios se determinan:

$$\begin{aligned}
\forall u &\in U_2 : t_u^- = d(x, v(u)) - d(b_r, v(u)). \\
\forall u &\in U_3 : t_u^+ = l(b_r, b_{r+1}) - [d(x, v(u)) - d(b_{r+1}, v(u))].
\end{aligned}$$

Se introducen los valores t_u^- y t_u^+ en una lista T y para cada t de la lista sea

$$w_t = |U_3 \cup U_4| - |\{u \in U_3 : t_u^+ \leq t\}| + |\{u \in U_2 : t_u^- \leq t\}|.$$

Se recorre la lista T y si algún $w_t > |U|/2$ se borra x de AC.

En el paso 1 se obtiene el conjunto inicial de candidatos a puntos anti-Condorcet constituido por los cuellos de botella en sentido amplio. Se introducen en AC los vértices cuello de botella (que incluye a todas las hojas) y los puntos interiores a la arista que son cuellos de botella.

Para determinar los vértices a introducir como cuellos de botella se pueden introducir directamente los vértices hoja y aplicarles el test sólo al resto.

Para determinar los cuellos de botella en el interior cada arista $[v_i, v_j]$ se consideran los conjuntos de usuarios:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{u \in U : d(v_i, v(u)) = l(v_i, v_j) + d(v_j, v(u))\}. \\
U_2 &= \{u \in U : d(v_j, v(u)) = l(v_i, v_j) + l(v_i, v(u))\}.
\end{aligned}$$

Estos conjuntos de usuarios están consituidos de la siguiente forma:

- U_1 es el conjunto de los usuarios tales que la distancia de un punto de la arista al usuario es una función creciente en toda la arista.

- U_2 es el conjunto de los usuarios tales que la distancia de un punto de la arista al usuario es una función decreciente en toda la arista.

Para estos usuarios el valor de

$$\theta(u) = \frac{d(v(u), v_i) + l(v_i, v_j) - d(v_j, v(u))}{2}$$

es $\theta(u) = 0$ o $\theta(u) = l(v_i, v_j)$ y no determinan cuello de botella en el interior de la arista. Los usuarios de $U_3 = U - (U_1 \cup U_2)$ son los que determinan un punto cuello de botella $b_{kl}(u)$ sobre la arista, son los usuarios para los que

$$0 < \theta(u) < l(v_i, v_j).$$

En el paso 2 se comparan los candidatos a anti-Condocet entre sí eliminando los dominados y en el paso 3 se comparan los puntos que quedan en AC con los demás puntos de N.

En el paso 3, los posibles puntos anti-Condorcet que quedan en AC se comparan con cada uno de los segmentos de la red incluyendo de paso a los vértices como extremos de alguno de esos segmentos. En este paso se toma cada punto $x \in AC$ y cada segmento $[a, b]$ de N. Los segmentos de una arista son la subarista limitada por el primer extremo y el primer cuello de botella interior, las subaristas limitadas por dos cuellos de botella interiores consecutivos, y la subarista limitada por el último cuello de botella interior y el segundo extremo.

Para cada segmento $[a, b]$ los conjuntos U_1, U_2, U_3 y U_4 usados en dicho paso están constituidos de la forma siguiente:

- U_1 es el conjunto de los usuarios que van a preferir x a todo el segmento $[a, b]$.
- U_2 es el conjunto de los usuarios que van a preferir un subsegmento $(b-\theta, b]$ al punto x.
- U_3 es el conjunto de los usuarios que van a preferir un subsegmento $[a, a+\theta)$ al punto x.
- U_4 es el conjunto de los usuarios que van a preferir (a, b) al punto x.

No hay usuarios que prefieran un trozo interior a un segmento ya que la distancia desde un usuario a un punto a lo largo de un segmento es estrictamente creciente o es estrictamente decreciente por lo que el usuario siempre preferirá un extremo al interior del segmento.

Las expresiones para de t_i^+ y de t_i^- se obtienen para que el punto $p([a, b], \theta)$ para $\theta = t_i^+$ o para $\theta = t_i^-$ sea indiferente a x cuando se da la igualdad

$$d(x, v(u)) = d(a + \theta, v(u)).$$

- La expresión de t_i^+ se obtiene de considerar que

$$d(x, v(u)) = d(b, v(u)) + l(a, b) - t_i^+.$$

- La expresión de t_i^- se obtiene de considerar que

$$d(x, v(u)) = d(a, v(u)) + t_i^-.$$

Para calcular los valores de w_t se ordenan conjuntamente los valores t_u^+ y los t_u^- en orden no decreciente en la lista T. Inicialmente

$$w_0 = |U_3 \cup U_4| = |a \succ x|$$

es el número de usuarios que prefieren una subarista $[a, a+t_i^+)$ o todo el segmento $[a, b]$ al punto x. Al recorrer la lista T se están recorriendo los puntos y del segmento de forma que:

- Cuando se encuentra un t_i^+ significa que termina uno de los trozos $[a, a+t_u^+)$.
- Cuando se encuentra un t_i^- significa que comienza uno de los trozos $(a+t_u^-, b]$.

Si, para algún valor t de la lista T sucede que $w_t > |U|/2$ significa que más de la mitad de los usuarios prefieren el punto $y = a + t$ al punto x.

Cuando ya se ha comparado un punto con todos los segmentos sin ser mejorado ese punto es punto anti-Condorcet y se repite el paso 3 pero estudiando otro punto de AC.

ALGORITMO ANTI-1B

Paso 1

Se aplica el algoritmo ANTI-1A iniciado con $AC = BA \cup V$. Sea AC el correspondiente conjunto de puntos anti-Condorcet.

Paso 2

Sea S el conjunto de los segmentos tales que el número de usuarios con función de distancias creciente en el segmento es igual al de usuarios con función de distancias decreciente en el segmento.

Paso 3

> Comparar cada segmento $[a, b]$ de S con todos los segmentos de N para determinar los subsegmentos de $[a, b]$ que son dominados y eliminarlos de S. El conjunto de subsegmentos S resultante y los puntos del paso 1 constituyen los puntos anti-Condorcet de la red.

En el paso 1 se comparan todos los puntos cuello de botella en sentido amplio y vértices entre sí, y con todos los segmentos de N. Los puntos que no resultan eliminados en este paso son puntos anti-Condorcet.

En el paso 2 se eliminan los segmentos que no pueden contener en su interior puntos anti-Condorcet. Para el caso de facilidades no deseables, en los segmentos $[a, b]$ que pueden contener puntos anti-Condorcet en su interior se tienen que cumplir que el número de usuarios con función de distancias creciente en un extremo es igual al número de usuarios con función de distancias decreciente en ese extremo. Ya que si el número de usuarios que tienen una función de distancias decreciente es mayor que el número de usuarios que tienen una función de distancias creciente, el extremo a domina a todo el segmento. Y si ocurre al contrario, es el extremo b el que domina a todo el segmento.

En el paso 3 se compara cada uno de los segmentos no descartados en el paso 2 con todos los segmentos de la red para detectar los trozos del primero que son dominados por algún punto del segundo. La comparación de dos segmentos entre sí para eliminar los trozos dominados de uno de ellos es similar a los pasos 4, 5 y 6 del algoritmo para calcular los puntos de Condorcet lo único que varía es que ahora se prefieren los puntos más alejados.

4.1.4. La solución anti-Condorcet en los árboles

El problema del anti-Condorcet, como otros muchos problemas de localización en general y de localización mediante votos, tiene más fácil solución en redes sencillas como los árboles. Los procedimientos de solución tratan de aprovechar que los árboles cumplen ciertas propiedades como son las siguientes. Para dos puntos cualesquiera de un árbol existe un único camino que los une. Un diámetro de un árbol es un camino de longitud máxima; que siempre une dos vértices hoja. Si un vértice hoja es el extremo de un diámetro y no hay una mayoría de los usuarios que estén más alejados del otro extremo del diámetro entonces es un punto anti-Condorcet.

Teorema (Labbé, (1990))

Sea N un árbol. Sea $P(v_i, v_j)$ un diámetro que une los vértices hoja v_i y v_j. Si

$$|\{u \in U : d(v(u), v_j) > d(v(u), v_i)\}| \leq |U|/2$$

entonces v_i es un punto anti-Condorcet; $v_i \in AC$.

Además si el número de usuarios es impar entonces los extremos de los diámetros que cumplen la propiedad anterior son los únicos puntos anti-Condorcet

Teorema (Labbé, (1990))

Sea N un árbol. Si $|U|$ es impar entonces:

$$AC = \{v_i \in V : d(v_i, v_j) = \max_{u,v \in V} d(u, v), |v_j \succ v_i| \leq |U|/2\}$$

De estos resultados se obtiene un algoritmo eficiente para determinar un punto anti-Condorcet en un árbol. El algoritmo de Handler (Handler, (1973)) para hallar el centro absoluto de un árbol se puede adaptar para determinar todos los diámetros del árbol. El centro absoluto de un grafo es el punto del grafo que hace máxima la distancia al vértice más alejado. En (Handler, (1973)) se muestra que el centro absoluto se encuentra en el punto medio de cualquier diámetro del árbol.

El diámetro de un árbol T es:

$$\delta = \max_{x,y \in T} d(x, y) = \max_{u,v \in V} d(u, v).$$

Para obtener un diámetro de un árbol T basta tomar un punto x cualquiera y determinar el punto y más alejado a x, y luego el punto z más alejado a y. Los puntos y y z son vértices hoja y el camino que los une es un diámetro; además su punto medio c es el centro absoluto del árbol; es decir el punto $c \in T$ tal que:

$$\max_{v \in V} d(c, v) = \min_{z \in T} \max_{v \in V} d(z, v) = \delta/2.$$

Para determinar todos los diámetros de un árbol podemos proceder de forma similar. Se toma un punto cualquiera, por ejemplo un vértice v_0. Se determina el conjunto V_1 constituido por los vértices a distancia máxima de v_0. Entonces V_1 está constituido por los vértices hoja:

$$V_1 = \{v \in V : d(v_0, v) = \max_{u \in V} d(v_0, u)\}.$$

Se vuelven a tomar cada uno de los vértices de V_1 y se determina el conjunto de vértices más alejado. Estos vértices constituyen otro conjunto de vértices V_2 de forma que la distancia entre cada uno de ellos y un vértice de V_1 es el diámetro del árbol.

$$V_2 = \{v \in V : d(v_1, v) = \max_{u \in V} d(v_1, u), v_1 \in V_1\}.$$

Los caminos que unen cada par de vértices distintos del conjunto $V_1 \cup V_2$ son todos los diámetros (en general, los conjuntos V_1 y V_2 son disjuntos, pero si v_0 coincide con el centro entonces estos conjuntos coinciden $V_1 = V_2$).

A partir de estos resultados se obtienen los algoritmos para determinar uno o todos los puntos anti-Condorcet de un árbol. El algoritmo ANTI-1T encuentra todos los puntos anti-Condorcet de un árbol que se encuentren situados en un vértice hoja. Si $|U|$ es impar estos puntos son todos los puntos anti-Condorcet del árbol. En Labbé (1990) se propone un álgoritmo que sólo encuentra un punto anti-Condorcet.

ALGORITMO ANTI-1T

Paso 1

Usar la adaptación del algoritmo de Handler para determinar todos los diámetros $P(v_i, v_j)$ del árbol N.

- Sea v_0 un vértice cualquiera. Sea V_1 el conjunto de vértices (hojas) a distancia máxima de v_0. Es decir
$$V_1 = \{v \in V : d(v_0, v) = \max_{u \in V} d(v_0, u)\}$$
- Sea V_2 el conjunto de vértices (hojas) a distancia máxima de un vértice (hoja) de V_1. Es decir
$$V_2 = \{v \in V : d(v_1, v) = \max_{u \in V} d(v_1, u), v_1 \in V_1\}$$
- Todo camino que une v_1 y v_2 es un diámetro, $\forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ con $v_1 \neq v_2$.

Paso 2

Para cada diámetro $D(v_i, v_j)$ calcular:

$$p_{ij} = |\{u \in U : d(u, v_i) < d(u, v_j)\}|$$

Si $p_{ij} \leq |U|/2$ entonces v_i es un punto anti-Condorcet.

Si $p_{ij} \geq |U|/2$ entonces v_j es un punto anti-Condorcet.

4.1.5. Otras soluciones para servicios no deseables

Paralelamente a la introducción de los conceptos de solución de Simpson y solución plural a partir de la solución de Condorcet se pueden deducir del concepto de punto anti-Condorcet tanto la solución antiplural como la solución anti-Simpson de la siguiente forma.

Definición

Un punto $x \in L$ es un punto anti-Simpson si:

$$\forall y \in L : \max_{z \in L} |z \succ x| \leq \max_{z \in L} |z \succ y|.$$

Los resultados y procedimientos son similares usando como puntuación anti-Simpson de un punto $x \in L$ la dada por la fórmula:

$$S(x) = \max_{y \in L} |y \succ x|.$$

La solución antiplural es la localización tal que no existe ninguna otra localización más lejana a un mayor número de usuarios.

Definición

Un punto $x \in N$ es una solución antiplural si:

$$\forall y \in L : |y \succ x| \leq |x \succ y|.$$

Igual que con los puntos de Condorcet, la definición de punto anti-Condorcet se puede extender para definir la localización $\alpha\gamma$-anti-Condorcet.

Definición

Se dice que un punto $x \in L$ es un punto $\alpha\gamma$-anti-Condorcet si y sólo si

$$|\{u \in U : d(y, v(u)) > \alpha + d(x, v(u))\}| \leq \gamma |U|, \forall y \in L.$$

Se obtienen resultados y procedimientos similares a los de los puntos $\alpha\gamma$-Condorcet.

De la misma forma se puede proceder a extender el concepto usando los parámetros α, β, γ y δ para analizar el concepto de soluciones $\alpha\beta\gamma$-anti-Condorcet, $\alpha\delta$antiPlurales, Tolerante antiSimpson, Tolerante anti-Condorcet, etc.

4.2. Localización de conjuntos mediante votos.

La localización de conjuntos mediante votos se ocupa de la aplicación de los criterios derivados de los procesos de votación cuando las soluciones alternativas están constituidas por conjuntos de puntos. En este apartado se considera la extensión de los resultados anteriores sobre la localización de puntos mediante votos a los problemas en los que se trata de ubicar un conjunto de puntos servicio en lugar de un único punto. Por tanto se analizan los conceptos de solución, y los correspondientes resultados, cuando se extienden a conjuntos los conceptos de puntos de Condorcet, Simpson, soluciones plurales, etc.

En la localización de conjuntos mediante votos no se puede contemplar la posibilidad de que todos los conjuntos de puntos sean soluciones alternativas puesto que la mejor solución consistiría en un conjunto con tantos puntos de servicio como usuarios donde que cada usuario elegiría el punto de localización que más le convenga. Generalmente se tiene fijado, por cuestiones de índole presupuestarias, el número p de puntos a ubicar. Cuando p es mayor que 1 se tiene un problema de localización de conjuntos. Por tanto, se considera como solución de Condorcet de este problema a aquellos conjuntos de p puntos de localización para los que no existe otro conjunto, también de p puntos, que sea preferido por más de la mitad de los usuarios. A este problema se le denomina *problema del conjunto* p*Condorcet* o *problema múltiple de Condorcet* (frente al problema de la localización de un sólo punto que se denomina problema *simple* de Condorcet).

Por tanto, se denomina *conjunto de Condorcet* a aquel conjunto de puntos de localización para el que no existe otro de su mismo tamaño que sea preferido por más de la mitad de los usuarios. Análogamente, se establece como *conjunto de Simpson* aquél para el que el mayor número de usuarios que prefiere otro conjunto de su mismo tamaño es mínimo, entre los conjuntos de su tamaño. Por último, se consideran los *conjuntos plurales* y los *conjuntos de seguridad* definidos de forma similar; teniendo en cuenta la comparación por la preferencia de la mayoría simple del conjunto de usuarios, entre conjuntos de un tamaño fijo. Finalmente se plantean las extensiones que, de forma similar a los puntos de Condorcet, los puntos de Simpson y los puntos soluciones plurales, surgen al usar umbrales comunes para la indiferencia.

4.2.1. Antecedentes.

Como antecedentes de la localización de conjuntos mediante votos sólo se pueden citar algunos trabajos con problemas indirectamente relacionados con estas cuestiones. Los conceptos correpondientes a los problemas de localización de conjuntos mediante procesos de votación no aparecen explicitamente en la literatura sobre localización. Sin embargo, en (Hakimi, (1990)) se consideran una serie de problemas de localización competitiva dentro de los que algunos casos especiales se aproximan al modelo de localización pCondorcet aquí considerado que se puede considerar incluido.

Hakimi da una interpretación económica de los pesos de los vértices y de las longitudes de las aristas considerando que $w(v)$ es la demanda del vértice v y $l(a)$ es el coste del transporte por unidad de servicio a lo largo de la arista a. Considera que pueden haber dos o más suministradores del servicio que compiten por capturar la demanda de los vértices. En el modelo general se parte que hay situadas p localizaciones $X_p = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ del servicio y se pretende establecer r nuevas localizaciones $Y_r = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$ que van a competir con las p localizaciones existentes. Se considera que en las circunstancias reales pueden haber dos tipos de servicios: los *servicios esenciales* (hospitales, bomberos, escuelas, ...) y los *servicios no esenciales* (restaurantes, tiendas de ropa, ...). En el caso de servicios esenciales la demanda del servicio no depende de la distancia del usuario al servicio pero para los servicios no esenciales la demanda puede ser función de la distancia. En particular, se habla de *preferencias binarias* cuando un usuario elige el servicio más próximo a él y de *preferencias proporcionales* del cliente cuando la elección es una función de las distancias relativas. Del desarrollo de Hakimi, el modelo que más se ajusta al planteamiento de la localización de un conjunto de p puntos con el criterio de Condorcet, es el problema de la localización en redes de demandas no esenciales con preferencias binarias.

4.2.2. El Modelo

El modelo de la localización mediante votos para puntos se extiende a la localización de conjuntos de la siguiente forma. Se considera ahora que el número de puntos de servicios que se desea establecer no es sólo uno, sino que se van a determinar p localizaciones para un único servicio. La cuestión de interés para la localización de un conjunto de p puntos de servicio será el número de usuarios que prefiere un conjunto X a otro conjunto Y también de p puntos de localización propuestos como alternativa. Por tanto, si ante un conjunto de p localizaciones $X = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ para un servicio, se propone otro conjunto de p localizaciones $Y = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$ como alternativa entonces las nuevas ubicaciones han de *competir* con las anteriores en las preferencias del conjunto de usuarios.

Cada usuario prefiere que el servicio esté cuanto más cerca mejor, por tanto ante ambas alternativas preferirá aquella que tenga el punto de servicio más cercano. Si se da un empate entre las distancias del usuario a dos puntos de localización distintos, manifiesta una indiferencia entre ellas; no manifiesta preferencia por ninguna de ellas. La propuesta es rechazada cuando una mayoría suficiente de usuarios tiene preferencia por otra alternativa. Distintas formas de establecer cuando se tiene una mayoría de rechazo significativa da lugar a distintos problemas. A este modelo también se puede incorporar la existencia de umbrales de indiferencia no nulos dando lugar a estructuras de preferencias de tipo de semiorden.

Se tiene un conjunto U de usuarios y un conjunto L de posibles ubicaciones o localizaciones para un servicio en una red N. Al igual que en el modelo simple el conjunto U de usuarios es finito, y aunque puede incluir puntos interiores, se supone que siempre están ubicados en vértices, $U \subseteq V$, siendo el caso estándar cuando hay un usuario en cada vértice, $U = V$. Por otro lado el conjunto L de posibles ubicaciones puede ser tanto un conjunto finito como infinito. Si L es un conjunto finito, cabe decir lo mismo que para el conjunto de usuarios; puede ser cualquier conjunto finito de puntos pero usualmente son vértices y en el caso estándar discreto o finito es $L = V$. Si el espacio de localizaciones L es infinito suele ser de tipo continuo pero puede incluir sólo parte de las aristas (e incluso excluir parte de ellas como subaristas). Sin embargo, el caso estándar se presenta cuando todo el conjunto de puntos de la red es el conjunto de posible ubicaciones, $L = N$. Por tanto se tienen dos modelos estándares, en el caso *discreto* o *finito* es $U = L = V$ y en el caso *infinito* o *continuo* se tiene $U = V$ y $L = N$.

Cuando se consideran servicios a localizar en un sólo punto, cada usuario utiliza para establecer sus preferencias la distancia al punto donde se establece el servicio. Si la distancia entre un usuario u y el punto de localización x viene dada por la fucnión $d(u, x)$, el usuario prefiere la localización en otro punto y a la localización en x si $d(u, y) < d(u, x)$. La cantidad de interés para rechazar la localización en x por comparación con la localización en otro punto y es el número de usuarios que prefieren la localización en el punto y a localización en x denotada por:

$$|y \prec x| := |\{u \in U : d(u, y) < d(u, x)\}|.$$

Para conjuntos de localizaciones se utiliza una notación algo más explícita, que para puntos simples. Utilizando esta nueva notación para puntos, denotaríamos por $U(y \prec x)$ al conjunto de usuarios que prefieren el punto y al punto x; es decir,

$$U(y \prec x) = \{u \in U : d(u, y) < d(u, x)\}.$$

A partir de estos conjuntos, la cantidad de usuarios que prefieren y a x viene dada por el cardinal de este conjunto que se denotaría por $W(y \prec x)$, que coincide con $|y \prec x|$ en la notación usada para puntos. Por tanto,

$$W(y \prec x) = |U(y \prec x)| = |\{u \in U : d(u, y) < d(u, x)\}| = |y \prec x|.$$

Al considerar servicios a localizar en un conjunto de puntos, se debe considerar la distancia de un usuario u a un conjunto de puntos de localización Z que viene dada por

$$d(u, Z) = \min\{d(u, z) : z \in Z\} = \min_{z \in Z} d(u, z).$$

Por tanto, dados los conjuntos Y y X de puntos de localización del servicio, el conjunto de usuarios que prefieren Y a X es el de los que tienen un punto de Y más cerca que cualquiera de X y viene dado por

$$U(Y \prec X) = \{u \in U : d(u, Y) < d(u, X)\}.$$

Además, los usuarios que prefieren el punto de localización y al conjunto X son los que prefieren y a cualquier punto de X, es decir,

$$U(y \prec X) = \bigcap_{x \in X} U(y \prec x) = \{u \in U : d(u, y) < d(u, X)\}.$$

Y por tanto, el conjunto de los usuarios que prefieren el conjunto Y al conjunto X es el de los usuarios tales que ante cualquier punto x de X existe un punto $y(x)$ de Y que está mas cerca y que puede ser distinto para cada usuario u y cada localización x. Luego, el conjunto $U(Y \prec X)$ se puede obtener por:

$$\begin{aligned} U(Y \prec X) &= \bigcup_{y \in Y} U(y \prec X) = \bigcup_{y \in Y} \bigcap_{x \in X} U(y \prec x) = \\ &= \{u \in U : \forall x \in X, \exists y \in Y : d(u, y) < d(u, x)\}. \end{aligned}$$

Es evidente, que para establecer una condición paralela a la de puntos de Condorcet para definir los conjuntos de Condorcet no se deben contemplar las comparaciones con todos los conjuntos de localizaciones como alternativas para establecer el servicio. Debemos restringir estas comparaciones a aquellas que sean de características comparables en el resto de los aspectos a tener en cuenta. La cuestión básica para ello es, en principio, el número de puntos de localización a establecer, por lo que sólo se tendrían en cuenta alternativas constituidas por la misma cantidad de localizaciones. En un contexto más realista se podrían contemplar otras medidas de las localizaciones adoptadas en términos del coste u otras características relevantes de las localizaciones seleccionadas, como podrían ser ciertas restricciones impuestas por normativas sobre el tipo de servicios a establecer. Estas restricciones pueden implicar zonas prohibidas de localización pero también suelen hacer referencia al número y magnitud de las localizaciones, o la distancia entre ellas, lo que puede variar de una zonas a otras.

La cantidad de usuarios que prefieren el conjunto de localizaciones Y a las localizaciones de X se denota por $W(Y \prec X)$ y viene dada por:

$$W(Y \prec X) = |U(Y \prec X)| = |\{u \in U : d(u, Y) < d(u, X)\}| = |Y \prec X|.$$

Si las ubicaciones de los usuarios vienen dados por los pesos $w(v)$ de los vértices v de la red, que representa el número de usuarios que están ubicados en cada vértice, entonces la cantidad de usuarios que prefieren Y a X es:

$$W(Y \prec X) = \sum_{v \in V(Y \prec X)} w(v),$$

donde, siguiendo una notación similar, denotamos

$$V(Y \prec X) = \{v \in V : d(v, Y) < d(v, X)\}.$$

Una forma equivalente de establecer formalmente el modelo consiste en usar los conjuntos de puntos de ubicación que son capaces de *captar* a los usuarios ya atendidos por un conjunto. Se denota por $Z(v : X) = \{z \in L : d(v, z) < d(v, X)\}$ a las ubicaciones que captan a los usuarios ubicados en v frente al conjunto de localizaciones X. Los usuarios ubicados en v preferirán un punto de servicio del conjunto alternativo de localizaciones Y a las localizaciones de X si y sólo si $Y \cap Z(v : X) \neq \emptyset$. Por tanto

$$V(Y \prec X) = \{v \in V : Y \cap Z(v : X) \neq \emptyset\}.$$

Los conjuntos $Z(v : X)$ indican las ubicaciones que hay que tener en cuenta al buscar alternativas que salgan beneficiadas en una comparación con X.

4.2.3. Conjuntos de Condorcet.

Para establecer la definición de conjunto de Condorcet debemos adoptar una formalización similar a la del punto de Condorcet. Un punto x es un punto

Condorcet si el número de usuarios que prefieren otro punto y es menor que la mitad de los usuarios. Formalmente la localización x es de Condorcet en el espacio L con respecto al conjunto de usuarios U si:

$$\forall y \in L : |y \prec x| = W(y \prec x) \leq |U|/2 \Longleftrightarrow \max_{y \in L} W(y \prec x) \leq |U|/2.$$

Denotando por C al conjunto de los puntos de Condorcet se tiene:

$$C = \{x \in L : W(y \prec x) \leq |U|/2, \forall y \in L\} = \{x \in L : \max_{y \in L} W(y \prec x) \leq |U|/2\}.$$

Por tanto, un conjunto de p puntos X es un conjunto p*Condorcet* si el número de usuarios que prefieren otro conjunto Y de p puntos es menor que la mitad de los usuarios. Formalmente adoptamos la siguiente definición:

Definición

*Un conjunto de p puntos $X \subseteq L$ es un conjunto p**Condorcet** en el espacio de localizaciones L con respecto al conjunto de usuarios U si, $\forall Y \subseteq L$, se tiene que*

$$|Y| = p \Rightarrow W(Y \prec X) \leq |U|/2.$$

Si se denota por C_p a los conjuntos p-*Condorcet* entonces

$$C_p = \{X \subseteq L : |X| = p \text{ y } W(Y \prec X) \leq |U|/2, \forall Y \subseteq L : |Y| = p\}.$$

Para obtener una notación más fielmente paralela a la de los puntos de Condorcet denotamos por L^p a los conjuntos de p puntos de localización; es decir

$$L^p = \{X \subseteq L : |X| = p\}.$$

Entonces un conjunto p-Condorcet es un conjunto $X \in L^p$ tal que

$$\max_{Y \in L^p} W(Y \prec X) \leq |U|/2$$

y expresar el conjunto de los conjuntos p-Condorcet por

$$\begin{aligned} C_p &= \{X \in L^p : W(Y \prec X) \leq |U|/2, \forall Y \in L^p\} = \\ &= \{X \in L^p : \max_{Y \in L^p} W(Y \prec X) \leq |U|/2\}. \end{aligned}$$

En general, sin necesidad de especificar el tamaño del conjunto, podemos decir que un conjunto cualquiera de puntos de localización X es de *Condorcet* si el número de usuarios que prefieren otro conjunto Y de su mismo tamaño no es mayor que la mitad de los usuarios.

Definición

*Un conjunto de puntos de localización $X \subseteq L$ es de **Condorcet** en L con respecto a U si y sólo si $\forall Y \subseteq L$ se cumple*

$$|Y| = |X| \Rightarrow W(Y \prec X) \leq |U|/2.$$

Entonces los conjuntos de Condorcet son los $X \subseteq L$ que verifican*:*

$$\max_{|Y|=|X|} W(Y \prec X) \leq |U|/2.$$

que son los de la familia:

$$\{X \subseteq L : W(Y \prec X) \leq |U|/2, \forall |Y| = |X|\} = \bigcup_{p=1}^{\infty} C_p.$$

4.2.4. Conjuntos de Simpson.

De forma similar a lo que ocurre con los puntos de Condorcet, es frecuente encontrarse con casos donde no se puede encontrar ningún conjunto pCondorcet, para diversos valores de p. En tales circunstancias cabe plantearse cual es la mayor cantidad de usuarios que se puede establecer como mayoría suficientemente cualificada como para rechazar una alternativa de localización de forma que exista al menos una propuesta que no pueda ser rechazada. De esta forma, incluso en los casos en que exista localización de Condorcet, se establece el concepto de localización de Simpson.

Cuando sólo se consideran localizaciones del servicio en un sólo punto, una localización de Simpson es aquella para la que el número máximo de usuarios que prefieren otra localización es lo menor posible. Formalmente, con la notación ahora empleada, el punto x es una localización de Simpson en el espacio L con respecto al conjunto de usuarios U si:

$$\forall y \in L : \max_{z \in L} W(z \prec x) \leq \max_{z \in L} W(z \prec y).$$

En otros términos, el conjunto de puntos de Simpson S se puede expresar por;

$$S = \arg\min_{x \in L} \max_{z \in L} W(z \prec x)$$

Para el caso de la localización de servicios a ubicar en conjuntos de puntos tendremos el concepto análogo de conjunto de Simpson. Dada una ubicación para el servicio constituida por un conjunto X de puntos de localización del servicio, llamaremos *oposición* de X a la mejor alternativa que se puede enfrentar a él, con el mismo número de ubicaciones.

Definición

> *Un conjunto de puntos de localización $Y \subseteq L$ es la **oposición** del conjunto $X \subseteq L$ para el conjunto de usuarios U si y sólo si $|Y| = |X|$ y*
>
> $$W(Y \prec X) \geq W(Z \prec X), \forall |Z| = |X|, Z \subseteq L.$$

La oposición de un conjunto de ubicaciones X coincide con lo que Hakimi denomina *X-medianoide*. En otros términos, si por $Y(X)$ representamos a la oposición de X, podemos expresarla por

$$Y(X) = \arg \max_{Y \in L^{|X|}} W(Y \prec X).$$

Por tanto, si se pretende oponer a las ubicaciones X para el servicio una alternativa de localización Y con la misma cantidad de localizaciones, que sea preferida por el mayor número de usuarios posibles, ésta debe ser la oposición de X. Si deseamos ubicar el servicio en un conjunto de p puntos servicio X tales que si se propone otra alternativa de p ubicaciones, la cantidad de usuarios a su favor sea mínima estamos optando por la denominada solución de Simpson.

Definición

> *Un conjunto de puntos de localización $X \subseteq L$ es un conjunto **Simpson** si y sólo si*
>
> $$W(Y(X) \prec X) \leq W(Y(Z) \prec Z), \forall Z \subseteq L, |Z| = |X|.$$

En otros términos, deshaciendo el concepto de oposición, el conjunto $X \subseteq L$ es un conjunto de Simpson si

$$\max_{Y \in L^{|X|}} W(Y \prec X) = \min_{Z \in L^{|X|}} \max_{Y \in L^{|X|}} W(Y \prec Z).$$

El valor de este máximo rechazo se denomina *puntuación* de Simpson, expresado por:

$$W^*(X) = \max_{Y \in L^{|X|}} W(Y \prec X).$$

Entonces un conjunto de localizaciones es solución de Simpson si alcanza la mínima puntuación de Simpson entre los de su tamaño.

Si se tiene establecido el tamaño p del conjunto de localizaciones en las que ubicar el servicio disponemos del concepto de conjunto pSimpson. Los conjuntos pSimpson son aquellos conjuntos de p localizaciones para las que el número máximo de usuarios que prefieren otro conjunto de p localización es lo menor posible. Formalmente establecemos la siguiente definición.

Definición

*Un conjunto de puntos de localización $X \in L^p$ es un conjunto p**Simpson** si y solo si*

$$X = \arg \min_{Z \in L^p} \max_{Y \in L^p} W(Y \prec Z).$$

Por tanto, denotando por S_p a los conjuntos p-Simpson se tiene que

$$S_p = \left\{ X \in L^p : W(Y(X) \prec X) = \min_{Z \in L^p} W(Y(Z) \prec Z) \right\}.$$

Hakimi los denomina *centroides* porque se trata de las soluciones de un problema minimax. El problema de *pSimpson* es el problema minimax:

$$\min_{X \in L^p} \max_{Y \in L^p} W(Y \prec X).$$

La solución es el conjunto de p localizaciones con menor puntación de Simpson.

De la misma forma que ocurre con los puntos de Condorcet y de Simpson, para cualquier tamaño p del conjunto de puntos donde establecer el servicio, no siempre existe un conjunto pCondorcet y si existe al menos un conjunto pSimpson. Pero no todo conjunto pCondorcet, en caso de existir, es conjunto pSimpson, ni un conjunto pSimpson tiene porque ser pCondorcet. Sin embargo, si un conjunto X es pSimpson y su puntación no llega a la mitad de usuarios es también pCondorcet, y si existe algún conjunto pCondorcet entonces todo pSimpson es también pCondorcet.

4.2.5. Conjuntos Plurales.

El concepto de solución plural surge al sustituir en la solución de Condorcet el concepto de mayoría absoluta por el de mayoría simple, es decir considerar como condición para rechazar una propuesta de localización del servico el que exista otra localización alternativa que pueda ser preferida por una mayoría simple de usuarios. Además el concepto de conjunto plural debe coincidir con la extensión natural del concepto de solución plural para la localización de un único punto de servicio. Un punto x es una localización *plural* si el número de usuarios que prefieren otro punto y es menor que los que prefieren a x. Formalmente la localización $x \in L$ es solución plural en el espacio L con respecto al conjunto de usuarios U si:

$$\forall y \in L : W(y \prec x) \leq W(x \prec y).$$

Si P denota al conjunto de los puntos plurales entonces

$$P = \{x \in L : W(y \prec x) \leq W(x \prec y), \forall y \in L\}.$$

Por tanto, un conjunto de puntos de localización X será una solución *plural* si el número de usuarios que prefieren otro conjunto de localizaciones Y, de su mismo tamaño, nunca es mayor que los que prefieren a X. Formalmente adoptamos la siguiente definición:

Definición

El conjunto $X \subseteq L$ es una ***solución plural*** *en el espacio de localizaciones L con respecto al conjunto de usuarios U si:*

$$\forall Y \subseteq L : |Y| = |X| \Rightarrow W(Y \prec X) \leq W(X \prec Y).$$

Si el tamaño del conjunto de localizaciones está fijado en un número p de puntos en los que ubicar el servicio obtenemos el concepto de conjunto $p$plural. Los conjuntos $p$plurales son los conjuntos de p localizaciones para las que no existe otro conjunto de p localizaciones que es preferido por una mayoría simple de usuarios. Formalmente establecemos la siguiente definición.

Definición

*Un conjunto de puntos de localización $X \in L^p$ es un conjunto p**Plural** si y solo si*

$$\forall Y \in L^p : W(Y \prec X) \leq W(X \prec Y).$$

Por tanto, si se denota por P_p a los conjuntos p-plurales se tiene que

$$P_p = \{X \in L^p : W(Y \prec X) \leq W(X \prec Y), \forall Y \in L^p\}.$$

Siguiendo el paralelismo con la obtención del concepto de conjunto de Simpson desde el de conjunto de Condorcet se establece el concepto de *conjunto de seguridad* o de *Copeland* sustituyendo en el concepto de solución de Simpson la mayoría absoluta por mayoría simple. Se define una puntuación similar a la de Simpson, denominada *puntuación de seguridad* y denotada por

$$W'(X) = \max_{|Y|=|X|} [W(Y \prec X) - W(X \prec Y)].$$

Entonces los conjuntos plurales son los que tienen una puntuación de seguridad no positiva y los conjuntos $p$plurales vienen dados por:

$$P_p = \{X \in L^p : W'(X) \leq 0\}.$$

Un conjunto de seguridad o de Copeland es el que hace mínima la puntuación de seguridad entre los de su tamaño.

Definición

*Un conjunto de puntos de localización $X \subseteq L$ es un conjunto de **Seguridad** si y sólo si,*

$$W'(X) = \min_{|Y|=|X|} W'(Y)$$

Por tanto, los conjuntos de $p$seguridad son los conjuntos X donde se alcanza la puntuación de seguridad mínima en L^p. Por tanto, fijado el número p de puntos a localizar, se definen los conjuntos de $p$seguridad.

Definición

*Un conjunto de puntos de localización X es un conjunto p**Seguridad** si y sólo si,*

$$X = \arg \min_{Y \in L^p} W'(Y).$$

Por tanto, denotando por K_p a los conjuntos pSeguridad se tiene

$$K_p = \{X \in L^p : W'(X) = \min_{Y \in L^p} W'(Y)\}.$$

El concepto de *oposición* a un conjunto de localizaciones X usando la mayoría simple, es el del conjunto Y con su mismo tamaño en el que se alcanza la puntuación de seguridad $W'(X)$. Por tanto, la *oposición* a X con mayoría simple es el conjunto

$$Y'(X) = \arg \max_{|Y|=|X|} [W(Y \prec X) - W(X \prec Y)].$$

4.2.6. Conjuntos Tolerantes

Los conceptos de conjuntos de localización mediante votos anteriores se extienden al contemplar la posibilidad de que exista un umbral de indiferencia común α para todos los usuarios de forma que cualquier usuario es indiferente ante dos localizaciones del servicio si la diferencia de la distancia a ellos no es mayor que α. A los conceptos que surgen al aplicar los conceptos de solución de Condorcet, de Simpson, plurales o de seguridad para determinar el conjunto de localizaciones elegido, cuando se utiliza un umbral de indiferencia α, se les denominan conjuntos *αCondorcet*, *αSimpson*, *αPlurales* o de *αSeguridad* respectivamente. Los correspondientes a los valores más pequeños de α para los que existe solución se denominan *tolerantes.*

Con una notación paralela a la utilizada anteriormente en este capítulo podemos expresar al conjunto de los usuarios que prefieren la localización del servicio en el conjunto X a la localización en el conjunto Y, usando el umbral de indiferencia común α, como

$$U_\alpha(Y \prec X) = \{u \in U : d(u, Y) < d(u, X) - \alpha\}.$$

Del mismo modo, la cantidad de usuarios que prefieren Y a X es:

$$W_\alpha(Y \prec X) = |Y \prec_\alpha X| = |U_\alpha(Y \prec X)|.$$

Se definen las puntuaciones de αSimpson y de αSeguridad por:

$$\begin{aligned} W^*_\alpha(X) &= \max_{|Y|=|X|} W_\alpha(Y \prec X) \\ W'_\alpha(X) &= \max_{|Y|=|X|} [W_\alpha(Y \prec X) - W_\alpha(X \prec Y)].. \end{aligned}$$

Por tanto consideramos las definiciones siguientes:

Definición

*El conjunto $X \subseteq L$ es α**Condorcet** en L con respecto U si y sólo si, $W^*_\alpha(X) \leq |U|/2$.*

Definición

*El conjunto $X \subseteq L$ es α**Simpson** en L con respecto U si y solo si,*

$$W^*_\alpha(X) = \min_{|Y|=|X|} W^*_\alpha(Y)$$

Definición

*El conjunto $X \subseteq L$ es α**plural** en L con respecto a U si y sólo si,* $W'_\alpha(X) \leq 0$.

Definición

*El conjunto $X \subseteq L$ es de α**Seguridad** en L con respecto a U si y sólo si,*

$$W'_\alpha(X) = \min_{|Y|=|X|} W'_\alpha(Y)$$

Fijado el número p de puntos a localizar, denotamos los conjuntos de L^p que son conjuntos αCondorcet, αSimpson, αplurales o αCopeland respectivamente por $C_p^\alpha, S_p^\alpha, P_p^\alpha$ y K_p^α. Estos conjuntos se obtienen por:

$$\begin{aligned}
C_p^\alpha &= \{X \in L^p : W_\alpha^*(X) \leq |U|/2\}. \\
S_p^\alpha &= \{X \in L^p : X = \arg\min_{Y \in L^p} W_\alpha^*(Y)\}. \\
P_p^\alpha &= \{X \in L^p : W'_\alpha(X) \leq 0\}. \\
K_p^\alpha &= \{X \in L^p : X = \arg\min_{Y \in L^p} W'_\alpha(Y)\}.
\end{aligned}$$

Los conjuntos $p$tolerantes de Condorcet y $p$tolerantes plurales son los correspondientes a los valores mínimos de α que garantizan la existencia de conjuntos pCondorcet y $p$plurales respectivamente. Denotados estos conjuntos por TC_p y TK_p.se tiene:

$$\begin{aligned}
TC_p &= C_p^\alpha \text{ para } \alpha = \arg\min_{\alpha \geq 0}\{\alpha : C_p^\alpha \neq \emptyset\}. \\
TP_p &= P_p^\alpha \text{ para } \alpha = \arg\min_{\alpha \geq 0}\{\alpha : P_p^\alpha \neq \emptyset\}
\end{aligned}$$

4.2.7. Otras Extensiones

Otras extensiones derivadas del modelo generalizado presentado en el capítulo 3 se pueden aplicar a la localización de conjuntos mediante votos. Por ejemplo, si se considera una mayoría de rechazo distinta de la mayoría absoluta usando el valor del parámetro γ que puede ser distinto de $1/2$. Un conjunto X de puntos es $\alpha\gamma$Condorcet si

$$\max_{|Y|=|X|} W_\alpha(Y \prec X) \leq \gamma|U|.$$

Estas soluciones están relacionadas con los conjuntos αSimpson ya que, para cada p y cada valor de α, los conjuntos αSimpson de tamaño p son los conjuntos $\alpha\gamma$Condorcet de tamaño p para el menor γ para el que dicho conjunto es no vacío; es decir para

$$\gamma^* = \min\{\gamma : \alpha\gamma C \neq \emptyset\}$$

4.2.8. La programación lineal.

En este apartado se analiza el uso de las técnicas de Programación Lineal en la localización mediante votos. El objetivo inicial sería la formulación del problema del conjunto de Condorcet en términos de la Programación Lineal Entera. Esta forma de abordar el problema sigue la línea propuesta en (Dobson y Karmarkar, (1987)) al tratar de poner un problema de localización competitiva en forma de problema de programación lineal. El objetivo final es determinar un modelo lineal para el problema de un conjunto de $\alpha\gamma$Condorcet de p puntos y su aplicación en la resolución del problema.

El contexto de la localización competitiva se describe en términos de una firma primeramente establecida y una firma competidora que se establece en segundo lugar que entonces compiten por captar a los clientes. La formulación de los problemas de localización competitiva se realiza como una optimización en tres pasos:

- el problema de optimización del cliente,
- el problema de optimización de la firma competidora y
- el problema de optimización de la firma existente.

En los problemas de localización mediante votos se tiene de forma paralela a los usuarios, la ubicación alternativa y la ubicación propuesta.

- El problema de optimización de cada usuario, una vez conocida la ubicación propuesta y la alternativa, consiste en elegir el punto de servicio preferido.
- El problema de optimización de la alternativa consiste en, dada la localización propuesta determinar la localización alternativa que sería preferida por más usuarios.

- El problema de optimización de la propuesta consiste en determinar la localización de forma que la mejor alternativa que se puede ofrecer sería preferida por el menor número de usuarios.

Siguiendo la notación empleada por Dobson y Karmarkar para definir el modelo identificamos los términos del modelo discreto siguientes. Sea m el número de localizaciones posibles para el servicio y n el número de puntos donde están ubicados usuarios. Sea d_{ki} la distancia entre el i-ésimo punto de posible ubicación del servicio y el k-ésimo punto con usuarios siendo w_k el número de usuarios en este punto.

La ubicación del servicio propuesta X consiste en un conjunto de localizaciones posibles identificadas por un vector booleano x y la ubicación alternativa Y es identificado por el vector y, ambos de tamaño m. Las variables booleanas x_i e y_i indican si la ubicación propuesta o la alternativa incluye o no al punto de localización i-ésimo. La variable booleana z_{ki} expresa si los usuarios situados en el k-ésimo punto con usuarios acuden a la localización i-ésima. Por tanto, las ubicaciones propuesta y la alternativa vienen dadas por los vectores de variables booleanas x e y, y la asignación de usuarios por la matriz de variables booleanas z.

El problema de optimización de los usuarios consiste en, conocida la ubicación propuesta dada por el vector de valores $\overline{x}$ para las variables x y la ubicación alternativa dada por $\overline{y}$, elegir el punto de servicio más cercano a cada uno. Se denota $Usu(\overline{x}, \overline{y})$ al problema de optimización correspondiente que se formula en los términos siguientes:

$$\begin{array}{lll}
\text{Minimizar} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} d_{ki} w_k z_{ki} & \\
\text{Sujeto a:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} z_{ki} = 1 & k = 1, ..., n. \\
& z_{ki} \leq \overline{x}_i + \overline{y}_i & k = 1, ..., n; i = 1, ..., m \\
& z_{ki} \in \{0, 1\} & k = 1, ..., n; i = 1, ..., m
\end{array} \tag{P1}$$

En este problema la función objetivo representa el coste total de los usuarios en acudir al servicio, que ha de minimizarse. Las restricciones corresponden a la exigencia de que todo usuario tiene que elegir alguna ubicación y ésta debe elegirse entre las propuestas o las alternativas.

Evidentemente el problema es separable en cada uno de los usuarios o los puntos que contienen usuarios. El problema del usuario situado el punto k-ésimo, denotado $Usu_k(\overline{x}, \overline{y})$, es:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} d_{ki} w_k z_{ki} & \\ \text{Sujeto a:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} z_{ki} = 1 & \\ & z_{ki} \leq \overline{x}_i + \overline{y}_i & i = 1, ..., m \\ & z_{ki} \in \{0, 1\} & i = 1, ..., m \end{array} \tag{P2}$$

El problema del usuario $Usu(\overline{x}, \overline{y})$ tiene una solución directa usuando los coeficientes

$$c_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{si } d_{ki} < d_{kj} \\ 0, & \text{si } d_{ki} \geq d_{kj} \end{cases}$$

El significado de este coeficiente es que el usuario situado en el k-ésimo punto está más cerca de la localización i-ésima que de la j-ésima. La solución es: $z_{ki} = 1$ si $i = \arg\min\{d_{kj} : \overline{x}_j = 1 \text{ ó } \overline{y}_j = 1\}$. Por tanto, si $z_{ki} = 1$ entonces $c_{ji}^k = 0$, para los j con $\overline{x}_j + \overline{y}_j = 1$. Esa condición viene impuesta por la restricción lineal $z_{ki} + c_{ji}^k(\overline{x}_j + \overline{y}_j) \leq 1$. Por tanto, la solución óptima de $Usu_k(\overline{x}, \overline{y})$ es la única solución de

$$\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{m} z_{ki} = 1 & \\ z_{ki} \leq (\overline{x}_i + \overline{y}_i) & \forall i = 1, ..., m. \\ z_{ki} \leq 1 - c_{ji}^k(\overline{x}_j + \overline{y}_j) & \forall i, j = 1, ..., m. \\ z_{ki} \in \{0, 1\} & \forall i = 1, ..., m. \end{array}$$

Este es un problema de m variables y $m^2 + m + 1$ restricciones lineales. Nótese que para este problema tanto las componentes de $\overline{x}$ como las de $\overline{y}$ son constantes. Además, en la versión conjunta de todos los usuarios equivalente a este problemas las últimas restricciones se pueden sumar en j manteniendo el mismo conjunto de soluciones factibles. De esta forma se tiene el problema de nm variables y $n(2m + 1)$ restricciones lineales siguiente.

$$\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{m} z_{ki} = 1 & \forall k = 1, ..., n. \\ z_{ki} \leq (\overline{x}_i + \overline{y}_i) & \forall k = 1, ..., n, \forall i = 1, ..., m. \\ z_{ki} \leq 1 - \sum_{j=1}^{m} c_{ji}^k(\overline{x}_j + \overline{y}_j) & \forall k = 1, ..., n, \forall i = 1, ..., m \\ z_{ki} \in \{0, 1\} & \forall k = 1, ..., n, \forall i = 1, ..., m. \end{array}$$

El problema de optimización de las localizaciones alternativas consiste en, dadas las ubicaciones propuestas $\overline{x}$ determinar las localizaciones alternativas y que son preferidas por más usuarios. El problema de optimización correspondiente se denota $Alt(\overline{x})$, siendo $\overline{x}$ el vector que determina la ubicación propuesta X, y se formula de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n} w_k z_{ki}\right] y_i \\
\text{Sujeto a:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i \\
 & z \text{ solución de } Usu(\overline{x}, y) \\
 & y_i \in \{0,1\} \qquad\qquad\qquad \forall i = 1, ..., m.
\end{array}$$

La función objetivo contabiliza el número de usuarios que se decantan por una de las ubicaciones alternativas. La primera restricción implica que el número de ubicaciones alternativas tiene que coincidir con las propuestas. Sin embargo al sustituir la segunda restricción por la solución obtenida anteriormente, como proponen Dobson y Karmarkar, se obtiene un problema con función objetivo no lineal.

Sin embargo, el problema de la alternativa $Alt(\overline{x})$ se puede formular como un problema lineal usando los conjuntos de usuarios que prefieren cada posible punto de localización alternativo al conjunto propuesto. Estos conjuntos de usuarios son los que captaría cada punto de localización alternativo. Se definen unos coeficientes similares a los anteriores:

$$c_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{si } d_{ki} < \min\{d_{kj} : \overline{x}_j = 1\} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El significado de este coeficiente es que el usuario situado en el k-ésimo punto está más cerca de la localización i-ésima que del conjunto de localizaciones representadas por $\overline{x}$. Entonces el problema de optimización es del tipo del problema del cubrimiento máximo o del problema de la mochila, ya que hay que elegir los p puntos que más usuarios captan. Para dicho tipo de problemas existen multitud de estudios dedicados a procedimientos eficientes de solución.

Se usan las variables z_{ki} con el significado de que los usuarios situados en el k-ésimo punto acuden a la localización i-ésima que se incluye en el conjunto alternativo Y representado por el vector y. La condición que establece el valor de z_{ki} es: $z_{ki} \leq c_{ki}y_i$. Por tanto, el problema de la alternativa es:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} w_k z_{ki} & \\
\text{Sujeto a:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i = p & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} z_{ki} \leq 1 & \forall k = 1, ..., n. \\
& z_{ki} - c_{ki}y_i \leq 0 & \forall k = 1, ..., n; \forall i = 1, ..., m. \\
& y_i, z_{ki} \in \{0, 1\} & \forall k = 1, ..., n; \forall i = 1, ..., m.
\end{array}
\tag{P3}
$$

Finalmente, el problema de optimización de la propuesta de localización consiste en determinar las p ubicaciones X de forma que la mejor alternativa Y que se le puede proponer con el mismo número de puntos es preferida por el menor número de usuarios. El problema de optimización de la propuesta de ubicación es el siguiente:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n} w_k z_{ki}\right] x_i & \\
\text{Sujeto a:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i = p & \\
& z \text{ solución de } Usu(x, y) & \\
& y \text{ solución de } Alt(x) & \\
& x_i \in \{0, 1\} & \forall i = 1, ..., m.
\end{array}
\tag{P4}
$$

Sin embargo en este problema que corresponde al propuesto por Dobson y Karmarkar, no sólo la función objetivo no es lineal sino que las variables z_{ki} son distintas para cada y siendo no lineal la dependencia entre ellas.

La solución del problema del conjunto pCondorcet se puede obtener resolviendo el problema del conjunto pSimpson. La formulación del problema del conjunto pSimpson como un problema de programación matemática lineal entera se realiza en los términos usuales para los problemas de tipo *minimax*. El problema del conjunto pSimpson es el problema minimax

$$W^* = W^*(X^*) = \min_{|X|=p} W^*(X) = \min_{|X|=p} \max_{|Y|=p} W(Y \prec X).$$

Si la solución verifica $W^* \leq |U|/2$ entonces X^* es un conjunto pCondorcet; en caso contrario no existe ningún pCondorcet.

El problema del conjunto pSimpson se transforma en un problema con una función objetivo lineal a minimizar que es la cota superior de la función a maximizar. Se trata de dar la solución del problema en W y X:

$$W^* = \min\{W : W(Y \prec X) \leq W, \forall Y \text{ con } |Y| = |X| = p\}.$$

Este es un problema de programación matemática en las $m+1$ variables (W, X) y $\binom{m}{p} + 1$ restricciones expresado por:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & W \\ \text{sujeto a} & W(Y \prec X) \leq W, \quad \forall Y \text{ con } |Y| = p \\ & |X| = p. \end{array} \tag{P5}$$

Sería un problema lineal si, para cada Y, las restricciones $W(Y \prec X) \leq W$ fueran lineales en X.

El problema es análogo al problema $Alt(\overline{x})$ ya que ahora se trata de maximizar los usuarios que conserva X, para cada posible Y con p puntos, dados por $|U| - W(Y \prec X) = W(X \preccurlyeq Y)$. Para ello, para cada uno de los $\binom{m}{p}$ posibles elecciones de $\overline{y}$, se usan los conjuntos:

$$U(x_i \preccurlyeq \overline{y}) = \{u \in U : d(u, x_i) \leq d(u, \overline{y})\}.$$

Se definen los coeficientes:

$$c_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{si } d_{ki} \leq \min\{d_{kj} : \overline{y}_j = 1\} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se utilizan las variables z_{ki} para representar que los usuarios situados en el k-ésimo punto continuan acudiendo a la localización i-ésima del conjunto propuesto X. La restricción que garantiza esta condición es: $z_{ki} \leq c_{ki} x_i$. Por tanto, se trata de encontrar una solución común x de los problemas siguientes, para cada vector $\overline{y}$ con p unos que corresponden a los p puntos seleccionados

$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} w_k z_{ki} & \\
\text{Sujeto a:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i = p & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} z_{ki} \leq 1 & \forall k = 1,...,n. \\
& z_{ki} - c_{ki}\overline{y}_i \leq 0 & \forall k = 1,...,n; \forall i = 1,...,m. \\
& x_i, z_{ki} \in \{0,1\} & \forall k = 1,...,n; \forall i = 1,...,m.
\end{array} \tag{P6}
$$

Sin embargo, las variables z_{ki} pueden ser distintas. Se trata de $\binom{m}{p}$ problemas con $m(n+1)$ variables y $nm+n+1$ restricciones.

Por tanto, poniendo todos estos problemas en uno sólo se tiene un problema con n variables x_i más nm variables z_{ki} para cada $\overline{y}$. Denotando por un índice j que recorra el conjunto $J = \{1, 2, ..., \binom{m}{p}\}$ de todas las $\binom{m}{p}$ elecciones posibles para $\overline{y}$ el problema global es:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximizar} & w & \\
\text{Sujeto a:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i = p & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} w_k z_{ki}^j \geq w & \forall j \in J. \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} z_{ki}^j \leq 1 & \forall k = 1,...,n; \forall j \in J. \\
& z_{ki}^j - c_{ki}^j\overline{y}_i^j \leq 0 & \forall k = 1,...,n; \forall i = 1,...,m; \forall j \in J. \\
& x_i, z_{ki}^j \in \{0,1\}, w \geq 0 & \forall k = 1,...,n; \forall i = 1,...,m; \forall j \in J.
\end{array} \tag{P7}
$$

El número de variables de este problema es $\binom{m}{p}nm + m + 1$ y el de restricciones es $\binom{m}{p}(nm+n+1)+1$ lo que lo hace prácticamente inabordable con las técnicas estándares. La única forma de aprovechar esta línea es utilizar técnicas de generación de columnas y filas.

4.2.9. Procedimiento de solución

Para obtener el conjunto pCondorcet se propone un procedimiento para resolver el problema del conjunto pSimpson planteado como el problema minimax:

$$W^* = W^*(X^*) = \min_{|X|=p} W^*(X) = \min_{|X|=p} \max_{|Y|=p} W(Y \prec X).$$

Si $W^* \leq |U|/2$ entonces X^* es un pCondorcet.

Un candidato $X^* \in L^p$ es la solución al problema minimax si el problema de encontrar un conjunto X de p puntos tal que $W^*(X) < W^*(X^*)$ no tiene solución factible. Dada la cota W' del objetivo, el problema de encontrar un conjunto X tal que $W^*(X) < W'$ no tiene solución si no la tiene el de encontrar un conjunto X tal que

$$W(Y \prec X) < W', \forall Y \in F,$$

para alguna familia F de subconjuntos Y de L^p. Este es un problema del tipo del problema (P7):

$$\begin{array}{lll}
\text{Maximizar} & w & \\
\text{Sujeto a:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i = p & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} w_k z_{ki}^j - w \geq 0 & \forall j \in F. \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} z_{ki}^j \leq 1 & \forall k = 1, ..., n; \forall j \in F. \\
& z_{ki}^j - c_{ki}^j \overline{y}_i^j \leq 0 & \forall k = 1, ..., n; \forall i = 1, ..., m; \forall j \in F. \\
& x_i, z_{ki}^j \in \{0, 1\}, w \geq 0 & \forall k = 1, ..., n; \forall i = 1, ..., m; \forall j \in F.
\end{array} \tag{P8}$$

El número de variables de este problema es $|F|nm + m + 1$ y el de restricciones es $|F|(nm + n + 1) + 1$. Por tanto, la magnitud del problema depende fundamentalmente del tamaño de la familia F. El procedimiento de solución se basa en usar una familia F constituida por buenos candidatos que vayan proporcionando buenas soluciones que se van mejorando mientras sea posible.

La mejora en la eficiencia del procedimiento de solución se consigue si los conjuntos de la familia F constituyen una corta selección de buenos candidatos a solución del problema. Cada uno de ellos proporciona información importante para descartar otros candidatos. En particular:

- Cada conjunto X de p puntos da una cota superior de W^* dada por: $W^*(X)$ que se obtiene resolviendo $\max W(Y \prec X)$ como el problema lineal (P3).
- Cada conjunto Y de p puntos da una restricción para la solución óptima X^* dada por $W(Y \prec X^*) < W'$ siendo W' cualquier cota superior de W^*.

Por tanto, se trata de ir calculando la puntuación de Simpson $W^*(X) = \max W(Y \prec X)$ de buenos candidatos y mantener el mejor candidato X^*. Se van incorporando a la familia F los candidatos probados y eliminando de la relación de candidatos por probar los dominados por ellos. Para cada candidato seleccionado X se calcula $W^*(X) = \max W(Y \prec X)$ y se eliminan los Y tales que $W(X \prec Y) \geq W'$. Si para una familia F, la solución del problema (P8) no cumple: $W < W^*(X^*)$ entonces X^* es pSimpson. En otro caso, se obtiene un nuevo buen candidato que se incorpora a la familia F. Cada incorporación de un conjunto X^* a la familia F, supone añadir las nm variables y $nm + m + 1$ restricciones correspondientes a X^* al problema (P8).

Los pasos del algoritmo serían los siguientes:

Algoritmo pS

Paso 1 Inicializaciones

1.1. Sea C la lista de posibles candidatos formada inicialmente con todos los conjuntos de p puntos;

$$C = L^p = \{X : |X| = p\}.$$

1.2. Sea F la familia de candidatos selectos inicialmente vacía ; $F = \emptyset$.

1.3. Sea la primera cota del objetivo $W^* = |U|$.

1.4. Se elige un conjunto cualquiera X_1 como primer candidato.

1.5. Se toma $i = 0$.

Paso 2 Iteraciones.

Repetir

2.1. Hacer $i = i + 1$. Eliminar X_i de C e incorporarlo a F.

2.2. Se calcula la cota

$$W_i = W^*(X_i) = \max_{Y \in L^p} W(Y \prec X_i).$$

2.3. Si $W_i < W^*$ entonces se actualiza $W^* = W_i$ y $X^* = X_i$.

2.4. Se eliminan de C como candidatos los Y tales que $W(X_j \prec Y) \geq W^*$, para algún candidato X_j; $j = 1, ..., i$

2.5. Si C no está vacío tomar como nuevo candidato X_{i+1} el conjunto Y de C que haya alcanzado mayor valor en $W(Y \prec X_i)$.

Hasta que C esté vacío.

Nótese que la cota del paso 2.2. se calcula resolviendo el problema lineal (P3). En el paso 2.4, se introduce en (P8) la restricción $W(X_i \prec Y) < W^*$ al incorporar X_i a la familia F y, si se rebaja la cota W^* en el paso 2.3, se aprietan las restricciones $W(X_j \prec Y) < W^*$ ya introducidas para $j = 1, ..., i-1$. Por tanto, si en el paso 2.3 no se rebaja la cota ($W_i \geq W^*$) sólo se podrán eliminar de C como candidatos los X tales que $W(X_i \prec X) \geq W^*$. En el paso 2.4, se determinan los conjuntos a eliminar través del problema (P1). Finalmente, el nuevo candidato del paso 2.5. es la solución óptima del problema (P3).

Una mejora significativa de la eficiencia del procedimiento se consigue, además de seleccionando un buen primera candidato X_1 , si la cota $W_i = W^*(X_i)$ se calcula en dos fases para comprobar si $W_i \geq W^*$ mediante:

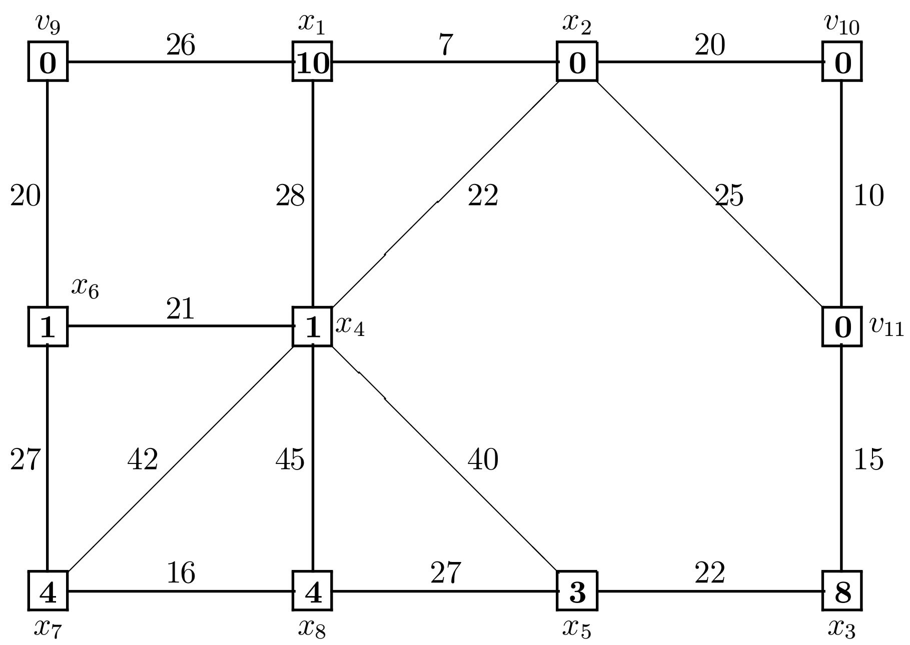
$$\begin{aligned} W_i^1 &= \max_{Y \in F \cup C} W(Y \prec X_i). \\ W_i^2 &= \max_{Y \notin F \cup C} W(Y \prec X_i). \end{aligned}$$

Ya que en caso de que $W_i^1 \geq W^*$ no es necesario calcular W_i^2.

Finalmente nótese que se puede introducir el parámetro α en la definición de los coeficientes c_{ij}^k y c_i^k, y el parámetro γ en lugar de $|U|/2$ en el procedimiento de solución.

4.2.10. Un ejemplo

Consideramos la ejecución de este algoritmo con el mismo caso planteado en el capítulo anterior representado en la siguiente figura.



El ejemplo

Los 31 usuarios están ubicados en los vertices y el número de usuarios en cada vértice viene dado por:

vértices:	v_1	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
número de usuarios:	10	8	1	3	1	4	4

Las posibles localizaciones son ocho vértices de la red $L = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ y existen 28 pares de localizaciones.

La ejecución del algoritmo, para establecer dos puntos de servicio ($p = 2$), con $\alpha = 0$ es la siguiente. En el paso 1, se comienza con los 28 conjuntos de 2 puntos como candidatos.

$$C = L^2 = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, ..., \{x_1, x_8\}, \{x_2, x_3\}, ..., \{x_7, x_8\}\}.$$

Además la familia de candidatos probados es vacía; $F = \emptyset$ y la primera cota es $W^* = 31$. Se elige como primer candidato a $X_1 = \{x_1, x_2\}$. Cómo ultima operación de incialización se toma $i = 0$.

La primera ejecución del paso 2 realiza la primera iteración en la que se toma $i = 1$ en el paso 2.1 eliminando X_1 de C e incorporándolo a F; $C = L^2 - \{X_1\}$ y $F = \{X_1\}$.

Las distancias de X_1 a los vértices con usuario son:

Vértices con usuario:	v_1	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Distancia a X_1:	0	40	22	62	43	64	67

De donde, para ejecutar el paso 2.2, se determina el número de ususarios que prefieren otro candidato $Y \in L^2$ de puntos dado por $W(Y \prec X_1)$ que se refleja en la tabla siguiente.

$Y:$	x_1, x_3	x_1, x_4	x_1, x_5	x_1, x_6	x_1, x_7	x_1, x_8	x_2, x_3	x_2, x_4	x_2, x_5
$W:$	15	13	19	13	12	11	15	13	19
$Y:$	x_2, x_6	x_2, x_7	x_2, x_8	x_3, x_4	x_3, x_5	x_3, x_6	x_3, x_7	x_3, x_8	x_4, x_5
$W:$	13	12	11	21	19	21	20	19	21
$Y:$	x_4, x_6	x_4, x_7	x_4, x_8	x_5, x_6	x_5, x_7	x_5, x_8	x_6, x_7	x_6, x_8	x_7, x_8
$W:$	13	13	13	21	20	19	13	13	12

Por tanto $W_1 = 21$ que se alcanza para $Y = \{x_3, x_4\}$, $Y = \{x_3, x_6\}$, $Y = \{x_4, x_5\}$, e $Y = \{x_5, x_6\}$.

En el paso 2.3 se actualiza $W^* = 21$ y $X^* = X_1 = \{x_1, x_2\}$.

Para ejecutar el paso 2.4 se determina el número de usuarios que prefieren X_1 a otro candidato $Y \in C$ que viene dado por $W(X_1 \prec Y)$ y se refleja en la tabla siguiente.

$Y:$	x_1, x_3	x_1, x_4	x_1, x_5	x_1, x_6	x_1, x_7	x_1, x_8	x_2, x_3	x_2, x_4	x_2, x_5
$W:$	6	8	2	8	9	9	10	10	10
$Y:$	x_2, x_6	x_2, x_7	x_2, x_8	x_3, x_4	x_3, x_5	x_3, x_6	x_3, x_7	x_3, x_8	x_4, x_5
$W:$	10	10	10	10	12	10	11	11	10
$Y:$	x_4, x_6	x_4, x_7	x_4, x_8	x_5, x_6	x_5, x_7	x_5, x_8	x_6, x_7	x_6, x_8	x_7, x_8
$W:$	18	18	18	10	11	11	18	18	19

Por tanto, no se elimina ningún candidato de C.

En el paso 2.5. se selecciona el nuevo candidato que es $X_2 = \{x_3, x_4\}$ ya que $W^*(X_1) = W(X_2 \prec X_1) = 21$.

La nueva iteración del paso 2 para $i = 2$, con $X_2 = \{x_3, x_4\}$, que se elimina de C y se incorpra a F Entonces el paso 2.2 se calculan los valores de $W(Y \prec X_2)$ para los conjuntos $Y \in L^2$ dados por:

$Y:$	x_1, x_2	x_1, x_3	x_1, x_4	x_1, x_5	x_1, x_6	x_1, x_7	x_1, x_8	x_2, x_3	x_2, x_4
$W:$	10	10	10	17	19	18	18	10	10
$Y:$	x_2, x_5	x_2, x_6	x_2, x_7	x_2, x_8	x_3, x_5	x_3, x_6	x_3, x_7	x_3, x_8	x_4, x_5
$W:$	17	19	18	18	7	9	8	8	7
$Y:$	x_4, x_6	x_4, x_7	x_4, x_8	x_5, x_6	x_5, x_7	x_5, x_8	x_6, x_7	x_6, x_8	x_7, x_8
$W:$	9	8	8	12	11	11	8	8	8

Por tanto $W_2 = 19$.

En el paso 2.3 se actualiza $W^* = 19$ y $X^* = X_2 = \{x_3, x_4\}$.

En el paso 2.4, al apretar la restricción $W(X_1 \prec Y) < 21$ hasta $W(X_1 \prec Y) < 19$ se elimina $\{x_7, x_8\}$ de C. Pero, además se introduce la restricción $W(X_2 \prec Y) < 19$ por lo que dado que, $W(X_2 \prec Y)$ para $Y \in C$ no es menor que 19 en los siguientes 5 conjuntos:

$Y =$	$\{x_5, x_6\}$	$\{x_5, x_7\}$	$\{x_5, x_8\}$	$\{x_6, x_7\}$	$\{x_6, x_8\}$
$W(X_2 \prec Y) =$	19	20	20	22	22

se eliminan de C que consta ya de 20 conjuntos.

El nuevo candidato seleccionado en 2.5. es $X_3 = \{x_1, x_6\}$ ya que $W^*(X_2) = W(X_3 \prec X_2) = 19$.

La nueva iteración del paso 2, para $i = 3$, se realiza con $X_3 = \{x_1, x_6\}$. Se elimina X_3 de C y se incorpora a F. Para los conjuntos $Y \in L^2$ se tiene $W_3 = 19$ y el paso 2.3. no modifica W^* ni X^*.

En el paso 2.4. se introduce la restricción $W(X_3 \prec Y) < 19$ pero las restricciones $W(X_1 \prec Y) < W^*$ y $W(X_2 \prec Y) < W^*$ no se alterán. Por tanto, sólo se eliminan de C los conjuntos Y tales que, $W(X_3 \prec Y) \geq 19$ que son los siguientes conjuntos:

$Y =$	$\{x_2, x_4\}$	$\{x_4, x_7\}$	$\{x_4, x_8\}$
$W(X_3 \prec Y) =$	19	19	19

En la cuarta iteración, el candidato elegido es $X_4 = \{x_2, x_7\}$. Aunque $W^*(X_4) = 21$, la cota se mantiene y los candidatos eliminados son: $\{x_3, x_5\}$ y $\{x_4, x_6\}$ ya que $W(X_4 \prec \{x_3, x_5\}) \geq 19$ y $W(X_4 \prec \{x_4, x_6\}) \geq 19$. Entonces ya quedan sólo 13 candidatos en C. Puesto que $W^*(X_4)$ se alcanza con $\{x_1, x_3\}$ el próximo candidato eliminado de C e incorporado a F es $X_5 = \{x_1, x_3\}$.

En la nueva ejecución del paso 2.2 obtenemos $W^*(X_5) = 13$, y el paso 2.3 actualiza $W^* = 13$ y $X^* = X_5 = \{x_1, x_3\}$. Los candidatos eliminados en el paso 2.4. son los siguientes. Los conjuntos $\{x_1, x_5\}$, $\{x_1, x_7\}$, $\{x_1, x_8\}$, $\{x_2, x_5\}$, $\{x_2, x_7\}$, $\{x_1, x_7\}$ y $\{x_2, x_8\}$ al apretar la restricción $W(X_2 \prec Y) < W^*$ hasta $W(X_2 \prec Y) < 13$. El conjunto $\{x_4, x_5\}$ al apretar la restricción $W(X_3 \prec Y) < W^*$ hasta $W(X_3 \prec Y) < 13$. Los conjuntos $\{x_1, x_4\}, \{x_3, x_6\}$ y $\{x_3, x_8\}$ al apretar la restricción $W(X_4 \prec Y) < W^*$ hasta $W(X_4 \prec Y) < 13$. Y finalmente, el candidato $\{x_2, x_6\}$ al introducir la restricción $W(X_5 \prec Y) < 13$. Entonces ya sólo quedan en C los candidatos $\{x_2, x_5\}$ y $\{x_3, x_7\}$.

El sexto candidato seleccionado es $X_6 = \{x_2, x_5\}$. Se calcula $W^*(X_6) = 19 > 13$, no se alteran W^* ni X^* y en el paso 2.4 se elimina el último candidato $\{x_3, x_7\}$ de C por lo que finaliza el algoritmo con $W^* = 13$ y $X^* = \{x_1, x_3\}$. Se obtiene así un conjunto pSimpson que, dado que $W^* = 13 < 31/2$, es tambiésn pCondorcet.

4.3. Lineas futuras de investigación.

Las nociones introducidas para la localización mediante votos en redes se pueden extender a otros contextos más generales. Por un lado se pueden considerar problemas de localización mediante votos en otro tipo de espacios, como puede ser el espacio euclídeo bidimensional o tridimensional aunque la distancia o norma puede ser más general. Por otro lado se pueden aplicar los conceptos obtenidos a otros campos como pueden ser la toma de decisiones en grupo o las decisiones multicriterio. Y finalmente se pueden utilizar otros sistemas de preferencias para los usuarios siendo la extensión más natural el uso de umbrales de indiferencia proporcionales.

4.3.1. Relación con las localizaciones eficientes.

En los problemas de localización mediante votos se pueden considerar los conceptos de eficiencia o eficiencia débil usuales en decisión multicriterio o decisión mediante grupo. Existen algunas relaciones entre los conceptos de solución considerados en la memoria y los conceptos de soluciones débilmente eficiente que pueden ser explotados. Los usuarios son entendidos como miembros de un grupo de decisores que deben adoptar una decisión colectiva sobre la localización del servicio. Las funciones de valor o de utilidad de cada usuario se obtienen como una función monótona de la distancia al punto de servicio más cercano, o la propia distancia.

Los conceptos de eficiencia y eficiencia débil en este contextos dan lugar a las siguientes definiciones.

Definición

Un punto de localización x es eficiente si y sólo si no existe ningún otro punto y tal que:

- $d(v(u), y) \leq d(v(u), x)$, *para cada* $u \in U$.
- $d(v(u), y) < d(v(u), x)$, *para algún* $u \in U$.

Definición

Un punto de localización x es débilmente eficiente si y sólo si no existe ningún otro punto y tal que:

$$d(v(u), y) < d(v(u), x), \forall u \in U.$$

De estos dos conceptos, el que se relaciona más directamente con la solución de Condorcet es la eficiencia débil. Si introducimos el umbral de indiferencia α en este concepto obtenemos la siguiente definición de αeficiencia débil, particularizando en un subconjunto de usuarios.

Definición

Un punto de localización x es αdébilmente eficiente para el subconjunto $I \subseteq U$ de usuarios si y sólo si no existe ningún otro punto y tal que:

$$d(v(u), y) + \alpha < d(v(u), x), \forall u \in I.$$

Si se denota por $\alpha WE(I)$ al conjunto de puntos αdébilmente eficientes para un subconjunto I se tiene la siguiente relación:

Proposición

Para valores fijos de α y γ se tiene

$$\alpha\gamma C = \bigcap_{|I|>\gamma|U|} \alpha WE(I).$$

Los resultados y procedimientos para la obtención de soluciones débilmente eficientes pueden ser aprovechados para la resolución de problemas del tipo del problema del punto $\alpha\gamma$Condorcet. Esto resultará especialmente útil en aquellos contextos en los que las soluciones débilmente eficientes tengan propiedades que faciliten su obtención, como ocurre con los espacios con ciertas propiedades de convexidad.

4.3.2. El método de decisión en grupo.

Los conceptos de solución introducidos en esta memoria pueden ser útiles a otros muchos procesos de decisión colectiva. En estos problemas la distancia de los usuarios juega el papel de función de utilidad de los decisores. Si se pueden obtener unas funciones de utilidad convenientemente normalizadas para cada uno de los usuarios los conceptos de solución tolerante de Condorcet o tolerante plural proporcionan herramientas para obtener soluciones de compromiso entre los decisores.

Sea X un conjunto de alternativas y sea $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_N(x))$ las funciones de valor normalizadas de los miembros de un grupo de decisión. Sea el problema

$$\max_{x\in X} f(x) = \max_{x\in X} (f_1(x), f_2(x), ..., f_N(x)).$$

Definición

Una alternativa $x \in X$ es una solución $\alpha\beta\gamma$Condorcet si y sólo si no hay ninguna alternativa $y \in X$ tal que:

$$|\{i : f_i(y) + \alpha < f_i(x)\}| + \beta|\{i : |f_i(y) - f_i(x)| < \alpha\}| > \gamma N.$$

Como caso más relevante se tiene la noción de solución αCondorcet cuando $\beta = 0$ y $\gamma = 1/2$. Si $C(\alpha)$ denota el conjunto de soluciones αCondorcet, se tiene la siguiente definición de solución Tolerante de Condorcet.

Definición

Una alternativa $x \in X$ es una solución Tolerante de Condorcet si y sólo si es una solición α^*Condorcet para el valor de α^* tal que

$$\alpha^* = \min\{\alpha : C(\alpha) \neq \emptyset\}.$$

4.3.3. Umbrales de indiferencia proporcionales.

Otra forma de introducir umbrales de indiferencia en el sistema de preferencia clásico es considerar umbrales proporcionales. Este concepto surge cuando el umbral que separa la indiferencia de la preferencia no se compara con la diferencia de las distancias sino con el cociente entre ellas. Si denotamos por ρ al umbral de indiferencia relativo ($\rho > 1$), las preferencias de cada usuario u vendrían dadas por:

- La localización x es preferida por u a la localización y si y sólo si

$$d(u, x) < \rho \cdot d(u, y).$$

Entonces, dos localizaciones x e y para el servicio son indiferentes para u si:

$$d(u, x) \geq \rho \cdot d(u, y) \text{ y } d(u, y) \geq \rho \cdot d(u, x).$$

Que también se puede expresar por:

$$x \prec_\rho y \Leftrightarrow d(v(u), x) < \rho \cdot d(v(u), y).$$

$$x \sim_\rho y \Leftrightarrow \rho^{-1} \geq \frac{d(v(u), x)}{d(v(u), y)} \geq \rho.$$

Para el caso discreto, no se producirían diferencias significativas, más que en cierta pérdida de simetría en las comparaciones, pero para el caso contínuo se pierde la linealidad lo que afectaría a los hiperplanos y paralelogramos del método de solución del problema Tolerante de Condorcet. Los conjuntos de dominancia estarían delimitados por funciones no lineales en el plano que representa los pares de puntos al comparar los segmentos.

APENDICE

En este apéndice se proporciona un programa TURBO PASCAL que permite experimentar con los problemas discretos de localización simple mediante votos. En primer lugar se incluyen unos procedimientos para facilitar la lectura de datos y la introducción por teclado de las opciones, así como para ofrecer información de las soluciones finales de los problemas y la información intermedia del proceso de cálculo durante la ejecución.

Los datos del problema a resolver vendrán proporcionados en un fichero que incluye la matriz con las distancias entre las localizaciones y los usuarios. Se incluye un procedimiento para generar problemas al azar. Estos problemas se obtienen, dado el número de localizaciones y el de usuarios, generando las correspondientes ubicaciones al azar e independientemente en un cuadrado con distribución uniforme. La matriz de distancias con la que trabajan los procedimientos de solución se calcula utilizando la llamada distancia rectilínea o de Manhattan que corresponde a la norma l_1. Estos casos constituyen un compromiso entre los problemas en el plano con distancia euclídea y los problemas en los vértices de una red. Se proporciona un procedimiento para mostrar por pantalla la ubicación de las localizaciones y los usuarios en el cuadrado.

Se incluyen los procedimientos que implementan los algoritmos para resolver los problemas de los puntos $\alpha\gamma$Condorcet, $\alpha\gamma$Plurales, αSimpson, de αSeguridad y los γTolerantes de Condorcet y Plurales. Mediante una serie de menús anidados se pueden modificar los valores de los parámetros α y γ para obtener todas las soluciones de estos problemas para un mismo caso.

También se aportan los procedimientos que permiten establecer las comparación entre estos problemas y los problemas estándares de localización simple de la mediana y el centro. Para ello los procedimientos permiten una vez encontradas las soluciones de alguno de estos problemas, determinar los valores que alcanzan en ellas las funciones objetivos de los problemas. Esto permite observar, la calidad de las soluciones de los problemas de localización mediante votos con el otro tipo de mayoría, así como con los criterios de los problemas de la mediana y del centro. De la misma forma se puede determinar la puntuación de Simpson y de seguridad de los centros y las medianas. Este tipo de análisis permite observar cómo la modificación de los parámetros α y γ permite mejorar la calidad de las soluciones aportadas por los métodos de localización mediante votos.

```
PROGRAM SINGLE_VOTING_LOCATION ;

   (*******************************************)
   (*      Programa para resolver problemas de    *)
   (*  Localizacion Simple Discreta Mediante Votos *)
   (*                                             *)
   (*  MAYORIA                                    *)
   (*    Absoluta: Puntos Condorcet/Simpson       *)
   (*    Simple:   Puntos Plurales/Seguridad      *)
   (*                                             *)
   (*  PARAMETROS                                 *)
   (*    Alfa  = Umbral de Indiferencia           *)
   (*    Gamma = Mayoria de rechazo               *)
   (*                                             *)
   (*    Valores por defecto:                     *)
   (*      (Puntos de Condorcet/Plurales)         *)
   (*         Alfa = 0                            *)
   (*         Gamma = 50% / 0%                    *)
   (*                                             *)
   (*    Alfa minima:  Tolerante Condorcet/Plural  *)
   (*    Gamma minima: Sipmson / Seguridad        *)
   (*                                             *)
   (*******************************************)

USES CRT ;

CONST MaxNumPto = 50 ;
(* Maximo Numero de Puntos de Localizacion y Puntos de Usuario *)

TYPE Puntos = Array[1..2] of Integer ;
     Vector = Array[1..MaxNumPto] of Integer ;
     Matriz = Array[1..MaxNumPto,1..MaxNumPto] of Integer ;
     Vector_de_Puntos = Array[1..MaxNumPto] of Puntos ;

VAR Opc       : Integer ;
    Mostrar   : Boolean ;
```

```
    Distancia : Matriz ;
    Limite    : Integer ;
    Num_Loc   : Integer ;
    Num_Usu   : Integer ;
    Mayoria   : Integer ;  (* Mayoria = 1  <==>  ABSOLUTA *)
                           (* Mayoria = 0  <==>  SIMPLE   *)
    Alfa      : Integer ;
    Gamma     : Integer ;

PROCEDURE LINEAS( n : Integer);
Var i : Integer ;
BEGIN
For i := 1 to n do
    Writeln ;
END ;

PROCEDURE ESPACIOS( n : Integer);
Var i : Integer ;
BEGIN
For i := 1 to n do
    Write(' ') ;
END ;

PROCEDURE ESCRIBE_VECTOR( V : Vector  ;
                          n : Integer ) ;
Var i : Integer ;
BEGIN
If n = 0 Then
   Write(' No hay elementos: VACIO ')
Else For i := 1 to n do
         Write(i,':',V[i],' ') ;
Writeln ;
END ;

PROCEDURE ESCRIBE_MATRIZ( Mat : Matriz ;
                          n,m : Integer ) ;
Var i,j : Integer ;
```

```
BEGIN
Write('   ');
For j := 1 to m do
    Write(j:3) ;
Writeln;
Write('   ');
For j := 1 to m do
    Write('---') ;
Writeln;
For i := 1 to n do
    Begin
    Write(i:2,'|') ;
    For j := 1 to m do
        Write(Mat[i,j]:3) ;
    Writeln ;
    End ;
END ;

PROCEDURE PIDE( Var Opc : Integer ) ;
BEGIN
Write('  Introduce la opcion deseada y pulsa [INTRO] ');
Readln(Opc) ;
END ;

PROCEDURE PASO ;
BEGIN
If Mostrar Then
   Begin
   Writeln ;
   Espacios(10) ;
   Write(' Pulsa [Intro] para continuar ..... ');
   Readln ;
   End ;
END ;

PROCEDURE LEE_PROBLEMA( Var Dist    : Matriz ;
                        Var Num_Loc : Integer ;
```

```
                        Var Num_Usu : Integer );
Var Nombre : String ;
    Fichero_Datos : Text ;
    i,j : Integer ;
BEGIN
ClrScr ;
Lineas(5) ;
Writeln('  Lectura del problema desde fichero.        ');
Lineas(2);
Writeln(' NOTAS:  ');
Writeln(' - El fichero tendra extension .dat    ');
Writeln(' - La Primera linea debe contener el numero de: ');
Writeln('     columnas (localizaciones), filas (usuarios)') ;
Writeln(' - Las siguientes lineas contendran las distancias. ');
Lineas(2) ;
Write(  '  Introduzca el nombre del fichero y pulse [INTRO]: ');
Readln(Nombre) ;
ClrScr ; Lineas(7) ;
Writeln(' Leyendo Problema del fichero ',Nombre,'.dat');
Assign(Fichero_Datos,Nombre+'.Dat') ;
Reset (Fichero_Datos) ;
Readln(Fichero_Datos,Num_Loc,Num_Usu) ;
For j := 1 to Num_Usu do
    Begin
    For i := 1 to Num_Loc do
        Read(Fichero_Datos,Dist[i][j]) ;
    Readln(Fichero_Datos) ;
    End ;
Close(Fichero_Datos);
Writeln(' Problema leido del fichero ',Nombre,'.dat');
Paso ;
ClrScr ;
Writeln(' Matriz de distancias del problema del fichero ',
          Nombre,'.dat');
Writeln(' Localizaciones en ',
          Num_loc,' filas y usuarios en ',
          Num_Usu,' columnas.');
```

```
Escribe_Matriz(Dist,Num_Loc,Num_Usu) ;
Paso ;
END ;

PROCEDURE GENERA_PUNTOS( Var X : Vector_de_Puntos ;
                              n : Integer ;
                         Limite : Integer ) ;
Var i : Integer ;
 (* Se eligen 'n' puntos al azar del cuadrado [1,Limite]**2 *)
BEGIN
For i := 1 to n do
    Begin
    X[i][1] := 1 + Random(Limite-1);
    X[i][2] := 1 + Random(Limite-1);
    End ;
Writeln('Vector de ',n,' Puntos. ');
For i := 1 to n do
    Writeln(i:3,':(',X[i][1]:3,',',X[i][2]:3,')') ;
Paso ;
END ;

PROCEDURE DIBUJA_PUNTOS( Loc, Usu        : Vector_de_Puntos ;
                         Num_Loc,Num_Usu : Integer ) ;
Var i,j : Integer ;
    Dibujo : Array[1..20,1..20] of char ;
BEGIN  (* Puntos en el cuadrado [1..20,1..20]  *)
ClrScr ;
Writeln('DIBUJO DE LOS USUARIOS (u) Y LOCALIZACIONES (o)');
LINEAS(2);
For i:= 1 to 20 do
    For j := 1 to 20 do
        Dibujo[i,j] := ' ' ;
For i := 1 to Num_Loc do
    Dibujo[Loc[i][1],Loc[i][2]] := 'o';
For i := 1 to Num_Usu do
    Dibujo[Usu[i][1],Usu[i][2]] := 'u';
For i:= 1 to 20 do
```

```
    Begin
    For j := 1 to 20 do
        Write(Dibujo[i,j]:3) ;
    Writeln ;
    End ;
Readln ;
END ;

PROCEDURE GENERA_PROBLEMA_AZAR( Var Dist    : Matriz  ;
                                    Num_Loc : Integer ;
                                    Num_Usu : Integer ;
                                    Limite  : Integer );
Var i,j      : Integer ;
    Loc, Usu : Vector_de_Puntos ;
BEGIN
GENERA_PUNTOS( Loc, Num_Loc, Limite ) ;
GENERA_PUNTOS( Usu, Num_Usu, Limite ) ;
(* Calcula las distancias rectilineas; Norma L1 *)
For i := 1 to Num_Loc do
    For j := 1 to Num_Usu do
        Dist[i,j] := ABS( Loc[i][1] - Usu[j][1] )
                   + ABS( Loc[i][2] - Usu[j][2] ) ;
If Limite <= 20
   Then Dibuja_Puntos(Loc,Usu,Num_Loc,Num_Usu)
   Else Writeln(' No se pueden dibujar los puntos');
Paso ;
END ;

PROCEDURE CARGA_PROBLEMA( Var Dist    : Matriz ;
                          Var Num_Loc : Integer ;
                          Var Num_Usu : Integer ) ;
Var Limite : Integer ;
BEGIN
ClrScr ;
Lineas(5) ;
Writeln('          CARGA DE PROBLEMA                     ');
Lineas(2);
```

```
Writeln('  (1) Lectura de Fichero                              ');
Writeln('  (2) Generacion al azar                              ');
Pide(Opc) ;
Case Opc of
1 : Lee_Problema(Distancia,Num_Loc,Num_Usu) ;
2 : Begin
    ClrScr ;
    Lineas(5) ;
    Writeln('      Generacićn al azar del Problema ');
    Lineas(2) ;
    Write(' Numero de Puntos de Localizacion = ');
    Readln(Num_Loc);
    Write(' Numero de Puntos de Usuario      = ');
    Readln(Num_Usu);
    Write(' Limite del cuadrado de trabajo   = ');
    Readln(Limite);
    Genera_Problema_Azar(Dist,Num_Loc,Num_Usu,Limite) ;
    Writeln(' Matriz de Distancias ');
    Escribe_Matriz(Dist,Num_Loc,Num_Usu) ;
    Paso ;
    End ; (* Opc = 2 *)
Else Writeln(' Opcion no permitida ') ;
End ; (* Case *)
END ;

FUNCTION MINIMO_VECTOR( V : Vector  ;
                        n : Integer ) : Integer ;
Var Min,i : Integer ;
BEGIN
Min := MaxInt ;
For i := 1 to n do
    If V[i] < Min
    Then Min := V[i] ;
Minimo_Vector := Min ;
END ;
```

```
PROCEDURE PREFERENCIAS( Var Pref    : Matriz ;
                            Dist    : Matriz ;
                            Num_Loc : Integer ;
                            Num_Usu : Integer ;
                            Alfa    : Integer ) ;
Var i,j,k : Integer ;

BEGIN       (* Calcula la matriz del numero de ALFA-preferidos *)
(* P[i,j] es el numero de usuarios que ALFA-prefieren 'i' a 'j' *)
For i := 1 to Num_Loc do
    For j := 1 to Num_Loc do
        Begin
        Pref[i,j] := 0 ;
        For k := 1 to Num_Usu do
            If Dist[i,k] < Dist[j,k] - Alfa
            Then Pref[i,j] := Pref[i,j] + 1 ;
        End ;
Lineas(2) ;
Writeln(' MATRIZ de Alfa-Preferidos con Alfa = ',Alfa);
Escribe_Matriz(Pref,Num_Loc,Num_Loc) ;
Paso ;
END ;

PROCEDURE PUNTUA_SIMPSON( Var Punt : Vector ;
                              Alfa : Integer ;
                              Dist : Matriz ;
                              Num_Loc : Integer ;
                              Num_Usu : Integer ) ;
Var i,j : Integer ;
    Pref : Matriz ;
      (* Para cada ''j'', calcula el mayor numero usuarios *)
      (* que Alfa-prefieren a otra localizacion ''i''      *)
      (* R[j] = max_i Pref[i,j]                           *)
BEGIN
Preferencias(Pref,Dist,Num_Loc,Num_Usu,Alfa) ;
For j := 1 to Num_Loc
do Begin
```

```
   Punt[j] := 0 ;
   For i := 1 to Num_Loc do
       If Pref[i,j] > Punt[j]
       Then Punt[j] := Pref[i,j]
   End ;
Lineas(2) ;
Writeln(' Puntuacion de Simpson para Alfa = ',Alfa);
Escribe_Vector(Punt,Num_Loc) ;
Paso ;
END ;

PROCEDURE PUNTUA_SEGURIDAD( Var Punt : Vector ;
                                Alfa : Integer ;
                                Dist : Matriz ;
                                Num_Loc : Integer ;
                                Num_Usu : Integer ) ;
    (* Para cada ''j'', calcula la mayor diferencia entre *)
    (* el numero usuarios que prefieren ''j'' a ''i'' menos *)
    (* los que prefieren ''i'' a ''j''                     *)
    (* S[j] = max_i P[i,j]-P[j,i]                       *)
Var i,j : Integer ;
    Pref : Matriz ;
BEGIN
Preferencias(Pref,Dist,Num_Loc,Num_Usu,Alfa) ;
For j := 1 to Num_Loc do
    Begin
    Punt[j] := - MaxInt ;
    For i := 1 to Num_Loc do
        If i <> j Then
        If Pref[i,j]-Pref[j,i] > Punt[j]
           Then Punt[j] := Pref[i,j]-Pref[j,i]
   End ;
Lineas(2) ;
Writeln(' Puntuacion de Seguridad para Alfa = ',Alfa);
Escribe_Vector(Punt,Num_Loc) ;
Paso ;
END ;
```

```
PROCEDURE PUNTUA_MEDIANAS( Var F       : Vector ;
                               Dist    : Matriz  ;
                               Num_Loc : Integer ;
                               Num_Us  : Integer ) ;
Var Sum : LongInt ;
    j,k : Integer ;

BEGIN (* Calcula la funcion mediana *)
For j := 1 to Num_Loc do
    Begin
    Sum := 0 ;
    For k := 1 to Num_Usu do
        Sum := Sum + Dist[j,k] ;
    F[j] := Sum ;
    End ;
Lineas(2) ;
Writeln(' Funcion Medianas (distancia media) ');
Escribe_Vector(F,Num_Loc) ;
Paso ;
END ;

PROCEDURE PUNTUA_CENTROS( Var G       : Vector ;
                              Dist    : Matriz  ;
                              Num_Loc : Integer ;
                              Num_Usu : Integer ) ;
Var Max : Integer ;
    j,k : Integer ;
BEGIN (* Calcula la funcion centro *)
For j := 1 to Num_Loc do
    Begin
    Max := 0 ;
    For k := 1 to Num_Usu do
        If Dist[j,k] > Max Then
           Max := Dist[j,k];
    G[j] := Max ;
    End ;
```

```
Lineas(2) ;
Writeln(' Funcion Centros ');
Escribe_Vector(G,Num_Loc) ;
Paso ;
END ;

PROCEDURE MEDIANAS( Var F       : Vector ;
                    Var Med     : Vector  ;
                    Var NumMed  : Integer ;
                        Dist    : Matriz  ;
                        Num_Loc : Integer ;
                        Num_Usu : Integer ) ;
Var BestF : LongInt ;
    j : Integer ;
BEGIN (* Calcula la funcion mediana *)
Puntua_Medianas(F,Dist,Num_Loc,Num_Usu) ;
BestF := Minimo_Vector(F,Num_Loc) ;
NumMed := 0 ;
For j := 1 to Num_Loc do
    If F[j] = BestF Then
       Begin
       NumMed := NumMed + 1 ;
       Med[NumMed] := j ;
       End ;
Lineas(2) ;
Writeln(' Medianas ');
Escribe_Vector(Med,NumMed) ;
Paso ;
END ;

PROCEDURE CENTROS( Var G       : Vector ;
                   Var Cent    : Vector  ;
                   Var NumCent : Integer ;
                       Dist    : Matriz  ;
                       Num_Loc : Integer ;
                       Num_Usu : Integer ) ;
Var BestG : LongInt ;
```

```
    j : Integer ;
BEGIN (* Calcula los centros *)
Puntua_Centros(G,Dist,Num_Loc,Num_Usu) ;
BestG := Minimo_Vector(G,Num_Loc) ;
NumCent := 0 ;
For j := 1 to Num_Loc
do If G[j] = BestG
   Then Begin
        NumCent := NumCent + 1 ;
        Cent[NumCent] := j ;
        End ;
Lineas(2) ;
Writeln(' Centros ');
Escribe_Vector(Cent,NumCent) ;
Paso ;
END ;

PROCEDURE CONDORCET( Var Cond    : Vector ;
                     Var NumCond : Integer ;
                         Dist    : Matriz ;
                         Num_Loc : Integer ;
                         Num_Usu : Integer ;
                         Alfa    : Integer ;
                         Gamma   : Integer ) ;
Var Pref : Matriz ;
    Punt : Vector ;
    j : Integer ;
BEGIN
ClrScr ; Espacios(20);
Writeln(' Problema de Condorcet con Alfa = ',Alfa);
Puntua_Simpson(Punt,Alfa,Dist,Num_Loc,Num_Usu) ;
NumCond := 0 ;
For j := 1 to Num_Loc
do If Punt[j] <= Gamma
   Then Begin
        NumCond := NumCond + 1 ;
        Cond[NumCond] := j ;
```

```
        End ;
Lineas(2) ;
Writeln(' Solucion del problema de Condorcet para Alfa = ',
          Alfa,' y Gamma = ',Gamma);
Escribe_Vector(Cond,NumCond) ;
Paso ;
END ;

PROCEDURE SIMPSON( Var Punt      : Vector ;
                   Var Simp      : Vector ;
                   Var NumSimp   : Integer ;
                       Dist      : Matriz ;
                       Num_Loc   : Integer ;
                       Num_Usu   : Integer ;
                       Alfa      : Integer ;
                   Var GammaStar: Integer ) ;
Var Pref : Matriz ;
    j : Integer ;
BEGIN
ClrScr ; Espacios(20);
Writeln(' Problema de Simpson ');
Puntua_Simpson(Punt,Alfa,Dist,Num_Loc,Num_Usu) ;
GammaStar := Minimo_Vector(Punt,Num_Loc) ;
NumSimp := 0 ;
For j := 1 to Num_Loc
do If Punt[j] = GammaStar
   Then Begin
        NumSimp := NumSimp + 1 ;
        Simp[NumSimp] := j ;
        End ;
Lineas(2) ;
Writeln(' Solucion de Simpson con Mayoria de rechazo ',
          GammaStar,' para Alfa = ',Alfa);
Escribe_Vector(Simp,NumSimp) ;
Paso ;
END ;
```

```
PROCEDURE PLURALES( Var Plur    : Vector ;
                    Var NumPlur : Integer ;
                        Dist    : Matriz ;
                        Num_Loc : Integer ;
                        Num_Usu : Integer ;
                        Alfa    : Integer ;
                        Gamma   : Integer ) ;
Var Pref : Matriz ;
    j : Integer ;
    Punt : Vector ;
BEGIN
ClrScr ; Espacios(20);
Writeln(' Problema de Soluciones Plurales ');
Puntua_Seguridad(Punt,Alfa,Dist,Num_Loc,Num_Usu) ;
NumPlur := 0 ;
For j := 1 to Num_Loc
do If Punt[j] <= 0
   Then Begin
        NumPLur := NumPlur + 1 ;
        Plur[NumPlur] := j ;
        End ;
Lineas(2) ;
Writeln(' Soluciones Plurales para Alfa = ',Alfa);
Escribe_Vector(Plur,NumPlur) ;
Paso ;
END ;

PROCEDURE SEGURIDAD( Var Segur     : Vector ;
                     Var NumSeg    : Integer ;
                         Dist      : Matriz ;
                         Num_Loc   : Integer ;
                         Num_Usu   : Integer ;
                         Alfa      : Integer ;
                     Var GammaStar : Integer ) ;
Var Pref : Matriz ;
    j : Integer ;
    Punt : Vector ;
```

```
BEGIN
ClrScr ; Espacios(20);
Writeln(' Problema de Soluciones Seguridad ');
Puntua_Seguridad(Punt,Alfa,Dist,Num_Loc,Num_Usu) ;
GammaStar := Minimo_Vector(Punt,Num_Loc) ;
NumSeg := 0 ;
For j := 1 to Num_Loc
do If Punt[j] = GammaStar
   Then Begin
        NumSeg := NumSeg + 1 ;
        Segur[NumSeg] := j ;
        End ;
Lineas(2) ;
Writeln(' Soluciones de Seguridad para Alfa = ',Alfa);
Escribe_Vector(Segur,NumSeg) ;
Paso ;
END ;

PROCEDURE TOLERANTE( Var Tol       : Vector ;
                     Var NumTol    : Integer ;
                         Distancia : Matriz ;
                         Num_Loc   : Integer ;
                         Num_Usu   : Integer ;
                         Mayoria : Integer ;
                     Var AlfaStar : Integer ;
                         Gamma   : Integer ) ;
Var Alfa,Alfa0,Alfa1 : Integer ;
    Sol : Vector ;
    NumSol : Integer ;
    G : Vector ;
    Cent : Vector ;
    NumCent : Integer ;
BEGIN (* TOLERANTE CONDORCET *)
ClrScr ; Espacios(20);
Writeln(' Problema de Tolerante de Condorcet/Plural ');
Paso ;
Alfa0 := 0 ;
```

```
Centros(G,Cent,NumCent,Distancia,Num_Loc,Num_Usu) ;
Tol := Cent ;
NumTol := NumCent ;
Alfa1 := G[Cent[1]] ;
Repeat
  Alfa := (Alfa0 + Alfa1) div 2 ;
  ClrSCr ;
  Espacios(10);
  Write(' Problema de Tolerante de Condorcet/Plural ');
  Writeln(' con mayoria: gamma = ',Gamma);
  Lineas(10);
  Writeln(' Busca AlfaStar entre ',Alfa0,' y ',Alfa1);
  Lineas(2);
  Writeln(' resolviendo Condorcet/Plurales con alfa = ',alfa) ;
  Paso ;
  If Mayoria = 1
     Then
       Condorcet(Sol,NumSol,Distancia,Num_Loc,Num_Usu,Alfa,Gamma)
     Else
       Plurales (Sol,NumSol,Distancia,Num_Loc,Num_Usu,Alfa,Gamma);
  If NumSol = 0
  Then Alfa0 := Alfa
  Else Begin
       Alfa1 := Alfa ;
       Tol := Sol ;
       NumTol := NumSol ;
       End ;
  Paso ;
Until Alfa1 - Alfa0 = 1 ;
AlfaStar := Alfa1 ;
ClrScr ;  Lineas(10) ;
Writeln(' Solucion Tolerante con Umbral ',AlfaStar);
Escribe_Vector(Tol,NumTol) ;
Paso ;
END ;
```

```
PROCEDURE MODIFICA_PARAMETROS( Var Mayoria : Integer ;
                               Var Alfa : Integer ;
                               Var Gamma: Integer ) ;
VAR Opc : Integer ;
BEGIN
ClrScr ; Lineas(2) ; Espacios(15) ;
Write('  MODIFICACION PARAMETROS                          ');
Lineas(2) ; Espacios(40) ;
Write('  VALOR ACTUAL     VALOR POR DEFECTO') ;
Lineas(2) ;
Write('  (1) Umbral de Indiferencia   (alfa):       ',Alfa:3) ;
Espacios(15); Writeln(' 0 ');
Write('  (2) Mayoria de Rechazo     (gamma):       ',Gamma:3) ;
          Espacios(15); Writeln((Num_Usu + 1)div 2:3);
Write('  (3) Tipo de Mayoria (Absoluta/Simple): ') ;
If Mayoria = 1
   Then Write('  Absoluta ')
   Else Write('  Simple   ') ;
Writeln('        Absoluta ') ;
lineas(1) ;
Writeln('      NOTA: ');
Espacios(15);
Writeln('  Mayoria Absoluta == (Condorcet / Simpson  )') ;
Espacios(15);
Writeln('  Mayoria Simple   == (Plurales  / Seguridad)') ;
Lineas(2) ;
Pide(Opc) ;
Case Opc of
1: Begin
   lineas(2) ;
   Writeln(' MODIFICACION del Umbral de Indiferencia (Alfa) ') ;
   Write('        Introducir el nuevo valor: ') ;
   Readln(Alfa) ;
   End;
2: Begin
   lineas(2) ;
   Writeln(' MODIFICACION de la Mayoria de Rechazo (Gamma) ') ;
```

```
   Writeln('        ( El numero de usuarios es ',Num_Usu,' )');
   Write('       Introducir el nuevo valor: ') ;
   Readln(Gamma) ;
   End ;
3: Begin
   lineas(2) ;
   Writeln('  MODIFICACION DEL TIPO DE MAYORIA: ');
   Writeln('    (1) MAYORIA ABSOLUTA. (Condorcet/Simpson) ');
   Writeln('    (2) MAYORIA SIMPLE.   (Soluciones Plurales)');
   lineas(2);
   Pide(Mayoria)
   End ;
Else Begin
     Writeln(' Opcion no permitida. Parametros inalterados. ' );
     Paso ;
     End ;
End ; (* Case *)
END ;


PROCEDURE CARGA_PARAMETROS( Var Mayoria : Integer ;
                            Var Alfa    : Integer ;
                            Var Gamma   : Integer ) ;
VAR Opc : Integer ;
BEGIN
Mayoria := 1 ;
Alfa := 0;
Gamma := (Num_Usu+1) div 2 ;
Repeat
   ClrScr ; Lineas(3); Espacios(15) ;
   Writeln('  PARAMETROS DEL PROBLEMA   ');
   Lineas(2);
   Espacios(35) ; Write(' VALOR ACTUAL');
   Espacios(5) ; Writeln('VALOR POR DEFECTO') ;
   Writeln ;
   Write(' Tipo de Mayoria (Absoluta/Simple): ') ;
   If Mayoria = 1
```

```
      Then Write(' Absoluta ')
      Else Write(' Simple   ') ;
   Espacios(10) ;
   Writeln(' Absoluta ') ;
   Write(' Umbral de Indiferencia (alfa):       ',Alfa:3) ;
   Espacios(20); Writeln('  0 ');
   Write(' Mayoria  de  Rechazo  (gamma):       ',Gamma:3) ;
   Espacios(20); Writeln((Num_Usu + 1)div 2:3);
   Lineas(2);
   Espacios(15) ;Writeln('  (1) Modificar Parametros ');
   Espacios(15) ;Writeln('  (0) Resolver el Problema ');
   Lineas(2);
   Pide(Opc) ;
   If Opc = 1 Then
      Modifica_Parametros(Mayoria,Alfa,Gamma) ;
Until Opc = 0 ;
END ;

PROCEDURE ANALISIS_SOLUCION( Sol     : Vector ;
                             NumSol  : Integer ;
                             Dist    : Matriz ;
                             Num_Loc : Integer ;
                             Num_Usu : Integer ;
                             Alfa    : Integer ;
                             Gamma   : Integer ) ;
VAR i,x     : Integer ;
    F,G,S,P : Vector ;
    OptF,OptG,OptS,OptP : Integer ;
BEGIN
Puntua_Medianas(F,Dist,Num_Loc,Num_Usu) ;
Puntua_Centros(G,Dist,Num_Loc,Num_Usu) ;
Puntua_Simpson(S,Alfa,Dist,Num_Loc,Num_Usu) ;
Puntua_Seguridad(P,Alfa,Dist,Num_Loc,Num_Usu) ;

Lineas(2);
Writeln(' VALOR DE LAS DIFERENTES FUNCIONES OBJETIVO ');
Writeln ;
```

```
Writeln('  Punto  Mediana    Centro   Simpson    Plurales ');
For i := 1 to NumSol do
    Begin
    x := Sol[i] ;
    Writeln(x:5,F[x]:10,G[x]:10,S[x]:10,P[x]:10);
    End ;
Writeln;
OptF := Minimo_Vector(F,Num_Loc) ;
OptF := Minimo_Vector(G,Num_Loc) ;
OptF := Minimo_Vector(S,Num_Loc) ;
OptF := Minimo_Vector(P,Num_Loc) ;
Writeln(' OPT ',OptF:10,OptG:10,OptS:10,OptP:10) ;
Paso ;
END ;

PROCEDURE RESUELVE_PROBLEMA( Dist    : Matriz ;
                             Num_Loc : Integer ;
                             Num_Usu : Integer ;
                             Mayoria : Integer ;
                             Alfa    : Integer ;
                             Gamma   : Integer ) ;
Var Opc : Integer ;
    Sol : Vector ;
    Num_Sol : Integer ;
    Obj : Vector ;
BEGIN
Repeat
   ClrScr ; Lineas(2) ; Espacios(15) ;
   Writeln(' Eleccion del problema a resolver. ') ;
   Lineas(2) ;
   Writeln('  (1) Condorcet / Plurales               ');
   Writeln('  (2) Simpson / Seguridad                ');
   Writeln('  (3) Tolerantes (Condorcet / Plurales)  ');
   Writeln('                                         ');
   Writeln('  (0) SALIR                              ');
   Writeln('                                         ');
   Pide(Opc) ;
```

```
   Case Opc of
   1 : If Mayoria = 1
       Then CONDORCET(Sol,Num_Sol,
            Dist, Num_Loc, Num_Usu, Alfa, Gamma  )
       Else PLURALES(Sol,Num_Sol,
            Dist, Num_Loc, Num_Usu, Alfa, Gamma  );
   2 : If Mayoria = 1
       Then SIMPSON(Obj,Sol,Num_Sol,
            Dist, Num_Loc, Num_Usu, Alfa,Gamma)
       Else SEGURIDAD(Sol,Num_Sol,
            Dist, Num_Loc, Num_Usu, Alfa, Gamma  ) ;
   3 : TOLERANTE(Sol,Num_Sol,
            Dist, Num_Loc, Num_Usu, Mayoria, Alfa,Gamma) ;
   0 : Writeln(' Saliendo ......  ');
   Else Writeln(' Opcion NO permitida ');
   End ; (* Case *)
   If Opc <> 0
   Then Begin
        Lineas(2) ; Espacios(15) ;
        Writeln('  (1) ANALISIS DE LA SOLUCION ');
        Espacios(15) ;
        Writeln('  (2) OTRO PROBLEMA           ');
        Lineas(2) ;
        Espacios(15) ;
        Writeln('  (0) SALIR       ');
        Lineas(2) ;
        Pide(Opc) ;
        If Opc = 1 Then
           Analisis_Solucion( Sol, Num_Sol,
                              Dist, Num_Loc, Num_Usu,
                              Alfa, Gamma);
        End ;
   Paso ;
Until Opc = 0 ;
END ;
```

```
BEGIN (* PROGRAMA PRINCIPAL *)
Mostrar := True ;
ClrScr ; Lineas(5) ;
Writeln('  LOCALIZACION SIMPLE DISCRETA MEDIANTE VOTOS   ');
Writeln('   Universidad de La Laguna, Octubre de 2000    ');
Lineas(10);
Paso ;
Repeat
   ClrScr ;
   Lineas(10);
   Writeln('         Resolucion de un problema de       ');
   Writeln(' localizacion simple discreta mediante votos') ;
   Lineas(5) ;
   Writeln('   Quiere ver la ejecucion paso a paso? ');
   Writeln('         ( 1 = SI ) ( 0 = NO )          ');
   Lineas(2) ;
   Pide(Opc);
   If Opc = 1 Then Mostrar := True
              Else Mostrar := False ;
   If Opc = 1 Then
      Writeln('Muestra resultados parciales con interrupcion');
   Paso ;
   Carga_Problema(Distancia,Num_Loc,Num_Usu);
   Carga_Parametros(Mayoria,Alfa,Gamma);
   Resuelve_Problema(Distancia,Num_Loc,Num_Usu,
                     Mayoria,Alfa,Gamma);
   ClrScr ; Lineas(15);
   Writeln(' Quiere resolver otro problema? ');
   Writeln('    ( 1 = SI )   ( 0 = NO )     ');
   Pide(Opc) ;
Until Opc = 0 ;
ClrScr ; Lineas(5) ;
Writeln('   Fin de la ejecucion. Pulse [INTRO]    ');
Readln ;
END.
```

BIBLIOGRAFIA

[**1**] C. Bana e Costa y J. C. Vansnick (1994), Macbeth-an interactive path towards the construction of cardinal value functions. *International Transactions in Operational Research* 1, n. 4, 489-500.

[**2**] H.J. Bandelt (1985), Networks with Condorcet solutions. *European Journal of Operational Research* 20, 314-326.

[**3**] H.J. Bandelt y M. Labbé (1986), How bad can a voting location be. *Social Choice and Welfare* 3, 125-145.

[**4**] A. Bauer y W. Domschke (1993), Competitive location on a network. *European Journal of Operational Research* 66, 372-391.

[**5**] C. Campos y J.A. Moreno (2000a), The Tolerant Condorcet point. *Studies on Location Analysis.* 14, 173-190.

[**6**] C. Campos y J.A. Moreno (2000b), Comparison of αCondorcet points with median and center location. *Top*, accepted.

[**7**] C. Campos y J.A. Moreno (2000c), Relaxation of the Condorcet conditions in voting location. *EJOR*, submitted.

[**8**] E. Carrizosa, E. Conde, M.Muñoz-Márquez, J. Puerto (1994), Simpson points in planar problems with locational constraints. The polyhedral-gauge case. *Publicaciones de la facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla.*

[**9**] E. Carrizosa, E. Conde, M.Muñoz-Márquez, J. Puerto (1994), Simpson points in planar problems with locational constraints. The round-norm case. *Publicaciones de la facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla.*

[**10**] E. Carrizosa, E. Conde, M.Muñoz-Márquez, J. Puerto (1994), Condorcet points with the Manhattan metric. *Publicaciones de la facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla.*

[**11**] G. Demange (1982), A Limit Theorem on the Minmax Set. *Journal of Mathematical Economics,* 9, 145-164.

[**12**] G. Demange (1983), Spatial Models of Collective Choice. *Locational Analysis of Public Facilities..* Ed. J. F. Thisse y H. G. Zoller. North-Holland..

[**13**] E. W. Dijkstra (1959) A note on two problems in conexion with graphs. *Numerical Math* 1, 269-271.

[**14**] G. Dobson y U. Karmarkar (1987), Competitive Location on a Network.*Operations Research,* 35,n. 4, 565-574.

[**15**] Z. Drezner (1982), Competitive Location Strategies for Two Facilities.*Regional Science and Urban Economics,* 12, 485-493.

[**16**] R. Durier (1989), Continuous Location Theory Under Majority Rule. *Mathematics of Operations Research,* 14, 258-274.

[**17**] A. J. Goldman y C. J. Witzgall (1970), A location theorem for optimal facility placement. *Transportation Science* 4, 406-409.

[**18**] A. J. Goldman (1971), Optimal center location in simple networks. *Transportation Science* 5, 212-221.

[**19**] S. L. Hakimi (1964) Optimal Location of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph. Operations Research, 12, 450-459.

[**20**] S. L. Hakimi (1983), On location new facilities in a competitive environment. *European Journal of Operational Research* 12, 29-35.

[**21**] S. L. Hakimi (1990), Locations with Spatial Interactions: Competitive Locations and Games. *Discrete location theory.* Ed. P. Mirchandani y R. Francis. Wiley.

[**22**] J. Halpern (1978), Finding minimal center-median convex combination (cent-dian) of a graph. *Management Science,* 24, 534-544.

[**23**] G. Handler (1973) Minimax Location of a Facility in an Undirected Tree Graph. *Transportation Science,* 7, 287-293.

[**24**] G. Handler y P. B. Mirchandani (1979) Location on Networks: Theory and Algorithms, . *The MIT Press , Cambridge M:A.*

[**25**] P. Hansen y M. Labbé (1988), Algorithms for Voting and Competitive Location on a Network. *Transportation Science*, 22, n. 4, 278-288.

[**26**] P. Hansen y J.-F. Thisse (1981), Outcomes of voting and planning. *Journal of Public Economics* 16, 1-15.

[**27**] P. Hansen, J. F. Thisse y R. Wendell (1986), Equivalence of solutions to network location problems. *Mathematics of Operations Research* 11, n. 4, 672-678.

[**28**] P. Hansen, J. F. Thisse y R. Wendell (1990), Equilibrium analysis for voting and competitive location problems. *Discrete location theory.* Ed. P. Mirchandani y R. Francis. Wiley.

[**29**] J.E. Hopcroft y R.M. Karp (1973), An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matching in bipartite graphs. *SIAM J. Computer* 2, 225-231.

[**30**] J. S. Kelly (1988), Social Choice Theory. *Springer-Verlag.*

[**31**] G. H. Kramer (1977), A Dynamical Model of Political Equilibrium. *Journal of Economic Theory,* 16, 310-334.

[**32**] M. Labbé (1982), Equilibre de Condorcet pour le probleme de localisation d'une installation polluante. *Cahiers du C.E.R.O.* 24, n. 2,3 y 4, 305-312.

[**33**] M. Labbé (1983), Solution de Condorcet et mediane dans les reseaux simples. *Cahiers du C.E.R.O.* 25, n. 3 y 4, 217-229.

[**34**] M. Labbé (1985), Outcomes of voting and planning in single facility location problems. *European Journal of Operational Research* 20, 299-313.

[**35**] M. Labbé (1990), Location of an obnoxious facility on a network: a voting approach. *Networks* 20, 197-207.

[**36**] Michelot (1986) Un algorithme pour résoudre una famille de problemes de localisation multisources. *Modelisation mathematique et analyse numerique,* 20, 341-353.

[**37**] E. Minieka (1970), The m-center problem. *SIAM Rewiew* 12, 138-139.

[**38**] E. Minieka (1981), A polynomial tiem algorithm for finding the absolute center of a network. *Networks* 11, 351-355.

[**39**] R. D. McKelvey y R. E. Wendell (1976), Voting Equilibria in Multidimensional Choice Spaces. *Mathematics of Operations Research,* 1, 144-158.

[**40**] J.A. Moreno Pérez (1985), A Correction to the definition of Local Center. *EJOR,* 20, 382-385.

[**41**] H. Moulin (1988), Axioms of cooperative decision making. *Cambridge University Press.*

[**42**] G. Owen y L. S. Shapley (1989) Optimal Location of Candidates in Ideological Space. *International Journal of Game Theory,* 18, 339-356.

[**43**] G. Owen (1995), Game theory. *Academic Press.*

[**44**] D. Pérez Brito, J. A. Moreno Pérez, e I. Rodríguez Martín (1997), Finite Dominating Sets for Network Location Problems. *Operation Research,* 39, 100-118.

[**45**] M. Pirlot y Ph. Vincke (1997), Semiorders. Properties, Representations, Applications. *Kluwer Ac. Press.*

[**46**] F. Plastria (1995), Continuous location problems. *Facility Location. A survey of Applications and Methods,* 225-262. Ed. Drezner. *Springer.*

[**47**] C. R. Plott (1967), A Notion of Equilibrium and Its Possibility Under Majority Rule. *American Economic Review,* 57, 787-806.

[**48**] B. Roy y D. Bouyssou (1993), Aide Multicritère à la Décision: Méthodes et cas. *Economica.*

[**49**] G. Rushton, S. McLafferty y A. Ghosh (1981), Equilibrium locations for public services: individual preferences and social choice. *Geographical Analysis,* 13, 196-202.

[**50**] P. Simpson (1969), On defining areas of voter choice: Professor Tulloock on stable voting. *Quarterly Journal of Economics*, 83, 478-490.

[**51**] C. A. Tovey (1992), A Polynomial-time Algorithm for Computing the Yolk in Fixed Dimensions. *Mathematical Programming,* 57, 259-277.

[**52**] R. V. Vohra.(1989), Distance weighted voting and a single facility location problem. *European Journal of Operational Research* 41, 314-320.

[**53**] R. E. Wendell y R. D. McKelvey (1981) New Perspectives in Competitive Location Theory. *European Journal of Operational Research* 6, 174-182.

[**54**] R. E. Wendell y S. J. Thorson (1974) Some Generalizations of Social Decisions Under Majority Rule. *Econometrica,* 42, 893-912.

[**55**] C. Witzgall (1965), Optimal Location of a Central Facility: Mathematical Models and Concepts. *Rep. No. 8388. U. S. National Bureau of Standards, Washington, D. C.*