Curso 1996/97

CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

JOSEFA HERNÁNDEZ DOMÍNGUEZ

Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos

Directores

MARTÍN M. SOCAS ROBAYNA

NÁCERE HAYEK CALIL

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS

Serie Tesis Doctorales

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que de forma más o menos directa me han ayudado en la realización de esta Tesis.

Al Dr. D. Martín Socas, que me introdujo en el mundo de la Didáctica de las Matemáticas. A él mi agradecimiento, ya que sin su guía y ayuda, nunca, habría sido capaz de desarrollar esta Tesis.

Al Dr. D. Nácere Hayek, cuyo aliento y empuje constante he sentido desde que entré en esta Universidad, por ello y por las valiosas sugerencias que ha hecho para mejorar este trabajo.

A todos los compañeros del Departamento de Análisis Matemático, primordialmente a los del Área de Didáctica de las Matemáticas por su apoyo y colaboración en todo momento. En especial,

A la Profesora Mercedes Palarea, que no sólo me ha brindado su amistad incondicional, sino que también ha tenido la paciencia de corregir todo el manuscrito.

A la Profesora Aurelia Noda, por su apoyo constante, y por su colaboración en la investigación, en el diseño y revisión del formato y de los aspectos gráficos de esta Memoria.

A la Profesora Candelaria Espinel, por el ánimo que me ha transmitido, y por haber colaborado y revisado la obtención de los datos estadísticos.

A los Profesores José A. López y Julio Sánchez, que nos iniciaron en la aplicación del Systat, por su colaboración en la obtención de los datos estadísticos.

A los Profesores de EGB y a todos los alumnos que participaron en la investigación empírica, ellos son los autores de los Capítulos 5, 6 y 7.

A mi madre y a mis hijos, que han sido capaces de comprender mis largas horas de trabajo y, que, en todo momento, me han ayudado a *resolver muchos problemas,* animándome siempre a seguir adelante.

A mi madre,

A Miriam, Javier y Laura.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema,
pero en la solución de todo problema,
hay un cierto descubrimiento"
(Polya, 1957, p. 7)

La resolución de problemas matemáticos ha sido siempre para mí un reto y una fuente de satisfacción. Cuando comencé mi carrera profesional y, especialmente en mis años de docencia en EGB., empecé a interesarme y, al mismo tiempo, a preocuparme por las dificultades que ellos generaban en los niños y las que los propios profesores teníamos para su enseñanza.

Al principio de los 80, esta preocupación se extendía día a día por toda la Comunidad Matemática. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) con su libro "Agenda for Action", fue el punto de partida para infinidad de investigaciones y publicaciones sobre el tema.

Esta década de los 80, fue la más pródiga en investigaciones sobre resolución de problemas: en las Revistas de Investigación o en las Actas de los principales Congresos aparecía siempre algún trabajo sobre ello, en contraste con la situación anterior. Schoenfeld (1991) indica que en 1978 en el programa del ICME-4 hubo una única sesión dedicada a la resolución de problemas, incluida bajo el título "Aspectos poco frecuentes del currículo".

¿Dónde radica la dificultad al resolver los problemas?, ¿qué cuestionamientos se pueden asociar a la lectura y cuáles están ligados a las operaciones?, ¿qué habilidades desarrolla la resolución de problemas en los alumnos?, ¿cómo influyen los métodos de enseñanza?, ¿qué sistemas de representación se utilizan?, ¿qué papel juegan los libros de texto?, ¿y el profesorado?, ¿y la actitud del alumnado hacia la materia?...son sólo algunas de las numerosas preguntas que sobre este tema se pueden plantear. Unas tienen respuesta, otras aún no.

Hoy, a mitad de la década de los 90, las investigaciones sobre resolución de problemas han disminuido. Lester (1994) apunta como posibles explicaciones para ello, las siguientes:

1º) Otros temas han desviado la atención de la resolución de problemas. Por ejemplo, algunos focos de los estándares como conexiones, comunicación y razonamiento, las creencias acerca de las Matemáticas, las influencias socio-culturales sobre el aprendizaje de las Matemáticas, sus aplicaciones y la evaluación, se han convertido en nuevos centros de interés para los investigadores.

2º) Pensamos que lo sabemos todo sobre la resolución de problemas.

3º) El constructivismo ha reemplazado a la resolución de problemas como la "ideología" dominante en la conducción de la investigación en Educación Matemática.

4º) La resolución de problemas es mucho más compleja de lo que pensábamos; y, sin embargo, la resolución de problemas sigue siendo el tópico, que más dificultades genera. Hay que reconocer que existen muchos factores que aún no han sido estudiados, al tiempo que faltan teorías que sustenten muchos de los datos empíricos hallados. Ciertamente, aspectos como la resolución de problemas aditivos tiene un cuerpo teórico suficiente, pero, otros temas aún no han sido completamente analizados y, lo que es más importante, falta un puente que una la investigación y la práctica, de forma que todos estos resultados se concreten en aplicaciones curriculares que los maestros puedan utilizar en sus aulas, para que los alumnos se beneficien de ellos y se produzca una mejora significativa en la resolución de problemas, que estará siempre ligada a una mejora en la actitud de los alumnos hacia las Matemáticas.

"La resolución de problemas dentro del currículo de Matemáticas es un contenido prioritario, porque es un medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos, da sentido aplicativo al área y permite la interrelación entre los distintos bloques y

las restantes áreas" (MEC, 1989).

La cita anterior expresa con claridad la importancia que el DCB del MEC da a la resolución de problemas, aspecto que enfatiza igualmente el DCB de Canarias (1991). Ahora bien, la resolución de problemas se ha mostrado en todos los niveles como el tópico de mayor dificultad para los alumnos. Esta dificultad puede tener algo inherente a su propia complejidad, pero muchas veces ha sido el resultado de unos planteamientos metodológicos inadecuados, un desconocimiento de los procesos que siguen los alumnos o consecuencia de no haber sido éstos suficientemente motivados.

Múltiples son las sugerencias que aporta el DCB, de las cuales destacamos: "*En los planteamientos metodológicos se ha de tener en cuenta que el alumno ha de desarrollar y perfeccionar sus propias estrategias, a la vez que adquiere otras generales y específicas que le permitan enfrentarse a las nuevas situaciones con probabilidad de éxito. En este sentido, se brindará a los niños la oportunidad de familiarizarse con procesos que facilitan la exploración y resolución de problemas como: comprensión y expresión de la situación matemática (verbalización, dramatización, discusión en equipo), extracción de datos y análisis de los mismos, representación en forma gráfica del problema o situación, formulación de conjeturas y verificación de su validez o no, exploración mediante ensayo y error, formulaciones nuevas del problema, comprobación de resultados y comunicación de los mismos. Se hace necesario, asimismo, desarrollar la capacidad de persistir en la exploración de un problema"* (DCB, 1989).

Estas dificultades reafirmadas por los profesores del Seminario de Didáctica de las Matemáticas, profesores de EGB en activo, hizo que decidiéramos definitivamente emprender esta investigación. El objetivo final de la misma es la búsqueda de estrategias nuevas que faciliten el aprendizaje de la resolución de problemas. Al comenzar la revisión bibliográfica hallamos la gran cantidad de intentos encaminados en este sentido, algunos de ellos con resultados muy positivos.

En este amplio campo de la resolución de problemas, decidimos centrarnos en **los problemas aritméticos escolares**, descubriendo que éstos se limitaban generalmente a los problemas de enunciado verbal. A pesar de todas las indicaciones que actualmente sugiere el DCB, el aprendizaje de los mismos sigue la metodología tradicional, que resumiríamos en la siguiente frase: *"Para ayudar a los estudiantes a ser buenos resolutores de problemas, haz que resuelvan muchos problemas"*. De esta forma, la resolución de problemas aritméticos verbales se convierte en un trabajo rutinario, donde los alumnos intentan superarla apoyándose en estrategias de tipo memorístico, que no favorecen el desarrollo de habilidades. La utilización de sistemas de representación no verbales, en el proceso de representación y comprensión del problema, es propuesta por algunos profesores o libros de texto como una ayuda visual, de la cual el alumno debe poder prescindir rápidamente, ya que la meta en estos problemas, es elegir adecuadamente la operación aritmética correspondiente y ejecutarla correctamente.

Por otra parte, los numerosos estudios sobre las diferentes categorías semánticas de los problemas, aconsejan proponer problemas variados en las prácticas escolares, para que el alumno adquiera el concepto en toda su riqueza. Sin embargo, en general, esto sigue sin incorporarse al aula, posiblemente debido a desconocimiento por parte de los profesores.

La repetición sin éxito de estas cuestiones, genera en el alumno emociones negativas, que van dando origen a creencias sobre las Matemáticas, tales como *"las Matemáticas es hacer cálculos aburridos"*, o sobre sí mismo: *"yo no sirvo para las Matemáticas"*, como si fuera necesario algún gen matemático para poder abordarlas con éxito. El resultado de esta situación se refleja en actitudes negativas de los alumnos hacia las Matemáticas, que cada día, lejos de corregirse, parecen irse acentuando.

Si bien, no existen soluciones únicas para mejorar la resolución de problemas, pensamos que la utilización de un modelo de competencias, que oriente a los alumnos hacia una comprensión conceptual y favorezca la utilización de sistemas de representación no verbales, puede influir en el éxito de la misma.

Por ello, nos planteamos orientar nuestra investigación hacia la búsqueda de un modelo de competencias que, incorporando al mismo un sistema de representación no verbal, facilite en los alumnos el desarrollo de habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas.

Ahora bien, todo este proceso se realiza en un entorno: el aula, y en él desempeña un papel primordial el profesor. La epistemología del mismo le conduce a tomar decisiones didácticas en uno u otro sentido, las cuales repercuten directamente en el alumnado. La institución escolar representa otro factor influyente en esta situación; pero la amplitud que ella daría al trabajo nos obligó a no considerarla.

Comenzamos, pues, con un trabajo de tipo teórico, en el cual a partir de la revisión de la bibliografía e inspirándonos en ella, diseñamos un modelo de competencias para la resolución de problemas aritméticos verbales, basado en el uso de dos sistemas de representación: un sistema de representación no verbal yuxtapuesto al sistema de representación aritmético.

La utilización de los sistemas de representación no verbales necesita un proceso de instrucción, para lo cual fue necesario hacer un diseño para el mismo y preparar un curso para el profesorado que lo fuera a implementar. El diseño incorporó problemas de todas las categorías semánticas.

Simultáneamente, desarrollamos un modelo de investigación, que intenta conjugar métodos cuantitativos y cualitativos, para obtener una visión global de todo el proceso.

Así, se concretó el objetivo global de la investigación en **el análisis de las habilidades de los alumnos en la resolución de problemas aritméticos verbales, cuando son instruidos en un modelo de competencias que usa dos sistemas de representación yuxtapuestos, de las actitudes que tienen hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas y el estudio de la implicación del profesorado en la instrucción y en la propia investigación.**

Paralelamente, al detectar la existencia de clasificaciones de los problemas aditivos, basadas en trabajos empíricos realizados con los niños, y que, generalmente, dejaban problemas fuera de ellas, nos propusimos desarrollar un modelo de competencias que abarcase todo el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas y que permitiera hacer una clasificación exhaustiva de los problemas aditivos.

Para presentar este trabajo, dividimos la memoria en ocho Capítulos.

El Capítulo 1 aborda, de forma global, el problema que se pretende investigar. Para ello, se facilita una revisión de la bibliografía sobre el mismo, que nos ayuda a situarnos en el punto de partida.

El Capítulo 2 tiene como objetivo delimitar el problema a investigar. En una primera parte hacemos una revisión de los aspectos cognitivos relativos a la resolución de problemas, de las actitudes y de la innovación curricular y epistemología del profesorado, sobre los que estructuramos nuestra investigación.

A continuación, justificamos las razones de nuestro trabajo, desde tres puntos de vista: a nivel conceptual, a nivel curricular y a nivel metodológico.

Finalmente, en los dos últimos apartados, explicitamos los objetivos e hipótesis de la investigación, así como la descripción de los orígenes, elementos y desarrollo de la misma.

El Capítulo 3 presenta los fundamentos teóricos que apoyan la investigación. Nuestra aportación se ha movido en tres campos distintos, en los cuales hemos elaborado unos marcos interpretativos, desarrollando sendos modelos de competencias: para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, para resolver problemas aritméticos y para la investigación y desarrollo del currículo.

Describimos el modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, que permite hacer una organización del mismo, integrando los elementos y relaciones que se dan en él, y elaborar una nueva y exhaustiva clasificación de los problemas aditivos; el modelo de competencias para la resolución de problemas, basado fundamentalmente en el modelo de Goldin, en la estrategia general de Polya y en el esquema partes-todo de las teorías de Piaget, y el modelo de investigación convergente que considera aspectos referidos al desarrollo del currículo en Matemáticas y a la investigación en Educación Matemática, y pretende superar posiciones extremas entre los aspectos cualitativos y cuantitativos de los distintos paradigmas, desarrollando métodos y técnicas de ambos, útiles y complementarios (metodología convergente), que permiten entender mejor los procesos y resultados implicados en la investigación.

En **el Capítulo 4**, presentamos una descripción exhaustiva del diseño y de los instrumentos de recogida de datos de la investigación. Comenzamos con una descripción global del diseño general de la investigación, siguiendo el modelo que se ha esbozado; una segunda parte está dedicada a la descripción, desarrollo y valoración del diseño de instrucción de resolución de problemas aritméticos verbales (DIRPA), explicando cómo se preparó al profesorado que posteriormente desarrollaría dicho diseño en el aula. El resto del Capítulo contiene una explicación sobre la construcción y forma de administración de los instrumentos de medida, tanto cualitativos como cuantitativos.

Una parte de la investigación, sigue un diseño cuasi-experimental. Los resultados obtenidos, antes y después del diseño de instrucción en resolución de problemas verbales aritméticos en el grupo de alumnos instruidos por los profesores que siguieron el curso-guía de adiestramiento (grupo experimental), son contrastados con alumnos de un grupo control. **El Capítulo 5** recoge los resultados de este estudio cuantitativo. La presentación de los mismos, la dividimos en los tres apartados de que consta el pretest-postest: resolución de problemas aritméticos verbales, ejecución de las operaciones e invención de problemas.

En primer lugar, establecemos las hipótesis estadísticas, que contrastamos con su análisis estadístico correspondiente; luego, hacemos un análisis más pormenorizado de los diferentes ítems mediante el análisis de las frecuencias de aciertos y errores de los mismos y, posteriormente, un análisis general de los tests.

En **el Capítulo 6**, presentamos los resultados del estudio cualitativo, por medio del cual pretendemos analizar las potencialidades y dificultades que genera la instrucción y el uso, por parte de los alumnos, de un modelo de competencias para resolver problemas aritméticos verbales, usando dos sistemas de representación yuxtapuestos, y estudiar las habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas que los alumnos manifiestan durante la resolución de los mismos.

El Capítulo 7 aborda las actitudes de los alumnos, junto a un estudio de algunos aspectos del Profesorado que participó en esta investigación. Dada la importancia del papel que juega el dominio afectivo en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, estudiamos las actitudes de los alumnos con el objetivo de comprender mejor los sentimientos, las creencias y los comportamientos hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas y las posibles interrelaciones entre ellos. Completamos nuestro estudio, con algunos aspectos relacionados con la epistemología del profesorado.

Finalmente, en **el Capítulo 8** presentamos las conclusiones generales de este trabajo en todos los ámbitos de la investigación: modelos de competencias, resolución de problemas aritméticos verbales, actitudes de los alumnos y epistemología del profesorado, además de señalar las implicaciones de nuestra investigación para la enseñanza e indicar aspectos abiertos que esperamos abordar en posteriores trabajos de investigación.

Señalar, por último, que finalizamos la presentación de esta Memoria con las referencias bibliográficas utilizadas en la misma. Adjuntamos asimismo un segundo documento, que por su amplitud hemos separado de éste, donde a modo de Anexo, recogemos el diseño instruccional para la resolución de problemas aritméticos verbales (DIRPA), los instrumentos de recogida de datos, los datos estadísticos obtenidos mediante el paquete estadístico SYSTAT, la transcripción de las entrevistas de los alumnos, así como a título de ejemplo tres diarios de los profesores, una carpeta de una alumna, las fichas de las entrevistas de dos alumnos y la transcripción de una entrevista a un profesor.

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

En este primer Capítulo hacemos un planteamiento general de la investigación y presentamos una revisión de las investigaciones relacionadas con nuestro tema.

Nuestra investigación se interesa por la resolución de problemas aritméticos verbales de una y de dos operaciones, parte fundamental del curriculum de Matemáticas de Primaria (6-12 años), que sigue siendo un tópico que genera máximas dificultades para los alumnos.

Como afirma Rico (1991), "*la experiencia escolar que recordamos la mayoría de nosotros sobre matemáticas está mucho más relacionada con dificultades, incomprensión, fracaso y rechazo que con actitudes positivas...Hablar por tanto de resolución de problemas como una parte de la Educación Matemática puede resultar para muchos un contrasentido; la enseñanza de las Matemáticas parece resolver muy pocos problemas a la mayoría de los escolares, bien al contrario les crea muchos otros"(p. 243).*

Así, a pesar de que actualmente se reconoce, de modo unánime, que resolver problemas es un objetivo prioritario en las matemáticas escolares, muchos niños siguen experimentando grandes dificultades al intentar resolver problemas tan sencillos como los aritméticos.

1.2 EL ÁMBITO O CONTENIDO DE ESTUDIO

Tres grandes campos vamos a considerar en este trabajo. El primero y principal tiene que ver con la resolución de problemas, el segundo con el dominio afectivo de los alumnos, concretamente con las actitudes, y el tercero con el profesorado.

En Matemáticas, la resolución de problemas representa el núcleo fundamental de la actividad matemática, y por ello no es de extrañar que la resolución de problemas constituya uno de los campos de investigación más importante en Educación Matemática.

El importante papel que desempeñan las componentes afectivas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas ha sido ampliamente descuidado. Sin embargo, actualmente se está reconociendo su importancia, tanto desde la óptica de la investigación, conectándose el dominio afectivo y cognitivo, como desde la óptica de la educación, incluyéndose en todas las reformas educativas como un factor fundamental.

La importancia del profesorado en la educación está fuera de toda duda. Investigaciones sobre su papel en la educación o la influencia que tienen sus creencias y concepciones sobre las Matemáticas, son campos, entre otros muchos, ampliamente estudiados. En esta investigación, nos centramos en el papel que desarrolla el profesor en la misma y de qué forma sus propias decisiones didácticas influyen en el desarrollo de un diseño instruccional, dentro de la investigación sobre el pensamiento y toma de decisiones.

1.2.1 El problema general de investigación

El problema, en el que centramos nuestra investigación, tiene que ver con el conocimiento de las dificultades, que experimentan los alumnos en la resolución de los problemas aritméticos verbales, y la influencia que el uso de sistemas de representación gráfica tiene en la mejor comprensión de los mismos. La falta de habilidad de los estudiantes en la resolución puede estar relacionada con múltiples factores, como la no comprensión del enunciado del problema, debido a no haber adquirido un grado suficiente de capacidad de lectura, un dominio insuficiente del significado de las operaciones, una falta de capacidad para razonar en un problema concreto, la incorrecta ejecución de las operaciones o no saber el orden en que éstos (si son varios) ha de seguirse. Al mismo tiempo, los profesores expresan sus propias dificultades al tratar de desarrollar el aprendizaje sobre la resolución de problemas. Unos se inclinan por enseñarles a buscar palabras clave, otros enfatizan la lectura comprensiva del texto, otros llegan incluso a utilizar la plástica o la dramatización como elementos que faciliten la comprensión, pero el sentimiento general que expresan sigue siendo el de no tener claro el camino a seguir.

Desde principios de siglo, psicólogos y educadores matemáticos han tratado de investigar las causas de estas dificultades; unos las han atribuido a déficits lingüísticos, otros a dificultades aritméticas específicas. La forma de la enseñanza es otro factor clave. Nuestras escuelas inciden fuertemente en los algoritmos y menos en el desarrollo de estrategias y en la maduración de procesos cognitivos superiores, tales como el nivel de razonamiento y la comprensión conceptual. La típica pregunta que hacen muchos alumnos en el aula cuando se enfrentan a resolver un problema aritmético verbal, "*¿tengo que sumar o restar?*", refleja el objetivo de los problemas aritméticos escolares: la elección de una operación y su ejecución como fin fundamental de los mismos. Y, finalmente, aunque menos investigadas, las variables afectivas, que ahora han emergido con mucha fuerza, tienen también algo que aportar sobre las dificultades en la resolución de problemas.

Así, consideramos que la investigación de un tópico, en nuestro caso la resolución de problemas aritméticos verbales, tiene que considerar el aprendizaje de un concepto como el resultado de las relaciones entre el contenido, el alumno y el profesor, y todo ello dentro de un contexto social, que aunque se excede de los límites de nuestra investigación, no podemos olvidar su influencia.

Y, utilizando las palabras de Balacheff y otros (1993), intentamos que *"El último fin de nuestra investigación deberá ser que un profesor concreto en una clase concreta esté mejor equipado para guiar al alumnado a que comprenda el mundo con la ayuda de las Matemáticas"*.

1.2.2 Caracterización de la investigación

En nuestra investigación, nos proponemos superar el enfrentamiento entre los métodos cualitativos y los cuantitativos, como proponen Cook y Reichardt (1986a), ya que una síntesis de ambos puede ofrecer una visión más global del tema a estudiar.

Por una parte, pretendemos estudiar los resultados del desarrollo de un diseño de instrucción con un número elevado de alumnos; por tanto, necesariamente tendremos que optar por un método experimental, que nos permita, una vez identificadas las variables a estudiar, obtener unos resultados matemáticamente interpretables. Sin embargo, no es el producto el aspecto más importante de nuestra investigación, mas bien, queremos comprender cómo se comportan los niños durante el proceso de la resolución de los problemas, cuáles son sus dificultades, dónde se producen sus bloqueos; y por ello, necesariamente hemos de utilizar un enfoque cualitativo.

Con respecto a las actitudes, decidimos también utilizar ambos métodos, mientras con el profesorado, al ser una muestra muy pequeña, optamos solamente por métodos cualitativos.

1.3 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

La revisión de la literatura es una tarea ardua, ya que los trabajos sobre resolución de problemas se encuentran tanto en revistas de educación matemática como en revistas de psicología. Hemos optado por profundizar en las primeras, si bien también hemos consultado algunas de las segundas, sobre todo cuando se han editado monográficos especiales dedicados a este tema.

Hemos revisado los 20 Proceedings de los Congresos del PME. Es interesante destacar que en los primeros, aparecen bastantes artículos dedicados a la resolución de problemas, empiezan a desaparecer a finales de los 80, y cómo se produce en la actualidad un nuevo resurgir de los mismos. Concretamente, en los Proceedings del XIII PME (Booker y otros, 1990), celebrado en México, sus editores explican que agruparon los diferentes informes de investigación en cuatro grupos: Aprendizaje de las Matemáticas, Enseñanza de las Matemáticas, Interacción social y Análisis didácticos, señalando explícitamente que no usaron la categoría tradicional de resolución de problemas, porque "*investigaciones recientes han demostrado que la cognición matemática se da en una situación, y la conceptualización específica del dominio representa un papel crucial en el éxito al resolver problemas de matemáticas*"; sin embargo, actualmente vuelve a aparecer como tal dicha categoría.

Las revistas más representativas (*Journal for Research in Mathematics Education, ZDM, Journal of Mathematical Behavior, Educational Studies in Mathematics, Recherches en Didactiques de Matematiques, For the learning of Mathematics, Arithmetic Teacher, Mathematics Teacher, Math in School, Educación Matemática, Suma, Números, Uno, Enseñanza de las Ciencias, Infancia y Aprendizaje, European Journal of Psychology of Education*) han sido consultadas en las hemerotecas de la Facultad de Matemáticas, de la Biblioteca General de la Universidad y de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas.

Finalmente, la adquisición de las bases de datos en CD-Rom de ERIC (1981-1995) y ZDM (1976-1995) nos ha permitido acceder a otros artículos sobre el tema.

Diferentes libros sobre los aspectos relacionados con nuestra investigación publicados en la década de los 80, junto a las tesis realizadas en nuestro país, nos han permitido adquirir una idea global sobre el estado de la cuestión, poder delimitar nuestra investigación y centrar el problema a investigar.

Los libros que han constituido una fuente para nuestro estudio son los siguientes, por año de aparición:

Sobre resolución de problemas:

Polya (1957): *How to solve it*

Shumway, R.J. (Ed) (1980): *Research in Mathematics Education.*

NCTM: *Agenda for action* (1980)

Yearbooks de los años: 1980 (Krulik y Reys: *Problem solving in School*

Mathematics) y 1983 (Shufelt y Smar*t: Agenda in Action),* NCTM.

Lester y Garofalo (1982): *Mathematical problem solving: Issues in research*.

Carpenter, Moser y Romberg (1982): *Addition and Subtraction: A cognitive perspective.*

Bell, Costello y Küchemann (1983): *Research on Learning and Teaching.*

Goldin y McClintock (1984): *Task variables in mathematical problem solving*.

Silver (1985): *Teaching and Learning Mathematical problem solving: Multiple Research Perspectives*.

Schoenfeld (1985): *Mathematical Problem Solving*

Janvier (1987): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*.

Charles y Silver (1988): *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*.

Grouws (1992): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.*

Sobre actitudes:

McLeod y Adams (1989): *Affect and Mathematical Problem Solving*

Gairín (1990): *Las actitudes en educación*.

Sobre el profesorado:

Wittrock (1986): *The Handbook of Research on Teaching*.

En España, sobre resolución de problemas aritméticos:

Puig y Cerdán (1988): *Problemas aritméticos*

Maza (1989): *Sumar y restar,* (1991a): *Enseñanza de la suma y de la resta*, (1991b): *Multiplicar y dividir,* (1991c): *Enseñanza de la multiplicación y división*, (1995): *Aritmética y representación: De la comprensión del texto al uso de materiales*

Bermejo (1990): *El niño y la aritmética*.

Sobre aspectos psicológicos:

Piaget, recogido en Flavell (1981): *La psicología evolutiva de Jean Piaget*.

Mayer (1986): *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*.

Resnick y Ford (1990): *La enseñanza de las Matemáticas*

Nickerson, Perkins y Smith (1987): *Enseñar a pensar*

de Vega (1984): *Introducción a la psicología cognitiva*.

De las Tesis Doctorales en las que nos hemos apoyado, debemos obligatoriamente citar:

Bethencourt (1986): *Estrategias cognitivas en la resolución de problemas aritméticos*.

Puig (1993): *Elementos para la instrucción en resolución de problemas de Matemáticas.*

Castro (1994): *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa.*

A continuación, hacemos un resumen de algunos aspectos de la literatura, que consideramos relevantes en nuestra investigación.

1.3.1 Primeros resultados

Empezaremos con una breve exposición de las ideas más destacadas de los libros reseñados.

El libro de Shumway (1980): *Research in Mathematics Education* tiene dos partes bien diferenciadas: la primera, dedicada al proceso de investigación en sí y la segunda, a los problemas de investigación. En él, hemos encontrado una revisión de los años anteriores sobre investigación en resolución de problemas (F.K. Lester) y sobre actitudes hacia la Matemática (G. Kulm).

La *Agenda for action* y los Yearbooks citados, 1980 (*Problem solving in School Mathematics*) y 1983 (*The agenda in action*), nos proporcionaron una visión global de los diferentes aspectos que sobre resolución de problemas se comenzaba a investigar.

Lester y Garofalo (1982), en *Mathematical problem solving: Issues in research*, contribuyen a una formulación clara de los temas clave en la investigación en resolución de problemas. La mayoría de los artículos habían sido presentados en una conferencia en la Universidad de Indiana, en 1981.

Carpenter, Moser y Romberg (1982) presentan en *Addition and Subtraction: A cognitive perspective,* los puntos de vista teóricos y los resultados de investigaciones empíricas de diferentes autores sobre distintos aspectos de estas operaciones y los problemas con ellas.

Bell, Costello y Küchemann (1983) en *Research on Learning and Teaching,* presentan una amplia revisión de las principales investigaciones sobre Educación Matemática, realizada a petición del Cockcroft Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools y cuyas principales conclusiones fueron recogidas en Cockcroft (1982): *Mathematics counts*. Entre sus Capítulos, varios abordan la resolución de problemas y uno está dedicado expresamente a actitudes.

Goldin y McClintock (1984) editan *Task variables in Mathematical problem solving*, donde se ofrece una amplia revisión de las características de las tareas con las cuales se enfrenta un individuo. Aunque califican su exposición de amplia pero incompleta, la dividen en las siguientes categorías: sintaxis, contenido y contexto, estructura de la representación y características heurísticas del problema. "*Este estudio*, afirma Goldin, *nos permitirá describir la estructura de las competencias en los resolutores de problemas"*, que posteriormente él concretará en su modelo de competencias para resolución de problemas que describiremos más adelante.

Silver (1985) edita *Teaching and Learning Mathematical problem solving: Multiple Research Perspectives*, con los resultados de un encuentro de casi 40 investigadores en la Universidad de San Diego (1983). La conferencia tenía tres objetivos específicos: 1) proveer una valoración actual del estado de la investigación en resolución de problemas desde la perspectiva de la educación matemática; 2) explorar las contribuciones de otros investigadores y otras perspectivas de cuerpos tales como la psicología cognitiva, la resolución de problemas científicos y la inteligencia artificial, y 3) identificar algunas direcciones para la investigación en resolución de problemas para la siguiente década.

Janvier (1987) edita *Problems of representation in the teaching and learning* *of mathematics*. Entre sus diversas aportaciones, encontramos el modelo de competencias diseñado por Goldin.

Charles y Silver (1988) dedican, dentro de la colección Research Agenda for Mathematics Education, el volumen 3 a *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. En los diecisiete capítulos analizan los cambios que se han producido a partir del año 1980 en la resolución de problemas, tanto en los currículos como en la investigación. Su opinión es que la investigación en resolución de problemas, se ha centrado casi exclusivamente en el análisis y la caracterización de la competencia y el rendimiento en la resolución de los mismos, y que muy poca se ha dirigido hacia la enseñanza y evaluación de dicha resolución.

Grouws (1992), por encargo del NCTM, prepara la edición del *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Este libro pretende ser una revisión de las mejores investigaciones, sus resultados y sus controversias, que sobre los diferentes tópicos se han desarrollado en las últimas décadas. Fue diseñado para ser utilizado tanto por los investigadores interesados en dichos temas como por los propios profesores, con un objetivo, entre otros, lograr que los resultados de las investigaciones lleguen al aula. Son muchos los Capítulos que nos han aportado datos, pero tenemos que destacar el Capítulo 4 de Hiebert y Carpenter, que nos ofrece un análisis sobre los sistemas de representación, los Capítulos 7 (A. Thompson) y 8 (Fennema y Loef Fraanke) acerca del profesorado, el 12 de Fuson de resolución de problemas de sumar y restar, el 13 de Greer de los problemas de multiplicar y dividir, el 15 de Schoenfeld de resolución de problemas, considerada como "pensar matemáticamente" y el 23 de McLeod relativo a la investigación sobre afectos.

Polya (1957), en su libro *How to solve it,* reconoce que estudiando los métodos de solución de problemas, se percibe otra faceta de las Matemáticas. "*Las Matemáticas tienen dos caras: por un lado la ciencia rigurosa de Euclides, que las presenta como una ciencia sistemática y deductiva, mientras las Matemáticas en vía de formación aparecen como una ciencia experimental e inductiva*". En este libro presenta su ya clásica estrategia general de resolución de problemas, acompañado de un breve diccionario de heurística ("ars inveniendi") en el que intenta explicar "las operaciones mentales típicamente útiles" en el proceso de la solución de un problema. Esta estrategia marca nuestro modelo de competencias.

Schoenfeld (1985), en *Mathematical problem solving,* analiza las conductas de los estudiantes durante la resolución de problemas, sobre la base de sus propias investigaciones.

Sobre actitudes, destacamos el libro de McLeod y Adams (1989), que realiza una recopilación de trabajos, algunos muy interesantes sobre los aspectos afectivos en la resolución de problemas y el de Gairín (1986), que desarrolla su Tesis Doctoral sobre el análisis de las actitudes hacia las Matemáticas de alumnos de 6 a 14 años. Sobre el profesorado, la traducción de parte del libro de Wittrock (1986) aborda, entre otros, los aspectos relacionados con las investigaciones sobre pensamiento del profesor y toma de decisiones.

En España, sobre resolución de problemas aritméticos nos hemos guiado por los libros de Puig y Cerdán (1988), Maza (1989, 1991a, 1991b, 1991c, 1995) y Bermejo (1990). Estos libros hacen revisiones de la situación actual de la investigación en resolución de problemas aritméticos, aportando unas veces, sugerencias didácticas para el aula y otras, resultados de sus propias investigaciones.

1.4 PROBLEMA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Las palabras "problema" y "resolución de problemas", no tienen una definición precisa. Psicólogos, matemáticos, educadores matemáticos o cualquier otra persona las utilizan con una significación propia.

Actualmente, se tiende a delimitar el significado de este término, atendiendo a distintos puntos de vista: el psicológico (el sujeto que aborda el problema y los procesos mentales implicados en su resolución), el curricular (el papel que juegan los problemas en la enseñanza de las matemáticas), el matemático (qué es un problema) y el didáctico (cómo se enseña a resolver problemas) (Kilpatrick, 1985).

En Educación Matemática, la palabra "problema" abarca un amplio abanico que va desde la distinción entre ejercicio y problema de Kantowski (1981), pasando por la "situación problemática" de Borassi (1986) hasta la idea de problema como "pensar matemáticamente" de Schoenfeld (1992).

Entre todas estas definiciones, podemos partir de una ya clásica: *"Problema es una situación que un individuo o un grupo quiere o necesita resolver y para la cual no dispone de un camino rápido y directo que le lleve a la solución"* (Lester, 1983).

Ante esto, nuestra primera pregunta es si los problemas aritméticos verbales son realmente problemas. La clave de la respuesta parece estar en lo que Kilpatrick (1975) llama variables ligadas al resolutor, o en palabras de Gaulin (1982): "*La diferencia entre un ejercicio y un "verdadero problema" es relativa. Lo que para una persona constituye un problema no rutinario puede muy bien ser un simple ejercicio para otra; todo depende de los conocimientos y experiencias anteriores del alumno"*. En general, para los niños, los problemas aritméticos verbales son problemas, pues aunque intuyen un camino -la utilización de operaciones aritméticas-, no tienen claro cuál de ellas usar, si son varias en qué orden, y carecen a menudo de estrategias que les ayuden en la elección.

La expresión "Resolución de problemas" es igualmente utilizada para actividades muy diversas, que van desde la realización de ejercicios hasta problemas que requieren múltiples procedimientos. Schoenfeld (1983) o Stanic y Kilpatrick (1988) llegan a reconocer también diferentes significados para la utilización del término "resolución de problemas".

Las investigaciones en este tema han seguido las diferentes corrientes psicológicas: el asociacionismo, el conductismo, los teóricos de la Gesltalt y, más recientemente, las teorías cognitivas.

En las últimas décadas, la psicología cognitiva y educativa ha dirigido sus estudios sobre los procesos implicados en la resolución de problemas. Pérez y Pozo

(1994) identifican dos tendencias generales:

1. La solución de problemas como habilidades generales
2. La solución de problemas como un proceso específico.

La primera, parte de la idea de que la solución de problemas se basa en la adquisición de estrategias generales, de forma que, una vez adquiridas, pueden aplicarse con pocas restricciones a cualquier tipo de problemas. La segunda, trata de hacer hincapié en que la solución de problemas y su instrucción, deben ser abordadas en las áreas y contextos específicos a los que se refieren los problemas.

1.4.1 Investigaciones sobre problemas aritméticos verbales

Resnick y Ford (1981) hacen una revisión de los primeros estudios sobre problemas de aritmética, concluyendo que la mayor parte de ellos se limitan a ordenar los problemas en función de su dificultad, que a su vez está relacionada con los procedimientos de conteo. En España, una amplia revisión ha sido hecha por Puig y Cerdán (1988) y Maza (1989, 1991a, 1991b, 1991c), como hemos citado.

El estudio de las habilidades aritméticas elementales constituye una de las áreas de investigación más atrayentes, tanto para psicólogos como para educadores matemáticos.

Estas investigaciones se interesan actualmente por los procesos cognitivos que conducen a la resolución de problemas, estudiando detalladamente cómo se llega a construir la representación mental del problema, a partir del texto verbal del mismo.

Lester (1983) identificó un conjunto de categorías, que permiten agrupar los factores que afectan al éxito en la solución de problemas en cuatro grupos: factores vinculados a la tarea, factores dependientes del sujeto, factores relacionados con los procesos y factores ambientales, añadiendo una quinta categoría que tendría que ver con los instrumentos y la metodología de la investigación.

Los factores vinculados a la tarea son aquellos asociados con la naturaleza del problema, por ejemplo, su contenido, su estructura, su contexto y la sintaxis del enunciado.

Las características del sujeto juegan un papel importante en el éxito o fracaso en la resolución de un problema. Algunos factores analizados son el conocimiento matemático, la experiencia previa, la habilidad lectora, la perseverancia, el sexo, la edad y las habilidades espaciales, entre otras.

En este grupo, son de destacar los estudios realizados comparando expertos con novatos en la resolución de un problema dado. Los trabajos de Krutetskii (1976) ofrecen unos amplios resultados sobre las características de los buenos resolutores de problemas.

El hecho que la resolución de problemas implique un amplio rango de actividades, tanto físicas como mentales, obliga a considerar como una categoría el estudio de los procesos. Este grupo engloba toda la conducta manifiesta o interna del resolutor durante la resolución de un problema.

Finalmente, existe un gran número de factores del ambiente, externos al problema y al sujeto, que pueden influenciar la resolución de un problema. Dentro de este grupo, considera la instrucción como uno de los factores más influyentes.

Las diferentes líneas de investigación utilizan como instrumentos la entrevista clínica y los experimentos de enseñanza. A través del método clínico, se pretende averiguar qué habilidades desarrollan, qué dificultades se les presentan, y qué estrategias utilizaban.

Los experimentos de enseñanza permiten analizar cómo se produce el aprendizaje con nuevas técnicas y estrategias. Esta técnica es un poco controvertida, dada la imposibilidad de controlar todas las variables, para poder afirmar que los cambios producidos son consecuencia exclusiva del método empleado, pero es la única forma de evaluar la introducción de innovaciones educativas. El profesorado, por ejemplo, es una pieza clave en cualquier investigación y como comprobaremos en nuestro trabajo, tiene un papel decisivo en los resultados obtenidos.

1.4.1.1 Los problemas verbales de estructura aditiva

Los problemas aditivos han sido ampliamente estudiados y existe actualmente una teoría bastante completa sobre ellos, a pesar de que aún quedan muchos temas sin resultados coherentes o incluso sin analizar.

Carpenter (1985) señala que hay varias razones para el interés por estos problemas. Por una parte, el dominio de los problemas es lo suficientemente sencillo como para que las diferencias entre ellos puedan ser especificadas con un razonable grado de claridad. Por otra parte, el dominio es suficientemente rico para mostrar una variedad de problemas, estrategias de soluciones y errores.

Los estudios de los problemas de estructura aditiva se han encaminado en diferentes direcciones. Una de ellas ha intentado realizar clasificaciones de los problemas aditivos, con el objetivo posterior de poder analizar las diferencias en su resolución por los distintos alumnos. Una segunda dirección, apunta hacia las características de un problema (variables de la tarea) o las características del resolutor (variables del sujeto). Y, como tercera dirección, señalamos los estudios que, utilizando determinadas estrategias de enseñanza: uso de representaciones concretas, materiales o modelos, incluyendo en este grupo aquellos que desde el enfoque del procesamiento de la información pretenden simular los procesos encaminados a la solución de problemas verbales, han tratado de ver la efectividad de los mismos. Muchas veces, estas direcciones se han entrelazado o unas han surgido como consecuencia de investigaciones realizadas en otras.

Primera dirección: La búsqueda de una clasificación de los problemas aditivos.

Una de las primeras taxonomías es la de Caldwell y Goldin (1979), que usan los estados piagetianos para marcar las características de los aprendices y distinguir los problemas verbales.

Posteriormente, el análisis de las variables, denominadas semánticas, origina una de las clasificaciones que más se ha desarrollado y consolidado. Las categorías consideradas actualmente, propuestas por Carpenter y Moser (1982), Riley, Greeno y Heller (1983), son cambio, combinación, comparación e igualación. Teniendo en cuenta diferentes variables, consideran, finalmente, 20 problemas distintos. Esta clasificación, según sus autores, surge de los estudios sobre las estrategias utilizadas por los alumnos en los diferentes problemas. Fuson (1992) considera 22 situaciones distintas, ya que distingue entre combinar conceptualmente y combinar físicamente.

Vergnaud (1982) diseña una taxonomía para los problemas aritméticos en los números enteros. En el Capítulo 3, haremos una mayor descripción de estas dos clasificaciones.

Bachor (1987) utiliza 5 variables: nivel de vocabulario, tipos de preguntas, tipos de información superflua, tipo de operación y nivel computacional; considerando distintas opciones en cada una, llega a una clasificación general de problemas verbales de 1200 casos.

Segunda dirección: El estudio de las variables de la tarea ha sido sistematizado por Castro, Rico y Gil (1992), quienes después de una amplia revisión, han englobado las diferentes investigaciones sobre el estudio de la dificultad de estos problemas en cuatro enfoques: el enfoque lingüístico, el de variables estructurales, el de sentencias abiertas y el enfoque semántico.

Los factores ligados al lenguaje son posiblemente los primeros en estudiarse, existiendo en la actualidad un amplio consenso sobre la correlación entre éstos y la resolución de problemas.

Las variables estructurales, definidas por Nesher (1976) como un número finito de variables discretas que definen un problema aritmético, han sido analizadas tanto desde el punto de vista global, como desde el estudio particular de determinadas de ellas.

El tercer bloque centra su atención en la influencia que la variable posición de la incógnita ejerce sobre la dificultad de estos problemas.

Finalmente, el cuarto bloque tiene que ver con el significado de las palabras del texto, bien sea desde una perspectiva individual (palabra clave) o bien como un todo global (cálculo relacional de Vergnaud o las categorías semánticas). Sin lugar a dudas, podemos afirmar que en la última década, éste ha sido el objetivo de múltiples investigaciones.

En efecto, gran parte de la investigación en diferentes países se ha desarrollado hacia la influencia que sobre la resolución tienen las distintas categorías semánticas. Podemos citar en Estados Unidos: Riley y otros (1983), Carpenter y Moser (1983, 1984), Fuson (1992); en Bélgica: De Corte y Verschaffel (1985, 1987); en Japón: Hatano (1982); en Israel: Nesher (1982); en España: Bethencourt (1986), Bermejo y Rodríguez (1987), Bermejo (1990), Castro, Rico y Gil (1992).

Estas investigaciones han desembocado en la siguiente recomendación para la enseñanza: "*Usar durante la instrucción una variedad de problemas verbales que representen la amplia variedad de tipos de problemas semánticamente diferentes*" (De Corte y Verschaffel, 1989).

Actualmente, muchos estudios intentan relacionar los enfoques anteriormente citados. Así, De Corte y Verschaffel (1987) afirman que los factores que más influyen en la dificultad de los problemas son: en primer lugar, la estructura semántica; en segundo lugar, la claridad del enunciado y finalmente, el orden de presentación de los números dados.

La comprensión de los problemas verbales, como afirman Bermejo y Rodríguez (1987), supone algo más que el mero conocimiento de operaciones y la habilidad para aplicarlas en situaciones concretas. Tiene grandes semejanzas con la comprensión lingüística o de textos, de modo que la fase de ejecución del problema viene precedida de la fase de representación, que incluye entre otras cosas, el procesamiento de la información contenida en el texto y una primera representación global del mismo. (De Corte y Verschaffel, 1985; Kintsch y Greeno, 1985).

Bethencourt (1986), partiendo de Mayer (1986) establece que los problemas aritméticos verbales encierran cuatro estructuras o niveles estructurales:

El primer nivel, "formato", está determinado por la presentación o planteamiento del problema, a través de distintas proposiciones que juegan un papel específico (asignación, relación, pregunta, referencias relevantes).

El segundo nivel, "estructural", está formado por el esquema de todo, parte, relación de las partes, valor de las partes, número de partes, etc.

El tercer nivel lo conforman las propiedades semánticas de las relaciones matemáticas (cambio, combinación, comparación, etc).

El cuarto nivel lo constituyen los esquemas específicos de los distintos tipos específicos de las familias de problemas.

Un dominio de estos cuatro niveles debiera implicar una mejora en la resolución de los mismos. Bethencourt hizo un estudio con 511 escolares de 3º, 4º y 5º Cursos de E.G.B. para analizar si una instrucción basada en la utilización del esquema partes-todo, tomando como soporte gráfico la recta real, es más eficaz en la mejora de la habilidad de los escolares para resolver problemas aritméticos, que la instrucción tradicional basada en la repetición de problemas similares. Los resultados no fueron positivos.

La tercera dirección, que señalamos, es quizá la más dispersa. Los estudios sobre el uso de diseños instruccionales, materiales, modelos, esquemas, siguen estando incompletos y, en algunos casos, sus resultados son contradictorios.

En esta línea, Fuson (1992) hace un balance de la situación actual y presenta como tema sin resolver, entre otros, determinar: *El papel que juega en la comprensión y solución de problemas verbales el esquema conceptual parte-parte-todo.*

De Corte y Verschaffel (1989) afirman que la mayor parte de los programas instruccionales belgas que revisaron, enseñan a resolver problemas haciendo una representación visual de las relaciones entre las cantidades implicadas en el problema en términos de un diagrama de flechas y se plantean si está justificado enseñar sólo una forma de representación. De sus investigaciones llegan a la conclusión, ya citada, sobre el uso de diferentes de representaciones gráficas, según las estructuras semánticas de los problemas.

1.4.1.2 Los problemas verbales de estructura multiplicativa

Los problemas de multiplicar y dividir (problemas de estructura multiplicativa, siguiendo la terminología de Vergnaud), que en los últimos años han sido objeto de numerosos estudios, no tienen aún una teoría coherente como se da ya en el caso de los problemas aditivos.

Greer (1992) hace una amplia revisión de la situación actual, destacando 5 perspectivas teóricas en las cuales se mueve la investigación sobre este tema.

La primera línea estaría dirigida por los trabajos de Vergnaud (1983, 1988), el cual engloba los problemas de multiplicar y dividir dentro de una estructura más amplia: la estructura multiplicativa, que contendría "*todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples y todas aquellas que necesiten multiplicar o dividir", (Vergnaud, 1988, p. 141).*

Vergnaud justifica la necesidad de la creación de una estructura con las siguientes consideraciones. La primera, en base a la interconexión que existe entre los diferentes conceptos matemáticos: la multiplicación, la división, las fracciones, etc., no son conceptos independientes unos de otros. La segunda, apunta sobre la importancia que tiene el poder delimitar dominios del conocimiento que abarquen una gran diversidad de situaciones, en una aproximación psicogenética, para la adquisición de ideas específicas. La tercera, porque normalmente los estudiantes tienen diferentes concepciones, procedimientos e incluso representaciones simbólicas para la misma clase de problemas. Por ello, considera que la estructura del campo conceptual hace posible estudiar la organización de estas ideas, conceptualizaciones y representaciones interconectadas durante un periodo de tiempo lo suficientemente largo, para hacer que la aproximación psicogenética sea significativa.

En la estructura multiplicativa identifica tres clases principales de problemas, que llama: isomorfismo de medidas, producto de medidas y proporciones múltiples

(Vergnaud, 1983).

El isomorfismo de medidas es una estructura que consiste en una proporción directa simple entre dos espacios de medidas M_1 y M_2 , y agrupa un amplio número de situaciones de la vida corriente y técnica (repartos equitativos, precios constantes, velocidad uniforme o velocidad media constante, etc).

El producto de medidas es una estructura que consta de la composición cartesiana de dos espacios-medida, M_1 y M_2 , dentro de un tercero M_3. Describe un buen número de problemas relativos al área, volumen, producto cartesiano, trabajo y otros muchos.

La proporción múltiple es una estructura muy similar al producto desde el punto de vista de las relaciones aritméticas: un espacio-medida M_3 es proporcional a dos espacios medida independientes y diferentes, M_1 y M_2 .

La segunda línea estaría dirigida a analizar los lazos entre los números y sus referentes. Schwartz (1988) distingue entre cantidades intensivas (I) y extensivas (E).

Las cantidades extensivas son aquellas que utilizamos al cuantificar aspectos del mundo real, tanto al contar (cantidades discretas) como al medir (cantidades continuas).

Las cantidades intensivas se definen a través de la aplicación de operaciones aritméticas.

Un ejemplo sería el siguiente:

Saco de papas: 10 kg Coste del saco: 650 ptas

Precio del kilo de papas: 65 ptas/kilo.

Las dos primeras cantidades están referidas al peso y coste del saco de papas (son cantidades extensivas), mientras la tercera relaciona dos magnitudes: precio/peso (es una cantidad intensiva).

La siguiente clasificación, basada en estos conceptos, es presentada por Kaput (1985):

1. Problemas con estructura IxE=E'. Corresponderían al tipo "*isomorfismo de medidas"* de Vergnaud. En el caso de la división, aparecerían dos problemas: E'/E=I, E'/I=E. Este tipo de problemas es el más ampliamente presentado a los estudiantes en las clases de matemáticas.
2. Problemas con estructura ExE'=E'', que corresponden al *producto de medidas* de Vergnaud.
3. Problemas de estructura IxI'=I''.

La tercera línea estaría encabezada por Nesher (1988) y sus trabajos en las estructuras proposicionales. A partir de los trabajos de Vergnaud (1983), Schwartz (1988) opta por clasificar los problemas de estructura multiplicativa en los tres grupos siguientes:

a) problemas de suma repetida o razón (mapping rule).

b) problemas de comparación.

c) problemas asociados al producto cartesiano, que incluirían formaciones, áreas y problemas combinatorios.

En la tabla 1.1 podemos ver cómo se identifican las distintas aportaciones de estos autores.

Vergnaud	**Schwartz-Kaput**	**Nesher**
Isomorfismo entre espacios de medidas	I x E = E'	Razón Comparación
Producto de medidas	E x E' = E''	Producto cartesiano

Tabla 1.1

Maza (1991b), partiendo de Vergnaud (1983), Schwartz (1988), Nesher (1988) y Puig y Cerdán (1988), propone la siguiente clasificación de problemas de estructura multiplicativa, teniendo en cuenta la estructura semántica, el tipo de cantidades y la utilización de la dos formas que puede adoptar la cantidad intensiva: la de razón y la de cuantificador, propuesta también por Schwartz:

1. Problemas de razón (o isomorfismo de medidas o aplicación de una regla):

I. Multiplicación-razón: ExI (razón)=?

I.a Partición[12]-razón: ?xI(razón)=E

I.b Agrupamiento-razón: Ex?(razón)=E

2. Problemas de comparación:

II. Multiplicación-cuantificador: ExI(cuantificador)=?

II.a Agrupamiento-cuantificador: Ex?(cuantificador)=E

II.b Partición-Cuantificador: ?xI(cuantificador)=E

3. Problemas de combinación (o de producto de medidas)

III. Multiplicación-Combinación: ExE=?

III.a División-combinación: Ex?=E

4. Problemas de conversión:

IV. Multiplicación-conversión RR: IxI=?

IV.a División-conversión RR: Ix?=I

V. Multiplicación-conversión CC: IxI=?

V.a División-conversión CC: Ix?=I

VI. Multiplicación conversión RC: IxI=?

VI.a División-conversión RC: Ix?=I

La teoría de los modelos primitivos de Fischbein y otros (1985), **cuarta línea** de investigación, propone la existencia de modelos intuitivos o implícitos para cada operación. "*Cada operación fundamental de aritmética queda ligada a un implícito, inconsciente y primitivo modelo intuitivo. La identificación de la operación necesaria para resolver un problema con dos datos numéricos tiene lugar no directamente sino mediatizado por el modelo. El modelo impone sus propias restricciones en el proceso de búsqueda"* (p. 4).

Según sus resultados, para la multiplicación, el modelo primitivo que poseen los niños es la suma repetida, causa de ello podría ser la forma en que se enseña en

[1] [1]En la literatura esta interpretación de la división recibe el nombre de partición o reparto. En esta memoria utilizaremos el segundo término.

la escuela, pero añade que, el modelo parece corresponder también a hechos de la conducta mental humana, que son primarios, naturales y básicos. En el caso de la división son dos los modelos intuitivos. El más primitivo es el reparto, siendo los problemas de agrupamiento adquiridos posteriormente y como resultado de la instrucción.

Finalmente, Bell y Greer desarrollan sus trabajos prestando particular atención a los efectos asociados a los tipos de números que aparecen en los problemas verbales. Por ejemplo, Bell y otros (1984) analizaron el efecto del tamaño de los números, de la estructura del problema y del contexto en la elección de la operación. Los resultados indican que los efectos de las concepciones erróneas numéricas interactúan con varios aspectos de la estructura del problema y del contexto.

Actualmente, los estudios no se centran en una sola línea, sino que tratan de ver el problema desde ángulos diversos. De Corte, Verschaffel y Van Coillie (1988) señalan que hay muchas similitudes entre la investigación sobre los problemas de estructura aditiva y los de estructura multiplicativa; por ejemplo, en ambos se intenta construir una taxonomía de problemas basada en la estructura semántica y se busca comprender cómo la operación aritmética modela estas estructuras semánticas. Sin embargo, hay importantes diferencias:

1º) La mayor parte de los estudios se han realizado con niños de 10 a 15 años o con adultos (profesores en activo o en formación).

2º) Las técnicas de investigación más utilizadas han sido los tests colectivos de papel y lápiz.

3º) Se ha prestado más atención al tipo de números usados en los problemas que a la estructura del problema como variable.

Entre los trabajos que analizan los problemas de estructura multiplicativa desde una perspectiva semántica, destacamos los trabajos de Harel, Post y Behr (1988), que analizan los problemas de razón y comparación y las investigaciones llevadas a cabo por Castro (1994), referenciadas también en Castro y otros (1991, 1992), que se centran en los problemas de comparación.

Anghileri (1989) y Kouba (1989) analizan el desarrollo de la comprensión de la multiplicación en los primeros años, estudiando igualmente las estrategias que se utilizan en la resolución.

1.4.1.3 Los problemas verbales de dos operaciones

Los problemas de una sola operación han sido ampliamente estudiados y sólo en épocas recientes ha comenzado a emerger una línea de investigación sobre los problemas de dos operaciones.

Los problemas de dos operaciones han demostrado su mayor nivel de dificultad, ya que no sólo aumenta el número de datos conocidos, sino que las relaciones numéricas y los procesos de analizar y razonar son mucho más complejos que en los problemas de una operación.

Un trabajo pionero en este campo es el de Gray y Young (1940, citado por Nesher y Herskovitz, 1994), que sugieren una categorización de los problemas según las operaciones utilizadas y la usan para comparar los niveles de dificultad de los problemas de dos operaciones. Esta categorización la hacen partiendo de las cuatro operaciones básicas y obtienen un total de 16 problemas distintos, pero teniendo en cuenta que algunas de estas operaciones son no-conmutativas (por ejemplo, a: (b+c) y (b+c):a), esto es, tomando en consideración el orden de las operaciones, obtienen 24 problemas distintos. Posteriormente, Mechinskaya (1955), citada por Cao (1990), comprueba también que los problemas que necesitan dos operaciones tienen varias estructuras, lo cual implica que el grado de dificultad es diferente. Jerman y Rees (1972) confirman nuevamente que las operaciones matemáticas son un factor significativo para predecir los niveles de dificultad de dichos problemas.

Los trabajos más recientes son los Shallin y Bee (1985), Cao (1990), Nesher (1991), Hershkovitz y Nesher (1991), Nesher y Hershkovitz (1991), Nesher y

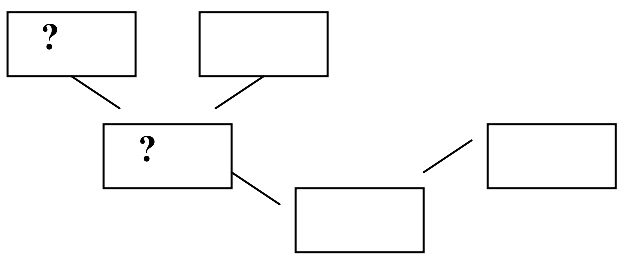
Hershkovitz (1994), Castro y otros (1993), Gutiérrez y otros (1993) y Rico (1994).

Cao (1990) desarrolla un estudio experimental con alumnos de 2º grado, donde a partir de un diseño de instrucción que parte de los problemas de una operación, para llegar a los de dos. Los resultados muestran que si la secuencia de enseñanza es desarrollada correctamente insistiendo en el análisis conciso de dichos problemas, es posible mejorar las habilidades para resolver problemas de dos operaciones.

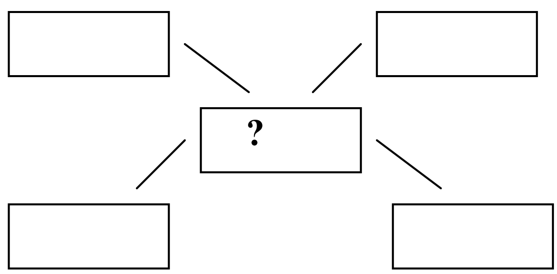
Los trabajos de Hershkovitz y Nesher se centran en el papel que juega la utilización de esquemas en la resolución de los problemas de dos operaciones, resaltando que el estudio de éstos es prácticamente nulo. Los tipos de problemas elegidos son los de dos operaciones, siendo éstas: una suma o una resta y una multiplicación o una división, analizando tres factores: los esquemas, las operaciones y el contexto.

Los tipos de esquemas usados, y presentados ya por Shalin y Bee (1985), son:

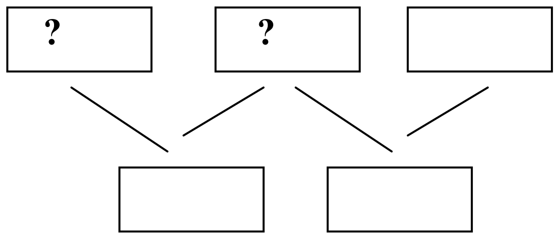
<u>Esquema H (Jerárquico)</u>: El todo de un esquema se convierte en una parte del otro esquema.



<u>Esquema S-W (Todo compartido)</u>: Los dos esquemas comparten un todo.



Esquema S-P (Parte compartida): Los dos esquemas comparten una parte.



Sus resultados indican que los esquemas y las operaciones, por este orden, son las variables que afectan el nivel de dificultad de los problemas dados.

A diferencia de Hershkovitz y Nesher, los trabajos de Rico y otros analizan los problemas de dos operaciones, limitándose a (+,+) o (-,-), pero teniendo en cuenta la variable semántica. Hacen una primera clasificación de estos problemas (Gutiérrez, Rico y otros, 1993), atendiendo a tres características: las operaciones (con cuatro posibilidades), la estructura semántica (16 posibilidades) y la estructura ordenada de las operaciones (limitada a una opción), obteniendo 64 tipos de problemas distintos. Estos problemas fueron presentados a alumnos de 9 a 11 años (Castro, Rico y otros, 1993), sus objetivos, entre otros, fueron estudiar las diferencias de ejecución de los escolares de 4º, 5º y 6º Curso y las dificultades asociadas a las distintas estructuras semánticas. Los resultados apuntan a que existen diferencias significativas por curso y también por la estructura semántica y por la operación (Rico, 1994).

1.5 EL DOMINIO AFECTIVO: LAS ACTITUDES DE LOS ALUMNOS

La investigación en educación matemática se ha centrado prioritariamente en el dominio cognitivo; por el contrario, el ámbito afectivo ha estado tradicionalmente relegado a un segundo plano. Sin embargo, cada vez existe una mayor conciencia de la influencia de los aspectos afectivos en la educación. Aiken (1976) señaló que entre 1970 y 1975 aparecieron más estudios sobre las actitudes matemáticas que en los 10 años anteriores, habiéndose incrementado notablemente en la actualidad la cantidad de investigaciones en este campo (McLeod, 1989, 1992).

Los aspectos afectivos engloban un amplio número de conceptos y fenómenos, tales como sentimientos, emociones, creencias, actitudes, etc., cada uno de los cuales no está perfectamente delimitado, y, éste es uno de los problemas que encontramos en las investigaciones sobre este dominio, la falta de clarificación de los términos utilizados. Esta dificultad no afecta sólo a los trabajos hechos por educadores matemáticos, sino que incluye igualmente los hechos por los psicólogos. Frecuentemente, muchos de estos aspectos son presentados en la literatura como actitudes; sin embargo, McLeod (1992) opina que no es adecuado describir algunas de las reacciones emocionales más intensas que se producen en las aulas con dicho término. Por ejemplo, la experiencia ¡Ajá! en resolución de problemas es reconocida como un suceso placentero, pero de una duración limitada, y por tanto, parece que no entraría dentro de lo que la mayoría de los investigadores entienden por actitud.

McLeod (1994), al revisar los trabajos de investigación sobre procesos afectivos y aprendizaje de las Matemáticas, que han sido publicados sólo en el Journal for Research in Mathematics Education desde el año 1970 hasta ese momento, afirma que los estudios sobre temas afectivos se han colocado como un aspecto central entre los fines de la educación matemática y los de dicha revista, calculando en torno a los 100, los artículos publicados en estos 25 años. Los primeros trabajos tienen que ver básicamente con la actitud, incluyendo posteriormente creencias sobre las Matemáticas y estudios sobre reacciones emocionales intensas de los alumnos hacia la materia. Entre éstos, destacan los trabajos de Schoenfeld (1987), que identifica como punto importante el estudio de las creencias de los alumnos sobre la Matemática, sugiriendo que las mismas afectan al cómo los alumnos se enfrentan a un problema, e incluso a las ideas y a los recursos cognitivos que utilizan (p. 157), o Goldin (1987) que incluye en su modelo de competencias el sistema de representación afectivo, construyendo caminos afectivos que atraviesan los alumnos cuando se enfrentan a la resolución de un problema (Goldin, 1988). Unas veces, estas reacciones intensas son positivas si el alumno avanza en la resolución y otras, negativas cuando se bloquea y no consigue el fin previsto. De Corte (1993) coincide en que el estudio de las actitudes positivas o negativas hacia una variedad de aspectos matemáticos, goza de mayor tradición que el análisis de las creencias y emociones.

El dominio afectivo empieza a cobrar importancia en la medida en que los educadores se dan cuenta de la influencia que éste tiene sobre el aprendizaje escolar. Beltrán (1985) señala que "*hay necesidad de investigación básica sobre los factores causales de las actitudes en general y, sobre todo, de las actitudes escolares, así como de las condiciones que favorecen el desarrollo de las actitudes positivas hacia las distintas materias de estudio, teniendo en cuenta las características de los estudiantes y la situación específica en que se encuentran. Debe también centrarse la investigación sobre la interacción de los individuos con la organización escolar, las características del grupo y el modo en que estas interacciones afectan a las actitudes. Y, por último, conviene desplazar el estudio desde el rendimiento, donde ha estado excesivamente centrado, a las actitudes hacia el aprendizaje como tal, la escuela, los profesores, las áreas vocacionales o la identidad del papel sexual*".

Los educadores son conscientes de que los estudiantes aprenden en la escuela no sólo contenidos conceptuales, sino también normas de interacción, concepciones sobre el mundo, actitudes hacia lo que les rodea. Una de las primeras preocupaciones de los investigadores en el dominio afectivo, fue la de tratar de relacionar el rendimiento hacia las materias con la actitud que los alumnos sienten hacia ellas, especialmente hacia las Matemáticas, quizá por ser la materia que más sentimientos contrapuestos provoca.

1.5.1 El dominio afectivo y las teorías psicológicas

McLeod (1992) hace una revisión de las teorías psicológicas en relación con el dominio afectivo. Considera que la influencia del conductismo en psicología educativa en este siglo, ha sido un factor importante en el abandono del dominio afectivo. Cita a Skinner (1953), el cual describe las emociones como ejemplo de constructos imaginarios que se presentan como causas de conducta. Los conductistas no se han interesado en analizar los procesos relacionados con las respuestas afectivas, sobre todo porque estos datos se obtienen a través de la introspección o de entrevistas. Con el desarrollo de la psicología cognitiva, se ha dado un fuerte impulso al estudio del dominio afectivo, en particular de las actitudes. En los últimos 20 años, el porcentaje de investigación dirigida a la actitud de los alumnos hacia las Matemáticas ha aumentado considerablemente, convirtiéndose en un tópico de gran interés para los investigadores.

Una de las primeras dificultades de estas investigaciones es la ausencia de una teoría general para el dominio afectivo. McLeod se inclina por la teoría general de Mandler, que desarrolla primeramente en el año 1984, y que, posteriormente, aplica sus ideas a los problemas en educación matemática (Mandler, 1989).

De forma resumida, la teoría de las emociones de Mandler, desarrollada a partir del enfoque del procesamiento de la información, ofrece un marco para describir y explicar las reacciones emocionales de los alumnos ante tareas y problemas matemáticos. Mandler distingue dos grandes aspectos en el análisis que realiza de las emociones: la actividad fisiológica y el análisis cognitivo del significado. La activación está provocada por la interrupción de una secuencia de pensamientos y acciones planificadas, basada en esquemas, secuencia que puede no tener éxito o no ser la apropiada en la situación en la que se está ejecutando. Este bloqueo o estas discrepancias originan una respuesta fisiológica, que es percibida por el individuo como un incremento en el pulso o una tensión muscular, debidas al incremento de la actividad del sistema nervioso autónomo. Junto con esta activación el sujeto analiza y evalúa la nueva entrada de información y el significado de la interrupción. El resultado de esta evaluación desencadenada por los esquemas, junto con la activación produce la experiencia de una emoción tal como desilusión, frustración, rabia, satisfacción, etc. Las respuestas sirven como mecanismos para redirigir la atención del individuo y tienen un valor de supervivencia, que posiblemente juegue un papel en el desarrollo evolutivo.

McLeod (1992) concluye que estas interrupciones tienen varias posibilidades de análisis. Primero, los conocimientos del individuo y las creencias juegan un papel importante en la interpretación de la interrupción. Segundo, la excitación que sigue a la emoción es generalmente de duración limitada y tercero, las interrupciones repetidas en el mismo contexto se convierten en emociones cada vez menos intensas, pero que generan actitudes negativas. Esta descripción de cómo se produce una emoción se ajusta muy bien a la resolución de problemas, concebida ésta como la situación en la que una persona se enfrenta a una tarea para la que no dispone de una solución. Así, el alumno que repetidamente falla en los problemas, siente emociones negativas, que dan origen a actitudes negativas hacia las matemáticas.

McLeod (1992), basándose en los análisis teóricos de Mandler (1984) y en estudios empíricos en clases de Matemáticas, propone englobar las respuestas afectivas del alumno en tres grupos: creencias (sobre las matemáticas, sobre sí mismo, sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre el contexto social), actitudes y emociones.

Creencias, actitudes y emociones son términos usados para describir un amplio rango de respuestas afectivas hacia las matemáticas. Las creencias y actitudes son generalmente estables, pero las emociones pueden cambiar rápidamente. También varían en el nivel de intensidad , considerándose “frías” a las creencias, “tibias” a las actitudes y “calientes” a las emociones. Al mismo tiempo parece evidente que, aunque la cognición y el afecto se hallan entrelazados en todas las reacciones, podrían ser las creencias el punto de conexión.

1.5.2 Las actitudes

Dentro de este amplio campo del dominio afectivo, nos vamos a centrar en las actitudes. Una de las primeras dificultades que encontramos al abordar este aspecto, es la propia definición del término. Kulm (1980) cita varias definiciones de *actitud* de raíz behaviorista. La primera es la de Allport (1935), que la define como *"un estado mental y neural, organizado a través de la experiencia y que ejerce una influencia directa y dinámica sobre la respuesta de un individuo a todos los objetos o situaciones con las que está relacionado"*.

A continuación, cita la de Rokeach (1972) que, aunque posterior en el tiempo, no ha cambiado mucho: *"actitud es una organización de varias creencias centrada en un objeto específico o una situación que nos predispone a responder de una manera preferente"*.

Krathwohl, Bloom y Masia (1964, citados también por Kulm) elaboran una taxonomía del dominio afectivo. Su objetivo es ayudar a los educadores a desarrollar y medir objetivos afectivos. Ellos ven las conductas afectivas como un continuo jerárquico. En el nivel más bajo (recibir), los estudiantes son sólo conscientes de los fenómenos. Luego, tienen sentimientos sobre ellos (responder), e incluso logran interactuar con ellos (valorar). En el nivel siguiente, conceptualizan su conducta y sus sentimientos (organizar) y, finalmente, desarrollan una filosofía consistente (caracterizar).

Las actitudes hacia las Matemáticas no tuvieron en un primer momento una definición concreta, sino que más bien se definían por los propios instrumentos utilizados para estudiarlas. Sin embargo, Kulm (1980) cita dos definiciones de actitud hechas explícitamente hacia las Matemáticas. La primera la de Romberg y Wilson (1969), los cuales la describen así: "*Si un individuo tiene un conjunto de predisposiciones hacia un objeto de su entorno (p.e. matemáticas, sobre sí mismo, escuela, profesor, etc) es razonable esperar que tal predisposición interactúe con la percepción del objeto, de forma que afecte la respuesta del individuo hacia dicho objeto"*.

Mientras, Aiken (1972) establece que "*el término actitud se ha usado en muchos estudios para referirse a cosas similares a diversión, interés, e incluso a nivel de ansiedad"*.

Más recientemente, Matos (1991) cita alguna de éstas y añade otras, por ejemplo la de Glencross (1984), cuya idea está basada en un concepto unidimensional traducido por una predisposición aprendida para responder de forma favorable o desfavorable, pero siempre consistente, en relación a un objeto dado, o la de Triandis (1971, citada por Matos), con tres componentes caracterizadoras del concepto: cognitiva, afectiva y comportamental.

Matos afirma que las diferentes aproximaciones al término actitud tienen en común la consideración de la existencia de un mundo exterior, en relación al cual las personas actúan, y previene que este tipo de perspectiva minimiza los aspectos sociales del aprendizaje, que consideran el objeto de la actitud definido previamente, sin depender del alumno y que tiende a explicar las actitudes a través de factores que no han partido del propio alumno.

Hart (1989b) afirma que la mayoría de los psicólogos definen la actitud como una predisposición a responder favorablemente o no, hacia un objeto dado (en nuestro caso, hacia las Matemáticas o hacia la resolución de problemas). Esta definición tiene tres componentes: una reacción afectiva o emocional hacia el objeto, una conducta hacia el objeto y unas creencias sobre el objeto. En otras palabras, una actitud positiva o negativa hacia las Matemáticas se infiere de la propia conducta de aproximación o alejamiento de las Matemáticas y de las propias creencias sobre lo que son las Matemáticas y cómo pueden ser usadas.

1.5.3 Investigaciones sobre las actitudes de los alumnos hacia las Matemáticas

Presentamos a continuación un resumen, aunque breve, significativo de los principales resultados obtenidos en los últimos años sobre la actitud de los alumnos hacia las Matemáticas.

Las revisiones más importantes sobre este tema son las siguientes: Kulm (1980), Bell y otros (1983), Leder (1992, 1993) y McLeod (1989, 1992, 1994). En España, la investigación más importante es la de Gairín (1990). A continuación, las describimos e incluimos otras investigaciones no citadas en ellas.

Primera revisión:

Kulm (1980) intenta hacer una descripción teórica del estado de las investigaciones sobre las actitudes, aunque cita algunas investigaciones concretas. Establece que hay 5 categorías que pueden ser medidas dentro de la actitud hacia las Matemáticas: Contenido matemático, características matemáticas, prácticas de enseñanza, actividades en clases de Matemáticas y profesor de Matemáticas, y esto a su vez en 3 poblaciones que serían los alumnos, sus profesores y otros. Sin embargo, concluye que las diferentes investigaciones sobre los tópicos señalados, o son pocas o no son claras. Por ejemplo, afirma que ha encontrado muy pocos trabajos sobre contenidos específicos (geometría, fracciones, problemas verbales,...).

Para presentar un resumen de las investigaciones sobre las actitudes, las engloba en 4 áreas principales: relación entre actitudes y logros; factores relacionados con las actitudes; relaciones entre actitudes de padres, profesores y alumnos; e intentos para mejorar las actitudes. Señala también que otros estudios se han encaminado hacia la actitud de los profesores en formación, especialmente los de enseñanza primaria.

1º) La relación entre actitudes y logros es una de las áreas que más atención ha recibido: tratar de investigar qué tipo de relación existe entre las actitudes de los alumnos y su rendimiento en esta materia. Los primeros resultados presentados por Crosswhite (1972) indican que la correlación, aunque positiva, es baja. Pocos estudios han tratado de relacionar estas variables a largo plazo y ver cómo se van cambiando las actitudes (Crosswhite, 1972; Beattie, Deichmann y Lewis, 1973).

Otros estudios (Cohen, 1971; Carman, 1975; Pavlic, 1975) han comenzado a comparar la efectividad de diseños instruccionales innovadores con prácticas tradicionales, pero generalmente sólo indican si los grupos experimentales difieren o no, con respecto al logro o a la actitud. Concluye Kulm, argumentando que la búsqueda de la relación causal entre actitud y rendimiento, tendría una gran importancia para la actitud hacia las Matemáticas.

2º) Entre los factores relacionados con las actitudes, es el sexo el que más atención ha recibido. Hay evidencias que las actitudes hacia las Matemáticas de los hombres y las mujeres son distintas, así como sus cambios en los distintos niveles (Crosswhite, 1972; Fennema, 1974). Otros factores que han sido estudiados son los referidos a: cursos, motivación, status socio-económico, raza, ansiedad, estilo de aprendizaje y preferencia vocacional.

3º) Las actitudes de los padres podrían constituir un factor extremadamente importante para determinar las actitudes y los logros de los alumnos, pudiendo mitigar la mayor parte de los efectos positivos o negativos de los profesores. Las actitudes de los profesores tienen, también, un papel importante al formar actitudes, ya que ellos juegan el principal papel en los logros de sus alumnos y pueden también transferirles sus propias actitudes hacia las Matemáticas. Sin embargo, muy pocas respuestas se han dado a estas afirmaciones. Los estudiantes tienen buenas actitudes cuando perciben que las matemáticas son útiles y han tenido buenos profesores (Callahan, 1971) y desarrollan actitudes negativas cuando no tienen éxito en sus tareas o no encuentran interés en las Matemáticas (Selkirk, 1975).

4º) Como intentos para mejorar las actitudes aparecen muchos trabajos que realmente tienen que ver con la categoría "estudios de métodos", porque generalmente lo que tratan es de verificar los cambios producidos por un diseño instruccional innovador, más que de mejorar actitudes.

Sin embargo, los datos sobre las actitudes pueden ser extremadamente útiles para evaluar los efectos de innovaciones curriculares o instruccionales. Pocos son los estudios que cuidan las razones teóricas, los problemas del diseño y las medidas de las actitudes, en la misma medida que cuidan lo relacionado con el conocimiento. Los estudios de este tipo se han hecho en diferentes niveles, desde alumnos de 7º grado hasta personas adultas.

Existe una necesidad de explorar la naturaleza de la mejora de la actitud y de su cambio, teniendo en cuenta diferentes variables, entre ellas, la edad del sujeto.

Hay algunas evidencias de que las actitudes matemáticas se forman fundamentalmente entre los cursos 4º y 8º (Callahan, 1971; Malcolm, 1971).

Kulm señala, finalmente, dos razones por las cuales es importante y abundante la investigación con los profesores en formación. La primera, por la posible influencia sobre las actitudes de sus futuros alumnos, pero además porque ayudaría a comprender mejor la formación de las actitudes. La segunda razón, es más práctica, por la facilidad para trabajar con estos estudiantes.

Kulm concluye reafirmando la necesidad de desarrollar estudios sobre la actitud de los alumnos y sus posibles cambios y las relaciones causales con otros factores.

<u>Segunda revisión</u>

<u>Bell y otros (1983)</u> hacen una amplia revisión de las investigaciones llevadas a cabo en el Reino Unido y USA y, aunque señalan que no quieren hacer una clasificación de las mismas, las agrupan en ciertas áreas, que citamos a continuación:

<u>1.- Estudios que intentan investigar y describir las actitudes de los niños hacia las Matemáticas consideradas como un todo.</u>

Sharples (1969) comparó la actitud (entendida como gusto-disgusto) de alumnos de 9 a 11 años hacia varias materias (matemáticas, lengua, arte y educación física) y encontró que en todas las clases, las matemáticas ocupaban con respecto a la actitud una posición baja, no habiendo diferencias por sexo, y que las actitudes eran menos positivas a medida que el curso ascendía.

Greenblatt (1962) pidió a los niños que escribieran, por orden de preferencia, tres materias de la escuela. Los resultados son muy distintos de los de Sharples, pero es posible que pedir a los niños un listado no sea un instrumento adecuado.

Un trabajo de Levine (1972) comparó 4 materias (Matemáticas, Inglés, Ciencias y Sociales), pidiendo a los alumnos, a sus padres y a sus profesores que reflejaran sus percepciones sobre la importancia de ellas, su propio interés y habilidad en la materia y la competencia de los profesores en la misma. Los resultados sugieren que las Matemáticas tienen una aceptación más favorable que las otras, aunque en su trabajo el término “favorable” implica más dimensiones que las que considera Sharples.

Gopal Rao (1973) desarrolla su investigación con alumnos hasta niveles de Secundaria y considera algunos factores que cree que pueden afectar a las actitudes. Encuentra que las Matemáticas es tan pronto una materia que les gusta como que les disgusta fuertemente a los alumnos de Primaria, esto es, hay una considerable polarización y es sobre los 11 años cuando parece que las actitudes están bastante definidas. Suelen ser menos favorables durante los primeros años de Secundaria y se estabilizan otra vez sobre los 14 años. También encontró una correlación significativa entre las actitudes de los padres y las de sus hijos hacia las Matemáticas. Después de la escuela, los chicos tienen generalmente una actitud más favorable que las chicas, pero todos creen que las matemáticas son útiles.

El trabajo citado de Callahan (1971) en USA, mostró la misma polarización (agrado-extremo desagrado) con alumnos de 11 a 14 años y estableció también la edad de 11 años como la idónea que se establezcan las actitudes. Encontró también que la creencia que “la matemática es útil” (66% dicen que es tan o más importante que cualquier otra materia) es una de las razones de los alumnos para gustarles las Matemáticas.

<u>2.- Estudios que intentan establecer comparaciones de actitudes hacia diferentes temas dentro de las matemáticas.</u>

Kyles y Sumner (1977) confirmaron que las Matemáticas son consideradas útiles por los alumnos de Primaria y Secundaria; éstos últimos reconocen esta importancia de cara a futuros empleos, pero la materia no es del agrado de la mayoría de los alumnos de Primaria y son consideradas absorbentes en Secundaria. En su análisis consideraron dos dimensiones: la facilidad y el agrado. En cuanto a la “facilidad”, los alumnos coinciden con sus profesores y en cuanto al “agrado”, los problemas verbales son más aceptados que otros problemas de álgebra, geometría, etc.

El Informe APU Primary Survey (1980) reveló también la fuerte tendencia de los alumnos para encontrar útiles las matemáticas. Se les preguntó si disfrutaban de las Matemáticas y la respuesta mayoritaria fue "algunas veces"; agrado y dificultad no se pueden atribuir a la materia completa, sino que están asociadas con tópicos específicos y formas de presentación.

El APU encontró pequeñas diferencias entre los chicos y las chicas, en aspectos muy concretos. Por ejemplo, las chicas son más propensas a sentirse inseguras que los chicos.

3.- Estudios sobre las percepciones de los alumnos sobre lo que son las Matemáticas.

Preston (1980) identificó, a través de análisis factorial, tres facetas definidas de conducta:

a) Tendencia a ver las Matemáticas como una materia algorítmica, mecánica y algunas veces estereotipada.

b) Tendencia a ver las Matemáticas como un conjunto abierto-cerrado, intuitivo y heurístico.

c) Compromiso, interés y aplicación hacia las Matemáticas.

4.- Estudios sobre las interacciones existentes entre actitudes y logros.

Los estudios relativos a analizar la correlación entre actitudes y logros son contradictorios. Hart (1976) realizó un resumen sobre ellos y comentó que, incluso cuando aparece una correlación significativa, es difícil determinar si la actitud es la que afecta al rendimiento o es al revés.

5.- Estudios para descubrir cómo las actitudes hacia las Matemáticas influyen en las elecciones académicas posteriores de los alumnos.

Los estudios realizados por Stoodley (1979), Kempa y McGough (1977) y Selkirk (1972), encontraron, en general, que son múltiples las variables que inciden en la elección futura de cursos de Matemáticas, y que el agrado hacia la materia parece ser más determinante que la facilidad o la utilidad percibida. De hecho, encontraron alumnos que ejecutaban bien las Matemáticas, pero que las percibían como una materia difícil.

En resumen, lo más destacado es que hay una fuerte polarización de las actitudes en la Escuela Primaria, siendo los 11 años la edad crítica para el establecimiento de las actitudes; que parece existir (aunque no muy fuerte) alguna relación entre las actitudes de los profesores, de los padres y de la escuela como un todo con la de los alumnos, y que al avanzar en los cursos se observa un declive de las actitudes, que puede ser parte de un declive en las actitudes positivas hacia todas las materias y que forma parte de una aproximación más crítica a muchos aspectos de la vida.

Tercera revisión:

McLeod (1992) hace una amplia revisión, apoyándose en la clasificación del dominio afectivo que ya hemos comentado. Entre los resultados más importantes, resalta que la mayor parte de los estudios de evaluación proveen datos sobre actitudes hacia las Matemáticas. Cita datos de la Evaluación Nacional, cuyos principales resultados son: hay una correlación positiva entre actitud y rendimiento en los tres cursos evaluados (cursos 3º, 7º y 11º), pero el porcentaje de estudiantes que dicen disfrutar con las Matemáticas disminuye del 60% en el curso 3º al 50% en el curso 11º. Similares resultados aparecen en el II Estudio Internacional de las Matemáticas (Robitaille y Garden, 1989).

Sin embargo, no está claro que la actitud influya sobre el rendimiento ni éste sobre la actitud, sino que ambos interactúan de forma no establecida aún. Por ejemplo, los datos del II IEA muestran que los estudiantes japoneses que obtienen altos rendimientos en matemáticas, exteriorizan su disgusto hacia ellas.

Cuarta revisión:

La revisión hecha por Leder (1993) sobre los artículos presentados en los Congresos del PME (1983-1992), muestra que éstos se han hecho en una amplia variedad de situaciones educativas y geográficas; desde el curso 1º hasta personas adultas, y países como USA, Israel, Australia, Brasil, Sudáfrica, Reino Unido, Zimbabwé, ..., por citar algunos. Sin embargo, la mayor parte de los estudios sobre actitudes se han realizado sobre poblaciones de alumnos mayores o adultos. De los 38 que cita sólo cinco se han hecho con niños menores de 12 años, tal como se muestra en la tabla 1.2.

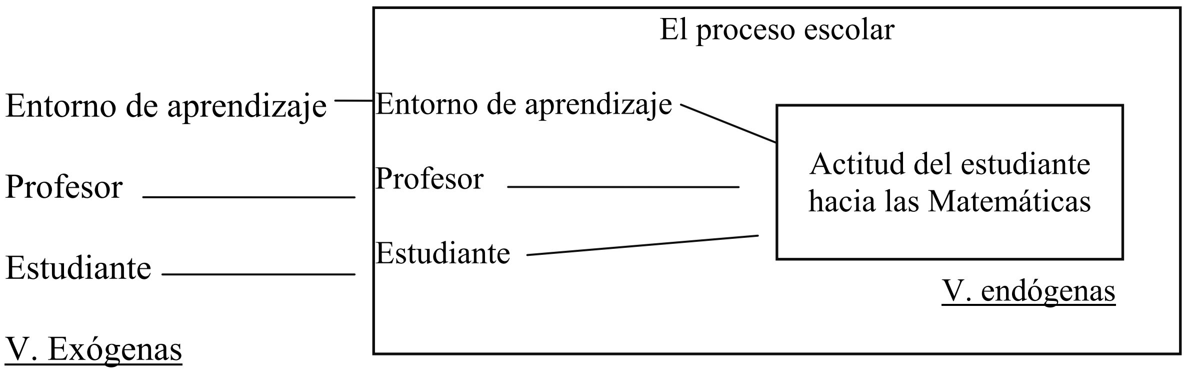
Autor	Año	Muestra	Instrumento y variable afectiva
Abreu y otros	1992	8-16 años	entrevistas (creencias-actitudes)
Leder	1989	grados 3-6	entrevistas (actitudes)
Miller	1987	grados 1-12	escalas (Likert), entrevistas (actitudes)
Schroeder	1991	grado 4	escalas (Likert), entrevistas (actitudes)
Yackel y otros	1989	grado 2	observaciones (emociones)

Tabla 1.2

Otras investigaciones:

Shaughnessy, Haladyna y Saughnessy (1983) desarrollan un estudio para tratar de valorar la influencia de las relaciones entre los estudiantes, profesores y entorno de aprendizaje sobre la actitud de los alumnos hacia las Matemáticas, en diferentes niveles. Para ello, proponen un modelo que incluye dos dimensiones de las variables: contenido y foco. Contenido se refiere a las dimensiones implicadas en el proceso escolar y el foco está representado por dos tipos de variables: exógenas y endógenas, y engloba desde las relaciones de las variables hasta la organización o institución que es estudiada. Las variables exógenas de los estudiantes se localizan fuera de la institución escolar y no tienen una influencia directa o fuerte sobre las actitudes de los mismos. Ejemplos de variables exógenas de los estudiantes son el sexo, el status socioeconómico, etc. Las variables exógenas del profesorado se eliminaron por no encontrar relación con la actitud del alumno. Las variables endógenas están dentro del proceso escolar y pueden tener una influencia más directa sobre las actitudes. Ejemplos de éstas serían las actitudes de los alumnos, el entusiasmo del profesor, la metodología de la clase, etc.

El modelo que presentan es el siguiente:



Participaron más de 2.000 alumnos de 4º, 7º y 9º curso. Sus resultados sugieren que las variables estudiante, profesor y entorno de aprendizaje están fuertemente relacionadas con la actitud hacia las Matemáticas. Entre las variables endógenas encontraron, por ejemplo, cómo la percepción del estudiante de su propia habilidad afecta su éxito escolar, sobre todo en los cursos superiores. Casi todas las variables endógenas del profesor se correlacionaron fuertemente con la actitud también en los grados superiores, así como diversas variables relacionadas con el entorno, tales como satisfacción en la clase, uso de materiales, etc.

El estudio internacional IEA II (Robitaille y Garden, 1989), realizado en 20 países sobre dos poblaciones de 14 y 18 años, encontró amplias diferencias en las medidas sobre creencias y actitudes, al igual que en rendimiento. Los instrumentos de medida usados fueron cuestionarios de lápiz y papel (escalas Likert), de aproximadamente 100 ítems, a través de los cuales valoraron aspectos como las matemáticas en la escuela, la ayuda que recibían en sus casas, las matemáticas y ellos mismos, la ansiedad matemática, los estereotipos sexuales, las matemáticas como proceso y las matemáticas y su utilidad.

Hart (1989a) hace un estudio con alumnos de 7º Curso con el objetivo de comparar los procesos en las clases de chicos y chicas, que difieren en la confianza en su propia habilidad para aprender matemáticas. Los resultados de este estudio indican que los chicos y chicas que puntúan por encima de la media en rendimiento matemático, participan de forma diferente en los procesos de la clase. También encontró una participación diferente entre los estudiantes de alta y baja confianza en sí mismos, pero en este caso no hubo diferencias entre los sexos.

Matos (1991) presenta 4 cuestiones fundamentales relativas al estudio de las actitudes de los alumnos hacia las Matemáticas:

1. El estudio de las actitudes de los alumnos constituye una de las preocupaciones más importante de los investigadores en educación matemática. Los estudios realizados en este dominio hasta este momento, reafirman la importancia del estudio de las actitudes de los alumnos y de los profesores, e indican como los factores que originan esas actitudes y cuáles pueden producir cambios en ellas.

2. La conceptualización de las actitudes como construcción de los alumnos, permite fundamentar un análisis de las actitudes ligadas a sus concepciones y creencias acerca de las Matemáticas.

3. El estudio de las actitudes desde un punto de vista constructivista, puede aportar datos importantes para la comprensión de los procesos de consolidación y cambio de las actitudes hacia las Matemáticas.

4. La metodología adecuada de investigación debe agrupar distintas estrategias; partiendo de una primera recogida de datos y de una formulación de categorías, se establece una serie de conjeturas que, posteriormente, serán observadas y confirmadas.

McLeod (1994) revisa los artículos sobre actitudes, creencias de los estudiantes y aprendizaje de las matemáticas y respuestas emocionales hacia las matemáticas, publicados en el JRME en los 25 años de publicación. Sus conclusiones se dirigen hacia los métodos de investigación, argumentando que la mayor parte de los trabajos realizados han implicado el uso de cuestionarios y métodos cuantitativos, los cuales han producido una amplia y útil información sobre el tema, pero que es necesario complementar estos datos con estudios de tipo cualitativo.

En España, el trabajo más importante sobre actitudes hacia las Matemáticas es el desarrollado por Gairín (1990).

Gairín define la actitud como una predisposición a actuar y pensar de una determinada forma. Hace una revisión de las investigaciones, considerando las siguientes variables: personales, familiares, escolares y estudios multidimensionales. En esta memoria citaremos exclusivamente los relacionados con las variables personales.

Variables personales:

a) Sexo: Es una de las variables más estudiadas en su relación con diferentes componentes de la actitud. Los resultados más admitidos son:

1. Las diferencias entre sexos son mínimas en la escuela elemental y presentan algunas diferencias a partir de los 12 ó 13 años.
2. Las diferencias se observan en aptitudes, en las elecciones de cursos de matemáticas y en los rendimientos obtenidos.
3. Las diferencias se dan en todos los países como se puede observar en los estudios internacionales (IEA).
4. La superioridad de los chicos se muestra, fundamentalmente, en su mayor habilidad y juicio espacial y en el recuerdo, combinación y aplicación de conocimientos relacionados con un problema determinado. Sin embargo, las chicas obtienen rendimientos similares o más altos a los de los chicos en problemas

aritméticos o algebraicos.
5. La superioridad de la habilidad espacial de los chicos y su importancia en el rendimiento matemático, afecta a ámbitos específicos y depende de los instrumentos de medida.
6. Los mayores factores predictores para la continuación de estudios matemáticos son la evaluación subjetiva que se hace de su utilidad y de la seguridad que proporcionan. La seguridad de las chicas es inferior a la de los chicos y la importancia vital que le dan a esta materia, es sensiblemente inferior.
7. En la actividad matemática, inciden factores culturales, entre los que no hay que olvidar la estereotipación sexual que se hace de los trabajos y la conceptualización de las expectativas y atribuciones del éxito que se realizan.
8. Los resultados académicos diferentes entre sexos están relacionados con el clima escolar.

Son, pues, variados los factores que explican las diferencias de rendimiento en matemáticas entre chicos y chicas, pero estas diferencias están relacionadas con otros factores educativos y culturales. Fennema y Sherman (1977) hicieron un estudio sobre 3.000 alumnos de los grados 6-12 años, utilizando diferentes escalas de actitudes (8), centrándose en diferentes aspectos de la actitud. Sus resultados apuntan a que las diferencias de actitud entre los sexos se deben a la mayor confianza de los chicos en su habilidad matemática y al mayor rechazo propio de las chicas por creer éstas que las matemáticas son un dominio del hombre.

Preece y Sturgeon (1980) comprobaron también que las actitudes positivas disminuyen con la edad y de forma más acusada en las chicas.

Estos resultados se oponen a los de Sharples, quien no encontró diferencias de edad o sexo entre los alumnos respecto a las actitudes favorables a una materia sobre otra.

b) Edad: Los estudios reseñados por Gairín (Fennema y Sherman, 1977, y Preece y Sturgeon, 1980), muestran cómo la actitud positiva disminuye con la edad, haciéndose particularmente manifiesta esa reducción en la adolescencia. Dutton

(1968) concluye que los cursos 4º a 8º, es el periodo más crucial en el desarrollo de las actitudes a favor o en contra de la aritmética. También algunos profesores afirman que la actitud negativa aumenta con la edad (Gairín, Fernández y Ferreres, 1985).

Miller (1987) analizó las actitudes de los estudiantes desde el curso 1º hasta el 12º y trató de identificar otros factores que contribuyen al desarrollo de sus actitudes. Utilizó tres técnicas de recogida de datos (entrevistas, una escala revisada de actitud hacia las matemáticas y un cuestionario). Sus resultados confirmaron que los cursos 7º, 8º y 9º constituyen el periodo de tiempo crucial en el desarrollo de la actitud hacia las Matemáticas, que los estudiantes perciben las matemáticas como útiles, pero dudan cuando se les pide que especifiquen cómo es útil; encontró una correlación positiva entre la puntuación y la actitud y, si se considera el éxito como un constructo de la actitud, emergen las diferencias relacionadas con el sexo.

c) Personalidad: La personalidad se presenta como otro factor determinante en la actitud hacia las diversas materias. Así, las actitudes positivas hacia las matemáticas vienen asociadas con un alto sentido del valor personal y de la responsabilidad, modelos sociales altos, una alta motivación para el rendimiento académico y gran libertad para elegir opciones.

Otro aspecto, considerado de sumo interés, es la ansiedad. La ansiedad hacia las matemáticas ha sido definida como el conjunto de sentimientos de tensión, desvalimiento, indefensión y desorganización mental que una persona sufre cuando es instada a manipular números o a resolver problemas de matemáticas (Polaino-Lorente, 1993). Es más frecuente en las mujeres, aunque se observa que este dato tiende a igualarse y, según parece, podría estar relacionado con las percepciones que el alumno tiene acerca de sus habilidades para esta materia; intervienen también el modo en que el alumno percibe cuál es el valor de las matemáticas, y las expectativas que tiene respecto de cuál será su rendimiento.

Gairín (1986) desarrolló una investigación global para estudiar las actitudes de los alumnos de EGB de diferentes centros en relación a variables personales, familiares y curriculares, estableciendo comparaciones entre Barcelona, el resto de Cataluña y el resto de España. Sus conclusiones confirman la asociación entre los factores personales, familiares y curriculares y la actitud hacia las matemáticas: la no influencia significativa del sexo, y una relación entre la actitud y la edad, la tipología del centro, la zona donde se ubica y las elecciones por preferencia o importancia que se hacen de las materias del curriculum.

En la Universidad de La Laguna, Quiles (1986) desarrolla una tesis doctoral, titulada *La actitud y el rendimiento escolar en matemáticas: un acercamiento multidimensional*. El propósito de su trabajo es profundizar en la relación entre la actitud hacia las matemáticas y el rendimiento en dicha asignatura, observando la actitud del alumno, la de su profesor y la de sus padres en el mismo contexto de investigación. Este trabajo se realizó con 600 alumnos de 5º de EGB, sus padres (300 en total) y sus profesores (24), mediante tres escalas de actitud matemática tipo Likert. Sus resultados ponen de manifiesto que existe una relación significativa y positiva (aunque baja) entre las actitudes paternas y el nivel de rendimiento logrado por el niño. Las actitudes del profesor parecen no afectar al nivel del rendimiento del alumno; resultado que estima sorprendente y que atribuye a los propios instrumentos utilizados en la investigación, además de no haber estudiado la eficacia del profesorado en la enseñanza de las Matemáticas.

Finalmente, al tratar de determinar la importancia de la actitud matemática del alumno como predictora del rendimiento, se hace patente la controversia existente en este campo. Termina, pues, señalando que la actitud, junto a las variables aptitudinales o las habilidades que el niño posee, explica el porcentaje de varianza más destacado en la nota final de éste.

Quiles (1993) resalta la importancia que la Psicología Social de la Educación ha dado al estudio de las actitudes y presenta las principales tesis que se mantienen con respecto a la relación entre actitud y conducta.

La primera tesis, establece que las correlaciones halladas entre actitud y rendimiento, aunque significativas, son relativamente bajas, dándose esta circunstancia en todos los niveles escolares y de diferente origen nacional. Coinciden con estos resultados los trabajos de Aiken (1976) y Kulm (1980). La actitud matemática estaría relacionada tanto con la calificación real como con la deseada. Cita los resultados obtenidos por Jackson (1974), quien confirma que la conexión actitud-rendimiento en matemáticas sólo se da cuando las actitudes son extremas, esto es, cuando son muy positivas o muy negativas.

Como segunda tesis, expresa la posible posible entre las actitudes de los alumnos y las actitudes matemáticas de los padres y de los profesores. Aquí hay resultados contrapuestos: Banks (1964) afirma dicha correlación, mientras otros autores, entre ellos Aiken (1972), apuntan que es la actitud del profesor y su eficacia en la enseñanza lo que constituye el determinante fundamental de la actitud y el rendimiento del estudiante. En este sentido, los primeros trabajos de Fennema (1980) indican que los efectos de las actitudes del profesor y su conducta sobre el rendimiento del alumno, varían de manera importante de un profesor a otro y de un estudiante a otro. Los resultados relacionados con la influencia de las actitudes de los padres son los más insatisfactorios.

Giménez (1991) y Nortes Checa (1988) aplican en sus Tesis Doctorales la escala de Gairín para medir las actitudes de sus alumnos. El primero con alumnos de 5º a 8º, haciendo modificaciones en algunos de los ítems y el segundo en 6º Curso. Ambos encuentran que dicha escala (o sus modificadas) tienen altos coeficientes de validez y fiabilidad.

1.6 EL PROFESORADO

La investigación sobre el pensamiento y la toma de decisiones de los profesores, ha sido tomada en consideración de manera creciente en estos últimos años (véanse Shulman y Elstein, 1975; Shavelson y Stern, 1981; Halkes y Olson, 1984; Calderhead, 1984 y 1988; Clark y Peterson, 1986). Se asume que los profesores son agentes activos en la construcción de su propia práctica y que adquieren y utilizan un cuerpo de conocimientos o destrezas en sus actividades docentes (epistemología del profesor). El interés de las investigaciones que relacionan el pensamiento de los profesores y su toma de decisiones, está justificado en base a que ellas permitirán crear un fundamento sólido para la formación de los profesores y para llevar a cabo innovaciones educativas. Estos trabajos tienen su origen en las investigaciones sobre la toma de decisiones humanas y sobre la toma de decisiones en resolución de problemas (Shulman y Elstein, 1975).

Clark y Peterson (1986) señalan tres categorías principales en los procesos de pensamiento de los docentes: la planificación del docente, sus pensamientos y decisiones interactivos, y sus teorías y creencias, considerando que esta última categoría constituye el telón de fondo del contexto en el que se desarrollan los esquemas del profesor.

En nuestro país la reforma de la enseñanza y las diferentes acciones emprendidas para la formación del profesorado, han empezado a poner de manifiesto la necesidad de analizar la epistemología de los profesores.

1.6.1 Investigaciones sobre el pensamiento del profesor y la toma de decisiones

De manera general, podríamos agrupar el amplio espectro de investigaciones que se ocupan del pensamiento del profesor en dos grandes clases. Una clase estaría relacionada con la formación de profesores (inicial o permanente) y dentro de ella, con creencias y conocimientos de los profesores; una presentación del estado de la cuestión en esta dirección la encontramos en Pajares (1992). Otra gran clase, estaría determinada por las investigaciones sobre creencias y concepciones de los profesores (inicial o permanente) sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje; una revisión de la literatura básica la encontramos en Thompson (1992). Thompson organiza las investigaciones sobre creencias de los profesores en cuatro líneas de investigación, a saber: las concepciones de los profesores sobre el conocimiento matemático; las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; la relación entre las concepciones sobre las matemáticas y la práctica instruccional y, por último los cambios en las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas.

McClelland (1968) analiza cómo la implantación de una innovación puede exigir diferentes grados de reestructuración, que van desde la más simple, como la sustitución de un libro de texto, hasta las más complejas que tienen que ver con los valores, como pedir a un profesor que valore más una clase activa que otra pasiva.

Romberg y Price (1983) han analizado la innovación con relación a las repercusiones sobre la vida escolar y han caracterizado a éstas en un abanico que va desde las "innovaciones mejoradas", que no cuestionan las tradiciones asociadas a la cultura escolar, hasta "las innovaciones radicales" que sí las cuestionan.

Es evidente que los cambios curriculares en matemáticas que se desarrollan en la actualidad en distintos países de nuestro entorno, no deben pasar inadvertidos. Y el profesorado que se requiere debe estar preparado para afrontar con expectativas de éxito estos movimientos renovadores que se llevan a cabo.

Tales movimientos se rigen por unos parámetros similares, que podemos resumir en fomentar la actividad matemática para facilitar un aprendizaje significativo, donde el "hacer" matemáticas juega un papel esencial. Así, documentos, tales como The Cockcroft Report (Commitee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools, 1982), The Curriculum and Evaluation Standards for the School Mathematics (NCTM, 1989), Everybody Counts (National Research Council, 1989) e ICMI (1986), destacan este aspecto como básico y señalan que debe ser el punto de referencia para la enseñanza de las matemáticas.

Como señala Romberg (1991) con relación a los Standards, también nuestra actual reforma en matemáticas puede considerarse como un cambio radical, que afecta al campo de los valores y que desde el punto de vista profesional implica un cambio en la epistemología del profesor. Al igual que ocurre con los Standards, que para responder a estos desafíos apelan al desarrollo profesional y no a directrices administrativas, ocurre con nuestra reforma educativa, que no incluye prescripciones para lograr este cambio y lo deja en manos de las organizaciones profesionales (sociedades, etc.) y de sus miembros.

Damerow y Westburu (1985) indican que puede haber una necesidad de cambiar los contenidos y las condiciones del currículo de matemáticas, para que todos los alumnos puedan estudiar más matemáticas y algo distintas, pero se elude completamente el cómo hacerlo. Esto no ocurre sólo en nuestra propuesta curricular, sino también en otras propuestas, como los citados standards, y es que por su propia naturaleza, una propuesta curricular deseada se establece en torno a los dos criterios siguientes: Objetos matemáticos deseados y cuestiones que sabemos sobre el aprendizaje de los alumnos. Así, nos encontramos con que la propuesta curricular de matemáticas que oferta el DCB, es un currículo deseado y éste refleja, de una parte, la potencia matemática deseada y la concreta en los objetos matemáticos presentados, y de otra, lo que sabemos de los alumnos haciendo conjeturas acerca de lo que les interesaría, siendo esto en definitiva la utilidad potencial de una propuesta curricular. Pero es el profesorado el que hace un desarrollo de este currículo deseado, y es éste el currículo real implementado, que depende obviamente de la elección del profesor: su epistemología de profesor le lleva a tomar decisiones y a concretar el currículo desarrollado. Y se dará en última instancia, dependiendo de los conocimientos previos y de los intereses de los alumnos, el currículo adquirido.

No es de extrañar que estemos en una situación de pesimismo, recogida de una manera muy gráfica en las palabras de Greenberg (1987) como reacción al planteamiento de D'Ambrosio (1987) y formulado en la siguiente pregunta: *"¿No estamos hablando de los mismos profesores, de los mismos alumnos, de las mismas escuelas y de la misma sociedad que actualmente están fracasando en matemáticas?* (Referenciado en Romberg, 1991). Supone, y con razón, que son las mismas personas y las mismas instituciones las que han de implantar la reforma educativa en matemáticas y que aparentemente sólo se puede esperar un fracaso que conduce a nuevos fracasos.

¿Se puede enseñar a los profesores la reforma curricular?, se pregunta Romberg (1991), *y esto es esencial,* concluye, *porque parece evidente que el cambio sólo tendrá lugar si los profesores lo hacen posible*.

Como sugiere Rachlin (1989), es necesario desarrollar modelos de investigación que muestren la dinámica total de los cambios curriculares. Existen, obviamente, teorías curriculares que han sido desarrolladas en los últimos años, pero en general tienen un carácter estático y descriptivo, y, aunque presentan adecuadamente el estado de la cuestión, no se ocupan del cambio en sí mismo (Lawton, 1973).

Para intentar describir y analizar estas tareas de enseñanza dirigidas a cambiar la epistemología del profesor, algunos investigadores intentan analizar el comportamiento de los profesores al incorporar a las aulas, por distintos medios, estos supuestos innovadores sobre el conocimiento y el aprendizaje de las matemáticas.

Fennema, Carpenter y Peterson (1986, 1989) han trabajado con profesores del primer curso con la intención de cambiar sus opiniones implícitas sobre el aprendizaje, y lo hacen compartiendo con los profesores sus investigaciones sobre la resolución de problemas de sumas y restas por parte de los niños.

Cobb, Yackel y Wood (1988) han trabajado con profesores de segundo curso para modificar su enseñanza de una manera congruente con una teoría constructivista del aprendizaje.

Wiske (1990) ha estudiado las experiencias de un grupo de profesores de geometría que utilizaron The Geometric Supposers, paquete de software que permite a los alumnos explorar las propiedades de ciertas figuras geométricas, formular conjeturas y hacer que el ordenador las compruebe o refute. Encontró que para utilizar las nuevas tecnologías, los profesores necesitaban más materiales tradicionales que conectaran la innovación con sus currículos y tecnologías habituales, como por ejemplo, un repertorio de planes de clase organizados en unidades curriculares que establecieran relaciones entre los ejercicios de indagación, basados en la experiencia del Supposer, y la estructura lógica deductiva de la geometría, basada en el texto que formaba el núcleo de su currículo habitual, o materiales y ejercicios de valoración que permitieran utilizar a los alumnos diversas herramientas, incluido el Supposer, para demostrar su dominio del currículo global en geometría.

En esta dirección se han situado, en los últimos años, diferentes investigaciones que tienden a analizar las creencias de los profesores en contextos específicos y de modo más concreto en un entorno informático.

Hoyles (1992), empleando caricaturas, identifica la posición de 5 profesores en formación permanente, cuando emplean el ordenador. Hoyles afirma que el formador no debe intentar que las creencias de los estudiantes cambien hacia unas creencias correctas, sino que debe buscar un modo de aclarar las creencias, de reflejarlas en la práctica y en la misma innovación, ya que todas las creencias están “situadas”, es decir, referidas a contextos específicos.

En esta misma dirección, Moreira y Noss (1995) tratan las actitudes de los profesores ante las Matemáticas y la enseñanza de las Matemáticas, y la manera en que 10 profesores portugueses de enseñanza primaria afrontan las actividades de un curso basado en LOGO.

Entre otras investigaciones referidas a la formación inicial, cabe destacar el trabajo en comunidad de los futuros profesores como motor del cambio sobre las creencias y concepciones.

Wilcox y otros (1991) parten de dos tipos de supuestos: a) el aprendizaje en comunidad de los futuros profesores permite cambiar las creencias de los estudiantes para profesor de enseñanza elemental de matemáticas, y b) la transmisión hablada no es suficiente para el cambio, sino que la clave está en la construcción de significados por los propios estudiantes, favoreciendo la duda. Los autores consideran que cuando los estudiantes toman conciencia de la validez del trabajo en grupo van ganando confianza en su propia autoridad, con lo que, de manera indirecta, influyen en sus creencias sobre las matemáticas. Sin embargo, entienden que no está suficientemente demostrado que el trabajo en grupos pequeños durante los cursos de formación favorezca el que luego, en sus clases, promuevan el que sus alumnos trabajen en grupos.

Swinson y Shield (1994) consideran el trabajo en grupo como reactivo para cambiar las creencias sobre las matemáticas de los estudiantes para profesores, durante un curso de formación. Los sujetos investigados son estudiantes para profesores de matemáticas de secundaria, aunque su formación no es fundamentalmente matemática, sino que las matemáticas constituyen su segunda disciplina.

Bright y Vacc (1994) estudiaron el efecto de aplicar el programa de formación de Carpenter y otros (1989), llamado "Investigación guiada cognitivamente" (CGI),sobre las concepciones y creencias de los estudiantes. Este programa fue diseñado para formación permanente, y parte de que es fundamental el conocimiento del niño para que el profesor pueda tomar decisiones. Concluyen Bright y Vacc, que es posible cambiar las concepciones y creencias durante un curso de dos años, aunque no se puede asegurar si estos cambios son superficiales o profundos. Tienen evidencias de que los estudiantes para profesor llegan a considerar el programa basado en la instrucción guiada cognitivamente (CGI), como un marco constructivista para su enseñanza.

En España cabe destacar las diferentes líneas de investigación llevadas a cabo sobre concepciones y creencias de los profesores de matemáticas, en diversas universidades andaluzas (Sevilla, Granada, Cádiz, Huelva), en la Universidad de Extremadura y en la Universidad de La Laguna.

Llinares y Sánchez, en la Universidad de Sevilla, han realizado diversas investigaciones para analizar las creencias sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de estudiantes para profesores de Enseñanza Primaria. Llinares (1989) estudia las creencias de dos estudiantes para profesor sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza, sobre la preparación de las clases, la clase de matemáticas y la formación recibida por los estudiantes. En este mismo trabajo se presenta una revisión de las investigaciones sobre creencias de los profesores, distinguiendo dos grandes campos de interés: la descripción de las creencias de los profesores con relación a las matemáticas y a la enseñanza y aprendizaje de las mismas, y a la repercusión de las creencias en la formación de profesores.

Sánchez y Llinares (1990) detectan, empleando las rejillas de Kelly, las concepciones de los estudiantes para profesor de primaria sobre las matemáticas y su enseñanza, durante la fase de prácticas de enseñanza.

En investigaciones posteriores, Escudero, García, Llinares y Sánchez (1993) y Llinares, Sánchez, García y Escudero (1995), mediante el empleo de un cuestionario elaborado por los investigadores, estudian las creencias de 159 estudiantes de 2º curso de Magisterio, sobre la naturaleza de las matemáticas escolares, la enseñanza de las matemáticas, el aprendizaje de las mismas y el papel del profesor en el aula. Encuentran que las creencias no están fuertemente estructuradas, que guardan poca relación las creencias sobre las matemáticas y las creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje y que no existe un posicionamiento claro de los estudiantes.

Flores (1995), en la Universidad de Granada, presenta un interesante trabajo en el que hace una revisión de la literatura sobre las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas en el marco del estudio que intenta detectar, en un grupo de estudiantes para profesor de Matemáticas, las concepciones y creencias que sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje tienen y las variaciones que se dan al enfrentarse a las prácticas de enseñanza.

Rico y otros (1995), en la Universidad de Granada, han llevado a cabo una investigación tendente a describir los conocimientos y creencias de los profesores de matemáticas sobre evaluación.

Azcárate (1995), en la Universidad de Cádiz, investiga con futuros profesores que están en 3º Curso de Maestro de la Especialidad de Primaria, en la búsqueda de estrategias de desarrollo profesional que faciliten un cambio significativo en el profesor y le permitan afrontar la renovación escolar, considerando el conocimiento estocástico como tópico de trabajo.

Carrillo y Contreras (1994), en la Universidad de Huelva, desarrollan una investigación que intenta detectar las creencias y concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza de profesores de matemáticas de Enseñanza Secundaria en activo. Mediante las respuestas de una muestra amplia de profesores, obtienen categorías para relacionar las concepciones que sobre el conocimiento matemático poseen los profesores (instrumentalista, platónica y de resolución de problemas, en el sentido de Ernest, 1991) y las tendencias didácticas (tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa en el sentido de Porlán, 1992).

Blanco (1991), en la Universidad de Extremadura, compara las estrategias de enseñanza y de resolución de problemas de dos estudiantes para profesores y de dos profesores de primaria en ejercicio, y describe estas diferencias en términos de concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas.

Camacho, Hernández y Socas (1993, 1994), en la Universidad de La Laguna, trabajan con alumnos del último curso de la licenciatura en matemáticas y con licenciados en ciencias que aspiran a ser profesores de matemáticas en la Enseñanza Secundaria, para determinar sus concepciones y actitudes sobre las matemáticas y sobre la enseñanza aprendizaje, así como sobre su papel en la sociedad. Se comparan los diferentes grupos, se relacionan sus creencias y actitudes con las formas de actuar frente a la resolución de problemas, y con el perfil del profesor de matemáticas sugerido por la reforma educativa. Algunos datos obtenidos pueden resumirse así: Los licenciados en ciencias y los estudiantes del último curso de licenciatura mantienen un estado de opinión equivalente con relación a las diferentes categorías objeto de estudio, lo que sugiere la implantación de programas de actuación similares para la formación del profesorado de secundaria en matemáticas, desde la perspectiva profesional; sin embargo, se alejan del perfil del profesor propugnado por la reforma educativa, presentándose en general un aparente dilema entre sus concepciones de la matemática y sus concepciones de la enseñanza de las matemáticas.

1.7 CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

De la revisión que hemos hecho de la literatura en los tres campos señalados: resolución de problemas, actitudes y profesorado, podemos extraer las siguientes conclusiones:

La resolución de problemas

Los problemas aritméticos verbales de una operación han sido ampliamente estudiados, como demuestran los innumerables trabajos sobre ellos. Podemos encontrar diferentes clasificaciones e incluso en algunos (por ejemplo los problemas aditivos), se han desarrollado niveles de dificultad entre ellos.

Greeno (1987) señala que la comprensión es una parte fundamental en el éxito en la resolución de problemas, pero que no se ha dotado al alumno de medios suficientes al alumno para ayudarle. Define un modelo cognitivo de comprensión y resolución de problemas como aquél que simula el proceso de comprensión construyendo representaciones basadas en las palabras de los problemas verbales. Muchos de estos modelos no han dado los resultados esperados, y las investigaciones, afirma, están en una primera etapa. Por ello, recomienda seguir trabajando en esta línea basada en las representaciones, como medio de lograr la comprensión de los mismos.

El estudio de la resolución de problemas de dos operaciones es más limitado y sus resultados apuntan sobre la influencia que tienen las operaciones en la dificultad de los problemas y las variables semánticas (estudiadas sólo en determinados tipos de problemas). El trabajo realizado por Shalin y Bee (1985), destacado por Greeno (1987), y los de Nesher y Herskovitz en Israel, destacan la importancia que pueden tener los esquemas en la mejor representación y comprensión de los problemas, y, consecuentemente, en la resolución de los mismos. Creemos por ello, que una línea importante a seguir es el estudio sobre la utilización de diferentes esquemas o representaciones con el fin de analizar las ventajas de los mismos, y que puedan dar más información sobre las dificultades que éstos generan en los niños.

Los sistemas de representación:

La utilización de una representación única y más general basada en el esquema partes-todo, podría fundamentar la resolución de cualquier problema aritmético.

Elegimos como marco de nuestro trabajo, el conjunto de categorías definidas por Lester (1983).

1. Factores vinculados a la tarea.
2. Características del sujeto.
3. Los procesos implicados en la resolución de un problema. Éstos se pueden clasificar, a su vez, en dos grandes grupos:
   * Procesos de resolución de un problema de Matemáticas: Actividad mental y física que desarrolla el alumno desde que comienza la tarea hasta que la da por acabada. En este sentido, se puede hablar de diferentes modelos del proceso de resolución de problemas de Matemáticas: Polya, Burton, Goldin, Schoenfeld, etc.
   * Procesos matemáticos implicados: clasificar, definir, algoritmizar, probar, demostrar, particularizar, generalizar, abstraer, etc.
4. El desarrollo de diseños instruccionales.

Las actitudes

A partir de la revisión realizada, confirmamos lo que muchos autores escriben: el dominio afectivo, a pesar de la amplia variedad y cantidad de investigaciones, incluso en lo relacionado con las matemáticas, no tiene una clarificación de sus términos. Esto conlleva la dificultad de realizar una comparación de sus resultados, pues, por ejemplo, muchas investigaciones que hablan de actitud están midiendo unos constructos diferentes.

También hay dificultad entre los instrumentos, pues algunos autores han encontrado resultados contradictorios al utilizar dos técnicas diferentes. Por ejemplo, Gentry y Underhill (1987), al comparar los resultados obtenidos por auto-informes (self-report) y por datos fisiológicos, concluyeron que: "*hay insuficiente evidencia para indicar que existe una relación lineal entre escalas de lápiz y papel y medidas fisiológicas de la ansiedad matemática, lo que podría implicar que estos dos instrumentos puedan estar midiendo diferentes dimensiones del constructo ansiedad*".

A pesar de la gran cantidad de esfuerzo que se está dedicando a los factores afectivos, la situación actual es definida, en palabras de Schoenfeld (1992), como sigue:

"El área de creencias y afectos necesita una atención más concentrada. Está básicamente desconceptualizada y mantiene la necesidad de nuevas metodologías y nuevos marcos exploratorios. Las viejas herramientas de medida y los conceptos encontrados en la literatura son simplemente inadecuados.... A pesar de algunos avances teóricos en los recientes años, junto a un interés en el tema, tenemos todavía un largo camino por recorrer hacia una perspectiva unificada que nos lleve a una integración significante de cognición y afecto o, si no es posible tal unificación, a la comprensión de porqué no".

Aparte de la necesidad de reorganizar todo este campo, cuyo punto de partida podría ser las teorías actuales propuestas por McLeod (1992) a partir de las teorías psicológicas de Mandler, hay determinados campos cuyo análisis es preciso. Uno sería un análisis mas exhaustivo sobre las diferencias entre las actitudes de los alumnos hacia los distintos tópicos de la enseñanza, otro sería el estudio longitudinal con alumnos de 6 a 14 años con el fin de investigar alguna relación causal entre aprendizaje y generación de actitudes, sobre todo cuando éstas son negativas, y un tercero, podría estar en relación con las emociones desarrolladas durante la resolución de un problema.

Y por otra parte, "*la investigación sobre afectos, no ha sido potente al influenciar el cuerpo de la educación matemática. Parece que la investigación en* *instrucción en la mayor parte de los casos, no ha prestado atención a los temas afectivos*" (McLeod, 1992).

El profesorado

Los estudios realizados ponen en evidencia la importancia que el profesorado ejerce en la puesta en práctica de cualquier currículum. De ahí, que las investigaciones sobre el pensamiento y toma de decisiones se haya constituido en una línea de investigación cada vez más consolidada, tanto a nivel internacional como en nuestro propio país. Este desarrollo está justificado en base a la necesidad de conocer los conocimientos, creencias y actitudes de los profesores, que condicionan su toma de decisiones. La necesidad de tenerlo presente en esta investigación es evidente al tratarse de un tópico como la resolución de problemas presentado desde una perspectiva innovadora. Analizar el papel que juega en la implementación de este microcurrículo, así como los cambios que se podrían producir en ellos como consecuencia de la metodología diseñada, parece un tema adecuado que puede ayudarnos a entender mejor las variables que inciden en la toma de decisiones y, en consecuencia, redundará positivamente en la implementación de un currículo innovador.

CAPÍTULO 2: DELIMITACIÓN Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 INTRODUCCIÓN

En este Capítulo nuestro objetivo es delimitar el problema a investigar. Para ello comenzamos con una revisión de los aspectos cognitivos relativos a la resolución de problemas, a las actitudes y a la innovación curricular y epistemología del profesor, en los cuales nos apoyamos.

Indicamos cuáles son las razones que justifican este estudio, desde tres puntos de vista: a nivel conceptual, a nivel curricular y a nivel metodológico.

Finalmente, explicitamos los objetivos e hipótesis de la investigación, describiendo los trabajos previos que hemos desarrollado, y apuntamos, brevemente, los elementos principales y el desarrollo de la misma.

2.2 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Nuestro trabajo se encuentra dentro del campo de la resolución de problemas aritméticos, enunciados mediante un formato verbal y escrito, resolubles por una de las operaciones elementales.

Los problemas que consideramos son situaciones de la vida real, planteadas mediante un enunciado verbal y resolubles por una o dos operaciones aritméticas. La resolución de un problema aritmético engloba el proceso que realiza el alumno desde que lee el enunciado hasta que llega o no, a obtener una solución. En este proceso se ponen en marcha una serie de habilidades generales, pero también intervienen conocimientos específicos de la materia en cuestión.

Precisando más los términos utilizados, definimos los problemas aritméticos de enunciado verbal (PAEV) como problemas cuyos datos son números naturales, que se presentan en un enunciado verbal y cuya resolución se efectúa mediante una operación aritmética (suma, resta, multiplicación o división). En la literatura inglesa, se les llama word problem o story problem.

Siguiendo la idea de campo conceptual de Vergnaud (1983), estos problemas serán *aditivos,* si la operación requerida es la suma o la resta, y *multiplicativos,* si es una multiplicación o división.

Los problemas aritméticos de enunciado verbal de operaciones combinadas (PAVOC) son problemas análogos a los anteriores, pero cuya resolución necesita de más de una operación. En nuestro trabajo, nos limitamos a problemas de dos operaciones.

Los problemas aditivos han sido extensamente estudiados, existiendo ya un cuerpo coherente de resultados, los multiplicativos siguen siendo objeto de múltiples investigaciones, siendo los de varias operaciones los menos trabajados, como hemos mostrado en la revisión de la literatura.

La resolución de estos problemas se plantea como el paso de un sistema de representación sintáctico-verbal a un sistema de representación formal, esto es, partiendo de la lectura del enunciado, el alumno ha de elegir y ejecutar una o varias operaciones aritméticas.

El tratamiento que los problemas verbales aritméticos reciben, tanto en la instrucción del profesor como en los libros de textos, sigue, en general, el siguiente modelo de competencias:

Representación **Representación**

Traducción **Solución**

Verbal **Numérica**

y el modelo de implementación en el aula suele seguir un esquema similar a:

Representación numérica

Ejemplos **Imitación**

(Prototipos)

Solución

Juan tiene en su colección 91 sellos y Ángel en la suya 27 sellos menos ¿Cuántos sellos tiene Ángel?	91 -27 64	Ángel tiene 64 sellos

De esta forma, la resolución de problemas se convierte, como afirman muchos alumnos, "*en una actividad mecánica donde el objetivo es elegir y ejecutar cálculos aburridos*".

Nuestro trabajo defiende la idea de Goldin (1987) sobre la necesidad de utilizar otros sistemas de representación no verbales en problemas matemáticos en general; los estudios de Greeno (1987) sobre la importancia del uso de modelos para favorecer la comprensión; y la recomendación de De Corte (1989) sobre el uso de diagramas para mejorar la comprensión y resolución de problemas aritméticos verbales por parte de los niños.

Hemos optado por construir un sistema de representación no verbal basado en el esquema partes-todo de Piaget (Flavell, 1981), que permita al alumno las elaboraciones semánticas y sintácticas que se dan en un problema y que sea autosuficiente, como explicaremos más adelante.

El aprendizaje de un nuevo sistema de representación no se puede realizar de una forma aislada, sino que es imprescindible el desarrollo de un modelo de competencias, siendo diversos los modelos que se han desarrollado, como mostramos en el Capítulo 3. A partir del modelo de Polya (1957) y teniendo en cuenta el Modelo de Competencia de Goldin (1987), desarrollamos nuestro propio modelo, que contempla el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos (uno de tipo no verbal junto al formal o aritmético). Sin embargo, a diferencia de otros modelos (Puig y Cerdán, 1988, De Corte y Verschaffel, 1989), nuestro modelo pretende que el sistema de representación (sistema de representación visual-geométrico: SRVG), que hemos diseñado, no sea sólo un medio de representación, sino que lo hemos dotado de la sintaxis necesaria para que el alumno pueda con él resolver los problemas, permitiéndole tener una forma alternativa de resolución de los mismos.

Ahora bien, el uso de un sistema de representación no verbal no se genera espontáneamente por parte de los niños, sino que es preciso un diseño de instrucción para que este aprendizaje se produzca.

Por ello, necesitamos también un profesorado dispuesto y preparado para realizar esta labor. Ello nos obligó a desarrollar un curso-guía de preparación del mismo. Las distintas investigaciones sobre el profesorado nos abrieron interrogantes sobre cuál es el papel que desempeña el profesor en una investigación y hasta qué punto su epistemología, y en particular sus creencias y actitudes, le inducen a tomar decisiones que pueden modificar el desarrollo de un diseño de instrucción. Como consecuencia de esto, vimos la necesidad de analizar el profesorado y su epistemología.

Finalmente, convencidos de la importancia del dominio afectivo en todas las actuaciones y comportamientos del ser humano, entendimos que no podíamos limitar nuestra investigación en los alumnos sólo al dominio cognitivo. Al ser el dominio afectivo excesivamente amplio para abordarlo en esta investigación nos limitamos a las actitudes. Queremos analizar cuál es la actitud hacia las Matemáticas de los alumnos con los que vamos a desarrollar la investigación y tratar de encontrar si esa actitud revela diferencias con la actitud que pueden mostrar hacia un aspecto específico de las Matemáticas, en nuestro caso, la resolución de problemas aritméticos verbales, que en la práctica ocupa un porcentaje amplio de las Matemáticas escolares en estos niveles.

2.3 ASPECTOS COGNITIVOS RELATIVOS A LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA VERBAL ARITMÉTICO

De Corte (1993) y Callejo (1994) plantean como primer punto en el análisis de la resolución de problemas, el conocimiento de ámbito específico como un primer paso en el éxito de los mismos. De Corte y Verschaffell (1987) han comprobado que el conocimiento de ámbito específico afecta seriamente a los procesos de solución de los problemas aritméticos verbales que implican una única operación, incluso en los niños pequeños.

Callejo (1994) argumenta que cuando los alumnos se enfrentan a la resolución de un problema tienen que acceder a los conocimientos que poseen relacionados con la situación propuesta, seleccionarlos y ver el modo de utilizarlos en dicho problema. Los conocimientos que están disponibles en la memoria del sujeto para ser utilizados comprenden hechos, definiciones, algoritmos, métodos de resolución, heurísticos, etc.

Garofalo y Lester (1985) amplían lo relacionado con los aspectos cognitivos, diferenciando entre los conocimientos y creencias acerca de los fenómenos cognitivos y la regulación y el control de los actos cognitivos, poniendo de esta manera en juego el papel de la metacognición.

A continuación, abordamos las nociones de comprensión, sistemas de representación y esquemas por ser puntos básicos de nuestros planteamientos.

2.3.1 La noción de comprensión y los sistemas de representación

Resnick y Ford (1981) dedican una gran parte de su libro a justificar la importancia de desarrollar las Matemáticas como comprensión conceptual frente a las ideas asociacionistas que desarrollaban una matemática como cálculo.

La comprensión es un tema intensamente tratado por los psicólogos y relacionado con la competencia intelectual (Nickerson, Perkins y Smith, 1987) y, a su vez, con las representaciones.

Las representaciones y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen una importante línea de investigación (Resnick y Ford, 1981). Entre las razones de su importancia podríamos citar, fundamentalmente, dos: la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos (Paivio, 1977; De Vega, 1984).

Diferentes han sido las interpretaciones dadas a la palabra *representación* con relación al aprendizaje, a la enseñanza y al desarrollo de las Matemáticas. Dar una definición de representación es algo complicado actualmente. Janvier (1987), citando un estudio de Denis-Dubois (1976), apunta que en la literatura psicológica se usa el término representación, al menos, en los tres caminos siguientes:

1) Como una organización material de símbolos, tales como diagramas, gráficas, esquemas, que se refieren a otras entidades o que actúan como modelos de procesos mentales.

2) Como una organización del conocimiento en el "sistema mental humano" o en la memoria a largo plazo.

3) Solamente como imágenes mentales que el individuo puede formar, siendo éste un caso especial del anterior. El hecho de considerarlo como una tercera forma se debe a la importancia de la investigación en este dominio y a su claro marco teórico. Janvier considera que las configuraciones imagísticas de Goldin (1987) se les puede considerar en el segundo grupo, pero también pertenecen al tercero.

El propio Janvier se identifica con la primera definición, cuando habla de "esquemas o ilustraciones", y con la segunda, cuando habla de "concepción". Para él, una representación sería como una especie de estrella-iceberg que mostraría sólo una punta cada vez. Esta descripción de representación tiene la ventaja de insistir en el carácter inseparable que tiene un conjunto de esquematizaciones.

En el segundo camino, los psicólogos se dividen en dos corrientes: los que apoyan la hipótesis dual de Paivio, que sostiene la existencia de dos formatos representacionales: el sistema verbal y la imaginación, y los que proponen un único formato representacional abstracto, semántico y proposicional que subyace como sustrato común a las palabras e imágenes (de Vega, 1984).

Para Kaput (1987) "*cualquier concepto de representación implica dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas: el mundo representante y el mundo representado. Habiendo, por tanto, una correspondencia entre algunos aspectos del mundo real y algunos del mundo representado. Por ello, en cualquier* *especificación particular de una representación se describirá las siguientes cinco entidades:*

1) el mundo representado.

2) el mundo representante.

3) qué aspectos del mundo representado han sido representados.

4) qué aspectos del mundo representante hacen la representación.

5) la correspondencia entre los dos mundos.

Goldin (1993) presenta, como resumen del grupo que trabajó sobre representación en los Congresos del PME, las diferentes interpretaciones dadas a este término:

a) Como soportes físicos, externos (incluyendo entornos de ordenador): Una situación física estructurada y externa o un conjunto de situaciones que pueden ser descritas matemáticamente o vistas como un soporte de una idea matemática (p.e. la línea numérica,...).

b) Como soportes lingüísticos: Aspectos verbales, sintácticos y semánticos del lenguaje en los que los problemas son propuestos y con los que las Matemáticas son discutidas.

c) Como construcciones matemáticas formales: Un significado diferente de "representación", que enfatiza el entorno del problema externo al individuo, sería una estructura formal o un análisis matemático de una situación. Aunque hay un sentido en el cual las Matemáticas pueden ser vistas como "internas", el énfasis se pone en "representación" como una herramienta analítica para formalizar o precisar ideas matemáticas o conductas matemáticas.

d) Como representaciones cognitivas internas: Aspecto muy importante, que incluye las representaciones individuales internas de los estudiantes, de sus ideas matemáticas, tales como áreas, funciones, así como los sistemas de representación cognitiva en sentido amplio, que pueden describir los procesos del aprendizaje humano y de la resolución de problemas.

En los últimos años, diferentes investigaciones (Presmeg, 1985) están destacando la importancia que tiene el uso de métodos visuales en la enseñanza de las Matemáticas en todos los niveles, de forma que faciliten a todos los alumnos la comprensión y, en particular, a aquellos visualmente orientados. La idea de visualización la planteamos, en el sentido usado por Presmeg, como una forma de utilizar diagramas para comprender y resolver los problemas. Uno de los trabajos pioneros en este campo es el de Krutetskii (1969, 1976), considerado como uno de los estudios más notables sobre las habilidades individuales utilizadas en resolución de problemas. Krutestkii, después de un estudio de 12 años, publicó su trabajo donde *“clarifica los hechos que caracterizan la actividad mental de aquellos alumnos dotados para las matemáticas al resolver problemas variados”* (p. 78). Encontró, entre otros, que los estudiantes al resolver un problema aislan tres aspectos importantes: las relaciones funcionales entre los datos esenciales, las cantidades no esenciales para el problema tipo, pero necesarias para una variante específica, y las cantidades extrañas que no son necesarias. Del análisis de las soluciones de los problemas concluyó que aparecen tres tipos de estudiantes: analíticos, geométricos y armónicos (combinación de los dos anteriores).

El tipo analítico comprende a aquellos estudiantes que siempre resuelven los problemas mediante cálculos o ecuaciones, procurando no tener que apoyarse en diagramas o dibujos geométricos.

El tipo geométrico, por el contrario, trata de plasmar sus razonamientos en dibujos y diagramas.

Y, finalmente, el tipo armónico mantiene un equilibrio entre sus razonamientos analíticos y los gráficos o visuales.

Goldin (1987) formalizó dentro de su *Model for competency in Mathematical Problem Solving,* basado en el procesamiento de la información, los cinco sistemas de representación que describiremos en el Capítulo 3, planteando la importancia del uso de los mismos y, en particular, de los sistemas de representación no verbales, como un procedimiento alternativo a la resolución de problemas por traducción directa.

Castro y Rico (1994) afirman que las representaciones (en su caso, las configuraciones puntuales) proporcionan un modelo intuitivo para el desarrollo del pensamiento numérico, que potencia la comprensión mediante la visualización.

2.3.2 Las representaciones y los problemas aritméticos verbales

Los sistemas de representación gráfica se han utilizado como ayuda para facilitar al niño la representación mental del mismo.

Carpenter, Hiebert y Moser (1983) señalan que una precipitada introducción en el simbolismo conduce a transformar la resolución de un problema en una simple elección de operaciones, apartándose al niño de la elaboración de estrategias adaptadas a la estructura semántica.

Riley y otros (1983) desarrollan su hipótesis sobre la naturaleza de la habilidad de los niños respecto de la resolución de problemas aritméticos verbales. Según ellos, la mejora en el desempeño o rendimiento, es consecuencia, principalmente, de una mejor comprensión de ciertas relaciones conceptuales. Distinguen tres tipos principales de conocimientos que se aplican durante la resolución: los esquemas de los problemas, que les permiten comprender las diversas relaciones semánticas existentes, los esquemas de acción para representar los conocimientos del modelo acerca de las acciones que intervienen en la resolución, y los conocimientos estratégicos para la planificación de estrategias. Diferentes investigaciones que llevaron a cabo con instrucción sobre el uso de esquemas, muestran mejoras en el desempeño y rendimiento de los niños.

Threadgill-Sowder y Sowder (1982), Moyer y otros (1984), López-Real y Veloo (1993) han probado que se produce una mejora significativa cuando los problemas aritméticos verbales son presentados en forma gráfica o cuando se les ayuda a diseñar diagramas.

En la resolución de problemas aritméticos se usan como sistemas de representación, entre otros, los siguientes: diagramas de Venn, operadores de Dienes, la recta, los diagramas de Fuson-Willis.

Los diagramas de Venn fueron potenciados por la incorporación del lenguaje conjuntista. Su base está en el esquema partes/todo. Hay dos posibilidades de uso, como podemos ver en las figuras 2.1 y 2.2, si bien Castro y otros (1987) se inclinan por el uso de un único conjunto que englobe las partes (figura 2.2), para no repetir elementos dos veces: como pertenecientes al total y a su subconjunto.

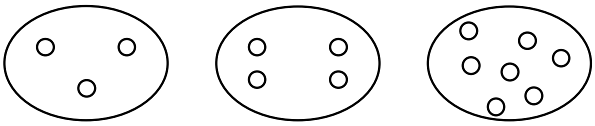


Figura 2.1

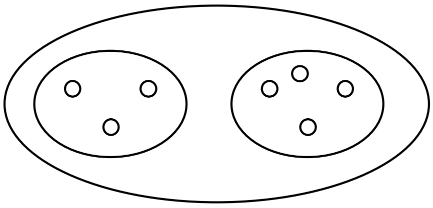


Figura 2.2

La máquina operadora de Dienes (Dienes, 1976) resalta el carácter dinámico de los problemas aditivos de cambio. Consta de una entrada, un cambio u operador y una salida (Figura 2.3).

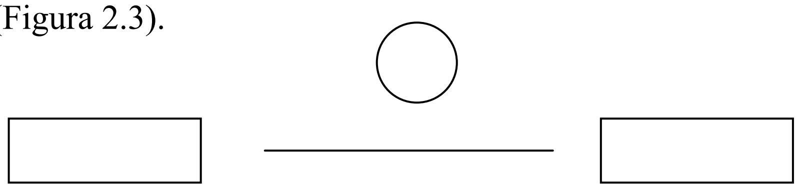


Figura 2.3

Lindvall y Tamburino (citado por Greeno, 1987) instruyeron a 22 alumnos de 1º, en 8 tipos de diagramas para ayudar a los niños a resolver problemas (Figura 2.4). La ejecución mejoró una media de 3.4 ítems (sobre 20) y en un test de transferencia, con problemas con números mayores y requiriendo dos pasos, mejoró 4.2 problemas (sobre 20).

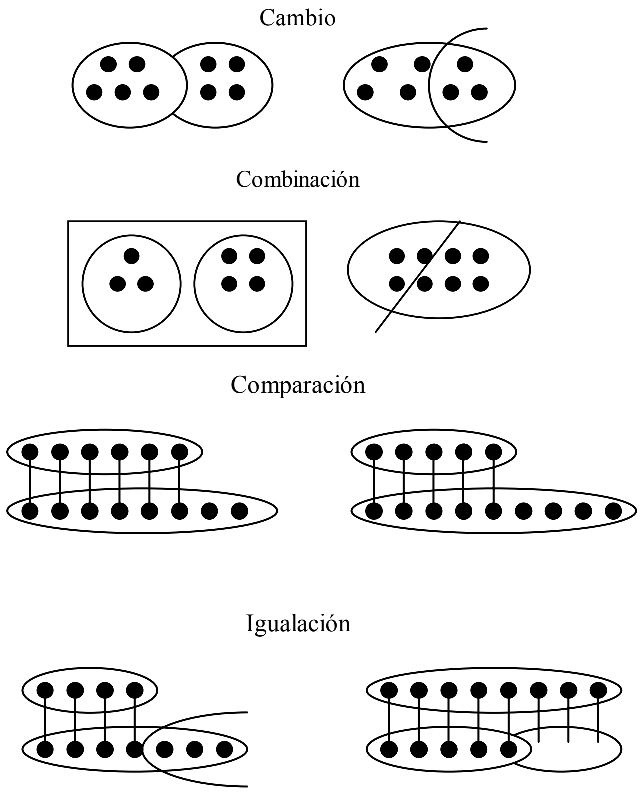


Figura 2.4

Shalin y Bee (1985) desarrollaron también un programa de instrucción durante 15 horas. Observaron que las representaciones (Figura 2.5) ayudan a los estudiantes a comprender los conceptos de tipo cuantitativo y las relaciones entre las cantidades.

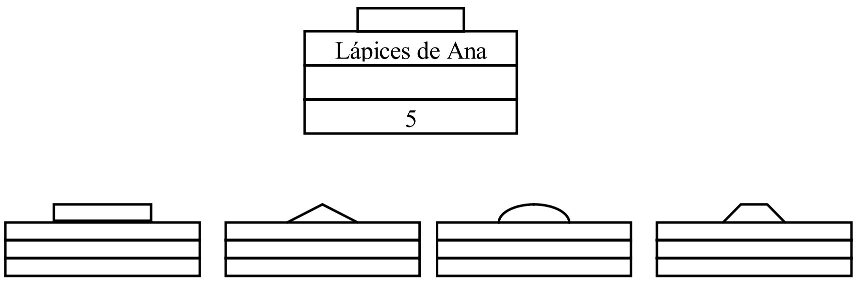


Figura 2.5

Bethencourt (1986) utiliza diagramas de Venn para ilustrar las distintas operaciones y, a continuación, utilizando un programa instruccional enseña a los niños una representación gráfica basada en la recta real y en el esquema partes-todo (Figura 2.6)..

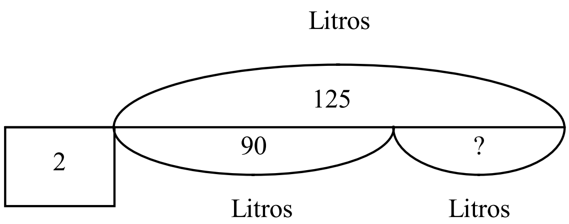
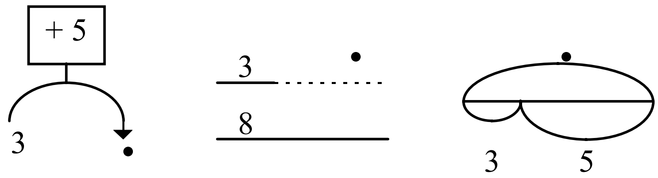


Figura 2.6

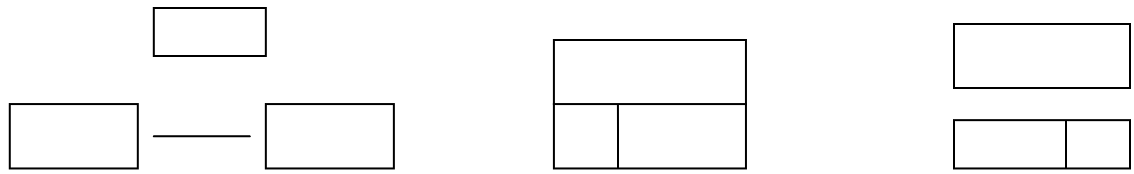
De Corte y otros (1989) desarrollan un programa experimental, en el cual usan tres representaciones gráficas diferentes para los problemas aditivos de cambio, comparación y combinación. Desde su punto de vista, su objetivo es "*que los niños construyan, al menos, inicialmente, una variedad de modelos visuales para representar problemas que les ayude a ser conscientes y a comprender las relaciones semánticas esenciales entre las cantidades implicadas en los problemas"* (Figura 2.7).



Cambio Comparación Combinación

Figura 2.7

Willis y Fuson (1988) y Fuson y Willis (1989) en un estudio con alumnos de 2º grado, presentaron también tres dibujos esquemáticos diferentes para los problemas aditivos de cambio, combinación y comparación (Figura 2.8). Sus resultados evidencian cómo los niños hicieron más intentos para usar el diagrama de combinación en problemas de cambio y comparación, que el uso de los diagramas de cambio y comparación para los problemas de combinación. Cuando usaron un dibujo de combinación para problemas de cambio o comparación fue asociado con menos estrategias y respuestas correctas que para los diagramas de cambio y comparación y, lo más notable fue el uso por muchos niños de un dibujo de comparación para los problemas de combinación-parte desconocida. Los diagramas que presentaron son semejantes en su apariencia y utilización a las regletas Cuisenaire.



Cambio Combinación Comparación

Figura 2.8

2.3.3 Conexiones entre los sistemas de representación

Las conexiones matemáticas constituyen hoy uno de los objetivos esenciales de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Estas conexiones tienen una doble dimensión: conexiones internas de las Matemáticas y conexiones externas. Entre las conexiones internas tenemos las conexiones entre representaciones equivalentes y entre los correspondientes procesos de cada una. Y, entre las conexiones externas, tenemos las conexiones en la elaboración de modelos para situaciones del mundo real o para situaciones que se dan en otras disciplinas.

El uso de diferentes representaciones plantea un problema fundamental relacionado con las conexiones entre ellas. Lesh, Post y Behr (1987) describen los distintos papeles de las representaciones y las conexiones entre ellas, destacando el importante papel que juegan en el aprendizaje matemático y en la resolución de problemas. Una de las conclusiones que obtienen de sus investigaciones es que los niños tienen dificultades en la comprensión de los problemas verbales, en los cálculos, pero también es deficiente su comprensión sobre los modelos y lenguajes necesarios para representar (describir e ilustrar) y manipular estas ideas. Además, las deficiencias en las traslaciones de una representación a otra influyen en el aprendizaje y la resolución de problemas, mientras la mejora en estas habilidades, potencia la adquisición y el uso de las ideas matemáticas elementales (p. 36).

En nuestro modelo de competencias se sugiere desarrollar con profusión las conexiones internas, esto es, entre representaciones equivalentes y entre los correspondientes procesos de cada una, y las conexiones externas con el mundo real. Es importante recordar que cuando los estudiantes son capaces de trasladar una misma situación problema a diferentes representaciones, tendrán a un tiempo un conjunto potente y flexible de herramientas para resolver problemas y un aprecio más profundo por la coherencia y belleza de las matemáticas.

2.3.4 La noción de esquema. El esquema partes-todo

La noción de esquema es de gran importancia en la psicología cognitiva actual, y se considera como un elemento fundamental dentro de la estructura cognitiva. Sus orígenes, hace ya más de cincuenta años, se encuentran en dos psicólogos europeos, Piaget y Bartlett, que la desarrollaron independientemente. Piaget (1926), introduce la idea de esquema para explicar los procesos de pensamiento en los niños, y Bartlett (1932), para explicar los procesos de comprensión y memoria en ámbitos sociales. Fueron los psicólogos norteamericanos del procesamiento de la información los que, treinta años más tarde, redescubrieron este concepto y observaron el poder explicativo de los esquemas para subsanar muchas de las deficiencias de los modelos, que organizaban el fenómeno de la comprensión. En la actualidad, hay un gran número de teorías de esquemas. Retomamos en este trabajo la idea inicial de Piaget, referenciada en Flavell (1981), y que caracteriza al esquema como una estructura cognoscitiva, que se refiere a una clase semejante de secuencias de acción, las que forzosamente son totalidades fuertes, integradas y cuyos elementos de comportamiento están íntimamente interrelacionados. En resumen, el esquema es el contenido de la conducta organizada y manifiesta que lo designa, pero con importantes connotaciones estructurales que no son intrínsecas al mismo contenido concreto. Aunque las palabras esquemas y concepto no son intercambiables, Piaget, reconoció que había cierta semejanza entre ellas.

Vergnaud (1993), que utiliza el concepto de esquema piagetiano, hace referencia a él como "*una organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dadas*" y está formado "*por reglas de acciones para alcanzar cierto fin, invariantes operatorios e inferencias para hacer actuar el esquema en cada situación particular*".

Los esquemas parecen jugar un papel importante en la construcción del conocimiento. Entre ellos, figuran los esquemas basados en las relaciones entre las partes y el todo.

En la Gestalt, podemos encontrar algunas ideas sobre las relaciones entre las partes y el todo, referidos a problemas en general. Por ejemplo, Resnick y Ford (1981) afirman que "*el concepto de la Gestalt de que la estructura del todo define las funciones y las interrelaciones de sus partes, parece relevante para la resolución de problemas...*"

En otro trabajo, Resnick (1983) defiende que *"el esquema partes-todo provee una estructura interpretativa que puede permitir a los niños incluso resolver ciertos problemas más difíciles directamente por métodos de aritmética informal o convertirlos en sentencias numéricas, que pueden ser resueltas a través de procedimientos aprendidos en la escuela"* (Resnick, 1983, p. 115).

Ahora bien, es ciertamente Piaget la persona que primero caracterizó y desarrolló la noción de esquema, haciendo hincapié en la importancia que tiene de cara al desarrollo del pensamiento en los niños. Como afirman Castro, Rico y Castro (1987, p. 52) *"supone Piaget que la conducta humana está gobernada por representaciones internas conocidas como esquemas o unidades de conocimiento, cuyo incremento se puede representar mediante una gran espiral, en donde cada círculo o esquema es más amplio que el anterior. En cada uno de los niveles se produce un estado de equilibrio. Los nuevos esquemas descansan sobre la base de los antiguos y de esta forma los esquemas -y por tanto el conocimiento- aparece organizado jerárquicamente".*

Así, partiendo de esta noción de esquema y considerando, además, que la cualidad y la cantidad se hallan indisolublemente unidas y que la cantidad expresa las relaciones de extensión entre los términos calificados por sus semejanzas (clasificación) o diferencias ordenadas (comparación); que la combinación de reunión y separación de objetos generarán: las clases, agrupando los objetos por sus semejanzas, las relaciones asimétricas, agrupando los objetos por sus diferencias ordenadas, y los números, agrupando los objetos en tanto son a la vez equivalentes y distintos; y que al agrupamiento lógico de clases, que conduce a los números, en los que intervienen la adición y sustracción de las mismas, le corresponde el agrupamiento infralógico, síntesis de las partes y la división del todo, que conduce a la medida, **caracterizamos**, en sentido piagetiano, a estas organizaciones y reglas de acción que constituyen las relaciones de semejanzas, diferencias ordenadas y cuantificación que se dan simultáneamente en los procesos numéricos y de medida como **esquema partes-todo**.

El uso del esquema partes-todo, al comienzo de la edad escolar, es actualmente bien reconocido, y así Resnick (1983) señala que probablemente el mayor éxito conceptual en los primeros años de la escuela es la interpretación de los números en términos partes-todo. Sugiere que con la aplicación del esquema parte-todo a las cantidades se favorece la comprensión de los alumnos acerca de los números como composición de otros números, y que este enriquecimiento numérico permite formas de interpretación y resolución de problemas de matemáticas, que no están disponibles para los jóvenes estudiantes.

Resnick (1983) presenta la figura 2.9 como el esquema partes-todo que ha sido utilizado en diferentes investigaciones sobre el desarrollo del conocimiento del número natural (Briars y Larkin, 1981; Resnick, Greeno y Rowland, 1980; Riley, Greeno y Heller, 1983) y en la resolución de problemas aritméticos verbales (Riley, Greeno y Heller, 1983; Carpenter y Moser, 1982; Nesher, 1982; Vergnaud, 1982).

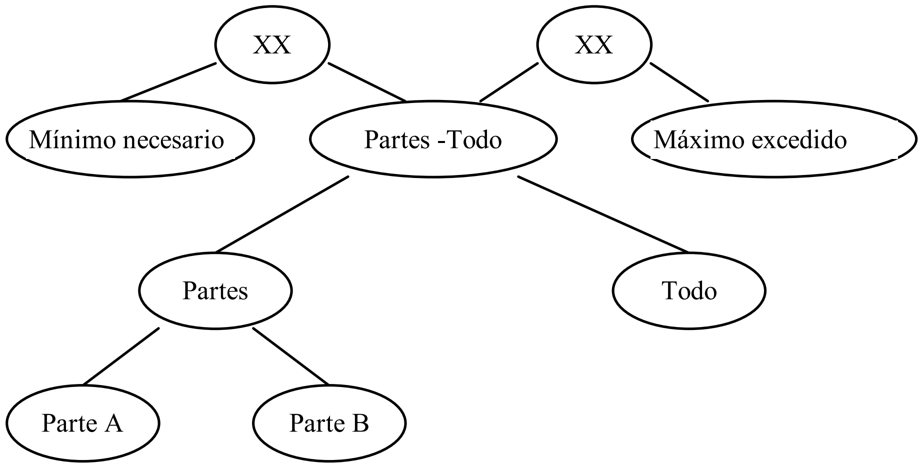


Figura 2.9

El esquema especifica que una cantidad (el todo) puede ser dividida (en partes), y que la combinación de partes, que no excedan ni falten, dan el todo. Por implicación, las partes pueden ser incluidas en el todo. El esquema partes-todo proporciona una interpretación del número, que es similar a la definición del concepto operacional del número dada por Piaget (1941), y proporciona una herramienta útil en la resolución de problemas verbales aritméticos con números naturales.

Continúa Resnick comentando que tenemos evidencias que la parte y el todo son formas primitivas, disponibles por los alumnos antes de comenzar en la escuela, y que su aplicación a las cantidades caracteriza los primeros años de la edad escolar. Una primera elaboración del esquema parte-todo se pone de manifiesto en los procedimientos de contar progresivamente ("necesidad mínima") o contar regresivamente (descontar) ("Máximo excedido") y estos procedimientos están basados en el uso de cuerdas con unidades numéricas, produciendo una interpretación cuantitativa de la parte y el todo. El esquema permite simultáneamente la interpretación mental sobre la línea numérica y la idea de número como composición de otros números, y estos dos procedimientos son básicos en la resolución de problemas aritméticos verbales. Más tarde, la elaboración del esquema parte-todo caracteriza el desarrollo posterior del sistema numérico, de la notación posicional y de los procedimientos de cálculos basados en él.

Después de estas consideraciones sobre la noción de esquema y sobre la valoración del esquema partes-todo en el aprendizaje numérico natural y en la resolución de problemas aritméticos verbales, se nos plantea ahora el problema de caracterizar mediante una representación gráfica estas organizaciones y reglas de acción que se dan en los procesos numéricos y de medida.

De forma gráfica, representaremos las relaciones entre las partes y el todo con el diagrama de la Figura 2.10, que llamaremos <u>diagrama aditivo del esquema partes-todo.</u>

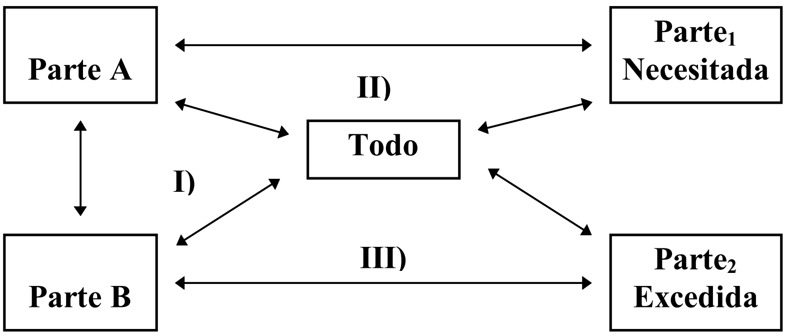


Figura 2.10

El esquema se organiza en tres grupos (I, II, III), donde el I representa todas las operaciones aditivas posibles de unión entre las partes y de separación del todo y los grupos II y III, las relaciones asimétricas, es decir, las relaciones entre la parte y el todo expresado por sus diferencias ordenadas. Hemos mantenido en el esquema la diferencia entre parte$_1$ necesitada y parte$_2$ excedida, no sólo por mantener la simetría del mismo, sino por entender, como Resnick, que la parte necesitada implica un proceso que va de la parte menor a la mayor (el todo), y está asociada a los procedimientos más primitivos de contar progresivamente, y la parte excedida, que va de la parte mayor (el todo) a la parte menor, está asociada al procedimiento de contar regresivamente.

Es claro que este diagrama aditivo del esquema partes-todo, que tiene por otra parte bastante parecido al presentado por Resnick, parece referirse de manera clara al campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas naturales; sin embargo, nuestra idea es utilizarlo tanto con cantidades presentes (números positivos) como con cantidades ausentes (números negativos) y que en la mayoría de los casos la diferencia entre negativo y positivo difiere respecto a las expectativas del sujeto: descubrimiento de una ausencia en lugar de la presencia.

2.3.5 Habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas de los alumnos

De Corte (1993) apunta que las principales categorías de aptitudes que subyacen a la resolución competente de problemas son: el conocimiento de ámbito específico, los métodos heurísticos, el conocimiento y las habilidades metacognitivas y las componentes afectivas.

Pretendemos desarrollar, a través del modelo de competencias, las habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas de los alumnos.

Las habilidades cognitivas incluyen, entre otras, las relacionadas con los conocimientos necesarios para resolver problemas, tales como comprender qué significado tiene cada una de las operaciones aritméticas, la ejecución de los algoritmos, la comprensión de los textos escritos, la discriminación entre los datos y la incógnita, etc.

Las habilidades metacognitivas, las entendemos en el sentido de Nickerson, Perkin y Smith (1990), que las consideran como aquellas habilidades que son necesarias o útiles para la adquisición, el empleo y el control del conocimiento y de las demás habilidades cognitivas.

Entre otros ejemplos de habilidades metacognitivas que han sido identificadas, están la planificación, la predicción, la verificación, la comprobación de la realidad y la supervisión y control de los intentos propios deliberados de llevar a cabo tareas intelectualmente exigentes. Así, pretendemos estudiar:

* La planificación y uso de estrategias eficaces (el alumno se mueve por el ordinograma mediante algún tipo de planificación o no).

* El reconocimiento de la utilidad de una habilidad (reconocimiento de la utilidad

de las habilidades cognitivas visuales y aritméticas).

* Comparación y evaluación entre habilidades cognitivas (comparación y evaluación entre las habilidades cognitivas visuales y aritméticas).
* Control y evaluación del propio desempeño en el uso de los sistemas de representación.

La metacognición o conocimiento sobre los propios conocimientos es un concepto bastante controvertido, que juega un papel clave en el proceso de resolución de problemas.

Los trabajos de Schoenfeld (1992) ponen de relieve la importancia de considerar los factores metacognitivos como elementos esenciales de un aprendizaje significativo.

Monereo (1995) presenta tres principios generales para una didáctica metacognitiva:

1. Enseñar a los estudiantes a conocerse mejor como "aprendices"..., en definitiva, ayudarles a construir su propia identidad o autoimagen cognitiva.
2. Enseñar a los alumnos a reflexionar sobre su propia manera de aprender ... con el fin de mejorar la regulación en los procesos cognitivos implicados.
3. Enseñar a los estudiantes a establecer con ellos mismos un diálogo consciente cuando aprenden...logrando un aprendizaje más significativo. (p. 80).

Las habilidades heurísticas (estrategias específicas) comprenden todos los tipos de estrategias que se utilizan en los problemas aritméticos verbales asociados tanto al tipo de operación como a su estructura semántica (estrategias explícitas de cada sistema de representación, partes-todo, etc.).

Las estrategias utilizadas por los niños en la resolución de los problemas aritméticos han sido clasificadas por Sowder (1988) de la forma siguiente:

1. Encuentra los números y suma (o multiplica o resta); la elección debe ser decidida por los cálculos hechos en la clase recientemente o por la operación en la cual el estudiante se sienta más competente.
2. Adivina la operación que debe usar.

3. Mira los números: ellos le dirán qué operación debe usar (por ejemplo: si son como 78 y 54, probablemente será una suma o una multiplicación. Pero si son 78 y 3, parece una división por el tamaño de los números).
4. Ensaya todas las operaciones y elige la respuesta más razonable.
5. Busca palabras clave o frases que le indicarán cual es la operación (por ejemplo, “todos juntos” significa sumar).
6. Decide si la respuesta debe ser mayor o menor que los números dados. Si es mayor, intenta la suma o la multiplicación y elige la respuesta más razonable. Si es menor, intenta la división o la resta y elige la que dé una respuesta más razonable.
7. Elige la operación cuyo significado coincida con la historia.

2.4 ACTITUDES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Hay poco trabajos como hemos visto, que tratan de analizar las actitudes de los alumnos hacia aspectos específicos de las Matemáticas.

Lester (1980) hace una llamada a la consideración de las variables afectivas en la resolución de problemas: “*No hay duda de la importancia que tienen variables tales como interés, motivación, confianza, perseverancia y buena voluntad para aceptar riesgos*”. Sin embargo, añade que falta información sobre estos aspectos. El Mathematical Problem Solving Project (MPSP) concluyó, en un estudio con 700 niños de grados intermedios, que la buena voluntad, la perseverancia y la autoconfianza fueron tres de los factores que más influyeron en la resolución correcta de problemas (Webb, Moses y Kerr, 1977); sin embargo, no fueron capaces de desarrollar un instrumento actitudinal para medir cómo estos factores cambiaban en el tiempo y cuándo se producían los cambios definitivos.

Trimmer (1974) revisó 155 estudios que relacionaban varios rasgos psicológicos con la resolución de problemas, encontrando que la motivación intrínseca y tener suficiente tiempo para realizar una tarea compleja, son los mejores facilitadores del aprendizaje de la resolución de problemas. Otras conclusiones fueron que la confianza, la falta de ansiedad, la flexibilidad y la falta de rigidez fueron rasgos asociados con la resolución exitosa de problemas.

McLeod (1985) insiste en el surgimiento del interés en aspectos no cognitivos de la resolución de problemas y la necesidad de desarrollar un marco teórico apropiado. Desarrolla un amplio trabajo sobre el dominio afectivo, en dos caminos. Por una parte, intenta desarrollar un marco teórico que justifique los trabajos empíricos que se van a desarrollar (1987a, 1987b, 1987c, 1989, 1992) y por otra, desarrolla trabajos empíricos relacionando los aspectos afectivos con la resolución de problemas, McLeod (1986, 1988, 1989) y McLeod y otros (1990).

2.5 INNOVACIÓN CURRICULAR Y EPISTEMOLOGÍA DEL PROFESOR

La nueva propuesta curricular en matemáticas plantea grandes desafíos a los programas de matemáticas actuales.

Desde el punto de vista de los alumnos tenemos que "todos" los alumnos estudiarán matemáticas al menos hasta los dieciséis años, y "todos" deberán aprender a "hacer" matemáticas y comprobar que "las matemáticas tienen sentido". Esto choca frontalmente con los planteamientos de los profesores de matemáticas sobre los programas anteriores, es decir, lo que se propone ahora es considerablemente distinto de la práctica habitual en matemáticas. Mientras en el modelo actual prima el conocimiento sobre las matemáticas, ahora se propone el "hacer" matemáticas y obviamente la diferencia es notable. Si tomamos el símil del fútbol vemos claramente que no es lo mismo saber sobre fútbol que hacer fútbol; claro está, que es importante aprender algunos conceptos matemáticos (o aprender algunas reglas del fútbol como el "offside" o el "libre indirecto") y practicar algunos procedimientos para adquirir algunas destrezas (o practicar el manejo del balón con la pierna izquierda o el saque de esquina), pero también es importante que todos los alumnos tengan la oportunidad de resolver problemas (actuar jugando partidos de fútbol) en su nivel de aptitud.

La actividad matemática implica la opción de transformar el programa de matemáticas en un programa de actividades en forma de resolución de problemas a partir de los cuales se puedan desarrollar conocimientos y destrezas. En este planteamiento activo de las matemáticas, es evidente que una amplia colección de actividades interesantes no es suficiente; el conocimiento adquirido depende de los conocimientos previos de los alumnos y de sus expectativas, es decir, el conocimiento debe tener el soporte de los conocimientos anteriores y debe conducir a alguna parte.

Desde el punto de vista de los profesores, éstos han de adecuar su "epistemología de profesor" para negociar con sus alumnos un contrato didáctico (Brousseau, 1986) donde ambos se comprometen a "hacer matemáticas" y a "darle sentido a las matemáticas", es decir, propiciando y aceptando, respectivamente, un conjunto de situaciones-problema que pueden y deben ser trabajados fundamentalmente en grupo, a semejanza de como lo harían los matemáticos en sus investigaciones.

Desde el punto de vista de los recursos, el entorno tecnológico aparece también como un cambio significativo, y se supone que es necesario realizar parte de este trabajo en grupo, en el sentido de un trabajo de laboratorio de matemáticas, recogiendo datos, utilizando calculadoras y ordenadores, etc.

Estos planteamientos contrastan con las clases de matemáticas actuales claramente distribuidas en filas de pupitres donde, en general, los alumnos trabajan callados e individualmente en una serie de ejercicios de papel y lápiz.

Observamos, también, que la propuesta curricular de matemáticas se inclina por un currículo abierto que considera la matemática como una disciplina que evoluciona continuamente y donde la actividad matemática juega un papel esencial en la construcción del conocimiento matemático. Destacando, además, la resolución de problemas como foco fundamental para el desarrollo de los conceptos matemáticos, el desarrollo de una actitud positiva hacia la matemática, la consideración de la matemática como expresión y creatividad, así como el facilitar una matemática para todos reduciendo en lo posible los aspectos más abstractos.

Las preguntas son obviamente dos: ¿es posible desarrollar e implementar un programa de matemáticas que refleje tal visión?, es decir, ¿es posible desarrollar e implementar el programa de matemáticas que propone nuestra reforma educativa?, y si así fuera, ¿es posible desarrollar e implantar programas de enseñanza que permitan cambios en la epistemología de los profesores para que esta implantación se lleve a cabo?

Howson, Keitel y Kilpatrick (1982), señalan que *"... (en matemáticas) currículo debe significar metas, contenidos, métodos y medios de valoración; no debe hablarse de un currículo nacional ya que depende de los profesores individuales, de sus métodos y comprensión y de su interpretación de las metas, guías, textos, etc. El papel del profesor individual debe ser reconocido"* (p. 2).

También distinguen tres tipos generales en el diseño y desarrollo del currículo: los grandes proyectos organizados por instituciones oficiales, los proyectos locales o regionales organizados por movimientos de renovación pedagógica y los proyectos individuales de una determinada escuela o pequeño grupo de profesores (pp. 8 y 9).

Vamos a situar nuestro trabajo en este último tipo. Utilizaremos la denominación de "microcurrículo", ya que el diseño y desarrollo del currículo considerado no abarca la totalidad del currículo de matemáticas de una determinada etapa, sino aspectos parciales del mismo.

Es éste un nivel concreto del currículo, considerado como un plan operativo constituido por las cuatro componentes (objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación) y que permite diseñar planes de trabajo con los alumnos.

Sin embargo, un nivel más general de reflexión nos llevará a considerar al profesor, a los alumnos, a las matemáticas y a la institución escolar como componentes del sistema curricular (Rico, 1990; Romberg, 1992). Esto ayuda a entender la noción de currículo como algo más que un ambiente de tareas o un conjunto de problemas.

Observamos, pues, que los procesos de cambios curriculares afectan a multitud de elementos relacionados con distintas esferas del conocimiento y de la experiencia y que van desde el diseño del cambio del contenido curricular hasta la evaluación del mismo, pasando por su implantación.

Dentro de esta multiplicidad de elementos nos encontramos, de manera destacada, dos: los alumnos y los profesores, habiéndose puesto bastante énfasis en los primeros y dejando a los profesores en un plano menor. Es cierto que una mejor comprensión de los conocimientos, creencias y comportamientos de los estudiantes en un aprendizaje matemático es una condición necesaria para mejorar el aprendizaje pero no es, por supuesto, suficiente. Por tanto, para implantar un cambio curricular es necesario conocer y entender los conocimientos, creencias y comportamientos de los profesores. Cualquier cambio curricular propuesto, debe ser entendido, aceptado como necesario y considerado como factible por los profesores que lo implantarán. Los profesores constituyen, pues, un elemento determinante en los cambios curriculares.

Los términos creencias y conocimientos, tienen el inconveniente de ser interpretados de formas diferentes. Es, pues, necesario utilizar un modelo que relacione las variables que inciden en la toma de decisiones de los profesores, al desarrollar un tópico de carácter innovador en un marco constructivista de las matemáticas. Esto nos obligó a una reflexión metodológica que permitiera desarrollar instrumentos para tomar datos sobre conocimientos y creencias de los profesores y toma de decisiones. Esta reflexión metodológica nos llevó a un modelo de investigación y desarrollo del currículo basado en el modelo de Fennema, Carpenter y Peterson (1989) y Rachlin (1989) y en el modelo de Shavelson y Stern (1981) sobre las variables que inciden en la teoría de decisiones de los profesores.

2.6 RACIONALIDAD DEL ESTUDIO Y SU JUSTIFICACIÓN

Una vez presentado en el Capítulo 1 las áreas problemáticas objeto de estudio: resolución de problemas aritméticos, dominio afectivo y epistemología del profesorado, y delimitado en éste el objeto de la investigación, aportamos nuevos argumentos para el análisis de la racionalidad del estudio y su justificación en términos de contenidos, desarrollo curricular y metodologías implicadas.

2.6.1 A nivel conceptual

Entendemos que las investigaciones relacionadas con el complejo mundo de la resolución de problemas están plenamente justificadas "a priori" dentro de la educación matemática, igual que "e*stá bien justificado que todos los textos de matemática comenzando por el Papiro del Rhind (s. XVII antes de nuestra era) contengan problemas. Los problemas pueden incluso ser considerados como la parte más esencial de un libro y la resolución de problemas por los alumnos como la parte más esencial de su educación matemática"*(Polya en una conferencia en S. Agustin, Trinidad, 1968).

En nuestro caso, el trabajo que nos ocupa trata de la resolución de problemas aritméticos verbales de una y de dos operaciones, parte esencial del currículo de Matemáticas de Primaria (6-12 años). Este estudio se hace con alumnos de 8 a 11 años que ya saben resolver, con ciertas limitaciones, estos problemas aritméticos verbales. Abordamos dichos problemas con un nuevo sistema de representación, el visual-geométrico, con la intención de analizar la integración de este nuevo sistema de representación con el sistema de representación formal aritmético que ya los alumnos utilizan, y de profundizar en el análisis de las habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas que ponen en juego durante la resolución de los mismos, además de analizar sus actitudes hacia las matemáticas y la resolución de problemas. No podíamos dejar de lado en este estudio global, que aborda la resolución de problemas desde una perspectiva innovadora, al profesorado, principal elemento de cualquier implementación curricular.

En resumen, el interés de este análisis se centra, en primer lugar, en delimitar las potencialidades y dificultades que este sistema de representación visual-geométrico desarrolla en alumnos de 8 a 11 años en la resolución de problemas. En segundo lugar, trata de explicitar las habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas que se ponen en juego cuando trabajamos con ambos sistemas yuxtapuestos (sistema de representación visual-geométrico y sistema formal aritmético). En tercer lugar, se abordan los aspectos afectivos, y, finalmente, en cuarto lugar, el pensamiento de los profesores y la toma de decisiones ante una propuesta curricular innovadora.

En definitiva, nuestro trabajo pretende, a nivel conceptual, aportar unos marcos teóricos locales, que permitan desarrollar modelos de competencias en los distintos campos relacionados con la problemática que implica la resolución de problemas aritméticos verbales en educación matemática.

2.6.2 A nivel curricular

Para justificar a nivel curricular nuestra investigación, analizamos las relaciones entres la resolución de problemas, los aspectos afectivos y los profesores, y la Reforma Educativa.

La resolución de problemas y la Reforma Educativa

La resolución de problemas, como afirma el DCB, es el método más conveniente de aprender Matemáticas, es la aplicación de las Matemáticas a diversas situaciones y favorece el desarrollo y la adquisición de capacidades cognitivas generales.

El propio diseño hace un análisis sobre la resolución de problemas que podemos resumir en dos apartados: Dificultades de los alumnos y sugerencias metodológicas.

Nuestra investigación pretende aportar resultados en ambas líneas. Por una parte, podremos expresar con resultados empíricos las dificultades que los alumnos experimentan al enfrentarse a la resolución de problemas aritméticos verbales. Y, como fruto de nuestro trabajo, presentamos un diseño instruccional que pretende fomentar en los alumnos la utilización de un modelo de competencias, con el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos.

Los aspectos afectivos en la Reforma Educativa

Los aspectos afectivos están siendo contemplados en las distintas reformas educativas; en concreto, el Informe Cockroft (1982), los Estándares Americanos (1990) y el Australian Education Council (Leder 1992), y en España, los Diseños Curriculares Base (1989).

El Informe Cockcroft señala que "*el alumno no se limita a aprender la asignatura sino que también adopta una postura ante ella*" y "*subraya la necesidad de esforzarse por fomentar una actitud positiva ante las Matemáticas desde los primeros días de la escuela*". Los Estándares Curriculares presentan entre sus objetivos más importantes: el de ayudar a los alumnos a comprender el valor de las Matemáticas y desarrollar la confianza del estudiante. Leder (1992) enfatiza la importancia que atribuye el Australian Education Council a las actitudes de los estudiantes hacia la materia: "*Un importante fin de la educación matemática es desarrollar en los estudiantes actitudes positivas hacia las Matemáticas y su implicación en ellas... La noción de tener una actitud positiva hacia las Matemáticas incluye tanto el gusto hacia ellas como un buen sentimiento de la propia capacidad al enfrentarse con situaciones en las cuales las matemáticas están implicadas*".

Por último, los Diseños Curriculares Base españoles colocan los contenidos actitudinales a la misma altura que los de conceptos o de procedimientos.

Los profesores y la Reforma Educativa

La Reforma Educativa en los niveles no universitarios que se lleva a cabo a partir del curso 1989-90 (MEC, 1989), requiere un profesorado capaz de abordar los cambios curriculares subyacentes, enfrentándose a nuevas tareas, entre otras, las que suponen un currículo abierto que obliga a valorar y elegir entre diversas alternativas pedagógicas la más adecuada a su realidad, tareas más complejas que las contempladas en un currículo cerrado, basado en decisiones teóricas hechas por los diseñadores del currículo en relación a lo que los estudiantes deben aprender, en qué orden y con qué fin. Todo ello implica cambios significativos que pueden resumirse en:

-Formación científica y didáctica adaptada a este nuevo cambio curricular.

-Capacitación para trabajar con alumnos que presenten un alto grado de heterogeneidad en destrezas básicas, intereses y necesidades.

-Cambio de actitudes en el profesorado para que desarrollen los aspectos formativos de la docencia, adopten planteamientos flexibles y profundicen en una visión más interdisciplinar de la cultura.

-Concepción del currículo como un instrumento de investigación que permita el desarrollo de métodos y estrategias de concreción y adaptación.

-Valoración y ejercitación del trabajo en equipo, así como el desarrollo de una sólida autonomía profesional (Camacho, Hernández y Socas, 1993).

2.6.3 A nivel metodológico

A nivel metodológico, la investigación utiliza métodos y técnicas cuantitativas y cualitativas, que permiten obtener una visión general de la situación y otra, más particular, de los procesos de los estudiantes en la resolución de problemas y de sus actitudes, y del pensamiento de los profesores y su toma de decisiones.

Entendemos que la comprensión de los problemas aritméticos por parte de los alumnos no puede estudiarse sólo desde la simplificación de un procedimiento meramente cuantitativo, basado en un diseño experimental o cuasi-experimental apoyado en las observaciones que se obtienen mediante técnicas o pruebas generales (tests); por ello, junto a la evaluación hecha mediante la comparación con un grupo externo y donde utilizamos un diseño cuasi-experimental en situación de campo, completamos el estudio con procedimientos cualitativos, donde combinamos instrumentos como las entrevistas estructuradas con protocolos cerrados, con instrumentos que nos permiten un análisis fundamentalmente interpretativo como las videograbaciones, observaciones en grupo, producciones de los alumnos y profesores y diarios de clase.

Pretendemos analizar cómo ambas metodologías aportan información relevante en general a la investigación en educación matemática y, en particular, a los procesos que desarrollan los estudiantes en la resolución de problemas, a sus actitudes y al pensamiento de los profesores y a su toma de decisiones, que es el tema que nos ocupa. Esto es, superar las posiciones extremas entre las metodologías cuantitativa y cualitativa y mostrar que los métodos y técnicas de ambas, son útiles y complementarios en función del tipo de estudio que se realice.

2.7 OBJETIVOS E HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación plantea tres objetivos principales que, posteriormente, se concretan en hipótesis específicas.

OBJETIVO 1º:

El primer objetivo tiene que ver con la resolución de los problemas aritméticos verbales, y lo podemos definir de forma global :

Estudiar las habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas que los alumnos ponen en juego en la resolución de un problema aritmético verbal, ver cómo influye en ellos el aprendizaje de un modelo de competencia para resolver dichos problemas, mediante el uso de un nuevo sistema de representación no verbal para la resolución de problemas (sistema de representación visual-geométrico) y qué tipo de conexión realizan con los esquemas tradicionales en los que han sido instruidos

Este objetivo general se formula en una hipótesis general, que se concreta en hipótesis específicas, cuya veracidad trataremos de probar por medio de análisis estadísticos, y otras, cuyo estudio se realizará por métodos cualitativos mediante categorías de análisis.

Para este primer objetivo, la hipótesis de nuestro estudio es :

Pensamos que:

La presencia, junto con el sistema de representación formal aritmético, de un nuevo sistema de representación visual-geométrico autosuficiente para la resolución de problemas aritméticos verbales, implementado a través de un diseño instruccional innovador (DIRPA), mejora la comprensión y resolución de los problemas aritméticos, y además, constituye una ventaja para:

a) analizar las potencialidades y dificultades que este sistema de representación aporta a los alumnos en la resolución de los problemas aritméticos.

b) profundizar en el análisis de las habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas que los alumnos ponen en juego al analizar los problemas aritméticos verbales.

OBJETIVO 2º:

La importancia del dominio afectivo, tal como queda patente en la revisión de la literatura, es indiscutible. Por ello, entendemos que en cualquier investigación los dominios, cognitivo y afectivo, no pueden estar disociados.

Nuestro objetivo no es utilizar el estudio de este campo para valorar la bondad de nuestro experimento de enseñanza, sino que es un estudio, aunque más corto, con entidad propia, que pretende investigar diversos aspectos.

Como hemos visto, el estudio del dominio afectivo está marcado por la falta de definición concreta de sus términos y por la necesidad de una teoría que lo sustente. Nuestro trabajo se va a centrar en el estudio de las actitudes de los alumnos, entendiendo este término como un concepto multidimensional. De esta forma, consideramos la actitud como el resultado de las siguientes componentes: una componente afectiva (lo que siente hacia las Matemáticas), comportamental (comportamiento hacia esta materia), contextual (opinión de los que rodean a los alumnos), implicación (lo que están dispuestos a hacer), creencias (sobre la materia), cognoscitiva (su opinión acerca de..) y creencias que los alumnos tienen sobre sí mismos, en relación a las Matemáticas.

Nos centraremos, pues, en el estudio de la actitud de los alumnos hacia las matemáticas y hacia la resolución de problemas, analizando si muestran diferencias entre ellas, y finalmente, si se produce algún cambio de las actitudes hacia la resolución de problemas en un corto plazo.

Este objetivo se concreta en la siguiente hipótesis:

Sostenemos que:

El desarrollo de un diseño instruccional innovador (DIRPA), formulado y desarrollado en las condiciones que explicaremos más adelante, nos permitirá analizar las actitudes de los alumnos, y además, incidirá positivamente en las actitudes de ellos hacia la resolución de problemas.

OBJETIVO 3º:

El lugar donde se va a llevar a cabo esta investigación es el aula y son los propios profesores los encargados de desarrollar el diseño de instrucción. En esta situación no se puede afirmar que el cambio en determinadas variables sea consecuencia directa del método introducido, ya que existen múltiples factores difíciles de controlar. Entre ellos, el profesorado puede incidir en el desarrollo del mismo por las decisiones didácticas que toma durante la instrucción.

La investigación que presentamos, se sitúa en el paradigma de investigación que se ocupa del pensamiento del profesor. Esta corriente investigadora trata, como hemos señalado anteriormente, de describir las representaciones cognitivas que los profesores hacen de sus tareas, la forma en que estas representaciones repercuten en la actuación del alumnado y buscar las relaciones que existen entre estas representaciones y las actuaciones del profesor y los alumnos (Marcelo, 1987). Es, en este último sentido, en el que nos situamos: pensamiento de los profesores y toma de decisiones. Nuestro objetivo se concreta en:

Observar la toma de decisiones en un grupo de profesores en activo, en un tópico como la resolución de problemas en un marco constructivista de las matemáticas, de carácter innovador, al poner en juego sus creencias y conocimientos de carácter epistemológico sobre el saber matemático y de carácter didáctico, tanto sobre los aspectos de enseñanza como de aprendizaje.

La hipótesis general queda expresada como:

Creemos que:

> La implantación de un cambio curricular innovador se encuentra condicionado, entre otros elementos, por los conocimientos, creencias y decisiones de los profesores. Determinar el papel del profesor para poder juzgar su influencia en el sentido más global del cambio curricular y arbitrar modelos de intervención, con implicación directa del profesor, que proporcione este cambio, puede ayudar a facilitar su implantación y entender mejor la dinámica de estos procesos.

2.8 ORÍGENES, ELEMENTOS Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo tiene sus orígenes en un Proyecto de Innovación Educativa, subvencionado por la Consejería de Educación de la Comunidad Autónoma Canaria, que se desarrolló en el Curso 84-85, bajo el título: ***Didáctica para la resolución de problemas de matemáticas en los distintos Ciclos de la EGB*** (Socas, 1985). Este proyecto tenía como objetivos: elaborar un banco de problemas para la EGB, clasificados y presentados con dificultad gradual, confeccionar modelos teórico-prácticos a los que recurrir en este campo, integrar la investigación educativa en la actividad profesional del profesorado de EGB para mejorar las técnicas de aprendizaje en la resolución de problemas, dado el bajo rendimiento de los alumnos en este tema, y resaltar la importancia que la resolución de problemas debe tener en la enseñanza de la matemática.

El proyecto tuvo tres fases:

1.- Análisis del sistema objeto de estudio, destacando los siguientes aspectos:

actuación profesional, medios y formación del profesorado; actuación, formación y dificultades del alumno en la resolución de problemas (análisis de tareas); recursos utilizados; análisis de los textos en el aspecto de los problemas y análisis de trabajos anteriores.
2.- Elaboración de un banco de problemas y confección de modelos teórico-prácticos a los que recurrir, así como una ficha de seguimiento de los alumnos en la resolución de problemas.
3.- Presentación a los alumnos de los modelos diseñados, trabajo en los mismos siguiendo las estrategias definidas y seguimiento de estos alumnos mediante las fichas confeccionadas al efecto.

Participaron doce centros y 22 profesores con 919 alumnos de los Ciclos Inicial, Medio y Superior e indirectamente 11 profesores más con 438 alumnos.

Los Ciclos Inicial y Medio se centraron en problemas aritméticos, mientras los del Ciclo Superior se dedicaron a problemas que hemos llamado "interesantes y poco frecuentes en los libros".

Diseñamos un primer modelo de competencia, basado en la estrategia general de Polya y en el esquema partes-todo, sobre el cual los alumnos no recibieron ninguna instrucción sobre sistemas de representación gráfica, sino que se les daba libertad para que la representación y resolución gráfica la hicieran de la forma que quisieran.

Sin embargo, su implantación en el aula entrañó dificultades, por diferentes razones (Socas y otros, 1986). Los niños, acostumbrados a un lenguaje formal, veían estos diagramas como un apoyo gráfico y no les parecía correcta la resolución de los problemas de esta forma. Existe la idea, casi generalizada, de que el único objetivo de un problema es lograr una representación y resolución formal, esto es, encontrar y ejecutar la operación adecuada.

De los resultados obtenidos pudimos, no obstante, señalar varias e interesantes apreciaciones generales en cuanto a la resolución de los problemas aritméticos:

* los alumnos desarrollaron una mayor expresión gráfica, al indicárseles que realizaran una viñeta del problema.
* se acostumbran a distinguir rápidamente entre los datos que les dan y lo que les piden.
* se van acostumbrando a una representación global del problema, usando el esquema partes-todo.
* son más críticos ante los resultados obtenidos.
* la utilización de sistemas gráficos, sin embargo, no es generada espontáneamente por parte de los niños, sino que necesita una cierta instrucción.

Esta última apreciación nos llevó a otro trabajo, presentado en las VII JAEM (Socas y Hernández, 1991), sobre ***Buenos y malos resolutores de problemas***, en el que pretendíamos analizar los distintos estilos de resolución de problemas: más analíticos o más gráficos, partiendo de las ideas desarrolladas por Krutetskii (1976) y Treffers y Goffree (1985). En él encontramos como existen unas preferencias en el estilo de solución de problemas, tendiendo a ser más frecuente un estilo de tipo analítico en la muestra de alumnos elegidos, pertenecientes a 7º de EGB, 1º y 2º de Magisterio y 5º Curso de Matemáticas.

La población elegida

Otro aspecto decisivo de nuestro trabajo ha sido <u>la elección de la población</u> a investigar. Las investigaciones relacionadas con los problemas aditivos se han realizado con niños menores de 8 años, estudiando fundamentalmente cómo los niños adquieren estos nuevos conocimientos, las dificultades que encuentran en los distintos tipos de problemas y las estrategias que utilizan. Asimismo, se han ensayado determinados métodos de enseñanza para ver sus efectos. Por el contrario, los problemas multiplicativos se han estudiado con niños mayores de 11 años, y los de dos operaciones entre 7 y 11 años, aproximadamente.

Nuestra investigación pretende observar cómo los niños integran este nuevo sistema de representación con los sistemas de representación que poseen o sobre los que han recibido instrucción, y por ello necesitábamos que ya conocieran las cuatro operaciones y que empezaran a tener un dominio sobre los problemas relacionados con ellas. Esto nos llevó a elegir como población **alumnos del Ciclo Medio de la EGB**, por poseer las condiciones que hemos señalado.

El problema de investigación con sus tres objetivos globales nos obligó a desarrollar en nuestra investigación dos partes claramente diferenciadas: una primera parte, de tipo teórica, en la que tuvimos que elaborar marcos interpretativos, que nos permitieran la elaboración de modelos de competencia, diseños de instrucción y cursos guía para el profesorado, modelos de investigación e instrumentos de medida, y una segunda parte, de tipo empírico, en la cual llevamos al aula la investigación diseñada, obteniendo los resultados que comentaremos.

En la investigación de tipo cuantitativo, diseñamos una investigación cuasi-experimental con sus pretest y postest, para la resolución de problemas y un estudio de las actitudes mediante escalas de tipo Likert.

En la investigación de tipo cualitativo, desarrollamos unos protocolos para el análisis de las habilidades que exteriorizan los alumnos durante la resolución de problemas, mediante entrevistas videograbadas; observación y análisis del profesorado durante el curso-guía de adiestramiento, análisis de los diarios de los profesores; observación y análisis de un aula, análisis de las carpetas de actividades de los alumnos; entrevistas con los alumnos para conocer su actitud; y, por último, entrevistas con protocolos cerrados para la investigación sobre el profesorado.

En la figura 2.11 planteamos de forma esquemática nuestro trabajo:

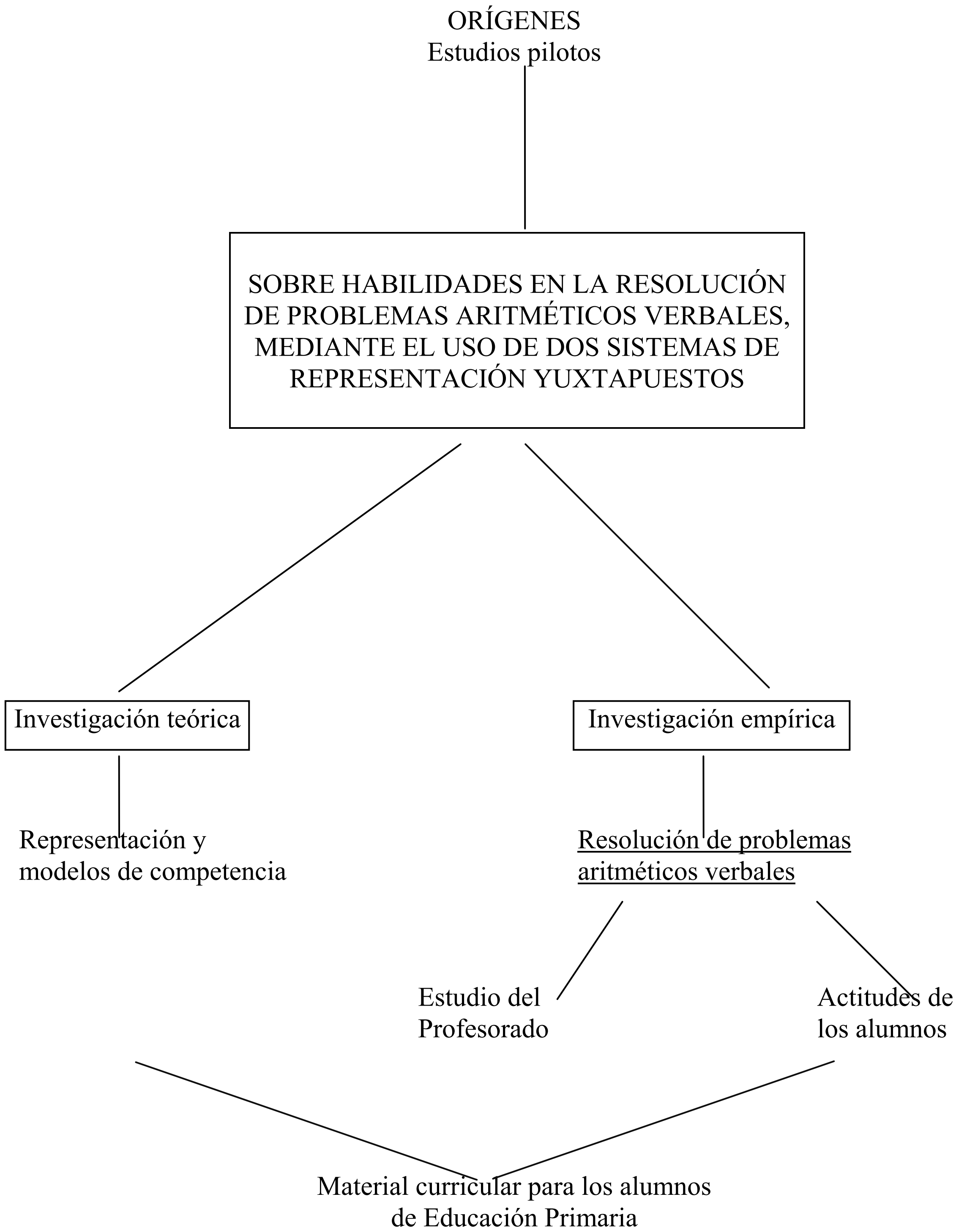

ORÍGENES
Estudios pilotos
SOBRE HABILIDADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES, MEDIANTE EL USO DE DOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN YUXTAPUESTOS
Investigación teórica
Investigación empírica
Representación y modelos de competencia
Resolución de problemas aritméticos verbales
Estudio del Profesorado
Actitudes de los alumnos
Material curricular para los alumnos de Educación Primaria

Figura 2.11

CAPÍTULO 3: FUNDAMENTOS TEÓRICOS. ELABORACIÓN DE MARCOS INTERPRETATIVOS: MODELOS DE COMPETENCIAS

3.1 INTRODUCCIÓN

En este Capítulo presentamos nuestra investigación teórica. Como afirman Lester y Charles (1992), la Didáctica de las Matemáticas necesita, junto a investigaciones empíricas, teorías que sustenten dichos trabajos.

Nuestra aportación se ha movido en tres campos distintos, como hemos señalado, en los cuales se han elaborado unos marcos interpretativos, desarrollando tres modelos de competencia: para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, para resolver problemas aritméticos y para la investigación y desarrollo del currículo. El término **competencia**, introducido originalmente por Chomsky (1957), en relación con las habilidades lingüísticas ha tenido un profundo impacto en la investigación sobre el desarrollo cognitivo. La competencia, como un constructo teórico, ha llevado a los investigadores a dibujar conclusiones generales sobre el conocimiento. El Diccionario, entre otras acepciones, define “competencia” como aptitud, idoneidad. Para Goldin (1987), la palabra competencia *describe las capacidades del individuo para ejecutar con éxito una clase de tareas, en su caso, la resolución de problemas matemáticos.*

Presentamos los modelos en el mismo orden que hemos señalado. Primero, describiremos un modelo de competencia que permite hacer una organización del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas. En segundo lugar, hemos creado un modelo de competencia para la resolución de problemas, basado fundamentalmente en el modelo de Goldin, en la estrategia general de Polya y en el esquema partes-todo de las teorías de Piaget. Finalmente, para llevar a cabo la investigación empírica, hemos desarrollado un modelo de investigación convergente, considerando aspectos referidos al desarrollo del currículo en Matemáticas y a la investigación en Educación Matemática, que conjuga los métodos cuantitativos con los cualitativos, que permiten entender mejor todos los procesos implicados en la investigación.

3. 2 MODELO DE COMPETENCIAS PARA EL CAMPO CONCEPTUAL ADITIVO DE LAS MAGNITUDES DISCRETAS

Si analizamos el siguiente problema:

En el recreo, Juan ganó 6 boliches y Pedro ganó 5 más que Juan. ¿Cuántos boliches ganó Pedro?

desde los enfoques teóricos básicos: categorías semánticas (Carpenter y Moser, 1983) o campo conceptual aditivo (Vergnaud, 1982), detectamos por una parte, que no pertenece a ninguna categoría semántica, salvo que aceptáramos la comparación entre variaciones, y por otra, tampoco estaría identificado en las categorías establecidas por Vergnaud para el campo conceptual aditivo, al tratarse de una relación entre transformaciones.

Cuestionarse estos dos modelos más representativos que regulan el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, parece una necesidad evidente por cuanto que las categorías semánticas de Carpenter y Moser se limitan a situaciones donde m_1-m_2 > 0, y las categorías de Vergnaud dejan fuera diferentes problemas que tienen interés en el contexto escolar o sitúan en la misma categoría problemas que aparentan tener estructuras diferentes.

Por ello, parece adecuado plantearse la organización del campo conceptual aditivo y tratar de caracterizarlo para determinar un marco instrumental y explicativo que dé respuestas homogéneas a las diferentes situaciones.

A partir del estudio de los aspectos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos que configuran el citado campo, se analizan los elementos y relaciones que se dan en él y se propone un modelo de competencia.

El modelo de competencia es un modelo formal caracterizado por los elementos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos asociados al campo conceptual, que aborda tanto las magnitudes escalares discretas como las absolutas relativas y considera al grupo aditivo y ordenado de los números enteros, como un buen modelo para los fenómenos que se dan en él y bajo el cual se pueden dar explicaciones homogéneas a las diferentes situaciones y problemas que se pueden plantear.

Este estudio presenta una organización exhaustiva y aporta una nueva clasificación de las situaciones y problemas del dominio de aplicación del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, basada en las cantidades, medidas y números enteros.

3.2.1 Resolución de problemas aritméticos aditivos

La resolución de problemas posee una sólida tradición en la investigación en Educación Matemática que tiene, en gran parte, sus raíces en obras ya clásicas de Polya (1954, 1957 y 1966). Los problemas que aquí consideramos son los problemas escolares de enunciado verbal y, en particular, los problemas aditivos. Constituyen éstos, hoy en día, un dominio de investigación con entidad propia, como se pone de manifiesto en múltiples publicaciones (Fuson, 1992). Castro, Rico y Gil (1992) han realizado una revisión y categorización de este campo, como hemos citado, englobando en cuatro enfoques las investigaciones existentes sobre problemas aritméticos aditivos de enunciado verbal que requieren un determinado funcionamiento cognitivo: el de variables sintácticas, el de variables lingüísticas, el de sentencias abiertas y el enfoque semántico.

Entre estos enfoques teóricos básicos, que organizan este dominio de investigación, cabe destacar el enfoque de las estructuras semánticas de los enunciados de los problemas que se sustentan fundamentalmente en las teorías cognitivas del procesamiento de la información (Heller y Greeno, 1978; Carpenter y Moser, 1983) y el enfoque desde las relaciones aditivas que se dan en los problemas verbales aritméticos, mediante el uso de medidas, transformaciones y relaciones estáticas, en el marco de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud y Duran, 1976; Vergnaud, 1982).

En el estudio de los problemas aritméticos aditivos de una sola operación, existen varias categorías de problemas. Inicialmente, Heller y Greeno (1978) establecieron tres categorías semánticas: Cambio, combinación y comparación.

Carpenter y Moser (1982, p. 12) hicieron una primera clasificación de los problemas aditivos con números naturales, atendiendo a tres aspectos:

1) Que la relación entre las cantidades sea activa o estática.
2) Que existan relaciones de inclusión de conjuntos.
3) Que haya un aumento o disminución de las cantidades iniciales.

Así, resultan los seis grupos indicados en la tabla 3.1:

	Nombre	Acción	Inclusión	Variación
1.	Reunión	Activa	A y B en C	Aumento
2.	Separación	Activa	A y B en C	Disminución
3.	Parte-parte-todo	Estática	A y B en C	-
4.	Comparación	Estática	A en B	-
5.	Igualación-añadiendo	Activa	A en B	Aumento
6.	Igualación-quitando	Activa	A en B	Disminución

Tabla 3.1

En ellos hay que tener en cuenta que, según la posición de la incógnita, resultan, salvo en el caso 3, tres tipos de problemas, siendo 17 el número de problemas distintos que se pueden proponer a los alumnos.

En trabajos posteriores, Carpenter agrupa “reunión” y “separación” en Cambio, a la categoría parte-parte-todo la llama combinación, y engloba los grupos 5 y 6 en igualación, quedando la clasificación que actualmente más se utiliza:

Cambio-combinación-comparación-igualación

Riley, Greeno y Heller (1983, p. 160) basándose en trabajos propios, así como en otros investigadores como Carpenter y Moser, Fuson, Nesher y Vergnaud aportan la siguiente clasificación, con 18 tipos de situaciones diferentes:

Dinámico	**Estático**
CAMBIO 1. Desconocida la cantidad final 2. Desconocida la variación 3. Desconocida la cantidad inicial (2 problemas de cada tipo)	**COMBINACIÓN** 1. Desconocida la cantidad global 2. Desconocida una de las partes (2 tipos de problemas)
IGUALACIÓN 1. Añadir a 2. Quitar de	**COMPARACIÓN** 1. Diferencia desconocida 2. Referente desconocido 3. Cantidad comparada desconocida (6 tipos de problemas)

Tabla 3.2

Recogemos aquí, a título de ejemplo, la clasificación presentada por Fuson (1992), en la que distingue dos grupos: situaciones aditivas y situaciones sustractivas.

Situaciones aditivas	**Situaciones sustractivas**
1. Cambio, añadiendo a	**2**. Cambio, quitando de
3. Combinar físicamente	
4. Combinar conceptualmente	**5.** Igualar, quitando de
	6. Igualar, añadiendo a
	7. Comparar (¿Cuántas más?)
	8. Comparar (¿Cuántas menos?)

Obtiene en total 24 problemas diferentes, dependiendo del lugar donde se encuentre la incógnita, pues añade la distinción entre combinar físicamente y conceptualmente.

En la tabla 3.3 tenemos un ejemplo de cada uno de ellos:

Cambio: **añadir a**	Todo desconocido Estado final descon.	Parte 2 desconocida Cambio desconocido	Parte 1 desconocida Estado inicial desc.
Operación unitaria Situación activa	Rafa tiene 5 boliches. Juan le dio a él tres más. ¿Cuántos boliches tiene en total? a + b = ?	a + ? = c	? + b = c
Cambio: **quitar de**	Todo desconocido Estado final desc.	Parte 2 desconoc. Cambio desconoc.	Parte 1 descon. Estado inicial desc.
Operación unitaria Situación activa	Rafa tiene 8 boliches. Le da 5 a Juan. ¿Cuántos le queda? a - b = ?	a - ? = c	? - b = c
Combinar **físicamente**	Todo desconocido Estado final descon.	Parte 2 desconocida Cambio desconoc.	Parte 1 desconoc. Estado inicial desc.
Operación binaria Situación activa	Rafa tiene 5 boliches verdes y 3 rojos y los coloca en una bolsa. ¿Cuántos boliches tiene en la bolsa? a + b = ?	a + ? = c	? + b = c
Combinar **conceptualmente**	Todo desconocido Estado final descon.	Parte 2 desconoc. Cambio desconoc.	Parte 1 desconoc. Estado inicial descon
Operación binaria Situación activa	En el equipo de fútbol hay 8 niños y 5 niñas. ¿Cuántos jugadores hay en el equipo? a + b = ?	a + ? = c	? + b = c
Comparar: **añadir a**	Todo desconocido Diferencia desconoc.	Parte 2 desconocida	Parte 1 desconocida
Operación binaria Situación estática	Rafa tiene 8 boliches y Juan tiene 5 boliches. ¿Cuántos boliches tiene Rafa más que Juan? a - b = ?	a - ? = c	? - b = c

Igualar: **añadir a**	Todo desconocido Diferencia desconoc.	Parte 2 desconocida	Parte 1 desconocida
Operación binaria Situación activa	Rafa tiene 8 boliches y Juan tiene 5 boliches. ¿Cuántos más tiene que tener Juan para tener tantos como Rafa? a - b = ?	a - ? = c	? - b = c
Comparar: **quitar de**	Todo desconocido Diferencia desconoc.	Parte 2 desconocida	Parte 1 desconocida
Operación binaria Situación estática	Rafa tiene 8 boliches y Juan tiene 5 boliches. ¿Cuántos boliches menos tiene Juan que Rafa? a - b= ?	a - ? = c	? - b = c
Igualar: **quitar de**	Todo desconocido Diferencia descon.	Parte 2 desconocida	Parte 1 desconocida
Operación binaria Situación dinámica	Rafa tiene 8 boliches y Juan tiene 5 boliches. ¿Cuántos boliches tiene que perder Rafa para tener tantos como Juan? a - b = ?	a - ? = c	? - b = c

Tabla 3.3

Los trabajos de Vergnaud y Duran (1976) y Vergnaud (1982), sitúan la resolución de problemas aritméticos verbales con números naturales y enteros dentro de lo que se denomina “campo conceptual aditivo”. Establecen las diferentes relaciones estáticas y obtienen ciertas evidencias empíricas sobre las respuestas de los estudiantes y sobre las dificultades que tienen y los errores que cometen.

Vergnaud y Duran (1976) pretenden aportar “*un marco teórico suficientemente riguroso para que el estudio de la resolución de problemas* *aritméticos salga del empirismo que lo suele caracterizar*" (p. 128). Sin embargo, los estudios no son exhaustivos y resultan incompletos como marco teórico general. Las ideas básicas que consideran son:

- La inadecuación de la noción de ley de composición interna para caracterizar las relaciones numéricas que se dan en el campo conceptual de las magnitudes discretas (necesitan tres leyes aditivas: de números naturales, de número natural y número dirigido y de números dirigidos).
-La existencia de dos tipos de representaciones numéricas (n, número natural o estado y (+n) o (-n) número dirigido u operador).
- La distinción entre el cálculo numérico y el cálculo relacional subyacente en todas las tareas y sometidos a reglas distintas.
- La existencia de seis grandes categorías de relaciones numéricas aditivas: composición de medidas, transformación de una medida en otra medida, relación estática entre dos medidas, composición de dos transformaciones, transformación de una relación estática (estado relativo) en otra relación estática (estado relativo) y composición de dos relaciones estáticas (estados relativos).

Recogemos aquí las seis categorías de relaciones numéricas aditivas presentadas por Vergnaud (1982).

Como ya se señaló anteriormente utiliza la siguiente notación para el cálculo numérico: **n** número natural, (+n) ó (-n) número dirigido, + adición de número natural, $+$ adición de un número natural y un número dirigido, y $\boldsymbol{+}$ adición de números dirigidos, y los siguientes símbolos para los diagramas o cálculo relacional: $\square$ número natural, $\bigcirc$ número dirigido, }o ⁀⁀ composición de elementos de la misma naturaleza, y——— o | para transformaciones o relaciones (composición de elementos de naturaleza diferente).

Y, teniendo en cuenta los conceptos de medida, transformación temporal y relaciones estáticas y del uso de los números enteros con los significados de estado

(S), transformación (T) y relación (S), quedan las seis categorías, como sigue:

CATEGORÍA I: Composición de medidas: Dos medidas que se componen en una tercera.

Ejemplo: Pedro tiene 6 boliches en el bolsillo derecho y 8 en el bolsillo izquierdo. Tiene en total 14 boliches.

Diagrama o cálculo relacional

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\mathbf{6}}\\ \boxed{\mathbf{8}}\end{array}\right\}\ \boxed{\mathbf{14}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\mathbf{a}}\\ \boxed{\mathbf{b}}\end{array}\right\}\ \boxed{c}$$

Ecuaciones o cálculo

$$6 + 8 = 14$$

Existen dos clases principales de problemas.

CATEGORÍA II: Transformación de una medida en otra medida (STS): Una transformación que opera sobre una medida para dar una medida.

Ejemplo: Pedro tiene 17 boliches antes de jugar. Pierde 4 boliches. Le quedan 14 boliches.

Diagrama o cálculo relacional

$$\boxed{\mathbf{17}} \xrightarrow{-4} \boxed{\mathbf{13}}$$

$$\boxed{\mathbf{a}} \xrightarrow{b} \boxed{\mathbf{c}}$$

Ecuaciones o cálculo numérico

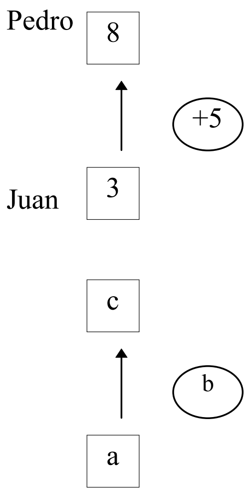
$$17 + (- 4) = 13$$

Existen seis clases principales de problemas

CATEGORÍA III: Una relación estática une dos medidas (SRS).

Ejemplo: Pedro tiene 8 boliches. El tiene 5 más que Juan. Juan tiene 3 boliches.

Diagrama o cálculo relacional | **Ecuaciones o cálculo numérico**



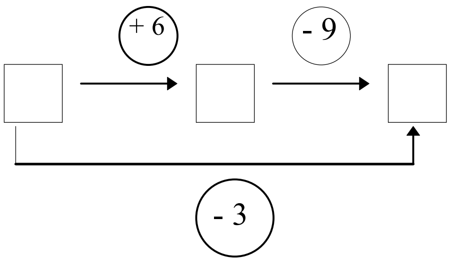
$3 + (+5) = 8$

Existen seis clases principales de problemas

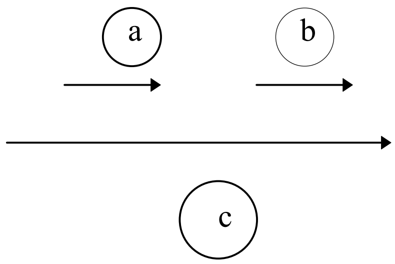
CATEGORÍA IV: Composición de dos transformaciones (TTT): Dos transformaciones se componen en una tercera.

Ejemplo: Pedro ganó 6 boliches en la mañana. El perdió 9 boliches en la tarde. En total perdió 3 boliches.

Diagrama o cálculo relacional | **Ecuaciones o cálculo numérico**



$(+6) + (-9) = (-3)$



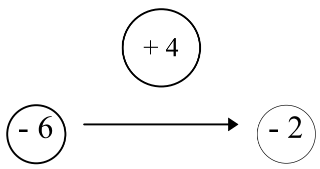
Existen tres clases principales de problemas. Cada una de éstas se subdivide en diferentes subclases. Por ejemplo, si a y c son conocidos, se tienen los siguientes casos:

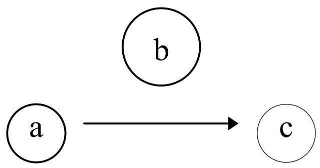
	$a > 0$ $c > 0$	$a < 0$ $c < 0$	$a > 0$ $c < 0$	$a < 0$ $c > 0$
$\lvert a\rvert < \lvert c\rvert$				
$\lvert a\rvert > \lvert c\rvert$				

CATEGORÍA V: Una transformación une dos relaciones estáticas (estado relativo) (RTR): Una transformación que opera sobre un estado relativo para dar un estado relativo.

Ejemplo: Pedro debe 6 boliches a Enrique. Le devuelve 4 boliches. El debe 2 boliches a Enrique.

Diagrama o cálculo relacional





Ecuaciones o cálculo numérico

$$(-6) + (+4) = (-2)$$

Existen tres clases principales de problemas. Cada una de estas se subdivide en diferentes subclases.

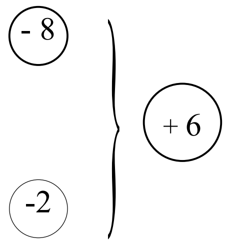
CATEGORÍA VI: Composición de dos relaciones estáticas (estados relativos) (RRR): Dos estados relativos que se componen en un tercero.

Ejemplo 1: Pedro debe 8 boliches a Enrique, pero Enrique debe 6 boliches a Pedro, así que Pedro debe 2 boliches a Enrique.

Ejemplo 2: Roberto tiene 7 boliches más que Susana. Susana tiene 3 boliches menos que Laura. Roberto tiene 4 boliches más que Laura.

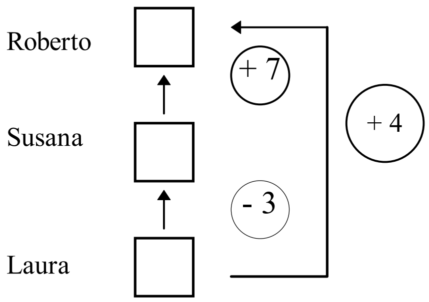
Diagrama o cálculo relacional **Ecuaciones o cálculo numérico**

Problema 1



$$(-8) + (+6) = (-2)$$

Problema 2



$$(-3) + (+7) = (+4)$$

Existen tres clases principales de problemas. Cada una de éstas se subdivide en diferentes subclases.

A partir de estas consideraciones, los autores citados, realizan diferentes estudios experimentales, fundamentalmente sobre problemas de la Categoría II, transformación de una medida en otra medida, y Categoría IV, composición de transformaciones, y obtienen resultados dispares que son difícilmente justificables desde el marco teórico que se propone, por ejemplo, han encontrado diferencias de varios años en la resolución de problemas aparentemente similares desde el punto de vista teórico. Estos resultados les llevan a concluir que: "*La aritmética elemental aditiva no forma un bloque homogéneo, sino que se compone de relaciones heterogéneas que son tratadas de distinta forma por los niños e incluso por los* *adultos*" (Vergnaud y Duran, 1976, pp. 124-125). Otras cuestiones que ponen de manifiesto la complejidad de las relaciones que intervienen en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas y la posibilidad de que la categorización establecida no sea la tesis idónea, son:

– La necesidad de utilizar tres signos de adición para representar cálculos numéricos de diferente naturaleza, lo que plantea serios problemas de legitimidad en la aplicación del conocimiento matemático formal. Es decir, la compatibilidad entre los conocimientos matemáticos elementales y la aplicación de los mismos en contextos diversos. Así lo ponen de manifiesto cuando afirman: "*El estudio de los problemas de aritmética elemental pone en evidencia otras muchas dificultades que manifiestan la insuficiencia, si no inadecuación de la noción de ley interna para caracterizar ciertas relaciones numéricas*" (Vergnaud y Duran, 1976). Estos desajustes se dan en realidad cuando las operaciones de la aritmética se caracterizan como leyes de composición interna y las aplicaciones concretas funcionan en realidad como leyes de composición externa.

– La distinción que se establece entre el cálculo numérico y el cálculo relacional, sometidos a reglas distintas según los casos, tal y como afirman Vergnaud y Duran (1976) "*sobre la misma operación aritmética se proyectan cálculos relacionados distintos que están muy lejos de ser equivalentes entre sí*".

Esta separación expresa entre el cálculo numérico y cálculo relacional, está obligada por la complejidad del campo todavía sin organizar.

A pesar de todo, seguimos pensando que el grupo aditivo y ordenado de los números enteros, es un buen modelo que caracteriza el campo conceptual de las magnitudes discretas, y que las categorías de cambio, combinación y comparación, son pertinentes para la clasificación de los problemas. Éste es nuestro propósito en lo que sigue.

3. 2. 2 Campo conceptual y modelos de competencia

Al caracterizar Vergnaud la teoría de los campos conceptuales señala, que:

"*El dibujo a realizar es complejo*". Para matizar que "*Esta complejidad viene, principalmente del hecho que los conceptos matemáticos adquieren su significado a partir de una variedad de situaciones y cada situación no puede usualmente ser analizada con la ayuda de un solo concepto, requiriendo más bien varios de ellos. Esta es la razón que tenemos para estudiar el aprendizaje y la enseñanza de campos conceptuales, es decir, amplias colecciones de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectados unos con otros. Ejemplos de campos conceptuales, son las estructuras aditivas, las estructuras multiplicativas, la geometría proyectiva y la euclídea, la lógica de clases y el álgebra elemental*" (Vergnaud, 1990, p. 22).

En otro lugar, Vergnaud (1993) indica que un campo conceptual está formado por dos conjuntos básicos:

- Un conjunto de situaciones.
- El conjunto de conceptos que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas.

Castro (1994), al organizar la línea de investigación denominada "Pensamiento numérico", señala que debe contemplar tres elementos fundamentales:

a) unos instrumentos conceptuales: sistemas simbólicos estructurados.
b) unos modos de uso de los sistemas simbólicos: funciones cognitivas.
c) un campo de actuación: fenómenos, cuestiones y problemas.

Observamos que Castro amplía las consideraciones de Vergnaud al caracterizar el campo conceptual numérico, implicando a los fenómenos de enseñanza y a los aspectos curriculares en esta aplicación de conceptos, relaciones y sistemas simbólicos a un conjunto de situaciones, fenómenos, cuestiones y problemas para ser analizados como temas matemáticos. Es decir, mientras Vergnaud sitúa las componentes de los campos conceptuales en la epistemología y en la psicología mediante el análisis de situaciones, Castro caracteriza la línea de investigación, denominada pensamiento numérico, añadiendo a lo anterior los fenómenos de enseñanza y los aspectos curriculares.

La organización de los campos conceptuales o de líneas de investigación como pensamiento numérico tienen como finalidad explicitar los significados completos que aparecen durante los procesos de enseñanza-aprendizaje; por tanto, éstos deben ser un marco global que combine tanto las exploraciones formales como funcionales. Hay, pues, dos componentes esenciales: la componente formal, que procede de todas las evidencias acumuladas, tanto de la lógica de la disciplina como de las tendencias de los sujetos en un campo conceptual, y la componente funcional, que procede del entorno de enseñanza en el que se está llevando a cabo el proceso de aprendizaje.

Con la intención de reflexionar sobre este marco global que permita explicitar los significados que aparecen en los procesos de aprendizaje, parece razonable considerar estas dos componentes: formal y funcional, y establecer semejanzas y diferencias entre ellas.

Para su análisis, consideramos las dos componentes como modelos de competencia y ejecución, respectivamente.

El modelo de competencia se referiría al aspecto formal del campo conceptual tanto en su aspecto epistemológico como en sus aspectos cognitivos, es decir, simularía los procesos cognitivos implicados en la ejecución competente de un usuario ideal del campo conceptual analizado.

Es obvio que, los conceptos y expresiones matemáticas de un campo conceptual específico, tienen un significado intrínseco determinado por las reglas matemáticas que lo organizan y que, un ejecutor que domine ese campo ha interiorizado tanto el sistema de reglas como sus contenidos semánticos intrínsecos; y es, en este sentido, en el que decimos que esa persona tiene una competencia matemática específica. Es decir, aquí la palabra técnica competencia, se refiere a la capacidad que tiene un individuo idealizado para asociar signos y significados que están de acuerdo con los conceptos y reglas que organizan ese campo conceptual.

Ahora bien, un problema importante para la educación matemática, es saber cómo ejecuta el usuario real las acciones propias de ese campo conceptual, donde las creencias extramatemáticas, concernientes al ejecutor y a la situación donde tiene lugar la actividad, juegan un papel fundamental en la determinación de cómo se realiza, se identifica y se comprende el campo conceptual tratado.

Es necesario distinguir con claridad entre la función y las propiedades del modelo de competencia (MC) y del modelo de ejecución (ME), ya que ambos relacionan signos y significados, pero el ME se sirve de informaciones que están más allá de la asociación signos-significados y de las estructuras cognitivas que subyacen, determinadas por el modelo de competencias y opera bajo los condicionamientos de la memoria, del tiempo, de la organización de estrategias perceptivas, condicionados por el contexto y por creencias extramatemáticas, etc., que no son asuntos del MC.

Por otra parte, hay que ser conscientes de que, aunque podamos describir el MC como un sistema de reglas y procesos que se aplican con un cierto orden para relacionar signos y significados, no podemos hacer lo mismo para describir los actos de un modelo de ejecución.

Hay que entender la relación entre el MC y ME no como un hecho, sino como un proceso, es decir, un continuo ir y venir del MC al ME y del ME al MC. En este proceso se producen cambios que pueden ser considerados como desarrollo en sentido funcional.

Los aspectos externos del MC tienen una sintaxis opuesta a la sintaxis de los aspectos internos del ME, pues mientras en los primeros hay una actividad abstracta y deliberada, en los segundos existe una actividad espontánea y no consciente. Hay que entender que MC y ME van en la misma dirección pero en sentidos opuestos; así, mientras MC va de lo particular a lo general, ME va de lo general a lo particular, y son caras de un mismo marco global, que deben ser entendidas como unidades de análisis que mantienen las propiedades del marco global y no como elementos separados.

En este sentido, señalamos los planteamientos de Filloy (1990), que propone concentrarse en modelos teóricos locales adecuados a fenómenos específicos, pero capaces de tomar en consideración todos los elementos: gramática, lógica matemática, modelos de enseñanza, modelos cognitivos y pragmática, organizados en torno a tres componentes: modelos de enseñanza, modelos de los procesos cognitivos implicados y modelos de competencias formal, que arrojan luz sobre las interrelaciones y las oposiciones que ocurren durante la evolución de todos los procesos pertinentes relacionados con cada una de las tres componentes.

En este trabajo, nos vamos a referir al modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, es decir, nos referimos a representaciones idealizadas que están determinadas por el campo conceptual subyacente (que en nuestro caso son los números enteros).

En consecuencia, llamaremos Modelo de competencia para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas al modelo final constituido por:

- Elementos epistemológicos y fenomenológicos asociados al campo conceptual aditivo de los números naturales y enteros.
- Elementos cognitivos asociados a dicho campo.

3.2.3 Aspectos epistemológicos y fenomenológicos asociados al campo conceptual aditivo de los números naturales y enteros

Los aspectos epistemológicos tratan de la organización lógico-formal de los números naturales y enteros, es decir, de los conceptos, relaciones y procedimientos que los caracterizan, y los aspectos fenomenológicos tratan del conjunto de situaciones y problemas que pueden ser analizados mediante la organización lógico-formal de los citados números.

La relación entre números naturales y enteros y medida es obvia; de ahí la necesidad de abordar conjuntamente los aspectos lógico-formales y fenomenológicos sobre los conceptos numéricos y de medida, que intervienen en el campo conceptual considerado; es decir, las relaciones entre los conceptos numéricos y métricos es muy estrecha y no se pueden entender avances aislados en uno de ellos sin afectar al otro. De hecho, a un nivel formal, una vez establecido un concepto métrico, el isomorfismo existente permite trabajar en el dominio numérico, sin hacer referencia al dominio comparativo que subyace en el concepto métrico.

Los conceptos usuales de magnitud, cantidad y medida pueden ser caracterizados como sigue:

La magnitud, como un conjunto de entes llamados "cantidad de magnitud", con una estructura de semigrupo aditivo conmutativo con elemento neutro y totalmente ordenado. Si no poseen elementos simétricos serán magnitudes absolutas y si poseen elementos simétricos, magnitudes relativas. Si además del orden total, verifican la propiedad arquimediana, entonces las magnitudes se denominan magnitudes escalares.

Si en las magnitudes definimos una ley de composición externa, es decir multiplicamos las "cantidades de magnitud" por números naturales (**N**), enteros (**Z**), racionales (**Q**) o reales (**R**), obtenemos, respectivamente, las estructuras de semimódulo sobre un semigrupo, módulo sobre un anillo conmutativo, unitario o sobre un cuerpo conmutativo. De esta manera, las magnitudes isomorfas al N-semimódulo o al Z-módulo, se denominarán magnitudes discretas, las magnitudes isomorfas a Q-módulo se denominarán magnitudes racionales y las magnitudes isomorfas al R-módulo serán las magnitudes continuas. Este tipo de magnitudes, junto con las vectoriales, constituyen la parte más importante y a la vez más elemental del concepto de magnitud en Matemáticas. Abordaremos en este trabajo las magnitudes escalares discretas, tanto absolutas como relativas.

La cantidad, como cada uno de los elementos del semigrupo o grupo, que constituye la magnitud. Consideramos, en consecuencia, tanto a las magnitudes absolutas como a las magnitudes relativas. Es necesario insistir que en este trabajo el concepto de cantidad es un concepto clave. Para ello observemos que los conjuntos numéricos N y Z pueden ser considerados como N-semimódulo y Z-módulo, respectivamente, es decir, tienen estructura de magnitud escalar absoluta y magnitud escalar relativa y sus elementos pueden ser considerados cantidades de N o Z, respectivamente.

La medida, como el problema que consiste en asignar a cada cantidad de magnitud un símbolo numérico que refleja con precisión sus propiedades.

Así, medir una magnitud escalar absoluta es establecer un isomorfismo entre (M, +) y (K^+, +) donde K^+ es un subconjunto de R^+, multiplicativamente cerrado y con $1 \varepsilon K^+$. Medir una magnitud escalar relativa es establecer un isomorfismo entre (M, +) y (K, +) donde K es un subconjunto de R, multiplicativamente cerrado y tal que $1 \varepsilon K$. En los casos que consideramos magnitudes absolutas discretas y relativas discretas, los conjuntos K^+ y K se corresponden, respectivamente, con N y Z.

Por otra parte, si revisamos el proceso histórico de la construcción de los números enteros nos encontramos que transcurrieron 15 largos siglos desde su aparición (cantidades negativas) en los primeros trabajos matemáticos hasta su consolidación con categoría de números. Glaeser (1981) encontró seis grandes obstáculos para este largo proceso, pero, en general, podemos decir que estos obstáculos se generaron a partir de una idea básica: "*el número se abstrae de los objetos y representa una cantidad en sentido absoluto*". Piaget (1978) señala que esta comparación histórica entre los números negativos y los enteros positivos resulta singularmente instructiva. Añade que, desde un punto de vista operatorio, nada resulta más simple que añadir o quitar, en el pensamiento, un primer conjunto a un segundo, aunque éste sea momentáneamente o definitivamente el más pequeño de los dos; el carácter reversible de las operaciones de adición y sustracción parece implicar, sin más, la necesidad de completar la sucesión directa de los números enteros positivos por la sucesión inversa de los números negativos, siendo éstos la resultante de la sustracción n_2-n_1, si $n_1 > n_2$. La significación de estas operaciones, continúa, resulta tan general que no aparece como específica del número y se encuentra ya presente en las reuniones y separaciones de las clases cualitativas.

Comentando las ideas de D'Alembert, que consideraba la concepción del número negativo como oscura, a pesar de los modelos económicos (deudas) o geométricos (inversión de dirección, etc.) que justifican su empleo en la práctica, señala que es producto de esa concepción estática del número negativo y del número en general. De esta manera, si el número deriva de la percepción, el número negativo no puede justificarse, puesto que corresponde a una ausencia de la percepción; por ello afirma que la propiedad esencial del número no es estática y perceptual, sino dinámica y vinculada a la acción misma, interiorizada en operaciones. Desde este punto de vista, el número negativo puede compararse con el positivo, como la resultante de la misma acción en el sentido más estricto del término, pero simplemente orientado en sentido inverso.

Piaget sostiene, finalmente, que lo propio de las operaciones mentales es prolongar la acción real, es decir, actual y material, en acciones futuras o pasadas, simplemente posibles o incluso imposibles de realizarse en los hechos.

Parece razonable aceptar que, el conjunto aditivo de los números enteros regula satisfactoriamente el funcionamiento de las cantidades aditivas discretas enteras y que, los números enteros organizan, dan respuesta y adquieren significados concretos en las diferentes situaciones y problemas en las que intervienen las cantidades discretas enteras.

3.2.4 Aspectos cognitivos asociados al campo conceptual aditivo de los números naturales y enteros

En este apartado recogemos, tanto las funciones cognitivas específicas del campo conceptual, como los aspectos estructurales de las actividades de aprendizaje. Para su análisis lo organizamos en: construcción de los conceptos numéricos y de medida, y el esquema partes-todo.

La construcción de los conceptos numéricos y de medida

En este apartado se expone un análisis de las ideas de Piaget sobre el proceso de construcción de los conceptos numéricos y métricos recogidas de Piaget (1978) y

Flavell (1981).

El proceso de desarrollo de la inteligencia, tal como lo ve Piaget, se desarrolla en cada niño a través de determinados períodos que son parte de un proceso continuo, en el cual una característica del pensamiento infantil se cambia gradualmente en un tiempo determinado y se integra en formas mejores de pensamiento. Piaget distingue tres periodos, que a su vez se dividen en subperiodos e incluso en etapas:

* Periodo de la inteligencia sensorio-motora (0-2 años), que es un periodo sensorial y de coordinación de acciones físicas.
* Periodo de preparación y organización de las operaciones concretas (2-11 años), que se divide en dos subperiodos:
  . Periodo de las representaciones preoperacionales (2-4 años).
  . Periodo de las operaciones concretas (7-11 años).
* Periodo de las operaciones formales (11-15 años).

Según esta clasificación, el desarrollo del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas se encuentra ubicado en el periodo de las operaciones concretas (7-11 años), periodo cuya diferencia fundamental con el anterior estriba en que actúa en el plano de la representación, en lugar de la acción concreta. En Socas y otros (1989, p. 76) se presenta un resumen de las características principales de este periodo:

"El niño mejora su capacidad de pensamiento lógico ante los objetos físicos: es capaz de pensar en objetos físicamente ausentes que forman parte de experiencias pasadas, pero no con hipótesis verbales. El pensamiento infantil está limitado a cosas concretas en lugar de ideas.

Adquiere la reversibilidad que le permite invertir mentalmente una acción que antes sólo había llevado a cabo físicamente, la inclusión lógica, la clasificación y ordenamiento de objetos, la habilidad para conservar ciertas propiedades de los objetos (número, cantidad) a través de los cambios de otras *propiedades y la capacidad de retener mentalmente dos o más variables cuando estudia los objetos.*

Se vuelve más sociocéntrico, cada vez más consciente de la opinión de los otros.

Las operaciones matemáticas básicas surgen en este periodo"

Es en este periodo en el *"cual la organización perceptual que tiene el niño del medio circundante adquiere lentamente estabilidad y coherencia en virtud de una serie de estructuras cognoscitivas llamadas agrupamientos". (Flavell, 1981, p. 105).*

El punto de partida lo constituye la idea de que cualidad y cantidad son inseparables, y ello tanto desde el punto de vista genético como desde el punto de vista del análisis lógico o axiomático; pero, afirmar que son indisociables, no significa en absoluto que sean idénticas: simplemente son tan primitivas una como la otra y no podrían definirse una sin recurrir a la otra. Ambas son, desde el punto de vista genético, primitivas, y en los esquemas de asimilación puede distinguirse que una extensión implica la cantidad y una comprensión implica la cualidad. Es decir, que en las formas más elementales de la cualidad y de la cantidad, se confunden con la comprensión y extensión lógicas. Así, podemos caracterizar la cualidad y la cantidad según uno se coloque desde el punto de vista de las clases o las relaciones. En lo que se refiere a las clases, por ejemplo, resulta claro que la cualidad corresponde a la comprensión del concepto y la cualidad a su extensión.

Las relaciones de extensión pueden presentarse en tres formas distintas; una que caracteriza a la lógica de clases y relaciones, donde la cantidad se denomina "intensiva" y se caracteriza por la posibilidad de establecer relación entre las partes y el todo, pero no entre las partes entre sí; las dos restantes son propias de la matemática. La primera de estas últimas, denominada "cantidad extensiva", se caracteriza por establecer relaciones de extensión entre las partes y la segunda, se denomina "cantidad numérica o métrica" y se caracteriza porque en un todo E, las partes A y A' pueden reducirse a una unidad común.

Aceptado esto y que la cualidad es inseparable de la cantidad y recíprocamente, tenemos que en lógica, las cualidades se relacionan entre sí por relaciones de cantidad intensiva; en cambio, en matemáticas todas estas relaciones son extensivas ya sean o no métricas.

Estas distinciones elementales tienen en Piaget gran importancia porque señalan el mecanismo de las operaciones generales del pensamiento y, en particular, su desarrollo genético.

Así, Piaget caracteriza a las operaciones elementales de reunión y separación compatibles con la cuantificación intensiva y con las estructuras cognoscitivas llamadas "agrupamientos".

El agrupamiento es una estructura híbrida entre la de grupo y retículo y es la estructura psicológica que formaliza las organizaciones del pensamiento natural.

Hay nueve agrupamientos diferentes que describen la organización de las operaciones lógicas[1] (es decir, las operaciones que se ocupan de las clases y las relaciones lógicas): un agrupamiento menor y ocho mayores. Estos agrupamientos se adecuan también a la organización de lo que Piaget llama operaciones infralógicas, que define como acciones cognoscitivas vinculadas con las relaciones de posición y distancia y de partes-todo que atañen a objetivos y configuraciones espacio-temporales concretos, (Flavell, 1981, p. 189). Así:

AGRUPAMIENTOS LÓGICOS	**AGRUPAMIENTOS INFRALÓGICOS**
(Clases, elementos)	(Todo (objeto), Partes)
(Adición y sustracción de clases)	(Síntesis de las Partes y división del Todo)

Dentro de los agrupamientos lógicos Piaget especifica entre agrupamiento de clase y de relación, cuyo esquema es el indicado en la tabla 3.4 (Castorina y Palau, 1982, p. 43).

A cada agrupamiento lógico le corresponde uno infralógico. Las operaciones

[1] Piaget define operación como todo acto representacional que es parte integral de una trama organizada de actos conexos.

lógicas tienen como síntesis, el número, y las operaciones infralógicas, la medición. Castorina y Palau (1982) indican que las operaciones lógicas agrupan o reúnen los objetos en clases según propiedades comunes, dando lugar a la inclusión de clases y a las operaciones entre ellas adición, sustracción, etc., o bien las ordena según diferencias, dando lugar a seriaciones aditivas o multiplicativas; sin embargo, las operaciones infralógicas consisten en tomar las partes de un todo y reunirlas para formar un continuo.

DE CLASE	ADITIVOS	Adición de clases primarias: I. Agrupamiento aditivo de clases primarias Adición de clases secundarias: II. Vicariancias.
	MULTIPLICATIVOS	Multiplicación bi-unívoca de clases: III. Agrupamiento multiplicativo de clases. Multiplicación co-unívoca de clases: IV. Agrupamiento multiplicativo counívoco de clases
DE RELACIÓN	ADITIVOS	Adición de relaciones asimétricas: V. Seriación intensiva. Adición de relaciones asimétricas: VI. Agrupamiento aditivo de relaciones simétricas
	MULTIPLICATIVOS	Multiplicación biunívoca de relaciones: VII. Agrupamiento multiplicativo biunívoco de relaciones. Multiplicación co-unívoca de relaciones: VIII: Agrupamiento co-unívoco de relaciones

Tabla 3.4

Comparando los agrupamientos lógicos con los infralógicos, cabría decir que el agrupamiento lógico de clases (agrupamiento I) en el que intervienen la adición y sustracción de clases se corresponde con el agrupamiento infralógico de la síntesis de las partes y la división del todo.

El paso del agrupamiento de carácter simplemente lógico a los grupos, que corresponde a la cuantificación matemática, marca una etapa decisiva en la constitución de la cantidad, que se caracteriza por el paso desde las relaciones de parte a todo al establecimiento de relaciones generales de las partes entre sí, es decir, el paso de lo intensivo a lo extensivo y lo métrico.

Puede afirmarse que el agrupamiento constituye la primera etapa del camino que conduce a los grupos y, en particular, al de los números enteros.

Vemos cómo, a partir de acciones elementales ejercidas sobre la realidad, y considerando que la cualidad y la cantidad se hallan indisolublemente unidas, y que la cantidad simplemente expresa las relaciones de extensión entre los términos calificados por sus semejanzas o diferencias, y a través de la combinación de estas acciones iniciales de reunión y separación, las operaciones intelectuales construirán simultáneamente las clases agrupando los objetos por sus semejanzas más o menos generales o espaciales (1), las relaciones asimétricas agrupando los mismos objetos por sus diferencias ordenadas (2), y los números agrupando los objetos en tanto son, a la vez, equivalentes y distintos (3).

Podemos señalar tres grandes clases en la génesis de la construcción del concepto de número, que van desde una fase primaria, asociada a las cantidades intensivas y de carácter clasificatorio, hasta una fase numérica pasando por una fase intermedia de carácter comparativo. Esta evolución de los conceptos numéricos se da de manera equivalente en los conceptos métricos que, análogamente, se organizan en tres sistemas conceptuales: cuantitativo intensivo o clasificatorio, cuantitativo, extensivo o comparativo y métrico, es decir, que también los conceptos métricos necesitan para su formación, la existencia de los conceptos clasificatorios y comparativos correspondientes. Esto indica que un concepto métrico, no sólo se caracteriza por un conjunto de valores numéricos con una serie de propiedades y operaciones, sino que integra además las estructuras clasificatorias y comparativas.

A modo de resumen, señalamos que el grupo aditivo de los números enteros es, pues, el producto de una fusión operatoria entre los agrupamientos cualitativos de las clases (agrupamiento I) y las relaciones asimétricas (agrupamiento V), pero por abstracción de las cualidades diferenciables sobre las que se hacen estos agrupamientos. Las clases, las colecciones asimétricas y los números forman, los tres, un sistema operatorio coherente, a la vez único por sus mecanismos y diferenciado por las tres posibilidades de coordinación de las semejanzas, las diferencias o ambas al mismo tiempo.

Y desde el punto de vista del aprendizaje matemático, podemos interpretar que en la construcción individual de los conceptos numéricos y métricos debe darse una cierta simultaneidad, hecho avalado tanto por el isomorfismo existente entre sus estructuras como por la equivalencia del proceso de construcción seguido.

Si retomamos el diagrama aditivo del esquema partes-todo, definido en el apartado 2.3.4, vemos que es necesario dotar a este diagrama de una interpretación explícita de todas las relaciones aditivas que se dan en el supuesto de que las partes y el todo puedan ser consideradas no sólo como cantidades presentes (positivas), sino también, ausentes. Estas relaciones quedan claramente determinadas por la relación de Chasles (1793-1880), uno de los creadores de la geometría moderna, relación que formulamos en una dimensión como:

> **“ *Relación de Chasles para tres puntos*:**
>
> *Todo triplete de puntos A, B y C en una recta, cualquiera que sea su posición respectiva, verifica la relación* $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.
>
> *Es una relación entre las medidas algebraicas de los bipuntos* $\{\overline{AB}\}$, $\{\overline{BC}\}$ *y* $\{\overline{AC}\}$*; es, por tanto, una propiedad de estos bipuntos; independiente del origen elegido en la recta, ya que este origen no figura en la relación; se trata, pues, de una propiedad intrínseca de los puntos A, B y C. Esta relación se puede generalizar cuando se consideran n puntos.”*

Caratini, R. (1970).

Podemos considerar las siguientes situaciones:

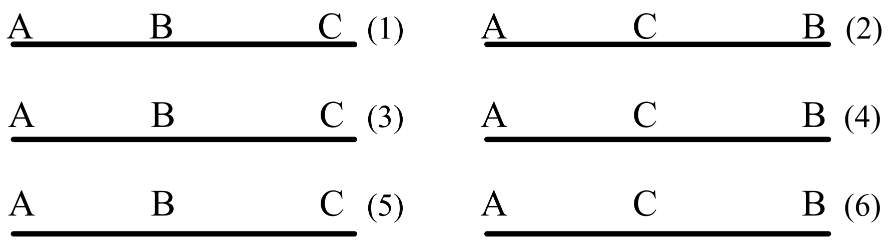


Figura 3.1

Estas seis situaciones desarrollan todas las posibles uniones entre las partes y la posible separación del todo, tanto si las cantidades están presentes (positivas) como ausentes (negativas).

Los elementos cognitivos asociados al campo conceptual de los números naturales y enteros queda, pues, caracterizado por

- El proceso de construcción de los conceptos numéricos y de medida donde las clases, relaciones asimétricas y los números enteros constituyen un sistema operatorio aditivo coherente, isomorfo al de las medidas enteras discretas, a la vez único por sus mecanismos y diferenciado por las tres posibilidades de coordinación de las semejanzas, las diferencias ordenadas o ambas al mismo tiempo:
- El esquema aditivo partes-todo, tanto para las cantidades positivas como para las cantidades negativas y que está determinado por el diagrama aditivo y la relación de Chasles.
- Las categorías semánticas de cambio, combinación y comparación.

3.2.5 Organización del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas

Nuestro propósito es la construcción de un modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, es decir, la elaboración de un modelo teórico que organice este campo conceptual. En definitiva, pretendemos englobar bajo una misma estructura (modelo de competencia) diferentes conceptos y relaciones, a veces no clasificados, que regulan el funcionamiento del campo conceptual aditivo, tomando en consideración el conjunto de los números enteros.

El modelo de competencias debe responder a las exigencias de dicho campo y permitir entre otras cosas:

- Integrar los elementos y relaciones que se dan en el campo conceptual de las magnitudes discretas enteras.
- Elaborar una nueva y exhaustiva clasificación de las situaciones y problemas considerados en el campo conceptual.
- Integrar y explicar de forma plausible resultados de otras investigaciones.
- Facilitar la relación con el modelo de ejecución (M.E.).

Nos vamos a referir a las dos primeras en este apartado, y a la tercera, en el apartado siguiente.

Tomaremos como organizadores del campo conceptual aditivo a las magnitudes discretas, a las relaciones más significativas que se dan en los elementos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos asociados al campo conceptual de los números naturales y enteros.

Procediendo de esta manera, obtenemos una primera clasificación del campo conceptual aditivo en dos grandes categorías determinadas por el diagrama aditivo del esquema partes-todo: Las operaciones aditivas (grupo I) y las relaciones asimétricas (grupos II y III).

Las operaciones aditivas

Como hemos indicado, las operaciones aditivas están representadas por el grupo I del diagrama aditivo del esquema partes-todo y tiene como elementos organizadores a la forma canónica de la operación aditiva $a + b = c$, que correspondería al aspecto epistemológico; a los significados de los fenómenos asociados a los números y a las magnitudes, que especificaremos a continuación, y a todas las relaciones posibles entre estos números o magnitudes expresados por la relación de Chasles dentro del diagrama aditivo del esquema partes-todo. Con relación a la forma canónica $a + b = c$, esto nos va a originar siempre tres casos posibles, dependiendo de la posición del dato desconocido.

Con relación a los fenómenos asociados a los números y a las magnitudes, éstos serán expresados como Número = Magnitud.

La expresión Número = Magnitud, debe ser interpretada como número entero equivalente a magnitud discreta relativa, que contiene como casos particulares a los números naturales y a las magnitudes discretas absolutas y todo ello, como ya hemos especificado en el apartado 3.2.3, porque dada una magnitud podemos garantizar, por su misma definición, que existe siempre un isomorfismo de ella con el Z-módulo de los números enteros y este isomorfismo respeta la ordenación total y arquimediana de la magnitud. Por ello, vamos a considerar los números enteros, o mejor las cantidades discretas relativas, y de esta manera, en lo que sigue nos referiremos tanto a cantidades como a medidas y, por tanto, a números, aunque los ejemplos sean referenciados con cantidades que son la mayor parte de las actividades y ejemplos con significado concreto, que se utilizan en la enseñanza. Estas cantidades pueden ser numéricas o de magnitud y son las que aparecen con un doble sentido o significado, como estado (tengo 6 boliches, debo 6 boliches, etc) o como variación (gané 6 boliches, perdí 6 boliches).

De esta manera, si consideramos la expresión canónica de la estructura aditiva a + b = c y la representamos por:

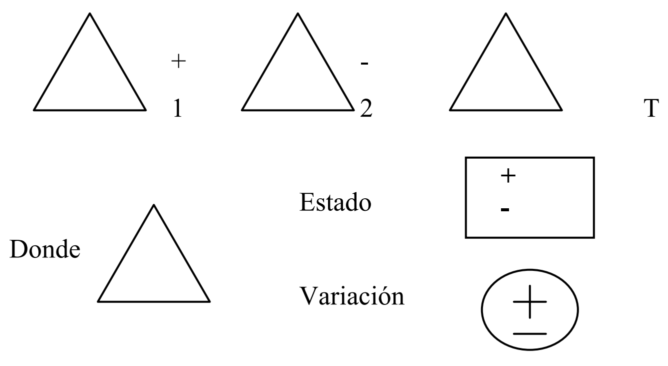


Figura 3.2

obtenemos todas las relaciones aditivas posibles de los fenómenos asociados:

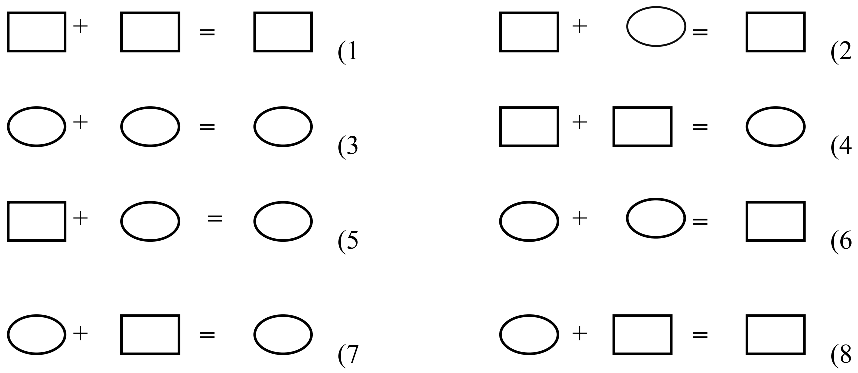


Figura 3.3

Es necesario observar, que estas ocho relaciones aditivas se pueden reducir a seis en función de las equivalencias entre (2 y (8, y entre (5 y (7.

Si hacemos intervenir la relaciones posibles organizadas por el diagrama aditivo del esquema partes-todo mediante la relación de Chasles, obtenemos todas las operaciones aditivas lógicamente posibles del campo conceptual de las magnitudes discretas que son en total 144, y si aceptamos, por razones de equivalencia, la reducción de los casos posibles y, como ya hemos indicado, la de número=magnitud a seis, nos quedan en total 108.

Forma canónica a+b=c	**Número=Magnitud** -Estado -Variación -Mixta	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	
3	8	6	144
3	6*	6	108

Tabla 3.5

Muchas son las preguntas que nos podemos hacer frente al conjunto de operaciones aditivas lógicamente posibles del campo conceptual de las magnitudes discretas. Algunas se pueden concretar en:

¿Se pueden describir fenómenos en los que intervienen cantidades en todas las relaciones posibles?

¿Se pueden establecer todas las relaciones dadas por Chasles entre las partes y el todo, con cantidades ausentes o presentes, respectivamente?

¿Se pueden y deben hacer particiones más finas dentro de este conjunto de operaciones aditivas lógicamente posibles?

Veamos algunos ejemplos con relación a la primera pregunta.

Con relación a los fenómenos descritos en (1, (2 y (3 corresponden a los fenómenos habituales recogidos en la literatura sobre este tema, veamos posibles ejemplos de (4, (5 y (6.

(4. Rafael quiere rebajar una deuda y consulta su libreta de ahorros y tiene un saldo de 6.000 ptas y su cuenta corriente tiene un saldo de 10.000 ptas. ¿En cuánto puede rebajar su deuda Rafael?

(4. Rafael quiere pagar parte de los boliches que debe y tiene 5 en la mesa de noche y 6 en la maleta. ¿Cuántos boliches puede pagar Rafael?

(5. Rafael quiere pagar parte de los boliches que debe. Tiene 7 en su maleta y su tía le regala 5. ¿Cuántos boliches puede pagar Rafael?

(6. Rafael quiere reunir boliches. Su tía le regala 5 y él gana 7. ¿Cuántos boliches tiene Rafael?

Con relación a la segunda pregunta, podríamos construir ejemplos haciendo intervenir cantidades presentes (positivas) y cantidades ausentes (negativas).

Con relación a la tercera pregunta sobre clasificaciones más finas, éstas se pueden hacer atendiendo tanto a los aspectos epistemológicos, por ejemplo, considerando la operación como una operación binaria, generalmente asociada a la teoría de los cardinales, o como una operación unitaria, generalmente asociada a la teoría de operadores; como a los aspectos fenomenológicos, cantidades como estado, variación o situaciones mixtas; y, por último, atendiendo al esquema partes-todo con la presencia de cantidades presentes (positivas) o ausentes (negativas), pero todo ello debe estar relacionado con el trabajo empírico. No obstante, considerando el trabajo realizado en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas absolutas, la categorización de las mismas en combinación y cambio parece adecuada. Así, podemos organizar las 108 operaciones aditivas lógicamente posibles en:

	Forma canónica	Número=Magnitud	Relación partes-todo	
Combinación	3	1	6	18
Cambio	3	5	6	90

Tabla 3.6

Parece razonable incluir (4, (5 y (6 dentro de la categoría semántica Cambio, (2 y (3 estaban ya incluidas por estudios anteriores.

Las relaciones asimétricas

Como hemos indicado, las relaciones asimétricas están representadas por los grupos II y III del diagrama aditivo del esquema partes-todo y tienen como elementos organizadores: la forma canónica de la operación aditiva que ahora toma la expresión a - b = c, que nos va a originar tres casos posibles, dependiendo de la posición del dato desconocido.

- Las relaciones sustractivas posibles de los fenómenos asociados ahora se reducen a 1) y 3), es decir, a situaciones de comparación entre estados o entre variaciones.

- Las relaciones posibles organizadas por el diagrama aditivo del esquema partes-todo mediante la relación de Chasles ahora se reducen a (2, (3, (4 y (5, ya que la (1 y la (6 quedan descartadas, porque no facilitan relaciones de comparación entre las partes.

Si hacemos intervenir todas las relaciones posibles, obtenemos que las relaciones asimétricas (grupo II, parte necesitada) lógicamente posibles del campo conceptual de las magnitudes discretas son 24.

Forma canónica a-b=c	**Número=Magnitud** -Estado -Variación	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	
3	2	4	24

Tabla 3.7

Análogamente, si hacemos intervenir todas las relaciones posibles para las relaciones asimétricas del grupo III (parte excedida), obtenemos igualmente 24.

Forma canónica a-b=c	**Número=Magnitud** -Estado -Variación	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	
3	2	4	24

Tabla 3.8

Categorías aditivas de nivel superior

Si consideramos nuevamente el diagrama aditivo del esquema partes-todo, donde el todo obtenido puede ser considerado como una parte y generar nuevas operaciones aditivas, estos problemas aritméticos corresponderían a problemas de varias operaciones combinadas, o de más de una etapa (Puig y Cerdán, 1988) o “problemas compuestos”.

Análogamente, las partes necesitada o excedida, obtenidas de las relaciones asimétricas, pueden ser consideradas aisladamente o entre sí y generar situaciones como: “Por variación, una nueva relación” o “por relación, una nueva relación”. Como ejemplo de la primera situación, podemos señalar: “Juan tiene 5 boliches más que Pedro y Juan pierde 2. Juan tiene 3 boliches más que Pedro”, y como ejemplo de la segunda, “Juan tiene 7 boliches más que Antonio. Antonio tres más que Pedro. Juan tiene 10 boliches más que Pedro”.

Son ejemplos de problemas de una sola operación, de una sola etapa, pero no parece adecuado colocarlos en el mismo nivel que los problemas descritos en las dos categorías aditivas anteriores. Por todo ello, es necesario replantearse la clasificación de los problemas, en simples o compuestos, de una etapa o de más de una etapa, etc.; nosotros hemos preferido llamar a los primeros, de nivel 1, porque se originan directamente del diagrama aditivo del esquema partes-todo, y a éstos, de nivel 2, porque necesitan un segundo diagrama aditivo para ser interpretados.

3.2.6 Las operaciones aditivas y las relaciones asimétricas y las otras categorías

Corresponde ahora analizar este modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas con otras organizaciones de intenciones parecidas, en particular con las que hemos comentado aquí: las categorías semánticas y las categorías de Vergnaud.

Fundamentalmente, nos referiremos tanto a la integración como a la explicación plausible de estas categorías con la organización propuesta.

Las operaciones aditivas y las relaciones asimétricas y las categorías semánticas

Como ya hemos indicado, el modelo de competencias incorpora las categorías de cambio y combinación para las operaciones aditivas, y de comparación para las relaciones asimétricas. Estas categorías, formuladas para las cantidades discretas naturales, las incorporamos al modelo como un organizador más del componente cognitivo asociado al modelo de competencias. Por tanto, estas categorías estarán identificadas como casos particulares del modelo de competencias.

Las categorías semánticas de combinación y cambio se encuentran dentro de la categoría de las operaciones aditivas (grupo I).

Para la categoría combinación, sólo consideramos 3 situaciones diferentes; ya que parece redundante considerar la operación binaria física o conceptualmente como sugiere Fuson (1992). Estas tres situaciones de combinación están identificadas en la tabla 3.9, donde las cantidades representan sólo un estado y la relación partes-todo viene dada por la relación (1) de Chasles.

Forma canónica: a+b=c	**Número=Magnitud** -Estado	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	**Total**
3	1	1	3

Tabla 3.9

Para la categoría Cambio, las seis situaciones diferentes estarán identificadas en la tabla 3.10, donde las cantidades representan una situación mixta determinada por la relación 2) y la relación partes-todo viene determinada por las relaciones (1) ("añadir a") y (2) ("quitar de") de Chasles.

Forma canónica: a+b=c	**Número=Magnitud** -Mixta	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	**Total**
3	1	2	6

Tabla 3.10

La categoría de comparación se encuentra dentro de la categoría de las relaciones asimétricas (grupos II y III).

La categoría de comparación ("añadir a") genera tres situaciones diferentes, que están identificadas como indica la tabla 3.11, donde las cantidades representan un estado y la relación partes-todo viene dada por la relación (2) de Chasles.

Forma canónica a-b=c	**Número=Magnitud** -Estado	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	**Total**
3	1	1	3

Tabla 3.11

Análogamente, la categoría de comparación ("quitar de") genera tres situaciones diferentes, identificadas en el grupo III, como indica la tabla 3.12.

Forma canónica a-b=c	**Número=Magnitud** -Estado	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	**Total**
3	1	1	3

Tabla 3.12

Las operaciones aditivas y las relaciones asimétricas y las seis categorías de Vergnaud

Al analizar las seis categorías de Vergnaud (1982) dentro del modelo de competencias, nos encontramos con la necesidad de reorganizar estas categorías con categorías aditivas que no corresponden al nivel 1 y con problemas formulados en una categoría que corresponderían a otra, entre otras situaciones.

Las categorías I, II, IV y V corresponden, dentro del diagrama aditivo del esquema partes-todo, a las operaciones aditivas (grupo I), y dentro de éste, la categoría I a las operaciones aditivas de combinación, y las categorías II, IV y V, a las operaciones aditivas de cambio.

La categoría I de Vergnaud, composición de medidas, considera solamente dos situaciones diferentes, al excluir la tercera de la forma canónica, por razones de conmutatividad. Estas dos situaciones estarían identificadas como se indica en la tabla 3.13.

Forma canónica: a+b=c	**Número=Magnitud**: -Estado	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	**Total**
2	1	1	2

Tabla 3.13

Como ejemplo, propone:

“Pedro tiene 6 boliches en el bolsillo derecho y 8 en el bolsillo izquierdo. Tiene en total 14 boliches”

Esta categoría coincide con la categoría de combinar de Carpenter y Moser (1983), y en ella sólo se admite que el número actúe como estado y con valores positivos.

Las categorías II, IV y V estarían dentro de las operaciones aditivas de cambio. En la categoría II, una transformación que opera sobre una medida para dar una medida, considera seis situaciones de problemas. Estas situaciones están identificadas en la tabla 3.14.

Forma canónica: a+b=c	**Número=Magnitud**: -Mixta	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	**Total**
3	1	1	6

Tabla 3.14

Como ejemplo, propone:

“Pedro tiene 17 boliches antes de jugar. Pierde 4 boliches. Le quedan 14 boliches”.

Esta categoría coincide con la categoría de cambio de Carpenter y Moser (1983).

En la categoría IV, dos transformaciones se componen en una tercera, considera tres situaciones principales de problemas y cada una de estas se subdivide en seis situaciones particulares, en total obtiene 18 situaciones diferentes de problemas, que se identifican como indica la tabla 3.15, donde las cantidades representan la situación de variación determinada por la relación (3 y la relación partes-todo viene determinada por las seis relaciones posibles de Chasles.

Forma canónica: a+b=c	**Número=Magnitud** -Estado	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	**Total**
3	1	6	18

Tabla 3.15

Vergnaud (1982) indica que existen tres clases principales de problemas y que cada una de éstas se subdivide en diferentes subclases y, propone, por ejemplo, si a y c son conocidas, en la relación a+b=c, estudiar todos los casos con el siguiente diagrama:

	$a > 0$ $c > 0$	$a < 0$ $c < 0$	$a > 0$ $c < 0$	$a < 0$ $c > 0$
$\lvert a \rvert < \lvert c \rvert$				
$\lvert a \rvert > \lvert c \rvert$				

Como ejemplo, propone:

“Pedro ganó 6 boliches en la mañana. Perdió 9 boliches en la tarde. En total perdió 3 boliches”.

Si completamos el cuadro anterior y lo analizamos desde las relaciones de Chasles nos encontramos que para encontrar b, conocidos a y c, tenemos:

$a > 0$, $c > 0$	$a < 0$, $c < 0$	$a > 0$, $c < 0$	$a < 0$, $c > 0$	
(+6) + (+3) = (+9) A B C (1)	(-3) + (-6) = (-9) C B A (2)	(+3) + (-9) = (-6) C A B (3)	(-3) + (+9) = (+6) B A C (4)	$\lvert a\rvert < \lvert c\rvert$
(+9) + (-3) = (+6) A C B (5)	(-9) + (+3) = (-6) B C A (6)	(+6) + (-9) = (-3) C A B (7)	(-6) + (+9) = (+3) B A C (8)	$\lvert a\rvert > \lvert c\rvert$

con las relaciones (3)=(7) y (4)=(8), en total seis situaciones posibles; las otras dos clases principales serán, obviamente, encontrar a, conocidos b y c, y encontrar c, conocidos a y b.

Esta categoría no corresponde a ninguna de las determinadas por Carpenter y Moser (1983).

En la categoría V, una transformación opera sobre un estado relativo para dar un estado relativo, pone como ejemplo:

"Pedro debe 6 boliches a Enrique. Le devuelve 4 boliches. Debe 2 boliches a Enrique".

Indica que hay tres clases principales de problemas y que cada una de estas clases se subdivide en diferentes subclases.

Si analizamos el problema que propone como ejemplo, nos encontramos que éste puede ser representado en el modelo de competencias como se indica en la tabla 3.16, donde las cantidades representan una situación mixta, determinada por la relación (2, y la relación partes-todo viene determinada por las seis relaciones posibles de Chasles.

Forma canónica: a+b=c	**Número=Magnitud** -Estado	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	**Total**
3	1	6	18

Tabla 3.16

En este caso, la categoría V contiene, como caso particular, a la categoría II.

Si analizamos la categoría por el título que propone, una transformación une dos relaciones estáticas (RTR), haciendo uso del diagrama aditivo del esquema partes-todo, éste no sería un problema del nivel 1, sino del nivel 2, de los que hemos denominado "por variación, una nueva relación", donde un ejemplo de este tipo podía ser, como ya hemos indicado: "Juan tiene 5 boliches más que Pedro y Juan pierde 2. Juan tiene 3 boliches más que Pedro".

La categoría III, una relación estática une dos medidas, corresponde dentro del diagrama aditivo del esquema partes-todo a las relaciones asimétricas (grupos II y III). Identifica seis clases principales de problemas, que corresponden a la categoría comparación de Carpenter y Moser (1983). No considera la categoría igualación. Estas seis situaciones están identificadas en las tablas 3.17 (grupo II) y 3.18 (grupo III).

Forma canónica a-b=c	**Número=Magnitud** -Estado	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	**Total**
3	1	1	3

Tabla 3.17

y

Forma canónica a-b=c	**Número=Magnitud** -Estado	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	**Total**
3	1	1	3

Tabla 3.18

En la categoría VI, composición de dos relaciones estáticas (RRR) o dos estados relativos que se componen en un tercero, pone como ejemplos:

Ejemplo 1: "Pedro debe 8 boliches a Enrique, pero Enrique debe 6 boliches a Pedro, así que Pedro debe 2 boliches a Enrique".

Ejemplo 2: "Roberto tiene 7 boliches más que Susana. Susana tiene 3 boliches menos que Laura. Roberto tiene 4 boliches más que Laura".

Indica que hay tres clases principales de problemas y que cada uno de éstos se subdivide en diferentes subclases.

Si analizamos el ejemplo 1, éste puede ser representado en el modelo de competencias como indica la tabla 3.19, y pertenece a los problemas de combinar dentro de las operaciones aditivas, e incluiría, como caso particular, la categoría I de Vergnaud.

Forma canónica: a+b=c	**Número=Magnitud**: -Estado	**Relación partes-todo** Relación de Chasles	**Total**
3	1	6	18

Tabla 3.19

Si analizamos el ejemplo 2 que responde mejor a la categoría designada como composición de relaciones estáticas (RRR), y haciendo uso del diagrama aditivo del esquema partes-todo, ése no sería un problema de nivel 1, sino de nivel 2 de los que hemos denominado "por relación, una nueva relación".

Por último, pasamos a analizar brevemente los tres elementos que Vergnaud utiliza para organizar los problemas verbales aritméticos del campo conceptual aditivo: la medida, la transformación del tiempo y la relación estática o estados relativos.

Con relación a la medida, al situarse en el marco de las magnitudes absolutas (escalares) se encuentra con elementos que son medidas y con elementos que no lo son, y necesita operar con ellos; de igual manera, al comparar medidas se encuentra con medidas en forma de estado (tener 6 boliches) y con relaciones estáticas, a veces denominadas estados relativos (deber 6 boliches), esto genera un sin fin de dificultades en la organización del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, y parece más razonable situarnos en un marco más general: el de las magnitudes discretas enteras o relativas donde todos los elementos serán cantidades o medidas.

La transformación de tiempo que utiliza Vergnaud, interviene en algunas categorías como la II, o no interviene, como en la I y la III. Parece oportuno pensar que la noción de transformación lleva implícita la noción de tiempo, y que ésta estará asociada a las magnitudes discretas enteras en función de que represente un estado (tiempo presente) o una variación (tiempo pasado o futuro).

Con relación a las relaciones estáticas, las mantiene en su estado inicial en la categoría III, pero cuando intenta que una transformación actúe sobre ella (categoría V) o bien operar con ellas (categoría VI), se encuentra con un doble problema: o la reduce a un estado relativo (Pedro debe 6 boliches), que correspondería a problemas de otras categorías, o formula problemas de un nivel diferente, lo que crea una gran heterogeneidad en la organización del campo conceptual considerado.

3.2.7 Las categorías semánticas en el campo de los números naturales

En el campo de los números naturales, y considerando los elementos ya citados, la cantidad de situaciones lógicamente posibles, que se pueden presentar, son 3 x 6 x 2 = 36, de las que hay que eliminar algunas, por cuestiones de conmutatividad. Estas situaciones corresponden a las categorías semánticas ya establecidas de cambio y combinación; sin embargo, tenemos que redefinir estas categorías de la siguiente forma:

Combinación (Cb):

Es la situación que relaciona dos cantidades iniciales (estados) con una cantidad total o final (estado): $E + E' = E''$.

Cambio (C):

En esta categoría hay cuatro posibilidades distintas:

* Dada una cantidad inicial (estado) y un cambio (variación), obtenemos una cantidad final (estado). La variación puede ser de aumento o disminución: $E \pm V = E'$.
* Dada una cantidad inicial (estado) y un cambio (variación), obtenemos un cambio final (variación). La variación producida puede ser de aumento o disminución: $E \pm V = V'$.
*Dado un cambio (variación) que sufre otro cambio (variación), obtenemos un cambio final (variación). La variación producida puede ser de aumento o

disminución: V ± V' = V''.

*Dado un cambio (variación) que sufre otro cambio (variación), obtenemos una cantidad final (estado). La variación producida puede ser de aumento o disminución: V ± V' = E.

En la tabla 3.20, presentamos un resumen de las diferentes situaciones con algunos ejemplos:

Forma canónica a + b = c	Número=Magnitud	Relación partes-todo R. Chasles	Ejemplo	Total Nombre
			Combinación	
2 posibilidades	□ + □ = □	A B C	Tengo 6 canicas verdes y 4 canicas rojas ¿Cuántas canicas tengo en total?	2 Cb1 Cb2
			Cambio	
3 posibilidades	□ + 0 = □	A B C A C B	Tenía 6 canicas y gané esta mañana 4 ¿Cuántas tengo ahora?	6 C1-6
3 posibilidades	□ + 0 = 0	A B C A C B	Quiero regalar canicas a mis amigos. Tengo 7 en la maleta y mi tía me regaló 5. ¿Cuántas canicas puedo regalar?	6 C7-12
3 posibilidades	0 + 0 = □	A B C A C B	Gané 5 canicas por la mañana y 4 canicas por la tarde. ¿Cuántas canicas tengo ahora?	6 C13-18
2 posibilidades	□ + □ = 0	A B C	Tengo 5 canicas en un bolsillo y 3 canicas en la maleta para regalar a mis amigos. ¿Cuántas canicas puedo regalar?	2 C19-20
3 posibilidades	0 + 0 = 0	A B C A C B	Gané 6 canicas a Juan y 5 a Ruth. ¿Cuántas gané en total?	6 C21-26

Tabla 3.20

Los problemas de comparación (Cp) corresponden a las relaciones II y III, y estarían asociados a la forma canónica a - b = c. Se definirían:

* Dadas dos cantidades (estados) encontrar la diferencia entre ellas.

* Dadas dos variaciones encontrar la diferencia entre ellas.

La cantidad de situaciones lógicamente posibles sería 3 x 2 x 1 en cada grupo (grupos II y III). En la tabla 3.21, presentamos algunos ejemplos de ellas.

Forma canónica a - b = c	Número=Magnitud	R. Chasles	Ejemplo	Total
			Comparar (más que)	
3 posibilidades	□ - □ = □	A B C	Tengo 6 canicas y María tiene 4 canicas ¿Cuántas canicas tengo más que María?	3 Cp1-3
3 posibilidades	0 - 0 = 0	A B C	Gané 6 canicas y María ganó 4 ¿Cuántas gané más que María?	3 Cp4-6
			Comparar (menos que)	
3 posibilidades	□ - □ = □	A B C	Tengo 6 canicas y María tiene 4 canicas ¿Cuántas canicas tiene María menos que yo?	3 Cp 7-9
3 posibilidades	0 - 0 = 0	A B C	Gané 6 canicas y María ganó 4 ¿Cuántas canicas ganó María menos que yo?	3 Cp10-12

Tabla 3.21

Así, dentro de las tres categorías redefinidas (cambio, combinación y comparación) obtenemos 40 situaciones posibles, dentro del campo de los números naturales.

Nos surge la pregunta de por qué no consideramos los problemas de la categoría igualación. Los problemas de igualación son el resultado de dos esquemas: primeramente, hay que realizar una relación asimétrica para comparar las dos colecciones y luego, hay que utilizar la relación I para establecer un cambio. Por ello, estimamos que esta categoría representa una situación de dos pasos, es decir, sería un problema de nivel superior.

En la tabla 3.22, indicamos, finalmente, cuáles de estos problemas han sido contemplados en otras clasificaciones, señalando a qué categorías de las citadas pertenecen las de la nuestra.

Nombre de la situación	Carpenter y Moser	Vergnaud
Combinación: Cb1-2	Combinación	Categoría I y parte deVI
Cambio: C1-6	Cambio	Categoría II y parte de V
Cambio: C7-12	-	Categoría IV
Cambio: C13-18	-	
Cambio: C19-20	-	
Cambio: C21-26	-	
Comparación: Cp1-3	Comparación	Categoría III
Comparación: Cp4-6	-	
Comparación Cp7-9	Comparación	Categoría III
Comparación: Cp10-12	-	

Tabla 3.22

Nuestro propósito ha sido crear un modelo teórico que englobe todas las situaciones posibles dentro del campo de los números naturales y enteros. Dentro de los naturales hemos definido nuevas categorías semánticas, que creemos que pueden resultar más difíciles que las anteriores, por lo cual planteamos su incorporación de forma paulatina, pero la ganancia que su aprendizaje puede generar nos anima a seguir trabajando sobre ellas. Pretendemos, en un futuro, analizar qué dificultades se presentan en su instrucción en el aula y qué errores pueden cometer los niños al trabajar las cuarenta situaciones resultantes.

3.2.8 Conclusiones e implicaciones

Hemos hecho una propuesta de organización del campo conceptual de las magnitudes discretas desde el enfoque de la resolución de problemas, situándonos en el subperiodo piagetiano de las operaciones concretas, donde intervienen los agrupamientos lógicos e infralógicos, el grupo aritmético Z y la medición.

Este modelo de competencia presenta las categorías semánticas del campo conceptual aditivo discreto de manera unificada, no sólo desde una perspectiva lógico-formal, que se da en las otras categorizaciones, sino también desde la perspectiva de las leyes de composición de los fenómenos asociados y de las estructuras cognitivas implicadas.

En definitiva, hemos considerado bajo una única estructura (modelo de competencia) diferentes conceptos y relaciones, a veces no clasificados, que regulan el funcionamiento del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas.

Hemos caracterizado un modelo de competencia para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas, pero sería absurdo considerarlo como un modelo válido para la ejecución. Sin embargo, un modelo de ejecución tiene que incorporar un modelo de competencia como una parte esencial. Los modelos de ejecución se pueden construir de maneras diferentes, pero siempre compatibles con premisas fijas sobre la competencia en la cual se basan.

3.3 MODELO DE COMPETENCIA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS BASADO EN LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

3.3.1 Introducción

Nuestro objetivo es diseñar un modelo de competencia para la resolución de problemas aritméticos verbales. Para ello analizamos previamente alguno de los modelos que valoramos como los más importantes, y que nos han servido como fuentes para el nuestro.

La búsqueda de un modelo de resolución de problemas ha sido un tema estudiado, tanto por parte de matemáticos, como de psicólogos. Desde el punto de vista de la Psicología, diversas han sido las aportaciones más significativas a la resolución de problemas. El cuadro siguiente muestra algunos nombres importantes que se han ocupado del tema:

PSICOLOGÍA	MATEMÁTICAS
Dewey (1888)	
Asociacionismo	
Gestaltismo:	
Wallas (1926)	
Duncker (1945)	Polya (1957)
Wertheimer (1945)	
Procesamiento de la información:	
Newell y Simon (1972)	
Mason, Burton y Stacey (1988)	
Mayer (1986)	Schoenfeld (1985)
Bransford-Stein (1984)	Goldin (1985, 1987)
	Guzmán (1991)

Tabla 3.23

3.3.2 Modelos de resolución de problemas

Enfoques desde la psicología

Dewey, psicólogo y pedagogo funcionalista, que destaca por su “teoría del interés”, presentó, a finales del siglo pasado, un modelo para resolver problemas (citado por Puig y Cerdán, 1988), con las seis fases siguientes:

1. Identificación de la situación problemática.
2. Descripción precisa del problema.
3. Análisis medios-fines. Plan de solución.
4. Ejecución del plan.
5. Asunción de las consecuencias.
6. Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización.

En este modelo, enfocado hacia problemas en general, podemos encontrar una secuencia que se va a repetir sin cambios significativos.

Los asociacionistas no aportaron grandes cosas sobre modelos, ya que entendían que en la resolución de problemas sólo interviene el empleo, más o menos mecánico, de la experiencia pasada.

Los gestaltistas, por el contrario, sí influyen fuertemente en las teorías actuales. Explican que la comprensión de un problema se produce cuando la persona logra concebirlo como un todo y es capaz de establecer la relación de las partes con dicho todo.

En “The Art of Thought” de Wallas (1926) aparece un modelo para resolver problemas con cuatro fases:

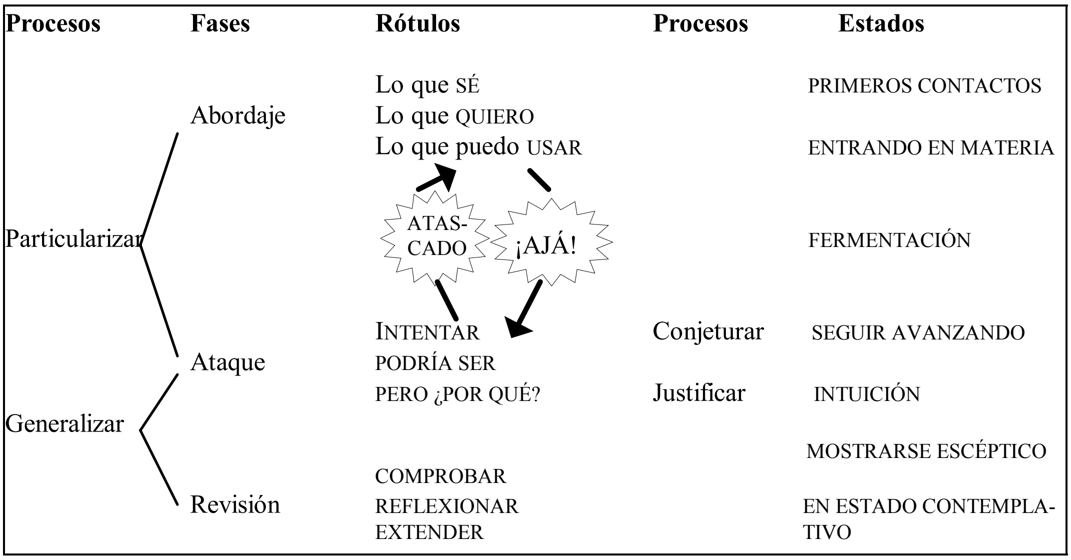
1. Preparación: Recolección de información e intentos preliminares de solución.
2. Incubación: Dejar el problema de lado para realizar otras actividades o dormir.
3. Iluminación: Aparece la clave para la solución (aquí es donde se produce el destello de “insight” o el “ajá”).
4. Verificación: Se comprueba la solución para estar seguros de que funciona.

Wertheimer y Duncker siguieron trabajando sobre este tema:

Wertheimer (1945) intentó demostrar que la aprehensión de las estructuras subyacentes lleva al pensamiento productivo y a la resolución elegante de los problemas.

Los trabajos de Duncker (1945) van encaminados a cómo orientar el proceso para conseguir el “insight”. Insiste en el doble proceso que hay que realizar para resolver un problema: el procesamiento desde arriba, que parte del análisis de los objetivos y del replanteamiento del problema; y el procesamiento desde abajo, que parte del análisis de los elementos para llegar al objetivo del problema.

Mason, Burton y Stacey (1988) proponen un modelo que no pretende ser un instrumento de estudio o de análisis, sino una ayuda para la instrucción. En su obra “Pensar matemáticamente” lo esquematizan así:



El objetivo de estos autores es mostrar cómo acometer cualquier problema, es decir, cómo enfrentarse con él de una manera eficaz y cómo ir aprendiendo de la experiencia. Se basan en los trabajos de Polya y Schoenfeld (ver apdo. siguiente). Un aspecto a destacar en su modelo es la utilización, para diferenciar las fases, de lo que siente el resolutor, esto es, de sus estados afectivos.

El método IDEAL es otro modelo de resolución de problemas, creado por Bransford y Stein (1984). Las letras de la palabra IDEAL indican los elementos del método. Está concebido, como ellos afirman "con la finalidad de facilitar la identificación y el reconocimiento de las distintas partes o componentes a tener en cuenta en la resolución de problemas". Entre los autores que han inspirado este modelo se encuentra también Polya.

Sus fases son:

I: Identificación de los problemas.

D: Definición y representación del problema.

E: Exploración de posibles estrategias.

A: Actuación, fundada en una estrategia.

L: Logros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.

La primera fase, pretende ayudar a identificar problemas. En general, los libros pasan por alto esta fase y cargan el acento en la resolución de problemas prefabricados, en lugar de detectar y utilizar problemas cotidianos.

El segundo aspecto, consiste en definir y representar el problema con toda la precisión y el cuidado que sea posible.

El tercero, se dirige a la exploración de distintas vías o métodos de resolución, lo que requiere analizar cómo estamos reaccionando en ese momento ante el problema y la consideración de qué otras estrategias podrían valernos. En esta etapa, el resolutor puede valerse de estrategias heurísticas, tales como simplificar, empezar desde atrás, etc.

Las dos últimas fases son las que permiten al resolutor actuar y comprobar los logros alcanzados.

En las teorías basadas en el procesamiento de la información, se distinguen tres fases en la resolución un problema: Preparación, producción y enjuiciamiento.

La preparación supone un análisis e interpretación de los datos disponibles inicialmente y de las restricciones. Además, una identificación del criterio de solución (comprender y concebir un plan).

La fase de producción, comprende un conjunto de operaciones diversas que están relacionadas con la recuperación, el almacenamiento, la exploración y la transformación de la información hasta alcanzar una solución (ejecutar un plan).

Durante el enjuiciamiento se evalúa la solución generada, contrastándola con el criterio de solución (comprobar el resultado).

Los trabajos de Newell y Simon (1972) sobre resolución de problemas han significado un impulso considerable dentro de este paradigma.

Mayer (1986) desde la óptica del procesamiento de la información, analiza los conocimientos necesarios para la resolución de problemas matemáticos. Considera dos estadios y, en cada uno de ellos, explicita los conocimientos necesarios:

Estadio	Tipo de conocimiento
Traducción	Lingüístico Semántico Esquemático
Solución	Operativo Estratégico

Tabla 3.24

Conocimiento lingüístico o conocimiento de la lengua en que está redactado el problema.

Conocimiento semántico: conocimiento del significado de las palabras.

Conocimiento esquemático: conocimiento de los distintos tipos de problemas.

Conocimiento operativo: conocimiento sobre las operaciones, ecuaciones.

Conocimiento estratégico: conocimiento de técnicas heurísticas o tener habilidades para saber utilizar los conocimientos disponibles para resolver un problema.

También Kulm (1984), a partir de la clasificación sobre variables de la tarea hecha por Kilpatrick, creó una clasificación similar a la de Mayer, de las variables que influyen en el proceso de resolución de un problema:

1. Variables sintácticas, que describen la estructura gramatical y la complejidad del enunciado del problema.
2. Variables de contenido y de contexto, que engloban todos los aspectos semánticos, tanto matemáticos como no matemáticos.
3. Variables de la estructura, que describen las características de la representación formal del problema y de los procedimientos algorítmicos.
4. Variables de la conducta heurística, que incluyen los procesos heurísticos que son aplicables al problema y las consecuencias de aplicarlos.

Enfoques desde las matemáticas

Entre los modelos propuestos por matemáticos, destaca el de Polya, que ha inspirado o ha sido utilizado en multitud de estudios e investigaciones. Se basó en las observaciones que había realizado como profesor de Matemáticas y en la obra de los gestaltistas, aunque también podemos encontrar coincidencias con el modelo de Dewey. Sugirió que la resolución de problemas está basada en procesos cognitivos, que tienen como resultado encontrar una salida a una dificultad, una vía alrededor de un obstáculo, llegando a un objetivo que no es inmediatamente alcanzable.

Este modelo consta de cuatro fases que, a su vez, tiene otras subfases, y que él explica así:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan. Determinar la relación entres los datos y la incógnita. De no encontrarse una relación inmediata, puede considerar problemas auxiliares. Obtener finalmente un plan de solución.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Estos preceptos los descompone y sugiere en ellos estrategias individuales (considerando la estrategia como una técnica general para resolver problemas, que no garantiza que se encuentre la solución, pero constituye una guía para resolverlo), a las que se podría recurrir en momentos adecuados, como:

* Si no es posible resolver el problema propuesto, búsquese un problema similar apropiado, que sí sepa resolver.
* Dé el problema por resuelto y trate de desandar el camino.
* Trate de avanzar.
* Restrinja las condiciones.
* Busque un contraejemplo.
* Tantee.
* Divida y vencerá.
* Cambie el enfoque conceptual.

El modelo de Polya se basa, como afirman Puig y Cerdán (1988) en la idea del resolutor ideal, esto es, la persona que al resolver un problema avanza linealmente desde el enunciado hasta hallar la solución, sabiendo en todo momento qué hace y por qué lo hace, que, para acabar, examina la solución, comprueba que es adecuada y ve hacia dónde le conduce.

Schoenfeld (1985), inspirado en las ideas de Polya, diseña uno de los modelos más completos, sobre todo en estrategias heurísticas. Se basa en una observación minuciosa del proceso de resolución de problemas por sujetos reales y, a posteriori, construye bloques de conductas más o menos homogéneas, que se dan en un periodo de tiempo, y así logra clasificar los bloques de modo que especifiquen su función en la globalidad del proceso. Distingue cuatro fases: análisis, exploración, ejecución y comprobación de la solución obtenida. Para ellas, ha preparado una tabulación de los principios heurísticos más frecuentemente utilizados en las Matemáticas de nivel universitario.

<u>Análisis</u>

1) Trazar un diagrama, si es posible.

2) Examinar casos particulares:

   a) elegir valores especiales, que sirvan para ejemplificar el problema y hacerse a él.

   b) examinar casos límites, para explorar la gama de posibilidades.

   c) asignar a los parámetros enteros que puedan figurar, la secuencia de valores 0, 1, 2, ... y buscar una pauta inductiva.

3) Probar a simplificar el problema:

   a) sacando partido de posibles simetrías, o

   b) mediante razonamientos “sin pérdida de generalidad” (incluidos los cambios de escala).

<u>Exploración</u>

1) Examinar problemas esencialmente equivalentes:

   a) por sustitución de las condiciones por otras equivalentes,

   b) por recombinación de los elementos del problema de distintos modos,

c) introduciendo elementos auxiliares,

d) replanteando el problema mediante

* cambio de perspectiva o de notación,
* considerando el razonamiento por contradicción o el contra-recíproco,
* suponiendo que se dispone de una solución y determinando cuáles serían sus propiedades.

2) Examinar problemas ligeramente modificados:

a) elegir subobjetivos (satisfacción parcial de las condiciones),

b) relajar una condición y tratar de volver a imponerla,

c) descomponer el problema en casos y estudiar caso por caso.

3) Examinar problemas ampliamente modificados:

a) construir problemas análogos con menos variables,

b) mantener fijas todas las variables salvo una, para determinar qué efecto tiene esa variable,

c) tratar de sacar partido de problemas afines respecto a la forma, los datos o las conclusiones.

d) recordar que, al manejar problemas afines más fáciles, se debería sacar partido, tanto del resultado, como del método de resolución.

<u>Comprobación de la solución obtenida</u>:

1) ¿Verifica la solución obtenida los criterios específicos siguientes?

a) ¿utiliza todos los datos pertinentes?

b) ¿está acorde con predicciones o estimaciones razonables?

c) ¿resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambios de escala?

2) ¿Verifica los criterios generales siguientes?

a) ¿es posible obtener la misma solución por otro método?

b) ¿puede quedar concretada en casos particulares?

c) ¿es posible reducirla a resultados conocidos?

d) ¿es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

Basándose en las variables que señala Kulm, Goldin (1985, 1987) presenta un modelo de competencia en resolución de problemas matemáticos basado en los **sistemas de representación**.

Este modelo, como él justifica, está basado en la teoría del procesamiento de la información, y se apoya en la idea de considerar una simulación del pensamiento humano basado en altos niveles de representación y no en un nivel de lenguaje de máquina producido por conexiones neurales.

Los sistemas de representación que utiliza son los siguientes:

1) un sistema verbal-sintáctico.
2) sistemas no verbales para el procesamiento de las imágenes.
3) sistemas de notación formal.
4) sistema de planificación.
5) sistema afectivo.

El procesamiento verbal y sintáctico, es el primer sistema de representación: los alumnos parten de un enunciado, oral o escrito, que deben entender. Muchos alumnos pasan directamente de este nivel a una operación o una ecuación y, con frecuencia, utilizan para ello "palabras claves", sin comprender la situación del problema.

Un procedimiento alternativo sería transformar el enunciado verbal en una configuración de imágenes, con lo cual estarían utilizando un sistema de representación basado en el procesamiento de imágenes.

Todos sabemos que muchos alumnos necesitan "imaginar" la situación del problema para poderlo resolver. Goldin utiliza la palabra "imagen" para referirse, no sólo a imágenes visuales, sino también a imágenes de palabras.

A partir de aquí, el alumno estaría en mejores condiciones para pasar a un sistema de representación apoyado en el procesamiento de la notación formal.

Una gran parte del aprendizaje de Matemáticas, va encaminado al dominio de una notación formal. Ahora bien, si los alumnos utilizan simultáneamente los anteriores sistemas de representación, aumenta la comprensión de los conceptos matemáticos.

El sistema de planificación comprende todos los procesos heurísticos usados por los alumnos. Algunos heurísticos han sido estudiados ampliamente y pueden mejorar los procedimientos utilizados por el alumno durante la resolución; sin embargo, tenemos dificultades para observar y comunicar como se producen estos procesos de planificación y ejecución durante la resolución de un problema.

El sistema afectivo juega un importante papel cognitivo. Comprende algo más que aspectos tales como las actitudes hacia las Matemáticas o la confianza del alumno en sí mismo como resolutor; abarca los sentimientos que experimenta una persona mientras resuelve un problema: ansiedad, frustración, placer, etc.; que, de alguna forma, controlan su progreso a través del problema.

Uno de los últimos modelos publicados es el de Guzmán (1991), el cual, sobre las cuatro fases de Polya, orienta y anima al resolutor para que avance:

1. Familiarízate con el problema:
   * Trata de entender a fondo la situación.
   * Con paz, con tranquilidad, a tu ritmo.
   * Juega con la situación, enmárcala, trata de determinar el aire del problema, piérdele el miedo.
2. Búsqueda de estrategias:
   * Empieza por lo fácil.
   * Experimenta.
   * Hazte un esquema, una figura, un diagrama.
   * Escoge un lenguaje apropiado, una notación apropiada.
   * Busca un problema semejante.
   * Inducción.
   * Supongamos el problema resuelto.
   * Supongamos que no.

3. Lleva adelante tu estrategia:

* Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te hayan ocurrido en la fase anterior.

* Actúa con flexibilidad. No te arrugues fácilmente. No te emperres en una idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra vía. ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución. Revisa el proceso y saca consecuencias de él.

* Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución? O bien ¿por qué no llegaste?

* Trata de entender no sólo que la cosa funciona, sino por qué funciona.

* Mira si encuentras un camino más simple.

* Mira hasta donde llega el método.

* Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

En la explicación de este modelo, Guzmán insiste en que es necesario tener una idea clara, un modelo, al que pensamos que nuestra forma de proceder se debe ajustar.

El modelo de Guzmán se basa en los modelos de Polya y Schoenfeld y en su propia introspección, introduciendo ampliamente refuerzos afectivos que ayuden a eliminar los bloqueos que a veces se producen.

Ahora bien, como dice Alonso y otros (1988), la mayoría de estos modelos son modelos formales, construidos a expensas de un a priori, que es el proceso ideal, conceptual o lógico, si se quiere, para resolver problemas.

Modelos sobre problemas aritméticos verbales

Los modelos que hemos indicado hasta ahora, se refieren a problemas en general o a problemas matemáticos, de los cuales vamos a tener en cuenta diversos aspectos; aunque nos interesa también analizar modelos específicos para los problemas aritméticos verbales. Hemos encontrado dos: el de Puig-Cerdán y el de De Corte-Verschaffel.

Puig y Cerdán (1988) presentan un modelo, basado en las ideas de Dewey y en el modelo de Polya, para la resolución de problemas aritmético-verbales, que consta de las siguientes fases:

1. Lectura.
2. Comprensión.
3. Traducción.
4. Cálculo.
5. Solución.
6. Revisión. Comprobación.

La fase "comprensión" de Polya la subdividen en dos etapas, lectura y comprensión, para acentuar el cuidado que debe ponerse en la lectura del enunciado.

La fase "elaboración de un plan", se llama aquí traducción, y correspondería al paso del enunciado verbal a la operación u operaciones aritméticas correspondientes.

La fase cálculo, corresponde a la de "ejecución del plan", y aquí intervienen las destrezas algorítmicas de los estudiantes.

Las últimas fases, revisión y comprobación, coinciden con la de "verificación del resultado" de Polya.

De Corte y Verschaffel (1989), basándose en las teorías del procesamiento de la información y en sus propias investigaciones, han presentado un modelo de competencia para la resolución de problemas aritméticos verbales de sumas y restas, que comprende cinco etapas:

1. Partiendo del enunciado del problema, el alumno construye una representación interna del problema en términos de conjuntos y relaciones entre esos conjuntos.
2. Sobre la base de esta representación, el resolutor elige la operación formal apropiada o la estrategia informal, con el fin de encontrar el valor desconocido en la representación del problema.

3. Ejecuta la operación o acción seleccionada.
4. El resolutor vuelve a la representación inicial del problema, sustituye el elemento desconocido por el resultado que ha obtenido y formula la respuesta.
5. Se verifican las acciones realizadas, con el fin de garantizar la corrección de las soluciones encontradas en la fase precedente.

La primera etapa es la que consideran fundamental, y a ella han dirigido gran parte de sus investigaciones. La representación del problema es considerada como el resultado de interacciones complejas entre el análisis superficial y profundo del problema, contribuyendo a ella los esquemas cognitivos del sujeto.

Las dos categorías principales de esquemas cognitivos que distinguen, son: el esquema semántico (cambio, comparación, ..) y el esquema de los problemas verbales, el cual implica el conocimiento de la estructura de dichos problemas verbales.

3.3.3 Modelo de competencias para la resolución de problemas aritméticos verbales

De todo este análisis, surge nuestro modelo para resolver problemas aritméticos verbales dirigidos a los alumnos de Educación Primaria. Está inspirado, como la mayoría de los anteriores en el modelo de Polya, pero hemos añadido otros aspectos teniendo en cuenta los sistemas de representación de Goldin.

Consta de las siguientes fases:

1. Lectura del enunciado.
2. Comprensión.
3. Representación, ejecución y solución visual-geométrica.
4. Representación, ejecución y solución formal.
5. Soluciones.
6. Comprobación de la solución.

1. Lectura del enunciado:

Los problemas que generalmente se trabajan en la Educación Primaria están enunciados en forma verbal; por ello, la primera fase será una lectura comprensiva de dicho enunciado. Por supuesto, este modelo es igualmente válido, si el formato del enunciado fuera de otro tipo: oral, visual, etc. En esta fase ya se empiezan a detectar las primeras dificultades, ajenas a la propia Matemática, debidas a una falta de comprensión lectora. Generalmente, los niños necesitan leerlo más de una vez; en la primera, tratan de obtener una idea más global y en las siguientes, van precisando los diferentes aspectos del problema.

En esta fase, el niño se mueve en un sistema de representación verbal-sintáctico.

2. Comprensión:

La segunda etapa, **comprensión**, tiene como objetivo el análisis del entorno de la tarea (los datos del problema), es decir, los niños, a partir de la lectura que han realizado, deben ser capaces de hacer una representación pictórica del problema, analizando los datos que les dan y lo que le piden, de forma que les facilite la creación de lo que podemos llamar *el escenario mental* del problema.

El análisis del entorno de la tarea está compuesto por todos los elementos disponibles y que son percibidos por la persona que resuelve el problema: el texto del problema, dibujos, diagramas y objetos concretos, esto es, los datos verbales, numéricos o físicos del problema.

Por ello, el análisis del entorno de la tarea en los problemas aritméticos verbales comprende una "escenificación" (representación mental del contenido) y una clasificación de los datos relevantes en datos que dan y dato que piden.

La "escenificación" no es una verdadera traducción al sistema de representación de imágenes, ya que no es autosuficiente, sino una elaboración semántica del problema, es decir, una representación del contenido.

Para ello, les sugerimos que intenten hacer un dibujo que represente la situación guiándolos hacia una representación más esquemática y que, prescindiendo de los detalles, se centre en los datos fundamentales del problema y, posteriormente, que escriban con palabras los datos que les dan y lo que le piden calcular. En este momento, ya están en condiciones óptimas para distinguir los elementos del problema y para concebir un camino para resolverlo. Intentamos evitar que los niños pasen directamente de la lectura, esto es, de un sistema de representación verbal a una operación aritmética (sistema de representación formal), paso que muchas veces realizan casi por azar. Durante el análisis del enunciado, se desarrolla en el niño un gestor que controla su propio avance (sistema de planificación y control); y la sensación de poder hacer, al menos, un dibujo de la situación, le produce una situación afectiva positiva (sistema afectivo).

3. Representación, ejecución y solución visual-geométrico (SRVG):

Esta fase, que no existe en los modelos anteriormente analizados, pretende que el niño, en dicho sistema de representación de imágenes, represente, ejecute y revise la solución obtenida mediante el uso de **representaciones visual-geométricas.**

Nuestro objetivo ha sido crear un sistema de representación primordialmente de imágenes, que permita al alumno las elaboraciones semánticas y sintácticas que se dan en un problema y que sea autosuficiente, ya que hacemos hincapié en que <u>la utilización de diagramas no es simplemente un apoyo visual, sino otra alternativa válida para resolver problemas.</u>

Sabemos que la representación y solución de forma gráfica, tiene una sintaxis compleja, que es necesario trabajar y comprender, que crea problemas en algunos alumnos que están convencidos que resolver problemas consiste en buscar y ejecutar una operación aritmética, pero otros muestran preferencias por este tipo de sistemas de representación no verbales.

4. Representación, ejecución y solución formal (SA):

Esta fase, presente en todos los modelos, es la **resolución mediante la operación adecuada**, cuya elección viene sugerida por el apartado anterior.

5. Soluciones:

A partir de las soluciones encontradas en ambos sistemas de representación, se le plantea al alumno reflexionar sobre los sistemas de representación usados y estimular aspectos metacognitivos mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos y relativamente independientes.

6. Comprobación de la solución:

Consideramos que debemos orientar al alumno a que no dé por acabado un problema, hasta que haya verificado que el resultado es correcto, contrastándolo con el enunciado y los datos del problema. Para ello, les pedimos que escriban de nuevo el enunciado con la respuesta obtenida.

Nuestras fases contemplan explícitamente los sistemas de representación de Goldin. Esta presencia no es lineal, como la hemos presentado, sino que el alumno se mueve de un tipo de representación a otra, utilizándolas obtiene una representación mental de la situación más completa, y descubre, así, el camino para hallar la solución, la ejecuta y la comprueba.

En la tabla 3.25 podemos comparar los tres modelos sobre resolución de problemas aritméticos verbales:

Puig-Cerdán (1988)	**Hernández-Socas (1994)**	**De Corte-Verschaffel (1989)**
1. Lectura	1. Lectura	1. Lectura y representación
2. Comprensión	2. Comprensión	2. Elección de operaciones
3. Traducción	3. Representación-ejecución y solución visual-geométrica	
4. Cálculo	4. Representación-ejecución y solución formal	3. Ejecución
5. Solución	5. Soluciones	4. Solución
6. Revisión	6. Comprobación	5. Verificación

Tabla 3.25

3.3.4 El sistema de representación visual-geométrico (SRVG)

Proponemos la utilización de un sistema, que hemos denominado Sistema de Representación Visual-Geométrico (SRVG), que es un sistema mixto que comprende:

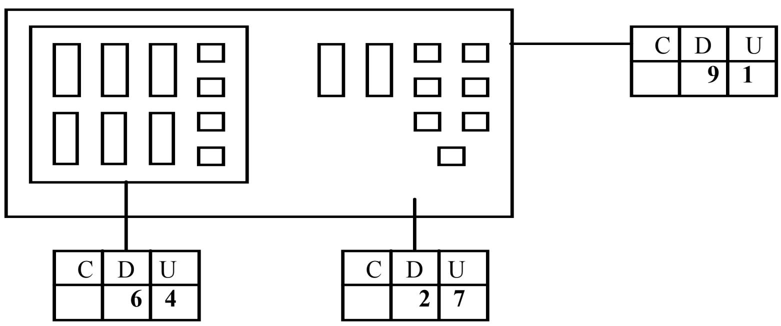
◊ Elementos del sistema de representación no verbal, del que tomamos la configuración geométrica bidimensional (el rectángulo) para representar desde operaciones aritméticas hasta las relaciones partes-todo, elementos del sistema de planificación o estratégico, donde hacemos intervenir la relación partes-todo y las estructuras semánticas.

◊ Elementos del sistema de representación formal aritmético del que utilizamos la representación simbólica de los números (las etiquetas).

Utilizando este sistema, el problema:

"Juan tiene en su colección 91 sellos y Ángel en la suya 27 sellos menos. ¿Cuántos sellos tiene Ángel?"

se representaría y resolvería así:



En los trabajos de Kaput (1987, 1989), Janvier (1987), Sanz (1989) y Laborde y otros (1989), encontramos que los diferentes sistemas de representación utilizan notaciones que las hacen más semánticas que sintácticas o al revés. Así, podemos pensar que la notación del sistema de representación visual-geométrico es primordialmente una notación semántica y que la notación del sistema numérico decimal es una notación sintáctica. Sin embargo, al primero lo hemos dotado de una sintaxis necesaria para poder utilizarlo de forma autónoma o auotosuficiente en la resolución de problemas aritméticos verbales.

La caracterización de **autosuficiente** (Palarea y Socas, 1994) viene dada por:

⇒ Que toda expresión codificada en él puede utilizarse como elaboración sintáctica y como elaboración semántica (entendemos por elaboración sintáctica la manipulación directa de las expresiones, mentalmente o con cualquier tipo de ayuda externa. Y la elaboración semántica sería el manejo de los contenidos de las expresiones simbólicas).

⇒ Que está basado en operaciones internas o en operaciones con magnitudes.

⇒ Que es un sistema de representación significativo (culturalmente, didácticamente o matemáticamente.

3.3.4.1 Conexiones entre los sistemas de representación utilizados

Consideramos que en un problema aritmético verbal los sistemas de representación deben tener una doble funcionalidad: representar cantidades y poner en relación cantidades.

Veamos en la tabla 3.26, un resumen de la doble funcionalidad de los sistemas de representación, que hemos denominado visual-geométrico (analógico) y formal-numérico (digital).

Para comunicar o representar cantidades hemos elegido los bloques de base decimal como colección de control, que constituye una representación analógica de tipo discreto. Esta forma de presentar las cantidades establece una cierta correspondencia uno a uno con los datos del problema, y es bastante similar a los objetos representados en las cantidades del problema, por eso llamamos a esta forma de representación, analógica.

Representación / Función	Analógica	Digital
Comunicar cantidades	"Colecciones de control" (Bloques de base decimal)	Números
Poner en relación las cantidades	Representación de la situación problema mediante las colecciones de control. (Establecer una relación entre las partes y el todo en las colecciones)	Estrategias
	Contar progresivamente y contar regresivamente. (Agrupar y descomponer colecciones de control)	Hacer cálculos

Tabla 3.26

No es éste el caso de las representaciones numéricas, donde la cantidad se representa por el último elemento puesto en correspondencia uno a uno. Así, una colección de caramelos se representa por una sola cifra. Y, esta cifra representa la cantidad de una forma aparentemente arbitraria, y, por eso, a esta forma de representación se le denomina digital (numérica o convencional).

Hacer una representación de la situación problema, mediante las colecciones de control, es llevar a cabo una simulación o imitación de las situaciones que se describen en el enunciado. Esta representación es posible visualizarla en el sistema de representación analógico, no así en el sistema digital, que permanece en el mundo privado del resolutor, y es lo que hemos denominado estrategias.

De este modo para representar las cantidades, utilizamos los bloques de base decimal como colecciones de control, situados dentro de un marco de referencia continuo y bidimensional, el rectángulo, que permite al resolutor realizar, simultáneamente, procesos básicos como contar progresivamente (agrupar) y contar regresivamente (descomponer) con las colecciones de control y establecer las múltiples relaciones que se dan entre las partes y el todo.

Si ahondamos más en estas representaciones, observamos que con las colecciones de control, se desarrollan procesos de tipo lógico y numérico, y con las acciones de componer y descomponer el rectángulo, se desarrollan procesos de tipo infralógico y de medida.

Parece útil tender un puente de unión entre esta representación analógica y la representación digital; para ello, introducimos las etiquetas o esquemas que sintetizan la función de comunicar cantidades de las representaciones analógicas y digitales. Los números que aparecen en las etiquetas son un referente digital que no intervienen en los procesos de cálculo de este sistema de representación visual-geométrico, que en su conjunto seguimos denominado una representación analógica.

3.3.5 Conclusiones e implicaciones

Como hemos visto, muchos han sido los intentos por desarrollar modelos de competencia para la resolución de problemas. Muchos de ellos han surgido de la experiencia con alumnos reales, otros han sido concebidos de forma teórica, pero tienen en común la idea de buscar una respuesta a la pregunta: ¿Se puede enseñar a resolver problemas?

Suydam (1987), en un interesante artículo sobre indicaciones para la investigación en resolución de problemas, afirma que para ayudar a los estudiantes a ser buenos resolutores de problemas hay que hacer que resuelvan muchos problemas, buenos problemas, y, además, enseñarles estrategias para la resolución de los mismos, y concluye que la instrucción, basada en modelos de resolución de problemas, mejora el éxito de los estudiantes.

Nuestro objetivo ha sido conjugar esta idea, diseñando un modelo de competencias, factible de desarrollar en el aula con alumnos de Primaria y con problemas aritméticos verbales, donde aunamos el modelo general de Polya con el modelo de competencias de Goldin.

3.4. MODELO DE COMPETENCIAS PARA LA INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO DEL CURRÍCULO

3.4.1 Introducción

En este apartado vamos a presentar un modelo de investigación convergente que estamos desarrollando en el Área de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de La Laguna.

Nuestra investigación opta por utilizar métodos de los paradigmas: empírico-analítico, con el fin de reducir el fenómeno que se estudia a dimensiones objetivables, susceptibles de medición, análisis estadístico y control experimental; y del simbólico, con el fin de conseguir la comprensión global de las situaciones y las relaciones establecidas entre los elementos implicados en la investigación, a la vez que permite dar respuesta a los interrogantes de cómo los sujetos entienden, construyen, modifican e interpretan los hechos de las cuestiones matemáticas investigadas, aceptando la posición de Cook y Reichardt (1986a) de complementariedad de paradigmas (quienes afirman que los atributos de un paradigma no se hallan coherentemente ligados ni a los métodos cualitativos ni a los cuantitativos) y aprovechar las ventajas del amplio conjunto de estos métodos, como métodos complementarios (investigación convergente), que ayudan a corregir los inevitables sesgos presentes en cualquier método.

Como señala Shulman (1988) "*una de las principales razones de porqué los métodos de investigación en educación son emocionantes, es porque la educación no es en sí misma una disciplina. En efecto, la educación es un campo de estudio, que contiene fenómenos, sucesos, instituciones, problemas, personas y procesos que constituyen la materia prima para múltiples investigaciones*".

Modelo de investigación y desarrollo del currículo

Consideramos el modelo de Fennema, Carpenter y Peterson (1986) para la elaboración del currículo, referenciado en sus trabajos iniciales sobre números, como un ejemplo útil e interesante para investigar con estudiantes y profesores sobre el desarrollo del currículo.

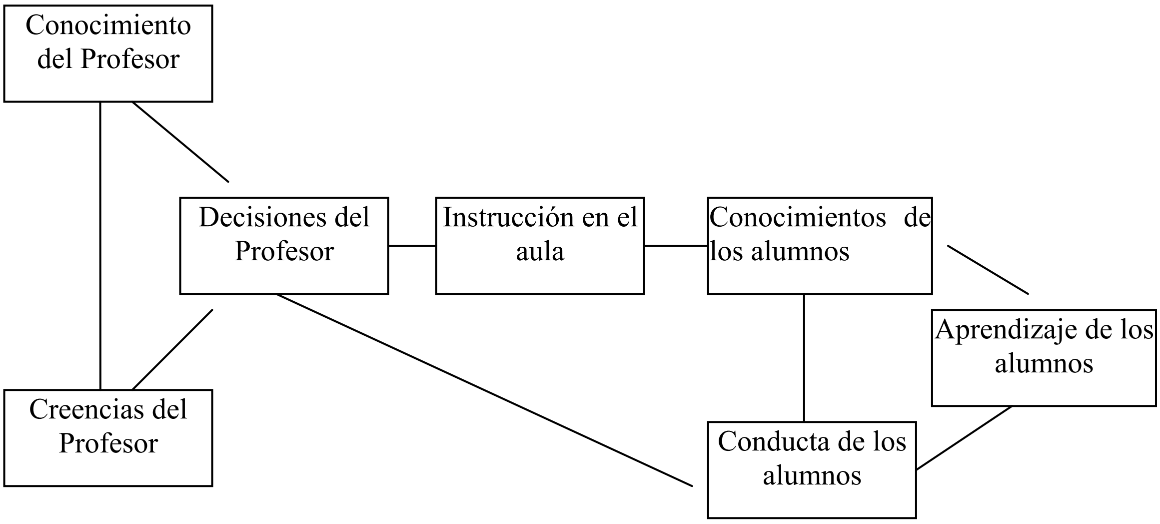


Figura 3.4: Modelo de Fennema, Carpenter y Peterson para la elaboración del currículo

Este modelo ayuda a clarificar la noción de currículo y la importancia del papel del profesor en la toma de decisiones para implantarlo. Una comprensión del papel de los conocimientos y comportamientos de los estudiantes en los aprendizajes matemáticos es necesaria, pero la verdadera "piedra angular" está en conocer y comprender los conocimientos y las creencias de los profesores y las decisiones que tomen cuando presenten el nuevo currículo a los estudiantes.

En relación a esto Siemon (1987) señala que "*junto con la investigación que nos ayuda a entender la diversidad en el pensamiento de los estudiantes, también necesitamos entender los diversos rangos de conocimientos previos, experiencias, creencias, actitudes y formas de procesar la información de los profesores que llevarán a cabo el proceso de cambio, si el cambio curricular se efectúa*".

Rachlin (1989) señala que el modelo de Fennema, Carpenter y Peterson para la elaboración del currículo, no indica el papel de los alumnos y de los profesores en los procesos de cambio, y sugiere la necesidad de buscar modelos de evaluación que proporcionen bases más dinámicas para la elaboración del currículo y que modifiquen la instrucción, tanto del alumno como del profesor.

Presenta Rachlin un modelo genérico y dinámico de investigación para el desarrollo curricular que incluye tres triadas: los elaboradores del currículo, los profesores y los estudiantes. Cada triada está organizada en torno a las creencias, conocimientos y comportamientos individuales. Señala que la investigación en los procesos de cambio curricular, comienzan con un conocimiento “a priori” de los conocimientos y creencias de cada uno de los participantes en el currículo, y es, a través de los comportamientos de éstos, como obtenemos una medida de lo que se está aprendiendo. Los investigadores del currículo deben ser conscientes de la variedad de fuerzas no controladas que afectan al medio, al mismo tiempo que centran su atención en las interacciones entre las tres triadas: instrucción en el aula, la interacción directa con estudiantes y adiestramiento de los profesores. Propone que, en lugar de hacer estudios aislados dentro de las triadas de los profesores y estudiantes, es necesario investigar la dinámica total de los cambios curriculares, y advierte que describir el movimiento en el modelo es tan difícil como describir el movimiento del tráfico de una ciudad.

3.4.2 Un modelo de investigación convergente

El modelo que utilizamos, parte de las triadas de Rachlin y del modelo de Fennema, Carpenter y Peterson, en el cual se establecerán nuevas relaciones y añadiremos un nuevo elemento que denominaremos “Didacta”, y que sustituirá al llamado Diseñador de currículos en la propuesta de Rachlin. Entenderemos por Didacta, al profesor universitario que desarrolla funciones de investigador, docente, diseñador de microcurrículos y evaluador de microsistemas educativos. Otros aspectos de este término referido a Matemáticas pueden verse en Gutiérrez (1991, p. 151).

En este sentido, el modelo global de investigación para el desarrollo curricular es el reflejado en la figura 3.5:

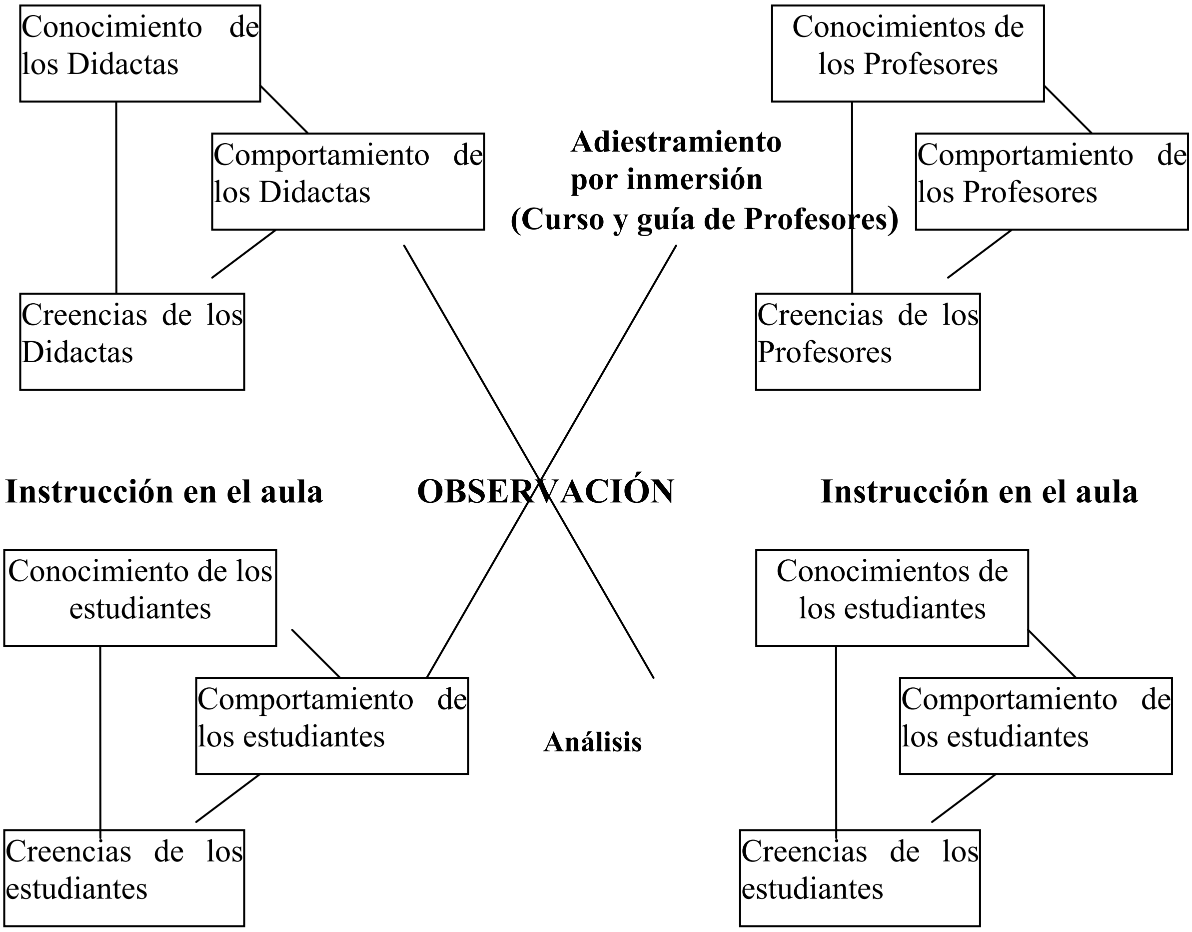


Figura 3.5

El modelo presentado duplica la triada de los estudiantes para insistir en la interacción que denominamos "análisis", la cual permite considerar a los estudiantes con instrucción dada por los profesores (educadores) y con instrucción dada por los didactas.

Entre las diferentes interacciones que se dan entre las triadas, aparte de la mencionada de análisis, cabe destacar: el adiestramiento de profesores en servicio y por "inmersión", la interacción directa con el estudiante por el profesor o por el didacta y la instrucción desarrollada en el aula por el profesor o por el didacta.

Para la puesta en práctica de algunas de las interacciones antes mencionadas, hemos adaptado el modelo de Fennema, Carpenter y Peterson.

Analizaremos, finalmente, cuatro tipos de interacciones que se dan en el modelo: curso y guía del cambio curricular propuesto, adiestramiento por inmersión de profesores en servicio, instrucción en el aula por el didacta e instrucción en el aula por el profesor.

Curso y guía del cambio curricular

El cambio curricular es del tipo que denominamos microcurrículo, ya que el diseño y desarrollo del currículo considerado, no abarca la totalidad del currículo de Matemáticas de una determinada etapa, sino aspectos parciales del mismo.

La elaboración de un diseño de cambio curricular, parte de tener unos objetivos claros que diferencien el nuevo currículo con el que está en uso. También es necesario conocer el grado de consistencia del nuevo currículo con los conocimientos y creencias de los estudiantes y profesores.

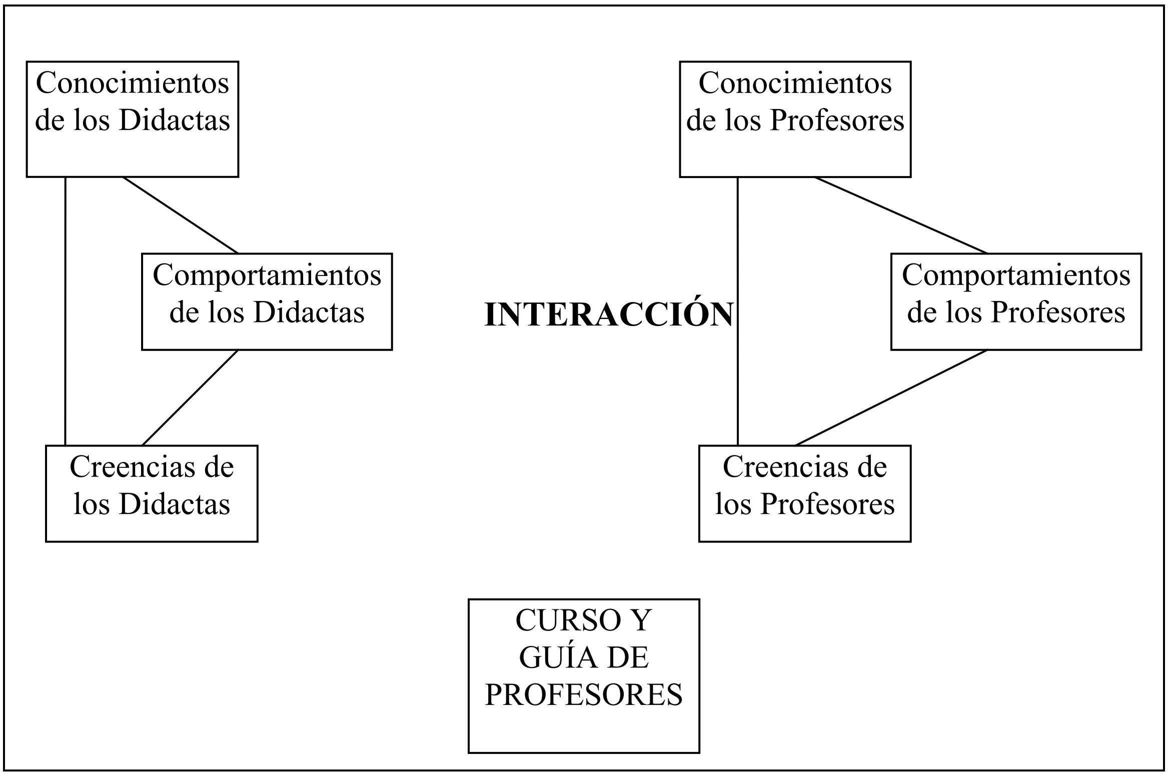


Figura 3.6

En el modelo que se propone interactúan didactas y profesores, compartiendo metas y objetivos que se esperan alcanzar, mostrando sus conocimientos y creencias y analizando de manera genérica la de los futuros alumnos, para terminar con la elaboración de los cursos de adiestramiento que se desarrollarán después.

La participación de profesores no puede ser por su propia naturaleza, amplia; en nuestro trabajo han participado seis personas.

Cuando los didactas y profesores recogen y analizan información sobre alumnos y profesores y diseñan un programa para cambiar conocimientos y creencias de los profesores, se convierten ellos mismos en diseñadores de microcurrículos que, por aproximaciones sucesivas, mediante cursos y guías de profesores, se intenta generalizar e implantar.

Adiestramiento por inmersión de profesores en servicio

Con el fin de valorar y preparar la difusión de la propuesta curricular, es necesario poner a nuevos profesores en contacto con el currículo. La preparación de los mismos se hará por medio de los cursos y guías antes diseñados, mediante una estrategia que denominamos inmersión, es decir, los cursos están elaborados con las mismas actividades que estos profesores propondrán a sus alumnos en sus aulas.

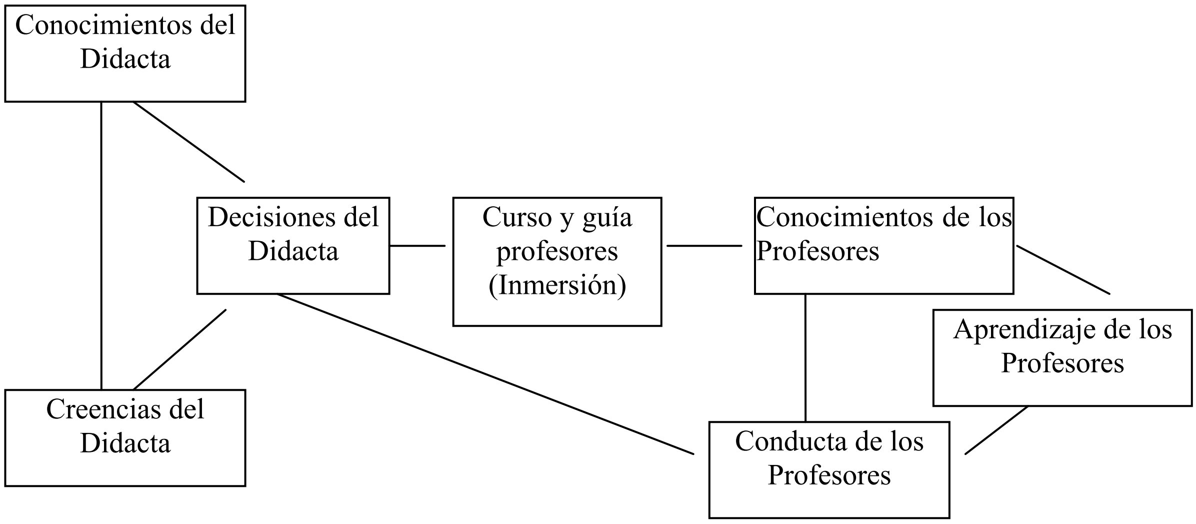


Figura 3.7: Modelo adaptado de Fennema, Carpenter y Peterson para el adiestramiento de profesores

El proceso seguido permite que los conocimientos y creencias de los didactas y de los profesores en relación a los contenidos y objetivos del currículo, empiecen a acercarse, a ser semejantes.

En cualquier caso, entendemos que la preparación de profesores (conocimientos, creencias, etc) es, en sí, una forma de desarrollo curricular.

En esta fase, utilizamos el método descriptivo como medio de conocer las creencias y conocimientos del profesorado implicado, así como sus estilos de enseñanza, aspectos que influyen en la implantación de cualquier currículo. Durante el desarrollo del diseño, se realizan puestas en común para revisar y resolver las dificultades que van surgiendo.

Una vez acabado el proceso, se realiza una valoración final. En ella, los profesores expresan cómo se ha desarrollado la experiencia, las dificultades observadas y los logros alcanzados, tratando de descubrir los cambios que se han producido en ellos mismos. De aquí surgirá el diseño de instrucción final a desarrollar en las aulas por ellos y por el didacta.

Instrucción en el aula por el didacta

Una interacción necesaria es la que se da entre el didacta y los estudiantes. Esta interacción directa y a pequeña escala, toma la forma de un experimento de enseñanza-aprendizaje, donde la instrucción en el aula y el currículo diseñado son probados en el momento en que se desarrolla la interacción directa entre didacta y estudiantes, interacción necesaria, puesto que son los conocimientos y creencias del didacta los que dirigen el esfuerzo del cambio. El profesor del aula juega, en esta fase, el papel de observador-crítico de la intervención del didacta.

En esta etapa, el método de investigación es eminentemente cualitativo, siendo la observación directa la técnica fundamental. Las peculiaridades de cada niño, sus ritmos de aprendizaje y las dificultades que van encontrando, se plasman en un diario, el cual se complementa con las observaciones del profesor. Estos datos se completan con un análisis de las carpetas de los alumnos, eligiéndose determinadas actividades para ser estudiadas sistemáticamente.

El modelo adaptado de Fennema, Carpenter y Peterson para la instrucción en el aula por el didacta es:

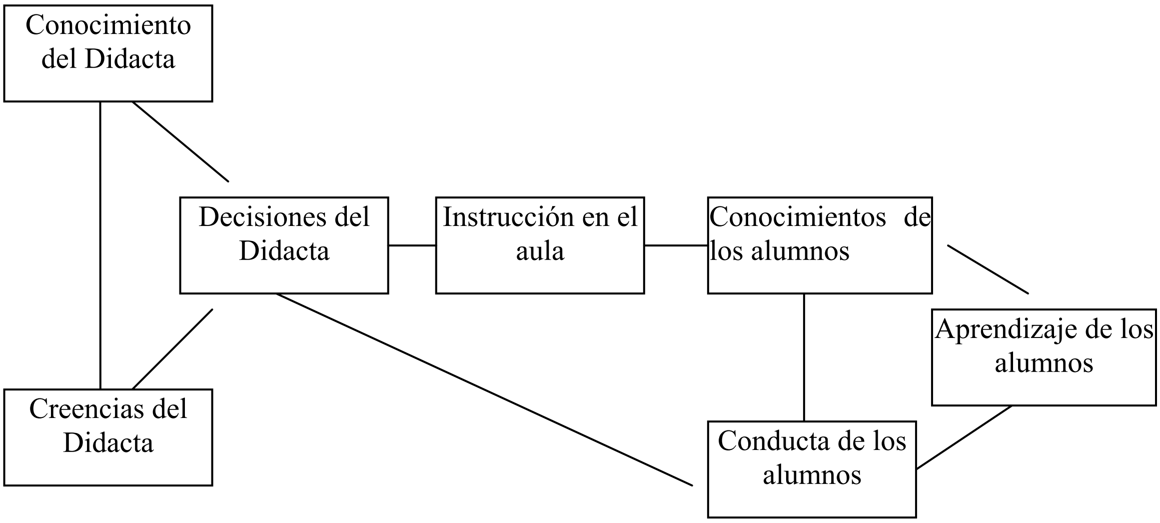


Figura 3.8

Al empezar esta fase, se administra a los alumnos un test de conocimientos, a fin de obtener una mayor información sobre ellos. Una vez acabado el diseño, se les vuelve a pasar otro test para valorar la incidencia de la instrucción.

Con todos los datos obtenidos se seleccionan unos niños, para hacer un estudio de casos que se realiza mediante entrevistas videograbadas. Esta fase nos permite conocer los procesos de cada niño al realizar las actividades del microdiseño, al tiempo que se detectan pautas, tendencias, dificultades, que si bien no son generalizables, aportan nuevos datos sobre el aprendizaje específico que estamos trabajando.

Instrucción en el aula por el profesor

La interacción en el aula entre profesores y estudiantes y las decisiones que toma el profesor, proporcionan datos valiosos a la investigación. El didacta juega, en esta fase, papeles de observador y guía de las experiencias diseñadas.

Estos primeros esfuerzos al implantar el nuevo currículo en el aula, facilitará una valiosa retroalimentación para adaptar o cambiar la formación/información que se daría a otros profesores en etapas posteriores de generalización.

El modelo adaptado de Fennema, Carpenter y Peterson para la instrucción en el aula por el profesor es:

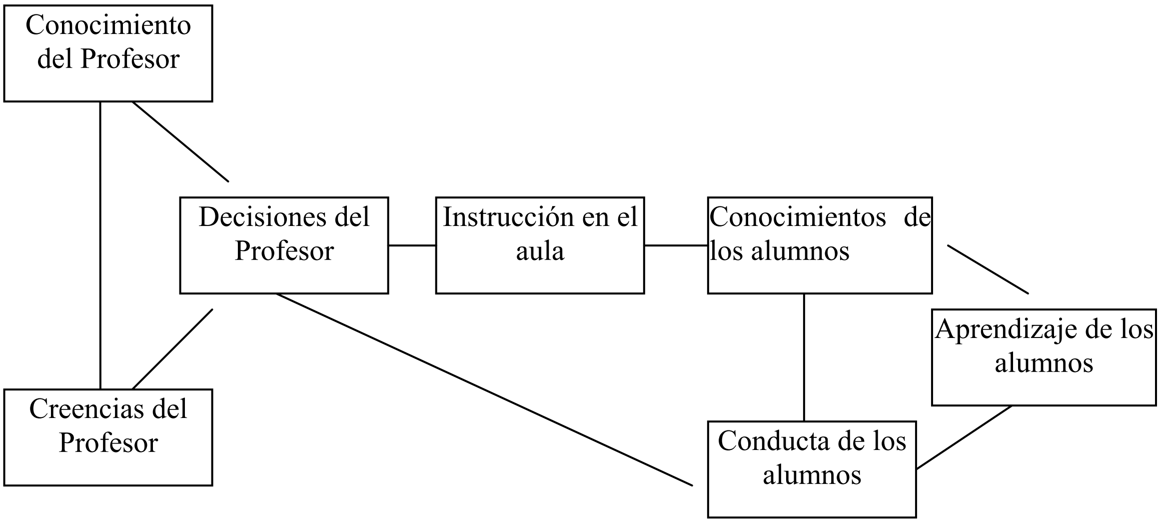


Figura 3.9

La investigación en esta fase es del tipo cuasi-experimental, con un modelo de pretest-postest y actuando, otro grupo de alumnos, como grupo control. Los profesores de este último grupo desconocen la investigación que se está llevando a cabo.

3.4.3 Conclusiones e implicaciones

Dos son los aspectos considerados en este trabajo: los procesos implicados en el cambio curricular y los métodos de investigación en educación. La investigación en los procesos de cambio curricular, comienza con un conocimiento "a priori" de los conocimientos y creencias de cada una de las componentes de éstos, donde obtenemos una medida de lo que está sucediendo. Es necesario, como señala Rachlin, un paradigma de evaluación que proporcione bases más dinámicas y completas para la elaboración del currículo y modifique la instrucción en las dimensiones, tanto del alumno como del profesor.

Nuestro modelo es un intento de aportar ideas en esta dirección. La hipótesis gemeral de trabajo puede resumirse en que la implantación de un cambio curricular se encuentra condicionado, entre otros elementos, por los conocimientos, creencias y decisiones de los profesores. Por ello, es importante arbitrar modelos de intervención, en los que el profesor se implique directamente, para ayudarles en la implantación de esta reforma y entender mejor la dinámica de los procesos.

La propuesta de trabajo desarrollada, pretende, de otro lado, superar las posiciones extremas entre los aspectos cualitativos y cuantitativos de los paradigmas de investigación y recoge métodos y técnicas de ambos, útiles y complementarios en función de los tipos de estudio que se realicen.

CAPÍTULO 4: DISEÑO E INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS DE LA INVESTIGACIÓN

4.1 INTRODUCCIÓN

En este Capítulo presentamos una descripción exhaustiva del diseño y de los instrumentos de recogida de datos de la investigación. Comenzamos con una descripción global del diseño general de la investigación, siguiendo el modelo que hemos indicado, con una segunda parte dedicada a la descripción, desarrollo y valoración del diseño de instrucción de resolución de problemas aritméticos verbales (DIRPA), y en la que se explica cómo se preparó al profesorado que posteriormente desarrolla este diseño en el aula.

El diseño es implementado en un gran grupo de alumnos (355) y sobre él se desarrolla la primera investigación, que llamamos estudio de grupos, que siguiendo un diseño cuasi-experimental se contrastará con un grupo control (190). Esta investigación se reproduce en un aula (estudio de un aula), utilizando un diseño pre-experimental y con técnicas cualitativas. La última parte del Capítulo, aborda los instrumentos de recogida de datos, tanto cuantitativos como cualitativos, planteando cómo se desarrolló su construcción, su validación y su administración. En el estudio cuantitativo, destacamos la construcción del pretest-postest para la resolución de problemas y las escalas para actitudes, y en el cualitativo, la descripción y desarrollo de las entrevistas, tanto las de los alumnos como las de los profesores.

4.2 DISEÑO GENERAL Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado describiremos el diseño general de la investigación y las fases de la misma.

4.2.1 Diseño general de la investigación

Nuestro modelo de investigación usa, como hemos indicado, métodos cuantitativos y cualitativos que permiten un análisis más completo del problema a investigar. Así, la investigación conjuga un diseño cuasi-experimental, entrevistas no estructuradas con los alumnos y entrevistas estructuradas de protocolos cerrados con los profesores, entre otros elementos.

Una parte de nuestro trabajo es una investigación de tipo descriptivo, que según Best (1970) *"se preocupa de cómo lo que es o lo que existe se relaciona con algún hecho precedente que ha influido o afectado a un suceso o condición presente"*. En educación matemática, es necesario conocer todo el entorno en el que se desarrollan los procesos educativos, con el fin de poder explicar dichos fenómenos. Cohen y Manion (1990) afirman que muchos estudios en educación observan a individuos, grupos, instituciones, métodos y materiales, con el fin de describir, comparar, contrastar, clasificar, analizar e interpretar las entidades y los acontecimientos que constituyen sus diversos campos de investigación.

La investigación empírica se diseñó y desarrolló siguiendo un modelo que intenta conjugar una investigación de tipo cuantitativo con otra de tipo cualitativo. Iniciamos el trabajo con la preparación de un grupo de profesores que actúan como grupo experimental y con otro grupo que se mantendrá como grupo control.

El grupo experimental va a desarrollar un diseño de instrucción, cuya construcción y desarrollo será el objetivo del próximo apartado.

La implementación del diseño de instrucción nos permite realizar dos estudios, como hemos indicado, que llamamos: estudio de grupos y estudio de un aula.

Estudio de grupos:

Este primer estudio se desarrolla con un número grande de alumnos, con los cuales se implementa un diseño de instrucción, que usa el modelo de competencias para resolver problemas aritméticos verbales, utilizando dos sistemas de representación. Los resultados de este estudio son analizados siguiendo las pautas de un diseño cuasi-experimental. En estos alumnos analizamos también el proceso de resolución de problemas, mediante entrevistas videograbadas, las cuales nos servirán como estudio piloto. El estudio se completa con un trabajo sobre el profesorado participante (en el grupo experimental y en el grupo control), con el objetivo de conocer su implicación en la investigación y las modificaciones que este hecho le lleva a introducir en su toma de decisiones didácticas.

Esta primera parte nos permite analizar y comparar datos de un gran número de alumnos, tanto en resolución de problemas como referentes a la actitud, de forma cuantitativa y utilizando técnicas estadísticas.

Kerlinger (1985) define una serie de condiciones que debe reunir un trabajo de investigación, que son: 1) ha de expresar una relación entre dos o más variables, 2) el planteamiento debe ser claro, sin ambigüedades y, a ser posible, en forma de pregunta, y 3) debe permitir verificación empírica.

Nuestro problema verifica las condiciones expuestas. En primer lugar, se tienen diferentes variables que vamos a analizar, como pueden ser el rendimiento de los alumnos en resolución de problemas, y su relación con la instrucción recibida, la actitud hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas. Asimismo, como haremos medidas repetidas, estudiaremos el cambio de estas variables en el tiempo y las contrastaremos con un grupo control. En segundo lugar, el problema está delimitado y antes del análisis de los resultados lo expondremos en forma de hipótesis concretas, y, finalmente, este problema permite una verificación empírica con los instrumentos de medida que más adelante describiremos.

En resumen, en este Capítulo describiremos los elementos que, según Bisquerra (1989), son fundamentales en una investigación: las variables, la selección de la muestra, la construcción y validación de los instrumentos de medida, el procedimiento seguido para la obtención de los datos y los supuestos y las limitaciones de cualquier trabajo.

Estudio de un aula:

El diseño de instrucción con su investigación se reproduce en un aula, actuando como profesora la propia investigadora. Este estudio nos permite hacer un análisis más fino de todos los procesos implicados en el desarrollo del diseño, así como observar las peculiaridades de los niños. Aunque aplicamos algunas técnicas cuantitativas, es fundamentalmente un estudio basado en la observación y el análisis cualitativo. También repetimos aquí el análisis de las actitudes de los alumnos.

Con un grupo de alumnos seleccionados de esta aula se realizan las entrevistas definitivas. En esta fase de nuestro trabajo se intenta profundizar en el conocimiento de los procesos y dificultades que experimentan los alumnos durante la resolución de un problema y nos permite hacer el estudio de las habilidades que hacen uso durante esa resolución.

El método de recogida de datos utilizado en esta parte del trabajo es la entrevista, que, como la describe Tuckman *"proporciona acceso a lo que está dentro de la cabeza de una persona, hace posible medir lo que sabe una persona (conocimiento o información), lo que le gusta o disgusta (valores y preferencias) y lo que piensa (actitudes y creencias)*(citado por Cohen y Manion, 1990).

4.2.2 Fases de la investigación

El proceso completo de nuestra investigación lo vamos dividir en cinco fases, para facilitar la explicación del mismo.

El diseño y planificación de toda la investigación comprende:

Primera fase: Diseño del proceso de investigación: Esta fase comienza con una primera intuición acerca de lo que se pretende investigar y que con el apoyo de la revisión bibliográfica se va delimitando, hasta llegar al planteamiento concreto del problema que se trata.

Segunda fase: Esta fase comprende la elaboración de marcos teóricos (modelos de competencias) y la definición de todo el proceso de investigación. Este proceso nos obligó a construir un diseño de instrucción para la resolución de problemas aritméticos (DIRPA), la preparación del curso-guía de adiestramiento para los profesores del grupo experimental, la preparación del material y de la instrucción para alumnos y profesores del grupo control, la construcción y validación de los instrumentos de medida (cuantitativos y cualitativos). En esta fase se elaboran los tres modelos de competencias descritos en el Capítulo anterior.

Tercera fase: Comprende el desarrollo de la investigación, que abarca:

- El curso de adiestramiento de los profesores del grupo experimental.
- La instrucción del grupo de profesores control.
- La administración del DIRPA por los profesores a los alumnos del grupo experimental.
- La administración del DIRPA por el didacta en un aula.
- Las entrevistas.

Cuarta fase: Es el periodo del análisis y discusión de los datos obtenidos.

Quinta fase: La última fase comprende la redacción de esta memoria.

En la tabla 4.1 hacemos un resumen y una temporalización de todo el proceso.

	Duración	Fecha
Primera fase: Intuición del problema. Trabajos previos. Revisión bibliográfica. Planteamiento del problema.	Varios cursos.	Curso 1984-1985 y posteriores.
Segunda fase: Diseño de la investigación. Elaboración de marcos teóricos. Preparación del diseño de instrucción y la guía del cambio curricular. Instrumentos de medición. Diseño del curso de Adiestramiento de Profesores.	Un curso. Un curso: 2 horas de reuniones semanales con el grupo investigador. Tres meses.	Curso 1990-1991. Curso 1991-1992. Octubre-Diciembre,1992
Tercera fase: Curso de Adiestramiento de Profesores (Primera fase).	15 horas.	18-22 Enero 1993.

	Duración	Fecha
Preparación profesores grupo control. Entrevistas iniciales profesores grupo experimental. Desarrollo del diseño de instrucción (segunda fase). Evaluación (tercera fase). Entrevistas piloto alumnos. Entrevistas profesores grupo control. Instrucción en el aula por el Didacta. Entrevistas definitivas alumnos. Entrevistas finales profesores.	5 horas. 10 horas. 20 sesiones de media hora. 5 horas. 18 horas. 10 horas. 20 sesiones de media hora. 18 horas. 10 horas.	25-27 Enero 1993 Febrero, 1993. Febrero a Abril de 1993. Mayo, 1993. Mayo-Junio de 1993. Junio, 1993. Marzo- Mayo, 1994. Mayo-Junio, 1994. Junio, 1994.
Cuarta fase: Primer análisis de los datos. Análisis de datos.	 Un cuatrimestre. Un curso.	 Octubre 93-Febrero 94. Curso 1994-95.
Quinta fase: Redacción de esta Memoria.	 Más de un curso.	 Septiembre, 1995 hasta Diciembre 1996.

Tabla 4.1

En este Capítulo, abordamos la fase segunda y aspectos generales sobre el desarrollo de la fase tercera. El trabajo de la segunda fase fue realizado con la colaboración de un grupo formado por 6 personas: tres profesores del Área de Didáctica de las Matemáticas, una profesora visitante de Matemáticas de la Universidad de Mérida (Venezuela) y dos Profesores de EGB en activo, al que nos referiremos en esta Memoria como el Grupo de Investigación.

Este Grupo se reunió durante 2 horas semanales en el curso 91-92, en las cuales analizó la metodología usada en el aula, las dificultades de los alumnos en la resolución de los problemas aritméticos, los diagramas utilizados o propuestos en los libros de texto, contrastándolo con resultados de otras investigaciones realizadas. En esta etapa se realizaron los siguientes trabajos:

* Un diseño de instrucción (DIRPA) para poder llevar este cambio curricular al aula

con su guía para el profesorado.

* El material curricular para el alumno.
* Un curso de formación para los profesores que quisieran participar en la investigación.
* Una batería de problemas aritméticos verbales para el grupo control.
* La construcción y validación de los instrumentos de medida de la investigación: pretest-postest de problemas, escalas de actitudes, entrevistas no estructuradas para los alumnos y entrevistas estructuradas con protocolos cerrados para los profesores.

La guía del diseño de instrucción para el profesor y el material curricular del alumno los presentamos en el Anexo (p. 2 y 52, respectivamente).

4.3 EL DISEÑO DE INSTRUCCIÓN PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES (DIRPA)

El objetivo principal de este diseño es introducir a los niños en un modelo de competencias para resolver problemas aritméticos, usando dos sistemas de representación yuxtapuestos. Uno de estos sistemas, el SRVG, es desconocido por los alumnos y, por tanto, necesita una instrucción precisa.

El modelo de competencias, que hemos descrito en el Capítulo anterior, no tiene una instrucción explícita, sino que se trata de ir introduciendo al alumno en él, apoyándonos en la ficha que hemos confeccionado. En la figura 4.1 podemos ver un diagrama y las conexiones que se pueden establecer.

La conexión entre ambos sistemas, aspecto que destacamos, ayuda al alumnado a realizar reflexiones metacognitivas y le permite clarificar el concepto que tiene de las distintas operaciones.

Otro aspecto tenido en cuenta, es la presencia de todos los tipos de problemas, según las estructuras semánticas, y es en esta variedad de problemas donde el alumno puede desarrollar distintas estrategias de razonamiento.

Este diseño, dentro de una teoría cognitivista del aprendizaje, potencia las actividades del alumno, dejando al profesor como un orientador de las mismas. La actuación del profesor se centra en la explicación del nuevo sistema de representación (su semántica y su sintaxis), aunque en algunos momentos son los propios alumnos los que las descubren.

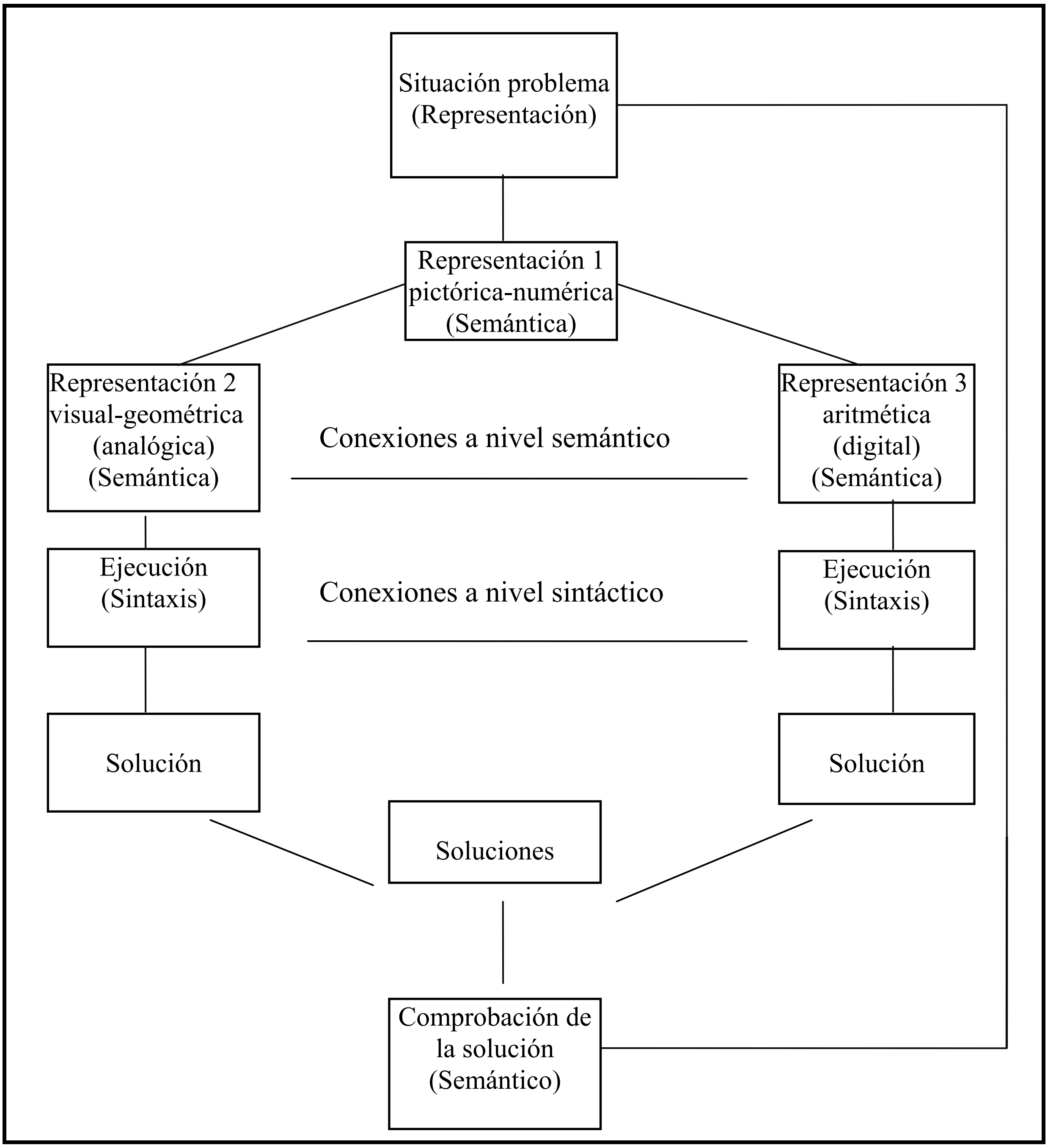


Figura 4.1

4.3.1 Objetivos y construcción del DIRPA

El DIRPA también actúa como instrumento de investigación, que nos permite analizar las habilidades de los alumnos en los distintos conceptos y las conexiones entre los dos sistemas de representación.

Así, este diseño de instrucción persigue un doble objetivo, como elemento de instrucción y como instrumento de evaluación.

La elaboración del DIRPA definitivo tiene tres etapas claramente diferenciadas.

* La primera tiene lugar en el curso 1984-85, en el marco del Proyecto de innovación educativa: "Didáctica para la resolución de problemas de matemáticas en los distintos Ciclos de la EGB", que ya hemos comentado, en el que se elabora un primer diseño que llamaremos $DIRPA_0$.

* La segunda etapa tiene lugar en el curso 91-92; en ésta, el grupo de investigación elabora el que denominamos $DIRPA_1$, a partir del $DIRPA_0$ y de los resultados obtenidos en su aplicación en el curso 84-85. (Socas, 1985; Socas y otros, 1986). En esta etapa, se analizan los resultados y se definen claramente los objetivos que se querían lograr. Posteriormente, se fueron seleccionando actividades, las cuales fueron ensayadas en aulas de EGB, hasta obtener una presentación definitiva, que constituyó este primer diseño.

Una vez definidas todas las actividades y su secuencia, fue ensayado en varias aulas de distintos niveles de EGB (3º, 4º y 5º) del Colegio donde trabajaban los profesores de nuestro grupo de investigación, con el objetivo de ver las dificultades que planteaba y la temporalización.

* El $DIRPA_1$ fue administrado a los profesores (en el curso 92-93) que iban a tomar parte en nuestra investigación, durante el curso de adiestramiento. Sus reflexiones y sugerencias modificó algunas de las actividades, resultando así el diseño definitivo, que llamaremos DIRPA.

4.3.2 El DIRPA como elemento de instrucción

El aprendizaje de un sistema nuevo de representación y la interiorización de un modelo de resolución para problemas aritméticos verbales, necesita una instrucción concreta. Al mismo tiempo, pretendemos que todos los profesores tengan una homogeneidad en el desarrollo de la misma, por lo que es imprescindible realizar un diseño completo de instrucción.

Este diseño pretende introducir a los niños en un modelo de competencias para la resolución de problemas aritméticos verbales, utilizando un sistema de representación visual-geométrico y apoyándose en el esquema partes-todo, tal como lo hemos presentado en el Capítulo anterior.

El diseño, dirigido a alumnos del Segundo Ciclo de Primaria (en el momento de desarrollarlo era el Ciclo Medio de EGB), consta de 5 unidades de aprendizaje para desarrollar en 20 sesiones. Cada una de ellas contiene:

1) <u>Una introducción que realiza el profesor</u> (actividades que llamaremos I1 hasta I19).

Esta primera actividad de cada unidad es desarrollada por el profesor conjuntamente con los alumnos y pretende dos objetivos:

1º) Que el profesor enseñe la semántica y la sintaxis del sistema de representación visual-geométrico en la operación correspondiente.

2º) Que el profesor actúe como modelo de resolutor, utilizando las distintas fases del modelo de competencias y haciendo preguntas a los alumnos que les obligue a hacer reflexiones de tipo metacognitivo.

2) <u>Actividades de los alumnos</u> (Numeradas desde la 1 hasta la 60).

Estas actividades pueden ser resueltas de forma individual o en grupo y comprenden problemas de todas las categorías semánticas en las distintas operaciones.

Al final de cada unidad, hay unas fichas de problemas similares, que sirven para consolidar lo estudiado y se pueden utilizar como control antes de pasar a la unidad siguiente.

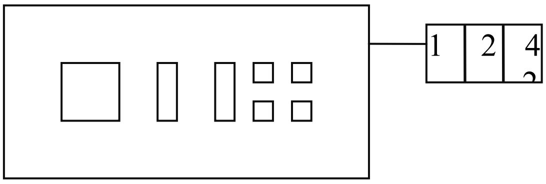
Las unidades son:

Unidad 1: <u>El sistema de numeración decimal</u>

Esta unidad, que comienza con actividades manipulativas básicas del sistema de numeración decimal, tales como agrupar o desagrupar, pretende que el alumno sepa utilizar las colecciones de control para representar cantidades. Consta de dos sesiones y el objetivo es que el alumno aprenda a "etiquetar" correctamente las colecciones de objetos, que usará al representar gráficamente los problemas.

A partir de actividades físicas se pasará a representar la situación en el papel: Dibujarán las colecciones en un rectángulo mediante un sistema analógico y las colecciones se acompañarán de una "etiqueta", que, como hemos dicho, representa el puente de unión entre lo digital y lo analógico.

Situaciones como "Juan tiene 124 cromos" se expresará:



En estas primeras sesiones se hará un breve refuerzo del sistema de numeración decimal utilizando ambos materiales que necesitamos para el lenguaje gráfico: los bloques aritméticos y el ábaco (si los alumnos no conocen estos materiales didácticos, es imprescindible dedicar varias sesiones hasta que se familiaricen con ellos).

Comprende las actividades 1 a 11.

Unidad 2: <u>La representación gráfica de un problema aritmético-verbal</u>

La representación pictórica debe favorecer la comprensión del problema. El profesor hará hincapié en procurar simplificar estas representaciones, orientándolos hacia representaciones sencillas y esquemáticas que reflejen correctamente el contenido del problema.

Esta unidad consta de 4 sesiones, en las que se trabaja la representación gráfica de un problema. Comenzamos por representaciones pictóricas de forma libre, encaminándolos posteriormente a un nuevo tipo de representación: la representación visual-geométrica.

La última sesión se dedica a resolver un problema sencillo mediante la ficha modelo (tabla 4.2), que es la materialización del modelo de competencias.

El profesor va guiando la resolución del problema y explicando las distintas fases de dicho modelo, así como la utilización del SRVG para representar y resolver el problema.

<u>Fase 1</u>: Lectura.

Lectura: procurando que sea comprensiva.

<u>Fase 2</u>: Comprensión.

Viñeta: representación pictórica que le ayude a comprender la situación.

Datos que te dan. Datos que te piden: Ayuda a concretar las cantidades del problema.

<u>Fase 3</u>: Representación, ejecución y solución en el sistema de representación visual-geométrico (SRVG).

Calcula lo que te piden sin hacer operaciones: Permite al alumno utilizar otro sistema de representación distinto del sistema de representación formal.

<u>Fase 4</u>: Representación, ejecución y solución en el sistema de representación aritmético (SA).

Operaciones: Utiliza el sistema de representación aritmético.

<u>Fase 5</u>: Soluciones.

¿Son iguales las soluciones? Este apartado ayuda al niño a realizar conexiones entre ambos sistemas.

<u>Fase 6</u>: Comprobación de la solución

Escribe la historia con el resultado obtenido: Se ayuda al alumno a asegurarse que la respuesta es correcta y responde a la situación planteada.

Con estas herramientas el alumno se dispone en la próxima unidad a resolver problemas. Esta unidad abarca las actividades 12 a 28 y la ficha I6.

NOMBRE Y APELLIDOS	CURSO:
ENUNCIADO (HISTORIA)	A un congreso de médicos han asistido 320 especialistas del corazón y 137 especialistas en huesos. ¿Cuántos médicos han asistido al congreso?
GRÁFICO (VIÑETA)	
¿QUÉ DATOS TE DAN?	¿QUÉ DATO TE PIDEN? --- --- --
CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES	RESULTADO
OPERACIONES	RESULTADO
¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?	--- ---
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO	----------------------------------

Tabla 4.2

Unidad 3: <u>Problemas de sumar y de restar</u>

Esta unidad consta de 6 sesiones y su objetivo es resolver problemas de sumar y de restar. En estas sesiones se desarrollan dos aspectos. Por una parte, utilizando el esquema partes-todo, se presenta la suma como la operación que busca el todo, conocidas las partes, mientras la resta responde a la búsqueda de una de las partes, conocido el todo y la otra parte.

El otro aspecto tiene que ver con la representación visual-geométrica como forma de representación y resolución de los problemas. Hemos contemplado problemas pertenecientes a las cuatro categorías semánticas: cambio, combinación, comparación e igualación, tanto en situaciones de sumar como de restar. En las cuatro primeras sesiones se les introduce en los distintos problemas y las dos últimas aparecen problemas mezclados de todos los tipos a modo de test final.

Esta unidad comprende las fichas I7, I8, I9, I10 y las actividades 29 a 42.

Unidad 4: Problemas de multiplicar y dividir

Esta unidad, con 6 sesiones, sigue el mismo formato que la anterior, contemplándose problemas de los tipos: razón, comparación y producto cartesiano, para los de multiplicar; y de reparto, agrupamiento, comparación y producto cartesiano para los de dividir.

En las primeras sesiones se plantea la multiplicación como la búsqueda del todo, conocidas las partes que son todas iguales, realizando la representación y resolución con el SRVG y con el sistema de representación formal, en los problemas de tipo razón y comparar.

Para los problemas asociados al concepto de producto cartesiano, que enriquecen el concepto de multiplicación, se utiliza otro tipo de diagramas: el diagrama de árbol.

El mismo proceso se sigue con los problemas de dividir: la búsqueda de una parte, conocido el todo y el número de partes o la búsqueda del número de partes conocido el todo y el valor de una parte, terminando con los problemas de dividir asociados al producto cartesiano.

Comprende las fichas I13, I14, I15, I16 y las actividades 43 a 56.

Unidad 5: Problemas de dos operaciones

La última unidad, con dos sesiones, tiene como objetivo enseñarles a generalizar el sistema de representación visual-geométrico a problemas con dos operaciones. Comienza con una ficha del profesor: I19 y las actividades 57 a 60 para los alumnos.

Estos problemas sólo ocupan dos sesiones, ya que su objetivo no es trabajarlos a fondo, sino guiarles en la generalización de los diagramas. En la sesión 19 se les introduce y se les indica la forma de hacerlo, mientras la sesión 20 se dedica a resolver problemas variados de dos operaciones.

Aquí no se han podido contemplar todas las combinaciones posibles entre las operaciones, sino que se han elegido algunas de ellas.

En la Guía del Profesor se puede ver de forma más detallada los objetivos y desarrollo de cada unidad.

4.3.2.1 Objetivos y metodología

El objetivo del diseño de instrucción es el aprendizaje de un nuevo sistema de representación no verbal, dentro de un modelo de competencias para resolver problemas aritméticos verbales. Para poder llevar a cabo un análisis de los resultados, era condición necesaria que hubiera una uniformidad en su desarrollo entre todos los profesores participantes, por lo cual todo el material del diseño de instrucción se entregó fotocopiado a los profesores.

En el diseño se recomienda una metodología activa, y que conjugue la indagación individual, la discusión en grupos pequeños y una puesta en común en gran grupo del trabajo realizado, pero se dio libertad a los profesores para no alterar de forma drástica la dinámica personal de cada uno.

4.3.3 El DIRPA como elemento de investigación

El diseño de instrucción actúa también como un elemento de investigación, ya que cada unidad tiene unos objetivos de investigación bien definidos, relacionados con la adquisición de habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas.

La unidad 1 comprende tres conceptos importantes:

* Las colecciones de control, que permiten al alumno representar cantidades, nos mostrarán las habilidades en un sistema de representación físico (manipulativo) y las habilidades para los sistemas de representación gráfica.
* Las colecciones de control y la comunicación de cantidades (gráficamente).
* El ábaco plano y la comunicación de cantidades (gráficamente).

Estas habilidades las resumimos en las siguientes preguntas:

1) ¿Son capaces de reconocer las cantidades que están expresadas mediante colecciones de control?
2) ¿Son capaces de comunicar las cantidades, utilizando un sistema de representación gráfico, mediante las colecciones de control y asignándoles una etiqueta?

La unidad 2 intenta analizar la capacidad de los niños para representar situaciones de forma gráfica, en una primera etapa de forma libre, para finalmente analizar si son capaces de hacerlo mediante el SRVG. Estas habilidades cognitivas están relacionadas con la capacidad para expresar situaciones de forma gráfica, valorando a aquellos que son capaces de eliminar aspectos superfluos en dicha comunicación gráfica.

Nos planteamos tres interrogantes:

1) ¿Las representaciones gráficas reflejan el contenido del problema?
2) ¿Son esquemáticas?
3) ¿Utilizan correctamente el sistema de representación visual-geométrica para representar estas situaciones?

Las unidades 3, 4 y 5 tienen unas características muy similares. En ellas está la parte fundamental de nuestro diseño. Pretendemos ayudar a los alumnos a desarrollar habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas. Entre ellas seleccionamos las siguientes:

Habilidades cognitivas:

1. Lectura comprensiva del texto.
2. Representación pictórica de la situación.
3. Discriminación de los datos y la pregunta.
4. Conocimiento de la semántica y la sintaxis del SRVG.
5. Elección y ejecución correcta de la operación.

Habilidades heurísticas:

1. Utilización del modelo de competencias.
2. Razonamiento con el esquema partes-todo.
3. Utilización de estrategias generales o heurísticos en la resolución.
4. Utilización de un sistema de representación como apoyo para el otro.

Habilidades metacognitivas:

1. Control de la resolución del problema.
2. Predicción de la igualdad de las soluciones.
3. Conexiones entre los sistemas de representación.
4. Reconocimiento de la utilidad de los sistemas de representación.

4.3.3.1 Objetivos y metodología

El objetivo de este diseño como elemento de investigación, es obtener datos sobre las habilidades que desarrollan los alumnos en la resolución de los diferentes problemas y en la utilización de los dos sistemas de representación.

Para llevar a cabo el análisis posterior, dispusimos de las carpetas de los alumnos y de las observaciones de los profesores (expresadas oralmente en las reuniones periódicas y de forma escrita en sus diarios) y la observación personal, realizada por la investigadora en el aula donde desarrolló el diseño.

4.4 CURSO DE ADIESTRAMIENTO POR INMERSIÓN A PROFESORES EN ACTIVO

Un cambio curricular necesariamente tiene que partir de una preparación de los que lo van a llevar a cabo, pero no sólo de una preparación teórica, sino que es necesario que exista una actitud positiva y una creencia firme de que lo que se va a desarrollar en el aula redundará positivamente en los alumnos.

Esta preparación se hizo por medio de este curso-guía, mediante una estrategia que denominamos inmersión, es decir, el curso está elaborado con las mismas actividades que estos profesores propondrán a sus alumnos en sus aulas. Este curso-guía no tiene como objetivo reproducir y especificar la parte local del currículo a desarrollar, ni es un recetario sobre cómo ejecutar un plan elaborado por otros, sino que pretende ser una interpretación, justificación y orientación desde la práctica misma (inmersión) de las transformaciones acaecidas. Esta interpretación, clarificación y orientación no sólo está apoyada por la práctica, sino que incorpora los resultados seleccionados de la investigación en el campo tratado y permite el intercambio de opiniones y experiencias con otros docentes, lo que parece en un principio ser un mediador eficaz en los cambios curriculares.

La elección del profesorado se hizo, a través de una invitación en nuestro Seminario Permanente de Didáctica de las Matemáticas, a profesores del Ciclo Medio a un Curso en el que se les presentaría un **"Diseño instruccional para la resolución de problemas aritméticos verbales".** Trece profesores acudieron al mismo, aceptando libremente participar en la investigación.

4.4.1 Programa y temporalización del Curso

El curso constaba de tres fases:

I. Fase presencial de 15 horas, que se desarrolló entre los días 18 al 22 de Enero de 1993.

En esta fase realizaron ellos mismos el diseño instruccional sobre resolución de problemas aritméticos (DIRPA). Se les dio a conocer los elementos del diseño, sus objetivos, sus fundamentos, sus fases, su metodología y la temporalización y se analizaron los resultados más relevantes de las investigaciones sobre este tema.

En este momento se les entregó todo el material curricular necesario para el desarrollo en el aula del diseño.

II. Fase de desarrollo de la experiencia: 20 horas, entre los meses de Febrero a Abril del mismo año.

En esta fase se mantienen reuniones periódicas con los Profesores por Colegios. En ellas se discuten dudas concretas, relacionadas principalmente con el nuevo sistema de representación, al tiempo que ellos van comentando todas las observaciones que han hecho sobre el desarrollo del diseño.

III. Fase presencial: 5 horas, los días 24 y 25 de Mayo de 1993, en la cual se realizó una evaluación del diseño.

4.4.2 Metodología del Curso

La estrategia utilizada, que denominamos "por inmersión", pretende, después de breves explicaciones sobre los contenidos básicos, que el profesorado trabaje el diseño de forma similar a como lo harían posteriormente sus alumnos. Esta técnica da al profesorado seguridad sobre el método, al tiempo que le hace prever las posibles dificultades que pueden encontrar sus alumnos. Por tanto, las distintas sesiones tienen unos aspectos teóricos, que comprenden explicaciones específicas y discusión de los artículos relacionados con el tema, y la implementación del propio diseño, seguido de una reflexión y crítica sobre el mismo.

El desarrollo del curso fue como sigue:

1ª Sesión:
* Introducción * Aspectos teóricos (Modelo general de Polya, la representación gráfica. Distintos diagramas, nuestro modelo de competencia para la resolución de problemas aritméticos. * Sesiones 1 a 6 del DIRPA.

1ª Sesión:
Se hizo una introducción sobre los problemas aritméticos, analizando las distintas variables. Se explicó nuestro modelo de competencia, la sintaxis y semántica de nuestro sistema de representación visual-geométrico y la importancia del esquema partes-todo.
2ª Sesión:
* Aspectos teóricos: Análisis de los conocimientos que se necesitan en la resolución de un problema, estructura semántica de los problemas aditivos. * Sesiones 7 a 12: Resolución de problemas aditivos. Se pasó a exponer los conocimientos que afectan a la resolución de problemas aditivos, haciendo hincapié en la estructura semántica de estos problemas, aspectos aún poco conocidos por el profesorado.
3ª Sesión:
* Aspectos teóricos: Estructura semántica de los problemas de estructura multiplicativa. * Sesiones 13 a 18: Resolución de problemas de multiplicar y dividir. Siguiendo el mismo formato del día anterior se abordó el estudio de los problemas de multiplicar y dividir
4ª Sesión:
* Aspectos teóricos: Problemas de dos operaciones aritméticas. * Sesiones 19 y 20: Resolución de problemas de dos operaciones Se les indicó como realizar la generalización del SRVG a los problemas de dos operaciones.
Sesión 5ª:
Se hizo una revisión sobre el diseño, aportando sus críticas y reflexiones.

Tabla 4.3

En las respectivas sesiones se discutieron distintos artículos de investigación. Dado que el tema de resolución de problemas aritméticos verbales es muy amplio, tuvimos que realizar una selección cuidadosa de los artículos más representativos para discutirlos con los profesores.

El libro de Polya (1957): *"How to solve it",* nos marca la pauta general del modelo de competencias, junto al propuesto por Goldin (1985, 1987, 1989), que establece un modelo para resolver problemas matemáticos, basado en 5 sistemas de representación, justificando la importancia de utilizarlos frente al modo tradicional de resolver problemas que orienta a los alumnos a hacer una traslación desde el Sistema de representación verbal-sintáctico al Sistema formal aritmético.

Un segundo grupo de trabajos presentados tienen que ver con la investigación en problemas de una operación de estructura aditiva. Nos centramos en los factores semánticos, pues, habiéndose demostrado que son una fuente de dificultades entre los alumnos, siguen siendo desconocidos por los profesores. Seleccionamos los trabajos de Carpenter y Moser (1982, 1983), Nesher (1982) y De Corte y Verschaffel (1985, 1987, 1989). Estos últimos han desarrollado también un cuerpo teórico con estos problemas y han realizado experimentos de enseñanza, con el objetivo de instruir a los alumnos en la utilización de representaciones gráficas que les permitan descubrir las relaciones entre los elementos y, por tanto, la estructura semántica subyacente.

Las cuestiones más significativas acerca de los problemas de estructura multiplicativa, fueron abordadas a partir del trabajo de Greer (1992).

Finalmente, los problemas de dos operaciones, cuyo estudio ha comenzado a emerger, fueron presentados a través del trabajo de Nesher y Herskovitz (1991) y los trabajos de Rico y colaboradores (1994), que tratan de analizar la dificultad de los mismos con respecto a las operaciones implicadas y a la estructura semántica.

Analizaron, también, algunos trabajos que presentaban diseños de instrucción: De Corte y Verschaffel (1989), Bethencourt (1986) y Carpenter y otros (1989).

4.4.3 Administración del DIRPA a profesores: Descripción y valoración

El DIRPA fue administrado a los profesores durante el Curso de adiestramiento por inmersión. Los profesores analizaron y desarrollaron todas las actividades de los alumnos.

En este caso, el diseño también perseguía el doble objetivo: como elemento de instrucción y como elemento de investigación.

Como elemento de instrucción, esperábamos que los profesores consiguieran un conocimiento del modelo “por inmersión”, descubriendo las potencialidades y dificultades del mismo. Es importante señalar que el profesorado desconocía las categorías semánticas de los problemas aritméticos, y no insistían en el uso de estrategias o heurísticos en la resolución de los mismos.

Como elemento de investigación, nos planteamos analizar cómo el profesorado, personas adultas y con dominio de estos tópicos, integraban el nuevo sistema de representación y lo conjugaban con el que utilizaban (sistema formal) y cuál era la reacción afectiva hacia él, siguiendo el modelo de interacciones, que hemos propuesto.

El análisis de estos aspectos se realizó mediante observación durante las sesiones y a través de entrevistas estructuradas con protocolos cerrados.

Del desarrollo del curso se genera por un lado, como fruto de la implementación del diseño y de las aportaciones del profesorado, modificaciones al mismo y por otra parte, se obtienen observaciones sobre el profesorado.

Las modificaciones realizadas sobre el $DIRPA_1$ fueron las siguientes:

1. Se mejoró la redacción de algunos enunciados que se prestaban a confusiones.
2. La magnitud de algunas cantidades impedía resolverlos de forma gráfica con comodidad, por lo que hubo que disminuirlas.
3. Los problemas de multiplicar y dividir se cambiaron por números de una cifra, ya que los profesores de 3º indicaron que no habían automatizado estas operaciones con números de dos cifras.

Las observaciones realizadas sobre la integración de SRVG y la reacción afectiva hacia él, fue variada. Encontramos unos profesores que se mostraban entusiasmados, porque estaban convencidos de la necesidad de un soporte gráfico para las Matemáticas y les sorprendía la potencia de este sistema, que permitía la resolución de los problemas, mientras otros consideraban que, siendo el fin de la resolución de problemas la elección y ejecución de una operación, esto podía representar un trabajo innecesario, sobre todo en los niveles superiores como en 5º de EGB.

Como valoración general, podemos señalar:

De los profesores participantes:

La valoración que hicieron de la administración del diseño de instrucción fue altamente positiva, pues según ellos *"comprendieron no sólo como utilizar este nuevo sistema, sino también por qué lo hacían y para qué"*.

Del grupo de investigación:

El grupo valoró el curso por inmersión de forma positiva, ya que este tipo de cursos en los que el profesorado realiza la misma instrucción que ellos deben desarrollar con sus alumnos, permite un conocimiento a fondo de los temas a tratar, que les proporciona seguridad y un descubrimiento de las dificultades que los alumnos pueden encontrar.

4.5 El ESTUDIO DE GRUPOS

4.5.1 El diseño experimental

Esta fase es del tipo cuasi-experimental: grupo experimental vs. grupo control y con dos medidas: un pretest y un postest. Utilizando los símbolos de Campbell y Stanley (1963), se representaría su estructura como sigue:

Grupo	Pretest	Tratamiento	Postest
Experimental	O_1	X	O_2
Control	O_3		O_4

Tabla 4.4

donde X representa la exposición de un grupo a una variable o hecho experimental (en nuestro caso, un diseño de instrucción para la resolución de problemas aritméticos) cuyos efectos se van a medir; O_1, O_2, O_3, O_4 se refieren al proceso de observación o medida.

Para Campbell y Stanley (1963), estos diseños tienen las siguientes características esenciales: a) empleo de escenarios naturales, b) control parcial y c) posibilidad de utilizarse cuando no es posible un diseño experimental. Para Cohen y Manion (1990), la diferencia más importante entre los diseños experimentales y cuasi-experimentales reside en que en el segundo caso se estudian grupos intactos, es decir, que no han sido seleccionados al azar.

4.5.2. Los sujetos

Este estudio se desarrolló en la Isla de Tenerife, en 13 aulas de los municipios de Santa Cruz de Tenerife, La Laguna y San Isidro, que actuaron como grupo experimental y 10 aulas como grupo control, pertenecientes todas al municipio de La Laguna. Todos los alumnos cursan el Ciclo Medio de la EGB y pertenecen a Colegios de más de 17 unidades. En el grupo experimental hay 3 aulas de un Colegio privado-concertado y el resto son de Colegios públicos. Los profesores de ambos grupos no se conocían y en ningún Colegio coexistían grupos experimentales con grupos controles, con lo cual teníamos garantizado que no existiese un trasvase de información de lo que hacía el grupo experimental.

En la tabla 4.5 podemos observar a qué zonas pertenecen:

	Grupo Experimental				Grupo control	
	Urbano	Suburbano	Urb-rural	Rural	Urbano	Suburb.
Público	3	3	3	1	6	4
Priv-conc.	3	0	0	0	0	0

Tabla 4.5

PROFESORES

El grupo experimental está formado por 13 profesores y el grupo control por 10. En la tabla 4.6 los hemos clasificado por Cursos:

Profesores	Grupo experimental	Grupo control
3º	2	3
4º	5	3
5º	6	4

Tabla 4.6

La presencia de otro grupo con el que poder comparar los resultados, es condición necesaria para desarrollar un estudio cuasi-experimental. Contactamos con profesores de los mismos niveles para que actuaran como grupo control. En la elección de Profesores para trabajos de investigación es imposible hablar de azar en la misma; por ello creemos que es más correcto considerar el grupo control como grupo de comparación.

ALUMNOS

Grupo experimental:

La población está formada por 355 alumnos, distribuidos por zonas, tal como presentamos en la tabla 4.7:

	Total	Urbano	Suburbano	Urbano-rural	Rural
3º	66	66	-	-	-
4º	123	56	20	47	-
5º	166	59	48	31	28
	355	181	68	78	28

Tabla 4.7

Grupo control:

El grupo control, formado por 190 alumnos, pertenecientes a Colegios Públicos de zona urbana y suburbana, se distribuyen como indica la tabla 4.8:

	Total	Urbano	Suburbano
3º	53	34	19
4º	52	32	20
5º	85	44	41
	190	110	80

Tabla 4.8

La edad de los alumnos del grupo experimental varía de 8 a 13 años y en el grupo control de 7 a 15. La mayoría pertenece a entornos urbanos y, en general, sus padres sólo tienen estudios primarios. Su elección se hizo visitando a colegios de zonas urbanas y suburbanas y pidiéndoles su colaboración.

En algunos Colegios había niños integrados, y aunque siguieron todo el desarrollo del proceso, no se tomaron en cuenta a la hora de evaluar los resultados de los tests.

La distribución por cursos y sexos de los alumnos de ambos grupos la podemos ver en las Figuras 3.2 y 3.3.

Grupo experimental

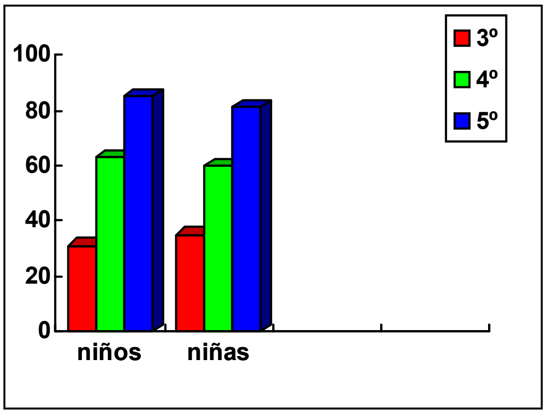


Figura 3.2

Grupo control

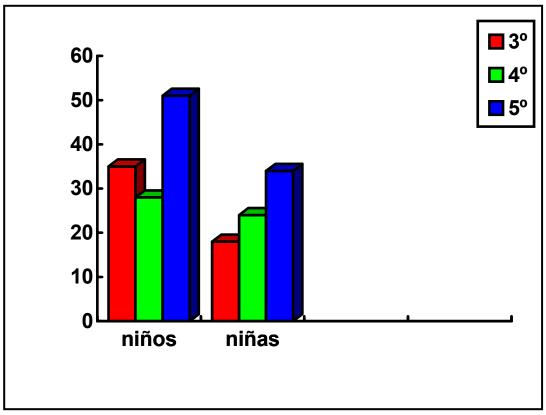


Figura 3.3

4.5.3 Administración del DIRPA

A continuación, describimos los objetivos y la metodología del diseño de instrucción, y la descripción de su desarrollo en el aula, terminando con la valoración del mismo realizada por los profesores y por el grupo de investigación.

4.5.3.1 Objetivos y metodología

El objetivo del diseño de instrucción es favorecer el aprendizaje de un modelo de competencias, con el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos. Sus objetivos generales han sido descritos en el apartado 4.3.

Se recomendaba usar una metodología basada en el trabajo en grupos y con una puesta en común al final de las actividades.

4.5.3.2 Descripción y valoración

El diseño de instrucción fue desarrollado en el aula durante los meses de febrero a abril de 1993.

El diseño, con sus 20 sesiones, fue organizado por cada profesor de forma personal, tanto en la temporalización como en la metodología.

Unos lo desarrollaron trabajando en grupos, mientras otros utilizaron el trabajo individual como metodología usual. En cuanto a la temporalización también hubo diferencias. En la tabla 4.9 resumimos el número de horas semanales que dedicaron los profesores al diseño, agrupados por cursos:

Horas semana	1 hora	1,5 horas	2 horas	2,5 horas	3 horas
3º	1	-	1	-	1
4º	1	2	-	2	-
5º	1	1	1	2	-

Tabla 4.9

Diferentes razones frenaron el desarrollo normal del diseño y no permitieron a algunos profesores acabarlo. En la tabla 4.10 describimos lo sucedido. Sólo siete Profesores desarrollaron el diseño en su totalidad; los demás sólo trabajaron hasta los problemas aditivos (12 sesiones).

	Todo el diseño	Sólo los problemas aditivos
3º	-	2
4º	3	2
5º	4	2

Tabla 4.10

Valoración:

Del profesorado que lo administró:

Los profesores en su totalidad evaluaron el diseño como altamente positivo. Esta evaluación se realizó en el mes de Mayo, 1993, en varias reuniones en las cuales cada profesor describió las incidencias en el mismo y su valoración. Entre las limitaciones que señalaron, destacamos las siguientes:

* El diseño debe ser desarrollado en un periodo de tiempo mucho más amplio. La situación ideal sería comenzar desde el Ciclo Inicial con la resolución de problemas aditivos, para irlo generalizando hasta llegar en este Ciclo a los problemas de dos operaciones o como mínimo ampliar el trabajo a un curso escolar.

* Su comienzo en cursos superiores, como 5º, conlleva una fuerte dificultad, ya que los alumnos tienen una serie de esquemas interiorizados y se les hace difícil modificarlos en espacios cortos de tiempo. Por otra parte, aquellos alumnos que ya dominan la resolución de estos problemas elementales, consideran un trabajo adicional el aprender nuevas formas de representación y resolución.

* La necesidad de ampliar el número de actividades y de incluir algún apartado de estimación del resultado, para facilitar el desarrollo de esta habilidad.

De las potencialidades del método indicaron:

* la fuerte motivación que se produce en los alumnos al resolver un problema, no de forma tan mecánica como estaban habituados.

* la utilización de dos sistemas de representación y el modelo de competencias que

les permite ser más reflexivos y no precipitarse en la búsqueda de una operación.

Del grupo de investigación:

Los profesores utilizaron un diario de clase para describir la administración del diseño. A partir de éstos, hemos hecho una valoración del mismo. En el Anexo (p. 372) hemos transcrito tres diarios, que consideramos más representativos. El diario 1 y 3 pertenecen a aulas, de las cuales se seleccionaron niños para ser entrevistados y responden a metodologías distintas: trabajo en grupo vs. trabajo individual, y el diario 6, aunque muy resumido, refleja la situación de alumnos con bastante dificultad.

Los diarios, muy breves, nos han permitido detectar las dificultades de cada sesión. En la tabla 4.11 hemos resumido aspectos relevantes de las diferentes unidades:

Unidad	Aula 1	Aula 3
1	Trabajo en grupo con material y realización de las actividades sin dificultad	Gran entusiasmo. Les resultan atractivas y fáciles estas primeras actividades. Se trabaja de forma individual.
2	Primeras actividades sin dificultades. Dificultades con los diagramas de árbol Las sesiones duran más de media hora.	Dificultades con las representaciones. Muchos alumnos se sienten incapaces ante ciertas situaciones. Dificultades con el diagrama de árbol.
3	Trabajo en grupo sin dificultades. Siguen la metodología recomendada. Ningún alumno recurre al uso de material manipulativo. Las sesiones duran 45 minutos. Dos grupos utilizan las operaciones antes de lo gráfico.	No hay grandes dificultades, pero los progresos son dispares. Algunos alumnos hacen las operaciones antes de la resolución gráfica. Los alumnos de bajo rendimiento tienen dificultad con los diagramas y su sintaxis, sobre todo en la resta.
4	Primeras actividades sin problemas. Dificultades en los problemas de dividir asociados al producto cartesiano.	Los alumnos siguen resolviendo primero los problemas de forma mental o con las operaciones antes de los diagramas. Hay alumnos que tienen mucha dificultad con los problemas de restar y dividir. Aumenta el desinterés entre estos alumnos.
5	Sin dificultades resuelven los problemas	Sólo los alumnos “más despiertos” los resuelven sin dificultad.

Tabla 4.11

En resumen, observamos dos aulas muy diferentes. La primera, tiene un nivel más alto y los alumnos realizan el diseño sin grandes dificultades, aprendiendo el nuevo sistema de representación. Sin embargo, el tiempo previsto casi se ha duplicado.

El segundo grupo, que comienza con gran entusiasmo, empieza a mostrar apatía a la mitad del diseño. El profesor se queja de faltas continuas de asistencia, que dificultan la consecución de los objetivos propuestos y produce que muchos niños se vayan quedando atrás.

4.5.4 Instrucción en el grupo control

Los profesores del grupo control fueron invitados a participar en una investigación sobre resolución de problemas aritméticos, sin conocer ningún detalle sobre la misma, explicándoseles que se esperaba ver las mejoras que se producían en los alumnos después de haber dedicado un cierto tiempo a resolver problemas. La única novedad para ellos era la batería de problemas suministrada, que a diferencia de los libros de texto, contenía problemas de mayor variedad de acuerdo a la estructura semántica.

En la instrucción al grupo control, comprobamos que desconocían las categorías semánticas de los problemas y, en general, su idea sobre la resolución de problemas tenía el énfasis en resolver muchos problemas repetidos, utilizando de esta forma como único heurístico: la analogía.

4.5.4.1 Objetivos y metodología

El objetivo de este grupo era poder contrastar los resultados obtenidos con el grupo experimental, con el fin de ver si se producían diferencias entre ambos grupos; por ello, se les insistió que lo que debían hacer era resolver problemas con su metodología habitual, durante un periodo aproximado de 20 sesiones.

4.5.4.2 Batería de problemas aritméticos verbales

A los profesores de este grupo se les suministró una batería de problemas de una y dos operaciones (los mismos que realizaban los alumnos del grupo experimental), pero sin ningún tipo de clasificación semántica.

La construcción de esta batería comenzó en el curso 1984 - 85 en el Proyecto de Innovación ya mencionado. El trabajo tuvo varias fases. En primer lugar, recopilamos los problemas de los libros de texto. De esta colección se hizo una selección, cuyo criterio de eliminación fue con respecto a la redacción (problemas mal redactados o confusos) y con respecto al contenido (problemas no reales, problemas sexistas o relacionados con temas militares). Estos problemas se dividieron según la magnitud de las cantidades o la dificultad de las operaciones, en problemas aritméticos para Ciclo Inicial y problemas para Ciclo Medio.

En una segunda fase se clasificaron por las categorías semánticas, y es aquí, donde comprobamos que los problemas no aparecían de forma equitativa en todas las categorías semánticas y tuvimos que inventar nuevos problemas para equilibrar los distintos grupos.

De esta colección final, extrajimos la batería que suministramos a los profesores del grupo control, calculando aproximadamente cuantos problemas podían desarrollar en el periodo señalado, y procurando que en ella aparecieran problemas de todas las categorías, pero sin estar éstas señaladas.

4.6 El estudio de un aula

Una vez realizado el estudio en el gran grupo es el didacta el que va a desarrollar el mismo diseño de instrucción en un aula. El objetivo de esta fase, que es fundamentalmente de tipo cualitativo, es confirmar los resultados anteriores, poder observar con detalle el desarrollo del diseño, así como las peculiaridades de cada niño.

En esta fase, el didacta asume los papeles de profesor, y desarrolla el diseño en el aula, y de investigador; por ello, no es posible simultanear una observación rigurosa, que posiblemente nos hubiera permitido hacer nuevos análisis en el aula, sino que solamente se pudo obtener una reflexión global sobre el diseño, las dificultades de los niños y sus ritmos de aprendizaje.

Esta fase permitió también realizar una mejor selección de los niños a entrevistar, al tiempo que éstos al tener mayor familiaridad con el investigador, se mostraron más abiertos y menos cohibidos durante las entrevistas.

4.6.1 El diseño experimental

Esta fase es de carácter cualitativo, aunque administramos a los niños los mismos instrumentos de la fase anterior, esto es: pretest-postest y escalas de actitudes. Por ello, se evaluará mediante observaciones directas y a través del análisis de las actividades de los alumnos.

4.6.2 Los sujetos

Elegimos como población el curso intermedio de los tres anteriores, esto es 4º de EGB (en este momento, Educación Primaria).

La población está formada por 24 alumnos (12 niños y 12 niñas) del Segundo Nivel del Segundo Ciclo de Educación Primaria del Colegio Público Isabel la Católica de Santa Cruz de Tenerife.

Estos alumnos tienen edades comprendidas entre los 9 y 11 años, con una media de 9.8 años. El Colegio es público y pertenece a un entorno urbano de clase media-baja. Hay dos niños que presentan problemas de retraso escolar, pero sin ningún tipo de deficiencias psíquicas ni físicas.

4.6.3 Administración del DIRPA

La administración del diseño sigue las mismas pautas de los profesores del estudio de grupos, con el objeto de poder comparar y observar todos los aspectos del mismo.

4.6.3.1 Objetivos y metodología

Los objetivos del diseño son dos: como elemento de instrucción: el aprendizaje del modelo de competencias, ya señalado, y como instrumento de evaluación del mismo. La metodología usada es la misma que en el estudio de grupos.

4.6.3.2 Descripción y valoración

El diseño se desarrolló durante los meses de Marzo, Abril y Mayo de 1994. A pesar de ser fundamentalmente un estudio cualitativo, se les administró los mismos tests con tres propósitos: poder establecer una comparación con los resultados del estudio de grupo, evaluar de forma cualitativa los instrumentos de medida, y como elemento para seleccionar a los niños que iban a ser entrevistados. Además, se les pasó una encuesta para valorar el diseño de instrucción y la aceptación o rechazo del nuevo sistema de representación y resolución.

Durante el diseño observamos dos aspectos fundamentalmente:

- el aprendizaje del nuevo sistema de representación,
- las diferencias y dificultades que presentaban los niños.

Valoración del diseño y del SRVG por los alumnos:

Para conocer su impresión acerca del DIRPA y del SRVG, les pasamos la siguiente encuesta:

1. ¿Te gusta el lenguaje de los diagramas?
2. ¿Entendiste los diagramas?
3. ¿Crees que si los trabajases más, te servirían para comprender mejor los problemas?
4. Rodea con un círculo el grupo con el que te identificas:
    1. Me gusta resolver los problemas sólo con las operaciones aritméticas.
    2. Puedo resolver el problema con la misma facilidad haciendo el diagrama o con las operaciones.

3. Me gusta resolver los problemas sólo con los diagramas.

5. ¿Cuáles son tus críticas a la experiencia que hemos realizado?

La mayor parte de los alumnos (18) muestra una reacción afectiva positiva hacia la resolución gráfica y aunque cerca de la mitad (9) reconocen que no los entendieron bien, piensan que trabajándolos más, les ayudaría a comprender mejor los problemas.

Al pedirles que se identifiquen con uno de los grupos, encontramos que

Grupo 1 (preferencia por el SRVG): 2

Grupo 2 (igualdad entre ambos): 7

Grupo 3 (preferencia por el SA): 12

No contestan: 3

El grupo 1 estaba formado por dos niños con una componente gráfica muy desarrollada. El grupo 2 tiene niños con habilidades media y alta para las Matemáticas, al igual que el grupo 3, en el cual están los niños con mayores dificultades.

La valoración del diseño fue, en general muy positiva: *me parece fácil, me gustó mucho, una forma nueva de resolver problemas,* son algunas de las expresiones que utilizaron, pero también hubo tres que afirmaron *son un poco rollo, los diagramas son muy aburridos, no estuvo mal pero nos quitó tiempo de educación artística.*

Valoración del diseño por el didacta:

Creemos que el aprendizaje del modelo de competencias puede ayudar a los niños a desarrollar habilidades de tipo metacognitivo. Los alumnos carecen de herramientas para resolver los problemas (estrategias) y no se cuestionan el control de su propio desempeño. Por otra parte, la utilización de un sistema de representación visual-geométrico, amplía la comprensión del significado de las distintas operaciones y ayuda a alumnos con dificultades o bien con preferencias sobre este tipo de representación. Asimilaron con gran rapidez la sintaxis y la semántica de este nuevo sistema en los problemas de sumar y de multiplicar, pero presentaron mayores dificultades con los de restar y dividir.

4.7 MÉTODOS DE RECOGIDA DE DATOS

Los datos que hemos recogido son tanto cuantitativos como cualitativos, con dos tipos de sujetos: alumnos y profesores. En los alumnos obtenemos datos de dos grupos grandes: experimental y control, de un aula y de un grupo de alumnos seleccionados. Entre los profesores tenemos: los del grupo experimental y los del grupo control. Por otra parte, la construcción de los propios instrumentos de medida, las baterías de problemas y el propio diseño de instrucción fue ensayado en otros grupos de alumnos y obtuvimos las opiniones de sus profesores respectivos.

A modo de resumen general, podemos señalar como cuatro, los instrumentos más significativos que hemos usado para medir las distintas variables de la investigación:

<u>En el estudio cuantitativo:</u>

* Un pretest-postest de problemas para valorar el rendimiento en resolución de problemas.
* Dos escalas para medir las actitudes de los alumnos hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas.

<u>En el estudio cualitativo:</u>

* Protocolos para las entrevistas con los alumnos durante la resolución de problemas.
* Protocolos cerrados para las entrevistas con los profesores.

El proceso seguido en ellos ha sido el siguiente:

* Concreción de los aspectos que queríamos evaluar.
* Construcción del instrumento propiamente dicho.
* Validez y fiabilidad del mismo.

De forma esquemática, indicamos cuales son todos los instrumentos que hemos utilizado y en qué fase:

*En el estudio de grupos:

Para los problemas: Pretest-postest y carpetas.

Para las actitudes: escalas.

Datos generales: cuestionario y datos suministrados por los profesores.

* En el estudio de un aula:

Para los problemas: Pretest-postest, carpetas, fichas-control.

Para las actitudes: escalas

Datos generales: cuestionario y datos suministrados por los profesores.

Para la valoración del diseño y del SRVG: una encuesta.

* Entrevistas:

Alumnos: Resolución de problemas, invención, ejecución de las operaciones, actitudes y emociones.

Profesores: Actitudes, creencias, estilos de enseñanza, datos generales y modificaciones introducidas en su toma de decisiones.

4.7.1 El paquete estadístico SYSTAT

La elección de este paquete estadístico fue motivada, pues junto a su sencillez de uso frente a los tres grandes paquetes profesionales (SAS, SPSS Y BMDP), nos ofrecía los análisis estadísticos que necesitábamos.

Su autor es Leland Wilkinson, experto estadístico que desarrolló las rutinas básicas del programa durante la década de los 70 y creó a comienzos de los 80 la sociedad Systat Inc. con sede en Evanston (Illinois).

Utilizamos los módulos de la versión 5.0 y el módulo opcional TESTAT.

4.8 DISEÑO DEL PRETEST-POSTEST DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS

El objetivo fundamental de este instrumento era valorar los cambios producidos por la implementación del diseño. Queríamos saber si había una mejora en la resolución de problemas y si en el postest, los alumnos utilizaban el nuevo sistema de representación visual-geométrico.

Al mismo tiempo, queríamos valorar la ejecución de las operaciones y la invención de problemas a partir de una operación dada.

Para analizar los aspectos reseñados, se confeccionó una batería de problemas y operaciones, que tanto en el pretest como en el postest, contenía:

1.- Problemas para resolver, en los cuales se les pedía que explicaran lo que hacían o dibujaran la situación propuesta.

2.- Operaciones para ejecutar.

3.- Inventar problemas que se resolvieran con una operación dada.

Se administró a los alumnos un pretest y un postest, que contenían cada uno 19 problemas de una o dos operaciones, 6 operaciones para ejecutar y para cada una de las cuales debían inventar el enunciado de un problema resoluble con ella.

4.8.1 Construcción de los ítems

Hicimos una primera selección de problemas utilizando la batería que ya habíamos construido, eligiendo tres de cada categoría semántica de la operación y tres de cada combinación de dos operaciones, obteniendo un total de 75 problemas. De éstos, se seleccionaron dos grupos de 30 problemas similares (20 de una operación y 10 de dos operaciones). Estos problemas se pasaron a tres grupos de alumnos, que no iban a participar posteriormente, de 3º, 4º y 5º Cursos del Colegio donde trabajaban los Profesores de EGB de nuestro grupo de investigación. Con esta prueba, se pudo analizar el comportamiento de los alumnos frente a los problemas, eliminándose aquellos que fueron resueltos en un porcentaje superior al 90% o inferior al 10%.

Los problemas fueron resueltos también por el propio grupo de investigación, actuando como jueces. Con ambos resultados se elaboró el cuestionario definitivo, quedando en 19 problemas (14 de una operación y 5 de dos operaciones). Los problemas eran: 4 de sumar, 4 de restar, 3 de multiplicar, 3 de dividir y 5 de dos operaciones.

Las variables que controlamos en estos problemas fueron, utilizando la taxonomía de Kulm (1984), aquellas que influyen en la comprensión del problema.

Variables sintácticas:

Controlamos la longitud del enunciado, la complejidad gramatical y la secuencia de los datos. Todos los problemas siguen el formato estándar: las primeras frases exponen los datos y el problema termina con la pregunta sobre el dato que hay que calcular.

Variables de contenido y contexto:

Todos los términos utilizados pertenecen al lenguaje usual.

* La magnitud de los datos es inferior al millar; las multiplicaciones y las divisiones son sólo por una cifra.
* Los datos cuantitativos aparecen siempre con cifras, a excepción de un problema en el que hicimos aparecer las palabras duros-docenas (pretest-postest), con el objetivo de valorar su incidencia, (problema nº 10).
* En un problema utilizamos las palabras retirar-comer, que generalmente son palabras claves de 'restar' en un problema de sumar, (problema nº 1).
* Los términos 'más' y 'menos' que aparecen en los problemas de tipo comparación, coinciden con el uso de la operación suma o resta, respectivamente, (problemas nº 3 y 17).
* En los problemas de multiplicar (tipo comparar) se utilizó las palabras 'veces más', (problema nº 4).

Los contextos son también familiares, abundando los referidos a compras, precios, etc.

Variables estructurales:

En los problemas aritméticos, está suficientemente demostrada la importancia de las variables asociadas a la estructura semántica de los problemas. En el diseño se contemplan las diferentes categorías semánticas de los problemas de una operación; sin embargo, en estos tests era imposible contemplar todas las categorías semánticas de los problemas aritméticos. Optamos en los problemas aditivos, por repetir algunas con dificultades distintas; y en los problemas de multiplicar y dividir fue contemplado un ejemplo de las categorías según la clasificación de Nesher. En los problemas de dos operaciones, sólo tuvimos en cuenta el conjugar distintas operaciones.

El pretest-postest se completó con 6 operaciones a ejecutar, con las cuales debían redactar un enunciado de un problema. Los tests definitivos están en el Anexo (pp. 113-124).

4.8.2 Fiabilidad y validez de los tests

Un test debe reunir dos características esenciales: fiabilidad y validez.

La fiabilidad es el grado de consistencia del instrumento de medida. Se mide a través de un coeficiente de correlación y admite diversas acepciones.

Los métodos más usuales son: test-retest, formas paralelas, dos mitades y consistencia interna. Entre ellos hemos elegido el de consistencia interna, que es un análisis estadístico que utiliza el coeficiente alpha de Cronbach.

La validez, en términos de Garrett (1983), '*se refiere al grado en que un test o un conjunto de operaciones mide lo que dice medir'.*

Martínez (1995), siguiendo el esquema tradicional, diferencia entre:

a) Validez de contenido, que expresa el grado en que el contenido de un test constituye una muestra representativa de los elementos del constructo que pretende evaluar.

b)Validez relativa a un criterio: expresa las relaciones del constructo con otros constructos, operacionalizada normalmente en términos de correlaciones y regresiones del test con otras medidas.

c) Validez de constructo: cuando el usuario del test desea hacer inferencias acerca de conductas o atributos que pueden agruparse bajo la etiqueta de un constructo particular. Integra toda la evidencia que permite la interpretación de las puntuaciones de los tests.

Para estudiar **la fiabilidad,** utilizamos el programa TESTAT del paquete SYSTAT, y obtuvimos los siguientes resultados:

	Pretest (N=157)	Postest (N=157)
Coeficiente Spearman-Brown	.895	.819
Coeficiente Guttman (rulon)	.894	.819
Coeficiente Alpha	.867	.767

Tabla 4.12

Los resultados, basados en el concepto de consistencia interna, próximos a 0.9 nos permiten asegurar la fiabilidad de estos tests.

La validez de contenido está asegurada, ya que el universo en el que nos movemos es la resolución de problemas aritméticos. Estos problemas han sido seleccionados por un grupo de expertos, y el propio grupo de profesores con los que se ha desarrollado la investigación, ha garantizado que el contenido del instrumento es relevante y representativo de dicho universo.

La validez referida a un criterio se ha calculado tomando como tal las notas del profesor para cada alumno con respecto a la resolución de problemas aritméticos.

En la tabla 4.13 mostramos la matriz de correlación de Pearson. El coeficiente obtenido ha sido r = .5 para el pretest y r = .4 para el postest, que se puede considerar válido (Downie y Heath, 1975, indican que *'los coeficientes de validez tienden a ser mucho menores que los de fiabilidad"*. Un examen de los estudios realizados durante los últimos años muestra que los coeficientes de validez están comprendidos en el intervalo 0.4-0.6. (Arnal y Arnal, 1987 admiten I.V.≥ 0.2 como válido). Las correlaciones obtenidas son, pues, significativas. Además, hay que tener en cuenta el alto número de sujetos eliminados por datos ausentes.

	AC	PRET	POST	NOTP
AC	1.000			
PRET	0.258	1.000		
POST	0.184	0.689	1.000	
NOTP	0.330	0.505	0.430	1.000

Tabla 4.13 Matriz de correlación de Pearson

(Número observaciones:132; AC: puntuación en la actitud; PRET: Nota obtenida en el pretest; POST: nota obtenida en el postest; NOTP: calificación de cada alumno dada por el profesor).

4.8.3 Administración de los tests

El pretest fue administrado justo antes de empezar el diseño en dos sesiones de una hora para evitar efectos asociados al cansancio. En la primera prueba resolvieron nueve problemas, una operación de sumar, restar y dividir y la invención de tres problemas para estas operaciones. La segunda parte consistió en el resto de los problemas, de las operaciones y los problemas a inventar con ellas.

El postest se les pasó inmediatamente al terminar el diseño de instrucción. En este momento se les explicó que podían resolver el problema utilizando el sistema de representación gráfico, el aritmético o ambos si así lo preferían.

4.9 ESCALA DE ACTITUDES

El desarrollo de una actitud positiva hacia las distintas materias de la educación, es un tema que está cobrando gran importancia actualmente. Nuestro objetivo era valorar cuál era la actitud de los alumnos hacia las Matemáticas, ver si existían diferencias hacia la resolución de problemas y si ésta última cambiaba después de desarrollar el diseño de instrucción.

El primer problema que tuvimos que afrontar fue la definición del término actitud, para, en base a ella, poder elegir el instrumento de medida más adecuado.

A partir de la idea de Hart (1989), construimos una definición multidimensional de actitud, como el resultado de las siguientes componentes:

* componente afectiva, que engloba los sentimientos del alumno hacia las Matemáticas.
* componente comportamental, que expresa el comportamiento del estudiante hacia la materia.
* componente contextual, que recoge la opinión acerca de las Matemáticas de las personas que le rodean.
* componente cognoscitiva, que refleja la propia opinión sobre esta materia.
* componente de implicación, que determina lo que el alumno está dispuesto a hacer en clases de Matemáticas.
* componente de creencias sobre las Matemáticas.
* componente de creencias sobre sí mismo con respecto a esta materia.

Una amplia variedad de instrumentos han sido usados en las investigaciones para medir las actitudes en general o las actitudes hacia las matemáticas en particular. Allport (1935) escribió: "*las actitudes hoy son medidas más exitosamente que lo que son definidas"* (citado por Kulm, 1980).

Kulm (1980) señala que Kiesler, Collins y Miller (1969) reúnen en 5 categorías los instrumentos utilizados para medir las actitudes: Escalas (Thurstone, Likert en mayor cantidad y diferencial semántico), observaciones de conducta, reacción a estímulos estructurados (como fotografías, dibujos, escenarios u otras situaciones controladas), ejecución de tareas (a partir de una tarea que ejecuta el estudiante podría inferirse la naturaleza de la actitud del sujeto hacia ella) y reacciones fisiológicas.

Leder (1985, 1992) presenta los siguientes instrumentos de medida como los más utilizados en los trabajos presentados a los últimos PME: escalas de Thurstone, escalas de Likert, escalas de Guttman, escalas de diferencial semántico, inventarios y listados, orden de preferencias, técnicas proyectivas, aunque en la actualidad las preferencias se inclinan por el procedimiento Likert (Leder, 1993), ya que éste permite obtener con relativa facilidad escalas de actitudes con altos índices de validez y fiabilidad. También se está utilizando observaciones clínicas y antropológicas y medidas fisiológicas.

Elegimos como instrumento de medida una escala de tipo Likert, por ser como hemos visto uno de los métodos más consolidado, por sus múltiples ventajas, tales como que permiten el anonimato, se puede pasar a un número grande de niños, los datos obtenidos son fácilmente analizables y pueden ser administradas por terceras personas.

Hicimos una revisión de las escalas existentes para medir la actitud, con el fin de buscar un instrumento científicamente construido, que respondiera a nuestros objetivos y que hubiera sido desarrollado en una población con características similares a la nuestra.

A partir de Aiken (1976) y otros, Gairín (1986) construyó una escala (con coeficiente Alpha de correlación de .84, coeficiente bastante alto para medidas de actitudes) que la administró a niños españoles de edades que abarcaban a la de nuestra población. A partir de ella, realizando algunas modificaciones y añadiendo algunos ítems, construimos dos escalas paralelas para medir la actitud hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas.

Estas escalas de tipo Likert admiten tres posibles respuestas: de acuerdo, sin opinión y en desacuerdo, donde cada sujeto obtiene como puntuación global la suma de los rangos otorgados a cada elemento, siendo codificadas con la máxima puntuación las respuestas más acordes con una actitud positiva. Consta de sentencias afirmativas y negativas.

4.9.1 Construcción de la escala

Así, partiendo de la escala de Gairín, que contenía 22 ítems, referidos a aspectos afectivos, cognoscitivos, comportamental, de creencias sobre sí mismo y de implicación, añadimos 2 ítems referidos a aspectos contextuales y 1 ítem con el objetivo de estudiar las creencias sobre las Matemáticas. Sobre esta escala se hicieron las siguientes modificaciones:

* Se elimina el ítem 3 de Gairín: "Procuro guardar bien mi libro de Matemáticas" por considerar que no había un homólogo relativo a la resolución de problemas.
* Se cambia la redacción del ítem 21.

Esta escala fue presentada al grupo de investigación como “grupo de expertos” para que hicieran un estudio crítico de la misma, y a un grupo de alumnos de 3º, 4º y 5º Cursos de EGB. De la misma forma que en los tests de problemas, se eliminaron aquellos ítems que puntuaron menos de un 10% y más de un 90% .

La escala queda definitivamente con 24 ítems.

A partir de este escala elaboramos otra paralela, pero dirigida a la resolución de problemas. Las llamaremos AC y ACP y se encuentran en el Anexo (p. 125 y 128).

Así, los 24 ítems quedan distribuidos de la siguiente forma:

Componente afectiva: ítems 6, 7, 8, 11, 15 y 19.

Componente comportamental: ítems 2, 4, 9 13 y 14.

Componente contextual: 23 y 24.

Componente de implicación: 16 y 18.

Componente cognoscitiva sobre las Matemáticas: 10, 12, 20 y 22.

Componente de creencias acerca de las Matemáticas: 3.

Componente de creencias sobre sí mismo: 1, 5, 17 y 21.

4.9.2 Fiabilidad y validez del instrumento

Mediante el programa TESTAT, analizamos la fiabilidad de la escala de la actitud hacia las matemáticas: el coeficiente Alpha-all items es .79 y el de Spearman-Brown .73.

	TOTAL	TOTAL/ 24	ODD	EVEN
TEST SCORE STATISTICS				
MEAN	36.472	1.520	17.873	18.599
STD DEV	6.981	0.291	3.935	3.935
STD ERR	0.415	0.017	0.234	0.234
MAXIMUM	48.000	2.000	24.000	24.000
MINIMUM	8.000	0.333	5.000	3.000
N CASES	284	284	284	284
INTERNAL CONSISTENCY DATA				
SPLIT-HALF CORRELATION			.574	
SPEARMAN-BROWN COEFFICIENT			.729	
GUTTMAN (RULON) COEFFICIENT			.729	
COEFFICIENT ALPHA - ALL ITEMS			.787	
COEFFICIENT ALPHA - ODD ITEMS			.622	
COEFFICIENT ALPHA - EVEN ITEMS			.716	

Tabla 4.14

Como se puede comprobar, ambos son elevados, lo que nos indica que los ítems presentan una elevada congruencia para medir entre sí el mismo constructo. Por regla general, los coeficientes de fiabilidad deben estar por encima de .90; sin embargo, en escalas de actitudes, es generalmente aceptado que la dificultad inherente a la definición de los constructos en este campo supone una rebaja sustancial de la fiabilidad de los instrumentos de medida.

Aceptamos, pues, que la fiabilidad obtenida se encuentra dentro de los márgenes aceptables.

En el Anexo (p. 202) podemos ver para cada ítem la media, la desviación típica, la correlación item-total y el índice de fiabilidad. La correlación item-total nos informa en qué medida el ítem mide lo mismo que el test total. En general, esta correlación debe estar por encima .20, teniendo en cuenta que sólo dos ítems están por debajo de este valor y con una puntuación de 0.16 y 0.17, consideramos que el instrumento es aceptable.

La validez de contenido está bien asegurada, ya que se partió de un instrumento ya validado y además nos apoyamos en el juicio experto de otros investigadores en el mismo tema, que no participaron en su construcción.

En la tabla 4.13, hemos obtenido un coeficiente de correlación de .33 con las notas del profesor, lo que nos mide la validez referida a un criterio.

Por último, en cuanto a la validez de constructo, se realizó a través de las soluciones factoriales empleando el ANÁLISIS FACTORIAL COMÚN (Cuadras, 1981, Marascuilo y Levin, 1983) del módulo Factor del SYSTAT con rotación VARIMAX (Anexo p. 208). Con este análisis se obtuvo una solución de tres factores en cada escala con valores propios superiores a 1 y explican un 26% de la varianza total de la matriz.

Hemos obtenido que los distintos ítems se agrupan en torno a tres constructos:

Factor I: 2,3,4,6,7,8,9,11,13,14,15,16,18,19,23,24.

Factor II: 10,12,20,22.

Factor III: 1,5,17,21.

El Factor I explica un porcentaje de varianza del 14.51% y reúne cinco componentes, que responden a las siguientes preguntas:

Componente afectiva: ¿Cómo te encuentras en clase de Matemáticas o con las Matemáticas?

Componente comportamental: ¿Qué haces o qué harías, en relación con las Matemáticas o con las clases de Matemáticas?

Componente de implicación: ¿Cómo vas a actuar?

Componente contextual: ¿Qué piensan los que te rodean sobre las Matemáticas?

Componente de creencias: ¿Qué crees acerca de las Matemáticas?

El Factor II explica un 6.64% de la varianza total, y refleja

Componente cognoscitiva: ¿Qué opinas sobre la importancia o el valor de las Matemáticas en la sociedad y en relación con su uso?

El Factor III con un porcentaje de varianza explicado del 4.81%, responde a

Componente creencias sobre sí mismo: ¿Cómo te sientes con respecto al conocimiento de las Matemáticas?

Realizamos el mismo proceso con la segunda escala: actitud hacia la resolución de problemas.

En el Anexo (p. 205) podemos ver el estudio del análisis de los ítems. Los coeficientes de fiabilidad obtenidos son: el coeficiente Alpha-all ítems es de .84 y el de Spearman-Brown .77.

TEST SCORE STATISTICS				
	TOTAL	TOTAL/ 24	ODD	EVEN
MEAN	36.733	1.531	17.903	18.830
STD DEV	7.951	0.331	4.149	4.669
STD ERR	0.621	0.026	0.324	0.365
MAXIMUM	48.000	2.000	24.000	24.000
MINIMUM	11.000	0.458	6.000	2.000
N CASES	165	165	165	165
INTERNAL CONSISTENCY DATA				
SPLIT-HALF CORRELATION			.625	
SPEARMAN-BROWN COEFFICIENT			.769	
GUTTMAN (RULON) COEFFICIENT			.766	
COEFFICIENT ALPHA - ALL ITEMS			.839	
COEFFICIENT ALPHA - ODD ITEMS			.673	
COEFFICIENT ALPHA - EVEN ITEMS			.800	

Tabla 4.15

En esta escala sólo un ítem (nº 23) presenta una correlación de .13, por tanto podemos dar por válida también esta escala.

En la matriz de correlación de Pearson (tabla 4.16) hemos intentado de nuevo realizar la correlación entre las puntuaciones de la escala y la calificación del profesor, obteniendo resultados similares a los de la escala anterior.

	ACP	PRET	POST	NOTP
ACP	1.000			
PRET	0.223	1.000		
POST	0.150	0.761	1.000	
NOTP	0.353	0.484	0.332	1.000

Tabla 4.16: Matriz de correlación de Pearson

Número observaciones: 69; ACP: puntuación en la actitud hacia la resolución de problemas; PRET: Nota obtenida en el pretest; POST: nota obtenida en el postest; NOTP: calificación de cada alumno dada por el profesor.

El estudio factorial con tres factores presenta leves diferencias con el anterior, quedando algún ítem fuera del grupo que le habíamos asignado:

Factor I: 2,4,6,7,8,9,11,13,14,16,18,19,23.

Factor II: 10,12,20,22.

Factor III: 1,3,5,15,17,21,24.

En este caso, el porcentaje de varianza total explicada es del 33.6% (Anexo,

p. 218).

Una vez realizados estos estudios, creemos que estas escalas tienen la validez y fiabilidad necesarias para que su utilización sea posible.

4.9.3 Administración de la escala

Los profesores fueron los encargados de pasarlas, pidiéndoseles que si daban algún tipo de explicaciones sobre los ítems, tomaran todas las precauciones necesarias para no influir en el sentido de sus respuestas. No había límite de tiempo, pero invirtieron, por término medio, una media hora.

Antes de empezar el desarrollo del diseño de instrucción, se les administra la escala de actitudes hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas (Febrero, 1993) y una vez terminado el diseño se les vuelve a administrar la escala sobre actitud hacia la resolución de problemas (Mayo, 1993).

En el aula instruida por el didacta se sigue el mismo proceso.

4.10 ENTREVISTAS A LOS ALUMNOS

Una vez hecho el estudio cuantitativo de la resolución de problemas aritméticos, es necesario un estudio cualitativo en el cual podamos indagar sobre el proceso que siguen los niños en dicha resolución, detectar las habilidades que ponen en juego y el uso del nuevo sistema de representación (SRVG).

"Cuando se busca comprender el comportamiento de los sujetos implicados en un proceso, intentando captar el propio proceso en su totalidad, las interacciones y significados entre los sujetos entre sí y de los sujetos con el medio ambiental, sin dejar de lado variables imprevistas que en algún momento del desarrollo de la investigación resultan incómodas o parezcan revestir escaso valor, lo más apropiado será partir de un enfoque cualitativo". (Álvarez, 1986).

En los últimos años se ha producido un fuerte énfasis en la utilización de métodos de análisis de protocolos, a partir de entrevistas, pensamiento en voz alta, introspección, diálogo entre varios alumnos, etc. De todos ellos, encontramos que la entrevista era el mejor que se podía acercar para lograr nuestro objetivo de analizar las habilidades de los alumnos.

Una entrevista de investigación, como afirman Cohen y Manion (1990, p.378) es *"un diálogo iniciado por el entrevistador con el propósito específico de obtener información relevante para la investigación y enfocado por él sobre el contenido especificado... Puede servir para tres fines: primero como medio principal de recogida de información relativa a los objetivos, segundo: para probar hipótesis y tercero: como conjunción de otros métodos."*

Ginsburg y otros (1983) afirman que *"la entrevista tiene como fin estudiar procesos, no respuestas aisladas e identificar los mecanismos simbólicos internos que están debajo de la resolución de un problema"*.

Así, a partir de "*estos informes verbales, los investigadores extraen los significados de las expresiones, obtienen afirmaciones sobre el conocimiento y las operaciones que les atribuyen las personas, construyendo una red de inferencias sugeridas por dichas atribuciones*" (Newell y Simon, 1972).

La clasificación de los tipos de entrevistas presenta algunas variantes según los autores. Ginsburg y otros (1983) clasifican las entrevistas en: pensamiento en voz alta, entrevista clínica y entrevista clínica revisada, y señalan que muchos estudios utilizan métodos mixtos, que combinan varios de los anteriores.

La clasificación de Cohen y Manion (1990), similar a la de Bisquerra (1989), presenta cuatro tipos de entrevistas:

1) Entrevista estructurada, que sigue un esquema previo y, por tanto, el contenido y los procedimientos se organizan por anticipado.
2) Entrevista no estructurada: el entrevistador puede modificar la secuencia de las preguntas, explicarlas o añadir información en función de las respuestas o demandas del entrevistado.
3) Entrevista no directiva: el entrevistador toma un rol subordinado, sus orígenes están en Freud y Carl Rogers.
4) Entrevista dirigida, que consiste en una forma especial de entrevista no directiva

con cierto control.

A estos grupos, Bisquerra (1989) añade un quinto grupo:

5) Entrevista informal, donde el entrevistador tiene unas claves, pero las utiliza siguiendo una conversación informal sin ningún cuestionario previo; es, por lo tanto, abierta y no estructurada.

Finalmente, Romberg (1992) habla de entrevistas estructuradas y entrevistas clínicas, como métodos de investigación en educación matemática.

La planificación de la entrevista, según Bisquerra (1989), debe seguir los siguientes pasos: 1) especificar las variables objeto de estudio, 2) decidir el formato de las preguntas y el modo de las respuestas, 3) especificar si se trata de hechos, opiniones o actitudes, y 4) construir el protocolo de dichas entrevistas.

4.10.1 Descripción de las entrevistas

En nuestro trabajo nos hemos inclinado por utilizar un método mixto, en el sentido de Ginsburg y otros (1983): el entrevistador pide al niño que exprese todo lo que va haciendo y pensando (pensamiento en voz alta), y para facilitar esta verbalización le va haciendo preguntas que le ayuden a expresarse y crearle interrogantes de tipo metacognitivo. Fueron menos formales en terminología de Cohen y Manion (1990) o Bisquerra (1989), o entrevistas clínicas, según Romberg (1992).

Las entrevistas tienen como soporte la resolución de problemas aritméticos verbales, previamente seleccionados.

<u>Las variables objeto de estudio:</u>

Las variables objeto de nuestro estudio son **las habilidades** que ponen en juego los niños al enfrentarse con un problema y **el uso** que hacen de ambos sistemas de representación.

Podemos resumir los objetivos perseguidos de la forma siguiente:

1) Estudiar las habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas de estos alumnos.

2) Análisis del proceso que siguen al resolver el problema, tratando de ver si han interiorizado el modelo de competencias que se había trabajado o, por el contrario, poseen ya otro modelo.
3) Uso, dificultades y preferencias por la utilización del sistema de representación visual-geométrico.
4) Observar las diferencias por cursos y entre los alumnos de distinto rendimiento.
5) Estudiar las dificultades en los distintos tipos de problemas.
6) Analizar las dificultades al inventar un problema a partir de un diagrama.
7) Ver si existe relación entre el rendimiento, las preferencias dentro de las Matemáticas y su autoconfianza, y las actitudes de estos alumnos hacia las Matemáticas.

Las técnicas más comunes de obtención de datos a partir de las entrevistas, son:

Procedimientos utilizados en la década de los 70, como el de Lucas, Branca, Goldberg, Kantowski, Kellog y Smith (1979), incluyen una lista de situaciones específicas (codificadas) con las que hacen un análisis minucioso de la transcripción de la entrevista.

Schoenfeld (1985) realiza las entrevistas por parejas y para analizar los datos divide el protocolo en episodios, que temporaliza por medio de unas plantillas. Lawson-Rice (1987) analiza los episodios, pero sin codificación del tiempo.

Puig (1993) utiliza las técnicas de Schoenfeld, dividiendo el espacio de problemas en episodios y subepisodios.

Nosotros hemos optado por dividir la resolución de problemas en episodios, de acuerdo a las distintas fases del modelo de competencias propuesto, y en cada una de ellas ir identificando las habilidades que manifiestan.

4.10.2 Selección de los alumnos para las entrevistas

<u>Entrevistas para el estudio piloto</u>

Se eligieron los Colegios más próximos a nuestro Centro y que habían terminado completamente el diseño y de sus aulas se seleccionaron 12 niños en total, siendo de los siguientes cursos:

Colegio 1: 3 niños de 5º, Colegio 2: 3 niños de 5º y Colegio 3: 3 niños de 4º y 3 de 5º.

El criterio utilizado para elegir los niños fue el rendimiento en resolución de problemas, valorado teniendo en cuenta los resultados de los tests y la calificación del profesor. De cada colegio se procuró que hubiera algún niño que mostrara preferencia por el uso del SRVG, y para ello se estudiaron las carpetas, contando con la opinión del profesor.

En la siguiente tabla podemos ver el sexo y curso relacionados con su rendimiento académico:

	Rendimiento alto		R. medio		R. bajo	
Curso	5º	4º	5º	4º	5º	4º
Niño	1	1	0	-	3	-
Niña	2	-	3	1	-	1
Total	3	1	3	1	3	1

Tabla 4.17

<u>Entrevistas para el estudio definitivo</u>

Una vez acabada la instrucción en el aula por el didacta, se procedió a la selección de los niños a ser entrevistados. Este proceso se desarrolló utilizando los datos cuantitativos de los tests, actitudes y notas del profesor, con los cuales se realizó un análisis Cluster (Cuadras, 1981).

El análisis Cluster formó 9 grupos de niños, como podemos ver en la figura 4.4, donde presentamos el dendograma obtenido con la distancia euclídea y el método completo. Fijamos los Cluster con una distancia entre tres y cuatro y la elección del niño-niña de cada uno de estos grupos se hizo mediante la observación en el aula y el análisis de las carpetas, para garantizar la presencia de niños que hubieran comprendido el SRVG, y con el apoyo del profesor para tener en cuenta aspectos como timidez, capacidad de expresión oral, que pudieran afectar al desarrollo de las entrevistas.

Los niños seleccionados llevan los números 10, 18, 13, 5, 14, 22, 3, 24 y 12.

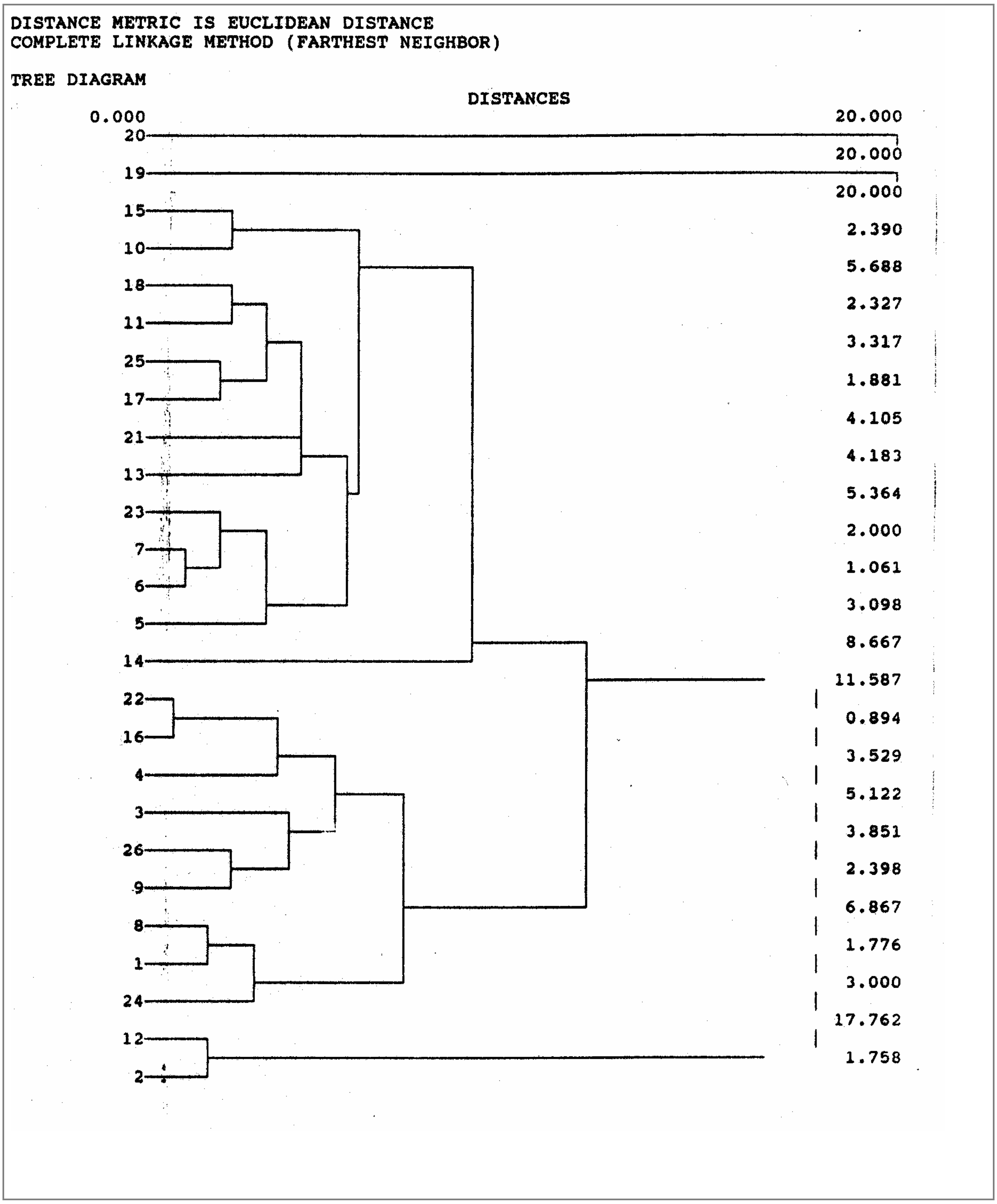


Figura 4.4: Análisis Cluster

4.10.3 Recursos utilizados en las entrevistas

Señalamos, a continuación, los recursos utilizados en las entrevistas: los problemas seleccionados y cómo se distribuyeron en las distintas sesiones, las modificaciones que se realizaron después de las entrevistas piloto, y la guía para el entrevistador, donde se concretaban las habilidades que se pretendían observar.

4.10.3.1 Elección de los problemas aritméticos y distribución por sesiones

Estudio piloto

Seleccionamos seis problemas: 4 de una operación y 2 de dos, para resolver en tres sesiones de aproximadamente media hora.

Al plantearnos la elección de los problemas, descartamos los problemas de sumar, ya que al haber dado porcentajes tan altos de éxito, se podían convertir en simples ejercicios que no nos permitirían analizar el proceso de resolución. Por ello decidimos utilizar dos problemas de restar, que nos permitieran ver cómo razonaban ante un esquema con una relación asimétrica (todo- parte excedida) y otro, con una relación simétrica (conocido el todo y una parte, hallar la otra parte). Así, optamos por uno de tipo comparar, que realizarían en la ficha-modelo, para analizar como se movían dentro del modelo de fases, y otro de tipo cambio, que resolvían en una hoja en blanco, para ver qué tipo de estrategia general tenían interiorizada. El problema de comparar presentaba la dificultad que el término comparativo no coincidía con la operación a ejecutar.

Los problemas de dividir correspondían a las categorías de agrupamiento y de comparar.

En la tabla 4.18 podemos ver las operaciones de los problemas elegidos. También se les pidió que inventaran el enunciado de dos problemas, a partir de unas cantidades expresadas mediante el sistema de representación visual-geométrico. Una era una situación aditiva y la otra sustractiva.

	Sumar	Restar	Multiplic	Dividir	2 operaciones
Estudio piloto	0	2	0	2	2 (+ : y - :)

Tabla 4.18

Estudio definitivo

En estas entrevistas aumentamos el número de problemas a ocho, siendo 5 de una operación y 3 de dos operaciones, ampliando a cuatro las sesiones con cada niño. Seguimos sin incorporar los problemas de sumar, pero sí incluimos uno de multiplicar del tipo comparar, tal como indica la tabla 4.19:

	Sumar	Restar	Multiplic	Dividir	2 operaciones
Estudio definitivo	0	2	1	2	3 (+ -; + : , - :)

Tabla 4.19

De las situaciones para inventar, nos limitamos a una sustractiva y se añadió un pequeño cuestionario sobre sus preferencias dentro de las Matemáticas y sentimientos hacia la resolución de problemas

Problemas seleccionados y distribución por sesiones:

Los problemas elegidos fueron los siguientes:

	Estudio piloto	Estudio definitivo
Primera sesión	1) Luis tiene 321 ptas y María 119 ptas. ¿Cuántas pesetas tiene Luis más que María? 2) Un vendedor de periódicos tenía en su kiosco 500 periódicos. Si a lo largo de la semana ha vendido 245, ¿cuántos le quedan? 0) Inventa un enunciado para los diagramas.	1) Luis tiene 321 ptas y María 119 ptas. ¿Cuántas pesetas tiene Luis más que María? 2) 6 atletas van a participar en una carrera de relevos de 636 metros, corriendo cada uno la misma distancia. ¿Cuántos metros corre cada uno? 0) Inventa un enunciado para el diagrama.

	Estudio piloto	Estudio definitivo
Segunda sesión	3) 6 atletas van a participar en una carrera de relevos de 636 metros, corriendo cada uno la misma distancia. ¿Cuántos metros corre cada uno? 4) Lucía ha ahorrado 62 ptas y su hermano menor la quinta parte. ¿Cuántas pesetas tiene su hermano?	3) Juan tiene 85 pesetas y se ha comprado una chocolatina que le costó 35 pesetas y unos caramelos que le costaron 25 pesetas. ¿Podrá comprarse un pito que le cuesta 20 pesetas? 4) Un colegio tiene 305 alumnos y otro el triple de alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene el segundo colegio? Preguntas sobre preferencias y actitudes: ¿Qué te gusta más hacer en Matemáticas: cálculos, geometría, resolución de problemas? ¿Te sientes seguro cuando resuelves problemas? ¿Qué es lo más difícil en un problema?
Tercera sesión	5) Un señor recorre en su coche por la mañana 120 km y por la tarde 62 km. Si gasta 6 pesetas por km, ¿cuánto gasta en un día? 6)En la clase hay 24 niños. Si compramos 275 globos para repartirlos y nos sobraron 35 globos, ¿cuántos cogió cada uno?	5) Un vendedor de periódicos tenía en su kiosco 500 periódicos. Si a lo largo de la semana ha vendido 245, ¿cuántos le quedan? 6) Un señor recorre en su coche por la mañana 84 km y por la tarde 62 km. Si gasta 6 pesetas por cada km que recorre, ¿cuánto gasta en un día?
Cuarta sesión		7) Lucía ha ahorrado 314 ptas y su hermano la mitad. ¿Cuántas pesetas tiene ahorradas su hermano? 8) En la clase hay 24 niños. Si compramos 275 globos para repartirlos y sobraron 35. ¿Cuántos cogió cada uno?

Tabla 4.20

Todas las entrevistas fueron videograbadas y, posteriormente, transcritas para ser analizadas.

4.10.3.2 Guía del entrevistador

Aunque, como hemos señalado, el entrevistador tenía libertad para dirigir la entrevista basándose en el proceso de solución que fuera siguiendo el alumno; se diseñó un guión clave para el mejor desarrollo de éstas.

Las entrevistas comenzaban con la lectura por parte del niño del problema. Le sugeríamos que lo hiciera en voz alta para observar su capacidad de lectura, pero se les respetaba cuando lo hacían en voz baja. Las posibles preguntas eran:

Lectura: ¿Lo entendiste bien?

Viñeta: ¿Por qué has dibujado eso?

Datos: ¿Necesitas volver a leer el problema?

¿Dónde lo resuelves primero: en el SRVG o en el SA?

Representación en el SRVG: ¿Sabes resolver el problema utilizando este sistema de representación?

¿Te resulta fácil resolver el problema utilizando este sistema?

Representación en el SA: ¿Por qué has elegido esa operación?

Soluciones: ¿Coinciden las respuestas?

¿Qué sistema de representación y resolución prefieres? ¿Por qué?

¿Te parece útil resolverlo en el SRVG?

Comprobación de la solución: ¿Crees que la solución es correcta?

4.10.3.3 Categorización de las habilidades

Para facilitar el análisis de los protocolos de las entrevistas, hemos confeccionado la siguiente hoja control, de acuerdo con los objetivos propuestos.

Presentaremos los resultados en tres grandes grupos: problemas de estructura aditiva, problemas de estructura multiplicativa y problemas de dos operaciones. Los aspectos relacionados con la invención de problemas y con la actitud, los reseñaremos en otros apartados.

Las habilidades a observar son categorizadas como indicamos a continuación:

HABILIDADES COGNITIVAS:

Lectura:
C1: ¿Lee correctamente y comprende lo que lee?
Representación del contenido:
C2: ¿La viñeta es esquemática y representa el contenido del problema?
Escritura de los datos:
C3: ¿Escribe escuetamente los datos?
Representación, ejecución y resolución en el SRVG:
C4: ¿Sabe comunicar las cantidades en este sistema?
C5: ¿Conoce y aplica la sintaxis del SRVG?
Representación, ejecución y resolución en el SA:
C6: ¿Elige la operación adecuada?
C7: ¿Ejecuta correctamente el algoritmo?

HABILIDADES HEURÍSTICAS:

H1: ¿Utiliza el modelo de competencias instruido?
H2: ¿Utiliza alguna estrategia general?
H3: ¿Se apoya en algún tipo de heurísticos? ¿Cuál?
H4: ¿Usa el esquema partes-todo?
H5: ¿Se apoya en el SRVG para utilizar el SA?(1) ó ¿Se apoya en el SA para utilizar el SRVG? (2)

HABILIDADES METACOGNITIVAS:

Planificación y uso de estrategias eficaces.
M1: ¿Se mueve por el ordinograma mediante algún tipo de planificación?
M2: ¿Predice la igualdad de las soluciones?
M3: ¿Verifica la corrección del resultado?
Reconocimiento de la utilidad de una habilidad.
M4: ¿Reconocen la utilidad del SRVG?
M5: ¿Reconocen la utilidad del sistema formal (aritmético)?
Comparación y evaluación entre habilidades cognitivas visuales y aritméticas.
M6: ¿Compara los sistemas y expresa sus preferencias por uno de ellos? ¿Cuál y por qué?
Control y evaluación del propio conocimiento y desempeño sobre los sistemas de representación.
M7: ¿Controla la resolución en el SRVG?
M8: ¿Controla la resolución en el sistema aritmético (SA)?

4.10.4 Desarrollo de las entrevistas

Realizamos dos grupos de entrevistas. En el primero, los alumnos fueron elegidos del gran grupo y estas entrevistas las utilizamos como estudio piloto. Un segundo grupo, estudio definitivo, se realizó con los alumnos del aula instruida por el didacta.

Antes de empezar las entrevistas se les explicaba a los alumnos los objetivos de éstas, dejándoles total libertad para si querían acceder a ellas o no.

<u>Lugar de desarrollo de las mismas y temporalización:</u>

Se desarrollaban en los propios Colegios, en aulas que se nos cedían para tal fin. En el estudio piloto, fueron programadas en tres sesiones de aproximadamente media hora y en el estudio definitivo, las ampliamos a 4 sesiones.

<u>Desarrollo de las entrevistas en el estudio piloto:</u>

En este estudio, las entrevistas comenzaron con una etapa de familiarización, en las que el entrevistador enseña a los alumnos, problemas parecidos a los que se les va a proponer, extraídos de sus propias carpetas, y el alumno va explicando cómo los ha resuelto.

A continuación, se le iban proponiendo los problemas, haciéndoles preguntas a medida que los resolvían, de forma que explicasen lo más posible el porqué de sus decisiones.

De los dos problemas que realizaban por sesión, el primero lo hacían sobre la hoja modelo, si bien se les advertía que no necesariamente tenían que rellenar todos los apartados y podían seguir el orden que quisieran, y el segundo, en una hoja en blanco con el objetivo de ver qué modelo es el que tenían interiorizado.

<u>Desarrollo de las entrevistas en el estudio definitivo:</u>

En este estudio comenzaba directamente con los problemas, dado que el tiempo transcurrido entre la finalización del diseño y éstas fue muy corto y no había necesidad de ningún tipo de familiarización con el entrevistador, ya que éste los conocía bien.

En este estudio decidimos que todos los problemas se harían sobre la hoja modelo, pues en la experiencia anterior habíamos comprobado que cuando la hoja estaba en blanco tendían rápidamente a ejecutar la operación y esto nos impedía ver cómo hacían uso del nuevo sistema de representación trabajado.

También se modificó el orden de presentación de los problemas, mezclándose los de una con dos operaciones, para evitar que pudieran sospechar de antemano cuál era la operación a realizar; y en el problema 4, se sustituyó la quinta parte por la mitad, ya que dicho concepto no había sido bastante trabajado por los alumnos de 4º Curso.

El clima durante las entrevistas fue totalmente relajado y los niños se expresaban con espontaneidad, fruto de la relación personal que se había establecido durante la instrucción.

4.11 ENTREVISTAS A LOS PROFESORES

El objetivo de estas entrevistas era obtener información acerca del profesorado que participó en esta experiencia, ya que, según el modelo de Fennema y otros, existe una interrelación entre los conocimientos y creencias de los profesores y su toma de decisiones en aspectos relacionados con la instrucción de los alumnos.

4.11.1 Descripción de las entrevistas

La información es extraída de tres entrevistas estructuradas con protocolos cerrados, con preguntas de respuesta estructurada y preguntas de respuesta abierta, que llamamos para abreviar entrevista experimental inicial, entrevista experimental final y entrevista control; las dos primeras, dirigidas a los profesores del grupo experimental y la tercera, a los profesores del grupo control.

La estructuración definitiva de estos protocolos es una adaptación del modelo de Shavelson y Stern sobre las variables que inciden en la toma de decisiones de los profesores (tabla 4.23). La elaboración del protocolo inicial tiene lugar en la etapa de construcción del $DIRPA_1$ y en él intervienen las observaciones extraídas de los dos profesores de EGB participantes. La elaboración del protocolo final tiene lugar después de la elaboración del DIRPA definitivo y de la implementación del mismo, y en él intervienen las observaciones extraídas de los trece profesores participantes.

La entrevista inicial a los profesores del grupo experimental consta de 32 ítems, la final tiene 45 ítems y la del grupo control, 41 ítems, ésta se diseñó a partir de la entrevista inicial con un grupo de preguntas adicional para valorar si se producían cambios entre los profesores de este grupo al saberse involucrados en una investigación. La entrevista experimental final pretende estudiar los cambios a largo plazo, que la realización de este diseño provoca en los profesores del grupo experimental.

4.11.2 Recursos utilizados en las entrevistas

Se estructuran estos protocolos cerrados en torno a cinco categorías principales: diferencias individuales, limitaciones institucionales, naturaleza de la tarea, juicio de los profesores sobre los estudiantes y sobre el contenido, y decisiones pedagógicas, que recogen conocimientos y creencias que inciden en la toma de decisiones. Se descartan las informaciones sobre los estudiantes y las atribuciones del profesor sobre las causas de la conducta de los alumnos, por considerarlos irrelevantes para el estudio a realizar.

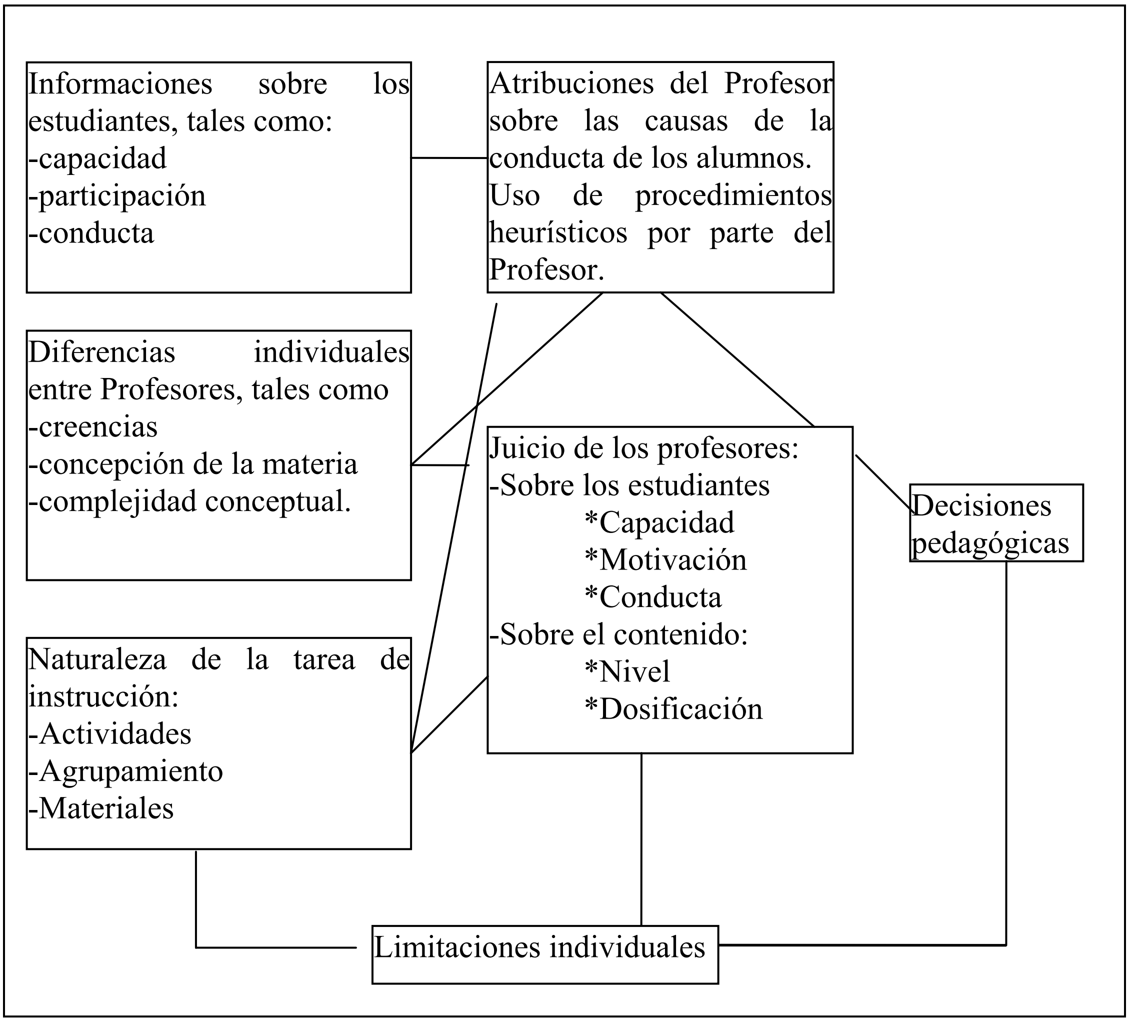


Figura 4.5: Modelo de Shavelson y Stern sobre las variables que inciden en la toma de decisiones de los profesores.

Categorías y descriptores.

La entrevista inicial a los profesores del grupo experimental (Anexo p. 131) consta de 32 ítems distribuidos en las siguientes categorías:

Categoría: D I (Diferencias Individuales).

Esta categoría contempla ciertas diferencias individuales entre los profesores tales como: años de docencia, coordinación o no con otros profesores de matemáticas, y sus opiniones sobre las matemáticas y la resolución de problemas; sus descriptores se recogen en los ítems: 2, 10, 11, 12, 14 y 15.

Categoría L I (Limitaciones Institucionales).

Esta segunda categoría trata de cuestiones institucionales tales como: nivel o tipo de centro, situación, número de unidades y nivel sociocultural de los padres, y sus descriptores se recogen en los ítems: 1, 3, 4, 5, y 6.

Categoría N T (Naturaleza de la Tarea (recursos)).

Esta categoría se refiere a los recursos usados en la instrucción sobre resolución de problemas; sus descriptores se recogen en los ítems: 8, 22, 23, 24, 25, y 26.

Categoría J P (Juicio de los Profesores).

Esta categoría la hemos dividido en dos subcategorías por las ventajas que ello supone para su análisis y discusión.

Subcategoría J P A (Juicio sobre los alumnos).

Incluye los juicios de los profesores sobre los alumnos con relación a las matemáticas y a la resolución de problemas, y sus descriptores se recogen en los ítems: 13 y 16.

Subcategoría J P C (Juicio sobre el contenido).

Recoge los juicios sobre el contenido objeto de enseñanza-aprendizaje; sus descriptores se recogen en los ítems: 17, 18, 19, 20, y 21.

Categoría D D (Decisiones Didácticas).

Esta quinta y última categoría abarca ciertas decisiones pedagógicas que reflejan el estilo del profesor en una clase de resolución de problemas; sus descriptores se recogen en los ítems: 7, 9, 27, 28, 29, 30, 31, y 32.

La entrevista a los profesores del grupo control (Anexo, p. 134) consta de 41 ítems: a los 32 ítems anteriores del grupo experimental se le añaden 9 ítems que se agrupan en una nueva subcategoría dentro de la categoría Decisiones Didácticas:

Subcategoría D D I (Decisiones Didácticas Inferidas).

Esta subcategoría tiende a recoger datos sobre las modificaciones que han introducido en su trabajo los profesores del grupo control, al conocer que estaban participando en una investigación; sus descriptores se recogen en los ítems: 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, y 41.

La entrevista final a los profesores del grupo experimental (Anexo, p. 135) consta de 45 ítems, 21 de los cuales se retoman de la entrevista experimental inicial y el resto, 24, son de nueva elaboración. Todos se distribuyen nuevamente en las cinco categorías fijadas de las siguiente manera:

Categoría: D I (Diferencias Individuales).

Ítems: 5 (10), 6 (14) y 7 (15).

Categoría L I (Limitaciones Institucionales).

Ítem: 1 (1).

Categoría N T (Naturaleza de la Tarea (recursos)).

Ítems: 3 (8), 19 (22), 20 (23), 21 (24), 22 (25), 23, 24, 25, 26, y 27.

Categoría J P (Juicio de los Profesores).

Subcategoría J P A (Juicio sobre los alumnos).

Ítems: 8 (16), 9, 10, 11 y 12.

Subcategoría J P C (Juicio sobre el contenido).

Ítems: 13 (17), 14, 15 (18), 16, 17, 18 (21).

Categoría D D (Decisiones Didácticas).

Ítems: 2 (7), 4 (9), 28 (27), 29 (28), 30 (29), 31 (30), 32 (31), 33 (32).

Subcategoría D D P (Decisiones Didácticas Proyectadas).

Ítems: 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 y 45.

Los ítems señalados entre paréntesis son los recuperados de la entrevista inicial a los profesores del grupo experimental y el número de la izquierda indica el orden con que aparece en la entrevista final a los mismos profesores. Se añaden, como vemos, nuevos ítems en las diferentes categorías y una nueva subcategoría: "Decisiones didácticas proyectadas" que tiende, junto con los otros nuevos ítems, a recoger datos sobre las modificaciones epistemológicas que han introducido en su trabajo sobre la resolución de problemas aritméticos los profesores experimentadores, después de haber realizado la experiencia con el modelo DIRPA y mediante la técnica de adiestramiento por inmersión.

4.11.3 Desarrollo de las entrevistas

La entrevista inicial es realizada a los trece profesores del grupo experimental al comienzo de la fase de la investigación "Curso de Adiestramiento por inmersión". La entrevista control se desarrolla con los diez profesores del grupo control al terminar el desarrollo de la instrucción con sus alumnos, y analizamos cinco entrevistas de los diez profesores del grupo control, es decir, las de los profesores del centro más representativo.

La entrevista experimental final se desarrolla un año y medio después, con los trece profesores del grupo experimental. Sólo se analizan nueve entrevistas, las cuatro restantes, clases 6, 7, 11 y 12 no contestan, la 6 por no encontrarse en la localidad, la 7 por no encontrarse dando clase de matemáticas y las 11 y 12 indican la necesidad de realizar la entrevista conjuntamente y aceptar las respuestas unificadas y fueron descartadas.

CAPÍTULO 5: EL ESTUDIO CUANTITATIVO

5.1 INTRODUCCIÓN

En este Capítulo analizamos los resultados obtenidos, antes y después del diseño de instrucción en resolución de problemas aritméticos verbales en el grupo de alumnos (355), instruidos por los profesores que siguieron el curso-guía de adiestramiento, datos que contrastamos con el grupo control, siguiendo el diseño cuasi-experimental que hemos descrito.

La presentación de los resultados la vamos a dividir en los tres apartados de que consta el pretest-postest.

1º) Resolución de problemas aritméticos verbales.

2º) Ejecución de las operaciones.

3º) Invención de problemas.

Esta fase se caracteriza por ser un estudio de tipo cuantitativo En primer lugar, estableceremos las hipótesis, que contrastaremos con su análisis estadístico correspondiente; posteriormente, hacemos un análisis más pormenorizado de los diferentes ítems mediante el análisis de las frecuencias de los mismos y un análisis general de los tests.

5.2 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES

Nuestro objetivo general es analizar los cambios que se producen del pretest al postest y contrastarlos con el grupo control, para lo cual establecemos unas hipótesis estadísticas. Posteriormente, mediante el análisis de las frecuencias de cada ítem estudiamos las diferencias entre los problemas de una y dos operaciones. También pretendemos estudiar qué proporción de alumnos del grupo experimental utilizan el SRVG como medio para resolver los problemas. Completaremos el estudio con una descripción de las explicaciones que dan a cómo resolvieron los problemas, los dibujos que utilizaron y si se detecta el uso de algún tipo de modelo de resolución.

El instrumento utilizado en esta fase es el pretest-postest. Más adelante presentamos los enunciados de los problemas con su estructura semántica.

5.2.1 Hipótesis estadísticas

Las hipótesis que nos planteamos son:

H_{01}.- No existen diferencias significativas en la resolución de problemas aritméticos verbales entre los alumnos del grupo experimental y del grupo control.

H_{02} .- No existen diferencias significativas en la resolución de problemas por cursos.

H_{03}.- No existen diferencias significativas en la resolución de problemas por sexos.

5.2.2 Relación entre la variable dependiente: número de problemas bien resueltos y las variables grupo, curso y sexo

Para analizar la relación entre estas variables, realizamos un análisis de varianza factorial mixto. Este análisis nos va a permitir valorar la significatividad de las variables GRUPO (experimental vs control), CURSO (3º, 4º y 5º) y SEXO (niños vs niñas).

Esta fase se caracteriza por ser un estudio de tipo cuantitativo.

Para ello tomamos tres variables independientes intersujeto: GRUPO (experimental vs control), CURSO (3º, 4º y 5º) y SEXO (niños vs niñas), tenemos también una variable independiente intrasujeto o de medidas repetidas: el MOMENTO de la medición (Pretest vs Postest) y una variable dependiente: número de problemas bien resueltos y con ellas hemos realizado un análisis de varianza factorial mixto.

Estudio de la influencia del factor grupo (experimental vs control)

Los resultados del ANOVA, que pueden verse en el Anexo (p. 149), pueden resumirse como se expresan a continuación.

La interacción entre los factores GRUPO y MOMENTO no ha resultado estadísticamente significativa [F(1, 369)= 0.335, p= .563], a un nivel de significación de 0.05. Por tanto, no se ha producido una mejora superior en el grupo experimental que en el grupo control. En efecto, en el grupo experimental las medias Pretest y Postest son, respectivamente, 13 y 14.698; en el grupo de control han sido 12.069 y 13.483; así, la mejora del Pretest al Postest en ambos grupos ha sido muy similar: 1.698 para el grupo experimental y 1.414 para el grupo control.

Por tanto, no es posible rechazar la hipótesis nula, que afirmaba que no existían diferencias en la resolución de problemas entre los alumnos del grupo experimental y los del grupo control, después de haber desarrollado el diseño.

Estudio de la influencia del factor curso

Hemos encontrado una interacción significativa entre los factores GRUPO, MOMENTO y CURSO: F(2, 369)= 3.873, p=.022. Para interpretar este resultado podemos observar las Figuras 5.1 y 5.2, especialmente esta última. En efecto, en los tres cursos contrastados no se ha producido la misma mejora diferencial del Pretest al Postest en los grupos (experimental y control).

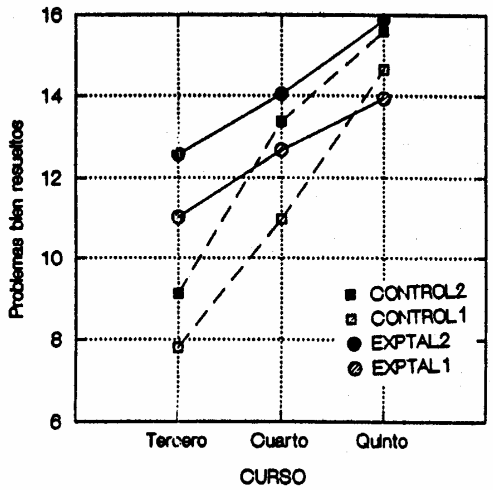


Figura 5.1

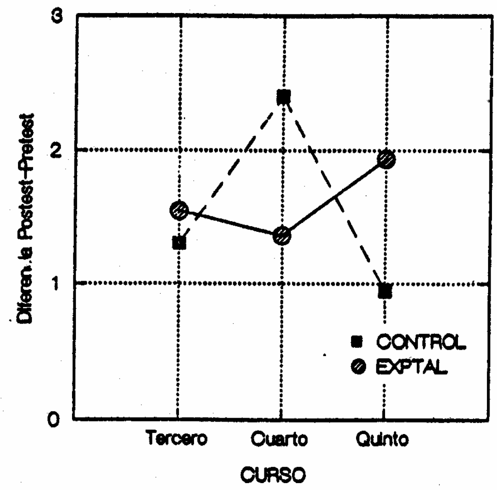


Figura 5.2

Así, en los alumnos de Tercer Curso, la mejora del Pretest al Postest en ambos grupos ha sido muy parecida; en los alumnos de Cuarto Curso, la mejora ha sido muy superior en el grupo de control respecto del grupo experimental y en los de 5º se observa una mejora muy superior en el grupo experimental, en cuanto al número de problemas bien resueltos. Así, podemos concluir que es en este Curso donde se observa un claro beneficio de la instrucción respecto del método de enseñanza tradicional, pero también tenemos que añadir que son estos Profesores, los que pasados dos años de la experiencia, siguen desarrollando nuestro diseño de instrucción innovador.

Otros resultados interesantes han sido:

* Los dos grupos (experimental y control) presentan diferencias estadísticamente significativas: $F(1, 369) = 15.039$, $p= .000$. En efecto, el grupo experimental presenta una media (13.849) superior al grupo control (12.776).
* Como era de esperar, se observan diferencias estadísticamente significativas entre los tres CURSOS: $F(2, 369)= 56.762$, $p= .000$. En efecto, las medias en 3º, 4º y 5º han sido, respectivamente, 10.696, 12.977 y 14.967.
* También se ha encontrado una interacción significativa entre los factores GRUPO y CURSO: $F(2, 369)= 6.982$, $p=.001$. En efecto, mientras en el grupo experimental, las medias crecen de forma lineal a lo largo de los tres cursos (11.792, 13.358 y 14.902) en el grupo control se observa un salto entre 3º y los otros dos cursos (8.462, 12.121 y 15.123).
* La ejecución media (promediando los dos grupos) en el Postest (14.328) es superior a la del Pretest (12.717): $F(1, 369) = 88.783$, $p=.000$.

Estudio de la influencia del factor sexo

Los resultados del mismo ANOVA nos confirman que no existen diferencias significativas en relación con el sexo: $F(1, 369)= 0.088$, $p=.767$.

5.3 ANÁLISIS DE LOS ÍTEMS DEL PRETEST-POSTEST

En este apartado hacemos un estudio apoyándonos en las frecuencias de los distintos ítems y en un análisis general de los mismos. Estas pruebas de lápiz y papel son realizadas de forma colectiva, y nos permiten estudiar dos tipos de habilidades: cognitivas y heurísticas.

Dentro de las habilidades cognitivas analizamos la capacidad para resolver problemas (y sus posibles diferencias por cursos, sexos, grupo experimental vs grupo control y pretest vs. postest).

Las habilidades heurísticas estudiadas están en relación con el uso del nuevo sistema de representación, la utilización de alguna estrategia general de resolución u otros heurísticos.

Estas habilidades las englobamos en tres categorías de habilidades cognitivas y heurísticas, que son:

C_1.- Capacidad para resolver problemas aritméticos verbales, entendiendo por ello que eligen y ejecutan correctamente la operación adecuada. Presentamos los resultados en cuatro epígrafes:

* Grupo experimental y grupo control, comparando pretest y postest.
* Por cursos y por sexos.
* Análisis de los distintos problemas aritméticos verbales.
* Análisis de las explicaciones que dan sobre la resolución de los mismos.

C_2.- Análisis del uso del sistema de representación visual-geométrico.

C_3.- Utilización de estrategias generales de resolución y de otros heurísticos.

A su vez, el análisis de los resultados lo vamos a dividir según el tipo de problemas en tres grupos: problemas de estructura aditiva, problemas de estructura multiplicativa y problemas de dos operaciones.

5.3.1 Los problemas de estructura aditiva

La resolución de problemas aditivos se trabaja fundamentalmente en el primer Ciclo de Primaria. La mayor parte de los estudios sobre ellos se han realizado con niños de 5 a 8 años y los resultados obtenidos, en general, apuntan a que este tipo de problemas (usando un lenguaje sencillo y con magnitudes pequeñas) se supera en dicho Ciclo.

En la tabla 5.1 presentamos los problemas con estructura aditiva:

Problemas de sumar

Pretest	Postest
1.En una carrera de ciclistas, 117 llegaron a la meta y 48 ciclistas se retiraron por el camino. ¿Cuántos ciclistas empezaron la carrera? **Combinación**	**1**. De una caja de bombones nos hemos comido 134 y todavía quedan 90. ¿Cuántos bombones había en la caja al principio? **Combinación**
11. Compré una barrica de 327 litros de vino. También compré otra barrica de 285 litros de vino. ¿Cuántos litros de vino compré? **Combinación**	**11**.Una droguería recibe un pedido de 287 kilos de pintura blanca y 134 kilos de pintura amarilla. ¿Cuántos kilos de pintura ha recibido en total? **Combinación**
20. Un libro de cuentos tiene 215 páginas; uno de historia 303 páginas; uno de poesía, tanto como los dos libros anteriores juntos. ¿Cuántas páginas tiene el libro de poesía? **Combinación**	**20**. Felipe tiene 123 boliches, Jorge tiene 215 y Ana tiene tantos como Felipe y Jorge juntos. ¿Cuántos boliches tiene Ana? **Combinación**
3. Andrés contó en un desfile 232 soldados y Fernando contó 15 más que Andrés. ¿Cuántos soldados contó Fernando? **Comparación**	**3**. María tiene 325 pesetas y mi amiga Marta tiene 37 ptas más que ella. ¿Cuántas pesetas tiene Marta? **Comparación**

Problemas de restar

Pretest	Postest
12. Un niño compra un paquete de caramelos que cuesta 305 ptas. Como el ventero era amigo suyo, se lo dejó 36 pesetas más barato, ¿cuánto le costó el paquete de caramelos? **Cambio**	**12**. De un paquete de 175 hojas, hemos gastado 83. ¿Cuántas hojas quedan? **Cambio**
6. Para que me regalen una bicicleta, tengo que conseguir 158 puntos . Ya tengo 129 puntos. ¿Cuántos puntos tengo todavía que conseguir? **Cambio**	**6**. En un Colegio hay 236 alumnos. Si se van de excursión 85, ¿cuántos irán al Colegio? **Cambio**
16. Se está llenando de agua dos piscinas. Cuando en la primera habían entrado 98 litros y en la segunda 60 litros cortaron el agua. ¿Cuántos litros de agua tienen que entrar en la segunda para que ambas tengan la misma cantidad de agua? **Igualación**	**16**. Los hermanos María y Juan van al parque. Juan recorrió 87 metros y a María le faltaron 34 metros para caminar lo mismo que su hermano. ¿Cuántos metros recorrió María? **Igualación**
17. Una revista vale 835 ptas y una pelota 162 ptas menos que la revista. ¿Cuánto vale la pelota? **Comparación**	**17**. Estoy leyendo un libro de 215 páginas y he leído 132 páginas menos que las que tiene. ¿Cuántas páginas he leído? **Comparación**

Tabla 5.1

Los problemas planteados incluyen relaciones simétricas y no simétricas en el esquema partes-todo y pertenecen a las categorías semánticas, indicadas con negrilla debajo de los enunciados. Se eligieron cuatro problemas resolubles por una suma y cuatro resolubles por una resta.

Riley, Greeno y Heller (1983) elaboraron unos niveles de complejidad para las categorías de combinación, cambio y comparación, siendo los problemas de cambio (cantidad final desconocida, crece y decrece) y los de combinación (suma) los que se encuentran en el nivel 1. Decidimos elegir varios problemas de combinación para analizar las diferencias que se daban entre ellos y uno de comparación. A continuación, comentamos algunas características de los problemas elegidos. El problema 1, que es de sumar, incluye dos palabras "retirar" y "comer" (en el pretest y en el postest, respectivamente), que suelen actuar como claves verbales de la operación resta; el problema 11 tiene el formato típico de los problemas de combinación, el 20 añade un tercer sujeto que recibe la combinación de los otros dos y en el problema 17, de tipo comparación (comparación-3 de nivel de dificultad 3, según dichos autores), se desconoce la colección mayor y el término comparativo se corresponde con la operación que se debe ejecutar.

En los problemas de restar, elegimos dos problemas de cambio: el problema 12, donde se desconoce la cantidad final (nivel de dificultad 1), y el problema 6; el problema 17 de comparación (quitar de), donde la colección menor es la desconocida (nivel de dificultad 3) y el término comparativo coincide con la operación a ejecutar y el problema 16 corresponde al tipo igualación.

1.- Capacidad para resolver problemas aditivos.

Los problemas aditivos son, en general, fáciles para los niños de 8 a 11 años. Dentro de éstos, Nesher (1982) encontró que los problemas de sumar son todavía más fáciles que los de restar (con una media de 73.9% de aciertos para los de suma frente a un 64.6% para los de resta).

*Grupo experimental vs grupo control

En las tablas 5.2 y 5.3, podemos ver el número de problemas aditivos que resuelven los alumnos, en el pretest y en el postest en los grupos experimental y control, respectivamente. (Al analizar los datos el paquete estadístico utilizado, ha prescindido de los individuos que han dejado algún problema sin hacer. Esos casos quedan convertidos en datos "missing" para todas las variables. En la tabla corresponden a la columna "ausentes").

		Ausentes	No resuelven ninguno	Resuelven 1	Resuelven 2	Resuelven 3	Resuelven todos
Probl.	Pretest	62	4	8	26	72	183 (52%)
sumar	Postest	75	1	5	14	71	189 (53%)
Probl.	Pretest	58	9	13	38	79	158 (45%)
restar	Postest	65	4	5	17	59	205 (58%)

Tabla 5.2: Grupo experimental

		Ausentes	No resuelven ninguno	Resuelven 1	Resuelven 2	Resuelven 3	Resuelven todos
Probl.	Pretest	49	0	4	13	49	75 (39%)
sumar	Postest	54	2	3	12	27	92 (48%)
Probl.	Pretest	53	9	8	19	33	68 (36%)
restar	Postest	52	4	9	11	27	87 (46%)

Tabla 5.3: Grupo control

Se observa un aumento, tanto en el grupo experimental como en el control, de los niños que son capaces de resolver correctamente los 8 problemas (de sumar y restar), siendo este aumento mayor en los problemas de restar, hecho que podemos ver en las figuras 5.3 y 5.4.

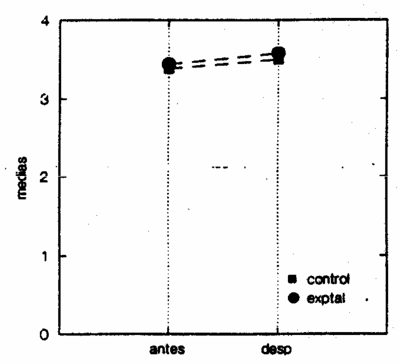


Figura 5.3

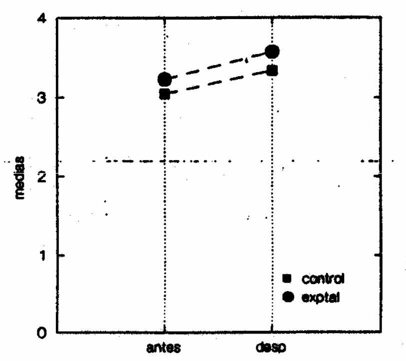


Figura 5.4

En la tabla 5.4 podemos ver las medias (desviaciones típicas) del número de problemas de sumar y restar (4 problemas en cada caso), tanto en el pretest como en el postest. El recorrido de la variable es de 0 a 4, y todas las medias son superiores a 3, por lo que podemos apreciar que son bastante altas.

	Grupo experimental		Grupo control	
	Pretest	Postest	Pretest	Postest
Probl. sumar	3.440 (0.868)	3.579 (0.704)	3.383 (0.771)	3.500 (0.861)
Probl. restar	3.226 (1.030)	3.572 (0.796)	3.044 (1.212)	3.333 (1.063)

Tabla 5.4

Los porcentajes de aciertos para cada problema, tanto en el pretest como en el postest para ambos grupos, los podemos ver en la tabla 5.5.

Calculando la media de los porcentajes de aciertos en el pretest para ambos grupos (N=545), tenemos un 73% para los problemas de sumar y un 66% para los de restar, resultados similares a los encontrados por Nesher.

	Pretest		Postest	
Problema	G. experimental	G. control	G. experimental	Grupo control
1. Combinación	69 %	53 %	76 %	66 %
11 Combinación	86 %	71 %	78 %	73 %
20. Combinación	79 %	73 %	73 %	66 %
3. Comparación	80 %	73 %	77 %	65 %
Media de los probl. sumar	**78.5 %**	**67.5 %**	**76 %**	**67.5 %**

	Pretest		Postest	
12. Cambio	76 %	59 %	77 %	66 %
6. Cambio	70 %	57 %	79 %	64 %
16. Igualación	71 %	62 %	75 %	67 %
17. Comparación	75 %	58 %	70 %	62 %
Media de los prob. restar	**73 %**	**59 %**	**75 %**	**65 %**

Tabla 5.5

*Por cursos y por sexos

Los resultados obtenidos (porcentajes de problemas bien resueltos) por los distintos grupos en los problemas del Pretest, están en la tabla 5.6.

	Grupo experimental			Grupo control		
Problema	3º	4º	5º	3º	4º	5º
1.	68%	71%	69%	35%	62.5%	58%
11.	85%	81%	90%	71%	84%	63%
20.	82%	70%	84%	65%	87.5%	67%
3.	68%	81%	84%	67%	87.5%	67%
sumar	76%	76%	82%	59,5%	80%	64%
12.	68%	72%	82%	33%	71%	67%
6.	56%	67%	77%	27%	71%	66%
16.	59%	66%	80%	45%	71%	66%
17.	73%	73%	77%	43%	70%	59%
restar	64%	70%	79%	37%	71%	64.5%

Tabla 5.6

En dicha tabla podemos observar que los alumnos resuelven los problemas de sumar y de restar en un porcentaje bastante alto, correspondiendo los valores menores a los alumnos de 3º y a los problemas de restar. Por tanto, si exceptuamos el Curso 3º del grupo control, que presenta un nivel muy bajo, los alumnos que dominan los problemas de sumar y restar sobrepasan ya en el pretest el 50% en todos los cursos.

Si analizamos los resultados de problemas bien resueltos por sexos, que presentamos en la tabla 5.7 vemos que no existen diferencias entre ellos.

	Grupo experimenta		Grupo control	
Problema	niños	niñas	niños	niñas
1.	69%	70%	51%	56%
11.	82%	90%	70%	73%
20.	73%	85%	70%	77%
3.	79%	82%	66%	83%
sumar	76%	82%	64%	72%
12.	71%	80%	58%	61%
6.	69%	71%	56%	60%
16.	72%	70%	65%	58%
17.	72%	78%	58%	58%
restar	71%	75%	59%	59%

Tabla 5.7

*Análisis de los diferentes problemas

Al analizar cada problema (tabla 5.5), encontramos que el problema 1, siendo de sumar, obtuvo los resultados más negativos, debiendo su dificultad a la presencia de la palabra "retiraron" que actuó como clave verbal, lo que les indujo a hacer una resta. Esta palabra figura en la lista de verbos que actúan como palabras clave para la resta establecida por el Grupo de EGB de la APMA (1987).

Los otros problemas de combinación (11, 20) y el problema 3 (comparación), dan unos resultados medios similares.

Los problemas de restar dieron en la mayor parte de los grupos estudiados, porcentajes de éxito, que están por debajo del 80%; sin embargo, la dificultad media entre los cuatro es muy similar.

Así, en el pretest, los problemas de sumar tienen una variación de aciertos del 17% en el grupo experimental y de un 20% en el grupo control, mientras en los problemas de restar esta diferencia es de un 6% en el grupo experimental y de un 5% en el grupo control.

En el postest, se produce una igualación entre casi todos los problemas, tanto en el grupo experimental como en el control, si bien este último mantiene unos porcentajes inferiores. Los mayores éxitos se producen entre los alumnos de 5º, cuyos porcentajes superan el 80% en casi todos los problemas. Esto nos induce a pensar, que las dificultades asociadas a las categorías semánticas disminuyen cuando la operación se va interiorizando.

*Análisis de las explicaciones que dan sobre la resolución de los problemas

En cada problema les pedíamos que hicieran un dibujo o explicaran la resolución del problema. Las explicaciones más frecuentes son aquellas en las que describen la operación ejecutada: *"sumando los boliches de Felipe y Jorge"*, *"resté a 305 las 36 que le rebajó el ventero"*. Otro grupo de alumnos se apoya en palabras clave para justificar la elección de la operación: *"sumé porque pedía el total"*. Los dibujos sólo cumplen una función ilustrativa.

Estos datos nos confirman que *"resolver problemas verbales, en general, consiste en pasar de una formulación verbal a una formulación formal, operando en el dominio formal"* (Nesher, 1982, p. 26).

2.- Análisis del uso del sistema de representación visual-geométrico.

A los Profesores del grupo experimental se les pidió que, al dar las instrucciones para resolver los problemas en el postest, indicasen a los alumnos que podían resolver los problemas con el nuevo sistema de representación (SRVG) que habían trabajado.

En la tabla 5.8 podemos ver el número de alumnos de cada curso que utilizan este sistema y en qué problemas (Datos obtenidos en el Postest y en el grupo experimental, N=355). En ella especificamos la categoría semántica de cada uno de los problemas y, además, se recoge en una columna el total de problemas de sumar y de restar resueltos correctamente.

	P. 1 Comb.	P. 3 Comp.	P. 11 Comb.	P. 20 Comb.	P. Sumar	P 6 Camb.	P.12 Camb.	P 16 Igual	P. 17 Comp.	P. Restar
3º	1	0	1	1	3	1	1	0	1	3
4º	18	17	13	9	57	14	12	9	10	45
5º	28	26	9	5	68	19	8	7	3	37
Total	47	43	23	15	128	34	21	16	14	85

Tabla 5.8

Los resultados muestran que no existe relación entre el uso de este sistema y la estructura semántica del problema y que lo utilizan preferentemente en los problemas de sumar.

Sin embargo, son sólo 64 alumnos (2%) los que hacen uso del mismo, según podemos ver en la tabla 5.9, y parece existir cierta relación de dependencia entre los alumnos que lo utilizan y el Profesor. De ellos, sólo 4 lo utilizan como <u>única</u> forma de resolver el problema, la mayoría comienza utilizando la operación y, en segundo lugar, lo resuelven con el SRVG.

Curso	5º	5º	5º	4º	4º	4º	5º	3º	5º	4º	3º	4º	5º
Lo utilizan	1	23	2	0	13	7	2	0	1	9	1	0	5
N	28	23	25	20	24	23	31	29	30	25	37	31	29

Tabla 5.9

3.- Utilización de estrategias generales de resolución y de heurísticos.

Encontramos en siete aulas, que los alumnos poseen una estrategia de resolución, coincidiendo entre las aulas de un mismo Colegio. Estos alumnos dividen el espacio para resolver el problema en tres columnas: Datos // operaciones // resultado, completándolas sucesivamente.

Los niños de 3º (aulas 4 y 8), hacen muchos dibujos para ilustrar los problemas y no dan ninguna explicación escrita.

Por el contrario, los alumnos del grupo control se limitan a elegir y ejecutar la operación, hacen muy pocos dibujos y no dan explicaciones sobre la resolución de los problemas.

5.3.2 Los problemas de estructura multiplicativa

Los problemas de estructura multiplicativa son analizados de la misma forma que los aditivos.

Los tests incluyen tres problemas de multiplicar y tres problemas de dividir, con los cuales medimos los aspectos señalados. Siguiendo la clasificación propuesta por Peled-Nesher (1988), escogimos un problema de multiplicar de razón (nº 14, donde se desconoce la cantidad final), otro de comparar (nº 4, donde se pide hallar la colección mayor), y un tercero de producto cartesiano (nº 14, de tipo combinatorio). Los problemas de dividir corresponden a las categorías de agrupamiento (nº 7, buscándose el nº de partes), de comparar (nº 8, desconociéndose la colección menor), y de producto cartesiano (nº 9, también del tipo de problemas combinatorios).

En todos ellos, cuidamos que los enunciados estuvieran formados por sentencias sencillas, que las magnitudes fueran pequeñas y que, tanto las multiplicaciones o divisiones fueran sólo por una cifra, ya que los alumnos de 3º no habían trabajado más. En la tabla 5.10 podemos ver los enunciados de dichos problemas y las categorías semánticas de los mismos (indicadas a continuación de cada enunciado en negrilla).

Problemas de multiplicar:

Pretest	Postest
4. Pedro tiene 70 ptas y su abuelo 7 veces más. ¿Cuánto dinero tiene el abuelo de Pedro? **Comparar.**	**4.** Ramón ha levantado una pesa de 7 kilos y su primo Raúl ha levantado una que pesa tres veces más. ¿Cuántos kilos ha levantado Raúl? **Comparar.**
13. En un colegio hay 9 clases. En cada clase hay 35 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en el colegio? **Razón.**	**13.** Para hacer un control se entregaron 7 hojas de papel a cada uno de los 34 alumnos de una clase. ¿Cuántas hojas de papel se entregaron en total? **Razón.**
14. Hay 6 chicos y 7 chicas en una fiesta. ¿Cuántas parejas de baile diferentes se pueden formar? **Producto cartesiano.**	**14.** Un videojuego tiene 5 juegos diferentes con tres niveles de dificultad cada uno. ¿De cuántas maneras distintas se puede jugar? **Producto cartesiano.**

Problemas de dividir

Pretest	Postest
7. Las gallinas de una granja pusieron 408 huevos en una semana. Si cada gallina puso 6 huevos. ¿Cuántas gallinas hay en la granja? **Agrupamiento.**	**7.** En una calle de un pueblo viven 228 personas. En cada casa viven 6 personas ¿cuántas casas hay en la calle? **Agrupamiento.**
8. Tengo 120 cromos y mi hermano la tercera parte que yo. ¿Cuántos cromos tiene mi hermano? **Comparar.**	**8.** Tengo 98 cromos y mi hermano la mitad que yo. ¿Cuántos cromos tiene mi hermano? **Comparar.**
9. Beatriz tiene 5 pantalones diferentes y varias blusas. Si se ha vestido de 20 formas diferentes, ¿cuántas blusas tiene Beatriz? **Producto cartesiano.**	**9.** Mi padre tiene 5 camisas diferentes y varias corbatas. Si las ha combinado de 15 formas diferentes, ¿cuántas corbatas tiene mi padre? **Producto cartesiano.**

Tabla 5.10

1.- Capacidad para resolver problemas multiplicativos.

Los alumnos tienen, en general, menos éxito en la resolución de los problemas de estructura multiplicativa; una de las causas puede ser que los currículos escolares plantean el dominio de los mismos en este Ciclo.

* Grupo experimental vs Grupo control:

En primer lugar, calculamos qué porcentaje de alumnos resuelve correctamente uno, dos o los tres problemas, tanto en el pretest como en el postest en ambos grupos. Los resultados los exponemos en la tabla 5.11 para el grupo experimental y 5.12 para el grupo control.

		No los hacen	Resuelven todos mal	Resuelven 1 bien	Resuelven 2 bien	Resuelven todos bien
Probl.	Prestest	16%	4%	14%	39%	27%
multipl.	Postest	21%	1%	3%	19%	56%
Prob.	Pretest	21%	14%	19%	24%	22%
dividir	Postest	26%	5%	10%	21%	38%

Tabla 5.11

		No los hacen	Resuelven todos mal	Resuelven 1 bien	Resuelven 2 bien	Resuelven todos bien
Probl.	Prestest	29%	6%	14%	31%	20%
multipl.	Postest	26%	3%	10%	17%	44%
Prob.	Pretest	36%	19%	11%	17%	17%
dividir	Postest	38%	7%	15%	15%	25%

Tabla 5.12

Como podemos observar, se produce una mejora en el número de problemas que resuelven bien, comparando el pretest con el postest en ambos grupos, aumento que es superior al de los problemas aditivos. Así, en los problemas de multiplicar, encontramos en el pretest (grupo experimental), que todos los problemas los resuelven un 27%, pasando en el postest al 56%. Análogamente, el grupo control pasa del 20% al 44%. Las mejoras son inferiores en los problemas de dividir.

En la tabla 5.13 presentamos los resultados de cada problema y la media de los tres problemas, en el pretest y postest en ambos grupos.

	Pretest		Postest	
Problema	Grupo exper.	Grupo control	Grupo exper.	Grupo control
4. Comparar	75%	61%	75%	59%
13. Razón	80%	65%	70%	62%
14. Pr. cartes.	34%	24%	74%	63%
Multiplicar (media)	63%	50%	73%	61%
7. Agrupam.	58%	45%	65%	52%
8. Comparar	46%	36%	69%	52%
9.Pr. cartes.	38%	27%	48%	31%
Dividir (media)	47%	36%	61%	45%

Tabla 5.13

El rendimiento general en resolución de problemas de multiplicar y dividir es inferior a los problemas de estructura aditiva. Hallando una media entre todos los alumnos, obtenemos en el pretest un 56.5% para los problemas de multiplicar y 41.5% para los de dividir.

* Por cursos y por sexos

Los resultados obtenidos en los distintos cursos de ambos grupos (experimental y control) en el pretest, aparecen en la tabla 5.14.

Observamos diferencias entre los tres cursos. El Curso 3º del grupo control obtiene porcentajes muy bajos, sobre todo en los problemas de dividir, mientras los resultados de los cursos 4º y 5º son más similares. Esto coincide con lo apuntado sobre el currículum que tenían, en 3º se interiorizaba la multiplicación y se estaba aún iniciando la división.

	Grupo experimental			Grupo control		
Problema	3º	4º	5º	3º	4º	5º
4.	67%	67%	83%	43%	79%	59%
13.	82%	74%	83%	45%	88%	62%
14.	11%	43%	36%	2%	16%	41%
Multipl.	53%	61%	67%	30%	61%	54%
7.	21%	60%	71%	2%	57%	63%
8.	47%	47%	45%	8%	46%	45%
9.	23%	32%	48%	2%	34%	37%
Dividir.	30%	46%	55%	4%	46%	48%

Tabla 5.14

En los dos grupos (experimental y control) se ve un aumento del porcentaje de éxitos, que es progresivo con los cursos.

Si analizamos los resultados por sexos (tabla 5.15), obtenemos de nuevo que no existen diferencias entre ambos.

	Grupo experimental		Grupo control	
Problema	niños	niñas	niños	niñas
4.	71%	78%	59%	62%
13.	75%	85%	65%	66%
14.	35%	32%	24%	24%
Multipl.	60%	65%	49%	51%
7.	54%	62%	42%	49%
8.	46%	46%	36%	36%
9.	35%	40%	27%	27%
Dividir	45%	49%	35%	37%

Tabla 5.15

* <u>Análisis de los diferentes problemas, según las categorías semánticas</u>

Analizando los resultados de los problemas, y teniendo en cuenta las distintas estructuras semánticas, encontramos que los problemas de tipo razón (4) o comparar (13) para la multiplicación y de agrupamiento (7) o comparar (8) para la división son más fáciles que los problemas asociados al producto cartesiano (14, 9). Los porcentajes de éxito (para el grupo experimental) en estos últimos, no superan el 38%, frente a los otros que llegan a alcanzar un 80%.

Los problemas de multiplicar presentan entre ellos una diferencia de aciertos entre los distintos problemas de un 46% en el grupo experimental (un 41% en el grupo control), frente a un 20% en los de dividir (18% en el grupo control).

En el postest, estas diferencias disminuyen a un 5% en los problemas de multiplicar para el grupo experimental (4% en el grupo control) y de un 21% para los de dividir en el grupo experimental (21% en el control), lo cual nos sugiere que en ambos grupos (experimental y control) se produce una mejora en los problemas de multiplicar, pero no así en los de dividir.

En el pretest, el orden de dificultad de estos problemas, tanto para el grupo experimental como para el grupo control, es:

	Problemas de multiplicar	Problemas de dividir
Más	Razón	Agrupamiento
difícil	Comparar	Comparar
	Producto cartesiano	Producto cartesiano

pero dicho orden no se mantiene estable en el postest.

En el postest, se produce una mejora significativa en los problemas de multiplicar asociados al concepto de producto cartesiano (Hay una mejora del 40% para el grupo experimental y de un 39% para el grupo control). Los profesores de ambos grupos reconocieron que no trabajaban este tipo de problemas y pusieron un interés especial en hacerlo.

Brown (1981) también encontró que los problemas de multiplicar que implicaban un producto cartesiano eran mucho más difíciles. Sin embargo, nuestra investigación nos demuestra que cuando estos problemas se trabajan las dificultades se colocan a la misma altura que los otros tipos de problemas. Los problemas de dividir del tipo producto cartesiano, aunque también mejoran, siguen manteniendo un mayor grado de dificultad.

* <u>Análisis de las explicaciones que dan sobre la resolución de problemas:</u>

En el pretest, todos los niños que resuelven los problemas lo hacen por medio de la operación aritmética (sistema de representación formal). En el apartado que decía *Dibuja o explica cómo lo haces,* encontramos dibujos ilustrativos o explicaciones como las que siguen: *“multipliqué las cantidades” o “ dividí 120 entre 3”.*

En algunos casos hemos encontrado justificaciones apoyadas en palabras clave: *"dividí entre tres porque decía que era la tercera parte"*.

2. Análisis del uso del sistema de representación visual-geométrico.

En la tabla 5.16 podemos ver el uso que hacen los niños del grupo experimental del nuevo sistema de representación. Los números indican el número de niños que resuelven los problemas mediante el SRVG, en cada aula, de la que indicamos a qué curso corresponde.

Aula Curso	**1** 5º	**2** 5º	**3** 5º	**4** 4º	**5** 4º	**6** 4º	**7** 5º	8 3º	9 5º	10 4º	11 3º	12 4º	13 5º
Multipl.	3	23			18	4				4			3
Dividir	2	20			4	3							

Tabla 5.16

Las aulas 1 al 7 (marcadas en negrilla), son las que terminan el diseño completamente; sin embargo, hay niños de las aulas 10 y 13 que son capaces de generalizar el sistema de representación visual-geométrico de la suma al caso de la multiplicación, siempre en problemas de los tipos de razón o comparar.

Para los problemas de producto cartesiano, se les instruyó en el uso de un diagrama de árbol, como hemos comentado. Todos los profesores, incluso aquellos que no acabaron el diseño, concedieron un énfasis mayor a la enseñanza de estos problemas y su representación gráfica, dedicando un espacio de tiempo, dentro de sus horas de matemáticas, para enseñarlos. Esto se refleja en el uso que hacen los alumnos del diagrama de árbol para resolver dichos problemas, que mostramos en la tabla 5.17.

Aula	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Multiplic.	5	8	0	3	6	0	6	0	0	0	3	8	11
Dividir	0	21	1	0	5	5	2	0	0	0	0	12	11

Tabla 5.17

Con esta otra forma de representación y resolución gráfica se repite la misma situación que con el otro sistema de representación gráfica. Existen dos aulas, en las cuales un gran número de niños utilizan esta sistema como método yuxtapuesto de resolución de problemas.

En la tabla 5.18 expresamos el uso que hacen, por cursos y en los distintos problemas de estructura multiplicativa, del SRVG.

	P. 4 Razón	P. 13 Comp.	P. 14 Pr. cart.	Multipl.	P. 7 Agrup.	P. 8 Comp.	P. 9 Pr. cart.	Dividir
3º	0	0	3	3	0	0	0	0
4º	14	7	13	37	3	4	22	29
5º	23	4	35	62	5	17	35	57

Tabla 5.18

5.3.3 Los problemas de dos operaciones aritméticas

Se realiza en el mismo contexto que los problemas de estructura aditiva y multiplicativa. Sin embargo, debemos señalar que no existe en la instrucción una parte amplia para los problemas de dos operaciones, pues nuestro principal objetivo se basa en ver cómo los niños generalizan el sistema de representación visual-geométrico a estos problemas. Al mismo tiempo, hacemos un estudio de las dificultades que presentan los alumnos al resolverlos.

La elección de los problemas de dos operaciones para los tests, es una tarea compleja, ya que la cantidad de combinaciones que se puede hacer con dos operaciones (combinaciones de 4 operaciones tomadas de dos en dos: $C_{4,2}$= 6 más los problemas de operaciones iguales), dan en total 10 problemas distintos, sin tener en cuenta la estructura semántica de cada problema, en cuyo caso se desbordaría la cantidad de situaciones posibles.

Por ello, decidimos elegir 5 problemas que nos sirvieran como muestra representativa para evaluar la capacidad para enfrentarse a estos problemas, fijándonos solamente en las operaciones que conllevaban. Les presentamos problemas donde intervenían: una suma y una resta; una suma y una multiplicación; una suma y una división; una resta y una multiplicación, y una multiplicación y una división, siendo la estructura semántica y el contexto muy similares a los que aparecen en sus libros de texto.

En la tabla 5.19 podemos ver los enunciados y, a continuación expresamos las operaciones aritméticas y la categoría semántica de cada una de ellas. Como situaciones especiales podemos señalar el problema 2, que permite su resolución por dos caminos y el problema 10, donde un dato se presenta en forma no numérica: duros/docenas.

Problemas de dos operaciones aritméticas

Pretest	Postest
2. Compré un libro por 350 ptas, un cuaderno por 120 pesetas y una carpeta cuyo precio no recuerdo. Las tres cosas me costaron 597 pesetas. ¿Cuánto me costó la carpeta? **Suma(combinación)-resta(combinación)** **Resta(combinación)-resta(combinación)**	**2.** Tres albañiles colocaron 725 baldosas. El primero colocó 325 y el segundo 146. ¿Cuántas baldosas colocó el tercero? **Suma(combinación)-resta (combinación)** **Resta(combinación)-resta (combinación)**
10. Mi abuela había guardado 382 pesetas. ¿Cuánto le falta para tener 125 duros? **Multiplicación (razón)- resta(igualación)**	**10.** El supermercado hizo un pedido de 475 huevos. ¿Cuántos huevos le faltan para tener 42 docenas? **Multiplicación (razón)-resta (igualación)**
15. Para hacer carteles compramos 5 juegos de rotuladores. Cada juego de rotuladores cuesta 72 pesetas. Si los gastos los pagamos entre 6 personas. ¿Cuánto le toca pagar a cada persona? **Multiplicación(razón)-División (reparto)**	**15.** En el comedor de la escuela almuerzan 208 niños. Cada uno ensucia 3 platos. Si los platos los lavan entre 6 personas, ¿cuántos platos lava cada persona? **Multiplicación (razón)-división (reparto)**
18. Para hacer cometas compramos 6 rollos de hilo. Cada rollo costó 63 pesetas. También compramos papel que costó 309 pesetas. ¿Cuánto costó la compra? **Multiplicación(razón)-suma(combinac)**	**18.** Juan compró 6 cuadernos. Cada cuaderno le costó 75 pesetas. También compró una caja de rotuladores de 516 pesetas. ¿Cuánto le salió la compra? **Multiplicación(razón)-suma(combinac)**
19. Un camionero recorre un día 132 kilómetros y al día siguiente 36 kilómetros más que el primer día. Si el camionero hace una parada cada 8 kilómetros. ¿Cuántas paradas hizo el segundo día? **Suma (comparación)- división (agrupamiento)**	**19.** Una pieza de tela mide 125 metros, otra pieza mide 85 metros más. Si queremos vender la segunda en trozos de 5 metros ¿cuántos trozos obtendremos? **Suma (combinación)- división (agrupamiento).**

Tabla 5.19

1.- Capacidad para resolver problemas de dos operaciones.

Los problemas de dos operaciones han resultado ser mucho más difíciles que los de una operación, como vamos a ver a continuación.

Grupo experimental vs grupo control:

En la tabla 5.20 presentamos la cantidad de problemas que son capaces de resolver los alumnos en el pretest y postest del grupo experimental y en la tabla 5.21, del grupo control.

	No los hacen	Hacen todos mal	Hacen 1 bien	Hacen 2 bien	Hacen 3 bien	Hacen 4 bien	Hacen todos bien
Pretest	27%	7%	11%	14%	14%	17%	10%
Postest	30%	5%	4%	9%	18%	23%	11%

Tabla 5.20

	No los hacen	Hacen todos mal	Hacen 1 bien	Hacen 2 bien	Hacen 3 bien	Hacen 4 bien	Hacen todos bien
Pretest	39%	16%	8%	7%	11%	15%	4%
Postest	42%	11%	9%	9%	8%	14%	7%

Tabla 5.21

En los apartados anteriores encontramos que, promediando los dos grupos en el pretest, un 43% resuelven correctamente todos los problemas aditivos, y este porcentaje baja al 22% en los multiplicativos y a un 7% en los de dos operaciones.

En el postest, los resultados han sido un 51% los que resuelven todos los problemas aditivos, un 41% en los multiplicativos y un 9% en los de dos operaciones. Por tanto, no sólo son los que menos aciertos tienen, sino también los que menos mejoran.

Los porcentajes de aciertos para cada problema los podemos ver en la tabla 5.22.

	Pretest		Postest	
Problema	G. experimen	G. control	G. experim.	G. control
2. (+ -)	67%	46%	58%	39%
10. (x, -)	17%	7%	30%	11%
15. (x, :)	53%	38%	52%	35%
18. (x, +)	55%	40%	61%	51%
19. (+, :)	40%	27%	47%	34%
Total	46%	32%	50%	34%

Tabla 5.22

Estos resultados nos confirman que el porcentaje medio de resolución de problemas de dos operaciones es inferior al 50%.

* Por cursos y por sexos:

La tabla 5.23 presenta los porcentajes de problemas bien resueltos en los distintos cursos en el pretest, tanto para el grupo experimental como para el grupo control.

	Grupo experimental			Grupo control		
Problema	3º	4º	5º	3º	4º	5º
2.	62%	67%	69%	16%	52%	59%
10.	18%	11%	22%	2%	4%	12%
15.	42%	43%	64%	6%	43%	53%
18.	53%	46%	61%	18%	45%	48%
19.	27%	34%	50%	0%	36%	38%
total	40%	40%	53%	8%	36%	42%

Tabla 5.23

Podemos observar, en primer lugar, que los alumnos de 3º del grupo control presentan una media de resolución muy por debajo de todos los grupos.

El problema 2, cuyas operaciones son una suma y una resta (o dos restas), es superado en porcentajes similares en todos los cursos, siendo el problema nº 10 el que más dificultades creó en todos. El problema nº 10 corresponde a una multiplicación (tipo razón) y una resta (tipo igualar), pero presenta un dato en forma no numérica: duros (en el pretest) y docenas (en el postest), lo cual fue determinante en la dificultad del problema.

En el conjunto de los problemas, el curso es una variable que interviene en la dificultad de los problemas. Así, en el grupo experimental no hay diferencias entre 3º y 4º (40% de aciertos) y sí con 5º (53%), y en el grupo control, hay unas diferencias muy marcadas, sobre todo con el grupo de 3º.

De nuevo, podemos ver en la tabla 5.24 que en el pretest del grupo experimental, las niñas obtienen unos porcentajes superiores, mientras en el grupo control son los niños los que aventajan a las niñas.

	Grupo experim.		Grupo control	
Problema	niños	niñas	niños	niñas
2.	64%	70%	43%	49%
10.	17%	18%	9%	4%
15.	43%	63%	43%	30%
18.	47%	63%	41%	38%
19.	37%	44%	28%	26%
Total	42%	52%	33%	29%

Tabla 5.24

En la tabla 5.25 podemos ver los resultados en el postest, por cursos y por sexos. Los resultados son similares al Pretest y sólo se ha producido una mejora media de un 4% en el grupo experimental y de un 2% en el grupo control.

	Grupo experimental					Grupo control				
Prob	**3º**	**4º**	**5º**	**niños**	**niñas**	**3º**	**4º**	**5º**	**niños**	**niñas**
2.	41%	49%	71%	55%	60%	20%	32%	54%	41%	36%
10.	27%	28%	33%	27%	33%	0%	7%	20%	15%	5%
15.	36%	48%	61%	47%	58%	12%	29%	52%	39%	29%
18.	58%	50%	71%	54%	66%	14%	52%	72%	53%	48%
19.	44%	29%	61%	42%	52%	8%	34%	50%	40%	26%
total	**41%**	**41%**	**59%**	**45%**	**54%**	**11%**	**31%**	**50%**	**38%**	**29%**

Tabla 5.25

* <u>Análisis de los resultados según las operaciones que intervienen</u>

Si analizamos los problemas fijándonos en las operaciones que intervienen, vemos que el que sólo contiene operaciones aditivas (suma-resta o resta-resta), ha resultado ser el más fácil.

Las restantes combinaciones: multiplicación-división, multiplicación-suma y suma-división tienen porcentajes similares, siendo el de multiplicación-resta el más complicado, hecho que atribuimos a la presentación de un dato en forma no numérica.

2.- Análisis del uso del sistema de representación visual-geométrico.

El sistema de representación visual-geométrico es utilizado por los alumnos, en las aulas y cursos señalados en la tabla 5.26.

Aula Curs	**1** 5º	**2** 5º	**3** 5º	**4** 4º	**5** 4º	**6** 4º	**7** 5º	8 3º	9 5º	10 4º	11 3º	12 4º	13 5º
2 op	2	22			12	4							1

Tabla 5.26

Los resultados son similares a los encontrados con los otros tipos de problemas. Por una parte, encontramos aulas donde un número alto de niños lo utilizan y algunos de varias aulas; entre ellos, un alumno del aula 13, que no terminó el diseño de instrucción, fue capaz de generalizarlo en el problema 18 (multiplicación-suma).

En el problema 2, encontramos un niño que lo resuelve con un sólo diagrama y dos lo resuelven de forma única mediante el SRVG.

Estos resultados nos prueban, de nuevo, la idea que la utilización del SRVG viene determinada por dos variables: individuales (preferencias por el sistema) y del profesorado (convencimiento acerca de la utilidad del sistema).

3.- Utilización de estrategias generales de resolución.

Las estrategias utilizadas son las que ya hemos comentado con los problemas de estructura aditiva, que se repiten igual en los de estructura multiplicativa y en los dos operaciones aritméticas.

5.4 EJECUCIÓN DE LAS OPERACIONES

Planteamos en el pretest-postest seis operaciones (dos sumas, dos restas, una multiplicación y una división), con el objetivo de analizar cómo las ejecutaban.

5.4.1 Hipótesis estadísticas

Las hipótesis que nos planteamos son:

H_{04}.- No existen diferencias en la mejora de la ejecución correcta de las operaciones entre los alumnos del grupo experimental y del grupo control.

H_{05}.- No existen diferencias significativas en la correcta ejecución de las operaciones en los distintos cursos.

H_{06}.- No existen diferencias significativas en la correcta ejecución de las operaciones por sexos.

5.4.2 Relación entre la variable dependiente: número de operaciones bien ejecutadas y las variables grupo, curso y sexo

De forma similar al apartado anterior, utilizamos un ANOVA factorial mixto, tomando como variable dependiente el número de operaciones bien hechas, y reconsiderando los tres factores intersujetos (GRUPO, SEXO y CURSO) y un factor de medidas repetidas (MOMENTO).

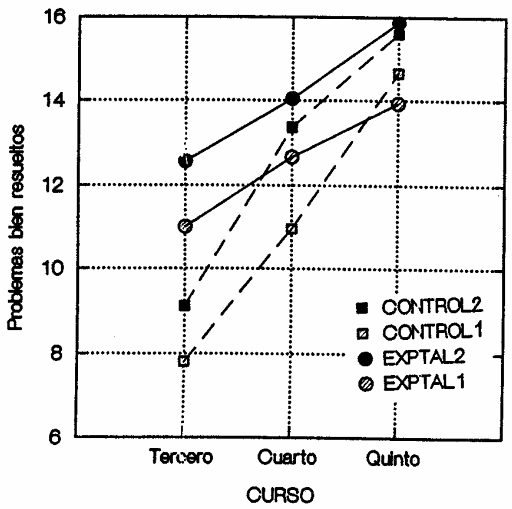
Estudio de la influencia del factor grupo

A continuación, presentamos un resumen de los resultados obtenidos, (Anexo, p. 165).

La interacción entre los factores GRUPO y MOMENTO no ha resultado estadísticamente significativa {$F(1, 406)= 2.076$, $p= .150$}. Por tanto, no se ha producido una mejora en el grupo experimental sobre el grupo control. En el grupo experimental, las medias Pretest y Postest son, respectivamente, 4.658 y 4.966; en el grupo control, han sido 4.537 y 5.065; así, la mejora ha sido muy similar en ambos grupos: 0.308 para el grupo experimental y 0.528 para el grupo control.

Estudio de la influencia del factor curso

Tampoco se ha encontrado una interacción significativa entre los factores GRUPO, MOMENTO y CURSO: F(2, 406)= 0,469, p=.626.



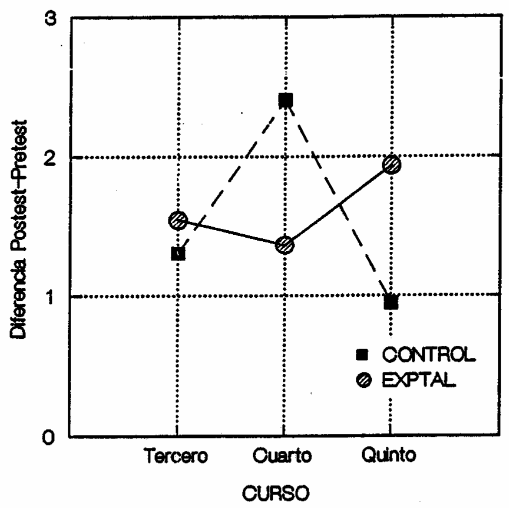


Figura 5.5 Figura 5.6

En las Figuras 5.5 y 5.6 podemos observar una mejora mayor del Pretest al Postest en el grupo control respecto de la observada en el grupo experimental; esta diferencia es más acusada en los cursos 3º y 4º, pero no son significativas.

Otros resultados son:

* Se observan diferencias estadísticamente significativas entre los tres Cursos: F(2, 406) = 18,345, p=.000. En efecto, las medias en 3º, 4º y 5º han sido, respectivamente, 4,247, 4,804 y 5,033.
* También se ha encontrado una interacción significativa entre los factores GRUPO y CURSO: F(2, 406) = 3,605, p=.028. En efecto, mientras que en el grupo control las medias crecen de forma lineal a lo largo de los tres cursos (3,896, 4,688 y 5,246), en el grupo experimental se observa un crecimiento curvilíneo (4,390, 4,859 y 4,950).
* La ejecución media en el Postest (4,995) es superior a la del Pretest (4,622) : F(1, 406) = 24.774, p=.000, resultado calculado promediando los dos grupos y que

era de esperar.

Estudio de la influencia del factor sexo

No se ha encontrado ninguna interacción entre el factor sexo y el número de operaciones correctamente ejecutadas: $F(1,406)=0.660$, $p=.417$. Por ello, se acepta también la hipótesis nula.

5.4.3 Análisis de la ejecución correcta de las operaciones

En estos niveles los alumnos cometen frecuentes errores en las operaciones, muchos de ellos debidos posiblemente a falta de concentración. Analizamos primero, cómo ejecutan las sumas y las restas, y, en segundo lugar, las multiplicaciones y divisiones.

5.4.3.1 Ejecución de las operaciones de sumar y restar

En la tabla 5.27 podemos ver los resultados obtenidos en la ejecución de las operaciones (expresados en porcentajes de aciertos) y el número de alumnos que no lo intentan en el pretest y en la tabla 5.28 en el postest.

	117+48	327+285	158-129	305-36	No lo hacen
Gr. exper.	78%	80%	72%	65%	13-15%
Gr. control	66%	71%	60%	57%	19-24%

Tabla 5.27

	134+90	287+134	236-85	175-83	No lo hacen
Gr. exper.	74%	73%	70%	71%	19-22%
Gr. control	67%	66%	63%	59%	26-28%

Tabla 5.28

Los alumnos que ejecutan mal las operaciones están en torno al 10%, resolviendo mejor las sumas que las restas. La operación que dio porcentajes menores de éxito, fue la resta que contenía un cero.

Podemos observar (tabla 5.29) como, en conjunto, el número de operaciones que mejoran del pretest al postest, es totalmente similar en ambos grupos (7% en el grupo experimental y un 6% en el control).

		No hacen	Hacen todas mal	Hacen 1 bien	Hacen 2 bien	Hacen 3 bien	Hacen todas bien	Diferencia
Grupo	Pretest	82	1	5	33	66	168	
exper.	Postest	97	0	4	16	46	192	**7%**
Grupo	Pretest	56	2	7	14	38	73	
control	Postest	58	0	3	12	33	84	**6%**

Tabla 5.29

5.4.3.2 Ejecución de las operaciones de multiplicar y dividir

En los Programas del Ciclo Medio de la EGB, se indica que la multiplicación y la división son las operaciones que se deben trabajar y consolidar. Por ello, encontramos que muchos niños de 3º presentan aún dificultades con ellas. En la tabla 5.30 presentamos los porcentajes de aciertos al ejecutar estas operaciones para el grupo experimental y en la tabla 5.31, para el grupo control.

Pretest (35x9; 408:6)			Postest (34x7; 228:6)		
No la hacen	Mal	Bien	No la hacen	Mal	Bien
16%	10%	74%	23%	7%	70%
19%	20%	61%	24%	9%	67%

Tabla 5.30

Pretest (35x9; 408:6)			Postest (34x7; 228:6)		
No lo hacen	Mal	Bien	No lo hacen	Mal	Bien
26	10%	64%	30%	7%	63%
41%	9%	50%	30%	14%	56%

Tabla 5.31

En la ejecución de las operaciones no se producen variaciones importantes. En el postest, es menor el porcentaje de los que hacen mal la multiplicación y aumenta el número de alumnos que no la hacen. En la división, los porcentajes de ejecución correcta aumentan ligeramente en el postest.

5.5. LOS PROBLEMAS INVENTADOS

5.5.1 Introducción

En la resolución de problemas aritméticos verbales, conocer el significado que los niños asocian a la estructura canónica de cada operación aritmética mediante la invención de un problema que corresponde a dicha estructura, nos facilita información relevante para analizar los formatos y contextos en que son formulados los problemas. Por ello, es importante saber cómo se enfrentan los niños a la invención de problemas, a partir de una estructura canónica determinada.

Numerosos estudios han tratado de valorar las dificultades que experimentan los alumnos en los problemas, según la estructura semántica de los mismos (Carpenter y Moser, 1982, Nesher, 1982, Fuson, 1992; Greer, 1992, entre otros), pero menos han sido los trabajos dedicados a la invención de problemas, a partir de las operaciones aritméticas (Brown, 1981, Nesher, 1988). Un análisis de los problemas que los alumnos inventan puede contribuir a un mejor conocimiento de las dificultades de los mismos.

Para clasificar los problemas inventados utilizamos las taxonomías ya indicadas; para los problemas de estructura aditiva, la de Riley, Greeno y Heller (1983) y Carpenter y Moser (1984), que los agrupan en: problemas de cambio, combinación, comparación e igualación; y para los problemas de estructura multiplicativa, las categorías de Peled y Nesher (1988), que divide a los problemas de multiplicar en razón, comparación y producto cartesiano, y a los de dividir en reparto, agrupamiento, comparación y producto cartesiano.

Brown (1981) pidió a 58 niños de 11 y 12 años, que inventaran un enunciado para las expresiones 9 ± 3 y 84 ± 28, y encontró que la tercera parte elegían un modelo de combinación y otro tercio de cambio. Concretamente, para la operación 84-28, obtuvo los siguientes resultados:

Tipo	Frecuencia (N= 61)
Cambio	40 (66%)

Igualación	2 (3%)
Combinación	1 (1,5%)
Resp. Erróneas/No contesta	18 (29,5%)

Con respecto a los problemas de estructura multiplicativa, Brown (1981) pidió de igual forma a los niños que inventasen un enunciado para las expresiones: 9 :3, 84 : 28, 9 x 3 y 84 x 28. Los resultados que obtuvo fueron:

Brown, 1981 (niños 11 años)	Porcentaje éxito n=497
9 : 3	60%
84 : 28	42%
9 x 3	45%
84 x 28	31%

Tabla 5.32

Sobre problemas de multiplicar, Nesher (1988) pidió a niños de 4º, 5º y 6º que inventaran un problema para una multiplicación. En la tabla 5.33, comparamos los resultados que obtuvo con los de Brown, clasificados según las categorías semánticas:

	Brown (11 años) (n=66)	Nesher 4º (n=88)	Nesher 5º (n=47)	Nesher 6º (n=61)
Razón	35%	31%	26%	44%
Comparar	7,5%	50%	49%	23%
Pr. cartesiano.	0%	1%	6%	0%
Otros	57.5%	18%	19%	33%

Tabla 5.33

Los resultados de Nesher (1988) son muy diferentes en relación con la multiplicación, ya que encuentra (con niños de 4º, 5º y 6º) en los problemas de multiplicar, que son los problemas de comparar los más inventados, aunque como ella sugiere, esta diferencia pudiera atribuirse a la instrucción desarrollada por el profesorado en relación con determinados factores lingüísticos del Hebreo.

Finalmente, Brown (1981) encontró que los problemas de reparto son los que más inventan los niños para una división, en una proporción de 10 veces superior que para el agrupamiento.

Los instrumentos que utilizamos fueron un pretest y un postest, en los cuales había 6 operaciones: 2 sumas, 2 restas, 1 multiplicación y 1 división, con números elegidos al azar, pidiéndoles que para cada una de ellas inventasen el enunciado de un problema aritmético.

Las operaciones son:

	Suma 1	Resta 1	Suma 2	Resta 2	Multiplicac.	División
Pretest	117+48	158-129	327+285	305-36	35x9	408:6
Postest	134+90	236-85	287+134	175-83	34x7	228:6

Tabla 5.34

Nuestra hipótesis general, es que los alumnos responden según los esquemas configurados por la instrucción recibida. Por tanto, si los esquemas se mantienen, no debe haber respuestas diferentes en los alumnos del grupo control y sí en los alumnos del grupo experimental, que reciban la instrucción adecuada, ya que estos esquemas se modificarían por la "instrucción consciente" desarrollada por el profesorado. De esta forma, los alumnos del grupo experimental, cuyos profesores son conscientes de las distintas clases de problemas, atendiendo a los factores semánticos, inventarán en el postest problemas aritméticos de mayor variedad que el grupo control.

De igual manera, parece obvio conjeturar que la mayor parte de los problemas inventados en el pretest, deben pertenecer a los grupos semánticos que han sido más trabajados, bien según la instrucción desarrollada por el profesor o bien según las propuestas formuladas por los libros de texto.

5.5.2 Hipótesis estadísticas

Las hipótesis planteadas son

H_{07}: No existen diferencias en la mejora de la cantidad de problemas bien inventados por los alumnos del grupo experimental y los alumnos del grupo control.

$H_{08:}$ No existen diferencias en la invención de problemas por Cursos.

$H_{09:}$ No existen diferencias en la invención de problemas por Sexos.

5.5.3 Relación entre el número de problemas bien inventados y las variable grupo, curso y sexo

Repetimos el mismo análisis, tomando como variable dependiente el número de problemas bien inventados y como variables independientes las variables grupo, curso y sexo, (Anexo, p.177).

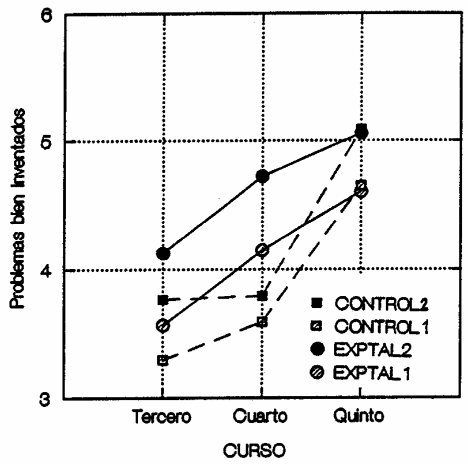
Estudio de la influencia del factor grupo

Mostramos, a continuación, los resultados obtenidos:

La interacción entre los factores GRUPO y MOMENTO no ha resultado estadísticamente significativa {$F(1, 369) = 0.255$, $p= .614$}. Por tanto, no parece haberse producido una mejora superior en el grupo experimental que en el grupo control. En efecto, en el grupo experimental las medias Pretest y Postest son, respectivamente, 4.264 y 4.775; en el grupo control han sido 4.041 y 4.402; así la mejora del Pretest al Postest en ambos grupos ha sido muy similar: 0.511 para el grupo experimental y 0.361 para el grupo control, y aunque la mejora es superior en el grupo experimental no es estadísticamente significativa.

Estudio de la influencia del factor curso

Tampoco se ha encontrado una interacción significativa entre los factores GRUPO, MOMENTO y CURSO: $F(2, 369) = 0.381$, $p= .684$. En las figuras 5.7 y 5.8 podemos observar cómo en los tres cursos el grupo experimental ha presentado una mejora del Pretest al Postest superior al grupo control, y sólo en 4º curso esta mejora ha sido considerable (mejora de 0.575 para el grupo experimental frente a una mejora de sólo 0.206 para el grupo control), pero siguen siendo valores no significativos.



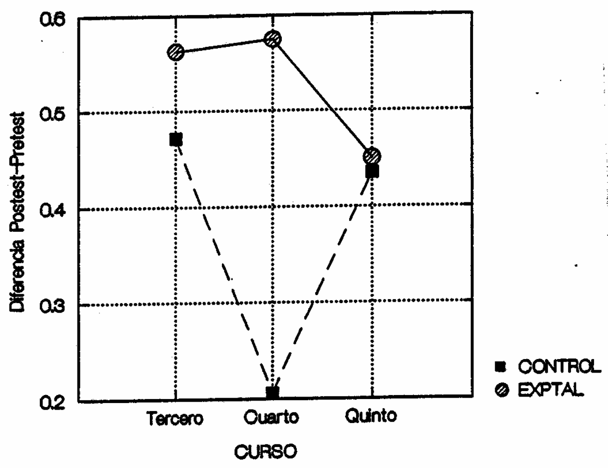


Figura 5.7 Figura 5.8

Como era de esperar, se observan diferencias estadísticamente significativas entre los tres CURSOS: F(2, 369)=15,264, p=.000. Las medias en 3º, 4º y 5º han sido, respectivamente, 3.771, 4.227 y 4.840.

* La ejecución media en el Postest (4.680) es superior a la del Pretest (4.207): F(1, 369) = 14.743, p= .000, cuando se promedian ambos grupos.

Estudio de la influencia del factor sexo

Análogamente, se desarrolló el estudio de la influencia del factor sexo. Los resultados del ANOVA son: F(1,369)=0.253, p=.615. Por tanto, no existen diferencias estadísticamente significativas, teniendo en cuenta la variable sexo.

5.5.4 Análisis de los problemas inventados

Junto a las hipótesis estadísticas ya mencionadas, nos planteamos también hacer un análisis más pormenorizado sobre el tipo de problemas que inventaban los niños para cada operación aritmética. Este análisis lo concretamos en los siguientes objetivos:

1º.- Conocer las dificultades que experimentan los niños al tener que inventar problemas aritméticos verbales, a partir de una operación aritmética dada.

2º.- Estudiar las categorías semánticas de los problemas que inventan, y las posibles diferencias por cursos o sexos.

3º.- Comparar las categorías semánticas de los problemas que inventan, antes y después de la instrucción, tanto en el grupo experimental como en el grupo control.

4º.- Analizar el formato y el contexto de los enunciados de los problemas inventados.

Comentaremos, primero los resultados relacionados con los problemas aditivos y en segundo lugar, con los problemas de estructura multiplicativa.

5.5.4.1 Problemas inventados a partir de una suma o una resta

En general, los alumnos de más de 8 años resuelven con éxito los problemas aditivos de las distintas categorías semánticas, hecho que aparece en numerosos estudios (Carpenter, 1985) y que nosotros también hemos encontrado en este trabajo. Sin embargo, los resultados son inferiores cuando se les plantea inventar enunciados de problemas resolubles con dichas operaciones.

Analizamos, en primer lugar, el número de problemas correctamente inventados para las operaciones propuestas. Como podemos observar, más de un 63% del grupo experimental (tabla 5.32) y más de un 43% del grupo control (tabla 5.33), inventan correctamente un problema de sumar o restar.

	Suma 1	Resta 1	Suma 2	Resta 2	Total
Pretest	66.5%	63%	74%	68%	355
Postest	70%	71%	71%	70%	355

Tabla 5.32

	Suma 1	Resta 1	Suma 2	Resta 2	total
Pretest	44%	43%	47%	47%	190
Postest	44%	43%	45%	45%	190

Tabla 5.33

El grupo control presenta en el pretest una media inferior al grupo experimental, pero no existen cambios apreciables entre el pretest y el postest, así como entre los alumnos de un mismo grupo en los problemas propuestos para las expresiones dadas, siendo los cambios producidos entre el pretest y el postest similares en ambos grupos.

5.5.4.2 Problemas inventados a partir de una multiplicación división

En los problemas de multiplicar y dividir (tabla 5.34 para el grupo experimental y 5.35 para el grupo control), los resultados son similares entre ellos e inferiores a los de los problemas aditivos, siendo la ganancia experimentada del pretest al postest muy semejante.

	Multiplicación	División
Pretest	52%	56%
Postest	59%	60%

Tabla 5.34

	Multiplicación	División
Pretest	33%	30%
Postest	34%	38%

Tabla 5.35

La tabla 5.36 muestra los resultados (expresados en porcentajes) del problema de sumar 1 del pretest, correspondiente al grupo experimental.

	3º	4º	5º
no hacen	24%	26%	26
lo hacen mal	14%	11%	3%
cambio	18%	32%	31%
combinación	42%	28%	36
comparaciónr	0%	3%	3%
igualación	2%	0%	1%

Tabla 5.36

En ella se refleja que son los problemas del tipo combinación, seguidos por los de cambio, los problemas que los niños inventan para la suma.

Para el problema de restar 1 (en el grupo experimental y en el pretest), los resultados son los indicados en la tabla 5.37. Por tanto, aquí son los problemas de cambio los más interiorizados por los niños. Es interesante destacar que los problemas de combinación casi desaparecen y, sin embargo, aparecen algunos de comparación o igualación.

	3º	4º	5º
no hacen	26%	27%	26%
lo hacen mal	30%	10%	5%
cambio	35%	54%	59%
combinación	0%	1%	0.5%
comparación	4.5%	3%	6.5%
igualación	4.5%	5%	3%

Tabla 5.37

A continuación, presentamos en la tabla 5.38, los porcentajes de alumnos, en los distintos cursos, que inventan o no, problemas para la multiplicación en el pretest, señalando las distintas categorías. Podemos apreciar que son los problemas de razón los que más inventan los niños, incrementándose las diferencias de éstos con los de comparación a medida que avanza el curso.

%	3º	4º	5º
no hacen	35%	34%	24.5%
lo hacen mal	26%	21%	15%
razón	24%	33%	49%
comparación	15%	12%	11%
prod. cartes.	0%	0%	0.5%

Tabla 5.38

Finalmente, en la tabla 5.39 mostramos los resultados para el problema de dividir (en el grupo experimental y en el pretest). En los problemas de dividir, son los de reparto los que proponen la mayoría.

	3º	4º	5º
no hacen	41%	30%	31%
lo hacen mal	21%	15%	7%
reparto	30%	46%	53%
agrupamiento	1.5%	6%	7%
comparación	5%	3%	2%
prod. cartes.	1.5%	0%	0%

Tabla 5.39

En los distintos problemas, los resultados son análogos al considerarlos por sexos y por aulas, tanto en el grupo experimental como en el control, repitiéndose los resultados en el postest.

Al encontrar estas respuestas con pautas tan determinadas, decidimos hacer un estudio sobre los libros de texto para indagar si había una relación entre los problemas inventados y los problemas que aparecen en los libros de texto.

5.5.5 Análisis de los tipos de problemas en los libros de texto

Relatamos en este apartado los resultados obtenidos al analizar los libros de texto de 1º a 5º, tanto en el grupo experimental como en el control, haciendo un recuento del tipo de problemas que allí se plantean.

Tomamos como ejemplo la Editorial más representativa (Santillana, 1988), por ser la más utilizada (60%). Las otras editoriales presentan una estructura análoga. Encontramos que los problemas aditivos de una sola operación sólo aparecen en los Cursos 1º, 2º y 3º; en los cursos 4º y 5º se proponen problemas de operaciones combinadas (suma y resta) o problemas de una operación de multiplicar y dividir. Los resultados desde las categorías semánticas para los problemas de sumar fueron:

	1º	2º	3º	4º y 5º	total problemas
Cambio	2	2	6	-	10
Combinación	24	12	18	-	54
Comparación	0	1	0	-	1
Igualación	0	0	0	-	0

Tabla 5.40

Y para los problemas de restar:

	1º	2º	3º	4º y 5º	total problemas
Cambio	20	10	11	-	41
Combinación	3	1	4	-	8
Comparación	7	1	3	-	11
Igualación	2	0	1	-	3

Tabla 5.41

Los problemas de multiplicar y dividir aparecen en 2º y 3º, ya que a partir de 4º vienen siempre como problemas combinados de dos o más operaciones.

Multipl:	Razón	Compar	P. cart.	División	Reparto	Agrup.	Comp.	P. cart.
2º	55	2	0		18	11	2	0
3º	49	1	0		16	24	5	0
Total	104	3	0		34	35	7	0

Tabla 5.42

En los de multiplicar los de tipo razón, son casi los únicos que están presentes; sin embargo, en los de dividir aparecen igualados los de reparto o agrupamiento.

Los problemas de dos operaciones mantienen una proporción similar a los de una operación.

5.6. DISCUSIÓN

Finalmente, a modo de resumen vamos a indicar los principales resultados obtenidos y las relaciones encontradas entre el éxito en la resolución de problemas, el uso del SRVG, la mejora en la ejecución de las operaciones y la invención de los problemas, y los factores vinculados a las tareas (factores lingüísticos, factores semánticos, operaciones), las características del sujeto (edad -indicada por el Curso, sexo, preferencias individuales) y el desarrollo del diseño de instrucción (DIRPA), siguiendo las categorías indicadas por Lester (1983) y que hemos comentado en el Capítulo 1. No mencionamos la categoría de procesos, pues no es observable en los ejercicios escritos.

En la resolución de problemas

Se produce una mejora en la capacidad de resolución de los mismos, pero esta mejora ha sido totalmente similar en los grupos experimental y control.

Todos los alumnos, en el postest, tienen más éxito en la resolución de problemas en general, pero esta mejora es superior en los problemas aditivos, menor en los de multiplicar y dividir, siendo los problemas de dos operaciones los que alcanzan el máximo de dificultades.

Como esperábamos, sí hay diferencias por cursos, y éstas son más notorias en el curso 3º. Los alumnos de 5º alcanzan unos porcentajes bastante elevados de éxito en los problemas aditivos.

Las diferencias por sexo, como apuntan Fennema y Hart (1994), van desapareciendo, siendo algunas veces los porcentajes de aciertos más altos para las niñas, pero sin ser valores significativos.

Los porcentajes de aciertos en los diferentes problemas (calculados en el pretest y promediando ambos grupos) son un 73% para los problemas de sumar, un 66% para los de restar, un 56,5% para los de multiplicar, un 41,5% para los de dividir y un 39% para los de dos operaciones. Estos datos, por una parte coinciden con los obtenidos en otras investigaciones (Nesher, 1982), y por otra, nos ponen de manifiesto que la operación es otro factor ligado a la dificultad de los mismos.

Sin embargo, del análisis de los problemas de las distintas categorías semánticas se desprende que no existen diferencias entre ellas. Hemos encontrado cómo en los distintos cursos los niveles de dificultad de los problemas no coinciden, aspecto que ya afirmaban Fuson-Willis (1986) en un estudio sobre los problemas verbales de comparación e igualación: "*es falsa la asunción general de que los tipos semánticos de los problemas verbales son estables en su grado de dificultad*".

Hemos visto que cuando en un problema se introduce algún dato de forma no numérica, o se utiliza alguna palabra (palabras clave) que tienen asociada a una operación para un problema que se resuelve con otra, aumenta la dificultad del mismo. Esto nos pone de manifiesto la importancia de los factores lingüísticos en la dificultad de los problemas.

El uso del sistema de representación

En este tipo de pruebas escritas, la observación del uso del sistema de representación es limitada. No obstante, detectamos una fuerte relación entre el uso por los alumnos del SRVG y el profesor. En consecuencia, parece deducirse una correlación entre las creencias del profesor (en este caso, el convencimiento de la importancia del uso de este nuevo sistema de representación) y sus decisiones didácticas, reflejadas en el hincapié que hacen sobre ellos para que lo utilicen. Así, encontramos aulas donde ningún niño hizo uso del sistema en el postest, y otra (aula nº 2), donde todos los niños usan alguna vez el SRVG.

Se vislumbra, también, la existencia de preferencias individuales por el uso de sistemas gráficos, ya que este sistema (SRVG) va a ser utilizado, al menos por un niño en casi todas las aulas, y que, generalmente, determinados niños repiten su uso.

El sistema es usado preferentemente en los problemas aditivos, y dentro de éstos en los de sumar, mientras en los problemas de estructura multiplicativa, es menor el número de alumnos que lo utilizan.

Paralelamente, el diagrama de árbol es utilizado por bastantes alumnos de diferentes clases, lo cual nos refuerza la idea de la importancia que tiene el lenguaje gráfico para la mejor comprensión de los problemas por parte del alumnado.

Finalmente, es también interesante señalar que los alumnos que han comprendido la sintaxis del SRVG son capaces, con muy poca ayuda, de generalizarlo a los problemas de dos operaciones.

La ejecución de las operaciones

La ejecución de las operaciones aditivas experimenta una pequeña mejoría en ambos grupos, y por tanto, no imputable al desarrollo del diseño de instrucción, mientras las operaciones multiplicación y división no mejoran en ninguno de los dos grupos y ninguna de estas últimas supera el 70% de ejecuciones correctas.

Los problemas inventados

Los resultados encontrados muestran que los niños tienen interiorizada para cada operación aritmética, un tipo concreto de categoría semántica que sería, para la suma: combinación o cambio; para la resta: cambio; para la multiplicación: razón, y para la división: reparto, a pesar de que los mismos niños son capaces de resolver problemas de las otras categorías semánticas.

Nuestros resultados coinciden con Brown (1981), tanto en los problemas aditivos como multiplicativos, pero difieren en los problemas de multiplicar con Nesher (1988), que encuentra que los problemas de comparación son los que más inventan los niños.

No se han encontrado diferencias significativas entre los problemas inventados por el grupo experimental y por el grupo control. Este resultado niega la primera consideración de la hipótesis general: el grupo experimental mantiene los mismos "esquemas" después de la instrucción recibida. Parece que una instrucción puntual, aunque "consciente" en el sentido indicado de que los profesores conocen y trabajan las distintas categorías semánticas, no produce los cambios deseados en un tiempo corto.

Los problemas inventados por los alumnos coinciden, salvo en el caso de la división, con los problemas propuestos en los libros de texto, lo cual apoya nuestra hipótesis en el sentido de que la categoría semántica viene inducida por la instrucción recibida a largo plazo y no se modifica por una instrucción consciente a corto plazo.

Aunque, en general, las respuestas coinciden con los modelos implícitos propuestos por Fischbeim, Deri, Nello y Marino (1985), nos inclinamos a pensar que es debido más a la instrucción recibida a largo plazo, tanto en la institución escolar como familiar que fomentan estos modelos explícitamente, que a modelos implícitos en los niños. En este sentido, apuntan algunos resultados como los de Nesher (1988) o como la categoría reparto en los problemas de dividir que sobresale a la categoría agrupamiento, a pesar de que en los libros de texto se insiste más en esta última. La explicación pudiera estar en la instrucción recibida a nivel familiar y en las decisiones didácticas del profesorado.

Tenemos que resaltar, que no existen diferencias significativas por sexos o por cursos.

En conclusión, creemos que el aprendizaje por parte de los alumnos del grupo experimental de un nuevo sistema de representación, con su sintaxis y su semántica, que les permite no sólo representar sino también resolver problemas, dentro de un modelo de competencias, no repercute negativamente en la resolución de los mismos. Estos alumnos tienen más éxito e intuimos que los procesos de análisis y comprensión se pueden ver favorecidos.

El que esta mejora no haya sido significativa con respecto a un grupo control, puede deberse a dos factores: el primero, estaría relacionado con el tiempo en el que se implementó el diseño, y el segundo, con la actuación del profesorado del grupo control. Nuestro diseño se desarrolló en un periodo de tiempo corto (3 meses), y la interiorización del esquema partes-todo, y el aprendizaje de un sistema de representación visual geométrico, que tiene una sintaxis y una semántica propia, incluso para los problemas aditivos, requiere un espacio de tiempo superior.

Además, el profesorado del grupo control, adoptó una postura positiva de cara a mejorar la resolución de problemas al saberse involucrado en una investigación, afirmando que se esforzaron mucho más con sus alumnos para que éstos resolvieran bien los problemas (datos que hemos obtenido a partir de entrevistas con los mismos, una vez acabada la investigación y que comentaremos en el Capítulo 7).

CAPÍTULO 6: ESTUDIO CUALITATIVO

6.1 INTRODUCCIÓN

En este Capítulo presentamos los resultados del estudio cualitativo, por medio del cual pretendemos analizar las potencialidades y dificultades que genera la instrucción y el uso, por parte de los alumnos, de un modelo de competencias para resolver problemas aritméticos verbales, usando dos sistemas de representación yuxtapuestos. Al mismo tiempo, analizamos las habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas que los alumnos exteriorizan durante la resolución de los problemas. El Capítulo se divide en dos partes: en la primera se hace una descripción del estudio de un aula, en la cual se desarrolló el diseño de instrucción, y la segunda parte está dedicada al análisis de las entrevistas, tanto las del estudio piloto como las del estudio definitivo.

6.2. ESTUDIO DE UN AULA

6.2.1 Descripción y objetivos

El diseño de instrucción (DIRPA) fue desarrollado en un aula de 2º Ciclo de 2º Nivel de Primaria por la propia investigadora, que actúa como profesora, lo que nos facilitó el análisis del mismo. Esta fase pretende ser fundamentalmente cualitativa, aunque utilizamos los mismos instrumentos de la fase cuantitativa con un doble objetivo: de una parte, obtener datos sobre los alumnos, y por otra, evaluar de forma cualitativa dichos instrumentos.

Los objetivos planteados son dos: analizar el desarrollo del diseño de instrucción, observando los procesos de los alumnos y sus dificultades, y conocer a los alumnos para realizar una mejor selección de los mismos para las entrevistas, al mismo tiempo, esta etapa de familiarización con el entrevistador, favoreció la confianza de los niños para expresarse en ellas con mayor espontaneidad.

El análisis de los resultados lo planteamos con el mismo formato que en el estudio cuantitativo, para poder así compararlos mejor.

6.2.2 Desarrollo del DIRPA

El DIRPA se desarrolló en 20 sesiones, como hemos explicado en el Capítulo 4, generando actitudes positivas en los niños, porque en su desarrollo veían algo que se salía del plan habitual de sus clases.

Los alumnos de esta aula mostraban, en general, una actitud positiva hacia las Matemáticas. Su profesora mantenía una pedagogía activa, con muchos trabajos en grupo y con material manipulativo, lo cual nos permitió seguir la metodología que sugerimos en el propio diseño. De esta forma, los alumnos trabajaban casi siempre en grupos, habiendo una puesta en común al final de las sesiones. El trabajo se vio favorecido por la presencia en el aula de una alumna en prácticas, que, aunque no estaba involucrada en la investigación, puso gran interés en ella, ayudando a los alumnos que tenían más dificultades, y por la propia profesora, que en todo momento, iba orientando a los alumnos y haciendo sugerencias interesantes, dado su mayor conocimiento sobre ellos.

Las primeras sesiones con material manipulativo aumentaron el interés hacia el trabajo. El resto de las sesiones se desarrolló con resultados similares a los grupos anteriores. Unos tienen dificultad para captar el nuevo sistema de representación y otros, lo rechazan, porque consideran que los problemas se resuelven más rápidamente con las operaciones.

Estos alumnos, en sus clases normales de Matemáticas, siguen resolviendo los problemas con su metodología habitual.

Para valorar los resultados, utilizamos tres instrumentos:

* La carpeta de los alumnos, de las cuales seleccionamos 8 que nos permitirán analizar los logros de cada unidad.

* Las actividades finales de las unidades 3, 4 y 5, con las que valoramos lo alcanzado por todos los alumnos.
* El pretest y postest de resolución de problemas.

ANÁLISIS DE LAS CARPETAS:

Para valorar las carpetas, nos hemos planteado las siguientes categorías de control:

Unidad 1: 1) ¿Utilizan correctamente las colecciones de control?
2) ¿Las colecciones de control les permiten comunicar cantidades?

Unidad 2: 1)¿Las representaciones gráficas reflejan el contenido del problema?
2) ¿Son esquemáticas?
3) ¿Utilizan correctamente el SRVG como forma de representación?

Unidad 3: 1) ¿Resuelven los problemas de sumar con el SRVG?
2) ¿Resuelven los problemas de sumar con el SA?
3) ¿Resuelven los problemas de restar con el SRVG?
4) ¿Resuelven los problemas de restar con el SA?

Unidad 4: 1) ¿Resuelven los problemas de multiplicar con el SRVG?
2) ¿Resuelven los problemas de multiplicar con el SA?
3) ¿Resuelven los problemas de dividir con el SRVG?
4) ¿Resuelven los problemas de dividir con el SA?

Unidad 5: 1) ¿Resuelven los problemas de dos operaciones con el SRVG?
2) ¿Resuelven los problemas de dos operaciones con el SA?

Elegimos también un problema (Act.) del que los alumnos tuvieran completa la ficha y valoramos los siguientes aspectos:

1) Viñeta.
2) Datos.
3) Uso del SRVG.
4) Elección y ejecución de la/s operación/es.
5) Igualdad entre las soluciones.

6) Historia,

calificándolos con +, si lo expresa correctamente; - si lo hace mal, y en blanco si no lo hace o no se tienen suficientes elementos para evaluarlo.

Los alumnos sobre los que hemos hecho este estudio, son los seleccionados para las entrevistas. En la tabla 6.1 presentamos los resultados.

	Jorge	**Ana**	**Lara**	**Dácil**	**Alexis**	**Lidia**	**Jonath**	**Tomás**	**Anton**
Un. 1									
1)	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	
2)	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	no	
Un. 2									
1)			sí	sí	sí			no	
2)				no					
3)	sí	sí	sí	no	sí	no			no
Un. 3									
1)	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí
2)	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí
3)	sí	no	sí	sí	sí	sí		sí	no
4)	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	
Un. 4									
1)	sí	no	sí	no	sí	sí		sí	sí
2)	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí
3)	sí	no	no	no	sí	no		no	no
4)	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	no	
Un. 5									
1)	no	no	sí			no			
2)	sí	sí	sí			no			
Act.	37	42	34	30	29	30		40	34
1)	+	+	+	+				+	
2)	+	+	+			-			
3)	+	-	+	+	+	+		+	+
4)	+	+	+	+	+	+		+	+
5)	+	+	+		+	+			
6)	+	+	+						

Tabla 6.1

Del análisis de estos datos se desprende que el SRVG es dominado por todos estos alumnos para los problemas de sumar, tres muestran dificultades en la resta y en la multiplicación, y dos consiguen aprender la sintaxis de este sistema para la división.

Análisis de las actividades del diseño:

En estos alumnos hicimos un seguimiento más profundo, así cuando acabamos los problemas aditivos les pedimos que resolvieran las actividades desde la 37 a la 42, las tres primeras por la forma que quisieran y las tres siguientes de forma gráfica y formal. Los resultados, en la tabla 6.2, expresan cuantos alumnos hicieron correctamente cada problema en el sistema de representación indicado.

	Diagrama (SRVG)	Operaciones (SA)	Ambas	Elección
37.Suma-cambio	1	8	8	Libre
38. Resta-comparación	2	8	5	Libre
39. Suma-comparación	1	5	5	Libre
40. Resta-igualación	8	10	-	Debían hacer ambas
41. Suma-cambio	18	17	-	ídem
42. Resta-igualación	10	15	-	ídem

Tabla 6.2

La mayoría de los niños que lo hacen bien, lo pueden hacer de las dos formas, pero cuando eligen libremente, vemos cómo se igualan los que deciden hacerlo por ambos métodos con los que eligen hacerlo con las operaciones, siendo menos los que utilizan sólo el diagrama.

En los problemas de estructura multiplicativa, la mayor parte de los alumnos optó por hacerlo en el SA. En la tabla 6.3 mostramos el número de alumnos que lo hace correctamente indicando con qué sistema lo ha resuelto.

	Diagrama	Operaciones	Ambas
51. Multiplicación comparación.	1	10	5
52. División comparación.	0	7	2
53. Multiplicación prod. cartesiano.	5 (diagrama de árbol)	6	3

	Diagrama	Operaciones	Ambas
54. División reparto	1	12	2
55. Multiplicación comparación.	0	13	3
56. Multiplicación razón	0	10	2

Tabla 6.3

En los problemas de dos operaciones, los alumnos optaron por utilizar en sus fichas el sistema aritmético (SA). Sólo tres hacen una de las operaciones, la aditiva, con el diagrama y el resto con la operación aritmética.

6.2.3 Análisis de los datos

Presentamos a continuación los datos obtenidos en el pretest y postest, divididos en los mismos apartados: resolución de problemas, ejecución de las operaciones e invención de problemas.

6.2.3.1 La resolución de problemas

En la resolución de problemas analizamos, por una parte, la cantidad de problemas bien y mal resueltos, según las categorías semánticas, y, por otra, la utilización del sistema de representación visual-geométrica en el postest como forma de resolverlos.

De igual forma, separamos los problemas como problemas de estructura aditiva, problemas de estructura multiplicativa y problemas de dos operaciones.

Los problemas de estructura aditiva

1. Capacidad para resolver problemas aditivos.

Los problemas se han corregido diferenciando si eligen y ejecutan correctamente la operación (bien), si eligen bien la operación pero la ejecutan mal (mal la operación), si eligen mal la operación (mal) y si no lo intentan. En la tabla 6.4, podemos ver los resultados en los problemas de sumar del pretest.

Problema	No lo hacen	Mal	Mal la operación	Bien
1.	2	14	0	8 (33%)
11.	2	0	1	21 (87,5%)
20.	2	0	0	22 (92%)
3.	1	0	1	22 (92%)
Sumar				**76%**

Tabla 6.4

En el problema 1, de los 14 alumnos que lo hacen mal, 11 hacen una resta (un 78% de los que lo hacen mal), lo que nos confirma el efecto de la palabra “retiraron”. El resto de los problemas de sumar son resueltos bien por la mayor parte de los alumnos.

En el postest, la palabra “comieron” no produjo el mismo efecto (tabla 6.5).

Problema	No lo hacen	Mal	Mal la operación	Bien
1.	3	2	1	18 (75%) (3 con el SRVG)
11.	1	0	0	23 (96%)
20.	6	1	0	17 (71%)
3.	2	1	2	19 (79%)
Sumar				**80%**

Tabla 6.5

Los porcentajes de aciertos en el pretest para los problemas de sumar son similares a los obtenidos en el estudio de grupos (78.5%), y en el postest, los distintos problemas de sumar obtienen unos resultados ligeramente superiores (estudio de grupos: 73%).

En los problemas de restar, estos alumnos presentan más dificultades, principalmente debidas a la mala ejecución de la operación, como vemos en la tabla 6.6.

Problema	No lo hacen	Mal	Mal la operación	Bien
12.	2	2	4	16 (67%)
6.	3	9	3	9 (37,5%)
16.	5	5	1	13 (54%)
17.	5	2	3	14 (58%)
Restar				**54%**

Tabla 6.6

Sin embargo, aunque en el postest mejoran en la correcta elección de la operación, no sucede así en la ejecución de las operaciones (tabla 6.7).

Problema	No lo hacen	Mal	Mal la operación	Bien
12.	1	0	3	20 (83%) (1 con el SRVG)
6.	3	2	3	16 (67%)
16.	5	1	3	15 (62,5%) (1 con el SRVG)
17.	2	2	4	16 (67%)
Restar				**70%**

Tabla 6.7

Finalmente, consideramos también cuántos alumnos resuelven correctamente todos los problemas. En la tabla 6.8 vemos cómo mejoran del pretest al postest, logrando un 62% resolver correctamente los 4 problemas de sumar y un 41% los 4 de restar.

		No hacen	Hacen todos mal	Hacen 1 bien	Hacen 2 bien	Hacen 3 bien	Hacen todos bien
Pr. sumar	Pretest	0	0	1	4	12	7
	Postest	1	0	2	3	3	15 (62%)
Pr. restar	Pretest	2	1	5	5	7	4
	Postest	1	1	3	4	5	10 (41%)

Tabla 6.8

2. Análisis del uso del sistema de representación visual-geométrico.

En las tablas 6.5 y 6.7 señalamos los alumnos que utilizan el SRVG para resolver los problemas. En el problema 1 (de sumar), lo utilizan tres alumnos y en los problemas de restar (12 y 16), lo usa un alumno en cada uno de ellos. Ninguno de ellos lo utiliza como única forma de resolución.

3. Uso de estrategias generales y heurísticos.

Los alumnos no exteriorizan el uso de ninguna estrategia general ni de ningún heurístico. Su proceso de resolución escrito se limita a elegir la operación adecuada y ejecutarla.

Los problemas de estructura multiplicativa

1.- Capacidad para resolver problemas multiplicativos

Los resultados obtenidos en los problemas de estructura multiplicativa (tabla 6.9), son muy similares con los del estudio de grupos:

Problema	No lo hacen	Lo hacen mal	Mal la operación	Bien
4.	2	4	0	18 (75%)
13.	2	2	2	18 (75%)
14.	2	16	0	6 (25%)
Multipl.				58%

Tabla 6.9

En el pretest (tabla 6.9), los problemas de tipo razón y comparar son resueltos bien por igual número de niños, que es tres veces superior a los que resuelven los problemas asociados al producto cartesiano.

Problema	No lo hacen	Lo hacen mal	Mal la operación	Bien
4.	3	3	0	18 (75%)
13.	2	4	2	16 (67%)
14.	4	6	0	14 (58%) (3 con diagrama de árbol)
Multiplicar				67%

Tabla 6.10

En el postest los alumnos mejoran, sobre todo en el problema asociado al producto cartesiano (tabla 6.10). Podemos ver que los errores en la ejecución de las operaciones son pequeños (8%).

Los problemas de dividir (en el pretest) presentan unos porcentajes de aciertos inferiores a los de multiplicar (tabla 6.11); en el postest (tabla 6.12), mejora la elección correcta de la operación, pero no la ejecución de la misma.

Problema	No lo hacen	Lo hacen mal	Mal la operación	Bien
7.	1	10	1	12 (50%)
8.	2	17	0	5 (21%)
9.	3	17	0	4 (17%)
Dividir				29%

Tabla 6.11

Problema	No lo hacen	Lo hacen mal	Mal la operación	Bien
7.	1	10	1	12 (50%)
8.	4	6	6	8 (33%) (1 en el SRVG)
9.	7	7	3	6 (25%) (1 con diagrama árbol)
Dividir				36%

Tabla 6.12

Los problemas de dividir siguen teniendo más dificultades, en especial los problemas asociados al producto cartesiano (problema 9), que no habían trabajado nunca, según nos informó la profesora.

2. Análisis del uso del sistema de representación visual-geométrico.

En las tablas 6.10 y 6.12, señalamos los alumnos que utilizan el SRVG y los diagramas de árbol para resolver los problemas de estructura multiplicativa. Sólo un alumno utiliza el SRVG para resolver un problema de división y 3 utilizan el diagrama de árbol en un problema de multiplicación. Éstos 4 usan los diagramas como forma única de resolver dichos problemas.

Los problemas de dos operaciones aritméticas

Los alumnos tienen mayores dificultades en la resolución de estos problemas. Sólo los alumnos de rendimiento más alto, los resuelven bien y generalizan rápidamente los diagramas.

Los resultados que obtuvieron estos alumnos son inferiores a los del estudio de grupos. En las tablas 6.13 y 6.14, tenemos los resultados en el pretest y postest, respectivamente, detectándose las mismas dificultades con el problema 10.

Problema	No lo hacen	Lo hacen mal	Bien
2.	4	6	14 (58%)
10.	1	21	2 (8%)
15.	2	14	8 (33%)
18.	4	11	9 (37,5%)
19.	5	15	4 (17%)
Prob. 2 operac.			31%

Tabla 6.13

Problema	No lo hacen	Lo hacen mal	Bien
2.	5	13	6 (25%)
10.	10	11	3 (12,5%)
15.	6	11	7 (29%)
18.	3	9	12 (50%)
19.	7	13	4 (17%)
Prob. 2 operac.			27%

Tabla 6.14

En la tabla 6.15, podemos ver la ganancia de problemas bien resueltos entre el pretest y el postest:

	No hacen ninguno	Hacen todos mal	Hacen 1 bien	Hacen 2 bien	Hacen 3 bien	Hacen 4 bien	Hacen todos bien
Pretest	0	6	9	4	2	1	2
Postest	1	8	7	4	1	1	2

Tabla 6.15

6.2.3.2 La ejecución de las operaciones

En las dos sumas que se les plantearon en el pretest, un 87.5% las resolvieron correctamente y un 73% resuelven correctamente las dos restas. En el postest, la ejecución de las sumas no varía, mientras el porcentaje de la ejecución correcta de las restas aumenta al 81%.

La multiplicación la hacen bien un 62% en el pretest y un 69%, en el postest, mientras un 65% resuelve bien la división en el pretest y un 54%, en el postest.

6.2.3.3 La invención de problemas

A los alumnos se les pidió de igual forma que inventaran seis problemas para las operaciones dadas.

En la tabla 6.16 vemos el porcentaje de alumnos que inventan un problema correctamente para las sumas y las restas, y en la tabla 6.17 para la multiplicación y división, tanto en el pretest como en el postest.

	Suma 1	Suma 2	Resta 1	Resta 2
Pretest	69%	69%	69%	58%
Postest	62%	54%	62%	58%

Tabla 6.16

	Multiplicación	División
Prestest	38.5%	62%
Postest	31%	54%

Tabla 6.17

Los alumnos fueron clasificados en función de sus puntuaciones en Matemáticas, igual que en el estudio de grupos, con el objetivo de ver si había alguna relación entre el rendimiento y la variedad (según las categorías semánticas) en el tipo de problemas que inventaban.

Presentamos los resultados globales, tratando de ver si se detecta alguna relación con el rendimiento de los alumnos y posteriormente analizamos, con más detalle, el formato y el contexto de dichos problemas.

La tabla 6.18 muestra el número de problemas inventados, clasificados por categorías semánticas, en el pretest para las dos operaciones sumas y en la tabla 6.18 para los problemas de restar.

	Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Mal enunciado
Rendimiento alto	5	3			
Rendimiento medio	11	8			5
Rendimiento bajo	10	1			5
	26	12	0	0	10

Tabla 6.18

	Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Mal enunciado
Rendimiento alto	7				1
Rendimiento medio	16				8
Rendimiento bajo	12				4
	35	0	0	0	13

Tabla 6.19

Estos datos coinciden totalmente con la muestra grande en el tipo de problemas más frecuentes: combinación y cambio para la suma, y cambio exclusivamente para la resta, no habiendo ninguna diferencia que podamos relacionar con el rendimiento de los alumnos.

Los resultados en el postest son totalmente análogos, aunque aumenta el número de niños que los dejan sin hacer. Los resultados para los problemas de sumar los tenemos en la tabla 6.20.

	Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Mal enunciado
Rendimiento alto	5	1			2
Rendimiento medio	10	7			7
Rendimiento bajo	3	2			11
	18	10	0	0	20

Tabla 6.20

Y los de restar en la tabla 6.21.

	Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Mal enunciado
Rendimiento alto	6				2
Rendimiento medio	17				7
Rendimiento bajo	6				10
	29	0	0	0	19

Tabla 6.21

En la tabla 6.22 puede apreciarse el número de problemas inventados en el pretest a partir de una multiplicación, según la categoría semántica y el rendimiento de los alumnos.

	Razón	Comparación	Prod. cartes.	Mal/no hace
Rendimiento alto	3	1		
Rendimiento medio	3			9
Rendimiento bajo	3			5
Total	9	1		14

Tabla 6.22

Y en la tabla 6.23 mostramos los resultados para la división (en el pretest), también según las categorías semánticas y el rendimiento de los alumnos.

	Reparto	Agrupam.	Comparar	Prod. cart.	Mal/no hace
Rend. alto	2				2
Rend. medio	8				4
Rend. bajo	6				2
Total	16				8

Tabla 6.23

Así pues, los resultados se repiten en este estudio, no registrándose ninguna relación con el rendimiento de los alumnos. Los resultados se mantienen en el postest.

Formato y contexto de los enunciados:

El formato utilizado en la formulación de los distintos problemas, presenta una estructura análoga. Las proposiciones se van formulando e incluyen los datos en el mismo orden que aparecen en la operación mediante frases sencillas y coordinadas, y la pregunta la colocan siempre al final.

En cuanto al contexto son compras y juguetes, los elementos más representativos.

Ejemplos típicos son los siguientes:

- *He comprado un libro que me costó 302 ptas y un lapicero que me costó 117 ptas. ¿Cuánto dinero me gasté?*
- *Pedro tiene 133 cromos. Entre Ana y Pedro tienen 245 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Ana?*
- *Juan tiene 302 boliches y Ana 117 boliches. ¿Cuántos boliches tienen entre los dos?*

En los problemas de estructura multiplicativa, no existe ninguna diferencia en el formato y contexto de los enunciados con los problemas aditivos. Presentamos, a modo de ejemplo, algunos de ellos:

- *En un colegio hay 7 clases. Si en cada clase hay 34 sillas ¿cuántas sillas hay en el colegio?*
- *En un kiosco hay 408 caramelos y la mujer quiere repartir entre 6 niños todo eso ¿cuántos caramelos le toca a cada uno?*

Los resultados son totalmente similares a los del estudio de grupos, y a relacionarlos con el rendimiento, detectamos que son los niños de rendimiento bajo los que más respuestas erróneas dan, como es lógico, y las proporciones de problemas inventados en las distintas categorías no mantienen ninguna relación con su rendimiento.

6.3 LAS ENTREVISTAS

6.3.1 Descripción y objetivos

Las entrevistas se realizaron de forma individual, habiendo optado por un tipo de entrevista semi-estructurada, en la cual el entrevistador a partir de un problema que se le presenta al niño, le va interrogando con el objetivo que éste exprese, lo que va haciendo y el porqué.

Cada sesión duró entre 20 y 30 minutos. Primeramente se les mostró dos problemas de tipo similar, con el objetivo de recordarles la forma de resolución a través del SRVG. Se realizaron en el propio Colegio, siendo videograbadas.

El objetivo de las entrevistas era hacer un análisis del proceso de resolución de problemas, del uso del modelo de competencias y de los sistemas de representación utilizados, observando también las habilidades que manifestaban durante la resolución.

Las primeras entrevistas las realizamos con 12 alumnos seleccionados del grupo instruido por los profesores, que nos sirvieron de estudio piloto. Posteriormente, se seleccionaron 9 niños del aula instruida por la investigadora, con los que se realizó el estudio definitivo.

Presentamos los resultados en dos epígrafes, uno dedicado al estudio piloto y otro al estudio definitivo. Dentro de cada uno de ellos, separamos los resultados en los problemas de estructura aditiva, problemas de estructura multiplicativa, problemas de dos operaciones y problemas inventados a partir de una representación visual-geométrica. Los primeros han sido analizados más profundamente, ya que los niños, posiblemente, al sentirse más seguros, expresaban abiertamente sus habilidades. Los nombres de los niños que aparecen en esta Memoria son ficticios.

6.3.2 Estudio piloto

Las entrevistas fueron analizadas según la ficha control. A continuación presentamos la transcripción completa de la entrevista en la que una alumna de 5º resuelve el problema 1 y la codificación de las habilidades que exteriorizaban.

Problema 1

Luis tiene 321 ptas y María 119. ¿Cuánto tiene más Luis que María?

Davinia (D), Entrevistador (E):

D*:* (lee el problema en voz baja). *Aquí dice que hay dos niños que uno tiene más que otro y entonces tendríamos que como Luis tiene 321 y María 119, nos pregunta que cuánto tiene más Luis que María. Entonces tendríamos que restar* **C6** *y lo que nos dé ...***C1**

E*: ¿y cómo te das cuenta?*

D*: Porque,... no sé, me lo imagino. Es como si fuera que Joel tiene 321 ptas. y yo 119. Lo pienso como si lo fuéramos a comprar o algo y entonces ya lo sé* **H3** (Hace una viñeta, colocando dos rectángulos con los datos. Escribe correctamente los datos **C3** y pasa a hacer el diagrama).

E*: ¿Cómo haces el diagrama?*

D*: El total sería lo que tiene Luis* **H4***, luego lo dividiría en dos y en uno dejaría lo que tiene María y en el otro lo que le faltaba a María para llegar a tener lo de Luis.* (Coloca las 119 en una parte y va completando) **E4**. *Aquí* (señala en el papel) *tendría que poner lo que le faltaba.* **M7**

E*: ¿Cómo calculas lo que le falta?*

D*: Contando, aunque me resulta más fácil hacer la operación.* **H5-2** (Hace la resta **C7, M8** y coloca en el otro rectángulo la cantidad que le ha dado). *Al hacer un problema no me hace falta hacer el diagrama, yo veo más fácil hacer la operación* **M6**. (Escribe la historia).

E*: ¿Para qué te sirve escribir la historia?*

D*: Para ver el problema completo, con los datos y la solución.* **M3** (Escribe la historia correctamente, engarzando la solución en el enunciado)

Esta alumna resuelve correctamente el problema en ambos sistemas y exterioriza el uso de diversas habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas.

Entre las habilidades cognitivas, podemos destacar el conocimiento que posee acerca de la sintaxis y la semántica de ambos sistemas de representación: visual-geométrico y el aritmético.

Reconoce utilizar algún heurístico cuando no comprende el problema: personaliza el problema. Demuestra que planifica el proceso, verifica la corrección del resultado y es capaz de explicar para qué sirven las distintas etapas del mismo.

En cuanto a sus preferencias por la utilización de uno de los sistemas para resolver el problema se inclina por usar operaciones *"por ser más fácil"*.

6.3.2.1 Análisis de las entrevistas con los problemas de estructura aditiva

Presentamos por separado el análisis de las habilidades que ponen de manifiesto los niños en cada uno de los problemas.

Los problemas propuestos fueron:

1) Luis tiene 321 ptas y María 119 ptas. ¿Cuántas pesetas tiene Luis más que María?
2) Un vendedor de periódicos tenía en su kiosco 500 periódicos. Si a lo largo de la semana ha vendido 245,¿cuántos le quedan?

Problema 1:

En la tabla 6.24 reflejamos las habilidades que exteriorizan los alumnos durante la resolución del primer problema: un problema de restar del tipo comparación, donde el dato desconocido es la diferencia entre las dos cantidades, (codificamos con + su presencia, con - su ausencia y en blanco si no ha podido ser evaluado; en la columna H5, 1 indica el uso del SRVG como apoyo del SA y 2, al contrario; y en la columna H3, * representa la utilización de algún heurístico).

Habilidades cognitivas:

La mayor parte de los alumnos leen correctamente y comprenden lo que leen

(C1). Las viñetas que realizan, no reflejan con exactitud el contenido del problema: suelen limitarse a expresar los datos, pero sin ninguna señal de la relación entre ellos (C2).

La escritura de los datos y de la incógnita (C3), es redactada por casi todos los alumnos, aunque, en general, no es muy escueta.

La comunicación de las cantidades mediante el SRVG (C4) es hecha correctamente por 7 de los 12 alumnos; sin embargo, no ocurre lo mismo con la aplicación de la sintaxis de este nuevo sistema (C5): sólo 3 alumnos lo hacen correctamente.

La representación y resolución en el SA tiene muchos más éxitos: nueve alumnos eligen correctamente la operación (C6) y de éstos, sólo uno se equivoca en la operación (C7). Los tres alumnos restantes eligen una suma y la ejecutan correctamente.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
D	+		+	+	+	+	+			*	+	2	+	+	+			SA	+	+
N	+	-	-	-	-	+	+						-		-			SA		
I	+		+	+	-	-	+			*				+	+					
E	+		+	-		+	+								+			SA		+
C	-		+	+	-	-	+							+	-					
N	+		-	+	-	+	-						-	-	+					
D	+		+	+	-	+	+				+	2	+	+	+					+
L	+		+	+	+	+	+			*	+	2		+	+					
R	+					+	+			*					+			SA		
N	+		+	+	+	+	+				+	2		+	+				+	+
G			+			+	+						-		+					-
M	-		+			-	+											SA		

Tabla 6.24

Habilidades heurísticas:

Al tener la ficha delante, los alumnos van completando los distintos apartados, saltándose aquellos que creen no necesitar (viñeta) o que reconocen no saber hacer (resolución en el SRVG).

En este problema, cuatro niños han hecho uso de algún heurístico (H3). Dos de ellos dicen que se imaginan la situación y la personalizan, uno afirma haberse fijado en palabras clave y en el tamaño de la solución, mientras un cuarto afirma que, para resolver un problema, lo que hace es poner las cantidades y sumar.

Cuatro de estos niños utilizan explícitamente el esquema partes-todo (H4) cuando hacen la representación en el diagrama y estos mismos se apoyan en el SA para acabar de completar el SRVG (H5).

Habilidades metacognitivas

Hay niños en los que se detecta que se mueven por el ordinograma con una propia planificación (M1), mientras otros no tienen claro qué es lo que deben hacer.

La mayoría de los que utilizan ambos sistemas son conscientes de la igualdad de las soluciones, y realmente lo utilizan para no tener que calcularlas en ambos sistemas (M2).

En general, verifican la corrección del resultado, expresando en la historia los datos y la solución de forma coherente (M3).

Los que comparan ambos sistemas, se inclinan por el SA, siendo su argumento "*es más fáci*l".

Sólo dos alumnos demuestran controlar perfectamente la resolución en ambos sistemas. (M7 y M8).

La tabla 6.25 expresa los alumnos que resuelven el problema correctamente en cada uno de los sistemas, los heurísticos que utilizan y si hacen algún comentario sobre la preferencia por alguno de los sistemas de resolución.

	Resolución en SA	Resolución en SRVG	Heurísticos	Otros
D.	correcta	correcta	personaliza	usa SA por ser más fácil
N.	correcta	no lo sabe		
I.	incorrecta	incorrecta	se suman siempre	
En.	correcta	no se acuerda		SA es más fácil
C.	incorrecta	incorrecta		
N.	incorrecta (ejecuta mal la operación)	incorrecta		
D.	correcta	incorrecta		
L.	correcta	correcta	palabras clave y tamaño de la solución	
R.	correcta	no lo intenta	se imagina la situación	
N.	correcta	correcta		
G.	correcta	no sabe		
M.	incorrecta			

Tabla 6.25

Nueve alumnos resuelven correctamente el problema en el SA, (aunque uno ejecuta mal la operación), siendo tres los que lo hacen en el SRVG.

Problema 2

Este problema es de restar-categoría semántica cambio, siendo la cantidad final el dato desconocido. Este grupo resolvió el problema en una hoja en blanco. El resultado del análisis de las entrevistas está plasmado en la tabla 6.26.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
D	+		+			+	+	-	+						+					+
N	-		-			-	-	-	+											-
I	+		+			+	-	-	+						+					+
E	+		+			+	+	-	+						+					+

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
C	+		+			+	+	-	+	*										+
N	+					+	-	-										SA		+
D	+			+	-	+	+					1		+		+				+
L	+					+	-			*										
R	+		+			+	+			*										
N	+					+	+			*										+
G	+	+	+			+	+			*								SA		
M	+					+	+			*								SA		

Tabla 6.26

Habilidades cognitivas

La comprensión del problema es lograda por casi todos los alumnos, sólo un alumno hace la viñeta y 6 escriben correctamente los datos.

Una alumna es la única que utiliza el SRVG, representa bien las cantidades, pero no domina la sintaxis de este sistema, así que debe recurrir al SA para poder encontrar la solución.

Sólo una alumna, que demuestra falta de comprensión del enunciado, no elige la operación adecuada: se decide por una suma y la ejecuta mal, mientras tres se equivocan al ejecutar la resta.

Habilidades heurísticas

Los alumnos no utilizan el modelo trabajado; algunos tienen una estrategia interiorizada, que plasman dividiendo la hoja en tres columnas: datos/ operaciones/resultado y el resto se limita a elegir una operación y ejecutarla.

Los heurísticos que utilizan (tabla 6.27), son el uso de palabras clave y fijarse en el tamaño de la solución.

Habilidades metacognitivas

Este problema, les resultó fácil; por ello, rápidamente dieron la solución, siendo difícil observar las distintas habilidades, aunque en general demostraron controlar la resolución del problema en el SA.

En la tabla 6.28, mostramos en qué sistema han resuelto los problemas y los heurísticos/estrategias que han utilizado:

	Resolución en SA	Resolución en SRVG	Heurísticos/estrategias
D.	correcta	no lo hace	estrategia:datos-operación-resultado
N.	incorrecta	no lo hace	ídem
I.	incorrecta (ejecuta mal la operación)	no lo hace	ídem
En.	correcta	no lo hace	estrategia: datos- resultado
C.	correcta	no lo hace	tamaño de la solución
N.	incorrecta (ejecuta mal la operación)	no lo hace	
D.	correcta	incorrecta	
L.	incorrecta (ejecuta mal la operación)	no lo hace	palabras clave.
R.	correcta	no lo hace	
N.	correcta	no lo hace	
G.	correcta	no lo hace	el tamaño de la solución
M.	correcta	no lo hace	palabras clave.

Tabla 6.28

Eligen correctamente la operación 11 niños, aunque tres se equivocan al ejecutarla; sin embargo, ninguno lo intenta hacer a través del SRVG.

La hoja en blanco sugiere, a algunos, el uso de la estrategia interiorizada: datos- operación- resultado. Los heurísticos que siguen utilizando, están en relación con las palabras clave o con el tamaño que debe tener la solución.

Relación entre la resolución de los problemas y los diferentes alumnos

Vamos a comentar los resultados siguiendo las fases de resolución del problema y lo contrastaremos en los alumnos de rendimiento alto, medio y bajo, expresando finalmente las diferencias observadas entre los dos problemas de restar.

Problema 1

En este problema, vamos a analizar las diferentes habilidades, especificando en qué fase del modelo de competencias, en el que les hemos instruido, se manifiestan y las diferencias según el rendimiento de los alumnos. Esta clasificación de los alumnos fue hecha de acuerdo con las puntuaciones del profesor en resolución de problemas, como ya hemos comentado.

Habilidades cognitivas

Fase 1: LECTURA DEL ENUNCIADO (C1)

El papel del lenguaje en el proceso de la resolución de problemas, ha recibido una considerable atención desde hace muchos años. Barnett (1984) afirma que, la relativamente alta correlación entre la habilidad matemática para resolver problemas y la habilidad para leer y comprender textos escritos, ha sido confirmada por numerosos estudios desde comienzos del siglo XX.

A los niños de rendimiento alto les basta leer el problema una vez, mientras los demás han de leerlo un mínimo de 2 veces, tal como uno de ellos afirma:

E: ¿Cuántas veces tienes que leer el problema?

Ricardo (rendimiento bajo): Dos.

Fase 2: COMPRENSIÓN (C2,C3)

Para ayudar a los niños a comprender el problema, esto es, a desarrollar una representación mental del mismo, recurrimos a dos estrategias: el dibujo de una viñeta que lo represente y la escritura simplificada de los datos que da el enunciado y lo que se pide.

Viñeta:

La mayor parte de los educadores e investigadores están de acuerdo en que los dibujos o diagramas son útiles para la resolución de problemas. López-Real y Veloo (1993), Veloo y López-Real (1994) analizan el uso de los diagramas en resolución de problemas en alumnos de Secundaria y argumentan que hay una urgente necesidad de ayudar a los niños con estrategias de dibujar diagramas para resolver problemas de una forma explícita y positiva, mas que dejarlos a la suerte y a la intuición espontánea que sólo poseen unos pocos alumnos visualmente-orientados.

En estas entrevistas, el factor tiempo de alguna forma presionaba a los niños a no entretenerse demasiado en las viñetas. Clasificamos las viñetas en esquemáticas y pictóricas, generalmente las primeras se limitaban a expresar las cantidades dentro de un cuadrado o círculo (esquemáticas), mientras las segundas dibujaban alrededor de éstas un entorno con más detalles, generalmente superfluos (pictóricas). El número de alumnos que utilizan una u otra, y los que lo hacen mal o no lo hacen, está en la tabla 6.29, clasificados según el rendimiento en resolución de problemas.

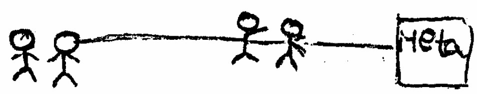
	Esquemáticas	Pictóricas	No hacen o mal
Rendimiento alto	2	1	1
Rendimiento medio	1	1	2
Rendimiento bajo	1	0	3

Tabla 6.29

He aquí algunos ejemplos de las que hacían:

Esquemáticas

Pictóricas



Hemos encontrado que los niños de rendimiento bajo son los que más dificultades tienen con la realización de un dibujo que represente la situación.

Escritura de los datos:

Es en este apartado donde más se diferencian los alumnos de distinto rendimiento. En la misma línea que Krutetskii (1976), los buenos resolutores entresacan escuetamente los datos y la pregunta (concretos), mientras los otros llegan a escribir de nuevo todo el enunciado (tabla 6.30).

	concretos	todo el enunciado	mal	no lo escriben
Rendimiento alto	4	0	0	0
Rendimiento medio	0	2	2	0
Rendimiento bajo	0	2	1	1

Tabla 6.30

Fase 3: <u>REPRESENTACIÓN, EJECUCIÓN Y SOLUCIÓN GRÁFICA (C4,C5):</u>

Esta fase de nuestro modelo no pretende sólo que el alumno se ayude con un diagrama para resolver un problema, sino que éste sea una forma de resolverlo.

Sin embargo, hemos encontrado que la utilización de esta nueva forma de representación y resolución gráfica no fue suficientemente aprendida por parte de los niños, y sobre todo, por aquellos con más dificultades, como podemos ver en la tabla 6.31.

	Resolución correcta en el SRVG	Resolución incorrecta en el SRVG	No lo hacen
Rendimiento alto	2	1	1
Rendimiento medio	1	1	2
Rendimiento bajo	0	2	2

Tabla 6.31

Así explican la representación y resolución visual-geométrica:

E*: ¿Cómo haces el diagrama?*
D*: El total sería lo que tiene Luis, luego lo dividiría en dos y en uno dejaría lo que tiene María y en el otro lo que le faltaba a María para llegar a tener lo de Luis.* (Coloca las 119 en una parte y va completando). *Aquí* (señala en el papel) *tendría que poner lo que le faltaba.*
E*: ¿Cómo calculas lo que le falta?*
D*: Contando, aunque me resulta más fácil hacer la operación .*

Fase 4: <u>REPRESENTACIÓN, EJECUCIÓN Y SOLUCIÓN FORMAL (C6,C7):</u>

Esta fase es a la que más acostumbrados están; así, encontramos que los alumnos de rendimiento alto eligen y ejecutan correctamente la operación, aumentando los errores en los de rendimiento medio y bajo, sobre todo en la elección de la operación. Tan sólo un alumno la ejecuta mal (tabla 6.32).

	Elección correcta	Elección incorrecta	Ejecución correcta	Ejecución incorrecta
Rendimiento alto	4	0	4	0
Rendimiento medio	3	1	4	0
Rendimiento bajo	2	2	3	1

Tabla 6.32

Habilidades metacognitivas

Fase 5: SOLUCIONES (M2):

En esta fase de la resolución, se potencian las habilidades de tipo metacognitivo. Esto es, el alumno al contrastar los resultados obtenidos mediante los dos sistemas de representación, establece analogías entre ambos. En general, dan por cierta esta igualdad, e incluso lo que hacen es utilizar el resultado obtenido en uno de ellos para colocarlo directamente en el otro.

Fase 6: COMPROBACIÓN DE LA SOLUCIÓN

Finalmente, se les pedía que escribieran la historia con el resultado obtenido a fin de poder evaluar de una forma crítica, que la solución era correcta. Aquí encontramos que la mayoría lo hace bien.

Problema 2

En el problema 2 (resuelto en una hoja en blanco), encontramos alumnos con algún tipo de modelo interiorizado, frente a otros que se limitaban a efectuar la operación. En la tabla 6.33 presentamos 4 aspectos observados en la resolución del problema y clasificados por el rendimiento de los alumnos. Estos aspectos son: el uso de una estrategia general, el apoyo en dibujos, la resolución correcta mediante el SRVG y la elección y ejecución en el SA, especificando en él si lo hacen bien o mal, y si eligiendo bien la operación la ejecutan mal.

	Estrategia general	Dibujos	Resolución en el SRVG	Resolución en el SA		
				B.	Mal	Mal op.
Rendimiento alto	2	0	1	4		
Rendimiento medio	2	1	0	2	1	1
Rendimiento bajo	1	0	0	2		2

Tabla 6.33

El tipo de modelo que utilizan es el siguiente:

Escriben en tres columnas:

Modelo 1: Datos Indicaciones Operaciones

Modelo 2: Datos ¿Datos? Operaciones

repitiendo los niños de la misma aula el mismo formato. Sin embargo, en principio no existe correlación entre la ejecución correcta del problema y el haber hecho uso de un modelo de este tipo. Por ejemplo, entre los de rendimiento medio los niños que lo resuelven correctamente, uno hizo uso de su modelo y el otro no utilizó ninguno.

La explicación sobre la resolución de este problema es bastante similar en los niños:

E: ¿Por qué sabes que es de restar?
Isaac: Porque me dice los periódicos que tiene y al vender 245, tengo que restar para ver lo que me queda.
Gara: Porque si tenía 500 y vendió 245, entonces tiene que tener menos

Habilidades heurísticas

Es interesante señalar que, en general, los niños hacen poco uso de heurísticos cuando no saben cómo abordar un problema. Los que aparecen, los clasificamos como sigue:

* Personalizar el problema:

- Davinia (rend. alto, prob. 1): al explicar cómo se imagina el problema dice: *"Es como si fuera que Joel (su compañero) tiene 321 ptas y yo 119.*

* <u>Tamaño de la solución:</u>

- Lorena (rend. medio, prob. 1):

E: ¿Cómo te diste cuenta que no podía ser una suma?

L: Porque aquí dice que Luis tiene más que María y por eso <u>no podía dar más</u>.

-Gara (rend. medio, prob 2)

E: ¿Por qué restaste?

G: Porque si tenía 500 y vendió 245, entonces tiene <u>que tener menos.</u>

* <u>Por azar</u>:

- Gara (rend. medio, prob. 1), después de haberlo resuelto correctamente:

E: ¿cómo te diste cuenta que era una resta?

G: <u>No sé</u>.

* <u>Por palabras clave</u>

En el problema de cambio la palabra *"quedan"* fue decisoria en la utilización de la resta, como lo expresan 7 los alumnos, por ejemplo:

- Mercedes (rend. bajo)

E: ¿Por qué restaste?

M: Hay que restar para saber cuantos le <u>quedan</u>.

* <u>Analogía con algún ejemplo sugerido</u>

En una sesión, el entrevistador sugiere al alumno (rend. bajo, prob 1) que personalice el problema, logrando que éste lo resuelva bien.

Un error, que se repitió en ambas entrevistas, es la idea de pensar de antemano que cualquier problema es una suma:

-Isaac (rend. bajo, prob. 1): *"Cuando veo los datos los pongo en cada sitio (*refiriéndose al diagrama*) y después los sumo."*

Si comparamos la resolución de ambos problemas, encontramos que el problema de cambio fue resuelto correctamente por 11 alumnos (aunque tres de ellos se equivocan al ejecutar la operación) y el de comparación, por nueve. Este último creó más dificultades, las palabras “más que” eran, incluso, omitidas.

6.3.2.2 Análisis de las entrevistas con problemas de estructura multiplicativa

Los problemas de estructura multiplicativa fueron:

3) 6 atletas van a participar en una carrera de relevos de 636 metros, corriendo cada uno la misma distancia. ¿Cuántos metros corre cada uno?

4) Lucía tiene 625 ptas y su hermano menor la quinta parte. ¿Cuántas pesetas tiene su hermano?

El primer problema lo resolvieron en una hoja en blanco, mientras para el segundo utilizaron la ficha modelo.

Problema 3:

Este problema de dividir (tipo reparto) fue resuelto correctamente por siete de los 12 alumnos entrevistados, otro se equivocó en la operación y los cuatro restantes eligieron una multiplicación.

Las habilidades observadas están reflejadas en la tabla 6.34.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
D	+		+			+	+		+						+					+
N	-		-			-	+		+											
I	+		+			+	+		+	*					+					
E	+					+	+			*					+					+
C	+					+	-			*										
N	-	+				-	-			*					+					-
D	+			+	+	+	+			*					+				+	+
L	+					+	+			*					+					
R	+					+	-								+					-
N	+					+	+								+					+
G	+					+	+													
M	-					-	+													

Tabla 6.34

Habilidades cognitivas:

Los alumnos, excepto tres, leen correctamente y comprenden el enunciado (C1). Tres alumnos (de una misma clase) comenzaron dividiendo la hoja en tres columnas, que titularon: datos-desarrollo-operaciones.

Al resolver el problema en una hoja en blanco, la mayoría se inclina por elegir una operación y ejecutarla, sólo dos alumnas, una de 5º y ora de 4º del mismo Colegio, son capaces de utilizar el SRVG para representar y resolver este problema (C4 y C5). Sin embargo, sólo los tres que ya exteriorizaron dificultad al leerlo son incapaces de elegir la operación adecuada (C6). Tres se equivocan al ejecutarla (C7).

Habilidades heurísticas:

Más de la mitad de los alumnos utilizan algún tipo de heurístico (H3). Ocho utilizan la frase cada uno para justificar la división y tres la palabra reparto.

La explicación que se repite a:

Entrev*: ¿Por que supiste que era una división?*

D*: Dice que el total era 636 metros y si habían 6 y cada uno tenía que recorrer igual, entonces tenía que dividirlo.*

E*: Tengo que repartir 636 entre 6.*

Dos alumnas (una de 5º y otra de 4º, de Colegios diferentes) utilizan el diagrama en la resolución del problema. Una de ellas comienza directamente por él y luego pasa a hacer la operación aritmética, mientras otra hace la operación y luego el diagrama, siendo ambas conscientes de que los resultados han de ser iguales.

Los que hacen una multiplicación los podemos agrupar de la siguiente forma:

1º) Confunden la multiplicación con la división, no tienen claro el concepto de cada una de estas operaciones:

E*: ¿Por qué multiplicaste?*

N*: Para saber la distancia de cada uno.*

(Dos repiten esta respuesta).

2º) No saben lo que es una carrera de relevos.

3º) El tamaño del resultado (debido a un error en la ejecución de la operación) y el no tener seguridad, le hace decidir que aquella operación no es la adecuada, y termina haciendo una multiplicación.

R*: Dije que era dividir, pero veo que no es así.*

E*: ¿Por qué no es así?*

R*: Porque cada uno no puede recorrer 1,6 m, porque no llega a 636.*

Habilidades metacognitivas:

Lo más destacado aquí es cómo son capaces de escribir la historia completa con la solución obtenida (M3). Sólo dos alumnas demuestran controlar la resolución en ambos sistemas (M7 y M8).

Problema 4:

Este problema (dividir-tipo comparar) es resuelto correctamente por 7 niños; uno se equivoca en la operación, otro llega a resolverlo pero con ayuda del entrevistador, y de nuevo 3 ejecutan una multiplicación.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
D	+	+	+	+	+	+	+				+			+	+				+	+
N	+	+	+			+	+								+					-
I	-	+	+	+	-	+	+								+					-
E	+	+	+	+	+	+	+							+	+				+	+
C	-	+	+	+	-	+	+					2		+	+			SA		
N	-					-	+													-
D	+			+	+	+	+			*				+					+	+
L	+		+	+	-	-	-			*					+			SA	-	-
R	+					+	+								+					+
N	+	+	+	+	+	+	+					2		+	+				+	+
G	+	+	+	+	+	+	+			*					+				+	+
M	-		+			-	-													

Tabla 6.35

Habilidades cognitivas

En este problema hay 3 alumnos que no comprenden el problema (C1), siete hacen la viñeta (C2) y nueve escriben los datos, ahora bien cinco de éstos lo que hacen es reescribir todo el problema.

Ocho son capaces de representar la situación con el SRVG (C4), pero sólo cinco son capaces de resolverlo en él (C5) antes de utilizar la operación (Sólo uno representa el problema en el diagrama y hace la operación para colocar luego el resultado en el diagrama). Estos alumnos también lo resuelven en el SA, utilizando ambos sistemas de forma yuxtapuesta, demuestran un control en la resolución y, por supuesto, son alumnos de rendimiento alto.

Habilidades heurísticas

Los heurísticos utilizados, algunos de forma errónea, vuelven a ser las palabras clave: la quinta parte es la frase que les sugiere la operación.

E*: ¿Por qué es una división?*

L*: Porque dice que es la quinta parte.*

Los que ejecutan una multiplicación no tienen claro el concepto de lo qué es la quinta parte:

E*: ¿Por qué multiplicaste?*

M*: Porque vi en otros problemas parecidos que la quinta parte era multiplicar.*

Habilidades metacognitivas

Los alumnos se dan cuenta de que las soluciones han de ser iguales (M2), y dos de ellos se apoyan en esto para calcular la operación en un sistema y poner la solución en el otro.

Dos expresan sus preferencias abiertamente por el SA, pero la mayoría tiene dificultades en este problema para controlar perfectamente la solución, incluso en el SA (M8).

6.3.2.3 Análisis de las entrevistas con problemas de dos operaciones

Los problemas que presentamos en el estudio piloto fueron los siguientes:

5) Un señor recorre en su coche por la mañana 120 km y por la tarde 62 km. Si gasta 6 pesetas por km ¿cuánto gasta en un día?

6) En la clase hay 24 niños. Si compramos 275 globos para repartirlos y nos sobraron 35 globos ¿cuántos globos cogió cada niño?

Estos problemas generaron muchas dificultades en los alumnos, por ello, algunos se quedaban bloqueados y no exteriorizaban abiertamente las habilidades que utilizaban.

Problema 5:

Este problema fue resuelto correctamente por nueve alumnos, dos de los cuales hacen, al menos el diagrama de la primera operación (suma). Uno de ellos lo resuelve efectuando dos multiplicaciones (120x6 y 62x6) y luego sumándolas, haciendo esta última suma también con el diagrama.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
D	+					+	+								+			SA		+
N	+		+			+	+								+					
I	+		+	+	+	+	+					2		+	+					+
E	+	+	+	+	+	+	+								+					+
C	+	+	+	+	+	+	+							+	+					+
N	-					-	-											SA		-
D	+			+	+	+	+							+	-			SA	+	+
L	+		+	+	+	+	+							+	-					
R						+	+													
N				+	+	-	+													
G						+														
M		-		-		-	-													

Tabla 6.36

Habilidades cognitivas:

Los alumnos de 4º Curso son incapaces de comprender este problema (C1). Sólo dos de 5º completan todos los apartados: viñeta, datos resolución en SRVG y en SA correctamente.

De los seis que lo hacen mal, cometen los siguientes errores:

1º) Tres hacen correctamente la primera operación (suma), pero la siguiente eligen una suma, una resta o no continúan.

2º) Hace dos multiplicaciones, sin saber justificar por qué:

N*: A las 120 multiplico por 62 y lo que me dé multiplicarlo por 6...*

E*:¿Cómo elegiste las operaciones?*

N*: Yo sabía que era multiplicando o dividiendo.*

3º) Coloca todas las cantidades en vertical y las resta ¿?

Habilidades metacognitivas

Tres alumnos vuelven a expresar sus preferencias por el SA (M6) y seis verifican la corrección del resultado (M3). La mayor parte de los que lo resuelven demuestran un control de dicho proceso (M8).

Problema 6:

El último problema fue resuelto en una hoja en blanco. De los 9 alumnos, 4 lo resuelven correctamente y una, elige bien las operaciones, pero las ejecuta mal. Este problema presenta dos dificultades: el enunciado del problema no mantiene los datos en el orden en que hay que utilizarlos y la palabra “sobraron” para ellos debe estar incluida como resto de la división.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
D	+		+			+	+			*					+					+
N			+			-	+			*										-
I	-		+			-	+			*										
E	+					+	+								+					+
C							+													
N						-														-
D	+			+	+	+	+								+				+	+
L	+					+	-			*										
R						-	-													
N	+					+	+								+					
G	+					-	+								+					+
M	-					-	-													-

Tabla 6.37

Este problema lo resuelven en una hoja en blanco, que añadido a la dificultad que presenta, hace que rápidamente busquen alguna operación con que resolverlo.

Habilidades cognitivas

Sólo podemos afirmar que seis alumnos han comprendido correctamente el problema (C1). Tres escriben los datos, aunque uno de ellos reescribe el enunciado (C3).

En este problema podemos observar que sólo una alumna se inclina por el SRVG (C4 y C5), siendo cuatro los que utilizan correctamente el SA (C6 y C7).

Habilidades heurísticas y metacognitivas

De nuevo, los alumnos utilizan la palabra clave “repartir” para elegir la operación (H2)

Dadas las dificultades, se les propuso un problema similar sustituyendo la palabra “sobraron” por “se picaron”, de esta forma dos más lo resuelven correctamente.

Entre los que lo hacen mal tenemos:

1º) tres hacen sólo una división y al comprobar que el resto que les da no coincide con los que sobraron, intuyen que algo está mal y deciden que hay que hacer alguna operación con los 35 que sobraron, por ejemplo una suma.

2º) uno es capaz de resolverlo correctamente, pero planteándolo con cantidades pequeñas, que le permitan casi una manipulación de las mismas.

3º) dos ante la situación de no saber qué hacer, suman, restan o dividen los datos, buscando fundamentalmente un gesto de aprobación del entrevistador ante las mismas.

Sólo una alumna utiliza el lenguaje gráfico para la primera operación y, consciente de las operaciones que había que hacer, pregunta:

D*: ¿Puedo hacer la división con la operación?*

E*: Sí.*

E*: Es que* (refiriéndose al diagrama) *tendría que hacer 24 cajitas.*

En este problema sólo cuatro alumnos muestran un control de la resolución del mismo.

6.3.2.4 Problemas inventados a partir de una representación visual-geométrica

Los protocolos estaban organizados para que los alumnos inventaran un problema, a partir exclusivamente de las representaciones visuales que habían trabajado. Dada la extensión del trabajo, sólo les propusimos problemas aditivos.

Para ello, les presentamos los diagramas de las figuras 6.1 y 6.2, uno correspondiente a una situación aditiva y otro, a una situación sustractiva.

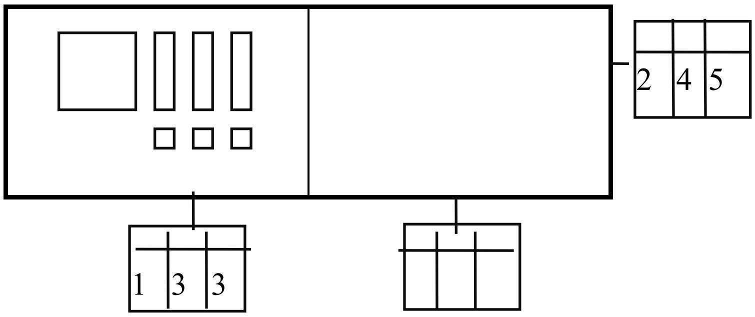


Figura 6.1

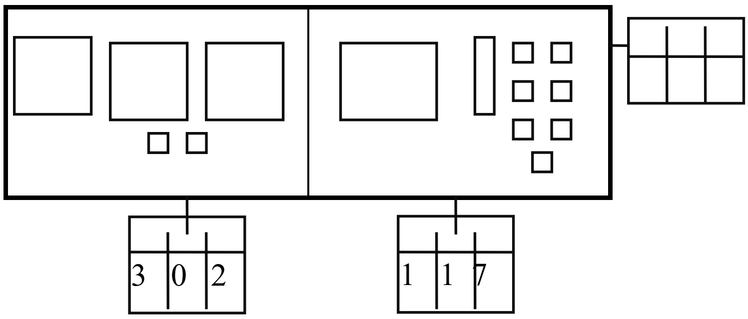


Figura 6.2

Los resultados obtenidos los presentamos en las siguientes tablas. La tabla 6.38 corresponde al diagrama 1 (partes conocidas y se busca el total):

	Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Respuesta errónea
Rendimiento alto	1	3			
Rendimiento medio	3	1			
Rendimiento bajo		3			1
	4	7			1

Tabla 6.38

Podemos observar cómo la representación gráfica les induce a inventar problemas de combinación.

Los diálogos mantenidos confirman cómo los alumnos se apoyan en el esquema partes-todo:

Alumno: (Escribe directamente el siguiente problema: *"Juan tiene 123 ptas y María 92 ptas. ¿Cuántas ptas tienen los dos juntos?"*)
Entrevistador: *¿Por qué inventaste ese problema para este diagrama?*
Alumno: *Porque hay dos partes que me las dan y falta el total.*

En el diagrama 2, los alumnos diversifican más sus elecciones, encontrando casi una igualdad entre las tres primeras categorías, aumentando también las respuestas erróneas (tabla 6.39).

Les resulta difícil justificar la elección que han hecho, siendo una de las que más repiten *"porque es una resta"*.

Uno de los problemas encontrados es que los alumnos no habían llegado a entender este lenguaje gráfico, sobre todo cuando se trataba de una situación sustractiva, y eso les llevaba a que simplemente se fijaban en las cantidades y con ellas inventaban cualquier tipo de problema.

	Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Respuesta errónea
Rendimiento alto		1	2		1
Rendimiento medio	1	1			2
Rendimiento bajo	1	1			2
	2	3	2		5

Tabla 6.39

6.3.3 Estudio definitivo

Seguimos el mismo formato que en el estudio piloto. En estas entrevistas se plantean al alumno ocho problemas.

6.3.3.1 Análisis de las entrevistas con problemas de estructura aditiva

Los problemas propuestos fueron los mismos:

1) Luis tiene 321 ptas y María 119 ptas. ¿Cuántas pesetas tiene Luis más que María?

2) Un vendedor de periódicos tenía en su kiosco 500 periódicos. Si a lo largo de la

semana ha vendido 245,¿cuántos le quedan?

Problema 1

Los resultados obtenidos con los niños del grupo definitivo se expresan en la tabla 6.40.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
J	+			+	+	+	+				+	2		+					+	+
A	+			+	+	+	+								+	+		SA		+
L	+	+				+	+				+							SA		+
A	+			+	+	+	+				+								+	+
D	+	+		+	+	+	+				+									
L	+			+	-	+	+												-	
J	+			+	-	+	+								+					+
T	+			+		+	-													-
A	+					+	-												-	

Tabla 6.40

Habilidades cognitivas

Todos los niños expresan una comprensión del enunciado del problema, aunque fue necesario ayudar a algunos (C1). La mayoría omite la viñeta y la escritura de los datos (C2, C3) por querer llegar rápidamente a la solución.

Dos no representan las cantidades en el SRVG: uno por no querer hacerlo y el otro por desconocimiento (C4); sin embargo, sólo cuatro lo resuelven correctamente en este sistema (C5).

El SA está bien interiorizado: todos son capaces de elegir la operación, aunque dos se equivocan al ejecutarla.

Habilidades heurísticas

En este problema, ningún niño expresa haber usado algún heurístico, sí se ayudó a un alumno, disminuyéndole las cantidades y personalizando el problema para que llegara a comprenderlo (H3).

Habilidades metacognitivas

Un alumno se apoya en el SA para obtener la solución (H5), que luego coloca en el SRVG. Dos expresan preferencias explícitas por el SA (M6).

Dos alumnos mostraron un control de la resolución mediante el SRVG (M7), mientras cinco controlaban perfectamente la resolución en el SA (M8).

La tabla 6.41 expresa los alumnos que resuelven el problema correctamente en cada uno de los sistemas, los heurísticos que utilizan y si hacen algún comentario sobre la preferencia por alguno de los sistemas de resolución.

Todos los alumnos eligen correctamente la operación (aunque dos la ejecutan mal), siendo tres los que lo pueden hacer en el SRVG.

	Resolución en el SA	Resolución en el SRVG	Heurísticos	Otros
J	correcta	correcta		
A	correcta	no lo sabe		
L	correcta	no lo hace		
A	correcta	correcta		
D	correcta	correcta		
L	correcta	incorrecta		
J	correcta	incorrecta		
T	incorrecta (ejecuta mal la operación)	no sabe		
A.	incorrecta (ejecuta mal la operación)	no sabe		

Tabla 6.41

Problema 2

En la tabla 6.42 resumimos las habilidades observadas:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
J	+					+	+								+					+

A	+			+	+	*				SA		+
L	+			+	+					SA		+
A	+	+	+	+			+	1	+		+	
D	+	+	+	+	+		+	2	+			+
L	+			+	+							+
J	+			+	+							+
T	+			+	+							+
A	+			+	+	*						

Tabla 6.42

Habilidades cognitivas

Este problema es comprendido por todos los niños (C1). Dos alumnos lo resuelven en ambos sistemas y el resto, sólo en el SA. Ninguno hace la viñeta ni escribe los datos.

Habilidades heurísticas

Sólo un alumno justifica la elección de la operación, apoyándose en palabras clave, mientras a otro hay que plantearle problemas análogos con cantidades más pequeñas, llegando a resolverlo "*por ser igual a éstos*".

Habilidades metacognitivas

Dos alumnos vuelven a demostrar sus preferencias exclusivas por el SA, y es en éste donde controlan mejor la resolución del problema. Un alumno muestra preferencias por el SRVG y en él demuestra controlar mejor la resolución del mismo.

La tabla 6.43 muestra en qué sistema de representación resuelven el problema, así como los heurísticos o estrategias utilizados.

Todos eligen correctamente la operación, aunque uno se equivoca al ejecutarla. Dos eligen el SRVG como forma de resolver el problema.

	Resolución en el SA	Resolución en el SRVG	Heurísticos	Otros
J	correcta	no lo hace		
A	correcta	no lo hace	palabras clave	
L	correcta	no lo hace		
A	correcta	correcta		se apoya SRVG
D	correcta	correcta		
L	correcta	no lo hace		
J	correcta	no lo hace		
T	incorrecta (ejecuta mal la operación)	no lo hace		
A.	correcta	no lo hace	analogía con un problema más sencillo	

Tabla 6.43

Habilidades observadas

En este grupo, haremos un resumen de las habilidades observadas y, al final estudiaremos tres niños, que presentan unas características muy diferentes entre ellos.

En estas entrevistas se repitieron situaciones totalmente similares a las sesiones anteriores. Aquí los niños tenían que resolver los dos problemas en la hoja modelo, pero tenían libertad para moverse libremente de un apartado a otro, sin seguir la linealidad de la ficha.

Problema 1

Los niños de rendimiento alto leen los enunciados rápidamente y les basta una vez, mientras encontramos un niño que necesitó leerlo tres veces y la ayuda del entrevistador para lograr entenderlo.

Los niños de rendimiento medio son los que deciden hacer la viñeta, quizá buscando la mejor comprensión del mismo.

En la tabla 6.44, presentamos un resumen de los datos observados en la resolución del problema 1, indicando en cada sistema si lo hacen bien (B.), mal (M.) o no lo hacen (N.).

Problema 1	Lectura	Viñeta	Datos	Resolución en el SRVG			Operaciones		
Alumnos				B.	M.	N.	B.	M.	N.
Rendimiento alto	1 vez	Si la hacen: bien	No los escriben	2		1	3		
Rendimiento medio	1 ó 2 veces	1 la hace bien	No los escriben	2	1		3		
Rendimiento bajo	Entre 1 y 3 veces	No la hacen	No los escriben		2	1	1	2	

Tabla 6.44

En el uso de las representaciones gráficas encontramos dos niños que sí las utilizan bien, frente al grupo de rendimiento bajo que no las entiende. Sólo los niños de rendimiento bajo se equivocan al ejecutar las operaciones.

En la tabla 6.45 presentamos otros cuatro aspectos estudiados:

a) la comprensión que muestran del problema

b) el uso correcto o no del SRVG, indicando con un 1 si hacen primero la resolución en este sistema.

c) la ejecución de las operaciones.

d) si utilizan el esquema partes-todo para comparar la colección mayor con la menor.

	Comprensión	Uso diagramas	Operaciones	Esquema partes-todo
J.	Buena	+(1)	+	+
A.	Buena	-/+	+	-
L.	Buena	no los usa	+	+
A.	Buena	+(1)	+	+
D.	Buena	+(1)	+	+
L.	Regular	-	+	-
J.	Buena	-	+	
T.	Buena	-	-	
A.	Deficiente	no sabe usarlos	-	-

Tabla 6.45

Por tanto, como se refleja en las entrevistas, la mayor parte de estos niños utilizan el esquema partes-todo al resolver este problema. Tres utilizan el SRVG en primer lugar y la ejecución de las operaciones es, en general, buena.

Problema 2

El 2º problema (problema de cambio) les resultó sumamente fácil, y todos pedían poder prescindir de la totalidad de los apartados, y pasar directamente a la operación, excepto dos niños de rendimiento medio (los mismos que en el problema anterior hacían bien los diagramas), que seguían prefiriendo resolverlos gráficamente, antes de pasar a la operación. Todos los niños supieron elegir correctamente la operación y sólo uno, la ejecuta incorrectamente.

Por tanto, el esquema seguido fue:

Lectura del enunciado -----------> operación

Este problema, como hemos podido observar, es realmente un ejercicio para estos alumnos y por ello, esquivan hacer dibujos o diagramas. Los resultados, planteados de la misma forma que en el problema anterior, los presentamos en la tabla 6.46.

	Comprensión	Uso diagramas	Operaciones	Esquema partes-todo
J.	Buena		+	
A.	Buena		+	
L.	Buena		+	
A.	Buena	+		
D.	Buena	+(1)	+	+
L.	Buena		+	
J.	Buena		+	
T.	Buena		-	
A.	Regular		+	

Tabla 6.46

También varían las preferencias al resolver los problemas: sólo en el SA, sólo en el SRVG o en ambos sistemas, como observamos en la tabla 6.47, donde hemos expresado los resultados relacionados con su rendimiento.

	Sólo en el SA, pero entienden el SRVG	Sólo en el SA, no entienden el SRVG	En ambos sistemas	En el SRVG y no en el SA	En ningún sistema
R. alto	Lara (*, +)	Ana	Jorge (+)		
R. med		Lidia (*)	Dácil (+)	Alexis (+)	
R. bajo		Jonathan	Tomás		Antonio

Tabla 6.47

Los niños que tienen un * muestran un cierto rechazo al uso de los diagramas, los que llevan un + expresan, al resolver los problemas, la utilización del esquema partes-todo.

En general, sí existe correlación entre los alumnos que resuelven los problemas bien y aquellos que menos dificultades plantean al realizar las operaciones o al inventar problemas.

6.3.3.2 Análisis de las entrevistas con problemas de estructura multiplicativa

En esta fase decidimos, como en los problemas aditivos, utilizar siempre la ficha modelo y, aunque en los problemas combinados también aparecen problemas de multiplicar, creímos que era importante ver cómo se comportaban frente a un problema de este tipo.

Los problemas elegidos fueron:

3) Un colegio tiene 305 alumnos y otro el triple de alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene el segundo colegio?

4) 6 atletas van a participar en una carrera de relevos de 636 metros, corriendo cada uno la misma distancia. ¿Cuántos metros corre cada uno?

5) Lucía ha ahorrado 314 ptas y su hermano la mitad. ¿Cuántas pesetas tiene ahorradas su hermano?

Estos problemas no son presentados en la misma sesión, para evitar que puedan relacionar cada sesión con una operación. El problema 3 se pasó en la sesión 2ª, el 4 en la sesión 1ª y el 5 en la sesión 4ª.

Problema 3:

El problema de multiplicar es resuelto por todos los alumnos entrevistados. En la tabla 6.48 mostramos las habilidades que exteriorizan.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
J	+			+	+	+	+			*					+					
A	+			+	+	+	+			*					+					
L	+					+	+			*										+
A	+			+	+	+	+												+	+
D	+			+	+	+	+												+	+
L	+					+	+			+										+
J	+					+	+			+										+
T	+			+	+	+	+			+										-
A	+					+	+			+										

Tabla 6.48

Habilidades cognitivas

Todos los alumnos comprenden el problema (C1), y todos son capaces de resolverlo correctamente el en SA (C6 y C7, además cinco son capaces de representarlo y resolverlo en el SRVG (C4 y C5). De éstos, cuatro lo hacen primero con las operaciones, y ya resuelto de esta forma, lo hacen con el SRVG. Sólo uno realiza el proceso al revés. Un alumno lo resuelve mediante una suma.

Habilidades heurísticas

Siete alumnos justifican la elección de la operación, utilizando palabras clave:*"el triple es multiplicar por 3", "es tres veces"*

J: Porque es el triple y tengo que multiplicar por 3.

A: Porque es el triple, son tres veces más.

D. Un Colegio tiene 305 alumnos y el otro el triple, o sea, 305, 305, 305, y dice ¿qué cuántos tiene? Así, para no hacer 305+305+305, haré 305x3.

Problema 4:

El problema 4 (división-tipo reparto) lo resuelven bien 7 y hay dos alumnos que no saben que operación ejecutar.

En la tabla 6.49 mostramos la codificación de dichas entrevistas.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
J	+	+		+	+	+	+							+					+	+
A	+	+		+	-	+	+								+				-	+
L	+	+				+	+													
A	+	+		+	+	+	+					1							+	+
D	+	+		+	+	+	+			*		1								
L	+	+				+	+													-
J	+			+		+	+													
T	+	+		+	-	+	-													-
A	-	+				-														-

Tabla 6.49

Habilidades cognitivas:

Sólo una alumno no comprende el problema (C1). Casi todos realizan una viñeta que lo represente, por petición del entrevistador, para observar si habían comprendido bien el problema.(C2).

El alumno A presenta fuertes dificultades para comprender el problema y lo que hace es tomar los datos y sumarlos, pues es la única operación que domina.

Sólo 3 hacen el diagrama: dos, antes de la operación y uno, después (C4). Los que lo hacen antes lo usan de forma independiente, sin apoyarse en el SA, y utilizan el resultado obtenido como apoyo para corregir la operación mal ejecutada.

Habilidades heurísticas y metacognitivas

El único heurístico utilizado es la palabra clave: repartir. El proceso de resolución es a partir del enunciado, elegir una operación. Encontramos dos alumnos que comienzan resolviéndolo en el SRVG, mientras el 3º, comienza por el SA.

Problema 5

El problema 5 (división tipo comparar) está claro para los 6 niños de rendimiento alto y medio, que identifican la mitad con la división entre dos (aunque uno se equivoca al dividir). La mayoría busca elegir una operación y ejecutarla.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
J	+					+	+								+					+
A	+					+	+													+
L	+					+	+								+					+
A	+					+	+			*					+					+
D						-														-
L	+					+	+			*					+					
J	+					+	-													
T																				
A	+					+	-													

Tabla 6.50

Y esta elección vuelve a estar ligada al uso de palabras clave.

E: ¿Entiendes lo que es la mitad?

A: Tengo que dividir entre 2, porque es la mitad.

Sin embargo, los otros no son capaces de resolverlo. Se les sugiere un problema similar con chocolatinas, tartas, etc y uno de ellos llega a resolverlo manipulativamente, pero no sabe qué operación debe ejecutar.

6.3.3.3 Análisis de las entrevistas con problemas de dos operaciones.

En esta fase, los problemas elegidos fueron:

6) Juan tiene 85 pesetas y se ha comprado una chocolatina que le costó 35 pesetas y unos caramelos que le costaron 25 pesetas. ¿Podrá comprarse un pito que le cuesta 20 pesetas?

7) Un señor recorre en su coche por la mañana 120 km y por la tarde 62 km. Si gasta 6 pesetas por km ¿cuánto gasta en un día?

8) En la clase hay 24 niños. Si compramos 275 globos para repartirlos y nos sobraron 35 globos ¿cuántos globos cogió cada niño?

Estos problemas se realizaron el 6 en la sesión 2ª, y el 7 y 8 en la sesión 3ª.

Problema 6:

El problema 6, que tiene un contexto muy familiar para ellos, fue resuelto por 6 alumnos, dos más se equivocan en las operaciones y sólo uno no sabe como resolverlo.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
J	+			+	+	+	+												+	+
A	+					+	+								+					
L	+					+	+													+
A	+			+	+	+	+							+	+				+	+
D	+					+	+											SA		+
L	+					+	-													
J	+					+	-											SA		
T	+					+	+								+			SA		
A	-					-														

Tabla 6.51

Habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas

Todos los alumnos, salvo uno, comprenden el problema (C1), y todos van rápidamente a elegir las operaciones y calcular el resultado (C6 y C7).

Sólo uno utiliza los diagramas, pero después de las operaciones:

E: ¿Por qué hiciste las operaciones primero?

A: Porque había dos operaciones y era más rollo.

El otro alumno, que utiliza los diagramas, lo hace de una forma totalmente independiente. En las operaciones efectúa dos sumas 35+25=60, 60+20 y comprueba por comparación, que el resultado final es inferior a las pesetas que tenía. Sin embargo, al hacerlo con el diagrama coloca 85 y le quita 35 y luego, de las 50 que le dio el resultado, le quita 25.

Problema 7

El problema 7 fue resuelto rápidamente por 2 alumnos. Fue necesario orientar a 4 más para que lo realizaran, ya que no entendían lo que significaba *"Si gasta 6 ptas por cada km que recorre"*, después de lo cual lo hicieron correctamente.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
J	+					+	+								+					+
A	+					+	+								+					
L	+					+	+								+					
A	+			+	-	+	+													
D	+					+	+								+					-
L	+					+	+								+					
J						+	+													
T	-					-	-													
A	-					-	-													

Tabla 6.52

Los dos restantes reconocen que no saben lo que hay que hacer y restan, suman o llegan a hacer cosas como colocar los números seguidos 8462 y dividirlo por 6. Ninguno intenta hacer el diagrama.

Problema 8:

Finalmente, el tercer problema de dos operaciones fue resuelto por un sólo alumno. La mayoría tiende a hacer la división y cuando comprueba que el resto no coincide con 35 se quedan sin saber qué hacer. Se les reformuló el problema, sustituyendo "sobraron" por "se picaron" y entonces 4 fueron capaces de resolverlo.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
J	+					+	+								+					+
A						-	+													

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
L						-	+													
A						-	+													
D						-	+													
L						-														
J						-	-													
T						-	-													
A						-	-													

Tabla 6.53

Habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas

Dos hacen sólo una operación y otros dos no saben qué hacer. Este problema les causó muchas dificultades, lo cual les generó bloqueos.

6.3.3.4 Problemas inventados a partir de una representación visual-geométrica

En el estudio definitivo, elegimos 9 alumnos del aula instruida por la investigadora, pero solamente les planteamos un diagrama de suma (Figura 6.3) para que inventaran un enunciado, ya que habíamos aumentado la proporción de problemas a resolver y entendíamos que la operación sustractiva, que es la que provocó diferencias, necesitaba un estudio más largo y profundo.

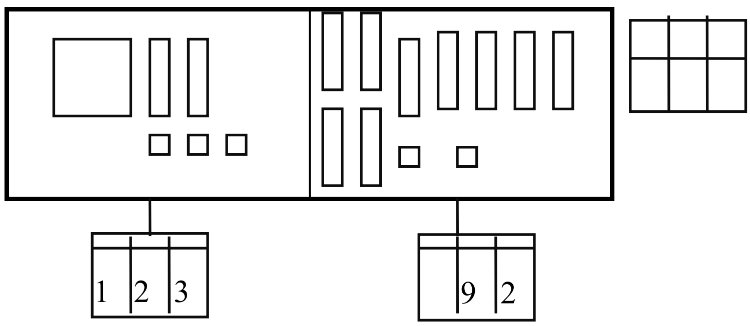


Figura 6.3

Obtuvimos los resultados que aparecen en la tabla 6.54

	Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Mal enunciad
Rendimiento alto	1	2			
Rendimiento medio		2			2
Rendimiento bajo					2
	1	4	0	0	4

Tabla 6.54

Aquí se repiten los resultados obtenidos en los grupos anteriores.

Estudio de casos

Presentamos, a continuación, el estudio de tres alumnos con unas características muy diferentes: Lara, Alexis y Antonio.

Lara

Lara es una niña de rendimiento alto, pero que desde un primer momento muestra un rechazo hacia la representación y solución gráfica, ya que decía que era alargar innecesariamente un problema, dado que con las operaciones era mucho más fácil de realizar. Este es el protocolo de la resolución del problema 1:

L: (Lee el problema en voz baja, muy rápido) *¿Puedo hacerlo directamente con las operaciones?*
E: ¿Qué operación elegirías?
L: Una resta, porque dice que Luis tiene 321 y María 119 ptas y me pregunta que cuánto tiene Luis más que María. (Ejecuta la operación correctamente).
E: ¿Podrías hacer un dibujo que representara el problema?
L: Pondría el dinero que tiene Luis y después separaría lo que tiene María, pero no puedo... no me da bien, así que tengo que cambiar una moneda de 5. Representa las monedas de Luis y separa lo que le corresponde a María. El dibujo es exactamente una representación del esquema partes-todo y la misma representación y solución gráfica, pero utilizando como simbología las monedas.

Alexis.

Alexis es de rendimiento medio, pero con una fuerte capacidad gráfica. Este niño prefiere resolverlo mediante la representación visual-geométrica, más que con operaciones. Aunque su rendimiento en Matemáticas es aceptable, las ve como una materia rutinaria y algorítmica. Veamos como se desarrolla su proceso de resolución:

A: (Lee el problema en voz baja)
E: ¿Entiendes la pregunta?
A: Dice que..(lee el texto, pero enfatizando los datos y la pregunta. Pasa a hacer el diagrama: representa la cantidad total y separa la cantidad de la colección menor, obteniendo el resultado)
E: ¿Cuál es la solución?
A: 202
E: ¿Lo podrías hacer con una operación?
A: Sí (Hace la resta)
E: ¿Por qué una resta?
A: Porque necesito quitar a lo que tiene Luis lo que tiene María.

Antonio.

El tercer niño que presentamos es de rendimiento bajo. Le falta comprensión lectora y no posee ningún tipo de estrategias que le permitan hacer una representación correcta del problema. Se mueve entre dos operaciones: o es sumar o es restar, pero no sabe por qué. Sólo está seguro que sumar es para ver cuánto tienen entre los dos. Con cantidades pequeñas es capaz de resolverlo mediante conteo, pero la magnitud de estas cantidades le desborda este tipo de técnica.

E: Léelo. (Rápidamente se dispone a escribir) *¿Ya entiendes la pregunta?*
A: Que tengo que sumar cuánto dinero tiene María y Luis.
E: ¿Es esa la pregunta? Léelo de nuevo.
A: Restar
E: Restar ¿para qué?
A: Para saber lo que tiene María.
E: Lee lo que dice acerca de María.
A: 119
E: ¿Entonces? ¿Por qué no haces un dibujo?
A: (Dibuja dos muñecos. Intento que personalice los personajes con jugadores de fútbol)
Restar para ver lo que tiene Luis.
E: El problema dice que Luis tiene 321 ptas.
A: Tengo que sumar..
E: ¿Para qué?
A: Para ver cuanto tienen entre los dos. (Le pido que lo vuelva a leer. Le planteo que imagine que los personajes son él y su hermano y le repito el problema, pero se decide a hacer la suma)
E: 440 ¿qué es?
A: Lo que tienen los dos.
E: Eso está bien, pero ¿quién tiene más dinero?

A: Luis
E: Y ¿cuánto más tiene?
A: 440 (Paso a ponerle un problema similar con cantidades inferiores a 20, por ver si el orden de las magnitudes es lo que le está creando problemas. Lo resuelve correctamente ayudándose de los dedos, pero no sabe qué operación está efectuando. Al final afirma que es la resta. Por analogía afirma que en el problema planteado ha de hacer una resta. La ejecuta mal)

6.4 DISCUSIÓN

Los resultados de la resolución de problemas en este grupo son similares a los obtenidos en el gran grupo. En el desarrollo del diseño, apreciamos la gran motivación que se produjo en los niños: Resolver un problema no se limitaba a una técnica mecánica de buscar y ejecutar una operación, sino que permitía desentrañar el enunciado, representarlo mediante una viñeta, resolver de forma gráfica (algo totalmente novedoso y que no llegaron a aceptar plenamente) y, finalmente, la resolución formal y la escritura de la historia con dicho resultado.

El trabajo se desarrolló siempre en grupos, pudiéndose ayudar de los bloques aritméticos, como material manipulativo, cuando algún alumno lo requería.

Pudimos comprobar el desigual ritmo de aprendizaje, lo cual produjo que muchos niños no aprendieran completamente la sintaxis del SRVG.

En las entrevistas hemos podido comprobar como el uso del sistema de representación visual-geométrico y el modelo de competencia favorece en los alumnos la exteriorización de habilidades de tipo cognitivo, heurístico y metacognitivo.

De los problemas de estructura aditiva, podemos afirmar que estos problemas (y concretamente los de restar) son bastante fáciles para los niños de 4º y 5º, mostrándose el de tipo cambio más sencillo, aunque la operación (con doble acarreo) originó más errores.

Podemos caracterizar a los alumnos, siguiendo a Krutetskii, de la siguiente forma:

* Los niños de rendimiento alto se caracterizan porque:

les basta leer el problema una vez, la viñeta es sencilla y expresiva, escriben correctamente los datos, eliminando aspectos superfluos, algunos han comprendido la sintaxis de los diagramas, realizan correctamente las operaciones, escriben el resultado en una historia.

* Los de rendimiento medio:

tienen que leer, al menos, dos veces el texto, la viñeta es más confusa y se entretienen en aspectos estéticos, tienden a copiar todo el enunciado en el momento de anotar los datos, tienen algunas equivocaciones en las operaciones, no escriben bien la historia con el resultado obtenido.

* Los de rendimiento bajo:

acusan una fuerte dificultad lingüística (deben leer el enunciado hasta 3 veces), evitan hacer la viñeta, no distinguen bien los datos, en general, no han llegado a entender el sistema de representación, tienen dificultad para insertar el resultado en una historia final.

Encontramos que los niños tenían ya interiorizados otros modelos de resolución, que pasaban del enunciado (separando los datos) a la operación.

La adquisición de este nuevo lenguaje fue logrado sólo por algunos niños. Los niños de mayor rendimiento eran capaces de realizar una buena representación mental del problema, que como apuntan Resnick y Ford (1981), es el primer paso en cualquier situación de resolución de problemas.

Existe una relación entre las habilidades que exteriorizan y su capacidad para resolver el problema. Como muchos autores afirman (Lester, 1982, DeCorte, 1993, Schoenfeld, 1992), los alumnos que demuestran poseer más habilidades metacognitivas se presentan como los mejores resolutores.

CAPÍTULO 7: LAS ACTITUDES DE LOS ALUMNOS Y EL PROFESORADO

7.1 INTRODUCCIÓN

Este Capítulo aborda dos aspectos: el dominio afectivo de los alumnos y la implicación del profesorado en la investigación. Nos planteamos analizar la actitud de los alumnos hacia las Matemáticas y la resolución de problemas y algunos aspectos del profesorado. Por ello, el Capítulo se divide en dos partes, la primera dedicada a las actitudes de los alumnos y la segunda, al profesorado.

7.2 LAS ACTITUDES DE LOS ALUMNOS

La importancia de las actitudes de los alumnos se ha puesto de manifiesto en la revisión de la bibliografía, que hemos descrito en el Capítulo 1. Nos planteamos, por ello, el estudio de las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas y hacia la resolución de problemas.

Esta parte de la investigación se desarrolla en cuatro fases. La primera fue la delimitación del constructo actitud y la elección de un instrumento de medida para ambas actitudes. La segunda fase fue la aplicación de estos instrumentos a un grupo de 355 alumnos de 3º a 5º Curso de EGB, lo que nos permitió comprobar la validez y fiabilidad de los mismos, obtener datos sobre las distintas componentes de dichas actitudes y sobre los cambios en las mismas. La tercera fase tiene un tratamiento cualitativo y pretende, por una parte, profundizar en las componentes de dichas actitudes y relacionarla con otros factores, para lo cual se realizaron observaciones y entrevistas, y por otra, valorar el instrumento elegido en la fase anterior; todo ello se realizó con los 24 alumnos de 2º nivel del 2º ciclo de Primaria, y con los 9 alumnos seleccionados de este grupo. Finalmente, la cuarta fase, pendiente de realizar, consistirá en extender la aplicación de esta escala a alumnos de 6 a 8 años y de 11 a 14, con la finalidad de analizar sus actitudes y estudiar la posible segmentación del continuo sobre actitudes que va de 6 a los 14 años, mediante técnicas cuantitativas, y determinar las causas de los posibles cambios, mediante técnicas cualitativas.

La primera fase ha sido descrita en el apartado 4.9, donde definimos la actitud como un concepto multidimensional y elegimos como instrumento de medida una escala de tipo Likert.

A continuación, vamos a desarrollar las fases segunda y tercera, que denominaremos primer estudio sobre actitudes y segundo estudio, respectivamente.

7.3 PRIMER ESTUDIO SOBRE ACTITUDES

El objetivo de este trabajo es estudiar la actitud de los niños de 8 a 11 años hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas, analizando las posibles diferencias entre ellas. Junto al estudio global se realiza también un estudio por cursos y por sexos. La actitud hacia la resolución de problemas se midió dos veces, antes y después de haber desarrollado un diseño innovador sobre resolución de problemas. Para el análisis de los resultados se ha utilizado varias técnicas estadísticas, entre otras la correlación canónica.

Las cuestiones que abordamos en esta investigación son las siguientes:

1.- ¿Cómo es la actitud hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas en los niños de 8 a 11 años?

2.- ¿La actitud hacia la resolución de problemas sufre algún cambio después de haber desarrollado con los niños un diseño de instrucción innovador en resolución de problemas aritméticos verbales?

3.- ¿Hay diferencias en las actitudes según los cursos, los sexos o las aulas?

4.- ¿Se puede establecer correlación entre las actitudes y otras variables?

Los instrumentos de medida fueron dos escalas de tipo Likert, con 24 ítems cada una, una para conocer las actitudes hacia las matemáticas y otra para las actitudes hacia la resolución de problemas.

7.3.1 Hipótesis y su confirmación estadística

Nos planteamos las siguientes hipótesis cuya confirmación o no, pasamos a explicar.

Hipótesis 1: La actitud hacia las Matemáticas es positiva.

Hipótesis 2: La actitud hacia la resolución problemas es positiva

Hipótesis 3: La actitud hacia la Matemáticas está relacionada con la actitud hacia la resolución de problemas.

Y las hipótesis nulas:

Hipótesis H_{01}: No existen diferencias significativas en las actitudes hacia la resolución de problemas, antes y después del DIRPA.

Hipótesis H_{02}: No existen diferencias significativas en las actitudes según los cursos.

Hipótesis H_{03}: No existen diferencias significativas en las actitudes según los sexos.

Hipótesis H_{04}: No existen diferencias significativas en las actitudes hacia la resolución de problemas según las aulas.

Hipótesis H_{05}: No existen diferencias significativas en las actitudes hacia la resolución de problemas, antes y después del desarrollo del DIRPA, según las aulas.

Hipótesis 1: La actitud hacia las Matemáticas es positiva.

Asignando puntuaciones a los diversos ítems, obtenemos que el nivel medio alcanzado es de 36.5, la desviación típica 7 y el coeficiente de asimetría -0.96; por tanto, nos encontramos ante una distribución que tiende hacia la simetría, aunque con un ligero sesgo a la izquierda. Obsérvese para ello la Figura 7.1.

En consecuencia, la actitud de los alumnos de 8 a 11 años hacia las Matemáticas se revela positiva.

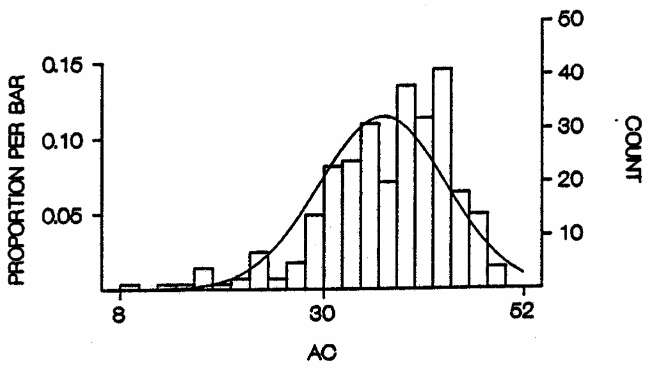


Figura 7.1

Hipótesis 2: La actitud hacia la resolución de problemas es positiva.

Igualmente, la actitud hacia la resolución de problemas se revela positiva. En este caso, la media obtenida es 36.7 y su desviación típica 8.

Hipótesis 3: La actitud hacia las Matemáticas está relacionada con la actitud hacia la resolución de problemas.

Para analizar la relación de la actitud hacia las matemáticas con la actitud hacia la resolución de problemas, aplicamos una prueba t-Student de diferencias entre medias de ambas actitudes (dado que la escala era la misma para ambos casos) (Anexo, p. 237). Las medias obtenidas han sido 36.5 para la actitud hacia las Matemáticas y 37.5 para la actitud hacia la resolución de problemas. La prueba t-Student de diferencias no arroja diferencias estadísticamente significativas entre ambas actitudes, t(130)=-1.637, p=.104. Así pues, podemos afirmar que estas dos actitudes son similares.

Esta conclusión se confirma con un análisis adicional, calculando el coeficiente de correlación de Pearson entre ambas escalas, para comprobar si existe relación entre ellas. El coeficiente de correlación obtenido ha sido 0.572, el cual ha resultado estadísticamente significativo (p=.000).

Hipótesis H_{01}: No existen diferencias en las actitudes hacia la resolución de problemas, antes y después del DIRPA.

Nuestro objetivo era poder contestara la pregunta si "la actitud hacia la resolución de problemas ¿sufre algún cambio después de haber desarrollado con los niños un diseño de instrucción innovador en resolución de problemas aritméticos?"

Para responder a esta pregunta incluimos dos factores más, con objeto de homogeneizar la estrategia de análisis: los factores curso y sexo. Así pues, aplicamos un ANOVA factorial mixto con dos factores intersujeto: CURSO (3º, 4º y 5º) y SEXO (niños vs niñas); un factor de medidas repetidas: el MOMENTO de la medición (1ª vez vs 2ª vez); y una variable dependiente: la actitud hacia la resolución de problemas (Anexo, p. 238). El resultado crucial para comprobar si ha habido una mejora en la actitud hacia la resolución de problemas, es obtener un efecto significativo del factor MOMENTO.

Los resultados de los ANOVAs están en las tablas 7.1 y 7.2.

	F	P
SEXO	0.078	0.780
CURSO	0.424	0.655
SEXO*CURSO	2.646	0.075

Tabla 7.1

Se observa una interacción marginalmente significativa entre los factores Sexo y Curso: F(2,122)=2.646, p=.075.

	F	P
MOMENTO	0.756	0.386
MOMENTO*SEXO	0.043	0.837
MOMENTO*CURSO	0.807	0.448
MOMENTO*SEXO*CURSO	0.294	0.746

Tabla 7.2

No se observan diferencias estadísticamente significativas en la variable MOMENTO (1ª vez y 2ª vez): F(1,122)= 0.756, p=.386. Así pues, hemos de concluir que no se han producido diferencias en esta actitud antes y después de la instrucción.

La interacción entre los factores CURSO y MOMENTO no ha resultado estadísticamente significativa [F(2,122)=0.807, p=.448]. No obstante, como puede observarse en la Figura 7.2, los alumnos de 4º Curso muestran una disminución en su actitud de la 1ª a la 2ª vez.

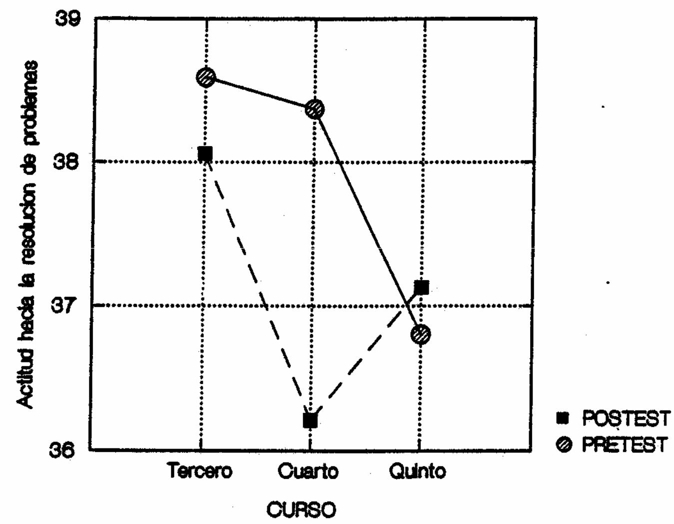


Figura 7.2

Hipótesis H_{02}: No existen diferencias en las actitudes hacia las Matemáticas, según los cursos.

Hipótesis H_{03}: No existen diferencias en las actitudes hacia las Matemáticas, según los sexos

Estas dos hipótesis las estudiamos conjuntamente. Para tratar de ver si hay diferencias entre los cursos y los sexos, aplicamos un ANOVA factorial con dos factores intersujeto: curso (3º, 4º y 5º) y sexo (niños vs. niñas) (Anexo, p. 228). El principal resultado obtenido es la influencia estadísticamente significativa ejercida por el factor CURSO sobre la actitud hacia las Matemáticas: F(2,277)=3.726, p=.025. En efecto, las medias obtenidas para los cursos 3º, 4º y 5º han sido, respectivamente, 36.4, 37.9 y 35.4. En el cuarto curso es donde se observa la actitud más favorable.

No se han observado tampoco efectos significativos del sexo (F

(1,277)=1.761, p=.186), (aunque las niñas muestran un nivel algo superior) ni de la interacción entre ambos factores (F(2,277 =.894, p=.410). La Figura 7.3 muestra estos resultados: En 5º parece haber una más clara diferenciación entre niños y niñas en su actitud. No obstante, la única conclusión probada es que el factor que parece afectar a la actitud es el curso.

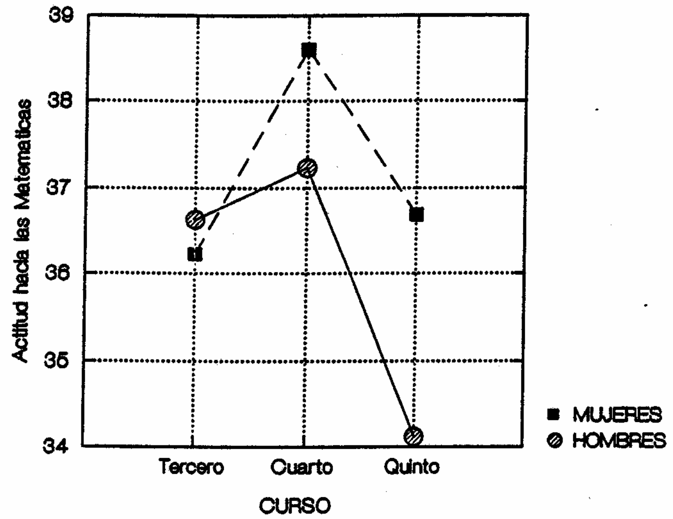


Figura 7.3

Hipótesis H_{04}: No existen diferencias en las actitudes hacia la resolución de problemas, según las aulas.

Para comprobar esta hipótesis aplicamos un ANOVA de un factor (Anexo, p. 242), que reproducimos a continuación.

BARTLETT TEST FOR HOMOGENEITY OF GROUP VARIANCES
CHI-SQUARE= 14.484 DF=7 PROBABILITY= 0.043

ANALYSIS OF VARIANCE

SOURCE	SUM OF SQUARES	DF	MEAN-SQUARE	F	PROB
BETWEEN GROUPS	1341.850	7	191.693	3.755	0.001
WITHIN GROUPS	6125.580	120	51.046		

El resultado muestra un efecto estadísticamente significativo de los profesores sobre la actitud de los alumnos hacia la resolución de problemas: F(7,120)=3.755, p=.001 (Anexo, p. 242). Es decir, las diferentes clases de alumnos presentan actitudes medias diferentes. La Figura 7.4 muestra dichas medias, que a su vez están recogidas en la tabla 7.3. (Faltan Aulas, porque por diversos motivos dejaron de pasar alguna de las escalas).

	Aula 1	Aula 3	Aula 4	Aula 5	Aula 7	Aula 8	Aula 9	Aula 13
Casos	19	16	7	12	18	17	18	21
Mín.	28	11	21	29	20	22	22	26
Máx.	48	48	45	46	47	46	47	48
Media	42.263	31.625	39.143	37.917	33.333	38.588	37.444	38.238
Desv.t.	4.556	10.782	8.295	5.351	7.404	6.226	6.810	6.855

Tabla 7.3

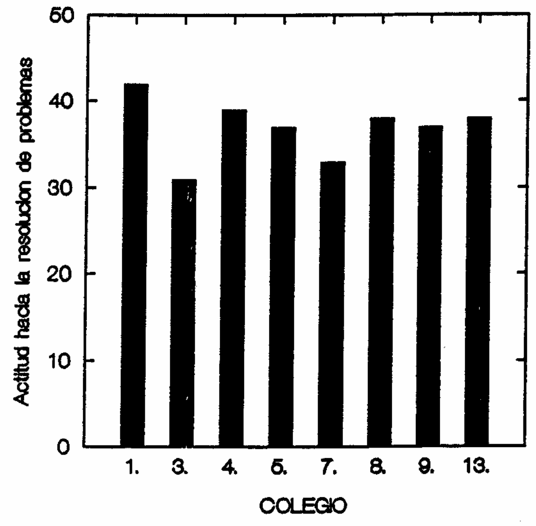


Figura 7.4

Podemos observar como el aula 1 obtiene el mayor valor medio y la menor dispersión, coincidiendo con un aula que también presenta un mayor rendimiento en resolución de problemas. A su vez el aula 3 coincide con un aula de niños que presentan mayores dificultades en la resolución de problemas.

Hipótesis H_{05}: No existen diferencias en las actitudes hacia la resolución de problemas, antes y después del DIRPA, según las aulas.

Para responder a la pregunta "si hay cambios significativos en las actitudes de determinadas aulas", calculamos una t-Student (datos apareados) entre medias dependientes sobre dicha actitud antes y después de la experiencia.

Los resultados se recogen en la tabla 7.4.

PAIRED SAMPLES T-TEST ON ACP VS ACP2

	Aula 1	Aula 3	Aula 4	Aula 5	Aula 7	Aula 8	Aula 9	Aula 13
Mean d.	1.474	-0.938	4.857	0.583	1.556	0.529	-3.111	-0.714
Sd. dif.	4.869	8.559	11.697	2.644	5.762	4.375	4.861	11.051
T=	1.319	-0.438	1.099	0.764	1.145	0.499	-2.715	-0.296
DF=	18	15	6	11	17	16	17	20
PROB=	0.204	0.668	0.314	0.461	0.268	0.625	0.015	0.770

Tabla 7.4

No se observan diferencias significativas entre ambas medidas, a excepción del Aula 9. La Figura 7.5 muestra los cambios medios para cada clase. En consecuencia, concluimos que no se ha producido en las clases de forma sistemática una mejora en la actitud de los alumnos hacia la resolución de problemas.

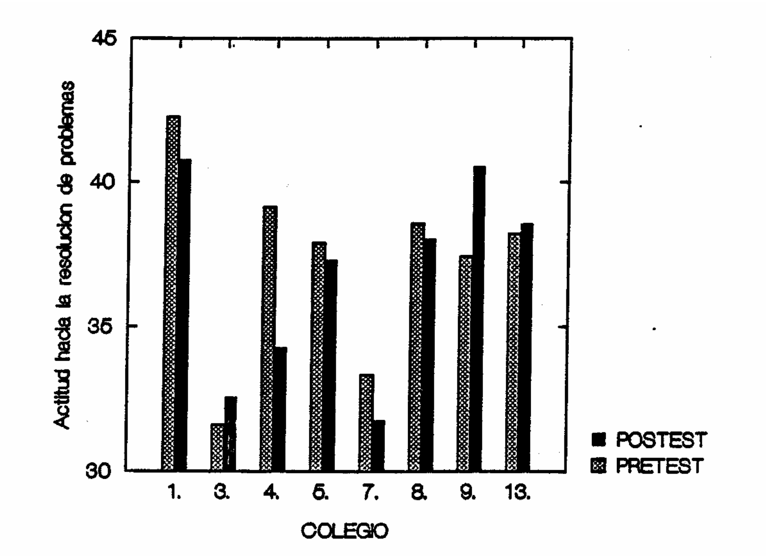


Figura 7.5

7.3.2 Relación entre la actitud y otras variables

Presentamos, por último, el estudio de la relación entre un grupo de variables independientes con otro grupo de variables dependientes, para lo cual utilizamos la correlación canónica (Cuadras, 1981).

En el primer grupo (variables independientes) consideramos las variables:

estudios de los padres (ESTP) y de las madres (ESTM) (que se clasificaron en universitarios, bachillerato, básicos y sin estudios), actitud hacia las matemáticas (AC), actitud hacia la resolución de problemas (ACP), notas del profesor en Matemáticas (NOT), puntuaciones del pretest (que se dividió en dos pruebas) de resolución de problemas aritméticos verbales (PRE1,PRE2); y en el segundo grupo (variables dependientes): puntuaciones en el postest de resolución de problemas aritméticos verbales (POS1,POS2) y actitud hacia la resolución de problemas medida después de la experiencia (ACP2) (Anexo, p. 251).

La matriz de correlación entre estas variables es:

	ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP	PRE1	PRE2	POS1	POS2	ACP2
ESTP	1									
ESTM	0.633	1								
AC	0.160	-0.148	1							
ACP	0.093	-0.014	0.575	1						
NOTP	0.163	0.151	0.633	0.466	1					
PRE1	0.157	0.202	0.417	0.647	0.611	1				
PRE2	0.166	0.229	0.402	0.559	0.677	0.791	1			
POS1	0.197	0.307	0.410	0.498	0.568	0.660	0.745	1		
POS2	0.152	0.166	0.172	0.317	0.358	0.594	0.529	0.558	1	
ACP2	0.120	0.019	0.749	0.861	0.643	0.590	0.598	0.614	0.283	1

Tabla 7.5

Las correlaciones canónicas fueron:

1	2	3
0.935	0.686	0.356

Tabla 7.6

Podemos observar que la primera correlación canónica (0.935) es más alta que cualquier correlación entre las variables consideradas, mientras la segunda es más baja que algunos elementos de la matriz. Los resultados muestran, por tanto, una relación significativa entre ambos conjuntos de variables.

El primer par de variables canónicas explica el 87.4% (0.935^2 x 100) de la varianza y el segundo par de variables canónicas sólo explica el 47% (0.686^2 x 100) de la varianza. Esto nos permite establecer una cierta función de predicción que nos relaciona las variables independientes (estudios de los padres, estudios de las madres, actitud hacia las matemáticas, actitud hacia la resolución de problemas, notas del profesor, puntuaciones del pretest de resolución de problemas) con las variables dependientes (puntuaciones del postest de resolución de problemas, actitud hacia la resolución de problemas después de desarrollar el diseño de instrucción).

7.3.3 Análisis de los resultados de la actitud hacia las Matemáticas

Presentamos en este apartado los porcentajes de respuestas favorables a la actitud hacia las Matemáticas en las distintas componentes, organizados por cursos y globales. También haremos alusión a los resultados por sexos, cuando éstos muestren diferencias.

- FACTOR I: Este grupo abarca 5 componentes: afectiva, comportamental, contextual, implicación y creencias.

<u>Componente afectiva:</u>

En las respuestas a los ítems de esta componente, detectamos una actitud favorable hacia las Matemáticas con mínimas variaciones por cursos o por sexos. Así, *el amor hacia las Matemáticas* (58%) es superior cuando el curso es más bajo y en las niñas (62%) y sólo un 18% expresa su rechazo claro a esta asignatura.

La metodología de los profesores o la materia en sí, hace que el 58% *se diviertan en las clases de Matemáticas*, porcentaje similar en los tres cursos y por sexos. Estos resultados coinciden con la negación de los alumnos hacia que *las clases de Matemáticas duran mucho tiempo* (61%); sin embargo, hay más diferencias entre los cursos: sólo un 11% de los alumnos de 5º afirman que *las clases duran mucho* y los más indecisos son los de 3º (32%).

La respuesta (en desacuerdo) a *me alegro cuando no hay clase de Matemáticas* es 51% en 3º frente a un 69% en 4º y similar por sexos.

Como podemos observar en el ítem 15, no existen bloqueos o actitudes negativas hacia las Matemáticas, tan sólo un 9% afirma *sentirse mal cuando* *piensan en Matemáticas*. Es manifiesta la voluntad de hacer trabajos y problemas (item 19), mayor en los alumnos de 3º (83%), aunque este deseo va descendiendo por cursos.

En resumen, podemos concluir que en esta primera componente detectamos una actitud positiva hacia las matemáticas que se revela en un deseo de trabajarlas, en una sensación agradable hacia ellas, no encontrando diferencias significativas ni por cursos ni por sexos.

Ítem	Curso 3º (n=66)	Curso 4º (n=123)	Curso 5º (n=166)	Global (n=355)
Componente afectiva:				
6. Yo amo de verdad las matemáticas.	67%	63%	50%	58%
7. Me divierten las clases de matemáticas.	60%	59%	55%	58%
8. Las clases de matemáticas duran mucho tiempo.	40%	58%	72%	61%
11. Me alegro cuando no hay clase de matemáticas.	51%	69%	63%	63%
15. Me siento mal cuando pienso en matemáticas.	70%	79%	75%	75%
19. Me gusta hacer trabajos y problemas de matemáticas.	83%	73%	70%	73%

Tabla 7.7

Componente comportamental:

En esta segunda componente podemos observar los comportamientos de los alumnos ante diversas situaciones.

Coincidiendo con los resultados obtenidos en los items del apartado anterior, los niños no están de acuerdo con marcharse de clase (77%). Observamos de nuevo que estos valores son más bajos en los alumnos de 5º y en los niños (75%) que en las niñas (80%).

Sin embargo, su actitud hacia el juego (item 4), fundamental en esta etapa, muestra que sólo un 45% *se olvidan de ir a jugar cuando hacen Matemáticas*, porcentaje que en 3º es de un 62% frente al 35% de 5º.

Su deseo de realizar trabajos conecta con los resultados del item 9, un porcentaje de un 88% de alumnos *no están dispuestos a que otros les hagan sus trabajos*, porcentaje que sube a un 91% en 3º. Este ítem ofrece uno de los valores más alto y una dispersión menor.

El ítem 13 muestra el grado de disposición a hacer muchos trabajos, que sigue siendo alta (70%) y mayor entre los más pequeños (79%).

Finalmente, las respuestas al item 14 son prácticamente coincidentes con el item 2. Un 77% están de acuerdo con *no quitar las clases de Matemáticas*.

Ítem	Curso 3º (n=66)	Curso 4º (n=123)	Curso 5º (n=166)	Global (n=355)
Componente comportamental:				
2. En clase de matemáticas me iría.	81%	80%	74%	77%
4. Cuando hago matemáticas me olvido de ir a jugar.	62%	51%	35%	45%
9. Daría dinero a un amigo para que me hiciera los trabajos de matemáticas.	91%	84%	90%	88%
13. Estoy dispuesto a hacer muchos trabajos de matemáticas.	79%	70%	67%	70%
14. Si pudiera quitar alguna clase diaria sería la de matemáticas.	83%	74%	77%	77%

Tabla 7.8

Componente contextual:

Los items de este bloque nos informan de lo que opinan sobre las Matemáticas los que rodean a estos niños. Así, es casi unánime la seguridad que tienen sobre la creencia de sus padres que deben saber Matemáticas (91%), porcentaje similar por cursos y por sexos. Este item es otro de los que menos dispersión presenta.

Menos claro tienen que *las personas usan Matemáticas en su vida diaria* (58%), que desciende a un 34% en 3º, aunque es mayor la falta de opinión (36%) frente a los que están en desacuerdo (6%).

Ítem	Curso 3º (n=66)	Curso 4º (n=123)	Curso 5º (n=166)	Global (n=355)
Componente contextual:				
23. Mis padres quieren que sepa matemáticas.	86%	90%	93%	91%
24. La mayoría de las personas usan matemáticas en su vida diaria.	34%	57%	67%	58%

Tabla 7.9

Componente de implicación:

El 78% está convencido de que *el estudio de las Matemáticas es importante* *para sus vidas*, frente a un 8% en desacuerdo, siendo un 64% los alumnos que *piensan mucho en saber más matemáticas* (item 18). En este item, hay una clara diferencia a favor de las niñas (70%) frente a un 59% para los niños.

Ítem	Curso 3º (n=66)	Curso 4º (n=123)	Curso 5º (n=166)	Global (n=355)
Componente de implicación:				
16. El estudio de las matemáticas es muy importante para mi vida	79%	73%	80%	78%
18. Todos los días pienso mucho en saber más matemáticas.	61%	72%	60%	64%

Tabla 7.10

Componente de creencias sobre las Matemáticas:

Los resultados confirman que un 76% no consideran que *la matemática es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos.*

Ítem	Curso 3º (n=66)	Curso 4º (n=123)	Curso 5º (n=166)	Global (n=355)
Componente de creencias:				
3. La matemática es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos.	80%	80%	71%	76%

Tabla 7.11

- FACTOR II: Agrupa los factores cognoscitivos.

Componente cognoscitiva:

Podemos observar como la mayoría de los niños tienen interés por las Matemáticas (item 10), máximo entre los niños de 4º y por sexo, entre las niñas (74%).

Vuelve a ser el nivel 4º el que da valores más altos en el item 12 frente al 59% de media global, siendo los alumnos de 3º los que menos convencidos se muestran de la utilidad de las Matemáticas en la mayoría de los trabajos.

De la misma forma que opinan que las clases de Matemáticas no se deben quitar, opinan a favor de la enseñanza de las Matemáticas. El item 20 nos muestra un 76% de alumnos que afirman que *en los colegios se deben trabajar las*

Matemáticas, valor que alcanza el 86% con los alumnos de 3º.

El último ítem de esta componente (item 22) reafirma la creencia de que las Matemáticas son útiles (78%) y son de nuevo las niñas (82%) y los alumnos de 3º (82%) los que obtienen porcentajes más altos.

Ítem	Curso 3º (n=66)	Curso 4º (n=123)	Curso 5º (n=166)	Global (n=355)
Componente cognoscitiva:				
10. No me interesan las matemáticas.	55%	86%	63%	70%
12. El conocimiento de las matemáticas no es necesario para la mayoría de los trabajos.	37%	71%	57%	59%
20. Los colegios no deben trabajar las matemáticas.	86%	84%	67%	76%
22. Las matemáticas no sirven para nada.	83%	81%	73%	78%

Tabla 7.12

- FACTOR III: Este grupo engloba items que están relacionados con las creencias de los estudiantes respecto a sí mismos en relación a las Matemáticas

Componente de creencias sobre sí mismo en relación con la materia:

Los datos expresan que sólo en torno al 50% están seguros cuando hacen Matemáticas (item 1) y es destacable el salto que experimentan de 3º a 4º, mientras que 4º y 5º casi se mantienen igual. Teniendo en cuenta la variable sexo, hay mayor seguridad entre las niñas.

Los resultados del item 5 coinciden con los del item 1. Los niños más pequeños se sienten más inseguros y creen que las Matemáticas son más difíciles para ellos (23%). Sin embargo, se produce el mismo salto para 4º y 5º.

Un 62% están en desacuerdo con el item 17: *sé muy poco sobre Matemáticas*, siendo similar por cursos y por sexos la confianza que muestran en sus conocimientos.

Los alumnos intuyen las Matemáticas como una asignatura que les exige dedicar mucho tiempo para estudiarla (item 21). Así, un 48% responde afirmativamente a este ítem, porcentaje que en 3º alcanza el 60%.

Ítem	Curso 3º (n=66)	Curso 4º (n=123)	Curso 5º (n=166)	Global (n=355)
Componente de creencias sobre sí mismo				
1.Me siento poco seguro cuando hago matemáticas.	32%	52%	53%	49%
5.Las matemáticas son más difíciles para mi que para mis demás compañeros.	23%	56%	58%	51%
17.Sé muy poco sobre Matemáticas.	59%	55%	68%	62%
21.Tengo que dedicar mucho tiempo para estudiar matemáticas.	60%	46%	45%	48%

Tabla 7.13

7.3.4 Análisis de los resultados de la actitud hacia la resolución de problemas de Matemáticas

Presentamos en este apartado, en términos de porcentajes, las respuestas favorables sobre la actitud hacia la resolución de problemas de matemáticas en las distintas categorías y analizamos los datos, considerando los resultados de la escala de actitud hacia la resolución de problemas, administrada antes y después del diseño de instrucción en resolución de problemas (1ª vez y 2ª vez). También haremos alusión a los resultados por cursos o por sexos, cuando éstos muestren diferencias con respecto a los datos globales.

- FACTOR I

En la tabla 7.14 recogemos los porcentajes globales obtenidos en estas componentes referentes a los dos momentos en que se les administra la escala.

Componente afectiva:

Casi a las tres cuartas partes (72%) de nuestra población "*le gusta resolver problemas*", porcentaje que se mantiene por sexos y es ligeramente superior en 3º. También son estos últimos alumnos los que más les divierten las clases de problemas (78%) (frente a un 62% de porcentaje medio).

Sobre la duración de las clases no encontramos diferencias: el 66% no está de acuerdo con que duran mucho. Un 62% no se alegran cuando no hacen problemas y un 71% no se ponen nerviosos al pensar en resolver problemas.

El gusto por hacer problemas (76%) alcanza un porcentaje de 89% en 3º, siendo la diferencia entre los porcentajes obtenidos entre ambas administraciones de la escala, inferior al 5%. Por ello, desde esta primera aproximación intuimos que en estas componentes no hay cambios significativos.

Las diferencias más destacables las encontramos en el item 11, que en los alumnos de 3º pasa de un 64% al 77%, y en el item 15 donde el curso 4º pasa del 53% al 73% (esto es, se produce en ambos un aumento de su confianza), disminuyendo en 3º los que estaban de acuerdo y en 5º los indecisos.

Componente comportamental:

Un 87% no se iría de las clases de problemas, subiendo en 3º este porcentaje al 92% (item 2).

Sólo un 40% se olvida de ir a jugar cuando resuelven problemas; sin embargo, un 90% no daría dinero a los amigos para que les hicieran los problemas.

Un 71% está dispuesto a hacer muchos problemas (item 13). En este item se observan diferencias por cursos: 93% en 3º, 47% en 4º y 73% en 5º. En 4º Curso el porcentaje de alumnos indecisos es bastante alto (34%).

Un 74% no quitaría la resolución de problemas en las clases de Matemáticas (en este item este porcentaje baja a un 64% en 4º).

Los porcentajes se mantienen sin variación antes y después, siendo los items 4 y 13 los que ofrecen algunos cambios. En el ítem 4 los alumnos de 3º pasan del 44% al 62%, ambos valores por encima de las medias y en el item 13 los alumnos de 4º pasan del 47% al 66%.

Componente contextual:

En relación con el item 23, el porcentaje medio es 95% y aumenta con los cursos. En el item 24, encontramos mayores variaciones: 27% en 3º y 62% en 5º, si bien un 8% de los alumnos de 3º lo rechazan abiertamente frente a un 65% de indecisos. Este mismo item alcanza el 63% en 3º la segunda vez que se les pasa la escala.

Componente de implicación:

Un 76% está de acuerdo con la importancia de la resolución de problemas en la vida, siendo un 57% los que piensan en saber resolver problemas (item 18).

La segunda vez que se les pasa esta escala, el item 16 pasa en 4º del 66% al 78%, mientras el item 18 desciende en 3º del 63% al 45%, aumentando en este último los alumnos en desacuerdo.

Componente de creencias:

Un 74% niega que *"resolver problemas es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos"*, porcentaje que aumenta a un 80% la segunda vez.

Item	1ª vez	2º vez
Componente afectiva:		
6. Me gusta de verdad resolver un problema de matemáticas.	72%	74%
7. Me divierten las clases de problemas.	62%	59%
8. Las clases de problemas duran mucho tiempo.	66%	67%
11.Me alegro cuando no hacemos problemas en las clases de matemáticas.	62%	60%
15. Me pongo nervioso con sólo pensar en tener que resolver problemas de matemáticas.	71%	74%
19. Me gusta resolver problemas de matemáticas.	76%	74%
Componente comportamental:		
2. Me marcharía de las clases de problemas.	87%	87%
4. Cuando resuelvo problemas me olvido de ir a jugar.	40%	47%
9. Daría dinero a un amigo para que me hiciera los problemas.	90%	92%
13. Estoy dispuesto a hacer muchos problemas de matemáticas.	71%	76%
14. Si pudiera quitar alguna parte de las matemáticas sería la resolución de problemas.	74%	75%
Componente contextual:		
23. Mis padres quieren que sepa resolver problemas.	95%	91%
24. La mayoría de las personas usan los métodos de la resolución de problemas en la vida diaria.	57%	64%
Componente de implicación:		
16. La resolución de problemas es muy importante para mi	76%	77%
vida	57%	50%
18. Todos los días pienso mucho en saber resolver problemas.		
Componente de creencias:		
3. Resolver problemas es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos.	74%	80%

Tabla 7.14

- FACTOR II

En la tabla 7.15 recogemos los porcentajes globales obtenidos en esta categoría referidos a los dos momentos en que se les administra la escala.

Componente cognoscitiva:

A un 76% les interesa resolver problemas que alcanza un 95% en 4º.(item 10). El item 12 no es compartido por el 58%, que esta vez aumenta en 4º al 74%. Un 72% afirma que se deben trabajar los problemas (item 20), porcentaje que en 3º y 4º es de 85% y 84%, respectivamente.

Similar es el porcentaje de los que no están de acuerdo en el item 22 (74%), que disminuye inversamente al curso.

De las dos veces que se les pasa la escala, sólo aparecen diferencias en el item 10, que desciende del 95% al 80% en 4º Curso.

Ítem	1ª vez	2º vez
Componente cognoscitiva:		
10. Resolver problemas de Matemáticas no me interesa.	76%	76%
12. El saber resolver problemas no es necesario para la mayoría de los trabajos.	58%	61%
20. Los colegios no deben trabajar los problemas de matemáticas.	72%	74%
22. Resolver problemas de matemáticas no sirve para nada.	74%	75%

Tabla 7.15

- FACTOR III

Análogamente, en la tabla 7.16, recogemos los porcentajes globales obtenidos en esta componente, referidos a los dos momentos en que se les administra la escala.

Componente de creencias sobre sí mismo en relación con la materia

Un 59% está en desacuerdo con el item 1, que desciende al 33% en 3º, siendo un 55% los que creen que resolver problemas no es más difícil para ellos que para los demás (item 5).

Un 62% cree que sabe resolver problemas y en este item el porcentaje aumenta con la edad (3º: 44% y 5º: 69%).

Un 35% está en desacuerdo con el item 21. En este item se observan diferencias por cursos: en 3º (33%) y en 5º (49%) y por sexos, h: 37% y m: 53%.

Comparando ambas escalas, apreciamos que los alumnos de 3º pasan en el item 1 del 33% al 47% y en el 17 pasan del 44% al 60%; por el contrario, los de 4º pasan del 53% al 37% (en el item 17).

En el item 21 hay un descenso en 4º del 43% al 19% y en las niñas del 53% al 37%.

Ítem	1ª vez	2º vez
Aspectos de creencias sobre sí mismo:		
1. Me siento poco seguro cuando resuelvo problemas.	59%	53%
5. Resolver un problema es más difícil para mí que para mis demás compañeros.	55%	55%
17. Sé resolver muy pocos problemas.	62%	56%
21. Tengo que dedicar mucho tiempo para aprender a resolver problemas.	35%	45%

Tabla 7.16

7.3.5 Análisis comparativo de ambas escalas

Un análisis de los resultados de las dos escalas, nos lleva a la afirmación de que no existen diferencias apreciables entre las respuestas hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas. Podemos observar como existe una tendencia a preferir la resolución de problemas. El ítem 6: *Me gusta resolver problemas* (72%) obtiene valores superiores a *me gustan las matemáticas* (58%) y *tengo que dedicar mucho tiempo a estudiar matemáticas* (de acuerdo un 48%), mientras que solo un 35% está en de acuerdo con tener que dedicar mucho tiempo para aprender a resolver problemas.

Los resultados, en general, no difieren por cursos ni por sexos. Aunque con un margen muy pequeño, las niñas expresan mayores deseos de hacer trabajos de matemáticas, de no perder las clases, etc. También observamos una mayor inseguridad entre los más pequeños.

Asignamos a cada respuesta de los ítems los valores 0 (para una respuesta desfavorable), 1 (respuesta indiferente) y 2 (para una respuesta favorable). Sumando las puntuaciones de cada item en cada escala, se obtienen unos valores para cada alumno, que oscilan entre 0 y 48 puntos. En la tabla 7.17 presentamos las medias (desviaciones típicas) por cursos, sexos y globales para ambas escalas.

	Total	Curso 3º	Curso 4º	Curso 5º	Niños	Niñas
Actitud Matemáticas	36.5 (7)	36.4 (5.6)	37.9 (5.7)	35.4 (8)	35.6 (7.1)	37.2 (6.8)
Actitud Resolución Problemas (1ª vez)	36.7 (7.9)	38.2 (5.9)	37 (7)	36.6 (8.4)	36.5 (7.8)	37.2 (8)
Actitud Resolución Problemas 2ª vez)	37 (7.5)	38.5 (6.6)	36.5 (6.9)	36.6 (8.1)	36.3 (7.4)	37.6 (7.6)

Tabla 7.17

Como podemos observar en la tabla, las medias son bastantes semejantes, si bien se aprecia una mayor dispersión en los cursos más altos y unas medias ligeramente superiores en las niñas.

7.4 SEGUNDO ESTUDIO SOBRE ACTITUDES

El segundo estudio fue realizado con 24 niños del 2º nivel del 2º Ciclo de Primaria (antiguo 4º de EGB). Se realiza durante el curso 93-94.

Los objetivos eran tres: primero, valorar de forma cualitativa estas escalas y detectar las posibles dificultades de los alumnos para responder a las cuestiones planteadas; segundo, conocer las actitudes de estos alumnos, y tercero, relacionar las actitudes con otros factores como pueden ser las preferencias dentro de las Matemáticas, la seguridad en sí mismo y el rendimiento en esta materia.

7.4.1 Instrumentos de medida

Para analizar el dominio afectivo se utilizaron las mismas escalas, pero que se administraron por medio de entrevistas individuales, junto a preguntas abiertas a los alumnos seleccionados. Así, antes de empezar el diseño de instrucción se les administra la escala de actitud hacia las matemáticas y hacia la resolución de problemas, y esta última se les vuelve a pasar una vez acabado el desarrollo del diseño. Ahora bien, a este grupo se le había pasado el curso anterior (92-93) esta misma escala con el fin de detectar si se producían variaciones en un plazo de tiempo más largo (tenemos que indicar que en el curso anterior sólo había 21 niños, lo cual puede explicar las pequeñas variaciones que se aprecian).

En primer lugar exponemos los resultados (media y desviación típica) obtenidos por estos alumnos en las actitudes hacia las matemáticas (Ac), actitudes hacia la resolución de problemas un año antes (Acp0), actitudes hacia la resolución de problemas antes del DIRPA (Acp1) y después del DIRPA (Acp2).

	Media (desv. típ.)	**Media (desv. típ)**	**Media (desv. típ)**
	Total	Niños	Niñas
Ac	30.4 (10.4)	25 (11.3)	34.9 (7.3)
Acp0	34.7 (7.1)		
Acp1	33.2 (8.7)	30.8 (9.2)	35.4 (8.1)
Acp2	31.9 (9.2)	28.3 (9.6)	34.8 (8.4)

Tabla 7.18

Como podemos apreciar, se agudizan resultados que levemente aparecían en el estudio anterior, como son los valores más altos hacia la resolución de problemas (más fuerte por parte de los niños) y en todas las escalas, por parte de las niñas.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos anteriormente, tanto los valores medios de los 3 cursos o los niños de 4º, encontramos aquí valores más bajos.

7.4.2 Análisis de datos

<u>Resultados en las diferentes componentes de la actitud hacia las matemáticas.</u>

En las tablas 7.19, 7.20 y 7.21 expresamos los porcentajes favorables en los ítems que conforman cada una de las componentes.

Los resultados del Factor I nos indican como reaccionan los niños en las diferentes componentes. La componente afectiva obtiene resultados poco favorables hacia las Matemáticas. Hay un porcentaje pequeño (31%) que afirma *amar las Matemáticas*, respondiendo de forma similar a *me divierten las clases de Matemáticas* (39%). Sin embargo, no están de acuerdo con "*me siento mal cuando pienso en Matemáticas"* (69%) y afirman que "*me gusta hacer trabajos y problemas de Matemáticas"* (65%).

Los alumnos reaccionan hacia las clases de Matemáticas, pensando en *“no irse de las clases de Matemáticas”* (58%), *“no darían dinero a un amigo para que les hicieran los trabajos”* (77%) y, aunque sólo un 46% *está dispuesto a hacer muchos trabajos de Matemáticas*, un 54% *no quitaría las clases diarias de matemáticas*.

La componente contextual nos informa de lo que opinan sobre las Matemáticas los que rodean a estos niños. Un 77% afirma que *“sus padres quieren que sepan Matemáticas”,* mientras un 46% cree que *“la mayoría de las personas usan matemáticas en su vida diaria”*.

La componente de implicación nos indica hasta que punto valoran las Matemáticas y si ello les implica a trabajarlas más. Un 62% cree que “*el estudio de las Matemáticas es muy importante para mi vida”* y un 58% *“piensa en saber más matemáticas”*.

Finalmente, un 54% cree *que la matemática es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos.*

Ítem	%
Componente afectiva:	
6. Yo amo de verdad las matemáticas.	31%
7. Me divierten las clases de matemáticas.	39%
8. Las clases de matemáticas duran mucho tiempo.	31%
11. Me alegro cuando no hay clase de matemáticas.	35%
15. Me siento mal cuando pienso en matemáticas.	69%
19. Me gusta hacer trabajos y problemas de matemáticas.	65%
Componente comportamental:	
2. En clase de matemáticas me iría.	58%
4. Cuando hago matemáticas me olvido de ir a jugar.	19%
9. Daría dinero a un amigo para que me hiciera los trabajos de matemáticas.	77%
13. Estoy dispuesto a hacer muchos trabajos de matemáticas.	46%
14. Si pudiera quitar alguna clase diaria sería la de matemáticas.	54%
Componente contextual:	
23. Mis padres quieren que sepa matemáticas.	77%
24. La mayoría de las personas usan matemáticas en su vida diaria.	46%
Componente de implicación:	
16. El estudio de las matemáticas es muy importante para mi vida	62%
18. Todos los días pienso mucho en saber más matemáticas.	58%
Componente de creencias sobre las Matemáticas:	
3. La matemática es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos.	54%

Tabla 7.19

La componente cognoscitiva (Factor II) nos indica el interés y la opinión que tienen sobre las Matemáticas. Por una parte, aparecen porcentajes de un 46% sobre el interés personal sobre las matemáticas o su necesidad para los trabajos, subiendo a un 65% y 62%, respectivamente, los alumnos que afirman que *las matemáticas se deben trabajar en los colegios* y *que las matemáticas sirven.*

Ítem	
Componente cognoscitiva:	
10. No me interesan las matemáticas.	46%
12. El conocimiento de las matemáticas no es necesario para la mayoría de los trabajos.	46%
20. Los colegios no deben trabajar las matemáticas.	65%
22. Las matemáticas no sirven para nada.	62%

Tabla 7.19

El Factor III mide las creencias del alumno sobre sí mismo en relación con las Matemáticas. Los datos expresan que sólo un 35% “*están seguros cuando hacen Matemáticas”*, un 62% no consideran que *“las matemáticas son más difíciles para ellos que para sus compañeros”,* un 73% indica que *“sabe poco sobre Matemáticas”* y, por último, un 50% *“tiene que dedicar mucho tiempo para estudiar matemáticas”*.

Ítem	
Componente creencias sobre sí mismo:	
1.Me siento poco seguro cuando hago matemáticas.	35%
5.Las matemáticas son más difíciles para mi que para mis demás compañeros.	62%
17.Sé muy poco sobre Matemáticas.	73%
21.Tengo que dedicar mucho tiempo para estudiar matemáticas.	50%

Tabla 7.20

Asignándole valores a cada ítem y sumándolos, se obtienen puntuaciones globales para las actitudes de los alumnos que van desde 9 a 48 puntos (tabla 7.21), sin embargo, la mayoría de ellos se colocan por encima de la mitad de la puntuación (la media es 30.4).

Puntuac.	9	11	12	22	24	26	27	28	29	30	31	34	36	38	40	41	46	48
Alumnos	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	4	1	1	1	1	1

Tabla 7.21

De estos 24 niños se seleccionaron 9, como hemos indicado, a los que se les hicieron las preguntas señaladas con el objetivo de buscar posibles relaciones con otros factores. Los factores que pretendemos relacionar son actitud con rendimiento, actitud con preferencias y rendimiento, y rendimiento con seguridad en sí mismo con respecto a las Matemáticas. Comentamos los resultados en los tres apartados.

Actitud y rendimiento:

La actitud considerada globalmente no mantiene relación con el rendimiento. La tabla 7.22 nos muestra niños de rendimiento bajo y una actitud muy favorable hacia las Matemáticas, mientras niños de rendimiento alto tienen una actitud menos favorable.

Rend. alto	Puntuación	Rend. medio	Puntuación	Rend. bajo	
Jorge	29	Dácil	26	Jonathan	40
Ana	46	Alexis	9	Tomás	36
Lara	29	Lidia	30	Antonio	12

Tabla 7.22

Actitud, preferencias y rendimiento:

En la tabla 7.23 relacionamos sus preferencias con su rendimiento y en paréntesis colocamos la puntuación de la actitud:

	Rendimiento alto	Rendimiento medio	Rendimiento bajo
Geometría	Jorge (29)	Dácil (26)-Alexis (9) Lidia (30)	
Cálculo	Lara (29)		Antonio (12)
Resolución de problemas	Ana (46)		Jonathan (40)-Tomás (36)

Tabla 7.23

Podemos ver como los niños de rendimiento alto se diversifican en sus preferencias, los de rendimiento medio prefieren la geometría, mientras los de rendimiento bajo se inclinan por los cálculos o la resolución de problemas.

Tampoco hay una relación clara con la actitud, aunque los alumnos que prefieren la resolución de problemas alcanzan los valores mayores en la actitud.

Actitud y seguridad en sí mismo:

En la tabla 7.24 relacionamos la seguridad en sí mismo que ellos expresan, con su rendimiento.

	Rendim alto	Rendim. medio	Rend. bajo
Se sienten seguros	Jorge-Ana-Lara	Lidia	Jonathan
No se sienten seguros		Dácil-Alexis	Antonio-Tomás

Tabla 7.24

Encontramos que los alumnos de alto rendimiento exteriorizan una seguridad en sí mismos, que varía más en los otros alumnos. Las respuestas de los alumnos de rendimiento bajo son a veces contradictorias.

Escala de actitud hacia la resolución de problemas:

Los resultados obtenidos en esta escala son totalmente similares. Si comparamos los resultados obtenidos las tres veces que se les administra (un año antes, antes y después del DIRPA), encontramos lo siguiente:

Hay un aumento significativo en ítems sobre la duración de las clases (8), la conveniencia de no quitar las clases de problemas (14), la necesidad del conocimiento matemático en los trabajos (12); sin embargo, decrece el interés por resolver problemas (10), la importancia que se le concede a las Matemáticas para la propia vida (16) o el pensar mucho en saber resolver problemas.

Coinciden con los resultados generales en los item 6, 13 y 19 que decrecen de un curso al siguiente (el amor hacia la resolución de problemas, la disposición a resolver problemas y el gusto por hacer trabajos y problemas de matemáticas).

Estudio de casos:

Estudiamos más detenidamente a los 9 niños seleccionados, de ellos presentamos a tres que tienen diferencias muy marcadas. Ana (10 años 3 meses) expresa una total seguridad en sí misma, gusto por las Matemáticas, le concede gran importancia a la utilidad de las mismas, está dispuesta a trabajarlas y cree que las matemáticas no consiste en memorizar reglas para hacer cáculos aburridos. Prefiere la resolución de problemas y se siente muy segura en ella, resolviéndolos de forma muy lógica. Para resolver los problemas afirma que *"voy pensando en el problema y si no lo entiendo me ayudo con un dibujo".*

Dácil (10 años) tiene una actitud menos positiva hacia las Matemáticas. Exterioriza poco gusto hacia ellas y hacia sus clases, y al mismo tiempo poca seguridad en sí misma al enfrentarse con las tareas y problemas de matemáticas. Prefiere la geometría.

Antonio (9 años 4 meses) presenta una de las actitudes más desfavorable. No le gustan las Matemáticas y desearía suprimir esta materia de los colegios. Muestra un total desinterés por esta materia, distrayéndose con frecuencia en clase e incluso en las propias entrevistas. Cree que los problemas de matemáticas no son difíciles, pero *a mí no me salen, y por ello me pongo nervioso*. También duda sobre la importancia o la utilidad de las Matemáticas en la vida o en la mayoría de los trabajos. Dentro de las Matemáticas, prefiere el cálculo.

7.5 DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El estudio realizado muestra una actitud positiva hacia las Matemáticas, siendo los resultados de la actitud hacia la resolución de problemas muy similares, lo cual podría ser un indicativo de que los alumnos ven la resolución de problemas como un tópico importante de las Matemáticas, y además que les gusta, ya que las componentes afectivas obtienen valores ligeramente superiores.

Esta pequeña predilección hacia la resolución de problemas podría ser consecuencia de la importancia que los profesores han dado a la recomendación del NCTM (1980): "*la resolución de problemas debe ser el eje de la enseñanza de las Matemáticas*".

Estas actitudes las exteriorizan en sus sentimientos (me gustan, me divierten,..), en sus comportamientos (no me iría de clase) y en sus creencias, que están influenciadas por las opiniones de sus padres y de los que los rodean. Los datos obtenidos se mantienen similares por sexos. Sin embargo, detectamos una disminución de esa actitud positiva a medida que crecen y una mayor inseguridad en los niños más pequeños, resultados que coinciden con las investigaciones revisadas por Bell y otros (1983) y Gairín (1990).

Consideramos importantes los resultados en aspectos concretos, como el carácter utilitario y formativo que captan sobre las Matemáticas, ya que la sensación de utilidad y formación percibida sobre una materia, mejora el interés en el aprendizaje de la misma (Nickerson, Perkins y Smith, 1987). Esta percepción que tienen sobre la utilidad de las Matemáticas debía reforzarse mediante la elección de contenidos y problemas que sean reales e interesantes para ellos.

En cuanto a las creencias sobre las matemáticas, sería deseable que en los cursos sucesivos no se les crease a estos niños la idea de que "la Matemática es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos", tan frecuente en los diversos estudios que hemos comentado.

Encontramos una cierta relación entre las aulas de rendimiento alto (aulas 1 y 13) y las actitudes de sus alumnos que son bastante positivas, mientras el aula (aula 3) perteneciente a una zona socioeconómicamente desfavorecida, presenta actitudes menos positivas.

En los alumnos seleccionados no hemos encontrado correlación entre la actitud y el sexo, entre la actitud y el rendimiento, entre la actitud, el rendimiento y las preferencias de los alumnos dentro de las Matemáticas y sí entre el rendimiento y la seguridad en sí mismos.

Como indicábamos, este estudio pretendía aportar datos sobre el dominio afectivo de alumnos de 8 a 11 años, que habían desarrollado un diseño de instrucción innovador, que fue evaluado por sus profesores como altamente motivador, y por ellos como muy agradable. La ausencia de diferencias en la escala de actitudes hacia la resolución de problemas, las dos veces que se les administra, está de acuerdo con las teorías de Mandler (1984) en el sentido de que las actitudes sufren variaciones a largo plazo, siendo tres meses un periodo muy corto para que se produzcan. Es interesante hacer notar aquí, como en el aula elegida para el segundo estudio tampoco se produce una variación apreciable después de un año.

No conocemos ningún estudio en el que se haya comparado la actitud hacia las Matemáticas con la actitud hacia la resolución de problemas.

En resumen, hemos podido comprobar a través de la aplicación de estas escalas, primero, de forma escrita, y en segundo lugar, mediante entrevistas, que son un buen instrumento para medir las actitudes hacia las matemáticas y hacia la resolución de problemas de los niños. Ahora bien, es necesario complementar las escalas con técnicas cualitativas, que nos permitan indagar en las causas de las respuestas de los alumnos y detectar las relaciones con otros factores.

Finalmente, de los datos obtenidos se desprende que es muy difícil hablar de forma global de un concepto “actitud”, que engloba tantas componentes, siendo mucho más coherente y preciso analizarlas por separado.

7.6 EL PROFESORADO

La influencia del profesorado en la implementación de un diseño de instrucción innovador es básico; sin embargo, quizá por la propia dificultad para realizarlo, pocos estudios lo han tenido en cuenta.

Nuestro objetivo “es analizar cómo influye en la toma de decisiones (conducta o comportamiento) del profesor, es decir en su epistemología profesional, la "presencia activa" o "inmersión" del profesor en la elaboración, diseño y evaluación de un proyecto local innovador” y como influye en aquel profesorado que sabe que está participando en una investigación, sin conocer el objetivo real de la misma (grupo control).

Formulada como hipótesis general de la investigación puede expresarse así: "La implantación de un cambio curricular innovador se encuentra condicionado, entre otros elementos, por los conocimientos, creencias y decisiones de los profesores. Determinar el papel del profesor para poder juzgar su influencia en el sentido más global del cambio curricular y arbitrar modelos de intervención, con implicación directa del profesor, que proporcionen este cambio, puede ayudar a facilitar su implantación y entender mejor la dinámica de estos procesos".

Para ello es necesario controlar no solamente las decisiones mismas sino también ciertas variables que intervienen en la toma de decisiones, y esto es necesario hacerlo antes y después del desarrollo de la experiencia, es decir, ver qué proyección se ha dado en su epistemología profesional después de esta presencia activa en el DIRPA, pero no con el efecto inmediato de la experimentación, sino con un efecto diferido, a medio plazo.

Y con el grupo control, analizar qué cambios introducen estos en su metodología habitual al saberse partícipes de una investigación.

En la investigación general se ha empleado una metodología básicamente cualitativa donde se combinan instrumentos que nos permiten un análisis cuantitativo en términos de porcentajes (entrevistas estructuradas con protocolos cerrados), con instrumentos que permiten estudios mediante un análisis puramente interpretativo (grabaciones, observaciones en grupos de discusión (seminarios), producciones de los profesores en el curso de inmersión y diarios de clase).

Como hemos señalado, el propósito del estudio que comentamos es acceder a los conocimientos, creencias y decisiones de los profesores ante la implementación de un cambio curricular innovador (grupo experimental) y de los profesores de un grupo control.

Varias son las fuentes de obtención de datos que nos llevan a la organización definitiva de las entrevistas estructuradas con protocolo cerrado, entre otras: a) las entrevistas, b) las observaciones en grupos de discusión (seminarios), y c) las producciones de los profesores en el curso de inmersión y el diario de clase, organizados en torno al modelo de Shavelson y Stern.

a) Las entrevistas piloto (abiertas) se realizaron con los dos profesores de EGB pertenecientes a la fase de elaboración del $DIRPA_1$. Las entrevistas estructuradas fueron dos y se realizaron con los trece profesores antes del desarrollo del curso de formación y año y medio después de realizada la experiencia (que denominaremos entrevista inicial y final).

b) Las observaciones en el grupo de discusión (seminario) se realizaron tanto en la fase de elaboración del $DIRPA_1$ como en el desarrollo del curso de formación (dos en total, antes y después del curso), así como en la implementación de la experiencia (dos en total: a la mitad de la experiencia y al final), lo que permitió desarrollar las relaciones e implicaciones necesarias en este tipo de investigación.

c) Otro instrumento de obtención de los datos, fue un procedimiento de indagación de baja estructuración como es el diario de implementación del DIRPA. El hecho de mantener un diario de la experiencia por parte del profesor, con un doble carácter descriptivo y reflexivo, nos permitía a través de su análisis aproximarnos más a los conocimientos y creencias de los profesores, así como a sus comportamientos en la práctica diaria.

Y, por último, se consideraron también las producciones de los profesores, tanto a nivel de comentarios como de producciones específicas durante el desarrollo del curso de inmersión.

Finalmente, es necesario indicar que la búsqueda de profesorado dispuesto a realizar experiencias educativas que implique la implantación de un diseño de instrucción innovador radical, tiene dificultades, y ello hace que no podamos hablar de azar en la elección de los trece profesores que participaron en la experiencia educativa.

Como esta investigación se enmarca en una más amplia en la que se investiga también sobre los comportamientos cognitivos de los alumnos frente a diferentes sistemas de representación en la resolución de problemas aritméticos y su posible mejora al trabajarlos dentro del modelo que denominamos DIRPA, fue necesario la presencia de un grupo control que sirviera de contraste con el grupo experimentador, siendo para ello era necesario controlar también determinadas variables del profesorado que impartían las clases en el llamado grupo control.

7.6.1 Instrumentos de medida

Como señalamos en el Capítulo 4, con estos profesores desarrollamos unas entrevistas de protocolo cerrado.

7.7 ANÁLISIS DE DATOS: GRUPO EXPERIMENTAL Y GRUPO CONTROL

Recogemos en este apartado los datos obtenidos en las entrevistas relativos al grupo experimental inicial y al grupo control, organizados por el sistema de categorías establecido.

Categoría: D I (Diferencias Individuales).

Items: 2, 10, 11, 12, 14 y 15

El profesorado del grupo experimental está constituido en un 85% por mujeres y en un 15% por hombres y en el grupo control el 80% son mujeres y el 20% hombres.

El profesorado del grupo experimental en su inmensa mayoría (77%) lleva más de diez años de docencia, así como la totalidad de los profesores del grupo control que responden el cuestionario (P2).

Un 77% del primer grupo se coordinan en el área de Matemáticas con otros profesores y el 100% de los del grupo control (P10).

Con relación a lo que piensan sobre la matemática y la resolución de problemas tenemos que:

		G. Exper	G. cont.
Les agrada las Matemáticas (P11)	Mucho Bastante Normal	46% 54% 0%	40% 20% 40%
Consideran las Matemáticas como una materia del currículo (P12)	Muy import. Importante No contesta	46% 46% 8%	40% 60%
Les agrada la resolución de problemas (P14)	Mucho Bastante	38% 54%	40% 20%

		G. Exper	G. cont.
	Normal	8%	40%
Consideran la resolución de problemas como una parte (P15)	Muy import. Importante	46% 54%	40% 60%

Tabla 7.25

Categoría L I (Limitaciones Institucionales).

Ítems: 1, 3, 4, 5, y 6.

Los trece grupos de alumnos que participaron en la experiencia se distribuyen de la siguiente manera: 6 clases de 5º nivel, 4 clases de 4º nivel y 2 clases de 3º nivel, los del grupo control que consideramos en esta encuesta son 2 de 5º nivel, 2 de 4º nivel y 1 de 3º (P1).

En el grupo experimental hay 10 en Centros Públicos y 3 de un Colegio Privado-concertado (P3). Todos los del grupo control son de Colegios Públicos.

En el siguiente cuadro podemos ver la calificación de las zonas (P4) donde estaban los Colegios:

	Urbana	Suburbana	Urbana-rural	Rural
G. experim.	6	3	3	1
G. control	5	5	-	-

Tabla 7.26

En el grupo experimental, las clases estaban distribuidas en un 54% en centros entre 17 y 24 unidades y el 36% restante en centros de más de 24 unidades; y en el grupo control todas las clases estaban en centros de más de 24 unidades (P5).

El nivel socio-cultural medio de los padres (P6) era el siguiente:

	Medio-alto	Medio	Medio-bajo	Bajo
G. experim.	15%	23%	62%	
G. control			60%	40%

Tabla 7.27

Categoría N T (Naturaleza de la Tarea (recursos)).

Items: 8, 22, 23, 24, 25, y 26.

En el grupo experimental los libros de texto más utilizados son los de la Editorial Santillana en un 54%, los de la Editorial Edelvives en un 23% y los de la Editorial Edebé en un 15%, y el resto no los utiliza o no contesta; mientras el libro más utilizado en el grupo control pertenece a la Editorial Vicens-Vives 40%, y el resto no contesta (P8).

La tabla 7.28 recoge los datos sobre el material utilizado en las clases de resolución de problemas.

	Grupo experimental			Grupo control			
	Frec.	Ocas.	Raram	Frec	Oc.	Rar.	N.c.
Libros de texto (P22)	15%	77%	8%	40%	40%	-	20%
Otros textos publicados (P23)	15%	85%	-	20%	40%	-	40%
Textos producidos localmente (P24)	8%	77%	15%	-	20%	-	80%
Fichas individualizadas (P25)	8%	84%	8%	20%	40%	-	40%
Materiales de laboratorio (P26)	15%	31%	54%	-	20%	40%	40%

Tabla 7.28

Categoría J P (Juicio de los Profesores).

Subcategoría J P A (Juicio sobre los alumnos).

Items: 13 y 16

		G. exper.	G. contr.
Creen que a sus alumnos las Matemáticas (P13)	Les agrada No contesta	69% 31%	80% 20%
Creen que a sus alumnos la resolución de problemas (P16)	Les agrada Les es indiferente Les desagrada No contesta	69% 8% 15% 8%	80% - - 20%

Tabla 7.29

Subcategoría J P C (Juicio sobre el contenido).

Items: 17, 18, 19, 20, y 21

	Grupo Exper.			Grupo control		
	sí	no	n.c.	sí	no	n.c.
La resolución de problemas debe enseñarse en las clases de Matemáticas (P17)	77 %	23 %		100 %		
El nivel alcanzado por los alumnos en resolución de problemas es un indicador de la comprensión de las operaciones y de los números (P18)	69 %	31 %		80 %		20 %
Los problemas aritméticos deberían estar superados por los alumnos del Ciclo Medio (P19)	46 %	46 %	8%	40 %	20 %	40 %
Las actividades en resolución de problemas deberían tener más importancia que los cálculos aritméticos (P20)	69 %	15 %	15 %		100 %	
El aprendizaje de las operaciones aritméticas debe preceder a la resolución de problemas (P21)	31 %	38 %	31 %	40 %	40 %	20 %

Tabla 7.30

Categoría D D (Decisiones Didácticas).

Items: 7, 9, 27, 28, 29, 30 y 31

El profesorado del grupo experimental dedica una media de 5.5 horas semanales a Matemáticas (P7), de las cuales un poco más de 1.5 horas se dedican a la resolución de problemas (P9). Los profesores del grupo control dedican una media de 5.7 horas semanales y el mismo tiempo que los anteriores (1.5 h) a la resolución de problemas.

El estilo de clase en resolución de problemas, se recoge en porcentajes en el cuadro siguiente:

	Grupo Experimental				**Grupo control**			
	Casi siempre	A veces	Casi nunca	No contesta	Casi siempre	A veces	Casi nunca	No contesta
1.	54%	23%	15%	8%	60%	40%		
2.	15%	23%	54%	8%	20%	20%	20%	40%
3.	8%	61%	8%	23%	60%	20%		
4.	54%	46%			20%	60%	20%	
5.	7%	8%	77%	8%	20%	40%	40%	

Tabla 7.31

Los descriptores recogidos en el cuestionario son:

1. Propongo problemas en la pizarra, explicando con cuidado y claridad las reglas utilizadas. Luego, propongo problemas similares a los alumnos, trabajando

individualmente las dificultades que surgen, (P27).

2. Pido a los alumnos que lean los problemas resueltos que me parecen más adecuados del libro de texto, para que encuentren las reglas y procedimientos que son importantes para resolver los problemas del tema. Si la regla que creen haber descubierto es incorrecta, les explico cómo se hace y les propongo problemas del mismo tipo, (P28).

3. Los alumnos trabajan en los problemas del texto en pequeños grupos y yo, mientras, ayudo a los que tienen dificultades, (P29).

4. Trabajo la resolución de problemas aritméticos con materiales concretos, con dibujos o gráficos, (P30).

5. Los alumnos trabajan la resolución de problemas en pequeños grupos en los que investigan con materiales concretos o gráficos. Luego, hablamos de lo descubierto y escriben el resumen de lo encontrado, (P31).

Subcategoría D D I (Decisiones Didácticas Inferidas).

Items: 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, y 41.

La mayoría afirman que sabían que se estaba llevando a cabo una investigación, que entre los que estaban en el mismo colegio lo habían comentado y todos reconocen haber cambiado en las clases de resolución de problemas, cuidando de los niños con más dificultades, aclarando y corrigiendo todos los errores y poniendo máximo interés para que sus alumnos mejorasen en la resolución de problemas.

7.7.1 DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

De la misma manera que la búsqueda de profesorado dispuesto a realizar experiencias educativas de tipo innovador tiene dificultades, encontrar profesorado que actúe de grupo de control ofrece también inconvenientes y riesgos, encontrándonos en algunas investigaciones que los resultados obtenidos en el grupo control en algún tipo de problemas es igual y en algunos casos superior a los del grupo experimental, y a sabiendas de que estos resultados pueden tener diferentes explicaciones, que pueden ir desde la inadecuación del diseño hasta problemas que afectan la epistemología del profesor experimentador. Esto nos llevó a diseñar en el cuestionario para el grupo control una nueva subcategoría dentro de la categoría de decisiones didácticas que nos permitiera controlar de qué manera se vieron influidos en su actuación diaria el conocimiento de la realización de una investigación que ellos consideran paralela. En definitiva queríamos confirmar la hipótesis de que su epistemología de profesor se ve afectada por este conocimiento, produciendo una toma de decisiones que denominamos inferidas. Para confirmar o rechazar tal hipótesis se elaboró la citada categoría para indagar acerca de los cambios de actitud y modificaciones introducidas en sus comportamientos en clase de resolución de problemas, durante el transcurso de la experiencia.

Obteniéndose a la vista de los resultados que todos los profesores del grupo control, yendo en contra de lo que se les indicó: “trabajar la batería de problemas aritméticos asignado sin modificar su programación normal de actividades docentes para la clase de matemáticas”, prestaron más atención a los aspectos de resolución de problemas. Así, los datos obtenidos de la entrevista nos confirma que se esforzaron más en sus clases de resolución de problemas para ayudar a mejorar a sus alumnos. Otro dato que nos ayuda a confirmar esta mejoría, es el índice de ganancia obtenido al restarle a la puntuación media del postest, la puntuación media del pretest, tal como se observa en las tablas 7.32 y 7.33, ambas diferencias son muy similares; sin embargo, por cursos el nivel 4º del grupo control superó al grupo experimental.

	Postest	Prestest	Diferencia
Grupo experimental	14.7	13	1,7
Grupo control	13.5	12.1	1.4

Tabla 7.32

	Grupo experimental	Grupo control
3º	1.6	1.3
4º	1.3	2.3
5º	1.9	1

Tabla 7.33

Este tipo de decisiones que pone en peligro la validez de la investigaciones es lo que denominamos "Decisiones didácticas inferidas".

Finalmente, hemos tomado los ítems 17 al 21 (Subcategoría J P C), los ítems 22 al 26 (Categoría N T) y los ítems 27 al 31 (Categoría D D) y hemos formado tres variables con la finalidad de comparar estadísticamente los constructos que subyacen a las mismas y tratar de comprobar que, respecto a ellos, no existían diferencias entre ambos grupos de profesores.

Aplicamos la prueba no paramétrica U de Mann-Witney con el módulo NPAR de SYSTAT, ya que las categorías de cada variable están ordenadas y el tamaño muestral es muy bajo.

En el Anexo podemos observar que sólo los ítems 20 y 29, a un nivel de significación del .05 presentan diferencias significativas entre los grupos experimental y control. En el ítem 20, la mayor parte de los profesores (69%) del grupo experimental estaba “De acuerdo” con que *las actividades de resolución de problemas deberían tener más importancia en los cálculos aritméticos*, mientras que todos los profesores del grupo control estuvieron “En Desacuerdo”. Por lo que respecta al ítem 29, un 60% de los profesores del grupo control afirma que Casi siempre *los alumnos trabajan en los problemas del texto en pequeños grupos mientras ayudo a los que tienen dificultades*, pero un 62% de los profesores del grupo experimental contestan que “A veces”.

Sin embargo, globalmente la prueba U de Mann-Witney para las tres variables nos muestra que no existen diferencias significativas entre los profesores del grupo experimental y control, en los aspectos reseñados.

También hemos realizado un análisis Cluster (mediante el módulo Cluster de Systat) con todos los ítems de las entrevistas iniciales del grupo experimental, con el objetivo de detectar posibles agrupamientos. Utilizando la distancia euclídea, pudimos observar cómo se producen agrupamientos entre los profesores de los mismos Centros, lo cual puede ser consecuencia de la similitud que suelen adoptar en cuanto a metodologías y planteamientos educativos.

7.8 ESTUDIO DEL GRUPO EXPERIMENTAL ANTES DEL DIRPA Y GRUPO EXPERIMENTAL DESPUÉS DEL DIRPA

Presentamos en este apartado los datos obtenidos en la entrevista inicial y en la entrevista final, organizados por el sistema de categorías establecido, y contrastamos con los datos obtenidos en la entrevista inicial; de la cual sólo consideramos los 21 ítems que se mantienen en la entrevista final. Los ítems señalados entre paréntesis son los recuperados de la entrevista inicial y el número de la izquierda indica el orden con que aparece en la entrevista final. En la entrevista final se añaden nuevos ítems en las diferentes categorías y una nueva subcategoría: "Decisiones didácticas proyectadas" que tiende, junto con los otros nuevos ítems, a recoger datos sobre las modificaciones epistemológicas que los profesores experimentadores después de haber realizado la experiencia con el modelo DIRPA y mediante la técnica de adiestramiento de profesores en activo por inmersión han introducido en su trabajo sobre la resolución de problemas aritméticos.

Categoría: D I (Diferencias Individuales).

Ítems: 5 (10), 6 (14) y 7 (15).

Un 77% se coordinan en el área de Matemáticas con otros profesores, antes de la experiencia y un 67% después (P5(10).

Con relación a lo que piensan sobre la resolución de problemas:

		Entrevista inicial	Entrevista final
Les agrada la resolución de problemas (P 6(14))	Mucho Bastante Normal	38% 54% 8%	67% 33%
Consideran la resolución de problemas como una parte (P 7(15))	Muy importante Importante	46% 54%	78% 22%

Tabla 7.34

Se aprecia un aumento en la valoración sobre la resolución de problemas y se mantiene el equilibrio frente a la necesidad de coordinarse con otros profesores en el área de matemáticas.

Categoría L I (Limitaciones Institucionales).

Ítem: 1 (1).

Los trece grupos de alumnos que participaron en la experiencia, se distribuyen de la siguiente manera: 6 clases de 5º nivel, 5 clases de 4º nivel y 2 clases de 3º nivel. Los nueve profesores que participan en la entrevista final se distribuyen en ese momento, de la siguiente manera: 3 clases de 5º nivel, 2 clases de 4º nivel, 2 clases de 3º nivel y 2 clases de la segunda etapa de EGB. (P 1(1))

Los profesores de las clases 4 y 5 pasan a impartir docencia en la Segunda Etapa de EGB, si bien consideramos sus respuestas en este análisis.

Categoría N T (Naturaleza de la Tarea (recursos)).

Ítems: 3 (8), 19 (22), 20 (23), 21 (24), 22 (25), 23, 24, 25, 26, y 27.

En la entrevista inicial, los libros de texto más utilizados son los de la Editorial Santillana en un 54%, los de la Editorial Edelvives en un 23% y los de la Editorial Edebé en un 15%, y el resto no los utiliza o no contesta; mientras en la entrevista final, el libro más utilizado sigue siendo Santillana (56%), le sigue Edebé y Anaya con 11% y un 22% no utiliza libro de texto. (P 3(8)).

En la tabla 7.35 recogemos los datos sobre el material utilizado en las clases de resolución de problemas, (Frec.: frecuentemente, Ocas.: ocasionalmente, Rar.: raramente)

	Entrevista inicial			**Entrevista final**		
	Frec.	Ocas.	Rar.	Frec.	Ocas.	Rar.
Libros de Texto, (P19(22))	15%	77%	8%	33%	22%	45%
Otros textos publicados, (P20(23))	15%	85%	-	44%	44%	12%
Textos producidos localmente, (P21(24))	8%	77%	15%	33%	56%	11%
Fichas individualizadas, (P22(25))	8%	84%	8%	22%	33%	45%
Materiales de laboratorio, (P(26))	15%	31%	54%		20%	40%
Fichas personales, (P23)				100%		
Material gráfico comercial,					67%	33%

	Entrevista inicial			Entrevista final		
(P24)						
Material manipulativo comercial, (P25)				11%	67%	22%
Material gráfico personal, (P26)				33%	56%	11%
Material manipulativo personal, (P27)				22%	56%	22%

Tabla 7.35

No existen cambios específicos en el uso de textos para matemáticas; en cambio, en resolución de problemas sí hay un ligero abandono del libro de texto, tres profesores que lo utilizaban lo dejan, mientras que uno, que no lo utilizaba, lo incorpora; sin embargo, hay una incorporación masiva al trabajo con fichas personales y una mayor presencia del material gráfico y manipulativo.

Categoría J P (Juicio de los Profesores).

Subcategoría J P A (Juicio sobre los alumnos):

Ítems: 8 (16), 9, 10, 11 y 12.

		Entrevista inicial	Entrevista final
A sus alumnos la resolución de problemas (P8(16))	Les agrada Les es indiferente Les desagrada No contesta	69% 8% 15% 8%	78% 22%
A sus alumnos la resolución mediante gráficos y esquemas (P9)	Les agrada Les es indiferente Les desagrada		78% 11% 11%
A sus alumnos la resolución mediante operaciones (P10)	Les agrada Les es indiferente Les desagrada		88% 22%
Aspectos que más agradan (P11)	Gráficos y dibujos Cálculo mental Contextualizar Historietas Presentación corta y clara Abiertos (varias formas) No contesta		44% 11% 11% 11% 11% 11% 11%
Aspectos que menos agradan	Gráficos y dibujos		22%

		Entrevista inicial	Entrevista final
(P12)	Números grandes Textos largos y confusos Descontextualizados Separar datos No contesta		22% 11% 11% 22% 22%

Tabla 7.36

Mayoritariamente opinan que la resolución de problemas es una parte de las matemáticas que a sus alumnos les agrada, y esta valoración aumenta ligeramente después del DIRPA, los elementos a destacar son: desafío, juego, satisfacción al resolverlo, participación, éxito, etc. Los dos que opinan que les desagrada, hacen referencia a la falta de comprensión lectora y razonamiento. También mayoritariamente opinan que la resolución de problemas mediante gráficos y esquemas y la resolución mediante operaciones, también les agrada, inclinándose ligeramente por la resolución mediante operaciones. Entre los aspectos más significativos de la resolución mediante gráficos y esquemas están: motivación, mejor comprensión del enunciado, el poder "tocar" el problema, etc. Entre los que valoran la resolución gráfica como indiferente o desagradable señalan la gráfica como una dificultad añadida y la falta de rapidez. Con relación a la resolución de problemas mediante operaciones, señalan como aspectos positivos la seguridad, la rapidez, la comprobación del resultado, el complemento a lo gráfico, etc., y como negativo la dificultad de la operación y la falta de comprensión lectora. Destacando, finalmente, la presencia de los sistemas de representación gráfico-visuales como un lenguaje útil y agradable para la mayoría de los profesores entrevistados.

Subcategoría J P C (Juicio sobre el contenido):

Ítems: 13 (17), 14, 15 (18), 16, 17, 18 (21).

	Entrevista inicial			Entrevista final		
	sí	no	n. c.	sí	no	n.c.
La resolución de problemas con operaciones debe enseñarse en las clases de matemáticas (P13(17))	77%	23%		89%		11%
La resolución de problemas con				78%		22%

	Entrevista inicial			Entrevista final		
	sí	**no**	**n. c.**	**sí**	**no**	**n.c.**
gráficos y esquemas debe enseñarse en las clases de Matemáticas (P14)						
El nivel alcanzado por los alumnos en la resolución de problemas es un indicador de la comprensión de las operaciones y de números (P15(18))	69%	31%		67%		33%
La resolución de problemas mediante gráficos y esquemas es un indicador de la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en el problema (P16)				100 %		
La resolución de problemas mediante operaciones aritméticas es un indicador de la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en el problemas (P17)				45%	22%	33%
El aprendizaje de las operaciones aritméticas debe preceder a la resolución de problemas (P18(21))	31%	38%	31%	22%	78%	

Tabla 7.37

La opinión mayoritaria es que la resolución de problemas aritméticos mediante operaciones, gráficos y esquemas deben enseñarse en las clases de matemáticas. La resolución de problemas mediante gráficos y esquemas constituye, para la totalidad de los entrevistados, un indicador de la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en el problema, mientras que para la resolución mediante operaciones se rebaja al 45%, un 22% opina que no y un 33% no contesta. Finalmente, en la cuestión sobre el aprendizaje de las operaciones aritméticas antes que la resolución de problemas, nos encontramos que de un 31% que opinaba que sí, se ha pasado a un 22% y de un 38% que opinaba que no, a un 78%.

Categoría D D (Decisiones Didácticas).

Ítems: 2 (7), 4 (9), 28 (27), 29 (28), 30 (29), 31 (30), 32 (31), 33 (32).

El profesorado de la entrevista inicial dedica antes de la experiencia una media de 5,5 horas semanales a Matemáticas, de las cuales 1,5 horas se dedican a la resolución de problemas. Después de la experiencia, dedican una media de 4,8 horas semanales a matemáticas y 1,5 horas a la resolución de problemas.(P2(7)) y (P4(9)). Se observa que habiendo disminuido el número de horas semanales a Matemáticas, se mantiene el de resolución de problemas.

El estilo de clase en resolución de problemas se recoge en porcentajes en la tabla 7.38:

	Entrevista inicial				**Entrevista final**			
	Casi siempre	A veces	Casi nunca	No contesta	Casi siempre	A veces	Casi nunca	No contesta
1.	54%	23%	15%	8%	45%	22%	22%	11%
2.	15%	23%	54%	8%	45%	22%	22%	11%
3.	8%	61%	8%	23%	33%	67%		
4.	54%	46%			22%	78%		
5.	7%	8%	77%	8%	11%	45%	33%	11%

Tabla 7.38

Los descriptores presentados en las entrevistas son:

1. Propongo problemas en la pizarra, explicando con cuidado y claridad las reglas utilizadas. Luego, propongo problemas similares a los alumnos, trabajando individualmente las dificultades que surgen, (P 28(27)).
2. Pido a los alumnos que lean los problemas resueltos que me parecen más adecuados del libro de texto, para que encuentren las reglas y procedimientos que son importantes para resolver los problemas del tema. Si la regla que creen haber descubierto es incorrecta, les explico cómo se hace y les propongo problemas del mismo tipo, (P 29(28)).
3. Los alumnos trabajan en los problemas del texto en pequeños grupos y yo entretanto ayudo a los que tienen dificultades, (P 30(29)).
4. Trabajo la resolución de problemas aritméticos con materiales concretos, con dibujos o gráficos.(P 31(30)).
5. Los alumnos trabajan la resolución de problemas en pequeños grupos en los que investigan con materiales concretos o gráficos. Luego, hablamos de lo descubierto y escriben el resumen de lo encontrado.(P 32(31)).

Si analizamos las prácticas de los profesores en resolución de problemas, entendiendo estos como un contenido más del currículo de Matemáticas, y, relacionamos los estilos de clase en resolución de problemas con los cuatro enfoques diferentes de los contenidos y la enseñanza que generan otros tantos modelos de escuela (Schiro, 1978), y, siguiendo la terminología usada por Porlán (1993), tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigadora, podemos identificar el estilo descrito en 1 como una tendencia a lo tradicional, el descrito en 2 como una tendencia al tecnológico y el descrito en 5 como una tendencia al espontaneísta, mostrando en 3 la tendencia al trabajo en grupo frente al trabajo individual y reflejando 4 el uso de materiales concretos o gráficos.

En este sentido, aparece un cierto equilibrio entre las tendencias tradicional y tecnológica después del DIRPA, frente al predominio de lo tradicional antes del DIRPA y un débil avance de la tendencia espontaneísta. Cabe destacar, además, un avance en el trabajo en grupo y un pequeño retroceso en el uso de materiales concretos y gráficos.

Subcategoría D D P (Decisiones Didácticas Proyectadas).

Ítems: 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 y 45.

	Sí	**No**	**No contesta**
Comentar con otros compañeros (P34)	89%	11%	
Seguir aplicando el DIRPA (P35)	56%	44%	
Mayor preocupación en resol de problemas(P38)	78%	22%	
Dedicar más tiempo a resol. de problemas (P39)	34%	44%	22%
Mayor atención a los alumnos (P40)	89%		11%
Más práctica y ejercicios (P41)	45%	33%	22%
Mayor orientación en errores (P42)	67%	11%	22%
Mayor orientación general (P43)	78%		22%

Tabla 7.39

De los trece profesores que participaron en la entrevista inicial, nueve realizan la entrevista final, obteniéndose los siguientes resultados: cinco siguieron aplicando el DIRPA durante el curso 1993-94 y de estos cinco, 4 continúan durante el curso 1994-95, indicando que no han introducido diferencias en sus clases de resolución de problemas (P45); de los cuatro que no continuaron aplicando el Diseño, dos pasan a trabajar en la Segunda Etapa de EGB y los otros dos, continúan trabajando en 5º de EGB y no les parece adecuado para este nivel.

En su mayoría toman las siguientes decisiones, sigan o no aplicando el DIRPA, mayor preocupación y más tiempo para la resolución de problemas, mayor atención a los alumnos con dificultades y mayor orientación en la corrección de errores y en la resolución de problemas en general.

Los que aplican el DIRPA, señalan como ventajas más significativas: Ayudar a comprender el problema, facilitar el razonamiento, facilitar la esquematización de la información, hacer matemáticas de manera más divertida, mejorar a los que tienen dificultades y disminuir la ansiedad en resolución de problemas (P36).

Los que no aplican el DIRPA, señalan como inconvenientes: problemas institucionales, como cambios de ciclo o niveles, y la necesidad de una organización vertical desde los primeros cursos, y algunos añaden que les parece inadecuado para los cursos de 4º y 5º de EGB, manteniendo su adecuación para los primeros cursos (P37).

En la pregunta P44 no añaden ningún otro cambio de los señalados.

7.9 DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo nos hemos ido formulando algunas preguntas que hemos concretado en un objetivo y formulado en una hipótesis general en la investigación emprendida.

Mostramos en este apartado algunas conclusiones tendentes a contestar a las preguntas formuladas y a señalar el logro o no del objetivo planteado, así como la verificación o no de la hipótesis planteada en la investigación. Estas conclusiones derivarán del análisis del currículo de matemáticas de la reforma educativa y de la investigación realizada en el campo de la resolución de problemas verbales aritméticos en el segundo ciclo de la Educación Primaria.

En Matemáticas, la Reforma Educativa lleva consigo diferentes implicaciones epistemológicas, didácticas y sociales que exigen la acción conjunta de todos los elementos que conforman el macrosistema educativo, entre otros, los matemáticos, los educadores matemáticos (docentes), los investigadores y los administradores (evaluadores del sistema educativo). En estos cuatro grupos de profesionales debería recaer la tarea de diseñar el currículo. Ello requiere la necesidad de unificar los planteamientos de estos profesionales que inciden en el ámbito educativo y consideramos que la investigación es el eje que puede hacer converger las acciones de éstos, pues, aunque el impulso de cambio se potencie desde diferentes instancias sociales, comunitarias, profesionales o personales, la implantación de la reforma no se hará de manera espontánea.

Para responder a la pregunta, ¿se puede cambiar la epistemología del profesor para que se adecue a la reforma curricular en matemáticas?, hay que entender que la reforma actual supone un desafío a la práctica habitual y que, únicamente estudiando todos los elementos implicados en esta innovación radical dentro de un modelo global que permita ver todas las interacciones que se producen en la implantación, estaríamos en condiciones de apuntar soluciones afirmativas a la pregunta anterior. No obstante un planteamiento global que implique un desarrollo curricular de una etapa educativa completa, parece utópico; nos inclinamos por investigaciones locales del estilo de la referenciada en este trabajo que puedan ir aportando datos parciales a este interesante tema de investigación.

Con relación a la implementación de microdiseños curriculares innovadores, estamos en condiciones de afirmar, que si:

- Estos conectan con sus currículos habituales en matemáticas y están organizados como unidades de intervención en el aula y establecen conexión entre las actividades de indagación planteadas en la innovación y las exigencias de actividades matemáticas que tienen en sus clases,
- Los profesores son capaces de desarrollarlos con la seguridad que desarrollan otros aspectos de la matemática en sus clases,
- El material curricular innovador aporta los recursos y actividades necesarias para

su desarrollo,

-Los profesores entienden y comprueban en la práctica misma, que su desarrollo no supone un salto en el vacío, sino que les permite conectar con su currículo habitual en matemáticas,

-El microdiseño aporta los materiales y actividades necesarios para su valoración en términos de mostrar el dominio del alumno del currículo habitual en resolución de problemas aritméticos,

Entonces podemos tener algunas garantías de que la implementación curricular pueda llevarse a cabo y que la epistemología del profesor se modifique por aproximaciones sucesivas a la epistemología deseada para desarrollar con éxito la reforma en matemáticas planteada.

De los resultados obtenidos, constatamos:

-La importancia de desarrollar e implantar programas educativos que, respondiendo al movimiento de la reforma educativa en matemáticas, permitan propiciar cambios estructurales como la epistemología de los profesores implicados para que esta implantación se lleve a cabo.

-La necesidad de facilitar a los profesores experiencias educativas en gran medida semejantes al tipo de trabajo o indagaciones dirigidas que tratan de realizar con sus alumnos, orientadas por personas experimentadas en este tipo de enseñanza.

-La conveniencia de ofrecer oportunidades para intentar nuevos enfoques, modificar y adaptar materiales, inventar sus propios materiales y estrategias sin las múltiples presiones institucionales.

-La importancia de compartir con sus colegas y aprender, mediante intercambios, la manera de comprender, ampliar y explicar sus nuevos conocimientos, destrezas y opiniones.

Finalmente, podemos concluir que "La implantación de un cambio curricular innovador se encuentra condicionado, entre otros elementos, por los conocimientos, creencias y decisiones de los profesores. Determinar el papel del profesor para poder juzgar su influencia en el sentido más global del cambio curricular y arbitrar modelos de intervención, con implicación directa del profesor que proporcione este cambio, puede ayudar a facilitar su implantación y entender mejor la dinámica de estos procesos", y que sólo a través de la investigación de nuevos paradigmas que faciliten el desarrollo del cambio curricular estaremos en el camino de poder garantizar que la actual reforma, u otra de igual naturaleza, en matemáticas pueda llevarse a la práctica.

CAPÍTULO 8: CONCLUSIONES, IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA Y PERSPECTIVAS FUTURAS

8.1 ESQUEMA GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN: OBJETIVOS E HIPÓTESIS

En este Capítulo, presentamos un resumen global de la investigación y de los resultados de los distintos aspectos que hemos abordado, una breve exposición de las implicaciones de nuestra investigación para la enseñanza y las líneas de investigación que nos proponemos seguir en el futuro.

Nuestro trabajo se encuentra dentro del campo de la resolución de problemas aritméticos, que expresan situaciones de la vida real, enunciados mediante un formato verbal escrito y resolubles por las operaciones aritméticas elementales.

La resolución de un problema aritmético engloba el proceso, que realiza el alumno desde que lee el enunciado hasta que llega o no, a obtener una solución. En este proceso se ponen en marcha una serie de habilidades generales, y también intervienen conocimientos específicos de la materia en cuestión.

Los problemas aditivos han sido extensamente estudiados, existiendo ya un cuerpo coherente de resultados, los multiplicativos siguen siendo objeto de múltiples investigaciones, siendo los de varias operaciones los menos trabajados, como hemos mostrado en la revisión de la literatura.

Nos hemos apoyado, principalmente, en el modelo de competencias de Goldin (1987), que enfatiza la necesidad de utilizar varios sistemas de representación no verbales en problemas matemáticos en general; en los estudios de Greeno (1987), sobre la importancia del uso de modelos para favorecer la comprensión, y en la recomendación de De Corte (1989), sobre el uso de diagramas para mejorar la comprensión y resolución de problemas aritméticos verbales por parte de los niños.

Hemos optado por construir un sistema de representación no verbal, autosuficiente basado en el esquema partes-todo de Piaget (Flavell, 1981), que permita al alumno las elaboraciones semánticas y sintácticas que se dan en un problema.

Sabemos que el uso de un sistema de representación no verbal no se genera espontáneamente por parte de los niños, sino que es preciso un diseño de instrucción para que este aprendizaje se produzca. Y, por ello, necesitamos también un profesorado dispuesto y preparado para realizar esta labor. Ello nos obligó a desarrollar un curso-guía de preparación del mismo. Las distintas investigaciones sobre el profesorado nos abrieron interrogantes sobre cuál es el papel que desempeña el profesor en una investigación y cómo influye ésta en su práctica docente, es decir, hasta qué punto su epistemología, en particular, sus conocimientos, creencias y actitudes, le inducen a tomar decisiones que pueden modificar dicha práctica o afectar al desarrollo del diseño de instrucción de la investigación. Como consecuencia de esto, vimos la necesidad de analizar estos aspectos con el profesorado con el que se trabajó.

Finalmente, convencidos de la importancia del dominio afectivo en todas las actuaciones y comportamientos del ser humano, entendimos que en los alumnos no podíamos limitar nuestra investigación sólo al dominio cognitivo. Por otra parte, el dominio afectivo era excesivamente amplio para abordarlo en su totalidad en esta investigación, por lo que nos limitamos a las actitudes. Analizamos cuál es la actitud hacia las Matemáticas de los alumnos con los que desarrollamos la investigación, y observamos si esa actitud revela diferencias con la actitud que pueden mostrar hacia un aspecto específico de las Matemáticas, en nuestro caso, la resolución de problemas aritméticos verbales, que en la práctica ocupa un porcentaje amplio de las Matemáticas escolares en estos niveles.

Para la delimitación del estudio, establecimos en el Capítulo 2, los tres objetivos generales de la investigación, que incluyen las consideraciones anteriores. En el mismo Capítulo, recogimos las hipótesis generales de la investigación, que esperábamos confirmar, formuladas a partir de las investigaciones y estudios exploratorios previos, y de acuerdo con el marco teórico local establecido.

Estos objetivos generales se concretaron en los capítulos siguientes (5, 6 y 7) en forma de objetivos específicos, que fueron analizados, según los casos, con técnicas diferentes.

Los tres objetivos generales son:

1º) Estudiar las habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas, que los alumnos ponen en juego en la resolución de un problema aritmético verbal; ver cómo influye en ellos el aprendizaje de un modelo de competencia para resolver dichos problemas, con el uso de un nuevo sistema de representación no verbal para la resolución de problemas (sistema de representación visual-geométrico), y analizar qué tipo de conexión realizan con los esquemas tradicionales en los que han sido instruidos.

2º) Estudiar la actitud de los alumnos hacia las Matemáticas, analizando si expresan diferencias con la actitud hacia la resolución de problemas, ya que faltan estudios sobre las diferencias entre los distintos tópicos, y, finalmente, ver si se produce algún cambio de las actitudes después de la implementación del diseño.

3º) Observar la toma de decisiones en un grupo de profesores en activo en un tópico como la resolución de problemas en un marco constructivista de las Matemáticas de carácter innovador, al poner en juego sus creencias y conocimientos de carácter epistemológico sobre el saber matemático y de carácter didáctico, tanto sobre los aspectos de enseñanza como de aprendizaje.

En torno a estos objetivos nos formulamos las siguientes preguntas:

1.-¿Cómo influye en los alumnos el aprendizaje de un modelo de competencias, que utiliza dos sistemas de representación (sistema de representación no verbal y un sistema de representación formal) para la representación y resolución de problemas aritméticos?, ¿qué habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas ponen en juego durante la resolución de los problemas?

2.- ¿Cómo es su actitud hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas?
3.- ¿Cómo se implica y repercute en el profesorado este tipo de investigación?

Las hipótesis específicas que se formularon para cada uno de los objetivos generales fueron:

◊ Con relación al primer objetivo:

* El modelo de competencias con el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos mejora la resolución de problemas, la ejecución de las operaciones y la invención de problemas.
* El curso es un factor que influye en la resolución de problemas, pero no así el sexo de los alumnos.
* El grupo experimental inventará problemas de una variedad de categorías semánticas superior al grupo control.
* Los alumnos ponen en juego, al resolver problemas aritméticos verbales, diversas habilidades de tipo cognitivo, metacognitivo y heurístico.

◊ Con relación al segundo objetivo:

* La actitud de los alumnos hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas es positiva.
* No hay diferencias por sexos en dichas actitudes, pero sí por cursos.
* La actitud hacia la resolución de problemas mejora después del desarrollo de un diseño de instrucción innovador.

◊ Con relación al tercer objetivo:

* El profesorado, ante situaciones como ésta (una investigación), se implica, tomando decisiones didácticas, que afectan positivamente en los resultados de los alumnos.
* El trabajo con profesores, utilizando técnicas de inmersión, favorece que éstos adopten actitudes positivas e introduzcan en sus aulas innovaciones curriculares

como la propuesta.

Con el objeto de poder desarrollar la investigación nos hemos visto obligados a elaborar marcos locales interpretativos, en forma de modelos de competencias como: Modelo de competencia para la resolución de problemas aritméticos verbales, basado en los sistemas de representación en Matemáticas y Modelo de competencia para la investigación y desarrollo del currículo. De igual manera, la revisión de la literatura sobre el campo conceptual aditivo nos puso de manifiesto que, a pesar de los amplios estudios realizados, existían ciertas dificultades, lo que nos llevó a plantearnos una revisión y organización del mismo. Son éstos los trabajos presentados en el Capítulo 3.

8.2 RESULTADOS Y CONCLUSIONES SOBRE LOS MODELOS DE COMPETENCIAS

Con relación al campo conceptual de las magnitudes discretas hemos elaborado una propuesta de organización desde el enfoque de la resolución de problemas, situándonos en el subperiodo piagetiano de las operaciones concretas, donde intervienen los agrupamientos lógicos e infralógicos, el grupo aritmético Z y la medición.

Esta propuesta de organización constituye un modelo de competencia para dicho campo, que integra los elementos y relaciones que se dan en él, permite una nueva clasificación de las diferentes situaciones y problemas del mismo, integra y explica resultados de otras investigaciones y facilita la relación con un posible modelo de ejecución.

El modelo de competencia presenta de manera unificada las categorías semánticas del campo conceptual aditivo discreto, no sólo desde una perspectiva lógico-formal, que se da en las otras categorizaciones, sino también desde la perspectiva de las leyes de composición, de los fenómenos asociados y de las estructuras cognitivas implicadas.

En definitiva, hemos considerado bajo una única estructura (modelo de competencia), diferentes conceptos y relaciones, a veces no clasificados, que regulan el funcionamiento del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas.

Con relación al modelo de competencia para la resolución de problemas aritméticos verbales, encontramos que muchos han sido los intentos por desarrollar modelos de competencia. Unos han surgido de la experiencia con alumnos reales; otros, han sido concebidos de forma teórica, pero todos tienen en común la idea de buscar una respuesta a la pregunta: ¿Se puede enseñar a resolver problemas?

Nuestro objetivo ha sido conjugar esta idea, aportando algunos elementos que pretenden dar respuesta a este interrogante para los problemas aritméticos. Así, hemos diseñado un modelo de competencias, factible de desarrollar en el aula con alumnos de Primaria y con problemas aritméticos verbales, donde aunamos el modelo general de Polya con el modelo de competencia de Goldin.

Con relación al modelo de competencia para la investigación y desarrollo del currículo, señalamos que la implementación de una reforma educativa, que plantea en algunos aspectos cambios radicales, supone un reto para la investigación. En esta dirección, hemos considerado dos aspectos en este trabajo: la investigación en los procesos implicados en el cambio curricular y los métodos de investigación en educación.

En los procesos de cambio curricular, la investigación comienza con un conocimiento "a priori" de los conocimientos y creencias de cada una de las componentes de estos, donde obtenemos una medida de lo que está sucediendo. Es necesario, como señala Rachlin, un paradigma de evaluación que proporcione bases más dinámicas y completas para la elaboración del currículo y modifique la instrucción en las dimensiones tanto del alumno como del profesor.

Nuestro modelo es un intento de aportar ideas en esta dirección. La hipótesis general de trabajo puede resumirse en que la implantación de un cambio curricular se encuentra condicionado, entre otros elementos, por los conocimientos, creencias y decisiones de los profesores.

La propuesta de trabajo desarrollada, pretende, asimismo, y en relación a los métodos de investigación en educación, superar las posiciones extremas entre los aspectos cualitativos y cuantitativos de los paradigmas de investigación y recoger métodos y técnicas de ambos, útiles y complementarios en función de los tipos de estudio que se realicen: metodología convergente. Encontramos en la misma interacciones controladas por una investigación cuasi-experimental (pretest y postest, escalas) con medidas multidimensionales, y estudios cualitativos, con entrevistas videograbadas.

8.3 RESULTADOS Y CONCLUSIONES SOBRE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES

En los Capítulos 5 y 6 se recogen los resultados obtenidos sobre los problemas aritméticos verbales, desde dos perspectivas diferentes: la cualitativa y la cuantitativa. Los resultados obtenidos apuntan que en los problemas de estructura aditiva se produce una mejora en la capacidad de resolución de los mismos, pero esta mejora ha sido totalmente similar en los grupos experimental y control.

No existen diferencias en los problemas de las distintas categorías semánticas, ni diferencias por sexo. Sólo, como era de esperar, encontramos diferencias por cursos.

La ejecución de las operaciones experimenta una pequeña mejoría en ambos grupos.

Detectamos una fuerte relación entre el uso por los alumnos del SRVG y el profesor. Por tanto, parece deducirse una fuerte correlación entre las creencias del profesorado (en este caso, el convencimiento de la importancia del uso de este nuevo sistema de representación) y sus decisiones didácticas, reflejadas en el hincapié que hace sobre sus alumnos para que lo utilicen.

Se vislumbra la existencia de preferencias individuales por el uso de sistemas gráficos, ya que el uso del SRVG va a ser utilizado, al menos por un niño en casi todas las aulas, y que, generalmente, determinados niños lo usan varias veces.

En los problemas de estructura multiplicativa, todos los alumnos mejoran el rendimiento, aunque en general los resultados son inferiores a los de los problemas aditivos. Las mejoras son sensiblemente iguales en los grupos experimental y control. No hay diferencias por sexos, pero sí por cursos. Sobre todo, los alumnos de 3º muestran mayores dificultades en la resolución de estos problemas.

Las operaciones no mejoran en ninguno de los dos grupos y ninguno de ellos (multiplicación y división), supera el 70% de ejecuciones correctas.

La utilización del SRVG por parte de los alumnos del grupo experimental sigue la misma pauta encontrada con los problemas aditivos: son los alumnos de dos aulas los que lo usan preferentemente y algunos alumnos de otras aulas, incluso de aquellas que no terminaron el diseño. En los problemas de estructura multiplicativa es menor el número de alumnos que lo utilizan.

En los problemas de dos operaciones, se repiten muchos de los resultados de los problemas anteriores. Hemos constatado también la gran dificultad que estos problemas plantean a los alumnos.

Es también interesante ver cómo los alumnos que han comprendido la sintaxis del SRVG son capaces, con muy poca ayuda, de generalizarlo a los problemas de dos operaciones.

El rendimiento en resolución de problemas aditivos, en general, es alto; menor en los problemas de estructura multiplicativa, siendo los problemas de dos operaciones los que alcanzan el máximo de dificultades.

En los problemas inventados encontramos que los niños tienen interiorizada para cada operación aritmética un tipo concreto de categoría semántica que sería, para la suma: combinación o cambio; para la resta: cambio; para la multiplicación: razón; y, para la división: reparto, a pesar de que los mismos niños son capaces de resolver problemas de las otras categorías semánticas.

En relación al grupo experimental y grupo control, no se ha encontrado diferencias significativas entre los problemas inventados. Este resultado niega la primera consideración de la hipótesis general: el grupo experimental mantiene los mismos “esquemas” después de la instrucción recibida.

Los problemas inventados por los alumnos coinciden, salvo en el caso de la división, con los problemas propuestos en los libros de texto, lo cual apoya nuestra hipótesis en el sentido de que la categoría semántica viene inducida por la instrucción recibida a largo plazo y no se modifica por una instrucción consciente a corto plazo.

Tenemos que resaltar que no existen diferencias significativas por sexos o por cursos, siendo el formato utilizado el estándar (a * b = ?) y el contexto predominante, el relacionado con las compras o los juguetes. El rendimiento de los alumnos está relacionado con el saber inventar o no, un problema, pero en ningún caso con la categoría semántica elegida. Finalmente, señalamos que parece existir algunas diferencias en la categoría del problema elegido, por lo menos en los problemas aditivos, cuando éstos son planteados a partir de una representación visual. Los alumnos diversifican más sus opciones e inventan problemas de diferentes categorías. La entidad del estudio realizado no nos permite hacer afirmaciones, pero ha constituido una nueva hipótesis, cuya verificación pretendemos realizar.

Las entrevistas nos aportan muchos datos, que aunque no son generalizables, reflejan con amplitud los procesos de resolución que siguen los niños, así como las habilidades que ponen en juego.

Observamos que los problemas aditivos, (concretamente los de restar), son bastante fáciles para los niños de 4º y 5º, siendo los de tipo cambio más sencillos, aunque la operación (con doble acarreo) originó más errores.

La adquisición de este nuevo lenguaje fue logrado sólo por algunos niños. Los niños de mayor rendimiento eran capaces de realizar una buena representación mental del problema, que como apuntan Resnick y Ford (1981) es el primer paso en cualquier situación de resolución de problemas.

Existe una relación entre las habilidades que exteriorizan y su capacidad para resolver el problema. Como mucho autores han afirmado (Lester, 1982, De Corte, 1993, Schoenfeld, 1992) los alumnos que demuestran poseer más habilidades metacognitivas se presentan como los mejores resolutores.

8.4 RESULTADOS Y CONCLUSIONES SOBRE LAS ACTITUDES DE LOS ALUMNOS

En la primera parte del Capítulo 7 abordamos la investigación sobre actitudes. Podemos concluir que en estos niveles (8-11 años) la actitud hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas es positiva, que exteriorizan en sus sentimientos (me gustan, me divierten,..), en sus comportamientos (no me iría de clase) y en sus creencias. Estos datos se presentan de forma similar por cursos y por sexos. Sin embargo, detectamos una disminución de esa actitud positiva a medida que crecen.

La actitud positiva hacia la resolución de problemas se muestra ligeramente superior que hacia las Matemáticas, lo cual puede ser un indicativo de la importancia que le conceden los profesores: "*la resolución de problemas sea el eje de la enseñanza de las Matemáticas*" (NCTM, 1980), o responder a una predisposición favorable de los alumnos hacia ella.

La percepción que tienen los alumnos acerca de la utilidad de las Matemáticas debía reforzarse mediante la elección de contenidos y problemas reales, y, también sería deseable potenciar desde los primeros años en la institución escolar, en el sentido amplio, el significado de la Matemática, para desterrar de los niños que “la Matemática es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos", tan frecuente en los diversos estudios que hemos comentado, y que juega un papel condicionante en sus cuestionamientos sobre las Matemáticas.

8.5 RESULTADOS Y CONCLUSIONES SOBRE LA EPISTEMOLOGÍA DEL PROFESORADO

En el Capítulo 7 desarrollamos la investigación sobre la epistemología del profesor. De los resultados obtenidos, constatamos la importancia de desarrollar e implantar programas educativos que, respondiendo al movimiento de la Reforma

Educativa en Matemáticas, permitan propiciar cambios estructurales, como la epistemología de los profesores implicados, para que esta implantación se lleve a cabo; la necesidad de facilitar a los profesores experiencias educativas, en gran medida, semejantes al tipo de trabajo o indagaciones dirigidas, que tratan de realizar con sus alumnos, y orientadas por personas experimentadas en este tipo de enseñanza; ofrecer oportunidades para intentar nuevos enfoques, modificar y adaptar materiales, inventar sus propios materiales y utilizar estrategias sin las múltiples presiones institucionales; y, finalmente, compartir con sus colegas y aprender mediante intercambios la manera de comprender, explicar y ampliar sus nuevos conocimientos, destrezas y opiniones.

De esta forma, podemos concluir que: "La implantación de un cambio curricular innovador se encuentra condicionado, entre otros elementos, por los conocimientos, creencias y decisiones de los profesores. Determinar el papel del profesor para poder juzgar su influencia en el sentido más global del cambio curricular y arbitrar modelos de intervención, con implicación directa del profesor que proporcione este cambio, puede ayudar a facilitar su implantación y entender mejor la dinámica de estos procesos", y sólo a través de la investigación de nuevos paradigmas que faciliten el desarrollo del cambio curricular, estaremos en el camino de poder garantizar que la actual Reforma en Matemáticas, u otra de igual naturaleza, pueda llevarse a la práctica.

8.6 CONCLUSIONES GENERALES

De las discusiones realizadas en los diferentes capítulos de la Memoria (3, 5, 6 y 7) hemos recogido los aspectos más relevantes y los hemos mencionado de nuevo en los parágrafos 8.2, 8.3, 8.4 y 8.5. La investigación está centrada como hemos señalado en los tres objetivos generales, ya comentados, pero éstos, obviamente, están relacionados y permiten establecer conclusiones sobre los tres elementos del microsistema educativo: alumnos, contenidos y profesores, que hemos considerado en esta investigación. El objeto de estudio fue la resolución de problemas aritméticos verbales organizados por su estructura semántica, con la presencia de un sistema de representación visual geométrico, que es autosuficiente, y que está basado, entre otros, en el esquema partes-todo. Argumento éste que nos permite interaccionar los tres elementos anteriores.

Otro elemento a considerar es que el estudio se hace con alumnos de 8 a 11 años, que tienen un cierto nivel de competencia en la resolución de problemas aritméticos verbales. Al abordar la resolución de dichos problemas con el nuevo sistema de representación, éste puede provocar potencialidades o dificultades, tanto para el alumnado como para el profesorado, que son investigadas y comentadas en esta Memoria. A modo de resumen global, podemos indicar como resultados generales de esta investigación:

- La elaboración de un marco de interpretación para entender y estudiar los problemas aritméticos verbales de estructura aditiva.
- La elaboración y comprobación de que las situaciones didácticas diseñadas e implementadas durante la instrucción (DIRPA), siguiendo el modelo de competencias para la resolución de problemas aritméticos, basado en los sistemas de representación formal numéricos y visual-geométrico, se han revelado como un recurso significativo para desarrollar y analizar habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas en los alumnos.
- La propuesta metodológica, que recoge métodos y técnicas de los paradigmas cualitativos y cuantitativos se han mostrado útiles y complementarios en función de los estudios realizados. Mientras el análisis estadístico nos aporta comportamientos medios, y así, por ejemplo, no hemos encontrado cambios significativos en la actitud hacia la resolución de problemas, antes y después del DIRPA, ya que los promedios compensan las desviaciones individuales, el estudio de casos nos ha permitido detectar rasgos diferenciados en las actitudes. Situaciones análogas se han dado en el estudio de las otras variables.
- La metodología de desarrollo y cambio curricular seguida se ha mostrado relevante para colaborar en la modificación y adaptación de la epistemología del

profesor frente a un cambio curricular innovador. Dentro de ella, "la inmersión" aparece como una técnica útil para que el profesor asimile las experiencias necesarias y las acomode a los datos de la experiencia, es decir, que el profesor pueda reflexionar sobre su propia epistemología y adaptarla a las necesidades del cambio.

De manera más específica:

- Los alumnos desarrollaron habilidades tanto de tipo cognitivo, como metacognitivo y heurístico, siendo el uso del nuevo sistema de representación, el aspecto más conflictivo, porque este sistema tiene una semántica y una sintaxis que es necesario trabajar para poder interiorizarla. El tiempo dedicado fue corto y muchos alumnos tenían plenamente interiorizadas unos esquemas de resolución mediante las operaciones, que ponían en juego automáticamente. Pero es altamente alentador el hecho que el sistema de representación visual-geométrico desarrolle potencialidades de tipo cognitivo, metacognitivo y heurístico en aquellos alumnos que llegan a interiorizarlo y que no produce perturbaciones en los alumnos que tienen dificultades en su comprensión.
- Con relación a la resolución de problemas se aprecian mejoras por parte del grupo experimental, aunque esta mejora no es significativa con respecto al grupo control, pero esto viene explicado por dos razones: una de tipo cognitivo, el aprendizaje de un nuevo sistema de representación no verbal, no es fácil, y la otra, relacionada con el profesorado, nos ha confirmado el cambio que en su metodología y en su preocupación muestran los profesores del grupo control al saberse involucrados en una investigación, lo cual redunda positivamente en la mejora en la resolución de problemas por parte de sus alumnos.
- El uso de los dos sistemas de representación permite detectar los estilos de resolución de problemas de los alumnos, así los alumnos que poseían una tendencia más visual, desarrollaron preferencias por dicho sistema.
- Con relación a la actitud de los alumnos, ésta se muestra, en general, positiva hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas, pero no se modifica de

manera significativa con relación a la resolución de problemas después de la implementación del DIRPA, a pesar de ser éste valorado como altamente motivador, tanto por los alumnos como por los profesores.

8.7 IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Las investigaciones actuales en Didáctica, en general, manifiestan la necesidad de tender puentes de forma que los resultados obtenidos en éstas lleguen al aula y éste era uno de nuestros objetivos: crear un material curricular, que una vez experimentado, con todas las reformas consecuentes, se convirtiese en un instrumento para el profesor.

Además, de los resultados obtenidos, podemos establecer consideraciones e implicaciones que pueden ser útiles para mejorar la enseñanza-aprendizaje de los problemas aritméticos verbales y la implementación de un diseño curricular innovador.

Con relación a la resolución de problemas aritméticos verbales:

- Hemos planteado una organización del campo conceptual aditivo que facilita una organización de los problemas aritméticos verbales a desarrollar en las clases de matemáticas, lo que aportará una mayor riqueza a la enseñanza de estos problemas, dadas las carencias detectadas tanto en la instrucción como en los libros de texto.
- Se ha planteado y desarrollado un diseño (DIRPA), que facilita un desarrollo coherente para la resolución de estos problemas, aceptado tanto por los alumnos como por los profesores, y que ayuda en el desarrollo de habilidades cognitivas metacognitivas y heurísticas, útiles en la resolución de los mismos. La adaptación del diseño al primer ciclo de Educación Primaria y poder ser utilizado para enseñar a alumnos que aún no saben resolver problemas aritméticos verbales por el sistema de representación formal, parece no tener dificultad.

8.8 PERSPECTIVAS FUTURAS

A lo largo del desarrollo y en la formulación de las conclusiones de todo este trabajo de investigación, han sido varios los interrogantes que han quedado abiertos y en cuya clarificación nos proponemos contribuir en el futuro.

- Los instrumentos teóricos diseñados en términos de modelos de competencias se muestran apropiados para aplicar en futuras investigaciones. En particular, queda abierta la comprobación empírica de las categorías semánticas implicadas en el modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas.
- Los sistemas de representación visuales, dotados de una sintaxis autosuficiente, yuxtapuestos a los sistemas de representación formal, se muestran potentes para analizar habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas. Trasladarlos a cuestiones que no han quedado suficientemente estudiadas como, por ejemplo, los problemas de dos o más operaciones y los problemas no rutinarios.
- La invención de problemas también hizo surgir un nuevo interrogante: ¿hay diferencias en la invención de problemas aritméticos verbales si partimos de una operación representada en forma visual?, ¿identifican los alumnos distintas categorías semánticas si se les presenta de esta forma?.
- Parece razonable esperar cambios en las actitudes de los alumnos, depués de la implementación de un diseño innovador en resolución de problemas; el que en nuestra investigación no se haya apreciado cambios de manera global nos hace plantearnos diversos interrogantes.
    - ¿Dada la complejidad del constructo "actitud", no sería más razonable plantearse un estudio analizando las diversas componentes por separado que pretender hacer un análisis únicamente global?
    - Si las actitudes hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas de los alumnos de 8 a 11 años son positivas, y somos conscientes de que en algunos alumnos se produce un cambio radical en contra de las Matemáticas, ¿cuándo se produce ese cambio y cuáles son las causas del mismo?

Como hemos visto, todavía quedan muchas cuestiones por clarificar respecto a la organización y comprensión por parte de los estudiantes de los problemas aritméticos verbales, de la actitud hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas, y de los comportamientos de los profesores hacia la implementación de un diseño curricular innovador, a pesar de toda la información recogida y de los diferentes niveles de interpretación analizados, pero éste es el reto permanente de la investigación en Didáctica de las Matemáticas a cuyo avance esperamos haber contribuido.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIKEN, L.R. (1972). Research on attitudes toward mathematics. *Arithmetic Teacher, 19,* pp. 229-234.

AIKEN, R. (1974). Two scales of Attitudes Toward Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 5, pp. 67-71.

AIKEN, L.R. (1976). Update on Attitudes and other affective variables in Learning Mathematics. *Review of Educational Research.* 46 (2), pp. 293-311.

ALONSO, V.; GONZÁLEZ, A.; SÁENZ, O. (1988): Estrategias operativas en la resolución de problemas matemáticos en el Ciclo Medio de la EGB. *Enseñanza de las Ciencias. V. 6(3),* pp. 251-264.

ALVÁREZ MÉNDEZ, J. M. (1986). Investigación cuantitativa/Investigación cualitativa: ¿Una falsa disyuntiva? En T. D. Cook y Ch. S. Reichardt: *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa.* Ed. Morata. Madrid.

ANGHILERI, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 20,* pp. 367-385.

ASSESSMENT OF PERFORMANCE UNIT (APU) (1980). *Mathematical Development: Primary Survey Report nº 1.* London: HMSO.

ATO GARCÍA, M, LÓPEZ GARCÍA, J. J. y OTROS (1994). *Fundamentos de Estadística con SYSTAT.* Ed. Ra-Ma. Madrid.

AZCÁRATE, P. (1995). Las concepciones de los profesores y la formación del profesorado. En Blanco, L. y Mellado, V. (Eds): *Actas de las I Jornadas sobre la formación del Profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal.* Universidad de Extremadura. Badajoz, pp. 39-48.

BACHOR, D. (1987). Towards a taxonomy of word problems. En *Proceedings of the XI Annual Meeting of PME.*

BALACHEFF, N.; HOWSON, A.G.; SFARD, A.; STEINBRING, H.; KILPATRICK, J. y SIERPINSKA, A. (1993). What is research in mathematics education, and what are its results?. *ZDM 93/3.*

BARNETT, J. (1984): *The Study of Syntax Variables.* En G. Goldin y E. McClintock (Eds): *Task Variables in Mathematical Problem Solving.* The Franklin Institute Press. Philadelphia. Pennsylvania.

BARTLETT, F.C. (1932/1977). *Remembering. A Study in Experimental and Social Psychology.* Cambridge: Cambridge University Press.

BELTRÁN, J. (1985). *Psicología educacional.* U.N.E.D. Madrid.

BELTRÁN, J., PRIETO, M. D., BERMEJO, V. y VENCE, D. (1993). *Intervención psicopedagógica.* Ed. Pirámide. Madrid.

BELL, A., FISCHBEIN, E. y GREER, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15,* pp.129-147.

BELL, A.W.; COSTELLO, J. y KÜCHEMANN, D. (1983). *A Review of Research in Mathematical Education. Research on Learning and teaching.* NFER-Nelson.

BERMEJO, V. (1990). *El niño y la aritmética: Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas.* Paidós. Barcelona.

BERMEJO, V. y RODRÍGUEZ, P.(1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje, 39-40,* pp. 71-81.

BEST, J.W. (1970). *Research in Education.* Prentice-Hall. Englewood Cliffs. New Jersey.

BETHENCOURT, J.T (1986). *Estrategias cognitivas en la resolución de problemas aritméticos.* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna. Tenerife.

BISQUERRA, R. (1989). *Métodos de investigación educativa. Guía práctica.* Ediciones CEAC, S.A. Barcelona.

BLANCO, L. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de EGB. y estudiantes para profesores.* Universidad de Extremadura. Badajoz. Manuales UNEX, nº 11.

BOOKER, G., COBB, P. y NAVARRO DE MENDICUTI, T. (Eds) (1990). *Proceedings of the fourteenth PME Conference*. México.

BORASSI, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics, 2 (17),* pp. 125-141.

BRANSFORD, J.D. y STEIN, B.S. (1984). *The IDEAL problem solver.* (Traducción española (1986) *Solución IDEAL de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear.* Barcelona. Ed. Labor).

BRIARS, D. J. y LARKIN, J.H. (1981). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Annual Meeting of the Society for Research in Child Development.* Boston.

BRIGHT, G.W. y VACC, N.N. (1994). Changes in indergraduate preservice teacher's beliefs during an elementary teacher-certification program. *Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association.* New Orleans.

BROUSSEAU, G. (1986). *La théorization des phénomènes d'enseignement des Mathématiques.* Thèse. Bordeaux V.

BROWN, M. (1981). *Levels of understanding of Number Operations, Place-Value and decimals in Secondary School Children.* Tesis doctoral. Chelsea College, London University.

BROWN, M. (1981). Number operations. En K.M. Hart. (Ed.): *Children's Understanding of Mathematics: 11-16.* John Murray.

CALDERHEAD, J. (1984). *Teachers' Classroom Decision-Making*. London: Holt, Rinehart and Winston.

CALDERHEAD, J. (1988). Conceptualización e investigación del conocimiento profesional de los profesores. En Vilar Angulo, L. M. *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores*. Marfil. Alcoy, pp. 21-37.

CALDWELL, J. y GOLDIN, G. (1979). Variables affecting word problem difficulty in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10 (5), pp. 323-336.

CALLEJO, Mª L. (1994). *Un Club matemático para la diversidad.* Narcea ediciones. Madrid.

CAMACHO, M; HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M. M. (1993). Curricular and teaching experiences with students of Mathematics. En N. A. Malara y L. Rico (Eds): *Proceedings of the first Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*, pp. 51-58. Modena. Italy.

CAMACHO, M; HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M.M. (1994). Concepciones y actitudes de futuros profesores de Secundaria hacia la Matemática y su enseñanza: Un estudio descriptivo. *Actas de las Primeras Jornadas sobre formación del Profesorado de Matemáticas y Ciencias en España y Portugal*. Universidad de Extremadura. Badajoz, pp. 81-97.

CAMACHO, M., HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M. M. (1996). An analysis of future Mathematics Teacher's concepts and attitudes towards Mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* London. UK. (Enviado).

CAMPBELL, D.T. y STANLEY, J.C. (1963). Experimental and quasi-experimental designs for research on teaching. En N. L. Gage (Ed): *Handbook of Research of Teaching.* Rand McNally. Chicago.

CAO, F. (1990). A study on the development of second-graders ability in solving two-step problems. En *Proceedings of the XIV Annual Meeting of PME.* México.

CARATINI, R. (1970). *Los números y el espacio.* ARGOS Enciclopedia temática, nº 12. Editions Bordas, París y Editorial Argos, Barcelona.

CARPENTER, T.P. (1985). Learning to Add and Subtract. En E. Silver (Ed.): *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple research Perspectives.* LEA. Hillsdale. New Jersey.

CARPENTER, T. P. y MOSER, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (Eds): *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* L.E.A. Hillsdale. New Jersey.

CARPENTER, T.P. y MOSER, J.M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (eds): *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes.* Academic Press. New York.

CARPENTER, T. P. y MOSER, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, pp. 179-202.

CARPENTER, T. P., HIEBERT, J. y MOSER, J. M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, pp. 55-72.

CARPENTER, T.P., MOSER, J.M y ROMBERG, T.A. (Eds) (1982). *Addition and Subtraction: A cognitive Perspective.* L.E.A. Hillsdale. New Jersey.

CARPENTER, T.P., FENNEMA, E., PETERSON, P.L., CHIANG, Ch. P. y LOEF, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal, 26,* pp. 499-531.

CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. C. (1994). The relationships between the teacher conceptions of Mathematics and of Mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis. *Proceedings of the XVIII PME Conference*, 2. Lisbon. Portugal, pp. 152-159.

CASTORINA, J. A. y PALAU, G. (1982). *Introducción a la lógica operatoria de Piaget.* Paidós. Barcelona.

CASTRO, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de Secundaria (12-14 años)*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

CASTRO, E. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

CASTRO, E. Y RICO, L. (1994). Visualización de secuencias numéricas. *UNO,1,* pp. 75-84.

CASTRO, E., RICO, L. y CASTRO, E. (1987). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar.* Edit. Síntesis. Madrid.

CASTRO, E., RICO, L. y CASTRO E. (1992). Choice of structure and interpretation of relation in multiplicative compare problems. En *Proceedings of the XVI PME Conference*. Durham. USA.

CASTRO, E., RICO, L. y GIL, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias, Volumen 10(3***)** pp. 243-253.

CASTRO, E., RICO, L., BATANERO, C. y CASTRO, E. (1991). Dificultad en problemas de estructura multiplicativa de comparación. En F. Furinghetti (Ed) *Proceedings of the XV PME Conference*, Assisi. Italy.

CASTRO, E., RICO, L., CASTRO, E. Y GUTIÉRREZ, J. (1993). Two-step Addition Arithmetic Problems. En *Proceedings of the first Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*, pp. 139-146.

CHARLES, R. y SILVER, E. (Eds) (1988). *The teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.* Research Agenda for Mathematics Education. Vol. 3. L.E.A. y NCTM. Reston: Virginia.

CHOMSKY, N. (1957/1971). *Lenguaje y entendimiento*. Edic. Seix y Barral. Barcelona.

CLARK, C. M. y PETERSON, P. L. (1986). Teachers' thought processes. En Wittrock, M.C. (Ed.): *The Handbook of Research on Teaching*. New York. Macmillan. Traducido en parte al castellano. 1989. La investigación de la enseñanza, vol. 1, 2 y 3. Paidós y M.E.C. Barcelona.

COBB, P., YACKEL, E. y WOOD, T. (1988). Curriculum and teacher development: psychological and anthropological perspective. En Fennema, E., Carpenter, T. y Lamon, S. (Eds): *Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics.* Wisconsin Centre for Educational Research. Madison, pp. 92-130.

COCKROFT, W.H. (1982). *Mathematics Counts* (Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools). H.M.S.O. London. Traducción al castellano. 1985. Las Matemáticas sí cuentan. MEC. Madrid.

COHEN, L. y MANION, L. (1990). *Métodos de investigación educativa.* Edit. La Muralla, S.A. Madrid (Original 1985).

COLLIS, B. (1987). Sex differences in the association between Secondary school students' attitudes toward Mathematics and toward computers. *Journal for Research in Mathematics Education, 18 (5)*, pp. 394-402.

COOK, T.D. y REICHARDT, CH.S. (1986a). Hacia una superación del enfrentamiento entre los métodos cualitativos y los cuantitativos. En T. D. Cook y Ch. S. Reichardt: *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa.* Ed. Morata. Madrid.

COOK, T. D. y REICHARDT, CH. S. (1986b): *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa.* Ed. Morata. Madrid.

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN DE CANARIAS (1991). *Diseños curriculares. Educación Primaria.* Gobierno de Canarias. Tenerife.

CUADRAS, C. M. (1981). *Métodos de Análisis Multivariante.* Ed. Eunibar. Barcelona.

CURCIO, F. (Ed) (1987). *Teaching and learning: A problem-solving Focus.* National Council of Teachers of Mathematics. Reston. Virginia.

D'AMBROSIO, U. (1987). New fundamentals of mathematics for School. En Romberg, T. y Stewart, D. (Ed): *The monitoring Project and Mathematics Curriculum*, pp. 135-148. Wisconsin Center for Educational Research. Madison.

DAMEROW, P. y WESTBURU, I. (1985). Mathematics for all: Problems and implications. *Journal of Curriculum Studies. Vol. 17 (2),* pp. 175-186.

DE CORTE, E. (1993). La mejora de las habilidades de resolución de problemas matemáticos: hacia un modelo de intervención basado en la investigación. En J. Beltrán, M. D. Prieto, V. Bermejo y D. Vence (Eds) (1993): *Intervención psicopedagógica.* Ed. Pirámide. Madrid.

DE CORTE, E. y VERSCHAFFEL, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 4*.

DE CORTE, E. y VERSCHAFFEL, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders'strategies for solving addition and subtraction word problem. *Journal for Research in Mathematics Education, 18.*

DE CORTE, E. y VERSCHAFFEL, L. (1989). Teaching word problems in the Primary School: What Research has to say to the teacher. En B. Greer y G. Mulhern: *New Directions in Mathematics Education.* Routledge. London.

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L. y VAN COILLIE, V. (1988). Influence of number size, problem structure, and response mode on children's solution of multiplication problems. *Journal of Mathematical Behavior, 7,* pp. 197-216.

DE VEGA, M. (1984). *Introducción a la Psicología Cognitiva*. Madrid. Alianza.

DE VEGA, M. y OTROS (1990). *Lectura y Comprensión. Una perspectiva cognitiva.* Madrid. Alianza.

Diferentes autores(1988). Matemáticas 1º a 5º. Edit. Santillana. Madrid.

DICKSON, L.; BROWN, M. y GIBSON, O. (1991). *El aprendizaje de las*

Matemáticas. Ed. Labor. Barcelona.

DIENES, Z. P. (1976). *Estados y operadores.* Ed. Teide. Barcelona.

DOWNIE, N. H. y HEATH, R. W. (1975). *Basic statistical methods.* Harper y Row. (Traducido al castellano, Ed. Castillo. Madrid).

ERNEST, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* The Palmer Press, London.

ESCUDERO, I.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. y SÁNCHEZ, V. (1993). Creencias epistemológicas sobre las Matemáticas en los estudiantes para profesores de Primaria. *Enseñanza de las Ciencias.* Número extra (IV Congreso), pp. 317-318.

FENNEMA, E. (1980). Teacher and sex bias mathematics. *Mathematics Teacher, 3,* pp. 169-173.

FENNEMA, E. y HART, L. (1994). Gender and the JRME. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol 25. Nº 6, pp. 650.

FENNEMA, E., CARPENTER, I. P. y PETERSON, P. (1986). Teachers' decision making and cognitively guided instruction: A new paradigm for curriculum development. Paper presented at *the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. London.

FENNEMA E., CARPENTER T.P. y PETERSON, P.L. (1989). Teachers' decision making and cognitively guided instruction: A new paradigm for curriculum development. En K. Clements y N.F. Ellerton (Eds.). *Facilitating change in mathematics education*. Geelong. Victoria. Australia. Deakin University Press.

FENNEMA, E. y LOEF, M. (1992). Teacher's knowledge and its impact. En Grouws, D.A. (Ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York. MacMillan Publishing Company.

FILLOY, E. (1990). PME algebra research. A working perspective. Conferencia Plenaria. En G. Booker, P. Cobb y T. Mendicuti (eds) *Proceedings of the fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. II, pp. 1-33.

FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M. S. y MARINO, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16,* pp. 3-17.

FLAVELL, J.H. (1981). *La Psicología Evolutiva de Jean Piaget.* Ed. Paidós Ibérica, S.A. Barcelona.

FLORES, P. (1995). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

FUSON, K. C. (1992) Research on Whole Number Addition and Subtraction. En D. A. Grouws: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. pp. 243-275. MacMillan Publishing Company. New York.

FUSON, K. y WILLIS, G. (1986). First and Second Grader's Performance on Compare and Equalize Word Problems. En *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 19-24.

FUSON, K. y WILLIS, G. (1989). Second grader's use of schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 81,* pp. 514-520.

GAIRÍN, J. (1986). *Aprendizaje y cambio de actitudes en la didáctica especial de las Matemáticas.* Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

GAIRÍN, J. (1990). *Las actitudes en educación. Un estudio sobre educación matemática.* Edit. Boixareu Universitaria. Barcelona.

GARCÍA HOZ, V. (Ed.) (1994). *La enseñanza de las Matemáticas en la educación intermedia.* Edic. Rialp. Madrid.

GARRET, H. (1958/1983). *Statistics in Psychology and Education*. (Traducido al castellano: Estadística en Psicología y educación. Ed. Paidós. Barcelona.).

GAROFALO, J. y LESTER, F.K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16,* pp. 163-176.

GAULIN, C. (1982). La resolution de problèmes: le mot d'ordre pour les années 1980-90. Quoi en penser? *Actes du Colloque mathématique.* Departement des Sciences de l'education. Université du Quebec au Chicoutimi.

GENTRY, W. y UNDERHILL, R. (1987). A comparison of two palliative methods of intervention for the treatment of mathematics anxiety among female college students. En J.C. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (Eds): *Proceedings of the Eleventh International Conference for PME* (Vol. 1, pp. 99-105). University of Montreal. Montreal.

GIMÉNEZ, J. (1991). *Innovación metodológica de la didáctica especial del número racional positivo.* Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

GIMENO SACRISTÁN, J. y PÉREZ GÓMEZ, A. (1983). *La enseñanza: su teoría y su práctica.* Akal, Madrid.

GINSBURG, H. P. (Ed). (1983). *The Development of Mathematical Thinking*. Academic Press. New York.

GINSBURG, H. P., KOSSAN, N., SCHWARTZ, R. y SWANSON, D. (1983). Protocol Methods in Research on Mathematical Thinking. En H. P. Ginsburg (Ed.): *The Development of Mathematical Thinking*. Academic Press. New York.

GLENCROSS, M. (1984). Classroom atmosphere and the attitudes of children and their teachers towards Mathematics. *Proceedings of the Eight International Conference for PME,* pp. 448-456.

GOLDIN, G.A. (1985) Thinking scientifically and Thinking Mathematically. En Silver (Ed): *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*. Hillsdale. N.J. Lawrence Erlbaum.

GOLDIN, G.A. (1987). Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving. En C. Janvier (Ed): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J. Lawrence Erlbaum.

GOLDIN, G.A. (1988). Affective representation and mathematical problem solving. En J. Behr, C.B. Lacampagne y M.M. Wheeler (Eds): *Proceedings of the*

Tenth Annual Meeting of PME-NA. DeKalb, IL: Northern Illinois.
GOLDIN, G.A (1989). The development of a model for competence in mathematical problem solving based on systems of cognitive representation. En A. Borbás (Ed): *Proceedings of the Twelfth Conference PME.* Veszprem, Hungary: OOK Printing House.
GOLDIN, G.A. (1993). The IGPME Working Group on Representations*. Paper presentado en el XVII PME*. Japan.
GOLDIN, G. y McCLINTOCK, E. (Eds) (1984). *Task Variables in Mathematical Problem Solving.* The Franklin Institute Press. Philadelphia. Pennsylvania.
GREENBERG, H.J. (1987). Mathematics educations: A really, real, real world problem: Reactions to Chapters 6-10. En Romberg, T. y Stewart, D. (Eds): *The monitoring Project and Mathematics Curriculum*, pp. 135-148. Wisconsin Center for Educational Research. Madison.
GREENO, J. (1987). Instructional representations based on research about understanding. En A. Schoenfeld (Ed.): *Cognitive Science and Mathematics Education.* LEA. Hillsdale. New Jersey.
GREER, B. (1987). Didactical obstacles in the development of the concepts of multiplication and division. En *Proceedings of the XI PME Conference*. Montreal.
GREER, B. (1992). Multiplication and Division as Model of Situations. En D. Grouws: (Ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM-MacMillan Publishing Company. New York.
GREER, B. y MANGAN, C. (1986). Choice of operations: From 10-year-olds to student teachers. En *Proceedings of the X PME Conference*. London.
GREER B. y MULHERN (Eds) (1989). *New Directions in Mathematics Education.* London. Routledge.
GROUWS, D. (Ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning.* A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company. New York.
GUTIÉRREZ, A. (1991). La investigación en Didáctica de las Matemáticas. En Gutiérrez, A. (Ed.): Á*rea de conocimiento Didáctica de la Matemática*. Síntesis. Madrid.
GUTIÉRREZ, J. y OTROS (1993). Problemas aditivos de dos etapas con igual operación y estructura semántica duplicada. Estudio preliminar en 5º de Primaria. *Actas VI JAEM.* Badajoz.
GUZMÁN, M. DE (1991). *Para pensar mejor.* Barcelona. Ed. Labor.
HALKES R. y OLSON, J. K. (Ed.) (1984). *Teacher Thinking*. Lisse, Netherlands: Swets and Zeitlinge.
HAREL, G., POST, T. y BEHR, M. (1988). On the textual ant the semantic structure of mapping rule and multiplicative compare problems. En *Proceedings of the XII PME Conference*. Veszprem. Hungary.
HART, K.M. (Ed.) (1981). C*hildrens's Understanding of Mathematics,* 11-16. John Murray.
HART, L.E. (1989a). Classroom processes, sex of student, and confidence in

learning mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol.2 (3),* pp. 242-260.

HART, L.E. (1989b). Describing the Affective domain: Saying what we mean. En McLeod, D.B. y Adams, V.M. (Eds): *Affect and Mathematical Problem Solving: A new perspective.* Springer-Verlag. New York.

HATANO, G. (1982). Learning to Add and Subtract: A Japanese Perspective. En Carpenter, T.P., Moser, J.M y Romberg, T. A. (Eds): *Addition and Subtraction: A cognitive Perspective.* L.E.A. Hillsdale. New Jersey.

HELLER, J.I. y GREENO, J.G. (1978). *Semantic processing in arithmetic word problem solving.* Paper presentado en Midwestern Psychological Association Convention. Chicago.

HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M. M. (1994a). A verbal arithmetic problem solving model, that juxtapose two self-sufficient representational systems. En J.P. Da Ponte y J.F. Matos (Eds): *Proceedings of the XVIII PME Conference*. Lisbon Portugal, pp. 72

HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M. M. (1994b). Modelos de competencia para la resolución de problemas basado en los sistemas de representación en Matemáticas. Monográfico del I Seminario Nacional sobre Lenguaje y Matemáticas. *Suma, 16*. Madrid, pp. 82-90.

HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M. M. (1996). Arithmetic word problems invented by children on the basis of an arithmetic operation. *Focus on learning problems in mathematics.* USA. (Enviado).

HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M. M. (1997). La resolución de problemas aritméticos verbales mediante el uso de dos sistemas de representación. (Pendiente de envío).

HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M. M. (1997). The abilities of children during the solving of verbal-arithmetic problem. *Mathematics Education Research Journal*. Australia. (Enviado).

HERNÁNDEZ, J., ESPINEL, C. y SOCAS M. M. (1994b). The attitudes in problem solving. En J.P. Da Ponte y J.F. Matos (Eds) *Proceedings of the XVIII PME Conference*. Lisbon, Portugal, pp. 42.

HERNÁNDEZ, J., ESPINEL, C. y SOCAS, M. M. (1996). La actitud de los niños hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas. *Infancia y aprendizaje.* (Enviado).

HERNÁNDEZ, J., NODA, A. y SOCAS, M. M. (1996). La enseñanza de los problemas mal definidos. *Actas ICME-8.* Sevilla, pp. 518.

HERSHKOVITZ, S. y NESHER, P. (1991). Two-step problems-The scheme approach. *Proceedings of the XV PME Conference.* Italia.

HIEBERT, J. y BEHR, M. (Eds.) (1988). *Number concepts and operations in the middle grades.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

HIEBERT, J. y CARPENTER, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En Grouws, D.A. (Ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York. MacMillan Publishing

Company.
HOWSON, G.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J. (1981). *Curriculum Development in Mathematics*. Cambridge University Press.
HOYLES, C. (1992). Illumination and reflections Teachers, methodologies and Mathematics. En W. Geeslin y K. Graham (Eds): *Proceedings of the sixteenth PME Conference. Vol. 3,* pp. 263-286. Durham.
ICMI. (1986). *School Mathematics in the 1990s*. Cambridge University Press. Cambridge.
JANVIER, C. (Ed) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.
JERMAN, M. y REES, R. (1972). Predicting the relative difficulty of verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 4,* pp. 306-323.
KANTOWSKI, M.G. (1981). Problem solving. En E. Fennema (Ed): *Mathematics Education Research: Implications for the 80's.* Reston, VA.
KAPUT, J. (1985). *Multiplicative word problems and intensive quantities: An integrated software response* (Technical Report 85-19) Cambridge, MA: Harvard University, Educational Technology Centre.
KAPUT, J. (1987). Toward a theory of symbol use in mathematics. En Janvier, C. (Ed): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.
KAPUT, J.J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En Janvier, C. (Ed): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.
KAPUT, J.J. (1989). Linking representations in the Symbol Systems of Algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
KERLINGER, F.N. (1989). *Enfoque conceptual de la investigación del comportamiento.* Nueva Editorial Interamericana. México.(original 1979).
KIFER, E y ROBITAILLE, D. (1989). Attitudes, preferences and opinions. En Robitaille, D.F. y Garden, R.A. (Eds): *The IEA Study of Mathematics II: Contexts and outcomes of school mathematics.* Oxford. Pergamon.
KILPATRICK, J. (1975). *Variables and methodologies in research on problem solving.* A paper presented at the Research Workshop on Problem Solving, University of Georgia. Reprinted in L.L. Hatfield (Ed): Mathematical problem solving: papers from a research workshop, ERIC, 1978.
KILPATRICK, J. (1985). A retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. En E.A. Silver (Ed): *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple research Perspectives.* LEA. Hillsdale. New Jersey.
KINTSCH, W. y GREENO, J.G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review, 92*, pp.109-129.
KOUBA, V. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education,*

20 (2), pp. 147-158.

KRULIK, S. y REYS, R. (Eds.) (1980): *Problem Solving in School Mathematics, 1980 Yearbook.* National Council of Teachers of Mathematics. Reston. Virginia.

KRUTETSKII, V.A. (1969). An analysis of the individual structure of mathematical abilities in school children. En J. Kilpatrick, I. Wirszup (Eds): *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics. Vol. 2.* Stanford, California: School Mathematics Study Group.

KRUTETSKII, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* University of Chicago Press.

KULM, G. (1980). Research on Mathematics attitude. En Shumway, R. (Ed): *Research in Mathematics Education.* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

KULM, G. (1984). The classification of Problem Solving Research variables. En Goldin y McClintock (Eds): *Task Variables in Mathematical Problem Solving.* The Franklin Institute Press. Philadelphia. Pennsylvania.

LABORDE, C. y otros (1989). Language and Mathematics. En Nesher y Kilpatrick (Eds), *Mathematics and Cognition.* Cambridge University Press. ICMI. Study Series.

LAWSON, M.J. y RICE, D.N. (1987). Solving word problems: A detailed analysis using thinking aloud data. En Bergeron, Herscovics y Kieran (Eds), *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematical Education.* Montreal. Canadá.

LAWTON, D. (1973). *Social change, Educational Theory and Curriculum Planing*. Hodder and Stroughton. Londres.

LEDER, G. (1985). Measurement of attitudes to Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. Vol 5 (3), pp. 18-21.

LEDER, G. (1992). Measuring attitudes to Mathematics. *Proceedings of the XVI International Conference for the Psychology of Mathematics Education.*

LEDER, G. (1993). Reconciling affective and cognitive aspects of mathematics learning: reality or a pious hope? *Proceeding of the XVII International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Japan. Vol 1, pp. 46-65.

LESH, R. y LANDAU, M. (1983). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* Academic Press. New York.

LESH, R., POST, T. y BEHR, M. (1987). Representations and translation among representations in Mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

LESTER, F. (1980). Research on Mathematical Problem Solving. En R.J. Shumway: *Research in Mathematics Education.* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

LESTER, F. (1983). Trends and Issues in Mathematical Problem Solving Research. En R. Lesh y M. Landau (Eds): *Acquisition of Mathematics Concepts and*

Processes. Academic Press. New York.
LESTER, F. (1994). Musing about Mathematical problem-solving Research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education. Vol 25, 6.*
LESTER, F. y CHARLES, R. (1992). A Framework for Research on Problem-Solving Instruction. En J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos y D. Fernandes (Eds): Mathematical Problem Solving and New Information Technologies. Research in Contexts of Practice. *Proceeding of the NATO Advanced Research Workshop on Advances in Mathematical Problem Solving Research.* Springer-Verlag. Berlin.
LESTER, F.K. Y GAROFALO, J. (Eds) (1982). *Mathematical problem solving: Issues in research*. The Franklin Institute Press. Pensylvania.
LÓPEZ-REAL, F. y VELOO, P.K. (1993). Children's Use of Diagrams as a Problem-Solving Strategy. En *Proceedings of the XVII International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Japan.
LLINARES, S. (1989). *Las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza en estudiantes para profesores de primaria: dos estudios de casos*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.
LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V.; GARCÍA, M. y ESCUDERO, I. (1995). *Creencias y aprender a enseñar Matemáticas.* Servicio de publicaciones de la Universidad de Sevilla.
LUCAS, J., BRANCA, N., GOLDBERG, D., KANTOWSKI, M.G., KELLOG, H. y SMITH, P. (1984). A process-Sequence Coding System for Behavioral Analysis of Mathematical Problem Solving. En Goldin, G. y McClintock, E. (Eds): *Task Variables in Mathematical Problem Solving.* The Franklin Institute Press. Philadelphia. Pennsylvania.
M.E.C. (1989). *Libro Blanco de la Reforma Educativa*. Ministerio de Educación y Ciencia.
MANDLER, G. (1989). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds): *Affect and Mathematical Problem Solving: A new perspective.* Springer-Verlag. New York.
MARASCUILO, L. A. y LEVIN, J. R. (1983). *Multivariate statistics in the social sciences. A research's guide.* Wadswoth, Inc. California.
MARCELO, C. (1987). *El pensamiento del profesor.* CEAC. Barcelona.
MARTÍNEZ ARIAS, R. (1995). *Psicometría: Teoría de los tests psicológicos y educativos.* Ed. Síntesis. Madrid.
MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. (1988). *Pensar matemáticamente.* Barcelona. M.E.C. y Ed. Labor.
MATOS, J.F. (1991). A importancia das concepçoes e attitudes dos alunos em relaçao à Matematica. *Memorias de lI CIBEM.* Sevilla, septiembre 1990, París, UNESCO, Sección de Enseñanza Científica y Tecnológica.
MAYER, R. E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Barcelona. Ed. Paidós Ibérica S.A.
MAZA GÓMEZ, C. (1989). *Sumar y restar.* Editorial Visor. Madrid.
MAZA GÓMEZ, C. (1991a). *Enseñanza de la suma y de la resta*. Editorial Síntesis.

Madrid.
MAZA GÓMEZ, C. (1991b). *Multiplicar y dividir: A través de la resolución de problemas.* Editorial Visor. Madrid.
MAZA GÓMEZ, C. (1991c). *Enseñanza de la multiplicación y división*. Editorial Síntesis. Madrid.
MAZA GÓMEZ, C. (1995). *Aritmética y representación: De la comprensión del texto al uso de materiales* Paidós. Barcelona.
McCLELLAND, W.A (1968). *The Process of Effecting Change*. V.A. Human Resources Research Office, pp. 32-68. Alexandria.
McLEOD, D.B. (1985). Affective Issues. En E. Silver (Ed.): *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple research Perspectives.* LEA. Hillsdale. New Jersey.
McLEOD, D.B. (1986). Technology and the role of affect in teaching mathematical problem solving. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.* San Francisco, CA.
McLEOD, D.B. (1987a). Affect and problem solving: Two theoretical Perspectives. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.* Washington. D.C.
McLEOD, D.B. (1987b). A constructivist approach to research on attitude toward mathematics. *Proceedings of the XI International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* pp. 133-139.
McLEOD, D.B. (1987c). Beliefs, attitudes and emotions: *Proceedings of the XI International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 170-180.
McLEOD, D.B. (1988). Affective Issues in Mathematical Problem Solving: Some Theoretical Considerations. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol 19 (2), pp. 134-141.
McLEOD, D.B. (1989). The Role of Affect in Mathematical Problem Solving. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds) (1989): *Affect and Mathematical Problem Solving: A new perspective.* Springer-Verlag. New York.
McLEOD, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. Grouws: *Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning.* A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company. New York.
McLEOD, D.B. (1994). Research on affect and Mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 25, 6,* pp. 637-647.
McLEOD, D.B. y ADAMS, V.M. (Eds) (1989). *Affect and Mathematical Problem Solving: A new perspective.* Springer-Verlag. New York.
McLEOD, D.B., CRAVIOTTO, C. y ORTEGA, M. (1990). Students'affective responses to non-routine mathematical problems: An empirical study. *Proceedings of the XIV International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 159-166.
M.E.C (1989). *Diseños curriculares básicos de Primaria.* MEC. Madrid.

MILLER, L.D. (1987). Attitudes of twelfth graders toward mathematics. *Proceeding of the XI International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol 1,* pp. 140-146.

MOREIRA, C. y NOSS, R. (1995). Understanding teachers'attitudes to change in a logomathematics enviroment. *Educational Studies in Mathematics, 28 (1)*, pp 155-176.

MOYER, J.C. y otros (1984). Story problems formats: Drawn versus verbal versus telegraphics. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, pp. 342-351.

MONEREO, C. (1995). Enseñar a conciencia. ¿Hacia una didáctica metacognitiva? *Aula 34,* pp. 74-80.

MONTGOMERY, D.C. (1991). *Diseño y análisis de experimentos.* Grupo Editorial Iberoamericana, SA. de CV. México.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1980). A*n Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s.* NCTM. Reston, VA.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. NCTM. Reston: Virginia.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education.* National Academic Press. Washington.

NESHER, P. (1976). Three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 7,* pp. 369-388.

NESHER, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (eds): *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* Erlbaum Hillsdale, NJ.

NESHER, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. En J. Hiebert y M. Behr (Eds): *Number concepts and operations in the middle grades.* Reston , VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

NESHER, P. y HERSHKOVITZ, S. (1991). Two step problems. Research findings. En F. Furinghetti (Ed): *Proceedings of the XV PME Conference.* Assisi. Italy.

NESHER, P. y HERSHKOVITZ, S. (1994). Schemes in two-steps problems. *Educational Studies in Mathematics, 26,* pp. 1-23.

NEWELL, A. y SIMON, H. (1972). *Human Problem Solving.* Prentice-Hall, Inc. New Jersey.

NICKERSON, R. S., PERKINS, D. N. y SMITH, E. E. (1987). *Enseñar a pensar: Aspectos de la aptitud intelectual.* Paidós. MEC. Barcelona.

NODA, A., HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M. M. (1996). El uso de sistemas de representación no verbales en problemas aritméticos en el DCB de Primaria. *Números, 27.* Tenerife, pp. 13-32.

NORTES CHECA, A. (1988). *El paso de las operaciones concretas a las formales:*

Un análisis en el dominio de las Matemáticas. Tesis doctoral. Universidad de Murcia.

PAJARES, (1992). Teacher's beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research.* Vol. 62, 3, pp. 307-332.

PALAREA, M. M. y SOCAS, M. M. (1994). Elaborations semantiques vs elaboration syntactiques dans l'enseignement-apprentissage de l'algebre scolaire (12-16 ans). *Actas de la 46ª C.I.E.A.E.M.* Tolouse. France.

PAIVIO, A. (1978) Mental comparisons involving abstract attributes. *Memory and Cognition,6,*pp. 199-208.

PELED, I. y NESHER, P. (1988). What children tell us about multiplication word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 7,* pp. 239-262.

PÉREZ, M.P. y POZO, J.I. (1994). Aprender a resolver problemas y resolver problemas para aprender. En J.I. Pozo Municio (Ed.): *La solución de problemas.* Aula XXI. Santillana. Madrid.

PIAGET, J. (1926). *La representation du monde chez l'enfant.* Alcan, Paris. (Traducción al castellano en Espasa Calpe. Madrid, 1933).

PIAGET, J. (1941/1965). *The child's conception of number.* New York. Norton.

PIAGET, J. (1978). *Introducción a la Epistemología Genética. El pensamiento matemático.* Paidós. Buenos Aires.

POLAINO-LORENTE, A. (1993). Procesos afectivos y aprendizaje: intervención psicopedagógica. En J. Beltrán, M.D. Prieto, V. Bermejo y D. Vence (Eds): *Intervención psicopedagógica.* Ed. Pirámide. Madrid.

POLYA, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning, 2 vols.* Princeton University Press. Princeton, NJ. (Traducción castellana, Matemáticas y razonamiento plausible. Tecnos: Madrid, 1966).

POLYA, G. (1957). *How to solve it.* (Traducción española: Cómo plantear y resolver problemas. México. Ed. Trillas, 1976).

POLYA, G. (1966). Mathematical Discovery, 2 vols. John Wiley and Sons. New York.

PONTE, J.P., MATOS, J.F., MATOS, J.M. y FERNANDES, D. (Eds) (1992). Mathematical Problem Solving and New Information Technologies. Research in Contexts of Practice. *Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Advances in Mathematical Problem Solving Research.* Springer-Verlag. Berlin.

PORLÁN, R., (1993). *Constructivismo y escuela. Hacia un modelo de enseñanza-aprendizaje basado en la investigación*. Díada. Sevilla.

PRESMEG, N. (1985). *The role of visually mediated processes in high school Mathematics: A classroom investigation.* Tesis doctoral. Cambridge.

PUIG, L. (1993). *Elementos para la instrucción en resolución de problemas de matemáticas.* Tesis Doctoral. Valencia.

PUIG, L. y CERDÁN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid. Edit. Síntesis.

QUILES, M. (1986). *La actitud y el rendimiento escolar en matemáticas: Un acercamiento multidimensional.* Tesis doctoral. Universidad de La Laguna.

Tenerife.
QUILES, M. (1993). Actitudes matemáticas y rendimiento escolar. *Comunicación, Lenguaje y Educación, 18*, pp. 115-125.
RACHLIN, S. (1989). The research Agenda in Algebra: A curriculum development perspective. En Wagner, S. y Kieran, C. (Eds): *Research issues in the learning and teaching of algebra.* N.C.T.M. Laurence Erlbaum Associates. Reston. Virginia.
RESNICK, L. y FORD, W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction.* (Traducción española: (1990) *La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Paidós-MEC).
RESNICK, L.B. (1983). A Developmental Theory of Number Understanding. En Ginsburg (Ed): *The Development of Mathematical Thinking*. Academic Press. New York, pp. 109-151.
RESNICK, L.B., GREENO, J.G. y ROWLAND, J. (1980). *MOLLY: A model of learning from mapping instruction.* Unpublished manuscript. University of Pittsburg, Learning Research and Development Center, Pittsburg, PA.
RICO, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática. Elementos y evaluación. En Llinares, S. y Sánchez, M. V. (Eds): *Teoría y Práctica de la Educación Matemática*. Alfar. Sevilla.
RICO, L. (1991). Educación Matemática y resolución de problemas. *Memorias del II CIBEM.* Sección de Enseñanza de las Ciencias y de la Tecnología. UNESCO. París.
RICO, L. (1994). Two-step addition problems with duplicated semantic structure. En *Proceedings of the XVIII Annual Conference of PME.* Lisbon. Portugal.
RICO, L.; FERNÁNDEZ, F.; GIL, F. CASTRO, E.; CASTRO, E.; OLMO, A.; MORENO, F. y SEGOVIA, I. (1995). *Conocimientos y creencias de los profesores de matemáticas sobre evaluación.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
RILEY, M.S., GREENO, J.G. y HELLER, J.I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. En H.P. Ginsburg (Ed): *The development of mathematical thinking*. Academic Press. New York.
ROBITAILLE, D. F. y GARDEN, R. A. (Eds) (1989). *The IEA Study of Mathematics II: Contexts and outcomes of school mathematics.* Oxford. Pergamon.
ROMBERG, T. (1991). Características Problemáticas del Currículo Escolar de Matemáticas. *Revista de Educación, nº 294,* pp. 323-406. Madrid.
ROMBERG, T. (1992). Perspectives on Scholarship and research methods. En Grows, D.A. (Ed): *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM-MacMillan Publishing Company. New York.
ROMBERG, T. y PRICE, G. (1983). Curriculum implementation and staff development as culture change. En Griffin, G. (Ed): *Staff Development: Eighty-Second Yearbook of the National Society for the Study of Education*. University of Chicago, pp. 154-184.
SÁNCHEZ, M. V. y LLINARES, S. (1990). El conocimiento acerca de las

matemáticas y las prácticas de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 8 (2), pp. 97-104.

SÁNCHEZ, V. (1994). Diferencias y aprendizaje de las Matemáticas. En V. García Hoz: *La enseñanza de las Matemáticas en la educación intermedia.* Edic. Rialp. Madrid.

SANZ, I. (1989). Comunicación, lenguaje y matemáticas. En Llinares, S. y Sánchez, M.V. (Eds). *Teoría y práctica en Educación matemática.* Alfar. Sevilla.

SCHIRO, M. (1978). *Curriculum for Better Schools*. Educational Technologies.

SCHOENFELD, A. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical problem solving. En R. Lesh y M. Landau (Eds): *Acquisition of mathematics concepts and processes.* New York. Academic Press.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving.* New York. Academic Press.

SCHOENFELD, A. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education.* LEA. Hillsdale. New Jersey.

SCHOENFELD, A. (1988). Problem solving in context(s). En R.I. Charles y E.A. Silver (Eds): *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.* Vol 3. LEA y NCTM.

SCHOENFELD, A. (1991). What's all the fuss about problem solving? *ZDM, 9 1/1,* pp. 4-8.

SCHOENFELD, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D.A. Grouws (Ed) *Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning.* A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company. New York.

SCHUFELT, G. y SMART, J. (1983). *The Agenda in action.* Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA. Virginia.

SCHWARTZ, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr1 (Eds): *Number concepts and operations in the middle grades.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

SHALLIN, V.L. y BEE, N.V. (1985). S*tructural differences between two step word problems.* Presentado en el Meeting de la American Educational Research Association.

SHAUGHNESSSY, J., HALADYNA, T. y SHAUGHNESSY, J.M. (1983). Relations of student, teacher, and learning environment variables to attitude toward Mathematics. *School Science and Mathematics.* Vol. 83 (1) pp. 21-36.

SHAVELSON, R. y STERN, P. (1981). Research on teachers pedagogical thoughts, judgements, decisions and behavior. *Review of Educational Research. v. 51, núm. 4*, pp. 455-498. Traducido al castellano, Investigación sobre el pensamiento pedagógico del profesor, sus juicios, decisiones y conducta. En Gimeno Sacristán y Pérez Gómez (1983): *La enseñanza: su teoría y su práctica.* Akal. Madrid. pp. 372-419.

SHULMAN, L.S. (1988). Disciplines of inquiry in education: An overview. En R. M. Jaeger (Ed). *Complementary methods for research in education*. Washington, D.C. American Educational Research Association.

SHULMAN, L.S. y ELSTEIN, A. S. (1975). Studies of Problem-solving judgement and decision-making: implications for educational research. En Kerlinger, F. N. (Ed.) *Review of Research in Education, 3,* Itasca, Illinois: Peacock.

SHUMWAY, R. (Ed) (1980). *Research in Mathematics Education.* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

SIEMON, D. (1987). Effective strategies for changing mathematics education. *Vinculum, 24 (4)*.

SILVER, E. (Ed.) (1985). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple research Perspectives.* LEA. Hillsdale. New Jersey.

SOCAS, M. M. (1985). Didáctica para la resolución de problemas de Matemáticas en los distintos Ciclos de la EGB. *Memoria final del Proyecto de investigación subvencionado por la Dirección General de Promoción Educativa y Renovación Pedagógica de la Consejería de Educación de Canarias*. La Laguna. Tenerife.

SOCAS, M., HERNÁNDEZ, J. (1991). Analogías y diferencias observadas entre buenos y malos resolutores de problemas matemáticos. *Actas V JAEM.* Castellón. (En prensa)

SOCAS, M. M. y HERNÁNDEZ, J. (1996). Sobre la resolución de problemas verbales aritméticos de estructuras aditivas y multiplicativas en la Educación Primaria. *25 años de Matemáticas en la Universidad de La Laguna.* Secretariado de Publicaciones de la Universidad de La Laguna, pp. 485-496.

SOCAS, M. M. y HERNÁNDEZ, J. (1997). The attitudes and preferences of children towards Mathematics. *XXI PME*. Finland. (Enviado).

SOCAS, M. M. Y HERNÁNDEZ, J. (1997). Las actitudes hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas de los niños de 8 a 11 años. *UNO*. Barcelona. (Enviado).

SOCAS, M. M., HERNÁNDEZ, J. y CAMACHO, M. (1996). Desarrollo curricular en Matemáticas y epistemología del profesor. *Revista de Educación.* Madrid. (Aceptado, pendiente de publicación).

SOCAS, M. M., HERNÁNDEZ, J. Y NODA, A, (1996). Modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas. *Enseñanza de las Ciencias.* Barcelona. (Enviado).

SOCAS, M. M., NODA, A. Y HERNÁNDEZ, J. (1996). La resolución de problemas mal definidos. (Enviado a *Educación Matemática).* México.

SOCAS, M. M., AFONSO, C.; HERNÁNDEZ, J. y PALAREA, M. (1994). Un modelo de investigación convergente en educación matemática desde una perspectiva curricular. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 21*. Zaragoza. pp. 45-58.

SOCAS, M., CAMACHO, M., PALAREA, M. y HERNÁNDEZ, J. (1989). *Iniciación al Álgebra.* Edit. Síntesis. Madrid.

SOCAS, M. M., HERNÁNDEZ, J., PALAREA, M. y AFONSO, C. (1986).

Propuesta didáctica sobre la resolución de problemas de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones en la EGB. *Números, 13.* Tenerife, pp 13-34.

SOWDER, L. (1988). Children's Solutions of Story Problems. *Journal of Mathematical Behavior.* Vol. 7, nº 3.

SUYDAM, M. (1987). Indications from research on problem solving. En F. Curcio (Ed): *Teaching and learning: A problem-solving Focus.* National Council of Teachers of Mathematics. Reston. Virginia.

STANIC, G.M.A. y KILPATRICK, J. (1988). Historical perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. En R.I. Charles y E.A. Silver (Eds) *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.* Vol 3. LEA y NCTM.

SWINSON, K. y SHIELD, M. (1994). Practise what you preach: influencing preservice teachers'beliefs about mathematics. En J. Ponte y J.F. Matos (Eds). *Proceedings of the Eighteenth International Conference PME.* Lisbon. Pp. 321-328.

THOMPSON, A. (1992). Teacher' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En Grouws, D. A. (Ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York. MacMillan Publishing Company, pp. 127-146.

TREFFERS, A. y GOFFREE, F. (1985). Rational Analysis of Realistic Mathematics Education. En Streefland, L. (Ed.) *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Utrecht.

THREADGILL-SOWDER, J., SOWDER, L. (1982). Draw versus verbal formats for mathematical story problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* pp. 324-331.

VELOO, P. K. y LÓPEZ-REAL, F. (1994). An Analysis of Diagrams used by Secondary School Pupils in Solving Mathematical Problems. En *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Lisbon.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T. Romberg (Eds): *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, N.J. Lawrence Erlbaum.

VERGNAUD, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds): *Acquisition of mathematical concepts and processes*. New York. Academic Press.

VERGNAUD, G. (1988). Multiplicative Structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

VERGNAUD, G. (1990). Epistemología y Psicología de la Educación Matemática. En Nesher, P. y Kilpatrick, J.: *Mathematics and Cognition: A research syntesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge University Press. Cambridge.

VERGNAUD, G. (1993): La teoría de los campos conceptuales. En Sánchez, E.; Zubieta, G. (Eds): *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas*. Escuela Francesa. Cinvestav-IPN. México. D.F., pp. 88-117.

VERGNAUD, G y DURAND, D. (1976). Structures additives et complexité psychogénetique. *Revue Française de Pedagogie*. Vol. 36 (Traducción al castellano: Estructura aditiva y complejidad psicogenética, en Coll, C.(1983) Psicología genética y aprendizajes escolares. Siglo XXI, pp. 105-128).

VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E. y VAN COILLIE, V. (1988). Specifying the multiplier effect on children's solutions of simple multiplication word problems. En *Proceedings of the XII International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Veszprem, Hungary.

WERTHEIMER, M. (1954). *Productive thinking.* Harper and Brothers Publishers, New York. (Traducido al castellano: (1991): *El pensamiento productivo*. Paidós. Barcelona).

WILCOX, S.; SCHRAM, P.; LAPPAN, G. y LANIER, P. (1991). The role of a learning community in changing preservice teacher's knowledge and beliefs about mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 11, 3*, pp 31-39.

WILLIS, G. y FUSON, K. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 80*, pp. 192-201.

WISKE, M.S. (1990). Teaching Geometry Through Guided Inquiry, Put I: A case of Changing in Mathematics Instruction with New Technologies. National Center for Research in Mathematics Science Education. Madison.

WITTROCK, M.C. (Ed.) (1986). The Handbook of Research on Teaching. New York. Macmillan. Traducido en parte al castellano. 1989. *La investigación de la enseñanza*, vols. 1, 2 y 3. Paidós y MEC. Barcelona.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

ANEXO DE LA TESIS DOCTORAL

SOBRE HABILIDADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES, MEDIANTE EL USO DE DOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN YUXTAPUESTOS

Josefa Hernández Domínguez

La Laguna, 1997

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

ANEXO DE LA TESIS DOCTORAL

SOBRE HABILIDADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES, MEDIANTE EL USO DE DOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN YUXTAPUESTOS

Memoria que presenta la Licenciada
Josefa Hernández Domínguez para optar
al grado de Doctora en Ciencias
Matemáticas, bajo la dirección de
Dr. D. Martín M. Socas Robayna y
Dr. D. Nácere Hayek Calil

La Laguna, 1997

Índice

1.1 DISEÑO DE INSTRUCCIÓN PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES: MATERIAL PARA EL PROFESOR

- Introducción

- Unidades de aprendizaje:

  - UA1: El sistema de numeración decimal.

  - UA2: Representación gráfica de un problema.

  - UA3: Problemas de sumar y restar.

  - UA4: Problemas de multiplicar y dividir.

  - UA5: Problemas de dos operaciones.

- Metodología.

- Temporalización.

Introducción:

El objetivo de este trabajo es presentar un diseño de instrucción para la resolución de problemas aritméticos verbales, basado en un modelo de competencias que usa dos sistemas de representación: un sistema de representación no verbal yuxtapuesto al sistema de representación aritmético, y que además tiene en cuenta las diferentes estructuras semánticas de los problemas aritméticos.

Este modelo posibilita el desarrollo de los procedimientos requeridos en la resolución de problemas según el D.C.B. de Matemáticas de Primaria y favorece en los alumnos el desarrollo de distintas habilidades.

"*La resolución de problemas dentro del currículo de Matemáticas es un contenido prioritario, porque es un modelo de aprendizaje y refuerzo de contenidos, da sentido aplicativo al área y permite la interrelación entre los distintos bloques y las restantes áreas" (D.C.B. 1989).*

Sin embargo, la resolución de problemas se ha mostrado siempre como uno de los aspectos de mayor dificultad para los alumnos. Esa dificultad tiene algo inherente a su propia complejidad, pero muchas veces ha sido el resultado de unos planteamientos metodológicos inadecuados, junto a una falta de motivación.

La resolución de problemas plantea dos tipos de dificultades: aquellas relacionadas con dificultades de comprensión del lenguaje escrito, que no tienen que ver con aspectos o conceptos matemáticos, y las relacionadas con la falta de dominio funcional de algunos contenidos de procedimientos, tales como el uso de diferentes lenguajes, destrezas básicas de cálculo mental, de conteo, algoritmos de cálculo,.., y el desarrollo de procedimientos o estrategias generales a las que con frecuencia, no se les presta la atención que merecen (D.C.B. de Canarias, 1991).

Intentamos dar una posible respuesta en la dirección que se solicita en el D.C.B. y que ayude a superar las dificultades detectadas en los alumnos. El modelo de competencias que presentamos está basado en el modelo de Polya (1957) y en el modelo de Goldin (1987) y consta de seis fases. En cuanto al sistema de representación no verbal fue diseñado de forma que su utilización no sea solamente como una ayuda visual, sino que permite hallar la solución de los problemas y establecer múltiples conexiones con el sistema aritmético.

UNIDAD DE APRENDIZAJE: *EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL*

SESIONES 1 Y 2

MATERIALES:

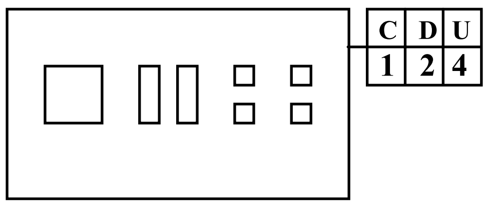
- ✓ Bloques aritméticos base 10.
- ✓ Fichas del alumno.

DURACIÓN APROXIMADA: 1 hora.

INTRODUCCIÓN:

El objetivo de esta unidad es que el alumno aprenda a "etiquetar" correctamente las colecciones de objetos, que usaremos cuando representemos gráficamente los problemas. Las cantidades de las colecciones las representaremos de forma gráfica y simbólica de la siguiente forma:

"Juan tenía 124 cromos"



Para lograr este objetivo, es necesario utilizar correctamente los conceptos de unidad, decena y centena, para lo cual dedicaremos las primeras actividades a ello. Puesto que el lenguaje gráfico está basado en dos materiales: bloques aritméticos y ábaco trabajaremos con ellos en todas las actividades.

CONTENIDOS CONCEPTUALES:

- Conceptos de unidad, decena centena.
- Representación gráfica de un número.
- Representación simbólica de un número.

CONTENIDOS PROCEDIMENTALES:

- Utilización del sistema de numeración decimal.
- Lectura y representación gráfica y simbólica de número

CONTENIDOS ACTITUDINALES:
- Curiosidad por indagar sobre el significado de los códigos numéricos.
- Rigor en la utilización de los símbolos numéricos y de las reglas de los sistemas de numeración.

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:
- Identificar las unidades, decenas y centenas.
- Realizar agrupamientos y desagrupamientos.
- Etiquetar correctamente las colecciones de forma gráfica y simbólica.

DESARROLLO DE LAS SESIONES:

Sesión 1:

Comenzaremos la sesión entregando a cada grupo de alumnos una bolsa de bloques aritméticos (base 10) y les dejaremos que jueguen libremente con el material para que se familiaricen con él, sobre todo aquellos alumnos que no lo han utilizado anteriormente.

A continuación les pediremos que realicen la actividad 1 de la ficha del alumno: dibujar cada una de las piezas.

Pasaremos a la actividad 2, que el Profesor irá leyendo en voz alta, haciéndola simultáneamente con los alumnos. Pretendemos con estas actividades la familiarización con el material y el aprendizaje de una forma esquemática de representación en el papel. La representación de las unidades se puede hacer mediante un cuadrado o un círculo. Esta última forma tiene la ventaja de que no se confunde con la placa si los alumnos no guardan una determinada escala.

Terminaremos esta sesión haciendo las actividades 3, 4 y 5: primero de forma manipulativa y, posteriormente, dibujándolo en el papel. En grupo harán la fase manipulativa, y luego cada alumno lo hará en su ficha. Estas actividades reforzarán los conceptos de unidad, decena y centena y sus equivalencias.

Acabaremos la sesión haciendo una síntesis de lo aprendido.

Sesión 2:

Comenzaremos esta sesión recordando lo hecho el día anterior y, para reforzarlo, los alumnos harán las actividades 6 y 7. (Siempre que lo necesiten pueden coger los bloques aritméticos y realizarlas de forma manipulativa)

A continuación se les enseñará qué es un ábaco, pudiéndoles mostrar uno de alambres, cómo hacer uno de papel y cómo funciona, analizando la similitud con los bloques.

Realizarán de forma individual las actividades 8 y 9. Nos encaminamos ya a descubrir una forma de representación gráfica de las cantidades que nos ayudará en la posterior comprensión de los problemas.

Terminaremos la sesión haciendo en grupo las actividades 10 y 11, que nos permitirá representar y etiquetar cantidades de colecciones contextualizadas.

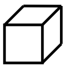
FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 1: APRENDEMOS A REPRESENTAR GRÁFICA Y SIMBÓLICAMENTE LAS CANTIDADES DE LAS COLECCIONES.

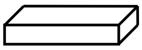
Actividad 1: El material que tienes en la mesa se llama bloques aritméticos y fueron creados por el Profesor Dienes.

Dibuja aquí cada una de las piezas

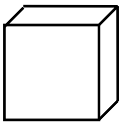
Actividad 2: Vamos ahora a mirar con detalle las distintas piezas :



La más pequeña es un cubo de 1 cm de arista. La llamaremos **unidad**.

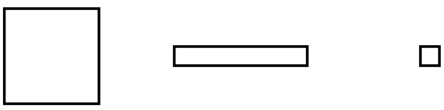


La que le sigue es la barra. La barra tiene ... unidades. Representa la **decena**.



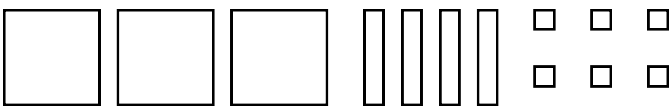
La tercera pieza es la placa. La placa equivale a ... barras o a ...unidades. Representa la **centena**.

En adelante las dibujaremos así:



PLACA **BARRA** **UNIDAD**

Para representar 346 lo hacemos así:



Las actividades que siguen deben hacerlas primero con el material y luego en esta ficha.

Actividad 3: Toma veintitrés unidades ¿puedes expresarlo cogiendo barras y unidades? Represéntalo gráficamente.

Actividad 4: Realiza la operación inversa: coge 1 barra y 7 unidades ¿Cuántas unidades tienes?

Actividad 5: Para tener ciento veinticinco unidades ¿cuántas placas, barras y unidades debes coger?

En tres placas, dos barras y cinco unidades ¿cuántas unidades hay en total?

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 2: APRENDEMOS A REPRESENTAR GRÁFICA Y SIMBÓLICAMENTE LAS CANTIDADES DE LAS COLECCIONES.

Actividad 6: Toma las piezas que te indicamos a continuación y exprésalo en barras y unidades.

a) diecinueve unidades

b) veintiséis unidades

Toma las piezas que te indicamos ¿Cuántas unidades representan?

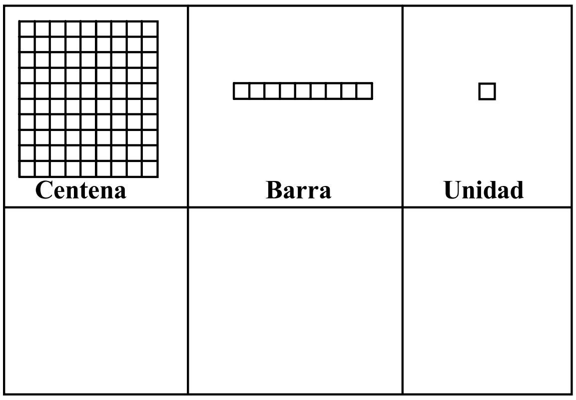
a) 2 barras y 7 unidades

b) 1 barra y 3 unidades

Actividad 7: Toma 27 barras ¿Cuántas placas y barras son?

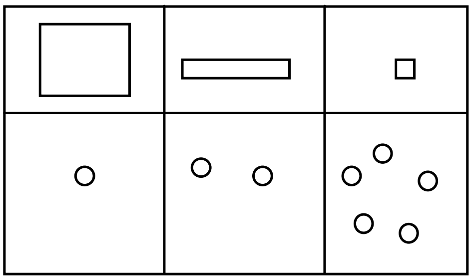
Y si tienes 3 placas y 5 barras ¿Cuántas barras son?

Actividad 8: El ábaco es una calculadora que se usa desde la más remota Antigüedad. Vas a trabajar con el ábaco plano que tienes dibujado:



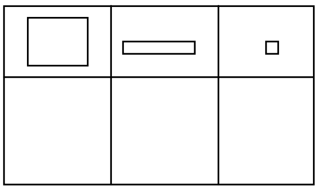
En adelante dibujaremos los bloques de forma simplificada.

Para representar gráficamente el número 125 lo haremos así:

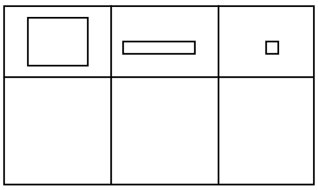


Representa gráficamente en los ábacos dibujados los siguientes números:

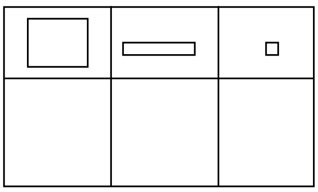
103:



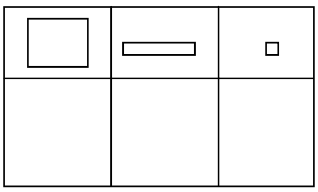
315:



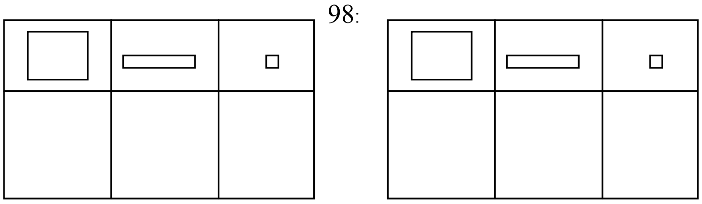
237:



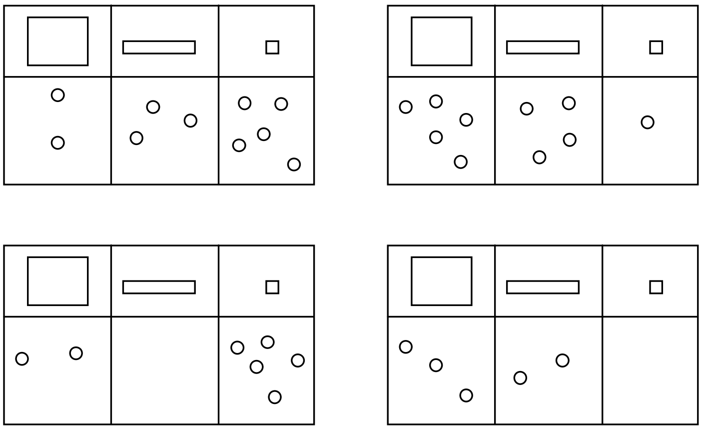
129:



427: 98:



Actividad 9: Escribe los números que están representados gráficamente en los siguientes ábacos:

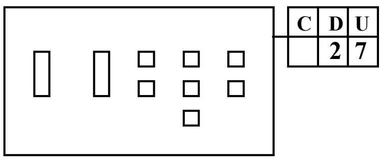


Como ya sabemos representar los números simbólicamente y de forma gráfica en el ábaco, vamos ahora a aprender a representar y etiquetar una colección de objetos.

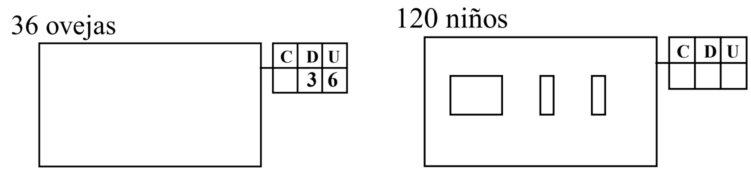
"Mi clase tiene 27 alumnos"

Podemos utilizar un rectángulo para representar el número total de alumnos y la etiqueta será un pequeño ábaco donde colocaremos las iniciales de centena, decena y unidad, y debajo el número que hay de cada uno de ellos.

La colección anterior la representaríamos y la etiquetaríamos así:



Actividad 10: Completa, representando o etiquetando las siguientes colecciones:



Actividad 11: Representa y etiqueta las siguientes colecciones:

1.-En un prado hay 26 ovejas.

2.-Mi amigo Luis tiene 247 pesetas.

3.-María reunió 105 boliches.

4.-En mi colegio hay 368 alumnos.

5.-En el avión caben 425 personas.

Inventa con tus compañeros colecciones de objetos y etiquétalas como hemos hecho anteriormente.

¡ASÍ SE REPRESENTAN Y ETIQUETAN LAS COLECCIONES!

UNIDAD DE APRENDIZAJE: *LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN PROBLEMA ARITMÉTICO VERBAL*

SESIONES 3, 4, 5, Y 6

MATERIALES:

- ✓ Fichas del alumno.

DURACIÓN APROXIMADA: 2 horas.

INTRODUCCIÓN:

La finalidad de esta unidad de aprendizaje es enseñar a los niños una forma sencilla de representar gráficamente los problemas.

Al realizar la representación gráfica conseguiremos varios objetivos: por una parte, será un apoyo visual imprescindible para algunos niños, mejorará la comprensión del enunciado y servirá como esquema de razonamiento sobre el que decidirán cual es la operación adecuada.

La tercera sesión de esta unidad la dedicaremos a la explicación de la ficha-modelo, que utilizarán los alumnos en las sesiones siguientes para resolver problemas.

CONTENIDOS CONCEPTUALES:

- Representaciones rectangulares.
- Diagramas de árbol.

CONTENIDOS PROCEDIMENTALES:

- Representación gráfica y etiquetado de las colecciones de un problema.

CONTENIDOS ACTITUDINALES:

- Interés por las representaciones gráficas.

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

- Representar gráficamente los distintos tipos de problemas
- Reconocer los distintos apartados de la ficha que utilizarán para resolver problemas.

DESARROLLO DE LAS SESIONES:

Sesión 3:

El profesor comenzará la sesión explicándoles lo que se pretende con esta unidad: hacer una representación gráfica de diversas situaciones.

A continuación harán los alumnos de forma individual las actividades 12 y 13, pues se pretende que cada uno intente reflejar cómo entiende la situación.

Una vez hechos los dibujos los mostrarán a sus compañeros y tratarán de decidir cuál de ellos representa mejor la situación problemática. El profesor deberá orientarles a elegir aquellos que sean más sencillos y esquemáticos. Luego, se mostrarán al resto de la clase comentando sus peculiaridades. Haremos lo mismo con las actividades 14 y 15.

Después de que hayamos comentado estas actividades pasaremos a explicarles los diagramas rectangulares. El Profesor hará el ejercicio conjuntamente con los alumnos, aclarando cuantas dudas vayan surgiendo.

A continuación los alumnos harán la actividad 16, que realizarán de forma analógica a la anterior. De nuevo el Profesor guiará la representación de una nueva situación y los alumnos harán la actividad 17 como refuerzo de la explicación.

Sesión 4:

En esta sesión realizarán en grupo la representación de siete problemas, que corresponden a las distintas operaciones. Es necesario que los alumnos adviertan que no siempre serán las partes del diagrama los datos conocidos, lo cual verán al realizar las actividades 22, 23 y 24.

A continuación podemos retomar las situaciones planteadas en el principio de la sesión anterior y convertirlas en problemas.

Terminará la sesión con la corrección de los problemas representados.

Sesión 5:

Esta sesión estará dedicada a la representación gráfica de dos tipos de problemas que difieren de los anteriores: los problemas de sumar y restar, que pertenecen al grupo de comparar e igualar y los problemas de multiplicar y dividir que encuadramos dentro del grupo llamado combinación o equivalentes al concepto de producto cartesiano.

Comenzaremos la sesión con un problema de restar-comparación que haremos conjuntamente con los alumnos. Se les explicará todos los aspectos de esta variante en la representación: en este caso se tratará de comparar dos colecciones. El rectángulo mayor representa la colección mayor y el interior la colección menor. El espacio entre ambas es la diferencia.

A continuación harán de forma individual las actividades 25 y 26, que son un problema de comparar-suma y un problema de igualar-resta, respectivamente.

Finalmente, abordaremos el tipo de problemas de multiplicar y dividir, que corresponden al concepto de producto cartesiano. Para estos problemas les enseñaremos a hacer diagramas de árbol, que les facilitará su posterior resolución.

Terminarán la sesión realizando la actividad 27, que es un problema del mismo tipo que el anterior.

Sesión 6:

Esta última sesión se dedicará a explicar y familiarizar al alumno con la ficha modelo, que en las unidades siguientes se utilizará para resolver problemas.

A partir de un problema de sumar-cambio se irá analizando y rellenando los distintos apartados; y aunque hasta ahora en ningún momento, hemos abordado la solución de un problema, lo haremos como ejemplo, entre otras cosas porque se trata de un problema muy sencillo.

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 3: REPRESENTAMOS SITUACIONES

Actividad 12: Haz un dibujo o un gráfico que represente la situación descrita en el problema:

" Una guagua llevaba 82 pasajeros. En una parada suben 19 pasajeros".

Actividad 13: Aquí tienes una nueva situación. Intenta hacer el dibujo de forma sencilla y esquemática.

"Un edificio tiene 9 pisos. En cada piso viven 10 personas"

Actividad 14: Representa gráficamente la siguiente situación:

"Durante la Cabalgata, los Reyes Magos repartieron a los niños 63 bolsas de caramelos"

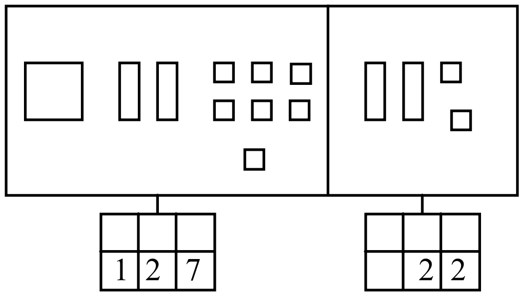
Actividad 15: Tienes aquí una nueva situación. Represéntala.

"Mi abuelo tiene 65 años y mi padre 37 años"

Ahora vamos a aprender a dibujar un tipo de diagramas: los diagramas rectangulares. Veamos un ejemplo:

"Tenía 127 cromos. Mi amigo Luis me regala 22 cromos"

En nuestra situación hay dos colecciones de cromos: Los que yo tenía (127) y los que Luis me regala (22). Podemos representarlo así:



En los rectángulos interiores representamos los datos, etiquetando correctamente las colecciones de forma gráfica y simbólica, tal como hemos hecho en las sesiones anteriores. El rectángulo total corresponde a la cantidad de cromos que tengo ahora.

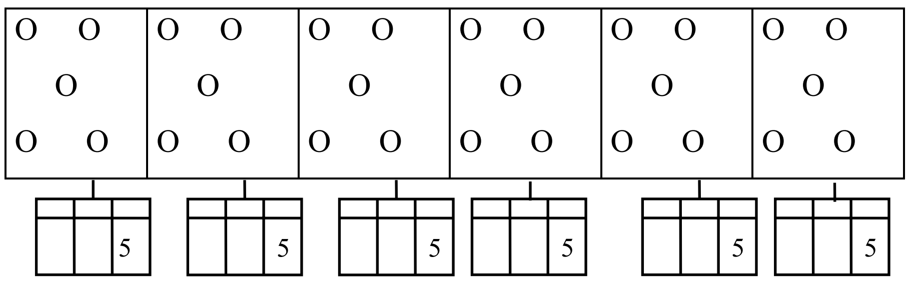
Actividad 16: Dibuja el diagrama rectangular que represente la siguiente situación:

"Una grúa de 48 metros de altura levanta su brazo de 23 metros"

Aquí tienes una nueva situación:

"En mi clase hay 6 mesas y en cada mesa se sientan 5 niños"

En este caso las colecciones son iguales: hay 6 mesas y en cada una de ellas los mismos niños. Lo representaríamos así:



Actividad 17: Representa gráficamente la siguiente situación:

" Una pieza de tela mide 45 metros. Tenemos 4 piezas"

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 4: APRENDEMOS A UTILIZAR DIAGRAMAS RECTANGULARES

Actividad 18: Representa gráficamente: "De una caja de bombones nos hemos comido 34 y todavía quedan 22. ¿Cuántos bombones había en la caja al principio?"

Actividad 19: Representa el siguiente problema: "Un ganadero tenía en el redil 93 corderos. Va a la feria y compra 49 ovejas. ¿De cuántos animales se compone ahora el rebaño?"

Actividad 20: Representa gráficamente el siguiente problema: "Un paquete de tizas trae 25 tizas. Un profesor compró 14 paquetes de tizas. ¿Cuántas tizas compró el profesor?"

Actividad 21: Representa gráficamente este problema: "Ramón ha levantado una pesa de 7 kilos y su primo Raúl ha levantado una que pesa tres veces más. ¿Cuántos kilos ha levantado Raúl?"

Actividad 22: "Un pescador pescó 74 sardinas. Si vendió 40 piezas ¿cuántas le quedaron sin vender?"

Actividad 23: "En una clase formada por 36 alumnos, hay 15 niños y el resto son niñas. ¿Cuántas niñas hay en la clase?"

Actividad 24: "En una clase hay 27 niños y queremos formar equipos de tres componentes. ¿Cuántos equipos se podrán formar?"

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 5: APRENDEMOS A REPRESENTAR GRÁFICAMENTE MAS PROBLEMAS

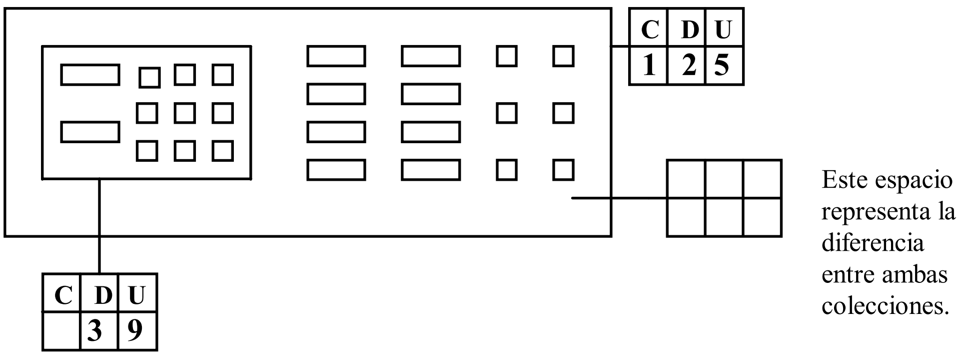
Algunos problemas no se pueden representar con los diagramas anteriores. Veremos hoy una modificación de los diagramas rectangulares.

Lee el siguiente problema:

"Inés tiene en el bolsillo 125 pesetas y en la mano tiene 39 pesetas. ¿Cuántas pesetas más tiene en el bolsillo que en la mano?"

Los datos de este problema corresponden a dos colecciones: lo que tiene en la mano (39) y lo que tiene en el bolsillo (125).Queremos comparar ambas colecciones para saber cuanto más hay en el bolsillo que en la mano.

Representamos la colección mayor en el rectángulo total y la menor en el pequeño:



Actividad 25:

"María Luisa tiene 12 años y su madre tiene 25 años más que ella. ¿Cuántos años tiene su madre?"

Actividad 26:

"Juan tiene en su hucha 235 pesetas. Su hermana tiene reunidas 397 pesetas. ¿Cuántas pesetas necesita Juan para tener igual que su hermana?"

Nos queda aún otras situaciones que no se pueden representar con los diagramas rectangulares.

Lee el siguiente problema:

"Si tenemos 2 bolígrafos y tres plumas, todos distintos entre si, ¿cuántos estuches diferentes podemos formar cogiendo un bolígrafo y una pluma?"

Podemos representar este problema de la siguiente manera:

	Pluma x........Estuche 1
Bolígrafo **a**	Pluma y........Estuche 2
	Pluma z........Estuche 3
	Pluma x........Estuche 4
Bolígrafo **b**	Pluma y........Estuche 5
	Pluma z........Estuche 6

Por tanto, se podrán hacer 6 estuches. Como ves, la operación que debemos usar en este caso es también la multiplicación.

Actividad 27:

"Tengo tres rosas y 4 claveles, todos de colores diferentes. Cogiendo una rosa y un clavel ¿cuántos ramos diferentes puedo hacer?"

Lee finalmente el siguiente problema:

"En el Colegio hay grupos de Tercero y 3 grupos de Cuarto de EGB. Queremos organizar una liga de baloncesto de forma que se enfrenten todas las clases de un Curso contra las del otro. Si se tienen que realizar 9 partidos, ¿cuántos grupos de Tercero hay?"

Esta nueva situación la podemos representar así:

Partido 1	4° A
Partido 2	4° B
Partido 3	4° C
Partido 4	4° A
Partido 5	4° B
Partido 6	4° C
Partido 7	4° A
Partido 8	4° B
Partido 9	4° C

Este es un problema inverso al anterior: conocemos el número de partidos y una de las colecciones y necesitamos encontrar la otra. Es un problema de dividir.

Actividad 28:

"Un restaurante ofrece 20 menús diferentes combinando un primer plato y un postre. Si hay 4 postres, ¿cuántos primeros platos hay?”

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 6: APRENDEMOS A USAR UNA FICHA PARA RESOLVER PROBLEMAS

De ahora en adelante cada vez que resuelvas un problema lo vas a hacer en la ficha que te presentamos:

En la sesión de hoy vas a estudiar los distintos apartados. Veamos cómo rellenarlos.

Lo haremos con un problema:
"A la salida de un colegio un camión vendió 37 latas de refrescos: 5 de Coca-Cola y el resto de 7-up. ¿Cuántas latas de 7-up vendió?”

En el primer apartado copiarás el texto del problema. Hazlo con cuidado, procurando entender lo que dice el problema:

ENUNCIADO-HISTORIA:

....
....
....
....

El siguiente apartado nos pide que hagamos un dibujo que represente el problema, tal como lo has hecho en ocasiones anteriores:

GRÁFICO-VIÑETA

Queremos saber si has entendido bien el problema, así que contesta a las siguientes preguntas:

¿QUÉ DATOS TE DAN?	¿QUÉ DATOS TE PIDEN?
....	....

El próximo apartado te va a resultar muy fácil, pues es lo que hemos hecho en las últimas sesiones: hacer la representación gráfica del problema, utilizando los diagramas rectangulares:

Ahora debes resolverlo. Basta sencillamente con contar sobre el diagrama y hallarás la solución del problema.

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES:

SOLUCIÓN:

....

¿Puedes encontrar una operación que te resuelva el problema?

OPERACIÓN:

SOLUCIÓN:

....

¿Coinciden ambas soluciones?

....

Para estar seguros de que la solución tiene sentido vamos a escribir el enunciado del problema incluyendo la solución

HISTORIA:

....
....

UNIDAD DE APRENDIZAJE: *PROBLEMAS DE SUMAR Y RESTAR*

SESIONES 7, 8, 9, 10, 11 Y 12

MATERIALES:

✓ Fichas del alumno.

DURACIÓN APROXIMADA: 3 horas.

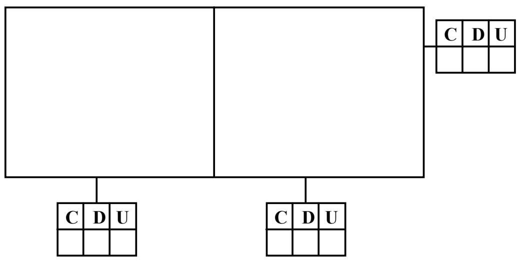
INTRODUCCIÓN:

En esta unidad nos dispondremos ya a resolver problemas aritméticos. Hasta ahora hemos preparado el camino para que el alumno sepa representar gráficamente la situación; sobre ella y con ayuda del razonamiento basado en la relación Partes-Todo decidiremos cual es la operación adecuada en cada caso. El apoyo visual es fundamental para algunos niños, aunque somos conscientes que para otros no es necesario.

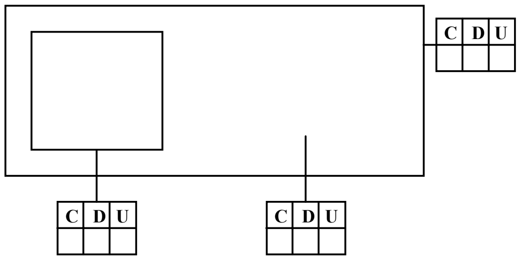
La ficha que trabajamos en la última sesión intenta crear un esquema mental, siguiendo las cuatro fases del modelo de resolución de problemas propuesto por G. Polya: comprender, planificar, ejecutar y revisar, que ayudará al niño en la resolución del problema.

Los problemas de esta unidad son resolubles con las operaciones: suma y resta. Dentro de estos, hemos propuesto de los diferentes tipos semánticos: cambio, combinación, comparación e igualación.

Los problemas de los dos primeros tipos corresponden al diagrama:



y los dos últimos los representaremos con el siguiente diagrama:



La etiqueta de la colección mayor corresponde al valor del todo y las etiquetas de las subcolecciones representan las cantidades de las partes.

Los problemas de sumar corresponden a aquellos en que son conocidas las partes y buscamos el total, mientras que en la resta conocemos el total y el valor de una parte y buscamos el valor de la otra parte.

CONTENIDOS CONCEPTUALES:

- Las operaciones: suma y resta. Situaciones en las que intervienen estas operaciones.
- La relación Partes-Todo.

CONTENIDOS PROCEDIMENTALES:

- Explicación oral del proceso seguido en la resolución de un problema.
- Representación matemática de un situación utilizando diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.
- Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen las operaciones de sumar y restar.

CONTENIDOS ACTITUDINALES:

- Perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.
- Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales.

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

- Distinguir los datos y la incógnita.
- Representar gráficamente la situación problemática.

• Elegir la operación adecuada.

DESARROLLO DE LAS SESIONES:

Sesión 7:

Empezamos la sesión con un problema del tipo cambio-suma que intentamos resolver. El profesor lo leerá, explicando detenidamente su significado, haciendo los alumnos el diagrama correspondiente; sobre él se buscará la solución y se preguntará a los alumnos cuál es la operación que lo resolvería.

El resto de la sesión la dedicaremos a hacer problemas sobre la ficha modelo. En principio propondremos dos para que se hagan despacio y analizando todos los apartados. Son dos problemas de sumar, uno del tipo cambio y otro de combinación, ambos con el mismo tipo de diagramas.

Terminaremos con una revisión y puesta en común de las dificultades encontradas.

Sesión 8:

El desarrollo de esta sesión es semejante a la anterior. Comenzará el profesor y los alumnos intentando resolver un problema del tipo cambio-resta. Después de leerlo y hacer el gráfico se intentará resolver sobre éste, eligiéndose posteriormente la operación adecuada, llegando así a reconocer la situación que corresponde a un problema de restar, apoyándose en el esquema partes-todo.

Posteriormente, se resolverán dos problemas en la ficha modelo. En este caso serán problemas del tipo cambio-resta y combinar-resta.

Terminaremos con una puesta en común y aclaración de dudas.

Sesión 9:

En este día pretendemos estudiar los problemas del tipo comparar-suma e igualar-suma.

Realizaremos conjuntamente el primer ejercicio, haciendo hincapié en que es una situación similar; salvo que aquí una colección la tomamos como el todo y las partes están formadas por la otra colección y la diferencia entre ambas.

A continuación resolverán dos problemas en la ficha modelo, uno del tipo comparar-suma y otro de igualar-suma.

Terminaremos la sesión con la puesta en común de la solución de ambos problemas, resaltando aquellas estrategias personales utilizadas por los alumnos.

Sesión 10:

Para terminar los problemas que se resuelven con a resta, estudiaremos hoy uno del tipo comparar-resta. Haremos el ejercicio de la ficha, aclarando cuantas dudas surjan.

Luego los alumnos resolverán las actividades 35 y 36, que corresponden a problemas de restar de los tipos de comparar e igualar.

Terminará la sesión con la puesta en común y la revisión de los problemas resueltos.

Sesiones 11 y 12:

Estas sesiones se dedicarán a resolver problemas de los diversos tipos de sumar y restar.

La dinámica será similar: resolverán en la ficha los 3 problemas. Luego, haremos una puesta en común, aclarando las dudas y aquellos aspectos en los que han encontrado mayor dificultad, valorando las estrategias personales de los alumnos.

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 7: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS

¿Cómo sabes si el problema siguiente se resuelve por una suma?:

"A un colegio de 292 niños han llegado 34 niños nuevos. ¿Cuántos niños tiene ahora el colegio?"

Haz el diagrama del problema:

Conocemos el valor de las dos colecciones y buscamos el valor de la colección total. Lo podemos resolver sobre el gráfico contando las cantidades de las dos colecciones.

La solución es:

....

¿Qué operación podemos utilizar?

....

Esto ocurre siempre en los problemas de sumar:

"CONOCEMOS EL VALOR DE LAS PARTES, REPRESENTADAS POR LAS ETIQUETAS DE LAS SUBCOLECCIONES, Y BUSCAMOS EL VALOR DEL TOTAL, REPRESENTADO POR LA ETIQUETA DEL RECTÁNGULO MAYOR".

PARTE + PARTE = TOTAL

Actividad 29: Resuelve el siguiente problema:

"Hace 23 años el padre de Joaquín tenía 28 años. ¿Cuántos tiene ahora?"

Actividad 30: Resuelve el siguiente problema:

"A un congreso de médicos han asistido 320 especialistas del corazón y 137 especialistas en huesos. ¿Cuántos médicos han asistido al congreso?”

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 8: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS

Lee despacio el siguiente problema:

"Un repartidor de leche tiene 90 botellas en un camión y reparte 60. ¿Cuántas le quedarán?"

Haz el diagrama que lo represente:

Resuelve el problema sobre el gráfico:

¿Cuál es la solución?

¿Qué operación usarías en este ejemplo?

Los problemas en que conocemos el valor de la colección total y el de una parte y buscamos el valor de la otra parte se resuelven con una resta.

ETIQUETA DE LA SUBCOLECCIÓN = ETIQUETA COLECCIÓN - ETIQUETA DE LA MAYOR OTRA COLECCIÓN

PARTE = TOTAL - PARTE

Actividad 31: Resuelve el siguiente problema:

"En una tienda habían 47 kg de naranjas y se han vendido 33 kg. ¿Cuántos kilos de naranjas quedan por vender?"

Actividad 32: Resuelve el siguiente problema:

"Tengo 116 cromos. 80 son de animales y el resto de plantas. ¿Cuántos cromos de plantas tengo?"

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 9: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS

Lee el siguiente problema:

"Un camionero recorre un día 79 km y el día siguiente 17 km más que el primer día. ¿Cuántos kilómetros hace el segundo día?"

Se trata de un problema en el que hay dos colecciones, una mayor que la otra, que se comparan.

Su diagrama es:

Escribe la solución, calculándola sobre el gráfico:

Solución:

....

¿Qué operación usarías en este caso?

En este problema se comparan dos colecciones: la mayor es el valor total y la otra es una de las partes, siendo la diferencia entre ambas el valor de la otra parte. Conocemos el valor de las partes y buscamos el valor del total: es un problema de sumar.

Actividad 33: Resuelve el siguiente problema:

"En una finca hay 120 caballos y 75 yeguas más que caballos. ¿Cuántos yeguas hay?"

Actividad 34: Resuelve este problema:

"Ana tiene 48 discos y se compra 23 más para tener tantos como Raquel. ¿Cuántos discos tiene Raquel?”

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 10: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS.

Lee el siguiente problema:
"Antonio tiene 38 años y su hermana 13 años. ¿Cuántos años más tiene Antonio que su hermana?"

Como ves, es un problema de los estudiamos en la última sesión: es un problema de comparar cantidades.

Haz el diagrama:

Busca ahora la solución en el gráfico:

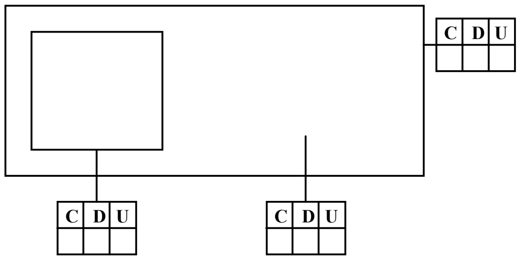
La solución es:

....

¿Qué operación podemos utilizar en este caso?

En este ejemplo, conocemos el valor de la colección mayor (el todo) y cuanto vale la diferencia entre ambas (una parte). Buscamos el valor de la otra colección (otra parte). Por tanto, es un problema de restar.

En otros casos, puede que conozcamos lo que valen ambas colecciones y lo que nos piden es la diferencia entre ambas, como puedes ver en el gráfico:



Actividad 35: Resuelve el siguiente problema:

"Juan tiene en su colección 91 sellos y Ángel tiene en la suya 27 sellos menos. ¿Cuántos sellos tiene Ángel?"

Actividad 36:

"María tiene 125 cromos y Juan tiene 39. ¿Cuántos cromos tiene que comprar Juan para tener tantos como María?"

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 11: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS

Actividad 37: Resuelve el siguiente problema:

"Paco tenía 68 pesetas y su padre le dio 75 pesetas más. ¿Cuántas pesetas tiene ahora?"

Actividad 38:

"Una revista vale 830 ptas. y una pelota 60 ptas. menos que la revista. ¿Cuánto vale la pelota?"

Actividad 39:

"Juan tiene 38 boliches y tiene 28 menos que su amigo Fernando. ¿Cuántos boliches tiene Fernando?”

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 12: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS

Actividad 40:

"De Cáceres a Madrid hay 299 km. A un coche que haya recorrido 178 km ¿cuántos km le faltan para llegar a Madrid?"

Actividad 41:

"Una guagua transporta por la mañana 56 pasajeros y por la tarde 17 pasajeros más. ¿cuántos pasajeros lleva por la tarde?”

Actividad 42:

"Se están llenando de agua dos piscinas vacías. Cuando en la primera habían entrado 98 litros y en la segunda 60 litros cortaron el agua. ¿Cuántos litros de agua tienen que entrar en la segunda para que ambas tengan la misma cantidad?"

UNIDAD DE APRENDIZAJE: *PROBLEMAS DE MULTIPLICAR Y DIVIDIR*

SESIONES: 13, 14, 15, 16, 17 Y 18

MATERIALES:

- ✓ Fichas del alumno.

DURACIÓN APROXIMADA: 3 horas.

INTRODUCCIÓN:

En esta unidad de aprendizaje abordaremos los problemas aritméticos que se resuelven con las operaciones de multiplicar y dividir.

Dentro de éstos, plantearemos de los tres tipos: razón, comparación y producto cartesiano. Los primeros serán representados con diagramas rectangulares y los del último tipo con diagramas de árbol.

Igual que en la unidad anterior, nos apoyaremos en la relación partes-todo como base del razonamiento para decidir si se trata de un problema resoluble con una multiplicación o con una división.

La multiplicación corresponde a aquellos problemas en los que se conoce el valor de una parte y el número de partes, pues aquí todas las partes tienen el mismo valor, y se busca el valor total. La división corresponde a aquellos problemas en que se conoce el total y el valor de una parte y se busca el número de ellas o se conoce el total y el número de partes y se busca el valor de una parte.

Los problemas que hemos llamado de producto cartesiano serán de multiplicación, si conocemos las colecciones que vamos a emparejar, y de división, si se conoce una de estas colecciones y la colección final de parejas y se busca el valor de la otra colección.

CONTENIDOS CONCEPTUALES:

- Las operaciones multiplicación y división. Situaciones en las que intervienen estas operaciones.

CONTENIDOS PROCEDIMENTALES:

- Explicación oral del proceso seguido en la resolución de un problema.
- Representación matemática de una situación utilizando diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.
- Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen las operaciones de multiplicar y dividir.
- Utilización correcta de los diagramas de árbol.

CONTENIDOS ACTITUDINALES:

- Perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.
- Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales.

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

- Distinguir los datos y la incógnita.
- Representar gráficamente la situación del problema.
- Elegir la operación adecuada.

DESARROLLO DE LAS SESIONES:

Sesión 13:

Empezaremos esta unidad de aprendizaje abordando los problemas de multiplicar del tipo razón. Su representación gráfica es un diagrama rectangular del mismo tipo que los de sumar-cambio. Iremos rellenando la ficha con los alumnos, explicándoles cómo este tipo de problemas de multiplicar coinciden con una suma de partes iguales, donde conocemos dichas partes así como el número de ellas y buscamos el valor de la colección total.

A continuación realizarán las actividades 43 y 44, que son dos problemas del mismo tipo, terminando la sesión con la corrección de los mismos.

Sesión 14:

Esta sesión la dedicaremos a trabajar problemas del tipo razón, resolubles por una división. Haremos el ejercicio propuesto, explicándoles como en este caso conocemos el valor total y el valor de una parte, y lo que tratamos de hallar es el número de partes, es un problema de división-partición y ellos resolverán la actividad 45. A continuación les explicaremos el otro tipo de problemas de división-reparto: cuando conocemos el valor total y el número de partes y queremos hallar cuánto vale cada parte, terminando con la actividad 46 que es del mismo tipo.

Terminaremos la sesión con la puesta en común de los problemas la aclaración de las dudas que hayan surgido.

Sesión 15:

Vamos a trabajar en este día los problemas de comparación, ya sean de multiplicar o de dividir. En este caso trabajaremos con dos colecciones, en las que la mayor contiene un número exacto de veces a la menor. Si nos dan la menor y el número de veces que está contenida, será un problema de multiplicar; por el contrario, cuando conozcamos la colección mayor y, o bien la menor o el número de veces que la contiene, será un problema de división. En este último caso podemos distinguir problemas de partición o de reparto.

En la primera parte de esta sesión los alumnos irán completando la ficha y aclarándose todas las dudas. A continuación harán las actividades 47 y 48, las cuales revisaremos finalmente.

Sesión 16:

Los problemas que abordaremos en esta sesión se referirán a los de producto cartesiano. Esta forma de concebir a multiplicación es mucho más difícil para los niños, a pesar de tratarse de problemas cotidianos.

Comenzaremos recordando el diagrama en árbol, como forma de representación gráfica de estos problemas y trabajaremos los dos ejercicios planteados: uno de multiplicación y otro de división.

A continuación realizarán las actividades 49 y 50 que son problemas del mismo tipo.

Sesiones 17 y 18:

Estas sesiones se dedicarán a resolver problemas de los diversos tipos de multiplicar y dividir.

La dinámica puede ser similar a las sesiones 11 y 12: resolverán en las fichas los tres problemas, haciendo luego una puesta en común, con la aclaración de todas las dudas, y la valoración de cuantas estrategias personales hayan utilizado.

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 13: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS

Tienes aquí un tipo nuevo de problemas:
"En una caja caben 32 chinchetas. Calcula las chinchetas que cabrán en 5 cajas".
Ya hemos visto cómo hacer el diagrama de este problema:

Este problema tiene 5 colecciones y cada una de ellas tiene 32 chinchetas. Buscamos el número total de chinchetas, esto es, el valor de la colección total.

Resuélvelo sin hacer operaciones:

Solución:

¿Sabes ya qué operación hay que utilizar?

Los problemas en que nos dan una colección de partes iguales y nos piden calcular el valor de la colección total, se resuelven mediante una multiplicación.

Actividad 43: Resuelve el siguiente problema:
"En una caja tenemos 18 botellas de agua. Cada botella contiene 2 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua hay en la caja?"

Actividad 44: Resuelve el siguiente problema:
"Queremos hacer 21 trajes para una murga. Para cada traje necesitamos 6 metros de tela. ¿Cuántos metros de tela necesitaremos en total?"

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 14: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS

Lee despacio el siguiente problema:
"En una pastelería se han envasado 96 bombones. Si meten 12 en cada bolsa. ¿Cuántas bolsas se necesitan?"

Haz el diagrama rectangular que represente esta situación:

¿Cuál es la solución?
....

¿Qué operación utilizarías para llegar a dicha solución?

En este problema nos daban el valor total de la colección y el valor de cada bolsa. Sabiendo que las bolsas eran todas iguales, queríamos saber cuántas necesitaban: es un problema de dividir.

Actividad 45:
"Tenemos un tonel con 85 litros de agua, ¿cuántas garrafas de 5 litros podemos llenar?"

Lee el siguiente problema:
"En un bosque hay 288 árboles plantados en 9 filas. ¿Cuántos árboles hay en cada fila?"

Haz el diagrama rectangular que representa esta situación:

¿Cuál es la solución?
....

¿Qué operación utilizarías para llegar a dicha solución?

En este problema conoces el valor total y el número de partes y lo que nos piden es hallar cuánto vale cada parte: también es un problema de dividir.

Actividad 46:
"En la biblioteca hay 45 libros repartidos en 9 estantes. ¿Cuántos libros hay en cada estante?"

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 15: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS

Hoy tenemos un nuevo problema:

"Juan tiene 40 cromos y Pedro tiene el triple. ¿Cuántos cromos tiene Pedro?"

Haz el diagrama correspondiente:

Resuelve el problema sin hacer operaciones:

Solución:

....

¿Qué operación tenías que haber utilizado?

En este problema conocemos una parte, y sabemos que la colección total (los cromos de Pedro) es tres veces el valor de una parte: es un problema de multiplicar.

Veamos ahora el siguiente problema:

"Tengo 28 galletas y mi hermano tiene la mitad que yo. ¿Cuántas galletas tiene mi hermano?"

Haz el diagrama y calcula la solución sin hacer operaciones:

Solución:

....

¿Qué operación harías en este caso?

En este problema lo que conocemos es la colección total y el número de veces que la colección menor es igual a la mayor, buscamos el valor de una parte (las galletas de mi hermano): es un problema de dividir.

Actividad 47:

"En un jardín hay 34 árboles y en un campo hay 8 veces más. ¿Cuántos árboles tiene el campo?"

Actividad 48:

"Miguel tiene 16 años y Juan 4 veces menos que Miguel. ¿Cuántos años tiene Juan?"

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 16: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS

En la sesión 5 aprendimos a representar problemas como el que sigue:
"Julia tiene 3 pantalones y dos blusas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede vestir?"
Representación gráfica:

¿Cuál es la solución del problema sin hacer operaciones?
Solución:
....

¿Qué operación debemos hacer para resolverlo?
....
..

En este problema lo que hacemos es combinar los elementos de dos colecciones y formamos una nueva colección con todas las parejas: es también un problema de multiplicar.

Para terminar haz el siguiente problema:
"Una fábrica de juguetes fabrica 20 modelos de coches diferentes según el color y la forma. Si los hace en 5 colores ¿cuántas formas distintas utiliza?”

Haz el diagrama y resuélvelo sin hacer operaciones:

Solución:

....

¿Qué operación debes utilizar?

En este ejemplo conocemos la colección formada por todas las combinaciones que hace la fábrica, sabemos que una colección está formada por 5 colores y buscamos el valor de la otra colección: es un problema de dividir.

Actividad 49:
" Con cartulinas de 5 colores ¿cuántas fichas puedes hacer dibujando un triángulo, un cuadrado y un círculo?”

Actividad 50:
"En tu clase has formado 20 parejas distintas de baile, cogiendo un niño y una niña. Si hay 4 niñas ¿cuántos niños hay en la clase?”

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 17: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS

Actividad 51:

"Para ir de La Laguna a Los Cristianos mi madre gasta 14 litros de gasolina. Si va 6 veces en el mes ¿cuántos litros de gasolina gasta?"

Actividad 52:

"Juan tiene 100 pesetas y su hermano pequeño tiene 5 veces menos que él. ¿Cuántas pesetas tiene su hermano?

Actividad 53:

"Si tienes 3 pantalones distintos de fútbol y 4 camisas también diferentes, ¿cuántos equipajes diferentes puedes formar?"

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 18: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS

Actividad 54:

"Mi hermana compró 3 kilos de naranjas y pagó por ellas 465 pesetas, ¿cuánto le costó el kilo de naranjas?"

Actividad 55:

"Luisa tiene 17 boliches y Marina tiene el triple. ¿Cuántos cromos tiene Marina?"

Actividad 56:

"Un señor ha vendido 20 paquetes de cuadernos. Si en cada paquete hay 30 cuadernos ¿cuántos cuadernos vendió?"

UNIDAD DE APRENDIZAJE: *PROBLEMAS DE DOS OPERACIONES*

SESIONES: 19 Y 20

MATERIALES:

- ✓ Ficha del alumno.

DURACIÓN APROXIMADA: 1 hora

INTRODUCCIÓN:

Es imprescindible abordar los problemas de dos operaciones, aunque sólo sea para indicar a los alumnos a generalizar el proceso que hemos realizado hasta ahora con problemas de una sola operación.

CONTENIDOS CONCEPTUALES:

- Las cuatro operaciones aritméticas. Situaciones en las que intervienen simultáneamente dos o más de estas operaciones.

CONTENIDOS PROCEDIMENTALES:

- Explicación oral del proceso seguido en la resolución de un problema.
- Representación matemática de una situación utilizando diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.
- Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen dos operaciones.

CONTENIDOS ACTITUDINALES:

- Perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.
- Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales.

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

- Distinguir los datos y la incógnita.
- Representar gráficamente las situaciones del problema.

• Elegir las operaciones adecuadas y en el orden correcto.

DESARROLLO DE LAS SESIONES:

Sesiones 19 y 20:

Terminamos el presente diseño introduciendo los problemas con dos operaciones. Es poco tiempo para lograr un aprendizaje óptimo de dichos problemas y solamente pretendemos ayudarles a generalizar la utilización de dos diagramas en vez de uno.

La primera sesión se puede hacer en gran grupo, descubriendo entre todos la forma de resolver dichos problemas y la última sesión se dedicará a un trabajo más personal, terminando con una revisión de las actividades realizadas.

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 19: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS

Hasta ahora todos los problemas se resolvían haciendo una sola operación. Tú habrás hecho muchas veces problemas donde tienes que hacer dos o más operaciones. Sobre éstos va a tratar la sesión de hoy.

"Tenía 95 pesetas. Compré una postal de 68 pesetas y 24 pesetas de caramelos. ¿Cuántas pesetas me sobraron?"

Lee despacio el problema cuantas veces necesites y vete resolviéndolo paso a paso haciendo los diagramas correspondientes:

¿Cuál es la solución?

....

¿Qué operaciones utilizaste? (Escríbelas por orden?)

....

Si te fijas bien un problema de dos operaciones lo puedes convertir en dos problemas de una operación, que ya sabes resolver.

Actividad 57:

"Juan compró 8 boliches a 18 pesetas cada uno y Ana compró 1 paquete de cromos de 25 pesetas, ¿cuánto dinero más gastó Juan que Ana?"

Actividad 58:

"Un agricultor lleva al mercado 5 sacos de papas. Cada saco pesa 15 kg. ¿Cuánto costarán las papas a 85 ptas. el kg?

FICHA DEL ALUMNO

SESIÓN 20: APRENDEMOS A RESOLVER PROBLEMAS

Actividad 59:

"En el cumpleaños de Julia hay 6 niños. Su padre pone en la mesa 62 pasteles. Si sobraron 26 pasteles ¿cuántos pasteles se comió cada niño?"

Actividad 60:

"Juan tiene 85 pesetas y se ha comprado una chocolatina que le costó 35 pesetas y unos caramelos que le costaron 25 pesetas. ¿Podrá comprarse un pito que le cuesta 20 pesetas?"

TEMPORALIZACIÓN:

SESIONES	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	PÁGINA ALUMNO	PÁGINA GUÍA
1 **2**	Sistema Numeración Decimal. Representar colecciones.	1, 2, 3, 4, 5 6, 7, 8, 9, 10, 11	1, 2 3, 4, 5, 6, 7	1
3 **4** **5**	Representar situaciones. Diagramas rectangulares. Representar problemas. Representar problemas. Diagramas de árbol.	12, 13, 14, 15 16,17 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 I5, 25, 26 I5, 27, 15, 28	8, 9 9, 10 11. 12 13 14, 15	10
6	Explicación de la ficha.	I6	16	19
7 **8** **9** **10** **11** **12**	Problemas de sumar. Problemas de restar. Problemas de sumar. Problemas de restar. Problemas de sumar y restar. Problemas de sumar y restar.	I7, 29, 30 I8, 31, 32 I9, 33, 34 I10, 35, 36 37, 38, 39 40, 41, 42	17, 18, 19 20, 21, 22 23, 24, 25 26, 27, 28 29, 30, 31 32, 33, 34	21
13 **14** **15** **16** **17** **18**	Problemas de multiplicar. Problemas de dividir. Problemas de multiplicar. Problemas de dividir. Problemas de multiplicar. Problemas de dividir Problemas de multiplicar- dividir Problemas de multiplicar y dividir	I3, 43, 44 I14, 45, 46 I15, 47 I15, 48 I16, 49 I16 50 51, 52, 53 54, 55, 56	35, 36, 37 38, 39, 40,41 42, 43 44, 45 46, 47 48, 49 50, 51, 52 53, 54, 55	32
19 **20**	Problemas de dos operaciones. Problemas de dos operaciones.	I19, 57 58, 59, 60	56, 57 58, 59, 60	45

1.2 DISEÑO INSTRUCCIONAL PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES: MATERIAL PARA EL ALUMNO.

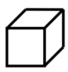
NOMBRE Y APELLIDOS:	**CURSO:**

APRENDEMOS A REPRESENTAR GRÁFICA Y SIMBÓLICAMENTE LAS CANTIDADES DE LAS COLECCIONES.

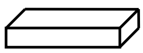
Actividad 1: El material que tienes en la mesa se llama bloques aritméticos y fueron creados por el Profesor Dienes.

Dibuja aquí cada una de las piezas

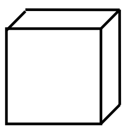
Actividad 2: Vamos ahora a mirar con detalle las distintas piezas :



La más pequeña es un cubo de 1 cm de arista. La llamaremos **unidad**.

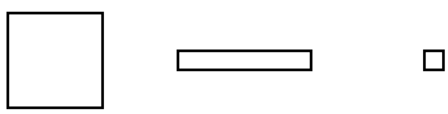


La que le sigue es la barra. La barra tiene ... unidades. Representa la **decena**.



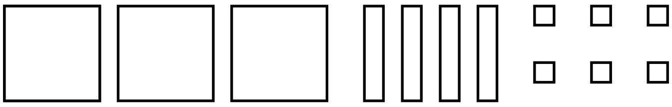
La tercera pieza es la placa. La placa equivale a ... barras o a ...unidades. Representa la **centena**.

En adelante las dibujaremos así:



PLACA **BARRA** **UNIDAD**

Para representar 346 lo hacemos así:



Actividad 3: Toma veintitrés unidades ¿puedes expresarlo cogiendo barras y unidades? Represéntalo gráficamente.

Actividad 4: Realiza la operación inversa: coge 1 barra y 7 unidades ¿Cuántas unidades tienes?

Actividad 5: Para tener ciento veinticinco unidades ¿cuántas placas, barras y unidades debes coger?

En tres placas, dos barras y cinco unidades ¿cuántas unidades hay en total?

NOMBRE Y APELLIDOS: **CURSO:**

APRENDEMOS A REPRESENTAR GRÁFICA Y SIMBÓLICAMENTE LAS CANTIDADES DE LAS COLECCIONES.

Actividad 6: Toma las piezas que te indicamos a continuación y exprésalo en barras y unidades.

a) diecinueve unidades

b) veintiséis unidades

Toma las piezas que te indicamos ¿Cuántas unidades representan?

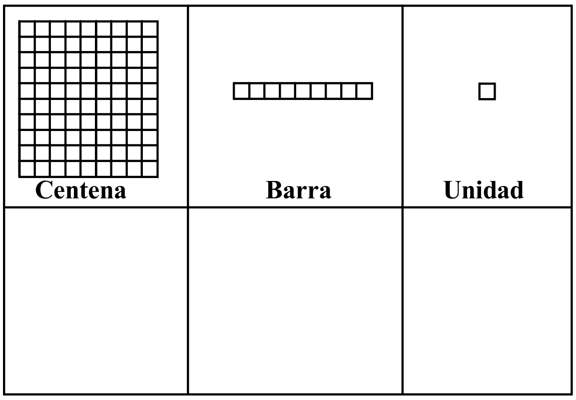
a) 2 barras y 7 unidades

b) 1 barra y 3 unidades

Actividad 7: Toma 14 barras ¿Cuántas placas y barras son?

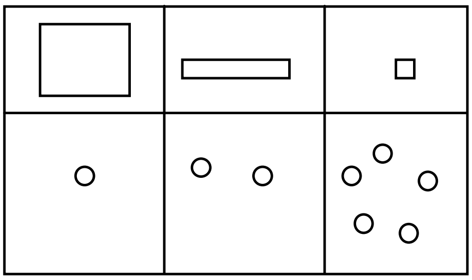
Y si tienes 3 placas y 5 barras ¿Cuántas barras son?

Actividad 8: El ábaco es una calculadora que se usa desde la más remota Antigüedad. Vas a trabajar con el ábaco plano que tienes dibujado:



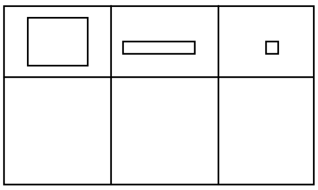
En adelante dibujaremos los bloques de forma simplificada.

Para representar gráficamente el número 125 lo haremos así:

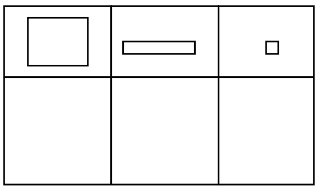


Representa gráficamente en los ábacos dibujados los siguientes números:

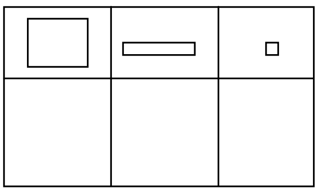
103:



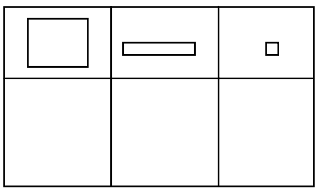
315:

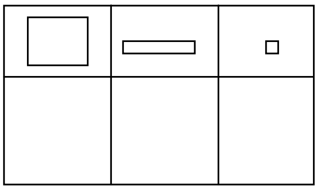


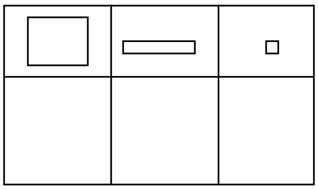
237:



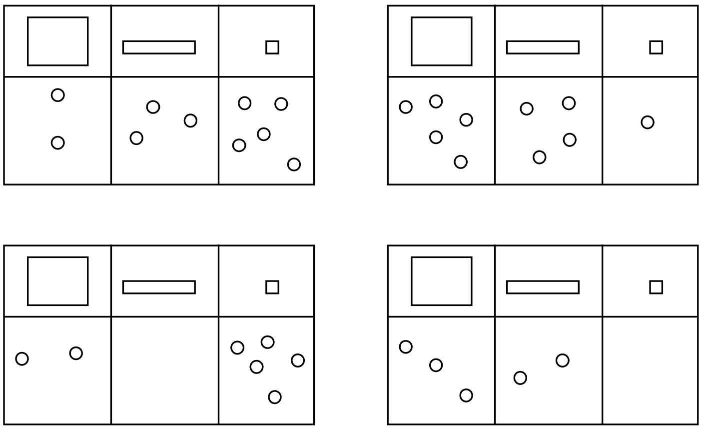
129:



427: 

98: 

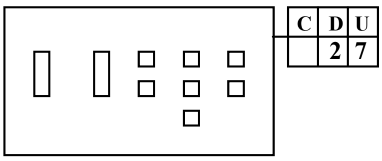
Actividad 9: Escribe los números que están representados gráficamente en los siguientes ábacos:



Como ya sabemos representar los números simbólicamente y de forma gráfica en el ábaco, vamos ahora a aprender a representar y etiquetar una colección de objetos.

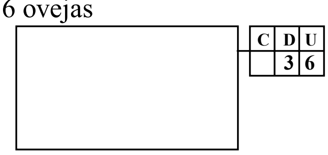
"Mi clase tiene 27 alumnos"

La colección anterior la representaríamos y la etiquetaríamos así:

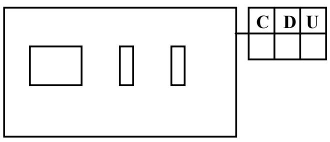


Actividad 10: Completa, representando o etiquetando las siguientes colecciones:

36 ovejas



120 niños



Actividad 11: Representa y etiqueta las siguientes colecciones:

1.-En un prado hay 26 ovejas.

2.-Mi amigo Luis tiene 247 pesetas.

3.-María reunió 105 boliches.

4.-En mi colegio hay 368 alumnos.

5.-En el avión caben 425 personas.

Inventa con tus compañeros colecciones de objetos y etiquétalas como hemos hecho anteriormente.

¡ASÍ SE REPRESENTAN Y ETIQUETAN LAS COLECCIONES!

NOMBRE Y APELLIDOS:	CURSO:

REPRESENTAMOS SITUACIONES

Actividad 12: Haz un dibujo o un gráfico que represente la situación descrita en el problema:

" Una guagua llevaba 82 pasajeros. En una parada suben 19 pasajeros".

Actividad 13: Aquí tienes una nueva situación. Intenta hacer el dibujo de forma sencilla y esquemática.

"Un edificio tiene 9 pisos. En cada piso viven 10 personas"

Actividad 14: Representa gráficamente la siguiente situación:

"Durante la Cabalgata los Reyes Magos repartieron a los niños 63 bolsas de caramelos"

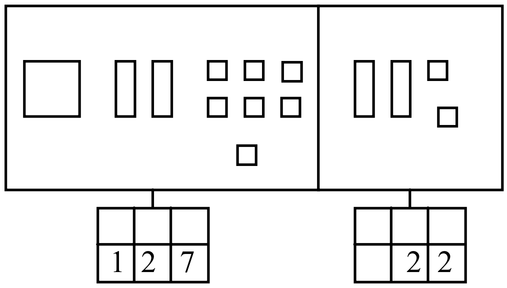
Actividad 15: Tienes aquí una nueva situación. Represéntala.

"Mi abuelo tiene 65 años y mi padre 37 años"

Ahora vamos a aprender a dibujar un tipo de diagramas: los diagramas rectangulares. Veamos un ejemplo:

"Tenía 127 cromos. Mi amigo Luis me regala 22 cromos"

En nuestra situación hay dos colecciones de cromos: Los que yo tenía (127) y los que Luis me regala (22). Podemos representarlo así:



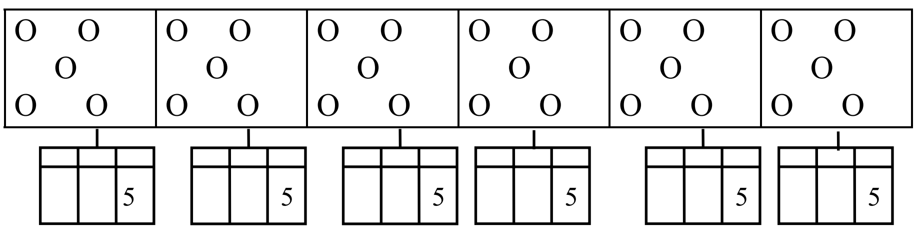
Actividad 16: Dibuja el diagrama rectangular que represente la siguiente situación:

"Una grúa de 48 metros de altura levanta su brazo de 23 metros"

Aquí tienes una nueva situación:

"En mi clase hay 6 mesas y en cada mesa se sientan 5 niños"

En este caso las colecciones son iguales: hay 6 mesas y en cada una de ellas los mismos niños. Lo representaríamos así:



Actividad 17: Representa gráficamente la siguiente situación:

" Una pieza de tela mide 45 metros. Tenemos 4 piezas"

NOMBRE Y APELLIDOS:	**CURSO:**

APRENDEMOS A UTILIZAR DIAGRAMAS RECTANGULARES

Representa gráficamente los siguientes problemas:

Actividad 18: "De una caja de bombones nos hemos comido 34 y todavía quedan 22. ¿Cuántos bombones había en la caja al principio?"

Actividad 19: "Un ganadero tenía en el redil 93 corderos. Va a la feria y compra 49 ovejas. ¿De cuántos animales se compone ahora el rebaño?"

Actividad 20: "Un paquete de tizas trae 25 tizas. Un profesor compró 14 paquetes de tizas. ¿Cuántas tizas compró el profesor?”

Actividad 21: "Ramón ha levantado una pesa de 7 kilos y su primo Raúl ha levantado una que pesa tres veces más. ¿Cuántos kilos ha levantado Raúl?”

Actividad 22: "Un pescador pescó 74 sardinas. Si vendió 40 piezas ¿cuántas le quedaron sin vender?”

Actividad 23: "En una clase formada por 36 alumnos, hay 15 niños y el resto son niñas. ¿Cuántas niñas hay en la clase?"

Actividad 24: "En una clase hay 33 niños y queremos formar equipos de 11 componentes. ¿Cuántos equipos se podrán formar?"

NOMBRE Y APELLIDOS: CURSO:

APRENDEMOS A REPRESENTAR GRÁFICAMENTE MAS PROBLEMAS

Lee el siguiente problema:

"Inés tiene en el bolsillo 125 pesetas y en la mano tiene 39 pesetas. ¿Cuántas pesetas más tiene en el bolsillo que en la mano?”

Actividad 25:

"María Luisa tiene 12 años y su madre tiene 25 años más que ella. ¿Cuántos años tiene su madre?”

Actividad 26:

"Juan tiene en su hucha 235 pesetas. Su hermana tiene reunidas 397 pesetas. ¿Cuántas pesetas necesita Juan para tener igual que su hermana?"

Lee el siguiente problema:

"Si tenemos 2 bolígrafos y tres plumas, todos distintos entre si, ¿cuántos estuches diferentes podemos formar cogiendo un bolígrafo y una pluma?"

Actividad 27:

"Tengo tres rosas y 4 claveles, todos de colores diferentes. Cogiendo una rosa y un clavel ¿cuántos ramos diferentes puedo hacer?"

Lee el siguiente problema:

"En el Colegio hay grupos de Tercero y 3 grupos de Cuarto de EGB. Queremos organizar una liga de baloncesto de forma que se enfrenten todas las clases de un Curso contra las del otro. Si se tienen que realizar 9 partidos, ¿cuántos grupos de Tercero hay?"

Actividad 28:

"Un restaurante ofrece 20 menús diferentes combinando un primer plato y un postre. Si hay 4 postres, ¿cuántos primeros platos hay?"

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA)

29

A un congreso de médicos han asistido 320 especialistas del corazón y 137 especialistas en huesos. ¿Cuántos médicos han asistido al congreso?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: CURSO:

ENUNCIADO (HISTORIA)

Hace 23 años el padre de Joaquín tenía 28 años. ¿Cuántos tiene ahora?

30

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? ---

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO ---------------------------------

----

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________________ CURSO: ____________

ENUNCIADO (HISTORIA)

31

En una tienda habían 47 kg de naranjas y se han vendido 33 kg. ¿Cuántos kilos de naranjas quedan por vender?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO ---

OPERACIONES

RESULTADO ---

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? ---

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO ----------------------------------

----

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: ________

ENUNCIADO (HISTORIA)

Tengo 116 cromos. 80 son de animales y el resto de plantas. ¿Cuántos cromos de plantas tengo?

32

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? --

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO -----------------------------------

----

NOMBRE Y APELLIDOS: CURSO:

ENUNCIADO (HISTORIA)

33

En una finca hay 120 caballos y 75 yeguas más que caballos. ¿Cuántas yeguas hay?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? ---

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO -----------------------------------

----

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: ________

ENUNCIADO (HISTORIA)

34

Ana tiene 48 discos y se compra 23 más para tener tantos como Raquel. ¿Cuántos discos tiene Raquel?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO -------------

OPERACIONES

RESULTADO -------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA)

Juan tiene en su colección 91 sellos y Ángel tiene en la suya 27 sellos menos. ¿Cuántos sellos tiene Ángel?

35

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: CURSO:

ENUNCIADO (HISTORIA)

María tiene 125 cromos y Juan tiene 39. ¿Cuántos cromos tiene que comprar Juan para tener tantos como María?

36

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? --

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO ------------------------------------

----

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA)

I 6

A la salida de un colegio un camión vendió 37 latas de refrescos: 15 de Coca-Cola y el resto de 7-up. ¿Cuántas latas de 7-up vendió?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: ________

ENUNCIADO (HISTORIA)

Paco tenía 68 pesetas y su padre le dio 75 pesetas más. ¿Cuántas pesetas tiene ahora?

37

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? ---

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO -----------------------------------

----

NOMBRE Y APELLIDOS: CURSO:

ENUNCIADO (HISTORIA)

38

Una revista vale 830 pesetas y una pelota 60 pesetas menos que la revista. ¿Cuánto vale la pelota?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? --

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO -----------------------------------

----

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: ________

ENUNCIADO (HISTORIA)

39

Juan tiene 38 boliches y tiene 38 menos que su amigo Fernando. ¿Cuántos boliches tiene Fernando?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA)

40

De Cáceres a Madrid hay 299 km. A un coche que haya recorrido 178 km ¿cuántos km le faltan para llegar a Madrid?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO

OPERACIONES

RESULTADO

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: CURSO:

ENUNCIADO (HISTORIA)

41

Una guagua transporta por la mañana 56 pasajeros y por la tarde lleva a 17 pasajeros más. ¿Cuántos pasajeros lleva por la tarde?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? --

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO -----------------------------------

----

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: ____________

ENUNCIADO (HISTORIA)

42

Se están llenando de agua 2 piscinas. Cuando en la primera habían entrado 98 litros y en la segunda 60 litros, cortaron el agua. ¿Cuántos litros de agua tienen que entrar en la segunda para que ambas tengan la misma cantidad?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA)

43

En una caja tenemos 9 garrafas de agua. Cada garrafa contiene 5 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua hay en la caja?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? ---

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO -----------------------------------

----

NOMBRE Y APELLIDOS: CURSO:

ENUNCIADO (HISTORIA)

44

Queremos hacer 14 disfraces de carnaval. Para cada traje necesitamos 3 metros de tela. ¿Cuántos metros de tela necesitaremos en total?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO -------------

OPERACIONES

RESULTADO -------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA)

45

Tenemos un tonel con 85 litros de agua. ¿Cuántas garrafas de 5 litros podemos llenar?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO -------------

OPERACIONES

RESULTADO -------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA)

46

En la biblioteca hay 45 libros repartidos en 9 estantes. ¿Cuántos libros hay en cada estante?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? ---

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO ----------------------------------

----

NOMBRE Y APELLIDOS:	CURSO:

ENUNCIADO (HISTORIA)

47

En un jardín hay 34 árboles y en un campo hay 8 veces más. ¿Cuántos árboles tiene el campo?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA)

Miguel tiene 16 años y Juan tiene un cuarto de los años de Miguel. ¿Cuántos años tiene Juan?

48

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: ____________________ CURSO: ________

ENUNCIADO (HISTORIA)

49

Con cartulinas de 5 colores ¿Cuántas fichas puedes hacer dibujando un triángulo, un cuadrado y un círculo de cada color?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO

OPERACIONES

RESULTADO

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: CURSO:

ENUNCIADO (HISTORIA)

50

En tu clase has formado 20 parejas distintas de baile, cogiendo un niño y una niña. Si hay 4 niñas, ¿cuántos niños hay en la clase?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO

OPERACIONES

RESULTADO

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________	CURSO: __________
ENUNCIADO (HISTORIA) 51	Para ir a Los Cristianos mi madre gasta 14 litros de gasolina. Si va 6 veces en el mes, ¿cuántos litros de gasolina gasta?
GRÁFICO (VIÑETA)	
¿QUÉ DATOS TE DAN? -- -- -- ---------	¿QUÉ DATO TE PIDEN? -- -- -- ---------
CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES	RESULTADO ------------- -------------------------------
OPERACIONES	RESULTADO ------------- -------------------------------
¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?	--
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO	-----------------------------------
-- --	

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA)

52

Juan tiene 100 pesetas y su hermano pequeño tiene un quinto de las pesetas de él. ¿Cuántas pesetas tiene su hermano?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? ---

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO ------------------------------------

----

NOMBRE Y APELLIDOS: CURSO:

ENUNCIADO (HISTORIA)

53

Si tienes 3 pantalones distintos de fútbol y 4 camisas también diferentes, ¿cuántos equipajes diferentes puedes formar?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO ---

OPERACIONES

RESULTADO ---

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? ---

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO ---

NOMBRE Y APELLIDOS: ________________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA)

54

Mi hermana compró 3 kilos de naranjas y pagó por ellas 465 pesetas. ¿Cuánto le costó el kilo de naranjas?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: ____________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA)

55

Luisa tiene 17 boliches y Marina tiene el triple. ¿Cuántos boliches tiene Marina?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS: CURSO:

ENUNCIADO (HISTORIA)

56

Un señor ha vendido 10 paquetes de cuadernos. Si en cada paquete hay 6 cuadernos, ¿cuántos cuadernos vendió?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? --

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO -----------------------------------

----

NOMBRE Y APELLIDOS: ________________	CURSO: ________
ENUNCIADO (HISTORIA) 57	Juan compró 6 boliches a 15 pesetas cada uno y Ana compró 1 paquete de cromos de 25 pesetas. ¿Cuánto dinero más gastó Juan que Ana?
GRÁFICO (VIÑETA)	
¿QUÉ DATOS TE DAN? --- --- --- ---------	¿QUÉ DATO TE PIDEN? --- --- --- ---------
CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES	RESULTADO --
OPERACIONES	RESULTADO --
¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?	---
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO --------------------------------- -- --	

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA)

58

Un agricultor recogió 122 kg de papas y vendió en el mercado 5 sacos de papas. Si cada saco pesó 15 kg, ¿cuántos kilogramos de papas le quedaron por vender?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

NOMBRE Y APELLIDOS:	CURSO:
ENUNCIADO (HISTORIA) 59	En el cumpleaños de Julia hay 6 niños. Su padre pone en la mesa 62 pasteles. Si sobraron 26 pasteles, ¿cuántos pasteles se comió cada niño?
GRÁFICO (VIÑETA)	
¿QUÉ DATOS TE DAN? -- -- -- ---------	¿QUÉ DATO TE PIDEN? -- -- -- ---------
CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES	RESULTADO ------------- -------------------------------------
OPERACIONES	RESULTADO ------------- -------------------------------------
¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?	--
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO	------------------------------------
--- --	

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA)

60

Juan tiene 85 pesetas y se ha comprado una chocolatina que le costó 35 pesetas y unos caramelos que le costaron 25 pesetas. ¿Podrá comprarse un pito que le cuesta 20 pesetas?

GRÁFICO (VIÑETA)

¿QUÉ DATOS TE DAN?

¿QUÉ DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO --------------

OPERACIONES

RESULTADO --------------

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

1.3 DISEÑO DE INSTRUCCIÓN PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES: FICHA DE EVALUACIÓN DE LOS PROBLEMAS.

Núm	Viñeta	Datos	Gráf icos	Oper	Hist.	Asp.	Gene rales	Código	Observac.

Código:
1. Expresa correctamente la información.
2. Escribe bien los datos.
3. Diagrama de representación.
4. Diagrama de resolución.
5. Utiliza correctamente las operaciones.
6. Situación con resultado.
7. Hace bien el problema: A) Gráfico-operaciones.
   B) Operaciones-gráfico.
8. Casi hace bien el problema: A) Resultado con gráfico.
   B) Resultado con operaciones.
9. No lo hace: A) Bien viñeta y datos.
   B) Uno de los dos bien o ninguno.

1.4 DISEÑO INSTRUCCIONAL PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES: BATERÍA DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES

PROBLEMAS RESOLUBLES POR LA SUMA

1.- Tenía 127 cromos. Mi amigo Luis me regaló 22 cromos. Otros 12 cromos me los dio mi hermano. Si ahora compro 100 cromos, ¿cuántos cromos voy a tener?

2.- Una guagua llevaba 82 pasajeros. En una parada suben 19 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros lleva la guagua?

3.- A una clase de 29 niños han llegado 4 niños nuevos. ¿Cuántos niños tiene ahora la clase?

4.- Un niño tiene 48 boliches en la maleta y 29 en el bolsillo de los pantalones. ¿Cuántos boliches tiene en total?

5.- En la orilla de un río hay 35 árboles. En la otra hay 32. ¿Cuántos árboles hay entre las dos orillas?

6.- Tenemos dos toneles de vino, uno con 45 litros y otro con 34 litros. ¿Cuántos litros tenemos?

7.- Hace 23 años el padre de Joaquín tenía 28 años. ¿Cuántos tiene ahora?

8.- Una grúa de 48 metros de altura levanta su brazo de 23 metros. ¿Qué altura alcanza?

9.- A Paco después de gastarse 68 pesetas aún le quedan 75 pesetas. ¿Cuánto dinero tenía?

10.- De una caja de bombones nos hemos comido 34 y todavía quedan 22. ¿Cuántos bombones había en la caja al principio?

11.- Laura compra dos libretas. Una vale 175 pesetas y otra 82 pesetas. Si le sobraron 38 pesetas, ¿cuánto dinero tenía Laura?

12.- En una carrera ciclista, 37 ciclistas llegaron a la meta y 18 ciclistas se retiraron por el camino. ¿Cuántos ciclistas empezaron la carrera?

13.- Ana recogió el sábado por la mañana 36 flores, y por la tarde, 28. El Domingo por la mañana recogió 28 flores, y por la tarde, 36. ¿Qué día recogió más flores? ¿Cuántas más?

14.- Un camionero recorre un día 79 km y al día siguiente 17 km más que el primer día. ¿Cuántos kilómetros hace el segundo día?

15.- María tiene 21 años y mi amiga Marta tiene 4 años más que ella. ¿Cuántos años tiene Marta?

16.- Una pieza de tela mide 90 cm, otra pieza mide 85 cm y otra 57 cm. ¿Cuántos metros hay en las tres piezas?

17.- Tengo una caja que vacía pesa tres kilos. También tengo 12 kilos de limones. ¿Cuántos kilos pesará la caja con los limones dentro?

18.- ¿Cuántos días hay en tres meses, si dos de ellos son de 30 días y el otro de 31?

19.- Una droguería recibe un pedido formado por 77 botes de 1 kilo de pintura blanca y 42 kg de pintura amarilla. ¿Cuántos kg de pintura ha recibido en total?

20.- En una ganadería de reses bravas hay 70 toros de lidia, 104 novillos y 97 vacas bravas. ¿Cuántas reses hay en la ganadería?

21.- María Luisa tiene 12 años y su madre tiene 25 años más que ella. ¿Cuántos años tiene su madre?

22.- En una excursión Ana hizo 19 fotos y Elena hizo 6 fotos más que Ana. ¿Cuántas fotos hizo Elena?

23.- Un ganadero tenía en el redil 93 corderos. Va a la feria y compra 49 ovejas. ¿De cuántos animales se compone ahora el rebaño?

24.- A la salida de un colegio un camión vendió 37 zumos, 15 Coca-Colas y 24 7-up. ¿Cuántas botellas vendió en total?

25.- A un congreso de médicos han asistido 320 especializados en el estudio del corazón y 137 especialistas en huesos. ¿Cuántos médicos han asistido al congreso?

26.- Mi hermana ha comprado una libreta por 145 pesetas. Quiere venderla y ganar 15 pesetas. ¿A qué precio tendrá que venderla?

27.- Un libro de cuentos tiene 215 páginas; uno de historia, 303 páginas; uno de poesía, tantos como los dos libros anteriores juntos. ¿Cuántas páginas tiene el libro de poesía?

28.- Una manilla de plátanos tiene 36 plátanos y otra tiene 43. ¿Cuántos plátanos hay en total?

29.- El equipo "A" de baloncesto marcó 30 puntos y el equipo "B" marcó 40 puntos. ¿Cuántas decenas de puntos marcaron los dos equipos juntos?

30.- La madre de Rosa ha recorrido con mi bicicleta 25 km más que los recorridos por Rosa con sus patines. Si Rosa ha hecho 24 km, ¿cuántos ha recorrido su madre?

31.- Una guagua transporta por la mañana 56 pasajeros y por la tarde 17 pasajeros más. ¿cuántos pasajeros lleva por la tarde?

32.- El sello más antiguo de mi colección tiene 35 años y el de Julio es 27 años más antiguo que el mío. ¿Cuántos años de antigüedad tiene el sello de Julio?

33.- Andrés contó en un desfile 232 soldados y Fernando contó 15 más que Andrés. ¿Cuántos contó Fernando?

34.- Un ciclista ha recorrido 98 km y otro ha recorrido 37 km más. ¿Cuántos km ha recorrido este último?

35.- Felipe tiene 68 boliches, Jorge tiene 35 y Ana tiene tantos como Felipe y Jorge juntos. ¿Cuántos boliches tiene Ana?

PROBLEMAS RESOLUBLES POR LA RESTA

1.- En una clase hay 32 niños. Si se enferman 15, ¿cuántos vendrán al colegio?

2.- Un pescador pescó 74 sardinas. Si vendió 40, ¿cuántas le quedaron sin vender?

3.- En un castaño habían 97 castañas. Con el viento, se cayeron algunas y quedaron en el castaño 62 castañas. ¿Cuántas castañas se cayeron?

4.- Para que me regalen una bicicleta, tengo que conseguir 58 cromos. Ya tengo 24 cromos. ¿Cuántos cromos tengo todavía que conseguir?

5.- Antonio tiene 95 litros de agua repartidos entre un bidón y un cubo. En el bidón tiene 65 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua tiene el cubo?

6.- Dos cuadernos y un lápiz valen 98 pesetas. Los cuadernos valen 46 pesetas. ¿Cuánto vale el lápiz?

7.- De un paquete de 75 hojas, hemos gastado 30. ¿Cuántas hojas quedan?

8.- En la hucha tengo 43 duros y quiero comprarme un libro que cuesta 98 duros. ¿Cuántos duros me faltan para comprarme el libro?

9.- Tengo 1 moneda de 50 pesetas para comprarme una chocolatina de 87 pesetas. ¿Cuánto me falta?

10.- Bruno ha utilizado el paraguas 8 días del mes de octubre. Si ese mes tiene 31 días, ¿cuántos días no lo ha utilizado?

11.- Tengo 116 cromos. 80 son de animales y el resto de plantas. ¿Cuántos cromos de plantas tengo?

12.- En una caja hay 30 lápices rojos y amarillos. Si 19 son rojos, ¿cuántos son amarillos?

13.- En una clase formada por 36 alumnos, hay 15 niños y el resto son niñas. ¿Cuántas niñas hay en dicha clase?

14.- Inés tiene en el bolsillo 125 pesetas y en la mano tiene 39 pesetas. ¿Cuántas pesetas más tiene en el bolsillo que en la mano?

15.- En una finca hay 120 caballos y 75 yeguas. ¿Cuántos caballos hay más que yeguas?

16.- Los hermanos María y Damián van al parque, pero no salen al mismo tiempo de su casa. Cuando Damián ha recorrido 35 m, María ha recorrido 24 m . Averigua cuántos metros lleva andados Damián más que María.

17.- Un enanito lleva 28 kilos de piedras en un carrito. Necesita llevar 40 kilos. ¿Cuántos le faltan?

18.- Un repartidor de leche tiene 90 botellas en un camión y reparte 60. ¿Cuántas le quedarán?

19.- Esther sacó un libro de 120 páginas de la biblioteca de la escuela. Durante la primera semana leyó 53 páginas. ¿Cuántas páginas tiene todavía que leer?

20.- Pedro quiere comprar un libro que le cuesta 260 ptas, pero solamente posee 125. ¿Cuánto dinero le falta?

21.- Un comerciante vende una camiseta por 975 ptas. Si a él le costó 540 ptas, ¿cuál es la ganancia de la venta efectuada?

22.- Juan tiene en su colección 91 sellos y Ángel tiene en la suya 27 sellos menos. ¿Cuántos sellos tiene Ángel?

23.- En el jardín de Débora hay 45 rosales, pero tiene 18 rosas más que el jardín de Maite. ¿Cuántos rosales tiene el jardín de Maite?

24.- Estoy leyendo un libro de 97 páginas, y he leído 23 páginas menos que de las que tiene. ¿Cuántas páginas he leído?

25.- De Cáceres a Madrid hay 299 km. A un coche que ha recorrido 178 km, ¿cuántos km le faltan para llegar a Madrid?

26.- El padre de Matilde tiene ahora 43 años. ¿Qué edad tenía hace 15 años?

27.- En una tienda habían 47 kg de naranjas y han vendido 33 kg. ¿Cuántos kg de naranjas quedan por vender?

28.- Un hombre tiene 35 años. ¿Cuántos le faltan para llegar a los 63 años?

29.- Me faltan 25 ptas. para reunir 75. ¿Cuánto dinero tengo?

30.- Se están llenando de agua dos piscinas . Cuando en la primera habían entrado 98 litros y en la segunda 60 litros cortaron el agua. ¿Cuántos litros de agua tienen que entrar en la segunda para que ambas tengan la misma cantidad de agua?

31.- Una niña debe a un amigo 98 ptas. Para saldar la deuda le da una moneda de 25 ptas. y 4 lápices de 5 ptas. cada uno. ¿Queda pagada la deuda? ¿Cuánto le debe aún?

32.- En una bolsa habían 16 monedas y saqué 4. ¿Cuántas monedas quedan en la bolsa?

33.- Enrique tuvo una avería en su moto a 38 km de la meta. El circuito era de 145 km. ¿Cuántos km recorrió?

34.- Las gallinas pusieron 47 huevos. Al recogerlos se rompieron 9. ¿Cuántos huevos quedaron enteros?

35.- Papá tiene 47 años. ¿Cuántos tenía hace 7 años?

36.- Rodrigo dibujó 85 peces. Salvador dibujó 37 peces menos. ¿Cuántos peces dibujó Salvador?

37.- Juan compró 8 boliches de 18 ptas. cada uno y Ana compró 4 paquetes de cromos a 25 ptas. cada uno. ¿Cuál de los dos gastó más dinero? ¿Cuánto más?

38.- Antonio va al cine. La entrada cuesta 350 ptas. y el paga con una moneda de 500 ptas. ¿Cuántas ptas. le devolvieron?

39.- Si tenía 100 huevos y he vendido 5 docenas, ¿cuántos huevos me quedan por vender?

40.- Una bicicleta con un niño subido en ella pesa 58 kilos. El niño pesa 37 kilos. ¿Cuántos kilos pesa la bicicleta?

41.- Una botella y un tapón valen 80 ptas. Si la botella vale 75 ptas., ¿cuánto vale el tapón?

42.- Para hacer disfraces Víctor y María compraron 18 metros de tela. Víctor compró 9 metros de tela. ¿Cuántos metros de tela compró María?

43.- En una ciudad han nacido en un día 93 niños y han muerto 67 personas. ¿En cuántos habitantes ha aumentado la población?

44.- En una fábrica trabajan 120 personas entre hombres y mujeres. Si 70 son hombres, ¿cuántas mujeres hay?

45.- La mamá pájaro necesita para hacer su nido 93 palitos. Si ya tiene 46, ¿cuántos palitos le faltan?

46.- Mi abuelo tiene 65 años, y mi padre 37 años. Calcula los años que tiene más mi abuelo que mi padre.

47.- Antonio tiene 38 años y su hermana 13 años. ¿Cuántos años más tiene Antonio que su hermana?

48.- En un concurso Pablo ha conseguido 97 puntos y su pareja, Antonia, ha logrado 19 puntos menos que Pablo. ¿Cuántos puntos ha conseguido Antonia?

49.- El padre de Francisco tiene 25 años más que él. Si el padre tiene 37 años, ¿cuál es la edad de Francisco?

50.- Ayer entraron en una tienda 87 compradores. Hoy han entrado 28 menos que ayer. ¿Cuántos compradores han entrado hoy en dicha tienda?

51.- Una revista vale 830 ptas. y una pelota 60 ptas. menos que la revista. ¿Cuánto vale la pelota?

52.- Julia caminó 87 pasos. Ana caminó 12 pasos menos que Julia. ¿Cuántos pasos caminó Ana?

53.- Mi abuela había guardado 120 ptas. ¿Cuánto le falta para tener 30 duros?

54.- Ana tiene 48 discos y Raquel tiene 57. ¿Cuántos discos se tiene que comprar Ana para tener la misma cantidad de discos que Raquel?

PROBLEMAS RESOLUBLES POR LA MULTIPLICACIÓN

1.- Un edificio tiene 9 pisos. En cada piso viven 10 personas. ¿Cuántas personas viven en el edificio?

2.- Un edificio tiene 4 plantas con dos viviendas en cada planta. Cada vivienda tiene 6 ventanas. ¿Cuántas ventanas hay en todo el edificio?

3.- En un paquete hay media docena de cajas de bombones. Si cada una de ellas vale 75 pesetas, ¿cuánto vale todo el paquete?

4.- Un paquete de tizas trae 25 tizas. Un profesor compró 14 paquetes de tizas. ¿Cuántas tizas compró el profesor?

5.- Una escuela ha comprado 97 paquetes de tiza. Si cada paquete vale 40 pesetas, ¿cuántas pesetas cuestan todos los paquetes de tiza?

6.- En mi clase hay 6 mesas, y en cada mesa se sientan 5 niños. ¿Cuántos niños hay en mi clase?

7.- Ana tiene 63 cromos, Manolo tiene el doble que Ana y David tiene el triple que Manolo. ¿Cuántos cromos tiene Manolo? ¿Y David?

8.- Ramón ha levantado una pesa de 7 kilos y su primo Raúl ha levantado una que pesa tres veces más. ¿Cuántos kilos ha levantado Raúl?

9.- Para hacer un control se entregaron 3 hojas de papel a cada uno de los 28 alumnos de una clase. ¿Cuántas hojas de papel se entregaron en total?

10.- En una caja tenemos 18 botellas de agua. Cada botella contiene 2 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua hay el la caja?

11.- Una pieza de tela mide 45 metros. Tenemos 4 piezas. ¿Cuántos metros de tela tenemos en total?

12.- Para ir de la Laguna a los Cristianos mi madre gasta 14 litros de gasolina. Cada semana va dos veces a los Cristianos. En tres semanas, ¿cuántos litros de gasolina habrá gastado?

13.- Un excursionista anduvo durante 25 días. Cada día recorrió 7 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros recorrió en total?

14.- Antonio ha gastado 83 ptas. y Carmen ha gastado el doble que él. ¿Cuánto ha gastado Carmen?

15.- En un jardín hay 34 árboles y en un campo hay 8 veces más. ¿Cuántos árboles tiene el campo?

16.- Queremos hacer 84 trajes para una murga. Para cada traje necesitamos 6 metros de tela. ¿Cuántos metros de tela necesitamos para hacer los trajes?

17.- Si una furgoneta recorre diariamente 85 kilómetros, ¿cuántos recorrerá en 30 días?

18.- Un señor ha vendido 20 paquetes de cuadernos. Si en cada paquete hay 30 cuadernos, ¿cuántos cuadernos vendió?

19.- En nuestra pandilla somos 9 amigos y cada uno tiene 5 boliches. ¿Cuántos boliches tenemos entre todos?

20.- En un corral hay 8 gallinas. ¿Cuántas gallinas habrá en 4 corrales iguales al anterior?

21.- Si un coche recorre 108 km en una hora, ¿a qué distancia se encontrará al cabo de 5 horas?

22.- Juan ha pescado 6 cabrillas de 500 gramos cada una. ¿Cuánto pesan todas?

23.- Julia tiene tres pantalones y dos blusas. ¿Cuántos días se puede vestir de diferente forma?

24.- Un litro de leche cuesta 105 ptas., y queremos comprar 6 litros. ¿Cuánto dinero necesitamos?

25.- ¿Cuántas naranjas hay en 21 cajas, sabiendo que cada una contiene 83 naranjas?

26.- Una pieza de tela mide 34 metros. ¿Cuántos metros habrá en 24 piezas de tela?

27.- Un colegio tiene 17 aulas y en cada aula hay 32 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en el colegio?

28.- Si en una garrafa caben 5 litros y un litro de vino cuesta 245 ptas., ¿cuánto costará la garrafa llena de vino?

29.- Mi papá me da los sábados 30 ptas. Los domingos me da el triple. ¿Cuántas ptas. me da los domingos?

30.- En una estantería caben 34 botes de tomate. ¿Cuántos botes de tomate cabrán en 2 estanterías?

31.- Un billete de guagua cuesta 75 ptas. Si la guagua lleva tres pasajeros, ¿cuánto se ha cobrado?

32.- ¿Cuántas patas tienen 23 conejos?

33.- En el comedor de la escuela hay 26 mesas. En cada mesa comen 4 niños y cada uno ensucia 3 platos. ¿Cuántos platos se ensuciarán en 5 días?

34.- Hay 6 chicas y 7 chicos en una fiesta. ¿Cuántas parejas de baile se pueden formar?

35.- En una caja caben 75 chinchetas. Calcula las chinchetas que cabrán en 10 cajas. ¿Cuántas cabrán en 90 cajas?

36.- Un ovillo contiene 50 m de hilo. ¿Cuántos metros de hilo habrá en una caja que contenga una docena y media de ovillos? ¿Y en 6 cajas?

37.- Juan tiene 140 cromos y Pedro tiene el doble. ¿Cuántos cromos tiene Pedro?

38.- Pedro tiene 70 ptas y su abuelo tiene 7 veces más. ¿Cuánto dinero tiene el abuelo de Pedro?

39.- Para medir una cierta distancia he empleado 17 veces una regla que medía 32 cm. ¿Cuánto mide esa distancia?

40.- Enrique gastó el domingo 150 ptas; Eduardo gastó el doble. ¿Cuánto gastó Eduardo?

41.- Luisa tiene 17 boliches y Marina tiene el triple. ¿Cuántos cromos tiene Marina?

PROBLEMAS RESOLUBLES POR LA DIVISIÓN

1.- Durante la cabalgata, los Reyes Magos reparten a los niños 63 bolsas de caramelos. ¿Cuántas bolsas deberá llevar cada Rey?

2.- En un concurso de murgas infantiles participaron 80 niños. Las murgas que concursaron fueron 5. ¿Cuántos niños había en cada murga?

3.- En una calle de un pueblo viven 92 personas. En cada casa de esa calle viven 6 personas. ¿Cuántas casas hay en esa calle?

4.- Entre 3 amigos compran una pelota que les costó 126 pesetas. ¿Cuánto dinero tiene que poner cada uno?

5.- En una pastelería se han envasado 132 bombones. Meten 12 en cada bolsa. Calcula cuántas bolsas se necesitan.

6.- En una biblioteca hay 80 libros. La mitad se colocan en 4 estanterías de un armario. El resto, en 5 estanterías de otro armario. Calcula los libros que habrá en cada estantería del primer y segundo armario.

7.- En una clase hay 27 niños, y queremos formar equipos de tres componentes. ¿Cuántos equipos se podrán formar?

8.- En 20 duros, ¿cuántas monedas de 5 duros hay?

9.- Lucía tiene 48 fotos nuevas y pega 4 en cada página de un álbum. ¿Cuántas páginas del álbum llenará si las pega todas?

10.- Si media docena de pañuelos cuesta 48 pesetas, ¿cuánto cuesta un pañuelo?

11.- Miguel tiene 16 años y Juan 4 veces menos que Miguel. ¿Cuántos años tiene Juan?

12.- De un tonel de 85 litros de agua, ¿cuántas garrafas de 6 litros podemos llenar? ¿Cuántos litros sobran?

13.- Mercedes tiene 120 centímetros de cinta y tiene que hacer 8 trozos iguales. ¿Cuánto medirá cada trozo?

14.- Sesenta y nueve niños hicieron una excursión al Teide en guagua. En cada guagua fueron 23 niños. ¿En cuántas guaguas fueron de excursión?

15.- Una pista circular tiene 96 metros de largo. Queremos colocar una bandera cada 16 metros. ¿Cuántas banderas necesitamos?

16.- En la revisión médica del colegio el doctor recibe a tres alumnos por ahora. ¿Cuántas horas necesitará para revisar a 15 alumnos?

17.- Marta tiene el mismo número de hojas blancas que de rojas. ¿Cuántas hojas tiene de cada color si en total tiene 18?

18.- En una tienda hay 234 guantes. ¿Cuántos pares de guantes hay?

19.- Tengo 8 galletas y mi hermano tiene la mitad que yo. ¿Cuántas galletas tiene mi hermano?

20.- Los 30 alumnos de una clase tienen que hacer un trabajo en equipo. Si cada equipo tiene que estar formado por 5 alumnos, ¿cuántos equipos se pueden formar?

21.- Mi hermana compró 3 kg de naranjas y pagó por ellas 465 ptas. ¿Cuánto le costó el kilo de naranjas?

22.- ¿Cuántas pulseras de 12 perlas cada una me puedo hacer con 480 perlas?

23.- Entre los 7 ficheros de la biblioteca hay 560 fichas. ¿Cuántas fichas tiene cada fichero, por término medio?

24.- Mi tío Rafa me regaló un libro de cuentos que tiene 128 páginas. Si cada día leo 8 páginas, ¿cuántos días emplearé en leerlo?

25.- Un albañil construye 7 metros de valla en un día. ¿Cuántos días tardará en construir una valla de 161 metros de larga?

26.- Tres panes valen lo mismo que un kg de azúcar. El kg de azúcar vale 66 ptas. ¿Cuánto vale un pan?

27.- Con 472 ptas, ¿cuántos sellos de correo de 8 ptas. podemos comprar?

28.- En un bosque hay 288 árboles plantados en 9 filas. ¿Cuántos árboles hay en cada fila?

29.- Un grifo da 8 litros de agua por minuto. ¿Cuántos minutos tardará en llenar un depósito de 984 litros?

30.- Samuel tiene 67 boliches. Para jugar los reparte entre 3 amigos. ¿Le sobra alguno? ¿Cuántos?

31.- Irene lleva, el día de su cumpleaños, a su clase 117 caramelos y los reparte en partes iguales entre sus 25 compañeros, quedándose ella con los que sobran. ¿Con cuántos caramelos se quedó Irene?

32.- Ana quiere comprar caramelos. Si cada caramelo cuesta 5 pesetas y ella tiene 118 pesetas, ¿cuántos caramelos podrá comprar?

33.- Con 36 huevos ¿cuántas docenas podemos formar? ¿Y decenas?

1.5 DISEÑO INSTRUCCIONAL PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES: ENCUESTA-VALORACIÓN SOBRE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y EL DISEÑO.

1. ¿Te gusta el lenguaje de los diagramas?

----

2. ¿Entendiste los diagramas?

----

3. ¿Crees que si los trabajases más te servirían para comprender mejor los problemas?

----

4. Rodea con un círculo el grupo con el que te identificas:

1. Me gusta resolver los problemas sólo con las operaciones aritméticas.

2. Puedo resolver el problema con la misma facilidad haciendo el diagrama o con las operaciones.

3. Me gusta resolver los problemas sólo con los diagramas.

5. ¿Cuáles son tus críticas a la experiencia que hemos realizado?

1.6 DISEÑO INSTRUCCIONAL PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES: CURSO-GUÍA DE ADIESTRAMIENTO DE PROFESORES.

Título del curso: Un diseño instruccional para la resolución de problemas aritméticos verbales.

Dirigido a: Profesores del Ciclo Medio de la EGB.

Fases del Curso:

I. Fase presencial: 15 horas..18 al 22 de Enero 1993.

II. Fase de desarrollo de la experiencia: 20 horas.................Marzo- Abril 1993.

III. Fase presencial: 5 horas...Mayo 1993.

Lugar: Aula-Laboratorio de Matemáticas de la Escuela de Formación del Profesorado de EGB de La Laguna.

Desarrollo de cada fase:

Fase I: En esta fase se desarrolló un diseño de instrucción para la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante una técnica de inmersión. Se darán a conocer y se discutirán los elementos de diseño, sus objetivos, sus fundamentos, sus fases, su metodología y temporalización.

Recibirán todo el material del alumno fotocopiado y la guía del profesor.

Fase II: En esta fase se llevará al aula el diseño y realizarán el control de los alumnos.

Fase III: Es una fase presencial en la que se evaluará la experiencia.

Los profesores participantes recibirán un certificado del mismo.

Desarrollo del curso:

1ª Sesión:
* Introducción * Aspectos teóricos: Modelo general de Polya, la representación gráfica. Distintos diagramas, nuestro modelo de competencias para la resolución de problemas aritméticos. * Sesiones 1 a 6 del DIRPA. Se hizo una introducción sobre los problemas aritméticos, analizando las distintas variables. Se explicó nuestro modelo de competencia, la sintaxis y semántica de nuestro sistema de representación visual-geométrica y la importancia del esquema partes-todo.
2ª Sesión:
* Aspectos teóricos: Análisis de los conocimientos que se necesitan en la resolución de un problema, estructura semántica de los problemas aditivos. * Sesiones 7 a 12: resolución de problema aditivos. Se pasó a exponer los conocimientos que afectan en la resolución de problemas aditivos, haciendo hincapié en la estructura semántica de estos problemas. Las categorías semánticas siguen siendo aspectos desconocidos por el profesorado.
3ª Sesión:
* Aspectos teóricos: Estructura semántica de los problemas de estructura multiplicativa. * Sesiones 13 a 18: Resolución de problemas de multiplicar y dividir. Siguiendo el mismo formato del día anterior se abordó el estudio de los problemas de multiplicar y dividir
4ª Sesión:
* Aspectos teóricos: Problemas de dos operaciones aritméticas. * Sesiones 19 y 20: Resolución de problemas de dos operaciones Se les indicó como realizar la generalización del SRVG a los problemas de dos operaciones.
Sesión 5ª:
Se hizo una revisión sobre el diseño, aportando sus críticas y reflexiones.

INSTRUMENTOS DE SEGUIMIENTO DE LA EXPERIENCIA:

1. Diario de clase.
2. Ficha- evaluación de los problemas.

Diario de clase: Tendrá, al menos, dos partes: una dedicada a cuestiones generales y otra a incidencias.

Cuestiones generales: Tiempo dedicado a cada sesión, situaciones tratadas, etc.

Incidencias: Tomando como referencia el modelo de competencias para la resolución de problemas, se podría redactar de la siguiente forma:

Registro de acontecimientos	Valoración

Se debe recoger todo tipo de datos que ocurran en el aula (palabras claves que utilizan, frases significativas, procesos que siguen los alumnos, dificultades planteadas, etc), así como el interés por el estilo de resolución de problemas, razonamientos hechos, los procedimientos usados y la habilidad para aplicarlos.

La primera parte relativa a la manipulación de los materiales se recogerían únicamente en el diario y no se evaluarían con la ficha.

2.1 INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS: PRETEST-POSTEST

PRETEST DE PROBLEMAS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS (I)

Nombre y apellidos:________________________________Edad:___________

Curso:_______________________Colegio:_____________________________

1. En una carrera ciclista, 117 ciclistas llegaron a la meta y 48 ciclistas se retiraron por el camino ¿Cuántos ciclistas empezaron la carrera?

Dibuja o explica como lo haces.

2. Compré un libro por 350 pesetas, un cuaderno por 120 pesetas y una carpeta cuyo precio no recuerdo. Las tres cosas me costaron 597 pesetas. ¿Cuánto me costó la carpeta?

Dibuja o explica como lo haces.

3. Andrés contó en un desfile 232 soldados y Fernando contó 15 más que Andrés. ¿Cuántos soldados contó Fernando?

Dibuja o explica como lo haces.

4. Pedro tiene 70 pesetas y su abuelo 7 veces más. ¿Cuánto dinero tiene el abuelo de Pedro?

Dibuja o explica como lo haces.

5.- Antonio ha gastado 183 pesetas y Carmen ha gastado el doble que él. ¿Cuánto han gastado Carmen y Antonio juntos?

Dibuja o explica como lo haces.

6. Para que me regalen una bicicleta necesito 158 puntos. Ya tengo 129 puntos. ¿Cuántos puntos me faltan?

Dibuja o explica como lo haces.

7. Las gallinas de una granja pusieron 408 huevos en una semana. Si cada gallina puso 6 huevos. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Dibuja o explica como lo haces.

8. Tengo 120 cromos y mi hermano la tercera parte que yo. Cuántos cromos tiene mi hermano?

Dibuja o explica como lo haces.

9. Beatriz tiene 5 pantalones diferentes y varias blusas. Si se ha vestido de 20 formas

diferentes. ¿Cuántas blusas tiene Beatriz?

Dibuja o explica como lo haces.

10. Mi abuela había guardado 382 pesetas. ¿Cuánto le falta para tener 125 duros?

Dibuja o explica como lo haces.

Haz ahora las siguientes operaciones:

117 + 48 = Dibuja o escribe una historia para esta operación.

158 - 129 = Dibuja o escribe una historia para esta operación.

408 : 6 = Dibuja o escribe una historia para esta operación.

PRETEST DE PROBLEMAS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS (II)

Nombre y apellidos:_________________________________Edad:___________

Curso:________________________Colegio:______________________________

11. Compré una barrica de 327 litros de vino. También compré otra barrica de 285 litros de vino. ¿Cuántos litros de vino compré?

Dibuja o explica como lo haces.

12. Un niño compra un paquete de caramelos que cuesta 305 pesetas. Como el ventero era amigo suyo, se lo dejó 36 pesetas más barato ¿cuánto le costó el paquete de caramelos?

Dibuja o explica como lo haces.

13. En un colegio hay 9 clases. En cada clase hay 35 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en el colegio?

Dibuja o explica como lo haces.

14. Hay 6 chicos y 7 chicas en una fiesta. ¿Cuántas parejas de baile diferente se pueden formar?

Dibuja o explica como lo haces.

15. Para hacer carteles compramos 5 juegos de rotuladores. Cada juego de rotuladores cuesta 72 pesetas. Si los gastos los pagamos entre 6 personas. ¿Cuánto le toca pagar a cada persona?

Dibuja o explica como lo haces.

16. Se está llenando de agua dos piscinas. Cuando en la primera había entrado 98 litros y en la segunda 60 litros cortaron el agua. ¿Cuántos litros de agua tienen que entrar en la segunda para que ambas tengan la misma cantidad de agua?

Dibuja o explica como lo haces.

17. Una revista vale 835 pesetas y una pelota 162 pesetas menos que la revista. ¿Cuánto vale la pelota?

Dibuja o explica como lo haces.

18. Para hacer cometas compramos 6 rollos de hilo. Cada rollo costó 63 pesetas. También compramos papel que costó 309 pesetas. ¿Cuánto costó la compra?

Dibuja o explica como lo haces.

19. Un camionero recorre un día 132 kilómetros y al día siguiente 36 kilómetros más que

el primer día. Si el camionero hace una parada cada 8 kilómetros. ¿Cuántas paradas hizo el segundo día?

Dibuja o explica como lo haces.

20. Un libro de cuentos tiene 215 páginas; uno de historia, 303 páginas; uno de poesía, tanto como los dos libros anteriores juntos. ¿Cuántas páginas tiene el libro de poesía?

Dibuja o explica como lo haces.

Haz ahora las siguientes operaciones:

327 + 285 = Dibuja o escribe una historia para esta operación.

305 - 36 = Dibuja o escribe una historia para esta operación.

35 x 9 = Dibuja o escribe una historia para esta operación.

POSTEST DE PROBLEMAS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS (I)

Nombre y apellidos:________________________________Edad:___________

Curso:_______________________Colegio:_____________________________

1. De una caja de bombones nos hemos comido 134 y todavía quedan 90. ¿Cuántos bombones había en la caja al principio?

Dibuja o explica como lo haces.

2. Tres albañiles colocaron 725 baldosas. El primero colocó 325 y el segundo 146. ¿Cuántas baldosas colocó el tercero?

Dibuja o explica como lo haces.

3. María tiene 325 pesetas y mi amiga Marta tiene 37 ptas más que ella. ¿Cuántas pesetas tiene Marta?

Dibuja o explica como lo haces.

4. Ramón ha levantado una pesa de 7 kilos y su primo Raúl ha levantado una que pesa tres veces más. ¿Cuántos kilos ha levantado Raúl?

Dibuja o explica como lo haces.

6. En un Colegio hay 236 alumnos. Si se van de excursión 85 ¿cuántos irán al Colegio?

Dibuja o explica como lo haces.

7. En una calle de un pueblo viven 228 personas. En cada casa viven 6 personas ¿cuántas casas hay en la calle?

Dibuja o explica como lo haces.

8. Tengo 98 cromos y mi hermano la mitad que yo. ¿Cuántos cromos tiene mi hermano?

Dibuja o explica como lo haces.

9. Mi padre tiene 5 camisas diferentes y varias corbatas. Si las ha combinado de 15 formas diferentes. ¿Cuántas corbatas tiene mi padre?

Dibuja o explica como lo haces.

10. El supermercado hizo un pedido de 475 huevos. ¿Cuántos huevos le faltan para tener 42 docenas?

Dibuja o explica como lo haces.

Haz ahora las siguientes operaciones:

134 + 90 = Dibuja o escribe una historia para esta operación.

236 - 85 = Dibuja o escribe una historia para esta operación.

228 : 6 = Dibuja o escribe una historia para esta operación.

POSTEST DE PROBLEMAS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS (II)

Nombre y apellidos:________________________________Edad:___________

Curso:_______________________Colegio:_____________________________

11. Una droguería recibe un pedido de 287 kilos de pintura blanca y 134 kilos de pintura amarilla. ¿Cuántos kilos de pintura ha recibido en total?

Dibuja o explica como lo haces.

12. De un paquete de 175 hojas hemos gastado 83. ¿Cuántas hojas quedan?

Dibuja o explica como lo haces.

13. Para hacer un control se entregaron 7 hojas de papel a cada uno de los 34 alumnos de una clase. ¿Cuántas hojas de papel se entregaron en total?

Dibuja o explica como lo haces.

14. Un videojuego tiene 5 juegos diferentes con 3 niveles de dificultad cada uno. ¿De cuántas maneras distintas se puede jugar?

Dibuja o explica como lo haces.

15. En el comedor de la escuela almuerzan 208 niños. Cada uno ensucia 3 platos. Si los platos los lavan entre 6 personas ¿cuántos platos lava cada persona?

Dibuja o explica como lo haces.

16. Los hermanos María y Juan van al parque. Juan recorrió 87 metros y María le faltaron 34 metros para caminar lo mismo que su hermano. ¿Cuántos metros recorrió María?

Dibuja o explica como lo haces.

17. Estoy leyendo un libro de 215 páginas y he leído 132 páginas menos que las que tiene. ¿Cuántas páginas he leído?

Dibuja o explica como lo haces.

18. Juan compró 6 cuadernos. Cada cuaderno le costó 75 pesetas. También compró una caja de rotuladores de 516 pesetas. ¿Cuánto le salió la compra?

Dibuja o explica como lo haces.

19. Una pieza de tela mide 125 metros, otra pieza mide 85 metros más, si queremos vender

la segunda en trozos de 5 metros ¿cuántos trozos obtendremos?

Dibuja o explica como lo haces.

20. Felipe tiene 123 boliches, Jorge tiene 215 y Ana tiene tantos como Felipe y Jorge juntos. ¿Cuántos boliches tiene Ana?

Dibuja o explica como lo haces.

Haz ahora las siguientes operaciones:

287 + 134 = Dibuja o escribe una historia para esta operación.

175 - 83 = Dibuja o escribe una historia para esta operación.

34 x 7 = Dibuja o escribe una historia para esta operación.

2.2 INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS: ESCALA DE ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS

Núm. alumno.. Curso.............................

Colegio.. Fecha de nacimiento........

Núm. de hermanos sin contarte tú................

Pon una cruz según los estudios de tus padres:

Padre: Sin estudios ☐	Primarios ☐	Bachillerato ☐	Universitarios ☐
Madre: Sin estudios ☐	Primarios ☐	Bachillerato ☐	Universitarios ☐

¿Has necesitado ayuda especial para las Matemáticas?

Sí, frecuentemente ☐ Alguna vez ☐ No, nunca o casi nunca ☐

Pon una cruz según la respuesta elegida:	sí	no sé	no
1. Me siento poco seguro cuando hago matemáticas.	☐	☐	☐
2. En clase de matemáticas me iría.	☐	☐	☐
3. La matemática es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos.	☐	☐	☐
4. Cuando hago matemáticas me olvido de ir a jugar.	☐	☐	☐
5. Las Matemáticas son más difíciles para mí que para mis demás compañeros.	☐	☐	☐
6. Amo de verdad las matemáticas.	☐	☐	☐
7. Me divierten las clases de matemáticas.	☐	☐	☐
8. Las clases de matemáticas duran mucho tiempo.	☐	☐	☐
9. Daría dinero a un amigo para que me hiciera los trabajos de matemáticas	☐	☐	☐
10. No me interesan las Matemáticas.	☐	☐	☐
11. Me alegro cuando no hay clases de matemáticas.	☐	☐	☐
12. El conocimiento de las matemáticas no es necesario para la mayoría de los trabajos.	☐	☐	☐

13. Estoy dispuesto a hacer muchos trabajos de matemáticas.	☐	☐	☐
14. Si pudiera quitar alguna clase sería la de matemáticas.	☐	☐	☐
15. Me siento mal cuando pienso en matemáticas	☐	☐	☐
16. El estudio de las matemáticas es muy importante para mi vida.	☐	☐	☐
17. Sé muy poco sobre matemáticas.	☐	☐	☐
18. Todos los días pienso mucho en saber más matemáticas.	☐	☐	☐
19. Me gusta hacer trabajos y problemas de matemáticas.	☐	☐	☐
20. Los colegios no deben trabajar las matemáticas.	☐	☐	☐
21. Tengo que dedicar mucho tiempo para estudiar matemáticas.	☐	☐	☐
22. Las matemáticas no sirven para nada.	☐	☐	☐
23. Mis padres quieren que sepa matemáticas.	☐	☐	☐
24. La mayoría de las personas usan matemáticas en su vida diaria.	☐	☐	☐

2.3 INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS: ESCALA DE ACTITUD HACIA LA RESOLUCIÓNDE PROBLEMAS

Núm. alumno... Curso.............................

Colegio... Fecha de nacimiento........

Núm. de hermanos sin contarte tú................

Pon una cruz según los estudios de tus padres:

Padre: Sin estudios ☐ Primarios ☐ Bachillerato ☐ Universitarios ☐

Madre: Sin estudios ☐ Primarios ☐ Bachillerato ☐ Universitarios ☐

¿Has necesitado ayuda especial para las Matemáticas?

Sí, frecuentemente ☐ Alguna vez ☐ No, nunca o casi nunca ☐

Pon una cruz según la respuesta elegida:	sí	no sé	no
1. Me siento poco seguro cuando resuelvo problemas	☐	☐	☐
2. Me marcharía de las clases de problemas	☐	☐	☐
3. Resolver problemas es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos.	☐	☐	☐
4. Cuando resuelvo problemas me olvido de ir a jugar.	☐	☐	☐
5. Resolver un problema es más difícil para mí que para mis demás compañeros.	☐	☐	☐
6. Me gusta de verdad resolver un problema de matemáticas.	☐	☐	☐
7. Me divierten las clases de problemas.	☐	☐	☐
8. Las clases de problemas duran mucho tiempo.	☐	☐	☐
9 Daría dinero a un amigo para que me hiciera los problemas.	☐	☐	☐
10. Resolver problemas de Matemáticas no me interesa.	☐	☐	☐
11. Me alegro cuando no hacemos problemas en las clases de Matemáticas.	☐	☐	☐

12. El saber resolver problemas no es necesario para la mayoría de los trabajos.	☐	☐	☐
13. Estoy dispuesto a resolver muchos problemas de Matemáticas.	☐	☐	☐
14. Si pudiera quitar alguna parte de las matemáticas sería la resolución de problemas.	☐	☐	☐
15. Me pongo nervioso con sólo pensar en tener que resolver problemas de matemáticas.	☐	☐	☐
16. La resolución de problemas de matemáticas es muy importante para mi vida.	☐	☐	☐
17. Sé resolver muy pocos problemas.	☐	☐	☐
18. Todos los días pienso mucho en saber resolver problemas.	☐	☐	☐
19. Me gusta hacer problemas de matemáticas.	☐	☐	☐
20. Los colegios no deben trabajar los problemas de matemáticas.	☐	☐	☐
21. Tengo que dedicar mucho tiempo para aprender a resolver problemas.	☐	☐	☐
22. Resolver problemas de matemáticas no sirve para nada.	☐	☐	☐
23. Mis padres quieren que sepa resolver problemas.	☐	☐	☐
24. La mayoría de las personas usan los métodos de la resolución de problemas en la vida diaria.	☐	☐	☐

2.4 INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS: PROTOCOLOS ENTREVISTAS PILOTO A LOS ALUMNOS

PRIMERA SESIÓN

1) Luis tiene 321 ptas. y María 119 ptas. ¿Cuántas pesetas tiene Luis más que María?

2) Un vendedor de periódicos tenía en su kiosco 500 periódicos. Si a lo largo de la semana ha vendido 245 ¿cuántos le quedan?

0) Inventa un enunciado para los diagramas siguientes:

(ver página 365)

SEGUNDA SESIÓN

3) 6 atletas van a participar en una carrera de relevos de 636 metros, corriendo cada uno la misma distancia ¿Cuántos metros corre cada uno?

4) Lucía ha ahorrado 62 ptas y su hermano menor la quinta parte. ¿Cuántas pesetas tiene su hermano?

TERCERA SESIÓN

5) Un señor recorre en su coche por la mañana 120 km y por la tarde 62 km. Si gasta 6 pesetas por km ¿cuánto gasta en un día?

6)En la clase hay 24 niños. Si compramos 275 globos para repartirlos y nos sobraron 35 globos ¿cuántos cogió cada uno?

2.5 INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS: PROTOCOLOS ENTREVISTAS DEFINITIVAS A LOS ALUMNOS

PRIMERA SESIÓN
1) Luis tiene 321 ptas y María 119 ptas. ¿Cuántas pesetas tiene Luis más que María?
2) 6 atletas van a participar en una carrera de relevos de 636 metros, corriendo cada uno la misma distancia ¿Cuántos metros corre cada uno?
0) Inventa un enunciado para el diagrama siguiente:
(ver página 367)

SEGUNDA SESIÓN
3) Juan tiene 85 pesetas y se ha comprado una chocolatina que le costó 35 pesetas y unos caramelos que le costaron 25 pesetas. ¿Podrá comprarse un pito que le cuesta 20 pesetas?
4) Un colegio tiene 305 alumnos y otro el triple de alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene el segundo colegio?

Preguntas sobre preferencias y actitudes:
¿Qué te gusta más hacer en Matemáticas: cálculos, geometría, resolución de problemas?
¿Te sientes seguro cuando resuelves problemas?
¿Qué es lo más difícil en un problema?

TERCERA SESIÓN
5) Un vendedor de periódicos tenía en su kiosco 500 periódicos. Si a lo largo de la semana ha vendido 245 ¿cuántos le quedan?
6) Un señor recorre en su coche por la mañana 84 km y por la tarde 62 km. Si gasta 6 pesetas por cada km que recorre ¿cuánto gasta en un día?

CUARTA SESIÓN
7)Lucía ha ahorrado 314 ptas y su hermano la mitad. ¿Cuántas pesetas tiene ahorradas su hermano?
8) En la clase hay 24 niños. Si compramos 275 globos para repartirlos y sobraron 35. ¿Cuántos globos cogió cada uno?

2.6 INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS: PROTOCOLOS ENTREVISTAS INICIAL A LOS PROFESORES DEL GRUPO EXPERIMENTAL

Responder a las siguientes preguntas.

1. Colegio: Curso:
2. Años de docencia:
    1. Menos de 3 2. Entre 3 y 7 3. Entre 7 y 10 4. Más de 10
3. Tipo de Centro:
    1. Público 2. Privado 3. Privado Subvencionado
4. Calificación de la zona del Centro:
    1. Urbana 2. Suburbana 3. Urbana-rural 4. Rural
5. Número de unidades del Centro:
    1. Menos de 9 2. Entre 9 y 16 3. Entre 17 y 24 4. Más de 24
6. Nivel sociocultural de los padres:
    1. Alto (Tit. Sup.) 2. Medio alto (Tit. Medio)
    3. Medio (Bachillerato) 4. Medio bajo (E. Primarios)
    5. Bajo (Sin estudios)
7. Número de horas semanales que destina a Matemáticas en Clase:
8. En caso de utilizar libros de textos para Matemáticas, indica cuáles:
9. Número de horas semanales que destina a la resolución de Problemas de Matemáticas en Clase:
10. ¿Se coordina con otros Profesores en el Área de Matemáticas?
    1. Sí 2. No
11. Personalmente las Matemáticas le agradan:
    1. Mucho 2. Bastante 3. Normal 4. Poco 5. Nada
12. Considera las Matemáticas para sus alumnos como una materia del Currículo:
    1. Muy importante 2. Importante 3. Poco importante
    ¿Por qué?:
13. Considera las Matemáticas para sus alumnos como una materia del Currículo que a ellos:

1. Les agrada 2. Les es indiferente 3. Les desagrada

¿Por qué?:

14. Personalmente la resolución de problemas de Matemáticas le agradan:

1. Mucho 2. Bastante 3. Normal 4. Poco 5. Nada

15. Considera la resolución de problemas para sus alumnos como una parte de las Matemáticas:

1. Muy importante 2. Importante 3. Poco importante

¿Por qué?:

16. Considera la resolución de problemas para sus alumnos como una parte de las Matemáticas que a ellos:

1. Les agrada 2. Les es indiferente 3. Les desagrada

¿Por qué?:

17. La resolución de problemas aritméticos debe enseñarse en las clases de matemáticas:

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

18. El nivel alcanzado por los alumnos en la resolución de problemas aritméticos es un indicador de la comprensión de las operaciones y de los números:

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

19. Los problemas aritméticos deberían estar superados por los alumnos del Ciclo Medio:

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

20. Las actividades de resolución de problemas deberían tener más importancia que los cálculos aritméticos:

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

21. El aprendizaje de las operaciones aritméticas debe preceder a la resolución de problemas aritméticos:

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

Continúa indicando la respuesta que mejor describe el uso que haces de cada uno de los siguientes materiales en la resolución de problemas aritméticos.

22. El libro de texto de los estudiantes:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

23. Otros textos publicados:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

24. Textos producidos localmente (manuales, libros,..):

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

25. Fichas individualizadas producidas localmente o comercializadas:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

26. Materiales de laboratorio (Juegos, Gráficos, materiales estructurados,..) comercializados o producidos localmente:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

Finalmente, pensando en una Clase de Resolución de Problemas Aritméticos, indica la respuesta que mejor corresponde al estilo de enseñanza-aprendizaje que utilizas:

27. Propongo problemas en la pizarra, explicando con cuidado y claridad las reglas utilizadas. Luego, propongo problemas similares a los alumnos, trabajando individualmente las dificultades que surgen:

1. Casi siempre 2. A veces 3. Casi nunca

28. Pido a los alumnos que lean los problemas resueltos que me parecen más adecuados del libro de texto, para que encuentren las reglas y procedimientos que son importantes para resolver los problemas del tema. Si la regla que creen haber descubierto es incorrecta, les explico cómo se hace y les propongo problemas del mismo tipo:

1. Casi siempre 2. A veces 3. Casi nunca

29. Los alumnos trabajan en los problemas del texto en pequeños grupos, mientras ayudo a los que tienen dificultades:

1. Casi siempre 2. A veces 3. Casi nunca

30. Trabajo la resolución de problemas aritméticos con materiales concretos, con dibujos o gráficos:

1. Casi siempre 2. A veces 3. Casi nunca

31. Los alumnos trabajan la resolución de problemas en pequeños grupos en los que investigan con materiales concretos o gráficos. Luego hablamos de lo descubierto y escriben el resumen de lo encontrado:

1. Casi siempre 2. A veces 3. Casi nunca

32. Otra forma:

2.7 INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS: PROTOCOLOS ENTREVISTAS A LOS PROFESORES DEL GRUPO CONTROL

Esta entrevista está formada por las preguntas de la entrevista inicial más el siguiente bloque de preguntas:

33. ¿Sabía que se estaba desarrollando una experiencia didáctica sobre resolcuión de problemas en otras clases o centros del mismo nivel?
34. ¿Comentaste con otros compañeros los procedimientos de resolución de problemas que estaban llevando a cabo?

Se preocupó más en mejorar la resolución de problemas y para ello:

35. ¿Qué pensaste al ver que estos procedimientos no se aplicaban en tu clase?
36. ¿Crees que de alguna forma te preocupaste más en mejorar la resolución de problemas aritméticos en tus alumnos, como consecuencia de saber que la experiencia se estaba realizando?

Al darse esa posible preocupación ¿qué cambios crees que se produjeron en tí? Coincide con alguna de las afirmaciones siguientes:

37. Empecé a dedicarle más tiempo a la resolución de problemas aritméticos.
38. Me preocupé de los alumnos que tenían más dificultades.
39. Procuré hacer más prácticas o ejercicios de resolución de problemas.
40. Traté de orientar mejor a los alumnos en la corrección de sus errores.
41. Di orientaciones generales sobre cómo tenían que resolver los problemas.

2.8 INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS: PROTOCOLOS ENTREVISTAS FINAL A LOS PROFESORES DEL GRUPO EXPERIMENTAL

Contestar a las siguientes preguntas.

1. Colegio: Curso:
2. Número de horas semanales que destina a Matemáticas en Clase:
3. En caso de utilizar libros de textos para Matemáticas, indica cuáles:
4. Número de horas semanales que destina a la resolución de Problemas de Matemáticas en Clase:
5. ¿Se coordina con otros Profesores en el Área de Matemáticas?

   1. Sí 2. No

6. Personalmente la resolución de problemas de Matemáticas le agrada:

   1. Mucho 2. Bastante 3. Normal 4. Poco 5. Nada

7. Considera la resolución de problemas para sus alumnos como una parte de las Matemáticas:

   1. Muy importante 2. Importante 3. Poco importante

   ¿Por qué?:

8. Considera la resolución de problemas para sus alumnos como una parte de las Matemáticas que a ellos:

   1. Les agrada 2. Les es indiferente 3. Les desagrada

   ¿Por qué?:

9. Considera la realización de problemas mediante gráficos y esquemas como una parte de la resolución de problemas que a sus alumnos:

   1. Les agrada 2. Les es indiferente 3. Les desagrada

   ¿Por qué?:

10. Considera la realización de problemas mediante operaciones como una parte de la resolución de problemas que a sus alumnos:

    1. Les agrada 2. Les es indiferente 3. Les desagrada

    ¿Por qué?

11. Señala algunos aspectos de la resolución de problemas que más agradan a sus alumnos.

12. Señala algunos aspectos de la resolución de problemas que menos agradan a sus alumnos.

13. La resolución de problemas aritméticos mediante operaciones debe enseñarse en las clases de matemáticas:

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

14. La resolución de problemas aritméticos mediante el uso de gráficos y esquemas debe enseñarse en las clases de matemáticas:

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

15. El nivel alcanzado por los alumnos en la resolución de problemas aritméticos es un indicador de la comprensión de las operaciones y de los números:

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

16. La resolución de problemas aritméticos mediante el uso de gráficos y esquemas es un indicador de la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en el Problema.

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

17. La resolución de problemas mediante operaciones aritméticas es un indicador de la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en el Problema.

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

18. El aprendizaje de las operaciones aritméticas debe preceder a la resolución de problemas aritméticos:

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

Continúa indicando la respuesta que mejor describe el uso que haces de cada uno de los siguientes materiales en la resolución de problemas aritméticos.

19. El libro de texto de los estudiantes:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

20. Otros textos publicados:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

21. Textos producidos localmente (manuales, libros,..):

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3. Raramente o no usado

22. Fichas individualizadas producidas localmente o comercializadas:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

23. Fichas individualizadas elaboradas personalmente:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

24. Materiales gráficos comercializados:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

25. Materiales manipulativos comercializados:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

26. Materiales gráficos elaborados personalmente:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

27. Materiales manipulativos elaborados personalmente:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

Ahora, pensando tus las Clases de Resolución de Problemas Aritméticos realizadas en los cursos 1993-94 y 94-95, indica la respuesta que mejor corresponde al estilo de enseñanza-aprendizaje que utilizas:

28. Propongo problemas en la pizarra, explicando con cuidado y claridad las reglas utilizadas. Luego, propongo problemas similares a los alumnos, trabajando individualmente las dificultades que surgen:

1. Casi siempre 2. A veces 3. Casi nunca

29. Pido a los alumnos que lean los problemas resueltos que me parecen más adecuados, para que encuentren las reglas y procedimientos que son importantes para resolver los problemas del tema. Si la regla que creen haber descubierto es incorrecta, les explico cómo se hace y les propongo problemas del mismo tipo:

1. Casi siempre 2. A veces 3. Casi nunca

30. Los alumnos trabajan los problemas en pequeños grupos, mientras ayudo a los que tienen dificultades:

1. Casi siempre 2. A veces 3. Casi nunca

31. Trabajo la resolución de problemas aritméticos con materiales concretos, con dibujos o gráficos:

1. Casi siempre 2. A veces 3. Casi nunca

32. Los alumnos trabajan la resolución de problemas en pequeños grupos en los que investigan con materiales concretos o gráficos. Luego hablamos de lo descubierto y escriben el resumen de lo encontrado:

1. Casi siempre 2. A veces 3. Casi nunca

33. Otra forma:

Te pedimos, por último, que trates de recordar tu actitud y comportamiento en tu clase de problemas durante los cursos 1993-94 y 1994-95:

34. Después de haber desarrollado la experiencia didáctica sobre resolución de problemas en el curso 1992-93 ¿Comentaste con otros compañeros/as o experimentadores sobre los procedimientos de resolución de problemas que habías llevado a cabo:

Con qué fin:

35. Después de haber desarrollado la experiencia didáctica sobre resolución de problemas en el curso 1992-93, seguiste aplicando estos procedimientos de resolución en los cursos siguientes:

1. Sí 2. No 3. A veces

Si contesta sí, responde a la pregunta 36.
Si contesta no, responde a la pregunta 37.
Si contesta a veces, responde a las preguntas 36 y 37.

36. Si seguiste desarrollando el diseño de resolución de problemas, indica cuales fueron a tu juicio las razones:

37. Si NO seguiste desarrollando el diseño de resolución de problemas, indica cuales fueron a tu juicio las causas:

38. Sinceramente, ¿Crees que de alguna forma te has preocupado más en mejorar la resolución de problemas aritméticos en tus alumnos, como consecuencia de haber realizado la experiencia?:

1. Sí 2. No

Al darse esa posible preocupación, ¿Qué cambios crees que se produjeron en tí?. Contesta a todas las afirmaciones siguientes:

39. Empecé a dedicarle más tiempo a la resolución de problemas aritméticos:

1. Sí 2. No

40. Me preocupé de los alumnos que tenían más dificultades en la resolución de problemas:

1. Sí 2. No

41. Procuré hacer más prácticas o ejercicios de resolución de problemas:

1. Sí 2. No

42. Traté de orientar mejor a los alumnos en la corrección de sus errores:

1. Sí 2. No

43. Di orientaciones generales sobre como tenían que resolver los problemas:

1. Sí 2. No

44. Otras:

45. Finalmente, si ha habido diferencias en tus clases de Resolución de Problemas en los cursos 1993-94 y 1994-95 coméntalas:

3.1 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT: DATOS DE LA POBLACIÓN GRUPO EXPERIMENTAL Y GRUPO CONTROL.

Fichero: DE.sys para el grupo experimental.

Variables:
CURSO - COLEGIO - EDAD - SEXO$ - HERMANOS - ESTP - ESTM - AYUDA.
Curso: 3º, 4º, 5º.
Colegio: Los colegios fueron numerados del 1 al 13.
Edad: 8 a 13 años.
Sexo$: h, m.
Hermanos: número de hermanos: 0 a 7.
Estp: estudio de los padres: .: no contesta, 1: sin estudios, 2: estudios primarios, 3: bachillerato, 4: estudios universitarios.
Estm: estudio de las madres: .: no contesta, 1: sin estudios, 2: estudios primarios, 3: bachillerato, 4: estudios universitarios.
Ayuda: necesita ayuda para las Matemáticas: 1: sí, 2: alguna vez, 3: no.

Fichero: DC.sys para el grupo control.

Variables:
CURSO - COLEGIO - EDAD - SEXO$.
Curso: 3º, 4º, 5º.
Colegio: Los colegios fueron numerados del 1 al 10.
Edad: 7 a 15 años.
Sexo$: h, m.

RESULTADOS

GRUPO EXPERIMENTAL

Distribución por cursos:

3º	4º	5º	Total
66	123	166	355

Distribución por aulas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Tot
28	23	25	20	24	23	31	29	30	25	37	31	29	355

Distribución por edad:

-	8	9	10	11	12	13	Total
15	29	86	131	71	20	3	355

Edad media =9.9

Distribución por sexos:

niños	niñas	Total
178	177	355

Distribución por número de hermanos:

-	0	1	2	3	4	5	6	7
104	19	109	62	32	12	11	2	4

Distribución por estudios de los padres:

-	Sin estudios	Primarios	Bachillerato	Superiores
120	15	121	56	43

Distribución por estudios de las madres:

-	Sin estudios	Primarios	Bachillerato	Superiores
117	14	125	60	39

Distribución por Ayuda:

-	sí	alguna vez	no
107	28	123	97

GRUPO CONTROL

Distribución por cursos:

3º	4º	5º	Total
49	56	85	190

Distribución por aulas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	20	20	19	16	25	17	17	19	16

Distribución por edad:

-	7	8	9	10	11	12	14	15
5	1	13	62	48	48	11	1	1

Edad media =9.9

Distribución por sexos:

niños	niñas	Total
113	77	190

3.2 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. PRETEST-POSTEST: VALIDEZ Y FIABILIDAD DE LOS TESTS.

Fichero: ET.sys y OT.sys para el grupo experimental.

Variables: O (1) a O (32), ítems del pretest.

O (i), codificados .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Variables: U (1) a U (32), ítems del postest

Fichero: CET.sys y COT..sys para el grupo control.

Variables: O (1) a O (32), ítems del pretest.

O (i), codificados: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Variables: U (1) a U (32), ítems del postest

DATA BELOW ARE BASED ON 157 COMPLETE CASES FOR 32 DATA ITEMS.

TEST SCORE STATISTICS

	TOTAL	TOTAL/ 32	ODD	EVEN
MEAN	24.408	0.763	11.949	12.459
STD DEV	5.248	0.164	2.706	2.811
STD ERR	0.420	0.013	0.217	0.225
MAXIMUM	31.000	0.969	15.000	16.000
MINIMUM	6.000	0.188	2.000	3.000
N CASES	157	157	157	157

INTERNAL CONSISTENCY DATA

SPLIT-HALF CORRELATION	.809
SPEARMAN-BROWN COEFFICIENT	.895
GUTTMAN (RULON) COEFFICIENT	.894
COEFFICIENT ALPHA - ALL ITEMS	.867
COEFFICIENT ALPHA - ODD ITEMS	.752
COEFFICIENT ALPHA - EVEN ITEMS	.763

APPROXIMATE STANDARD ERROR OF MEASUREMENT OF TOTAL SCORE
FOR 15 Z-SCORE INTERVALS

Z SCORE	TOTAL SCORE		N	STD ERROR
< -3.25	<	7.352	4	1.225
-3.25 TO -2.75	7.352 TO	9.976	0	.
-2.75 TO -2.25	9.976 TO	12.600	2	2.236
-2.25 TO -1.75	12.600 TO	15.224	4	1.936
-1.75 TO -1.25	15.224 TO	17.848	8	1.936
-1.25 TO -.75	17.848 TO	20.472	10	1.817
-.75 TO -.25	20.472 TO	23.096	25	2.200
-.25 TO .25	23.096 TO	25.720	25	1.789
.25 TO .75	25.720 TO	28.344	44	1.758
.75 TO 1.25	28.344 TO	30.968	28	1.464
1.25 TO 1.75	30.968 TO	33.592	7	1.000
1.75 TO 2.25	33.592 TO	36.215	0	.
2.25 TO 2.75	36.215 TO	38.839	0	.
2.75 TO 3.25	38.839 TO	41.463	0	.
>= 3.25	>=	41.463	0	.

ITEM RELIABILITY STATISTICS

ITEM	LABEL	MEAN	STANDARD DEVIATION	ITEM-TOTAL R	RELIABILITY INDEX	EXCLUDING THIS ITEM R	EXCLUDING THIS ITEM ALPHA
1	O(1)	0.815	0.388	.484	.188	.425	.862
2	O(2)	0.790	0.407	.529	.215	.469	.861
3	O(3)	0.892	0.311	.547	.170	.503	.861
4	O(4)	0.866	0.340	.455	.155	.401	.863
5	O(5)	0.000	0.000	.000	.000	.000	.868
6	O(6)	0.847	0.360	.532	.192	.480	.861
7	O(7)	0.720	0.449	.548	.246	.484	.860
8	O(8)	0.631	0.483	.474	.229	.398	.863
9	O(9)	0.516	0.500	.415	.208	.332	.865
10	O(10)	0.268	0.443	.433	.192	.361	.864

11	O(11)	0.936	0.244	.358	.087	.317	.865
12	O(12)	0.860	0.347	.510	.177	.459	.861
13	O(13)	0.917	0.276	.340	.094	.293	.865
14	O(14)	0.465	0.499	.370	.185	.284	.867
15	O(15)	0.650	0.477	.520	.248	.449	.861
16	O(16)	0.841	0.366	.515	.188	.461	.861
17	O(17)	0.873	0.333	.230	.077	.168	.868
18	O(18)	0.713	0.452	.524	.237	.458	.861
19	O(19)	0.522	0.500	.514	.257	.439	.862
20	O(20)	0.879	0.326	.382	.125	.327	.864
21	O(21)	0.930	0.255	.311	.079	.266	.866
22	O(22)	0.841	0.366	.389	.142	.327	.864
23	O(23)	0.764	0.424	.532	.226	.470	.861
24	O(24)	0.930	0.255	.264	.067	.218	.866
25	O(25)	0.790	0.407	.412	.168	.345	.864
26	O(26)	0.924	0.266	.114	.030	.063	.869
27	O(27)	0.892	0.311	.418	.130	.367	.864
28	O(28)	0.860	0.347	.570	.198	.523	.860
29	O(29)	0.834	0.372	.593	.220	.544	.859
30	O(30)	0.955	0.206	.428	.088	.395	.864
31	O(31)	0.898	0.303	.564	.171	.522	.861
32	O(32)	0.790	0.407	.636	.259	.586	.858

DATA BELOW ARE BASED ON 157 COMPLETE CASES FOR 32 DATA ITEMS.

TEST SCORE STATISTICS

	TOTAL	TOTAL/ 32	ODD	EVEN
MEAN	27.223	0.851	13.153	14.070
STD DEV	3.398	0.106	1.834	1.858
STD ERR	0.272	0.009	0.147	0.149
MAXIMUM	31.000	0.969	15.000	16.000
MINIMUM	11.000	0.344	4.000	7.000
N CASES	157	157	157	157

INTERNAL CONSISTENCY DATA

SPLIT-HALF CORRELATION	.694
SPEARMAN-BROWN COEFFICIENT	.819
GUTTMAN (RULON) COEFFICIENT	.819
COEFFICIENT ALPHA - ALL ITEMS	.767
COEFFICIENT ALPHA - ODD ITEMS	.584
COEFFICIENT ALPHA - EVEN ITEMS	.621

APPROXIMATE STANDARD ERROR OF MEASUREMENT OF TOTAL SCORE
FOR 15 Z-SCORE INTERVALS

Z SCORE	TOTAL SCORE			N	STD ERROR
< -3.25		<	16.178	2	2.550
-3.25 TO -2.75	16.178	TO	17.877	0	.
-2.75 TO -2.25	17.877	TO	19.577	2	3.808
-2.25 TO -1.75	19.577	TO	21.276	6	2.000
-1.75 TO -1.25	21.276	TO	22.975	5	1.549
-1.25 TO -.75	22.975	TO	24.674	12	1.708
-.75 TO -.25	24.674	TO	26.373	22	2.306
-.25 TO .25	26.373	TO	28.073	29	1.671
.25 TO .75	28.073	TO	29.772	38	1.357

.75 TO 1.25	29.772 TO 31.471	41	1.388
1.25 TO 1.75	31.471 TO 33.170	0	.
1.75 TO 2.25	33.170 TO 34.869	0	.
2.25 TO 2.75	34.869 TO 36.568	0	.
2.75 TO 3.25	36.568 TO 38.268	0	.
>= 3.25	>= 38.268	0	.

ITEM RELIABILITY STATISTICS

				ITEM-		EXCLUDING	
			STANDARD	TOTAL	RELIABILITY	THIS ITEM	
ITEM	LABEL	MEAN	DEVIATION	R	INDEX	R	ALPHA
1	U(1)	0.904	0.294	.308	.091	.227	.764
2	U(2)	0.713	0.452	.481	.217	.369	.756
3	U(3)	0.885	0.319	.406	.129	.323	.759
4	U(4)	0.904	0.294	.257	.076	.174	.766
5	U(5)	0.000	0.000	.000	.000	.000	.768
6	U(6)	0.911	0.285	.481	.137	.412	.755
7	U(7)	0.854	0.354	.520	.184	.438	.752
8	U(8)	0.860	0.347	.323	.112	.228	.764
9	U(9)	0.701	0.458	.456	.209	.340	.758
10	U(10)	0.459	0.498	.402	.200	.269	.764
11	U(11)	0.936	0.244	.370	.090	.306	.760
12	U(12)	0.930	0.255	.481	.123	.420	.756
13	U(13)	0.866	0.340	.323	.110	.229	.764
14	U(14)	0.968	0.176	.108	.019	.057	.769
15	U(15)	0.803	0.398	.390	.155	.285	.761
16	U(16)	0.936	0.244	.378	.092	.314	.760
17	U(17)	0.885	0.319	.500	.159	.425	.753
18	U(18)	0.815	0.388	.524	.203	.433	.752
19	U(19)	0.701	0.458	.333	.153	.206	.768
20	U(20)	0.930	0.255	.312	.080	.242	.763
21	U(21)	0.904	0.294	.193	.057	.108	.769
22	U(22)	0.904	0.294	.327	.096	.247	.763
23	U(23)	0.936	0.244	.263	.064	.194	.765
24	U(24)	0.955	0.206	.096	.020	.035	.770
25	U(25)	0.930	0.255	.268	.068	.196	.765
26	U(26)	0.930	0.255	.202	.051	.128	.767
27	U(27)	0.975	0.158	.237	.037	.192	.765
28	U(28)	0.975	0.158	.356	.056	.314	.762
29	U(29)	0.904	0.294	.283	.083	.200	.765
30	U(30)	0.975	0.158	.451	.071	.413	.760
31	U(31)	0.968	0.176	.546	.096	.508	.756
32	U(32)	0.904	0.294	.538	.158	.472	.752

SYSTAT PROCESSING FINISHED

INPUT STATEMENTS FOR THIS JOB:

```
USE A:ET
ESTIMATE
PRINT=LONG
MODEL=CLASSIC
ESTIMATE
USE A>et
USE A:ET
```

PEARSON CORRELATION MATRIZ

	AC	PRET	POST	NOTP
AC	1.000			
PRET	0.258	1.000		
POST	0.184	0.689	1.000	
NOTP	0.330	0.505	0.430	1.000

NUMBER OF OBSERVATIONS: 132

3.3.1 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES: HIPÓTESIS Y SU CONFIRMACIÓN ESTADÍSTICA.

Fichero: Laguna.sys

¿Existe diferencia en cuanto a la resolución de problemas, medido por los problemas bien resueltos, antes y después del desarrollo del diseño de instrucción en el grupo experimental y el grupo control?

¿Esta diferencia es significativa en el grupo experimental sobre el grupo control?

¿Hay diferencias por cursos o por sexos?

LEVELS ENCOUNTERED DURING PROCESSING ARE:

GRUPO		SEXO		CURSO		
1.000	2.000	H	M	3.000	4.000	5.000

NUMBER OF CASES PROCESSED: 381

DEPENDENT VARIABLE MEANS

PRET	POST
12.717	14.328

UNIVARIATE REPEATED MEASURES ANALYSIS

BETWEEN SUBJECTS

SOURCE	SS	DF	MS	F	P
GRUPO	290.770	1	290.770	15.039	0.000
SEXO$	1.700	1	1.700	0.088	0.767
CURSO	2194.979	2	1097.490	56.762	0.000
GRUPO*SEXO$	33.528	1	33.528	1.734	0.189
GRUPO*CURSO	269.986	2	134.993	6.982	0.001
SEXO$*CURSO	4.520	2	2.260	0.117	0.890
GRUPO*SEXO$ *CURSO	32.446	2	16.223	0.839	0.433
ERROR	7134.531	369	19.335		

WITHIN SUBJECTS

SOURCE	SS	DF	MS	F	P	G-G	H-F
a	321.356	1	321.356	88.783	0.000	.	.
a*GRUPO	1.212	1	1.212	0.335	0.563	.	.
a*SEXO$	8.962	1	8.962	2.476	0.116	.	.
a*CURSO	6.475	2	3.237	0.894	0.410	.	.
a*GRUPO*SEXO$	5.603	1	5.603	1.548	0.214	.	.
a*GRUPO*CURSO	28.037	2	14.018	3.873	0.022	.	.
a*SEXO$*CURSO	0.516	2	0.258	0.071	0.931	.	.
a*GRUPO*SEXO$*CURSO	3.308	2	1.654	0.457	0.634	.	.
ERROR	1335.619	369	3.620				

GREENHOUSE-GEISSER EPSILON: .
HUYNH-FELDT EPSILON : .

GRUPO=1, CURSO=3
TOTAL OBSERVATIONS: 53

	PRET	POST	GLOBAL1
N OF CASES	53	53	53
MINIMUM	2.000	1.000	3.500
MAXIMUM	19.000	19.000	18.000
MEAN	11.019	12.566	11.792
STANDARD DEV	3.770	3.760	3.399

GRUPO=1, CURSO=4
TOTAL OBSERVATIONS: 74

	PRET	POST	GLOBAL1
N OF CASES	74	74	74
MINIMUM	2.000	5.000	4.000
MAXIMUM	19.000	19.000	19.000
MEAN	12.676	14.041	13.358
STANDARD DEV	4.611	3.887	4.040

GRUPO=1, CURSO=5
TOTAL OBSERVATIONS: 138

	PRET	POST	GLOBAL1
N OF CASES	138	138	138
MINIMUM	1.000	8.000	4.500
MAXIMUM	19.000	19.000	19.000
MEAN	13.935	15.870	14.902
STANDARD DEV	3.320	2.361	2.552

GRUPO=2, CURSO=3
TOTAL OBSERVATIONS: 26

	PRET	POST	GLOBAL1
N OF CASES	26	26	26
MINIMUM	4.000	3.000	3.500
MAXIMUM	13.000	16.000	14.000
MEAN	7.808	9.115	8.462
STANDARD DEV	2.593	3.788	2.905

SEXO$=M
TOTAL OBSERVATIONS: 191

	GLOBAL1
N OF CASES	191
MINIMUM	4.000
MAXIMUM	19.000
MEAN	13.652
STANDARD DEV	3.487

CURSO=3
TOTAL OBSERVATIONS: 79

	GLOBAL1
N OF CASES	79
MINIMUM	3.500
MAXIMUM	18.000
MEAN	10.696
STANDARD DEV	3.590

CURSO=4
TOTAL OBSERVATIONS: 107

	GLOBAL1
N OF CASES	107
MINIMUM	4.000
MAXIMUM	19.000
MEAN	12.977
STANDARD DEV	3.809

CURSO=5
TOTAL OBSERVATIONS: 195

	GLOBAL1
N OF CASES	195
MINIMUM	4.500
MAXIMUM	19.000
MEAN	14.967
STANDARD DEV	2.592

TOTAL OBSERVATIONS: 381

	PRET	POST
N OF CASES	381	381
MINIMUM	1.000	1.000
MAXIMUM	19.000	19.000
MEAN	12.717	14.328
STANDARD DEV	4.027	3.648

GRUPO=1
TOTAL OBSERVATIONS: 265

	PRET	POST	GLOBAL1
N OF CASES	265	265	265
MINIMUM	1.000	1.000	3.500
MAXIMUM	19.000	19.000	19.000
MEAN	13.000	14.698	13.849
STANDARD DEV	3.959	3.407	3.416

GRUPO=2
TOTAL OBSERVATIONS: 116

	PRET	POST	GLOBAL1
N OF CASES	116	116	116
MINIMUM	4.000	3.000	3.500
MAXIMUM	19.000	19.000	19.000
MEAN	12.069	13.483	12.776
STANDARD DEV	4.121	4.036	3.894

SEXO$=H
TOTAL OBSERVATIONS: 190

	GLOBAL1
N OF CASES	190
MINIMUM	3.500
MAXIMUM	19.000
MEAN	13.392
STANDARD DEV	3.709

GRUPO=2, CURSO=4

TOTAL OBSERVATIONS: 33

	PRET	POST	GLOBAL1
N OF CASES	33	33	33
MINIMUM	4.000	5.000	4.500
MAXIMUM	18.000	19.000	18.000
MEAN	10.970	13.273	12.121
STANDARD DEV	3.331	3.494	3.120

GRUPO=2, CURSO=5

TOTAL OBSERVATIONS: 57

	PRET	POST	GLOBAL1
N OF CASES	57	57	57
MINIMUM	8.000	10.000	9.500
MAXIMUM	19.000	19.000	19.000
MEAN	14.649	15.596	15.123
STANDARD DEV	3.102	2.576	2.703

3.3.2 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES: TABLAS DE PORCENTAJES GLOBALES, POR CURSOS Y POR SEXOS.

Pretest - Grupo experimental:

Fichero: etc1.sys (ordenados por cursos)
Fichero: etc2.sys (ordenados por sexos)
Variables: O (1) a O (20)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Postest - Grupo experimental:

Fichero: otc1.sys (ordenados por cursos)
Fichero: otc2.sys (ordenados por sexos)

Variables: U (1) a U (20)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Porcentajes calculados globales, por cursos (3º, 4º, 5º), por sexos (h, m).

Pretest - Grupo control:

Fichero: cetc1.sys (ordenados por cursos)
Fichero: cetc2.sys (ordenados por sexos)

Variables: O (1) a O (20)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Postest - Grupo control:

Fichero: cotc1.sys (ordenados por cursos)
Fichero: cotc2.sys (ordenados por sexos)

Variables: U (1) a U (20)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Porcentajes calculados globales, por cursos (3º, 4º, 5º), por sexos (h, m).

PRETEST - GRUPO EXPERIMENTAL

Porcentajes de aciertos en los ítems del pretest.

Ítem	Global	3º	4º	5º	h	m
O(1)	69%	68%	71%	69%	69%	70%
O(2)	67%	62%	67%	69%	64%	70%
O(3)	80%	68%	81%	84%	79%	82%
O(4)	75%	67%	67.5%	83%	71%	78%
O(6)	70%	56%	67.5%	77%	69%	71%
O(7)	58%	21%	60%	71%	54%	62%
O(8)	46%	47%	47%	45%	46%	46%
O(9)	37.5%	23%	32%	47.5%	35%	40%
O(10)	17.5%	18%	11%	22%	17%	18%
O(11)	86%	85%	81%	90%	82%	90%
O(12)	76%	68%	71.5%	82%	71%	80%
O(13)	80%	82%	74%	83%	75%	85%
O(14)	33.5%	11%	43%	35.5%	35%	32%
O(15)	53%	42%	43%	64%	43%	63%
O(16)	71%	59%	66%	79.5%	72%	70%
O(17)	75%	73%	73%	77%	72%	78%
O(18)	55%	53%	46%	61.5%	47%	63%
O(19)	40%	27%	34%	50%	36.5%	44%
O(20)	79%	82%	70%	84%	73%	85%

POSTEST - GRUPO EXPERIMENTAL

Porcentajes de aciertos en los ítems del postest.

Ítem	Global	3º	4º	5º	h	m
U(1)	76%	67%	67%	86%	72.5%	79%
U(2)	57.5%	41%	49%	70.5%	55%	60%
U(3)	77%	70%	66%	87%	74%	79%
U(4)	75%	82%	58.5%	85%	70%	80%
U(6)	79%	83%	67.5%	85.5%	75%	82.5%
U(7)	65%	48.5%	51%	82.5%	59.5%	71%
U(8)	69%	73%	50%	81%	65%	73%
U(9)	48%	18%	41%	64.5%	47%	48.5%
U(10)	30%	27%	28.5%	32.5%	27%	33%
U(11)	78%	77%	68%	85.5%	72%	84%
U(12)	77%	79%	66%	85%	71%	83%
U(13)	70%	74%	62%	75%	66%	74.5%
U(14)	74%	77%	60%	83%	66%	82.5%
U(15)	52%	36%	48%	61.5%	47%	58%
U(16)	75%	82%	64%	81%	68.5	82%
U(17)	69.5%	73%	54%	80%	63.5%	76%
U(18)	61%	58%	49.5%	70.5%	56%	66%
U(19)	47%	44%	29%	61%	42.5%	51.5
U(20)	73%	73%	59%	84%	68%	78.5%

PRETEST - GRUPO CONTROL

Porcentajes de aciertos en los ítems del pretest.

Ítem	Global	3º	4º	5º	h	m
O(1)	53%	35%	62.5	58%	51%	56%
O(2)	46%	16%	52%	59%	43%	49%
O(3)	73%	67%	87.5%	67%	66%	83%
O(4)	60.5%	43%	78.5%	59%	59%	62%
O(6)	57%	26.5%	71.5%	66%	56%	60%
O(7)	45%	2%	57%	62%	42.5%	49%
O(8)	36%	8%	46.5%	45%	35%	36%
O(9)	27.5%	2%	34%	36.5%	26.5%	27%
O(10)	7%	2%	3.5%	12%	9%	4%
O(11)	71%	71.5%	84%	62%	70%	73%
O(12)	59.5%	33%	71.5%	67%	58.5%	61%
O(13)	65%	45%	87.5%	62%	65%	66%
O(14)	24%	2%	16%	41%	24%	23%
O(15)	38%	6%	43%	53%	43%	30%
O(16)	62%	45%	71.%	66%	65%	58.5%
O(17)	58%	43%	70%	59%	57.5%	58.5%
O(18)	39.5%	18%	45%	48%	41%	38%
O(19)	27%	0%	36%	38%	28%	26%
O(20)	73%	65%	87.5%	67%	70%	77%

POSTEST - GRUPO CONTROL

Porcentajes de aciertos en los ítems del postest.

Ítem	Global	3º	4º	5º	h	m
U(1)	66%	47%	55%	85%	65.5%	67.5%
U(2)	34%	20.5%	32%	54%	41%	36%
U(3)	65%	45%	59%	80%	65.5%	64%
U(4)	59%	45%	53.5%	70.5%	62%	54.5%
U(6)	64%	39%	57%	82%	62%	66%
U(7)	51.5%	20.5%	45%	74%	51%	52%
U(8)	51.5%	28.5%	53.5%	63.5%	53%	49%
U(9)	31%	6%	30%	46%	28%	35%
U(10)	11%	0%	7%	20%	15%	5%
U(11)	73%	51%	66%	89.5%	72%	74%
U(12)	66%	43%	68%	79%	66%	66%
U(13)	62%	37%	57%	79%	64%	58.5%
U(14)	63%	35%	64%	79%	65.5%	60%
U(15)	35%	12%	28.5%	52%	39%	28.5%
U(16)	67%	37%	64%	86%	65.5%	69%
U(17)	62%	26.5%	64%	81%	64%	60%
U(18)	51%	14%	52%	72%	53%	48%
U(19)	34%	8%	34%	49.5%	40%	26%
U(20)	66%	43%	59%	85%	68%	64%

3.3.3 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES: MEDIAS Y OTROS DATOS.

Pretest - Grupo experimental:

Fichero: etc1.sys
Variables: O (1) a O (20)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Postest - Grupo experimental:

Fichero: otc1.sys

Variables: U (1) a U (20)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Pretest - Grupo control:

Fichero: cetc1.sys

Variables: O (1) a O (20)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Postest - Grupo control:

Fichero: cotc1.sys

Variables: U (1) a U (20)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

TOTAL OBSERVATIONS: 355

	O(1)	O(2)	O(3)	O(4)	O(5)
N OF CASES	323	319	326	326	322
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
MEAN	0.762	0.746	0.874	0.813	0.000
STANDARD DEV	0.427	0.436	0.332	0.391	0.000

	O(6)	O(7)	O(8)	O(9)	O(10)
N OF CASES	325	310	307	293	295
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.763	0.665	0.534	0.454	0.210
STANDARD DEV	0.426	0.473	0.500	0.499	0.408

	O(11)	O(12)	O(13)	O(14)	O(15)
N OF CASES	332	332	334	312	327
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.919	0.810	0.847	0.381	0.572
STANDARD DEV	0.274	0.393	0.360	0.487	0.496

	O(16)	O(17)	O(18)	O(19)	O(20)
N OF CASES	322	324	326	310	316
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.783	0.821	0.595	0.461	0.886
STANDARD DEV	0.413	0.384	0.492	0.499	0.318

TOTAL OBSERVATIONS: 355

	U(1)	U(2)	U(3)	U(4)	U(5)
N OF CASES	314	311	313	311	310
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
MEAN	0.857	0.656	0.869	0.859	0.000
STANDARD DEV	0.351	0.476	0.338	0.349	0.000

	U(6)	U(7)	U(8)	U(9)	U(10)
N OF CASES	311	302	295	272	277
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.900	0.768	0.831	0.621	0.386
STANDARD DEV	0.300	0.423	0.376	0.486	0.488

	U(11)	U(12)	U(13)	U(14)	U(15)
N OF CASES	300	300	296	288	288
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.923	0.913	0.841	0.913	0.642
STANDARD DEV	0.267	0.282	0.366	0.282	0.480

	U(16)	U(17)	U(18)	U(19)	U(20)
N OF CASES	298	296	296	275	284
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.896	0.834	0.730	0.604	0.915
STANDARD DEV	0.306	0.372	0.445	0.490	0.279

TOTAL OBSERVATIONS: 190

	O(1)	O(2)	O(3)	O(4)	O(5)
N OF CASES	154	148	155	151	144
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
MEAN	0.656	0.588	0.897	0.762	0.000
STANDARD DEV	0.477	0.494	0.305	0.428	0.000

	O(6)	O(7)	O(8)	O(9)	O(10)
N OF CASES	149	146	136	140	139
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.732	0.589	0.500	0.364	0.094
STANDARD DEV	0.445	0.494	0.502	0.483	0.292

	O(11)	O(12)	O(13)	O(14)	O(15)
N OF CASES	153	152	151	143	146
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.882	0.743	0.821	0.315	0.493
STANDARD DEV	0.323	0.438	0.384	0.466	0.502

	O(16)	O(17)	O(18)	O(19)	O(20)
N OF CASES	152	152	153	141	150
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.776	0.724	0.490	0.369	0.920
STANDARD DEV	0.418	0.449	0.502	0.484	0.272

TOTAL OBSERVATIONS: 190

	U(1)	U(2)	U(3)	U(4)	U(5)
N OF CASES	147	143	146	147	140
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
MEAN	0.857	0.517	0.842	0.762	0.000
STANDARD DEV	0.351	0.501	0.366	0.427	0.000

	U(6)	U(7)	U(8)	U(9)	U(10)
N OF CASES	143	142	129	132	126
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.846	0.690	0.760	0.447	0.167
STANDARD DEV	0.362	0.464	0.429	0.499	0.374

	U(11)	U(12)	U(13)	U(14)	U(15)
N OF CASES	153	153	153	147	147
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.902	0.824	0.765	0.816	0.449
STANDARD DEV	0.298	0.382	0.426	0.389	0.499

	U(16)	U(17)	U(18)	U(19)	U(20)
N OF CASES	149	149	149	133	142
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.852	0.792	0.651	0.489	0.887
STANDARD DEV	0.356	0.407	0.478	0.502	0.317

3.4.1 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. EJECUCIÓN DE LAS OPERACIONES: HIPÓTESIS Y SU CONFIRMACIÓN ESTADÍSTICA.

Fichero: LAGUNA2.sys

¿Mejora la ejecución de las operaciones después de la instrucción?

LEVELS ENCOUNTERED DURING PROCESSING ARE:

GRUPO		SEXO		CURSO		
1.000	2.000	h	m	3.000	4.000	5.000

NUMBER OF CASES PROCESSED: 418

DEPENDENT VARIABLE MEANS

OP1	OP2
4.622	4.995

UNIVARIATE REPEATED MEASURES ANALYSIS

BETWEEN SUBJECTS

SOURCE	SS	DF	MS	F	P
GRUPO	2.417	1	2.417	0.987	0.321
SEXO$	1.616	1	1.616	0.660	0.417
CURSO	89.816	2	44.908	18.345	0.000
GRUPO*SEXO$	1.438	1	1.438	0.587	0.444
GRUPO*CURSO	17.651	2	8.825	3.605	0.028
SEXO$*CURSO	5.757	2	2.879	1.176	0.310
GRUPO*SEXO$*CURSO	12.055	2	6.027	2.462	0.087
ERROR	993.878	406	2.448		

WITHIN SUBJECTS

SOURCE	SS	DF	MS	F	P	G-G	H-F
a	32.550	1	32.550	24.774	0.000	.	.
a*GRUPO	2.728	1	2.728	2.076	0.150	.	.
a*SEXO$	0.302	1	0.302	0.229	0.632	.	.
a*CURSO	3.832	2	1.916	1.458	0.234	.	.
a*GRUPO*SEXO$	0.185	1	0.185	0.141	0.708	.	.
a*GRUPO*CURSO	1.233	2	0.616	0.469	0.626	.	.
a*SEXO$*CURSO	3.627	2	1.814	1.380	0.253	.	.
a*GRUPO*SEXO$*CURSO	2.481	2	1.240	0.944	0.390	.	.
ERROR	533.446	406	1.314				

GREENHOUSE-GEISSER EPSILON: .
HUYNH-FELDT EPSILON : .

TOTAL OBSERVATIONS: 418

	OP1	OP2
N OF CASES	418	418
MINIMUM	0.000	0.000
MAXIMUM	6.000	6.000
MEAN	4.622	4.995
STANDARD DEV	1.440	1.387

GRUPO=1
TOTAL OBSERVATIONS: 295

	OP1	OP2	GLOBAL2
N OF CASES	295	295	295
MINIMUM	0.000	0.000	1.000
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	4.658	4.966	4.812
STANDARD DEV	1.415	1.442	1.176

GRUPO=2
TOTAL OBSERVATIONS: 123

	OP1	OP2	GLOBAL2
N OF CASES	123	123	123
MINIMUM	0.000	0.000	1.000
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	4.537	5.065	4.801
STANDARD DEV	1.500	1.246	1.125

SEXO$=H
TOTAL OBSERVATIONS: 210

	GLOBAL2
N OF CASES	210
MINIMUM	1.000
MAXIMUM	6.000
MEAN	4.698
STANDARD DEV	1.215

SEXO$=M
TOTAL OBSERVATIONS: 208

	GLOBAL2
N OF CASES	208
MINIMUM	1.000
MAXIMUM	6.000
MEAN	4.921
STANDARD DEV	1.092

CURSO=3
TOTAL OBSERVATIONS: 83

	GLOBAL2
N OF CASES	83
MINIMUM	1.000
MAXIMUM	6.000
MEAN	4.247
STANDARD DEV	1.243

CURSO=4
TOTAL OBSERVATIONS: 125

	GLOBAL2
N OF CASES	125
MINIMUM	1.500
MAXIMUM	6.000
MEAN	4.804
STANDARD DEV	1.164

CURSO=5
TOTAL OBSERVATIONS: 210

	GLOBAL2
N OF CASES	210
MINIMUM	1.000
MAXIMUM	6.000
MEAN	5.033
STANDARD DEV	1.047

GRUPO=1, CURSO=3
TOTAL OBSERVATIONS: 59

	OP1	OP2	GLOBAL2
N OF CASES	59	59	59
MINIMUM	0.000	0.000	2.000
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	4.136	4.644	4.390
STANDARD DEV	1.408	1.627	1.214

GRUPO=1, CURSO=4
TOTAL OBSERVATIONS: 85

	OP1	OP2	GLOBAL2
N OF CASES	85	85	85
MINIMUM	1.000	1.000	1.500
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	4.729	4.988	4.859
STANDARD DEV	1.409	1.524	1.172

GRUPO=1, CURSO=5
TOTAL OBSERVATIONS: 151

	OP1	OP2	GLOBAL2
N OF CASES	151	151	151
MINIMUM	0.000	0.000	1.000
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	4.821	5.079	4.950
STANDARD DEV	1.381	1.304	1.131

GRUPO=2, CURSO=3
TOTAL OBSERVATIONS: 24

	OP1	OP2	GLOBAL2
N OF CASES	24	24	24
MINIMUM	0.000	0.000	1.000
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	3.500	4.292	3.896
STANDARD DEV	1.532	1.706	1.268

GRUPO=2, CURSO=4

TOTAL OBSERVATIONS: 40

	OP1	OP2	GLOBAL2
N OF CASES	40	40	40
MINIMUM	1.000	2.000	1.500
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	4.350	5.025	4.688
STANDARD DEV	1.626	1.209	1.153

GRUPO=2, CURSO=5

TOTAL OBSERVATIONS: 59

	OP1	OP2	GLOBAL2
N OF CASES	59	59	59
MINIMUM	2.000	3.000	3.000
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	5.085	5.407	5.246
STANDARD DEV	1.119	0.873	0.762

3.4.2. DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. EJECUCIÓN DE LAS OPERACIONES: TABLAS DE PORCENTAJES GLOBALES, POR CURSOS Y POR SEXOS.

Pretest - Grupo experimental:

Fichero: etc1.sys (ordenados por cursos)
Fichero: etc2.sys (ordenados por sexos)
Variables: O (21) a O (26)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Postest - Grupo experimental:

Fichero: otc1.sys (ordenados por cursos)
Fichero: otc2.sys (ordenados por sexos)

Variables: U (21) a U (26)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Pretest - Grupo control:

Fichero: cetc1.sys (ordenados por cursos)
Fichero: cetc2.sys (ordenados por sexos)

Variables: O (21) a O (26)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Postest - Grupo control:

Fichero: cotc1.sys (ordenados por cursos)
Fichero: cotc2.sys (ordenados por sexos)

Variables: U (21) a U (26)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

PRETEST - GRUPO EXPERIMENTAL

Porcentajes de aciertos en los ítems del pretest, correspondientes a la ejecución de las operaciones.

Ítem	Global	3º	4º	5º	h	m
O(21)	78%	76%	78%	79.5%	74%	83%
O(22)	72%	54.5%	73%	78%	67%	77%
O(23)	61.5%	54.5%	63%	63%	54%	69%
O(24)	80%	79%	76.5%	84%	75%	85%
O(25)	65%	50%	67.5%	70%	59.5%	71%
O(26)	74%	71%	67.5%	81%	71%	78%

POSTEST - GRUPO EXPERIMENTAL

Porcentajes de aciertos en los ítems del postest, correspondientes a la ejecución de las operaciones.

Ítem	Global	3º	4º	5º	h	m
U(21)	73.5%	70%	64%	82%	67.5%	80%
U(22)	70%	68%	58.5%	79.5%	64%	76%
U(23)	67%	64%	54%	79%	60%	74.5%
U(24)	73%	79%	60%	80%	67.5%	78.5%
U(25)	70.5%	80%	58%	76%	64%	77%
U(26)	70.5%	76%	61%	75%	64%	77%

PRETEST - GRUPO CONTROL

Porcentajes de aciertos en los ítems del pretest, correspondientes a la ejecución de las operaciones.

Ítem	Global	3º	4º	5º	h	m
O(21)	66%	51%	84%	62%	63%	70%
O(22)	60%	43%	80%	56.5%	57%	65%
O(23)	50%	8%	70%	61%	49.5%	51%
O(24)	70.5%	71.5%	80%	63.5%	71%	70%
O(25)	57%	39%	66%	62%	55%	61%
O(26)	64%	49%	84%	60%	61%	69%

POSTEST - GRUPO CONTROL

Porcentajes de aciertos en los ítems del postest, correspondientes a la ejecución de las operaciones.

Ítem	Global	3º	4º	5º	h	m
U(21)	67%	49%	62.5%	80%	65.5%	69%
U(22)	63%	41%	62.5%	75%	62%	64%
U(23)	56%	31%	50%	75%	56%	57%
U(24)	66%	37%	62.5%	85%	66%	65%
U(25)	59%	31%	62.5%	73%	59%	58%
U(26)	63%	31%	61%	84%	65.5%	60%

3.4.3 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. EJECUCIÓN DE LAS OPERACIONES: MEDIAS Y OTROS DATOS.

Pretest - Grupo experimental:

Fichero: etc1.sys
Variables: O (21) a O (26)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Postest - Grupo experimental:

Fichero: otc1.sys

Variables: U (21) a U (26)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Pretest - Grupo control:

Fichero: cetc1.sys

Variables: O (21) a O (26)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Postest - Grupo control:

Fichero: cotc1.sys

Variables: U (21) a U (26)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

TOTAL OBSERVATIONS: 355

	O(21)	O(22)	O(23)	O(24)	O(25)
N OF CASES	304	300	288	309	306
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.914	0.850	0.757	0.922	0.758
STANDARD DEV	0.280	0.358	0.430	0.268	0.429

	O(26)
N OF CASES	298
MINIMUM	0.000
MAXIMUM	1.000
MEAN	0.886
STANDARD DEV	0.318

TOTAL OBSERVATIONS: 355

	U(21)	U(22)	U(23)	U(24)	U(25)
N OF CASES	289	282	272	279	276
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.903	0.883	0.879	0.928	0.906
STANDARD DEV	0.296	0.322	0.327	0.258	0.293

	U(26)
N OF CASES	274
MINIMUM	0.000
MAXIMUM	1.000
MEAN	0.912
STANDARD DEV	0.283

TOTAL OBSERVATIONS: 190

	O(21)	O(22)	O(23)	O(24)	O(25)
N OF CASES	149	144	113	154	150
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.839	0.792	0.841	0.870	0.727
STANDARD DEV	0.369	0.408	0.368	0.337	0.447

	O(26)
N OF CASES	140
MINIMUM	0.000
MAXIMUM	1.000
MEAN	0.871
STANDARD DEV	0.336

TOTAL OBSERVATIONS: 190

	U(21)	U(22)	U(23)	U(24)	U(25)
N OF CASES	141	140	134	139	137
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.901	0.850	0.799	0.899	0.818
STANDARD DEV	0.300	0.358	0.403	0.302	0.388

	U(26)
N OF CASES	133
MINIMUM	0.000
MAXIMUM	1.000
MEAN	0.902
STANDARD DEV	0.298

3.5.1 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. PROBLEMAS INVENTADOS: HIPÓTESIS Y SU CONFIRMACIÓN ESTADÍSTICA.

Fichero: LAGUNA3.sys

¿Hay diferencias significativas en la invención de los problemas antes y después de la instrucción?

LEVELS ENCOUNTERED DURING PROCESSING ARE:

GRUPO		SEXO		CURSO		
1.000	2.000	h	m	3.000	4.000	5.000

NUMBER OF CASES PROCESSED: 381

DEPENDENT VARIABLE MEANS

IN1	IN2
4.207	4.680

UNIVARIATE REPEATED MEASURES ANALYSIS

BETWEEN SUBJECTS

SOURCE	SS	DF	MS	F	P
GRUPO	18.020	1	18.020	4.019	0.046
SEXO$	1.135	1	1.135	0.253	0.615
CURSO	136.894	2	68.447	15.264	0.000
GRUPO*SEXO$	10.014	1	10.014	2.233	0.136
GRUPO*CURSO	17.297	2	8.649	1.929	0.147
SEXO$*CURSO	19.058	2	9.529	2.125	0.121
GRUPO*SEXO$*CURSO	9.947	2	4.973	1.109	0.331
ERROR	1654.710	369	4.484		

WITHIN SUBJECTS

SOURCE	SS	DF	MS	F	P	G-G	H-F
a	24.094	1	24.094	14.743	0.000	.	.
a*GRUPO	0.417	1	0.417	0.255	0.614	.	.
a*SEXO$	1.264	1	1.264	0.774	0.380	.	.
a*CURSO	0.393	2	0.197	0.120	0.887	.	.
a*GRUPO*SEXO$	0.208	1	0.208	0.127	0.721	.	.
a*GRUPO*CURSO	1.244	2	0.622	0.381	0.684	.	.
a*SEXO$*CURSO	4.264	2	2.132	1.304	0.273	.	.
a*GRUPO*SEXO$*CURSO	0.005	2	0.002	0.002	0.998	.	.
ERROR	603.059	369	1.634				

GREENHOUSE-GEISSER EPSILON: .
HUYNH-FELDT EPSILON : .

TOTAL OBSERVATIONS: 381

	IN1	IN2
N OF CASES	381	381
MINIMUM	0.000	0.000
MAXIMUM	6.000	6.000
MEAN	4.207	4.680
STANDARD DEV	1.868	1.763

GRUPO=1
TOTAL OBSERVATIONS: 284

	IN1	IN2	GLOBAL3
N OF CASES	284	284	284
MINIMUM	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	4.264	4.775	4.519
STANDARD DEV	1.820	1.655	1.483

GRUPO=2
TOTAL OBSERVATIONS: 97

	IN1	IN2	GLOBAL3
N OF CASES	97	97	97
MINIMUM	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	4.041	4.402	4.222
STANDARD DEV	2.005	2.029	1.821

SEXO$=H
TOTAL OBSERVATIONS: 188

	GLOBAL3
N OF CASES	188
MINIMUM	0.000
MAXIMUM	6.000
MEAN	4.229
STANDARD DEV	1.623

SEXO$=M
TOTAL OBSERVATIONS: 193

	GLOBAL3
N OF CASES	193
MINIMUM	0.000
MAXIMUM	6.000
MEAN	4.653
STANDARD DEV	1.509

CURSO=3
TOTAL OBSERVATIONS: 72

	GLOBAL3
N OF CASES	72
MINIMUM	0.500
MAXIMUM	6.000
MEAN	3.771
STANDARD DEV	1.508

CURSO=4
TOTAL OBSERVATIONS: 121

	GLOBAL3
N OF CASES	121
MINIMUM	0.000
MAXIMUM	6.000
MEAN	4.227
STANDARD DEV	1.818

CURSO=5
TOTAL OBSERVATIONS: 188

	GLOBAL3
N OF CASES	188
MINIMUM	0.000
MAXIMUM	6.000
MEAN	4.840
STANDARD DEV	1.311

GRUPO=1, CURSO=3
TOTAL OBSERVATIONS: 55

	IN1	IN2	GLOBAL3
N OF CASES	55	55	55
MINIMUM	0.000	0.000	1.000
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	3.564	4.127	3.845
STANDARD DEV	1.697	1.826	1.420

GRUPO=1, CURSO=4
TOTAL OBSERVATIONS: 87

	IN1	IN2	GLOBAL3
N OF CASES	87	87	87
MINIMUM	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	4.149	4.724	4.437
STANDARD DEV	1.974	1.750	1.610

GRUPO=1, CURSO=5
TOTAL OBSERVATIONS: 142

	IN1	IN2	GLOBAL3
N OF CASES	142	142	142
MINIMUM	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	4.606	5.056	4.831
STANDARD DEV	1.688	1.453	1.334

GRUPO=2, CURSO=3
TOTAL OBSERVATIONS: 17

	IN1	IN2	GLOBAL3
N OF CASES	17	17	17
MINIMUM	0.000	0.000	0.500
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	3.294	3.765	3.529
STANDARD DEV	1.829	2.166	1.789

GRUPO=2, CURSO=4

TOTAL OBSERVATIONS: 34

	IN1	IN2	GLOBAL3
N OF CASES	34	34	34
MINIMUM	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	3.588	3.794	3.691
STANDARD DEV	2.298	2.496	2.202

GRUPO=2, CURSO=5

TOTAL OBSERVATIONS: 46

	IN1	IN2	GLOBAL3
N OF CASES	46	46	46
MINIMUM	0.000	2.000	1.000
MAXIMUM	6.000	6.000	6.000
MEAN	4.652	5.087	4.870
STANDARD DEV	1.663	1.279	1.249

3.5.2 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. PROBLEMAS INVENTADOS: TABLAS DE PORCENTAJES GLOBALES, POR CURSOS Y POR SEXOS.

Pretest - Grupo experimental:

Fichero: etc1.sys (ordenados por cursos)
Fichero: etc2.sys (ordenados por sexos)
Variables: O (27) a O (32)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Postest - Grupo experimental:

Fichero: otc1.sys (ordenados por cursos)
Fichero: otc2.sys (ordenados por sexos)

Variables: U (27) a U (32)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Pretest - Grupo control:

Fichero: cetc1.sys (ordenados por cursos)
Fichero: cetc2.sys (ordenados por sexos)

Variables: O (27) a O (32)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Postest - Grupo control:

Fichero: cotc1.sys (ordenados por cursos)
Fichero: cotc2.sys (ordenados por sexos)

Variables: U (27) a U (32)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

PRETEST - GRUPO EXPERIMENTAL

Porcentajes de aciertos en los ítems del pretest, correspondientes a la invención de problemas.

Ítem	Global	3º	4º	5º	h	m
O(27)	66.5%	64%	63%	70.5%	59%	74%
O(28)	63%	45.5%	63%	71%	61%	65.5%
O(29)	56%	39%	54.5%	64%	47%	65%
O(30)	74%	70%	68%	81%	70%	79%
O(31)	68%	50%	59%	61%	62%	74%
O(32)	51.5%	39%	45%	61.5%	44%	59%

POSTEST - GRUPO EXPERIMENTAL

Porcentajes de aciertos en los ítems del postest, correspondientes a la invención de problemas.

Ítem	Global	3º	4º	5º	h	m
U(27)	70.5%	67%	61%	79%	63%	78%
U(28)	71%	64%	63.5%	79%	62%	80%
U(29)	60%	47%	56%	69%	53%	68%
U(30)	71%	80%	59%	76.5%	62%	80%
U(31)	70%	77%	58%	76%	59.5%	80%
U(32)	58.5%	51.5%	47%	70%	50%	67%

PRETEST - GRUPO CONTROL

Porcentajes de aciertos en los ítems del pretest, correspondientes a la invención de problemas.

Ítem	Global	3º	4º	5º	h	m
O(27)	44%	37%	45%	47%	38%	52%
O(28)	43%	35%	50%	43.5%	38%	51%
O(29)	30%	4%	43%	36.5%	26%	36%
O(30)	47%	33%	55%	50.5%	43%	53%
O(31)	47%	33%	59%	48%	41.5%	56%
O(32)	33%	10%	41%	41%	30%	38%

POSTEST - GRUPO CONTROL

Porcentajes de aciertos en los ítems del postest, correspondientes a la invención de problemas.

Ítem	Global	3º	4º	5º	h	m
U(27)	44%	28.5%	41%	55%	42.5%	47%
U(28)	43%	28.5%	39%	54%	41.5%	45.5%
U(29)	38%	26.5%	32%	48%	38%	38%
U(30)	45%	26.5%	43%	58%	41%	52%
U(31)	45%	31%	39%	58%	41%	52%
U(32)	34%	18%	36%	42%	33%	36%

3.5.3 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. PROBLEMAS INVENTADOS: MEDIAS Y OTROS DATOS.

Pretest - Grupo experimental:

Fichero: etc1.sys
Variables: O (27) a O (32)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Postest - Grupo experimental:

Fichero: otc1.sys

Variables: U (27) a U (32)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Pretest - Grupo control:

Fichero: cetc1.sys

Variables: O (27) a O (32)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

Postest - Grupo control:

Fichero: cotc1.sys

Variables: U (27) a U (32)
Codificación: .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: lo hace bien.

TOTAL OBSERVATIONS: 355

	O(27)	O(28)	O(29)	O(30)	O(31)
N OF CASES	268	265	246	279	279
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.881	0.849	0.809	0.946	0.867
STANDARD DEV	0.325	0.359	0.394	0.226	0.340

	O(32)
N OF CASES	255
MINIMUM	0.000
MAXIMUM	1.000
MEAN	0.718
STANDARD DEV	0.451

TOTAL OBSERVATIONS: 355

	U(27)	U(28)	U(29)	U(30)	U(31)
N OF CASES	269	272	245	263	263
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.929	0.923	0.873	0.962	0.943
STANDARD DEV	0.257	0.267	0.333	0.192	0.232

	U(32)
N OF CASES	245
MINIMUM	0.000
MAXIMUM	1.000
MEAN	0.849
STANDARD DEV	0.359

TOTAL OBSERVATIONS: 355

	O(27)	O(28)	O(29)	O(30)	O(31)
N OF CASES	101	97	80	104	102
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.822	0.845	0.713	0.865	0.882
STANDARD DEV	0.385	0.363	0.455	0.343	0.324

	O(32)
N OF CASES	96
MINIMUM	0.000
MAXIMUM	1.000
MEAN	0.656
STANDARD DEV	0.477

TOTAL OBSERVATIONS: 190

	U(27)	U(28)	U(29)	U(30)	U(31)
N OF CASES	92	89	85	96	96
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
MEAN	0.913	0.921	0.847	0.896	0.896
STANDARD DEV	0.283	0.271	0.362	0.307	0.307

	U(32)
N OF CASES	86
MINIMUM	0.000
MAXIMUM	1.000
MEAN	0.756
STANDARD DEV	0.432

3.5.4 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. PROBLEMAS INVENTADOS: TABLAS DE PORCENTAJES GLOBALES, POR CURSOS Y POR SEXOS, SEGÚN LAS CATEGORÍAS SEMÁNTICAS DE LOS PROBLEMAS.

Pretest - Grupo experimental:
Fichero: piee4.sys (ordenados por cursos)
Fichero: piee3.sys (ordenados por sexos)
Variables: S(1) a S (6)
Codificación:
S (1), S(2), S (4), S(5) .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: prob. tipo cambio, 2: prob. tipo combinación, 3: prob. tipo comparación, 4: prob. tipo igualación.
S(3): .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: prob. tipo reparto, 2: tipo agrupación, 3: prob. tipo comparación, 4: problema tipo producto cartesiano.
S(6) : .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: prob. tipo razón, 2: prob. tipo comparación, 3: problema tipo producto cartesiano.

Postest - Grupo experimental:
Fichero: pioe4.sys (ordenados por cursos)
Fichero: pioe3.sys (ordenados por sexos)
Variables: T(1) a T (6)
Codificación:
T (1), T(2), T (4), T(5) .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: prob. tipo cambio, 2: prob. tipo combinación, 3: prob. tipo comparación, 4: prob. tipo igualación.
T(3): .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: prob. tipo reparto, 2: tipo agrupación, 3: prob. tipo comparación, 4: problema tipo producto cartesiano.
T(6): .: no contesta, 0: lo hace mal, 1: prob. tipo razón, 2: prob. tipo comparación, 3: problema tipo producto cartesiano.

Pretest - Grupo control:
Fichero: piec4.sys (ordenados por cursos)
Fichero: piec3.sys (ordenados por sexos)
Variables: S(1) a S (6), con la misma codificación.

Postest - Grupo control:
Fichero: pioc4.sys (ordenados por cursos)
Fichero: pioc3.sys (ordenados por sexos)
Variables: T(1) a T (6), con la misma codificación.

PRETEST - GRUPO EXPERIMENTAL

Porcentajes de problemas de las distintas categorías semánticas.

Resultados globales:

Ítem	-	0	1	2	3	4
S(1)	26%	8%	29%	34%	2.5%	0.5%
S(2)	26.5%	11%	53%	0.5%	5%	4%
S(3)	32%	13	46.5%	6%	2.5%	0%
S(4)	22%	5%	25%	46%	2%	0%
S(5)	22%	11%	58%	0%	6%	2%
S(6)	30%	19%	39%	12%	0%	

Resultados por cursos:

3º:

Ítem	-	0	1	2	3	4
S(1)	24%	13.5%	18%	42.5%	0%	1.5%
S(2)	26%	30%	35%	0%	4.5%	4.5%
S(3)	41%	21	30%	1.5	5%	1.5%
S(4)	24%	6%	12%	55%	3%	0%
S(5)	23%	20	53%	0%	2%	3%
S(6)	35%	26%	24%	15%	0%	

4º:

Ítem	-	0	1	2	3	4
S(1)	26%	11%	32%	28%	3%	0%
S(2)	28%	10%	54%	1%	3%	5%
S(3)	30%	15.5%	46%	6	2.5%	0%
S(4)	28%	4%	31%	36%	1%	0%
S(5)	28%	11	55%	0%	6%	1%
S(6)	34%	21%	33%	12%	0%	

5º:

Ítem	-	0	1	2	3	4
S(1)	26.5%	3%	31%	35.5%	3%	1%
S(2)	26%	5%	59%	1%	7%	3%
S(3)	31%	7%	53%	7	2%	0%
S(4)	17%	6%	25%	49%	3%	0%
S(5)	18%	7%	63%	0%	9%	3%
S(6)	24.5%	15%	49%	11%	0.5%	

Por sexos:

Niños:

Ítem	-	0	1	2	3	4
S(1)	32%	9.5%	26%	28%	4%	0.5%
S(2)	30%	10%	46%	1%	6.5%	6.5%
S(3)	38.5%	14.5%	35%	9	3%	0%
S(4)	24%	6%	24%	43%	3%	0%
S(5)	25%	13%	49%	0%	9%	4%
S(6)	34%	20%	32%	14%	0%	

Niñas:

Ítem	-	0	1	2	3	4
S(1)	20%	6.5%	32%	40%	1%	0.5%
S(2)	23%	12.5%	59%	0%	4%	1.5%
S(3)	26%	11%	58%	2	2%	1%
S(4)	20%	4%	26%	49%	1%	0%
S(5)	19%	9%	68%	0%	4%	0%
S(6)	25%	19%	45%	10%	1%	

POSTEST - GRUPO EXPERIMENTAL

Porcentajes de problemas de las distintas categorías semánticas.

Resultados globales:

Ítem	-	0	1	2	3	4
T(1)	22%	5%	48%	20%	5%	0%
T(2)	21%	6%	67.5%	0.5%	4%	1%
T(3)	30%	7%	54%	7%	2%	0%
T(4)	26%	3%	38%	29%	4%	0%
T(5)	26%	4%	62.5%	0.5%	6%	1%
T(6)	31.5%	10%	42.5%	15.5%	0.5%	

Resultados por cursos:

3º:

Ítem	-	0	1	2	3	4
T(1)	24%	9%	37%	24%	6%	0%
T(2)	24%	12%	58%	0%	3%	3%
T(3)	39%	14	41%	6%	0%	0%
T(4)	16.5%	4.5%	47%	26%	6%	0%
T(5)	15%	7.5%	64%	0%	12%	1.5%
T(6)	27%	21%	32%	20%	0%	

4º:

Ítem	-	0	1	2	3	4
T(1)	24%	7%	44%	22%	3%	0%
T(2)	22%	6%	66%	1%	4%	1%
T(3)	28%	7%	56%	6	2%	1%
T(4)	16.5%	4.5%	47%	26%	6%	0%
T(5)	36%	5.5%	53%	1%	3%	1.5%
T(6)	41.5%	11%	41%	6.5%	0%	

5º:

Ítem	-	0	1	2	3	4
T(1)	19%	2%	56%	16%	7%	0%
T(2)	18%	3%	73%	1%	4%	1%
T(3)	28%	5%	57%	8%	2%	0%
T(4)	22%	1%	36%	37%	4%	0%
T(5)	22%	2%	69%	1%	5%	1%
T(6)	26%	4%	48%	21%	1%	

Por sexos:

Niños:

Ítem	-	0	1	2	3	4
T(1)	30%	4.5%	41.5%	18.5%	5.5%	0%
T(2)	29%	5%	57%	1%	6%	2%
T(3)	39%	7%	45%	7	1.5%	0.5%
T(4)	36%	2%	32%	25%	5%	0%
T(5)	35%	4.5%	51%	0.5%	69%	24%
T(6)	41.5%	8%	36.5%	13%	0.5%	

Niñas:

Ítem	-	0	1	2	3	4
T(1)	13.5%	5.5%	55%	21%	5%	0%
T(2)	12%	6%	79%	0%	2%	1%
T(3)	21%	8%	63%	6%	2%	0%
T(4)	16%	3.5%	45%	32%	3.5%	0%
T(5)	16%	4%	74%	0.5%	5.5%	0%
T(6)	21%	11%	49%	18%	1%	

PRETEST - GRUPO CONTROL

Porcentajes de problemas de las distintas categorías semánticas.

Resultados globales:

Ítem	-	0	1	2	3	4
S(1)	47%	9%	17%	25%	1%	0%
S(2)	49%	8%	36%	0%	3%	4%
S(3)	58%	12	24%	4%	2%	0%
S(4)	42%	8.5%	17.5%	31%	1%	0%
S(5)	43%	7.5%	43%	0%	5.5%	1%
S(6)	45%	18%	22%	14%	1%	

Resultados por cursos:

3º:

Ítem	-	0	1	2	3	4
S(1)	55%	10%	12%	23%	0%	0%
S(2)	59%	8%	31%	0%	0%	2%
S(3)	90%	6%	4%	0	0%	0%
S(4)	65.5%	4%	16.5%	14%	0%	0%
S(5)	65%	2%	27%	0%	4%	2%
S(6)	69.5%	18.5%	8%	2%	2%	

4º:

Ítem	-	0	1	2	3	4
S(1)	36%	20%	16%	26.5%	1.5%	0%
S(2)	36%	14%	45%	0%	5%	0%
S(3)	36%	21%	41%	2%	0%	0%
S(4)	27%	20%	16%	37%	0%	0%
S(5)	30.5%	12.5%1	50%	0%	7%	0%
S(6)	32%	23%	18%	27%	0%	

5º:

Ítem	-	0	1	2	3	4
S(1)	51%	2%	21%	25%	1%	0%
S(2)	53%	4%	34%	0%	2%	7%
S(3)	54%	9%	25%	8%	4%	0%
S(4)	39%	4%	19%	36%	2%	0%
S(5)	39%	7%	48%	0%	5%	1%
S(6)	40%	14%	33%	13%	0%	

Por sexos:

Niños:

Ítem	-	0	1	2	3	4
S(1)	55%	7%	14%	24%	0%	0%
S(2)	57%	5%	32%	0%	2.5%	3.5%
S(3)	62%	12%	19.5%	4.5%	2%	0%
S(4)	47%	7%	18%	27%	1%	0%
S(5)	49.5%	7%	38%	0%	3.5%	2%
S(6)	51%	16%	22%	10%	1%	

Niñas:

Ítem	-	0	1	2	3	4
S(1)	36%	13%	22%	26%	3%	0%
S(2)	39%	11.5%	43%	0%	2.5%	4%
S(3)	52%	12%	31%	4%	1%	0%
S(4)	35%	10.5%	17%	36.5%	1%	0%
S(5)	34%	8%	50%	0%	8%	0%
S(6)	36%	21%	22%	21%	0%	

POSTEST - GRUPO EXPERIMENTAL

Porcentajes de problemas de las distintas categorías semánticas.

Resultados globales:

Ítem	-	0	1	2	3	4
T(1)	48%	4%	28%	14%	6%	0%
T(2)	51%	3%	40%	0%	4%	1%
T(3)	53.5%	7%	33%	5%	1.5%	0%
T(4)	49.5%	5%	19%	21.5%	5%	0%
T(5)	49.5%	5%	42%	0%	3%	0.5%
T(6)	55%	11%	18%	16%	0%	

Resultados por cursos:

3º:

Ítem	-	0	1	2	3	4
T(1)	63%	8%	16%	6%	6%	%
T(2)	65%	6%	25%	0%	4%	0%
T(3)	67%	6%	25%	2	0%	0%
T(4)	68%	6%	12%	12%	2%	0%
T(5)	67%	2%	29%	0%	2%	0%
T(6)	72%	10%	10%	8%	0%	

4º:

Ítem	-	0	1	2	3	4
T(1)	46%	2%	29%	16%	7%	0%
T(2)	50%	4%	39%	0%	5%	2%
T(3)	53.5%	9%	30.5%	3.5%	3.5%	0%
T(4)	48%	9%	21.5%	16%	5.5%	0%
T(5)	50%	11%	37%	0%	0%	2%
T(6)	48%	16%	11%	25%	0%	

5º:

Ítem	-	0	1	2	3	4
T(1)	41%	3.5%	34%	16.5%	5%	0%
T(2)	44%	2%	49%	0%	4%	1%
T(3)	46%	6%	40%	7%	1%	0%
T(4)	40%	2%	21%	31%	6%	0%
T(5)	39%	3%	53%	0%	5%	0%
T(6)	50%	8%	28%	14%	0%	

Por sexos:

Niños:

Ítem	-	0	1	2	3	4
T(1)	50.5%	3.5%	30%	11.5%	4.5%	0%
T(2)	54%	2%	40%	0%	2%	2%
T(3)	56.5%	4.5%	33%	3.5%	2.5%	0%
T(4)	55%	4.5%	22%	14%	4.5%	0%
T(5)	55%	4%	38%	0%	2%	1%
T(6)	62%	5%	17%	16%	0%	

Niñas:

Ítem	-	0	1	2	3	4
T(1)	45%	5%	25%	17%	8%	0%
T(2)	47%	5%	40%	0%	8%	0%
T(3)	56.5%	4.5%	33%	3.5%	2.5%	0%
T(4)	42%	6.5%	14%	32.5%	5%	0%
T(5)	41.5%	6.5%	48%	0%	4%	0%
T(6)	44%	19%	21%	16%	0%	

3.6.1 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. ESCALA DE ACTITUDES: VALIDEZ Y FIABILIDAD DE LAS ESCALAS.

Escala de actitud hacia las Matemáticas.

Validez:
Fichero: DE.sys
Variables: AC, PRET, POST,NOTP.
AC: puntuación según la escala Likert de la actitud hacia las Matemáticas.
PRET: puntuación obtenida en el pretest.
POST: puntuación obtenida en el postest.
NOTP: nota de Matemáticas de cada alumno, asignada por el profesor.

Fiabilidad:
Fichero: ACMOD.sys para la escala de la actitud hacia las matemáticas.
Variables: I (1) a I (25).(sin I(3)).
I (i), codificados .: no contesta, 0: desfavorable, 1: sin opinión, 2: favorable.

Escala de actitud hacia la resolución de problemas.

Validez:
Fichero: DE.sys
Variables: AP, PRET, POST,NOTP.
AP: puntuación según la escala Likert de la actitud hacia la resolución de problemas.
PRET: puntuación obtenida en el pretest.
POST: puntuación obtenida en el postest.
NOTP: nota de Matemáticas de cada alumno, asignada por el profesor.

Fiabilidad:
Fichero: APMOD.sys para la escala de la actitud hacia la resolución de problemas.

Variables: A (1) a A (25) (sin A(3)).

A (i), codificados .: no contesta, 0: desfavorable, 1: sin opinión, 2: favorable.

DATA BELOW ARE BASED ON 284 COMPLETE CASES FOR 24 DATA ITEMS.

TEST SCORE STATISTICS

	TOTAL	TOTAL/ 24	ODD	EVEN
MEAN	36.472	1.520	17.873	18.599
STD DEV	6.981	0.291	3.935	3.935
STD ERR	0.415	0.017	0.234	0.234
MAXIMUM	48.000	2.000	24.000	24.000
MINIMUM	8.000	0.333	5.000	3.000
N CASES	284	284	284	284

INTERNAL CONSISTENCY DATA

SPLIT-HALF CORRELATION	.574
SPEARMAN-BROWN COEFFICIENT	.729
GUTTMAN (RULON) COEFFICIENT	.729
COEFFICIENT ALPHA - ALL ITEMS	.787
COEFFICIENT ALPHA - ODD ITEMS	.622
COEFFICIENT ALPHA - EVEN ITEMS	.716

APPROXIMATE STANDARD ERROR OF MEASUREMENT OF TOTAL SCORE
FOR 15 Z-SCORE INTERVALS

Z SCORE	TOTAL SCORE	N	STD ERROR
< -3.25	< 13.783	2	2.000
-3.25 TO -2.75	13.783 TO 17.274	5	4.290
-2.75 TO -2.25	17.274 TO 20.764	3	4.509
-2.25 TO -1.75	20.764 TO 24.255	9	5.175
-1.75 TO -1.25	24.255 TO 27.746	5	7.430
-1.25 TO -.75	27.746 TO 31.236	37	4.615
-.75 TO -.25	31.236 TO 34.727	37	4.191
-.25 TO .25	34.727 TO 38.217	62	3.795
.25 TO .75	38.217 TO 41.708	46	3.007
.75 TO 1.25	41.708 TO 45.198	60	2.736
1.25 TO 1.75	45.198 TO 48.689	18	1.202
1.75 TO 2.25	48.689 TO 52.179	0	.
2.25 TO 2.75	52.179 TO 55.670	0	.
2.75 TO 3.25	55.670 TO 59.160	0	.
>= 3.25	>= 59.160	0	.

ITEM RELIABILITY STATISTICS

ITEM	LABEL	MEAN	STANDARD DEVIATION	ITEM-TOTAL R	RELIABILITY INDEX	EXCLUDING THIS ITEM R	EXCLUDING THIS ITEM ALPHA
1	I(1)	1.158	0.884	.374	.330	.257	.785
2	I(2)	1.729	0.588	.444	.261	.373	.778
3	I(4)	1.176	0.858	.386	.331	.274	.783
4	I(5)	1.335	0.772	.444	.343	.349	.778
5	I(6)	1.430	0.754	.549	.414	.467	.771
6	I(7)	1.394	0.809	.568	.460	.482	.770
7	I(8)	1.461	0.747	.304	.227	.202	.786
8	I(9)	1.852	0.451	.392	.177	.336	.780
9	I(10)	1.507	0.794	.552	.438	.465	.771
10	I(11)	1.493	0.739	.561	.415	.482	.770

11	I(12)	1.423	0.781	.275	.215	.167	.789
12	I(13)	1.620	0.663	.534	.354	.461	.773
13	I(14)	1.683	0.649	.545	.354	.475	.772
14	I(15)	1.680	0.610	.582	.356	.520	.770
15	I(16)	1.704	0.597	.289	.172	.208	.785
16	I(17)	1.486	0.734	.350	.257	.253	.783
17	I(18)	1.521	0.738	.437	.323	.346	.778
18	I(19)	1.662	0.643	.528	.340	.456	.773
19	I(20)	1.613	0.754	.377	.284	.279	.782
20	I(21)	0.761	0.834	.174	.145	.055	.796
21	I(22)	1.641	0.740	.420	.311	.327	.779
22	I(23)	1.908	0.354	.207	.073	.158	.786
23	I(24)	1.556	0.582	.157	.092	.075	.791
24	I(25)	1.680	0.628	.497	.312	.424	.775

PEARSON CORRELATION MATRIX

	AC	PRET	POST	NOTP
AC	1.000			
PRET	0.258	1.000		
POST	0.184	0.689	1.000	
NOTP	0.330	0.505	0.430	1.000

DATA BELOW ARE BASED ON 165 COMPLETE CASES FOR 24 DATA ITEMS.

TEST SCORE STATISTICS

	TOTAL	TOTAL/ 24	ODD	EVEN
MEAN	36.733	1.531	17.903	18.830
STD DEV	7.951	0.331	4.149	4.669
STD ERR	0.621	0.026	0.324	0.365
MAXIMUM	48.000	2.000	24.000	24.000
MINIMUM	11.000	0.458	6.000	2.000
N CASES	165	165	165	165

INTERNAL CONSISTENCY DATA

SPLIT-HALF CORRELATION	.625
SPEARMAN-BROWN COEFFICIENT	.769
GUTTMAN (RULON) COEFFICIENT	.766
COEFFICIENT ALPHA - ALL ITEMS	.839
COEFFICIENT ALPHA - ODD ITEMS	.673
COEFFICIENT ALPHA - EVEN ITEMS	.800

APPROXIMATE STANDARD ERROR OF MEASUREMENT OF TOTAL SCORE
FOR 15 Z-SCORE INTERVALS

Z SCORE	TOTAL SCORE	N	STD ERROR
< -3.25	< 10.894	0	.
-3.25 TO -2.75	10.894 TO 14.869	4	5.268
-2.75 TO -2.25	14.869 TO 18.844	2	3.808
-2.25 TO -1.75	18.844 TO 22.820	7	3.000
-1.75 TO -1.25	22.820 TO 26.795	3	3.651
-1.25 TO -.75	26.795 TO 30.770	17	3.933
-.75 TO -.25	30.770 TO 34.746	22	5.808
-.25 TO .25	34.746 TO 38.721	25	4.113
.25 TO .75	38.721 TO 42.696	48	3.995
.75 TO 1.25	42.696 TO 46.672	26	2.353
1.25 TO 1.75	46.672 TO 50.647	11	0.739
1.75 TO 2.25	50.647 TO 54.622	0	.
2.25 TO 2.75	54.622 TO 58.598	0	.
2.75 TO 3.25	58.598 TO 62.573	0	.
>= 3.25	>= 62.573	0	.

ITEM RELIABILITY STATISTICS

ITEM	LABEL	MEAN	STANDARD DEVIATION	ITEM-TOTAL R	RELIABILITY INDEX	EXCLUDING THIS ITEM R	EXCLUDING THIS ITEM ALPHA
1	A(1)	1.370	0.833	.500	.416	.415	.832
2	A(2)	1.836	0.471	.502	.236	.455	.832
3	A(4)	0.994	0.884	.415	.367	.317	.837
4	A(5)	1.394	0.744	.444	.330	.364	.834
5	A(6)	1.606	0.694	.607	.421	.548	.827
6	A(7)	1.424	0.810	.630	.510	.562	.825
7	A(8)	1.503	0.744	.448	.333	.369	.834
8	A(9)	1.848	0.500	.461	.230	.409	.833
9	A(10)	1.636	0.714	.379	.271	.298	.836
10	A(11)	1.406	0.830	.626	.520	.556	.825
11	A(12)	1.382	0.805	.228	.184	.129	.844
12	A(13)	1.570	0.724	.609	.441	.547	.827
13	A(14)	1.648	0.668	.582	.388	.522	.828
14	A(15)	1.594	0.713	.569	.406	.504	.828
15	A(16)	1.691	0.599	.354	.212	.286	.836
16	A(17)	1.430	0.826	.483	.399	.397	.833
17	A(18)	1.406	0.778	.316	.246	.225	.840
18	A(19)	1.655	0.667	.661	.440	.609	.825
19	A(20)	1.570	0.757	.371	.281	.285	.837
20	A(21)	1.067	0.895	.411	.368	.311	.837
21	A(22)	1.588	0.755	.426	.322	.344	.835
22	A(23)	1.945	0.297	.130	.039	.093	.840
23	A(24)	1.509	0.609	.403	.246	.336	.835
24	A(25)	1.661	0.628	.549	.345	.490	.829

PEARSON CORRELATION MATRIX

	ACP	PRET	POST	NOTP
ACP	1.000			
PRET	0.223	1.000		
POST	0.150	0.761	1.000	
NOTP	0.353	0.484	0.332	1.000

3.6.2 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. ESCALA DE ACTITUDES: ANÁLISIS FACTORIAL COMÚN (ROTACIÓN VARIMAX) DE LA ESCALA DE ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS.

Fichero: ACMOD.sys para la escala de la actitud hacia las matemáticas.

Variables: I (1) a I (25).(sin I(3)).

I (i), codificados .: no contesta, 0: desfavorable, 1: sin opinión, 2: favorable.

MATRIX TO BE FACTORED

	I(1)	I(2)	I(4)	I(5)	I(6)
I(1)	1.000				
I(2)	0.049	1.000			
I(4)	-0.041	0.262	1.000		
I(5)	0.268	0.138	0.028	1.000	
I(6)	0.088	0.183	0.226	0.170	1.000
I(7)	0.115	0.210	0.301	0.144	0.449
I(8)	0.076	0.076	0.066	0.032	0.104
I(9)	0.006	0.247	0.095	0.081	0.269
I(10)	0.257	0.144	0.164	0.212	0.218
I(11)	0.134	0.324	0.107	0.279	0.309
I(12)	0.071	0.035	0.068	0.104	-0.009
I(13)	0.031	0.305	0.278	0.125	0.390
I(14)	0.063	0.227	0.100	0.170	0.393
I(15)	0.146	0.327	0.094	0.213	0.253
I(16)	-0.071	0.203	0.143	0.039	0.243
I(17)	0.185	0.077	0.021	0.347	0.030
I(18)	0.073	0.171	0.150	0.071	0.338
I(19)	0.168	0.251	0.114	0.157	0.343
I(20)	0.182	0.065	0.095	0.108	0.057
I(21)	0.156	0.018	-0.005	0.092	-0.016
I(22)	0.168	0.035	0.172	0.136	0.112
I(23)	0.114	0.016	0.030	0.138	0.147
I(24)	0.061	0.019	0.030	0.142	0.041
I(25)	0.117	0.251	0.183	0.127	0.187

	I(7)	I(8)	I(9)	I(10)	I(11)
I(7)	1.000				
I(8)	0.165	1.000			
I(9)	0.285	0.150	1.000		
I(10)	0.248	0.081	0.121	1.000	
I(11)	0.317	0.149	0.240	0.258	1.000
I(12)	0.004	0.100	-0.023	0.398	0.066
I(13)	0.299	0.233	0.177	0.112	0.339
I(14)	0.278	0.142	0.237	0.223	0.341
I(15)	0.284	0.139	0.224	0.255	0.350
I(16)	0.154	0.030	0.243	0.004	0.195
I(17)	0.146	0.002	0.121	0.181	0.097
I(18)	0.251	0.202	0.094	0.126	0.213
I(19)	0.364	0.017	0.265	0.136	0.343
I(20)	0.071	-0.095	-0.303	0.293	0.052
I(21)	0.083	0.092	0.056	0.088	0.020
I(22)	0.113	-0.006	0.115	0.412	0.111
I(23)	0.015	0.066	0.047	0.040	0.159
I(24)	0.005	0.058	0.032	0.083	0.099
I(25)	0.242	0.127	0.231	0.171	0.189

	I(12)	I(13)	I(14)	I(15)	I(16)
I(12)	1.000				
I(13)	-0.023	1.000			
I(14)	0.049	0.317	1.000		
I(15)	0.099	0.299	0.384	1.000	
I(16)	-0.079	0.223	0.240	0.184	1.000
I(17)	-0.014	0.112	0.087	0.245	-0.082
I(18)	0.015	0.340	0.198	0.300	0.078
I(19)	-0.101	0.384	0.410	0.370	0.161
I(20)	0.290	0.079	0.109	0.136	0.004
I(21)	-0.007	-0.037	0.081	0.050	-0.043
I(22)	0.275	0.073	0.122	0.151	0.023
I(23)	-0.000	0.152	0.165	0.157	0.138
I(24)	-0.014	-0.036	0.038	0.036	0.119
I(25)	0.183	0.308	0.270	0.311	0.104

	I(17)	I(18)	I(19)	I(20)	I(21)
I(17)	1.000				
I(18)	0.098	1.000			
I(19)	0.221	0.326	1.000		
I(20)	0.181	0.078	0.108	1.000	
I(21)	0.121	-0.083	-0.039	-0.007	1.000
I(22)	0.094	0.020	0.093	0.496	0.043
I(23)	0.009	0.075	0.081	-0.001	-0.181
I(24)	-0.023	0.055	-0.062	0.026	-0.096
I(25)	0.116	0.186	0.325	0.229	-0.012

	I(22)	I(23)	I(24)	I(25)
I(22)	1.000			
I(23)	0.022	1.000		
I(24)	0.014	0.196	1.000	
I(25)	0.192	0.042	-0.004	1.000

```
INITIAL COMMUNALITY ESTIMATES
                        1          2          3          4          5
                         0.201      0.258      0.214      0.255      0.389
                        6          7          8          9          10
                         0.353      0.172      0.228      0.381      0.326
                        11         12         13         14         15
                         0.283      0.375      0.345      0.349      0.188
                        16         17         18         19         20
                         0.249      0.256      0.417      0.340      0.135
                        21         22         23         24
                         0.356      0.156      0.111      0.263

ITERATIVE PRINCIPAL AXIS FACTOR ANALYSIS

ITERATION   MAXIMUM CHANGE IN COMMUNALITIES
    1                    .8890
    2                    .1101
    3                    .0225
    4                    .0109
    5                    .0058
    6                    .0033
    7                    .0019
    8                    .0011
    9                    .0007
```

FINAL COMMUNALITY ESTIMATES

1	2	3	4	5
0.238	0.215	0.187	0.313	0.375
6	7	8	9	10
0.322	0.058	0.180	0.428	0.332
11	12	13	14	15
0.282	0.400	0.331	0.366	0.174
16	17	18	19	20
0.272	0.203	0.393	0.370	0.046
21	22	23	24	
0.456	0.044	0.007	0.242	

LATENT ROOTS (EIGENVALUES)

1	2	3	4	5
4.016	1.475	0.742	0.519	0.419
6	7	8	9	10
0.346	0.327	0.253	0.116	0.082
11	12	13	14	15
0.069	0.036	0.012	-0.042	-0.079
16	17	18	19	20
-0.096	-0.114	-0.152	-0.187	-0.244
21	22	23	24	
-0.283	-0.309	-0.332	-0.341	

FACTOR PATTERN

	1	2	3
I(1)	0.247	-0.284	-0.310
I(2)	0.444	0.123	0.055
I(4)	0.323	0.032	0.285
I(5)	0.357	-0.192	-0.385
I(6)	0.571	0.198	0.097
I(7)	0.555	0.111	0.033
I(8)	0.224	0.089	0.012
I(9)	0.399	0.141	0.020
I(10)	0.454	-0.468	0.056
I(11)	0.562	0.089	-0.094
I(12)	0.152	-0.465	0.208
I(13)	0.571	0.247	0.110
I(14)	0.564	0.113	-0.008
I(15)	0.592	0.010	-0.121
I(16)	0.294	0.253	0.154
I(17)	0.278	-0.193	-0.397
I(18)	0.425	0.149	0.029
I(19)	0.589	0.178	-0.123
I(20)	0.276	-0.519	0.156
I(21)	0.047	-0.111	-0.177
I(22)	0.325	-0.547	0.229
I(23)	0.190	0.072	-0.048
I(24)	0.077	-0.011	-0.033
I(25)	0.476	-0.066	0.105

VARIANCE EXPLAINED BY FACTORS

1	2	3
4.016	1.475	0.742

PERCENT OF TOTAL VARIANCE EXPLAINED

1	2	3
16.735	6.144	3.092

ROTATED FACTOR PATTERN

	1	2	3
I(1)	0.058	0.170	0.454 +
I(2)	0.456 +	0.072	0.043
I(4)	0.338 +	0.214	-0.162
I(5)	0.185	0.096	0.519 +
I(6)	0.608 +	0.072	0.017
I(7)	0.548 +	0.108	0.100
I(8)	0.240 +	0.007	0.025
I(9)	0.420 +	0.026	0.053
I(10)	0.209	0.560 +	0.265
I(11)	0.527 +	0.070	0.222
I(12)	-0.039	0.528 +	0.039
I(13)	0.631 +	0.039	-0.013
I(14)	0.551 +	0.091	0.138
I(15)	0.517 +	0.131	0.284
I(16)	0.392 +	-0.038	-0.139
I(17)	0.113	0.065	0.505 +
I(18)	0.447 +	0.032	0.050
I(19)	0.586 +	-0.009	0.223
I(20)	0.041	0.590 +	0.142
I(21)	-0.028	0.024	0.210 +
I(22)	0.082	0.663 +	0.104
I(23)	0.195 +	-0.018	0.074
I(24)	0.060	0.019	0.056
I(25)	0.409 +	0.261	0.079

VARIANCE EXPLAINED BY ROTATED FACTORS

1	2	3
3.484	1.594	1.155

PERCENT OF TOTAL VARIANCE EXPLAINED

1	2	3
14.515	6.644	4.812

MATRIX OF RESIDUALS

	I(1)	I(2)	I(4)	I(5)	I(6)
I(1)	0.000				
I(2)	-0.009	0.000			
I(4)	-0.024	0.099	0.000		
I(5)	0.006	0.024	0.029	0.000	
I(6)	0.033	-0.100	0.008	0.042	0.000
I(7)	0.019	-0.052	0.108	-0.020	0.107
I(8)	0.050	-0.035	-0.013	-0.026	-0.042
I(9)	-0.047	0.052	-0.044	-0.026	0.012
I(10)	0.029	-0.003	0.016	-0.019	0.046
I(11)	-0.009	0.069	-0.050	0.059	-0.021
I(12)	-0.034	0.013	-0.026	0.041	-0.024
I(13)	-0.006	0.014	0.055	0.011	0.004
I(14)	-0.047	-0.037	-0.083	-0.013	0.049
I(15)	-0.035	0.069	-0.063	-0.043	-0.076
I(16)	-0.024	0.033	-0.004	0.042	0.010
I(17)	-0.061	-0.001	0.051	0.058	-0.052
I(18)	0.019	-0.037	-0.000	-0.040	0.063
I(19)	0.035	-0.025	-0.046	-0.066	-0.017
I(20)	0.015	-0.002	-0.022	-0.030	-0.012
I(21)	0.059	0.021	0.034	-0.015	-0.004
I(22)	0.004	-0.054	0.019	0.004	0.013
I(23)	0.072	-0.075	-0.020	0.065	0.029
I(24)	0.029	-0.012	0.014	0.100	0.003
I(25)	0.013	0.043	0.002	-0.015	-0.082

	I(7)	I(8)	I(9)	I(10)	I(11)
I(7)	0.000				
I(8)	0.030	0.000			
I(9)	0.047	0.048	0.000		
I(10)	0.046	0.020	0.004	0.000	
I(11)	-0.002	0.017	0.005	0.050	0.000
I(12)	-0.036	0.105	-0.022	0.100	0.041
I(13)	-0.049	0.082	-0.088	-0.038	0.007
I(14)	-0.047	0.005	-0.004	0.020	0.013
I(15)	-0.042	0.007	-0.011	-0.002	0.005
I(16)	-0.042	-0.061	0.087	-0.019	0.022
I(17)	0.026	-0.038	0.046	-0.012	-0.079
I(18)	-0.002	0.094	-0.097	0.001	-0.036
I(19)	0.022	-0.130	0.007	-0.041	-0.01[illegible]
I(20)	-0.029	-0.113	-0.043	-0.084	-0.0[illegible]
I(21)	0.074	0.094	0.056	0.024	-0.013
I(22)	-0.014	-0.033	0.058	-0.004	-0.001
I(23)	-0.097	0.018	-0.038	-0.010	0.041
I(24)	-0.035	0.042	0.003	0.045	0.054
I(25)	-0.018	0.026	0.048	-0.082	-0.063

	I(12)	I(13)	I(14)	I(15)	I(16)
I(12)	0.000				
I(13)	-0.018	0.000			
I(14)	0.017	-0.032	0.000		
I(15)	0.039	-0.029	0.047	0.000	
I(16)	-0.038	-0.024	0.047	0.026	0.000
I(17)	-0.063	0.045	-0.051	0.035	-0.053
I(18)	0.014	0.057	-0.058	0.051	-0.089
I(19)	-0.082	0.017	0.057	0.004	-0.038
I(20)	-0.026	0.032	0.013	-0.003	0.030
I(21)	-0.029	-0.018	0.065	0.002	-0.002
I(22)	-0.076	-0.002	0.003	-0.008	0.030
I(23)	0.014	0.030	0.049	0.038	0.072
I(24)	-0.023	-0.073	-0.004	-0.013	0.104
I(25)	0.058	0.041	0.009	0.043	-0.035

	I(17)	I(18)	I(19)	I(20)	I(21)
I(17)	0.000				
I(18)	0.020	0.000			
I(19)	0.043	0.054	0.000		
I(20)	0.066	0.034	0.057	0.000	
I(21)	0.016	-0.082	-0.069	-0.050	0.000
I(22)	-0.010	-0.043	0.027	0.087	0.008
I(23)	-0.050	-0.016	-0.050	-0.008	-0.191
I(24)	-0.059	0.025	-0.109	0.004	-0.106
I(25)	0.013	-0.010	0.069	0.047	-0.023

	I(22)	I(23)	I(24)	I(25)
I(22)	0.000			
I(23)	0.011	0.000		
I(24)	-0.009	0.181	0.000	
I(25)	-0.022	-0.039	-0.037	0.000

3.6.3 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. ESCALA DE ACTITUDES: ANÁLISIS FACTORIAL COMÚN (ROTACIÓN VARIMAX) DE LA ESCALA DE ACTITUD HACIA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Fichero: APMOD.sys para la escala de la actitud hacia la resolución de problemas.

Variables: A (1) a A (25) (sin A(3)).

A (i), codificados .: no contesta, 0: desfavorable, 1: sin opinión, 2: favorable.

MATRIX TO BE FACTORED

	A(1)	A(2)	A(4)	A(5)	A(6)
A(1)	1.000				
A(2)	0.139	1.000			
A(4)	0.077	0.245	1.000		
A(5)	0.459	0.132	0.160	1.000	
A(6)	0.252	0.285	0.204	0.218	1.000
A(7)	0.172	0.357	0.240	0.225	0.545
A(8)	0.140	0.183	0.134	0.168	0.255
A(9)	0.135	0.461	0.217	0.177	0.265
A(10)	0.124	-0.033	0.035	0.144	0.176
A(11)	0.230	0.294	0.201	0.222	0.446
A(12)	0.088	0.021	-0.022	0.073	0.009
A(13)	0.204	0.451	0.166	0.123	0.423
A(14)	0.168	0.337	0.212	0.242	0.355
A(15)	0.345	0.344	0.150	0.244	0.486
A(16)	0.120	0.229	0.248	0.056	0.203
A(17)	0.306	0.150	0.103	0.316	0.158
A(18)	0.021	0.115	0.083	-0.119	0.308
A(19)	0.197	0.361	0.161	0.152	0.531
A(20)	0.089	0.092	-0.004	-0.022	0.058
A(21)	0.349	0.112	0.092	0.297	0.247
A(22)	0.175	0.185	0.251	0.127	0.002
A(23)	0.033	0.110	0.091	-0.040	0.013
A(24)	0.226	0.079	0.265	0.186	0.102
A(25)	0.310	0.345	0.269	0.208	0.180

	A(7)	A(8)	A(9)	A(10)	A(11)
A(7)	1.000				
A(8)	0.259	1.000			
A(9)	0.219	0.270	1.000		
A(10)	0.151	0.185	-0.035	1.000	
A(11)	0.447	0.386	0.382	0.188	1.000
A(12)	-0.035	-0.078	-0.022	0.336	-0.09[illegible]
A(13)	0.528	0.222	0.222	0.155	0.462
A(14)	0.365	0.295	0.185	0.075	0.530
A(15)	0.256	0.111	0.253	0.055	0.227
A(16)	0.208	0.159	0.167	-0.079	0.021
A(17)	0.216	0.141	0.231	0.008	0.311
A(18)	0.313	0.202	0.065	0.004	0.205
A(19)	0.597	0.228	0.280	0.233	0.450
A(20)	0.140	0.072	0.100	0.574	0.095
A(21)	0.145	0.186	0.144	0.009	0.176
A(22)	0.108	0.067	0.188	0.543	0.161
A(23)	0.147	-0.013	0.190	-0.036	0.016
A(24)	0.176	0.117	0.094	0.105	0.142
A(25)	0.247	0.262	0.358	0.090	0.392

	A(12)	A(13)	A(14)	A(15)	A(16)
A(12)	1.000				
A(13)	0.043	1.000			
A(14)	-0.021	0.364	1.000		
A(15)	0.112	0.307	0.324	1.000	
A(16)	0.006	0.238	0.168	0.373	1.000
A(17)	0.045	0.259	0.351	0.276	0.012
A(18)	0.062	0.235	0.158	0.112	0.178
A(19)	0.054	0.571	0.449	0.394	0.218
A(20)	0.429	0.105	0.048	0.092	0.068
A(21)	-0.086	0.026	0.303	0.327	0.038
A(22)	0.399	0.152	0.073	0.117	0.040
A(23)	-0.090	0.145	-0.097	0.125	0.212
A(24)	0.073	0.181	0.187	0.169	0.282
A(25)	0.053	0.346	0.323	0.234	0.124

	A(17)	A(18)	A(19)	A(20)	A(21)
A(17)	1.000				
A(18)	-0.008	1.000			
A(19)	0.303	0.282	1.000		
A(20)	0.102	0.060	0.174	1.000	
A(21)	0.281	0.048	0.191	0.024	1.000
A(22)	0.148	-0.014	0.090	0.528	-0.022
A(23)	-0.053	0.122	0.027	0.057	0.037
A(24)	0.227	0.050	0.120	0.041	0.216
A(25)	0.270	0.034	0.328	0.126	0.202

	A(22)	A(23)	A(24)	A(25)
A(22)	1.000			
A(23)	-0.046	1.000		
A(24)	0.140	0.120	1.000	
A(25)	0.191	0.063	0.293	1.000

INITIAL COMMUNALITY ESTIMATES

1	2	3	4	5
0.369	0.434	0.267	0.369	0.556
6	7	8	9	10
0.542	0.281	0.429	0.589	0.546
11	12	13	14	15
0.330	0.520	0.462	0.471	0.357
16	17	18	19	20
0.342	0.245	0.580	0.509	0.322
21	22	23	24	
0.547	0.214	0.264	0.366	

ITERATIVE PRINCIPAL AXIS FACTOR ANALYSIS

ITERATION	MAXIMUM CHANGE IN COMMUNALITIES
1	.7856
2	.2215
3	.0159
4	.0086
5	.0049
6	.0028
7	.0016
8	.0009

FINAL COMMUNALITY ESTIMATES

1	2	3	4	5
0.379	0.300	0.123	0.383	0.443
6	7	8	9	10
0.524	0.170	0.219	0.532	0.430
11	12	13	14	15
0.294	0.497	0.376	0.315	0.119
16	17	18	19	20
0.292	0.202	0.566	0.568	0.285
21	22	23	24	
0.564	0.032	0.146	0.306	

LATENT ROOTS (EIGENVALUES)

1	2	3	4	5
5.082	1.828	1.155	0.756	0.623
6	7	8	9	10
0.366	0.291	0.253	0.204	0.097
11	12	13	14	15
0.068	-0.002	-0.015	-0.045	-0.082
16	17	18	19	20
-0.119	-0.152	-0.218	-0.251	-0.266
21	22	23	24	
-0.313	-0.338	-0.415	-0.441	

FACTOR PATTERN

	1	2	3
A(1)	0.434	-0.054	-0.433
A(2)	0.529	0.095	0.107
A(4)	0.349	0.024	-0.030
A(5)	0.393	-0.015	-0.478
A(6)	0.629	0.149	0.159
A(7)	0.659	0.109	0.278
A(8)	0.409	0.051	0.015
A(9)	0.461	0.074	-0.024
A(10)	0.273	-0.672	0.080
A(11)	0.648	0.086	0.052
A(12)	0.091	-0.535	0.004
A(13)	0.648	0.064	0.272
A(14)	0.594	0.141	-0.054
A(15)	0.545	0.071	-0.114
A(16)	0.316	0.106	0.086
A(17)	0.441	0.013	-0.312
A(18)	0.274	0.095	0.344
A(19)	0.706	0.060	0.252
A(20)	0.255	-0.696	0.135
A(21)	0.355	0.131	-0.376
A(22)	0.310	-0.683	-0.047
A(23)	0.110	0.083	0.112
A(24)	0.326	-0.027	-0.198
A(25)	0.530	-0.008	-0.156

VARIANCE EXPLAINED BY FACTORS

1	2	3
5.082	1.828	1.155

PERCENT OF TOTAL VARIANCE EXPLAINED

1	2	3
21.176	7.616	4.811

ROTATED FACTOR PATTERN

	1	2	3
A(1)	0.070	0.108	0.602
A(2)	0.496	0.042	0.230
A(4)	0.259	0.055	0.231
A(5)	0.022	0.055	0.616
A(6)	0.617	0.019	0.250
A(7)	0.699	0.078	0.170
A(8)	0.338	0.047	0.231
A(9)	0.361	0.034	0.295
A(10)	0.090	0.721	0.060
A(11)	0.553	0.073	0.344
A(12)	-0.060	0.539	0.022
A(13)	0.675	0.117	0.166
A(14)	0.464	-0.003	0.401
A(15)	0.373	0.046	0.417
A(16)	0.321	-0.019	0.122
A(17)	0.163	0.057	0.512
A(18)	0.436	0.008	-0.110
A(19)	0.708	0.133	0.216
A(20)	0.102	0.746	0.003
A(21)	0.088	-0.084	0.520
A(22)	0.042	0.727	0.183
A(23)	0.171	-0.043	-0.021
A(24)	0.131	0.081	0.350
A(25)	0.318	0.115	0.438

VARIANCE EXPLAINED BY ROTATED FACTORS

1	2	3
3.549	1.997	2.519

PERCENT OF TOTAL VARIANCE EXPLAINED

1	2	3
14.788	8.320	10.495

MATRIX OF RESIDUALS

	A(1)	A(2)	A(4)	A(5)	A(6)
A(1)	0.000				
A(2)	-0.039	0.000			
A(4)	-0.086	0.061	0.000		
A(5)	0.081	-0.023	0.009	0.000	
A(6)	0.056	-0.079	-0.015	0.050	0.000
A(7)	0.011	-0.032	0.016	0.101	0.070
A(8)	-0.028	-0.040	-0.010	0.015	-0.012
A(9)	-0.072	0.213	0.054	-0.015	-0.032
A(10)	0.004	-0.122	-0.042	0.065	0.092
A(11)	-0.024	-0.062	-0.025	-0.007	0.018
A(12)	0.021	0.023	-0.041	0.031	0.031
A(13)	0.043	0.074	-0.053	-0.000	-0.037
A(14)	-0.106	0.015	-0.000	-0.015	-0.031
A(15)	0.063	0.061	-0.045	-0.023	0.150
A(16)	0.025	0.042	0.138	-0.026	-0.026
A(17)	-0.020	-0.051	-0.060	-0.006	-0.071
A(18)	0.056	-0.076	-0.005	-0.061	0.066
A(19)	0.003	-0.046	-0.079	-0.004	0.038
A(20)	-0.001	0.009	-0.072	-0.067	-0.020
A(21)	0.039	-0.048	-0.046	-0.020	0.064
A(22)	-0.017	0.092	0.157	-0.027	-0.083
A(23)	0.038	0.032	0.054	-0.028	-0.086
A(24)	-0.003	-0.070	0.145	-0.037	-0.068
A(25)	0.011	0.082	0.080	-0.074	-0.127

	A(7)	A(8)	A(9)	A(10)	A(11)
A(7)	0.000				
A(8)	-0.020	0.000			
A(9)	-0.087	0.078	0.000		
A(10)	0.022	0.106	-0.110	0.000	
A(11)	-0.004	0.116	0.078	0.065	0.000
A(12)	-0.038	-0.088	-0.024	-0.048	-0.109
A(13)	0.019	-0.050	-0.075	-0.001	0.023
A(14)	-0.027	0.045	-0.100	0.012	0.136
A(15)	-0.079	-0.114	-0.007	-0.037	-0.126
A(16)	-0.036	0.022	0.016	-0.101	-0.198
A(17)	0.011	-0.035	0.020	-0.078	0.040
A(18)	0.027	0.080	-0.061	-0.035	0.001
A(19)	0.055	-0.068	-0.045	0.060	-0.025
A(20)	0.010	0.002	0.037	0.026	-0.017
A(21)	0.001	0.040	-0.038	0.031	-0.046
A(22)	-0.010	-0.024	0.094	0.003	0.021
A(23)	0.034	-0.064	0.135	-0.020	-0.068
A(24)	0.019	-0.012	-0.059	0.014	-0.056
A(25)	-0.058	0.048	0.110	-0.048	0.058

	A(12)	A(13)	A(14)	A(15)	A(16)
A(12)	0.000				
A(13)	0.017	0.000			
A(14)	0.000	-0.015	0.000		
A(15)	0.101	-0.019	-0.016	0.000	
A(16)	0.033	0.003	-0.031	0.203	0.000
A(17)	0.013	0.057	0.070	-0.001	-0.103
A(18)	0.086	-0.042	0.000	-0.006	0.052
A(19)	0.021	0.042	0.034	0.033	-0.033
A(20)	0.033	-0.053	0.002	0.018	0.049
A(21)	-0.046	-0.110	0.053	0.082	-0.055
A(22)	0.005	0.008	-0.017	-0.008	0.018
A(23)	-0.057	0.038	-0.168	0.072	0.159
A(24)	0.030	0.025	-0.014	-0.029	0.198
A(25)	0.001	0.045	0.000	-0.072	-0.030

	A(17)	A(18)	A(19)	A(20)	A(21)
A(17)	0.000				
A(18)	-0.023	0.000			
A(19)	0.069	-0.004	0.000		
A(20)	0.042	0.010	0.002	0.000	
A(21)	0.005	0.068	0.027	0.076	0.000
A(22)	0.006	-0.018	-0.075	-0.020	-0.060
A(23)	-0.067	0.046	-0.084	0.072	0.029
A(24)	0.022	0.031	-0.060	-0.034	0.029
A(25)	-0.012	-0.057	-0.007	0.007	-0.044

	A(22)	A(23)	A(24)	A(25)
A(22)	0.000			
A(23)	-0.018	0.000		
A(24)	0.011	0.109	0.000	
A(25)	0.014	0.023	0.089	0.000

3.7.1 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT: ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS: HIPÓTESIS Y SU CONFIRMACIÓN ESTADÍSTICA

Fichero: DE.sys

¿Qué actitud tienen en general los niños de 8 a 11 años hacia las Matemáticas?

Fichero: LAGUNA4.sys

¿Hay diferencias por cursos o por sexos?

TOTAL OBSERVATIONS: 355

	AC
N OF CASES	283
MINIMUM	8.000
MAXIMUN	48.000
RANGE	40.000
MEAN	6.445
VARIANCE	48.879
STANDARD DEV	6.991
STD ERROR	0.416
SKEWNESS(G1)	-0.960
KURTOSIS(G2)	1.246
SUM	10314.000
C.V.	0.192
MEDIAN	38.000

LEVELS ENCOUNTERED DURING PROCESSING ARE:

CURSO			SEXO$	
3.000	4.000	5.000	h	m

---

72 CASES DELETED DUE TO MISSING DATA.

DEP VAR: AC N: 283 MULTIPLE R: .215 SQUARED MULTIPLE R: .046

ANALYSIS OF VARIANCE

SOURCE	SUM-OF-SQUARES	DF	MEAN-SQUARE	F-RATIO	P
CURSO	353.731	2	176.865	3.726	0.025
SEXO$	83.588	1	83.588	1.761	0.186
CURSO*SEXO$	84.904	2	42.452	0.894	0.410
ERROR	13147.841	277	47.465		

CURSO=3
TOTAL OBSERVATIONS: 66

	AC
N OF CASES	53
MINIMUM	17.000
MAXIMUM	46.000
MEAN	36.396
STANDARD DEV	5.648

CURSO=4
TOTAL OBSERVATIONS: 123

	AC
N OF CASES	97
MINIMUM	20.000
MAXIMUM	47.000
MEAN	37.938
STANDARD DEV	5.686

CURSO=5
TOTAL OBSERVATIONS: 166

	AC
N OF CASES	133
MINIMUM	8.000
MAXIMUM	48.000
MEAN	35.376
STANDARD DEV	8.097

SEXO$=H
TOTAL OBSERVATIONS: 178

	AC
N OF CASES	137
MINIMUM	12.000
MAXIMUM	48.000
MEAN	35.591
STANDARD DEV	7.126

SEXO$=M
TOTAL OBSERVATIONS: 177

	AC
N OF CASES	146
MINIMUM	8.000
MAXIMUM	48.000
MEAN	37.247
STANDARD DEV	6.790

SEXO$=H, CURSO=3
TOTAL OBSERVATIONS: 30

	AC
N OF CASES	22
MINIMUM	27.000
MAXIMUM	46.000
MEAN	36.636
STANDARD DEV	5.233

SEXO$=M, CURSO=3
TOTAL OBSERVATIONS: 36

	AC
N OF CASES	31
MINIMUM	17.000
MAXIMUM	43.000
MEAN	36.226
STANDARD DEV	6.004

SEXO$=H, CURSO=4
TOTAL OBSERVATIONS: 63

	AC
N OF CASES	47
MINIMUM	23.000
MAXIMUM	47.000
MEAN	37.234
STANDARD DEV	6.048

SEXO$=M, CURSO=4
TOTAL OBSERVATIONS: 60

	AC
N OF CASES	50
MINIMUM	20.000
MAXIMUM	47.000
MEAN	38.600
STANDARD DEV	5.299

SEXO$=H, CURSO=5
TOTAL OBSERVATIONS: 85

	AC
N OF CASES	68
MINIMUM	12.000
MAXIMUM	48.000
MEAN	34.118
STANDARD DEV	8.057

SEXO$=M, CURSO=5
TOTAL OBSERVATIONS: 81

	AC
N OF CASES	65
MINIMUM	8.000
MAXIMUM	48.000
MEAN	36.692
STANDARD DEV	7.988

3.7.2 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS: TABLAS DE PORCENTAJES GLOBALES, POR CURSOS Y POR SEXOS.

Fichero: ac4.sys (ordenados por cursos)

Fichero: ac5.sys (ordenados por sexos)

Variables: I (1) a I (24)

Codificación: .: no contesta, 0: desfavorable, 1: sin opinión, 2: favorable.

Porcentajes de respuestas favorables en los distintos ítems.

	Global	3º	4º	5º	h	m
I (1)	49%	32%	52%	53%	44%	54%
I (2)	77%	81%	80%	74%	75%	80%
I (3)	76%	80%	80%	71%	71%	80%
I (4)	45%	62%	51%	35%	43%	49%
I (5)	51%	23%	56%	58%	50%	52%
I (6)	58%	67%	63%	50%	54%	62%
I (7)	58%	60%	59%	55%	59%	56%
I (8)	61%	40%	58%	72%	63%	60%
I (9)	88%	91%	84%	90%	85%	91%
I (10)	70%	55%	86%	63%	66%	74%
I (11)	63%	51%	69%	63%	64%	62%
I (12)	59%	37%	71%	57%	55%	62.5%
I (13)	70%	79%	70%	67%	70%	70%
I (14)	77%	83%	74%	77%	78%	76%
I (15)	75%	70%	79%	75%	76%	75%
I (16)	78%	79%	73%	80%	79%	76%
I (17)	62%	59%	55%	68%	58%	66%
I (18)	64%	61%	72%	60%	59%	70%
I (19)	73%	83%	73%	70%	74%	73%
I (20)	76%	86%	84%	67%	74%	79%
I (21)	48%	60%	46%	45%	52%	45%
I (22)	78%	83%	81%	73%	73%	82%
I (23)	91%	86%	90%	93%	90%	93%
I (24)	58%	34%	57%	67%	55%	61%

3.7.3 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS: MEDIAS Y OTROS DATOS.

Fichero: ac4. sys

Variables: I (1)a I (25) (sin I (3))

Codificación: .: no contesta, 0: desfavorable, 1: sin opinión, 2: favorable.

TOTAL OBSERVATIONS: 355

	I(1)	I(2)	I(3)	I(4)	I(5)
N OF CASES	321	320	321	322	319
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	0.000	2.000	2.000
MEAN	1.174	1.688	0.000	1.140	1.307
STANDARD DEV	0.881	0.620	0.000	0.870	0.785

	I(6)	I(7)	I(8)	I(9)	I(10)
N OF CASES	321	316	318	322	321
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
MEAN	1.399	1.361	1.459	1.829	1.508
STANDARD DEV	0.772	0.814	0.747	0.492	0.795

	I(11)	I(12)	I(13)	I(14)	I(15)
N OF CASES	320	319	321	325	320
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
MEAN	1.475	1.376	1.601	1.665	1.669
STANDARD DEV	0.747	0.810	0.664	0.658	0.626

	I(16)	I(17)	I(18)	I(19)	I(20)
N OF CASES	321	323	323	323	326
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
MEAN	1.695	1.471	1.492	1.628	1.592
STANDARD DEV	0.613	0.740	0.745	0.667	0.766

	I(21)	I(22)	I(23)	I(24)	I(25)
N OF CASES	323	324	323	326	323
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
MEAN	0.780	1.602	1.876	1.518	1.650
STANDARD DEV	0.837	0.766	0.421	0.606	0.663

3.8.1 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. ACTITUDES HACIA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: HIPÓTESIS Y SU CONFIRMACIÓN ESTADÍSTICA.

Fichero: LAGUNA5.sys
¿Hay diferencias entre la actitud hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas?

Fichero: LAGUNA6.sys
¿Se produce alguna variación después de desarrollar el diseño de instrucción en la actitud hacia la resolución de problemas?

Fichero: LAGUNA7.sys
¿Existe alguna relación entre las actitudes de los alumnos de una misma aula que pudiera ser atribuible al profesor?
¿Hay algún cambio en la actitud hacia la resolución de problemas en las distintas aulas?

TOTAL OBSERVATIONS: 131

	AC	ACP
N OF CASES	131	131
MINIMUM	8.000	11.000
MAXIMUM	48.000	48.000
MEAN	36.405	37.466
STANDARD DEV	7.967	8.073

PAIRED SAMPLES T-TEST ON AC VS ACP WITH 131 CASES

MEAN DIFFERENCE = -1.061
SD DIFFERENCE = 7.417
T = -1.637 DF = 130 PROB = 0.104

PEARSON CORRELATION MATRIX

	AC	ACP
AC	1.000	
ACP	0.572	1.000

BARTLETT CHI-SQUARE STATISTIC: 51.017 DF= 1 PROB= .000

MATRIX OF PROBABILITIES

	AC	ACP
AC	0.000	
ACP	0.000	0.000

NUMBER OF OBSERVATIONS: 131

LEVELS ENCOUNTERED DURING PROCESSING ARE:

SEXO$		CURSO		
h	m	3.000	4.000	5.000

NUMBER OF CASES PROCESSED: 128

DEPENDENT VARIABLE MEANS

ACP	ACP2
37.273	37.117

UNIVARIATE REPEATED MEASURES ANALYSIS

BETWEEN SUBJECTS

SOURCE	SS	DF	MS	F	P
SEXO$	7.258	1	7.258	0.078	0.780
CURSO	78.438	2	39.219	0.424	0.655
SEXO$*CURSO	489.713	2	244.856	2.646	0.075
ERROR	11288.342	122	92.527		

WITHIN SUBJECTS

SOURCE	SS	DF	MS	F	P	G-G	H-F
a	20.014	1	20.014	0.756	0.386	.	.
a*SEXO$	1.127	1	1.127	0.043	0.837	.	.
a*CURSO	42.756	2	21.378	0.807	0.448	.	.
a*SEXO$*CURSO	15.564	2	7.782	0.294	0.746	.	.
ERROR	3230.413	122	26.479				

GREENHOUSE-GEISSER EPSILON: .
HUYNH-FELDT EPSILON : .

SEXO$=H
TOTAL OBSERVATIONS: 60

	GLOBAL4
N OF CASES	60
MINIMUM	13.500
MAXIMUM	48.000
MEAN	36.117
STANDARD DEV	6.960

SEXO$=M
TOTAL OBSERVATIONS: 68

	GLOBAL4
N OF CASES	68
MINIMUM	19.000
MAXIMUM	48.000
MEAN	38.147
STANDARD DEV	6.749

CURSO=3
TOTAL OBSERVATIONS: 17

	ACP	ACP2	GLOBAL4
N OF CASES	17	17	17
MINIMUM	22.000	21.000	21.500
MAXIMUM	46.000	46.000	44.500
MEAN	38.588	38.059	38.324
STANDARD DEV	6.226	7.267	6.403

CURSO=4
TOTAL OBSERVATIONS: 19

	ACP	ACP2	GLOBAL4
N OF CASES	19	19	19
MINIMUM	21.000	15.000	20.500
MAXIMUM	46.000	47.000	46.000
MEAN	38.368	36.211	37.289
STANDARD DEV	6.388	8.176	6.343

CURSO=5
TOTAL OBSERVATIONS: 92

	ACP	ACP2	GLOBAL4
N OF CASES	92	92	92
MINIMUM	11.000	12.000	13.500
MAXIMUM	48.000	48.000	48.000
MEAN	36.804	37.130	36.967
STANDARD DEV	8.147	8.006	7.136

THE FOLLOWING RESULTS ARE FOR:
COLEGIO = 1.000
TOTAL OBSERVATIONS: 19

	ACP
N OF CASES	19
MINIMUM	28.000
MAXIMUM	48.000
MEAN	42.263
STANDARD DEV	4.556

THE FOLLOWING RESULTS ARE FOR:
COLEGIO = 3.000
TOTAL OBSERVATIONS: 16

	ACP
N OF CASES	16
MINIMUM	11.000
MAXIMUM	48.000
MEAN	31.625
STANDARD DEV	10.782

THE FOLLOWING RESULTS ARE FOR:
COLEGIO = 4.000
TOTAL OBSERVATIONS: 7

	ACP
N OF CASES	7
MINIMUM	21.000
MAXIMUM	45.000
MEAN	39.143
STANDARD DEV	8.295

THE FOLLOWING RESULTS ARE FOR:
COLEGIO = 5.000
TOTAL OBSERVATIONS: 12

	ACP
N OF CASES	12
MINIMUM	29.000
MAXIMUM	46.000
MEAN	37.917
STANDARD DEV	5.351

THE FOLLOWING RESULTS ARE FOR:
COLEGIO = 7.000
TOTAL OBSERVATIONS: 18

	ACP
N OF CASES	18
MINIMUM	20.000
MAXIMUM	47.000
MEAN	33.333
STANDARD DEV	7.404

THE FOLLOWING RESULTS ARE FOR:
COLEGIO = 8.000
TOTAL OBSERVATIONS: 17

	ACP
N OF CASES	17
MINIMUM	22.000
MAXIMUM	46.000
MEAN	38.588
STANDARD DEV	6.226

THE FOLLOWING RESULTS ARE FOR:
COLEGIO = 9.000
TOTAL OBSERVATIONS: 18

	ACP
N OF CASES	18
MINIMUM	22.000
MAXIMUM	47.000
MEAN	37.444
STANDARD DEV	6.810

THE FOLLOWING RESULTS ARE FOR:
COLEGIO = 13.000
TOTAL OBSERVATIONS: 21

	ACP
N OF CASES	21
MINIMUM	26.000
MAXIMUM	48.000
MEAN	38.238
STANDARD DEV	6.855

SUMMARY STATISTICS FOR ACP

BARTLETT TEST FOR HOMOGENEITY OF GROUP VARIANCES

CHI-SQUARE = 14.484 DF= 7 PROBABILITY = 0.043

ANALYSIS OF VARIANCE

SOURCE	SUM OF SQUARES	DF	MEAN SQUARE	F	PROBABILITY
BETWEEN GROUPS	1341.850	7	191.693	3.755	0.001
WITHIN GROUPS	6125.580	120	51.046		

```
COLEGIO=1
PAIRED SAMPLES T-TEST ON     ACP    VS    ACP2   WITH   19 CASES

MEAN DIFFERENCE =      1.474
SD DIFFERENCE =      4.869
T =      1.319 DF =   18 PROB =      0.204


COLEGIO=3
PAIRED SAMPLES T-TEST ON     ACP    VS    ACP2   WITH   16 CASES

MEAN DIFFERENCE =     -0.938
SD DIFFERENCE =      8.559
T =     -0.438 DF =   15 PROB =      0.668


COLEGIO=4
PAIRED SAMPLES T-TEST ON     ACP    VS    ACP2   WITH    7 CASES

MEAN DIFFERENCE =      4.857
SD DIFFERENCE =     11.697
T =      1.099 DF =    6 PROB =      0.314


COLEGIO=5
PAIRED SAMPLES T-TEST ON     ACP    VS    ACP2   WITH   12 CASES

MEAN DIFFERENCE =      0.583
SD DIFFERENCE =      2.644
T =      0.764 DF =   11 PROB =      0.461


COLEGIO=7
PAIRED SAMPLES T-TEST ON     ACP    VS    ACP2   WITH   18 CASES

MEAN DIFFERENCE =      1.556
SD DIFFERENCE =      5.762
T =      1.145 DF =   17 PROB =      0.268
```

COLEGIO=8
PAIRED SAMPLES T-TEST ON ACP VS ACP2 WITH 17 CASES

MEAN DIFFERENCE = 0.529
SD DIFFERENCE = 4.375
T = 0.499 DF = 16 PROB = 0.625

COLEGIO=9
PAIRED SAMPLES T-TEST ON ACP VS ACP2 WITH 18 CASES

MEAN DIFFERENCE = -3.111
SD DIFFERENCE = 4.861
T = -2.715 DF = 17 PROB = 0.015

COLEGIO=13
PAIRED SAMPLES T-TEST ON ACP VS ACP2 WITH 21 CASES

MEAN DIFFERENCE = -0.714
SD DIFFERENCE = 11.051
T = -0.296 DF = 20 PROB = 0.770

3.8.2 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. ACTITUDES HACIA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: TABLAS DE PORCENTAJES GLOBALES, POR CURSOS Y POR SEXOS.

Escala de actitud hacia la resolución de problemas (Primera administración antes del diseño de instrucción).

Fichero: ap4.sys (ordenados por cursos)

Fichero: ap5.sys (ordenados por sexos)

Variables: A (1) a A (24)

Codificación: .: no contesta, 0: desfavorable, 1: sin opinión, 2: favorable.

Escala de actitud hacia la resolución de problemas (Segunda administración después del diseño de instrucción).

Fichero: 2ap4.sys (ordenados por cursos)

Fichero: 2ap5.sys (ordenados por sexos)

Variables: E (1) a E (24)

Codificación: .: no contesta, 0: desfavorable, 1: sin opinión, 2: favorable.

PRIMERA ADMINISTRACIÓN.

Porcentajes de respuestas favorables en los distintos ítems.

	Global	3º	4º	5º	h	m
A (1)	59%	33%	54%	65%	58%	59%
A (2)	87%	89%	85%	87%	90%	84%
A (3)	74%	74%	72%	75%	74%	74%
A (4)	40%	44%	38%	39%	43%	37%
A (5)	55%	54%	53%	56%	46%	63%
A (6)	72%	79%	63%	72%	72%	71%
A (7)	62%	78%	58%	61%	65%	60%
A (8)	66%	61%	61%	68%	64%	67%
A (9)	90%	89%	86%	91%	84%	95%
A (10)	76%	85%	95%	69%	77%	75%
A (11)	62%	64%	53%	63%	57%	65%
A (12)	58%	57%	74%	54%	55%	61%
A (13)	71%	93%	47%	73%	73%	70%
A (14)	74%	73%	64%	78%	76%	75%
A (15)	71%	63%	53%	78%	64%	61%
A (16)	76%	75%	66%	78%	56%	58%
A (17)	62%	44%	53%	69%	76%	76%
A (18)	57%	63%	63%	54%	76%	69%
A (19)	76%	89%	74%	73%	37%	53%
A (20)	72%	85%	84%	66%	76%	72%
A (21)	45%	33%	43%	49%	95%	96%
A (22)	74%	89%	83%	68%	52%	62%
A (23)	95%	89%	95%	97%	90%	93%
A (24)	57%	27%	59%	62%	55%	61%

SEGUNDA ADMINISTRACIÓN.

Porcentajes de respuestas favorables en los distintos ítems.

	Global	3º	4º	5º	h	m
E (1)	53%	47%	43%	61%	50%	56%
E (2)	87%	92%	83%	87%	88%	86%
E (3)	80%	78%	81%	81%	79%	82%
E (4)	47%	62%	45%	41%	44%	49%
E (5)	55%	41%	54%	57%	51%	60%
E (6)	74%	82%	70%	74%	71%	77%
E (7)	59%	79%	53%	651%	58%	60%
E (8)	67%	68%	56%	72%	62%	72%
E (9)	92%	92%	90%	94%	92%	93%
E (10)	76%	82%	80%	71%	78%	74%
E (11)	60%	77%	55%	57%	57%	63%
E (12)	61%	63%	71%	54%	60%	62%
E (13)	76%	88%	66%	77%	72%	80%
E (14)	75%	78%	71%	76%	79%	70%
E (15)	74%	72%	73%	76%	74%	74%
E (16)	77%	78%	78%	76%	79%	74%
E (17)	56%	60%	37%	65%	52%	60%
E (18)	50%	45%	53%	50%	48%	52%
E (19)	74%	89%	68%	72%	75%	74%
E (20)	74%	87%	74%	68%	74%	74%
E (21)	35%	35%	19%	43%	32%	37%
E (22)	75%	83%	77%	70%	75%	75%
E (23)	91%	93%	86%	93%	92%	91%
E (24)	64%	63%	66%	62%	69%	58%

3.8.3 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. ACTITUDES HACIA LARESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: MEDIAS Y OTROS DATOS.

Escala de actitud hacia la resolución de problemas (Primera administración)

Fichero: ap4. sys

Variables: A (1)a A (25) (sin A (3))

Codificación: .: no contesta, 0: desfavorable, 1: sin opinión, 2: favorable.

Escala de actitud hacia la resolución de problemas (Segunda administración)

Fichero: 2ap4. sys

Variables: E (1)a E (25) (sin E (3))

Codificación: .: no contesta, 0: desfavorable, 1: sin opinión, 2: favorable.

TOTAL OBSERVATIONS: 355

	A(1)	A(2)	A(3)	A(4)	A(5)
N OF CASES	198	200	196	198	200
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	0.000	2.000	2.000
MEAN	1.354	1.825	0.000	1.010	1.390
STANDARD DEV	0.835	0.485	0.000	0.884	0.749

	A(6)	A(7)	A(8)	A(9)	A(10)
N OF CASES	200	198	198	199	198
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
MEAN	1.585	1.419	1.525	1.839	1.606
STANDARD DEV	0.711	0.813	0.717	0.507	0.738

	A(11)	A(12)	A(13)	A(14)	A(15)
N OF CASES	200	200	198	199	197
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
MEAN	1.380	1.380	1.576	1.643	1.574
STANDARD DEV	0.842	0.799	0.721	0.658	0.722

	A(16)	A(17)	A(18)	A(19)	A(20)
N OF CASES	200	192	199	199	196
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
MEAN	1.670	1.406	1.402	1.638	1.541
STANDARD DEV	0.627	0.826	0.765	0.689	0.780

	A(21)	A(22)	A(23)	A(24)	A(25)
N OF CASES	198	196	195	197	200
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
MEAN	1.116	1.551	1.938	1.497	1.655
STANDARD DEV	0.885	0.786	0.298	0.628	0.631

TOTAL OBSERVATIONS: 355

	E(1)	E(2)	E(3)	E(4)	E(5)
N OF CASES	298	301	301	298	298
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	0.000	2.000	2.000
MEAN	1.275	1.817	0.000	1.174	1.396
STANDARD DEV	0.844	0.500	0.000	0.855	0.746

	E(6)	E(7)	E(8)	E(9)	E(10)
N OF CASES	299	297	296	299	299
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
MEAN	1.642	1.387	1.530	1.893	1.632
STANDARD DEV	0.657	0.802	0.727	0.395	0.699

	E(11)	E(12)	E(13)	E(14)	E(15)
N OF CASES	301	298	300	301	301
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
MEAN	1.465	1.396	1.693	1.681	1.608
STANDARD DEV	0.723	0.815	0.589	0.593	0.711

	E(16)	E(17)	E(18)	E(19)	E(20)
N OF CASES	301	297	298	295	300
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
MEAN	1.714	1.337	1.272	1.644	1.570
STANDARD DEV	0.558	0.819	0.810	0.654	0.762

	E(21)	E(22)	E(23)	E(24)	E(25)
N OF CASES	298	299	297	301	301
MINIMUM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MAXIMUM	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
MEAN	0.930	1.585	1.882	1.591	1.734
STANDARD DEV	0.871	0.752	0.406	0.574	0.579

3.9 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. CORRELACIÓN CANÓNICA.

Fichero: DI.sys

Variables independientes: PRE1, PRE2, OP1, IN1, AC, ACP, NOTP, ESTP, ESTM

Variables dependientes: POS1, POS2, OP2, IN2, ACP2

PEARSON CORRELATION MATRIX

	PRE1	PRE2	NOTP	POS1	POS2
PRE1	1.000				
PRE2	0.727	1.000			
NOTP	0.443	0.515	1.000		
POS1	0.628	0.603	0.413	1.000	
POS2	0.552	0.507	0.433	0.521	1.000

NUMBER OF OBSERVATIONS: 171

PEARSON CORRELATION MATRIX

	AC	ACP	ACP2
AC	1.000		
ACP	0.566	1.000	
ACP2	0.498	0.563	1.000

NUMBER OF OBSERVATIONS: 103

PEARSON CORRELATION MATRIX

	ESTP	ESTM	NOTP	AYUDA
ESTP	1.000			
ESTM	0.763	1.000		
NOTP	0.163	0.288	1.000	
AYUDA	0.079	0.196	0.368	1.000

NUMBER OF OBSERVATIONS: 143

SYSTAT PROCESSING FINISHED

INPUT STATEMENTS FOR THIS JOB:

```
USE A:DI
PEARSONPRE1,PRE2,NOTP,POS1,pos2
PEARSON PRE1,PRE2,NOTP,POS1,pos2
PEARSON AC,ACP,ACP2
PEARSON PRE1,AC,ACP
USE A:DE
PEARSON PRE1,AC,ACP
PEARSON PRE1,PRE2,NOTP,POS1,POS2
OUTPUT@
```

```
PRE1,pre2,notp,pos1,pos2
PEARSON PRE1,PRE2,NOTP,POS1,POS2
PEARSON AC,ACP,ACP2
PEARSON ESTP,ESTM,NOTP,AYUDA

  322 CASES DELETED DUE TO MISSING DATA.
NUMBER OF CASES PROCESSED:     33

DEPENDENT VARIABLE MEANS

                    POS1        POS2        ACP2

                       6.273       8.303      38.000

                                          -1
REGRESSION COEFFICIENTS  B = (X'X)   X'Y

                    POS1        POS2        ACP2

  CONSTANT            -0.695       5.619      -9.241

      ESTP            -0.312       0.331      -1.114

      ESTM             0.826      -0.242       1.638

        AC             0.041      -0.024       0.316

       ACP             0.011      -0.027       0.797

      NOTP            -0.022       0.000       0.555

      PRE1             0.103       0.557      -0.680

      PRE2             0.463       0.183       0.472


MULTIPLE CORRELATIONS

                    POS1        POS2        ACP2

                       0.784       0.618       0.933

SQUARED MULTIPLE CORRELATIONS

                    POS1        POS2        ACP2

                       0.615       0.381       0.870

          2        2
ADJUSTED R = 1-(1-R )*(N-1)/DF, WHERE N=  33, AND DF= 25.

                    POS1        POS2        ACP2

                       0.508       0.208       0.834
```

```
TEST FOR EFFECT CALLED:
                    ESTP
            AND
                    ESTM
            AND
                      AC
            AND
                     ACP
            AND
                    NOTP
            AND
                    PRE1
            AND
                    PRE2
```

A MATRIX

	1	2	3	4	5
1	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
3	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

	6	7	8
1	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	0.000
3	0.000	0.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000
5	1.000	0.000	0.000
6	0.000	1.000	0.000
7	0.000	0.000	1.000

NULL HYPOTHESIS CONTRAST AB

	POS1	POS2	ACP2
1	-0.312	0.331	-1.114
2	0.826	-0.242	1.638
3	0.041	-0.024	0.316
4	0.011	-0.027	0.797
5	-0.022	0.000	0.555
6	0.103	0.557	-0.680
7	0.463	0.183	0.472

INVERSE CONTRAST $A(X'X)^{-1}A'$

	1	2	3	4	5
1	0.153				
2	-0.120	0.203			
3	-0.004	0.006	0.001		

```
          4        0.000        0.001       -0.001        0.002
          5        0.007       -0.012       -0.003        0.001        0.019
          6        0.002       -0.006        0.000       -0.003       -0.003
          7        0.001       -0.005        0.001       -0.001       -0.008

                   6            7

          6        0.027
          7       -0.014        0.024


                                                   -1   -1
HYPOTHESIS SUM OF PRODUCT MATRIX  H = B'A'(A(X'X)  A')  AB

                   POS1         POS2         ACP2

      POS1         64.341
      POS2         47.380       48.428
      ACP2        259.258      151.401      1897.351


ERROR SUM OF PRODUCT MATRIX G = E'E

                   POS1         POS2         ACP2

      POS1         40.205
      POS2         16.893       78.541
      ACP2         33.742       -2.401       282.649

UNIVARIATE F TESTS

    VARIABLE        SS         DF         MS              F              P

    POS1          64.341        7        9.192          5.715          0.000
       ERROR      40.205       25        1.608
    POS2          48.428        7        6.918          2.202          0.069
       ERROR      78.541       25        3.142
    ACP2        1897.351        7      271.050         23.974          0.000
       ERROR     282.649       25       11.306

MULTIVARIATE TEST STATISTICS

            WILKS' LAMBDA =       0.058
              F-STATISTIC =       5.357      DF =  21,  66      PROB =       0.0

             PILLAI TRACE =       1.471
              F-STATISTIC =       3.437      DF =  21,  75      PROB =       0.0

  HOTELLING-LAWLEY TRACE =        7.950
              F-STATISTIC =       8.202      DF =  21,  65      PROB =       0.0

                    THETA =   0.874  S =  3, M = 1.5, N = 10.5 PROB =       0.0

TEST OF RESIDUAL ROOTS

  ROOTS  1 THROUGH  3
    CHI-SQUARE STATISTIC =      75.278       DF =       21      PROB =       0.0

  ROOTS  2 THROUGH  3
    CHI-SQUARE STATISTIC =      20.457       DF =       12      PROB =       0.0
```

ROOTS 3 THROUGH 3
CHI-SQUARE STATISTIC = 3.591 DF = 5 PROB = 0.61

CANONICAL CORRELATIONS

1	2	3
0.935	0.686	0.356

DEPENDENT VARIABLE CANONICAL COEFFICIENTS
STANDARDIZED BY SAMPLE STANDARD DEVIATIONS

	1	2	3
POS1	0.002	1.005	-1.073
POS2	0.079	0.339	1.159
ACP2	0.973	-0.770	0.279

CANONICAL LOADINGS (CORRELATIONS BETWEEN
DEPENDENT VARIABLES AND DEPENDENT CANONICAL FACTORS)

	1	2	3
POS1	0.644	0.721	-0.255
POS2	0.356	0.682	0.639
ACP2	0.997	-0.057	-0.051

---

322 CASES DELETED DUE TO MISSING DATA.
NUMBER OF CASES PROCESSED: 33

DEPENDENT VARIABLE MEANS

ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
2.091	2.182	36.879	39.121	6.333

PRE1	PRE2
5.606	7.364

REGRESSION COEFFICIENTS $B = (X'X)^{-1} X'Y$

	ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
CONSTANT	1.567	1.996	7.387	10.442	-0.893
POS1	0.056	0.159	-0.343	-0.487	0.254
POS2	0.019	-0.009	-0.061	0.452	0.109
ACP2	0.000	-0.019	0.846	0.736	0.125

PRE1 PRE2

CONSTANT	-2.011	-0.046
POS1	0.280	0.562
POS2	0.349	0.191
ACP2	0.078	0.061

STANDARDIZED REGRESSION COEFFICIENTS

	ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
CONSTANT	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
POS1	0.160	0.492	-0.071	-0.131	0.215
POS2	0.061	-0.031	-0.014	0.134	0.102
ACP2	0.005	-0.274	0.797	0.904	0.482

	PRE1	PRE2
CONSTANT	0.000	0.000
POS1	0.259	0.493
POS2	0.356	0.185
ACP2	0.330	0.243

TOTAL SUM OF PRODUCT MATRIX

	ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
ESTP	12.727				
ESTM	7.455	10.909			
AC	28.364	-24.273	2459.515		
ACP	12.636	-1.727	1085.485	1447.515	
NOTP	7.000	6.000	378.333	213.667	145.333
PRE1	6.182	7.364	228.424	271.576	81.333
PRE2	6.909	8.818	232.455	247.545	95.000

	PRE1	PRE2
PRE1	121.879	
PRE2	101.727	135.636

RESIDUAL SUM OF PRODUCT MATRIX E'E = Y'Y-Y'XB

	ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
ESTP	12.202				
ESTM	6.755	9.375			

AC	14.280	-22.872	1068.683		
ACP	-1.347	-1.685	-134.309	353.902	
NOTP	2.025	2.325	99.029	-40.815	77.204
PRE1	0.486	2.071	1.316	50.601	16.525
PRE2	0.502	1.636	-7.836	20.075	24.476

	PRE1	PRE2
PRE1	51.496	
PRE2	27.336	52.883

RESIDUAL COVARIANCE MATRIX $S_{Y.X}$

	ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
ESTP	0.421				
ESTM	0.233	0.323			
AC	0.492	-0.789	36.851		
ACP	-0.046	-0.058	-4.631	12.204	
NOTP	0.070	0.080	3.415	-1.407	2.662
PRE1	0.017	0.071	0.045	1.745	0.570
PRE2	0.017	0.056	-0.270	0.692	0.844

	PRE1	PRE2
PRE1	1.776	
PRE2	0.943	1.824

RESIDUAL CORRELATION MATRIX $R_{Y.X}$

	ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
ESTP	1.000				
ESTM	0.632	1.000			
AC	0.125	-0.229	1.000		
ACP	-0.020	-0.029	-0.218	1.000	
NOTP	0.066	0.086	0.345	-0.247	1.000
PRE1	0.019	0.094	0.006	0.375	0.262
PRE2	0.020	0.073	-0.033	0.147	0.383

	PRE1	PRE2
PRE1	1.000	
PRE2	0.524	1.000

MULTIPLE CORRELATIONS

ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
0.203	0.375	0.752	0.869	0.685

PRE1	PRE2
0.760	0.781

SQUARED MULTIPLE CORRELATIONS

ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
0.041	0.141	0.565	0.756	0.469

PRE1	PRE2
0.577	0.610

ADJUSTED $R^2 = 1-(1-R^2)*(N-1)/DF$, WHERE N= 33, AND DF= 29.

ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
0.000	0.052	0.521	0.730	0.414

PRE1	PRE2
0.534	0.570

TEST FOR EFFECT CALLED:
POS1
AND
POS2
AND
ACP2

A MATRIX

	1	2	3	4
1	0.000	1.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	1.000	0.000
3	0.000	0.000	0.000	1.000

NULL HYPOTHESIS CONTRAST AB

	ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
1	0.056	0.159	-0.343	-0.487	0.254
2	0.019	-0.009	-0.061	0.452	0.109
3	0.000	-0.019	0.846	0.736	0.125

	PRE1	PRE2
1	0.280	0.562
2	0.349	0.191
3	0.078	0.061

INVERSE CONTRAST $A(X'X)^{-1}A'$

	1	2	3
1	0.021		
2	-0.008	0.012	
3	-0.002	0.000	0.001

HYPOTHESIS SUM OF PRODUCT MATRIX $H = B'A'(A(X'X)^{-1}A')^{-1}AB$

	ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
ESTP	0.526				
ESTM	0.699	1.534			
AC	14.084	-1.400	1390.832		
ACP	13.983	-0.042	1219.793	1093.613	
NOTP	4.975	3.675	279.304	254.482	68.129
PRE1	5.696	5.293	227.109	220.975	64.808
PRE2	6.407	7.182	240.290	227.470	70.524

	PRE1	PRE2
PRE1	70.383	
PRE2	74.391	82.754

ERROR SUM OF PRODUCT MATRIX $G = E'E$

	ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
ESTP	12.202				
ESTM	6.755	9.375			
AC	14.280	-22.872	1068.683		
ACP	-1.347	-1.685	-134.309	353.902	
NOTP	2.025	2.325	99.029	-40.815	77.204
PRE1	0.486	2.071	1.316	50.601	16.525
PRE2	0.502	1.636	-7.836	20.075	24.476

	PRE1	PRE2
PRE1	51.496	
PRE2	27.336	52.883

UNIVARIATE F TESTS

VARIABLE	SS	DF	MS	F	P
ESTP	0.526	3	0.175	0.416	0.743
ERROR	12.202	29	0.421		
ESTM	1.534	3	0.511	1.581	0.215
ERROR	9.375	29	0.323		
AC	1390.832	3	463.611	12.581	0.000
ERROR	1068.683	29	36.851		
ACP	1093.613	3	364.538	29.872	0.000
ERROR	353.902	29	12.204		
NOTP	68.129	3	22.710	8.530	0.000
ERROR	77.204	29	2.662		
PRE1	70.383	3	23.461	13.212	0.000
ERROR	51.496	29	1.776		
PRE2	82.754	3	27.585	15.127	0.000

```
        ERROR        52.883     29          1.824

MULTIVARIATE TEST STATISTICS

             WILKS' LAMBDA =        0.058
               F-STATISTIC =        5.357     DF =  21,   66       PROB =        0.00

              PILLAI TRACE =        1.471
               F-STATISTIC =        3.437     DF =  21,   75       PROB =        0.00

    HOTELLING-LAWLEY TRACE =        7.950
               F-STATISTIC =        8.202     DF =  21,   65       PROB =        0.00

                     THETA =    0.874  S =  3, M = 1.5, N = 10.5 PROB =        0.00

TEST OF RESIDUAL ROOTS

    ROOTS   1 THROUGH  3
      CHI-SQUARE STATISTIC =      75.278      DF =       21        PROB =        0.00

    ROOTS   2 THROUGH  3
      CHI-SQUARE STATISTIC =      20.457      DF =       12        PROB =        0.0

    ROOTS   3 THROUGH  3
      CHI-SQUARE STATISTIC =       3.591      DF =        5        PROB =        0.6

CANONICAL CORRELATIONS

                              1              2              3

                              0.935          0.686          0.356


DEPENDENT VARIABLE CANONICAL COEFFICIENTS
STANDARDIZED BY SAMPLE STANDARD DEVIATIONS

                              1              2              3

         ESTP                -0.080          0.012          0.603
         ESTM                 0.115         -0.225         -0.944
           AC                 0.341          0.135         -0.690
          ACP                 0.668          0.712          0.082
         NOTP                 0.149          0.199          0.192
         PRE1                -0.121         -0.613          1.316
         PRE2                 0.140         -0.733         -0.881


CANONICAL LOADINGS (CORRELATIONS BETWEEN
DEPENDENT VARIABLES AND DEPENDENT CANONICAL FACTORS)

                              1              2              3

         ESTP                 0.138         -0.228         -0.006
         ESTM                 0.035         -0.510         -0.369
           AC                 0.796          0.155         -0.090
          ACP                 0.925          0.080          0.203
         NOTP                 0.701         -0.287         -0.042
         PRE1                 0.666         -0.599          0.406
         PRE2                 0.669         -0.681         -0.057
```

```
SYSTAT PROCESSING FINISHED

INPUT STATEMENTS FOR THIS JOB:

USE A:DE
OUTPUT@
MODEL POS1,POS2,ACP2=CONSTANT+ESTP+ESTM+AC+ACP+NOTP+PRE1+PRE2
ESTIMATE
HYPOTHESIS
PRINT=LONG
EFFECT=ESTP&ESTM&AC&ACP&NOTP&PRE1&PRE2
STANDARDIZE=TOTAL
TEST
MODEL ESTP,ESTM,AC,ACP,NOTP,PRE1,PRE2=CONSTANT+POS1+POS2+ACP2
ESTIMATE
HYPOTHESIS
PRINT=LONG
EFFECT=POS1&POS2&ACP2
STANDARDIZE=TOTAL
TEST
```

PEARSON CORRELATION MATRIX

	ESTP	ESTM	AC	ACP	NOTP
ESTP	1.000				
ESTM	0.633	1.000			
AC	0.160	-0.148	1.000		
ACP	0.093	-0.014	0.575	1.000	
NOTP	0.163	0.151	0.633	0.466	1.000
PRE1	0.157	0.202	0.417	0.647	0.611
PRE2	0.166	0.229	0.402	0.559	0.677
POS1	0.197	0.307	0.410	0.498	0.568
POS2	0.152	0.166	0.172	0.317	0.358
ACP2	0.120	0.019	0.749	0.861	0.643

	PRE1	PRE2	POS1	POS2	ACP2
PRE1	1.000				
PRE2	0.791	1.000			
POS1	0.660	0.745	1.000		
POS2	0.594	0.529	0.558	1.000	
ACP2	0.590	0.598	0.614	0.283	1.000

NUMBER OF OBSERVATIONS: 33

PEARSON CORRELATION MATRIX

	EDAD	HERMANOS	ESTP	ESTM	AYUDA
EDAD	1.000				
HERMANOS	-0.072	1.000			
ESTP	0.131	-0.185	1.000		
ESTM	-0.125	-0.008	0.781	1.000	
AYUDA	-0.172	0.042	0.159	0.277	1.000
AC	-0.033	-0.089	0.162	0.059	0.187
ACP	0.067	-0.108	0.092	0.176	0.226
NOTP	0.022	0.144	0.162	0.200	0.336
PRE1	0.080	-0.040	0.161	0.290	0.363
PRE2	-0.047	0.077	0.166	0.236	0.318
POS1	-0.100	0.220	0.198	0.319	0.390
POS2	0.529	0.244	0.151	0.154	0.095
ACP2	-0.085	-0.063	0.117	0.190	0.188

	AC	ACP	NOTP	PRE1	PRE2
AC	1.000				
ACP	0.534	1.000			
NOTP	0.665	0.480	1.000		
PRE1	0.427	0.655	0.620	1.000	
PRE2	0.455	0.611	0.681	0.824	1.000
POS1	0.470	0.554	0.573	0.694	0.740
POS2	0.210	0.359	0.360	0.624	0.520
ACP2	0.732	0.855	0.656	0.600	0.634

	POS1	POS2	ACP2
POS1	1.000		
POS2	0.549	1.000	
ACP2	0.656	0.309	1.000

```
NUMBER OF OBSERVATIONS:   31

SYSTAT PROCESSING FINISHED

INPUT STATEMENTS FOR THIS JOB:


USE A:DE
PEARSON ESTP,ESTM,AC,ACP,NOTP,PRE1,PRE2,POS1,POS2,ACP2
USE A:DE
OUTPUT@
PEARSON ESTP,ESTM,AC,ACP,NOTP,PRE1,PRE2,POS1,POS2,ACP2
PEARSON EDAD,HERMANOS,ESTP,ESTM,AYUDA,AC,ACP,NOTP,PRE1,PRE2,POS1,POS2,ACP2

  324 CASES DELETED DUE TO MISSING DATA.
NUMBER OF CASES PROCESSED:     31

DEPENDENT VARIABLE MEANS

                    POS2          ACP2
```

3.10 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. DATOS DEL AULA INSTRUIDA POR EL DIDACTA.

Fichero: DI.sys
Variables: EDAD, SEXO$, HERMANOS, EST, ESTM, AYUDA, LENGUA, MAT, DIB, PRE1, PRE2, POS1, POS2, OP1, OP2, IN1, IN2, AC, ACP, 2ACP
Edad: 9-11 años
Sexo$: h, m
Hermanos: números de hermanos: 0 a 3.
Estp: estudio de los padres: .: no contesta, 1: sin estudios, 2: estudios primarios, 3: bachillerato, 4: estudios universitarios.
Estm: estudio de las madres: .: no contesta, 1: sin estudios, 2: estudios primarios, 3: bachillerato, 4: estudios universitarios.
Ayuda: necesita ayuda para las Matemáticas: 1: sí, 2: alguna vez, e: no.
Lengua: nota de los alumnos en esta materia.
Mat: nota de los alumnos en Matemáticas.
Dib: nota de los alumnos en dibujo: 0: deficiente, 1: bien, 2: notable, 3: sobresaliente.
Pre1: puntuación del pretest, ítems 1 al 10 (problemas)
Pre2: puntuación del pretest, ítems 11 al 20 "
Op1: puntuación del pretest, ítems 21 al 26 (operaciones)
In1: puntuación del pretest, ítems 27 al 32 (problemas inventados).

Pos1: puntuación del postest, ítems 1 al 10 (problemas)
Pos2: puntuación del postest, ítems 11 al 20 "
Op2: puntuación del postest, ítems 21 al 26 (operaciones)
In2: puntuación del postest, ítems 27 al 32 (problemas inventados).

Pretest
Fichero: iet.sys
Variables: O(1) a O(32)
Postest
Fichero: iot.sys
Variables: U(1) a U(32)

TABLE OF VALUES FOR EDAD

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	9.250	9.500	9.750	10.000	10.250
7.69	11.54	23.08	19.23	19.23	11.54

10.750	11.000	TOTAL	N
3.85	3.85	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR SEXO$

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

	h	m	TOTAL	N
7.69	46.15	46.15	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR HERMANOS

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
19.23	3.85	38.46	34.62	3.85	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR ESTP

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	4.000	TOTAL	N
61.54	7.69	15.38	7.69	7.69	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR ESTM

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	4.000	TOTAL	N
57.69	11.54	11.54	15.38	3.85	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR AYUDA

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
7.69	11.54	42.31	38.46	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR LENGUA

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
7.69	23.08	42.31	3.85	23.08	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR MAT

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
7.69	19.23	34.62	19.23	19.23	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR DIB

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	0.100	1.000	2.000	3.000	TOTAL
7.69	50.00	11.54	11.54	3.85	15.38	100.00

TABLE OF VALUES FOR PRE1

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000
11.54	7.69	3.85	30.77	23.08	3.85

6.000	7.000	8.000	9.000	TOTAL	N
3.85	7.69	3.85	3.85	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR PRE2

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000
15.38	3.85	3.85	11.54	23.08	11.54

7.000	8.000	9.000	10.000	TOTAL	N
11.54	3.85	11.54	3.85	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR POS1

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	2.000	3.000	4.000
11.54	3.85	3.85	7.69	7.69	19.23

5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	TOTAL	N
15.38	11.54	11.54	3.85	3.85	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR POS2

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	5.000	6.000
11.54	3.85	3.85	7.69	23.08	7.69

7.000	8.000	9.000	10.000	TOTAL	N
7.69	11.54	19.23	3.85	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR OP1

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	TOTAL
7.69	15.38	3.85	11.54	30.77	30.77	100.00

TABLE OF VALUES FOR OP2

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	4.000	5.000	6.000	TOTAL
11.54	3.85	7.69	11.54	23.08	42.31	100.00

TABLE OF VALUES FOR IN1

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000
19.23	3.85	7.69	11.54	11.54	19.23

6.000	TOTAL	N
26.92	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR IN2

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	2.000	4.000	5.000	6.000	TOTAL
38.46	3.85	7.69	7.69	19.23	23.08	100.00

TABLE OF VALUES FOR AC

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	9.000	11.000	12.000	22.000	24.000
15.38	3.85	3.85	3.85	3.85	3.85

26.000	27.000	28.000	29.000	30.000	31.000
3.85	3.85	3.85	7.69	3.85	3.85

34.000	36.000	38.000	40.000	41.000	46.000
3.85	15.38	3.85	3.85	3.85	3.85

48.000	TOTAL	N
3.85	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR ACP

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	14.000	17.000	22.000	25.000	27.000
11.54	3.85	3.85	3.85	3.85	3.85

28.000	29.000	31.000	34.000	35.000	38.000
3.85	7.69	11.54	7.69	3.85	3.85

39.000	40.000	41.000	42.000	44.000	45.000
3.85	3.85	3.85	7.69	3.85	3.85

46.000	TOTAL	N
3.85	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR ACP2

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	10.000	22.000	28.000	30.000	32.000
38.46	3.85	11.54	3.85	3.85	3.85

35.000	36.000	38.000	40.000	41.000	47.000	TOTAL
3.85	15.38	3.85	3.85	3.85	3.85	100.00

TABLE OF VALUES FOR O(1)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
15.38	53.85	30.77	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(2)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
23.08	23.08	53.85	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(3)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
11.54	3.85	84.62	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(4)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
15.38	15.38	69.23	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(5)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	TOTAL	N
19.23	80.77	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(6)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
19.23	46.15	34.62	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(7)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
11.54	42.31	46.15	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(8)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
15.38	65.38	19.23	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(9)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
19.23	65.38	15.38	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(10)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
11.54	80.77	7.69	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(11)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
15.38	3.85	80.77	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(12)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
15.38	23.08	61.54	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(13)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
15.38	15.38	69.23	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(14)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
15.38	61.54	23.08	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(15)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
15.38	53.85	30.77	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(16)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
26.92	23.08	50.00	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(17)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
26.92	19.23	53.85	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(18)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
23.08	42.31	34.62	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(19)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
26.92	57.69	15.38	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR O(20)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
15.38	84.62	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(1)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
19.23	11.54	69.23	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(2)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
23.08	53.85	23.08	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(3)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
15.38	11.54	73.08	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(4)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
19.23	11.54	69.23	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(6)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
19.23	19.23	61.54	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(7)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
11.54	42.31	46.15	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(8)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
23.08	46.15	30.77	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(9)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
34.62	38.46	26.92	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(10)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
46.15	42.31	11.54	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(11)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
11.54	88.46	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(12)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
11.54	11.54	76.92	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(13)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
15.38	23.08	61.54	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(14)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
23.08	23.08	53.85	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(15)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
30.77	42.31	26.92	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(16)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
26.92	15.38	57.69	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(17)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
15.38	23.08	61.54	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(18)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
19.23	34.62	46.15	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(19)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
34.62	50.00	15.38	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(20)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
30.77	3.85	65.38	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(21)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
11.54	7.69	80.77	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(22)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
11.54	11.54	76.92	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(23)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	0.000	1.000	TOTAL	N
26.92	19.23	53.85	100.00	26.00

TABLE OF VALUES FOR U(24)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
19.23	80.77	100,00	26.00

3.11 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. ANÁLISIS CLUSTER PARA LA SELECCIÓN DE LOS ALUMNOS PARA LAS ENTREVISTAS DEL GRUPO DEFINITIVO.

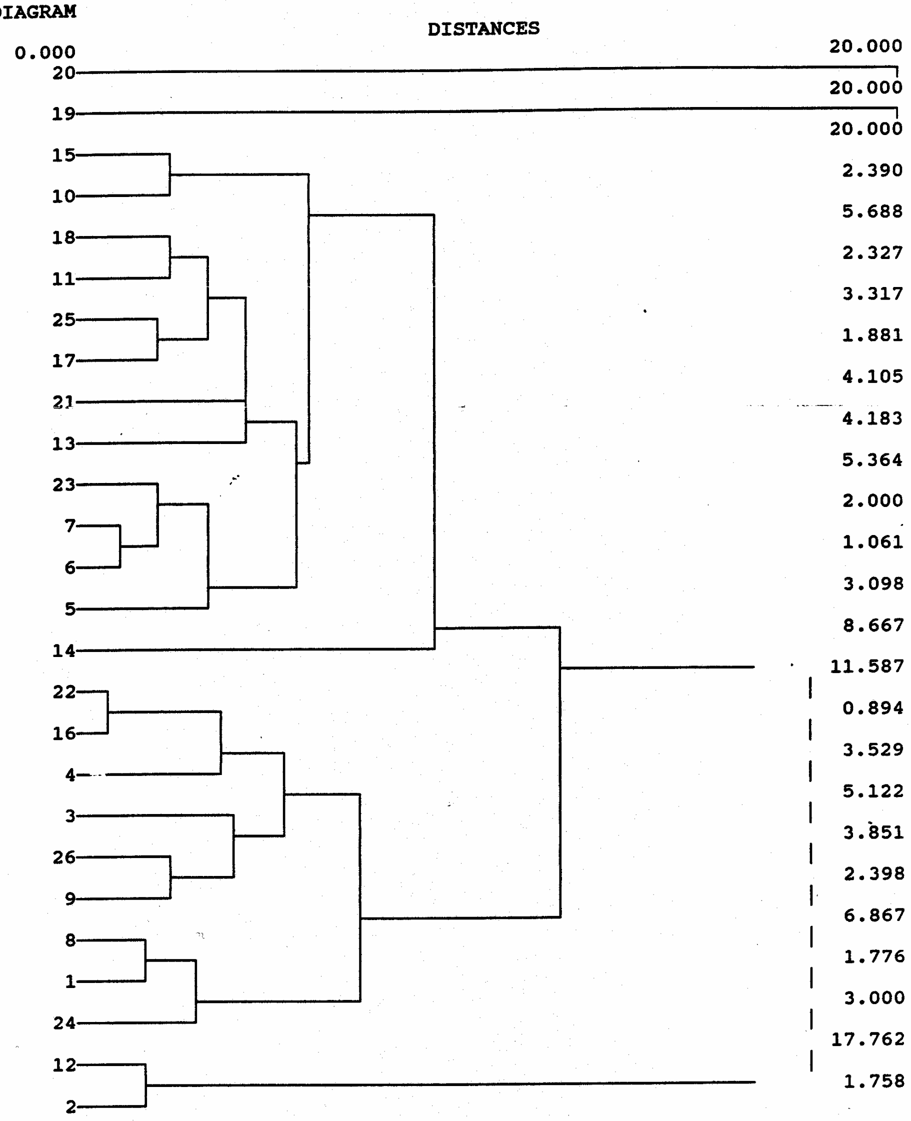
Fichero. Clus.sys

Variables: PRE1, PRE2, POS1, POS2, OP1, OP2, IN1, IN2, AC, ACP, ACP2, LENGUA, MAT, DIB

Distance: euclidea   Linkage = completa

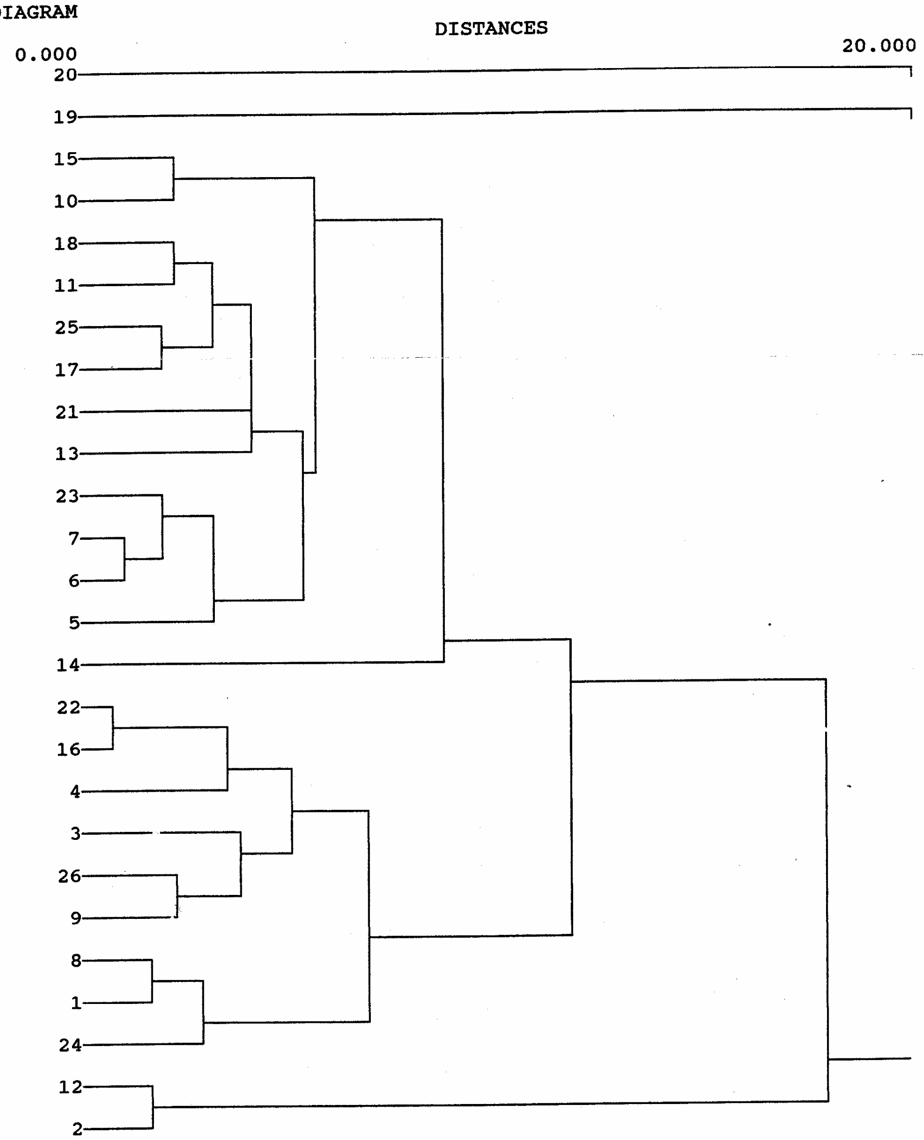
DISTANCE METRIC IS EUCLIDEAN DISTANCE
COMPLETE LINKAGE METHOD (FARTHEST NEIGHBOR)

TREE DIAGRAM



DISTANCE METRIC IS EUCLIDEAN DISTANCE
COMPLETE LINKAGE METHOD (FARTHEST NEIGHBOR)

TREE DIAGRAM



<u>3.12 DATOS ESTADÍSTICOS OBTENIDOS MEDIANTE EL SYSTAT. ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LAS ENTREVISTAS DE LOS PROFESORES.</u>

Entrevista al grupo experimental
Fichero: CPE.sys
Variables: P(1) a P(32)

Entrevista al grupo control
Fichero: CPC.sys
Variables: P(1) a P(41)

Algunas pruebas estadísticas:
Fichero: PROFES.sys

Prueba no paramétrica U de Mann-Witney

TABLE OF VALUES FOR P(1)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

3.000	4.000	5.000	TOTAL	N
15.38	38.46	46.15	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(2)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	3.000	4.000	TOTAL	N
7.69	7.69	7.69	76.92	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(3)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	3.000	TOTAL	N
76.92	23.08	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(4)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	3.000	4.000	TOTAL	N
46.15	23.08	23.08	7.69	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(5)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

3.000	4.000	TOTAL	N
53.85	46.15	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(6)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

2.000	3.000	4.000	TOTAL	N
15.38	23.08	61.54	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(7)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

4.000	5.000	6.000	7.000	TOTAL	N
15.38	30.77	38.46	15.38	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(8)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	4.000	TOTAL	N
15.38	7.69	23.08	46.15	7.69	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(9)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	1.500	2.000	2.500	3.000	TOTAL	N
23.08	38.46	23.08	7.69	7.69	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(10)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	TOTAL	N
76.92	23.08	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(11)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	TOTAL	N
46.15	53.85	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(12)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	TOTAL	N
7.69	46.15	46.15	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(13)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
30.77	69.23	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(14)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
38.46	53.85	7.69	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(15)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	TOTAL	N
46.15	53.85	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(16)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
7.69	69.23	7.69	15.38	100.00	13.00

'ABLE OF VALUES FOR P(17)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	TOTAL	N
76.92	23.08	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(18)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	TOTAL	N
69.23	30.77	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(19)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
46.15	46.15	7.69	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(20)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
69.23	23.08	7.69	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(21)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
30.77	38.46	30.77	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(22)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
15.38	76.92	7.69	100.00	13.00

'ABLE OF VALUES FOR P(23)

ERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	TOTAL	N
15.38	84.62	100.00	13.00

'ABLE OF VALUES FOR P(24)

ERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
7.69	76.92	15.38	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(25)

'ERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
7.69	84.62	7.69	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(26)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
15.38	30.77	53.85	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(27)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
7.69	53.85	23.08	15.38	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(28)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
7.69	15.38	23.08	53.85	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(29)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
23.08	7.69	61.54	7.69	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(30)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

1.000	2.000	TOTAL	N
53.85	46.15	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(31)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
7.69	7.69	7.69	76.92	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(32)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	TOTAL	N
100.00	100.00	13.00

TABLE OF VALUES FOR P(1)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	3.000	4.000	5.000	TOTAL	N
60.00	10.00	20.00	10.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(2)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	4.000	TOTAL	N
50.00	50.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(3)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
50.00	50.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(4)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	3.000	TOTAL	N
60.00	30.00	10.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(5)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	3.000	4.000	TOTAL	N
50.00	40.00	10.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(6)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	4.000	5.000	TOTAL	N
60.00	30.00	10.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(7)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	5.000	5.500	6.000	7.000	TOTAL	N
50.00	20.00	10.00	10.00	10.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(8)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	5.000	TOTAL	N
80.00	20.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(9)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	2.500	5.000	TOTAL	N
60.00	10.00	10.00	10.00	10.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(10)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
50.00	50.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(11)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
50.00	20.00	10.00	20.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(12)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	TOTAL	N
50.00	20.00	30.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(13)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
60.00	40.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(14)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
50.00	20.00	10.00	20.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(15)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	TOTAL	N
50.00	20.00	30.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(16)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
60.00	40.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(17)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
50.00	50.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(18)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
60.00	40.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(19)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	TOTAL	N
70.00	20.00	10.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(20)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	2.000	TOTAL	N
50.00	50.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(21)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	TOTAL	N
60.00	20.00	20.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(22)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	TOTAL	N
60.00	20.00	20.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(23)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	TOTAL	N
70.00	10.00	20.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(24)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	2.000	TOTAL	N
90.00	10.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(25)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	TOTAL	N
70.00	10.00	20.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(26)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	2.000	3.000	TOTAL	N
70.00	10.00	20.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(27)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	TOTAL	N
50.00	30.00	20.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(28)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
70.00	10.00	10.00	10.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(29)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	TOTAL	N
60.00	30.00	10.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(30)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
50.00	10.00	30.00	10.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(31)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
50.00	10.00	20.00	20.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(32)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	TOTAL	N
100.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(33)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	TOTAL	N
50.00	30.00	20.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(34)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	TOTAL	N
50.00	30.00	20.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(35)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	TOTAL	N
100.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(36)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	2.000	TOTAL	N
60.00	30.00	10.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(37)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
60.00	40.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(38)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
60.00	40.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(39)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
60.00	40.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(40)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
60.00	40.00	100.00	10.00

TABLE OF VALUES FOR P(41)

PERCENTS OF TOTAL OF THIS (SUB)TABLE

.	1.000	TOTAL	N
60.00	40.00	100.00	10.00

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(2) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	4.000	TOTAL
1.000	1	1	1	10	13
2.000	0	0	0	5	5
TOTAL	1	1	1	15	18

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(2) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	4.000	TOTAL	N
1.000	7.69	7.69	7.69	76.92	100.00	13.00
2.000	.00	.00	.00	100.00	100.00	5.00
TOTAL	5.56	5.56	5.56	83.33	100.00	
N	1	1	1	15	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(2) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	4.000	TOTAL	N
1.000	100.00	100.00	100.00	66.67	72.22	13.00
2.000	.00	.00	.00	33.33	27.78	5.00
TOTAL	100	100	100	100	100	
N	1	1	1	15	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(3) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	3.000	TOTAL
1.000	10	3	1
2.000	5	0	5
TOTAL	15	3	18

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(3) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	3.000	TOTAL	N
1.000	76.92	23.08	100.00	13.00
2.000	100.00	.00	100.00	5.00
TOTAL	83.33	16.67	100.00	
N	15	3	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(3) (COLUMNS)

COLUMN PERCENTS

	1.000	3.000	TOTAL	N
1.000	66.67	100.00	72.22	13.00
2.000	33.33	.00	27.78	5.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	
N	15	3	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(4) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	4.000	TOTAL
1.000	6	3	3	1	13
2.000	3	0	1	0	4
TOTAL	9	3	4	1	17

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(4) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	4.000	TOTAL	N
1.000	46.15	23.08	23.08	7.69	100.00	13.00
2.000	75.00	.00	25.00	.00	100.00	4.00
TOTAL	52.94	17.65	23.53	5.88	100.00	
N	9	3	4	1	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(4) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	4.000	TOTAL	N
1.000	66.67	100.00	75.00	100.00	76.47	13.00
2.000	33.33	.00	25.00	.00	23.53	4.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	9	3	4	1	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(5) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	3.000	4.000	TOTAL
1.000	7	6	13
2.000	4	1	5
TOTAL	11	7	18

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(5) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	3.000	4.000	TOTAL	N
1.000	53.85	46.15	100.00	13.00
2.000	80.00	20.00	100.00	5.00
TOTAL	61.11	38.89	100.00	
N	11	7	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(5) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	3.000	4.000	TOTAL	N
1.000	63.64	85.71	72.22	13.00
2.000	36.36	14.29	27.78	5.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	
N	11	7	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(6) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	2.000	3.000	4.000	5.000	TOTAL
1.000	2	3	8	0	13
2.000	0	0	3	1	4
TOTAL	2	3	11	1	17

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(6) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	2.000	3.000	4.000	5.000	TOTAL	N
1.000	15.38	23.08	61.54	.00	100.00	13.00
2.000	.00	.00	75.00	25.00	100.00	4.00
TOTAL	11.76	17.65	64.71	5.88	100.00	
N	2	3	11	1	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(6) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	2.000	3.000	4.000	5.000	TOTAL	N
1.000	100.00	100.00	72.73	.00	76.47	13.00
2.000	.00	.00	27.27	100.00	23.53	4.00
TOTAL	100	100	100	100.00	100.00	
N	2	3	11	1	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(7) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	4.000	5.000	5.500	6.000	7.000	TOTAL
1.000	2	4	0	5	2	13
2.000	0	2	1	1	1	5
TOTAL	2	6	1	6	3	18

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(7) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	4.000	5.000	5.500	6.000	7.000	TOTAL	N
1.000	15.38	30.77	.00	38.46	15.38	100.00	13.00
2.000	.00	40.00	20.00	20.00	20.00	100.00	5.00
TOTAL	11.11	33.33	5.56	33.33	16.67	100.00	
N	2	6	1	6	3	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(7) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	4.000	5.000	5.500	6.000	7.000	TOTAL	N
1.000	100.00	66.67	.00	83.33	66.67	72.22	13.00
2.000	.00	33.33	100.00	16.67	33.33	27.78	5.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	2	6	1	6	3	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(9) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000	5.000	TOTAL
1.000	3	5	3	1	1	0	13
2.000	1	0	1	1	0	1	4
TOTAL	4	5	4	2	1	1	17

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(9) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000
1.000	23.08	38.46	23.08	7.69	7.69
2.000	25.00	.00	25.00	25.00	.00
TOTAL	23.53	29.41	23.53	11.76	5.88
N	4	5	4	2	1

	5.000	TOTAL	N
1.000	.00	100.00	13.00
2.000	25.00	100.00	4.00
TOTAL	5.88	100.00	
N	1	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(9) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000
1.000	75.00	100.00	75.00	50.00	100.00
2.000	25.00	.00	25.00	50.00	.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
N	4	5	4	2	1

	5.000	TOTAL	N
1.000	.00	76.47	13.00
2.000	100.00	23.53	4.00
TOTAL	100.00	100.00	
N	1	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(10) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	TOTAL
1.000	10	3	13
2.000	5	0	5
TOTAL	15	3	18

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(10) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	TOTAL	N
1.000	76.92	23.08	100.00	13.00
2.000	100.00	.00	100.00	5.00
TOTAL	83.33	16.67	100.00	
N	15	3	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(10) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	TOTAL	N
1.000	66.67	100.00	72.22	13.00
2.000	33.33	.00	27.78	5.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	
N	15	3	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(11) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	6	7	0	13
2.000	2	1	2	5
TOTAL	8	8	2	18

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(11) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	46.15	53.85	.00	100.00	13.00
2.000	40.00	20.00	40.00	100.00	5.00
TOTAL	44.44	44.44	11.11	100.00	
N	8	8	2	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(11) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	75.00	87.50	.00	72.22	13.00
2.000	25.00	12.50	100.00	27.78	5.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	8	8	2	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(12) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	TOTAL
1.00	6	6	12
2.000	2	3	5
TOTAL	8	9	17

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(12) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	TOTAL	N
1.000	50.00	50.00	100.00	12.00
2.000	40.00	60.00	100.00	5.00
TOTAL	47.06	52.94	100.00	
N	8	9	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(12) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	TOTAL	N
1.000	75.00	66.67	70.59	12.00
2.000	25.00	33.33	29.41	5.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	
N	8	9	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(13) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	TOTAL
1.000	9	9
2.000	4	4
TOTAL	13	13

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(13) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	TOTAL	N
1.000	100.00	100.00	9.00
2.000	100.00	100.00	4.00
TOTAL	100.00	100.00	
N	13	13	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(13) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	TOTAL	N
1.000	69.23	69.23	9.00
2.000	30.77	30.77	4.00
TOTAL	100.00	100.00	
N	13	13	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(14) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	5	7	1	13
2.000	2	1	2	5
TOTAL	7	8	3	18

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(14) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	38.46	53.85	7.69	100.00	13.00
2.000	40.00	20.00	40.00	100.00	5.00
TOTAL	38.89	44.44	16.67	100.00	
N	7	8	3	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(14) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	71.43	87.50	33.33	72.22	13.00
2.000	28.57	12.50	66.67	27.78	5.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	7	8	3	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(15) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	TOTAL
1.000	6	7	13
2.000	2	3	5
TOTAL	8	10	18

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(15) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	TOTAL	N
1.000	46.15	53.85	100.00	13.00
2.000	40.00	60.00	100.00	5.00
TOTAL	44.44	55.56	100.00	
N	8	10	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(15) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	TOTAL	N
1.000	75.00	70.00	72.22	13.00
2.000	25.00	30.00	27.78	5.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	
N	8	10	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(16) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	9	1	2	12
2.000	4	0	0	4
TOTAL	13	1	2	16

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(16) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	75.00	8.33	16.67	100.00	12.00
2.000	100.00	.00	.00	100.00	4.00
TOTAL	81.25	6.25	12.50	100.00	
N	13	1	2	16	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(16) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	69.23	100.00	100.00	75.00	12.00
2.000	30.77	.00	.00	25.00	4.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	13	1	2	16	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(17) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	TOTAL
1.000	10	3	13
2.000	5	0	5
TOTAL	15	3	18

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(17) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	TOTAL	N
1.000	76.92	23.08	100.00	13.00
2.000	100.00	.00	100.00	5.00
TOTAL	83.33	16.67	100.00	
N	15	3	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(17) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	TOTAL	N
1.000	66.67	100.00	72.22	13.00
2.000	33.33	.00	27.78	5.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	
N	15	3	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(18) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	TOTAL
1.000	9	4	13
2.000	4	0	4
TOTAL	13	4	17

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(18) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	TOTAL	N
1.000	69.23	30.77	100.00	13.00
2.000	100.00	.00	100.00	4.00
TOTAL	76.47	23.53	100.00	
N	13	4	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(18) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	TOTAL	N
1.000	69.23	100.00	76.47	13.00
2.000	30.77	.00	23.53	4.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	
N	13	4	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(19) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	6	6	1	13
2.000	2	1	0	3
TOTAL	8	7	1	16

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(19) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	46.15	46.15	7.69	100.00	13.00
2.000	66.67	33.33	.00	100.00	3.00
TOTAL	50.00	43.75	6.25	100.00	
N	8	7	1	16	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(19) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	75.00	85.71	100.00	81.25	13.00
2.000	25.00	14.29	.00	18.75	3.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	8	7	1	16	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(20) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	9	3	1	13
2.000	0	5	0	5
TOTAL	9	8	1	18

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(20) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	69.23	23.08	7.69	100.00	13.00
2.000	.00	100.00	.00	100.00	5.00
TOTAL	50.00	44.44	5.56	100.00	
N	9	8	1	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(20) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	100.00	37.50	100.00	72.22	13.00
2.000	.00	62.50	.00	27.78	5.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	9	8	1	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(21) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	4	5	4	13
2.000	2	2	0	4
TOTAL	6	7	4	17

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(21) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	30.77	38.46	30.77	100.00	13.00
2.000	50.00	50.00	.00	100.00	4.00
TOTAL	35.29	41.18	23.53	100.00	
N	6	7	4	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(21) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	66.67	71.43	100.00	76.47	13.00
2.000	33.33	28.57	.00	23.53	4.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	6	7	4	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(22) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	2	10	1	13
2.000	2	2	0	4
TOTAL	4	12	1	17

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(22) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	15.38	76.92	7.69	100.00	13.00
2.000	50.00	50.00	.00	100.00	4.00
TOTAL	23.53	70.59	5.88	100.00	
N	4	12	1	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(22) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	50.00	83.33	100.00	76.47	13.00
2.000	50.00	16.67	.00	23.53	4.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	4	12	1	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(23) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	TOTAL
1.000	2	11	13
2.000	1	2	3
TOTAL	3	13	16

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(23) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	TOTAL	N
1.000	15.38	84.62	100.00	13.00
2.000	33.33	66.67	100.00	3.00
TOTAL	18.75	81.25	100.00	
N	3	13	16	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(23) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	TOTAL	N
1.000	66.67	84.62	81.25	13.00
2.000	33.33	15.38	18.75	3.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	
N	3	13	16	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(24) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	1	10	2	13
2.000	0	1	0	1
TOTAL	1	11	2	14

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(24) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	7.69	76.92	15.38	100.00	13.00
2.000	.00	100.00	.00	100.00	1.00
TOTAL	7.14	78.57	14.29	100.00	
N	1	11	2	14	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(24) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	100.00	90.91	100.00	92.86	13.00
2.000	.00	9.09	.00	7.14	1.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	1	11	2	14	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(25) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	1	11	1	13
2.000	1	2	0	3
TOTAL	2	13	1	16

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(25) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	7.69	84.62	7.69	100.00	13.00
2.000	33.33	66.67	.00	100.00	3.00
TOTAL	12.50	81.25	6.25	100.00	
N	2	13	1	16	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(25) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	50.00	84.62	100.00	81.25	13.00
2.000	50.00	15.38	.00	18.75	3.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	2	13	1	16	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(26) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	2	4	7	13
2.000	0	1	2	3
TOTAL	2	5	9	16

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(26) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	15.38	30.77	53.85	100.00	13.00
2.000	.00	33.33	66.67	100.00	3.00
TOTAL	12.50	31.25	56.25	100.00	
N	2	5	9	16	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(26) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	100.00	80.00	77.78	81.25	13.00
2.000	.00	20.00	22.22	18.75	3.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	2	5	9	16	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(27) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	7	3	2	12
2.000	3	2	0	5
TOTAL	10	5	2	17

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(27) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	58.33	25.00	16.67	100.00	12.00
2.000	60.00	40.00	.00	100.00	5.00
TOTAL	58.82	29.41	11.76	100.00	
N	10	5	2	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(27) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	70.00	60.00	100.00	70.59	12.00
2.000	30.00	40.00	.00	29.41	5.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	10	5	2	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(28) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	2	3	7	12
2.000	1	1	1	3
TOTAL	3	4	8	15

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(28) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	16.67	25.00	58.33	100.00	12.00
2.000	33.33	33.33	33.33	100.00	3.00
TOTAL	20.00	26.67	53.33	100.00	
N	3	4	8	15	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(28) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	66.67	75.00	87.50	80.00	12.00
2.000	33.33	25.00	12.50	20.00	3.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	3	4	8	15	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(29) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	1	8	1	10
2.000	3	1	0	4
TOTAL	4	9	1	14

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(29) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	10.00	80.00	10.00	100.00	10.00
2.000	75.00	25.00	.00	100.00	4.00
TOTAL	28.57	64.29	7.14	100.00	
N	4	9	1	14	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(29) (COLUMNS)
COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	25.00	88.89	100.00	71.43	10.00
2.000	75.00	11.11	.00	28.57	4.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	4	9	1	14	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(30) (COLUMNS)
FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	7	6	0	13
2.000	1	3	1	5
TOTAL	8	9	1	18

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(30) (COLUMNS)
ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	53.85	46.15	.00	100.00	13.00
2.000	20.00	60.00	20.00	100.00	5.00
TOTAL	44.44	50.00	5.56	100.00	
N	8	9	1	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(30) (COLUMNS)

COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	87.50	66.67	.00	72.22	13.00
2.000	12.50	33.33	100.00	27.78	5.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	8	9	1	18	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(31) (COLUMNS)

FREQUENCIES

	1.000	2.000	3.000	TOTAL
1.000	1	1	10	12
2.000	1	2	2	5
TOTAL	2	3	12	17

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(31) (COLUMNS)

ROW PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	8.33	8.33	83.33	100.00	12.00
2.000	20.00	40.00	40.00	100.00	5.00
TOTAL	11.76	17.65	70.59	100.00	
N	2	3	12	17	

TABLE OF GRUPO (ROWS) BY P(31) (COLUMNS)

COLUMN PERCENTS

	1.000	2.000	3.000	TOTAL	N
1.000	50.00	33.33	83.33	70.59	12.00
2.000	50.00	66.67	16.67	29.41	5.00
TOTAL	100.00	100.00	100.00	100.00	
N	2	3	12	17	

NO NON-MISSING VALUES TO TABULATE

□

```
KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 18 CASES
 DEPENDENT VARIABLE IS     P(11)
 GROUPING VARIABLE IS   GRUPO
   GROUP     COUNT   RANK SUM
     1.000         13   114.500
     2.000          5    56.500

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC =    23.500
PROBABILITY IS     0.329
CHI-SQUARE APPROXIMATION =     0.953 WITH  1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 17 CASES
 DEPENDENT VARIABLE IS     P(12)
 GROUPING VARIABLE IS   GRUPO
   GROUP     COUNT   RANK SUM
     1.000         12   105.000
     2.000          5    48.000

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC =    27.000
PROBABILITY IS     0.715
CHI-SQUARE APPROXIMATION =     0.133 WITH  1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 13 CASES
 DEPENDENT VARIABLE IS     P(13)
 GROUPING VARIABLE IS   GRUPO
   GROUP     COUNT   RANK SUM
     1.000          9    63.000
     2.000          4    28.000

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC =    18.000
PROBABILITY IS     1.000
CHI-SQUARE APPROXIMATION =     0.000 WITH  1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 18 CASES
 DEPENDENT VARIABLE IS     P(14)
 GROUPING VARIABLE IS   GRUPO
   GROUP     COUNT   RANK SUM
     1.000         13   117.500
     2.000          5    53.500
 MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC =    26.500
PROBABILITY IS     0.522
CHI-SQUARE APPROXIMATION =     0.411 WITH  1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 18 CASES
 DEPENDENT VARIABLE IS     P(15)
 GROUPING VARIABLE IS   GRUPO
```

```
GROUP    COUNT  RANK SUM
  1.000      13   121.500
  2.000       5    49.500

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC =    30.500
PROBABILITY IS     0.819
CHI-SQUARE APPROXIMATION =     0.052 WITH  1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR  16 CASES
 DEPENDENT VARIABLE IS      P(16)
 GROUPING VARIABLE IS    GRUPO
  GROUP    COUNT  RANK SUM
    1.000      12   108.000
    2.000       4    28.000

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC =    30.000
PROBABILITY IS     0.285
CHI-SQUARE APPROXIMATION =     1.143 WITH  1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR  18 CASES
 DEPENDENT VARIABLE IS      P(17)
 GROUPING VARIABLE IS    GRUPO
  GROUP    COUNT  RANK SUM
    1.000      13   131.000
    2.000       5    40.000

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC =    40.000
PROBABILITY IS     0.253
CHI-SQUARE APPROXIMATION =     1.308 WITH  1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR  17 CASES
 DEPENDENT VARIABLE IS      P(18)
 GROUPING VARIABLE IS    GRUPO
  GROUP    COUNT  RANK SUM
    1.000      13   125.000
    2.000       4    28.000

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC =    34.000
PROBABILITY IS     0.218
CHI-SQUARE APPROXIMATION =     1.515 WITH  1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR  16 CASES
 DEPENDENT VARIABLE IS      P(19)
 GROUPING VARIABLE IS    GRUPO
  GROUP    COUNT  RANK SUM
    1.000      13   115.000
    2.000       3    21.000
```

```
MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC =     24.000
PROBABILITY IS      0.497
CHI-SQUARE APPROXIMATION =     0.462 WITH  1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR  18 CASES
 DEPENDENT VARIABLE IS      P(20)
 GROUPING VARIABLE IS    GRUPO
  GROUP     COUNT   RANK SUM
     1.000         13    103.500
     2.000          5     67.500

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC =     12.500
PROBABILITY IS      0.027
CHI-SQUARE APPROXIMATION =     4.923 WITH  1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR  17 CASES
 DEPENDENT VARIABLE IS      P(21)
 GROUPING VARIABLE IS    GRUPO
  GROUP     COUNT   RANK SUM
     1.000         13    126.000
     2.000          4     27.000

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC =     35.000
PROBABILITY IS      0.276
CHI-SQUARE APPROXIMATION =     1.185 WITH  1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR  17 CASES
 DEPENDENT VARIABLE IS      P(22)
 GROUPING VARIABLE IS    GRUPO
  GROUP     COUNT   RANK SUM
     1.000         13    127.000
     2.000          4     26.000

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC =     36.000
PROBABILITY IS      0.156
CHI-SQUARE APPROXIMATION =     2.012 WITH  1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR  16 CASES
 DEPENDENT VARIABLE IS      P(23)
 GROUPING VARIABLE IS    GRUPO
  GROUP     COUNT   RANK SUM
     1.000         13    114.000
     2.000          3     22.000

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC =     23.000
PROBABILITY IS      0.487
CHI-SQUARE APPROXIMATION =     0.483 WITH  1 DF
```

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 14 CASES
DEPENDENT VARIABLE IS P(24)
GROUPING VARIABLE IS GRUPO

GROUP	COUNT	RANK SUM
1.000	13	98.000
2.000	1	7.000

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC = 7.000
PROBABILITY IS 0.863
CHI-SQUARE APPROXIMATION = 0.030 WITH 1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 16 CASES
DEPENDENT VARIABLE IS P(25)
GROUPING VARIABLE IS GRUPO

GROUP	COUNT	RANK SUM
1.000	13	116.500
2.000	3	19.500

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC = 25.500
PROBABILITY IS 0.236
CHI-SQUARE APPROXIMATION = 1.407 WITH 1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 16 CASES
DEPENDENT VARIABLE IS P(26)
GROUPING VARIABLE IS GRUPO

GROUP	COUNT	RANK SUM
1.000	13	107.000
2.000	3	29.000

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC = 16.000
PROBABILITY IS 0.597
CHI-SQUARE APPROXIMATION = 0.280 WITH 1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 17 CASES
DEPENDENT VARIABLE IS P(27)
GROUPING VARIABLE IS GRUPO

GROUP	COUNT	RANK SUM
1.000	12	110.500
2.000	5	42.500

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC = 32.500
PROBABILITY IS 0.764
CHI-SQUARE APPROXIMATION = 0.090 WITH 1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 15 CASES
DEPENDENT VARIABLE IS P(28)
GROUPING VARIABLE IS GRUPO

GROUP	COUNT	RANK SUM
1.000	12	101.000
2.000	3	19.000

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC = 23.000
PROBABILITY IS 0.427
CHI-SQUARE APPROXIMATION = 0.631 WITH 1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 14 CASES
DEPENDENT VARIABLE IS P(29)
GROUPING VARIABLE IS GRUPO

GROUP	COUNT	RANK SUM
1.000	10	88.500
2.000	4	16.500

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC = 33.500
PROBABILITY IS 0.024
CHI-SQUARE APPROXIMATION = 5.103 WITH 1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 18 CASES
DEPENDENT VARIABLE IS P(30)
GROUPING VARIABLE IS GRUPO

GROUP	COUNT	RANK SUM
1.000	13	109.500
2.000	5	61.500

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC = 18.500
PROBABILITY IS 0.120
CHI-SQUARE APPROXIMATION = 2.412 WITH 1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 17 CASES
DEPENDENT VARIABLE IS P(31)
GROUPING VARIABLE IS GRUPO

GROUP	COUNT	RANK SUM
1.000	12	120.500
2.000	5	32.500

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC = 42.500
PROBABILITY IS 0.100
CHI-SQUARE APPROXIMATION = 2.698 WITH 1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 16 CASES

DEPENDENT VARIABLE IS ACTITUD

GROUPING VARIABLE IS GRUPO

GROUP	COUNT	RANK SUM
1.000	13	116.500
2.000	3	19.500

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC = 25.500

PROBABILITY IS 0.352

CHI-SQUARE APPROXIMATION = 0.867 WITH 1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 14 CASES

DEPENDENT VARIABLE IS MATERIA

GROUPING VARIABLE IS GRUPO

GROUP	COUNT	RANK SUM
1.000	13	99.000
2.000	1	6.000

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC = 8.000

PROBABILITY IS 0.701

CHI-SQUARE APPROXIMATION = 0.147 WITH 1 DF

KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE FOR 13 CASES

DEPENDENT VARIABLE IS ESTILO

GROUPING VARIABLE IS GRUPO

GROUP	COUNT	RANK SUM
1.000	10	77.000
2.000	3	14.000

MANN-WHITNEY U TEST STATISTIC = 22.000

PROBABILITY IS 0.221

CHI-SQUARE APPROXIMATION = 1.499 WITH 1 DF

4.1.1. TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS DE LOS ALUMNOS: PROBLEMAS ADITIVOS: GRUPO PILOTO

Problema 1:

Colegio 1: Alumnos de 5º

Davinia:
D: (lee el problema en voz baja). *Aquí dice que hay dos niños que uno tiene más que otro y entonces tendríamos que como Luis tiene 321 y María 119, nos pregunta que cuánto tiene más Luis que María. Entonces tendríamos que restar y lo que nos dé ...*
E: ¿y cómo te das cuenta?
D: Porque,... no sé, me lo imagino. Es como si fuera que Joel tiene 321 ptas. y yo 119. Lo pienso como si lo fuéramos a comprar o algo y entonces ya lo sé (Hace una viñeta escueta, colocando dos rectángulos con los datos. Escribe correctamente los datos y pasa a hacer el diagrama).
E: ¿Cómo haces el diagrama?
D: El total sería lo que tiene Luis, luego lo dividiría en dos y en uno dejaría lo que tiene María y en el otro lo que le faltaba a María para llegar a tener lo de Luis. (Coloca las 119 en una parte y va completando). *Aquí* (señala en el papel) *tendría que poner lo que le faltaba.*
E: ¿Cómo calculas lo que le falta?
D: Contando, aunque me resulta más fácil hacer la operación. (Hace la resta y coloca en el otro rectángulo la cantidad que le ha dado). *Al hacer un problema no me hace falta hacer el diagrama, yo veo más fácil hacer la operación.* (Escribe la historia).
E: ¿Para qué te sirve escribir la historia?
D: Para ver el problema completo, con los datos y la solución. (Escribe la historia correctamente, engarzando la solución en el enunciado)

Nuria:
N: (Lo lee en voz alta)
E: ¿Lo entiendes o necesitas leerlo más veces?
N: (Lo vuelve a leer en voz baja)
E: ¿Qué piensas?
N: (Se arruga el rostro)
E: Puedes hacer lo que quieras.
N: ¿Lo tengo que hacer con el diagrama?
E: Como tú quieras.
N: (Empieza a hacer un dibujo: pinta unas monedas y pone 321 ptas. Vuelve a leer el problema y el resto lo escribe con palabras. La palabra "más" le crea problemas)
E: ¿Qué piensas? ¿Qué te imaginas?
N: No sé. (Escribe los datos y la pregunta, aunque casi copia todo el enunciado) *Yo prefiero hacer las operaciones* (Escribe los datos, duda qué operación elegir y finalmente se decide por una resta)
E: ¿Cuál es la solución?
N: (Escribe el resultado, confundiendo la pregunta)
E: ¿Serías capaz de hacer el diagrama?

N: No.

Isaac:
I: (Lo lee en alto correctamente. Pasa a hacer el dibujo y pinta dos rectángulos con las cantidades. Copia todo el enunciado para poner los datos, al mismo tiempo relee el problema).
E: ¿Ya lo entiendes?
I: Sí. (Pasa a hacer el diagrama, pero se limita a dibujar dos rectángulos yuxtapuestos con las cantidades y las suma). *Pongo una cantidad en una parte y la otra en la otra.*
E:¿Siempre haces el diagrama antes?
I: Sí (Pasa a la operación y lo vuelve a sumar, escribe la historia diciendo que la suma es lo que Luis tiene más que María).
E: ¿Cómo te lo imaginas?
I: Cuando veo los datos los pongo en cada sitio y después los sumo.

Colegio 2: Alumnos de 5º

Enrique:
En: (Lo lee en voz baja rápidamente) *¿Hago el dibujo?*
E: Como tu quieras.
En: (Coloca unas monedas con el nombre de Luis y otras con María. Escribe los datos correctamente y comienza el diagrama: hace un rectángulo grande, se queda parado...)
E: ¿Qué te pide el problema?
En: (Sigue callado)
E: Puedes hacer el diagrama o pasar a hacer la operación.
En: La operación es más fácil, pero estoy pensando en el diagrama. (Finalmente decide hacer la operación).
E: ¿Por qué eliges las resta?
En: Porque Luis tiene 321 ptas. y María 119 y pregunta cuánto tiene Luis más que María.
E: Y para hallar esa diferencia...
En: Hay que restar. (La ejecuta correctamente y sigue enfoscado en recordar el diagrama)
E: ¿Cuál sería la historia con el resultado?
En: (Lo escribe correctamente).

Catalina:
C: (Lo lee en voz alta correctamente y se dispone a empezar por el dibujo) *Dibujo y pongo las pesetas de María.* (Luego coloca otro monigote con las de Luis, escribe los datos y lo que pide el problema).
E: ¿Cuáles son los datos?
C: Que Luis tiene 321 y María 119. ¿Qué cuánto tiene María? (Pasa a hacer el diagrama y escribe dos rectángulos con las cantidades de los dos y los suma).
E: ¿Qué hiciste?
C: Puse lo que tenía Juan y María y sumé las dos cantidades. (Pasa a la operación y repite la suma, escribe la historia repitiendo que María tiene ahora 440).

Nicolás:
N: (Lo lee en voz baja más de una vez)
E: ¿Lo entiendes?
N: (pasa a escribir los datos y lo hace incorrectamente, escribe "Luis tiene 321 ptas. más que María)
E: ¿Qué estás pensando? ¿Qué te imaginas?
N: (no responde)
E: (Le planteo que personalice el problema, poniéndose en lugar de Luis y María, él y su hermana)
N: (Comienza a hacer el diagrama y coloca dentro de un gran rectángulo las dos cantidades, pasa a las operaciones y efectúa mal la resta)
E: ¿Cuál es la solución?
N: 212.
E: ¿Cómo escribirías la historia?
N: Que Luis tiene 321 y que tiene 212 más que María.

Colegio 3: Alumnos de 5º

Daida:
D: (Lo lee en voz alta)
E: ¿Ya lo entiendes?
D: (Lo vuelve a leer en voz baja) *Se resta.* (A continuación escribe los datos y el diagrama).
E: ¿Por qué haces el diagrama así?
D: Porque (señalando el rectángulo pequeño) *aquí se pone lo que se resta.* (Sin embargo coloca 321 en el rectángulo grande y 119 en el pequeño). *Ahora resto.* (Lo hace mentalmente y lo coloca en el diagrama, hace la operación y termina escribiendo la historia.

Lorena:
L: (lee el problema en voz alta)
E: ¿Tienes que leerlo varias veces?
L: Sí, para entenderlo (Lo vuelve a leer y rápidamente pasa a escribir los datos)
E: ¿Ya lo entiendes?
L: sí
E: ¿Te ayuda hacer el dibujo?
L: No. (Pasa a hacer el diagrama. Coloca dos rectángulos y en cada uno los datos y comienza a hacer la suma). *Me equivoqué. 321 tiene que estar en el total.* (Comienza de nuevo a hacer el diagrama y coloca en la etiqueta del total 321 y en una de las partes empieza a poner 119 y comienza a hacer la resta mentalmente para poner el valor en la otra etiqueta, pero no le sale) *Voy a hacer la resta.*
E: ¿Cómo te diste cuenta que no podía ser una suma?
L: Porque aquí dice que Luis tiene más que María y por eso no podía dar más.
E: ¿Cuál es la solución?

L: 202 (Pasa a escribir la historia y repite completamente el enunciado).

Ricardo:
R: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Sabes lo que tienes que hacer?
R: Sí, a las 321 que tiene Luis le tengo que restar las 119.
E: ¿Puedo hacer primero la operación?
R: Sí
E: ¿Cuántas veces tienes que leer el problema?
R: 2 (Pasa a la operación y suma las cantidades)
E: ¿Tú no decías que ibas a restar?
R: Porque creí que esta era las más que tenía Juan ¿puedo rectificar?
E: Sí (Hace la resta correctamente y anota con detalle la solución)
R: Yo me imagino que Luis tiene 321 ptas y que María tiene 119 y tengo que calcular cuántas tiene más que María.

Colegio 3: Alumnos de 4º

Natanael:
N: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Ya lo entiendes?
N: Sí (Pasa a hacer la viñeta y hace dos cuadrados con los datos. Escribe los datos y las preguntas, a continuación hace el diagrama correctamente, pone la etiqueta total, representa una parte)
E: ¿Qué vas a hacer?
N: Restar 321 de esto (119).
E: ¿Por qué restar?
N: Porque me pide cuántas pesetas tiene Luis más que María. (Intenta hacer la resta mentalmente para completar el diagrama, pero como le cuesta hace la operación y luego vuelve al diagrama. Finalmente escribe correctamente la historia)

Gara:
G: (Lo lee en voz alta)
E: ¿Cuántas veces sueles leerlo?
G: 2 ó 3 (Pasa al dibujo y hace dos rectángulos con las dos cantidades) *No sé que hacer...*
E: Puedes pasar a escribir los datos.
G: (Escribe los datos y vuelve a copiar todo el problema)
E: Puedes hacer la operación. ¿Sabes qué operación hay que hacer?
G: Una resta.
E: ¿Y cómo te diste cuenta?
G: No sé (Hace la resta correctamente y escribe la solución).

Mercedes:
M: (Lo lee en voz alta. Lo vuelve a leer) *¿Qué hago: la viñeta?*

E: Lo que quieras. ¿Te ayuda la viñeta a entender el problema?
M: No. (Pasa a escribir los datos y escribe todo el problema)
E: ¿Ya entiendes el problema?
M: Sí. (Lo vuelve a leer sin decidirse a hacer nada y pasa a la operación) *Voy a dejar sin hacer el diagrama.* (Hace una suma)
E: ¿Por qué sumaste?
M: Porque Luis tiene 321 y María 119.
E: ¿Que te dio?
M: 440
E: Y eso ¿qué es?
M: Lo que tiene los dos juntos.
E. ¿Puedes escribir la historia?
M: Sí (Escribe afirmando que los dos juntos tienen 440).

Problema 2: Lo realizan en una hoja en blanco.

Colegio 1: Alumnos de 5º.

Davinia:
D: ¿Este como lo hago?
E: Como tú quieras.
D:¿Puedo poner los datos?
E: Sí, y hacer dibujos, diagramas, lo que necesites.
D: (Lo lee correctamente en voz alta. Separa tres partes en la resolución: Datos-desarrollo-operaciones. Rellena correctamente los datos, en desarrollo especifica la operación a realizar y finalmente la ejecuta. Coloca debajo solución y pone el resultado detalladamente).
E: ¿Sigues siempre este esquema?
D: Sí. Escribo primero los datos, esto es los periódicos que tiene y los que ha vendido y quiere saber lo que le queda. Entonces restando tengo lo que me queda.
E: ¿Te lo imaginaste?
D. No, no siempre lo hago, sólo cuando no lo entiendo. La maestra nos dice siempre imagínense que son ustedes mismos, pero cuando lo entiendo no me hace falta.

Nuria:
N: (Lee el problema en voz alta, lentamente, lo vuelve a leer en voz baja y comienza a resolverlo. Coloca tres apartados: datos -indicaciones-operaciones. Escribe los datos incorrectamente: cambia vendido por vino. Indica que hay que hacer una suma y la efectúa).
E: ¿Cómo sabes que tienes que sumar?
N: Porque si tiene 500 periódicos y ... (no sabe que añadir).

Isaac:
I: (Lo lee en voz alta). *Tengo que restar.*

E: ¿Por qué lo sabes después de leerlo tan rápido?
I: Porque me dice los periódicos que tiene y al vender 245, tengo que restar para ver lo que me queda. (Vuelve a hacer una división en el papel: datos-indicaciones-operaciones. Coloca correctamente todo, pero efectúa mal el algoritmo, dando por solución 365)

Colegio 2: Alumnos de 5º

<u>Enrique:</u>
En: (Lo lee rápidamente) *¿Tengo que escribir los datos?*
E: Como tú quieras hacerlo.
En: (Escribe los datos y hace la resta)
E: ¿Por qué sabes que es de restar?
En: Porque en la tienda había 500 y vendió 245. Para saber lo que quedan.

<u>Catalina:</u>
C: (Lo lee en voz alta . Separa datos, ¿datos?, operación. Completa todo correctamente)
E: ¿Cómo supiste que era una resta??
C: Pues si tenía 500 y le quedaban 245, es que había vendido y le quedaban menos.

<u>Nicolás:</u>
N: (Lo lee en voz baja).
E: ¿Lo entiendes?
N: Un periodista a lo largo de ... (Lo vuelve a leer).
E: ¿Qué vas a hacer?
N: A los 500 le voy a quitar 245. ¿Puedo hacerlo con la operación?
E: Sí.
N: (Hace incorrectamente la operación)
E: ¿Cuál es la solución?
N: 365
E: 365 ¿qué?
N: periódicos que quedan.

Colegio 3: Alumnos de 5º

<u>Daida:</u>
D: (Lo lee rápidamente y se dispone a hacer el diagrama. Construye un rectángulo dentro de otro: en el mayor coloca el total y en el pequeño lo que vendió, como si se tratara de dos partes disjuntas)
E: ¿El diagrama te ayuda?
D: Sí (Pasa a hacer la resta correctamente)
E: ¿Cómo te diste cuenta que es de sumar?
D. Porque dice que tiene 500 y ha vendido 245.
E: ¿Cuál es la solución?
D: 255.

<u>Lorena:</u>

L: (Lo lee en voz baja, quizá más de una vez y hace la resta)
E: ¿Cómo te diste cuenta que era una resta?
L: Porque para saber lo que queda hay que restarlo.

Ricardo:
R: (Lo lee en voz baja). *A 500 le quito 245 para ver cuánto le quedan.* (Pasa a hacer la operación) *Resté para saber cuánto le quedó.*
E: ¿Cuáles eran los datos?
R: Tenía 500 periódicos y vendió 245 y yo digo que hice la resta para calcular lo que le quedaba.

Colegio 3: Alumnos de 4º

Natanael
N: (Lo lee rápidamente)
E: ¿Ya lo entiendes?
N: Sí. (Hace una resta)
E: ¿Cuál es la solución?
N: 255 periódicos le quedan.
E: ¿Qué pensaste para resolver el problema?
N: Que el vendedor tenía 500 periódicos y había vendido y resté para calcular lo que le quedaban.

Gara:
G: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Vas a hacer algún dibujo?
G: Sí. (Hace una viñeta, escribe los datos en una columna y la pregunta en otra)
E: ¿Entiendes bien el problema?
G: (Lo vuelve a leer) *¿Puedo hacer la operación?*
E: ¿Sabes cuál?
G: (Hace una resta correctamente) *255.*
E: ¿Por qué restaste?
G: Porque si tenía 500 y vendió 245, entonces tiene que tener menos.

Mercedes:
M: (Lo lee en voz alta con dificultad)
E. ¿Qué vas a hacer?
M: La operación.
E: Pero ¿ya lo entendiste?
M: No, voy a volverlo a leer. (Lo lee nuevamente, hace una resta pero la ejecuta mal)
E. ¿Por qué restaste?
M: (Lo vuelve a leer y añade) *Hay que restar para saber cuanto le quedan.*

4.1.2. TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS A LOS ALUMNOS: PROBLEMAS ADITIVOS: GRUPO DEFINITIVO

Los problemas aditivos fueron los mismos que en las entrevistas piloto.

1. *Luis tiene 321 ptas y María 119 ptas ¿Cuántas pesetas tiene Luis más que María?*
5. Un vendedor de periódicos tenía en su kiosco 500 periódicos. Si a lo largo de la semana ha vendido 245, ¿cuántos le quedan?

Problema 1:

El problema número 1, una situación sustractiva, corresponde a un problema del tipo comparar, donde el dato desconocido es la diferencia entre ambas colecciones.

Jorge:
J: Lee el problema rápidamente.
E: ¿Ya lo entiendes?
J: Sí, me pide ¿cuántas pesetas tiene más Luis que María? Comienza a hacer el diagrama.
E: ¿Vas a empezar por el diagrama?
J: Sí.
E: ¿Qué dibujas?
J: Lo que tiene Luis. (Separa la cantidad que corresponde a María , hace la operación y calcula el resultado).

El esquema que plasma en este proceso es claramente la idea de dos colecciones, obteniendo el resultado de la diferencia entre ambos conjuntos.

Ana:
J: (Lo lee) *Una resta.*
E: ¿tan pronto? ¿Qué te pregunta?
A: ¿Qué cuántas pesetas tiene Luis más que María?
E: ¿Podrías hacer el diagrama?
A: (Empieza a dibujarlos y lo que hace es colocar dos rectángulos y en cada uno de ellos una colección).
E: ¿Por qué es una resta?
*A: Porque María tiene esto (*señala una cantidad con las manos) *y haciendo la resta nos daría cuánto tiene más Luis que María.* (Ejecuta correctamente la resta).
E: ¿Cuál es la respuesta?
A: 202 pesetas tiene más.
E: Cómo es más fácil hacerlo ¿con las operaciones?
A: Sí
E: ¿Te sirven los diagramas?
A: Sí, para cuando no lo entiendo bien.
E: ¿Puedes hacer un dibujo (Dibuja las monedas de María y de Luis, al tiempo que va explicando lo que hace)
E: ¿Podrías resolverlo sólo con el dibujo?
A: Me tiene que dar 202 pesetas. Así que tendría que quitar ésta (señala las monedas que tiene dibujadas)*, ésta y ésta.*
E: ¿Lo podrías resolver con el diagrama?
A: (Realiza lo mismo que ha hecho en el dibujo, sobre la colección mayor que había ya dibujado, y ahora sí que utiliza correctamente los diagramas).

Lara:
L: (Lee el problema en voz baja, muy rápido) *¿Puedo hacerlo directamente con las operaciones?*
E: ¿Qué operación elegirías?
L: Una resta, porque dice que Luis tiene 321 y María 119 ptas y me pregunta que cuánto tiene Luis más que María. (Ejecuta la operación correctamente).
E: ¿Podrías hacer un dibujo que representara el problema?
L: Pondría el dinero que tiene Luis y después separaría lo que tiene María, pero no puedo... no me da bien, así que tengo que cambiar una moneda de 5 (Representa las monedas de Luis y separa lo que le corresponde a María. El dibujo es exactamente una representación del esquema parte-todo).

Esta niña, desde un primer momento mostró un cierto rechazo hacia la representación gráfica, ya que decía que era alargar innecesariamente un problema, dado que las operaciones son mucho más fáciles de realizar. Sin embargo, podemos observar como con el dibujo utiliza correctamente la misma sintaxis de la representación gráfica, planteando la idea de encontrar la diferencia entre las dos colecciones.

Alexis:
A: (Lee el problema en voz baja).
E: ¿Entiendes la pregunta?
A: Dice que ...(lee el texto, pero enfatizando los datos y la pregunta. Pasa a hacer el diagrama: representa la cantidad total y separa la cantidad de la colección menor, obteniendo el resultado).
E: ¿Cuál es la solución?
A: 202
E: ¿Lo podrías hacer con una operación?
A: Sí. (Hace la resta)
E: ¿Por qué una resta?
A: Porque necesito quitar a lo que tiene Luis lo que tiene María.
E: ¿Podrías hacer una viñeta?
A: (Hace un dibujo ilustrativo colocando directamente la solución).

Dácil:
D: (Lo lee despacio en voz baja)
E: ¿Qué te pregunta?
D: ¿Cuánto dinero tiene? Que explique cuánto tiene más...
E: ¿Qué vas a hacer primero?
D: (Dibuja dos monigotes y pone los datos) *y queremos saber cuánto tiene más Luis.*
E: ¿Cómo lo vas a calcular: con el diagrama o con la operación?
D: (Se calla un momento) *Pienso: primero digo a ver si es más fácil con el diagrama o con las operación. No estoy muy aclarada.*
E: Si tuvieras las monedas ¿cómo lo podrías hacer?
D: (Sigue pensando y decide hacer el diagrama) *Dibuja las 321 y cojo 119, me quedan 203.*
E: Revisa si contaste bien
D. Es verdad, me equivoqué, sobraron 202.

E: La respuesta ¿cuál sería?
D: Que Luis tiene 202 pesetas más que María
E: ¿Y qué operación harías?
D: Restar. (Se fija en el diagrama y pone 321 menos 202).
E: ¿Qué cantidades tienes que restar?
D: (Lo rectifica, se equivoca en la resta y finalmente lo vuelve a hacer bien).

Lidia:
L: (Lee el problema en voz baja lentamente)
E: ¿Lo entiendes?
L: Tiene 321 ¿Lo pongo?... Voy a hacerlo con los dibujos así (utiliza la representación de los bloques) *Y María 119* (lo va dibujando).*¿Lo estoy haciendo bien?*
E: Sí. ¿Qué te pregunta?
L: Que cuánto tiene Luis (se detiene) *más que María. Tiene 321.*
E: ¿más que María?
L: ¡ah! No. Más que María no. Tendría que hacer... Si aquí hay 321 y aquí 119, entonces tendría 200... ¡déjame pensar! 218, 219. (Hace la resta). *Seguro que lo tengo mal ¿no?. Me da 202 .*
E: ¿Cuál es la respuesta?
L: Luis tiene más que María 202.
E: ¿Podrías hacer el diagrama?
L: No sé. (Lo intenta, pero se limita a colocar dos rectángulos y en cada uno una colección). *No me acuerdo cómo es para restarlo.*

Jonathan:
J: (Lee el problema)
E: ¿Qué te pregunta?
J: Que Luis tiene 321 pesetas y María 119 ptas, qué cuanto tiene Luis más que María? (Dibuja con monedas las dos cantidades, lo deja y hace la resta). *202.*
E: 202 ¿qué es?
J: 202 ptas más que María.
E: ¿Sabrías hacerlo con el diagrama?
J: (Dibuja en un rectángulo las dos cantidades) No, no me acuerdo.

Tomás:
T: (Lo lee en voz alta con bastante dificultad).
E: ¿Sabes la pregunta?
T: (Lo vuelve a leer). *¿Qué cuantas tiene más? Es una resta ¿verdad?* Va a hacer la operación, pero la ejecuta mal).
E: La respuesta ¿es?
T: Que 212 tiene más Luis que ella.
E: ¿Lo puedes hacer con el diagrama?
T: (Se equivoca con los símbolos que utilizábamos para la centena, lo rehace, coloca en el mismo rectángulo lo que corresponde a ambas colecciones y trata de englobar lo que corresponde a María)

E: Y ¿podrías haber hecho un dibujo?
T: (Dibuja las monedas de 100, 20.., pero le cuesta mucho hacer la descomposición en monedas de la cantidad total)
E: Suma las monedas para ver cuanto tienes
T: (Tiene que sumar por escrito las monedas para saber cuanto tiene). *Esto tiene Luis.* (Debajo dibuja las 119 ptas de María).
E: En el dibujo podrías ver cuánto tiene Luis más que María.
T: ¿Por la suma?
E: No. Te pregunto si sabes cuánto hay más aquí (señalando las monedas de Luis) *que aquí* (señalando las de María).
T: (calcula con los dedos) *212*
E: ¿Cómo lo calculaste?
T: Contando
E: ¿Cómo?
T: No, lo resté
E: ¿En el dibujo?
T: (Tacha correctamente 100 de arriba con el de abajo)
E: (No tiene nada claro como ejecutar la resta con el dibujo de las monedas, con mi ayuda consigue la solución que no coincide con su resta. Le indico que vuelva a revisar la operación, pero no domina el algoritmo de la resta llevando y la deja igual).

Este niño presenta un retraso, logra entender el problema aunque no domina los algoritmos de las operaciones, y ni siquiera con la representación del material es capaz de crear una representación del problema. En todo momento mantiene las dos colecciones por separado.

<u>Antonio:</u>
A: (Lo lee rápidamente y se dispone a escribir)
E: ¿Ya entiendes el problema?
A: Que tengo que sumar cuánto dinero tiene María y Luis.
E: ¿Es esa la pregunta? Léelo de nuevo.
A: (Lo lee). *Restar.*
E: Restar ¿para qué?
A: Para saber lo que tiene María.
E: Lee lo que dice acerca de María.
A: Que tiene 117.
E: ¿Por qué no haces un dibujo? (Dibuja dos muñecos. Intento que personalice los personajes con sus ídolos del fútbol).
A: Restar para ver lo que tiene Luis.
E: El problema dice que Luis tiene 321 ptas.
A: Tengo que sumar para ver cuánto tienen entre los dos.
E: Vuelve a leer el problema.
A: (Vuelve a leerlo. Le planteo que los personajes pueden ser él y su hermano y le repito el problema, pero se decide a hacer la suma).
E: 440 ¿qué es?
A: Lo que tienen los dos.
E: Eso está bien, pero ¿quién tiene más dinero?
A: Luis.

E: (Le planteo un problema similar con unas cantidades inferiores a 20, por ver si el orden de las magnitudes es lo que le está creando problemas. Lo resuelve correctamente ayudándose de los dedos, pero no sabe qué operación está efectuando. Al final afirma que es la resta. Por analogía afirma que en el problema planteado ha de hacer una resta. La ejecuta mal). *¿Sabrías hacer el diagrama?*
A: No

Este niño tiene una deficiente comprensión lectora que le dificulta incluso llegar a entender lo que está leyendo, no domina los algoritmos .

Problema 5:

Este problema, también de tipo sustractivo, corresponde al tipo de cambio, donde el dato desconocido es la situación final (problema según la literatura mucho más fácil que el anterior).

Jorge:
J: (Lee el problema rápidamente y hace la resta)
E: ¿Lo entiendes perfectamente?
J: Sí.
E:¿Cuál es la solución?
J: 255 periódicos es lo que le queda.

Ana:
A: (Lo lee en voz alta rápidamente). *Una resta.* (La ejecuta rápidamente).
E: ¿Cuándo es una resta?
A: Cuando vendes o quitas.

Lara:
L: (Lo lee en voz baja) *Aquí hay que hacer una resta.*
E: ¿Por qué?
L: (Lo vuelve a leer, justificando su operación por los datos que le dan. Lo efectúa correctamente).

Alexis:
A: (Lo lee, a continuación escribe las cantidades para efectuar la operación, pero decide hacer antes el diagrama. Coloca la cantidad total y luego separa los que vendió).
E: ¿Cuál es la respuesta?
A: 255 (Lo calcula en el diagrama. Coloca la solución en el algoritmo pero sin efectuarlo).

Dácil:
D: (Lee el problema en voz baja).

E: ¿Qué te pregunta el problema?
D: ¿Qué cuántos periódicos quedan? Ya sé la operación, tengo que restar. (Empieza haciendo el diagrama correctamente) *Sobraron...* (como no logra contarlos bien en el diagrama hace la resta). *Da 255.*

Lidia:
L: (Lo lee en voz baja. De nuevo tiene que leer los datos)
E: ¿Qué vas a hacer?
L: Restar
E: ¿Por qué?
L: Porque tenía 500 y se gastó..
E: ¿Cuál es la solución?
L: 255. (No hace diagramas ni dibujos).

Jonathan:
J: (Lo lee en voz baja y se dispone a hacer una operación)
E: ¿Entiendes el problema?
J: Sí
E: ¿Qué vas a hacer?
J: Una resta
E: ¿Por qué?
J: Porque tengo que quitar lo que vendió. Da 255.

Tomás:
T: (Lo lee en voz alta, con mucha dificultad). *Ah, ya.* (Se dispone a hacer una resta, aunque la ejecuta mal). *265.*
E: ¿Por qué supiste que era una resta?
T: Porque decía los periódicos que tenía y los que vendió y tenía que restar.

Antonio:
A: (Lo lee despacio). *A ver, esto es un vendedor de un kiosco...*(lo sigue leyendo)
E: ¿Qué operación tienes que hacer?
A: Sumo lo que había antes y lo de ahora.
E: (Le planteo un problema similar con cantidades pequeñas y personalizándoselo) *Piensa que tú tenías 4 boliches y pierdes jugando 3 ¿cuántos te quedan?*
A: 7
E: ¿Seguro que tienes más?
A: No es una resta
E: ¿Y el problema?
A: Es igual (hace la resta). *255*
E: Eso ¿qué es?
A: Lo que queda.

4.2.1 TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS DE LOS ALUMNOS: PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS: GRUPO PILOTO

Enunciados de los problemas:
1. *6 atletas van a participar en una carrera de relevos de 636 metros, corriendo cada uno la misma distancia. ¿Cuántos metros corre cada uno?*
2. *Lucía ha ahorrado 625 ptas y su hermano menor la quinta parte. ¿Cuántas pesetas tiene su hermano?*

Problema 1:

Colegio 1: Alumnos de 5º

Davinia:
D: (Lo lee en voz alta. Escribe: datos-desarrollo-operaciones. Coloca correctamente los datos y rápidamente decide la operación y la ejecuta bien, colocando finalmente la historia con la solución)
E: ¿Por qué supiste que era una división?
D: Dice que el total era 636 metros y si habían 6 y cada uno tenía que recorrer igual, entonces tenía que dividirlo.
E: ¿Cuándo sabes si un problema es de multiplicar?
D: Por ejemplo, si vas a comprar 10 libretas y cada una te cuesta tanto.

Nuria:
N: (Lo lee en voz alta. Lo vuelve a leer más lentamente)
E: ¿Entiendes lo que es una carrera de relevos?
N: Sí (Sigue un modelo de trabajo: datos-indicaciones-operaciones. En los datos escribe cuestiones innecesarias. Decide multiplicar y ejecuta correctamente la operación).
E: ¿Por qué multiplicaste?
N: Para saber la distancia de cada uno.

Isaac:
I: (Lo lee en voz alta) *Tengo que dividir 636 entre 6, porque tengo que repartir los metros entre los corredores.* (Escribe su modelo de trabajo: datos-indicaciones-operaciones. Coloca los datos correctamente y ejecuta bien el algoritmo).

Colegio 2: Alumnos de 5º

Enrique:
En: (Lee el problema en voz baja). *Tengo que repartir 636 entre 6.*
E: ¿En qué te has apoyado para decidir lo que tenías que hacer?
En: Para saber cuanto corre cada uno. (Hace la división y añade una historia corta al resultado) *106 metros corre cada corredor.*

Catalina:

C: (Lo lee en voz alta correctamente). *Reparto los 636 metros, porque si son 6 atletas y... para saber cuánto corre cada uno.* (Ejecuta incorrectamente el algoritmo).
E: ¿Cuál es la solución?
C: Cada atleta recorre 90 metros.

Nicolás:
N: (Lo lee en voz baja) *Multiplicando por 6.*
E: Multiplicar ¿qué?
N: 636 por 6 (Hace la multiplicación incorrectamente)
E: ¿Por qué elegiste una multiplicación? ¿Cuál es la solución?
N: 3756 (Duda). *No puede ser.* (El tamaño del resultado no le parece adecuado)
E: ¿Crees que está bien?
N: Yo creo que podría estar bien, pero no sé.
E: ¿Me puedes explicar lo que dice el problema?
N: 6 atletas participaban en una carrera de relevos de 636 metros y cada uno tenía que recorrer una parte. (Dibuja una recta y la divide en 6 partes). *El primer atleta llegaría hasta aquí* (hace una marca) *y así los demás.*

Colegio 3: Alumnos de 5º

Daida:
D: (Lee el problema rápidamente)
E: ¿Lo entiendes?
D: Sí. (Pasa a hacer el diagrama)
E: ¿Te resulta fácil resolverlo con el diagrama?
D: Sí. (Dibuja un rectángulo grande con la etiqueta del total y lo divide en 6 partes, repartiendo las 636 ptas y calcula sobre él la solución : 106)
E: ¿Qué operación hubieras hecho?
D: Dividir (La ejecuta correctamente)
E: ¿Cuál es la solución?
D: 106
E: 106 ¿qué?
D: Metros que recorre cada uno.
E: ¿Por qué una división?
D: Porque al hacer una carrera de relevos cada uno tiene que recorre una distancia y si el total es 636 metros, hay que repartirlos.

Lorena:
L: (Lo lee en voz baja y rápidamente. Escribe la división y la ejecuta correctamente)
E: ¿Cómo te diste cuenta que había que dividir?
L: Porque dice que cuántos metros tiene que recorrer cada uno.

Ricardo:

R: (Lo lee en voz baja, quizá más de una vez) *Divido 636 metros entre 6 para saber cuanto recorre cada uno.*
E: ¿Por qué dividir?
R: Para saber lo de cada uno. (Ejecuta incorrectamente la división) *1,6 metros recorre cada uno.*
E: ¿Crees que está bien?
R: No sé.
E: Vamos a estudiar el resultado. ¿Cuánto es el total?
R: 636
E: y ¿cuánto dices que recorre cada niño?
R: 1,6
E: Entonces si son 6 niños y cada uno recorre 1,6 ¿cómo llegan a los 636?
R: ¡ah! Está mal
E: ¿qué está mal?
R: la división (Hace una multiplicación) *.¡qué va!*
E: ¿entiendes bien el problema?
R: Sí. Dije que era dividir, pero veo que no es así.
E: ¿Por qué no es así?
R: Porque cada uno no puede recorrer 1,6 metros, porque no llega a 636.
E: ¿Cuánto crees, aproximadamente, que debe recorrer cada uno?
R: No sé 3,8, por ahí.
E: Pero si haces una multiplicación ¿qué te da?
R: Mucho más.
E: ¿Dónde está mal?
R: En la multiplicación. (Le ayudo a revisar la multiplicación, da 3816 metros) *¡ah! Pues entonces a 636 m le resto los atletas y sé lo que recorre cada uno.*
E: Pero si restas los metros y los atletas ¿qué te da?
R: No sé.
E: ¿Por qué descartas la multiplicación?
R: Porque creo que es para saber lo que recorre cada uno.
E: ¿No podría ser que la división está mal hecha?
R: Sí, está mal (La vuelve a hacer incorrectamente). *Me dio que 1,51 recorre cada uno.*

Colegio 3: Alumnos de 4º

<u>Natanael:</u>
N: (Este problema lo ejecuta rápidamente: lo lee rápidamente, hace la división e interpreta correctamente la solución).

<u>Gara:</u>
G: (Lo lee en voz baja, posiblemente dos veces. Se dispone a hacer una división)
E: ¿Por qué sabes que es una división?
G: (Lo vuelve a leer, pero no sabe explicarme por qué). Termina la división y coloca correctamente el resultado)
E: ¿Cuánto corre cada uno?

G: 106. (Pasa a hacer el diagrama: dibuja un rectángulo grande que divide en 6 partes, no se apoya en la división que ya ha efectuado, sino que realiza la descomposición de la cantidad total, no sabe qué hacer con las decenas que no le alcanzan...)
E: ¿Sabes cuál es la solución de cada parte?
G: Sí, 106.
E: (Le ayudo a entender que las 3 decenas tiene que convertirlas en unidades y luego repartirlas. Termina haciéndolo correctamente).

<u>Mercedes:</u>
M: (Lo lee en voz alta)
E: ¿Lo entiendes?
M: Hay que multiplicar por 6.
E: ¿Por qué?
M: Porque dice...(Lo lee de nuevo) *Hay que multiplicar para saber cuántos metros.* (Ejecuta la operación y añade que 3816 metros recorre cada uno)
R: ¿Tú entiendes en que consiste una carrera de relevos?
M: Sí, yo gané en una competición.
E: ¿Me podrías hacer un dibujo?
M: (Hace un dibujo que no refleja lo que es una carrera de relevos)

Problema 2:

Colegio 1: Alumnos de 5º

<u>Davinia:</u>
D: (Lo lee en voz alta correctamente. Hace una viñeta escueta y coloca los datos concretos. Pasa a hacer el diagrama. Dibuja el rectángulo grande con su etiqueta y lo parte en 5 partes. Comienza a distribuir primero las unidades, luego las centenas y finalmente las decenas, incluyendo la centena que le sobró que la descompuso en decenas y una decena que ha de convertir en unidades. A continuación ejecuta la división y termina escribiendo la historia con el resultado). *Este problema es muy fácil.*

<u>Nuria:</u>
N: (Lo lee rápidamente. Dibuja dos monigotes y en el apartado de datos copia completamente el enunciado. Pasa al apartado de operaciones, elige la división y la ejecuta correctamente. Escribe la historia con el resultado obtenido).
¿Por qué dividiste?
N: Lucía tenía 625 y su hermano tenía la quinta parte (marca con sus manos 5 grupos) *y cada parte era 125.*
E: ¿Son fáciles estos problemas?
N: No, a veces confundo la multiplicación con la división.
E: ¿Podrías inventar un problema de multiplicar?
N: Tengo 50 ptas y el vendedor de la tienda... (no sabe seguir). *Tengo 15 caramelos y mi hermano 14, no 17...*

E: ¿Qué podríamos hacer con estos datos?
N: No se me ocurre.
E: Si te pregunto ¿cuánto tienen entre los dos?
N: Sumar
E: Y si te pregunto ¿cuánto tiene él más que tú?
N: 2
E: Si te digo que cada uno de tus 3 hermanos le voy a dar 5 caramelos ¿cuántos necesito?
N: (cuenta con los dedos) *¿qué tengo que decir?*
E: ¿cuántos caramelos necesito?
N: (Sigue contando con los dedos, colocamos tres manos, pero está bloqueada) *¿Qué cuántos tienes? 15*
E: ¿Cómo lo calculaste?
N: Sumando
E: Y ¿lo podrías haber hecho de otra forma?
N: Sí, multiplicando.

<u>Isaac:</u>
I: (lo lee en voz baja)
E: Léelo en voz alta
I: (Hace una viñeta muy esquemática y copia todo el problema en el apartado de datos. Intenta hacer el diagrama: dibuja un rectángulo y lo divide en dos partes, comienza a repartir las 625 y le sobra 1)
E: ¿Tú entiendes lo que es la quinta parte? Imagínate que tienes una tarta y la divides en 5 partes. (Traza un círculo y lo divide en 6 partes) *Tú tienes 625 ptas.*
I: (Multiplica 312 x 5)
E: Si tú tienes 16 ptas y las quieres repartir entre los 4 del grupo ¿qué haces?
I: Dividir
E: Y ¿si quieres darle la cuarta parte?
I: Lo parto en 4
E: Y ¿qué haces? Tú tienes 625 y tu hermano tiene la quinta parte ¿cómo lo calcularías?
I: Partiendo 625.
E: Hagámoslo con una cantidad pequeña, por ejemplo vamos a partir 5 ptas en 5 partes ¿cuánto le toca a cada uno?
I: 1
E: Y si fueran 10 ptas. (Lo hacemos con los dedos, después de repetírselo logra calcularlo)
E: ¿Qué operación tendrías que hacer?
I: Dividir (dudando)
E: Entonces, volvamos al problema.
I: Tengo que dividir 625 entre 5 (Lo hace correctamente, escribiendo la historia con el resultado).

Colegio 2: Alumnos de 5º

<u>Enrique:</u>

En: (Lee el problema en voz baja. Hace un dibujo sencillo y escribe los datos escuetamente. Pasa a hacer el diagrama. Escribe un rectángulo grande con su etiqueta total). *Tengo que partir una placa* (símbolo de la centena) (Va dibujando pero de forma agrupada los 625 en 5 grupos y después de haberlo hecho divide el papel y calcula lo que hay en cada grupo. Pasa a hacer la división y termina escribiendo el resultado con la historia).
E: ¿Cuál es la solución?
En: Lucía tenía 625 y su hermano la quinta parte que son 125.

Catalina:
C: (Lo lee en voz alta correctamente) *Pues si Lucía tiene.. . ah, hago el dibujo primero.* (Pinta dos monigotes y escribe los datos) *Tengo que poner 625 cinco veces* (Dibuja un rectángulo, lo divide en 5 partes y en cada uno dibuja 625) *¿Puedo hacer la operación o lo tengo que contar en el diagrama?*
E: Lo que te sea más fácil
C: (Hace la operación y escribe el resultado en el diagrama) *La solución es 3.125.*

Nicolás:
N: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Lo entiendes bien? ¿Qué dice?
N: (Lo lee en voz alta)
E: ¿Cuánto dinero tendrá el hermano: más o menos?
N: Menos. Sería 625 por 5 (Ejecuta correctamente la multiplicación)
E: ¿Por qué decidiste hacer la multiplicación?
N: Porque dice que ha ahorrado 625 y que la hermana tiene la quinta parte y pensé que multiplicando por 5 me daría.
E: ¿Por qué estás dudando del resultado?
N: No sé.
E: ¿Tú me dijiste que tenía que tener menos?
N: No sé. (Escribe la historia con el resultado).

Colegio 3: Alumnos de 5º

Daida:
D: (Lee el problema en voz baja rápidamente) *¿Puedo empezar por donde quiera?* (Refiriéndose a los distintos apartados de la ficha modelo).
E: Sí
D: (Pasa al diagrama: dibuja el rectángulo total y lo divide en 5 partes, repartiendo las placas, le sobra una que convierte en barras y las reparte y finalmente las unidades)
E: ¿Cuál es la solución?
D: (La calcula en el diagrama. A continuación hace la división, se equivoca y la hace de nuevo).
E: ¿Qué operación elegiste?
D: La división.
E: ¿Por qué?

D: Porque dividir es repartir.

Lorena:
L: (Lo lee en voz baja. Anota los datos, escribiendo todo el enunciado).
E: ¿Ya entiendes el problema?
L: Sí. (Dibuja el diagrama: coloca un rectángulo con la cantidad total, pero no sabe qué hacer). *¿Puedo hacer la operación?*
E: Sí. Sabes ¿cuál?
L: Sí, una división. (La ejecuta incorrectamente). *121 es lo que tiene su hermano.*
E: ¿Por qué es una división?
L: Porque dice que es la quinta parte.
E: ¿te fijas en palabras como la quinta parte para saber qué es dividir?
L: Pero a veces es también multiplicar.
E: ¿También multiplicar?
L: Sí, cuando dice la quinta parte puede ser también multiplicar, pero no me acuerdo de ninguno.

Ricardo:
R: (Lo lee en voz baja rápidamente) *Divido 625 entre 5 para saber cuanto tiene el hermano.* (Ejecuta correctamente la operación). *Me dio 125 y eso es lo que tiene el hermano.*

Colegio 3: Alumnos de 4º

Natanael:
N: (Lo lee en voz baja. Pasa a hacer el dibujo: dibuja dos monigotes con los datos. Escribe de forma concisa los datos del problema, aunque se confunde y cambia la quinta parte por la cuarta parte. Pasa a hacer el diagrama: dibuja un rectángulo grande con su etiqueta total y lo divide en 4 partes)
E: ¿Sabes qué operación tienes que hacer?
N: Sí. Dividir (Comienza a repartir las centenas y decenas, pero le cuesta la descomposición y decide hacer la división. Cuando la ejecuta completa el diagrama con el resultado obtenido. No se plantea qué hacer con el resto. Escribe correctamente la historia).

Gara:
G: (Lo lee en voz baja. Hace la viñeta: dos monigotes con los datos, vuelve a releer el problema, pero añade que su hermano "le quita" la quinta parte. Escribe en datos todo el enunciado del problema, repitiendo la frase añadida. Pasa a hacer el diagrama: dibuja un rectángulo que divide en 5 partes).
E: ¿Qué has hecho?
G: Poner el total y dividirlo en 5 partes (Reparte correctamente las placas-barras-unidades).
E: ¿Cuál es la solución?

G: 125.
E: ¿Qué operación había que hacer?
G: Dividir. (Hace la operación correctamente y termina escribiendo la historia).

Mercedes:
M: (Lo lee en voz alta. Escribe los datos, copiando todo el problema y pasa a hacer la multiplicación).
E: ¿Por qué te das cuenta que tienes que multiplicar?
M: Porque vi en otros problemas parecidos que la quinta parte era multiplicar.
E: ¿Te sueles acordar al resolver un problema de cómo hiciste problemas parecidos?
M: Sí. (Ejecuta mal la operación y escribe la historia final incorrectamente, añadiendo que "su hermano tiene 3525 más").
E: ¿Podrías dibujar una tarta y señalar lo que me corresponde si me quiero comer la cuarta parte?
M: (Primero dibuja una tarta vista de frente, le indico que es mejor que la dibuje vista desde arriba, no tiene claro lo que significa la cuarta parte).

4.2.2 TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS DE LOS ALUMNOS: PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS: GRUPO DEFINITIVO.

Enunciados de los problemas:

1. Un colegio tiene 305 alumnos y otro el triple de alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene el segundo colegio?
2. 6 atletas van a participar en una carrera de relevos de 636 metros corriendo cada uno la misma distancia. ¿Cuántos metros corre cada uno?
3. Lucía ha ahorrado 314 pesetas y su hermano la mitad. ¿Cuántas pesetas tiene ahorradas su hermano?

Problema 1:

<u>Jorge:</u>
J: (Lo lee en segundos y se dispone a hacer la operación)
E: ¿Por qué multiplicaste?
J: Porque es el triple y tengo que multiplicar por 3. (A continuación hace el diagrama: dibuja tres rectángulos adyacentes y repite la cantidad)

<u>Ana:</u>
A: (Lo lee con claridad y rapidez) *Una multiplicación.*
E: Pero ¿por qué?
A: Porque es el triple, son tres veces más.
E: Tú mientras vas leyendo el problema ¿qué vas pensando?
A: Me voy fijando en ...“el triple”.
E: ¿Podrías hacerlo con el diagrama?
A: Sí. Colocaría 305 (señala un rectángulo) *y ahora dos veces más.* (Pasa al apartado de operaciones y la ejecuta)
E: ¿Cuál es la solución?
A: 915.

<u>Lara:</u>
L: (Lo lee rápidamente) *Este problema es mucho más fácil* (Hace la multiplicación rápidamente)
E: ¿Por qué hiciste una multiplicación?
L: Porque decía que era el triple.

<u>Alexis:</u>
A: (Lee el problema, pasa a hacer la operación y luego vuelve al diagrama y lo resuelve aquí correctamente)

<u>Dácil:</u>
E: Lee el problema.
D: Un colegio tiene 305 alumnos y el otro el triple, o sea, 305, 305 y 305, y dice ¿qué cuantos tiene?. Así para no hacer 305+305+305 haré 305 x 3. (Hace la operación correctamente)

E: ¿Cómo harías el diagrama?
D: Haciendo 3 cajitas. (Dibuja un rectángulo dividido en 3 partes y coloca 305 en cada una).

Lidia:
L: (Lo lee en voz alta. Va directamente a la operación y la ejecuta bien)
E: ¿Cuántos alumnos tiene el Colegio?
L: 305 alumnos
E: ¿Por qué multiplicaste?
L: Para multiplicar por el triple, es por 3.

Jonathan:
J: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Qué te pregunta?
J: Que cuántos alumnos tiene. Tengo que multiplicar.
E: ¿Por qué multiplicar?
J: Porque es el triple. (Ejecuta correctamente la operación).

Tomás:
T: (lo lee dos veces, lee 35 en vez de 305. Pasa a hacer la operación y suma 305, tres veces)
E: ¿Cuál es la solución?
T: 915
E: ¿Puedes explicarme por qué?
T: Porque uno tenía 305 y otro el triple.
E: ¿Lo podrías hacer con otra operación?
T: ¿Dividir?
E: No. ¿Podrías hacer el diagrama? (Lo hace correctamente dibujando tres veces 305).

Antonio:
A: (Lo lee y va a hacer una operación)
E: ¿Por qué?
A: Porque dice que un Colegio tiene 305 alumnos y el otro el triple.

Problema 2:

Jorge:
J: (Lee el problema. Pasa a hacer el diagrama: empieza a repartir en unidades)
E: ¿No te va a resultar muy engorroso así?
J: (Dibuja 6 rectángulos y empieza a repartirlo como centenas, decenas, unidades)
E: ¿Qué operación elegirías?
J: Una división. (La ejecuta correctamente)
E: ¿Podrías hacer un dibujo? (Representa una recta de 636 metros y marca los relevos)

Ana:
A: (Lee el problema) *Es una división.*
E: ¿Sabes lo que es una carrera de relevos?
A: Sí. (Lo dibuja)
E: ¿Para calcular cuántos metros recorre cada uno que hay que hacer?
A: Una división (la realiza correctamente)
E: ¿Podrías hacer el diagrama?
A: Dibujaría aquí 636 y aquí 6 (señalando dos rectángulos que ha dibujado) *O ¿podría hacerlo con un diagrama de árbol?*
E: No, ese diagrama era para otro tipo de problemas. ¿Cuál es la respuesta?
A: 106 metros.

Lara:
L: (Lo lee en voz baja) *Hay que hacer una división*
E: ¿Ya entiendes el problema?
L: Es una carrera de relevos de 636 metros, todos tienen que recorrer la misma distancia, tengo que calcular lo que corre cada uno. Así que hago la división (La ejecuta mal, le da 16)
E: ¿Podrías hacer un dibujo?
L: Sí (Dibuja dos atletas y les señala lo que corre cada uno)
E: ¿Crees que si cada uno recorre 16 m cubrirían la pista?
L: (Intenta calcularlo mentalmente, revisa la división y se da cuenta del error) *Da 106 m.*

Alexis:
A: (Lo lee en voz alta correctamente)
E: ¿Lo entiendes?
A: Sí, hay que dividir entre 6, 636. (Comienza con el diagrama. Hace un rectángulo grande y lo divide en 6 partes y va repartiendo los 636. Para descomponer las decenas las escribe aparte y las deshace)
E: ¿Cuál es la respuesta?
A: 16 en cada uno?
E: ¿Lo has contado bien?
A: ¡ah!, no. Es 106.
E: ¿Podrías hacer la operación?
A: Sí (Hace la división)
E: ¿Qué te da? ¿16?
A: Me equivoqué. (Corrige la división) *Es 106.*
E: ¿Podrías hacer el dibujo?
A: Sí. Dibujaría 6 atletas, la meta y en cada línea se cambian los atletas.

Dácil:
D: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Sabes lo que es una carrera de relevos?

D: No.
E: (Se lo explico) *¿Qué te pregunta?*
D: ¿Cuántos metros corrieron?
E: ¿Todos?
D: Cada uno. (Se pone a dibujar los 6 atletas) *¿Pongo algo más?*
E: Tienes que poner lo que creas necesario.
D: 636 dividido por 6.
E: Y ¿por qué sabes que es dividido?
D: ¡ah! Porque estoy repartiendo. (Hace la división incorrectamente).
E: ¿Cuál sería la respuesta?
D: 116 ¿Hago el diagrama?
E: Sí. (Duda cómo hacerlo) *Debes repartir los 636 metros en 6 partes.* (Lo va haciendo con dificultad) *¿Cuánto te daría?*
D: 106
E: ¿Qué tienes mal: el diagrama o la división?
D: ¡ah! La división. (La corrige).

Lidia:
L: (Lo lee en voz baja, despacio).
E: ¿Sabes lo que es una carrera de relevos?
L: No lo sé muy bien. Creo que uno corre y otro compañero le pasa el relevo.
E: ¿Puedes hacer el dibujo de la carrera?
L: No sé... Voy a dibujar 6 atletas.
E: ¿Cuánto mide la pista?
L: 636 metros.
E: Entonces ¿cuánto tiene que correr cada uno?
L: Ciento... (Lo intenta calcular mentalmente)
E: ¿Qué operación estás realizando mentalmente o cómo lo estás calculando?
L: ¿Dividir?
E: ¿En qué piensas ? (No me contesta)
L: (Hace la división incorrectamente). *Creo que está mal, ¡ah! No, está bien.*
E: ¿Por qué pusiste un cero?
L: ¡ah! Me equivoqué. (Lo revisa) *Está bien...*
E: Entonces ¿da 101? Piensa que son caramelos, vamos a repartirlos.
L: Si son 36 (se queda con las decenas y unidades) *hay que repartir...¡qué rollo!*
E: ¿Lo intentas hacer mentalmente?
L: Es que si no, no me sale. Voy a hacer una cosa: aparto 6, reparto los 30, le toca 5 a cada uno y 1 de las 6, entonces da 106.
E: Entonces, ¿la operación está mal?
L: Voy a hacerla de nuevo. (Le ayudo para que la haga correctamente)
E: ¿Cuál es la solución?
L: 106. ¡Es que la tabla no me la sé muy bien!

Jonathan:
J: (Lo lee en voz baja, dos veces)
E: ¿Ya lo entiendes? ¿Sabes lo que es una carrera de relevos?
J: Sí. (Escribe las cantidades 636 y 6 simbólicamente)

E: Y ahora ¿qué haces?
J: Divido 636 entre 6.
E: ¿Por qué?
J: Porque tengo que calcular lo que recorre cada uno. Son 101.
E: ¿Estás seguro?
J: No sé
E: Comprueba la solución: Si uno recorre 101, dos harán 202, sigue...
J: No, está mal . (Tacha la división y la rehace correctamente).

Tomás:
T: (Lo lee con mucha dificultad)
E: ¿Sabes lo que es una carrera de relevos?
T: No.
E: (Se lo explico)
T: ¿ah!, sí ya lo he visto.
E: Haz el dibujo.
T: (Se va a la operación)
E: Y sabes ¿qué operación debes hacer?
T: Una suma
E: ¿Qué sumas?
T: Esto (señalando 636) *con esto* (6).
E: ¿Sumas los metros con los atletas? ¿Qué te da?
T: No, no... Una multiplicación.
E: ¿Para qué?
T: Para saber...
E: Intenta hacer un dibujo.
T: (Dibuja 6 atletas y debajo un camino y escribe 636)
E: (Le vuelvo a explicar en qué consiste la carrera de relevos) *¿Qué te pide el problema?*
T: (Dibuja el diagrama y dentro representa 636 y 6) *Creo que mide ... 226.*
E: 226 cada uno ¿no es mucho?
T: 700
E: ¿Más que el total?
T: 180 . (Está lanzando cantidades a ver si logra intuir el tamaño del resultado)
E: ¿Qué operación tendrás que hacer?
T: Una multiplicación.
E: ¿Para qué lo multiplicas?
T: Para saber... cada trocito.
E: (Reconoce no saber bien la tabla de multiplicar. Se apoya en los dedos) *¿Cuánto mide cada trocito?*
T: 3.816
E: ¿Puede ser?
T: No (Divide)
E: Y ¿por qué divides?
T: Para saber cuánto mide... (Ejecuta mal la división).

Antonio:

A: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Entiendes el problema? ¿Sabes lo que es una carrera de relevos? (Tiene idea de lo que es) *¿Por dónde vas a empezar?*
A: (Empieza dibujando 6 muñecos) *Son 6 y ahora van a hacer la carrera.*
E: En total, tienen que hacer 636 metros ¿cuánto corre cada uno?
A: 5 vueltas cada uno. Para que dé 636 vueltas.
E: pero no son vueltas sino que la pista total son 636 metros.
A: 5 metros cada uno.
E: Si cada uno corre 5 metros, en total ¿cuánto corren?
A: 5 más 6 , 11
E: 11 ¿qué son?
A: metros
E: Y ¿cómo llegan a los 636 metros? (Comienza a sumar 11, 6 veces, le da 55)
A: (Duda con la solución obtenida. Decide sumar 10, 6 veces, le da 50)
E: ¿Puede ser?
A: No
E: ¿No has utilizado los metros totales? ¿Qué podrías hacer?
A: ¡ah! Sumar 636 con 6.
E: 636 metros con 6 atletas ¿qué te da?
A: 642
E: (Le explico de nuevo en qué consiste la carrera de relevos. Le planteo el problema con una pista de 6 metros. Rápidamente contesta que cada corredor recorre 1 metro, pero mezcla la solución con 10 metros. Le pido que piense que la pista tiene 600 metros, de nuevo contesta que cada corredor hará 1 metro. Con una pista de 10 metros no sabe explicar cuánto da. Cambio a un problema directo de repartir 600 ptas en 6 hermanos. Da como respuesta 20 ptas. Está muy bloqueado y dejamos el problema).

Problema 3:

Jorge:
J: (Lo lee rápidamente y hace la división)
E: ¿Entiendes lo que es la mitad?
J: Sí, hacer la división entre dos.
E: ¿Cuál es la respuesta?
J: 157 ptas.

Ana:
A: (Lo lee en voz baja y lo resuelve rápidamente) *Tengo que dividir entre 2.*
E: ¿Por qué?
A: Porque es la mitad.

Lara:
L: (Lo lee en voz baja rápidamente. A continuación lee en voz alta los datos) *Es una división.* (La ejecuta correctamente). *Tiene 157 pesetas.*

Alexis:
A: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Qué vas a hacer?
A: Una división.
E: ¿Entre cuánto?
A: Entre dos. Tengo que averiguar cuanto tiene el hermano. El doble es por dos y la mitad es entre dos. (Hace la división correctamente). *157 ptas.*

Dácil:
D: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Qué te pregunta?
D: ¿Qué cuanto tiene el hermano?
E: Y ¿qué te dice?
D: Que tiene la mitad. ¿Una resta?
E: ¿Cuánto es la mitad de una chocolatina?
D: La parto en dos
E: ¿Podrías hacer lo mismo con las monedas?
D: (Dibuja las monedas, dice que se confunde hacerlo en el dibujo. Pasa a hacer el diagrama, coloca la cantidad total en dos grupos, pero sin separarlos pon ninguna línea, lo que le crea confusión al contarlo) *¿152?*
E: ¿Has contado bien?
D: 157.
E: ¿Qué operación tendrías que hacer?
D: No me acuerdo

Lidia:
L: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Ya lo entiendes?
L: Sí. Lucía tiene 314 y el hermano tiene la mitad.
E: ¿Sabes lo que es la mitad?
L: (Se arruga).
E: Tu hermana tiene una chocolatina y te dice : la mitad es para tí. ¿Cuánto te da? ¿Te da una parte más pequeña que la suya?
L: No, me da igual. (Escribe 314) *No sé. ¿Tengo que restarlo?*
E: ¿qué vas a restar?
L: No sé. ¿Será una multiplicación? La mitad era... No me acuerdo. ¡Ah! Ya sé: es partirlo en 2. Pero ¿es multiplicarlo o dividirlo? Ahí es donde me lío. Pero es repartirlo. ¡Ah! Entonces es dividirlo. (Hace la división con dificultad)
E: ¿La hermana tenía?
L: 157 ptas.

Jonathan:
J: (Lo lee en voz baja). *Tengo que hacer una división.*

E: ¿Qué divides?
J: Entre dos. (La realiza correctamente)
E: ¿Cuánto tiene el hermano?
J: 107 más.
E: ¿más?
J: No, 107.

Tomás:
T: (Lo lee despacio) *¿La mitad?*
E: La mitad de 314. (Se lo personalizo)
T: Había una forma de hacerlo, pero no me acuerdo.
E: ¿Cómo lo haría tú?
T: (Hace un diagrama y coloca 314) *Si yo tengo la mitad... 224*
E: ¿Eso es la mitad?
T: 124
E: ¿cómo lo estás haciendo?
T: Pensé que si yo tengo la mitad, tendré 114.
E: Pero entonces ella tendrá 200. (Le ayudo a dividirlo en el dibujo y le digo que lo cuente)
T: 157
E: Y ¿sabrías qué operación hacer?
T: No.

Antonio:
A: (Lo lee en voz baja, luego en voz alta)
E: (Le personalizo el problema: él y su hermano)
A: Pero ¿qué es la mitad?
E: Piensa en una tarta. ¿En cuántas partes la divides si quieres comerte la mitad?
A: En dos (Hace la división con mucha dificultad y mal)
E: ¿Cuánto le toca a tu hermano?
A: 2
E: ¿Por qué?
A: No, 156.

4.3.1 TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS DE LOS ALUMNOS. PROBLEMAS DE DOS OPERACIONES: GRUPO PILOTO

Enunciados de los problemas:
1. Un señor recorre en su coche por la mañana 120 km y por la tarde 62 km. Si gasta 6 ptas por km ¿cuánto gasta en un día?
2. En la clase hay 24 niños. Si compramos 275 globos para repartirlos y nos sobraron 35 globos. ¿Cuántos globos cogió cada niño?

Problema 1:

Colegio 1: Alumnos de 5º

Davinia:
D: (Lo lee correctamente) *¿Puedo hacer directamente las operaciones?*
E: Sí.
D: Sumo los km que hace por la mañana y por la tarde para saber lo que hace en un día, y después como cada km me cuesta 6 ptas lo multiplico por 6. (Ejecuta correctamente las operaciones y escribe la historia con el resultado obtenido)
E: ¿Necesitas escribir los datos?
D: No.

Nuria:
N: (Lo lee en voz alta rápidamente. Lo vuelve a leer . Comienza a dibujar: hace dos coches y representa en cada uno los km de la mañana y de la tarde. En Datos escribe completamente el enunciado)
E: ¿Ya entiendes el problema?
N: (Vuelve a leerlo. Decide sumar los km)
E: ¿Para qué sumas?
N: Para saber lo que gasta en un día (Luego multiplica por 6. Finalmente escribe correctamente la historia).

Isaac:
I: Lo lee correctamente en voz alta) *Tengo que multiplicar 6 por 120, 6 por 62 y después sumar lo que me den.* (Hace un dibujo con los km y un coche. En Datos empieza a copiar el texto, aunque omite la frase de las pesetas que gasta. Pasa a las operaciones y las ejecuta correctamente y luego hace el diagrama, pero sólo de la suma)
E: ¿Cuál es la respuesta?
I: 1092 ptas (Finalmente escribe la historia con la respuesta obtenida)

Colegio 2: Alumnos de 5º

Enrique:
En: (Lo lee en voz baja. Dibuja una línea con los km y anota el precio. Escribe los datos. Hace el diagrama de la suma)
E: ¿Qué has calculado?
En: Los km que hace en un día. (Pasa a las operaciones y ejecuta la suma y la multiplicación correctamente. Escribe la historia con el resultado).

Catalina:
C: (Lo lee en voz alta. Hace un dibujo esquemático, pero correcto y escribe los datos y la pregunta. Pasa al diagrama y hace la suma)
E: ¿Qué has calculado?
C: Tengo que hacer otro diagrama.
E: ¿Qué tienes que hacer ahora?
C: Multiplicar por 6 (La ejecuta correctamente pero sin hacer más diagramas. Termina escribiendo la historia con el resultado)

Nicolás:
N: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Entiendes lo que dice?
N: Sí. (Pasa segundos sin decidirse a hacer nada. A veces lee, otras mira alrededor)
E: Imagínate que eres tú el que va en el coche. Dibuja algo.
N: (traza una línea y encima anota 120 y 62) *¿Puedo hacer las operaciones?*
E: Sí. ¿Qué vas a hacer?
N: A las 120 multiplico por 62 y lo que me dé multiplicarlo por 6. (Empieza a ejecutarlo, pero duda y no acaba la primera multiplicación., coge la segunda línea de ésta y la multiplica por 6)
E: ¿Cuál crees que es la solución?
N: 4320.
E: ¿Cómo elegiste las operaciones?
N: Yo sabía que era multiplicando o dividiendo.

Colegio 3: Alumnos de 5º

Daida:
D: (Lo lee en voz baja. Comienza a hacer el diagrama)
E: ¿Ya lo entiendes?
D: Sí. (Suma los km en el diagrama)
E: ¿Qué has calculado en el diagrama?
D: Cuántos km recorre en un día (Dibuja el diagrama para multiplicar por 6) *¿Puedo hacerlo con las operaciones?*
E: Sí.
D: (Las ejecuta correctamente)
E: ¿Cuál es la respuesta?

D: Que gastó 1092 ptas en un día.

<u>Lorena:</u>
L: (Lee el problema rápidamente en voz baja. Copia en Datos todo el enunciado del problema. Hace el diagrama de la suma de los km)
E: ¿Qué vas a hacer?
L: Pongo los 62 km y los 120. Da 182. Es lo que ha recorrido en un día (hace la operación) *¿Pongo la historia?*
E: Pero tú has puesto que ha recorrido 182 km y ¿qué te preguntaba?
L: ¿Cuánto gasta en un día?
E: ¿Cuál es la respuesta?
L: (Piensa. Añade un rectángulo al diagrama hecho y representa en él 6 unidades y en operaciones suma 182 con 6). *Da 188.*
E: Si tú compras 3 chicles por la mañana y 5 por la tarde y cada uno cuesta 5 ptas ¿cuánto te cuesta?
L: 40 ptas.

<u>Ricardo:</u>
R: (Lo lee en voz baja) *A los km le sumo los 62 para saber cuántos km recorre entre la mañana y la tarde y lo que me dé se lo resto a 6 para saber cuánto gasta en un día.* (Hace las operaciones). *182 km recorre entre la mañana y la tarde. Ahora le resto 6 para saber lo que gasta en un día. 176 ptas gasta.*
E: Si te compras 6 chicles por la mañana y 7 chicles por la tarde y cuesta cada uno 5 ptas ¿cuánto te gastaste?
R: Sumo los de la mañana y la tarde: 13, y lo que me dé la operación es lo que gasté.
E: Vamos a hacerlo con cantidades más pequeñas, si fueran 4 y 3 chicles ¿qué daría?
R: 20 más 15, daría 35.

Colegio 3: Alumnos de 4º

<u>Natanael:</u>
N: (Lo lee en voz baja. Dibuja dos coches, anotando lo que recorre por la mañana y la tarde. Copia los datos y la pregunta. Hace el diagrama de la suma)
E: Y ahora ¿qué vas a hacer?
N: (Pasa a las operaciones y suma 120 más 62)
E: Tienes que calcular lo que gasta en un día.
N: Son 182 ptas (Está muy nervioso)

<u>Gara:</u>
G: (Lo lee en voz baja varias veces). *No sé hacerlo*
E: Vamos a intentarlo juntas.
G: (Lo vuelve a leer en voz alta)
E: Piensa en caramelos (Le planteo el problema con caramelos)
G: Entonces tengo que sumar 120 más 62.

E: Luego habrá que calcular lo que cuesta ¿Cómo lo puedes hacer?
G: ¿Una resta?
E: ¿Cómo harías si fueran 6 caramelos a 6 ptas?
G: (No contesta).

Mercedes:
M: (Lo lee en voz alta. En Datos escribe frases incorrectas)
E: ¿Qué te pregunta?
M: ¿Cuánto recorre?
E: Vuelve a leer la pregunta.
M: ¿Cuánto gasta en un día? (Va a las operaciones. Resta 120 menos 62 y 6).
E: ¿Cómo puedes hacer esa resta?
M: Da 136 km, no, 136 ptas.
E: ¿Crees que está bien?
M: (Lee de nuevo el problema) *Así hay que restar.*
E: ¿Cómo hiciste la operación?
M: Resto de 6 a 12 me da 6, me llevo una, ah, está mal (La vuelve a hacer) *De 6 a 12 da 6 y de 7 a 12 da 5. Da 256.*
E: Si tú te compras 4 globos por la mañana y 3 por la tarde de 5 ptas ¿cuánto te gastaste?
M: 35.

Problema 2:

Colegio 3: Alumnos de 5º

Davinia:
D: (Lo lee correctamente. Escribe 3 columnas con datos-desarrollo-operaciones. Debajo de cada epígrafe completa los datos correctamente. Decide dividir 275 entre 24, pero se detiene al comprobar que el resto no es 35)
E: ¿No te han sobrado 35?
D: Ah, ya sé. (Resta 275 - 35 y pasa a hacer la división. Finalmente escribe la solución correctamente).

Nuria:
N: (Lo lee en voz alta rápidamente. Lo vuelve a leer en voz baja. Escribe 3 columnas con datos-indicaciones-operaciones. En Datos copia el texto del problema. Vuelve a leerlo. Decide restar 275 -24)
E: ¿Por qué decidiste hacer esa resta?
N: (Vuelve a leer el problema varias veces. Decide dividir, hace la prueba de la división para comprobar que está bien)
E: ¿Cuál era la pregunta?
N: ¿Cuántos globos cogió cada niño? Cogió 11
E: ¿Crees que el problema está bien?
N: (Se arruga. Está nerviosa. No está convencida de que está bien, pero no sabe que puede estar mal).

<u>Isaac:</u>
I: (Lo lee rápidamente. Dibuja tres columnas: datos-indicaciones-operaciones. Copia correctamente los datos) *Tengo que dividir 24 entre 275* (lo hace bien). *A cada niño le tocan 11 globos y si sobraron 35, entonces tengo que dividir 24 entre 35 para que le toque otro.* (Hace la división). *Así que le tocan 12 globos a cada niño.*
E: Supongamos que el problema dijera que 'se han picado 35 globos'.
I: Entonces tendría que restar 35 a 275 y después los repartiría (Hace las operaciones correctamente).

Colegio 2: Alumnos de 5º

<u>Enrique:</u>
En: (Lo lee rápidamente en voz baja, más de una vez. No sabe qué hacer. Finalmente hace una resta y la división correctamente)
E: ¿Por que haces una resta?
En: Le quito a 275, 35 que son los que sobraron para saber lo que se repartió en total.

<u>Catalina:</u>
C: (Lo lee en voz alta. Lo vuelve a leer. Duda. Decide dividir) *¿En la operación tendrá que dar lo que sobra?*
E: ¿Qué vas a hacer?
C: Voy a repartir. (Hace la división y le resulta un resto de 35 sin terminar la división). *La solución es 1.*
E: ¿Crees que está bien?
C: (Termina la división) *Me dio 11.*
E: Y ¿te sobraron?
C: 11. Así que está mal.
E: Intenta pensar que el problema dice 'que se rompieron 35'
C: Entonces primero tendría que restar los 35. (Hace la resta y luego la división correctamente)

<u>Nicolás:</u>
N: (Lo lee en voz baja. Da la impresión que ni siquiera está pensando)
E: ¿Me podrías explicar lo que piensas?
N: ¿Puede ser multiplicando?
E: ¿Cuántos crees que le toca a cada niño?
N: 3 ó 4. (Sigue con la mirada perdida). *No sé.*
E: Imagínate que tienes 12 globos para 3 niños. ¿Qué harías?
N: Me da 4
E: ¿Cómo lo hiciste?
N: Repartirlos a cada uno.
E: Y ¿qué operación harías?
N: ¿Una suma?

E: 12 más 3 da 15.
N: (Prueba a restar, multiplicar y dividir 12 y 3 para ver cuál es la operación que debe elegir)
E: Entonces ¿cuál es la operación que usamos para repartir?
N: La división.
E: (Le planteo un problema similar con cantidades pequeñas y sustituyendo 'sobraron' por 'se picaron'. Lo resuelve mentalmente. Le aumento un poco las cantidades, le cuesta, así que le pido que lo haga dibujando. Con los datos del problema inicial es incapaz de hacerlo, porque no puede hacerlo mentalmente que es como lo sabe hacer).

Colegio 3: Alumnos de 5º

Daida:
D: (Lo lee rápidamente y se dispone a hacer un diagrama: resta 275 - 35)
E: ¿Qué has hecho en el diagrama?
D: Restar. ¿Puedo hacer la división en Operaciones?
E: Sí, además el diagrama sería muy grande.
D: Tendría que hacer 24 cajitas. (La realiza)
E: ¿Cuánto te da?
D: 10 globos para cada niño.

Lorena:
L: (Lee el problema y resta 275 - 35, incorrectamente)
E: ¿Por qué restas?
L: Porque dice que sobraron 35 globos. Ahora los 24 se los resto de los 230.
E: ¿Con eso qué calculas?
L: No, se divide (Hace mal la división)
E: ¿Cuál es la solución?
L: 9 globos cogió cada niño.
E: ¿Por qué dividiste?
L: Porque tenía que repartirlos y quité 35 para saber los que quedaban.

Ricardo:
R: (Lo lee rápidamente) *Divido 275 globos entre 24 niños para saber cuanto le toca a cada uno* (Hace mal la división) *9 globos le toca a cada uno. Como le sobran 35, a 35 le resto 9. Ah, no, a 275 le resto 35. Eso son los globos que nos quedan. Entonces divido los 240 entre 24 para saber cuántos cogió cada uno* (Hace mal la división) (Duda)
E: ¿Qué es lo que te pasa?
R: Que no puede dar 1 (Vuelve a dividir 275 entre 24) *Lo divido y después se lo resto a lo que me queda. 11 globos cogió cada niño. Y ahora a los 35 le quito los 11. 24 quedan en total.*
E: ¿Qué hubieras hecho si dijera 'se picaron 35 globos'?
R: Lo hubiera quitado antes.

Colegio 3: Alumnos de 4º

Natanael:
N: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Qué vas a hacer?
N: Una resta, porque le sobraron 35 (Resta 275 menos 5 y pasa a dividir)
E: ¿Cuántos globos cogió cada uno?
N: 10 globos.
E: ¿Sueles revisar el problema?
N: No.

Gara:
G: (Lo lee en voz baja. Pinta dos monigotes con los datos del problema)
E: ¿Entiendes el problema?
G: Sí.
E: ¿Sabes qué puedes hacer?
G: (No contesta)
E: ¿Qué haces cuando tienes que repartir algo?
G: Una división. 275 entre 24 (La hace).
E: ¿Cuál es la solución?
G: 11 globos.
E: Si hubiera dicho que 'se picaron 35 globos' ¿qué hubieras hecho?
G: Una resta.
E: Y ¿después?
G: La división.

Mercedes:
M: (Lo lee en voz alta)
E: ¿Vas a hacer las operaciones?
M : (Resta 275 menos 35, después suma 245 con 24)
E: ¿Qué hiciste?
M: Sumé. Da 268.
E: ¿Puede ser?
M: No. ¿Será una división?
E: ¿Por qué?
M: Para ver cuántos globos cogió cada niño. (La división no le sale)
E: Imagínate que yo te digo que llevas a la clase 52 globos y se te pican 2 y los quieres repartir entre los 25 de tu clase ¿qué harías?
M: (Divide 50 entre 2. No sabe dividir ni por una cifra?
E: ¿Cuánto te daría?
M: 2 globos.

4.3.2 TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS DE LOS ALUMNOS. PROBLEMAS DE DOS OPERACIONES: GRUPO DEFINITIVO.

Enunciados de los problemas:
1. Juan tiene 85 pesetas y se ha comprado una chocolatina que le costó 35 pesetas y unos caramelos que le costaron 25 pesetas. ¿Podrá comprarse un pito que le cuesta 20 pesetas?

2. Un señor recorre en su coche por la mañana 120 km y por la tarde 62 km. Si gasta 6 ptas por km ¿cuánto gasta en un día?
3. En la clase hay 24 niños. Si compramos 275 globos para repartirlos y nos sobraron 35 globos. ¿Cuántos globos cogió cada niño?

Problema 1:

Jorge:

J: (Lo lee rápidamente y va a hacer las operaciones. Hace dos sumas)
E: ¿Cuál es la pregunta?
J: Que si puede comprarse un pito de 20 ptas.
E: ¿Cuál es la respuesta?
J: Que si puede. (Pasa a hacer el diagrama. Primero hace una resta: 85 - 35 y luego 50 -25)
E: ¿Cómo has hecho el diagrama?
J: Puse 85 y le quité 35.
E: Y ¿luego?
J: Puse las 50 que me sobraron y le quité 25.
E: ¿Cuánto te sobró?
J: 25.
E: Pero ¿qué operaciones has hecho en el diagrama?
J: Restas.
E: ¿Podrías haber hecho lo mismo con las operaciones?
J: Sí. (Las hace correctamente)
E: ¿Te hace falta el diagrama?
J: No.

Ana:

A: (Lo lee rápidamente en voz alta)
A: Una resta.
E: Pero ¿qué te pregunta el problema?
A: Que si puedo comprar el pito. Es una suma y una resta (señalando las cantidades). *Tienes que sumar estas dos y luego las restas.*
Sí, puedo comprar el pito y no le devolverían nada.
E: ¿Estás segura?
A: (Revisa y ve que se ha equivocado al escribir un dato, lo rehace)
E: ¿Cuál es la respuesta?
A: Que puede comprarse el pito y le sobra 5 ptas.
E: ¿Podrías hacer un dibujo?
A: (Se limita a dibujar los objetos)

Lara:

L: (Lee el problema en voz baja y rápidamente) *Hay que sumar las dos cosas y después ver si me sobra dinero para el pito.*
E: ¿No tienes que hacer un dibujo o un diagrama?
L: No. (Realiza rápidamente las operaciones y afirma que se puede comprar el pito)

Alexis:
A: (Lee el problema en voz baja y casi sin acabar se dispone a dibujar)
E: ¿Ya lo entiendes?
*A: Que con las 85 que tiene Juan quiere comprar... y nos pregunta si puede comprar el pito. (*Hace las operaciones, se equivoca en la segunda)
E: ¿Por qué hiciste las operaciones primero?
A: Porque había dos operaciones y era más rollo.
E: ¿Podrías hacer el diagrama?
A: Voy a intentarlo. (Hace un diagrama para la suma y luego otro para la resta correctamente, se ayuda de los dedos para revisar las operaciones).
E: ¿Se puede comprar el pito?
A: Sí, y le sobra. Quiero hacer el dibujo. (Realiza un dibujo y sobre él resuelve de nuevo el problema)

Dácil:
D: (Lee el problema silenciosamente) *Primero me es más fácil hacer la operación.*
E: ¿Qué te pregunta el problema?
D: Primero tengo que sumar 35 más 25, lo que me dé se lo quito a 85, y si me sobra me podré comprar el pito de 20. (Hace las operaciones correctamente).
E: ¿Te ayuda el dibujo?
D: No, no me hace falta.

Lidia:
L: (Lo lee con dificultad)
E: ¿Qué te pregunta?
L: Que si me puedo comprar el pito. (Va a las operaciones y va restando sucesivamente de 85, 35, 25, 20, se equivoca en la última)
E: ¿Qué fue lo que hiciste?
L: Fui restando del dinero que tenía. Sobra 15 ¿no?
E: ¿Se puede comprar el pito?
L: Sí.
E: ¿No te ayuda hacer el dibujo?
L: No.
E: A tí te gusta dibujar.
L: Sí, pero si hago el dibujo me lío y después no sé que hacer.
E: ¿Lo podrías hacer con otras operaciones?
L: No sé.

Jonathan:
J: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Qué vas a hacer?
J: Restar esto, 85, menos 35, menos 25 (Coloca las tres cantidades verticalmente)
E: ¿Cómo vas a hacer esa resta?
J: (Rectifica y hace las restas, pero se equivoca)
E: ¿Puedes comprar el pito?
J: Sí

E: ¿No te gusta hacer diagramas, ni dibujar?
J: No.

Tomás:
E: Lee el problema y cuéntamelo.
T: (Lo empieza a leer, pero no saber si dice 85 o 800, lo lee con mucha dificultad y casi deletreando)
E: ¿Sabes la pregunta?
T: Que me compro una chocolatina que vale 85 ptas, no, no que tenía 85 y compró una chocolatina y unos caramelos y quiere comprarse un pito.
E: ¿Cómo lo vas a hacer? ¿Qué es lo que te ayuda más?
T: Las operaciones. Es una resta.
E: ¿Qué vas a restar?
T: (Vuelve a leerlo, juega con las manos y el bolígrafo) *Sería ... ¿una suma*?
E: Imagínate que eres tú. ¿Cómo lo harías?
T: Le daría el dinero a la Señora del estanco.
E: Pero ¿tú no calcularías lo que te cuesta?
T: Sumaría 35 y 25 (Lo hace correctamente)
E: ¿Qué es eso?
T: Lo que se gastó en la chocolatina y los caramelos.
E: ¿Qué haremos ahora?
T: Sumo 35, 25 y 20, y me sobra 5 ptas.
E: ¿Puede comprarse el pito?
T: Sí
E: ¿Podrías hacer el diagrama?
T: (Coloca 85 y 35 dentro del rectángulo y rodeó 20).

Antonio:
A: (Lo lee con dificultad)
E: ¿Entiendes el problema?
A: No mucho. (Escribe todas las cantidades y las suma)
E: ¿Por qué haces eso? Si tu fueras a comprar ¿qué harías? ¿Qué te pregunta?
A: Si puedo comprar el pito.
E: ¿Puedes?
A: Sí, porque tiene 165 ptas.
E: ¿Eso dice el problema? ¿Tú no calculas cuando vas a comprar lo que te puede costar?
A: No, le doy dinero a la del estanco y ella me dice.
E: Vamos a hacer un dibujo para ver si lo entiendes.
A: (Dibuja dos monigotes: uno es el del estanco y otro es él con el dinero en la mano. Apunta los datos 35 y 25, va leyendo de nuevo el problema)
E: ¿Podemos comprar el pito?
A: Sumo
E: Pero ¿qué sumas?
A: Sumo lo que tengo que pagar.
E: Hazlo (Suma de nuevo las 85 con 35 y 25) *¿Se puede comprar el pito?*
A: Sí.

<u>Problema 2:</u>

<u>Jorge:</u>
J: (Lo lee en voz baja y rápidamente va a las operaciones)
E: ¿Ya sabes lo que tienes que hacer?
J: Sumar y multiplicar (Lo hace correctamente)
E: ¿Cuál es la solución?
J: 876 ptas

<u>Ana:</u>
A: (Lo lee en voz alta. Dibuja un coche y un muñeco). *Tengo que sumar 84 km que recorre por la mañana con 62 km que recorre por la tarde y lo divido entre 6.*
E: ¿Por qué dividir?
A: Porque cada km vale 6 ptas.
E: (Le planteo un problema similar con chicles)
A: Ah, no, multiplicar.
E: ¿Cuánto gastó?
A: 876 ptas.

<u>Lara:</u>
L: (Lo lee en voz baja). *Hay que hacer dos operaciones: una suma y una división. La suma para calcular los km de la mañana y la tarde y después dividirlo.*
E: ¿Qué te pregunta? Vamos poco a poco. (Empieza la suma) *¿Cuánto gasta en un día?*
L: Creo que hay que dividir 146 entre 6, pero no estoy segura.
E: Piensa en un problema similar. Si tengo 146 rotuladores y cada cuesta 6 ptas.
L: Sigo pensando que es una división.
E: Y ¿con los rotuladores?
L: Una multiplicación. Da 876 ptas en un día.

<u>Alexis:</u>
A: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Lo entiendes?
A: Sí. (Lo lee en voz alta enfatizando los datos. Pasa a hacer el diagrama: dibuja 6 rectángulos y en cada uno pone 84)
E: ¿Con esto qué calculas?
A: Tengo que multiplicar, no dividir. Las 84 las dividiría en 6. Me saldría lo que gasto en cada km y después por la tarde tendría que hacer lo mismo.
E: ¿Qué operación?
A: Una división: 84 dividido en 6 partes
E: Si te planteo que compras 84 chicles y cada uno vale 6 pesetas ¿es un problema similar?
A: Me parece que...
E: En el dibujo dijiste que tenías que sumar ¿es una división?

A: No, es una multiplicación. Ah, sí. (Hace las dos multiplicaciones correctamente).
E: Y ¿después?
A: Ahora tengo que sumar los 372 y 504 para ver cuánto se gastaría. 876.

Dácil:
D: (Lo lee en voz baja) *¿Hay que hacer dos operaciones?*
E: ¿Qué crees tú?
D: Hay que sumar 84 y 62
E: Y ¿qué te da?
D: 146
E: 146 ¿qué?
D: Km. Y ahora lo multiplico por 6 para que me dé lo que se gastó en un día. (Lo ejecuta correctamente, se ayuda de los dedos) *876.*
E: 876 ¿qué?
D: Pesetas.
E: ¿Por qué dudaste en la segunda operación?
D: Porque estaba insegura entre multiplicar y dividir. Pero pensé que dividir era para repartir y aquí no valía.
E: ¿No puedes pensar en un problema similar?
D: No.

Lidia:
L: (Lo lee en voz baja) *¿Gasta dinero en recorrer km)*
E: No, 6 ptas es lo que le cuesta la gasolina. ¿Lo entiendes?
L: No, voy a leerlo de nuevo (Vuelve a leerlo. Piensa, duda...) *Yo creo que hay que sumarlo* (Suma 84 y 62)
E: Entonces ¿cuánto ha recorrido?
L: 146 km. Si recorre 146 km y se gasta 6 ptas... (Multiplica). *La solución es 876 ptas. Recorre 146 km y se gasta 876 ptas.*

Jonathan:
J: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Ya lo entiendes?
J: (Se arruga)
E: ¿Qué te pide?
J: (Lo vuelve a leer)
E: ¿Cómo lo puedes hacer?
J: Primero una suma (La hace) *y después...*
E: ¿Qué has calculado?
J: 146
E: Y eso ¿qué es?
J: Lo que recorre por la mañana y por la tarde.
E: Sabes que cada km le cuesta 6 ptas.
J: Entonces hago menos 6.
E: ¿Qué te va a dar si a 146 km le quitas 6 ptas?

J: Se gasta 140 ptas.
E: ¿No te parece poco? Piensa en un problema similar: compras 146 cromos y cada uno te cuesta 6 ptas ¿Cuánto te cuestan?
J: Más 6 o por 6. Tengo que multiplicar. 876
E: 876 ¿qué?
J: Pesetas
E: ¿Sueles pensar en un problema parecido?
J: No.

Tomás:
T: (Lo le con mucha dificultad)
E: ¿Lo entiendes?
T: No mucho. (Lo vuelve a leer con dificultad)
E: ¿En qué gastará 6 ptas?
T: Con gasolina.
E: ¿Cómo lo calcularías? (Le trato de concretar los datos del problema)
T: (Coloca las cantidades seguidas 8462 y lo divide entre 6. No domina la tabla de multiplicar)
E: ¿Por qué pensaste que es una división?
T: Yo pensé que si cada km es 6 ptas tenía que dividir.

Antonio:
A: (Lo lee en voz baja) *Esto es una resta y una suma.*
E: ¿Qué vas a restar y qué vas a sumar?
A: Voy a restar 84 y 62 (Lo resta mal). *Da 122.*
E: Y ¿ahora?
A: Sumo 122 y 6.
E: Y ¿qué calculas?
A: No sé.
E: ¿Cómo se te ocurrió sumar?
A: Sumando. Da 128
E: (le planteo un problema análogo con números de una cifra y chicles. Lo resuelve correctamente, pero con dificultades con la multiplicación).

Problema 3:

Jorge:
J: (Lo lee rápidamente. Sin detenerse resta los 35 y hace la división) *Le tocan 10 globos.*
E: ¿Por qué tenías que restar?
J: Porque si sobraban los tenía que quitar primero.

Ana:
A: (Lo lee. Divide 275 entre 24)
E: Pero sobraban 35.
A: Entonces hay que quitarlos.
E: ¿A quién?

A: Bueno, cada uno cogió 11.
E: Y ¿cuántos sobraron? Fíjate en la división.
A: 11 también (Hace la prueba de la división)
E: ¿Cómo lograr que sobren 35?
A: ...
E: (Le planteo el problema , sustituyendo 'sobraron' por 'se picaron')
A: (Lo resuelve correctamente)
E: ¿Cuánto le tocó a cada niño?
A: 10
E: ¿Este problema es el mismo?
A: Creo que sí, pero antes no lo veía.

<u>Lara:</u>
L: (Lo lee en voz baja)
E: Imagínate que es tu clase.
L: Hay 24 niños y 275 globos. Yo creo que hay que hacer la división y si sobran 35 ya está hecho. (Hace la división)
E: ¿Qué te ha dado?
L: 11
E: Y ¿te sobraron?
L: 11. Me tiene que sobrar 35. ¿Quizá una resta entre 24 y 11?
E: ¿A los niños quitarle los globos?
L: (Duda)
E: Imagínate que el problema dijera que se te picaron 35. ¿Cómo lo harías?
L: Ah, tengo primero que restar los 35 y después hacer la división.
E: ¿Es el mismo problema?
L: Creo que sí. (Hace la resta y la división)
E: Cuánto dio?
L: 10.

<u>Alexis:</u>
A: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Qué vas a hacer?
A: Una división
E: ¿Qué vas a dividir?
A: 275 entre 24. Sabemos el resto que es 35. (Hace correctamente la división)
E: ¿Cuál es la solución?
A: 11
E: Pero ¿te han sobrado 35?
A: (Hace la prueba de la división y dice que está bien)
E: Le planteo un problema similar, poniendo que "se picaron 35"
A: Entonces tendría que restarle 35 y lo que me dé lo divido entre 24. (Lo ejecuta correctamente). *Le tocan 10 globos.*

<u>Dácil:</u>

D: (Lo lee, semibajo) *Hay que hacer una división.*
E: ¿Qué divides?
D: 275 entre 24. (Hace la operación)
E: ¿Cuál es la solución?
D: 11
E: Pero el problema tenía algún dato más.
D: Sí, dice que sobraron 35.
E: ¿Qué podemos hacer?
D: ¿35 + 11?
E: ¿Para qué los sumas?
D: ...
E: (Le planteo el mismo problema sustituyendo 'sobraron' por 'se picaron')
D: Pues...
E: En tu división ¿te sobraron?
D: 11
E: ¿Qué podemos hacer para que te sobren 35?
D: 24 x 35 (Empieza a plantear operaciones)
E: (Le sugiero un problema similar con cantidades pequeñas. Lo hace rápidamente de forma mental. Lo dejo porque está muy bloqueada)

<u>Lidia:</u>
L: (Lo lee en voz baja, dos veces) *Yo sé que es de dividir, porque hay que repartir, pero no sé hacer las divisiones de dos cifras.*
E: Pero hay un dato más.
L: (Duda)
E: (Le planteo el problema con datos pequeños)
L: (Hace mal la división. La vuelve a hacer, no se sabe la tabla de multiplicar)
E: ¿Cuántos te sobraron? Queríamos que sobrasen 8. (Le planteo el problema, pero con el cambio de "sobran" por "estaban picados" y lo resuelve correctamente).

<u>Jonathan:</u>
J: (Lo lee en voz baja)
E: ¿Qué vas a hacer?
J: Una resta
E: ¿Qué vas a restar?
J: 275 menos 24
E: ¿Por qué una resta?
J: No. Es una división, porque hay que repartir.
E: El problema dice que sobraron 35. A tí sólo te sobran 11.
J: Le doy uno a cada uno.
E: ¿Uno?
J: (Hace de nuevo la división)
E: ¿Por qué no haces algún dibujo?
J: No
E: (Termina haciendo mal la división y consigue que dé de resto 35).

Tomás:

T: (Lo lee con dificultad)

E: ¿Cómo calculamos lo que cogió cada uno?

T: (Escribe seguidas las cantidades pequeñas, 2435, y lo divide entre 275. Le cuesta hacer la división)

E: Pero no sobran 35 globos. (Le planteo un problema similar con números pequeños y con caramelos: 20 caramelos, que sobren 8 y que los reparta entre 4. Lo resuelve correctamente haciendo rayitas y por conteo, pero sin ejecutar ningún tipo de operación)

Antonio:

A: (Lo lee)

E: ¿Qué vas a hacer?

A: Hay 24 niños. El colegio compró 275 globos y tengo que dar no sé cuantos globos para cada niño. Así que tengo que restar 24 menos 275 (hace una resta incorrectamente) *349.*

E: ¿Es lo que le toca a cada niño?

A: (Duda) *Pues, habrá que sumar.*

E: ¿Una suma?

A: Pues será una multiplicación.

E: (Le planteo un problema similar con números de una cifra)

A: (Hace una resta y de cabeza hace la división apoyándose en los dedos)

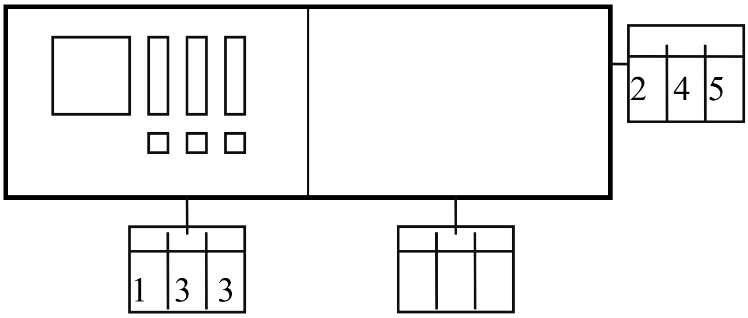
E: ¿Es éste similar?

A: No sé. No sé hacerlo.

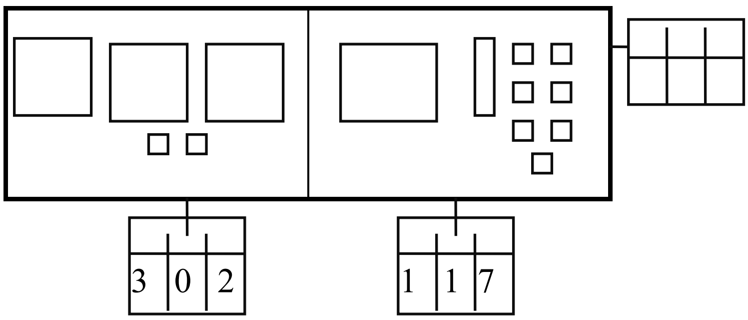
4.4.1 TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS DE LOS ALUMNOS. PROBLEMAS INVENTADOS A PARTIR DE UNA REPRESENTACIÓN VISUAL-GEOMÉTRICA: GRUPO PILOTO

El primer diagrama correspondía a una situación sustractiva, donde se conocía el total y una de las partes, mientras el segundo era una situación aditiva, en la cual se conocían las dos partes.

0. Inventa un enunciado para el diagrama siguiente:



0. Inventa un enunciado para el diagrama siguiente:



Davinia
1) Luis tiene 245 ptas y Marta 133 ptas. ¿Cuántas pesetas tiene más Luis que Marta?
2) He comprado un libro que me costó 302 ptas y un lapicero que me costó 117 ptas. ¿Cuánto dinero me gasté?

Nuria
1) Juan tiene 133 ptas y Ana 112 ptas. Quiero saber cuánto tienen los dos.
2) Tengo 302 manzanas y hoy vinieron 117 más. ¿Cuánto tengo en total?

Isaac
1) Juana tenía 245 ptas y se gastó 133 ptas. ¿Cuántas pesetas le sobraron?
2) Mi hermano tenía 302 ptas y yo 117 ptas y las queríamos juntar. ¿Cuántas ptas tenemos entre los dos?
Enrique:

1) Luis compró un libro de 133 ptas y un cuaderno de 112 ptas. ¿Cuánto le costó todo en total?
2) La madre de Juan fue al supermercado y compró un kilo de naranjas a 302 ptas y un kilo de manzanas a 117 ptas. ¿Cuánto le costó todo en total?

Catalina:
1) Yo tengo 245 ptas y me compré un libro que vale 133 ptas. ¿Cuánto dinero me sobró?
2) Mi prima tiene 302 ptas y mi tía Luisa le regala 117 ptas. ¿Cuánto dinero tiene en total?

Nicolás:
1) Un balón vale 133 ptas y una camisa vale 245. ¿Cuánto valdrán las dos cosas juntas?
2) Un pantalón vale 302 ptas y un cinto 117. ¿Cuánto me cobraron por las dos cosas?

Daida:
1) Pedro tiene 133 cromos. Entre Ana y Pedro tienen 245 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Ana?
2) Mi tío me da 302 ptas. Al día siguiente me da 117 ptas. ¿Cuántas ptas tengo ahora?.

Lorena:
1) María tiene 133 cromos y Juan más que ella. ¿Cuántos cromos tiene Juan?
2) Juan tiene 302 boliches y Ana 117 boliches. ¿Cuántos boliches tienen entre los dos?

Ricardo:
1) Un niño tiene 115 ptas y su primo ha puesto todo lo que tenía. ¿Cuánto ha puesto si entre los dos tienen 245 ptas?
2) Laura tiene 302 ptas y Delioma 117 ptas. ¿Cuánto tienen entre los dos?

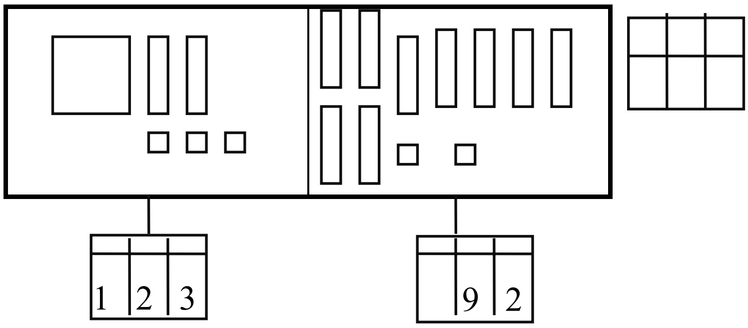
Natanael:
1) Juan tiene 245 ptas y Ana 133 ptas. ¿Cuántas pesetas tiene Juan más que Ana?
2) Juan tiene 302 ptas y Ana 117 ptas. ¿Cuántas ptas tienen entre los dos?

Gara:
1) Tengo 245 ptas y me quitan 133 ptas. ¿Cuántas ptas tengo ahora?
2) Tengo 302 ptas y mi hermano me da 117. ¿Cuánto tengo ahora?

Mercedes:
1) En una tienda venden 245 chocolatinas y 133 caramelos. ¿Cuánto me puede costar todo?
2) En papelería hay 302 cuadernos y me compran 117. ¿Cuántos cuadernos me quedan?

4.4.2 TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS DE LOS ALUMNOS. PROBLEMAS INVENTADOS A PARTIR DE UNA REPRESENTACIÓN VISUAL-GEOMÉTRICA: GRUPO DEFINITIVO.

0. Inventa un enunciado para el diagrama siguiente:



Jorge:
En un pueblo pequeño había 123 personas. Si en este verano vienieron 92 ¿cuántas personas hay ahora?

Ana:
Juan tiene 123 ptas y María 92 ptas. ¿Cuántas pesetas tienen los dos juntos?

Lara:
Si Pedro tiene 123 boliches y María 92. ¿Cuántos boliches tienen entre los dos?

Dácil:
En una empresa de flores tienen 123 y en otra 92 y lo quieren juntar y repartirlo en 3 hoteles ¿Cuánto le tocará a cada hotel?

Lidia:
Marta tiene 123 caramelos y Raúl tiene 92. ¿Cuánto tienen entre los dos?

Jonathan:
En un gallinero hay 123 gallinas y se escapan 92. ¿Cuántas quedan ahora?

Tomás:
En una fábrica ha 123 botellas de Coca-Cola y tienen que repartirlo en 92 casas ¿Cuántas casas le tocan?

Antonio:
Juan tiene 123 caramelos y lo tiene que repartir en 92 niños. ¿Cuántos le sobran?

4.5 PREFERENCIAS Y OPINIONES DE LOS ALUMNOS DEL GRUPO DEFINITIVO SOBRE LAS MATEMÁTICAS Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Preguntas:
¿Qué te gusta más hacer en Matemáticas: cálculos, geometría, resolución de problemas?
¿Te sientes seguro cuando resuelves problemas?
¿Qué es lo más difícil en un problema?

Ana:
E.: *¿Te gusta resolver problemas en Matemáticas o qué parte de las Matemáticas te gusta más: cuentas, problemas, geometría?*
A: *Me gustan los problemas y las operaciones.*
E: *¿Te sientes segura al resolver los problemas?*
A: *Sí.*
E: Cuando resuelves un problema, ¿qué haces? ¿En qué te fijas?
A: Voy "pensando" en el problema.
E: ¿Qué es lo más difícil?
A: No sé.
E: ¿Tienes que ayudarte con un dibujo?
A: Si no lo entiendo sí.

Tomás:
E: *¿Qué te gusta de Matemáticas: los problemas, los cálculos, la geometría..?*
T: Los problemas y después los cálculos
E: ¿Estás seguro cuando haces un problema?
T: A veces, no.
E: ¿Te pones nervioso al hacer un problema?
T: Lo hago y si no me sale, pienso que me van a echar la bronca.
E: ¿Qué es lo más difícil de un problema?
T: Buscar la operación.
E: ¿En qué te fijas o qué piensas cuando lees el problema?
T: Voy pensando lo que leo.
E: ¿Te gusta resolverlo sin operaciones?
T: Sí. Lo hacía con la mente.
E: Es verdad, en clase muchos problemas los hacías "de cabeza".
T: Sí

Dácil:
E: *¿Qué te gusta de Matemáticas: los problemas, los cálculos, la geometría..?*
D: Las figuras.
E: Y hacer cubos, prismas,...?
D: Sí
E: Y ¿qué es lo más difícil de un problema?
D: Las multiplicaciones.
E: Pero ¿hacer la operación?
D: Lo que me está costando es hacer las divisiones.
E: ¿Te pones nerviosa cuando no te sale un problema?

D: Sí, sí.
E: Si no te sale un problema, sigues insistiendo hasta que te salga o ¿qué haces?
D: No, me voy un ratito a ver la tele, y después , vuelvo.
E: ¿Qué es lo más difícil de un problema?
D: La operación es fácil.
E: Pero ¿elegir la operación?
D: Sí, es fácil.
E: ¿En qué te fijas para saber qué operación?
D: Aquí en el triple (se refiere a un problema que aún tiene sobre la mesa).
E: ¿Cómo decides qué operación debes hacer primero cuando hay dos?
D: ......
E: ¿Te imaginas alguna vez que eres tú la del problema?
D: Cuando leo lo primero sé que es una suma (vuelve a referirse a otro problema que tiene hecho) *y después me fijo.*
E: Pero ¿siempre piensas que es una suma?
D: Sí. Pero después lo leo y veo si es otra operación.
E: ¿Intentas acordarte si has hecho alguno parecido?
D: No.

Alexis:
E: *¿Qué te gusta de Matemáticas: los problemas, los cálculos, la geometría..?*
A: *Lo que menos me gusta es el cálculo. Los problemas me divierten y la Geometría sí que me gusta.*
E: ¿En qué tienes dificultad al resolver un problema?
A: En la operación, pero con los diagramas no tengo problema.
E: Y ¿cómo sabes qué operación tienes que hacer?
A: Voy leyendo, ves aquí dice lo que cuesta y tengo que sumar, o aquí dice que es el triple (Se está apoyando en problemas que ha resuelto).
E: ¿Estás seguro de que el problema está bien?
A: Cuando hago el diagrama siempre estoy segurísimo que me va a salir bien, cuando hago las operaciones no estoy tan seguro.
E: Cuando no te sale un problema ¿qué haces?
A: Cuando no me sale cojo el libro, lo leo y saco la idea.
*E: ¿Te imaginas que este Colegio (*al que se refiere el enunciado de un problema) *es el tuyo?*
A: Generalmente me imagino eso.
E: ¿Te sueles imaginar que eres tú el personaje del problema?
A: Sí, me pongo dentro del problema.
E: ¿Te gusta el teatro?
A: Sí.
E: ¿Te gusta meterte dentro de los cuentos?
A: Sí.

Jorge:
E: ¿Qué te gusta de Matemáticas: los problemas, los cálculos, la geometría..?
J: La geometría.
E: Los problemas ¿te resultan difíciles?
J: No.

E: Si te quedas trabado en un problema ¿qué haces?
J: Sigo intentándolo.
E: ¿Te pones nervioso si un problema no te sale?
J: No.
E: ¿Siempre estás seguro si está bien?
J: Sí.
E: ¿Te cuesta elegir la operación?
J: A veces me lío al elegir la operación.
E: ¿Preferirías resolver los problemas haciendo los diagramas?
J: No.
E: ¿En qué te fijas al resolver un problema?
J: En lo que dice.
E: ¿Te sueles imaginar que eres tú?
J: A veces.

Lidia:
E: ¿Qué te gusta de Matemáticas: los problemas, los cálculos, la geometría..?
L: La geometría.
E: Los problemas ¿son difíciles?
L: No.
E: Si no te sale un problema ¿qué haces?
L: Hago los demás y después vuelvo a ése.
E: Y ¿te pones nerviosa?
L: No.
E: ¿Qué haces cuando lees un problema?
L: Leo el problema y con lo que dice ya sé.
E: ¿Te lo imaginas?
L: Sí.

Lara:
E: ¿Qué te gusta de Matemáticas: los problemas, los cálculos, la geometría..?
L: El cálculo.
E: Los problemas ¿te salen bien?
L: Sí.
E: ¿Qué es lo más difícil de un problema?
L: Entender el problema, porque si no lo entiendes no puedes seguir.
E: Si no te sale un problema ¿qué haces?
L. Sigo intentándolo, si no lo consigo se lo pregunto a alguien.
E: ¿Te pones nerviosa?
L: A veces.
E: No te sueles equivocar en los cálculos, pero ¿te ayuda hacer un dibujo?
L: No.

Jonathan:
E: ¿Qué te gusta de Matemáticas: los problemas, los cálculos, la geometría..?

J: ¿Qué es la geometría?

E: Es estudiar las figuras en el plano, los cuerpos en el espacio,...

J: Los problemas.

E: ¿Más que los cálculos?

J: Sí

E: ¿Te salen los problemas?

J: Sí.

E: ¿Qué es lo más difícil de un problema?

J: Nada.

E: ¿Te pones nervioso si no te sale un problema?

J: No.

E: ¿Lo intentas hasta que te salen?

J: Sí.

Antonio:

E: ¿Qué te gusta de Matemáticas: los problemas, los cálculos, la geometría..?

A: Los cálculos.

E: ¿Son difíciles los problemas?

A: No.

E: ¿Cómo sabes como se resuelven los problemas?

A: No me salen.

E: ¿Te cuestan los problemas?

A: Sí.

E: ¿Te pones nervioso?

J: A veces.

5.1 OTROS MATERIALES: DIARIOS DE TRES PROFESORES

PROFESOR AULA 1 (Alumnos de 5º):

SESIÓN 1: ½ hora
Manipulación de los bloques (15 minutos)
Ejecución de las actividades.

SESIÓN 2: ½ hora.
Trabajan en grupo
Realización de las actividades (se retrasó un poco por el reparto del material)
Algunos no acabaron las actividades.

SESIÓN 3:
A las explicaciones le siguen la solución de las actividades correspondientes. No parece que presenten grandes problemas, en general, aunque trabajan en grupos. La sesión dura un poco más de media hora.

SESIÓN 4:
Se desarrolla igual que las anteriores, sin embargo la duración es bastante mayor, aproximadamente una hora.

SESIÓN 5:
1º) Explicación del problema 24 y realización en grupo de las actividades 5 y 26.
La sesión comenzó a las 10:05 hasta las 10:30, pero no habían acabado las actividades correspondientes a la sesión por lo que después del recreo a las 11 y con una duración aproximada de 10 minutos se realizó la explicación previa y la solución de la actividad 27.
Para solucionar estas actividades sólo un grupo recurrió a los bloques aritméticos.
En la corrección del ejercicio 28a se vio que la mayoría no había captado el diagrama representativo de la situación, por lo que hubo que explicarlo de nuevo.

SESIÓN 6:
Explicación de los distintos pasos que se van a encontrar a partir de este momento. Empezó la sesión a las 10:05 (después de educación física) y duró hasta las 10:35.

SESIÓN 7:
La sesión tuvo una duración de 45 minutos (desde las 9 hasta las 9:45).
Comenzamos con la ficha I7, explicando y trabajando todos al mismo tiempo. Luego pasamos a realizar los problemas 29 y 30 siguiendo el esquema ya aprendido. Para la realización de estas fichas se trabajó en grupo por lo que la consecución de los resultados es común a todos los miembros de los equipos. También la finalización de la sesión es el término de las fichas marcadas, con lo que a la hora de ver los resultados todos acaban y llegan a los mismos resultados siguiendo el mismo camino.
Ningún grupo ha recurrido al material manipulativo.

SESIÓN 8:

Comienza a las 9:05 y acaba a las 9:45. La mayoría de los grupos hacen bien los pasos del problema. Sólo un grupo se queda un poco retrasado y comete algunos errores aunque llegan a solucionarlos.

SESIÓN 9:

Comienza a las 11:15 y termina a las 11:45.

1º) Explicación de la ficha I9, utilizando la pizarra. Parece que no hay dudas e inmediatamente pasamos a solucionar los problemas 33 y 34.

Se trabaja en grupo, siguiendo el orden de la ficha (ninguno ha hecho primero las operaciones y luego el gráfico).

SESIÓN 10:

Comienza a las 10:15 hasta las 10:30 y de las 11 a las 11:15.

Explicación en la pizarra y luego realización de los problemas 35 y 36 en grupo.

La mecánica es:

Lectura del enunciado en grupo, sacar los datos también y luego cada uno va resolviendo (gráfico, operaciones e historia), luego comprueban que lo han hecho bien y ayudan a los que no lo hayan terminado o que se hayan equivocado.

Es la 1ª vez que han solucionado (dos grupos) haciendo primero las operaciones y luego los diagramas.

SESIÓN 11:

La sesión comenzó poco después de las 10 hasta las 10:30 y después del recreo a las 11 un cuarto de hora más.

Los problemas los solucionaron en grupo y al final hicimos una puesta en común y vimos algunos errores.

No utilizaron material.

SESIÓN 12:

La sesión comenzó a las 9 y duró hasta las 9:45. Algunos grupos acaban antes incluso de la media hora y otros se retrasan hasta el final de la sesión.

Los problemas se trabajaron en grupos aunque podemos ver que cada uno dentro del grupo hace sus aportaciones individuales a la hora de las viñetas o contar la historia.

El grupo 3 necesita ayuda para realizar el problema 41.

Los demás grupos trabajaron sin ayuda y en la puesta en común no hubo dudas ni aspectos que no entendieran.

No utilizaron material en ningún momento.

SESIÓN 13:

La sesión comenzó a las 9:10 hasta casi las 10.

Lo primero fue la explicación del I13 y luego la ejecución en grupo de los problemas 43 y 44. No hubo problemas y lo entendieron y solucionaron bien.

SESIÓN 14:

Comenzamos a las 10 con la explicación de los problemas de división. En el primero no hubo mayor dificultad en el reparto, lo entendieron y realizaron bien; luego pasamos al $I14_2$ y en este tipo de problemas se presentaron mayores dificultades a la hora de hallar las partes, repetimos la explicación de varias formas con distintos tipos de estrategias y después de esto si que no hubo problemas a la hora de solucionarlo.

La dificultad se presenta al representar gráficamente, no al saber qué operación deben realizar (esto ocurre con pequeñas cantidades).

En la hoja de recogida de datos figura el grupo 4 como que no realizó el problema, no es correcto ya que los demás si lo hicieron pero no el niño que en este día fue elegido (al azar como cada día) para presentar su trabajo.

SESIÓN 15:

En dos periodos de tiempo antes y después del recreo tuvo una duración de 45 minutos.

Resultó un poco difícil el ejercicio 47 y más fácil el 48.

Explicamos los dos I15 antes de cada uno de los ejercicios y luego los trabajaron en grupos.

El problema 47 tenía unas cantidades un poco mayores y al buscar la solución y contar había transformaciones de unidades en decenas y de éstas en centenas por lo que algunos niños recurrieron a la operación antes que a la solución gráfica.

SESIÓN 16:

Igual que las anteriores tuvo una duración superior a media hora y se realizó antes y después del recreo.

La sesión se desarrolló de la siguiente forma:

1º) I16 problemas de multiplicar, realización del problema 49, I16 problemas de dividir, realización del problema (en grupos).

En los primeros no hubo problemas, en los de dividir los hubo sobre todo al resolverlos en los diagramas, en la operación no.

SESIÓN 17:

Trabajaron en grupo los problemas 51, 52 y 53.

SESIÓN 18:

Trabajan los problemas 54, 55 y 56 en grupos y luego puesta en común.

SESIÓN 19.

Explicación en la pizarra de la unidad I19 y realización, luego, en grupos del problema 57.

SESIÓN 20:

Realizan en grupo los problemas de dos operaciones, números 58, 59 y 60.

PROFESOR AULA 3 (Alumnos de 5º):

SESIÓN 1 Sistema de numeración decimal.

Se acoge con entusiasmo, quizá porque les resulte sencilla y novedosa esta forma de representación. Prácticamente todos los alumnos lo comprenden y la mayoría lo fijan.

SESIÓN 2: Representar colecciones.

En esta sesión aparecen tres tipos de actividades bien diferenciadas:

a) se maneja el sistema de numeración cambiando de placas a barras o viceversa. Para algunos alumnos entraña cierta dificultad, especialmente la nº 7.

b) Se usa el ábaco plano. En clase han usado el ábaco vertical. Éste lo comprenden, pero parece un tipo de ejercicio innecesario para el desarrollo del resto del proyecto, creando ciertas confusiones que se irán superando posteriormente.

c) Se representan y etiquetan colecciones. Les resulta atractivo, fácil y agradable.

SESIÓN 3: Representar situaciones. Diagramas rectangulares.

La forma de representar las situaciones es dispar. Muchos alumnos se sienten incapaces ante ciertas situaciones.

SESIÓN 4: Representar problemas.

La representación en diagramas rectangulares les resulta más fácil. En general, lo van asimilando, pues las actividades planteadas son similares al modelo trabajado con anterioridad, y por similitud los van sacando.

SESIÓN 5: Representar problemas. Diagramas de árbol.

Los niños no habían utilizado el diagrama de árbol con anterioridad. En los gráficos se representan bien las cantidades, pero no en el lugar adecuado.

SESIÓN 6: Explicación de la ficha.

La realización de la ficha lleva mucho tiempo. Realizar la viñeta a algunos alumnos les resulta sumamente fácil y aparece clara y completa, otros les lleva demasiado tiempo el completarla; al darles prisa aparecen incompletas o no son lo suficientemente claras con lo que se plantea.

Llegamos a la conclusión de que no es necesario hacer el diagrama de representación sino realizar directamente el de resolución.

SESIÓN 7: Problemas de sumar.

No hay dificultad siguiendo el modelo.

SESIÓN 8: Problemas de restar.

Igual al anterior. Los progresos son dispares. Algunos alumnos calculan mentalmente o realizan las operaciones antes de hacer el diagrama de resolución. No se esfuerzan con las viñetas, en general.

SESIÓN 9: Problemas de sumar.

SESIÓN 10: Problemas de restar.

Los alumnos suelen resolver con la operación los problemas planteados, pero los que no son “buenos” tienen dificultad con los diagramas, pues no los han fijado totalmente. Sería necesario hacer más ejercicios dirigidos. Sucede sobre todo con la resta, pues no colocan el total en su lugar.

SESIÓN 11: Problemas de sumar y restar.
Se valorarán en las fichas de seguimiento.
SESIÓN 12: “ “ “

SESIÓN 13: Problemas de multiplicar.
Los alumnos tienen tendencia a resolver mentalmente el problema, para luego realizar los diagramas. No se esfuerzan con las viñetas. Continúan haciendo directamente el diagrama resolución y procuran abreviar a la hora de poner etiquetas.

SESIÓN 14: Problemas de dividir.
Siguen con el sistema de la sesión anterior. Determinados alumnos trabajan con cierta desganan. Decido no obligar más a realizar actividades atrasadas a aquellos alumnos que faltan con cierta frecuencia a clase, pues comprendo que ello no les va a beneficiar en nada, pues los realizan con total desinterés.

SESIÓN 15: Problemas de multiplicar. Problemas de dividir.
Igual a sesiones anteriores, se resuelven bien con el algoritmo, son problemas bastante trabajados en cursos anteriores; sin embargo en los de dividir no colocan la etiqueta del total en el lugar adecuado, como ocurre en la resta.

SESIÓN 16: Problemas de multiplicar. Problemas de dividir.
El gráfico de árbol les resulta interesante y los usan con cierta facilidad, una vez que han comprendido que es de combinación.

SESIÓN 17: Se valorará en la ficha de seguimiento.
SESIÓN 18: “ “ “

SESIÓN 19: Problemas de dos operaciones.
SESIÓN 20: Problemas de dos operaciones.
Sólo los alumnos “más despiertos” los resuelven sin dificultad. Es necesario trabajarlos más a fondo y realizar muchos más.

PROFESOR AULA 6 (Alumnos de 4º):

Los niños están colocados en grupos de 4 ó 6. Todos han participado excepto el número 10 que no coincidía.
En las sesiones 1 y 2 trabajaron con el material. En la 3 sólo algunos cogían el material, más por entretenimiento que por necesidad, excepto el nº 5 que lo necesitaba y esto le ayudó a avanzar en el conocimiento de los números hasta la sesión 7.
Las primeras sesiones fueron muy lentas, tardamos hasta una hora por sesión.
En la sesión 3 algunos niños propusieron terminar las situaciones problemáticas con preguntas.
Tiempo:
Los problemas no todos tardaba igual, unos niños 10 minutos otros hasta media hora.

Vocabulario:

Tuvieron dificultad en algunas palabras: menú (problema 28), congreso-especialista (problema 29), menos para entender más (problema 39), las cartulinas y las formas (dificultad de comprensión) (problema 49).

Norma:

Ver la necesidad de partir del todo o de la parte al todo.

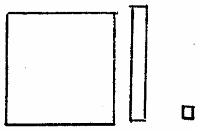
Normalmente unos niños (8) hacen o piensan primero en la operación y luego hacen el gráfico. El resto (16) hacen primero el diagrama.

A partir de la sesión 15 las dificultades fueron en aumento. En los problemas de dos operaciones tuvieron dificultad aproximadamente la mitad de la clase (unos 12 niños).

5.2 OTROS MATERIALES: UNA CARPETA DE UNA ALUMNA.

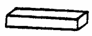
APRENDEMOS A REPRESENTAR GRAFICA Y SIMBOLICAMENTE LAS CANTIDADES DE LAS COLECCIONES.

Actividad 1: El material que tienes en la mesa se llama **bloques aritméticos** y fueron creados por el Profesor Dienes.
Dibuja aquí cada una de las piezas

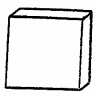


Actividad 2: Vamos ahora a mirar con detalle las distintas piezas :

La más pequeña es un cubo de 1 cm de arista. La llamaremos **unidad.**

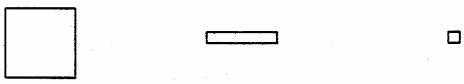


La que le sigue es la **barra.** La barra tiene 10 unidades. Representa la decena.



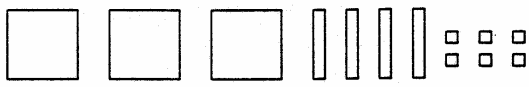
La tercera pieza es la **placa.** La placa equivale a 10 barras o a 100 unidades. Representa la centena.

En adelante las dibujaremos así:

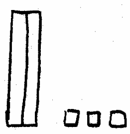


PLACA BARRA UNIDAD

Para representar 346 lo hacemos así:

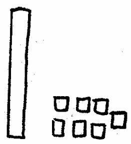


Actividad 3: Toma veintitrés unidades ¿puedes expresarlo cogiendo barras y unidades? Represéntalo gráficamente.



23

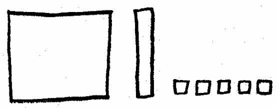
Actividad 4: Realiza la operación inversa: coge 1 barra y 7 unidades ¿Cuántas unidades tienes?



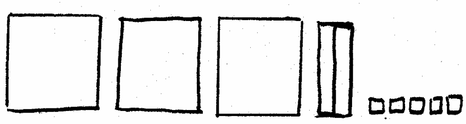
17

Actividad 5: Para tener ciento veinticinco unidades ¿cuántas placas, barras y unidades debes coger?

1 placa, 1 barra y 5 unidades



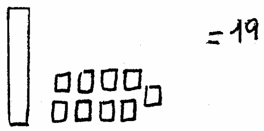
En tres placas, dos barras y cinco unidades ¿cuántas unidades hay en total



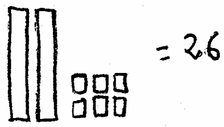
APRENDEMOS A REPRESENTAR GRAFICA Y SIMBOLICAMENTE LAS CANTIDADES DE LAS COLECCIONES.

Actividad 6: Toma las piezas que te indicamos a continuación y exprésalo en barras y unidades.

a) diecinueve unidades

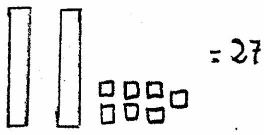


b) veintiséis unidades

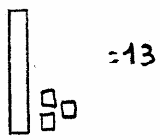


Toma las piezas que te indicamos ¿Cuántas unidades representan?

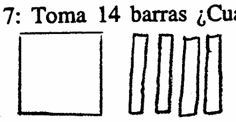
a) 2 barras y 7 unidades



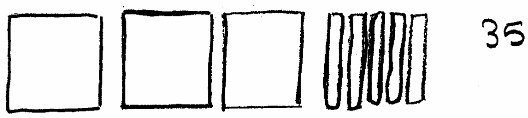
b) 1 barra y 3 unidades



Actividad 7: Toma 14 barras ¿Cuántas placas y barras son?

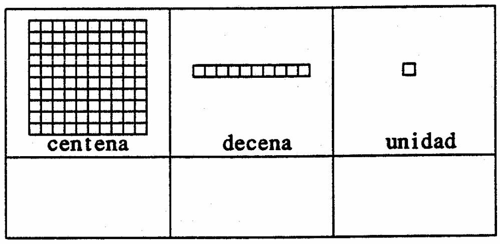


Y si tienes 3 placas y 5 barras ¿Cuántas barras son?



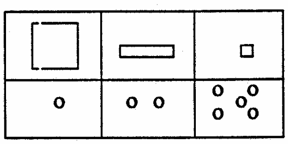
Actividad 8: El ábaco es una calculadora que se usa desde la más remota Antigüedad.

Vas a trabajar con el ábaco plano que tienes dibujado:

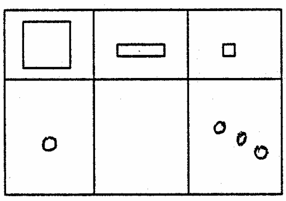


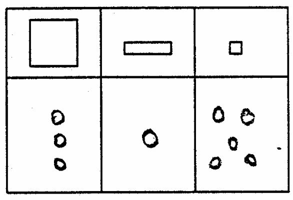
En adelante dibujaremos los bloques de forma simplificada.

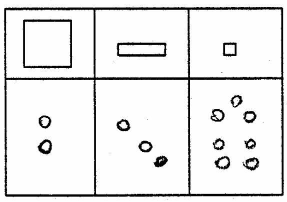
Para representar gráficamente el número 125 lo haremos así:

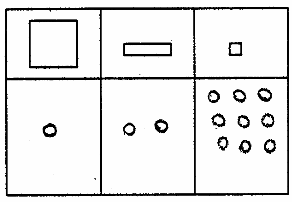


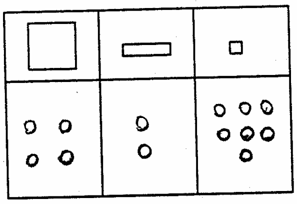
Representa gráficamente en los ábacos dibujados los siguientes números:

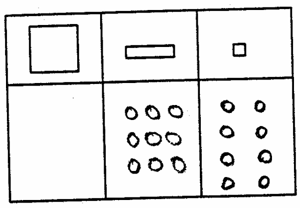
103: 

315: 

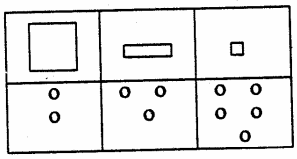
237: 

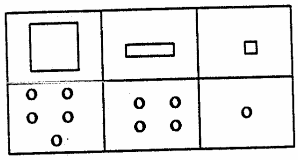
129: 

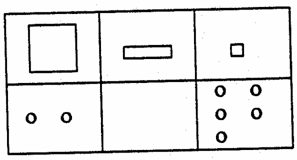
427: 

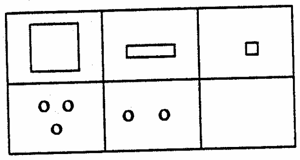
98: 

Actividad 9: **Escribe los números que están representados gráficamente en los siguientes ábacos:**

 235

 541

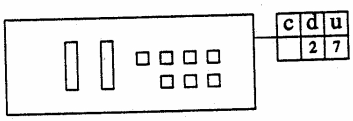
 205

 320

Como ya sabemos representar los números simbólicamente y de forma gráfica en el ábaco, vamos ahora a aprender a representar y etiquetar una colección de objetos.

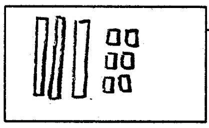
"Mi clase tiene 27 alumnos"

La colección anterior la representaríamos y la etiquetaríamos así:



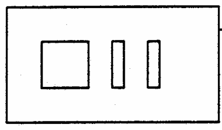
Actividad 10: Completa, representando o etiquetando las siguientes colecciones:

36 ovejas



c	d	u
	3	6

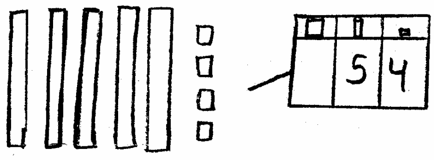
120 niños



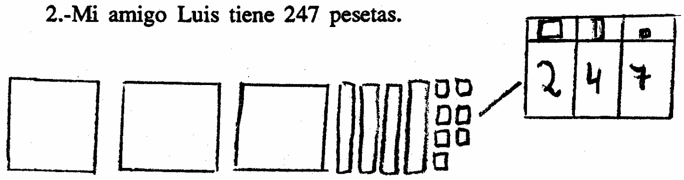
c	d	u

Actividad 11: Representa gráficamente y etiqueta las siguientes colecciones:

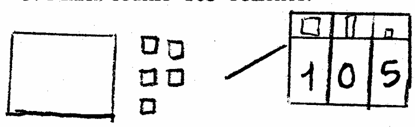
1.-En un prado hay 54 ovejas.



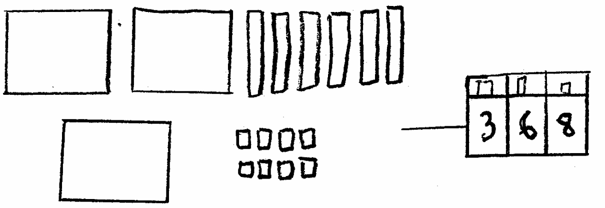
2.-Mi amigo Luis tiene 247 pesetas.



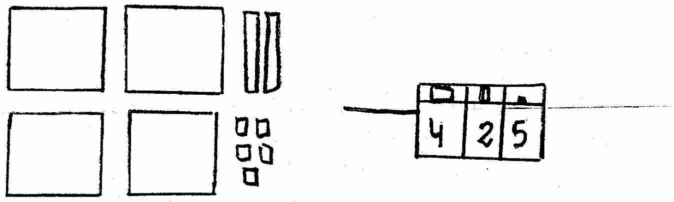
3.-María reunió 105 boliches.



4.-En mi colegio hay 368 alumnos.

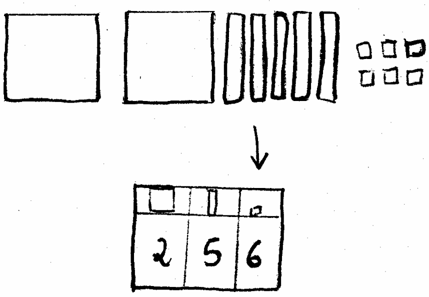


5.-En el avión caben 425 personas.



Inventa con tus compañeros colecciones de objetos y etiquétalas como hemos hecho anteriormente.

Mi abuela tiene 256 ptas

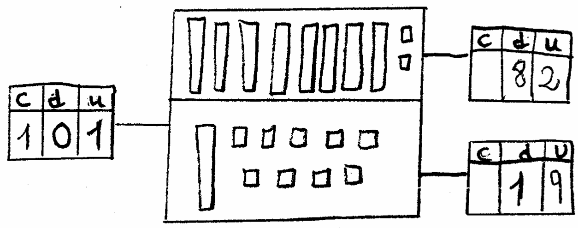


¡ASI SE REPRESENTAN Y ETIQUETAN LAS COLECCIONES!

REPRESENTAMOS SITUACIONES

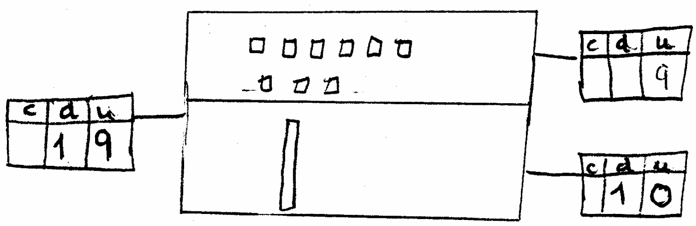
Actividad 12: Haz un dibujo o un gráfico que represente la situación descrita en el problema:

Una guagua llevaba 82 pasajeros. En una parada suben 19 pasajeros.



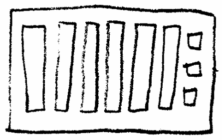
Actividad 13: Aquí tienes una nueva situación. Intenta hacer el dibujo de forma sencilla y esquemática.

Un edificio tiene 9 pisos. En cada piso viven 10 personas.



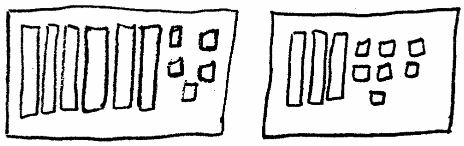
Actividad 14: Representa gráficamente la siguiente situación:

Durante la Cabalgata los Reyes Magos repartieron a los niños 63 bolsas de de caramelos"



Actividad 15: Tienes aquí una nueva situación. Represéntala.

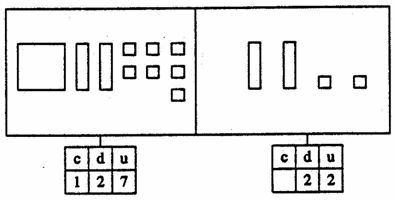
Mi abuelo tiene 65 años y mi padre 37 años.



Ahora vamos a aprender a dibujar un tipo de diagramas: los diagramas rectangulares.

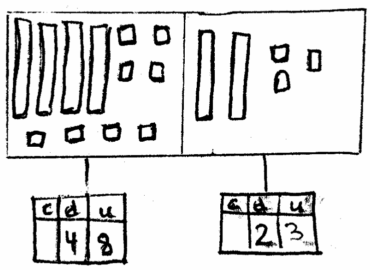
"Tenía 127 cromos. Mi amigo Luis me regala 22 cromos"

En nuestra situación hay dos colecciones de cromos: los que yo tenía (127) y los que Luis me regala (22). Podemos representarlos así:



Actividad 16: Dibuja el diagrama rectangular que represente la siguiente situación:

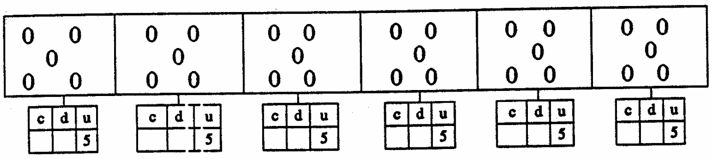
Una grúa de 48 metros de altura levanta su brazo de 23 metros



Aquí tienes una nueva situación:

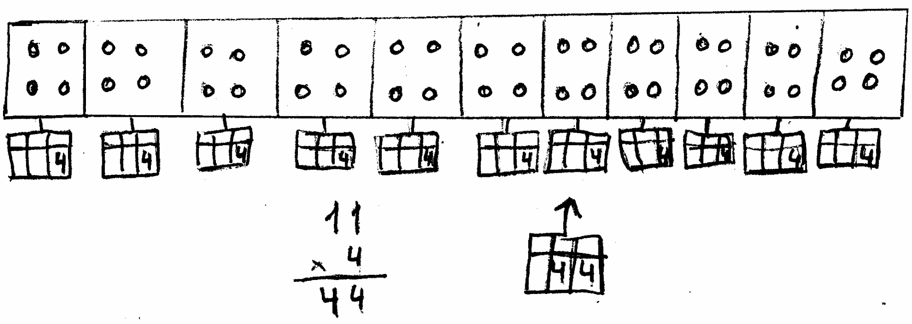
"En mi clase hay 6 mesas y en cada mesa se sientan 5 niños"

En este caso las colecciones son iguales: hay 6 mesas y en cada una de ellas los mismos niños. Lo representaríamos así:



Actividad 17: Representa gráficamente la siguiente situación:

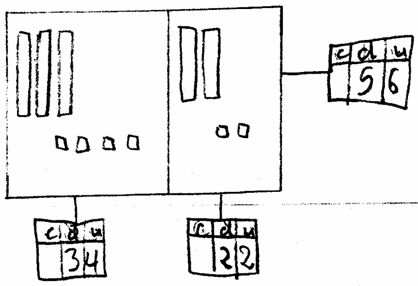
" Una pieza de tela mide 45 metros. Tenemos 4 piezas"



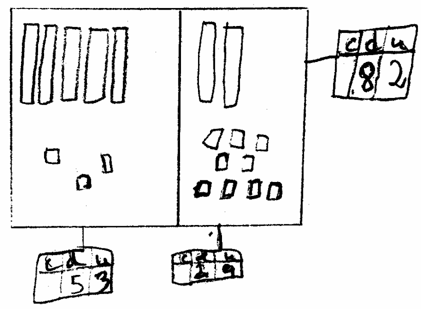
APRENDEMOS A UTILIZAR DIAGRAMAS RECTANGULARES

Representa gráficamente los siguientes problemas:

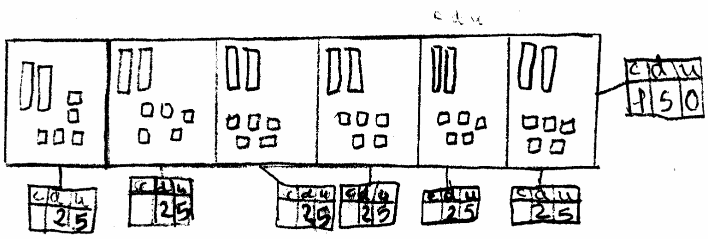
Actividad 18: De una caja de bombones nos hemos comido 34 y todavía quedan 22. ¿Cuántos bombones había en la caja al principio?



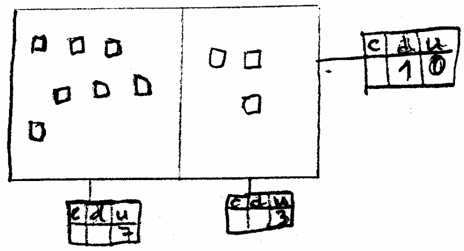
Actividad 19: Un ganadero tenía en el redil 53 corderos. Va a la feria y compra 29 ovejas. ¿De cuántos animales se compone ahora el rebaño?



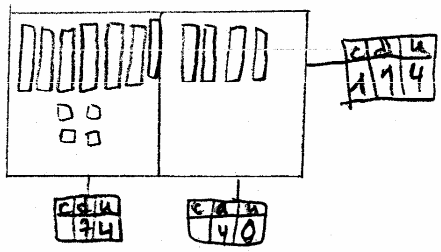
Actividad 20: Un paquete de tizas trae 25 tizas. Un profesor compró 6 paquetes de tizas. ¿Cuántas tizas compró el profesor?



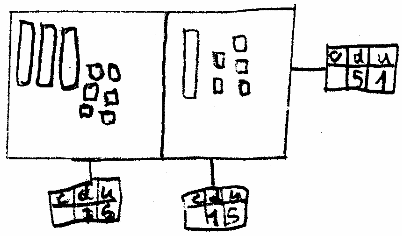
Actividad 21: Ramón ha levantado una pesa de 7 kilos y su primo Raúl ha levantado una que pesa tres veces más. ¿Cuántos kilos ha levantado Raúl?



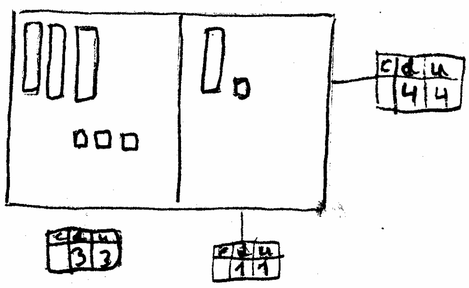
Actividad 22: Un pescador pescó 74 sardinas. Si vendió 40 piezas ¿cuántas le quedaron sin vender?



Actividad 23: En una clase formada por 36 alumnos, hay 15 niños y el resto son niñas. ¿Cuántas niñas hay en la clase?



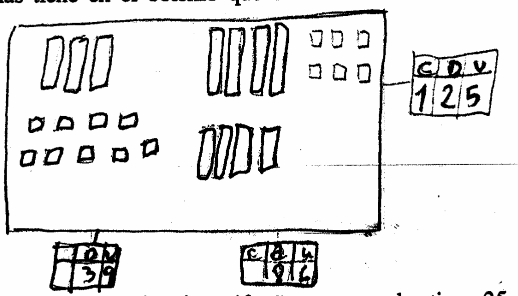
Actividad 24: En una clase hay 33 niños y queremos formar equipos de 11 componentes. ¿Cuántos equipos se podrán formar?



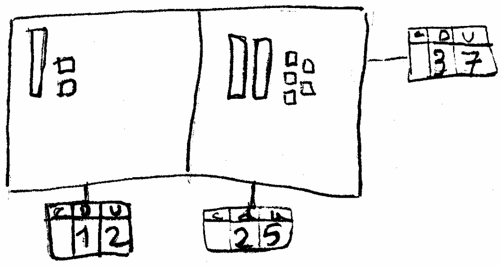
APRENDEMOS A REPRESENTAR GRAFICAMENTE MAS PROBLEMAS

Lee el siguiente problema:

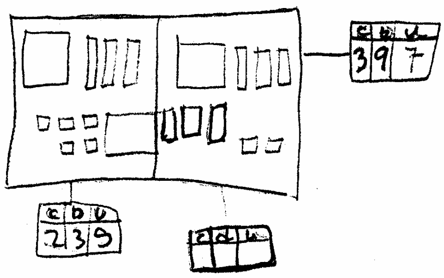
"Inés tiene en el bolsillo 125 pesetas y en la mano tiene 39 pesetas. ¿Cuántas pesetas más tiene en el bolsillo que en la mano?"



Actividad 25: María Luisa tiene 12 años y su madre tiene 25 años más que ella. ¿Cuántos años tiene su madre?



Actividad 26:Juan tiene en su hucha 235 pesetas. Su hermana tiene reunidas 397 pesetas.¿Cuántas pesetas necesita Juan para tener igual que su hermana?"



Lee el siguiente problema:

"Si tenemos 2 bolígrafos y 3 plumas, todos distintos entre si,¿cuántos estuches diferentes podemos formar cogiendo un bolígrafo y una pluma?"

b1 b2
p1 p2 p3
b1 → p1
b1 → p2
b1 → p3
b2 → p1
b2 → p2
b3 → p3

→ 6

Actividad 27:Tengo 3 rosas y 4 claveles, todos de colores diferentes. Cogiendo una rosa y un clavel ¿cuántos ramos diferentes puedo hacer?

r1 r2 r3
c1 c2 c3 c4
r1 → c1
r1 → c2
r1 → c3
r1 → c4
r2 → c1
r2 → c2
r2 → c3
r2 → c4
r3 → c1
r3 → c2
r3 → c3
r3 → c4

→ 12

Lee el siguiente problema:

"En un Colegio hay grupos de Tercero y 3 grupos de Cuarto de E.G.B. Queremos organizar una liga de baloncesto de forma que se enfrenten todas las clases de un Curso contra las del otro. Si se tienen que realizar 9 partidos. ¿Cuántos grupos de Tercero hay?"

P1 3ºA - 4ºA
P2 3ºA - 4ºB
P3 3ºA - 4ºC
P4 3ºB - 4ºA → 3 grupos
P5 3ºB - 4ºB
P6 3ºB - 4ºC
P7 3ºC - 4ºA
P8 3ºC - 4ºB
P9 3ºC - 4ºC

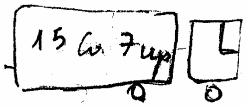
Actividad 28: Un restaurante ofrece 20 menús diferentes combinando un primer plato y un postre. Si hay 4 postres ¿cuántos primeros platos hay?

M1 S1 p1
M2 S1 p2
M3 S1 p3
M4 S1 p4
M5 S2 p1
M6 S2 p2
M7 S2 p3
M8 S2 p4
M9 S3 p1
M10 S3 p2
M11 S3 p3
M12 S3 p4
M13 S4 p1
M14 S4 p2
M15 S4 p3
M16 S4 p4
M17 S5 p1
M18 S5 p2
M19 S5 p3
M20 S5 p4

ENUNCIADO (HISTORIA) A la salida de un colegio un camión vendió 37 latas de refrescos: 15 de Coca-Cola y el resto de 7-up. ¿Cuántas latas de 7-up vendió?

I 6

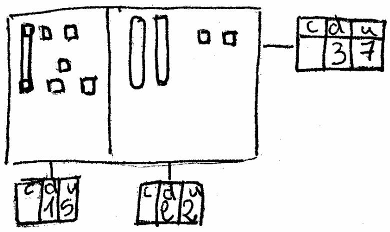
GRAFICO (VIÑETA)



¿QUE DATOS TE DAN? T: 37 refresos 15 cola colas

¿QUE DATO TE PIDEN? Cuantos 7-up

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 22 7-up

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 37 \\ -15 \\ \hline 22 \end{array}$$

RESULTADO 22 7up

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Un camión llevaba 37 refrexos 15 coca colas y 22 7-up

ENUNCIADO (HISTORIA)

I 8

Un repartidor de leche tiene 90 botellas en un camión y reparte 60. ¿Cuántas le quedarán?

GRAFICO (VIÑETA)

90 botellas

60 botellas

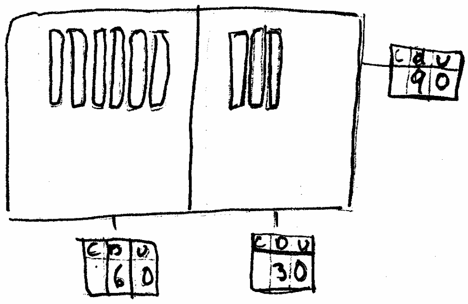
¿QUE DATOS TE DAN?

Tiene 90 botellas y reparte
¿Cuántos te quedan

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantos te quedan?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 30 botellas

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 90 \\ -\,60 \\ \hline 30 \end{array}$$

RESULTADO 30 botellas

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Un repartidor de leche tiene 90 botellas y reparte 60; le quedan 30 botellas

ENUNCIADO (HISTORIA) En una tienda habían 47 kg de naranjas y se han vendido 33 kg. ¿Cuántos kilos de naranjas quedan por vender?

31

GRAFICO (VIÑETA)

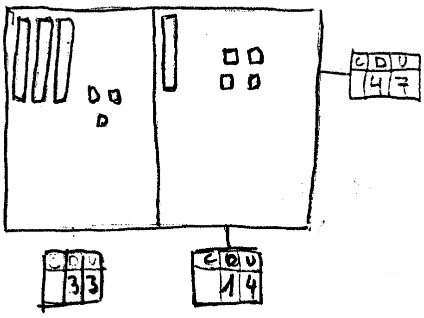
47 Kg de naranjas

33 Kg de naranjas

¿QUE DATOS TE DAN? Que tienen 47 Kg de naranjas y venden 33 Kg

¿QUE DATO TE PIDEN? ¿Cuántos kilos de naranjas quedan por vender?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 14 Kg de naranjas

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 47 \\ -\ 33 \\ \hline 14 \end{array}$$

RESULTADO 14 Kg. de naranjas

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Si

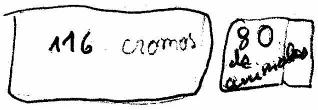
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO En una tienda habían 47 Kg de naranjas; se han vendido 33 Kg de naranjas y quedan 14 Kg de naranjas

ENUNCIADO (HISTORIA)

Tengo 116 cromos. 80 son de animales y el resto de plantas. ¿Cuántos cromos de plantas tengo?

32

GRAFICO (VIÑETA)



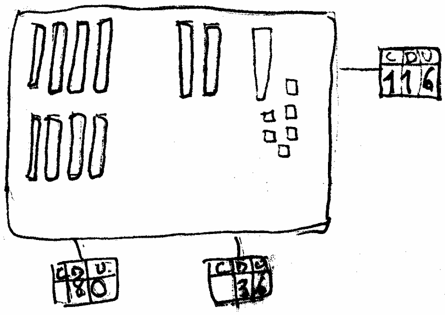
¿QUE DATOS TE DAN?

Tengo 116 cromos 80 son de animales y el resto de plantas

¿QUE DATO TE PIDEN

¿Cuántos cromos de plantas tengo?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 36 cromos

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 116 \\ -\ 80 \\ \hline 36 \\ \hline 116 \end{array}$$

RESULTADO 36 cromos de María

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

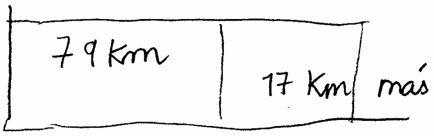
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Tenía 116 cromos 80 de animales 36 cromos de plantas

ENUNCIADO (HISTORIA)

I 9

Un camionero recorre un día 79 km y el día siguiente 17 km más que el primer día. ¿Cuántos kilómetros hace el segundo día?

GRAFICO (VIÑETA)



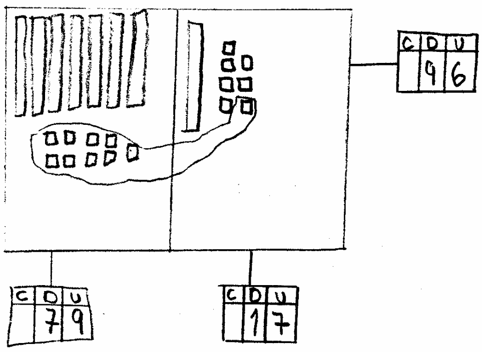
¿QUE DATOS TE DAN?

79 Km recorre 1 día
a otro día 17 Km mas

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantos km hace el segundo día?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 96 Km

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 79 \\ +17 \\ \hline 96 \end{array}$$

RESULTADO 96 Km

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

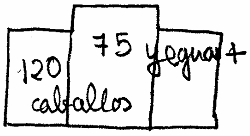
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Un camionero recorrió en un día 79 Km y al día siguiente 17 Km sera 96 Km ha rrecorrido en dos días

ENUNCIADO (HISTORIA)

3 3

En una finca hay 120 caballos y 75 yeguas más que caballos. ¿Cuántas yeguas hay?

GRAFICO (VIÑETA)



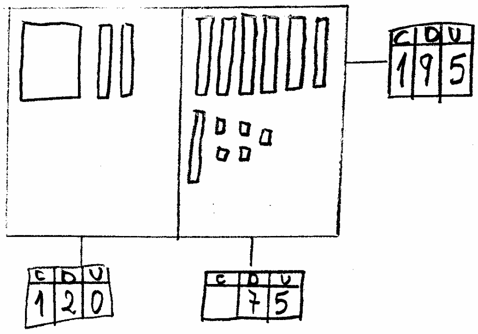
¿QUE DATOS TE DAN?

120 caballos y 75 yeguas mas que caballos

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuántas yeguas hay?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 195 yeguas

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 120 \\ +75 \\ \hline 195 \end{array}$$

RESULTADO 195 yeguas

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

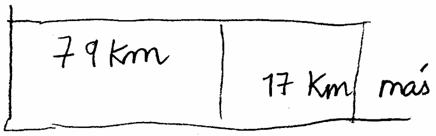
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO En una finca hay 120 caballos 195 yeguas

ENUNCIADO (HISTORIA)

I 9

Un camionero recorre un día 79 km y el día siguiente 17 km más que el primer día. ¿Cuántos kilómetros hace el segundo día?

GRAFICO (VIÑETA)



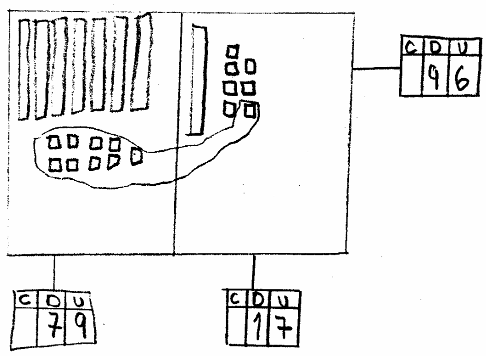
¿QUE DATOS TE DAN?

79 Km recorre 1 día
a otro día 17 Km mas

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantos km hace
el segundo día?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 96 Km

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 79 \\ +17 \\ \hline 96 \end{array}$$

RESULTADO 96 Km

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Un camionero recorrió en un dia 79 Km y al dia siguiente 17 Km sera 96 Km ha rrecorrido en dos dias

ENUNCIADO (HISTORIA)

3 4

Ana tiene 48 discos y se compra 23 más para tener tantos como Raquel. ¿Cuántos discos tiene Raquel?

GRAFICO (VIÑETA)

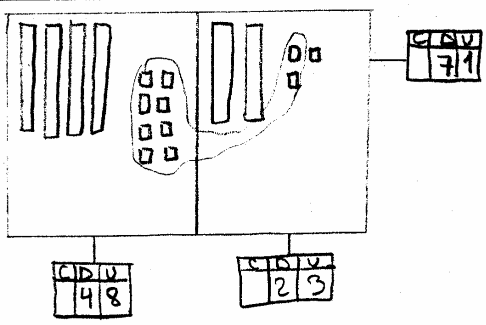
¿QUE DATOS TE DAN?

48 discos y se compra 23 discos más

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuántos discos tiene Raquel?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 71 discos

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 48 \\ +\ 23 \\ \hline 71 \end{array}$$

RESULTADO 71 discos

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

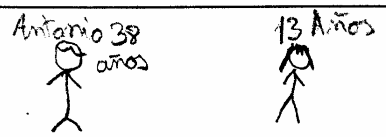
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Ana tenía 48 discos y se compra 23 discos y Ahora tiene 71 discos.

ENUNCIADO (HISTORIA)

Antonio tiene 38 años y su hermana 13 años.
¿Cuántos años más tiene Antonio que su hermana?

I10

GRAFICO (VIÑETA)



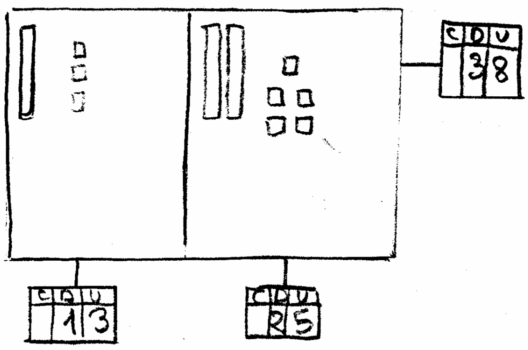
¿QUE DATOS TE DAN?

Antonio tiene 38 años
su hermana 13 años

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantos años más tiene Antonio que su hermana

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 25 años

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 38 \\ -\,13 \\ \hline 25 \end{array}$$

RESULTADO 25 años

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

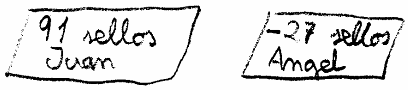
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Antonio tiene 38 años y su hermana 13 años a la hermana le falta 25 años para tener igual que Antonio

ENUNCIADO (HISTORIA)

3 5

Juan tiene en su colección 91 sellos y Angel tiene en la suya 27 sellos menos. ¿Cuántos sellos tiene Angel?

GRAFICO (VIÑETA)



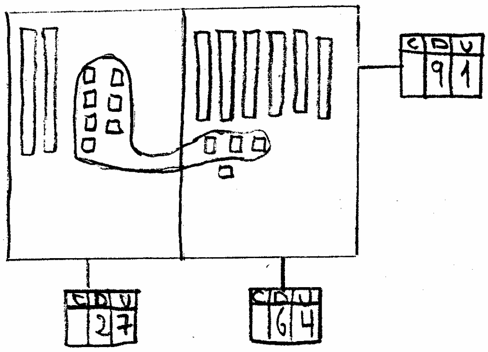
¿QUE DATOS TE DAN?

Juan tiene 91 sellos
Angel 27 sellos menos

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuántos sellos tiene Angel?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 64 sellos

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 91 \\ -27 \\ \hline 64 \end{array}$$

RESULTADO 64 sellos

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Juan tiene en su colección 91 sellos y Angel 27 sellos menos y son 64 sellos

ENUNCIADO (HISTORIA)

3 6

María tiene 125 cromos y Juan tiene 39. ¿Cuántos cromos tiene que comprar Juan para tener tantos como María?

GRAFICO (VIÑETA)

125 cromos María

39 cromos Juan

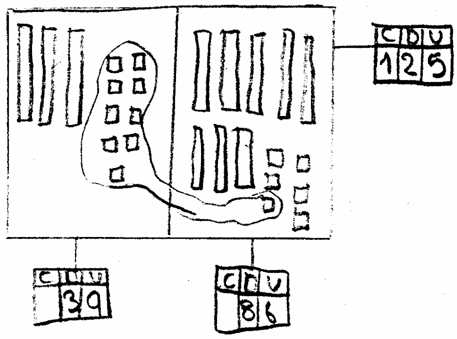
¿QUE DATOS TE DAN?

María 125 cromos
Juan 39 cromos

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuántos cromos tiene Juan?

CALCULA LO QUE TE PIDN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 86 cromos

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 125 \\ -\ 39 \\ \hline 86 \end{array}$$

RESULTADO 86 cromos

¿SON IGUALES LOS RESUTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CN EL RESULTADO OBTENIDO María tiene 125 cromos y Juan 39 a Juan le faltan 86 para tener como María

ENUNCIADO (HISTORIA)

3 7

Paco tenía 68 pesetas y su padre le dió 75 pesetas más. ¿Cuántas pesetas tiene ahora?

GRAFICO (VIÑETA)

68 ptas

75 ptas más

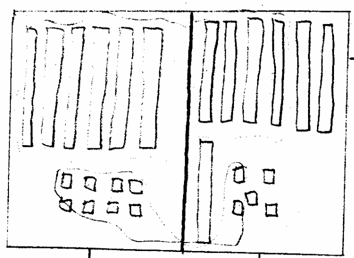
¿QUE DATOS TE DAN?

Paco 68 ptas su padre le dió 75 ptas más

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantas pesetas tiene ahora

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



C	D	U
1	4	3

C	D	U
	6	8

C	D	U
	7	5

RESULTADO 143 ptas

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 68 \\ +75 \\ \hline 143 \end{array}$$

RESULTADO 143 ptas

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

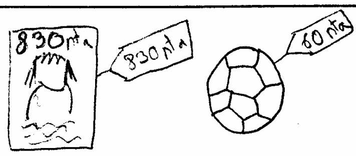
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Paco tiene 68 pesetas y su padre le dio 75 ptas. Paco tiene 143 ptas

ENUNCIADO (HISTORIA)

38

Una revista vale 830 pesetas y una pelota 60 pesetas menos que la revista. ¿Cuánto vale la pelota?

GRAFICO (VIÑETA)



menos -

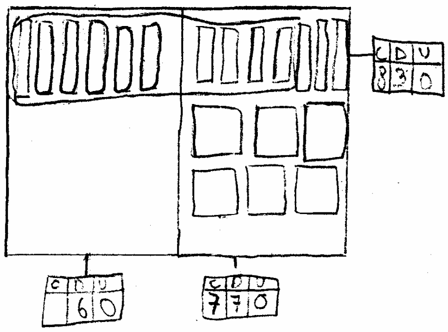
¿QUE DATOS TE DAN?

La revista 830 pta
una pelota 60 pta menos

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuanto vale la pelota?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 770 ptas

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 830 \\ -\ 60 \\ \hline 770 \end{array}$$

RESULTADO 770 ptas

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

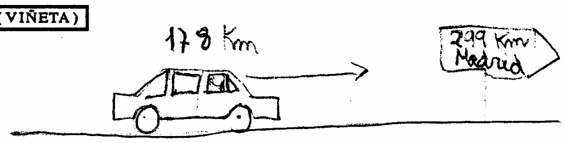
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Una revista vale 830 ptas y una pelota 60 ptas menos la pelota cuesta 770 ptas

ENUNCIADO (HISTORIA)

40

De Cáceres a Madrid hay 299 km. A un coche que haya recorrido 178 km, ¿cuántos km le faltan para llegar a Madrid?

GRAFICO (VIÑETA)



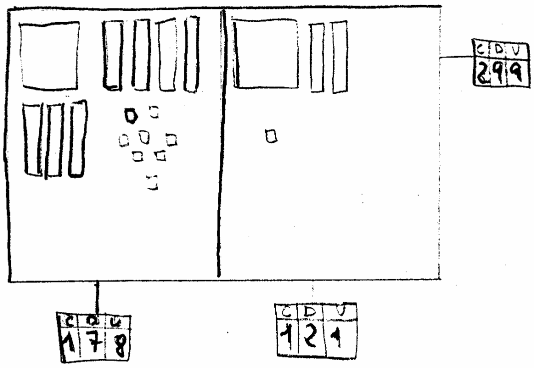
¿QUE DATOS TE DAN?

De Caceres a Madrid hay 299 Km y un coche ha recorrido 178 Km

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantos Km le faltan para llegar a Madrid

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 121 Km

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 299 \\ -\ 178 \\ \hline 121 \end{array}$$

RESULTADO 121 km

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Si

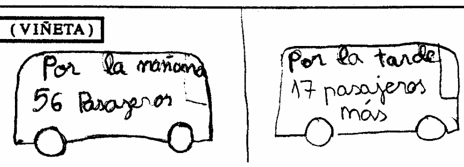
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO De Cáceres a Madrid ... Km. A un coche que haya recorrido 178 Km le faltan ... Km

ENUNCIADO (HISTORIA)

4 1

Una guagua transporta por la mañana 56 pasajeros y por la tarde 17 pasajeros más. ¿Cuántos pasajeros lleva por la tarde?

GRAFICO (VIÑETA)



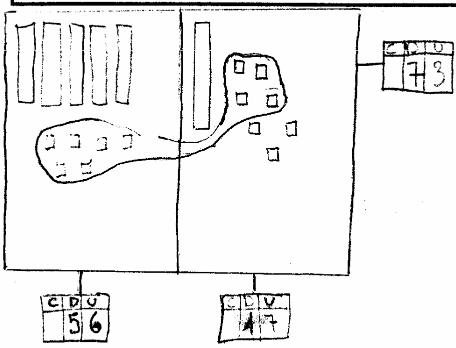
¿QUE DATOS TE DAN?

Una guagua transporta por la mañana 56 p. y por la tarde 17 pasajeros más

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantos pasajeros lleva por la tarde?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 73 pasajeros tarde

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 56 \\ +\ 17 \\ \hline 73 \end{array}$$

RESULTADO 73 pasajeros portarde

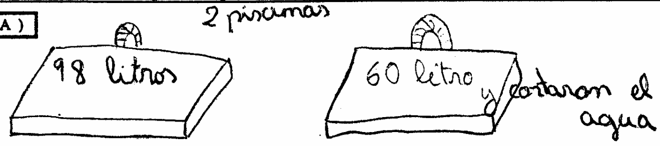
¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Una guagua por la mañana lleva 56 pasajeros y por la tarde 17 pasajeros más que son 73 pasajeros en total

ENUNCIADO (HISTORIA) Se están llenando de agua 2 piscinas. Cuando en la primera habían entrado 98 litros y en la segunda 60 litros, cortaron el agua. ¿Cuántos litros de agua tienen que entrar en la segunda para que ambas tengan la misma cantidad?

4 2

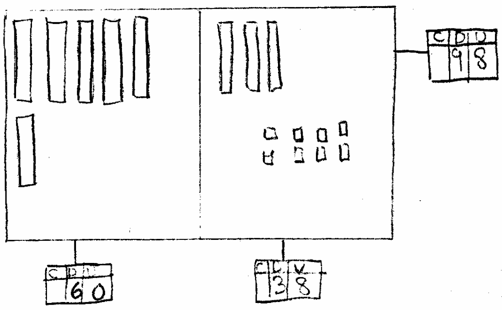
GRAFICO (VIÑETA)



¿QUE DATOS TE DAN?
Dos piscinas se estan llenando en la 1ª 98 litros en la 2ª 60 litros y cortaron el agua.

¿QUE DATO TE PIDEN?
¿Cuantos l. faltan para que los 2 tengan los mismos l.?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 38 litros de agua

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 98 \\ -\ 60 \\ \hline 38 \\ \hline 98 \end{array}$$

RESULTADO 38 litros de agua

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

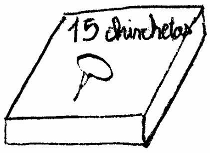
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Se están llenando 2 piscinas, en la 1ª ha entrado 98 l. de agua y en la 2ª 60 l. de agua, le faltan 38 litros para tener igual que la 1ª

ENUNCIADO (HISTORIA)

I13

En una caja caben 15 chinchetas. Calcula las chinchetas que cabrán en 5 cajas.

GRAFICO (VIÑETA)



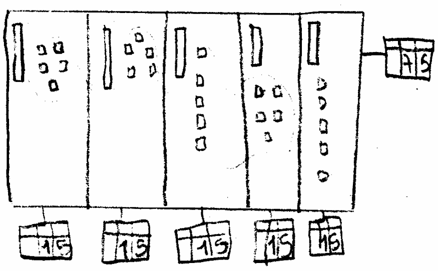
¿QUE DATOS TE DAN?

En una caja caben 15 chinchetas

¿QUE DATO TE PIDEN?

Calcula las chinchetas que cabrán en 5 cajas

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 75 chinchetas

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 5 \\ \hline 75 \end{array}$$

RESULTADO 75 chinchetas

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

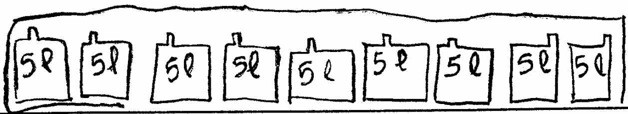
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO En una caja caben 15 chinchetas. En 5 cajas caben 75 chinchetas

ENUNCIADO (HISTORIA)

43

En una caja tenemos 9 garrafas de agua. Cada garrafa contiene 5 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua hay en la caja?

GRAFICO (VIÑETA)



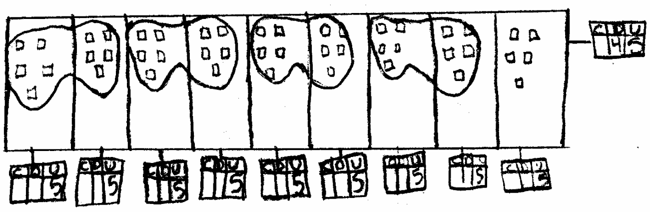
¿QUE DATOS TE DAN?

En una caja hay 9 garrafas de agua En cada garrafa 5 l de agua

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuántos l de agua hay en la caja

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 45 l de agua

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times\ 5 \\ \hline 45 \end{array}$$

RESULTADO 45 l de agua

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO En una caja tenemos 9 garrafas de agua. Cada garrafa contiene 5 l de agua y en la caja hay 45 l de agua

ENUNCIADO (HISTORIA)

4 4

Queremos hacer 14 disfraces de carnaval. Para cada traje necesitamos 3 metros de tela. ¿Cuántos metros de tela necesitaremos en total?

GRAFICO (VIÑETA)

14 disfraces

3 m de tela

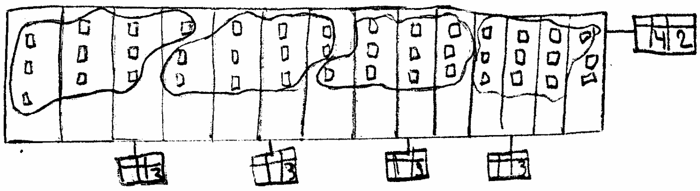
¿QUE DATOS TE DAN?

Queremos hacer 14 disfrases
Para cada traje necesitamos
3 m de tela

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantos m de tela
necesitamos en total?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 42 m de tela

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 3 \\ \hline 42 \end{array}$$

RESULTADO 42 m de tela

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Si

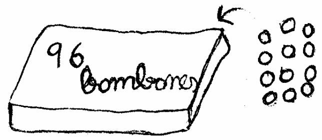
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Queremos hacer 14 disfrases de carnaval. Para cada traje necesitamos 3 m de tela en total 42 m de tela

ENUNCIADO (HISTORIA)

I14

En una pastelería se han envasado 96 bombones. Si meten 12 en cada bolsa, ¿cuántas bolsas se necesitan?

GRAFICO (VIÑETA)



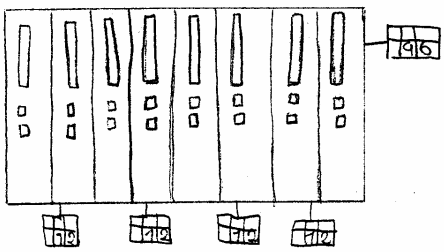
¿QUE DATOS TE DAN?

96 bombones cada bolsa 12 bombones

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuántas bolsas se necesitan?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 8 bolsas

OPERACIONES

$$\begin{array}{r|l} 96 & 12 \\ \hline 00 & 8 \end{array}$$

RESULTADO 8 bolsas

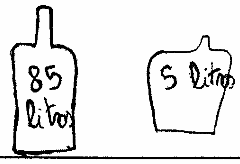
¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO En una pastelería se han envasado 96 bombones. Si meten 12 en cada bolsa necesitamos 8 bolsas

ENUNCIADO (HISTORIA) Tenemos un tonel con 85 litros de agua. ¿Cuántas garrafas de 5 litros podemos llenar?

4 5

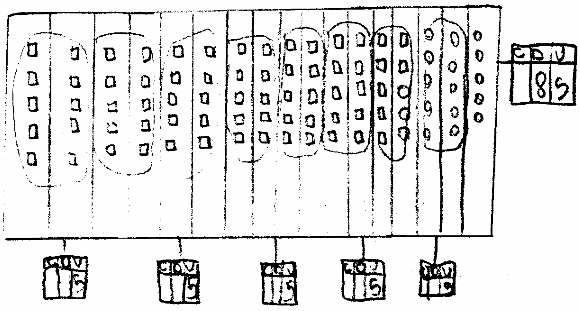
GRAFICO (VIÑETA)



¿QUE DATOS TE DAN? tenemos 85 l de agua

¿QUE DATOS TE PIDEN? ¿Cuantas garrafas de 5 l. podemos llena

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 17 garrafas

OPERACIONES

85 | 5
35 17
0

RESULTADO 17 garrafas

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

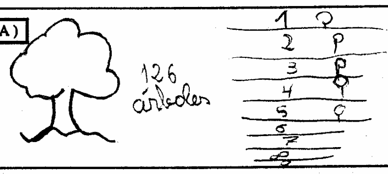
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Tenemos un tonel con 86 l de agua para llenar garrafas de 5 litros necesitamos 17 garrafas

NOMBRE Y APELLIDOS: ____________________ CURSO: ____________

ENUNCIADO (HISTORIA) En un bosque hay 126 árboles plantados en 9 filas. ¿Cuántos árboles hay en cada fila?

I14

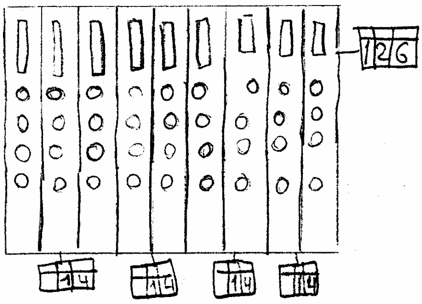
GRAFICO (VIÑETA)



¿QUE DATOS TE DAN?
En un bosque 126 árboles plantados en 9 filas

¿QUE DATOS TE PIDEN?
¿Cuantos arboles hay en cada fila?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 14 arboles

OPERACIONES

$$\begin{array}{r|l} 126 & 9 \\ \hline 36 & 14 \\ 0 & \end{array}$$

RESULTADO 14 arboles

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO En un bosque hay 126 arboles plantados en 9 filas en cada fila 14 arboles

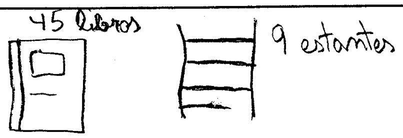
NOMBRE Y APELLIDOS: ______________ CURSO: ______________

ENUNCIADO (HISTORIA)

En la biblioteca hay 45 libros repartidos en 9 estantes. ¿Cuántos libros hay en cada estante?

4 6

GRAFICO (VIÑETA)



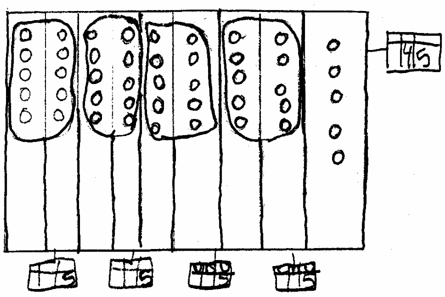
¿QUE DATOS TE DAN?

En la biblioteca hay 45 libros repartidos en 9 estantes

¿QUE DATOS TE PIDEN?

¿Cuantos libros hay en cada estante

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 5 libros en cada

OPERACIONES

45 | 9
0 5

RESULTADO 5 libro en cada

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? SI

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO En la biblioteca hay 45 libros repartidos en 9 estantes a cada estantes le toca 5 libros

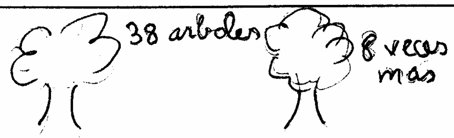
ENUNCIADO (HISTORIA) I15	Juan tiene 40 cromos y Pedro tiene el triple. ¿Cuántos cromos tiene Pedro?
GRAFICO (VIÑETA)	
¿QUE DATOS TE DAN?	¿QUE DATOS TE PIDEN? ....
CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES	RESULTADO ....
OPERACIONES	RESULTADO ....
¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES ?	....
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO	....

ENUNCIADO (HISTORIA)

En un jardín hay 34 árboles y en un campo hay 8 veces más. ¿Cuántos árboles tiene el campo?

4 7

GRAFICO (VIÑETA)



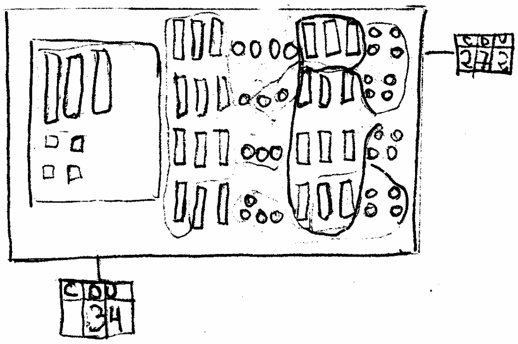
¿QUE DATOS TE DAN?

En un jardín hay 34 arboles y en el campo 8 veces más

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantos arboles tiene el campo?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 272 árboles

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 8 \\ \hline 272 \end{array}$$

RESULTADO 272 árboles

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO En un jardín hay 34 árboles y en el campo hay 272 árboles

ENUNCIADO (HISTORIA) Tengo 28 galletas y mi hermano tiene la mitad que yo. ¿Cuántas galletas tiene ni hermano?

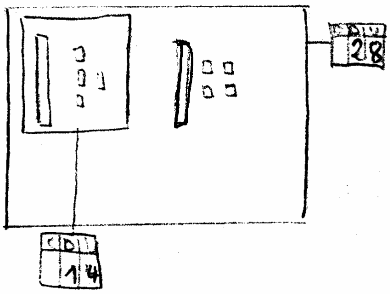
I15

GRAFICO (VIÑETA)

¿QUE DATOS TE DAN? Tengo 28 galletas y mi hermano la mitad

¿QUE DATO TE PIDEN? ¿Cuantas galletas tiene mi hermano?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 14 galletas.

OPERACIONES

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ \hline 08 & 14 \\ 0 & \end{array}$$

RESULTADO 14 galletas.

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? sí

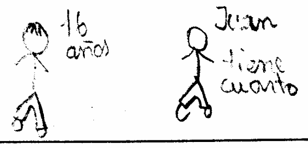
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Tengo 28 galletas y mi hermano tiene la mitad seran 14 galletas

ENUNCIADO (HISTORIA)

Miguel tiene 16 años y Juan tiene un cuarto de los años de Miguel. ¿Cuántos años tiene Juan?

4 8

GRAFICO (VIÑETA)



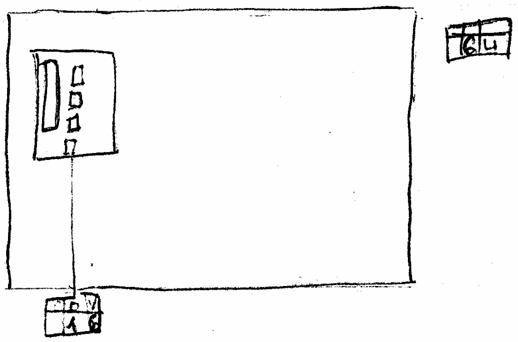
¿QUE DATOS TE DAN?

Miguel 16 años y Juan el cuarto de años

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantos años tiene juan?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 64 años

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 4 \\ \hline 64 \end{array}$$

RESULTADO 64 años

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

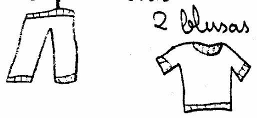
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Miguel tiene 16 años y Juan 64 años

ENUNCIADO (HISTORIA) Julia tiene 3 pantalones y 2 blusas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede vestir?

I16

GRAFICO (VIÑETA)

3 pantalones
2 blusas



¿QUE DATOS TE DAN? Julia tiene 3 pantalones y 2 blusas

¿QUE DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

$3p \rightarrow A, B, C \mid 2\,b: B_1\, B_2$

A — b_1 — 1
A — b_2 — 2
B — b_1 — 3
B — b_2 — 4
C — B_1 — 5
C — B_2 — 6

RESULTADO 6 maneras de vestido

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times\, 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

RESULTADO 6 maneras de vestir

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Julia tiene 3 pantalones y 2 blusas se ha vestido de 6 maneras

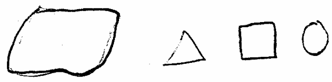
ENUNCIADO (HISTORIA)

4 9

Con cartulinas de 5 colores ¿cuántas fichas puedes hacer dibujando un triángulo, un cuadrado y un círculo de cada color?

GRAFICO (VIÑETA)

5 colores



¿QUE DATOS TE DAN?

Con cartilinas de 5 colores.

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantas fichas puedo hacer

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

Colores 5 A, B, C, D, E. Ficha: □ △ ○

A △ - 1
B △ - 2
C △ - 3
D △ - 4
E △ - 5
A □ - 6
B □ - 7
C □ - 8
D □ - 9
E □ - 10
A ○ - 11
B ○ - 12
C ○ - 13
D ○ - 14
E ○ - 15

RESULTADO 15 fichas

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 5 \\ \hline 15 \end{array}$$

RESULTADO 15 fichas

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Con cartulinas de 5 colores hemos hecho 5 cuadrados, 5 circulos y 5 triangulos en 15 fichas

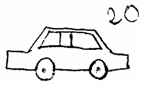
ENUNCIADO (HISTORIA)

I16

Una fábrica de juguetes fabrica 20 modelos de coches diferentes según el color y la forma. Si los hace en 5 colores, ¿cuántas formas distintas utiliza?

GRAFICO (VIÑETA)

20 modelos



¿QUE DATOS TE DAN?

Un fabrica de juguetes fabrica
20 modelos con cada 5 colores

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantas formas distintas utiliza?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

Colores: 5 ABCDE

formas 4

1 A
2 B
3 C
4 D
5 E
— 1

6 A
7 D
8 C
9 D
10 E
— 2

11 A
12 B
13 C
14 D
15 E
— 3

16 A
17 B
18 C
19 D
20 E
— 4

RESULTADO 4 formas

OPERACIONES

$$20 \,\underline{|\,5\,}$$
$$0 \quad 4$$

RESULTADO 4 formas

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

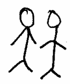
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Una fabrica hace 20 modelos diferentes de coche de 5 colores y utiliza 4 formas.

ENUNCIADO (HISTORIA) En tu clase has formado 20 parejas distintas de baile, cogiendo un niño y una niña. Si hay 4 niñas, ¿cuántos niños hay en la clase?

5 0

GRAFICO (VIÑETA)

20 parejas



niño
y
niña

¿QUE DATOS TE DAN?
En clase han formado 20 parejas cogiendo un niño y una niña

¿QUE DATO TE PIDEN?
¿Cuantos niños hay en la clase?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

1 A
2 B
3 C
4 D 1

5 A
6 B
7 C
8 D 2

9 A
10 B
11 C
12 D 3

13 A
14 B
15 C
16 D 4

17 A
18 B
19 C
20 D 5

RESULTADO 5 niños

OPERACIONES

20 | 4
0 5

RESULTADO 5 niños

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

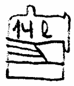
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO En una clase has formado 20 parejas de niños y niñas son 4 niñas y 5 niños.

ENUNCIADO (HISTORIA)

5 1

Para ir a Los Cristianos mi madre gasta 14 litros de gasolina. Si va 6 veces en el mes, ¿cuántos litros de gasolina gasta?

GRAFICO (VIÑETA)



Si va 6 veces en el mes

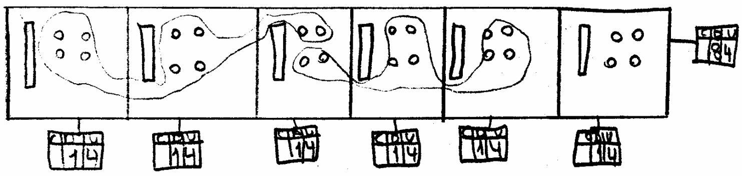
¿QUE DATOS TE DAN?

Para ir a los cristianos gasta 14 l. Si va 6 veces en el mes

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantos l. de gasolina gasta?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 84 l. de gasolina

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 6 \\ \hline 84 \end{array}$$

RESULTADO 84 l. de gasoliona

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Para ir de los Cristianos mi madre gasta 14 l. de gasolina. Si va 6 veces en el mes gastara 84 l. de gasolina

ENUNCIADO (HISTORIA) Si tienes 3 pantalones distintos de fútbol y 4 camisas también diferentes, ¿cuántos equipajes diferentes puedes formar?

5 3

GRAFICO (VIÑETA) 4 camisas 3 pantalones

¿QUE DATOS TE DAN?
Si tienen 3 pantalones distintos de futbol y 4 camisas

¿QUE DATO TE PIDEN?
¿Cuantos equipajes diferentes puedes formar

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

4 camisas: A, B, C, D 3 pantalones: p1 p2 p3

A < p1 – 1, p2 – 2, p3 – 3
B < p1 – 4, p2 – 5, p3 – 6
C < p1 – 7, p2 – 8, p3 – 9
D < p1 – 10, p2 – 11, p3 – 12

RESULTADO 12 equipajes

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 3 \\ \hline 12 \end{array}$$

RESULTADO 12 equipajes

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

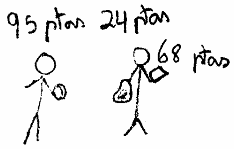
ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Si tiene 3 pantalones y 4 camisas se pueden formar con 12 equipajes

ENUNCIADO (HISTORIA)

I19

Tenía 95 pesetas. Compré una postal de 68 pesetas y 24 pesetas de caramelos. ¿Cuántas pesetas me sobraron?

GRAFICO (VIÑETA)



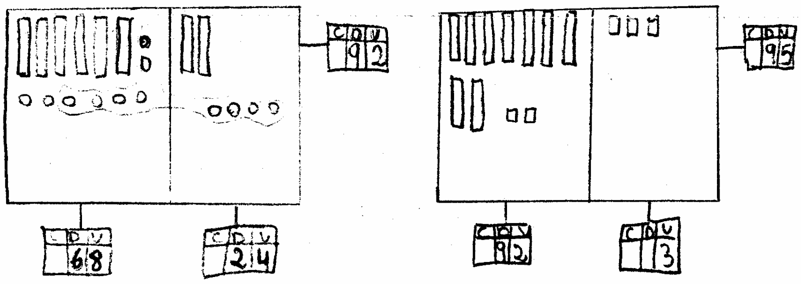
¿QUE DATOS TE DAN?

Tenía 95 ptas. compré una postal de 68 ptas y 24 ptas de caramelo

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantas ptas me sobraron?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 3 pest.

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 68 \\ +24 \\ \hline 92 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 95 \\ -92 \\ \hline 03 \end{array}$$

RESULTADO 3 ptas

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

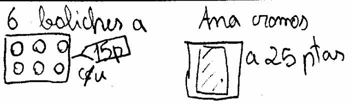
Tenía 95 ptas me compré una postal de 68 pesetas y 24 ptas de caramelos me sobró 3 ptas

ENUNCIADO (HISTORIA)

5 7

Juan compró 6 boliches a 15 pesetas cada uno y Ana compró 1 paquete de cromos de 25 pesetas. ¿Cuánto dinero más gastó Juan que Ana?

GRAFICO (VIÑETA)



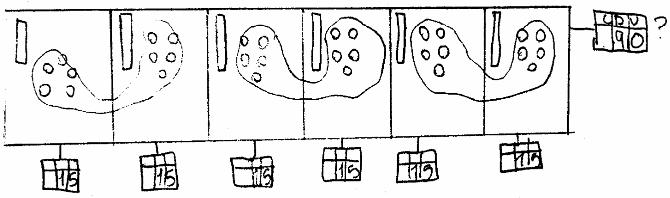
¿QUE DATOS TE DAN?

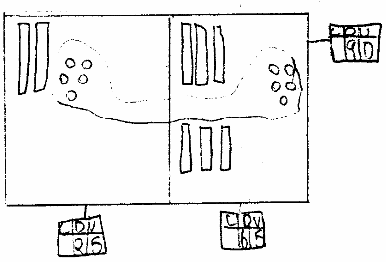
Juan compró 6 boliches a 15 ptas c/u. Ana compró 1 paquete de cromos a 25 ptas

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuánto dinero más gastó Juan que Ana?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES





RESULTADO 65 ptas más

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 6 \\ \hline 90 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 90 \\ -25 \\ \hline 65 \end{array}$$

RESULTADO 65 ptas más

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

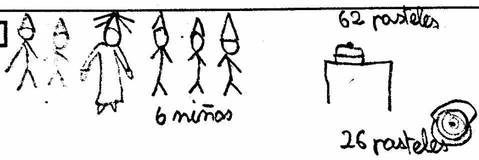
Juan compró 6 boliches a 15 ptas y Ana compró 1 paquete de cromos de 25 ptas. Juan gastó 65 ptas más que Ana.

ENUNCIADO (HISTORIA)

5 9

En el cumpleaños de Julia hay 6 niños. Su Padre pone en la mesa 62 pasteles. Si sobraron 26 pasteles, ¿cuántos pasteles se comió cada niño?

GRAFICO (VIÑETA)



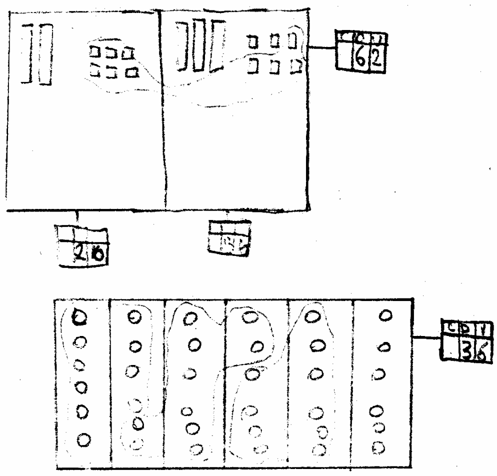
¿QUE DATOS TE DAN?

En el cumpleaños de Julia hay 6 niños. el padre pone 62 pasteles Si sobraron 26 pasteles

¿QUE DATO TE PIDEN?

¿Cuantos pasteles se comió c/u de los niños

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 6 pasteles c/u

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 62 \\ -26 \\ \hline 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 6 \\ \hline 0 & 6 \end{array}$$

RESULTADO 6 pasteles c/u

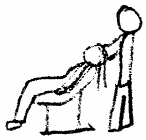
¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO En el cumpleaños de Julia hay 6 niños Su padre pone 62 pasteles. Si sobraron 26 pasteles cada niño se comió 6

ENUNCIADO (HISTORIA) Hoy el barbero ha tenido 7 clientes cada uno de ellos ha pagado 75 ptas ¿Cuanto dinero consiguió el barbero ?

61

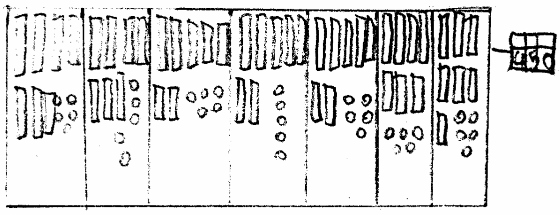
GRAFICO (VIÑETA)



¿QUE DATOS TE DAN?
Hoy el barbero ha tenido 7 clientes cu de ellos ha pagado 310 pta

¿QUE DATO TE PIDEN?
¿Cuanto dinero consigui-ó el barbero?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 450 dinero

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 6 \\ \hline 450 \end{array}$$

RESULTADO 450 dinero

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Hoy el barbero ha tenido 7 clientes y u 75 ptas el barbero ha conseguido 450 ptas

5.3 OTROS MATERIALES: FICHAS DE LAS ENTREVISTAS DE DOS ALUMNOS (GRUPO PILOTO Y GRUPO DEFINITIVO)

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA) Luis tiene 321 ptas y María 119 ptas. ¿Cuántas pesetas tiene Luis más que María?

1

GRAFICO (VIÑETA)

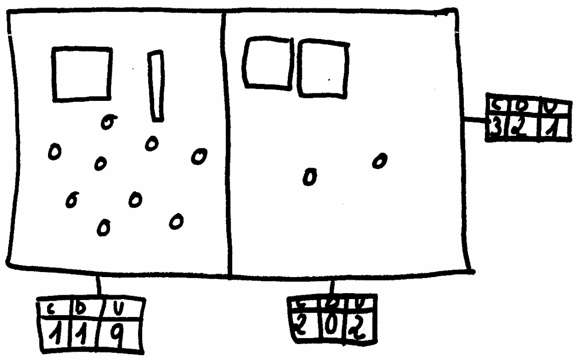
Luis 321 pts

María 119 pts

¿QUE DATOS TE DAN?
Luis: 321 pts
María: 119 pts

¿QUE DATO TE PIDEN?
¿Cuántas pts, tiene Luis más que María?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 202 pts más

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 321 \\ -\ 119 \\ \hline +\ 202 \\ \hline 321 \end{array}$$

RESULTADO 202 pts más

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Luis tiene 321 pts y María 119 pts, o lo que es lo mismo, Mary Luis tiene 202 pts más que María.

2. Un vendedor de periódicos tenía en su kiosco 500 periódicos. Si a lo largo de la mañana ha vendido 245 ¿cuántos le quedan.

Datos

500 periódicos.

Ha vendido: 245

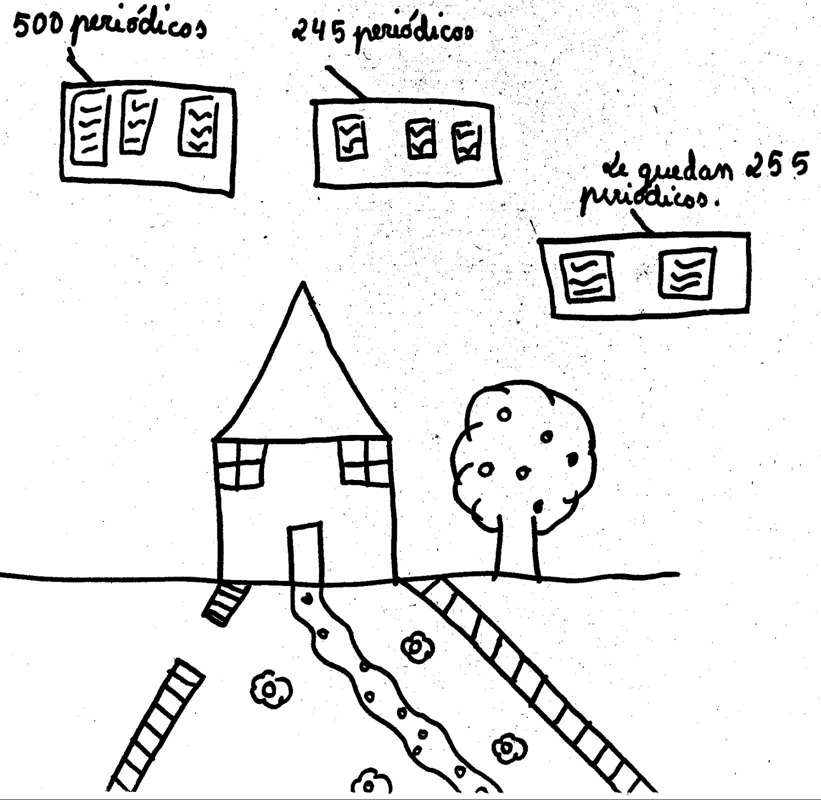
Desarrollo

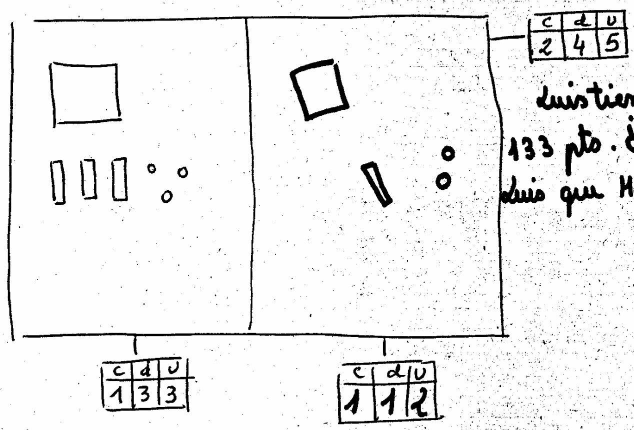
500 - 245 = 500

Operaciones

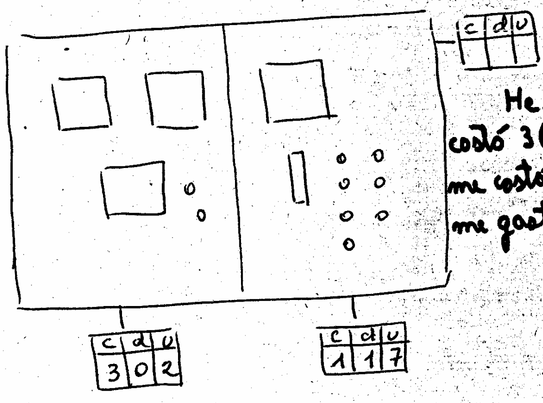
$$\begin{array}{r} 500 \\ -\ 245 \\ \hline +\ 255 \\ \hline 500 \end{array}$$

Solución: le quedan 255 periódicos.





Luis tiene 245 pts y Mart
133 pts. ¿Cuántas pts tiene m
Luis que Marta?



He comprado un libro que m
costó 302 pts y un lapicero que
me costó 117 pts. ¿Cuánto dinero
me gasté?

Palabras que aparecen en los problemas de sumar:

Palabras que aparecen en los problemas de restar:

3. 6 atletas van a participar en una carrera de relevos de 636 metros, corriendo cada uno la misma distancia. ¿Cuántos metros corre cada uno?

Datos	Desarrollo	Operaciones
6 atletas.	636 : 6 = 106 m.	636 | 6
636 m.		03 106 m.
		36
		0

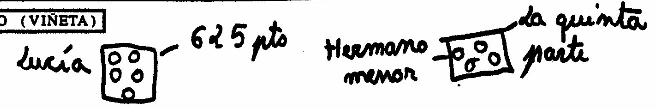
S: Cada atleta corre 106 m.

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________ CURSO: __________

ENUNCIADO (HISTORIA) Lucía ha ahorrado 625 ptas y su hermano menor la quinta parte. ¿Cuántas pesetas tiene su hermano?

4

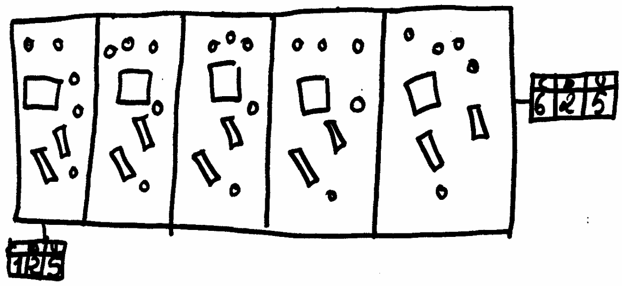
GRAFICO (VIÑETA)



¿QUE DATOS TE DAN?
Lucía: 625 pts.
Su hermano: Tiene la quinta parte.

¿QUE DATO TE PIDEN?
¿Cuántas pts tiene su hermano?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO 125 pts

OPERACIONES

625 | 5
12   125
25
0

RESULTADO 125 pts.

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? Sí

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO Lucía ha ahorrado 625 pts y su hermano menor la quinta parte, o lo que es lo mismo, su hermano ha ahorrado 125 pts.

NOMBRE Y APELLIDOS: ______________ CURSO: ______

ENUNCIADO (HISTORIA)

5

Un señor recorre en su coche por la mañana 120 km y por la tarde 62 Km. Si gasta 6 pesetas por Km ¿cuánto gasta en un día?

GRAFICO (VIÑETA)

¿QUE DATOS TE DAN?

¿QUE DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

RESULTADO

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 120 \\ +\ 62 \\ \hline 182 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 182 \\ \times\ 6 \\ \hline 1.092 \end{array}$$

RESULTADO 1.092 pts

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

Un señor recorre en su choche por la mañana 120 Km y por la tarde 62 Km. Si gasta 6 ptas por Km, en un día se gasta 1.092 pts.

6 En la clase hay 24 niños. Si compramos 275 globos para repartirlos y nos sobraron 35 globos ¿cuántos cogió cada niño?

Datos	Desarrollo	Operaciones
24 niños.	~~275 : 24~~ =	~~275 | 24~~
275 globos.	275 - 35 =	035 11
Sobraron 35.	240 : 24 =	

275
\- 35
240

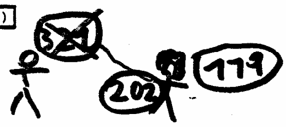
240 | 24
000 10
00

S: A cada uno se les dio 10 globos.

ENUNCIADO (HISTORIA)

1. Luis tiene 321 pesetas y María 119 pesetas. ¿Cuántas pesetas tiene Luis más que María?

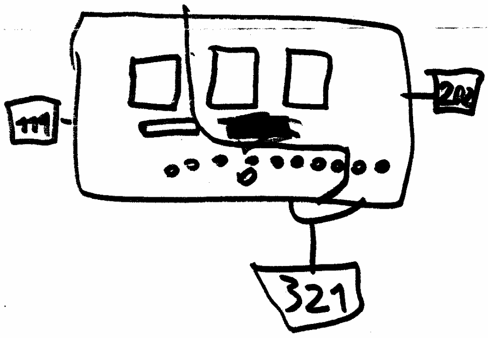
GRAFICO (VIÑETA)



¿QUE DATOS TE DAN?

¿QUE DATOS TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO

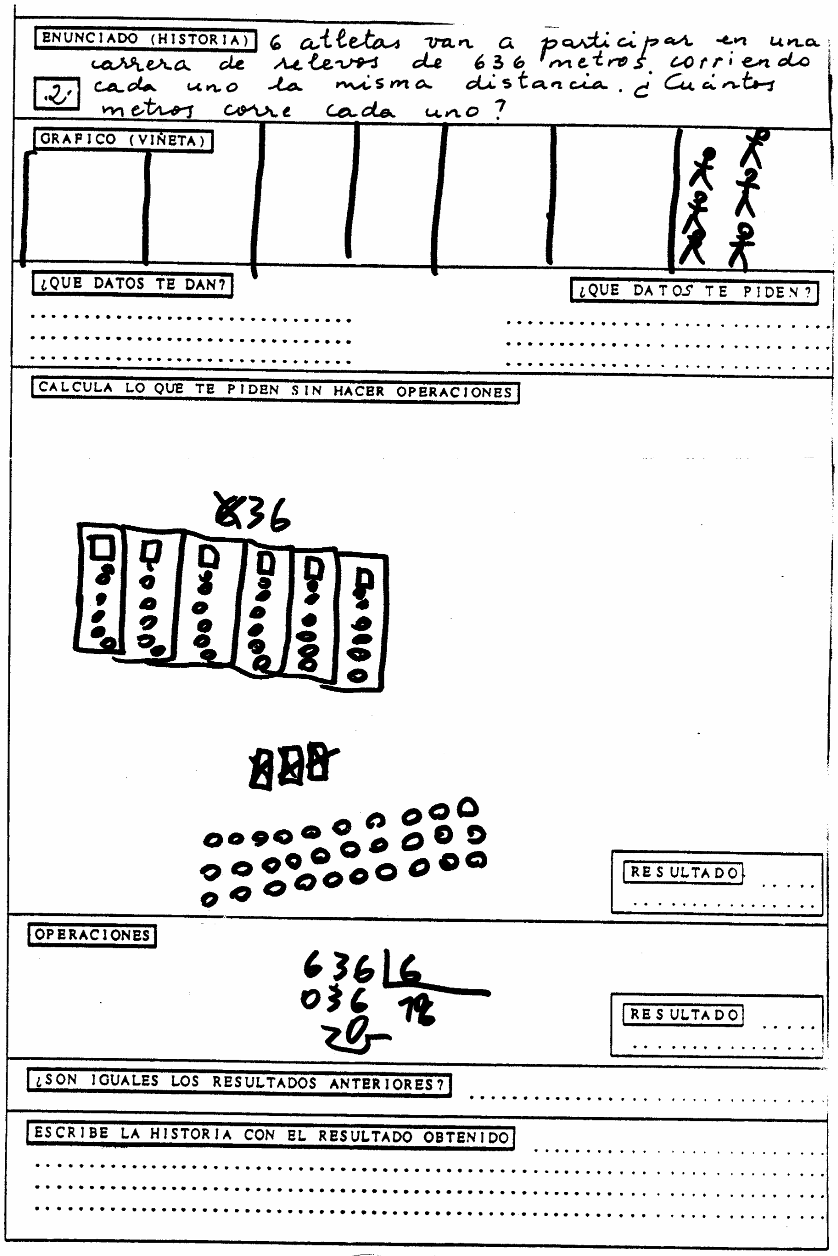
OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 321 \\ -119 \\ \hline 202 \end{array}$$

RESULTADO

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO



ENUNCIADO (HISTORIA) 6 atletas van a participar en una carrera de relevos de 636 metros corriendo cada uno la misma distancia. ¿Cuántos metros corre cada uno?

2

GRAFICO (VIÑETA)

¿QUE DATOS TE DAN?

¿QUE DATOS TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

~~6~~36

RESULTADO

OPERACIONES

636 | 6

036   12

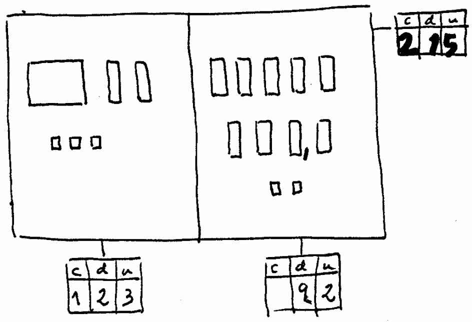
20

RESULTADO

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

Aquí tienes un problema representado en un diagrama :



Inventa un enunciado para él.

JUAN tiene 215 ptas y Savi tiene 92 pta ¿Cuantas pesetas nesesita JAvi para Tener el mismo dinero que JUAN?

$$\begin{array}{r} 215 \\ -\ 92 \\ \hline 123 \end{array}$$

C

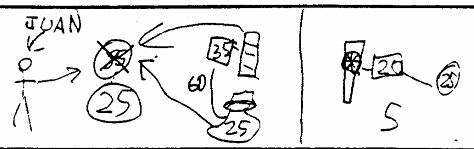
NOMBRE Y APELLIDOS

ENUNCIADO (HISTORIA)

3

Juan tiene 85 pesetas y se ha comprado una chocolatina que le costó 35 pesetas y unos caramelos que le costaron 25 pesetas. ¿Podrá comprarse un pito que le cuesta 20 pesetas?

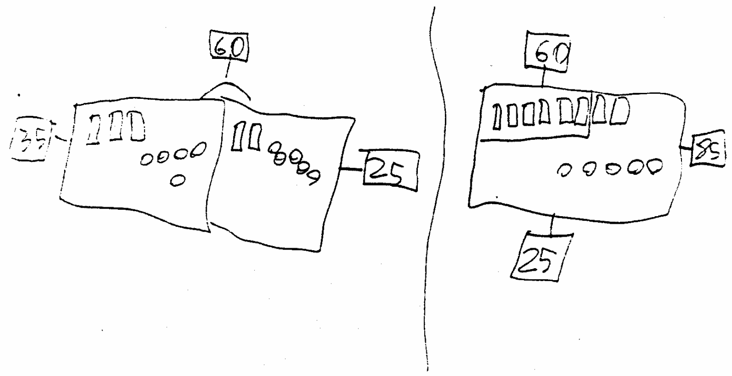
GRAFICO (VIÑETA)



¿QUE DATOS TE DAN?

¿QUE DATO TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO Si
25

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 35 \\ +25 \\ \hline 60 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 85 \\ -60 \\ \hline 25 \end{array}$$

sí ~~NO~~

RESULTADO Si
25

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

ENUNCIADO (HISTORIA)

4·

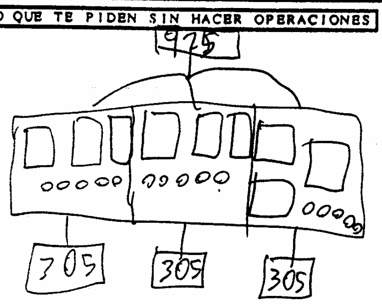
Un colegio tiene 305 alumnos y otro el triple de alumnos.¿Cuántos alumnos tiene el segundo colegio?

GRAFICO (VIÑETA)

¿QUE DATOS TE DAN? ....
....
....

¿QUE DATOS TE PIDEN? ....
....
....

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO ....

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 305 \\ \times\ 3 \\ \hline 915 \end{array}$$

RESULTADO ....

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? ....

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO ....
....
....
....

ENUNCIADO (HISTORIA)

5

Un vendedor de periódicos tenía en su kiosco 500 periódicos. Si a lo largo de la semana ha vendido 245 ¿cuántos le quedan?

GRAFICO (VIÑETA)

¿QUE DATOS TE DAN?

....

....

....

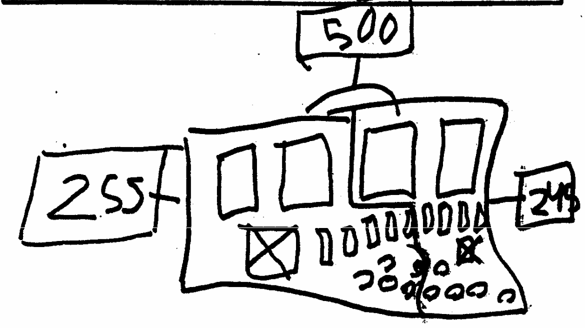
¿QUE DATOS TE PIDEN?

....

....

....

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO ....

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 500 \\ -\ 245 \\ \hline 255 \end{array}$$

RESULTADO ....

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? ....

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO ....

....

NOMBRE Y APELLIDOS:

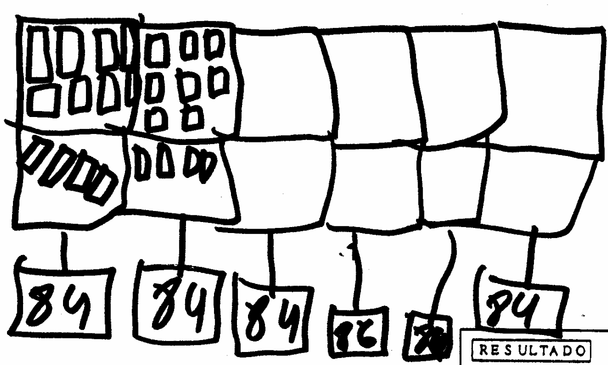
ENUNCIADO (HISTORIA)

GRAFICO (VIÑETA)

¿QUE DATOS TE DAN? ....

¿QUE DATOS TE PIDEN? ....

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO ....

OPERACIONES

$$84 \times 6 = 504$$

$$62 \times 6 = 372$$

$$504 + 372 = 876$$

RESULTADO 876

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? ....

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO ....

ENUNCIADO (HISTORIA)

6

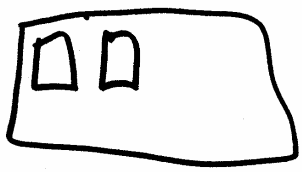
Un señor recorre en su coche por la mañana 84 km y por la tarde 62 km. Si gasta 6 pesetas por cada km que recorre ¿cuánto gasta en un día?

GRAFICO (VIÑETA)

¿QUE DATOS TE DAN?

¿QUE DATOS TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES



RESULTADO

OPERACIONES

RESULTADO

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES?

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

ENUNCIADO (HISTORIA)

7 Lucía ha ahorrado 314 pesetas y su hermano la mitad. ¿Cuántas pesetas tiene ahorradas su hermano?

GRAFICO (VIÑETA)

¿QUE DATOS TE DAN? ....

¿QUE DATOS TE PIDEN? ....

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

314 |2
11 157
14
0

RESULTADO ....

OPERACIONES

RESULTADO ....

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? ....

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO ....
....
....
....

447

ENUNCIADO (HISTORIA)

8· En la clase hay 24 niños. Si compramos 275 globos para repartirlos y nos sobraron 35 globos. ¿Cuántos globos cogió cada uno?

GRAFICO (VIÑETA)

¿QUE DATOS TE DAN? ....

¿QUE DATOS TE PIDEN? ....

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

275 |24
-24 ×11
035 24
24
*24 264
11 11
275

275
\- 35
240 |24
\- 24 10
000

RESULTADO ....

OPERACIONES

RESULTADO ....

¿SON IGUALES LOS RESULTADOS ANTERIORES? ....

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO ....

5.4 OTROS MATERIALES: UNA ENTREVISTA FINAL A UN PROFESOR GRUPO EXPERIMENTAL.

Contesta a las siguientes preguntas.

1. Colegio: Curso: 4º
2. Número de horas semanales que destina a Matemáticas en Clase: 4 y media
3. En caso de utilizar libros de textos para Matemáticas, indica cuáles: -
4. Número de horas semanales que destina a la resolución de Problemas de Matemáticas en Clase: 1
5. ¿Se coordina con otros Profesores en el Área de Matemáticas?

   1. Sí 2. No

6. Personalmente la resolución de problemas de Matemáticas le agrada:

   1. Mucho **2. Bastante** 3. Normal 4. Poco 5. Nada

7. Considera la resolución de problemas para sus alumnos como una parte de las Matemáticas:

   1. Muy importante 2. Importante 3. Poco importante

   ¿Por qué?: *Razonan, aplican conceptos teóricos.*

8. Considera la resolución de problemas para sus alumnos como una parte de las Matemáticas que a ellos:

   1. Les agrada 2. Les es indiferente 3. Les desagrada

   ¿Por qué?: *Generalmente, les agrada, especialmente los que tienen buena comprensión. Sienten satisfacción al resolverlos.*

9. Considera la realización de problemas mediante gráficos y esquemas como una parte de la resolución de problemas que a sus alumnos:

   1. Les agrada **2. Les es indiferente** 3. Les desagrada

   ¿Por qué?: *Lo han ido abandonando quizá al aplicar la ley "del mínimo esfuerzo" para llegar a la meta.*

10. Considera la realización de problemas mediante operaciones como una parte de la resolución de problemas que a sus alumnos:

    1. Les agrada 2. Les es indiferente 3. Les desagrada

    ¿Por qué? *Porque acaban pronto.*

11. Señala algunos aspectos de la resolución de problemas que más agradan a sus alumnos.

Problemas de enunciados cortos y claros.

12. Señala algunos aspectos de la resolución de problemas que menos agradan a sus alumnos.

Problemas confusos, con palabras de uso poco corriente o textos largos.

13. La resolución de problemas aritméticos mediante operaciones debe enseñarse en las clases de matemáticas:

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

14. La resolución de problemas aritméticos mediante el uso de gráficos y esquemas debe enseñarse en las clases de matemáticas:

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

15. El nivel alcanzado por los alumnos en la resolución de problemas aritméticos es un indicador de la comprensión de las operaciones y de los números:

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

16. La resolución de problemas aritméticos mediante el uso de gráficos y esquemas es un indicador de la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en el Problema.

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

17. La resolución de problemas mediante operaciones aritméticas es un indicador de la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en el Problema.

1. De acuerdo 2. En desacuerdo 3. Sin opinión

18. El aprendizaje de las operaciones aritméticas debe preceder a la resolución de problemas aritméticos:

1. De acuerdo **2. En desacuerdo** 3. Sin opinión

Continúa indicando la respuesta que mejor describe el uso que haces de cada uno de los siguientes materiales en la resolución de problemas aritméticos.

19. El libro de texto de los estudiantes:

1. Frecuentemente 2. Ocasionalmente **3. Raramente o no usado**

20. Otros textos publicados:

1. Frecuentemente **2.Ocasionalmente** 3.Raramente o no usado

21. Textos producidos localmente (manuales, libros,..):

1. Frecuentemente **2.Ocasionalmente** 3. Raramente o no usado

22. Fichas individualizadas producidas localmente o comercializadas:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

23. Fichas individualizadas elaboradas personalmente:

1. Frecuentemente 2.Ocasionalmente 3.Raramente o no usado

24. Materiales gráficos comercializados:

1. Frecuentemente **2.Ocasionalmente** 3.Raramente o no usado

25. Materiales manipulativos comercializados:

1. Frecuentemente **2.Ocasionalmente** 3.Raramente o no usado

26. Materiales gráficos elaborados personalmente:

1. Frecuentemente **2.Ocasionalmente** 3.Raramente o no usado

27. Materiales manipulativos elaborados personalmente:

1. Frecuentemente **2.Ocasionalmente** 3.Raramente o no usado

Ahora, pensando tus las Clases de Resolución de Problemas Aritméticos realizadas en los cursos 1993-94 y 94-95, indica la respuesta que mejor corresponde al estilo de enseñanza-aprendizaje que utilizas:

28. Propongo problemas en la pizarra, explicando con cuidado y claridad las reglas utilizadas. Luego, propongo problemas similares a los alumnos, trabajando individualmente las dificultades que surgen:

1. Casi siempre 2. A veces 3. Casi nunca

29. Pido a los alumnos que lean los problemas resueltos que me parecen más adecuados, para que encuentren las reglas y procedimientos que son importantes para resolver los problemas del tema. Si la regla que creen haber descubierto es incorrecta, les explico cómo se hace y les propongo problemas del mismo tipo:

1. Casi siempre **2. A veces** 3. Casi nunca

30. Los alumnos trabajan los problemas en pequeños grupos, mientras ayudo a los que tienen dificultades:

1. Casi siempre **2. A veces** 3. Casi nunca

31. Trabajo la resolución de problemas aritméticos con materiales concretos, con dibujos o gráficos:

1. Casi siempre **2. A veces** 3. Casi nunca

32. Los alumnos trabajan la resolución de problemas en pequeños grupos en los que investigan con materiales concretos o gráficos. Luego hablamos de lo descubierto y

escriben el resumen de lo encontrado:

1. Casi siempre 2. A veces **3. Casi nunca**

33. Otra forma:

Se ha combinado la resolución en grupo (como a veces unos trabajan y otros copian negándose a pensar), con resolución individual.

Te pedimos, por último, que trates de recordar tu actitud y comportamiento en tu clase de problemas durante los cursos 1993-94 y 1994-95:

34. Después de haber desarrollado la experiencia didáctica sobre resolución de problemas en el curso 1992-93 ¿Comentaste con otros compañeros/as o experimentadores sobre los procedimientos de resolución de problemas que habías llevado a cabo:

Con que fin:

Con la compañera del mismo nivel más en profundidad. Con el resto de forma superficial. El objetivo era que conocieran una alternativa para la resolución de problemas. La información fue insuficiente en tiempo y cantidad.

35. Después de haber desarrollado la experiencia didáctica sobre resolución de problemas en el curso 1992-93, seguiste aplicando estos procedimientos de resolución en los cursos siguientes:

1. Sí 2. No **3. A veces**

Si contesta sí, responde a la pregunta 36.
Si contesta no, responde a la pregunta 37.
Si contesta a veces, responde a las preguntas 36 y 37.

36. Si seguiste desarrollando el diseño de resolución de problemas, indica cuales fueron a tu juicio las razones:

37. Si NO seguiste desarrollando el diseño de resolución de problemas, indica cuales fueron a tu juicio las causas:

Se aplicó en el 93-94 (con el nivel 3º). En el curso actual se ha ido abandonando al introducir los problemas de dos operaciones por su complejidad y por entrar en juego otros factores.

38. Sinceramente, ¿crees que de alguna forma te has preocupado más en mejorar la resolución de problemas aritméticos en tus alumnos, como consecuencia de haber realizado la experiencia?:

1. Sí 2. No

Al darse esa posible preocupación, ¿Qué cambios crees que se produjeron en tí?. Contesta a todas las afirmaciones siguientes:

39.Empecé a dedicarle más tiempo a la resolución de problemas aritméticos:

1. Sí 2. No

40. Me preocupé de los alumnos que tenían más dificultades en la resolución de problemas:

1. Sí 2. No

41. Procuré hacer más prácticas o ejercicios de resolución de problemas:

1. Sí 2. No

42. Traté de orientar mejor a los alumnos en la corrección de sus errores:

1. Sí 2. No

43. Di orientaciones generales sobre como tenían que resolver los problemas:

1. Sí 2. No

44. Otras:

No obstante sigo insatisfecho con los resultados que no dependen exclusivamente del método sino de otras cuestiones.

45. Finalmente, si ha habido diferencias en tus clases de Resolución de Problemas en los cursos 1993-94 y 1994-95 coméntalas:

Tengo una clase muy numerosa (27 alumnos más dos que promocionaron durante el curso). Encontrar problemas adecuados a cada edad "madurativa" me ha sido muy difícil: unos se te aburren, mientras otros no entienden. ¿Atender a todas las dificultades? Imposible. De ahí la insatisfacción. Sin embargo, la experiencia ha sido enriquecedora y ya se seguirán buscando alternativas.