Curso 1995/96

CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

EVELIA ROSA GARCÍA BARROSO

Invariants des singularités de courbes planes et courbure des fibres de Milnor

Director

BERNARD TEISSIER

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS

Serie Tesis Doctorales

El hombre atraviesa el presente con los ojos vendados.
Sólo puede intuir y adivinar lo que de verdad está viviendo.
Y después, cuando le quitan la venda de los ojos, puede
mirar al pasado y comprobar qué es lo que ha vivido y
cuál era su sentido.

Milan Kundera
El libro de los amores ridículos

Agradecimientos

La presente memoria ha sido dirigida por Bernard Teissier, sin cuyas enseñanzas y profundos conocimientos no hubiera sido posible realizarla. Quiero expresarle mi inmensa gratitud por todo su apoyo prestado, por su ilusión, su buen humor y su buen hacer, por su paciencia y disponibilidad, y por su pasión por las matemáticas que "contagia" a toda persona a su alrededor. Muchísimas gracias por hacerme partícipe de todo ello.

Quiero agradecer también a mi tutora, Isabel Bermejo, quien no sólo me inició en este mundo de la Geometría Algebraica, sino además confío en mí y en mis posibilidades a la hora de "lanzarme por esos mundos...". Muchísimas gracias.

Mi agradecimiento a todos los miembros del tribunal por aceptar formar parte del mismo, muy especialmente a Julio Castellanos por el apoyo prestado durante la realización de esta memoria, y a Antonio Campillo por haberme invitado a exponer este trabajo, dándome así la oportunidad de clarificarlo.

A Françoise Michel, Rémi Langevin y Robert Moussu, gracias también por sus invitaciones y valiosas aportaciones.

Mi agradecimiento a los miembros del D.M.I., por su cordial acogida y su buen ambiente de trabajo. Agradecimiento especial a los responsables de la biblioteca por su profesionalidad y paciencia para conmigo, a las secretarias por responder amablemente a todas mis dudas y cuestiones burocráticas, en especial a Brigitte Vanelsen por ocuparse de mi alojamiento durante mis estancias en París, y a todos los compañeros que me acogieron en su despacho y tan pacientemente resolvieron mis numerosas dudas de francés, Unix,...

Mi más profunda gratitud a todos los miembros del área de Algebra de La Laguna. A las "chicas de Algebra" :Merce, Marga y Mariví, gracias por su incondicional apoyo, no sólo profesional sino personal, y por hacerme llegar, tanto oralmente como por correo electrónico todo su ánimo y entusiasmo.

No puedo dejar de mencionar a Tana, sin cuyas enseñanzas de la lengua francesa no hubiera sido posible esta memoria.

Un agradecimiento especial a mi familia, que siempre me ha apoyado y comprendido, a pesar de estar lejos del mundo de las matemáticas.

Infinitas gracias a todos mis amigos, por sentirlos tan cerca aun estando lejos y por dedicarme unos minutos diarios para darme ánimos y "conversar" aunque fuera electrónicamente, más aun sabiendo el esfuerzo que para alguno de ellos significaba ponerse delante de las "máquinas infernales"...

No puedo olvidar, en esta página de agradecimientos a todos aquellos que me "acompañaron" y "apoyaron" en este "camino" y que por avatares de la vida no pudieron llegar conmigo hasta el final.

En definitiva, mi más sincero agradecimiento a todas las personas que de una forma u otra han hecho posible esta memoria.

Table des matières

Table de matières **i**

Introducción **iii**

Introduction **vii**

1 Outils et calculs utiles. **1**

1.1 Une branche : équation, développement de Puiseux, semi-groupe. 1

1.2 Multiplicité d'intersection et contact. 9

1.3 Courbes réductibles. 20

1.4 Arbre d'Eggers et graphe de résolution. 26

1.4.1 Définition de l'arbre d'Eggers 26

1.4.2 Le graphe de la résolution. 29

1.4.3 Le graphe dual d'une branche. 32

1.4.4 Le graphe dual de la résolution d'une courbe réduite avec deux branches. 57

1.4.5 Le graphe dual de la résolution d'une courbe avec $r \geq 3$ branches. 86

1.4.6 Comparaison entre l'arbre d'Eggers et le graphe dual de la résolution. 89

2 Calculs de courbes polaires. **105**

2.1 Introduction. 105

2.2 Définition de la courbe polaire. Propriétés d'invariance. 106

2.3 Décomposition naturelle de la courbe polaire. 108

2.3.1 Relation entre le polygone de Newton d'une courbe plane réduite $\mathbf{C}$ et le polygone de Newton de $\mathbf{P}_\tau(\mathbf{C})$. . 108

2.3.2 Les arbres d'Eggers et la courbe polaire. 126

2.4 Enoncé du théorème principal 140
2.5 Exemples. 148

3 Zones de concentration de courbure. 167
3.1 Introduction. 167
3.2 L'application de Gauss. 168
3.3 Calculs préliminaires. 175
3.4 Concentration de courbure. 188

Bibliographie 201

Introducción

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar el comportamiento asintótico cuando $\lambda \to 0$ de la curvatura de la fibra de Milnor $C(\lambda) = f^{-1}(\lambda) \cap \mathbf{B}(0, \epsilon)$ $(|\lambda| << \epsilon << 1)$ asociada a un germen de curva analítica compleja plana $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ de ecuación $f(x, y) = 0$, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, según el esquema iniciado en el caso irreducible por B. Teissier en [Te5] a partir de los trabajos de Langevin ([La1],[La2],[La3]) .

El resultado principal es el siguiente : dado un germen de curva reducida $f(x, y) = 0$, para ϵ suficientemente pequeño y $|\lambda| << \epsilon$, describimos un sistema de bolas

$$\mathbf{B}(\xi_{k,l}^{(i)}(\lambda), |\lambda|^{\rho_i})$$

cuyos radios son de la forma $|\lambda|^{\rho_i}$, con ρ_i números racionales que dependen únicamente de los invariantes topológicos del germen $(C, 0)$, es decir, de los exponentes de Puiseux de las ramas de C en 0 y de los números de intersección dos a dos de estas ramas en el origen. Este sistema de bolas tiene la propiedad siguiente :

$$\lim_{\epsilon, \lambda \to 0, |\lambda| << \epsilon} \left(\int_{C(\lambda) \cap B_\epsilon} |K| dv - \int_{C(\lambda) \cap (\bigcup_{i,k,l,q} B_{k,l,q}^{(i)}(\lambda))} |K| \, dv \right) = 2\pi(\Gamma^{(0)}, C)$$

donde K designa la curvatura de Lipschitz-Killing de la subvariedad $C(\lambda) \subset \mathbb{C}^2$ y donde el segundo miembro también depende de la topología del germen y mide la parte "difusa" de la curvatura de $C(\lambda)$. En el caso irreducible este segundo miembro es nulo.

Este resultado prueba la existencia de una concentración asintótica de esta curvatura en las zonas evanescentes a varias escalas diferentes, escalas que sólo dependen de la topología de $(C, 0)$.

La idea de [Te5] es que esta concentración de la curvatura refleja el contacto con C en 0 de las diferentes componentes irreducibles de la curva polar de

$(C, 0)$, definida por

$$P_\tau(C) \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \tau \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

donde τ parametriza la dirección de proyección a la que está asociada la curva polar. En efecto, si el contacto de una componente irreducible es fuerte, variará poco cuando τ varíe, lo que, casi por definición de curva polar, implica una fuerte curvatura de $C(\lambda)$ en el entorno de sus puntos de intersección con esta componente de la curva polar.

La principal dificultad es pues estimar el contacto con C en 0 de las diferentes componentes de la curva polar. Para ello, utilizamos un diagrama debido a Eggers, que describe el contacto y los exponentes característicos de las diferentes ramas de C en 0, para generalizar un teorema de H.J.S. Smith y M. Merle sobre el contacto con C de las diferentes ramas de la curva polar, completando resultados del propio Eggers. La utilización de este diagrama permite superar las nuevas dificultades que aparecen en el caso reducible, debidas a los diferentes tipos de contacto que tienen entre sí las ramas de la curva, y también a la existencia de componentes "libres" de la curva polar.

Damos a continuación una descripción más precisa del contenido de los diferentes capítulos :

El capítulo I está dedicado a la descripción del diagrama de Eggers y a dar un procedimiento explícito para comparar este diagrama con el grafo de intersección de las componentes del divisor excepcional de una resolución sumergida de la singularidad de $(C, 0)$. De esta forma, obtenemos una correspondencia explícita entre el contacto de una curva con C en 0 y la posición de su transformada estricta por el morfismo $Z \to \mathbb{C}^2$ que resuelve C con respecto a las componentes del divisor excepcional. Esta comparación entre el diagrama de Eggers y el diagrama de resolución no es indispensable para nuestro objetivo, pero nos permite finalmente relacionar la concentración de la curvatura con el grafo de la resolución sumergida de $(C, 0)$, que es un invariante más clásico y sobre todo, más fácil de generalizar.

Es un hecho fundamental de la teoría de singularidades de curvas planas, conocido al menos desde los trabajos de Zariski sobre la equisingularidad, que el grafo de la resolución no depende mas que del tipo topológico de la curva plana, y lo determina. Como además el diagrama de Eggers es una representación gráfica cómoda de los invariantes topológicos mencionados más arriba, el hecho que diagrama de Eggers y grafo de resolución sean

datos equivalentes no es nada nuevo. Hemos querido establecer aquí esta correspondencia de una forma suficientemente algorítmica como para que se pueda esperar sacar de ella un programa de cálculo por ordenador.

El capítulo II introduce las principales propiedades de la curva polar y demuestra el Teorema de descomposición de dicha curva en paquetes de componentes irreducibles según el contacto con las ramas de $(C, 0)$. El primer resultado que conocemos sobre el contacto entre las ramas de una curva polar genérica y las ramas de la curva es obra de H.J.S. Smith ([S]). Un siglo más tarde Merle ([Me]), que desconocía el trabajo de Smith, da en el caso de una rama, un resultado preciso sobre una descomposición en paquetes de las componentes de la curva polar en función del contacto con la curva de partida. Partiendo de motivaciones diferentes, Kuo y Lu estudian en [K-L] el contacto de las raíces de la ecuación $\frac{\partial f}{\partial y} + \tau \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ de una curva polar genérica con las raíces de $f(x, y) = 0$, para una curva reducida cualquiera. Un poco más tarde, Eggers [E] introduce el diagrama que estudiamos en el capítulo I, para definir una descomposición en paquetes de las componentes de una polar genérica, con la idea de reconstruir a partir del contacto de las componentes de esta polar con las ramas de la curva inicial la topología de esta última. Nosotros retomamos aquí, y completamos, una parte de sus cálculos para obtener el teorema de descomposición de la curva polar que necesitamos. Los resultados sobre el contacto de las diferentes ramas de una curva polar general con las ramas de la curva están contenidos en los trabajos de Casas ([Ca1],[Ca2]), y Lê-Michel-Weber ([L-M-W]), pero necesitamos aquí resultados expresados en términos de la variación de los desarrollos de Puiseux de las ramas de la curva polar en función de la dirección de proyección que sirve para definirla. Más concretamente, necesitamos probar que ciertos términos de estos desarrollos de Puiseux son independientes de la dirección de proyección, precisamente porque la rama correspondiente de la curva polar está sujeta a un cierto contacto con una rama de la curva $(C, 0)$.

A partir de la relación ([En],[Za2]) entre los desarrollos de Puiseux de las ramas y los puntos infinitamente próximos por los que ellas pasan, es de esperar que se pueda traducir los resultados dados aquí en términos de los desarrollos de Puiseux al lenguaje de puntos infinitamente próximos, y viceversa. Por ejemplo, el resultado de [L-M-W] es menos preciso que el que se da aquí, mientras que para una rama con un tipo analítico genérico en su clase de equisingularidad, Casas da en [Ca1],[Ca2] una descripción de la topología de la curva polar más precisa que la nuestra. Nuestro resultado de descomposición es sin embargo optimal si no se le añade hipótesis suplementarias, como lo demuestra el ejemplo 2.5.5.

El capítulo III estudia la curvatura de $C(\lambda)$ por medio de la aplicación de Gauss compleja $\gamma\colon C(\lambda) \to \mathbb{P}^1$ y prueba el teorema de concentración enunciado al principio.

Lo esencial del trabajo consiste en describir desarrollos de Puiseux en λ con coeficientes que dependen analíticamente de τ para las coordenadas de los puntos de intersección de la fibra de Milnor $C(\lambda)$ con una componente irreducible de $P_\tau(C)$. Según el contacto con las ramas de C de esta componente, un segmento más o menos largo de estos desarrollos de Puiseux será independiente de τ, y es exactamente en este hecho en el que nos basamos para obtener las zonas de concentración de la curvatura. Un ingrediente importante es el teorema de Langevin que expresa el límite de la curvatura total de la fibra de Milnor :

$$\lim_{\epsilon,\lambda\to 0,|\lambda|<<\epsilon} \int_{C(\lambda)\cap B_\epsilon} |K| dv = 2\pi(\mu^{(2)} + \mu^{(1)}).$$

Introduction

Le but de ce travail est d'étudier le comportement asymptotique lorsque $\lambda \to 0$ de la courbure de la fibre de Milnor $C(\lambda) = f^{-1}(\lambda) \cap \mathbf{B}(0, \epsilon)$ $(|\lambda| << \epsilon << 1)$ associée à un germe de courbe plane analytique complexe $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ d'équation $f(x, y) = 0$, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, selon le schéma initié dans le cas irréductible par B. Teissier dans [Te5] après des travaux de Langevin ([La1],[La2], [La3]).

Le résultat principal est celui-ci : pour un germe de courbe réduite $f(x, y) = 0$, pour ϵ assez petit et $|\lambda| << \epsilon$, nous décrivons un système de boules

$$\mathbf{B}(\xi_{k,l}^{(i)}(\lambda), |\lambda|^{\rho_i})$$

dont les rayons sont de la forme $|\lambda|^{\rho_i}$, où les ρ_i sont des nombres rationnels ne dépendant que des invariants topologiques du germe $(C, 0)$, c'est-à-dire des exposants de Puiseux des branches de C en 0 et des nombres d'intersection deux à deux de ces branches à l'origine. Ce système de boules a la propriété que l'on a une égalité

$$\lim_{\epsilon, \lambda \to 0, |\lambda| << \epsilon} \left(\int_{C(\lambda) \cap B_\epsilon} |K| dv - \int_{C(\lambda) \cap (\bigcup_{i,k,l,q} B_{k,l,q}^{(i)}(\lambda))} |K| \, dv \right) = 2\pi(\Gamma^{(0)}, C)$$

où K désigne la courbure de Lipschitz-Killing de la sous-variété $C(\lambda) \subset \mathbb{C}^2$ et où le second membre ne dépend lui aussi que de la topologie du germe et mesure la portion "diffuse" de la courbure de $C(\lambda)$. Dans le cas irréductible ce second membre est nul.

Ce résultat montre l'existence d'une concentration asymptotique de cette courbure dans des zones évanescentes à plusieurs échelles différentes, ces échelles ne dépendant que de la topologie de $(C, 0)$.

L'idée de [Te5] est que cette concentration de courbure reflète le contact avec C en 0 des différentes composantes irréductibles de la courbe polaire de

$(C, 0)$, définie par

$$P_\tau(C) \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \tau \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

où τ paramètre la direction de projection à laquelle est associée la courbe polaire. En effet si le contact d'une composante irréductible est fort, elle variera lentement en fonction de τ, et ceci, presque par définition de la courbe polaire, impliquera une forte courbure de $C(\lambda)$ au voisinage de ses points d'intersection avec cette composante de la courbe polaire.

La principale difficulté est donc d'estimer le contact avec C en 0 des différentes composantes de la courbe polaire. Pour cela, nous utilisons un diagramme dû à Eggers, qui décrit le contact et les exposants caractéristiques des différentes branches de C en 0, pour généraliser un théorème de H.J.S. Smith et M. Merle sur le contact avec C des différentes branches de la courbe polaire, complétant des résultats d'Eggers lui-même. L'utilisation de ce diagramme permet de surmonter les difficultés nouvelles qui apparaissent dans le cas réductible, dues aux différents types de contact qu'ont entre elles les branches de la courbe, et aussi à l'existence de composantes "libres" de la courbe polaire.

Voici une description plus précise du contenu des différents chapitres :

Le Chapitre I est consacré à la description du diagramme d'Eggers et à une procédure explicite de comparaison entre ce diagramme et le graphe d'intersection des composantes du diviseur exceptionnel d'une résolution plongée de la singularité de $(C, 0)$. Nous obtenons ainsi une correspondance explicite entre le contact d'une courbe avec C en 0 et la position de sa transformée stricte par le morphisme $Z \to \mathbb{C}^2$ résolvant C par rapport aux composantes du diviseur exceptionnel. Cette comparaison entre le diagramme d'Eggers et le diagramme de résolution n'est pas indispensable pour notre but mais permet de relier finalement la concentration de courbure au graphe de résolution plongée de $(C, 0)$, qui est un invariant plus classique et surtout plus facile à généraliser.

C'est un fait fondamental de la théorie des singularités des courbes planes, connu au moins depuis les travaux de Zariski sur l'équisingularité, que le graphe de la résolution ne depend que du type topologique de la courbe plane, et le détermine. Comme par ailleurs le diagramme d'Eggers est une répresentation graphique commode des invariants topologiques mentionnés plus haut, le fait que diagramme d'Eggers et graphe de résolution soient des données équivalentes est loin d'être nouveau. Nous avons voulu ici établir

cette correspondance sous une forme suffisamment algorithmique pour que l'on puisse espérer en tirer un programme de calcul pour ordinateur.

Le Chapitre II introduit les principales propriétés de la courbe polaire et démontre le Théorème de décomposition de la courbe polaire en paquets de composantes irréductibles selon le contact avec les branches de $(C, 0)$. Le premier résultat sur le contact entre les branches d'une courbe polaire générique et les branches de la courbe semble dû à H.J.S. Smith ([S]). Un siècle plus tard Merle ([Me]), qui ignorait le travail de Smith, donne dans le cas d'une branche un résultat précis sur une décomposition en paquets des branches de la polaire selon leur contact avec la courbe. Avec des motivations différentes, Kuo et Lu étudient dans [K-L] le contact des racines de l'équation $\frac{\partial f}{\partial y} + \tau \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ d'une polaire générique avec les racines de $f(x, y) = 0$, dans le cas d'une courbe réduite quelconque. Un peu plus tard, Eggers [E] introduit le diagramme que nous étudions au chapitre I, pour définir une décomposition en paquets des composantes d'une polaire générique, dans le but de reconstruire à partir du contact avec les branches de la courbe des composantes de cette polaire la topologie de la courbe. Nous reprenons ici, et complétons, une partie de ses calculs pour obtenir le théorème de décomposition de la courbe polaire dont nous avons besoin. Des résultats sur le contact des différentes branches d'une courbe polaire générale avec les branches de la courbe sont déjà contenus dans les travaux de Casas ([Ca1],[Ca2]), et de Lê-Michel-Weber ([L-M-W]), mais nous avons besoin ici de résultats exprimés en termes de la variation des développements de Puiseux des branches de la courbe polaire en fonction de la direction de la projection qui sert à la définir. Plus précisément, nous avons besoin de prouver que certains termes de ces développements de Puiseux sont <u>indépendants</u> de la direction de projection, précisément parce que la branche correspondante de la courbe polaire est astreinte à un certain contact avec une branche de la courbe $(C, 0)$.

D'après la relation ([En],[Za2]) entre les développements de Puiseux des branches et les points infiniment voisins par lesquels elles passent, on s'attend à pouvoir traduire les résultats donnes ici en termes de développements de Puiseux dans le langage des point infiniment voisines, et vice-versa. Par exemple, le résultat de [L-M-W] est moins précis que celui qui est donné ici, tandis pour une branche d'un type analytique générique dans sa classe d'équisingularité, Casas donne dans [Ca1],[Ca2] une description bien plus précise que la nôtre de la topologie de la courbe polaire. Notre résultat de décomposition est cependant optimal si l'on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire, comme le montre l'exemple 2.5.5.

Le Chapitre III étudie la courbure de $C(\lambda)$ au moyen de l'application de

Gauss complexe $\gamma\colon C(\lambda) \to \mathbb{P}^1$ et prouve le théorème de concentration énoncé au début.

L'essentiel du travail est de décrire des développements de Puiseux en λ avec des coefficients dépendant analytiquement de τ pour les coordonnées des points d'intersection de la fibre de Milnor $C(\lambda)$ avec une composante irréductible de $P_\tau(C)$. Selon le contact avec les branches de C de cette composante, un segment initial plus ou moins long de ces développements de Puiseux sera indépendant de τ , et c'est de cela que l'on tire les zones de concentration de courbure. Un ingrédient important est le théorème de Langevin exprimant la limite de la courbure totale de la fibre de Milnor

$$\lim_{\epsilon,\lambda\to 0,|\lambda|<<\epsilon} \int_{C(\lambda)\cap B_\epsilon} |K| dv = 2\pi(\mu^{(2)} + \mu^{(1)}).$$

Chapitre 1

Outils et calculs utiles.

1.1 Une branche : équation, développement de Puiseux, semi-groupe.

Soit $\mathbb{C}\{x,y\}$ l'anneau des séries complexes convergentes à deux indeterminées et soit $f(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$ telle que $f(0,0) = 0$. Alors, $C \equiv f(x,y) = 0$ définit un germe de courbe plane (non nécessairement réduit) en l'origine de $\mathbb{C}^2$ d'équation $f(x,y) = 0$. L'anneau $\mathcal{O}_{C,0} = \mathbb{C}\{x,y\}/(f)$ est appelé anneau local de C .

Comme il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $f(x,y) = x^r g(x,y)$ où $g(0,y) \not\equiv 0$ on pourra d'ailleurs supposer $f(0,y) \not\equiv 0$ après un changement des coordonnées. On réduit donc à l'étude des zéros de f telle que $f(0,0) = 0$ et $f(0,y) \not\equiv 0$.

Théorème 1.1.1 (de préparation de Weierstrass) *Soit* $f(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$ *telle que* $f(0,y) \not\equiv 0$ *et* $\mathrm{ord}_y(f(0,y)) = n$ *. Alors il existe une unité* $u(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$ *et des éléments* $a_i(x)$ *dans l'ideal maximal de* $\mathbb{C}\{x\}$ *tels que*

$$f(x,y) = u(x,y)[y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)]$$

De plus $u(x,y)$ *et* $\{a_i(x)\}_{i=1}^n$ *sont uniques.*

∎

Le polynôme $y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$ est appelé *polynôme de Weierstrass* associé à $f(x,y)$. La condition $f(0,y) \not\equiv 0$ revient à supposer que l'axe des y ne fait pas partie du lieu des zéros du germe C .

Comme $u(x,y)$ est une unité elle ne s'annule pas au voisinage de l'origine. Ainsi pour étudier les zéros de $f(x,y)$ (c'est- à-dire C) on peut remplacer $f(x,y)$ par son polynôme de Weierstrass associé.

Définition 1.1.1 *Soit C un germe de courbe quelconque d'équation $f(x,y)=0$ et soit $f(x,y)=f_n(x,y)+f_{n+1}(x,y)+\cdots$ sa décomposition en composantes homogènes. On appelle cône tangent de C à $f_n(x,y)=0$.*

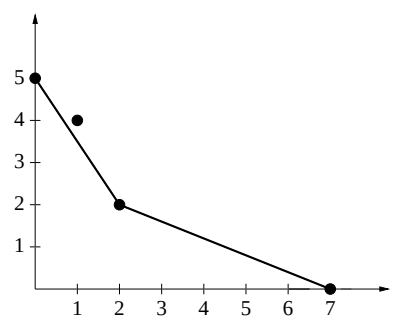
Pour tout système de coordonées (x,y) tel que $x=0$ n'appartient pas au cône tangent de C, l'entier n est appelé la *multiplicité à l'origine* de C , $m(C)=n$. Si $m(C)\geq 2$ on dira que C est singulière, en cas contraire ($m(C)=1$) on dira que C est lisse où régulière.

Définition 1.1.2 *Soit $f(x,y)=\sum_i a_i(x)y^i \in \mathbb{C}\{x\}[y]$. On appelle diagramme de Newton de f à l'ensemble*

$$D(f)=\{(\mathrm{ord}_x(a_i(x),i)\ :\ a_i(x)\neq 0\}$$

Le bord de l'enveloppe convexe de $D(f)+\mathbb{R}_+^2$ est un polygone convexe $\mathcal{N}(f)$, appelé polygone de Newton de f .

Exemple 1.1.1 *Soit $f(x,y)=y^5+(4x^3+2x)y^4+3x^2y^2-6x^7$ donc $D(f)=\{(0,5),(1,4),(2,2),(7,0)\}$ et son polygone de Newton est*



Théorème 1.1.2 (de Newton) *Soit $f(x,y)\in\mathbb{C}\{x,y\}$ telle que $f(0,0)=0$ et $f(0,y)\not\equiv 0$. Il existe $\varphi\in\overline{\mathbb{C}\{x\}}=\bigcup_{\mathbb{N}-\{0\}}\mathbb{C}\{x^{1/n}\}$, $\varphi(0)=0$, telle que $f(x,\varphi)=0$.*

■

L'élement φ est appelé *racine* de $f(x,y)$.

Comme $\mathbb{C}\{x,y\}$ est un anneau factoriel, la série $f(x,y)$ se décompose en un produit $u\prod_i f_i(x,y)^{\sigma_i}$ où $\sigma_i \in \mathbb{N}$, $u(x,y)$ est une unité de $\mathbb{C}\{x,y\}$ et les $f_i(x,y)$ sont irréductibles tels que $f_i(x,y) \neq f_j(x,y)$ si $i \neq j$.

Par définition $C \equiv f(x,y) = 0$ est réduite si les σ_i sont égaux à 1.

Si $r = 1$ on dira que C est irréductible. Une branche est une courbe irréductible et réduite.

Par définition les $C_j \equiv f_j(x,y) = 0$ sont les branches du germe de courbe plane $f(x,y) = 0$.

Maintenant on va étudier les propriétés d'une branche.

Proposition 1.1.1 (Puiseux) *Soit $C \equiv f(x,y) = 0$ une branche telle que $m(C) = n$. Les racines $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de $f(x,y)$ dans $\overline{\mathbb{C}\{\{x\}\}}$ sont toutes distinctes et se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par l'action du groupe des racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.*

■

Par définition une racine de $f(x,y)$ dans $\overline{\mathbb{C}\{\{x\}\}}$ s'appelle un *développement de Puiseux de la branche C .*

Ainsi si $\varphi(x^{1/n}) = \sum_{i\geq n} a_i x^{i/n}$ est un développement de Puiseux de la branche C et ω est une racine n-ème primitive de l'unité alors

$$\varphi(\omega^j x^{1/n}) = \sum_{i\geq n} a_i \omega^{ji} x^{i/n}$$

où $j \in \{1, \ldots, n\}$, sont tous les développements de Puiseux de C .

D'après la proposition ci-dessus on peut écrire

$$f(x,y) = \prod_{j=1}^{n} (y - \varphi(\omega^j x^{1/n}))$$

Si l'on pose $x = t^n$ les développements de Puiseux de C s'expriment comme des séries entières en t paramétrisant la courbe C de la façon suivante :

$$\begin{cases} x = t^n \\ y = \sum_{i \geq n} a_i t^i \end{cases}$$

A partir de maintenant on va supposer que nous sommes dans le cas transverse, c'est-à-dire, $x = 0$ n'est pas tangente à la courbe.

Définition 1.1.3 *Soit* C *une branche et*

$$\begin{cases} x = t^n \\ y = \sum_{i \geq n} a_i t^i \end{cases}$$

un développement de Puiseux de C *. On appelle exposants caractéristiques de* C *la suite* $\{\beta_0, \ldots, \beta_g\} \subseteq \mathbb{N}$ *telle que*
• $\beta_0 = m(C) = n$ *est la multiplicité à l'origine de* C *.*
• β_1 *est le plus petit entier positif tel que* $a_{\beta_1} \neq 0$ *et* $\beta_1 \not\equiv 0 \pmod{n}$*.*
• *Soit* $l_1 = \text{p.g.c.d.}(n, \beta_1)$.
Si $l_1 = 1$ *alors* $g = 1$ *.*
Si $l_1 > 1$ *soit* $\beta_2 = \min\{i \in \mathbb{N} \ : \ a_i \neq 0 \ \text{ et } \ i \not\equiv 0 (\text{mod } l_1)\}$.
• *Soit* $l_2 = \text{p.g.c.d.}(l_1, \beta_2)$ *.*
A nouveau, si $l_2 = 1$ *on s'arrête et* $\{n, \beta_1, \beta_2\}$ *sont les exposants caractéristiques de* C *, sinon on itère le processus.*

Celui-ci s'arrête nécessairement car il fait apparaître une suite $l_1 > l_2 > \cdots > l_g = 1$ définie par récurrence par $l_i = \text{p.g.c.d.}(l_{i-1}, \beta_i)$ ($l_0 = m(C) = n$).

β_i est le plus petit entier tel que $a_{\beta_i} \neq 0$ et $\beta_i \not\equiv 0 \pmod{l_{i-1}}$.

On appelle *les paires caractéristiques* de C l'ensemble $\{(m_i, n_i)_i\}$ tel que :
• $\text{p.g.c.d.}(m_i, n_i) = 1$.
• $\beta_i = m_i l_i$ et $l_{i-1} = n_i l_i$.
Ainsi on a $n = n_1 \cdots n_g$ et aussi

$$\frac{\beta_i}{n} = \frac{m_i}{n_1 \cdots n_i} \tag{1.1}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, g\}$.

Donc d'après (1.1) et étant donné que p.g.c.d.$(m_i, n_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, g\}$ on voit que les exposants caractéristiques et les paires caractéristiques sont des données équivalentes ; on peut calculer les exposants à partir des paires et vice versa.

Remarque 1.1.1 *Si C est non singulière, $\beta_0 = 1$ et on convient que $\beta_1 = +\infty$.*

Exemple 1.1.2 *Soit une branche C qui a un développement de Puiseux de la forme suivante :*

$$\begin{cases} x = t^{12} \\ y = 4t^{12} + 7t^{18} + t^{20} + 5t^{22} - t^{23} + 4t^{30} \end{cases}$$

Donc

- $\beta_0 = 12 \quad \beta_1 = 18 \quad \beta_2 = 20 \quad \beta_3 = 23.$
- $l_0 = 12 \quad l_1 = 6 \quad l_2 = 2 \quad l_3 = 1.$
- $(m_1, n_1) = (3, 2) \quad (m_2, n_2) = (10, 3) \quad (m_3, n_3) = (23, 2).$

Définition 1.1.4 *Deux branches analytiques C et D ont le même type topologique, (on écrira $C \equiv D$), si et seulement si C et D sont topologiquement équivalentes en tant que surfaces plongées dans $\mathbb{C}^2$ (ou $\mathbb{R}^4$), c'est-à-dire s'il existe des voisinages ouverts U et U' de l'origine et un homéomorphisme $T : U \longrightarrow U'$, tels que :*

1. *C est définie dans U*
   D est définie dans U'
   (cela a un sens car une branche est définie par une série qui converge dans un voisinage de l'origine) et
2. *$T(C \cap U) = D \cap U'$*

On note $[C]$ l'ensemble des branches D telles que $C \equiv D$. Si D et C ont même type topologique, on dit aussi que les deux branches sont équisingulières. $[C]$ s'appelle la classe d'équisingularité de C .

Théorème 1.1.3 (Zariski [Za1]) *Deux branches sont équisingulières si et seulement si elles ont les mêmes exposants caractéristiques.*

■

Définition 1.1.5 *On dira que C et D sont analytiquement équivalentes ($C \cong D$) s'il existe un isomorphisme analytique $T : U \longrightarrow U'$ tel que :*

1. *C est définie dans U*
   D est définie dans U'
2. $T(C \cap U) = D \cap U'$

Proposition 1.1.2 *Si C et D sont analytiquement équivalentes si et seulement si leurs anneaux locaux sont isomorphes, c'est-à-dire $\mathcal{O}_{C,0} \simeq \mathcal{O}_{D,0}$ comme $\mathbb{C}$-algèbres.*

■

Trouver des invariants analytiques est plus difficile que trouver des invariants topologiques. Zariski et Teissier ont donné des invariants analytiques dans le cas de quelques classes d'équisingularité : c'est l'étude de l'espace des modules.

D'après la définition des exposants caractéristiques de C on peut écrire un développement de Puiseux de C de la façon suivante :

$$\varphi(x^{1/n}) = \sum_{i\in(n)} a_i x^{i/n} + a_{\beta_1} x^{\beta_1/n} + \sum_{\substack{i \in (l_1) \\ \beta_1 < i < \beta_2}} a_i x^{i/n} + a_{\beta_2} x^{\beta_2/n} + \sum_{\substack{i \in (l_2) \\ \beta_2 < i < \beta_3}} a_i x^{i/n} + \cdots + \sum_{i \geq \beta_g} a_i x^{i/n}.$$

Lemme 1.1.1 *Soient $\varphi(x^{1/n})$ un développement de Puiseux de la branche C et ω une racine n-ème de l'unité. Alors on a :*

1. $\mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) \geq \dfrac{\beta_1}{n}$.
2. *Si $\varphi(x^{1/n}) \neq \varphi(\omega x^{1/n})$ et $\mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) > \dfrac{\beta_i}{n}$ alors*
   $\mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) \geq \dfrac{\beta_{i+1}}{n}$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, g-1\}$.

Démonstration
Si $\varphi(x^{1/n}) = \sum_{i\in(n)} a_i x^{i/n} + a_{\beta_1} x^{\beta_1/n} + \sum_{\substack{i\in(l_1)\\ \beta_1<i<\beta_2}} a_i x^{i/n} + a_{\beta_2} x^{\beta_2/n} + \cdots$

alors

$$\varphi(\omega x^{1/n}) = \sum_{i\in(n)} \omega^i a_i x^{i/n} + \omega^{\beta_1} a_{\beta_1} x^{\beta_1/n} + \sum_{\substack{i\in(l_1)\\ \beta_1<i<\beta_2}} \omega^i a_i x^{i/n} + \omega^{\beta_2} a_{\beta_2} x^{\beta_2/n} + \cdots$$

Ainsi si $i \in (n)$ alors $\omega^i = 1$ et $\mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) \geq \dfrac{\beta_1}{n}$.

On va voir maintenant la deuxième partie du lemme.
On procédera par récurrence sur i .
Si $\mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) > \dfrac{\beta_1}{n}$ alors $a_{\beta_1}(1-\omega^{\beta_1}) = 0$.

Donc $\omega^n = \omega^{\beta_1} = 1$ et comme $l_1 = \text{p.g.c.d.}(n, \beta_1)$ d'après l'identité de Bezout il existe $r, s \in \mathbb{Z}$: $l_1 = rn + s\beta_1$ et $\omega^{l_1} = 1$.

Ainsi si $\mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) > \dfrac{\beta_1}{n}$ alors $\mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) \geq \dfrac{\beta_2}{n}$.

On suppose que la proprieté est vraie pour i et on se propose de la montrer pour $i+1$.
Si $\mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) > \dfrac{\beta_i}{n}$ alors on a $a_{\beta_k}(1-\omega^{\beta_k}) = 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, i\}$. Donc $\omega^n = \omega^{\beta_1} = \ldots = \omega^{\beta^i} = 1$ et comme $l_i = \text{p.g.c.d.}(n, \beta_1, \ldots, \beta_i)$ d'après l'identité de Bezout il existe $r, s_1, \ldots, s_i \in \mathbb{Z}$: $l_i = rn + s_1\beta_1 + \cdots + s_i\beta_i$ et $\omega^{l_i} = 1$. Donc $\mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) \geq \dfrac{\beta_{i+1}}{n}$.
■

Corollaire 1.1.1 *Soit $\varphi(x^{1/n})$ un développement de Puiseux de la branche C et $q \in \{1, \ldots, g\}$. Alors*

1. $\sharp\{\omega \in \mathbb{U}_n \ : \ \varphi(x^{1/n}) \neq \varphi(\omega x^{1/n})$et $\mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) \geq \frac{\beta_q}{n}\} = l_{q-1} - 1$.
2. $\sharp\{\omega \in \mathbb{U}_n \ : \ \mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) = \frac{\beta_q}{n}\} = (n_q - 1)n_{q+1} \cdots n_g$.

Démonstration
D'après le lemme ci-dessus on a :

$$\begin{aligned}
&\sharp\{\omega \in \mathbb{U}_n \ : \ \varphi(x^{1/n}) \neq \varphi(\omega x^{1/n}) \text{ et } \mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) \geq \tfrac{\beta_q}{n}\} \\
&\qquad = \sharp\left\{\omega \in \mathbb{U}_n \ : \ \omega^n = \omega^{\beta_1} = \ldots = \omega^{\beta_{q-1}} = 1\right\} - 1 \\
&\qquad = \sharp(\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_{\beta_1} \cap \cdots \cap \beta_{q-1}) - 1 \\
&\qquad = \sharp\mathbb{U}_{\text{p.g.c.d.}(n,\beta_1,\ldots,\beta_{q-1})} - 1 \\
&\qquad = \text{p.g.c.d.}(n, \beta_1, \ldots, \beta_{q-1}) - 1 = l_{q-1} - 1.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sharp\left\{\omega \in \mathbb{U}_n / \mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) = \tfrac{\beta_q}{n}\right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sharp\left\{\omega \in \mathbb{U}_n / \mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) \geq \frac{\beta_q}{n}\right\} \\
&- \sharp\left\{\omega \in \mathbb{U}_n / \mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) > \frac{\beta_q}{n}\right\} \\
&= \sharp\left\{\omega \in \mathbb{U}_n / \mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) \geq \frac{\beta_q}{n}\right\} \\
&- \sharp\left\{\omega / \mathrm{ord}_x(\varphi(x^{1/n}) - \varphi(\omega x^{1/n})) \geq \frac{\beta_{q+1}}{n}\right\} \\
&= l_{q-1} - l_q \\
&= (n_q - 1) n_{q+1} \cdots n_g.
\end{aligned}$$

■

Définition 1.1.6 *On appelle semi-groupe de valeurs de la branche* C *à l'ensemble*

$$\Gamma(C) = \{\mathrm{ord}_t(g(x(t), y(t))) \ : \ g \in \mathcal{O}_{C,0} - \{0\}\}$$

où $(x(t), y(t))$ *est une paramétrisation de* C *.*

Si $g \in \mathcal{O}_{C,0}$ tel que $g(0,0) \neq 0$ alors $\mathrm{ord}_t(g(x(t), y(t))) = 0$ et $0 \in \Gamma(C)$. De plus si $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma(C)$ alors il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{O}_{C,0}$ tels que $g_1, g_2 \notin (f)$ et $\alpha_1 + \alpha_2 = \mathrm{ord}_t(g_1 g_2(x(t), y(t))) \in \Gamma(C)$.

Ainsi on justifie le nom de semi-groupe.

Théorème 1.1.4 *Si* $\mathcal{O}_{C,0}$ *est l'anneau local d'une courbe plane irréductible* C *le système des*

$$\bar{\beta}_q = \inf\{\alpha \in \Gamma(C) : \ \alpha \text{ n'est pas divisible par } l_{q-1}\}$$

où $1 \leq q \leq g$ *augmenté de* $\bar{\beta}_0 = \inf\{\alpha \in \Gamma(C) \ : \ \alpha \neq 0\}$ *est un système minimal de générateurs de* $\Gamma(C)$ *.*
De plus on a :

1. $\bar{\beta}_0 = \beta_0 = m(C)$
   $\bar{\beta}_1 = \beta_1$
   $\bar{\beta}_q = n_{q-1}\bar{\beta}_{q-1} + \beta_q - \beta_{q-1}$ pour tout $q \in \{2, \ldots, g\}$
2. $p.g.c.d.(l_{q-1}, \bar{\beta}_q) = l_q$ pour tout $q \in \{2, \ldots, g\}$.

■

Ainsi le semi-groupe de valeurs de C peut se calculer à partir des exposants caractéristiques de la branche C et aussi étant donné le semi-groupe de C on peut retrouver ses exposants caractéristiques.

Exemple 1.1.3 *Si on continue avec la branche de l'exemple(1.1.2) on trouve que le système minimal de générateurs du semi-groupe de valeurs de* C *est*

$$\bar{\beta}_0 = 12 \quad \bar{\beta}_1 = 18 \quad \bar{\beta}_2 = 38 \quad \bar{\beta}_3 = 117.$$

1.2 Multiplicité d'intersection et contact.

Définition 1.2.1 *Soient* $C \equiv f(x,y) = 0$ *irréductible et* $D \equiv g(x,y) = 0$ *une courbe quelconque. On définit la multiplicité d'intersection de* C *et* D *comme*

$$(C, D) = \mathrm{ord}_t(g(x(t), y(t)))$$

où $(x(t), y(t))$ *est une paramétrisation de la branche* C *.*

Maintenant on va voir que la multiplicité d'intersection est indépendante de l'équation de D et de la paramétrisation de C choisie.

Lemme 1.2.1 *Soit* $m(C) = n$ *et* $\{y_i(t)\}_{i=1}^n$ *l'ensemble des paramétrisations de* C *. Alors on a :*

$$\mathrm{ord}_t(g(t^n, y_i(t))) = \mathrm{ord}_t(g(t^n, y_j(t))) \quad \text{pour tout } i, j \in \{1, \ldots, n\} \ .$$

Démonstration
D'après le théorème de Newton-Puiseux il existe une racine n-ème de l'unité ω telle que $y_i(t) = y_j(\omega t)$.

Soit $m(D) = m$. D'après Weierstrass la courbe D a une équation de la forme $g(x, y) = y^m + a_1(x)y^{m-1} + \cdots + a_m(x)$.
Ainsi si $g(t^n, y_i(t)) = \sum_k a_k t^k$ alors $g(t^n, y_j(t)) = g(t^n, y_i(\omega t)) = \sum_k a_k \omega^k t^k$ a le même ordre que $\sum_k a_k t^{\cdot}$

■

Définition 1.2.2 *Soient* $C \equiv f(x, y) = 0$ *et* $D \equiv g(x, y) = 0$ *deux courbes quelconques. On définit la multiplicité d'intersection de* C *et* D *comme*

$$(C, D) = \sum_i (C_i, D)$$

où $C = \bigcup_i C_i$ *est la décomposition de* C *en composantes irréductibles.*

Proposition 1.2.1 *Soient* $C \equiv f(x, y) = 0$ *et* $D \equiv g(x, y) = 0$ *deux courbes quelconques. Alors on a*

$$(C, D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\}/(f, g)$$

Démonstration
Soit $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}/(f)$ et $\overline{\mathcal{O}} = \mathbb{C}\{t\}$ alors on peut écrire :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{O} & \longrightarrow \overline{\mathcal{O}} \\ (x, y) & \longrightarrow (x(t), y(t)) \end{array}$$

Soit maintenant $\mathfrak{A} = g\mathcal{O}$.
D'après ([Bou]) on a :

1. $\mathrm{e}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{O}) = \dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}/\mathfrak{A}) = \dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}\{x, y\}/(f, g))$.
2. $\mathrm{e}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{O}) = \mathrm{e}_{\mathfrak{A}\overline{\mathcal{O}}}(\overline{\mathcal{O}}) = \mathrm{ord}_t(g(x(t), y(t)))$.

■

Corollaire 1.2.1 *La multiplicité d'intersection est symétrique.*

Corollaire 1.2.2 *La multiplicité d'intersection de deux courbes est indépendante du choix des équations des courbes.*

Maintenant on va étudier le contact entre les branches $C \equiv f(x,y) = 0$ et $D \equiv g(x,y) = 0$.

Définition 1.2.3 *On définit le contact de la branche* C *avec la branche* D *comme*

$$\mathrm{cont}(C,D) = n \max_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \{\mathrm{ord}_x(y_i(x^{1/n}) - z_j(x^{1/m}))\}$$

où $m(C) = n$, $m(D) = m$, $\{y_i(x^{(1/n)})\}_{i=1}^n$ *est l'ensemble des paramétrisations de* C *et* $\{z_i(x^{(1/m)})\}_{i=1}^m$ *est l'ensemble des paramétrisations de* D .

Exemple 1.2.1 *Soient deux branches* C *et* D *telles que les développements de Puiseux de* C *sont*

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} + 2x^{9/4} \\ y_2 = -x^{3/2} + 2ix^{9/4} \\ y_3 = x^{3/2} - 2x^{9/4} \\ y_4 = -x^{3/2} - 2ix^{9/4} \end{cases}$$

et les développements de Puiseux de D *sont*

$$\begin{cases} z_1 = 3x^{5/2} + x^6 \\ z_2 = -3x^{5/2} + x^6 \end{cases}$$

donc $\mathrm{cont}(C,D) = 4.\dfrac{3}{2} = 6$ *et* $\mathrm{cont}(D,C) = 2.\dfrac{3}{2} = 3.$

On voit que $\mathrm{cont}(C,D) = \dfrac{n}{m}\mathrm{cont}(D,C)$ et en général le contact entre deux branches n'est pas symétrique.

Ainsi l'ordre maximum de coïncidence entre un développement de Puiseux de C et un développement de D est

$$\frac{\mathrm{cont}(C,D)}{m(C)} = \frac{\mathrm{cont}(D,C)}{m(D)}.$$

On appelle le nombre rationnel ci-dessus *l'exposant de coïncidence* de C et D et il est symétrique.

Le contact entre C et D donne donc une mesure de la coïncidence des paramétrisations de C et de D.

Soient $y_i(x^{1/n}) = \sum_{r\geq n} a_r x^{r/n}$ un développement de C et $z_j(x^{1/m}) = \sum_{s\geq m} b_s x^{s/m}$ un développement de D. On peut voir ces développements comme deux éléments de $\mathbb{C}\{x^{1/nm}\}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} y_i(x^{1/n}) &= \sum_{r\geq n} a_r x^{rm/nm} \\ z_j(x^{1/m}) &= \sum_{s\geq m} b_s x^{sn/mn} \end{aligned}$$

Maintenant si on veut exprimer les développements ci-dessus comme des développements en la variable t il suffit prendre $x = t^{nm}$ et on a

$$\begin{aligned} y_i(t^m) &= \sum_{r\geq n} a_r t^{rm} \\ z_j(t^n) &= \sum_{s\geq m} b_s t^{sn} \end{aligned} \tag{1.2}$$

De plus on a

Lemme 1.2.2

$$\mathrm{cont}(C,D) = \tfrac{1}{m} \max_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \{\mathrm{ord}_t(y_i(t^m) - z_j(t^n))\} .$$

Démonstration
Soient $y_i(x^{1/n}) = \sum_{r\geq n} a_r x^{r/n} = \sum_{r\geq n} a_r x^{rm/nm}$ une paramétrisation de C et $z_j(x^{1/m}) = \sum_{s\geq m} b_s x^{s/m} = \sum_{s\geq m} b_s x^{sn/nm}$ une paramétrisation de D. Si $\mathrm{ord}_x(y_i(x^{1/n}) - z_j(x^{1/m})) = \dfrac{\alpha}{nm}$ on a :

$$\begin{aligned} &a_r = b_s \quad \text{pour tout } rm < \alpha \text{ et } sn < \alpha \text{ et} \\ &a_{r_0} \neq b_{s_0} \quad \text{où } r_0 m = s_0 n = \alpha \end{aligned}$$

Mais d'après (1.2) on a :

$$y_i(t^m) - z_j(t^n) = \sum_{r\geq n} a_r t^{rm} - \sum_{s\geq m} b_s t^{sn} = \underbrace{(a_{r_0} - b_{s_0})}_{\neq 0} t^\alpha + \cdots$$

donc $\operatorname{ord}_t(y_i(t^m) - z_j(t^n)) = \alpha$ et

$$\operatorname{ord}_x(y_i(x^{1/n}) - z_j(x^{1/m})) = \tfrac{1}{nm}\operatorname{ord}_t(y_i(t^m) - z_j(t^n))$$

d'où :

$$\begin{aligned}\operatorname{cont}(C,D) &= n \max_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \left\{\operatorname{ord}_x(y_i(x^{1/n}) - z_j(x^{1/m}))\right\} \\ &= \frac{1}{m} \max_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \left\{\operatorname{ord}_t(y_i(t^m) - z_j(t^n))\right\}.\end{aligned}$$

■

Lemme 1.2.3

1. $\operatorname{cont}(C,D) = n \max_{1\leq j\leq m} \left\{\operatorname{ord}_x(y(x^{1/n}) - z_j(x^{1/m}))\right\}$ *où* $y(x^{1/n})$ *est une paramétrisation fixe de* C *.*
2. $\operatorname{cont}(C,D) = n \max_{1\leq i\leq n} \left\{\operatorname{ord}_x(y_i(x^{1/n}) - z(x^{1/m}))\right\}$ *où* $z(x^{1/m})$ *est une paramétrisation fixe de* D *.*

Démonstration

D'après le lemme précédent il faut démontrer que

$$\max_{1\leq j\leq m} \{\operatorname{ord}_t(y(t^m) - z_j(t^n))\} = \max_{1\leq j\leq m, 1\leq i\leq n} \{\operatorname{ord}_t(y_i(t^m) - z_j(t^n))\}$$

et

$$\max_{1\leq i\leq n} \{\operatorname{ord}_t(y_i(t^m) - z(t^n))\} = \max_{1\leq j\leq m, 1\leq i\leq n} \{\operatorname{ord}_t(y_i(t^m) - z_j(t^n))\}.$$

Soient $v(t) = y(t^m) = \sum_{r\geq n} a_r t^{rm}$ et $w(t) = z(t^n) = \sum_{s\geq m} b_s t^{sn}$.

Si $\mathbb{U}_{nm} = \{\xi \in \mathbb{C} \ : \ \xi^{nm} = 1\} = \{\xi_k\}_{k=1}^{nm}$ on définit

$$v_k(t) = v(\xi_k t) = \sum_{r\geq n} a_r \xi_k^{rm} t^{rm}$$

$$w_k(t) = w(\xi_k t) = \sum_{s\geq m} b_s \xi_k^{sn} t^{sn}.$$

Ainsi on a :

$$\{v_k(t)\}_{k=1}^{nm} = \{y_i(t^m)\}_{i=1}^{n}$$

et

$$\{w_k(t)\}_{k=1}^{nm} = \{z_j(t^n)\}_{j=1}^{m}.$$

De fait parce que si $k \in \{1, \cdots, nm\}$ et $\xi_k^{nm} = 1$ donc $\xi_k^m \in \mathbb{U}_n$ et

$$v_k(t) = \sum_{r \geq n} a_r \xi_k^{rm} t^{rm} = \sum_{r \geq n} a_r (\xi_k^m)^r t^{rm}. \tag{1.3}$$

Mais si $y(x^{1/n}) = \sum_{r \geq n} a_r x^{r/n}$, les autres paramétrisations de C sont de la forme

$$y_i(x^{1/n}) = y(\rho x^{1/n}) = \sum_{r \geq n} a_r \rho^r x^{r/n}$$

où $\rho \in \mathbb{U}_n$ donc $y_i(t^m) = \sum_{r \geq n} a_r \rho^r t^{rm}$ où $\rho \in \mathbb{U}_n$.

D'après (1.3) on a $\{v_k(t)\} \subseteq \{y_i(t^m)\}_{i=1}^{n}$ et si $y_i(t^m) = \sum_{r \geq n} a_r \rho^r t^{rm}$ il existe $\xi_k \in \mathbb{U}_{nm}$ tel que $y_i(t^m) = \sum_{r \geq n} a_r \xi_k^{rm} t^{rm} \in \{v_k(t)\}$ (prendre $\xi_k = \rho^{1/m}$). Ainsi $\{v_k(t)\} = \{y_i(t^m)\}$.

De façon analogue on montre que

$$\{w_k(t)\}_{k=1}^{nm} = \{z_j(t)\}_{j=1}^{m} \quad ,$$

donc il suffit de démontrer que

$$\max_{1 \leq j \leq nm} \{\mathrm{ord}_t(v(t) - w_j(t))\} = \max_{1 \leq i,j \leq nm} \{\mathrm{ord}_t(v_i(t) - w_j(t))\}$$

et

$$\max_{1 \leq i \leq nm} \{\mathrm{ord}_t(v_i(t) - w(t))\} = \max_{1 \leq i,j \leq nm} \{\mathrm{ord}_t(v_i(t) - w_j(t))\}.$$

Soit $p_j(t) = v(t) - w_j(t)$; on a $p_j(\xi_k t) = v(\xi_k t) - w_j(\xi_k t)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, nm\}$ et $\mathrm{ord}_t(p_j(t)) = \mathrm{ord}_t(p_j(\xi_k t))$ parce que si $\mathrm{ord}_t(p_j(t)) = h$

alors $p_j(t) = \sum_{\alpha \geq h} c_\alpha t^\alpha$ où $c_h \neq 0$ donc $p_j(\xi_k t) = \sum_{\alpha \geq h} c_\alpha \xi_k^\alpha t^\alpha$ et $c_h \xi_k^h \neq 0$, ainsi $\mathrm{ord}_t(p_j(\xi_k t)) = h$.

Donc

$$\begin{aligned}
\max_{1 \leq j \leq mn} \{\mathrm{ord}_t(v(t) - w_j(t))\} &= \max_{1 \leq j \leq mn} \{\mathrm{ord}_t(p_j(t))\} \\
&= \max_{1 \leq j, i \leq mn} \{\mathrm{ord}_t(p_j(\xi_i t))\} \\
&= \max_{1 \leq i, j \leq mn} \{\mathrm{ord}_t(v(\xi_i t) - w_j(\xi_i t))\} \\
&= \max_{1 \leq i, j \leq mn} \{\mathrm{ord}_t(v_i(t) - w_j(\xi_i t))\} .
\end{aligned}$$

Mais comme $\{w_j(t)\}_{j=1}^m = \{w_j(\xi_i t)\}_{j=1}^m$ (parce que $w_j(t) = v(\xi_j t)$, $w_j(\xi_i t) = v(\xi_i \xi_j t)$ et comme $\xi_i, \xi_j \in \mathbb{U}_{mn}$ alors $\xi_i \xi_j \in \mathbb{U}_{mn}$) on a :

$$\max_{1 \leq i, j \leq mn} \{\mathrm{ord}_t(v_i(t) - w_j(\xi_i t))\} = \max_{1 \leq i, j \leq mn} \{\mathrm{ord}_t(v_i(t) - w_j(t))\}$$

donc

$$\max_{1 \leq j \leq mn} \{\mathrm{ord}_t(v(t) - w_j(t))\} = \max_{1 \leq i, j \leq mn} \{\mathrm{ord}_t(v_i(t) - w_j(t))\}$$

De façon analogue on montre que

$$\max_{1 \leq i \leq nm} \{\mathrm{ord}_t(v_i(t) - w(t))\} = \max_{1 \leq i, j \leq nm} \{\mathrm{ord}_t(v_i(t) - w_j(t))\}$$

■

D'après le lemme ci-dessus, pour calculer le contact de C avec D il suffit de comparer toutes les paramétrisations de D avec une paramétrisation fixe de C, ou de façon équivalente il suffit de comparer toutes les paramétrisations de C avec une paramétrisation fixe de D.

Maintenant on va donner un lemme de comparaison entre les contacts de trois branches.

Lemme 1.2.4 *Soient* C, D, F *trois branches et soit*

$$\sigma = \min \{\mathrm{cont}(C, D), \mathrm{cont}(C, F)\} .$$

Alors on a :

1. $\mathrm{cont}(F,D) \geq \sigma \dfrac{m(F)}{m(C)}$
2. *Si* $\mathrm{cont}(C,D) \neq \mathrm{cont}(C,F)$ *alors* $\mathrm{cont}(F,D) = \sigma \dfrac{m(F)}{m(C)}$

Démonstration
Soient $m(C) = n$, $m(D) = m$ et $m(F) = r$.

Il existe un développement $y_i(x^{1/n})$ de C et il existe un développement $z_j(x^{1/m})$ de D tels que

$$\mathrm{cont}(C,D) = \frac{1}{m(D)}\,\mathrm{ord}_t(y_i(t^m) - z_j(t^n)) = \frac{1}{m(D)m(F)}\,\mathrm{ord}_t(y_i(t^{mr}) - z_j(t^{nr})) \tag{1.4}$$

Mais il existe aussi un développement $w_j(x^{1/r})$ de F tel que

$$\mathrm{cont}(C,F) = \frac{1}{m(F)}\,\mathrm{ord}_t(y_i(t^r) - w_j(t^n)) = \frac{1}{m(D)m(F)}\,\mathrm{ord}_t(y_i(t^{mr}) - w_j(t^{nm})) \tag{1.5}$$

De plus comme

$$w_j(t^{nm}) - z_j(t^{nr}) = (y_i(t^{mr}) - z_j(t^{nr})) - (y_i(t^{mr}) - w_j(t^{nm})) \ ,$$

on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_t\left(w_j(t^{nm}) - z_j(t^{nr})\right) &\geq \min\left\{\mathrm{ord}_t(y_i(t^{mr}) - z_j(t^{nr})), \mathrm{ord}_t(y_i(t^{mr}) - w_j(t^{nm}))\right\} \\ &=^{(1.4),(1.5)} \min\left\{rm\ \mathrm{cont}(C,D), mr\ \mathrm{cont}(C,F)\right\},\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{rm}\,\mathrm{ord}_t(w_j(t^{nm}) - z_j(t^{nr})) \geq \min\left\{\mathrm{cont}(C,D), \mathrm{cont}(C,F)\right\}. \tag{1.6}$$

Mais

$$\begin{aligned}\mathrm{cont}(F,D) &= \frac{1}{m}\max_{1\leq k\leq r}\left\{\mathrm{ord}_t(w_k(t^m) - z_j(t^r))\right\} \\ &\geq \frac{1}{m}\,\mathrm{ord}_t(w_j(t^m) - z_j(t^r)) \\ &= \frac{1}{mn}\,\mathrm{ord}_t(w_j(t^{mn}) - z_j(t^{rn})) \ ,\end{aligned}$$

donc

$$\frac{n}{r}\,\mathrm{cont}(F,D) \geq \frac{1}{mr}\,\mathrm{ord}_t(w_j(t^{mn}) - z_j(t^{rn})). \tag{1.7}$$

Ainsi d'après (1.6) et (1.7) on a

$$\begin{aligned}\mathrm{cont}(F,D) &\geq \frac{r}{n}\,\min\{\mathrm{cont}(C,D),\mathrm{cont}(C,F)\}\\ &= \frac{m(F)}{m(C)}\,\min\{\mathrm{cont}(C,D),\mathrm{cont}(C,F)\}\,.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Démontrons maintenant la deuxième partie du lemme.

$$\mathrm{cont}(F,D) = \frac{1}{m}\max_{1\leq k\leq r}\{\mathrm{ord}_t(w_k(t^m) - z_j(t^r))\}$$

et il existe $s \in \{1,\ldots,r\}$ tel que

$$\mathrm{cont}(F,D) = \frac{1}{m}\,\mathrm{ord}_t(w_s(t^m) - z_j(t^r)) = \frac{1}{mn}\,\mathrm{ord}_t(w_s(t^{nm}) - z_j(t^{nr}))$$

donc

$$\frac{n}{r}\,\mathrm{cont}(F,D) = \frac{1}{mr}\,\mathrm{ord}_t(w_s(t^{nm}) - z_j(t^{nr})). \tag{1.9}$$

De même, il existe $a \in \{1,\ldots,n\}$ tel que

$$\mathrm{cont}(C,F) = \frac{1}{r}\,\mathrm{ord}_t(y_a(t^r) - w_s(t^n)) = \frac{1}{rm}\,\mathrm{ord}_t(y_a(t^{rm}) - w_s(t^{mn})) \tag{1.10}$$

et comme

$$y_a(t^{rm}) - z_j(t^{nr}) = (w_s(t^{nm}) - z_j(t^{nr})) + (y_a(t^{rm}) - w_s(t^{nm}))$$

on a :

$$\mathrm{ord}_t(y_a(t^{rm}) - z_j(t^{nr})) \geq \min\{\mathrm{ord}_t(w_s(t^{nm}) - z_j(t^{nr})), \mathrm{ord}_t(y_a(t^{rm}) - w_s(t^{nm}))\}$$

c'est-à-dire, d'après (1.9) et (1.10)

$$\mathrm{ord}_t(y_a(t^{rm}) - z_j(t^{nr})) \geq \min\{mn\,\mathrm{cont}(F,D), rm\,\mathrm{cont}(C,F)\}$$

donc

$$\frac{1}{rm}\operatorname{ord}_t(y_a(t^{rm})-z_j(t^{nr}))\geq\min\left\{\frac{n}{r}\operatorname{cont}(F,D),\operatorname{cont}(C,F)\right\}. \tag{1.11}$$

De plus

$$\operatorname{cont}(C,D)\geq\frac{1}{m}\operatorname{ord}_t(y_a(t^{m})-z_j(t^{n}))=\frac{1}{mr}\operatorname{ord}_t(y_a(t^{rm})-z_j(t^{rn})) \tag{1.12}$$

donc d'après (1.11) et (1.12) on a :

$$\operatorname{cont}(C,D)\geq\min\left\{\frac{n}{r}\operatorname{cont}(F,D),\operatorname{cont}(C,F)\right\}. \tag{1.13}$$

Mais comme

$$y_i(t^{mr})-w_s(t^{mn})=(y_i(t^{mr})-z_j(t^{nr}))-(w_s(t^{mn})-z_j(t^{nr})),$$

on a :

$$\operatorname{ord}_t(y_i(t^{mr})-w_s(t^{mn})\geq\min\{\operatorname{ord}_t(y_i(t^{mr})-z_j(t^{nr})),\operatorname{ord}_t(w_s(t^{mn})-z_j(t^{nr}))\}$$

et d'aprés (1.4) et (1.9) :

$$\frac{1}{mr}\operatorname{ord}_t(y_i(t^{mr})-w_s(t^{mn})\geq\min\left\{\operatorname{cont}(C,D),\frac{n}{r}\operatorname{cont}(F,D)\right\}. \tag{1.14}$$

De plus d'après (1.5) on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{cont}(C,F) &= \frac{1}{mr}\operatorname{ord}_t(y_i(t^{rm})-w_j(t^{nm}))\\ &\geq \frac{1}{mr}\operatorname{ord}_t(y_i(t^{rm})-w_s(t^{nm}))\\ &\geq^{(1.14)}\min\left\{\operatorname{cont}(C,D),\frac{n}{r}\operatorname{cont}(F,D)\right\}\end{aligned} \tag{1.15}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{cont}(C,D) &\geq^{(1.13)} \min\left\{\operatorname{cont}(C,F), \frac{n}{r}\operatorname{cont}(F,D)\right\}\\
\operatorname{cont}(C,F) &\geq^{(1.15)} \min\left\{\operatorname{cont}(C,D), \frac{n}{r}\operatorname{cont}(F,D)\right\}\\
\frac{n}{r}\operatorname{cont}(F,D) &\geq^{(1.8)} \min\{\operatorname{cont}(C,D), \operatorname{cont}(C,F)\}
\end{aligned}$$

et si $\operatorname{cont}(C,D) \neq \operatorname{cont}(C,F)$ alors $\frac{n}{r}\operatorname{cont}(F,D) = \min\{\operatorname{cont}(C,D), \operatorname{cont}(C,F)\}$ c'est-à-dire $\operatorname{cont}(F,D) = \frac{r}{n}\min\{\operatorname{cont}(C,D), \operatorname{cont}(C,F)\}$.

■

Corollaire 1.2.3 *L'application d définie par*

$$d(C,D) = e^{-\frac{\operatorname{cont}(C,D)}{m(C)}}$$

est une distance ultramétrique dans l'ensemble des germes irréductibles de courbes planes complexes.

Démonstration

Soient C, D, F trois germes irréductibles. Comme la fonction exponentielle est toujours positive on a $d(C,D) \geq 0$.

De plus comme $\frac{\operatorname{cont}(C,D)}{m(C)} = \frac{\operatorname{cont}(D,C)}{m(D)}$ on a $d(C,D) = d(D,C)$.

Il reste à vérifier :

1. $d(C,D) = 0 \iff C = D$.
   $d(C,D) = 0 \iff \frac{1}{e^{\frac{\operatorname{cont}(C,D)}{m(C)}}} = 0 \iff \operatorname{cont}(C,D) = \infty$
   $\iff C = D$
2. $d(F,D) \leq \sup\{d(F,C), d(C,D)\}$
   D'après le lemme ci-dessus on a

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{cont}(F,D)}{m(F)} &\geq \frac{1}{m(C)}\min\{\operatorname{cont}(C,D), \operatorname{cont}(C,F)\}\\
&= \min\left\{\frac{\operatorname{cont}(C,D)}{m(C)}, \frac{\operatorname{cont}(C,F)}{m(C)}\right\}\\
&= -\sup\left\{-\frac{\operatorname{cont}(C,D)}{m(C)}, -\frac{\operatorname{cont}(C,F)}{m(C)}\right\}
\end{aligned}$$

et alors

$$-\frac{\mathrm{cont}(F,D)}{m(F)} \leq \sup\left\{-\frac{\mathrm{cont}(C,D)}{m(C)}, -\frac{\mathrm{cont}(C,F)}{m(C)}\right\}$$

donc étant donné que la fonction exponentielle est croissante on a

$$d(F,D) \leq \sup\{d(C,D), d(C,F)\} = \sup\{d(F,C), d(C,D)\}$$

■

Proposition 1.2.2 (Smith [S],Zariski [Za2],Merle [Me]) *Soient C et D deux germes de courbes irréductibles planes. Si α est un nombre rationnel et les exposants caractéristiques de C sont $\{\beta_0, \ldots, \beta_g\}$ tels que $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$ (par convention $\beta_{g+1} = \infty$) alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\alpha = \mathrm{cont}(C,D)$.
2. $\dfrac{(C,D)}{m(D)} = \dfrac{\overline{\beta_q}}{n_1 \cdots n_{q-1}} + \dfrac{\alpha - \beta_q}{n_1 \ldots n_q}$

où par convention $n_0 = n_{-1} = 1$ et $l_0 = m(C)$.

■

La proposition ci-dessus donne la relation entre la multiplicité d'intersection de deux branches et le contact entre elles. Donc tant le contact que la multiplicité d'intersection donnent une mesure de la coïncidence des développements de Puiseux de C avec les développements de D .

1.3 Courbes réductibles.

Dans toute cette section C sera (sauf précision contraire) un germe de courbe réductible plane d'équation $f(x,y) = u(x,y)\prod_{i=1}^{r} f_i(x,y)^{\sigma_i}$.

Notons $C_i \equiv f_i(x,y) = 0$ où $I = \{1, \ldots, r\}$ est l'ensemble des branches de C, et $\mathcal{O}_{C_i,0}$ l'anneau local de la branche C_i .

On notera $\{\beta_0^i, \ldots, \beta_{g_i}^i\}$ les exposants caractéristiques de C_i où $\beta_o^i = n_i$ est la multiplicité à l'origine de C_i .

De la même façon $\{(m_k^i, n_k^i)\}_{k=1}^{g_i}$ sera l'ensemble des paires caractéristiques de C_i où $l_k^i = \text{p.g.c.d.}(\beta_0^i, \ldots, \beta_k^i)$ avec $k \in \{1, \ldots, g_i\}$.

On notera $\Gamma(C_i)$ le semi-groupe des valeurs de C_i et $\{\bar{\beta}_0^i, \ldots, \bar{\beta}_{g_i}^i\}$ sera son système minimal de générateurs contruit en (1.1.4).

Si C_i et C_j sont deux branches différentes de C on note α_{ij} le contact de C_i avec C_j , c'est-à-dire

$$\alpha_{ij} := \text{cont}(C_i, C_j).$$

Si C_i est une branche de C on définit l'ensemble S_i de la façon suivante : $S_i := S_i^1 \cup S_i^2$ où

$$S_i^1 := \left\{ \frac{\beta_1^i}{n_i}, \ldots, \frac{\beta_{g_i}^i}{n_i} \right\}$$

et

$$S_i^2 := \left\{ \frac{\alpha_{ij}}{n_i} \right\}_{i \neq j}$$

L'ensemble S_i^1 ne dépend que de la topologie de la branche C_i mais S_i^2 dépend de la topologie de C .

Définition 1.3.1 *Soit C une branche et W un germe de courbe lisse plane à l'origine. On appelle exposant de contact de W avec C à l'origine le nombre*

$$\delta_0(W, C) = \frac{(W, C)}{m(C)}$$

On doit remarquer que le contact et l'exposant de contact sont deux notions différentes. Cependant d'après la proposition (1.2.2) on peut obtenir l'un à partir de l'autre et vice versa.

Soit $\delta_0(C) = \max_{W \in \mathcal{G}} \{\delta_0(W, C)\}$ où $\mathcal{G}$ est l'ensemble de germes à l'origine de courbes planes lisses.

Définition 1.3.2 *Soit W un germe de courbe plane lisse à l'origine. On dit que W a le contact maximal avec C à l'origine s'il vérifie*

$$\delta_0(W, C) = \delta_0(C).$$

Proposition 1.3.1 *Soient C un germe de courbe d'équation $f(x,y) = u(x,y)\prod_{i=1}^{r} f_i(x,y)^{\sigma_i}$ et W une courbe lisse quelconque. Alors :*

1. $(C,W) \geq m(C)$
   On a égalité si et seulement si la droite tangente à W n'est pas dans le cône tangent de C .
2. $(C,W) \leq \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \beta_1^i$, *où* $\beta_1^i = \infty$ *si* C_i *est lisse.*

Démonstration

1. Soit
$$\begin{cases} x = at \\ y = \sum_{k\geq 1} a_k t^k \end{cases}$$
une paramétrisation de W et soit $C \equiv f(x,y) = 0$ telle que sa décomposition en composantes homogènes est
$$f(x,y) = f_n(x,y) + f_{n+1}(x,y) + \cdots .$$
Donc
$$\begin{aligned}(C,W) &= \mathrm{ord}_t(f(at, \sum_{k\geq 1} a_k t^k)) \\ &= \mathrm{ord}_t(f_n(at, \sum_{k\geq 1} a_k t^k) + f_{n+1}(at, \sum_{k\geq 1} a_k t^k) + \cdots) \\ &= \mathrm{ord}_t(f_n(a,a_1)t^n + \cdots) \\ &\geq n .\end{aligned}$$
De plus $(C,W) = n$ si et seulement si $f_n(a,a_1) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si la droite tangente à W n'est pas dans le cône tangent de C .

2. On sait que $(C,W) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i (C_i, W)$. Soit $W \equiv g(x,y) = 0$ et soit $g(x,y) = g_1(x,y) + g_2(x,y) + \cdots$ sa décomposition en composantes homogènes ($g_1(x,y) \not\equiv 0$ parce que W est lisse). Donc si $(x(t_i), y(t_i))$ est un développement de Puiseux de $C_i \equiv f_i(x,y) = 0$ on a

$$\begin{aligned}(C_i, W) &= \mathrm{ord}_{t_i}(g(x(t_i), y(t_i))) \\ &= \mathrm{ord}_{t_i}(g_1(x(t_i), y(t_i)) + g_2(x(t_i), y(t_i)) + \cdots) \\ &= \min_l \{\mathrm{ord}_{t_i}(g_l(x(t_i), y(t_i)))\} \\ &= \mathrm{ord}_{t_i}(g_1(x(t_i), y(t_i))) \ .\end{aligned}$$

Mais si

$$\begin{cases} x(t_i) = t_i^{n_i} \\ y(t_i) = \displaystyle\sum_{\rho \geq n_i} a_\rho t_i^\rho \end{cases}$$

et comme $g_1(x, y) = px + qy$ alors

$$g_1(x(t_i), y(t_i)) = (p + qa_{n_i})t_i^{n_i} + qa_{n_i+1}t_i^{n_i+1} + \cdots + qa_{\beta_1^i}t_i^{\beta_1^i} + \cdots$$

Ainsi si on suppose $(C_i, W) > \beta_1^i$ donc $p + qa_{n_i} = 0$ et $qa_{\beta_1^i} = 0$, mais comme $a_{\beta_1^i} \neq 0$ alors $q = p = 0$ qui est une contradiction parce que ils ne peuvent pas être simultanément zéro.

Donc $(C_i, W) \leq \beta_1^i$ et $(C, W) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \sigma_i \beta_1^i$.

■

Remarque 1.3.1 *La première partie du lemme ci-dessus donne une nouvelle définition de la multiplicité à l'origine de C en fonction de la multiplicité d'intersection (C, W) pour une courbe lisse W assez général, c'est-à-dire une courbe lisse W telle que sa droite tangente n'est pas dans le cône tangent de C .*

Corollaire 1.3.1 *Soient C une branche plane et $\{\beta_0, \ldots, \beta_g\}$ ses exposants caractéristiques. Alors le contact maximal d'une courbe lisse W avec C est*

$$\delta_O(C) = \frac{\beta_1}{\beta_0}.$$

Remarque 1.3.2 *D'après le remarque (1.1.1) si C est lisse alors $\delta_O(C) = \infty$.*

Corollaire 1.3.2 *Une courbe lisse W a le contact maximal avec la branche C à l'origine si et seulement si $\dfrac{(W, C)}{m(C)} \notin \mathbb{Z}$.*

Démonstration

$''\Rightarrow''$ C'est évident puisque $\dfrac{\beta_1}{\beta_0} \notin \mathbb{Z}$.

$''\Leftarrow''$ C'est clair puisque $\dfrac{(W,C)}{m(C)} \in \{1, 2, \ldots, h, \dfrac{\beta_1}{\beta_0}\}$ où $h = \left[\dfrac{\beta_1}{\beta_0}\right]$.

■

Définition 1.3.3 *Soit C un germe de courbe réductible plane à l'origine de $\mathbb{C}^2$ d'équation $f(x,y) = u(x,y)\prod_{i=1}^{r} f_i(x,y)^{\sigma_i}$. On dira que C est un germe de courbe réduite si $\sigma_1 = \ldots = \sigma_r = 1$.*

Ainsi si C est réduite toutes ses branches sont différentes, c'est-à-dire, si $C_i \equiv f_i(x,y) = 0$ alors $C_i \neq C_j$ pour tout $i \neq j$.

Définition 1.3.4 *Soient deux germes de courbes réduites planes à l'origine $C \equiv f(x,y) = uf_1 \cdots f_r$ et $D \equiv g(x,y) = vg_1 \cdots g_s$. Soit $\{C_i \equiv f_i = 0\}_{i=1}^{r}$ l'ensemble de branches de C et $\{D_i \equiv g_i = 0\}_{i=1}^{s}$ l'ensemble de branches de D . On dit que C et D sont équisingulières si*

1. *$r = s$.*
2. *Il existe une bijection $\varphi : \{C_i\}_{i=1}^{r} \longrightarrow \{D_i\}_{i=1}^{r}$ telle que :*
   (a) *$\varphi(C_i) = D_i$.*
   (b) *Pour tout i, C_i et D_i sont des branches équisingulières, c'est-à-dire elles ont les mêmes exposants caractéristiques.*
   (c) *Pour tout i, j : $1 \leq i, j \leq r$ $(C_i, C_j) = (D_i, D_j)$.*

La définition de l'équisingularité est facilement extensible à des germes des courbes réductibles planes $C \equiv f(x,y) = uf_1^{\sigma_1} \cdots f_r^{\sigma_r}$ et $D \equiv g(x,y) = vg_1^{\delta_1} \cdots g_s^{\delta_s}$. Il suffit ajouter la condition $\sigma_i = \delta_i$ à la définition ci-dessus.

Soit maintenant $f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ réduite telle que $f(0, \ldots, 0) = 0$ et $\mathrm{ord}_{x_m}(f(0, \ldots, 0, x_m)) = n < \infty$.

D'après le théorème de préparation de Weierstrass il existe une unité $u(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_m\}$ et des éléments $a_i(x_1, \ldots, x_{m-1})$ dans l'ideal maximal de $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ tels que

$$f(x_1,\ldots,x_m) = u(x_1,\ldots,x_m)\left[x_m^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_1,\ldots,x_{m-1})x_m^i\right] .$$

On notera $\phi(x_1,\ldots,x_m)$ le polynôme $x_m^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_1,\ldots,x_{m-1})x_m^i$.

Définition 1.3.5 *On appelle x_m-discriminant de f et on note $\Delta_{x_m}(f)$ le x_m-discriminant du polynôme $\phi(x_1,\ldots,x_m)$.*

Ainsi on a $\Delta_{x_m}(f) \in \mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_{m-1}\}$.

On doit remarquer que on peut définir le x_m-discriminant d'une série non réduite comme ci-dessus mais dans ce cas-là le x_m-discriminant est identiquement zéro.

Soit maintenant $F \equiv C(\tau) = f(x,y,\tau) = 0,\ f \in \mathbb{C}\{x,y,\tau\}$ une famille de courbes réduites planes complexes à l'origine, dépendent analytiquement d'un paramètre τ telle que $f(0,y,0) \not\equiv 0$.

Soit $C = C(0)$ telle que $x = 0$ n'est pas tangente à C .

Ensuite on va rappeler le critère discriminant de Zariski pour savoir quand toutes les courbes $C(\tau)$ de la famille F sont équisingulières à C .

Théorème 1.3.1 (Zariski [Za3], Teissier [Te1])

1. *Il existe un voisinage I de 0 dans l'axe τ tel que pour tout $\tau \in I$ les fibres $C(\tau)$ sont toutes équisingulières si et seulement s'il existe une unité $\epsilon(x,\tau) \in \mathbb{C}\{x,\tau\}$ et un nombre M tels que*

$$\Delta_y(f(x,y,\tau)) = x^M \epsilon(x,\tau)$$

2. *De plus, si ces conditions sont réalisées, il existe un voisinage U de 0 dans la surfaces $X \equiv F = 0$ $U = (U_0 \times V) \cap X$ (où $U_0 \subseteq \mathbb{C}$ et $V \subseteq \mathbb{C}^2$) et un morphisme*

$$\varphi : \coprod_{i=1}^{r} (\mathbb{C},0)_i \times U_0 \longrightarrow V \times U_0$$
$$(t_i,\tau) \longrightarrow (x(t_i,\tau), y(t_i,\tau), \tau)$$

tels que l'image de φ soit X .

■

1.4 Arbre d'Eggers et graphe de résolution.

1.4.1 Définition de l'arbre d'Eggers

Le diagramme d'Eggers [E] est une représentation graphique commode des exposants caractéristiques des différentes branches de la courbe C et aussi du contact entre elles, c'est-à-dire qu'il est une représentation de la topologie de C, puisque l'on sait que le type topologique de $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ est déterminé par ces nombres.

Définition 1.4.1 *Soit C_i une branche de C, on appelle chaîne élémentaire de C_i le graphe K_i défini comme suit :*

1. *Les sommets sont des points noirs et un point blanc ; les points noirs sont en correspondance bijective avec les éléments de S_i par une application v que nous appelons valuation.*
2. *Le sommet blanc n'a pas de valuation.*
3. *Les sommets sont reliés de la façon suivante :*
   Le sommet blanc est relié au sommet noir de valuation la plus grande par une arête, qui est discontinue si la valuation est un élément de $S_i^2 - S_i^1$. Si on prend un sommet noir, disons Q, dont la valuation n'est pas maximale, il est relié au sommet de valuation supérieure la plus proche par une arête, qui est discontinue si $v(Q)$ est dans $S_i^2 - S_i^1$.

Si on prend deux branches différentes C_i , C_j de C, on appelle *graphe partiel* K_{ij} de C_i et C_j, le plus petit sous-graphe connexe de K_i qui contient les sommets $Q \in K_i$ avec $v(Q) \leq \dfrac{\alpha_{ij}}{n_i}$. Les graphes partiels K_{ij} et K_{ji} sont égaux.

Finalement on définit *le diagramme d'Eggers $T(C)$ de C* comme le graphe obtenu en identifiant les graphes partiels K_{ij}, K_{ji} dans la réunion disjointe des chaînes élémentaires $K_1, \ldots, K_r$.

On voit aussitôt que deux germes de courbes réduites sont équisinguliers si et seulement si ils ont le même diagramme d'Eggers.

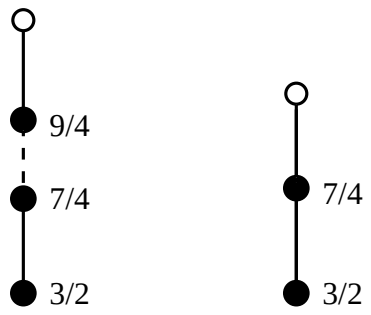
Exemple 1.4.1 *Soit $C \equiv f = f_1.f_2 = [(y^2 - x^3)^2 - 4yx^6 - x^9][(y^2 - x^3)^2 - 4yx^5 - x^7] = 0$. Si $C_i \equiv f_i(x, y) = 0$ alors*

$$S_1 = S_1^1 \cup S_1^2 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right\} \bigcup \left\{\frac{7}{4}\right\}$$

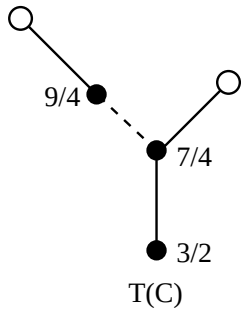
et

$$S_2 = S_2^1 \cup S_2^2 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\} \bigcup \left\{\frac{7}{4}\right\}.$$

Ainsi les chaînes élémentaires sont



et le diagramme d'Eggers de C est



On appelle *point base de* $T(C)$ le sommet de $T(C)$ de valuation la plus petite.

Remarque 1.4.1 *En général il n'y a pas de bijection entre les sommets noirs de $T(C)$ et l'ensemble $\bigcup_i S_i$. Pour voir un exemple il suffit de prendre deux branches C_1 et C_2 équisingulières telles que* $\mathrm{cont}(C_1, C_2) < \beta^1_{g_1}$.

Maintenant on va associer trois nombres à chaque sommet noir Q de $T(C)$:

$d_1(Q)$:=nombre d'arêtes discontinues de $T(C)$ qui sortent de Q vers un sommet noir de valuation plus grande ou vers un sommet blanc de $T(C)$.

$d_2(Q)$:=nombre d'arêtes pleines de $T(C)$ qui sortent de Q vers un sommet noir de valuation plus grande ou vers un sommet blanc de $T(C)$.

$k(Q)$:= nombre d'arêtes pleines entre Q et le point base.

Définition 1.4.2 *Soit Q un sommet noir de $T(C)$. On dira que Q est un sommet simple de $T(C)$ si $d_1(Q) + d_2(Q) = 1$ (c'est-à-dire, $d_1(Q) = 0$ et $d_2(Q) = 1$ puisque $d_2(Q) = 0$ et $d_1(Q) = 1$ à la même fois est impossible). Dans le cas contraire on dira que Q est un sommet de bifurcation.*

Lemme 1.4.1

1. *La courbe C contients deux branches transverses si et seulement si la valuation du point base de $T(C)$ est égale à 1.*
2. *Si Q est un sommet de $T(C)$ tel que $v(Q) = 1$ (Q est le point base de $T(C)$) alors $d_2(Q) = 0$ et $d_1(Q) = t$ où t est le nombre des composantes tangentielles de C, c'est-à-dire le nombre de droites tangentes distinctes de C.*

Démonstration

Il existe deux branches C_i, C_j de C telles que $(C_i, C_j) = m(C_i)m(C_j)$ si et seulement si

$$\frac{(C_i, C_j)}{m(C_j)} = m(C_i) = \overline{\beta_0^i}. \tag{1.16}$$

Mais d'après la proposition (1.2.2) on sait que (1.16) est équivalent à $\mathrm{cont}(C_i, C_j) = \beta_0^i$. De plus $\mathrm{cont}(C_i, C_j) = \beta_0^i$ si et seulement s'il existe un sommet Q de $T(C)$ tel que $v(Q) = \dfrac{\alpha_{ij}}{n_i} = 1$ et nécessairement Q doit être le point base de $T(C)$.

D'autre part, comme $v(Q) = 1 \neq \dfrac{\beta_k^i}{n_i}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, g_i\}$, donc $d_2(Q) = 0$. De plus si les chaînes élémentaires K_i de C_i et K_j de C_j sont séparées dans le sommet Q alors

$$\frac{\mathrm{cont}(C_i, C_j)}{n_i} = \frac{\mathrm{cont}(C_j, C_i)}{n_j} = 1$$

et d'après la proposition (1.2.2) on a $(C_i, C_j) = n_i n_j$, c'est-à-dire que K_i et K_j sont séparées dans le sommet Q si et seulement si C_i et C_j sont transverses. Alors $d_1(Q)$ est égal au nombre de tangentes distinctes de C.

■

Remarque 1.4.2 *La définition du diagramme d'Eggers est facilement extensible à un germe de courbe réductible plane $C \equiv f(x, y) = u f_1^{\sigma_1} \cdots f_r^{\sigma_r}$. Il suffit ajouter le nombre σ_i au sommet blanc qui correspond à la branche $C_i \equiv f_i(x, y) = 0$ de C .*

1.4.2 Le graphe de la résolution.

On considére l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme l'espace des droites passant par l'origine dans $\mathbb{C}^2$.

Si on choisit les coordonnées x, y dans $\mathbb{C}^2$ l'espace projectif est recouvert par deux cartes affines

$$U = \{(x, y) \ : \ x \neq 0\} \qquad V = \{(x, y) \ : \ y \neq 0\}. \tag{1.17}$$

Considérons maintenant la surface

$$Z = \{(x, y, u : v) \ / \ xv - yu = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

La première projection donne un morphisme algébrique $\Pi : Z \longrightarrow \mathbb{C}^2$.

La fibre $\Pi^{-1}(0)$ est l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tandis que la fibre $\Pi^{-1}(P)$ où $P \neq 0$ est un seul point.

Ainsi l'application Π transforme l'origine de $\mathbb{C}^2$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

L'application Π est appelée éclatement du point 0 , et la fibre $\Pi^{-1}(0)$ est appelée diviseur exceptionnel de Π .

Soit maintenant $C \equiv f(x, y) = 0$ une courbe réductible quelconque de multiplicité à l'origine égal à n ; on considére la composition

$$f \circ \Pi : Z \longrightarrow \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

L'image de $f \circ \Pi$ est appelée la transformée totale de C . Cette transformée totale contient le diviseur exceptionnel de Π , $D = \Pi^{-1}(0)$, compté n fois.

On appelle transformée stricte de C la courbe que l'on obtient en enlevant n fois le diviseur exceptionnel D à la transformée totale de C .

Théorème 1.4.1 *Soit C une courbe réduite quelconque. Il existe une suite finie d'éclatements de points telle que la transformée stricte C' de C par la composition de ces éclatements est non singulière.*

■

Le morphisme $C' \longrightarrow C$ induit par la composition de ces éclatements est appelé résolution de la courbe C . On peut énoncer un résultat meilleur :

Théorème 1.4.2 *Soit C une courbe réduite quelconque sur une surface lisse F. Il existe une suite finie d'éclatements*

$$F^{(e)} \to \ldots \to F^{(1)} \to F$$

telle que si $\Pi : F^{(e)} \longrightarrow F$ est sa composition alors l'image réciproque des points singuliers de C (le diviseur exceptionnel) est la réunion de courbes non singulières qui se coupent transversalement sur la surface $F^{(e)}$ et de plus la dernière transformée stricte de C par Π, $C^{(e)}$, est une courbe non singulière qui coupe transversalement le diviseur exceptionnel de Π .

■

La restriction de Π à la courbe C donne une résolution de C qui s'appelle résolution plongée.

Dans la suite, sauf mention du contraire, nous considérerons seulement des résolutions plongées minimales, c'est-à-dire toute autre résolution plongée $C'' \longrightarrow C$ se factorise par elle

$$C'' \longrightarrow C' \longrightarrow C$$

De plus cette résolution est minimale dans le sens suivant :

1. La restriction de Π à chaque branche C_i de C est une résolution de C_i.
2. Les courbes qui apparaissent pendant la résolution (des transformées strictes et des diviseurs exceptionnels) sont non singulières et n'ont que des croisements normaux.

Soit $\mathcal{E}$ le diviseur exceptionnel total de la résolution plongée Π de C .

D'aprés le théorème ci-dessus $\mathcal{E}$ est réunion de courbes lisses. Ces courbes lisses sont les transformées totales dans $F^{(e)}$ de diviseurs qui apparaissent pendant la résolution et après les différents éclatements.

Donc $\mathcal{E} = D_1 \cup \cdots \cup D_e$ où D_i est la transformée totale dans $F^{(e)}$ du diviseur qui apparaît dans $F^{(i+1)}$ quand on éclate le point O_i dans $F^{(i)}$.

Ainsi $\mathcal{E}$ est un diviseur à croisements normaux connexe, c'est-à-dire que les singularités sont au pire des points doubles ordinaires.

L'ensemble $\{D_i\}_{i=1}^{e}$ est appelée l'ensemble de diviseurs exceptionnels de Π .

On peut définir un graphe qui représente comment se coupent les diviseurs D_i , c'est le graphe dual de la résolution de C .

Définition 1.4.3 *Soit Π la résolution plongée de la courbe C. Le graphe dual de la résolution Π de C consiste à représenter chaque diviseur exceptionnel de Π par un sommet et deux sommets sont reliés par une arête si les diviseurs correspondants se coupent dans $F^{(e)}$. A chaque sommet est associé le numéro d'ordre d'apparition du diviseur qu'il représente.*

Une branche lisse de la transformée stricte de C qui coupe transversalement un diviseur D est notée par une flèche qui s'attache au sommet associé à D.

Appel au langage des géomètres italiens

Soient O un point quelconque sur une surface lisse F et

$$F^{(e)} \to \ldots \to F^{(1)} \to F$$

une suite finie d'éclatements telle que $\Pi : F^{(e)} \longrightarrow F$ est sa composition.

Si $O_i \in F^{(i)}$ et $i < j$ on notera par :

1. $\mathcal{E}_{i,j}$ le diviseur exceptionnel total du point O_i dans la surface $F^{(j)}$.
2. $E_{i,j}$ la transformée stricte du point O_i dans la surface $F^{(j)}$.

On a alors

$$\mathcal{E}_{i,j} = E_{i,j} \cup E_{i+1,j} \cup \cdots \cup E_{j-1,j}.$$

Définition 1.4.4 *Soit $i < j$. On dit que le point $O_j \in F^{(j)}$ est un point libre du point $O_i \in F^{(i)}$ si O_j est un point non singulier de $\mathcal{E}_{i,j}$.*
Dans le cas contraire O_j est appelé point satellite de O_i.

$\Diamond$

Maintenant on va exprimer un algorithme pour construire le graphe dual de la résolution Π d'une courbe réductible plane quelconque.

On va commencer avec une branche C .

1.4.3 Le graphe dual d'une branche.

Soit $\{O_0, O_1, \ldots, O_{e-1}\}$ l'ensemble des centres d'éclatements de Π $(O_0 = 0)$ et $\{C^{(i)}\}_{i=0}^{e}$ l'ensemble des transformées strictes de C $(C^{(0)} = C)$.

On rappelle que si D est une autre branche qui passe par le point O_i alors la multiplicité d'intersection de $C^{(i)}$ et D en O_i est

$$(C^{(i)}, D)_{O_i} = (C^{(i+1)}, D')_{O_{i+1}} + m_{O_i}(C^{(i)}) m_{O_i}(D) \tag{1.18}$$

où D' est la transformée stricte de D par la résolution Π .

De plus $m_{O_i}(C^{(i)}) = (C^{(i+1)}, E)_{O_{i+1}}$, où E est le diviseur exceptionnel dans $F^{(i+1)}$ qui apparaît par éclatement du point O_i dans $F^{(i)}$.

On va fixer les notations.

Le diviseur exceptionnel qui apparaît par éclatement du point O_i dans $F^{(i+1)}$ est denoté $E_{i,i+1}$.

De plus, $\mathcal{E}_{i,j}$ est le transformé total dans $F^{(j)}$ du diviseur $E_{i,i+1}$; donc $\mathcal{E}_{i,j}$ est le diviseur à croisements normaux réduit

$$\mathcal{E}_{i,j} = E_{i,j} \cup E_{i+1,j} \cup \cdots \cup E_{j-1,j}$$

où $E_{i,j}$ est la transformée stricte du point O_i dans la surface $F^{(j)}$.

Ainsi si $F^{(e)} \to \cdots \to F^{(1)} \to F$ est la résolution plongée de C alors $D_i = E_{i-1,e}$.

Notons par s_i la multiplicité à O_i de $C^{(i)}$, c'est-à-dire, $s_i := m_{O_i}(C^{(i)})$.

Donc on vérifie :

Lemme 1.4.2 *Soit* $i \in \{0, \ldots, e-2\}$.

$$D_{i+1} \cap D_{i+2} \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad m_{O_i}(C^{(i)}) = m_{O_{i+1}}(C^{(i+1)}) \ .$$

Démonstration
On doit démontrer

$$E_{i,e} \cap E_{i+1,e} = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad s_i > s_{i+1}$$

Mais $E_{i,e} \cap E_{i+1,e} = \emptyset \iff$ il existe $l, i+1 < l < e :\ O_l \in E_{i,l} \cap E_{i+1,l}$ parce que quand le point O_l s'éclate le diviseur qui apparaît $E_{l,l+1}$, sépare le diviseur $E_{i,l}$ de $E_{i+1,l}$.

Ainsi il suffit démontrer qu'il existe $l :\ i+1 < l < e$ tel que

$$O_l \in E_{i,l} \cap E_{i+1,l} \iff s_i > s_{i+1}$$

Supposons $s_i = s_{i+1}$ alors $(C^{(i+1)}, E_{i,i+1})_{O_{i+1}} = s_{i+1}$.

Mais

$$\begin{aligned}(C^{(i+1)}, E_{i,i+1})_{O_{i+1}} &= (C^{(i+2)}, E_{i,i+2})_{O_{i+2}} + m_{O_{i+1}}(C^{(i+1)})\underbrace{m_{O_{i+1}}(E_{i,i+1})}_{1} \\ &= (C^{(i+2)}, E_{i,i+2})_{O_{i+2}} + s_{i+1}\end{aligned}$$

donc $(C^{(i+2)}, E_{i,i+2})_{O_{i+2}} = 0$ et comme $O_{i+2} \in C^{(i+2)}$ alors $O_{i+2} \notin E_{i,i+2}$. Ainsi étant donné $l \geq i+2$ on a $O_l \notin E_{i,l}$.

Maintenant supposons que pour tout $l,\ i+1 < l < e : O_l \notin E_{i,l} \cap E_{i+1,l}$; donc pour $l = i+2$ on a $O_{i+2} \notin E_{i,i+2} \cap E_{i+1,i+2}$, mais comme $O_{i+2} \in E_{i+1,i+2}$ donc $O_{i+2} \notin E_{i,i+2}$ et $(C^{(i+2)}, E_{i,i+2})_{O_{i+2}} = 0$.

Alors $(C^{(i+1)}, E_{i,i+1})_{O_{i+1}} - m_{O_{i+1}}(E_{i,i+1}) = 0$, c'est-à-dire $s_i = s_{i+1}$.

■

Remarque 1.4.3 *On doit remarquer que si* $s_i > s_{i+1}$ *alors d'après la division Euclidienne il existe* $h \geq 1$ *et* $0 \leq s' < s_{i+1}$ *tels que* $s_i = hs_{i+1} + s'$.

Proposition 1.4.1 (Zariski [Za2]) *Soit* $s_i = hs_{i+1} + s'$ *où* $h \geq 1$ *et* $0 \leq s' < s_{i+1}$. *Alors on a :*

1. $s_{i+1} = \cdots = s_{i+h}$.
2. *Si* $s' \neq 0$ *alors* $s_{i+h+1} = s'$.

Démonstration

1. On procédera par récurrence sur h.
   Si $h = 1$ c'est évident.
   On suppose que la propriété est vraie pour l et on se propose de la montrer pour $l+1$.

$$\begin{aligned}
(C^{(i+l+1)}, E_{i,i+l+1})_{O_{i+l+1}} &= (C^{(i+l)}, E_{i,i+l})_{O_{i+l}} - m_{O_{i+l}}(C^{(i+l)})\overbrace{m_{O_{i+l}}(E_{i,i+l})}^{1} \\
&= (C^{(i+l)}, E_{i,i+l})_{O_{i+l}} - s_{i+l} \\
&= (C^{(i+1)}, E_{i,i+1})_{O_{i+1}} - s_{i+1} - s_{i+2} - \cdots - s_{i+l} \\
&= (C^{(i+1)}, E_{i,i+1})_{O_{i+1}} - ls_{i+1} \\
&= s_i - ls_{i+1} \\
&\geq^{l<h} s_{i+1} = s_{i+l}
\end{aligned}$$

   donc

$$(C^{(i+l+1)}, E_{i,i+l+1})_{O_{i+l+1}} \geq s_{i+l} = (C^{(i+l+1)}, E_{i+l,i+l+1})_{O_{i+l+1}} \tag{1.19}$$

   Ainsi $C^{(i+l+1)}$ est transverse à $E_{i+l,i+l+1}$ parce que sinon $E_{i+l,i+l+1}$ est tangente à $C^{(i+l+1)}$ en O_{i+l+1} et de plus comme $C^{(i+l+1)}$ est irréductible elle a une seule tangente donc $E_{i+l,i+l+1}$ est la droite tangente à $C^{(i+l+1)}$ en O_{i+l+1} et comme $E_{i,i+l+1} \neq E_{i+l,i+l+1}$, la droite $E_{i,i+l+1}$ est transverse à $C^{(i+l+1)}$ et on a :

$$(C^{(i+l+1)}, E_{i,i+l+1})_{O_{i+l+1}} = m_{O_{i+l+1}}(C^{(i+l+1)})\underbrace{m_{O_{i+l+1}}(E_{i,i+l+1})}_{1}$$

   c'est-à-dire

$$(C^{(i+l+1)}, E_{i,i+l+1})_{O_{i+l+1}} = s_{i+l+1}$$

   et de plus

$$(C^{(i+l+1)}, E_{i+l,i+l+1})_{O_{i+l+1}} > m_{O_{i+l+1}}(C^{(i+l+1)})m_{O_{i+l+1}}(E_{i+l,i+l+1}) = s_{i+l+1} \quad ,$$

   ce qui est une contradiction d'après (1.19).

   Donc $C^{(i+l+1)}$ est transverse à $E_{i+l,i+l+1}$ et

$$(C^{(i+l+1)}, E_{i+l,i+l+1})_{O_{i+l+1}} = m_{O_{i+l+1}}(C^{(i+l+1)})m_{O_{i+l+1}}(E_{i+l,i+l+1})$$

   c'est-à-dire $s_{i+l} = s_{i+l+1}$.

2. D'après le raisonnement ci-dessus on a

$$(C^{(i+h+1)}, E_{i,i+h+1})_{O_{i+h+1}} = s_i - hs_{i+1} = s' < s_{i+1}.$$

Mais comme $(C^{(i+h+1)}, E_{i+h,i+h+1})_{O_{i+h+1}} = s_{i+h} = s_{i+1}$, on a :

$$s' = (C^{(i+h+1)}, E_{i,i+h+1})_{O_{i+h+1}} < (C^{(i+h+1)}, E_{i+h,i+h+1})_{O_{i+h+1}} \quad (1.20)$$

donc $C^{(i+h+1)}$ est transverse à $E_{i,i+h+1}$ parce que sinon $E_{i,i+h+1}$ est tangent à $C^{(i+h+1)}$ et

$$(C^{(i+h+1)}, E_{i,i+h+1})_{O_{i+h+1}} > m_{O_{i+h+1}}(C^{(i+h+1)}) = s_{i+h+1} \quad (1.21)$$

De plus comme $E_{i+h,i+h+1} \neq E_{i,i+h+1}$ alors $C^{(i+h+1)}$ est transverse à $E_{i+h,i+h+1}$ et on a :

$$(C^{(i+h+1)}, E_{i+h,i+h+1})_{O_{i+h+1}} = m_{O_{i+h+1}}(C^{(i+h+1)}) = s_{i+h+1} \quad (1.22)$$

Ainsi d'après (1.21) et (1.22) on a :

$$(C^{(i+h+1)}, E_{i,i+h+1})_{O_{i+h+1}} > (C^{(i+h+1)}, E_{i+h,i+h+1})_{O_{i+h+1}},$$

ce qui est une contradiction d'après (1.20).

Ainsi $C^{(i+h+1)}$ est transverse à $E_{i,i+h+1}$ et on a :

$$(C^{(i+h+1)}, E_{i,i+h+1})_{O_{i+h+1}} = m_{O_{i+h+1}}(C^{(i+h+1)})m_{O_{i+h+1}}(E_{i,i+h+1}) = s_{i+h+1}$$

c'est-à-dire $s' = s_{i+h+1}$.

■

Appel au langage des géomètres italiens

La proposition ci-dessus a un énoncé plus précis dans le langage des géomètres italiens.

Proposition 1.4.2 (Zariski[Za2]) *Soit $s_i = hs_{i+1} + s'$ où $h \geq 1$ et $0 \leq s' < s_{i+1}$, alors on a :*

1. $s_{i+1} = s_{i+2} = \cdots = s_{i+h}$.
2. *Si $h > 1$ alors $O_{i+2}, O_{i+3}, \ldots, O_{i+h}$ sont des points satellites de O_i (et en conséquence de O).*

3. *Si $s' \neq 0$ alors $s_{i+h+1} = s'$ et O_{i+h+1} est un point satellite de O_i (et en conséquence de O).*
4. *Si $s' = 0$ alors O_{i+h+1} est un point libre de O_i. De plus si $s' = 0$ et $h > 1$ alors O_{i+h+1} est un point libre de O.*

■

Remarque 1.4.4 *Soit $O_i \in F^{(i)}$. Il existe $\rho \in \mathbb{Z}^+$ qui depend de i tel que $s_i = s_{i+1} + \cdots + s_{i+\rho}$. Plus précisément, si $s_i = hs_{i+1} + s'$ où $h \geq 1$ et $0 \leq s' < s_{i+1}$, on a les cas suivants :*

1. *Si $s' = 0$ alors $s_i = hs_{i+1}$ et d'après la proposition ci-dessus on peut écrire :*
$$s_i = s_{i+1} + s_{i+2} + \cdots + s_{i+h},$$
donc $\rho = h$.
2. *Si $s' \neq 0$ alors $s_i = hs_{i+1} + s'$ et d'après la proposition ci-dessus on peut écrire :*
$$s_i = s_{i+1} + s_{i+2} + \cdots + s_{i+h} + s_{i+h+1},$$
donc $\rho = h + 1$.

Les points $O_{i+1}, \ldots, O_{i+\rho}$ tels que $s_i = s_{i+1} + \cdots + s_{i+\rho}$ sont appelés points proches *du point O_i.*

De plus tout point O_j avec $j > 0$ ($O_0 = O$) est un point proche d'au moins un point (il suffit prendre O_{j-1}) et O_j est un point proche d'au plus deux points (O_{j-1} et O_i où $i = \max\{k \in \mathbb{N} \,/\, s_k > s_{j-1}\}$).

On peut caractériser les points libres de O à partir de la définition des points proches, de la façon suivante :

Proposition 1.4.3 (Zariski [Za2])

O_j ($j > 0$) est un point libre de $O \iff O_j$ est seulement un point proche de O_{j-1}.

■

◊

On va continuer maintenant avec la construction du graphe dual d'un germe de courbe irréductible plane.

Lemme 1.4.3 *On a* $s_i > s_{i+1}$ *et* $s_i = s_{i+1} + \cdots + s_{i+l}$ *si et seulement si* $O_{i+j} \in E_{i,i+j}$ *pour tout* $1 \leq j \leq l$ *et* $O_{i+l+1} \notin E_{i,i+l+1}$.

Démonstration
$''\Rightarrow''$ On procédera par récurrence sur j.
Si $j = 1$ c'est évident parce que $O_{i+1} \in E_{i,i+1}$.
On suppose que la propriété est vraie pour $j-1$ et on se propose de la montrer pour $j \leq l$.

Supposons que $O_{ij} \notin E_{i,i+j}$ alors $(C^{(i+j)}, E_{i,i+j})_{O_{i+j}} = 0$, donc

$$(C^{(i+j-1)}, E_{i,i+j-1})_{O_{i+j-1}} - m_{O_{i+j-1}}(C^{(i+j-1)}) \underbrace{m_{O_{i+j-1}}(E_{i,i+j-1})}_{1} = 0 \quad (1.23)$$

c'est-à-dire $(C^{(i+j-1)}, E_{i,i+j-1})_{O_{i+j-1}} - s_{i+j-1} = 0$.

Mais on a aussi $(C^{(i+1)}, E_{i,i+1})_{O_{i+1}} - \sum_{r=i+1}^{i+j-1} m_{O_r}(C^{(r)}) = 0$, donc

$s_i = \sum_{r=i+1}^{i+j-1} m_{O_r}(C^{(r)})$ et d'après l'hypothèse on a $j-1 = l$, ce qui est une contradiction puisque $j \leq l$.

Il reste à démontrer que $O_{i+l+1} \notin E_{i,i+l+1}$.

Supposons que $O_{i+l+1} \in E_{i,i+l+1}$, donc $(C^{(i+l+1)}, E_{i,i+l+1})_{O_{i+l+1}} > 0$; mais ce n'est pas possible parce que

$$\begin{aligned}(C^{(i+l+1)}, E_{i,i+l+1})_{O_{i+l+1}} &= (C^{(i+l)}, E_{i,i+l})_{O_{i+l}} - m_{O_{i+l}}(C^{(i+l)}) m_{O_{i+l}}(E_{i,i+l}) \\ &= (C^{(i+l)}, E_{i,i+l})_{O_{i+l}} - s_{i+l} \\ &= (C^{(i+1)}, E_{i,i+1})_{O_{i+1}} - s_{i+1} - \cdots - s_{i+l} \\ &= s_i - s_{i+1} - \cdots - s_{i+l} = 0.\end{aligned}$$

$''\Leftarrow''$ Comme $O_{i+j} \in E_{i,i+j}$ pour tout j : $1 \leq j \leq l$ si on prend $j = 2$ on a $O_{i+2} \in E_{i,i+2}$ donc $(C^{(i+2)}, E_{i,i+2})_{O_{i+2}} > 0$ et

$$(C^{(i+1)}, E_{i,i+1})_{O_{i+1}} - m_{O_{i+1}}(C^{(i+1)}) m_{O_{i+1}}(E_{i,i+1}) > 0$$

c'est-à-dire $s_i > s_{i+1}$.

Ainsi d'après la division Euclidienne et la proposition (1.4.1) on trouve le résultat.

■

Lemme 1.4.4 *Si* $s_i > s_{i+1}$ *et* $s_i = s_{i+1} + \cdots + s_{i+l}$ *alors*

$$D_{i+1} \cap D_{i+l+1} \neq \emptyset.$$

Démonstration
Comme $O_{i+l} \in E_{i,i+l}$ et $O_{i+l+1} \notin E_{i,i+l+1}$ alors $E_{i,i+l+1} \cap E_{i+l,i+l+1} = P \neq O_{i+l+1}$, c'est-à-dire que les deux diviseurs se coupent dans un point différent du nouveau point à éclater O_{i+l+1} , donc ils se couperont jusqu'à la fin de la résolution et alors $E_{i,e} \cap E_{i+l,e} \neq \emptyset$.

■

Remarque 1.4.5 *Il résulte du Lemme (1.4.2), de la Proposition (1.4.1) et du Lemme (1.4.4) que l'on peut déterminer comment se coupent dans* $F^{(e)}$ *les diviseurs exceptionnels de la résolution à partir de la suite des multiplicités des transformées strictes de la branche* C.

Il reste à determiner les multiplicités des transformées strictes de la courbe C.

Théorème 1.4.3 (Zariski [Za2]) *Soient* C *et* C' *deux branches telles que*
$O_i \in C^{(i)} \cap C'^{(i)}$ *et* $O_{i+1} \in C^{(i+1)} \cap C'^{(i+1)}$ *(où* $C^{(k)}$ *(resp.* $C'^{(k)}$*) est la* k*-ème transformée stricte de* C *(resp.* C'*)).*
Soient $s_i = m_{O_i}(C^{(i)})$ $s_{i+1} = m_{O_{i+1}}(C^{(i+1)})$ $s'_i = m_{O_i}(C'^{(i)})$
$s'_{i+1} = m_{O_{i+1}}(C'^{(i+1)})$.
Supposons $\dfrac{s_i}{s_{i+1}} = \dfrac{s'_i}{s'_{i+1}} = \dfrac{a}{b}$ *où* p.g.c.d.$(a,b) = 1$.
Si le développement en fractions continues de $\dfrac{a}{b}$ *est* $\dfrac{a}{b} = [h_1, \ldots, h_q]$ *,c'est-à-dire*

$$\begin{cases} a = h_1 b + r_1 \\ b = h_2 r_1 + r_2 \\ \vdots \\ h_{q-1} = h_q r_q \end{cases}$$

où $r_1 > r_2 > \cdots > r_q > 0$ *et* $q \geq 1$ *alors on vérifie :*

1. $O_{i+k} \in C^{(i+k)} \cap C'^{(i+k)}$ *pour tout* $k \in \{2, \ldots, (h_1 + \ldots + h_q)\}$.
2. *Si* $s_i = \rho b$ *et* $s'_i = \rho' b$ *de plus*

$$\begin{cases} m_{O_{i+k_1}}(C^{(i+k_1)}) = \rho b \\ m_{O_{i+h_1+k_2}}(C^{(i+h_1+k_2)}) = \rho r_1 \\ \vdots \\ m_{O_{i+h_1+\ldots+h_{q-1}+k_q}}(C^{(i+h_1+\ldots+h_{q-1}+k_q)}) = \rho r_q \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} m_{O_{i+k_1}}(C'^{(i+k_1)}) = \rho' b \\ m_{O_{i+h_1+k_2}}(C'^{(i+h_1+k_2)}) = \rho' r_1 \\ \vdots \\ m_{O_{i+h_1+\ldots+h_{q-1}+k_q}}(C'^{(i+h_1+\ldots+h_{q-1}+k_q)}) = \rho' r_q \end{cases}$$

où $k_j \in \{1, \ldots, h_j\}$ *pour tout* $j \in \{1, \ldots, q\}$.

■

Ensuite on va exprimer la suite de multiplicités des transformées strictes à partir des exposants caractéristiques de C.

Si $\{n, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ sont les exposants caractéristiques de C , un développement de Puiseux de C est de la forme :

$$C \equiv y = a_1 x + \cdots + a_h x^h + a_{\frac{\beta_1}{n}} x^{\frac{\beta_1}{n}} + \cdots + a_{\frac{\beta_2}{n}} x^{\frac{\beta_2}{n}} + \cdots + a_{\frac{\beta_g}{n}} x^{\frac{\beta_g}{n}} + \cdots \quad (1.24)$$

où $h = \left[\dfrac{\beta_1}{n}\right]$ (c'est-à-dire, la partie entière de $\dfrac{\beta_1}{n}$).

D'après (1.24) est évident que $s_0 = m_O(C^{(0)}) = m(C) = n$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, h-1\}$ la i-ème transformée stricte de C a un développement de la forme :

$$C^{(i)} \equiv y_i = a_{i+1} x + \cdots + a_h x^{h-i} + a_{\frac{\beta_1}{n}} x^{\frac{\beta_1 - in}{n}} + \cdots + a_{\frac{\beta_g}{n}} x^{\frac{\beta_g - in}{n}} + \cdots \quad (1.25)$$

et

$$C^{(h)} \equiv y_h = a_{\frac{\beta_1}{n}} x^{\frac{\beta_1 - hn}{n}} + \cdots + a_{\frac{\beta_g}{n}} x^{\frac{\beta_g - hn}{n}} + \cdots \quad (1.26)$$

Ainsi d'après (1.25) on a

$$s_0 = s_1 = \cdots = s_{h-1} = n$$

et de plus si

$$\beta_1 = hn + r_1 \tag{1.27}$$

où $0 < r_1 < n$ on a $m_{O_h}(C^{(h)}) = s_h = r_1$.

Donc si le développement en fractions continues de $\dfrac{n}{r_1}$ est $[h_1, \ldots, h_q]$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} n = h_1 r_1 + r_2 \\ r_1 = h_2 r_2 + r_3 \\ \vdots \\ r_{q-1} = h_q r_q \end{cases} \tag{1.28}$$

d'après le théorème (1.4.3) on a

$$\begin{array}{l} s_h = s_{h+1} = \cdots = s_{h+h_1-1} = r_1 \\ s_{h+h_1} = s_{h+h_1+1} = \cdots = s_{h+h_1+h_2-1} = r_2 \\ \vdots \\ s_{h+h_1+\cdots+h_{q-1}} = \cdots = s_{h+h_1+\cdots+h_q-1} = r_q \end{array}$$

Remarque 1.4.6 *D'après (1.27) et (1.28) on a* $r_q = \text{p.g.c.d.}\{n, \beta_1\} = l_1$.

Le point $O_{h+h_1+\cdots+h_q-1}$ est denoté $\bar{O}_1$ et la transformée stricte $C^{(h+h_1+\cdots+h_q-1)}$ est denotée $\bar{C}_1$.

Le point $\bar{O}_1$ est appelé par Zariski le premier point satellite terminal de O en C.

Nous utiliserons sans le démontrer le théorème suivant, qui donne des informations sur la suite des multiplicités des transformées strictes qui suivent $\bar{C}_1$.

Théorème 1.4.4 (Zariski [Za2]) *Il y a exactement* g *points satellites terminaux de* O *en* C : $\bar{O}_1, \ldots, \bar{O}_g$.
De plus si $\bar{C}_j$ *est la transformée stricte de* C *qui passe par* $\bar{O}_j$ *alors les exposants caractéristiques de* $\bar{C}_j$ *sont* $\{l_j, \beta_{j+1} - \beta_j + l_j, \ldots, \beta_g - \beta_j + l_j\}$ *où* $j \in \{1, \ldots, g\}$ *et* $l_j = \text{p.g.c.d.}(\beta_0, \ldots, \beta_j)$ *(en particulier* $\bar{C}_g$ *est une branche non singulière).* ∎

D'après les théorèmes (1.4.3) et (1.4.4) on peut construire la suite de multiplicités des transformées strictes de C. Cette suite vient donnée à partir des exposants caractéristiques de C de la façon suivante :

Soit $[h_0^1, h_1^1, \ldots, h_{q^1}^1]$ le développement en fractions continues de $\dfrac{\beta_1}{n}$; c'est-à-dire

$$\begin{cases} \beta_1 = h_0^1 n + r_1^1 \\ n = h_1^1 r_1^1 + r_2^1 \\ \vdots \\ r_{q^1-1}^1 = h_{q^1}^1 r_{q^1}^1 \end{cases} \tag{1.29}$$

donc

$$\begin{aligned} & s_0 = s_1 = \ldots = s_{h_0^1-1} = n \\ & s_{h_0^1} = s_{h_0^1+1} = \ldots = s_{h_0^1+h_1^1-1} = r_1^1 \\ & \vdots \\ & s_{h_0^1+h_1^1+\cdots+h_{q^1-1}^1} = \cdots = s_{h_0^1+h_1^1+\cdots+h_{q^1}^1-1} = r_{q^1}^1 = l_1 \ . \end{aligned} \tag{1.30}$$

Maintenant $s_{h_0^1+h_1^1+\cdots+h_{q^1-1}^1} := s_{k^1} = l_1$ et on recommence avec la branche $\bar{C}_1$ de multiplicité l_1. Le premier exposant caractéristique de $\bar{C}_1$ est $\beta_2 - \beta_1 + l_1$.

Si $[h_0^2, h_1^2, \ldots, h_{q^2}^2]$ est le développement en fractions continues de $\dfrac{\beta_2 - \beta_1 + l_1}{l_1}$; c'est-à-dire

$$\begin{cases} \beta_2 - \beta_1 + l_1 = h_0^2 l_1 + r_1^2 \\ l_1 = h_1^2 r_1^2 + r_2^2 \\ \vdots \\ r_{q^2-1}^2 = h_{q^2}^2 r_{q^2}^2 \end{cases} \tag{1.31}$$

donc

$$\begin{aligned} & s_{k^1} = s_{k^1+1} = \ldots = s_{k^1+h_0^2-1} = l_1 \\ & s_{k^1+h_0^2} = s_{k^1+h_0^2+1} = \ldots = s_{k^1+h_0^2+h_1^2-1} = r_1^2 \\ & \vdots \\ & s_{k^1+h_0^2+h_1^2+\cdots+h_{q^2-1}^2} = \cdots = s_{k^1+h_0^2+h_1^2+\cdots+h_{q^2}^2-1} = r_{q^2}^2 \end{aligned} \tag{1.32}$$

et comme $\text{p.g.c.d.}(\beta_2 - \beta_1 + l_1, l_1) = \text{p.g.c.d.}(\beta_2, \beta_1, l_1) = \text{p.g.c.d.}(\beta_2, \beta_1, \beta_0)$ on a $r_{q^2}^2 = l_2$.

En général si $[h_0^j, h_1^j, \ldots, h_{q^j}^j]$ est le développement en fractions continues de $\dfrac{\beta_j - \beta_{j-1} + l_{j-1}}{l_{j-1}}$; c'est-à-dire

$$\begin{cases} \beta_j - \beta_{j-1} + l_{j-1} = h_0^j l_{j-1} + r_1^j \\ l_{j-1} = h_1^j r_1^j + r_2^j \\ \vdots \\ r_{q^j-1}^j = h_{q^j}^j r_{q^j}^j \end{cases} \tag{1.33}$$

donc si $t^i = \sum_{\alpha=1}^{i} k^\alpha$ $(t^0 = 0)$ on a

$$\begin{aligned} & s_{t^{j-1}} = s_{t^{j-1}+1} = \ldots = s_{t^{j-1}+h_0^j-1} = l_{j-1} \\ & s_{t^{j-1}+h_0^j} = s_{t^{j-1}+h_0^j+1} = \ldots = s_{t^{j-1}+h_0^j+h_1^j-1} = r_1^j \\ & \vdots \\ & s_{t^{j-1}+h_0^j+h_1^j+\cdots+h_{q^j-1}^j} = \cdots = s_{t^{j-1}+h_0^j+h_1^j+\cdots+h_{q^j}^j-1} = r_{q^j}^j \end{aligned} \tag{1.34}$$

où $k^{j-1} = \sum_{l=0}^{q^{j-1}} h_l^{j-1} - 1$ et $r_{q^j}^j = l_j = \text{p.g.c.d.}(\beta_0, \ldots, \beta_j)$.

En conclusion :

Proposition 1.4.4 (Suite des multiplicités [Za2])
Soit C un germe de courbe irréductible plane. Si $\{n, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ sont les exposants caractéristiques de C , $l_j = \text{p.g.c.d.}(\beta_0, \ldots, \beta_j)$ et $[h_0^j, h_1^j, \ldots, h_{q^j}^j]$ est le développement en fractions continues de $\dfrac{\beta_j - \beta_{j-1} + l_{j-1}}{l_{j-1}}$; c'est-à-dire

$$\begin{cases} \beta_j - \beta_{j-1} + l_{j-1} = h_0^j l_{j-1} + r_1^j \\ l_{j-1} = h_1^j r_1^j + r_2^j \\ \vdots \\ r_{q^j-1}^j = h_{q^j}^j r_{q^j}^j \end{cases} \tag{1.35}$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, g\}$ alors :

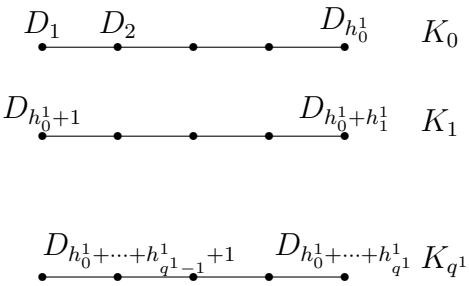
$$\begin{aligned} & s_{t^{j-1}} = s_{t^{j-1}+1} = \ldots = s_{t^{j-1}+h_0^j-1} = l_{j-1} \\ & s_{t^{j-1}+h_0^j} = s_{t^{j-1}+h_0^j+1} = \ldots = s_{t^{j-1}+h_0^j+h_1^j-1} = r_1^j \\ & \vdots \\ & s_{t^{j-1}+h_0^j+h_1^j+\cdots+h_{q^j-1}^j} = \cdots = s_{t^{j-1}+h_0^j+h_1^j+\cdots+h_{q^j}^j-1} = r_{q^j}^j \end{aligned} \tag{1.36}$$

$$\text{où } \; t^i := \sum_{\alpha=1}^{i} k^\alpha \; (t^0 = 0) \;\; , k^{j-1} = \sum_{l=0}^{q^{j-1}} h_l^{j-1} - 1 \;\; et \;\; r_{q^j}^j = l_j.$$

■

Ainsi d'après (1.30) et le lemme (1.4.2) on peut construire les sous-chaînes suivantes, pour le premier algorithme d'Euclide (1.30) :

$$s_0 = s_1 = \ldots = s_{h_0^1 - 1}$$



$$s_{h_0^1} = \cdots = s_{h_0^1+h_1^1-1}$$

$$\vdots$$

$$s_{h_0^1+h_1^1+\cdots+h_{q^1-1}^1} = \cdots = s_{h_0^1+\cdots+h_{q^1}^1-1}$$

Il reste à assembler les sous-chaînes $K_0, \ldots, K_{q^1}$.

Mais $s_{h_0^1-1} = n > s_{h_0^1} = r_1^1$ et

$$s_{h_0^1-1} = h_1^1 r_1^1 + r_2^1 = s_{h_0^1} + \cdots + s_{h_0^1+h_1^1-1} + s_{h_0^1+h_1^1}$$

donc d'après le lemme (1.4.4) on a $D_{h_0^1} \cap D_{h_0^1+h_1^1+1} \neq \emptyset$.

Ainsi le dernier sommet de la sous-chaîne K_0 est relié au premier sommet de la sous-chaîne K_2.

De plus, comme $s_{h_0^1+h_1^1-1} > s_{h_0^1+h_1^1}$ et

$$s_{h_0^1+h_1^1-1} = r_1^1 = h_2^1 \underbrace{r_2^1}_{s_{h_0^1+h_1^1}} + r_3^1 = s_{h_0^1+h_1^1} + \cdots + s_{h_0^1+\cdots+h_2^1-1} + s_{h_0^1+\cdots+h_2^1}$$

on a $D_{h_0^1+h_1^1} \cap D_{h_0^1+h_1^1+h_2^1+1} \neq \emptyset$.

Ainsi le dernier sommet de K_1 est relié au premier sommet de K_3.

A la fin on a

$$\underbrace{s_{h_0^1+\cdots+h_{q^1-1}^1-1}}_{r_{q^1-1}^1} > \underbrace{s_{h_0^1+\cdots+h_{q^1-1}^1}}_{r_{q^1}^1}$$

et $r^1_{q^1-1} = h^1_{q^1} r^1_{q^1}$ donc

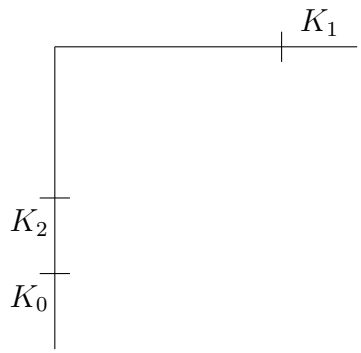
$$s_{h^1_0+\cdots+h^1_{q^1-1}-1} = s_{h^1_0+\cdots+h^1_{q^1-1}} + \cdots + s_{h^1_0+\cdots+h^1_{q^1}-1}$$

et $D_{h^1_0+\cdots+h^1_{q^1-1}} \cap D_{h^1_0+\cdots+h^1_{q^1}} \neq \emptyset$.

Ainsi le dernier sommet de K_{q^1-1} est relié au premier sommet de K_{q^1} et les sous-chaînes se retrouvent en le dernier sommet de K_{q^1}.

Ce dernier sommet de K_{q^1} est appelé point de rupture par F. Michel et C. Weber ([M-W]). Il correspond au diviseur qui apparaît quand on éclate le premier point satellite terminal. Le nouveau point à éclater qui est sur ce diviseur est appelé par Zariski le premier point libre principal.

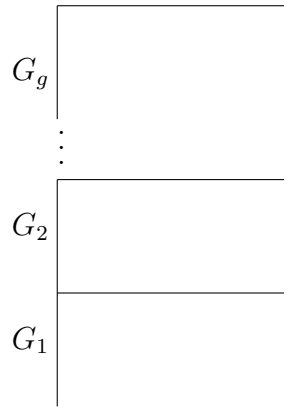
Le résultat de l'assemblage est le sous-graphe ci-dessus, où par convention, K_0 est noté verticalement. La dernière sous-chaîne est horizontale ou verticale selon la parité de q^1.



De cette manière, pour tout $j \in \{1, \ldots, g\}$ on peut construire un sous-graphe G_j. Il provient du j-ème algorithme d'Euclide (1.34).

Il reste à assembler les sous-graphes $G_1, \cdots, G_g$. Mais si on regarde les deux premiers algorithmes d'Euclide (1.30) et (1.32) on trouve que le sommet de rupture du sous-graphe G_1 est le premier sommet du sous-graphe G_2 et ainsi de suite pour les autres sous-graphes.

Donc on a



Remarque 1.4.7 *Si on regarde le dernier algorithme d'Euclide on a*

$$\begin{cases} \beta_g - \beta_{g-1} + l_{g-1} = h_0^g l_{g-1} + r_1^g \\ l_{g-1} = h_1^g r_1^g + r_2^g \\ \vdots \\ r_{q^g-1}^g = h_{q^g}^g r_{q^g}^g \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} r_{q^g-1}^g &= s_{t^{g-1}+h_0^g+\ldots+h_{q^g-1}^g-1} \\ &> s_{t^{g-1}+h_0^g+\ldots+h_{q^g-1}^g} \\ &= \cdots = s_{t^{g-1}+h_0^g+\ldots+h_{q^g}^g-1} \ . \end{aligned}$$

Mais si $\alpha = t^{g-1} + h_0^g + \ldots + h_{q^g-1}^g - 1$ *alors on a*

1. $C^{(\alpha+h_{q^g}^g)}$ *est non singulière.*
2. $(C^{(\alpha+h_{q^g}^g)}, E_{\alpha+h_{q^g-1}^g,\alpha+h_{q^g}^g})_{O_{\alpha+h_{q^g}^g}} = s_{\alpha+h_{q^g}^g-1} = 1$ *donc*

$$O_{\alpha+h_{q^g}^g} \in C^{(\alpha+h_{q^g}^g)} \cap E_{\alpha+h_{q^g}^g-1,\alpha+h_{q^g}^g} \tag{1.37}$$

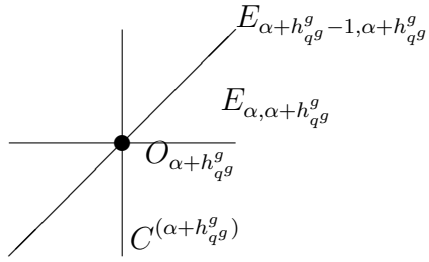
3.

$$\begin{aligned}
(C^{(\alpha+h^g_{q^g})}, E_{\alpha,\alpha+h^g_{q^g}})_{O_{\alpha+h^g_{q^g}}} &= (C^{(\alpha+h^g_{q^g}-1)}, E_{\alpha,\alpha+h^g_{q^g}-1})_{O_{\alpha+h^g_{q^g}-1}} \\
&\quad - m_{O_{\alpha+h^g_{q^g}-1}}(C^{(\alpha+h^g_{q^g}-1)})\underbrace{m_{O_{\alpha+h^g_{q^g}-1}}(E_{\alpha,\alpha+h^g_{q^g}-1})}_{1} \\
&= (C^{(\alpha+h^g_{q^g}-1)}, E_{\alpha,\alpha+h^g_{q^g}-1})_{O_{\alpha+h^g_{q^g}-1}} - s_{\alpha+h^g_{q^g}-1} \\
&= \cdots \\
&= (C^{(\alpha+1)}, E_{\alpha,\alpha+1})_{O_{\alpha+1}} - s_{\alpha+1} - s_{\alpha+2} - \cdots - s_{\alpha+h^g_{q^g}-1} \\
&= s_\alpha - s_{\alpha+1} - \cdots - s_{\alpha+h^g_{q^g}-1} \\
&= s_\alpha - (h^g_{q^g} - 1)s_{\alpha+1} \\
&= r^g_{q^g-1} - (h^g_{q^g} - 1)r^g_{q^g} = r^g_{q^g} = 1
\end{aligned}$$

donc

$$O_{\alpha+h^g_{q^g}} \in C^{(\alpha+h^g_{q^g})} \bigcap E_{\alpha,\alpha+h^g_{q^g}} \tag{1.38}$$

Ainsi il y a trois courbes de la résolution qui passent par le point $O_{\alpha+h^g_{q^g}}$



donc on doit éclater encore une fois pour obtenir la résolution plongée minimale, c'est-à-dire la résolution telle que les courbes qui apparaissent sont non singulières et n'ont que des croisements normaux.

En conséquence le nombre e *du Théorème (1.4.2) est exactement*

$$e = h^1_0 + \cdots + h^1_{q^1} + (h^2_0 - 1) + h^2_1 + \cdots h^2_{q^2} + \cdots + (h^g_0 - 1) + h^g_1 + \cdots h^g_{q^g}$$

où bien, $e = k^1 + \cdots + k^g + 1$. *Le décalage avec les indices de la suite de multiplicités provient de l'éclatement supplémentaire nécessaire pour éviter la situation du dessin ci-dessus.*

Remarque 1.4.8 *On doit noter que la suite des multiplicités commence avec l'indice zéro qui provient de la multiplicité de la branche originale* $C = C^{(0)}$ *mais le graphe dual commence avec l'indice 1 puisque il provient du premier diviseur.*

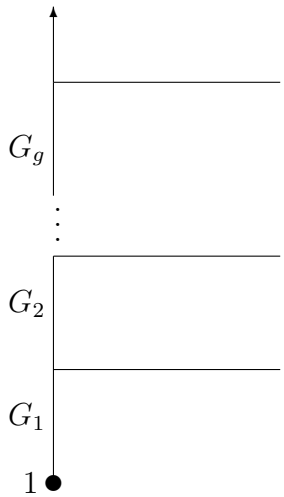
Il reste à voir où s'assemble la dernière transformée stricte $C^{(e)}$ de la branche C. Mais, puisque nous avons les égalités

$$1 = s_{t^g} = (C^{(t^g+1)}, E_{t^g,t^g+1})_{O_{t^g+1}}$$

et

$$m_{O_{t^g+1}}(C^{(t^g+1)})m_{O_{t^g+1}}(E_{t^g,t^g+1}) = 1,$$

la courbe $C^{(t^g+1)}$ est non singulière et transverse au diviseur D_r en O_{t^g+1}. Donc la flèche qui représente la dernière transformée stricte de C dans le graphe dual de la résolution s'attache au dernier point de rupture du graphe, c'est-à-dire



Lemme 1.4.5 (Interprétation géométrique de la construction.) *Soit* $s_i = hs_{i+1} + r$, $h \geq 1$ *et* $0 < r < s_{i+1}$ *(en particulière* $s_i > s_{i+1}$*). Alors le diviseur* $E_{i,i+k}$ *a le contact maximal avec* $C^{(i+k)}$ *au point* O_{i+k} *pour tout* $k \in \{1, \ldots, h\}$.

Démonstration

Souvenons nous que comme $s_i = hs_{i+1} + r$ d'après la proposition (1.4.1) on a

$$s_i = s_{i+1} + s_{i+2} + \ldots + s_{i+h} + s_{i+h+1}$$

où $s_{i+k} = s_{i+1}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, h\}$ et $s_{i+h+1} = r \neq 0$ par hypothèse.

On procéde par récurrence sur k .

Si $k = 1$ alors

$$\frac{(C^{(i+1)}, E_{i,i+1})_{O_{i+1}}}{m_{O_{i+1}}(C^{(i+1)})} = \frac{s_i}{s_{i+1}} = h + \frac{r}{s_i} \notin \mathbb{Z},$$

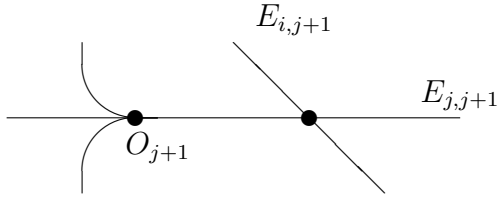
et d'après le corollaire (1.3.2) le diviseur $E_{i,i+1}$ a le contact maximal avec $C^{(i+1)}$ au point O_{i+1}.

On suppose que la propriété est vraie pour $k-1$ et on se propose de la montrer pour $k \leq h$:

$$\begin{aligned}
\frac{(C^{(i+k)}, E_{i,i+k})_{O_{i+k}}}{m_{O_{i+k}}(C^{(i+k)})} &= \frac{(C^{(i+k-1)}, E_{i,i+k-1})_{O_{i+k-1}} - m_{O_{i+k-1}}(C^{(i+k-1)})}{m_{O_{i+k}}(C^{(i+k)})} \\
&= \ldots \\
&= \frac{(C^{(i+1)}, E_{i,i+1})_{O_{i+1}} - s_{i+1} - s_{i+2} - \cdots - s_{i+k-1}}{s_{i+k}} \\
&= \frac{s_i - (k-1)s_{i+1}}{s_{i+k}} \\
&=^{k \leq h} \frac{s_i - (k-1)s_{i+1}}{s_{i+1}} \\
&= \underbrace{\frac{s_i}{s_{i+1}}}_{\notin \mathbb{Z}} - (k-1) \notin \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.4.9 *Ce lemme affirme que, lorsque l'éclatement d'un point O_i fait baisser la multiplicité de la transformée stricte d'une branche C, le diviseur $E_{i,i+1}$ qu'il fait apparaître non seulement est tangent à cette transformée stricte, mais a le contact maximal avec elle. Ceci entraîne que si la multiplicité baisse à nouveau après quelques éclatements, disons quand on éclate le point O_j, les diviseurs $E_{j,j+1}$ et $E_{i,j+1}$ se coupent, mais en un point qui n'est pas sur la transformée stricte de la courbe. Ceci explique les "sauts" des diviseurs sur le graphe dual de la résolution.*



Corollaire 1.4.1 *Soient* C *et* C' *deux branches telles que* $O_i \in C^{(i)} \cap C'^{(i)}$, $s_i = hs_{i+1} + r$, $s'_i = h's'_{i+1} + r'$ *où* $s_k = m_{O_k}(C^{(k)})$, $s'_k = m_{O'_k}(C'^{(k)})$, $h, h' \geq 1$, $0 < r < s_{i+1}$ *et* $0 < r' < s'_{i+1}$. *Alors :*

1. $O_{i+k} = O'_{i+k}$ *pour tout* $1 \leq k \leq \min\{h, h'\} + 1$.
2. *Si* $h < h'$ *alors* $O_{i+h+2} \neq O'_{i+h+2}$.

Démonstration

Supposons que $\min\{h, h'\} = h \leq h'$.

D'après le lemme ci-dessus le diviseur $E_{i,i+k}$ a le contact maximal avec $C^{(i+k)}$ au point O_{i+k} pour tout $1 \leq k \leq h$ et de plus il a le contact maximal avec $C'^{(i+l)}$ au point O'_{i+l} pour tout $1 \leq l \leq h'$.

En particulière, $E_{i,i+k}$ est tangent à $C^{(i+k)}$ au point O_{i+k} et aussi il est tangent à $C'^{(i+k)}$ au point O'_{i+k} pour tout $1 \leq k \leq h$. Mais comme $C^{(i+k)}$ et $C'^{(i+k)}$ sont deux branches, elles ont une seule tangente donc elles sont tangentes et $O_{k+1} = O'_{k+1}$ pour tout $1 \leq k \leq h = \min\{h, h'\}$.

De plus on a :

$$\begin{aligned}(C^{(i+h+1)}, E_{i,i+h+1})_{O_{i+h+1}} &= (C^{(i+h)}, E_{i,i+h})_{O_{i+h}} - s_{i+h} \\ &= \dots \\ &= (C^{(i+1)}, E_{i,i+1})_{O_{i+1}} - s_{i+1} - \dots - s_{i+h} \\ &= s_{i+h+1} = r > 0\end{aligned}$$

donc $O_{i+h+1} \in E_{i,i+h+1}$ et

$$\begin{aligned}(C'^{(i+h+1)}, E_{i,i+h+1})_{O'_{i+h+1}} &= s'_i - s'_{i+1} - \dots - s'_{i+h} \\ &=^{h \leq h'} s'_i - hs'_{i+1} \\ &\geq s'_i - h's'_{i+1} = r' > 0\end{aligned}$$

Ainsi $O_{i+h+1}, O'_{i+h+1} \in E_{i,i+h+1} \cap E_{i+h,i+h+1}$ et comme $E_{i,i+h+1} \neq E_{i+h,i+h+1}$ on a $O_{i+h+1} = O'_{i+h+1}$ puisque deux droites différentes se coupent dans un seul point.

- Si $h < h'$ on a :

$$(C^{(i+h+2)}, E_{i,i+h+2})_{O_{i+h+2}} = s_i - s_{i+1} - \dots - s_{i+h+1} = 0$$

donc $O_{i+h+2} \notin E_{i,i+h+2}$ mais

$$\begin{aligned}(C'^{(i+h+2)}, E_{i,i+h+2})_{O'_{i+h+2}} &= s'_i - s'_{i+1} - \cdots - s'_{i+h+1} \\ &= s'_i - (h+1)s'_{i+1} \\ &\leq^{h<h'} s'_i - h's'_{i+1} = r' > 0\end{aligned}$$

donc $O'_{i+h+2} \in E_{i,i+h+2}$ et $O_{i+h+2} \neq O'_{i+h+2}$.

■

Corollaire 1.4.2 *Soient C et C' deux branches telles que $O_i \in C^{(i)} \cap C'^{(i)}$, $s_i = hs_{i+1}$, $s'_i = h's'_{i+1} + r'$ où $s_k = m_{O_k}(C^{(k)})$, $s'_k = m_{O'_k}(C'^{(k)})$, $h > 1$, $h' \geq 1$, et $0 < r' < s'_{i+1}$. On a :*

1. *Si $h \leq h'$ alors $O_{i+k} = O'_{i+k}$ pour tout $1 \leq k \leq h$ et $O_{i+h+1} \neq O'_{i+h+1}$.*
2. *Si $h' < h$ alors $O_{i+k} = O'_{i+k}$ pour tout $1 \leq k \leq h'+1$ et $O_{i+h+2} \neq O'_{i+h+2}$.*

Démonstration

D'après le lemme (1.4.5) on sait que $E'_{i,i+k}$ a le contact maximal avec $C'^{(i+k)}$ au point O'_{i+k} pour tout $k \in \{1, \ldots, h'\}$ donc $E'_{i,i+k}$ est tangent à $C'^{(i+k)}$ au point O'_{i+k}. En particulière $E'_{i,i+1}$ est tangent à $C'^{(i+1)}$ au point O'_{i+1}.

De plus comme $s_i > s_{i+1}$ le diviseur $E_{i,i+1} = E'_{i,i+1}$ est tangent à $C^{(i+1)}$ au point O_{i+1}, donc $O_{i+1} = O'_{i+1}$.

1. On suppose $\underline{h \leq h'}$.
   On procéde par récurrence sur k.
   Le cas $k = 1$ a été traité ci-dessus.
   On suppose que la propriété est vraie pour $h-1$ et on se propose de la montrer pour h. Mais

$$\begin{aligned}(C^{(i+h)}, E_{i,i+h})_{O_{i+h}} &= (C^{(i+h-1)}, E_{i,i+h-1})_{O_{i+h-1}} - s_{i+h-1} \\ &= \ldots \\ &= (C^{(i+1)}, E_{i,i+1})_{O_{i+1}} - s_{i+1} - \cdots - s_{i+h-1} \\ &= s_i - s_{i+1} - \cdots - s_{i+h-1} \\ &= s_i - (h-1)s_{i+1} = s_{i+1} > 0\end{aligned}$$

   donc $O_{i+h} \in E_{i,i+h}$ et de plus

$$(C'^{(i+h)}, E_{i,i+h})_{O'_{i+h}} = s'_i - (h-1)s'_{i+1} > 0.$$

Ainsi $O_{i+h}, O'_{i+h} \in E_{i,i+h} \cap E_{i+h-1,i+h}$ et $O_{i+h} = O'_{i+h}$ puisque $E_{i,i+h} \neq E_{i+h-1,i+h}$.

De plus
$$(C^{(i+h+1)}, E_{i,i+h+1})_{O_{i+h+1}} = s_i - hs_{i+1} = 0$$
et comme $h \leq h'$
$$(C'^{(i+h+1)}, E_{i,i+h+1})_{O'_{i+h+1}} = s'_i - hs'_{i+1} \geq s'_i - h's'_{i+1} = r' > 0$$
donc $O_{i+h+1} \notin E_{i,i+h+1}$ et $O'_{i+h+1} \in E_{i,i+h+1}$. Ainsi $O_{i+h+1} \neq O'_{i+h+1}$.

2. On suppose $\underline{h' < h}$.
On procéde par récurrence sur k.
Le cas $k = 1$ a été traité ci-dessus.
On suppose que la propriété est vraie pour h' et on se propose de la montrer pour $h' + 1$. Mais
$$\begin{aligned}(C^{(i+h'+1)}, E_{i,i+h'+1})_{O_{i+h'+1}} &= (C^{(i+h')}, E_{i,i+h'})_{O_{i+h'}} - s_{i+h'} \\ &= \dots \\ &= (C^{(i+1)}, E_{i,i+1})_{O_{i+1}} - s_{i+1} - \dots - s_{i+h'} \\ &= s_i - s_{i+1} - \dots - s_{i+h'} \\ &= s_i - h's_{i+1} \\ &> s_i - hs_{i+1} = 0\end{aligned}$$
donc $O_{i+h'+1} \in E_{i,i+h'+1}$ et de plus
$$(C'^{(i+h'+1)}, E_{i,i+h'+1})_{O'_{i+h'+1}} = s'_i - h's'_{i+1} = r' > 0$$
donc $O_{i+h'+1}, O'_{i+h'+1} \in E_{i,i+h'+1} \cap E_{i+h',i+h'+1}$ et $O_{i+h'+1} = O'_{i+h'+1}$.

Maintenant on va voir que $O_{i+h+2} \neq O'_{i+h+2}$.

Si $\underline{h' + 1 < h}$ d'après un raisonnement comme ci-dessus on a :
$$\begin{aligned}(C'^{(i+h'+2)}, E_{i,i+h'+2})_{O'_{i+h'+2}} &= s'_i - s'_{i+1} - \dots - s'_{i+h'} - s'_{i+h'+1} \\ &= s'_i - h's'_{i+1} - r' = 0\end{aligned}$$
donc $O'_{i+h'+2} \notin E_{i,i+h'+2}$ et
$$\begin{aligned}(C^{(i+h'+2)}, E_{i,i+h'+2})_{O_{i+h'+2}} &= s_i - s_{i+1} - \dots - s_{i+h'} - s_{i+h'+1} \\ &= s_i - (h'+1)s_{i+1} > 0\end{aligned}$$

puisque $h'+1<h$. Donc $O_{i+h+2} \neq O'_{i+h+2}$.

Si $\underline{h'+1=h}$ on a $s'_{i+h'} > s'_{i+h'+1}$ et $s_{i+h'} = s'_{i+h'+1}$ alors $E_{i+h',i+h'+1}$ est tangent à $C'_{i+h'+1}$ et transverse à $C_{i+h'+1}$. Donc si on éclate le point $O_{i+h'+1}$ les branches $C^{(i+h'+2)}$ et $C'^{(i+h'+2)}$ sont separées, c'est-à-dire $O_{i+h+2} \neq O'_{i+h+2}$. ∎

Lemme 1.4.6 *Soient C et C' deux branches telles que $O_i \in C^{(i)} \cap C'^{(i)}$, $s_i = hs_{i+1}$, $s'_i = h's'_{i+1}$ où $s_k = m_{O_k}(C^{(k)})$, $s'_k = m_{O'_k}(C'^{(k)})$, $h, h' > 1$ et $h < h'$. Alors on a :*

1. *$O_{i+k} = O'_{i+k}$ pour tout $1 \leq k \leq h$.*
2. *$O_{i+h+1} \neq O'_{i+h+1}$.*

Démonstration

On procéde par récurrence sur k.

• $\underline{k=1}$

Comme $h, h' > 1$ alors $s_i > s_{i+1}$ et $s'_i > s'_{i+1}$ donc $E_{i,i+1}$ est tangent à $C^{(i+1)}$ au point O_{i+1} et tangent à $C'^{(i+1)}$ au point O'_{i+1}. Ainsi $O_{i+1} = O'_{i+1}$.

On suppose que la propriété est vraie pour $h-1$ et on se propose de la montrer pour h. Mais

$$(C^{(i+h)}, E_{i,i+h})_{O_{i+h}} = s_i - (h-1)s_{i+1} = s_{i+1} > 0$$

et

$$(C'^{(i+h)}, E_{i,i+h})_{O'_{i+h}} = s'_i - (h-1)s'_{i+1} > s'_i - h's'_{i+1} = 0$$

donc $O_{i+h}, O'_{i+h} \in E_{i,i+h} \cap E_{i+h-1,i+h}$ et $O_{i+h} = O'_{i+h}$.

De plus

$$(C^{(i+h+1)}, E_{i,i+h+1})_{O_{i+h+1}} = s_i - hs_{i+1} = 0$$

et

$$(C'^{(i+h+1)}, E_{i,i+h+1})_{O'_{i+h+1}} = s'_i - hs'_{i+1} > s'_i - h's'_{i+1} = 0$$

donc $O_{i+h+1} \neq O'_{i+h+1}$.

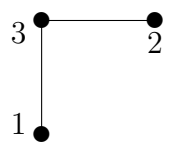
∎

Exemple 1.4.2 *Soit* $(C,0)$ *la branche d'équation* $(y^2-x^3)^2-4yx^5-x^7=0$. *Ses exposants caractéristiques sont* $\{4,6,7\}$. *De plus* $l_1=\text{p.g.c.d}\{4,6\}=2$ *et* $l_2=\text{p.g.c.d}\{2,7\}=1$.

Le premier algorithme d'Euclide associé à C *est*

$$\begin{array}{l}\beta_1=6=1.4+2\\ 4=2.2\end{array}$$

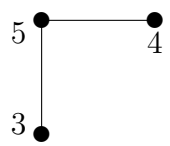
donc le sous-graphe G_1 *est*



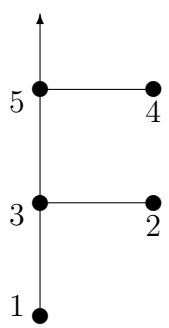
Le deuxième algorithme d'Euclide associé à C *est*

$$\begin{array}{l}\beta_2-\beta_1-l_1=3=1.2+1\\ 2=2.1\end{array}$$

donc le sous-graphe G_2 *est*



et le graphe dual de la résolution de C *est*



Appel au langage des géomètres italiens

`Determination des points libres d'une branche.`

D'après les proposition 1.4.3 et 1.4.4 les points libres O_k de O tels que C "passe par eux" (i.e., il existe une transformée stricte de C qui contient au point O_k) sont les points O_k où

$$k \in \bigcup_{j=0}^{g-1} \{t^j + 1, \ldots, t^j + h_0^{j+1}\} \text{ ou bien } \quad k \geq t^g + 1.$$

Ainsi d'après la construction du graphe G de la résolution plongée minimale de la branche C on a :

$$\{k \ / \ O_k \text{ point libre de } O\} = \{k \ / \ \mathcal{S}_k \in \bigcup_{l=1}^{g} K_0^l\} \cup \{k \ / \ \mathcal{S}_k \text{ sommet de rupture de } G\}$$

où K_0^l est la première sous-chaîne du sous-graphe G_l du graphe G et $\mathcal{S}_k$ dénote le sommet avec le número k du graphe G.

On doit remarquer aussi que les sommets $\mathcal{S}_k$ répresentent les diviseurs exceptionnels de la résolution plongée minimale de la branche C et ils ne répresentent pas les points O_k.

Définition 1.4.5 *Soit $P = O$ ou bien P un point libre de O. On dit que Q est un point libre le plus proche à P si Q est un point libre de O et il n'y a pas d'autres points libres entre P et Q.*

$\Diamond$

Projection d'une curvette et multiplicité d'intersection

Soit D_k le diviseur numéro k du graphe dual G de la branche C. On dit que L_k est une *curvette* du diviseur D_k si L_k est une courbe lisse et transverse à D_k et de plus elle coupe D_k en un point lisse du diviseur total de la résolution plongée minimale π de C.

La projection de L_k par π est une branche $\mathcal{K}_k$ telle que en particulier sa k-ème transformée stricte est L_k, c'est-à-dire $\mathcal{K}_k^{(k)} = L_k$ et en plus $\mathcal{K}_k$ est déjà résolue par π.

Le but de ce paragraphe est de calculer la multiplicité d'intersection de la branche $\mathcal{K}_k$ avec la branche C et de faire apparaître les générateurs du semi-groupe des valeurs de C.

Nous reprenons la notation utilisée ci-dessus.

Soit $[h_0, \ldots, h_q]$ le développement en fractions continues de $\dfrac{\beta_1}{n}$, i.e.

$$\begin{cases} \beta_1 = h_0 n + r_1 \\ n = h_1 r_1 + r_2 \\ \vdots \\ r_{q-1} = h_q r_q \end{cases}$$

Notons $s_l = m_{O_l}(C^{(l)})$ et $s'_l = m_{O_l}(\mathcal{K}_k^{(l)})$.

Si D_k est un diviseur de la sous-chaîne K_r^1 du graphe dual G alors le premier développement en fractions continues associé à $\mathcal{K}_k$ est $[h_0, \ldots, h_{r-1}, l]$ avec $l \leq h_r$ et $k = h_0 + \ldots + h_{r-1} + l$.

D'après la remarque 1.4.4 sur les points proches d'un point et la proposition 1.4.4 de la suite des multiplicités on a que :

• Si $1 \leq k \leq h_0$ alors $s'_0 = \cdots = s'_{k-1}$ et comme $s'_k = 1$ alors $s'_0 = \cdots = s'_{k-1} = 1$ et

$$(C, \mathcal{K}_k) = \sum_{l=0}^{k-1} s_l . s'_l = \sum_{l=0}^{k-1} n.1 = kn = k\overline{\beta_0}.$$

En conséquence $\overline{\beta_0} = (C, \mathcal{K}_1)$, c'est-à-dire que $\overline{\beta_0}$ coïncide avec la multiplicité d'intersection de C avec la projection d'une curvette du diviseur numéro 1 du graphe G.

• Si $h_0 < k \leq h_0 + h_1$ alors le premier développement en fractions continues de $\mathcal{K}_k$ est $[h_0, l]$, donc :

$$s'_0 = \cdots = s'_{h_0-1} \quad et \quad s'_{h_0} = \cdots = s'_{h_0+l-1}.$$

Mais $s'_{h_0+l} = 1$ donc $s'_{h_0} = \cdots = s'_{h_0+l-1} = 1$, $s'_0 = \cdots = s'_{h_0-1} = l$ et

$$\begin{aligned}(C, \mathcal{K}_k) &= \sum_{j=0}^{h_0-1} s_j s'_j + \sum_{j=h_0}^{h_0+l-1} s_j s'_j \\ &= \sum_{j=0}^{h_0-1} nl + \sum_{j=h_0}^{h_0+l-1} r_1 \\ &= h_0 ln + lr_1 = l(h_0 n + r_1) = l\overline{\beta_1}\end{aligned}$$

En conséquence $\overline{\beta_1} = (C, \mathcal{K}_{h_0+1})$, c'est-à-dire que $\overline{\beta_1}$ coïncide avec la multiplicité d'intersection de C avec la projection d'une curvette du diviseur numéro $h_0 + 1$ du G.

• Si $h_0 + h_1 < k \leq h_0 + h_1 + h_2$ alors le premier développement en fractions continues de $\mathcal{K}_k$ est $[h_0, h_1, l]$, donc :

$$\begin{aligned}s'_0 &= \cdots = s'_{h_0-1} \\ s'_{h_0} &= \cdots = s'_{h_0+h_1-1} \\ s'_{h_0+h_1} &= \cdots = s'_{h_0+h_1+l-1}\end{aligned}$$

et comme $s'_{h_0+h_1+l} = 1$ on a

$$\begin{aligned}s'_{h_0+h_1} &= \cdots = s'_{h_0+h_1+l-1} = 1 \\ s'_{h_0} &= \cdots = s'_{h_0+h_1-1} = l \\ s'_0 &= \cdots = s'_{h_0-1} = h_1 l + 1\end{aligned}$$

car $s'_{h_0-1} = h_1 s'_{h_0} + s'_{h_0+h_1}$ donc

$$\begin{aligned}(C, \mathcal{K}_k) &= \sum_{j=0}^{h_0-1} s_j s'_j + \sum_{j=h_0}^{h_0+h_1-1} s_j s'_j + \sum_{j=h_0+h_1}^{h_0+h_1+l-1} s_j s'_j \\ &= h_0(h_1 l + 1)n + h_1 l r_1 + l r_2 \\ &= (h_0(h_1 l + 1) + l)n\end{aligned}$$

En répétant ce processus nous calculons la valeur de $(C, \mathcal{K}_k)$ pour toute valeur de k.

En particulier si $k = h_0 + \cdots + h_q$, le sommet $\mathcal{S}_k$ coïncide avec le premier point de rupture du G et d'après un calcul on a $(C, \mathcal{K}_k) = n_1\overline{\beta_1}$.

De plus si le j-ème sommet de rupture de G est $\mathcal{S}_{r_j}$ alors $(C, \mathcal{K}_{r_j}) = n_j\overline{\beta_j}$, et finalement, si le sommet extremité de la j-ème "branche morte"de G est $\mathcal{S}_{e_j}$ alors $(C, \mathcal{K}_{e_j}) = \overline{\beta_j}$

1.4.4 Le graphe dual de la résolution d'une courbe réduite avec deux branches.

Considérons la courbe $C \cup C'$ où C et C' sont deux branches différentes.

Soient $\{n, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ (resp. $\{n', \beta'_1, \ldots, \beta'_g\}$) les exposants caractéristiques de C (resp. de C'), $l_j = \text{p.g.c.d.}\{\beta_0, \ldots, \beta_j\}$ (resp. $l'_k = \text{p.g.c.d.}\{\beta'_0, \ldots, \beta'_k\}$) où $j \in \{1, \ldots, g\}$ (resp. $k \in \{1, \ldots, g'\}$) et $\{(m_i, n_i)\}_{i=1}^{g}$ (resp. $\{(m'_i, n'_i)\}_{i=1}^{g'}$) les paires caractéristiques de C (resp. de C').

Soit $\gamma = \dfrac{\text{cont}(C, C')}{n} = \dfrac{\text{cont}(C', C)}{n'}$.

On peut supposer qu'il existe $k \in \{0, 1, \ldots, \min\{g, g'\}\}$ tel que

$$\frac{\beta_{k-1}}{n} = \frac{\beta'_{k-1}}{n'} < \gamma \leq \min\{\frac{\beta_k}{n}, \frac{\beta'_k}{n'}\} \tag{1.39}$$

où par convention $\beta_{-1} = \beta'_{-1} = 0$.
Supposons que $\min\{\frac{\beta_k}{n}, \frac{\beta'_k}{n'}\} = \frac{\beta_k}{n}$. Alors :

$$\frac{\beta_{k-1}}{n} = \frac{\beta'_{k-1}}{n'} < \gamma \leq \frac{\beta_k}{n} \leq \frac{\beta'_k}{n'} \tag{1.40}$$

Donc $(m_i, n_i) = (m'_i, n'_i)$ et $\frac{\beta_i}{n} = \frac{\beta'_i}{n'}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Finalement, soient G_i (resp. G'_i) le i-ème sous-graphe du graphe dual G (resp. G') de la résolution plongée minimal de C (resp. de C') comme ci-dessus, et soit $\{O_i\}_{i \geq 0}$ (resp. $\{O'_i\}_{i \geq 0}$) l'ensemble des centres d'éclatements de Π pour la branche C (resp. C').

Souvenons nous que Π est une résolution plongée de C et de C' qui n'est minimale ni pour C ni pour C'

Nous utiliserons sans le démontrer le théorème suivant, qui donne des informations sur les centres d'éclatements de Π qu'ont en commun les branches C et C'.

Théorème 1.4.5 (Zariski [Za2]) *Soient k et γ les nombres qui vérifient (3.13). Alors si O^*_α (resp. O'^*_α) est le α-ème point libre principal de C (resp. de C') on a :*

1. *$O^*_\alpha = O'^*_\alpha$ pour tout $\alpha \leq k-1$ et $O^*_k \neq O'^*_k$.*
   En particulier si $k=1$ les branches C et C' n'ont pas de points libres principaux en commun. (Ceci inclut le cas où C, ou bien C', est une branche non singulière).
2. *Si $\gamma < \dfrac{\beta_k}{n}$ alors les branches C et C' ont exactement*
   (a) *$\gamma - 1$ points en commun qui suivent O si $k=1$.*
   (b) *$\dfrac{\gamma n - \beta_{k-1}}{l_{k-1}} - 1$ points en commun qui suivent O^*_{k-1} si $k>1$.*
   Ces points sont des points libres de O.
3. *Si $\gamma = \dfrac{\beta_k}{n}$ alors les branches C et C' ont au moins,*
   (a) *$\left[\dfrac{\beta_1}{n}\right]$ points libres en commun qui suivent O si $k=1$.*
   (b) *$\left[\dfrac{\beta_k - \beta_{k-1}}{l_{k-1}}\right]$ points libres en commun qui suivent O^*_{k-1} si $k>1$*

   où $[\,]$ dénote la partie entière. S'il existe d'autres points communs, ils sont satellites.

■

Ainsi, si on connaît les points d'éclatements que les branches C et C' ont en commun on peut calculer aussi, les diviseurs exceptionnels qu'elles ont en commun, donc on peut construire le graphe dual de la résolution pour la courbe $C \cup C'$.

Rappelons que $\dfrac{\beta_{k-1}}{n} = \dfrac{\beta'_{k-1}}{n'} < \gamma \leq \dfrac{\beta_k}{n} \leq \dfrac{\beta'_k}{n'}$.

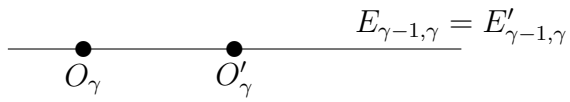
On va distinguer deux cas :

1. $\gamma < \dfrac{\beta_k}{n}$
2. $\gamma = \dfrac{\beta_k}{n}$

<u>Cas 1 :</u> $\gamma < \dfrac{\beta_k}{n}$

• Si $k=1$ d'après le théorème (1.4.5) on sait que $O_i = O'_i$ pour tout $1 \leq i \leq \gamma - 1$ et $O_\gamma \neq O'_\gamma$.

Donc $E_{i-1,i} = E'_{i-1,i}$ pour tout $1 \leq i \leq \gamma - 1$ et quand on éclate le point $O_{\gamma-1} = O'_{\gamma-1}$ on trouve



et à partir de ce moment comme on éclate des points différents les nouveaux diviseurs qui apparaissent dans chaque branche se couperont de la même façon qu'ils se coupent dans le graphe dual individuel de chacune des branches.

Ainsi les deux branches C et C' ont en commun les γ premiers diviseurs exceptionnels, c'est-à-dire

$$D_i = D'_i \qquad 1 \leq i \leq \gamma \ .$$

Ainsi si $\mathcal{S}_l$ (resp. $\mathcal{S}'_l$) est le l-ème sommet du graphe G (resp. G') alors $\mathcal{S}_l = \mathcal{S}'_l$ pour tout $1 \leq l \leq \gamma$.

Soit $\mathcal{P}$ la plus petite chaîne connexe du graphe de C (resp. de C') qui contient les sommets $\mathcal{S}_l$ pour tout $1 \leq l \leq \gamma$.

On doit remarquer que toujours le plus petit sous-graphe de G (resp. G') qui contient les sommets $\mathcal{S}_l$ pour tout $1 \leq l \leq \gamma$ est connexe puisque $\gamma < \dfrac{\beta_1}{n}$ donc

$$[\gamma] = \gamma \leq \left[\frac{\beta_1}{n}\right]$$

et si on regarde le premier algorithme d'Euclide associé à C on a $\gamma \leq h_0^1$.

Ainsi le sous-graphe ci-dessus est toujours une sous-chaîne de K_0 qui peut être égal à K_0.

Ainsi $G - \{\mathcal{S}_\gamma\}$ (resp. $G' - \{\mathcal{S}_\gamma\}$) a deux composantes connexes (sauf dans le cas où $\gamma = 1$).

Soit $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}'$) la composante connexe de $G - \{\mathcal{S}_\gamma\}$ (resp. $G' - \{\mathcal{S}_\gamma\}$) telle que $\mathcal{H} \cap \mathcal{P} = \emptyset$ (resp. $\mathcal{H}' \cap \mathcal{P} = \emptyset$). Si $\gamma = 1$ alors $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}'$) est $G - \{\mathcal{S}_\gamma\}$ (resp. $G' - \{\mathcal{S}_\gamma\}$).

Alors le graphe dual de $C \cup C'$ est le graphe obtenu en attachant $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ au dernier sommet $\mathcal{S}_\gamma$ de $\mathcal{P}$.

Donc le graphe dual de $C \cup C'$ est, dans ce cas-là, la réunion disjointe des graphes individuels de C et C' où est identifiée la composante connexe qui relie le sommet $\mathcal{S}_1$ au sommet $\mathcal{S}_\gamma$ dans chacune des branches.

Exemple 1.4.3 *Soit la courbe* $C \cup C'$ *telle que les exposants caractéristiques de* C *sont* $\{6, 15, 16\}$ *, les exposants caractéristiques de* C' *sont* $\{4, 14, 15\}$ *et* $\gamma = 2$.

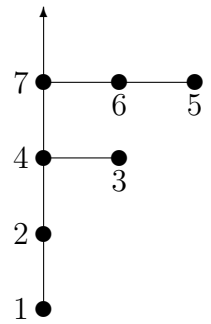
De plus comme $l_1 = \text{p.g.c.d.}\{6, 15\} = 3$ *et les algorithmes d'Euclide associés à* C *sont*

$$\begin{cases} 15 = 2.6 + 3 \\ 6 = 2.3 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 16 - 15 + 3 = 4 = 1.3 + 1 \\ 3 = 3.1 \end{cases}$$

alors le graphe dual de C *est*



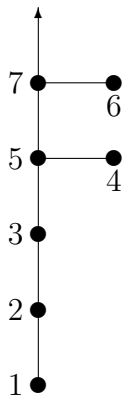
De plus $l'_1 = \text{p.g.c.d.}\{4, 10\} = 2$ *et les algorithmes d'Euclide associés à* C' *sont*

$$\begin{cases} 14 = 3.4 + 2 \\ 4 = 2.2 \end{cases}$$

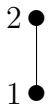
et

$$\begin{cases} 15 - 14 + 2 = 3 = 1.2 + 1 \\ 2 = 2.1 \end{cases}$$

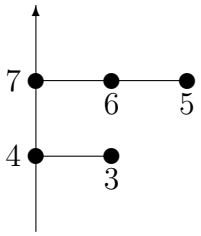
et le graphe dual de C' *est*



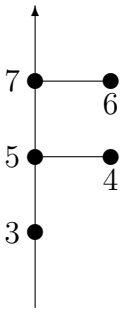
donc la chaîne $\mathcal{P}$ *est*



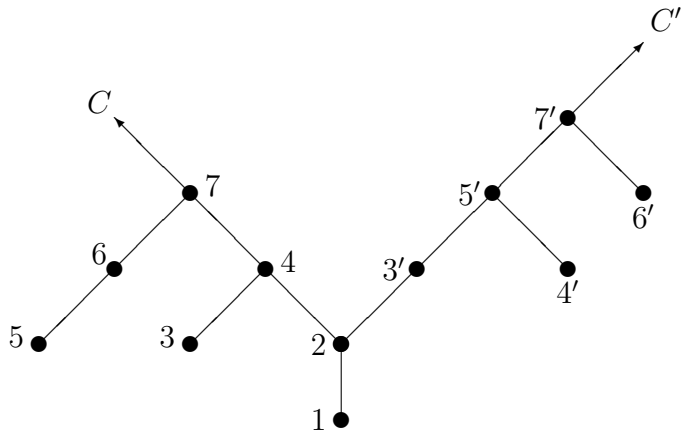
la composante connexe $\mathcal{H}$ *est*



la composante connexe $\mathcal{H}'$ *est*



et le graphe dual de $C \cup C'$ *est*



où le i' dénote le diviseur D'_i de C' pour faire la distinction avec le diviseur D_i de C.

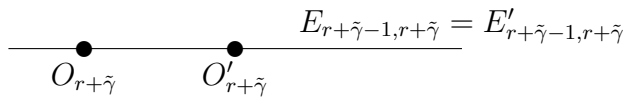
- Maintenant on va continuer avec l'étude du cas $\gamma < \dfrac{\beta_k}{n}$ mais avec $k > 1$.

D'après le théorème (1.4.5) on a $O^*_\alpha = O'^*_\alpha$ pour tout $1 \leq \alpha \leq k-1$ et $O^*_k \neq O'^*_k$.

De plus C et C' ont exactement $\dfrac{\gamma n - \beta_{k-1}}{l_{k-1}} - 1$ points en commun qui suivent O^*_{k-1}.

Ainsi si r est le nombre qui vérifie $O^*_{k-1} = O_r$ (donc $O'^*_{k-1} = O'_r$) c'est-à-dire, $\mathcal{S}_r$ est le point de rupture du $(k-1)$-ème sous-graphe G_{k-1} (resp. G'_{k-1}) du graphe dual de C (resp. de C') et $\tilde{\gamma} = \dfrac{\gamma n - \beta_{k-1}}{l_{k-1}}$ alors le dernier point en commun de C et C' est $O_{r+\tilde{\gamma}-1} = O'_{r+\tilde{\gamma}-1}$ et $O_{r+\tilde{\gamma}} \neq O'_{r+\tilde{\gamma}}$.

Donc $E_{i-1,i} = E'_{i-1,i}$ pour tout $1 \leq i \leq r + \tilde{\gamma} - 1$ et quand on éclate le point $O_{r+\tilde{\gamma}-1} = O'_{r+\tilde{\gamma}-1}$ on trouve



et à partir de ce moment comme on éclate des points différents les nouveaux diviseurs qui apparaissent dans chaque branche se couperont de la même façon qu'ils se coupent dans le graphe dual individuel de chacune des branches.

Ainsi les deux branches C et C' ont en commun les $r+\tilde{\gamma}$ premiers diviseurs exceptionnels, c'est-à-dire

$$D_i = D'_i \qquad 1 \leq i \leq r+\tilde{\gamma}.$$

Mais on peut dire un peu plus :

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma n - \beta_{k-1}}{l_{k-1}} = \frac{\mathrm{cont}(C,C') - \beta_{k-1}}{l_{k-1}}$$

et comme $\beta_{k-1} < \mathrm{cont}(C,C') < \beta_k$ si on regard les développements de Puiseux de C, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{cont}(C,C') = \beta_{k-1} + jl_{k-1}$, donc $\tilde{\gamma} = j$.

Ainsi les branches C et C' ont en commun les diviseurs

$$D_i = D'_i \qquad 1 \leq i \leq r+j.$$

où $\mathcal{S}_r$ est le sommet de rupture du $(k-1)$-ème sous-graphe G_{k-1} (resp. G'_{k-1}) et j est le nombre entier qui vérifie

$$\mathrm{cont}(C,C') - \beta_{k-1} = jl_{k-1}.$$

Ainsi si $\mathcal{P}$ est le plus petit sous-graphe du graphe de C (resp. de C') qui contient les sommets $\mathcal{S}_l$ pour tout $l \in \{1,\ldots,r+j\}$ (c'est-à-dire, $\mathcal{P}$ est la réunion $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_{k-1} \cup \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est la plus petite chaîne connexe du graphe de C (resp. de C') qui contient les sommets $\mathcal{S}_l$ pour tout $l \in \{r,\ldots,r+j\}$) ; alors $G - \{\mathcal{S}_{r+j}\}$ (resp. $G' - \{\mathcal{S}_{r+j}\}$) a deux composantes connexes.

Soit $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}'$) la composante connexe de $G - \{\mathcal{S}_{r+j}\}$ (resp. $G' - \{\mathcal{S}_{r+j}\}$) telle que $\mathcal{H} \cap \mathcal{P} = \emptyset$ (resp. $\mathcal{H}' \cap \mathcal{P} = \emptyset$).

Alors le graphe dual de $C \cup C'$ est le graphe obtenu en attachant $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ au dernier sommet $\mathcal{S}_{r+j}$ de $\mathcal{P}$.

Donc le graphe dual de $C \cup C'$ est, dans ce cas-là, la réunion disjointe des graphes individuels de C et C' où est identifiée la composante connexe qui relie le sommet $\mathcal{S}_1$ au sommet $\mathcal{S}_{r+j}$ dans chacune des branches.

Exemple 1.4.4 *Soit la courbe $C \cup C'$ telle que les exposants caractéristiques de C sont $\{6, 15, 22\}$, les exposants caractéristiques de C' sont $\{6, 15, 23\}$, et $\frac{15}{6} < \gamma = \frac{21}{6} < \frac{22}{6}$.*

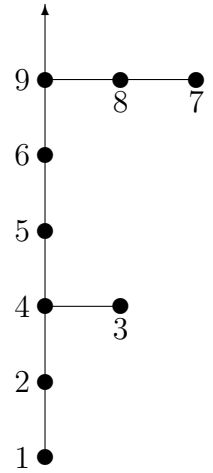
De plus comme $l_1 = l'_1 = \text{p.g.c.d.}\{6, 15\} = 3$ et les algorithmes d'Euclide associés à C sont

$$\begin{cases} 15 = 2.6 + 3 \\ 6 = 2.3 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 22 - 15 + 3 = 10 = 3.3 + 1 \\ 3 = 3.1 \end{cases}$$

alors le graphe dual individuel de C est



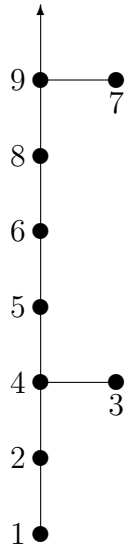
Les algorithmes associés à C' sont

$$\begin{cases} 15 = 2.6 + 3 \\ 6 = 2.3 \end{cases}$$

et

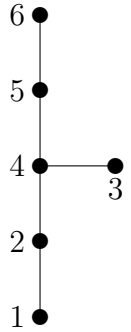
$$\begin{cases} 23 - 15 + 3 = 11 = 3.3 + 2 \\ 3 = 1.2 + 1 \\ 2 = 2.1 \end{cases}$$

alors le graphe dual individuel de C' est

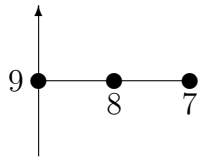


De plus $\mathrm{cont}(C, C') - \beta_1 = 21 - 15 = 2.3$, *donc* $r = 4$ *et* $j = 2$.

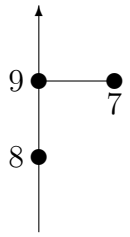
Ainsi $\mathcal{P}$ *est, dans ce cas-là*



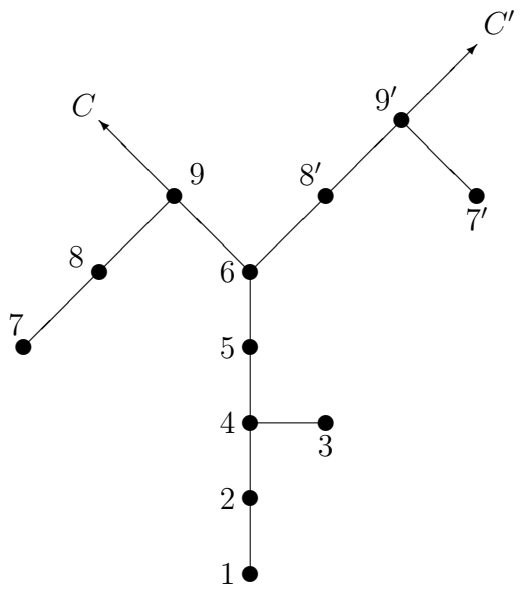
$\mathcal{H}$ *est*



$\mathcal{H}'$ *est*



et le graphe dual de la résolution de C *et* C' *est*



• Maintenant on va étudier un peu plus le cas $\gamma > \dfrac{\beta_g}{n}$ et $\gamma' > \dfrac{\beta'_g}{n'}$, c'est-à-dire, le cas où γ est plus grand que le dernier exposant caractéristique de C et de C' .

Donc les deux branches, C et C', sont équisingulières, c'est-à-dire, $\beta_i = \beta'_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, g = g'\}$.

D'après le théorème (1.4.5) on a $O_i^* = O_i'^*$ pour tout $1 \leq i \leq g = g'$, alors le graphe dual individuel de C est égal au graphe dual individuel de C'.

De plus le théorème (1.4.5) on dit que C et C' ont exactement $\dfrac{\gamma n - \beta_g}{l_g} - 1$ centres d'éclatement en commun et qui suivent $O_g^* = O_g'^*$.

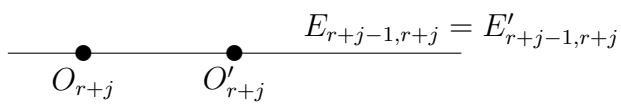
Mais comme $l_g = 1$ et $\gamma > \dfrac{\beta_g}{n}$ alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma n = \text{cont}(C, C') = \beta_g + j$ donc $\dfrac{\gamma n - \beta_g}{l_g} - 1 = j - 1$.

Ainsi si $\mathcal{S}_r$ est le dernier point de rupture du graphe de C (resp.de C') on a :

$$O_i = O'_i \qquad 1 \leq i \leq r + j - 1$$

et $O_{r+j} \neq O'_{r+j}$.

Donc $E_{i-1,i} = E'_{i-1,i}$ pour tout $1 \leq i \leq r+j-1$ et quand on éclate le point $O_{r+j-1} = O'_{r+j-1}$ on trouve



Ainsi $D_i = D'_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r+j\}$.

De plus $C^{(r+j)}$ et $C'^{(r+j)}$ sont des courbes non singulières et elles coupent le diviseur D_{r+j} en deux points différents, donc il n'y a que des croisements normaux ; nous sommes donc parvenus à la résolution plongée minimal de $C \cup C'$.

Dans ce cas-là le graphe dual de $C \cup C'$ est le graphe formé par la réunion des sous-graphes G_i $(= G'_i)$ de G $(= G')$ où on attache au dernier point de rupture $\mathcal{S}_r$ une chaîne de j nouveaux sommets et, sur le dernier point de cette chaîne $\mathcal{S}_{r+j}$ (quand on rénumérote les sommets), sont attachées les deux flèches qui représentent les dernières transformées strictes de C et C'.

Exemple 1.4.5 *Soit la courbe $C \cup C'$ telle que C et C' sont équisingulières, les exposants caractéristiques des deux branches sont $\{4, 6, 11\}$ et $\gamma = 3$.*

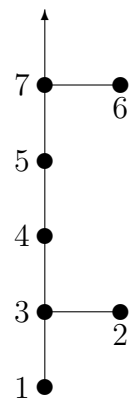
Donc le $l_1 = \text{p.g.c.d.}\{4, 6\} = 2$ et comme les algorithmes d'Euclide dans ce cas-là sont

$$\begin{cases} 6 = 1.4 + 2 \\ 4 = 2.2 \end{cases}$$

et

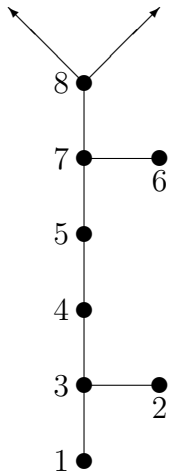
$$\begin{cases} 11 - 6 + 2 = 7 = 3.2 + 1 \\ 2 = 2.1 \end{cases}$$

le graphe dual individuel de les deux branches est



De plus, comme $\gamma n = 3.4 = 12 = 11 + 1$ *alors* $j = 1$.

Ainsi le graphe de résolution de $C \cup C'$ *est*



<u>Cas 2 :</u> $\gamma = \dfrac{\beta_k}{n}$.

Dans ce cas-là d'après le théorème (1.4.5) on sait que

$$O^*_\alpha = O'^*_\alpha \quad \text{pour tout } 1 \leq \alpha \leq k-1$$

et $O^*_k \neq O'^*_k$.

De plus les branches C et C' ont au moins $\left[\dfrac{\beta_k - \beta_{k-1}}{l_{k-1}}\right]$ $\left(\left[\dfrac{\beta_1}{n}\right] \text{ si } k = 1\right)$ points en commun qui suivent O^*_{k-1} (O si $k = 1$).

Donc si r est le nombre tel que $O_r = O^*_{k-1}(= O'_r = O'^*_{k-1})$ alors C et C' ont au moins $\tilde{r} = r + \left[\dfrac{\beta_k - \beta_{k-1}}{l_{k-1}}\right]$ $(\tilde{r} = r + \left[\dfrac{\beta_1}{n}\right]$ si $k = 1)$ points en commun.

Maintenant si on exprime r et $\tilde{r}$ en fonction des développements en fractions continues associés à C et C' on a

$$r = \sum_{j=0}^{q^1} h^1_j + \sum_{j=2}^{k-1}(h^j_0 - 1) + \sum_{j=2}^{k-1}\sum_{l=1}^{q^j} h^j_l \ ,$$

$$\tilde{r} = \sum_{j=0}^{q^1} h^1_j + \sum_{j=2}^{k-1}(h^j_0 - 1) + \sum_{j=2}^{k-1}\sum_{l=1}^{q^j} h^j_l + (h^k_0 - 1) = t^{k-1} + h^k_0$$

et si on regard le k-ème algorithme d'Euclide de C on a $s_{\tilde{r}-1} > s_{\tilde{r}}$.

Mais on peut distinguer les deux cas suivants :

• Si $\gamma = \dfrac{\beta_k}{n} = \dfrac{\beta'_k}{n'}$ alors $(m_i, n_i) = (m'_i, n'_i)$ et $\dfrac{\beta_i}{n} = \dfrac{\beta'_i}{n'}$ pour tout $1 \leq i \leq k$ donc

$$\frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{n} = \frac{\beta'_k - \beta'_{k-1}}{n'}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{n_1 \cdots n_{k-1} l_{k-1}} = \frac{\beta'_k - \beta'_{k-1}}{n'_1 \cdots n'_{k-1} l'_{k-1}}$$

et d'après ci-dessus on a

$$\frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{l_{k-1}} = \frac{\beta'_k - \beta'_{k-1}}{l'_{k-1}}$$

ou de façon équivalente

$$\frac{\beta_k - \beta_{k-1} + l_{k-1}}{l_{k-1}} = \frac{\beta'_k - \beta'_{k-1} + l'_{k-1}}{l'_{k-1}}$$

donc le k-ème développement en fractions continues associé à C est égal au
k-ème développement en fractions continues associé à C', c'est-à-dire $\dfrac{s_i}{s_{i+1}} = \dfrac{s'_i}{s'_{i+1}}$ où $s_i = m_{O_i}(C^{(i)})$, $s'_i = m_{O'_i}(C'^{(i)})$ et $i \leq t^{k-1}$.

Donc comme $s_{\tilde{r}-1} > s_{\tilde{r}}$ d'après le théorème (1.4.3) on trouve que le premier point différent de C et C' est exactement le point $O_k^* \neq O_k^{'*}$.

Mais si nous nous souvenons que si O_i et le dernier point en commun de C et C' alors le dernier diviseur en commun de C et C' est D_{i+1}, nous voyons que dans notre cas le dernier diviseur en commun de C et C' est le diviseur D_u où $O_u = O_k^*$ (ou de façon équivalente $O'_u = O_k^{'*}$), c'est-à-dire $\mathcal{S}_u$ est le k-ème sommet de rupture du graphe de C (resp. de C').

Ainsi si $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$ où G_i est le i-ème sous-graphe de C (resp. de C') associé au i-ème algorithme d'Euclide de C (resp. de C') et $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}'$) est la composante connexe de $G - \{\mathcal{S}_u\}$ (resp. de $G' - \{\mathcal{S}_u\}$) telle que $\mathcal{H} \cap \mathcal{P} = \emptyset$ (resp. $\mathcal{H}' \cap \mathcal{P} = \emptyset$) alors le graphe dual de $C \cup C'$ est le graphe obtenu en attachant $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ au dernier sommet $\mathcal{S}_u$ de $\mathcal{P}$.

Donc le graphe dual de la résolution plongée minimal de $C \cup C'$ est, dans ce cas-là, la réunion disjointe des graphes individuels de C et C' où sont identifiés les k premiers sous-graphes $G_1, G_2, \ldots, G_k$ de G avec les k premiers sous-graphes $G'_1, G'_2, \ldots, G'_k$ de G' .

Exemple 1.4.6 *Soit la courbe $C \cup C'$ telle que les exposants caractéristiques de C sont $\{12, 18, 32, 33\}$, les exposants caractéristiques de C' sont $\{12, 18, 32, 35\}$ et $\gamma = \frac{32}{12}$.*

Les algorithmes d'Euclide associés à C et C' sont

$$\begin{cases} 18 = 1.12 + 6 \\ 12 = 2.6 \ , \end{cases}$$

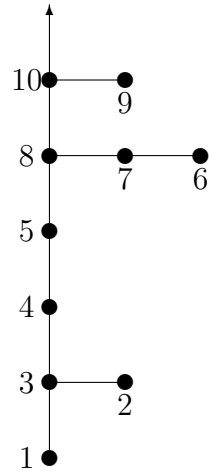
$$\begin{cases} 32 - 18 + 6 = 20 = 3.6 + 2 \\ 6 = 3.2 \ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} 33 - 32 + 2 = 3 = 1.2 + 1 \\ 2 = 2.1 \ , \end{cases}$$

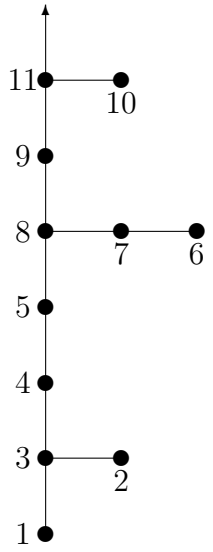
et

$$\begin{cases} 35 - 32 + 2 = 5 = 2.2 + 1 \\ 2 = 2.1 \end{cases}$$

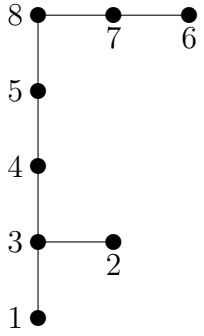
Donc le graphe individuel de C est



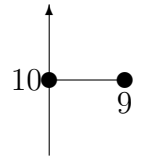
le graphe individuel de C' *est*



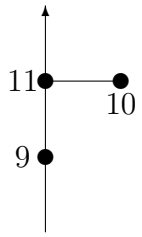
$\mathcal{P}$ *est*



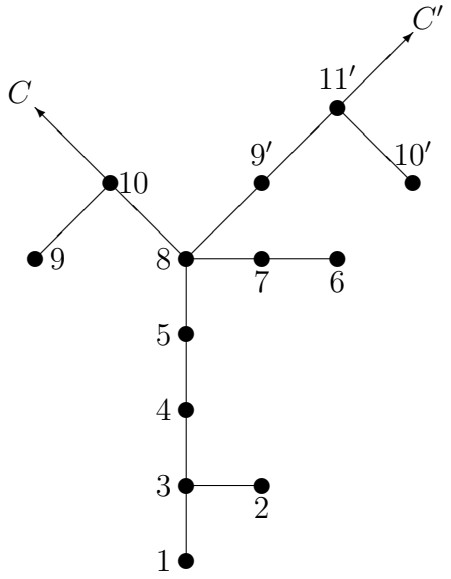
$\mathcal{H}$ *est*



$\mathcal{H}'$ *est*



et le graphe dual de la résolution plongée minimal de $C \cup C'$ *est*



• Si $\gamma = \dfrac{\beta_k}{n} < \dfrac{\beta'_k}{n'}$ on sait que C et C' ont, au moins, $\tilde{r}$ points en commun et de plus $s_{\tilde{r}-1} > s_{\tilde{r}}$.

On peut dire exactement combien des centres d'éclatements les branches C et C' ont en commun. Cela s'obtient de la manière suivante :

On sait que les $(k-1)$ premiers développements en fractions continues de C et C' son égaux.

On va étudier en détail les k-èmes algorithmes de C et C'.

Nous savons que pour la branche C on a

$$\begin{cases} \beta_k - \beta_{k-1} + l_{k-1} = h_0^k l_{k-1} + r_1^k \\ l_{k-1} = h_1^k r_1^k + r_2^k \\ \vdots \\ r_{q^k-1}^k = h_{q^k}^k r_{q^k}^k \end{cases} \tag{1.41}$$

c'est-à-dire

$$\begin{array}{l} s_{t^{k-1}} = s_{t^{k-1}+1} = \ldots = s_{t^{k-1}+h_0^k-1} = l_{k-1} \\ s_{t^{k-1}+h_0^k} = s_{t^{k-1}+h_0^k+1} = \ldots = s_{t^{k-1}+h_0^k+h_1^k-1} = r_1^k \\ \vdots \\ s_{t^{k-1}+h_0^k+h_1^k+\cdots+h_{q^k-1}^k} = \cdots = s_{t^{k-1}+h_0^k+h_1^k+\cdots+h_{q^k}^k-1} = r_{q^k}^k \ . \end{array} \tag{1.42}$$

Pour la branche C' on a :

$$\begin{cases} \beta'_k - \beta'_{k-1} + l'_{k-1} = h'^k_0 l'_{k-1} + r'^k_1 \\ l'_{k-1} = h'^k_1 r'^k_1 + r'^k_2 \\ \vdots \\ r'^k_{q'^k-1} = h'^k_{q'^k} r'^k_{q'^k} \end{cases} \tag{1.43}$$

et comme $t^{k-1} = t'^{k-1}$, puisque les $(k-1)$ premiers développements en fractions continues de C et C' sont égaux, on a :

$$\begin{array}{l} s'_{t^{k-1}} = s'_{t^{k-1}+1} = \ldots = s'_{t^{k-1}+h'^k_0-1} = l'_{k-1} \\ s'_{t^{k-1}+h'^k_0} = s'_{t^{k-1}+h'^k_0+1} = \ldots = s'_{t^{k-1}+h'^k_0+h'^k_1-1} = r'^k_1 \\ \vdots \\ s'_{t^{k-1}+h'^k_0+h'^k_1+\cdots+h'^k_{q'^k-1}} = \cdots = s'_{t^{k-1}+h'^k_0+h'^k_1+\cdots+h'^k_{q'^k}-1} = r'^k_{q^k} \ . \end{array} \tag{1.44}$$

De plus comme $\dfrac{\beta_k}{n} < \dfrac{\beta'_k}{n'}$ et $\dfrac{\beta_i}{n} = \dfrac{\beta'_i}{n'}$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$ alors

$$\frac{\beta_k - \beta_{k-1} + l_{k-1}}{l_{k-1}} < \frac{\beta'_k - \beta'_{k-1} + l'_{k-1}}{l'_{k-1}} \tag{1.45}$$

et

$$h_0^k = \left[\frac{\beta_k - \beta_{k-1} + l_{k-1}}{l_{k-1}}\right] \leq \left[\frac{\beta'_k - \beta'_{k-1} + l'_{k-1}}{l'_{k-1}}\right] = h'^k_0$$

donc $h_0^k \leq h'^k_0$.

Si $\underline{h_0^k < h_0'^k}$ alors $s_{\tilde{r}-1} > s_{\tilde{r}}$ et $s'_{\tilde{r}-1} = s'_{\tilde{r}}$ donc le diviseur $E_{\tilde{r}-1,\tilde{r}} = E'_{\tilde{r}-1,\tilde{r}}$ est tangent à $C^{(\tilde{r})}$ et transverse à $C'^{(\tilde{r})}$.

Ainsi, si on éclate le point $O_{\tilde{r}} = O'_{\tilde{r}}$, les branches $C^{(\tilde{r}+1)}$ et $C'^{(\tilde{r}+1)}$ sont separées par le nouveau diviseur $E_{\tilde{r},\tilde{r}+1}$ qui vient d'apparaître puisque

$$(C^{(\tilde{r}+1)}, E_{\tilde{r}-1,\tilde{r}+1})_{O_{\tilde{r}+1}} = (C^{(\tilde{r})}, E_{\tilde{r}-1,\tilde{r}})_{O_{\tilde{r}}} - m_{O_{\tilde{r}}}(C^{(\tilde{r})}) = s_{\tilde{r}-1} - s_{\tilde{r}} > 0$$

donc $O_{\tilde{r}+1} \in E_{\tilde{r}-1,\tilde{r}+1}$, mais

$$(C'^{(\tilde{r}+1)}, E_{\tilde{r}-1,\tilde{r}+1})_{O'_{\tilde{r}+1}} = (C'^{(\tilde{r})}, E_{\tilde{r}-1,\tilde{r}})_{O'_{\tilde{r}}} - m_{O'_{\tilde{r}}}(C'^{(\tilde{r})}) = s'_{\tilde{r}-1} - s'_{\tilde{r}} = 0$$

donc $O'_{\tilde{r}+1} \notin E_{\tilde{r}-1,\tilde{r}+1}$ et en conséquence $O_{\tilde{r}+1} \neq O'_{\tilde{r}+1}$.

Ainsi, si $h_0^k < h_0'^k$, les branches C et C' ont exactement $\tilde{r}$ points d'éclatements en commun, c'est-à-dire

$$O_i = O'_i \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq \tilde{r}$$

donc elles ont en commun les $\tilde{r}+1$ premiers diviseurs

$$D_i = D'_i \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq \tilde{r}+1$$

On doit remarquer que le sommet $\mathcal{S}_{\tilde{r}+1}$ est le premier sommet de la deuxième sous-chaîne K_1^k qui forme le sous-graphe G_k de G.

Si $\underline{h_0^k = h_0'^k}$ alors $s_{\tilde{r}-1} = l_{k-1} > s_{\tilde{r}} = r_1^k$ et $s'_{\tilde{r}-1} = l'_{k-1} > s'_{\tilde{r}} = r_1'^k$.

De plus $s_{\tilde{r}-1} = h_1^k s_{\tilde{r}} + r_2^k$ et $s'_{\tilde{r}-1} = h_1'^k s'_{\tilde{r}} + r_2'^k$ et d'après (1.45) on a

$$\frac{h_0^k l_{k-1} + r_1^k}{l_{k-1}} < \frac{h_0'^k l'_{k-1} + r_1'^k}{l'_{k-1}}$$

c'est-à-dire $\dfrac{r_1^k}{l_{k-1}} < \dfrac{r_1'^k}{l'_{k-1}}$ donc $\dfrac{l_{k-1}}{r_1^k} > \dfrac{l'_{k-1}}{r_1'^k}$ et

$$h_1^k = \left[\frac{r_1^k}{l_{k-1}}\right] \geq \left[\frac{r_1^{'k}}{l'_{k-1}}\right] = h_1^{'k}$$

ainsi $h_1^{'k} \leq h_1^k$.

D'après le corollaire (1.4.1) pour $i = \tilde{r} - 1 = t^{k-1} + h_0^k - 1$ on a :

$$O_j = O'_j \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq t^{k-1} + h_0^{'k} + h_1^{'k}$$

c'est-à-dire

$$D_j = D'_j \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq t^{k-1} + h_0^{'k} + h_1^{'k} + 1$$

et si $\underline{h_1^{'k} < h_1^k}$

$$O_{t^{k-1}+h_0^{'k}+h_1^{'k}+1} \neq O'_{t^{k-1}+h_0^{'k}+h_1^{'k}+1}$$

c'est-à-dire

$$D_{t^{k-1}+h_0^{'k}+h_1^{'k}+2} \neq D'_{t^{k-1}+h_0^{'k}+h_1^{'k}+2}.$$

On doit remarquer que le sommet $\mathcal{S}_{t^{k-1}+h_0^{'k}+h_1^{'k}+1}$ est le premier sommet de la troisième sous-chaîne $K_2^{'k}$ qui forme le sous-graphe G'_k de G'.

Maintenant si on continue la comparaison du k-ème développement en fractions continues de C $[h_0^k, \ldots, h_{q^k}^k]$ avec le k-ème développement en fractions continues de C' $[h_0^{'k}, \ldots, h_{q'^k}^{'k}]$ et on suppose que $\min\{q^k, q'^k\} = q^k$ (en cas contraire on change le rôle de C et C') nous avons les cas suivants :

1. Il existe $\alpha \in \{1, \ldots, q^k\}$ tel que

$$h_j^k = h_j^{'k} \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq \alpha - 1$$

$$h_\alpha^k \neq h_\alpha^{'k}$$

2. $h_j^k = h_j^{'k}$ pour tout $1 \leq j \leq q^k$.
   Dans ce cas-là on a $q^k < q'^k$, puisque en cas contraire $[h_0^k, \ldots, h_{q^k}^k] = [h_0^{'k}, \ldots, h_{q'^k}^{'k}]$, c'est-à-dire $\dfrac{\beta_k - \beta_{k-1} + l_{k+1}}{l_{k-1}} = \dfrac{\beta'_k - \beta'_{k-1} + l'_{k+1}}{l'_{k-1}}$ qui est une contradiction.

On va étudier les deux cas :

• <u>Cas 1</u>
Comme $h_1^k = h_1^{'k}$ on sait d'après ci-dessus que

$$O_j = O'_j \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq t^{k-1} + h_0^k + h_1^k.$$

On a aussi deux possibilités sur α :

1. $\alpha \leq q^k - 1$.
2. $\alpha = q^k \leq q^{'k}$.

1. <u>Si $\alpha \leq q^k - 1$</u> et d'après plusieurs fois le corollaire (1.4.1) on trouve

   $$O_j = O'_j \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq t^{k-1} + h_0^k + h_1^k + \cdots + h_{\alpha-1}^k + \min\{h_\alpha^k, h_\alpha^{'k}\}.$$

   Soit $u = t^{k-1} + h_0^k + h_1^k + \cdots + h_{\alpha-1}^k + \min\{h_\alpha^k, h_\alpha^{'k}\}$.

   Maintenant on peut distinguer 2 sous-cas :

   (a) $\alpha < q^k - 1$.
   (b) $\alpha = q^k - 1$.

   (a) <u>$\alpha < q^k - 1$.</u>

   Comme $h_\alpha^k \neq h_\alpha^{'k}$ on peut avoir $h_\alpha^k < h_\alpha^{'k}$ ou bien $h_\alpha^{'k} < h_\alpha^k$.

   On doit remarquer que si α est un nombre pair l'inégalité qu'on a est $h_\alpha^k < h_\alpha^{'k}$ et si α est un nombre impair l'inégalité qu'on trouve est $h_\alpha^{'k} < h_\alpha^k$.

   On peut supposer $h_\alpha^k < h_\alpha^{'k}$ (en cas contraire on change le rôle de C et C'.)

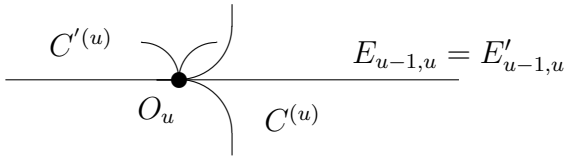
   Donc $u = t^{k-1} + h_0^k + \cdots + h_\alpha^k$.

   D'après la deuxième partie du corollaire (1.4.1) on a :

   $$O_{u+1} \neq O'_{u+1}.$$

   Mais on peut détailler un peu plus.

   On sait $s_{u-1} > s_u$, $s'_{u-1} = s'_u$, puisque $h_\alpha^k < h_\alpha^{'k}$ donc le diviseur $E_{u-1,u} = E'_{u-1,u}$ est tangent à $C^{(u)}$ et transverse à $C'^{(u)}$.



De plus

$$s_{u-1} = r^k_\alpha = h^k_{\alpha+1} r^k_{\alpha+1} + r^k_{\alpha+2}$$

où $r^k_{\alpha+2} \neq 0$ puisque $\alpha < q^k - 1$. Ainsi d'après le lemme (1.4.5) le diviseur $E_{u-1,u-1+l}$ a le contact maximal avec $C^{(u-1+l)}$ au point O_{u-1+l} pour tout $l \in \{1, \cdots, h^k_{\alpha+1}\}$ donc il est tangent à $C^{(u-1+l)}$ au point O_{u-1+l}.

Ainsi on a :

i. Le diviseur $E_{u-1,e} = D'_u = D_u$ ne coupe pas le diviseur $E_{u,e} = D'_{u+1} = D_{u+1}$ dans la surface finale $F^{(e)}$. Donc si on regarde le graphe $\mathcal{G}$ de la résolution plongée minimale de $C \cup C'$ par rapport au graphe G' de C' nous avons séparé dans le graphe $\mathcal{G}$ les sommets $\mathcal{S}'_u$ et $\mathcal{S}'_{u+1}$ qui sont reliés dans le graphe individuel G' de C'.

ii. A partir de ce moment les nouveaux diviseurs qui apparaissent dans les éclatements de $F^{(u+1)}$ se coupent dans $F^{(e)}$ comme dans le graphe individuel de chaque branche.

Soit le sous-graphe $\mathcal{P} = G - (G_1 \cup \cdots G_{k-1} \cup K^k_0 \cup \cdots \cup K^k_\alpha)$ de G.

Le premier sommet $\mathcal{S}_{u+1}$ de la sous-chaîne $K^k_{\alpha+1}$ et le premier sommet $\mathcal{S}_v$ de la sous-chaîne $K^k_{\alpha+2}$ sont des extrémités de $\mathcal{P}$ qui appartiennent au sous-graphe G_k de G.

Donc le graphe dual de la résolution plongée minimale de $C \cup C'$ est, dans ce cas-là, le graphe $\mathcal{G}$ obtenu de la façon suivante :

i. On sépare les sommets $\mathcal{S}'_u$ et $\mathcal{S}'_{u+1}$ dans le graphe individuel G' de C' (ils sont reliés toujours dans G' d'après la valeur de $u+1$ par rapport au k-ème développement en fractions continues de C'). D'après cette opération on obtient $\tilde{G}'$.

ii. On attache $\mathcal{P}$ à $\tilde{G}'$ en identifiant le sommet $\mathcal{S}'_{u+1}$ de $\tilde{G}'$ avec le sommet $\mathcal{S}_{u+1}$ de $\mathcal{P}$ et en attachant le sommet $\mathcal{S}'_u$ de $\tilde{G}'$ au sommet $\mathcal{S}_v$ de $\mathcal{P}$ (on rappelle que $\mathcal{S}'_u = \mathcal{S}_u$ est le dernier sommet de la sous- chaîne K^k_α, donc il est relié au sommet $\mathcal{S}_v$ de $K^k_{\alpha+2}$ d'après la construction des sous-chaînes K^k_i qui forment le sous-graphe G_k).

Exemple 1.4.7 *Le graphe dual de la résolution plongée minimale de la courbe d'équation* $(y^5 - x^{12})(y^7 - x^{24}) = 0$.

(b) $\underline{\alpha = q^k - 1.}$

D'après un raisonnement comme ci-dessus on peut supposer $h^k_{q^k-1} < h'^k_{q^k-1}$ donc $u = t^{k-1} + h^k_0 + \cdots + h^k_{q^k-1}$.

D'après la deuxième partie du corollaire (1.4.1) on a

$$O_{u+1} \neq O'_{u+1} \ .$$

On va détailler un peu plus.

Comme $h^k_{q^k-1} < h'^k_{q^k-1}$ on a $s_{u-1} > s_u$ et $s'_{u-1} = s'_u$.

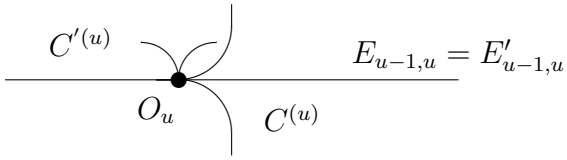
Mais dans ce cas-là

$$s_{u-1} = r^k_{q^k-1} = h^k_{q^k} r^k_{q^k}$$

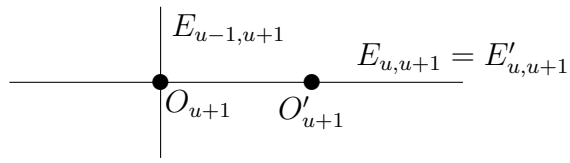
et

$$s'_{u-1} = r'^k_{q^k-1} = r'^k_{q^k}$$

donc le diviseur $E_{u-1,u}$ est tangent à $C^{(u)}$ au point O_u et transverse à $C'^{(u)}$.



Si on éclate le point O_u on trouve



puisque

$$(C^{(u+1)}, E_{u-1,u+1})_{O_{u+1}} = (C^{(u)}, E_{u-1,u})_{O_u} - s_u = s_{u-1} - s_u > 0$$

et

$$(C'^{(u+1)}, E_{u-1,u+1})_{O'_{u+1}} = s'_{u-1} - s'_u = 0 \ .$$

De plus le diviseur $E_{u-1,u+l}$ passe par le point O_{u+l} pour tout $l \in \{1, \ldots, h^k_{q^k-1}\}$ puisque

$$\begin{aligned}(C^{(u+l)}, E_{u-1,u+l})_{O_{u+l}} &= (C^{(u+l-1)}, E_{u-1,u+l-1})_{O_{u+l-1}} - s_{u+l-1} \\ &= \ldots \\ &= (C^{(u)}, E_{u-1,u})_{O_u} - s_u - \cdots - s_{u+l-1} \\ &= s_{u-1} - l s_u \ .\end{aligned}$$

Ainsi on trouve :

i. Le diviseur $E_{u-1,e} = D'_u = D_u$ ne coupe pas le diviseur $E_{u,e} = D'_{u+1} = D_{u+1}$ dans la surface finale $F^{(e)}$. Donc si on regarde le graphe $\mathcal{G}$ de la résolution plongée minimale de $C \cup C'$ par rapport au graphe G' de C' nous avons séparé dans le graphe $\mathcal{G}$ les sommets $\mathcal{S}'_u$ et $\mathcal{S}'_{u+1}$ qui sont reliés dans le graphe individuel G' de C'.

ii. A partir de ce moment les nouveaux diviseurs qui apparaissent dans les éclatements de $F^{(u+1)}$ se coupent dans $F^{(e)}$ comme dans le graphe individuel de chaque branche.

Soit le sous-graphe $\mathcal{P} = G - (G_1 \cup \cdots G_{k-1} \cup K^k_0 \cup \cdots \cup K^k_{q^k-1})$ de G.

Le premier sommet $\mathcal{S}_{u+1}$ de la sous-chaîne $K^k_{q^k}$ et le sommet de rupture $\mathcal{S}^*_k$ de G_k; sont les extrémités de $\mathcal{P}$ qui appartiennent au sous-graphe G_k de G.

Donc le graphe dual de la résolution plongée minimale de $C \cup C'$ est, dans ce cas-là, le graphe $\mathcal{G}$ obtenu de la façon suivante :

i. On sépare les sommets $\mathcal{S}'_u$ et $\mathcal{S}'_{u+1}$ dans le graphe individuel G' de C' (ils sont reliés toujours dans G' d'après la valeur de $u+1$ par rapport au k-ème développement en fractions continues de C'). D'après cette opération on obtient $\tilde{G}'$.

ii. On attache $\mathcal{P}$ à $\tilde{G}'$ en identifiant le sommet $\mathcal{S}'_{u+1}$ de $\tilde{G}'$ avec le sommet $\mathcal{S}_{u+1}$ de $\mathcal{P}$ et en attachant le sommet $\mathcal{S}'_u$ de $\tilde{G}'$ au sommet $\mathcal{S}^*_k$ de $\mathcal{P}$ (on rappelle que $\mathcal{S}'_u = \mathcal{S}_u$ est le dernier sommet de la sous- chaîne $K^k_\alpha = K^k_{q^k-1}$, donc il est relié au sommet de rupture $\mathcal{S}^*_k$ d'après la construction des sous-chaînes K^k_i qui forment le sous-graphe G_k).

Exemple 1.4.8 *Le graphe dual de la résolution plongée minimale de la courbe d'équation* $(y^3 - x^7)(y^9 - x^{29}) = 0$.

2. <u>Si $\alpha = q^k \leq q'^k$</u>
On peut distinguer les deux sous-cas suivants :

(a) $\alpha = q^k < q'^k$

(b) $\alpha = q^k = q'^k$

(a) <u>Si $\alpha = q^k < q'^k$</u> comme $h^k_j = h'^k_j$ pour tout $1 \leq j \leq q^k - 1$ d'après le corollaire (1.4.1) on a

$$O_j = O'_j \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq t^{k-1} + h^k_0 + \cdots + h^k_{q^k-1}.$$

Maintenant si $i = t^{k-1} + h^k_0 + \cdots + h^k_{q^k-1} - 1$ on a

$$s_i = r^k_{q^k-1} = h^k_{q^k} r^k_{q^k}$$

$$s'_i = r'^k_{q^k-1} = h'^k_{q^k} r^k_{q^k} + r'^k_{q^k+1}$$

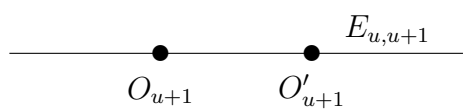
où $r'^k_{q^k+1} \neq 0$ puisque $q^k < q'^k$. Donc d'après le corollaire (1.4.2) on a

- <u>Si $h^k_{q^k} \leq h'^k_{q^k}$</u> alors

$$O_j = O'_j \qquad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq \underbrace{t^{k-1} + h_o^k + \cdots + h_{q^k}^k - 1}_{u}$$

$$O_{u+1} \neq O'_{u+1}$$

On va détailler un peu plus.
La situation est



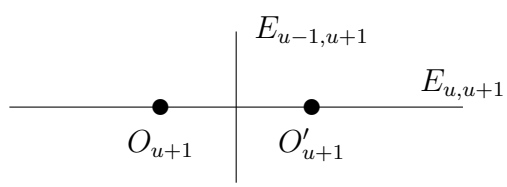
mais

$$(C^{(u+1)}, E_{u-1,u+1})_{O_{u+1}} = (C^{(u)}, E_{u-1,u})_{O_u} - s_u = s_{u-1} - s_u = 0$$

et

$$(C'^{(u+1)}, E_{u-1,u+1})_{O'_{u+1}} = s'_{u-1} - s'_u = 0$$

donc on a :



A partir de ce moment les nouveaux diviseurs qui apparaissent dans les éclatements de $F^{(u+1)}$ se coupent dans $F^{(e)}$ comme dans le graphe individuel de chaque branche.

Le sommet $\mathcal{S}_{u+1} = \mathcal{S}'_{u+1}$ est le sommet de rupture $\mathcal{S}_k^*$ du sous-graphe G_k de G.

Si $\mathcal{P} = G - (G_1 \cup \cdots \cup G_k)$ le graphe dual de la résolution plongée minimale de $C \cup C'$ est, dans ce cas-là, le graphe $\mathcal{G}$ obtenu identifiant le sommet $\mathcal{S}_{u+1}$ de $\mathcal{P}$ avec le sommet $\mathcal{S}'_{u+1}$ de G'.

Exemple 1.4.9 *Le graphe dual de la résolution plongée minimale de la courbe d'équation* $(y^7 - x^{30})(y^{23} - x^{99}) = 0$.

- $\underline{h'^k_{q^k} < h^k_{q^k}}$

Comme $h^k_j = h'^k_j$ pour tout $1 \leq j \leq q^k - 1$ d'après le corollaire (1.4.1) on a :

$$O_j = O'_j \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq t^{k-1} + h'^k_0 + \cdots + h'^k_{q^k-1}$$

Maintenant si $i = t^{k-1} + h'^k_0 + \cdots + h'^k_{q^k-1} - 1$ on trouve

$$s_i = r^k_{q^k-1} = h^k_{q^k} r^k_{q^k}$$

$$s'_i = r'^k_{q^k-1} = h'^k_{q^k} r'^k_{q^k} + r'^k_{q^k+1}$$

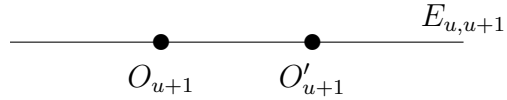
où $r'^k_{q^k+1} \neq 0$ puisque $q^k + 1 \leq q'^k$.

Donc comme $h'^k_{q^k} < h^k_{q^k}$ d'après le corollaire (1.4.2) on a

$$O_j = O'_j \qquad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq \underbrace{t^{k-1} + h'^k_0 + \cdots + h'^k_{q^k}}_{u}$$

$$O_{u+1} \neq O'_{u+1}$$

On va détailler un peu plus. La situation est



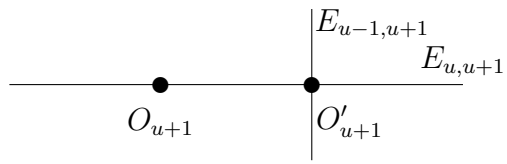
mais comme $s'_{u-1} > s'_u$ et $s_{u-1} = s_u$ alors

$$(C^{(u+1)}, E_{u-1,u+1})_{O_{u+1}} = s_{u-1} - s_u = 0$$

et

$$(C'^{(u+1)}, E_{u-1,u+1})_{O'_{u+1}} = s'_{u-1} - s'_u > 0$$

donc on a :



Ainsi le diviseur D_u qui est relié à D_{u+1} dans le graphe individuel G de C sont séparés dans le graphe $\mathcal{G}$ de $C \cup C'$.

A partir de ce moment les nouveaux diviseurs qui apparaissent dans les éclatements de $F^{(u+1)}$ se coupent dans $F^{(e)}$ comme dans le graphe individuel de chaque branche.

Soit $\mathcal{H}$ la plus petite chaîne connexe de G_k qui contient le sommet $\mathcal{S}_{u+1}$ et le sommet de rupture $\mathcal{S}_k^*$ ($\mathcal{H}$ est une sous-chaîne de la dernière chaîne $K_{q^k}^k$ de G_k).

Soit $\mathcal{P} = \mathcal{H} \cup G_{k+1} \cup \cdots \cup G_g$.

Le graphe dual de la résolution plongée minimale de $C \cup C'$ est, dans ce cas-là, le graphe obtenu en identifiant le sommet S_{u+1} de $\mathcal{P}$ avec le sommet S'_{u+1} de G'.

Exemple 1.4.10 *Le graphe dual de la résolution plongée minimale de la courbe d'équation* $(y^3 - x^7)(y^7 - x^{27}) = 0$.

(b) $\underline{\alpha = q^k = q'^k}$

Dans ce cas-là on a :

$$h_j^k = h_j'^k \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq q^k - 1$$

$$h_{q^k}^k \neq h_{q^k}'^k$$

D'après le corollaire (1.4.1) on a :

$$O_j = O'_j \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq t^{k-1} + h_0^k + \cdots + h_{q^k-1}^k.$$

Maintenant si $i = t^{k-1} + h_0^k + \cdots + h_{q^k-1}^k - 1$ on a :

$$s_i = r^k_{q^k-1} = h^k_{q^k} r^k_{q^k}$$

$$s'_i = r'^k_{q^k-1} = h'^k_{q^k} r'^k_{q^k}$$

donc d'après le lemme (1.4.6) on a

$$O_{i+k} = O'_{i+k} \qquad \text{pour tout} \quad 1 \leq k \leq h^k_{q^k}$$

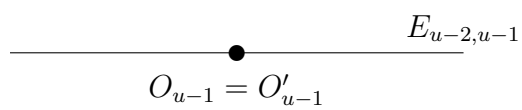
$$O_{i+h^k_{q^k}+1} \neq O'_{i+h^k_{q^k}+1}$$

c'est-à-dire

$$O_j = O'_j \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq \underbrace{t^{k-1} + h^k_0 + \cdots + h^k_{q^k} - 1}_{u-1}$$

$$O_u \neq O'_u$$

On va détailler un peu plus :



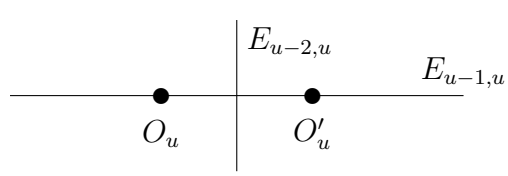
et comme $s_{u-2} = s_{u-1}$ et $s'_{u-2} = s'_{u-1}$ on a :

$$(C^{(u)}, E_{u-2,u})_{O_u} = s_{u-2} - s_{u-1} = 0$$

et

$$(C'^{(u)}, E_{u-2,u})_{O_u} = s'_{u-2} - s'_{u-1} = 0$$

donc



A partir de ce moment les nouveaux diviseurs qui apparaissent dans les éclatements de $F^{(u)}$ se coupent dans $F^{(e)}$ comme dans le graphe individuel de chaque branche.

Le sommet $\mathcal{S}_u = \mathcal{S}'_u$ est le sommet de rupture S^*_k du sous-graphe G_k de G.

Si $\mathcal{P} = G - (G - 1 \cup \cdots \cup G_k)$ le graphe dual de la résolution plongée minimale de $C \cup C'$ est, dans ce cas-là, le graphe $\mathcal{G}$ obtenu en identifiant le sommet $\mathcal{S}_u$ de $\mathcal{P}$ avec le sommet $\mathcal{S}'_u$ de G'.

Exemple 1.4.11 *Le graphe dual de la résolution plongée minimale de la courbe d'équation* $(y^7 - x^{30})(y^{10} - x^{43}) = 0$.

• <u>Cas 2 :</u>
Dans ce cas-là on a

$$h^k_j = h'^k_j \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq q^k$$

et $q^k < q'^k$.

En particulière

$$h^k_j = h'^k_j \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq q^k - 1.$$

De plus si $i = t^{k-1} + h^k_0 + \cdots + h^k_{q^k-1} - 1$ d'après le corollaire (1.4.1) on a

$$s_i = r^k_{q^k-1} = h^k_{q^k} r^k_{q^k}$$

$$s'_i = r'^k_{q^k-1} = h'^k_{q^k} r'^k_{q^k} + r'^k_{q^k+1}$$

où $r'^k_{q^k+1} \neq 0$ puisque $q^k < q'^k$.

Mais $h^k_{q^k} = h'^k_{q^k}$ donc d'après le corollaire (1.4.2) on a

$$O_{i+l} = O'_{i+l} \qquad \text{pour tout } 1 \leq l \leq h^k_{q^k}$$

$$O_{i+h^k_{q^k}+1} \neq O'_{i+h^k_{q^k}+1}$$

c'est-à-dire

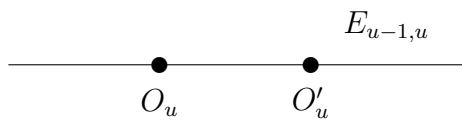
$$O_j = O'_j \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq t^{k-1} + h_0^k + \cdots + h_{q^k}^k - 1$$

$$O_u \neq O'_u$$

où $u = t^{k-1} + h_0^k + \cdots + h_{q^k}^k$. Donc

$$D_j = D'_j \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq u.$$

La situation dans ce cas-là est



et à partir de ce moment les nouveaux diviseurs qui apparaissent dans les éclatements de $F^{(u)}$ se coupent dans $F^{(e)}$ comme dans le graphe individuel de chaque branche.

On doit remarquer que le sommet $\mathcal{S}_u$ est le sommet de rupture du sous-graphe G_{k-1} de G.

Donc si $\mathcal{P} = G - (G_1 \cup \cdots G_{k-1})$ le graphe dual de la résolution plongée minimale de $C \cup C'$ est le graphe $\mathcal{G}$ obtenu en attachant $\mathcal{P}$ au sommet $\mathcal{S}'_u$ du graphe individuel G' de C'.

Exemple 1.4.12 *Le graphe dual de la résolution plongée minimale de la courbe d'équation* $(y^7 - x^{30})(y^{17} - x^{73}) = 0$.

1.4.5 Le graphe dual de la résolution d'une courbe avec $r \geq 3$ branches.

Soit C une courbe réduite plane avec r branches $C_1, \ldots, C_r$ de façon que $\dfrac{\text{cont}(C_{r-1}, C_r)}{m(C_{r-1})}$ soit maximal parmi les exposants de coincidence entre branches de C.

Par récurrence sur r, on peut supposer que l'on sait construire l'arbre de résolution de n'importe quelle courbe plane réduite ayant au plus $r-1$ branches.

Soit $\alpha = \left\{ \dfrac{\mathrm{cont}(C_i, C_j)}{m(C_i)} \right\}$ et $I = \{1, \ldots, r\}$.

Définissons $J = \left\{ (i,j) \in I^2 \ : \ i < j \text{ et } \dfrac{\mathrm{cont}(C_i, C_j)}{m(C_i)} = \alpha \right\}$.

J n'est pas vide puisque $(r-1, r) \in J$. Soit $m = \sharp J$.

La construction du graphe de résolution de C dépendra de la valeur de m.

Si $m = 1$, alors $J = \{(r-1, r)\}$. Par récurrence, on a construit le graphe de résolution de $C_1 \cup \cdots \cup C_{r-1}$. On lui ajoute alors le graphe de C_r en faisant exactement les mêmes identifications que si l'on construisait le graphe de $C_{r-1} \cup C_r$.

Maintenant si $m > 1$ pour tout $(i,j) \in J$, définissons l'ensemble :

$$L_{ij} = \{k \in \mathbb{N} \ : \ (i,k) \in J\}.$$

On va distinguer les cas suivants :

- Il existe $q_i \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\alpha = \frac{\mathrm{cont}(C_i, C_k)}{m(C_i)} = \frac{\beta^i_{q_i}}{\beta^i_0} = \frac{\beta^k_{q_i}}{\beta^k_0}$$

pour tout $k \in L_{ij}$.

Donc d'après l'étude de cas de deux branches faite dans le paragraphe 1.4.4, notant D^i_t (resp. D^k_t) est le t-ème diviseur de la résolution plongée minimale de C_i (resp. de C_k) on a :

$$D^i_t = D^k_t$$

pour tout $1 \leq t \leq u$ où $\mathcal{S}^i_u$ (resp. $\mathcal{S}^k_u$) est le q_i-ème sommet de rupture du graphe de la résolution plongée minimale de C_i (resp. de C_k).

- Pour tout $k \in L_{ij}$ on a :

$$\alpha = \frac{\mathrm{cont}(C_i, C_k)}{m(C_i)} \neq \frac{\beta^i_t}{\beta^i_0} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\mathrm{cont}(C_k, C_i)}{m(C_k)} \neq \frac{\beta^k_t}{\beta^k_0}$$

pour tout $t \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas-là il existe $q_i \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{\beta^i_{q_i}}{\beta^i_0} = \frac{\beta^k_{q_i}}{\beta^k_0} < \alpha < \min\left\{\frac{\beta^i_{q_i+1}}{\beta^i_0}, \frac{\beta^k_{q_i+1}}{\beta^k_0}\right\}.$$

Donc il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que

$$\beta^i_{q_i} - \mathrm{cont}(C_i, C_k) = jl^i_{q_i}$$

$$\beta^k_{q_i} - \mathrm{cont}(C_k, C_i) = jl^k_{q_i}$$

et d'après le paragraphe 1.4.4 on a :

$$D^i_t = D^k_t$$

pour tout $1 \leq t \leq u + j$ où $\mathcal{S}^i_u$ (resp. $\mathcal{S}^k_u$) est le q_i-ème sommet de rupture du graphe de la résolution plongée minimale de C_i (resp. de C_k).

- Il existe $q_i \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\alpha = \frac{\mathrm{cont}(C_i, C_k)}{m(C_i)} = \frac{\beta^i_{q_i}}{\beta^i_0}$$

et il existe $k \in L_{ij}$ tel que

$$\frac{\mathrm{cont}(C_k, C_i)}{m(C_k)} \neq \frac{\beta^k_t}{\beta^k_0}$$

pour tout $t \in \mathbb{N}$.

Définissons les ensembles :

$$L^1_{ij} = \left\{k \in L_{ij} \ : \ \alpha = \frac{\mathrm{cont}(C_i, C_k)}{m(C_i)} = \frac{\beta^i_{q_i}}{\beta^i_0} = \frac{\beta^k_{q_i}}{\beta^k_0}\right\}$$

$$L^2_{ij} = \left\{k \in L_{ij} \ : \ \alpha = \frac{\mathrm{cont}(C_i, C_k)}{m(C_i)} = \frac{\beta^i_{q_i}}{\beta^i_0} < \frac{\beta^k_{q_i}}{\beta^k_0}\right\}.$$

Dans ce cas-là et d'après le théorème (1.4.5) on vérifie :

1. Si $k \in L^1_{ij}$ alors $D^i_t = D^k_t$ pour tout $1 \leq t \leq u$ où $\mathcal{S}^i_u$ (resp. $\mathcal{S}^k_u$) est le q_i- ème sommet de rupture du graphe de la résolution plongée minimale de C_i (resp. de C_k).

2. Si $k \in L^2_{ij}$ on compare le développement en fractions continues $[h^i_0, \ldots, h^i_{t^{q_i}}]$ associé au sous-graphe $G^i_{q_i}$ de C_i avec le développement en fractions continues $[h^k_0, \ldots, h^k_{t^{q_i}}]$ associé au sous-graphe $G^k_{q_i}$ de C_k comme nous avons fait dans le cas de deux branches. De plus le l-ème diviseur D^i_l de C_i coïncide avec le l-ème diviseur D^j_l de C_j si et seulement s'il existe $D \in F^{(e)}$ tel que $\pi_{e,j}(D) = D^j_l$ et $\pi_{e,i}(D) = D^i_l$.

$$\begin{array}{ccc} & F^{(e)} & \xrightarrow{\Pi_{e,j}} F_{e,j} \\ \Pi_{e,i} \downarrow & & \\ & F_{e,i} & \end{array}$$

De cette façon on calcule le graphe dual de la résolution plongée minimale de C à partir des graphes de la résolution plongée minimale de chaque branche de C.

1.4.6 Comparaison entre l'arbre d'Eggers et le graphe dual de la résolution.

On commencera avec le cas d'une branche C.

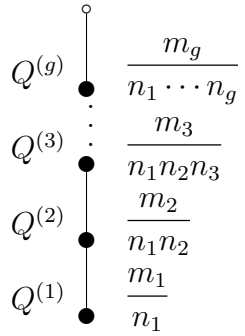
Soit $\{\beta_0, \ldots, \beta_g\}$ l'ensemble des exposants caractéristiques de C.

Alors l'arbre d'Eggers de C a g sommets noirs $\{Q^{(i)}\}_{i=1}^g$ tel que

$$v(Q^{(i)}) = \frac{\beta_i}{\beta_0} = \frac{m_i}{n_1 \cdots n_i}$$

où $\{(m_i, n_i)\}_{i=1}^g$ est l'ensemble des paires caractéristiques de C.

Donc l'arbre d'Eggers de C est :



On peut construire le graphe de la résolution de C à partir de l'arbre d'Eggers de la forme suivante :

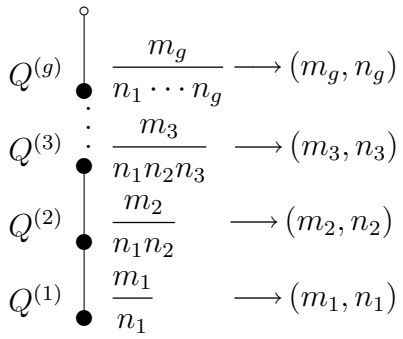
1. A partir de $v(Q^{(1)}) = \dfrac{m_1}{n_1}$ et puisque le p.g.c.d$(m_1, n_1) = 1$ on trouve la valeur du premier paire caractéristique (m_1, n_1) de C.
2. A partir de $v(Q^{(2)}) = \dfrac{m_2}{n_1 n_2}$ et puisque :
   (a) p.g.c.d$(m_2, n_2) = 1$ et
   (b) la valeur de n_1 est connue
   on peut calculer la valeur du deuxième paire caractéristique (m_2, n_2) de C.

En général, à partir de $v(Q^{(i)}) = \dfrac{m_i}{n_1 \cdots n_i}$ et puisque :

1. p.g.c.d$(m_i, n_i) = 1$ et
2. les valeurs de n_k avec $k \in \{1, \ldots, i-1\}$ sont connues

on peut calculer la valeur du i-ème paire caractéristique (m_i, n_i) de C.

De cette façon à partir des valuations des sommets noirs de l'arbre d'Eggers de C on peut obtenir les valeurs des paires caractéristiques de C.



De plus, puisque pour tout $q \in \{1, \ldots, g\}$ on vérifie l'égalité :

$$\frac{\beta_q - \beta_{q-1} + l_{q-1}}{l_{q-1}} = \frac{m_q - m_{q-1}n_q}{n_q} + 1$$

nous pouvons obtenir les quotients $\frac{\beta_q - \beta_{q-1} + l_{q-1}}{l_{q-1}}$ pour tout $q \in \{1, \ldots, g\}$ à partir de paires caractéristiques de C.
Donc si on calcule les développements en fractions continues de chaque quotient

$$\frac{\beta_q - \beta_{q-1} + l_{q-1}}{l_{q-1}} = [h_0^q, \ldots, h_{t^q}^q]$$

nous pouvons construire les g sous-graphes G_k qui constituent le graphe dual G de la résolution plongée minimale de C, c'est-à-dire, on peut construire le graphe dual de la résolution plongée minimale de C à partir de l'arbre d'Eggers de C.

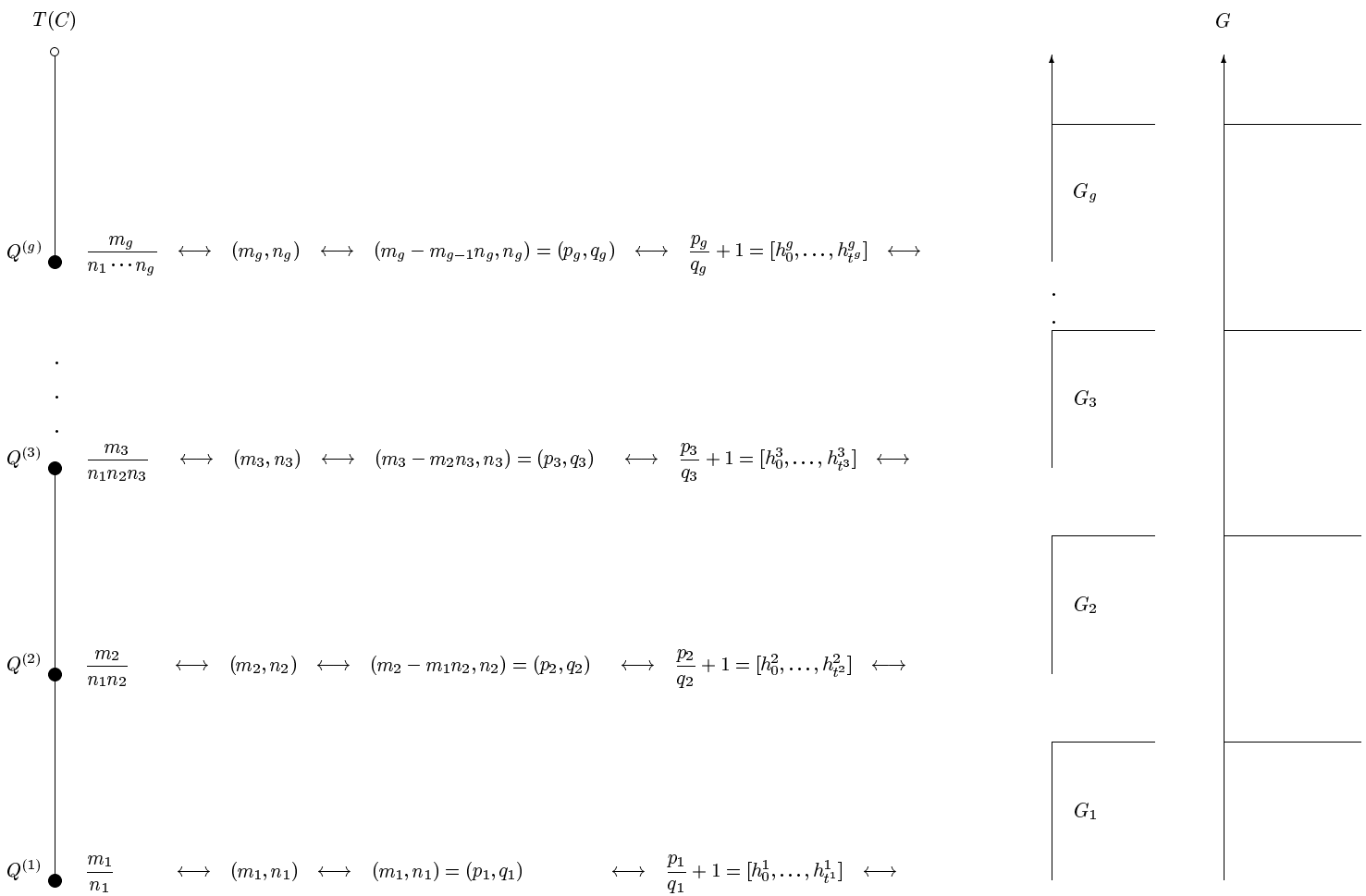
De plus, on peut obtenir l'arbre d'Eggers de C à partir du graphe dual de la résolution plongée minimale de C de la façon suivante :

1. Dès que on connaît le graphe dual de la résolution plongée minimale de G, on a les g sous-graphes G_k.
2. Pour tout $k \in \{1, \ldots, g\}$ le graphe G_k donne le développement en fractions continues $[h_0^k, \ldots, h_{t^k}^k]$ qui vérifie :
   (a) Si $k = 1$ alors $[h_0^1, \ldots, h_{t^1}^1]$ est le développement en fractions continues de $\dfrac{m_1}{n_1}$.
   (b) Si $k \in \{2, \ldots, g\}$ alors $[h_0^k, \ldots, h_{t^k}^k]$ est le développement en fractions continues de $\dfrac{m_k - m_{k-1}n_k}{n_k} + 1$.

Ainsi nous pouvons obtenir les paires caractéristiques de C à partir des développements en fractions continues $[h_0^k, \ldots, h_{t^k}^k]$ où $k \in \{1, \ldots, g\}$ et on peut reconstruire l'arbre d'Eggers de C.
Donc on a :

Proposition 1.4.5 *Si C est une branche alors l'arbre d'Eggers de C et le graphe dual de la résolution plongée minimale de C sont équivalents, puisque ils contiennent la même information.*

Le schéma graphique de la situation est :


$T(C)$
G
$Q^{(g)}$ $\frac{m_g}{n_1 \cdots n_g}$ $\longleftrightarrow$ (m_g, n_g) $\longleftrightarrow$ $(m_g - m_{g-1}n_g, n_g) = (p_g, q_g)$ $\longleftrightarrow$ $\frac{p_g}{q_g} + 1 = [h_0^g, \ldots, h_{t^g}^g]$ $\longleftrightarrow$
$Q^{(3)}$ $\frac{m_3}{n_1 n_2 n_3}$ $\longleftrightarrow$ (m_3, n_3) $\longleftrightarrow$ $(m_3 - m_2 n_3, n_3) = (p_3, q_3)$ $\longleftrightarrow$ $\frac{p_3}{q_3} + 1 = [h_0^3, \ldots, h_{t^3}^3]$ $\longleftrightarrow$
$Q^{(2)}$ $\frac{m_2}{n_1 n_2}$ $\longleftrightarrow$ (m_2, n_2) $\longleftrightarrow$ $(m_2 - m_1 n_2, n_2) = (p_2, q_2)$ $\longleftrightarrow$ $\frac{p_2}{q_2} + 1 = [h_0^2, \ldots, h_{t^2}^2]$ $\longleftrightarrow$
$Q^{(1)}$ $\frac{m_1}{n_1}$ $\longleftrightarrow$ (m_1, n_1) $\longleftrightarrow$ $(m_1, n_1) = (p_1, q_1)$ $\longleftrightarrow$ $\frac{p_1}{q_1} + 1 = [h_0^1, \ldots, h_{t^1}^1]$ $\longleftrightarrow$
G_g
G_3
G_2
G_1

Maintenant on va étudier le cas d'une courbe plane réduite C avec deux branches C_1 et C_2.

Soit $\{\beta_0^i, \ldots, \beta_{g_i}^i\}$ l'ensemble des exposants caractéristiques de C_i et soit $\{(m_l^i, n_l^i)\}$ l'ensemble des paires caractéristiques de C_i où $i \in \{1, 2\}$.

Supposons connaître l'arbre d'Eggers $T(C)$ de C. Alors si $\{Q^{(l)}\}$ est l'ensemble des sommets noirs de $T(C)$ on vérifie :

1. Il existe $Q^{(b)}$ tel que $Q^{(b)}$ est un sommet de bifurcation tel que $d_1(Q^{(b)}) + d_2(Q^{(b)}) = 2$.
2. Pour tout $l \neq b$ alors $Q^{(l)}$ est un sommet simple de $T(C)$.

Soit $k := k(Q^{(b)}) \geq 0$. Comme $d_1(Q^{(b)}) + d_2(Q^{(b)}) = 2$, on peut distinguer les cas suivants :

1. $d_1(Q^{(b)}) = 0$ et $d_2(Q^{(b)}) = 2$.
2. $d_1(Q^{(b)}) = 2$ et $d_2(Q^{(b)}) = 0$.
3. $d_1(Q^{(b)}) = d_2(Q^{(b)}) = 1$.

On va détailler un peu plus chaque cas :

Si $d_1(Q^{(b)}) = 0$ et $d_2(Q^{(b)}) = 2$ alors

$$v(Q^{(b)}) = \frac{\beta_{k+1}^1}{\beta_0^1} = \frac{\beta_{k+1}^2}{\beta_0^2} \quad ,$$

c'est-à-dire, $\mathrm{cont}(C_1, C_2) = \beta_{k+1}^1$ et $\mathrm{cont}(C_2, C_1) = \beta_{k+1}^2$.

Donc on vérifie :

$$\frac{\beta_l^1}{\beta_0^1} = \frac{\beta_l^2}{\beta_0^2}$$

pour tout $l \in \{1, \ldots, k+1\}$ et alors on a

$$(m_l^1, n_l^1) = (m_l^2, n_l^2)$$

où $l \in \{1, \ldots, k+1\}$.
Ainsi $G_l^1 = G_l^2$ pour tout $l \in \{1, \ldots, k+1\}$ où G_l^1 (resp. G_l^2) est le l-ème sous-graphe du graphe dual G_1(resp. G_2) de C_1 (resp. de C_2).

De plus $T(C) - \{Q^{(b)}\}$ a deux composantes connexes $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ telles que $\mathcal{L}_1$(resp. $\mathcal{L}_2$) contient les sommets noirs de $T(C)$ tels que leur valuation est un élément de $A_1 = \left\{\frac{\beta_{k+2}^1}{\beta_0^1}, \ldots, \frac{\beta_{g_1}^1}{\beta_0^1}\right\}$(resp. $A_2 = \left\{\frac{\beta_{k+2}^2}{\beta_0^2}, \ldots, \frac{\beta_{g_2}^2}{\beta_0^2}\right\}$).

Ainsi à partir de A_1(resp. de A_2) on peut obtenir les paires caractéristiques $\{(m_l^1, n_l^1)\}_{l=k+2}^{g_1}$ (resp. $\{(m_l^2, n_l^2)\}_{l=k+2}^{g_2}$) de C_1(resp. de C_2).

Alors nous pouvons construire les sous-graphes $\{G_l^1\}_{l=k+2}^{g_1}$ (resp. $\{G_l^2\}_{l=k+2}^{g_2}$) et obtenir le graphe dual de la résolution plongée minimale de C de la façon suivante :

1. On fait la concaténation $\mathcal{C}$ des sous-graphes $G_l^1 = G_l^2$ avec $1 \leq l \leq k+1$.
2. On fait la concaténation $\mathcal{C}_1$ des sous-graphes G_l^1 où $k+2 \leq l \leq g_1$ et on ajoute une flêche dans le sommet de rupture du sous-graphe $G_{g_1}^1$.
3. On fait la concaténation $\mathcal{C}_2$ des sous-graphes G_l^2 où $k+2 \leq l \leq g_2$ et on ajoute une flêche dans le sommet de rupture du sous-graphe $G_{g_2}^2$.
4. On identifie le sommet de rupture du sous-graphe $G_{k+1}^1 = G_{k+1}^2$ de $\mathcal{C}$ avec le premier sommet de $\mathcal{C}_1$ et avec le premier sommet de $\mathcal{C}_2$. Le graphe ainsi obtenu est le graphe dual de la résolution plongée minimale de C.

Donc à partir de l'arbre d'Eggers on a construit le graphe de la résolution plongée minimale de C.

Maintenant si on connaît le graphe G de la résolution plongée minimale de C on peut reconstruire l'arbre d'Eggers $T(C)$ de C de la façon suivante : Soit Q le dernier sommet de rupture que C_1 et C_2 ont en commun (Q est exactement le sommet où C_1 et C_2 sont separées dans G). Supposons que $Q \in G_q^1 = G_q^2$ alors $G_l^1 = G_l^2$ pour tout $l \in \{1, \ldots, q\}$.
Alors, si $[h_0, \ldots, h_{t^l}]$ est le développement en fractions continues associé au sous-graphe $G_l^1 = G_l^2$, on vérifie :

$$[h_0, \ldots, h_{t^l}] = \begin{cases} \dfrac{m_1^1}{n_1^1} = \dfrac{m_1^2}{n_1^2} & \text{si } l = 1 \\ \\ \dfrac{m_l^1 - m_{l-1}^1 n_l^1}{n_l^1} + 1 = \dfrac{m_l^2 - m_{l-1}^2 n_l^2}{n_l^2} + 1 & \text{si } 1 < l \leq q \end{cases}$$

Donc on obtient les q premières paires caractéristiques $(m_i^1, n_i^1) = (m_i^2, n_i^2)$ où $1 \leq i \leq q$ de C_1 et C_2.

Ainsi $T(C)$ a q sommets noirs $\{Q_1, \ldots, Q_q\}$ tels que :

1. Q_1 est le point base de $T(C)$.

2. $Q_q = Q^{(b)}$, c'est-à-dire, Q_q est le sommet de bifurcation de $T(C)$.
3. $v(Q_l) = \dfrac{m_l^1}{n_1^1 \cdots n_l^1} = \dfrac{m_l^2}{n_1^2 \cdots n_l^2}$ où $l \in \{1, \ldots, q\}$.

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les deux sous-graphes de G qui partent de Q dans le graphe dual de la résolution de C et qui ont à Q comme premier sommet.

Soit p_1 (resp. p_2) le nombre des sommets de rupture de $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$). Alors :

$$\mathcal{P}_1 = \bigcup_{l=q+1}^{q+p_1} G_l^1 \qquad \mathcal{P}_2 = \bigcup_{l=q+1}^{q+p_2} G_l^2 \ .$$

Si $[h_0^1, \ldots, h_{t^l}^1]$ (resp.$[h_0^2, \ldots, h_{t^l}^2]$) est le développement en fractions continues associé à G_l^1 (resp. G_l^2) on a :

$$[h_0^1, \ldots, h_{t^l}^1] = \frac{m_{q+l}^1 - m_{q+l-1}^1 n_{q+l}^1}{n_{q+l}^1} + 1$$

pour tout $1 \leq l \leq p_1$ et de plus

$$[h_0^2, \ldots, h_{t^l}^2] = \frac{m_{q+l}^2 - m_{q+l-1}^2 n_{q+l}^2}{n_{q+l}^2} + 1$$

pour tout $1 \leq l \leq p_2$, donc on obtient les paires caractéristiques :

$$\begin{cases} (m_{q+l}^1, n_{q+l}^1) \text{ où } 1 \leq l \leq p_1 \\ \\ (m_{q+l}^2, n_{q+l}^2) \text{ où } 1 \leq l \leq p_2 \end{cases}$$

Maintenant on ajoute deux arêtes pleines au sommet Q_q.

De plus on ajoute à la première arête pleine une chaîne connexe avec p_1 sommets noirs $\{Q_l^1\}_{l=1}^{p_1}$ et un sommet blanc dans l'extrême tels que

$$v(Q_l^1) = \frac{m_{q+l}^1}{n_1^1 \cdots n_{q+l}^1}$$

où $l \in \{1, \ldots, p_1\}$.
Finalement on ajoute à la deuxième arête pleine une chaîne connexe avec p_2 sommets noirs $\{Q_l^2\}_{l=1}^{p_2}$ et un sommet blanc dans l'extrême tels que

$$v(Q_l^2) = \frac{m_{q+l}^2}{n_1^2 \cdots n_{q+l}^2}$$

où $l \in \{1, \ldots, p_2\}$.

Le graphe ainsi construît est l'arbre d'Eggers de C.

Si $d_1(Q^{(b)}) = 2$ et $d_2(Q^{(b)}) = 0$ alors

$$\frac{\beta_k^1}{\beta_0^1} = \frac{\beta_k^2}{\beta_0^2} < v(Q^{(b)}) < \min\left\{\frac{\beta_{k+1}^1}{\beta_0^1}, \frac{\beta_{k+1}^2}{\beta_0^2}\right\} \quad .$$

Donc on vérifie :

$$\frac{\beta_l^1}{\beta_0^1} = \frac{\beta_l^2}{\beta_0^2}$$

pour tout $l \in \{1, \ldots, k\}$, c'est-à-dire $(m_l^1, n_l^1) = (m_l^2, n_l^2)$ où $l \in \{1, \ldots, k\}$.

De plus il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que :

1. $\mathrm{cont}(C_1, C_2) - \beta_k^1 = jl_k^1$,
2. $\mathrm{cont}(C_2, C_1) - \beta_k^1 = jl_k^2$,

c'est-à-dire

$$v(Q^{(b)}) = \frac{m_k^1 + j}{n_1^1 \ldots n_k^1} = \frac{m_k^2 + j}{n_1^2 \ldots n_k^2} \quad .$$

Alors $G_l^1 = G_l^2$ pour tout $l \in \{1, \ldots, k\}$ où G_l^1(resp. G_l^2) est le l-ème sous-graphe du graphe dual G_1(resp. G_2) de C_1 (resp. de C_2).

De plus $T(C) - \{Q^{(b)}\}$ a deux composantes connexes $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ telles que $\mathcal{L}_1$(resp. $\mathcal{L}_2$) contient les sommets noirs de $T(C)$ tels que leur valuation est un élément de $A_1 = \left\{\frac{\beta_{k+1}^1}{\beta_0^1}, \ldots, \frac{\beta_{g_1}^1}{\beta_0^1}\right\}$ (resp. $A_2 = \left\{\frac{\beta_{k+1}^2}{\beta_0^2}, \ldots, \frac{\beta_{g_2}^2}{\beta_0^2}\right\}$.

Ainsi à partir de A_1(resp. de A_2) on peut obtenir les paires caractéristiques $\{(m_l^1, n_l^1)\}_{l=k+1}^{g_1}$ (resp. $\{(m_l^2, n_l^2)\}_{l=k+1}^{g_2}$) de C_1(resp. de C_2).

Alors nous pouvons construire les sous-graphes $\{G_l^1\}_{l=k+1}^{g_1}$ (resp. $\{G_l^2\}_{l=k+1}^{g_2}$) et obtenir le graphe dual de la résolution plongée minimale de chaque branche C_i de C.

Ainsi si r est le numéro associé au sommet de rupture de $G_k^1 = G_k^2$, le graphe dual de la résolution plongée minimale de C est la réunion du graphe G_1 de C_1 avec le graphe G_2 de C_2 où on a identifie les sommets $\mathcal{S}_l^1$ de G_1 avec les sommets $\mathcal{S}_l^2$ de G_2 où $1 \leq l \leq r + j$.

Donc à partir de l'arbre d'Eggers on a construit le graphe dual de la résolution plongée minimale de C.

Maintenant si on connaît le graphe G de la résolution plongée minimale de C on peut reconstruire l'arbre d'Eggers de C de la façon suivante :

Soit Q le dernier sommet de rupture que C_1 et C_2 ont en commun. Supposons que $Q \in G_q^1 = G_q^2$ alors $G_l^1 = G_l^2$ pour tout $l \in \{1, \ldots, q\}$. (Si C_1 et C_2 n'ont pas des sommets de rupture en commun alors $q = 0$).

Donc si, $[h_0, \ldots, h_{t^l}]$ est le développement en fractions continues associé au sous-graphe $G_l^1 = G_l^2$, on vérifie :

$$[h_0, \ldots, h_{t^l}] = \begin{cases} \dfrac{m_1^1}{n_1^1} = \dfrac{m_1^2}{n_1^2} & \text{si } l = 1 \\[2ex] \dfrac{m_l^1 - m_{l-1}^1 n_l^1}{n_l^1} + 1 = \dfrac{m_l^2 - m_{l-1}^2 n_l^2}{n_l^2} + 1 & \text{si } 1 < l \leq q \end{cases}$$

Donc on obtient les q premières paires caractéristiques de C_1 et C_2

$$(m_l^1, n_l^1) = (m_l^2, n_l^2)$$

pour tout $1 \leq l \leq q$.

Alors $T(C)$ a q sommets $\{Q_1, \ldots, Q_q\}$ tels que :

1. Q_1 est le point base de $T(C)$.
2. $v(Q_l) = \dfrac{m_l^1}{n_1^1 \cdots n_l^1} = \dfrac{m_l^2}{n_1^2 \cdots n_l^2}$ où $l \in \{1, \ldots, q\}$.

De plus on ajoute à Q_q une arête pleine avec un sommet noir $Q^{(b)}$ dans l'extrême. $Q^{(b)}$ est le sommet de bifurcation de $T(C)$ et on vérifie :

$$v(Q^{(b)}) = \frac{m_q^1 + r - s}{n_1^1 \cdots n_q^1} = \frac{m_q^2 + r - s}{n_1^2 \cdots n_q^2}$$

où r est le numéro associé au sommet $\overline{Q}$ de G où C_1 et C_2 sont separées et s est le numéro associé au sommet Q de G. (Si $q = 0$ alors Q est le premier sommet du graphe dual de la résolution plongée minimale G de C).

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ le deux sous-graphes de G qui partent de $\overline{Q}$ dans le graphe dual de la résolution de C et qui ont $\overline{Q}$ comme premier sommet.

Soit aussi $\mathcal{L}$ la plus petite chaîne connexe de G tel que Q est son premier sommet et $\overline{Q}$ est son dernier sommet.

On définie $\overline{\mathcal{P}}_1 = \mathcal{L} \cup \mathcal{P}_1$ (resp. $\overline{\mathcal{P}}_2 = \mathcal{L} \cup \mathcal{P}_2$) où $\mathcal{L}$ et $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{L}$ et $\mathcal{P}_2$) sont ajoutés en identifiant le sommet $\overline{Q}$ que appartient à $\mathcal{L}$ et $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{L}$ et $\mathcal{P}_2$).

Si p_1 (resp. p_2) est le nombre des sommets de rupture de $\overline{\mathcal{P}_1}$ (resp. $\overline{\mathcal{P}_2}$) alors :

$$\overline{\mathcal{P}}_1 = \bigcup_{l=q+1}^{q+p_1} G_l^1 \quad \overline{\mathcal{P}}_2 = \bigcup_{l=q+1}^{q+p_2} G_l^2 \ .$$

Si $[h_0^1, \ldots, h_{t^l}^1]$ (resp.$[h_0^2, \ldots, h_{t^l}^2]$) est le développement en fractions continues associé à G_l^1 (resp. G_l^2) on a :

$$[h_0^1, \ldots, h_{t^l}^1] = \frac{m_{q+l}^1 - m_{q+l-1}^1 n_{q+l}^1}{n_{q+l}^1} + 1$$

pour tout $1 \leq l \leq p_1$ et

$$[h_0^2, \ldots, h_{t^l}^2] = \frac{m_{q+l}^2 - m_{q+l-1}^2 n_{q+l}^2}{n_{q+l}^2} + 1$$

pour tout $1 \leq l \leq p_2$, donc on obtient les paires caractéristiques :

$$\begin{cases} (m_{q+l}^1, n_{q+l}^1) \text{ où } 1 \leq l \leq p_1 \\ \\ (m_{q+l}^2, n_{q+l}^2) \text{ où } 1 \leq l \leq p_2 \end{cases}$$

Maintenant on ajoute deux arêtes pointillées au sommet $Q^{(b)}$.

De plus on ajoute à la première arête pointillée une chaîne connexe avec p_1 sommets noirs $\{Q_l^1\}_{l=1}^{p_1}$ et un sommet blanc terminal tels que

$$v(Q_l^1) = \frac{m_{q+l}^1}{n_1^1 \cdots n_{q+l}^1}$$

où $l \in \{1, \ldots, p_1\}$.

Finalement on ajoute à la deuxième arête pointillée une chaîne connexe avec p_2 sommets noirs $\{Q_l^2\}_{l=1}^{p_2}$ et un sommet blanc terminal tels que

$$v(Q_l^2) = \frac{m_{q+l}^2}{n_1^2 \cdots n_{q+l}^2}$$

où $l \in \{1, \ldots, p_2\}$.

Le graphe ainsi construît est l'arbre d'Eggers de C.

Si $d_1(Q^{(b)}) = d_2(Q^{(b)}) = 1$ alors

$$v(Q^{(b)}) = \frac{\beta_{k+1}^1}{\beta_0^1} < \frac{\beta_{k+1}^2}{\beta_0^2}$$

ou bien

$$v(Q^{(b)}) = \frac{\beta_{k+1}^2}{\beta_0^2} < \frac{\beta_{k+1}^1}{\beta_0^1}.$$

On va supposer que $v(Q^{(b)}) = \frac{\beta_{k+1}^1}{\beta_0^1} < \frac{\beta_{k+1}^2}{\beta_0^2}$ (l'autre cas est similaire).

Donc $\mathrm{cont}(C_1, C_2) = \beta_{k+1}^1$.

Ainsi on vérifie :

$$\frac{\beta_l^1}{\beta_0^1} = \frac{\beta_l^2}{\beta_0^2}$$

pour tout $l \in \{1, \ldots, k\}$, c'est-à-dire $(m_l^1, n_l^1) = (m_l^2, n_l^2)$ où $l \in \{1, \ldots, k\}$.

Alors $G_l^1 = G_l^2$ pour tout $l \in \{1, \ldots, k\}$ où G_l^1 (resp. G_l^2) est le l-ème sous-graphe du graphe dual G_1(resp. G_2) de C_1 (resp. de C_2).

Maintenant comme $v(Q^{(b)}) = \dfrac{\beta_{k+1}^1}{\beta_0^1}$ on obtient la paire (m_{k+1}^1, n_{k+1}^1) et on peut construîre le graphe G_{k+1}^1 de C_1.

De plus $T(C) - \{Q^{(b)}\}$ a deux composantes connexes $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ telles que $\mathcal{L}_1$ (resp. $\mathcal{L}_2$) contient les sommets noirs de $T(C)$ tels que leur valuation est un élément de $A_1 = \left\{\frac{\beta_{k+2}^1}{\beta_0^1}, \ldots, \frac{\beta_{g_1}^1}{\beta_0^1}\right\}$ (resp. $A_2 = \left\{\frac{\beta_{k+1}^2}{\beta_0^2}, \ldots, \frac{\beta_{g_2}^2}{\beta_0^2}\right\}$).

Ainsi à partir de A_1(resp. de A_2) on peut obtenir les paires caractéristiques $\{(m_l^1, n_l^1)\}_{l=k+2}^{g_1}$ (resp. $\{(m_l^2, n_l^2)\}_{l=k+1}^{g_2}$) de C_1(resp. de C_2).

Alors nous pouvons construire les sous-graphes $\{G_l^1\}_{l=k+2}^{g_1}$ (resp. $\{G_l^2\}_{l=k+1}^{g_2}$) et obtenir le graphe dual de la résolution plongée minimale de chaque branche C_i de C.

Maintenant pour obtenir le graphe dual de la résolution plongée minimale de C il suffit de comparer le développement en fractions continues $[h_0^1, \ldots, h_{t^1}^1]$ de G_{k+1}^1 et le développement en fractions continues $[h_0^2, \ldots, h_{t^2}^2]$ de G_{k+1}^2, et d'appliquer l'étude qu'on a faite pour construire le graphe dual de la résolution d'une courbe C avec deux branches.

Donc à partir de l'arbre d'Eggers on a construit le graphe dual de la résolution plongée minimale de C.

Maintenant si on connaît le graphe G de la résolution plongée minimale de C on peut reconstruire l'arbre d'Eggers $T(C)$ de C de la façon suivante :

Soit Q le dernier sommet de rupture que C_1 et C_2 ont en commun. Supposons que $Q \in G_q^1 = G_q^2$ alors $G_l^1 = G_l^2$ pour tout $l \in \{1, \ldots, q\}$. Si C_1 et C_2 n'ont pas des sommets de rupture en commun alors $q = 0$.

Donc, si $[h_0, \ldots, h_{t^l}]$ est le développement en fractions continues associé au sous-graphe $G_l^1 = G_l^2$, on vérifie :

$$[h_0, \ldots, h_{t^l}] = \begin{cases} \dfrac{m_1^1}{n_1^1} = \dfrac{m_1^2}{n_1^2} & \text{si } l = 1 \\[2ex] \dfrac{m_l^1 - m_{l-1}^1 n_l^1}{n_l^1} + 1 = \dfrac{m_l^2 - m_{l-1}^2 n_l^2}{n_l^2} + 1 & \text{si } 1 < l \leq q \end{cases}$$

Donc on obtient les q premières paires caractéristiques de C_1 et C_2

$$(m_l^1, n_l^1) = (m_l^2, n_l^2)$$

pour tout $1 \leq l \leq q$.

Alors $T(C)$ a q sommets $\{Q_1, \ldots, Q_q\}$ tels que :

1. Q_1 est le point base de $T(C)$.
2. $v(Q_l) = \dfrac{m_l^1}{n_1^1 \cdots n_l^1} = \dfrac{m_l^2}{n_1^2 \cdots n_l^2}$ où $l \in \{1, \ldots, q\}$.

De plus on ajoute à Q_q une arête pleine avec un sommet noir $Q^{(b)}$ dans l'extrême. $Q^{(b)}$ est le sommet de bifurcation de $T(C)$.

Soit P_1 (resp. P_2) le sommet de rupture de C_1 (resp. C_2) qui suivre à Q dans le graphe G. Alors $P_1 \in G^1_{q+1}$ et $P_2 \in G^2_{q+1}$.

Soit p_1 (resp. p_2) le nombre de sommets de rupture de C_1 (resp. C_2) dans G.

Soit maintenant

$$\mathcal{L} = G - \left(\bigcup_{l=1}^{q-1} G^1_l \bigcup (G^1_q - \{Q\}) \bigcup (G^1_{q+2} - \{P_1\}) \bigcup (G^2_{q+2} - \{P_2\}) \bigcup_{l=q+3}^{p_1} G^1_l \bigcup_{l=q+3}^{p_2} G^2_l \right).$$

Le premier sommet de $\mathcal{L}$ est Q (si $q = 0$ le premier sommet de $\mathcal{L}$ est le premier sommet de G) et aussi $\mathcal{L}$ contient les sommets P_1 et P_2; donc $\mathcal{L}$ contient le sous-graphe G^1_{q+1} de C_1 et le sous-graphe G^2_{q+1} de C_2.

Si $[h_0, \ldots, h_{t^1}]$ (resp. $[h_0, \ldots, h_{t^2}]$) est le développement en fractions continues associé à G^1_{q+1} (resp. G^2_{q+1}) alors :

$$[h_0, \ldots, h_{t^1}] = \begin{cases} \dfrac{m^1_1}{n^1_1} & \text{si } q = 0 \\[2ex] \dfrac{m^1_{q+1} - m^1_q n^1_{q+1}}{n^1_{q+1}} + 1 & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

et

$$[h_0, \ldots, h_{t^2}] = \begin{cases} \dfrac{m^2_1}{n^2_1} & \text{si } q = 0 \\[2ex] \dfrac{m^2_{q+1} - m^2_q n^1_{q+1}}{n^2_{q+1}} + 1 & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

donc on obtient la paire (m^1_{q+1}, n^1_{q+1}) de C_1 et la paire (m^2_{q+1}, n^2_{q+1}) de C_2.

Ainsi si $\dfrac{m}{n} = \min \left\{ \dfrac{m^1_{q+1}}{n^1_{q+1}}, \dfrac{m^2_{q+1}}{n^2_{q+1}} \right\}$ alors

$$v(Q^{(b)}) = \frac{m}{n^1_1 \cdots n^1_q n}.$$

Soit $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) le sous-graphe de G qui part de P_1 (resp. P_2) dans le graphe dual de la résolution de C et tel que son extrême est la flêche de G qui represente la transformée stricte de C_1 (resp. de C_2).

Alors

$$\mathcal{P}_1 = \bigcup_{l=q+2}^{p_1} G_l^1 \quad \mathcal{P}_2 = \bigcup_{l=q+2}^{p_2} G_l^2 \ .$$

Si $[h_0^1, \ldots, h_{t^l}^1]$ (resp.$[h_0^2, \ldots, h_{t^l}^2]$) est le développement en fractions continues associé à G_l^1 (resp. G_l^2) on a :

$$[h_0^1, \ldots, h_{t^l}^1] = \frac{m_{q+l}^1 - m_{q+l-1}^1 n_{q+l}^1}{n_{q+l}^1} + 1$$

pour tout $2 \leq l \leq p_1 - q$ et

$$[h_0^2, \ldots, h_{t^l}^2] = \frac{m_{q+l}^2 - m_{q+l-1}^2 n_{q+l}^2}{n_{q+l}^2} + 1$$

pour tout $2 \leq l \leq p_2 - q$, donc on obtient les paires caractéristiques :

$$\begin{cases} (m_{q+l}^1, n_{q+l}^1) \text{ où } 2 \leq l \leq p_1 - q \\ \\ (m_{q+l}^2, n_{q+l}^2) \text{ où } 2 \leq l \leq p_2 - q \end{cases}$$

Maintenant on ajoute une arête pleine et une arête pointillée au sommet $Q^{(b)}$.

Si on suppose que $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m_{q+1}^1}{n_{q+1}^1}$ (dans le cas contraire on change le rôle de C_1 et C_2), alors on ajoute à l'arête pleine une chaîne connexe avec $p_1 - (q+1)$ sommets noirs $\{Q_l^1\}_{l=1}^{p_1-(q+1)}$ et un sommet blanc terminal tels que

$$v(Q_l^1) = \frac{m_{q+1+l}^1}{n_1^1 \cdots n_{q+1+l}^1}$$

où $1 \leq l \leq p_1 - (q+1)$.

De plus on ajoute à l'arête pointillée une chaîne connexe avec $p_2 - q$ sommets noirs $\{Q_l^2\}_{l=1}^{p_2-q}$ et un sommet blanc terminal tels que

$$v(Q_l^2) = \frac{m_{q+l}^2}{n_1^1 \cdots n_{q+l}^2}$$

où $l \in \{1, \ldots, p_2 - q\}$.

Le graphe ainsi construit est l'arbre d'Eggers de C.

Remarque 1.4.10 *Soit C une courbe avec deux branches où $T(C)$ est l'arbre d'Eggers de C et G est le graphe dual de la résolution plongée minimale de C.*

Si Q est le sommet de bifurcation de $T(C)$ et $\mathcal{S}_u$ est le sommet de bifurcation de G alors d'après ci-dessus on vérifie :

1. *$d_1(Q) = 0$ et $d_2(Q) = 2$ si et seulement si $\mathcal{S}_u$ est un sommet de rupture de G.*
2. *$d_1(Q) = 2$ et $d_2(Q) = 0$ si et seulement si $\mathcal{S}_u$ est un sommet de la première sous-chaîne d'un sous-graphe de G qui n'est pas un sommet de rupture de G.*
3. *$d_1(Q) = d_2(Q) = 1$ si et seulement si $\mathcal{S}_u$ n'est pas un sommet de rupture de G et de plus ce n'est pas un sommet d'aucune première sous-chaîne d'un sous-graphe de G.*

Maintenant si la courbe C a r branches avec $r \geq 3$ on fera la comparaison de la façon suivante :

Soit $A = \{Q \in T(C) \ : \ d_1(Q) + d_2(Q) \geq 2\}$, c'est-à-dire les sommets de bifurcation de l'arbre d'Eggers de C.

Soit Q_1 le sommet de A tel que

$$v(Q_1) = \min\{v(Q) \ : \ Q \in A\} \ ,$$

c'est-à-dire le premier sommet de bifurcation de $T(C)$.

A partir de Q_1 on peut trouver les paires caractéristiques qu'ont en commun tous les branches de C (le nombre de paires dépend de la valeur de $v(Q_1)$). La valeur de $v(Q_1)$ donne aussi la valeur du contact des branches de C qui sont séparées dans Q_1.

Maintenant on regarde le prochain sommet de rupture Q_2 qui apparaît dans $T(C)$.

La valeur de $v(Q_2)$ donne le contact et les paires caractéristiques qu'ont en commun des branches C_j de C telles que $j \in I_{Q_2}$ et qui sont séparées à partir de Q_2.

On procéde de cette façon avec tous les sommets de A . On trouve ainsi on trouve les paires caractéristiques et les contacts deux à deux des branches de C; donc on peut calculer la topologie de C.

Alors avec la topologie de C on peut construire le graphe dual de la résolution plongée minimale de C.

Maintenant si on connaît le graphe dual G de la résolution plongée minimale de C on définit :

$$B = \{\mathcal{S}_u \in G \ : \ \mathcal{S}_u \text{ est un sommet de bifurcation de } G\}.$$

Soit $\mathcal{S}_{u_1}$ le premier sommet de bifurcation de G . A partir de $\mathcal{S}_{u_1}$ on peut calculer le nombre des sous-graphes du graphe de la résolution plongée minimale de chaque branche de C, qu'ont en commun toutes les branches de la courbe.

Ainsi les développements en fractions continues de ces sous-graphes donnent les premières paires caractéristiques qu'ont en commun tous les branches de C. De plus, la situation du sommet $\mathcal{S}_{u_1}$ dans le graphe dual donnera la valeur du contact qu'ont les branches qui sont separées à partir de $\mathcal{S}_{u_1}$.

Par récurrence sur tous les élements de B on calcule les valeurs des développements en fractions continues associés à chaque sous-graphe de G et alors on calcule les paires caractéristiques des branches de C. De plus la position dans le graphe dual de chaque élement de B donnera les valeurs des contact des branches de C deux à deux.

Ainsi avec les valeurs de paires caractéristiques et des différents contacts entre les branches de C on peut construire l'arbre d'Eggers de C.

Proposition 1.4.6 *Si C une courbe plane réduite avec r branches alors l'arbre d'Eggers de C et le graphe dual de la résolution plongée minimale de C sont équivalents puisque ils contiennent la même information.*

Chapitre 2

Calculs de courbes polaires.

2.1 Introduction.

Dans ce chapitre on va énoncer un théorème de décomposition de la courbe polaire d'une courbe plane réduite C d'équation $f(x, y) = 0$. L'étude du rapport entre la singularité de la courbe polaire d'une courbe C et celle de la courbe est un thème "classique". Cette étude est compliquée par le fait que le type topologique de la polaire ne dépend pas seulement de celui de la courbe, mais bien du type analytique de celle-ci.

Le premier travail dans cette direction est dû à Smith [S], pour une branche. Un siècle plus tard, Merle décrit précisément dans son article [Me] les differents paquets de la courbe polaire $P_\tau(C)$ associée à une branche.

Le cas d'une courbe à plusieurs branches est étudié par F. Delgado dans [De1], et aussi dans [De2] où il donne un théorème de décomposition quand C a deux branches. La technique utilisée dans [De2] est de la même nature que [Me]. Enfin, dans [E], Eggers donne un théorème de décomposition mais ne calcule pas la multiplicité de tous les paquets.

D'autre part, E. Casas [Ca1], [Ca2] fait l'étude de la courbe polaire d'une branche génerale dans sa classe d'équisingularité, et il précise, dans ce cas-là le type topologique de la courbe polaire.

Ici nous allons utiliser le diagrammme d'Eggers $T(C)$ de C défini dans le chapitre I. Plus précisément, on va définir une bijection entre les sommets noirs de $T(C)$ et les différents paquets de la courbe polaire de telle façon que la valuation du sommet Q associé au paquet A_Q de la polaire, permet

calculer les données (multiplicité à l'origine et contact avec les branches de la courbe C) du paquet A_Q.

De plus on exprime les développements de Puiseux des branches de la courbe polaire à partir des développements de Puiseux des branches de C et on montre que les premiers coefficients du développement sont indépendants de la direction de projection de la courbe polaire.

A la fin du chapitre on a écrit plusieurs exemples de divers courbes et la décomposition de ses courbes polaires. Un des exemples montre que le résultat est optimal.

2.2 Définition de la courbe polaire. Propriétés d'invariance.

Définition 2.2.1 *Soient C une courbe d'équation $f(x,y)=0$ et $l(x,y)=0$ une forme linéaire.*

Considérons l'application

$$\begin{aligned}(f,l) : (\mathbb{C}^2,0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^2,0)\\ (x,y) &\longrightarrow (f(x,y),l(x,y))\end{aligned}$$

On appelle courbe polaire associée à la courbe C d'équation $f(x,y)=0$ dans la direction l le lieu des points critiques C_l de (f,l), c'est-à-dire le germe à l'origine de la courbe d'équation

$$C_l \equiv \frac{\partial(f,l)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial l}{\partial x} & \dfrac{\partial l}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

Si $l(x,y) \equiv ax+by=0$ alors

$$C_l \equiv b\frac{\partial f}{\partial x} - a\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Maintenant on va énoncer quelques propriétés, très simples à vérifier, de la courbe polaire.

Premières propriétés de la courbe polaire.

1. Supposons C réduite. Si P est un point de C_l alors P est un point singulier de $C(\lambda) \equiv f(x,y) = \lambda$ où bien $l(x,y) = \mu$ est la droite tangente à $C(\lambda)$ au point P, où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

2. La définition de C_l ne dépend pas des coordonnées choisies : si on prend les coordonnés (x', y') l'équation de la courbe polaire est

$$\frac{\partial(f,l)}{\partial(x,y)}.\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')} = 0$$

où $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')} \neq 0.$

3. Si on choisit les coordonnées

$$\begin{cases} x' = l(x,y) \\ y' = y \end{cases}$$

l'équation de la courbe polaire est

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

4. La courbe polaire C_l dépend de l'équation $f(x,y) = 0$ de la courbe C. Il suffit de voir que si $u(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$ est une unité alors

$$\frac{\partial(u.f,l)}{\partial(x,y)} = u(x,y).\frac{\partial(f,l)}{\partial(x,y)} + f(x,y).\frac{\partial(u,l)}{\partial(x,y)}.$$

Nous utiliserons sans la démontrer les propositions suivantes, qui donnent des informations sur la courbe polaire.

Proposition 2.2.1 (Zariski [Za3], Teissier [Te1]) *Il existe un ouvert dense de Zariski U de $\mathbb{P}^1$ tel que la famille de germes de courbes $(C_l, O)_{l \in U}$ est équisingulière.* ∎

Proposition 2.2.2 (Zariski [Za3], Teissier [Te1])

1. *L'ouvert* U *est* $\mathbb{P}^1 - A$ *où* A *est un ensemble fini contenant les tangentes à* C.
2. *Le type d'équisingularité d'une courbe polaire générale défini ci-dessus ne dépend pas des coordonnées choisies dans* $\mathbb{C}^2$.
3. *Si* $u(x,y) \in \mathbb{C}^2$ *est une unité le type d'équisingularité de la courbe polaire associée à* $f(x,y) = 0$ *et le type d'équisingularité de la courbe polaire associée à* $u(x,y)f(x,y) = 0$ *d'après (1) et (2) sont les mêmes. C'est-à-dire que le type d'équisingularité de la courbe polaire ne dépend pas du choix de l'équation de la courbe* C.
4. *Le type d'équisingularité de la courbe polaire est invariant par germe d'isomorphisme analytique en* 0. ∎

Par abus de langage et d'après (3) de la proposition ci-dessus C_l est appelée "la" courbe polaire associée à C puisque bien qu'elle dépende de l'équation de C son type d'équisingularité est indépendant de cette équation.

Considérons la surface $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$ d'équation $U\frac{\partial f}{\partial y} + T\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Si $l = (1 : \tau)$ est un point de $\mathbb{P}^1$ tel que la surface $\mathcal{P}$ soit équisingulière (au sens de Zariski [Za3]) le long de $\mathbb{P}^1 \times \{0\}$ en l, C_l est appelée courbe polaire générale de C. On écrira

$$P_\tau(C) := C_l \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \tau\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

et nous dirons, par abus de langage que $P_\tau(C)$ est une courbe polaire générique.

2.3 Décomposition naturelle de la courbe polaire.

2.3.1 Relation entre le polygone de Newton d'une courbe plane réduite C et le polygone de Newton de $\mathbf{P}_\tau(\mathbf{C})$.

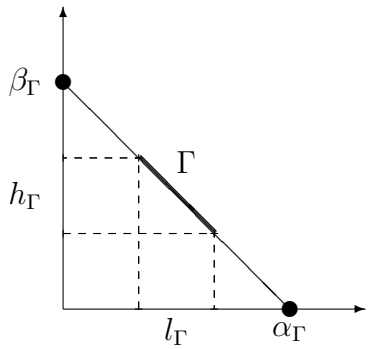
Commencerons pour rappeler une propriété générale du polygone de Newton d'une courbe quelconque.

Soient $C \equiv f(x,y) = 0$ une courbe quelconque passant par l'origine et $\mathcal{N}(f)$ le polygone de Newton de C.

On va se déplacer dans un système de coordonnées (x,y) tel que C ne contienne ni l'axe $x = 0$ ni l'axe $y = 0$.

Si Γ est un côté compact de $\mathcal{N}(f)$ la longueur l_Γ de la projection de Γ sur l'axe horizontal est appelée *largeur de* Γ. Respectivement la longueur h_Γ de la projection de Γ sur l'axe vertical est appelée *hauteur de* Γ.

De plus dénotons $(\alpha_\Gamma, 0)$ (resp. $(0, \beta_\Gamma)$) le point d'intersection de la droite qui contient le côté Γ avec l'axe horizontal (resp. l'axe vertical).



La pente de Γ est $-\dfrac{h_\Gamma}{l_\Gamma} = -\dfrac{\beta_\Gamma}{\alpha_\Gamma}$.

On peut définir une relation d'ordre dans l'ensemble des côtés compacts de $\mathcal{N}(f)$ de la façon suivante :

$$\Gamma_1 < \Gamma_2 \iff \frac{l_{\Gamma_1}}{h_{\Gamma_1}} < \frac{l_{\Gamma_2}}{h_{\Gamma_2}}.$$

Le premier côté compact de $\mathcal{N}(f)$ a un point d'intersection avec l'axe vertical et le dernier côté a un point d'intersection avec l'axe horizontal.

Lemme 2.3.1 ([Che]) *Soient $C \equiv f(x,y) = 0$ une courbe quelconque passant par l'origine et Γ un côté compact du polygone de Newton $\mathcal{N}(f)$ de C. Alors il existe h_Γ racines de C d'ordre $\dfrac{l_\Gamma}{h_\Gamma} = \dfrac{\alpha_\Gamma}{\beta_\Gamma}$.* ∎

Soit maintenant $C \equiv f(x,y) = 0$ une courbe plane réduite et soit $P_\tau(C)$ une courbe polaire générique de C dans la direction l où l est une droite dans $\mathbb{C}^2$. Aprés un changement linéaire de coordonnées nous pouvons supposer que $l \equiv x = 0$ donc $P_\tau(C) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Ainsi il suffit de comparer le polygone de Newton $\mathcal{N}(f)$ de $f(x,y)$ avec le polygone de Newton $\mathcal{N}(f_y)$ de f_y.

D'après le théorème de préparation de Weierstrass nous pouvons écrire

$$f(x,y) = y^m + \bar{a}_{m-1}(x)y^{m-1} + \cdots + \bar{a}_0(x)$$

donc,

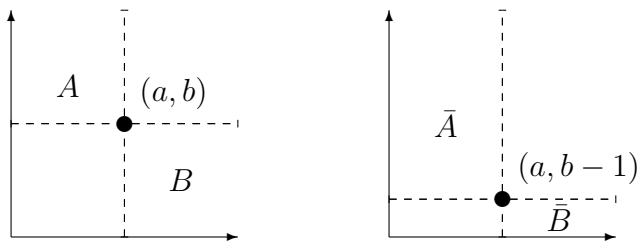
$$f_y(x,y) = my^{m-1} + (m-1)\bar{a}_{m-1}(x)y^{m-2} + \cdots + \bar{a}_1(x)$$

où le diagramme de Newton de f est $D(f) = \{(\alpha_i, i)\}_0^m$ avec $\alpha_i = \mathrm{ord}(\bar{a}_i(x))$ et le diagramme de Newton de f_y est $D(f_y) = \{(\alpha_i, i-1)\}_1^m$.

Ainsi on peut déduire le polygone de Newton de f_y de celui de f de la manière suivante :

Soit (a,b) le sommet du polygone de Newton de la courbe C d'ordonnée positive la plus petite, alors $(a, b-1) \in \mathcal{D}(f_y)$.

Dénotons par :
- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq a \ , \ b \leq y < \infty\}$,
- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq x \leq \infty \ , \ 0 \leq y \leq b\}$,
- $\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq a \ , \ b-1 \leq y < \infty\}$,
- $\bar{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq x \leq \infty \ , \ 0 \leq y \leq b-1\}$,
- $\mathcal{C}(f) = \{\Gamma$ côté compact de $\mathcal{N}(f)\}$ et
- $\mathcal{C}(f_y) = \{\Gamma$ côté compact de $\mathcal{N}(f_y)\}$.



Proposition 2.3.1

1. *Il existe une correspondance bijective*

$$\begin{aligned} A \cap \mathcal{C}(f) &\longrightarrow \bar{A} \cap \mathcal{C}(f_y) \\ \Gamma &\longrightarrow \bar{\Gamma} = \{(x, y-1) \ / \ (x,y) \in \Gamma\}. \end{aligned}$$

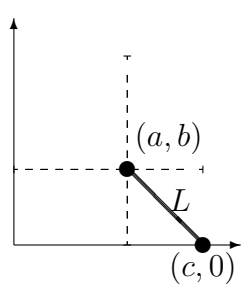
2. *Si* $b = 1$ *alors* $\bar{B} \cap \mathcal{C}(f_y) = \emptyset$ *et l'ensemble des côtés compacts de* $\mathcal{N}(f_y)$ *est* $\bar{A} \cap \mathcal{C}(f_y)$.
3. *Si* $b > 1$ *et* $P_1 = (\alpha_1, 1)$ *est un point du dernier côté* L *de* $\mathcal{N}(f)$ *alors* $\bar{B} \cap \mathcal{C}(f_y) = \{Q\}$ *où* Q *est le segment de sommets* $(a, b-1)$ *et* $(\alpha, 0)$ *. De plus l'ensemble des côtés de* $\mathcal{N}(f_y)$ *est* $(\bar{A} \cap \mathcal{C}(f_y)) \cup \{Q\}$ *et* $\dfrac{l_L}{h_L} = \dfrac{l_Q}{h_Q}$.
4. *Si* $b \geq 1$ *et* $\tilde{\Gamma} \in \bar{B} \cap \mathcal{C}(f_y)$ *on a*

$$\frac{l_\Gamma}{h_\Gamma} \leq \frac{l_{\tilde{\Gamma}}}{h_{\tilde{\Gamma}}} \qquad \text{pour tout } \Gamma \in \mathcal{C}(f).$$

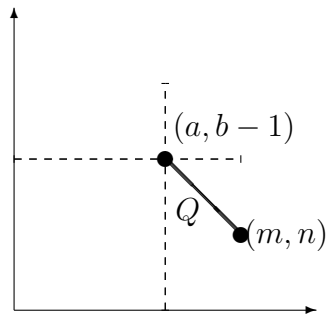
Démonstration

1. Si (c, d) est un sommet de $\mathcal{N}(f)$ avec $d > 0$ alors $(c, d-1) \in \mathcal{N}(f_y)$, donc si $\Gamma \in A \cap \mathcal{C}(f)$ alors $\bar{\Gamma} = \Gamma - (0,1) \in \bar{A} \cap \mathcal{C}(f)$.

   De plus, d'après la définition du diagramme de Newton de $f = 0$ et de $f_y = 0$, si $L \in \bar{A} \cap \mathcal{C}(f)$ il existe $\Gamma \in A \cap \mathcal{C}(f)$ tel que $\bar{\Gamma} = L$.
2. Si $b = 1$ alors $\bar{B} = \{(x, 0) \ / \ x \geq a\}$ donc $\bar{B} \cap \mathcal{C}(f_y) = \emptyset$.
3. Comme $(\alpha_1, 1) \in L$ alors $(\alpha_1, 0) \in \mathcal{D}(f_y)$ donc le dernier côté de $\mathcal{N}(f_y)$ est le côté Q de sommets $(a, b-1)$ et $(\alpha_1, 0)$; c'est-à-dire $\bar{B} \cap \mathcal{C}(f_y) = \{Q\}$.
4. Soit $(c, 0)$ le sommet de $\mathcal{N}(f)$ qui vit sur l'axe horizontal et soit L le côté de $\mathcal{N}(f)$ qui contient les sommets (a, b) et $(c, 0)$ (i.e., L est le dernier côté de $\mathcal{N}(f)$). Ainsi $l_L = c - a$ et $h_L = b$.



Dénotons par Q le premier côté de $\mathcal{C}(f_y) \cap \bar{B}$, (d'après l'hypothèse $\mathcal{C}(f_y) \cap \bar{B} \neq \emptyset$ donc $\mathcal{C}(f_y) \cap \bar{B}$ a un petit élément).
Le point $(a, b-1)$ est le sommet de Q d'ordonnée la plus grande. Soit (m, n) l'autre sommet de Q, donc $l_Q = m - a$ et $h_Q = b - 1 - n$.



Comme $(m, n) \in \mathcal{D}(f_y)$ alors $(m, n+1) \in \mathcal{D}(f)$ et vit dans ou sur la droite d'équation $h_L(x-a) + l_L(y-b) = 0$ qui contient le côté L de $\mathcal{N}(f)$.

Ainsi $h_L(m-a) + l_L(n+1-b) \geq 0$, c'est-à-dire $h_L l_Q - l_L h_Q \geq 0$ et

$$\frac{l_L}{h_L} \leq \frac{l_Q}{h_Q}.$$

De plus comme L est le dernier côté de $\mathcal{N}(f)$ donc d'après la relation d'ordre dans l'ensemble $\mathcal{C}(f)$ on a

$$\frac{l_\Gamma}{h_\Gamma} \leq \frac{l_L}{h_L} \quad \text{pour tout } \Gamma \in \mathcal{C}(f).$$

De la même manière, d'après la relation d'ordre dans l'ensemble $\mathcal{C}(f_y)$ et la définition de Q on a

$$\frac{l_Q}{h_Q} \leq \frac{l_{\tilde{\Gamma}}}{h_{\tilde{\Gamma}}} \quad \text{pour tout } \tilde{\Gamma} \in \bar{B} \cap \mathcal{C}(f_y)$$

ainsi d'après les inégalités ci-dessus on peut conclure que étant donnée $\tilde{\Gamma} \in \bar{B} \cap \mathcal{C}(f_y)$ on vérifie

$$\frac{l_\Gamma}{h_\Gamma} \leq \frac{l_{\tilde{\Gamma}}}{h_{\tilde{\Gamma}}} \quad \text{pour tout } \Gamma \in \mathcal{C}(f_y).$$

■

En conséquence, d'aprés le lemme (2.3.1) et la proposition (2.3.1), on a :

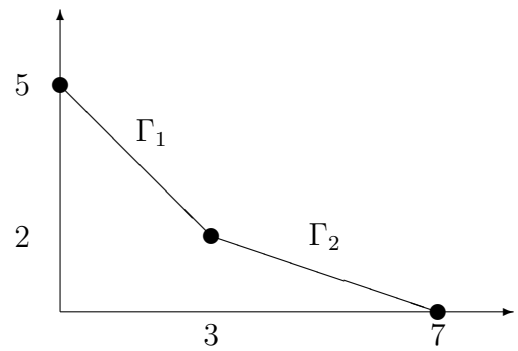
Corollaire 2.3.1

1. *Pour tout côté* $\Gamma \in \mathcal{C}(f)$ *différent du dernier côté* L *de* $\mathcal{N}(f)$ *on a :*
   (a) $l_\Gamma = l_{\bar{\Gamma}}$ *et* $h_\Gamma = h_{\bar{\Gamma}}$ *où* $\bar{\Gamma} = \Gamma - (0,1)$.
   (b) $\sharp\{\text{racines de } f \text{ d'ordre } \frac{l_\Gamma}{h_\Gamma}\} = \sharp\{\text{racines de } f_y \text{ d'ordre } \frac{l_\Gamma}{h_\Gamma}\}$.
2. *Si* $P_1 = (\alpha_1, 1)$ *est un sommet de* L *il existe une racine de* f *qui a un ordre supérieur à l'ordre de toutes les racines de* f_y, *plus précisement cette racine est la racine associée au côté* L *et son ordre est* $\frac{l_L}{h_L} > \frac{l_\Gamma}{h_\Gamma}$ *pour tout* $\Gamma \in \mathcal{C}(f_y)$ *d'après la relation d'ordre dans* $\mathcal{C}(f)$ *et la partie (1) de ce corollaire.*
3. *Si* $P_1 = (\alpha_1, 1)$ *est un point de* L *qui n'est pas un sommet alors*
$$\sharp\{\text{racines de } f \text{ d'ordre } \frac{l_L}{h_L}\} = \sharp\underbrace{\{\text{racines de } f_y \text{ d'ordre } \frac{l_L}{h_L}\}}_{Z} + 1$$
   où l'ensemble Z *coïncide avec l'ensemble des racines de* f_y *associées au dernier côté* Q *de* $\mathcal{C}(f_y)$.
4. *Si* $P_1 = (\alpha_1, 1)$ *n'est pas un point de* L *alors les racines de* f_y *qui correspondant aux côtés de* $\mathcal{C}(f_y) \cap \bar{B}$ *sont d'ordre plus grand ou égal que* $\frac{l_L}{h_L}$. ∎

Remarque 2.3.1 *Si* Γ *est un côté compact de*
$$f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$$
on peut lui associer un polynôme
$$g_\Gamma(t) = \sum_{(i,j)\in\Gamma\cap D(f)} a_i^{n-j} t^{j-j_0}$$
où $j_0 = \min\{j \ / \ (i,j) \in \Gamma \cap \mathcal{D}(f)\}$ *(en particulier* $g_\Gamma(0) \neq 0$ *) et* $a_k(x) = \sum_{i\geq 1} a_i^k x^i$.

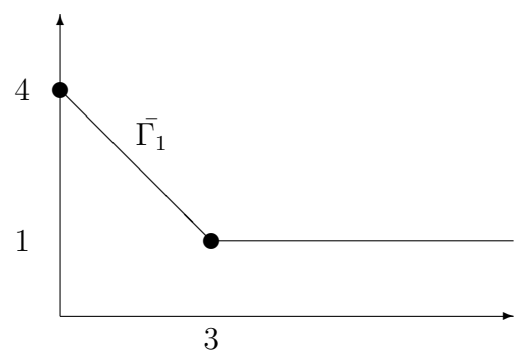
D'après le théorème de Newton on sait que le coefficient principal d'une racine de $f(x,y) = 0$ *(i.e. le coefficient de la puissance de plus bas degrée) est une racine du polynôme* $g_\Gamma(t)$.

En général, si $\Gamma \in A \cap \mathcal{C}(f)$ *il n'existe pas une relation entre* $g_\Gamma(t)$ *et* $g_{\bar{\Gamma}}(t)$ *comme on peut le voir dans l'exemple suivante :*
$f(x,y) = y^5 + 2x^3y^2 - x^7$



alors $\Gamma_1 \cap \mathcal{D}(f) = \{(0,5),(3,2)\}$, $j_0 = 2$ *et* $g_{\Gamma_1}(t) = t^3 + 2$.

D'autre part $f_y(x,y) = 5y^4 + 4x^3y$



alors $\bar{\Gamma}_1 \cap \mathcal{D}(f) = \{(0,4),(3,1)\}$, $j_0 = 1$ *et* $g_{\bar{\Gamma}_1}(t) = 5t^3 + 4$.

Cependant, si L *est le dernier côté compact de* $\mathcal{N}(f)$ *(i.e.* $j_0 = 0$ *) et s'il existe* $Q \in \mathcal{C}(f_y)$ *tel que* $L - (0,1) = Q$, *alors on a :*

$$g_Q(t) = \frac{\partial g_L(t)}{\partial t}.$$

Lemme 2.3.2 (Kuo-Lu [K-L]) *Soient* $y_i(x)$, $y_j(x)$ *deux racines de* $f(x,y)=0$ *où* $i \neq j$. *Alors il existe une racine* $z_k(x)$ *de* $f_y(x,y)=0$ *qui vérifie :*

$$\mathrm{ord}(y_i(x)-z_k(x)) = \mathrm{ord}(y_j(x)-z_k(x)) = \mathrm{ord}(y_i(x)-y_j(x)) \tag{2.1}$$

Réciproquement, étant données une racine $y_i(x)$ *de* $f(x,y)=0$ *et une racine* $z_k(x)$ *de* $f_y(x,y)=0$, *il existe une racine* $y_j(x)$ *de* $f(x,y)=0$ *vérifiant* (2.1).

De plus, étant donnée une racine $y_i(x)$ *de* $f(x,y)=0$ *et un nombre rationnel* $d>0$ *on a :*

$$\sharp\{y_j(x) \in R(f) : \mathrm{ord}(y_i(x)-y_j(x)) = d\} =$$
$$= \sharp\{z_k(x) \in R(f_y) : \mathrm{ord}(y_i(x)-z_k(x)) = d\} \tag{2.2}$$

où $R(f)$ *est l'ensemble de racines de* $f(x,y)=0$.

Démonstration
Soient $y_i(x)$, $y_j(x)$ deux racines de $f(x,y)=0$ telles que $\alpha := \mathrm{ord}(y_i(x)-y_j(x))$.

Soit

$$\gamma(x) = \sum_{s \geq m}^{\alpha-1} a_s^i x^{s/m} + \xi x^{\alpha/m}$$

où $\xi \in \mathbb{C} - \{0\}$ générique et

$$y_i(x) = \sum_{s \geq m} a_s^i x^{s/m}$$

est le développement de Puiseux de la racine $y_i(x)$ de C, l'entier m étant la multiplicité de la branche de C dont $y_i(x)$ est une racine.

Considérons le changement de coordonnées à exposants fractionnaires suivant :

$$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = y - \gamma(x) \end{cases}$$

Avec ce changement de coordonnées f devient

$$\bar{f}(\bar{x},\bar{y}) := f(\bar{x},\bar{y}+\gamma(\bar{x})) = \prod_{s=1}^{n}(\bar{y}+\gamma(\bar{x})-y_s(\bar{x}))$$

puisque $f(x,y) = \prod_{s=1}^{n}(y-y_s(x))$ où n est la multiplicité de la courbe C.

Alors, nous pouvons écrire :

$$\bar{f}(\bar{x},\bar{y}) = \prod_{s=1}^{n}(\bar{y}-\bar{y}_s(\bar{x}))$$

où $\bar{y}_s(\bar{x}) := y_s(\bar{x}) - \gamma(\bar{x})$.

On vérifie aussi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}} \quad ;$$

donc si

$$f_y(x,y) = \prod_{k=1}^{n-1}(y-z_k(x)) \quad ,$$

on a

$$\bar{f}_{\bar{y}}(\bar{x},\bar{y}) = \prod_{k=1}^{n-1}(\bar{y}-\bar{z}_k(\bar{x}))$$

où $\bar{z}_k(\bar{x}) := z_k(\bar{x}) - \gamma(\bar{x})$.

Mais comme ξ est générique on vérifie

$$\mathrm{ord}(\bar{y}_i) = \mathrm{ord}(\bar{y}_j) \geq \mathrm{ord}(\bar{y}_l)$$

où $l \in \{1,\ldots,n\}$ puisque si on prend $\xi \neq a^i_\alpha$ et $\xi \neq a^j_\alpha$, où a^j_α est le coefficient de la puissance α dans le développement de Puiseux de la racine $y_j(x)$, nous avons $\mathrm{ord}(\bar{y}_i) = \mathrm{ord}(\bar{y}_j)$ et pour toutes les autres racines $y_l(x)$ de $f(x,y)=0$ si

$$\mathrm{ord}(y_i(x)-y_l(x)) < \mathrm{ord}(y_i(x)-y_j(x))$$

c'est évident que

$$\mathrm{ord}(\bar{y}_i) = \mathrm{ord}(\bar{y}_j) > \mathrm{ord}(\bar{y}_l)$$

et si

$$\mathrm{ord}(y_i(x) - y_l(x)) \geq \mathrm{ord}(y_i(x) - y_j(x))$$

il suffit de prendre $\xi \neq a_\alpha^l$ où a_α^l est le coefficient de la puissance α dans le développement de Puiseux de $y_l(x)$.

Comme $\bar{y}_i$ et $\bar{y}_j$ sont des racines de $\bar{f}(x,y) = 0$ d'ordre maximum elles sont associées au dernier côté L du polygone de Newton de $\bar{f}$. De plus, comme il y a au moins deux racines associées à ce côté de $\mathcal{N}(\bar{f})$, la hauteur de ce dernier côté est différente de 1, par conséquent si (a,b) est le sommet d'ordonnée positive de L (i.e., le sommet de $\mathcal{N}(\bar{f})$ d'ordonnée positive la plus petite) on a que $b > 1$.

Voyons ce qui arrive dans différents cas :

1. S'il existe $(u,1) \in L$ alors le nombre de racines de $\bar{f} = 0$ associées au dernier côté de $\mathcal{N}(\bar{f})$ est le nombre de racines de $\bar{f}_y = 0$ associées au dernier côté de $\mathcal{N}(\bar{f}_y)$ plus 1 et comme il y a au moins deux racines associées au dernier côté de $\mathcal{N}(\bar{f})$ nous pouvons affirmer qu'il existe une racine $\bar{z}_k$ de $\bar{f}_y = 0$ qui vérifie

   $$\mathrm{ord}(\bar{z}_k - \bar{y}_i) = \mathrm{ord}(\bar{y}_i) \quad ,$$

   donc il existe une racine z_k de $f_y(x,y) = 0$ qui vérifie

   $$\mathrm{ord}(z_k - y_i) = \mathrm{ord}(y_i - y_j).$$

2. S'il n'existe pas $(u,1) \in L$ alors $\dfrac{l_L}{h_L} \leq \dfrac{l_\Gamma}{h_\Gamma}$ pour tout $\Gamma \in \bar{B} \cap \mathcal{C}(\bar{f}_y)$.

   Ainsi s'il existe $Q \in \bar{B} \cap \mathcal{C}(\bar{f}_y)$ tel que $\dfrac{l_L}{h_L} = \dfrac{l_Q}{h_Q}$ alors le polynôme associé au côté Q vérifie

   $$g_Q(t) = \frac{\partial g_L(t)}{\partial t}$$

   dont les zéros de ce polynôme sont les coefficients principaux des racines de $\bar{f}_y = 0$ associées au côté Q de $\mathcal{N}(\bar{f}_y)$ et ainsi le nombre de zéros

de $g_L(t)$ qui sont différents du coefficient principal b_i de $\bar{y}_i$ est égal au nombre de zéros de $g_Q(t)$ qui sont différents de b_i, et comme de plus

$$\sharp\{\bar{z}_k \in R(\bar{f}_y) : \mathrm{ord}(\bar{z}_k) = \alpha\} = \sharp\{\bar{y}_s \in R(\bar{f}) : \mathrm{ord}(\bar{y}_s) = \alpha\} - 1 \ ,$$

on peut affirmer qu'il existe une racine $\bar{z}_k$ de $\bar{f}_y = 0$ qui vérifie

$$\mathrm{ord}(\bar{z}_k - \bar{y}_i) = \mathrm{ord}(\bar{y}_i)$$

et par conséquent il existe une racine z_k de $f_y(x, y) = 0$ qui vérifie

$$\mathrm{ord}(z_k - y_i) = \mathrm{ord}(y_i - y_j).$$

Cependant s'il n'existe pas $Q \in \bar{B} \cap \mathcal{C}(\bar{f}_y)$ tel que $\dfrac{l_L}{h_L} = \dfrac{l_Q}{h_Q}$ alors l'ordre de toutes les racines de $\bar{f}_y$ associées aux côtés $\bar{B} \cap \mathcal{C}(\bar{f}_y)$ sont d'ordre strictement plus grand que α et comme le sommet (a, b) de $\mathcal{N}(\bar{f})$ vérifie $b > 1$ il existe au moins une racine $\bar{z}_k$ de $\bar{f}_y = 0$ telle que $\mathrm{ord}(\bar{z}_k) > \alpha$ donc $\mathrm{ord}(\bar{z}_k - \bar{y}_i) = \mathrm{ord}(\bar{y}_i)$ et il existe une racine z_k de $f_y(x, y) = 0$ qui vérifie

$$\mathrm{ord}(z_k - y_i) = \mathrm{ord}(y_i - y_j).$$

Si maintenant on prend une racine $y_i(x)$ de $f(x, y) = 0$, une racine $z_k(x)$ de $f_y(x, y) = 0$ et le changement des coordonnées à exposants fractionnaires

$$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = y - \gamma'(x) \end{cases}$$

où

$$\gamma'(x) = \sum_{s \geq m}^{\alpha - 1} a_s^i x^{s/m} + \xi x^{\alpha/m}$$

et $\alpha := \mathrm{ord}(y_i(x) - z_k(x))$ nous avons l'expression (2.1) en raisonnant de manière analogue à la précédente.

Il nous reste à démontrer l'expression (2.2).

Soit $d > 0$ nombre rationnel et soit $y_i(x)$ une racine fixée de C.

S'il n'existe pas de racine y_j de C qui vérifie $\operatorname{ord}(y_i(x) - y_j(x)) = d$, d'après l'expression (2.1) il n'existe pas de racine $z_k(x)$ de la courbe polaire qui vérifie $\operatorname{ord}(y_i(x) - z_k(x)) = d$.

Donc il suffit d'étudier le cas

$$\sharp\{y_j(x) \in R(f) : \operatorname{ord}(y_i(x) - y_j(x) = d\} \neq 0.$$

Il peut arriver :

1. La pente d'un des côtés du polygone de Newton de $\bar{f}_y$ coincide avec celle du dernier côté du polygone de Newton de $\bar{f}$ et vaut $-\frac{1}{d}$.

   Dans ce cas-là nous avons que :

   $$\sharp\{\bar{y}_j \in R(\bar{f}) : \operatorname{ord}(\bar{y}_j) = d\} = \sharp\{\bar{z}_k \in R(\bar{f}_y) : \operatorname{ord}(\bar{z}_k) = d\} - 1$$

   donc

   $$\sharp\{y_j \in R(f)\ y_j \neq y_i : \operatorname{ord}(y_i - y_j) = d\} = \sharp\{z_k \in R(f_y) : \operatorname{ord}(y_i - z_k) = d\}.$$

2. La valeur de d est telle que quand on fait la transformation de f en $\bar{f}$ la pente du dernier côté de $\bar{f}$, $-1/d$, c'est strictement plus petite que la pente des côtés $\mathcal{C}(\bar{f}_y) \cap \bar{B}$.

   Dans ce cas-là et en rapport au dernier côté du polygone de f et les côtés $\mathcal{C}(\bar{f}_y) \cap \bar{B}$ nous pouvons écrire :

   $$\sharp\{\bar{y}_j \in R(\bar{f})\} = \sharp\{\bar{z}_k \in R(\bar{f}_y)\} - 1$$

   et $\operatorname{ord}(\bar{y}_j) = d < \operatorname{ord}(\bar{z}_k) = \sigma$, donc

   $$\sharp\{\bar{y}_j \in R(\bar{f}) : \bar{y}_j \neq \bar{y}_i\} = \sharp\{\bar{z}_k \in R(\bar{f}_y)\}$$

   c'est-à-dire,

   $$\begin{aligned}\sharp\{y_j \in R(f)\ y_j \neq y_i\ : \operatorname{ord}(y_i - y_j) = d\} &= \sharp\{z_k \in R(f_y) : \operatorname{ord}(z_k - \gamma) = \sigma\} \\ &= \sharp\{z_k \in R(f) : \operatorname{ord}(z_k - y_i) = d\}\end{aligned}$$

puisque seules peuvent contribuer à cet ensemble les racines de la courbe polaire qu'on obtient à partir des racines $\bar{z}_k$ associées à $\mathcal{C}(\bar{f}_y) \cap \bar{B}$ du polygone de $\bar{f}_y$ car les racines qui restent ont ordre strictement plus petit que d. ∎

Ensuite on va énoncer et démontrer un lemme qui donne des informations sur la multiplicité des courbes qui sont la réunion de certaines branches d'une courbe polaire générique d'une courbe réduite C en fonction de la multiplicité des branches de C.

Lemme 2.3.3 (Eggers) *Soit C_i une branche de la courbe plane réduite C et soit $P_\tau(C)$ une courbe polaire générique de C. Pour tout nombre rationnel $d > 0$ notons B_i^d la courbe formée de toutes les branches Γ de $P_\tau(C)$ telles que $\operatorname{cont}(C_i, \Gamma) = n_i d$.*

Soit de plus D_i^d la courbe formée de toutes les branches C_j de C telles que $\alpha_{ij} = \operatorname{cont}(C_i, C_j) = n_i d$

Alors

$$m(B_i^d) = \begin{cases} m(D_i^d) + n_1^i \cdots n_{q-1}^i (n_q^i - 1) & \text{si } d = \dfrac{\beta_q^i}{n_i} \\ \\ m(D_i^d) & \text{si } d \neq \dfrac{\beta_k^i}{n_i} \quad \forall k \in \{1, \ldots, g_i\} \end{cases}$$

Démonstration

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie dans un ouvert U de l'origine de $\mathbb{C}^2$ telle que $C \equiv f(x, y) = 0$ et $P_\tau(C) = C_l$ où l est une droite de $\mathbb{C}^2$.

Aprés un changement des coordonnées on peut supposer que $l \equiv x = 0$ et $P_\tau(C) \equiv \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$.

Soit $f = f_1 \cdots f_r$ la décomposition de $f(x, y)$ en facteurs irréductibles où $C_j \equiv f_j(x, y) = 0$ et $j \in I = \{1, \ldots, r\}$.

On sait que les racines de la fonction $f_j(x, y) = 0$ donnent le développement de Puiseux de C_j dans les coordonnées x et y. De la même façon les racines

de $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$ donnent les développements de Puiseux des branches de $P_\tau(C)$.

Soit $\rho_k(x)$ une racine fixée de $f_i(x,y) = 0$ et soit $q \in \{0, \ldots, g_i + 1\}$ tel que

$$\frac{\beta^i_{q-1}}{n_i} < d \leq \frac{\beta^i_q}{n_i}$$

où $\beta^i_{-1} := 0$ et $\beta^i_{g_i+1} := \infty$.

Soit maintenant $h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe avec une singularité isolée à l'origine où la courbe $Y := h^{-1}(0)$ est différente de C_i et telle que la droite $x = 0$ n'est pas tangente à Y.

On doit remarquer que la courbe polaire satisfait cette hypothése d'après le théorème de transversalité (5.1) de [Te4].

Soit Z la courbe formée de toutes les branches Y_l de Y telles que $\mathrm{cont}(C_i, Y_l) = n_i d$. Alors

$$m(Z) = \begin{cases} n^i_1 \cdots n^i_{q-1} \sharp\{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho_k - \gamma) = d\} \text{ si } d \neq \dfrac{\beta^i_q}{n_i} \\ \\ n^i_1 \cdots n^i_{q-1} [\sharp\{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho_k - \gamma) \geq d\} \\ \qquad -n^i_q \sharp\{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho_k - \gamma) = d\}] \text{ si } d = \dfrac{\beta^i_q}{n_i} \end{cases}$$

En fait puisque la multiplicité de Z vient en fonction des racines γ de h où γ est racine de certaine composante irréductible de Z c'est-à-dire, elle vient en fonction des racines γ de Y_l telles que $\mathrm{cont}(C_i, Y_l) = n_i d$.

Donc si γ est comme ci-dessus on a

$$\mathrm{ord}(\rho(x) - \gamma(x)) \leq d$$

pour tout $\rho(x) \in R(f_i)$ et de plus il existe $\rho'(x)$ racine de $f_i(x,y) = 0$ telle qu'on ait l'égalité.

Soit
$M := \{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho - \gamma) \geq d \quad \text{pour au moins une racine } \rho \text{ de } f_i\}$

et

$$N := \{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho - \gamma) > d \quad \text{pour au moins une racine } \rho \text{ de } f_i\}.$$

C'est evident que $N \subseteq M$ et en plus $m(Z) = \sharp(M - N) = \sharp M - \sharp N$.

On calculera ensuite la cardinalité de M et de N.

Définissons dans l'ensemble des racines de $f_i(x, y) = 0$ la relation d'équivalence suivante :

$$\rho \; R_1 \; \rho' \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{ord}(\rho - \rho') \geq d.$$

Comme

$$\mathrm{ord}(\rho - \rho') \geq d > \frac{\beta^i_{q-1}}{n_i}$$

alors d'après le lemme (1.1.1)

$$\mathrm{ord}(\rho - \rho') \in \left\{ \frac{\beta^i_q}{n_i}, \ldots, \frac{\beta^i_{g_i}}{n_i} \right\}.$$

Mais si $[\rho]$ est la classe d'équivalence de la racine ρ d'après le lemme (1.1.1) on a

$$\begin{aligned}
[\rho] &= \left\{ \rho' \in R(f_i) \ : \ \mathrm{ord}(\rho - \rho') > \frac{\beta^i_{q-1}}{n_i} \right\} \\
&= \left\{ \rho' \in R(f_i) \ : \ \mathrm{ord}(\rho - \rho') \geq \frac{\beta^i_q}{n_i} \right\} \\
&= \bigcup_{l=q}^{g_i} \left\{ \rho' \in R(f_i) \ : \ \mathrm{ord}(\rho - \rho') = \frac{\beta^i_l}{n_i} \right\}
\end{aligned}$$

donc d'après le corollaire (1.1.1) on a

$$\begin{aligned}
\sharp[\rho] &= \sharp \bigcup_{l=q}^{g_i} \left\{ \rho' \in R(f_i) \ : \ \mathrm{ord}(\rho - \rho') = \frac{\beta^i_l}{n_i} \right\} \\
&= \sum_{l=q}^{g_i} (n^i_l - 1) n^i_{l+1} \cdots n^i_{g_i} \\
&= n^i_q \cdots n^i_{g_i}
\end{aligned}$$

de plus comme $R(f_i)/R_1 = \{[\rho] \ : \ \rho \in R(f_i)\}$ est une partition de $R(f_i)$ on a

$$R(f_i) = \bigcup_{\rho \in R(f_i)} [\rho]$$

et

$$\sharp R(f_i) = \sharp(R(f_i)/R_1)\sharp[\rho]$$

donc

$$\sharp(R(f_i)/R_1) = \frac{n_i}{n_q^i \cdots n_{g_i}^i} = n_1^i \cdots n_{q-1}^i$$

c'est-à-dire, il y a exactement $n_1^i \cdots n_{q-1}^i$ classes d'équivalence de cardinalité $n_q^i \cdots n_{g_i}^i$.

Etant donnée une racine ρ de $f_i(x,y) = 0$ on définit l'ensemble

$$E(\rho) = \{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho - \gamma) \geq d\}.$$

On sait que ρ a un développement de la forme

$$\rho(x) = \sum_{s=n_i}^{\infty} a_s x^{s/n_i}$$

et pour n'importe quelle racine $\rho'(x)$ différente de $\rho(x)$ il existe $c \in \{1, \ldots, n_i - 1\}$ qui satisfait

$$\rho'(x) = \sum_{s=n_i}^{\infty} a_s (e^{\frac{2\pi i c}{n_i}} x^{1/n_i})^s$$

Si on prend une racine $\gamma(x)$ de $h(x,y) = 0$ alors $\gamma(x)$ est une racine d'une Y_j et si $m(Y_j) = m_j$ on peut écrire :

$$\gamma(x) = \sum_{t=m_j}^{\infty} b_t x^{t/m_j}$$

et

$$\gamma'(x) = \sum_{t=m_j}^{\infty} b_t (e^{\frac{2\pi i c}{m_j}} x^{1/m_j})^t$$

est une racine de Y_j qui satisfait

$$\mathrm{ord}(\rho' - \gamma') = \mathrm{ord}(\rho - \gamma).$$

On définit une application $\Psi : E(\rho) \longrightarrow E(\rho')$ par $\Psi(\gamma) = \gamma'$.

Cette application est une injection puisque si on prend deux éléments différents γ_1, γ_2 de $E(\rho)$ on a

$$\mathrm{ord}(\gamma_1' - \gamma_2') = \mathrm{ord}(\gamma_1 - \gamma_2) < \infty$$

puisque $\gamma_1 \neq \gamma_2$, donc $\gamma_1' \neq \gamma_2'$.

De plus on a :

1. Ψ est une bijection donc $\sharp E(\rho) = \sharp E(\rho')$.

2. Si $\rho \; R_1 \; \rho'$ alors $E(\rho) = E(\rho')$ et dans le cas contraire $E(\rho) \cap E(\rho') = \emptyset$.

Ainsi on peut écrire

$$M = \{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho - \gamma) \geq d \quad \text{pour au moins une racine } \rho \text{ de } f_i\} = \bigcup_{\rho} E(\rho)$$

et

$$\sharp M = n_1^i \cdots n_{q-1}^i \sharp\{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho_k - \gamma) \geq d\}.$$

Pour calculer $\sharp N$ définissons une relation d'équivalence dans l'ensemble des racines de $f_i(x, y) = 0$ de la façon suivante :

$$\rho \; R_2 \; \rho' \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{ord}(\rho - \rho') > d$$

et l'ensemble $F(\rho) = \{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho - \gamma) > d\}$.

Si $\rho \; R_2 \; \rho'$ alors $F(\rho) = F(\rho')$ et dans le cas contraire $F(\rho) \cap F(\rho') = \emptyset$.

De plus $\sharp F(\rho) = \sharp F(\rho')$ et d'après le lemme (1.1.1) et le corollaire (1.1.1) les n_i racines de $f_i(x, y) = 0$ sont regroupées dans

1. $n_1^i \cdots n_{q-1}^i$ classes d'équivalence si $\dfrac{\beta_{q-1}^i}{n_i} < d < \dfrac{\beta_q^i}{n_i}$,
2. $n_1^i \cdots n_q^i$ classes d'équivalence si $d = \dfrac{\beta_q^i}{n_i}$

donc

$$\sharp N = \sharp \bigcup_{\rho \in R(f_i)} F(\rho) = \begin{cases} n_1^i \cdots n_{q-1}^i \sharp\{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho_k - \gamma) > d\} & \text{si} \quad d \neq \dfrac{\beta_q^i}{n_i} \\ \\ n_1^i \cdots n_q^i \quad \sharp\{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho_k - \gamma) > d\} & \text{si} \quad d = \dfrac{\beta_q^i}{n_i} \end{cases}$$

et

$$m(Z) = \sharp(M - N) = \begin{cases} n_1^i \cdots n_{q-1}^i \sharp\{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho_k - \gamma) = d\} & \text{si} \quad d \neq \dfrac{\beta_q^i}{n_i} \\ \\ n_1^i \cdots n_{q-1}^i \, [\sharp\{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho_k - \gamma) \geq d\} \\ \qquad -n_q^i \sharp\{\gamma \in R(h) : \mathrm{ord}(\rho_k - \gamma) > d\}] & \text{si} \quad d = \dfrac{\beta_q^i}{n_i} \end{cases}$$

Ainsi d'après la définition de Z, B_i^d et D_i^d on peut écrire

$$m(B_i^d) = \begin{cases} n_1^i \cdots n_{q-1}^i \sharp \left\{\gamma \in R\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) : \mathrm{ord}(\rho_k - \gamma) = d\right\} & \text{si} \quad d \neq \dfrac{\beta_q^i}{n_i} \\ \\ n_1^i \cdots n_{q-1}^i \left[\sharp \left\{\gamma \in R\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) : \mathrm{ord}(\rho_k - \gamma) \geq d\right\}\right. \\ \qquad \left. -n_q^i \sharp \left\{\gamma \in R\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) : \mathrm{ord}(\rho_k - \gamma) > d\right\}\right] & \text{si} \quad d = \dfrac{\beta_q^i}{n_i} \end{cases}$$

et

$$m(D_i^d) = \begin{cases} n_1^i \cdots n_{q-1}^i \sharp\{\eta \in R(f) : \mathrm{ord}(\rho_k - \eta) = d\} & \text{si} \quad d \neq \dfrac{\beta_q^i}{n_i} \\ \\ n_1^i \cdots n_{q-1}^i [\sharp\{\eta \in R(f) : \mathrm{ord}(\rho_k - \eta) \geq d\} \\ \qquad -n_q^i \sharp\{\eta \in R(f) : \mathrm{ord}(\rho_k - \eta) > d\}] & \text{si} \quad d = \dfrac{\beta_q^i}{n_i} \end{cases}$$

D'après le lemme (2.3.2) on a

$$m(B_i^d)-m(D_i^d) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad d \neq \dfrac{\beta_q^i}{n_i} \\ n_1^i \cdots n_{q-1}^i[\sharp\{\rho \in R(f_i),\ \rho \neq \rho_k : \mathrm{ord}(\rho_k - \rho) \geq d\} & \\ \qquad -n_q^i \sharp\{\rho \in R(f_i),\ \rho \neq \rho_k : \mathrm{ord}(\rho_k - \rho) > d\}] & \text{si} \quad d = \dfrac{\beta_q^i}{n_i} \end{cases}$$

Mais si $d = \dfrac{\beta_q^i}{n_i}$ d'après le corollaire (1.1.1)

$$\sharp\{\rho \in R(f_i),\ \rho \neq \rho_k : \mathrm{ord}(\rho_k - \rho) \geq d\} = n_q^i \cdots n_{g_i}^i - 1$$

et d'après le lemme (1.1.1) et le corollaire (1.1.1) on a

$$\sharp\{\rho \in R(f_i),\ \rho \neq \rho_k : \mathrm{ord}(\rho_k - \rho) > d\} = n_{q+1}^i \cdots n_{g_i}^i - 1$$

donc

$$m(B_i^d)-m(D_i^d) = n_1^i \cdots n_{q-1}^i[n_q^i \cdots n_{g_i}^i - 1 - n_q^i(n_{q+1}^i \cdots n_{g_i}^i - 1)] = n_1^i \cdots n_{q-1}^i(n_q^i - 1)$$

et finalement

$$m(B_i^d) = \begin{cases} m(D_i^d) & \text{si} \quad d \neq \dfrac{\beta_k^i}{n_i} \quad \forall k \in \{1, \ldots, g_i\} \\ m(D_i^d) + n_1^i \cdots n_{q-1}^i(n_q^i - 1) & \text{si} \quad d = \dfrac{\beta_q^i}{n_i} \end{cases}$$

■

2.3.2 Les arbres d'Eggers et la courbe polaire.

Soient $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ une courbe réduite où $I = \{1, \ldots, r\}$, $P_\tau(C)$ une courbe polaire générique de C et $P_\tau(C) = \bigcup_l \Gamma_l$ sa décomposition en composantes irréductibles.

Dans l'ensemble $\{\Gamma_l\}_l$ définissons la relation d'équivalence suivante :

$$\Gamma_l \; R \; \Gamma_m \iff \text{cont}(C_i, \Gamma_l) = \text{cont}(C_i, \Gamma_m) \quad \text{pour chaque branche } C_i \text{ de } C \tag{2.3}$$

ou de manière équivalent d'après la proposition(1.2.2)

$$\Gamma_l \; R \; \Gamma_m \iff \frac{(C_i, \Gamma_l)}{m(\Gamma_l)} = \frac{(C_i, \Gamma_m)}{m(\Gamma_m)} \quad \text{pour chaque branche } C_i \text{ de } C.$$

Remarque 2.3.2 *Avec cette dernière relation d'équivalence nous avons regroupé en paquets (classes d'équivalence) les branches de $P_\tau(C)$ où le contact de chaque branche C_i avec un élément quelconque d'un paquet est le même.*

Soit $T(C)$ l'arbre d'Eggers de la courbe C et $I = \{1, \ldots, r\}$. Si Q est un sommet noir de $T(C)$ définissons

$$I_Q := \{i \in I \;/\; Q \in K_i\}$$

et

$$A_Q := \{\Gamma_l \text{ composante irréductible de } P_\tau(C) : \text{cont}(C_i, \Gamma_l) = n_i v(Q) \; \forall i \in I_Q\}.$$

Lemme 2.3.4 *Si Q est un sommet noir de $T(C)$ alors A_Q n'est pas vide.*

Démonstration

Soit Q un sommet noir de $T(C)$ tel que $A_Q = \emptyset$ et soit $i \in I_Q$.
Alors il n'existe pas de branche Γ de la courbe polaire $P_\tau(C)$ qui vérifie $\text{cont}(C_i, \Gamma) = n_i v(Q)$.
Soit $B_i^{v(Q)}$ la courbe formée de toutes les branches Γ de $P_\tau(C)$ qui vérifient $\text{cont}(C_i, \Gamma) = n_i v(Q)$ et soit de plus $D_i^{v(Q)}$ la courbe formée de toutes les branches C_j de C telles que $\alpha_{ij} = n_i v(Q)$.

D'après le lemme (2.3.3) on a :

$$0 = m(B_i^{v(Q)}) = \begin{cases} m(D_i^{v(Q)}) + n_1^i \cdots n_{q-1}^i (n_q^i - 1) & \text{si } v(Q) = \dfrac{\beta_q^i}{n_i} \text{ avec } q \in \{1, \ldots, g_i\} \\ \\ m(D_i^{v(Q)}) & \text{si } v(Q) \neq \dfrac{\beta_k^i}{n_i} \; \forall k \in \{1, \ldots, g_i\} \end{cases}$$

Mais $m(D_i^{v(Q)}) + n_1^i \cdots n_{q-1}^i (n_q^i - 1) \neq 0$ puisque $n_k^i > 1$ pour tout $k \in \{1, \ldots, g_i\}$.

Ainsi $0 = m(D_i^{v(Q)})$ et $v(Q) \neq \dfrac{\beta_k^i}{n_i}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, g_i\}$, c'est-à-dire qu'il existe $j \in I$ tel que $v(Q) = \dfrac{\alpha_{ij}}{n_i}$ donc $n_i v(Q) = \alpha_{ij}$ et $m(D_i^{v(Q)}) \neq 0$.

■

Nous verrons ensuite qu'il *existe une correspondance bijective entre les classes d'équivalence de R et les ensembles A_Q.*

Lemme 2.3.5 *Soit Q un sommet noir de $T(C)$ et soit Γ_0 un élément de A_Q; alors $A_Q = [\Gamma_0]$ où $[\Gamma_0]$ est la classe d'équivalence de Γ_0 dans la relation R.*

Démonstration

Si Γ_m est un élément de la classe de Γ_0 alors $\mathrm{cont}(C_i, \Gamma_0) = \mathrm{cont}(C_i, \Gamma_m)$ pour tout $i \in I$. Mais $\Gamma_0 \in A_Q$ donc $\mathrm{cont}(C_i, \Gamma_0) = n_i v(Q)$ pour tout $i \in I_Q$, donc $\Gamma_m \in A_Q$ et $\mathrm{cont}(C_i, \Gamma_m) = n_i v(Q)$ où $i \in I_Q$.

Il faut démontrer que $\mathrm{cont}(C_i, \Gamma_m) = \mathrm{cont}(C_i, \Gamma_0)$ pour tout $i \in I$.

Si $i \in I_Q$ c'est évident. Dans le cas contraire on a

$$v(Q) > \frac{\alpha_{ji}}{n_j} = \frac{\alpha_{ij}}{n_i}$$

pour tout $j \in I_Q$.

Alors on peut écrire

$$\mathrm{cont}(C_j, \Gamma_m) = \mathrm{cont}(C_j, \Gamma_0) = n_j v(Q) > \alpha_{ji} = \mathrm{cont}(C_j, C_i)$$

donc d'après le lemme (1.2.4) $\mathrm{cont}(C_i, \Gamma_0) = \mathrm{cont}(C_i, \Gamma_m)$.

■

Lemme 2.3.6 *Si $A_Q \neq A_{Q'}$ alors $A_Q \cap A_{Q'}$ est vide.*

Démonstration

D'après le lemme (2.3.5) il existe

$$\Gamma_0 \in A_Q \ : \ [\Gamma_0] = A_Q$$

et il existe

$$\Gamma'_0 \in A_{Q'} \ : \ [\Gamma'_0] = A_{Q'}.$$

Si $A_Q \neq A_{Q'}$ alors $[\Gamma_0] \neq [\Gamma'_0]$ et d'après les propriétés des classes d'équivalence, $[\Gamma_0]$ et $[\Gamma'_0]$ sont disjoints.

■

Lemme 2.3.7 *Si A est une classe d'équivalence de la relation R il existe un sommet noir Q de $T(C)$ qui vérifie $A = A_Q$.*

Démonstration

Soit Γ_l un élément de A et soit C_p une branche de C telle que

$$\frac{\mathrm{cont}(C_p, \Gamma_l)}{m(C_p)} = \max_{1 \leq q \leq r} \left\{ \frac{\mathrm{cont}(C_q, \Gamma_l)}{m(C_q)} \right\}.$$

D'après le lemme (2.3.2) on sait que

$$\mathrm{cont}(C_p, \Gamma_l) \in \{\beta_i^p\}_{i=1}^{g_p} \cup \{\alpha_{pj}\}_{j \in I, j \neq p}$$

donc il existe Q élément de K_p qui vérifie

$$\frac{\mathrm{cont}(C_p, \Gamma_l)}{m(C_p)} = v(Q),$$

c'est-à-dire $\Gamma_l \in A_Q$.

L'autre inclusion est évidente.

■

Remarque 2.3.3 *Avec les lemmes ci-dessus nous avons demontré qu'il existe une correspondance bijective entre les classes d'équivalence de la relation R et les ensembles A_Q. Maintenant nous allons voir qu'il existe une correspondance bijective entre les ensembles A_Q et les sommets noirs de $T(C)$.*

Lemme 2.3.8 *Soient Q et Q' deux sommets noirs de $T(C)$. Alors*

$$Q = Q' \iff A_Q = A_{Q'}$$

Démonstration
Si $Q = Q'$ c'est evident que $A_Q = A_{Q'}$.

Supposons maintenant que $A_Q = A_{Q'}$ et $Q \neq Q'$.

S'il existe $i \in I_Q \cap I_{Q'}$ et $\Gamma \in A_Q = A_{Q'}$ alors

$$\mathrm{cont}(C_i, \Gamma) = n_i v(Q) = n_i v(Q')$$

c'est-à-dire $v(Q) = v(Q')$ et comme $Q, Q' \in K_i$, on a $Q = Q'$.

Maintenant on suppose $I_Q \cap I_{Q'} = \emptyset$. Si $i \in I_Q$, $j \in I_{Q'}$ et $\Gamma \in A_Q = A'_Q$ on peut écrire

$$\mathrm{cont}(\Gamma, C_i) = m(\Gamma).v(Q)$$

et aussi $\mathrm{cont}(\Gamma, C_j) = m(\Gamma).v(Q')$.

Mais

$$\mathrm{cont}(C_i, C_j) = \alpha_{ij} < n_i v(Q)$$

et

$$\mathrm{cont}(C_j, C_i) = \alpha_{ji} < n_j v(Q')$$

(puisque sinon $i, j \in I_Q$ et $I_Q \cap I_{Q'} \neq \emptyset$).

Supposons que $\mathrm{cont}(\Gamma, C_i) \geq \mathrm{cont}(\Gamma, C_j)$, alors d'après le lemme (1.2.4)

$$\mathrm{cont}(C_j, C_i) \geq \mathrm{cont}(\Gamma, C_j)\frac{n_j}{m(\Gamma)} = n_j v(Q')$$

donc

$$\frac{\mathrm{cont}(C_j, C_i)}{n_j} = \frac{\mathrm{cont}(C_i, C_j)}{n_i} \geq v(Q') \quad ,$$

et $Q' \in K_i \cap K_j$ ce qui est une contradiction.

Ainsi le seul cas possible est $I_Q \cap I_{Q'} \neq \emptyset$ et nous avons fini.

■

Remarque 2.3.4 *Avec le lemme et la remarque ci-dessus nous avons demontré qu'il existe une correspondance bijective entre les classes d'équivalence de la relation R et les sommets noirs de $T(C)$.*

Proposition 2.3.2 (Eggers) *Soit* Q *un sommet noir de* $T(C)$ *et soit* Γ_l *un élément de* A_Q *alors*

1. *Chaque branche* C_i *de* C *avec* $Q \in K_i$ *vérifie :*
   (a) $\mathrm{cont}(C_i, \Gamma_l) = n_i v(Q)$.
   (b)
$$\frac{(C_i, \Gamma_l)}{m(\Gamma_l)} = \begin{cases} \dfrac{\overline{\beta^i_{k+1}}}{n^i_1 \cdots n^i_k} & \text{si } Q \text{ est simple et où } k = k(Q) \\ \min\left\{\dfrac{(C_i, C_q)}{m(C_q)}\right\} & \text{si } Q \text{ est de bifurcation et } q \in I_Q - \{i\} \end{cases}$$
2. *Chaque branche* C_j *de* C *telle que* Q *ne soit pas un élément de* K_j *vérifie :*
   $\mathrm{cont}(C_j, \Gamma_l) = \mathrm{cont}(C_j, C_i)$ *pour* $i \in I_Q$
$$\frac{(C_j, \Gamma_l)}{m(\Gamma_l)} = \frac{(C_j, C_i)}{m(C_i)}.$$

Démonstration

1. Soit Γ_l un élément de A_Q et soit C_i une branche de C où $Q \in K_i$.

   D'après la définition de $k(Q)$ on peut écrire
$$\beta^i_k < n_i v(Q) \leq \beta^i_{k+1}$$
   où $k := k(Q) \geq 1$.

   Mais $\mathrm{cont}(C_i, \Gamma_l) = n_i v(Q)$ donc d'après la proposition (1.2.2) on a
$$\frac{(C_i, \Gamma_l)}{m(\Gamma_l)} = \frac{n^i_k \bar{\beta}^i_k + n_i v(Q) - \beta^i_k}{n^i_1 \cdots n^i_k} \tag{2.4}$$
   Si $k = 0$ on peut avoir l'égalité $\beta^i_k = n_i v(Q)$ quand $v(Q) = 1$ mais dans ce cas-là on a aussi l'égalité (2.4).

   Etudions les différents cas :

   (a) Q est un sommet simple de $T(C)$.
   Dans ce cas-là il y a seulement une arête qui est pleine puisque si elle était pointillée, Q serait relié au moins à deux sommets blancs et alors $d_1(Q) + d_2(Q) > 1$.

Alors $v(Q) = \dfrac{\beta^i_{k+1}}{n_i}$, c'est- à-dire

$$\mathrm{cont}(C_i, \Gamma_l) = n_i v(Q) = \beta^i_{k+1}$$

et d'après la proposition (1.2.2)

$$\frac{(C_i, \Gamma_l)}{m(\Gamma_l)} = \frac{\overline{\beta^i_{k+1}}}{n^i_1 \cdots n^i_k}.$$

(b) Q est un sommet de bifurcation de $T(C)$.
Dans ce cas-là Q est un élément de au moins deux chaînes élémentaires différentes K_i et K_j de $T(C)$ et $v(Q) \leq \dfrac{\alpha_{ij}}{n_i} = \dfrac{\alpha_{ji}}{n_j}$ (il y a deux valeurs de i et j où on a l'égalité), alors

$$n_i v(Q) = \mathrm{cont}(C_i, \Gamma_l) \leq \mathrm{cont}(C_i, C_j)$$

et d'après la proposition (1.2.2) on trouve

$$\frac{(C_i, \Gamma_l)}{m(\Gamma_l)} \leq \frac{(C_i, C_j)}{m(C_j)}$$

où $j \in I_Q - \{i\}$. Ainsi

$$\frac{(C_i, \Gamma_l)}{m(\Gamma_l)} \leq \min_{j \in I_Q - \{i\}} \left\{ \frac{(C_i, C_j)}{m(C_j)} \right\}$$

En plus on a le minimum puisque il suffit de prendre $p \in (I - \{i\})$ tel que $i, p \in I_Q$ où Q est le sommet de valuation la plus grande dans $K_i \cap K_p$ (il toujours existe au moins un p qui vérifie la dernière condition puisque sinon on aurait $d_1(Q) + d_2(Q) = 1$.)

2. Si maintenant nous prenons $j \in I - \{i\}$ tel que $j \notin I_Q$ on peut écrire

$$v(Q) > \frac{\alpha_{ij}}{n_i} = \frac{\alpha_{ji}}{n_j}$$

donc

$$\mathrm{cont}(C_i, \Gamma_l) > \mathrm{cont}(C_i, C_j)$$

et en conséquence d'après le lemme (1.2.4)

$$\mathrm{cont}(C_j, \Gamma_l) = \mathrm{cont}(C_j, C_i).$$

Ainsi d'après la proposition (1.2.2) on a

$$\frac{(C_j, \Gamma_l)}{m(\Gamma_l)} = \frac{(C_j, C_i)}{m(C_i)}$$

pour tout $j \notin I_Q$.

■

Avec la proposition suivante on pourra calculer la multiplicité des différents paquets des branches de la courbe polaire $P_\tau(C)$ de C qui nous avons défini ci-dessus.

Proposition 2.3.3 (Eggers)

1. *Si Q est un sommet noir du graphe de C tel que $d_2(Q) > 0$ et $i \in I_Q$ tel que l'arête qui sort de Q dans la chaîne K_i vers un sommet noir de valuation plus grande (ou au sommet blanc) est pleine, on a*
$$\sum_{\Gamma_l \in A_Q} m(\Gamma_l) = n_1^i \cdots n_k^i (d_1(Q) + d_2(Q) n_{k+1}^i - 1)$$
où $k := k(Q)$.
2. *Si Q un sommet noir du graphe de C tel que $d_2(Q) = 0$ et $i \in I_Q$, on a*
$$\sum_{\Gamma_l \in A_Q} m(\Gamma_l) = (d_1(Q) - 1) n_1^i \cdots n_k^i$$
où $k := k(Q)$.

Démonstration
Soit $\Gamma_Q = \bigcup_{\Gamma_l \in A_Q} \Gamma_l$. On doit calculer sa multiplicité.

Etant donné un graphe partiel T de $T(C)$ définissons

$$\Gamma_T := \bigcup_{Q \in T} \Gamma_Q$$

Maintenant considérons les composantes connexes de $T(C) - Q$ et soit Z_0 la composante connexe de $T(C) - Q$ qui contient le point base de $T(C)$ (si Q est le point base de $T(C)$ disons que $Z_0 := \emptyset$).

C'est évident que le graphe $T(C)-Q-Z_0$ a exactement $d=d_1(Q)+d_2(Q)$ composantes connexes que nous appellerons $Z_1,\dots,Z_d$. Supposons en plus que $Z_1\cap K_i\neq\emptyset$ et $Z_j\cap K_i=\emptyset$ pour $j\in\{2,\dots,d\}$ (c'est-à-dire, Z_1 est la composante connexe de $T(C)-Q-Z_0$ qui contient les sommet de K_i qui sont dans $T(C)-Q-Z_0$).

Soit $B_i^{v(Q)}$ la courbe formée de toutes les composantes irréductibles Γ_l de $P_\tau(C)$ qui vérifient $\mathrm{cont}(C_i,\Gamma_l)=n_iv(Q)$ et soit $D_i^{v(Q)}$ la courbe formée de toutes les composantes irréductibles C_j de C qui vérifient $\mathrm{cont}(C_i,C_j)=n_iv(Q)$. On peut écrire la décomposition disjointe suivante :

$$B_i^{v(Q)}=\Gamma_Q\cup\Gamma_{Z_2}\cup\cdots\cup\Gamma_{Z_d}$$

donc $m(\Gamma_Q)=m(B_i^{v(Q)})-m(\Gamma_{Z_2})-\cdots-m(\Gamma_{Z_d})$.

Mais dans le cas (1) de l'énoncé d'après le choix de C_i on peut écrire

$$v(Q)=\frac{\beta_{k+1}^i}{n_i}$$

où $k:=k(Q)$. De plus d'après le lemme (2.3.3) on a

$$m(B_i^{v(Q)})=m(D_i^{v(Q)})+n_1^i\cdots n_k^i(n_{k+1}^i-1) \tag{2.5}$$

et dans le cas (2) de l'énoncé d'après le choix de C_i on peut écrire

$$\frac{\beta_k^i}{n_i}<v(Q)<\frac{\beta_{k+1}^i}{n_i}$$

où $k:=k(Q)$. De plus d'après le lemme (2.3.3) on a

$$m(B_i^{v(Q)})=m(D_i^{v(Q)}). \tag{2.6}$$

On reste calculer $m(\Gamma_{Z_i})$ quand $i\in\{2,\dots,d\}$.

Soit Z une composante connexe de $T(C)-Q-Z_0$. Si Z est relié à Q dans $T(C)$ par une arête pointillée alors

$$m(\Gamma_Z)=\sum_{j,K_j\cap Z\neq\emptyset}n_j-n_1^i\cdots n_k^i$$

et si Z est relié à Q dans $T(C)$ par une arête pleine alors

$$m(\Gamma_Z) = \sum_{\{j:K_j\cap Z\neq\emptyset\}} n_j - n_1^i \cdots n_{k+1}^i.$$

En fait puisque si C_a est une branche de C qui vérifie $K_a \cap Z \neq \emptyset$ alors on peut écrire $\Gamma_Z = \bigcup \Gamma_l$ où la réunion est sur toutes les composantes irréductibles Γ_l de $P_\tau(C)$ qui vérifient

$$\mathrm{cont}(C_a, \Gamma_l) > n_a v(Q).$$

Définissons D comme la courbe formée de toutes les branches C_j de la courbe C qui vérifient $\mathrm{cont}(C_a, C_j) > n_a v(Q)$, alors

$$\Gamma_Z = \bigcup_{Q'\in Z\cap K_a} A_{Q'}$$

et

$$D = \bigcup_{Q'\in Z\cap K_a} D_{Q'}$$

où $D_{Q'} = \bigcup_j C_j$ et la réunion est sur toutes les branches C_j de C qui vérifient $\mathrm{cont}(C_a, C_j) = n_a v(Q')$, alors

$$m(\Gamma_Z) = \sum_{Q'\in Z\cap K_a} m(A_{Q'})$$

et d'après le lemme (2.3.3) on peut écrire

$$m(A_{Q'}) = \begin{cases} m(D_{Q'}) + n_1^a \cdots n_{q-1}^a (n_q^a - 1) \text{ si } v(Q') = \dfrac{\beta_q^a}{n_a} \\ \\ m(D_{Q'}) \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ si } v(Q') \neq \dfrac{\beta_k^a}{n_a} \;\; k \in \{1, \ldots, g_a\} \end{cases}$$

Mais si Z est relié à Q dans $T(C)$ par une arête pleine on a $v(Q) = \dfrac{\beta_{k+1}^a}{n_a}$ où $k := k(Q)$ donc

$$v(K_a \cap Z) = \left\{ \frac{\beta_{k+2}^a}{n_a}, \ldots, \frac{\beta_{g_a}^a}{n_a} \right\} \cup \left\{ \frac{\alpha_{aj}}{n_a}, \;\; K_j \cap Z \neq \emptyset \right\}$$

et

$$\begin{aligned}
m(\Gamma_Z) &= \sum_{Q' \in Z \cap K_a} m(A_{Q'}) \\
&= \sum_{q=k+2}^{g_a} m(A_{\frac{\beta_q^a}{n_a}}) + \sum_{K_j \cap Z \neq \emptyset} m(A_{\frac{\alpha_{aj}}{n_a}}) \\
&= \sum_{k+2}^{g_a} m(D_{\frac{\beta_q^a}{n_a}}) + \sum_{q=k+2}^{g_a} n_1^a \cdots n_{q-1}^a (n_q^a - 1) + \sum_{K_j \cap Z \neq \emptyset} m(D_{\frac{\alpha_{aj}}{n_a}}) \\
&= m(D) + \sum_{q=k+2}^{g_a} n_1^a \cdots n_{q-1}^a (n_q^a - 1)
\end{aligned}$$

où on a écrit $A_{v(P)}$ et $D_{v(P)}$ par A_P et D_P respectivement.

De plus si Z est relié à Q dans $T(C)$ par une arête pointillée alors

$$\frac{\beta_k^a}{n_a} < v(Q) < \frac{\beta_{k+1}^a}{n_a}$$

où $k := k(Q)$ donc

$$v(K_a \cap Z) = \left\{ \frac{\beta_{k+1}^a}{n_a}, \ldots, \frac{\beta_{g_a}^a}{n_a} \right\} \cup \left\{ \frac{\alpha_{aj}}{n_a}, \quad K_j \cap Z \neq \emptyset \right\}$$

et d'après un raisonnement comme ci-dessus on trouve

$$m(\Gamma_Z) = m(D) + \sum_{q=k+1}^{g_a} n_1^a \cdots n_{q-1}^a (n_q^a - 1).$$

De plus si $a \neq i$ comme K_a est d'intersection non vide avec une certaine composante connexe Z_s où $s \in \{1, \ldots, d\}$, alors $\mathrm{cont}(C_i, C_a) \geq n_i v(Q) > \beta_k^i$ et $n_j^i = n_j^a$ quand $1 \leq j \leq k$, donc

$$\sum_{q=k+1}^{g_a} n_1^a \cdots n_{q-1}^a (n_q^a - 1) = n_a - n_1^a \cdots n_k^a = n_a - n_1^i \cdots n_k^i.$$

Si Q est relié à Z par une arête pleine alors

$$v(Q) = \frac{\beta_{k+1}^a}{n_a} = \frac{\beta_{k+1}^i}{n_i}$$

et $n_j^i = n_j^a$ quand $1 \leq j \leq k+1$ donc

$$\sum_{q=k+2}^{g_a} n_1^a \cdots n_{q-1}^a (n_q^a - 1) = n_a - n_1^a \cdots n_{k+1}^a = n_a - n_1^i \cdots n_{k+1}^i$$

c'est-à-dire

$$m(\Gamma_Z) = \begin{cases} m(D) + m(C_a) - n_1^i \cdots n_k^i & \text{si } Q \text{ est relié à } Z \text{ par une arête pointillée} \\ m(D) + m(C_a) - n_1^i \cdots n_{k+1}^i & \text{si } Q \text{ est reliè à } Z \text{ par une arête pleine} \end{cases}$$

Mais pour chaque branche C_j de C telle que $K_j \cap Z \neq \emptyset$ on a

$$\text{cont}(C_a, C_j) > n_a v(Q)$$

donc

$$D \cup C_a = \bigcup_{K_j \cap Z \neq \emptyset} C_j$$

et

$$m(D) + m(C_a) = \sum_{K_j \cap Z \neq \emptyset} m(C_j).$$

Pouvons écrire

$$m(\Gamma_Z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{K_j \cap Z \neq \emptyset} n_j - n_1^i \cdots n_k^i & \text{si } Q \text{ est relié à } Z \text{ par une arête pointillée} \\ \displaystyle\sum_{K_j \cap Z \neq \emptyset} n_j - n_1^i \cdots n_{k+1}^i & \text{si } Q \text{ est relié à } Z \text{ par une arête pleine} \end{cases} \tag{2.7}$$

Donc dans le cas (1) de l'énoncé et d'après l'égalité ci-dessus si on suppose que dans l'ensemble $\{\Gamma_2, \ldots, \Gamma_d\}$ il y a r composantes qui sont reliées par une arête pointillée avec Q et il y a s composantes qui sont reliées par une arête pleine, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{d} m(\Gamma_{Z_k}) &= m(D_i^{v(Q)}) - rn_1^i \cdots n_k^i - sn_1^i \cdots n_{k+1}^i \\ &= m(D_i^{v(Q)}) - n_1^i \cdots n_k^i (r + sn_{k+1}^i) \\ &= m(D_i^{v(Q)}) - n_1^i \cdots n_k^i [d_1(Q) + (d_2(Q) - 1)n_{k+1}^i]\end{aligned}$$

et d'après (2.5) on peut écrire

$$m(\Gamma_Q) = m(B_i^{v(Q)}) - \sum_{k=2}^{d} m(\Gamma_{Z_k}) = n_1^i \cdots n_k^i (d_1(Q) + d_2(Q)n_{k+1}^i - 1).$$

Dans le cas (2) de l'énoncé comme toutes les arêtes qui sortent de Q sont pointillées d'après l'égalité (2.7) on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{d} m(\Gamma_{Z_k}) &= m(D_i^{v(Q)}) - (d-1)n_1^i \cdots n_k^i \\ &= m(D_i^{v(Q)}) - (d_1(Q) - 1)n_1^i \cdots n_k^i\end{aligned}$$

et d'après (2.6) on peut écrire

$$m(\Gamma_Q) = m(B_i^{v(Q)}) - \sum_{k=2}^{d} m(\Gamma_{Z_k}) = (d_1(Q) - 1)n_1^i \cdots n_k^i.$$

■

Remarque 2.3.5 *D'après la proposition ci-dessus on peut exprimer le nombre* $\mu^{(1)} = m(P_\tau(C))$ *en fonction des invariants de* $T(C)$ *de la façon suivante :*

$$\mu^{(1)} = \sum_{Q \in T(C)} n_1^i \cdots n_k^i (d_1(Q) + d_2(Q)n_{k+1}^i - 1)$$

où $i \in I_Q$ *et* $k = k(Q)$.

Corollaire 2.3.2 *Soit* Q *un sommet noir du graphe de* C *tel que* $d_2(Q) = 0$ *et soit* $i \in I_Q$. *Alors le nombre de branches de la courbe polaire qui sont dans le paquet associé au sommet* Q *est majoré par le nombre de branches* C_j *de* C *qui vérifient* $\mathrm{cont}(C_i, C_j) = n_i v(Q)$.

Démonstration
Si $\Gamma_l \in A_Q$ alors $\mathrm{cont}(C_i, \Gamma_l) = n_i v(Q)$ et comme $d_2(Q) = 0$ on a

$$\beta_k^i < n_i v(Q) < \beta_{k+1}^i$$

où $k := k(Q)$. Donc les paires caractéristiques $\{(m_r(\Gamma_l), n_r(\Gamma_l))\}_{r=1}^k$ de Γ_l vérifient $n_r^i = n_r(\Gamma_l)$, $m_r^i = m_r(\Gamma_l)$ et on peut écrire

$$m(\Gamma_l) = n_1^i \cdots n_k^i l_k(\Gamma_l)$$

où $l_k(\Gamma_l)$ est le p.g.c.d. de premiers k exposants caractéristiques de la branche Γ_l. Mais comme $m(\Gamma_Q) = \sum_l m(\Gamma_l)$ où la somme est sur les branches Γ_l de A_Q, donc d'après la proposition (2.3.3) on a

$$\sum_l l_k(\Gamma_l) = d_1(Q) - 1$$

de plus $l_k(\Gamma_l) \geq 1$ et

$$d_1(Q) - 1 \leq \sharp\{C_j \text{ branche de } C \ / \ \mathrm{cont}(C_i, C_j) = n_i v(Q)\}$$

ainsi on a le résultat.

■

Corollaire 2.3.3 *Si Q est un sommet noir de $T(C)$ tel que $d_2(Q) = 0$ et $d_1(Q) = 2$ alors le paquet de la courbe polaire Γ_Q associé au sommet Q est irréductible.*

Démonstration
Soit $i \in I_Q$, d'après la proposition ci-dessus on a

$$m(\Gamma_Q) = (d_1(Q) - 1) n_1^i \cdots n_k^i = n_1^i \cdots n_k^i$$

où $k := k(Q)$.

Si Γ est une branche de Γ_Q comme $d_2(Q) = 0$ on peut écrire

$$\beta_k^i < n_i . v(Q) = \mathrm{cont}(C_i, \Gamma) < \beta_{k+1}^i, \quad (\text{si } v(Q) = 1 \ \ \beta_k^i = n_i v(Q))$$

donc $n_j^i = n_j(\Gamma)$ pour tout $1 \leq j \leq k$ où $\{(n_j(\Gamma), m_j(\Gamma)\}_j$ sont les paires caractéristiques de la branche Γ. Mais

$$m(\Gamma) = n_1(\Gamma) \cdots n_k(\Gamma) . l_k(\Gamma) = n_1^i \cdots n_k^i . l_k(\Gamma) \leq m(\Gamma_Q) = n_1^i \cdots n_k^i \quad (2.8)$$

où $l_k(\Gamma) = \text{p.g.c.d.}\{\beta_0(\Gamma), \ldots, \beta_k(\Gamma)\}$ et $\beta_j(\Gamma)$ est le j-ème exposant caractéristique de Γ.

Ainsi $l_k(\Gamma) = 1$ et $m(\Gamma) = m(\Gamma_Q)$, c'est-à-dire que Γ_Q est irréductible.

■

Remarque 2.3.6 *Un cas particulier du corollaire ci-dessus est celui où la courbe C a seulement deux branches et le contact entre elles n'est pas un exposant caractéristique.*

2.4 Enoncé du théorème principal

On considère la famille $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \{P_\tau(C)\}_\tau$ parametrée par $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ des courbes polaires de C.

D'après les résultats généraux sur l'équisingularité de Zariski et Teissier (voir la proposition (2.2.2)) on sait qu'il existe un ouvert de Zariski $U = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \sharp$fini de points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tel que $\mathcal{P}(C)$ a une paramétrisation simultanée au voisinage de tout point $\tau_0 \in U$, ce qui permet de décrire la variation de $(P_\tau(C))$ par la paramétrisation simultanée des branches.

De plus donnée que U est connexe le nombre des composantes irréductibles de $(P_\tau(C))$ est indépendant de $\tau \in U$ et au voisinage de chaque point de U, chaque composante irréductible de $(P_\tau(C))_\tau$ a une paramétrisation de la forme suivante :

$$\begin{cases} x = t_q^{m_q} \\ y = y(t_q, \tau) \end{cases}$$

où $y(t_q, \tau) \in \mathbb{C}\{t_q, \tau\}$.

Théorème 2.4.1 *Soient $C = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ une courbe plane réduite et $P_\tau(C)$ une courbe polaire générique de C. Alors $P_\tau(C)$ se décompose en paquets $\Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(s_1)}$,*
$\Gamma^{(s_1+1)}, \ldots, \Gamma^{(s_1+s_2)}$, qui ne sont pas nécessairement irréductibles, où

$$s_1 = \sharp \bigcup_{i=1}^{r} S_i^1 \qquad s_2 = \sharp \bigcup_{i=1}^{r} (S_i^2 - S_i^1)$$

et qui vérifient :

1. *Pour tout* $i \in \{1, \dots, s_1\}$ *il existe une branche* C_{i_0} *de* C *et* $Q \in T(C)$ *où* $v(Q) = \dfrac{\beta_q^{i_0}}{n_{i_0}}$ *tels que :*

   (a) $m(\Gamma^{(i)}) = n_1^{i_0} \cdots n_{q-1}^{i_0}(d_1(Q) + d_2(Q)n_q^{i_0} - 1)$.

   (b) *Toute composante irréductible* $\Gamma_k^{(i)}$ *de* $\Gamma^{(i)}$ *a un développement de Puiseux de la forme :*

$$\begin{cases} x = t_k^{m_k^{(i)}} \\ y = a_{n_{i_0}} t_k^{m_k^{(i)}} + \cdots + a_{sn_{i_0}} t_k^{sm_k^{(i)}} + a_{\beta_1^{i_0}} t_k^{\tilde{\beta}_1^{i_0}} + \cdots + a_{\beta_{q-1}^{i_0}} t_k^{\tilde{\beta}_{q-1}^{i_0}} + \\ \quad + \displaystyle\sum_{j=1}^{h_{q-1}} a_{\beta_{q-1}^{i_0} + j l_{q-1}^{i_0}} t_k^{\tilde{\beta}_{q-1}^{i_0} + j \tilde{l}_{q-1}^{i_0}} + \sum_{j \geq \beta_q^{i_0}} b_j^k(\tau) t_k^{j m_k^{(i)}/n_{i_0}} \end{cases}$$

   où $m_k^{(i)} = m(\Gamma_k^{(i)})$, t_k *est un paramètre uniformisant, le tilde indique que les exposants ont été divisés par* $\dfrac{n_{i_0}}{m_k^{(i)}}$ *et où* $(a_{n_{i_0}}, \dots, a_{sni_0}, a_{\beta_1^{i_0}}, \dots, a_{\beta_{q-1}^{i_0}}, \dots, a_{\beta_{q-1}^{i_0} + h_{q-1} l_{q-1}^{i_0}})$ *sont les coefficients d'un développement de Puiseux de* C_{i_0}, *jusqu'au terme précédent* $\beta_q^{i_0}$.

2. *Pour tout* $i \in \{s_1 + 1, \dots, s_1 + s_2\}$ *il existe une branche* C_{i_0} *de* C *et* $Q \in K_{i_0}$ *où* $v(Q) \neq \dfrac{\beta_j^l}{n_l}$ *pour tout* $j \in \{1, \dots, g_l\}$ *et pour tout* $l \in \{1, \dots, r\}$ *tels que*

   (a) $m(\Gamma^{(i)}) = (d_1(Q) - 1)n_1^{i_0} \cdots n_q^{i_0}$ *où* $q := k(Q)$.

   (b) *Toute composante irréductible* $\Gamma_k^{(i)}$ *de* $\Gamma^{(i)}$ *a un développement de Puiseux de la forme :*

$$\begin{cases} x = t_k^{m_k^{(i)}} \\ y = a_{n_{i_0}} t_k^{m_k^{(i)}} + \cdots + a_{sn_{i_0}} t_k^{sm_k^{(i)}} + a_{\beta_1^{i_0}} t_k^{\tilde{\beta}_1^{i_0}} + \cdots + a_{\beta_q^{i_0}} t_k^{\tilde{\beta}_q^{i_0}} + \cdots + \\ \quad + a_{n_{i_0} v(Q) - 1} t_k^{\frac{m_k^{(i)}(n_{i_0} v(Q) - 1)}{n_{i_0}}} + \displaystyle\sum_{j \geq n_{i_0} v(Q)} b_j^k(\tau) t_k^{j m_k^{(i)}/n_{i_0}} \end{cases}$$

où $m_k^{(i)} = m(\Gamma_k^{(i)})$, t_k *est un paramètre uniformisant, le tilde indique que les exposants ont été divisés par* $\dfrac{n_{i_0}}{m_k^{(i)}}$ *et où* $(a_{n_{i_0}}, \ldots, a_{sni_0}, a_{\beta_1^{i_0}}, \ldots, a_{\beta_q^{i_0}}, \ldots, a_{n_{i_0}v(Q)-1})$ *sont les coefficients d'un développement de Puiseux de* C_{i_0}, *jusqu'au terme* $n_{i_0}v(Q) - 1$.

Démonstration

Soit $P_\tau(C) = \bigcup_i \psi_i$ la décomposition de $P_\tau(C)$ en composantes irréductibles. Alors toute classe d'équivalence A de la relation définie sur l'ensemble $\{(\psi_i)_i \in I\}$ par

$$\psi_i \; R \; \psi_j \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{cont}(C_k, \psi_i) = \mathrm{cont}(C_k, \psi_j) \text{ pour toute branche } C_k \text{ de } C$$

est un ensemble A_Q où $Q \in T(C)$. Donc on peut distinguer les deux cas suivants :

1. $v(Q) \in \bigcup S_i^1$ où $i \in I$.
2. $v(Q) \in \bigcup (S_i^2 - S_i^1)$ où $i \in I$.

Dans le premier cas il existe $i_0 \in I$ et $q \in \{1, \ldots, g_{i_0}\}$ où $v(Q) = \dfrac{\beta_q^{i_0}}{n_{i_0}}$ tels que pour tout élément ψ de $A = A_Q$ on a

$$\mathrm{cont}(C_{i_0}, \psi) = n_{i_0} v(Q) = \beta_q^{i_0}.$$

Donc si la branche C_{i_0} de C a un développement de Puiseux de la forme

$$y_{i_0} = a_{n_{i_0}} x + \cdots + a_{sn_{i_0}} x^s + a_{\beta_1^{i_0}} x^{\beta_1^{i_0}/n_{i_0}} + \sum_{j=1}^{h_1} a_{\beta_1^{i_0} + j l_1^{i_0}} x^{\frac{\beta_1^{i_0} + j l_1^{i_0}}{n_{i_0}}} + \cdots + a_{\beta_{g_{i_0}}^{i_0}} x^{\beta_{g_{i_0}}^{i_0}/n_{i_0}} + \ldots$$

le développement de Puiseux de ψ coïncide avec le développement de C_{i_0} jusqu'au terme précédent $\beta_q^{i_0}$, c'est-à-dire

$$y_\psi = a_{n_{i_0}} x + \cdots + a_{sn_{i_0}} x^s + a_{\beta_1^{i_0}} x^{\beta_1^{i_0}/n_{i_0}} + \cdots + a_{\beta_{q-1}^{i_0}} x^{\beta_{q-1}^{i_0}/n_{i_0}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{h_{q-1}} a_{\beta_{q-1}^{i_0} + j l_{q-1}^{i_0}} x^{\frac{\beta_{q-1}^{i_0} + j l_{q-1}^{i_0}}{n_{i_0}}} + \sum_{j \geq \beta_q^{i_0}} b_j^k(\tau) x^{j/n_{i_0}}$$

Ou bien, si $m(\psi) = m_k$ et t_k est un paramètre uniformisant, on peut écrire

$$\begin{cases} x_\psi = t_k^{m_k} \\ y_\psi = a_{n_{i_0}} t_k^{m_k} + \cdots + a_{sn_{i_0}} t_k^{sm_k} + a_{\beta_1^{i_0}} t_k^{m_k \beta_1^{i_0}/n_{i_0}} + \cdots + a_{\beta_{q-1}^{i_0}} t_k^{m_k \beta_{q-1}^{i_0}/n_{i_0}} \\ \quad + \displaystyle\sum_{j=1}^{h_{q-1}} a_{\beta_{q-1}^{i_0} + j l_{q-1}^{i_0}} t_k^{\frac{m_k(\beta_{q-1}^{i_0} + j l_{q-1}^{i_0})}{n_{i_0}}} + \sum_{j \geq \beta_q^{i_0}} b_j^k(\tau) t_k^{j m_k/n_{i_0}} \end{cases}$$

Ainsi si nous notons $\tilde{\beta}_i^{i_0} := \dfrac{\beta_i^{i_0} m_k}{n_{i_0}}$ et $\tilde{l}_i^{i_0} := \dfrac{m_k l_i^{i_0}}{n_{i_0}}$, alors

$$\frac{m_k(\beta_i^{i_0} + j l_i^{i_0})}{n_{i_0}} = \tilde{\beta}_i^{i_0} + j \tilde{l}_i^{i_0}$$

et le développement de Puiseux de ψ sera :

$$\begin{cases} x_\psi = t_k^{m_k} \\ y_\psi = a_{n_{i_0}} t_k^{m_k} + \cdots + a_{sn_{i_0}} t_k^{sm_k} + a_{\beta_1^{i_0}} t_k^{\tilde{\beta}_1^{i_0}} + \cdots + a_{\beta_{q-1}^{i_0}} t_k^{\tilde{\beta}_{q-1}^{i_0}} \\ \quad + \displaystyle\sum_{j=1}^{h_{q-1}} a_{\beta_{q-1}^{i_0} + j l_{q-1}^{i_0}} t_k^{\tilde{\beta}_{q-1}^{i_0} + j \tilde{l}_{q-1}^{i_0}} + \sum_{j \geq \beta_q^{i_0}} b_j^k(\tau) t_k^{j m_k/n_{i_0}} \end{cases}$$

De plus le nombre de classes d'équivalence qui vérifient les conditions ci-dessus est exactement la cardinalité de l'ensemble $\bigcup S_i^1$ où $i \in I$. Donc chaque paquet $\Gamma^{(i)}$ de l'énoncé où $i \in \{1, \ldots, s_1\}$ correspond avec la réunion des éléments d'une de ces classes et sa multiplicité est une conséquence immédiate de la proposition (2.3.3).

Dans le deuxième cas la classe d'équivalence A est égale à A_Q où $v(Q) \neq \dfrac{\beta_l^i}{n_i}$ pour tout $l \in \{1, \ldots, g_i\}$ et $i \in I$. De plus il existe une branche C_{i_0} de C telle que $Q \in K_{i_0}$. Alors tout élément ψ de A vérifie

$$\mathrm{cont}(C_{i_0}, \psi) = n_{i_0} v(Q).$$

De plus

$$\beta_q^{i_0} < n_{i_0} v(Q) < \beta_{q+1}^{i_0}$$

où $q := k(Q)$. Donc si C_{i_0} a un développement de Puiseux de la forme

$$y_{i_0} = a_{n_{i_0}}x+\cdots+a_{sn_{i_0}}x^s+a_{\beta_1^{i_0}}x^{\beta_1^{i_0}/n_{i_0}}+\sum_{j=1}^{h_1} a_{\beta_1^{i_0}+jl_1^{i_0}}x^{\frac{\beta_1^{i_0}+jl_1^{i_0}}{n_{i_0}}}+\cdots+a_{\beta_{g_{i_0}}^{i_0}}\,x^{\beta_{g_{i_0}}^{i_0}/n_{i_0}}+\ldots$$

le développement de Puiseux de ψ coïncide avec le développement de C_{i_0} jusqu'au terme $n_{i_0}v(Q)-1$, c'est-à-dire

$$y_\psi = a_{n_{i_0}}x+\cdots+a_{sn_{i_0}}x^s+a_{\beta_1^{i_0}}x^{\beta_1^{i_0}/n_{i_0}}+\cdots+a_{\beta_q^{i_0}}x^{\beta_q^{i_0}/n_{i_0}}+\cdots$$

$$+a_{n_{i_0}v(Q)-1}x^{\frac{n_{i_0}v(Q)-1}{n_{i_0}}}+\sum_{j\geq n_{i_0}v(Q)} b_j^k(\tau)x^{j/n_{i_0}}$$

Ou bien, si $m(\psi)=m_k$ et t_k est un paramètre uniformisant, on peut écrire

$$\begin{cases} x_\psi = t_k^{m_k} \\ y_\psi = a_{n_{i_0}}t_k^{m_k}+\cdots+a_{sn_{i_0}}t_k^{sm_k}+a_{\beta_1^{i_0}}t_k^{m_k\beta_1^{i_0}/n_{i_0}}+\cdots+a_{\beta_q^{i_0}}t_k^{m_k\beta_q^{i_0}/n_{i_0}}+\cdots \\ \quad +a_{n_{i_0}v(Q)-1}t_k^{\frac{m_k(n_{i_0}v(Q)-1)}{n_{i_0}}}+\sum_{j\geq n_{i_0}v(Q)} b_j^k(\tau)t_k^{m_kj/n_{i_0}} \end{cases}$$

Si nous notons $\tilde{\beta}_i^{i_0} := \dfrac{\beta_i^{i_0}m_k}{n_{i_0}}$ et $\tilde{l}_i^{i_0} := \dfrac{m_kl_i^{i_0}}{n_{i_0}}$, le développement de Puiseux de ψ sera :

$$\begin{cases} x_\psi = t_k^{m_k} \\ y_\psi = a_{n_{i_0}}t_k^{m_k}+\cdots+a_{sn_{i_0}}t_k^{sm_k}+a_{\beta_1^{i_0}}t_k^{\tilde{\beta}_1^{i_0}}+\cdots+a_{\beta_q^{i_0}}t_k^{\tilde{\beta}_q^{i_0}}+\cdots \\ \quad +a_{n_{i_0}v(Q)-1}t_k^{\frac{m_k(n_{i_0}v(Q)-1)}{n_{i_0}}}+\sum_{j\geq n_{i_0}v(Q)} b_j^k(\tau)t_k^{jm_k/n_{i_0}} \end{cases}$$

De plus le nombre de classes d'équivalence qui vérifient les conditions ci-dessus est exactement la cardinalité de l'ensemble $\bigcup(S_i^1-S_i^2)$ où $i\in I$. Donc chaque paquet $\Gamma^{(i)}$ de l'énoncé où $i\in\{s_1+1,\ldots,s_1+s_2\}$ on correspond avec la réunion des éléments d'une de ces classes et sa multiplicité est une conséquence inmédiate de la proposition (2.3.3).

∎

Remarque 2.4.1 *Le résultat de ce théorème est optimal comme le montre l'exemple (2.5.5).*

Remarque 2.4.2 *Pour montrer le théorème ci-dessus nous avons utilisé que l'information contenue dans l'arbre d'Eggers de C, le résultat obtenu ne dépend que cet arbre, qui lui même ne dépend que de la classe d'équisingularité de la courbe C.*

Remarque 2.4.3 *D'après Merle ([Me]) nous savons que si on connaît les quotients*

$$\left\{\frac{(\Gamma_q, C)}{m(\Gamma_q)}\right\}$$

où C est une courbe irréductible et $\{\Gamma_q\}_q$ sont les composantes irréductibles d'une courbe polaire générique de C, on peut obtenir les exposants caractéristiques de la courbe C et inversement, si on a les exposants caractéristiques de la courbe C on peut en déduire les quotients précédents.

Cependant quand C est une courbe plane réduite mais pas irréductible on peut obtenir les quotients

$$\left\{\frac{(\Gamma_q, C)}{m(\Gamma_q)}\right\}$$

à partir des exposants caractéristiques des différentes branches de C mais il n'est pas possible en général d'obtenir les exposants caractéristiques des branches de C à partir des quotients précédents.

Lemme 2.4.1 *Soit Q un sommet simple de $T(C)$. Alors dans le développement de y sur la branche $\Gamma \in A_Q$ le terme $t^{\tilde{\beta}^i_{k+1}}$ n'apparaît pas, où $k := k(Q)$ et $i \in I_Q$.*

Démonstration

Comme $d_1(Q) + d_2(Q) = 1$ alors $d_1(Q) = 0$ et $d_2(Q) = 1$.

Soit $i \in I_Q$ donc

$$v(Q) = \frac{\beta^i_{k+1}}{n_i}$$

où $k := k(Q)$.

Supposons que le terme $t^{\tilde{\beta}^i_{k+1}}$ apparaît dans le développement, alors

$$\tilde{\beta}^i_{k+1} = \frac{\beta^i_{k+1} m(\Gamma)}{n_i}$$

est un nombre entier et on peut écrire

$$n_i \tilde{\beta}^i_{k+1} = \beta^i_{k+1} m(\Gamma). \tag{2.9}$$

Mais

$$\frac{\tilde{\beta}^i_k}{m(\Gamma)} = \frac{\beta^i_k}{n_i} = \frac{m^i_k}{n^i_1 \cdots n^i_k}$$

donc $m(\Gamma) = n^i_1 \cdots n^i_k \tilde{l}^i_k$ où $\tilde{l}^i_k = \dfrac{l^i_k m(\Gamma)}{n_i}$ et d'après (2.9) on a :

$$\frac{\beta^i_{k+1}}{n_i} = \frac{\tilde{\beta}^i_{k+1}}{n^i_1 \cdots n^i_k \tilde{l}^i_k}$$

c'est-à-dire $m^i_{k+1} \tilde{l}^i_k = n^i_{k+1} \tilde{\beta}^i_{k+1}$ et puisque p.g.c.d.$(m^i_{k+1}, n^i_{k+1}) = 1$, n^i_{k+1} divise $\tilde{l}^i_k$ mais cela est impossible parce que $\Gamma \in A_Q$ donc

$$m(\Gamma) \leq \sum m(\Gamma_l) = n^i_1 \cdots n^i_k (n^i_{k+1} - 1)$$

où $\Gamma_l \in A_Q$, c'est-à-dire

$$\tilde{l}^i_k \leq n^i_{k+1} - 1 < n^i_{k+1}$$

où $\tilde{l}^i_k$ et n^i_{k+1} sont des nombres positifs.

■

Remarque 2.4.4 *Un cas particulier du lemme ci-dessus est quand la courbe C est irréductible (voir [Te5]).*

Lemme 2.4.2 *Soit Q un sommet noir de $T(C)$ tel que $d_1(Q)+d_2(Q) = 2$ et $d_2(Q) \neq 0$. Soit aussi C_i une branche de C telle que $Q \in K_i$ et en plus Q est relié au sommet de K_i de valuation plus grande le plus proche (ou au sommet blanc) par une arête pleine. Soit $k := k(Q)$. Alors si dans le développement de y sur la branche $\Gamma \in A_Q$ le terme $t^{\tilde{\beta}^i_{k+1}}$ apparaît, le paquet de la polaire $\Gamma_Q = \bigcup_{\Gamma_l \in A_Q} \Gamma_l$ est irréductible.*

Démonstration

Comme le terme $t^{\tilde{\beta}^i_{k+1}}$ apparaît dans le développement de y sur la branche Γ alors

$$\tilde{\beta}^i_{k+1} = \frac{\beta^i_{k+1} m(\Gamma)}{n_i}$$

est un nombre entier et on peut écrire

$$n_i \tilde{\beta}^i_{k+1} = \beta^i_{k+1} m(\Gamma) \tag{2.10}$$

Mais

$$\frac{\tilde{\beta}^i_k}{m(\Gamma)} = \frac{\beta^i_k}{n_i} = \frac{m^i_k}{n^i_1 \cdots n^i_k}$$

donc $m(\Gamma) = n^i_1 \cdots n^i_k \tilde{l}^i_k$ où $\tilde{l}^i_k = \dfrac{l^i_k m(\Gamma)}{n_i}$ et d'après (2.10) on a :

$$\frac{\beta^i_{k+1}}{n_i} = \frac{\tilde{\beta}^i_{k+1}}{n^i_1 \cdots n^i_k \tilde{l}^i_k}$$

c'est-à-dire $m^i_{k+1} \tilde{l}^i_k = n^i_{k+1} \tilde{\beta}^i_{k+1}$ et puisque p.g.c.d.$(m^i_{k+1}, n^i_{k+1}) = 1$, n^i_{k+1} divise $\tilde{l}^i_k$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $\tilde{l}^i_k = \lambda n^i_{k+1}$.

De plus $\Gamma \in A_Q$ donc

$$m(\Gamma) \leq \sum_l m(\Gamma_l)$$

où $\Gamma_l \in A_Q$. Mais $d_1(Q) + d_2(Q) = 2$ et $d_2(Q) \neq 0$ donc les deux possibilités sont :

1. $d_1(Q) = d_2(Q) = 1$.

   Dans ce cas-là
   $$m(\Gamma) \leq \sum_l m(\Gamma_l) = n^i_1 \cdots n^i_{k+1}$$
   où $\Gamma_l \in A_Q$, c'est-à-dire
   $$\tilde{l}^i_k = \lambda n^i_{k+1} \leq n^i_{k+1}$$
   donc $\lambda = 1$, $\tilde{l}^i_k = n^i_{k+1}$ et $m(\Gamma) = m(\Gamma_Q)$.
2. $d_2(Q) = 2$.

   Dans ce cas-là
   $$m(\Gamma) \leq \sum_l m(\Gamma_l) = n^i_1 \cdots n^i_k (2n^i_{k+1} - 1)$$

où $\Gamma_l \in A_Q$, c'est-à-dire

$$\tilde{l}_k^i = \lambda n_{k+1}^i < 2n_{k+1}^i$$

donc $\lambda = 1$, $\tilde{l}_k^i = n_{k+1}^i$ et $m(\Gamma) = m(\Gamma_Q)$.

■

2.5 Exemples.

Exemple 2.5.1 Le contact entre les deux branches de C est un exposant caractéristique.

Soit $C \equiv f = f_1.f_2 = [(y^2 - x^3)^2 - 4yx^6 - x^9][(y^2 - x^3)^2 - 4yx^5 - x^7] = 0.$

Les développements de Puiseux de $f_1(x, y) = (y^2 - x^3)^2 - 4yx^6 - x^9 = 0$ *sont*

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^{9/4} \\ y_2 = -x^{3/2} + ix^{9/4} \\ y_3 = x^{3/2} - x^{9/4} \\ y_4 = -x^{3/2} - ix^{9/4} \end{cases}$$

donc

$$\{\beta_0^1, \beta_1^1, \beta_2^1\} = \{4, 6, 9\}$$

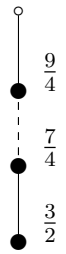
$$l_1^1 = \text{p.g.c.d.}\{4, 6\} = 2 \quad n_1^1 = 2 \quad m_1^1 = 3$$

$$l_2^1 = \text{p.g.c.d.}\{2, 9\} = 1 \quad n_2^1 = 2 \quad m_2^1 = 9$$

et

$$S_1^1 \cup S_1^2 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right\} \bigcup \left\{\frac{7}{4}\right\}.$$

Sa chaîne élémentaire est



Les développements de Puiseux de $f_2(x,y) = (y^2 - x^3)^2 - 4yx^5 - x^7 = 0$ *sont*

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^{7/4} \\ y_2 = -x^{3/2} + ix^{7/4} \\ y_3 = x^{3/2} - x^{7/4} \\ y_4 = -x^{3/2} - ix^{7/4} \end{cases}$$

donc

$$\{\beta_0^2, \beta_1^2, \beta_2^2\} = \{4, 6, 7\}$$

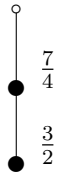
$$l_1^2 = \text{p.g.c.d.}\{4,6\} = 2 \quad n_1^2 = 2 \quad m_1^2 = 3$$

$$l_2^2 = \text{p.g.c.d.}\{2,7\} = 1 \quad n_2^2 = 2 \quad m_2^2 = 7$$

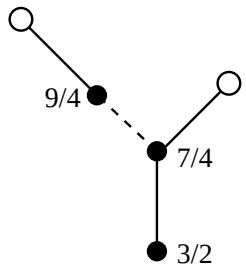
et

$$S_2^1 \cup S_2^2 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\} \bigcup \left\{\frac{7}{4}\right\}.$$

Sa chaîne élémentaire est



L'arbre d'Eggers C *est*



T(C)

donc d'après le théorème (2.4.1) on sait que :

1. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{3}{2}$ *on a* $k := k(Q) = 0$ *et il existe une composante* γ_1 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie*

$$m(\gamma_1) = n_1^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\text{cont}(C_1, \gamma_1^r) = m(C_1).v(Q) = 4.\tfrac{3}{2} = 6$$

$$\text{cont}(C_2, \gamma_1^r) = m(C_2).v(Q) = 4.\tfrac{3}{2} = 6$$

pour chaque composante irréductible γ_1^r *de* γ_1.

2. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{7}{4}$ *on a* $k := k(Q) = 1$ *et il existe une composante* γ_2 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_2) = n_1^2(1 + 1.n_2^2 - 1) = n_1^2.n_2^2 = 4$$

$$\text{cont}(C_1, \gamma_2^r) = m(C_1).v(Q) = 4.\tfrac{7}{4} = 7$$

$$\text{cont}(C_2, \gamma_2^r) = m(C_2).v(Q) = 4.\tfrac{7}{4} = 7$$

pour chaque composante irréductible γ_2^r *de* γ_2.

3. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{9}{4}$ *on a* $k := k(Q) = 1$ *et il existe une composante* γ_3 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_3) = n_1^1(0 + n_2^1 - 1) = n_1^1(n_2^1 - 1) = 2.1 = 2$$

$$\text{cont}(C_1, \gamma_3^r) = m(C_1).v(Q) = 4.\tfrac{9}{4} = 9$$

$$\text{cont}(C_2, \gamma_3^r) = \text{cont}(C_2, C_1) = 7$$

pour chaque composante irréductible γ_3^r *de* γ_3.

Mais si on calcule les différentes branches de $P_\tau(C)$ *on a*

$$P_0(C) := \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0\right) = \Gamma^{(1)} \bigcup \Gamma^{(2)} \bigcup \Gamma^{(3)}$$

où

$$\Gamma^{(1)} = \{ y = -\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{37}{64}x^3 + \tfrac{13}{1024}x^4 + ...$$

$$\Gamma^{(2)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} + \frac{1}{2}x^{7/4} + \frac{1}{16}x^2 + \frac{17}{256}x^{9/4}... \\ y_2 = -x^{3/2} - \frac{i}{2}x^{7/4} + \frac{1}{16}x^2 + \frac{17i}{256}x^{9/4}... \\ y_3 = x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{7/4} + \frac{1}{16}x^2 - \frac{17}{256}x^{9/4}... \\ y_4 = -x^{3/2} + \frac{i}{2}x^{7/4} + \frac{1}{16}x^2 - \frac{17i}{256}x^{9/4}... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(3)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^3 - \frac{1}{4}x^{7/2} - \frac{15}{8}x^4 + ... \\ y_2 = -x^{3/2} + x^3 + \frac{1}{4}x^{7/2} - \frac{15}{8}x^4 + ... \end{cases}$$

et

$$P_\tau(C) := \left(\tau\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0\right) = \Gamma^{(1)} \bigcup \Gamma^{(2)} \bigcup \Gamma^{(3)}$$

où

$$\Gamma^{(1)} = \begin{cases} y = (-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\tau)x^2 + (-\frac{37}{64} - \frac{3}{4}\tau - \frac{39}{16}\tau^2)x^3 \\ \quad +(\frac{13}{1024} + \frac{923}{256}\tau - \frac{663}{128}\tau^2 + \frac{33}{64}\tau^3 - \frac{351}{64}\tau^4)x^4 + ... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(2)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} + \frac{1}{2}x^{7/4} + \frac{1}{16}x^2 + \frac{17}{256}x^{9/4} + (-\frac{11}{256} + \frac{13}{32}\tau)x^{5/2} + ... \\ y_2 = -x^{3/2} - \frac{i}{2}x^{7/4} + \frac{1}{16}x^2 + \frac{17i}{256}x^{9/4} - (-\frac{11}{256} + \frac{13}{32}\tau)x^{5/2} + ... \\ y_3 = x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{7/4} + \frac{1}{16}x^2 - \frac{17}{256}x^{9/4} + (-\frac{11}{256} + \frac{13}{32}\tau)x^{5/2} + ... \\ y_4 = -x^{3/2} + \frac{i}{2}x^{7/4} + \frac{1}{16}x^2 - \frac{17i}{256}x^{9/4} - (-\frac{11}{256} + \frac{13}{32}\tau)x^{5/2} + ... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(3)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^3 + (-\frac{1}{4} + 7\tau)x^{7/2} + (-\frac{15}{8} + \frac{1}{8}\tau + \frac{21}{2}\tau^2)x^4 \\ \quad +(\frac{252\tau^3+3\tau^2-225\tau-7}{16})x^{9/2}... \\ y_2 = -x^{3/2} + x^3 - (-\frac{1}{4} + 7\tau)x^{7/2} + (-\frac{15}{8} + \frac{1}{8}\tau + \frac{21}{2}\tau^2)x^4 \\ \quad -(\frac{252\tau^3+3\tau^2-225\tau-7}{16})x^{9/2}... \end{cases}$$

donc $\gamma_i = \Gamma^{(i)}$ *pour tout* $i \in \{1,2,3\}$.

Exemple 2.5.2 Le contact entre les deux branches de C n'est pas un exposant caractéristique.

Soit $C \equiv f(x,y) = f_1(x,y).f_2(x,y) = 0$ *où*

$$f_1(x,y) = y^4 - 4y^3x^2 + (6x^2 - 2x^3)y^2 + (4x^5 - 8x^6)y - x^9 + x^6 + 5x^8 - 2x^7$$

et

$$f_2(x,y) = y^4+4y^3x^2+(6x^4-2x^3)y^2+(-4x^5+4x^6-4x^7)y-4x^9+x^6+x^8-2x^7-x^{11}.$$

Les développements de Puiseux de $f_1(x,y) = 0$ *sont*

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^2 + x^{9/4} \\ y_2 = -x^{3/2} + x^2 + ix^{9/4} \\ y_3 = x^{3/2} + x^2 - x^{9/4} \\ y_2 = -x^{3/2} + x^2 - ix^{9/4} \end{cases}$$

donc

$$\{\beta_0^1, \beta_1^1, \beta_2^1\} = \{4, 6, 9\}$$

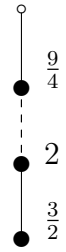
$$l_1^1 = \text{p.g.c.d.}\{4,6\} = 2 \quad n_1^1 = 2 \quad m_1^1 = 3$$

$$l_2^1 = \text{p.g.c.d.}\{2,9\} = 1 \quad n_2^1 = 2 \quad m_2^1 = 9$$

et

$$S_1^1 \cup S_1^2 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right\} \bigcup \{2\}.$$

Sa chaîne élémentaire est



Les développements de Puiseux de $f_2(x,y)=0$ *sont*

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} - x^2 + x^{11/4} \\ y_2 = -x^{3/2} - x^2 + ix^{11/4} \\ y_3 = x^{3/2} - x^2 - x^{11/4} \\ y_4 = -x^{3/2} - x^2 - ix^{11/4} \end{cases}$$

donc

$$\{\beta_0^2, \beta_1^2, \beta_2^2\} = \{4, 6, 11\}$$

$$l_1^2 = \text{p.g.c.d.}\{4,6\} = 2 \quad n_1^2 = 2 \quad m_1^2 = 3$$

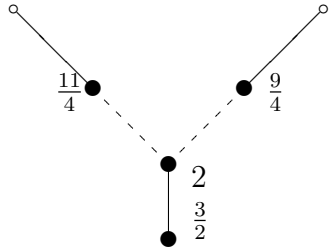
$$l_2^2 = \text{p.g.c.d.}\{2,7\} = 1 \quad n_2^2 = 2 \quad m_2^2 = 11$$

et

$$S_2^1 \cup S_2^2 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right\} \bigcup \{2\}.$$

Sa chaîne élémentaire est

L'arbre de C *est*



donc d'après le théorème (2.4.1)on sait que :

1. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{3}{2}$ *on a* $k := k(Q) = 0$ *et il existe une composante* γ_1 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_1) = n_1^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\text{cont}(C_1, \gamma_1^r) = m(C_1).v(Q) = 4.\frac{3}{2} = 6$$

$$\text{cont}(C_2, \gamma_1^r) = m(C_2).v(Q) = 4.\frac{3}{2} = 6$$

pour chaque composante irréductible γ_1^r *de* γ_1.

2. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{9}{4}$ *on a* $k := k(Q) = 1$ *et il existe une composante* γ_2 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_2) = n_1^1(0 + n_2^1 - 1) = n_1^1(n_2^1 - 1) = 2.1 = 2$$

$$\text{cont}(C_1, \gamma_2^r) = m(C_1).v(Q) = 4.\frac{9}{4} = 9$$

$$\text{cont}(C_2, \gamma_2^r) = \text{cont}(C_2, C_1) = 8$$

pour chaque composante irréductible γ_2^r *de* γ_2.

3. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{11}{4}$ *on a* $k := k(Q) = 1$ *et il existe une composante* γ_3 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_3) = n_1^2(0 + n_2^2 - 1) = n_1^1(n_2^1 - 1) = 2.1 = 2$$

$$\text{cont}(C_1, \gamma_3^r) = \text{cont}(C_1, C_2) = 8$$

$$\text{cont}(C_2, \gamma_3^r) = m(C_2).v(Q) = 4.\frac{11}{4} = 11$$

pour chaque composante irréductible γ_3^r *de* γ_3.

4. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = 2$ *on a* $k := k(Q) = 1$ *et il existe une composante* γ_4 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_4) = (2 - 1)n_1^1 = (2 - 1)n_1^2 = 2$$

$$\text{cont}(C_1, \gamma_4^r) = m(C_1).v(Q) = 4.2 = 8$$

$$\text{cont}(C_2, \gamma_4^r) = m(C_2).v(Q) = 4.2 = 8$$

pour chaque composante irréductible γ_4^r *de* γ_4.

Mais si on calcule les différentes branches de $P_\tau(C)$ *on a*

$$P_0(C) := \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0\right) = \Gamma^{(1)} \bigcup \Gamma^{(2)} \bigcup \Gamma^{(3)} \bigcup \Gamma^{(4)}$$

où

$$\Gamma^{(1)} = \left\{ y = -\tfrac{1}{2}x^3 - 2x^4 - \tfrac{5}{2}x^5 + ... \right.$$

$$\Gamma^{(2)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^2 + \frac{1}{2}x^{5/2} + \frac{3}{4}x^3 + ... \\ y_2 = -x^{3/2} + x^2 - \frac{1}{2}x^{5/2} + \frac{3}{4}x^3 + ... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(3)} = \begin{cases} y_1 = -x^{3/2} - x^2 + \frac{1}{2}x^{7/2} + \frac{7}{8}x^4 - \frac{15}{32}x^{9/2} + ... \\ y_2 = x^{3/2} - x^2 - \frac{1}{2}x^{7/2} + \frac{7}{8}x^4 + \frac{15}{32}x^{9/2} + ... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(4)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{8}x^{7/2} - \frac{1}{2}x^4 + ... \\ y_2 = -x^{3/2} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{8}x^{7/2} - \frac{1}{2}x^4 + ... \end{cases}$$

et

$$P_\tau(C) := \left(\tau\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0\right) = \Gamma^{(1)} \bigcup \Gamma^{(2)} \bigcup \Gamma^{(3)} \bigcup \Gamma^{(4)}$$

où

$$\Gamma^{(1)} = \begin{cases} y = \frac{3}{2}\tau x^2 + (-5\tau - \frac{1}{2})x^3 + (-\frac{63}{4}\tau^3 - \frac{45}{8}\tau^2 + 17\tau - 2)x^4 + \\ \quad +(-\frac{567}{16}\tau^5 - \frac{405}{32}\tau^4 + \frac{417}{2}\tau^3 - \frac{261}{8}\tau^2 - \frac{239}{8}\tau - \frac{5}{2})x^5 + ... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(2)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^2 + \frac{1}{2}x^{5/2} + \frac{3}{4}x^3 + (\frac{29}{4}\tau - \frac{5}{4})x^{7/2} + ... \\ y_2 = -x^{3/2} + x^2 - \frac{1}{2}x^{5/2} + \frac{3}{4}x^3 - (\frac{29}{4}\tau - \frac{5}{4})x^{7/2} + ... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(3)} = \begin{cases} y_1 = -x^{3/2} - x^2 + \frac{1}{2}x^{7/2} + \frac{7}{8}x^4 - (\frac{31}{4}\tau + \frac{15}{32})x^{9/2} + ... \\ y_2 = x^{3/2} - x^2 - \frac{1}{2}x^{7/2} + \frac{7}{8}x^4 + (\frac{31}{4}\tau + \frac{15}{32})x^{9/2} + ... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(4)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} + (\frac{7}{2}\tau - \frac{1}{2})x^3 + (\frac{21}{4}\tau^2 - \frac{43}{8}\tau + \frac{7}{8})x^{7/2} \\ \quad +(\frac{63}{8}\tau^3 - \frac{129}{16}\tau^2 - \frac{29}{16}\tau - \frac{1}{2})x^4 + ... \\ y_2 = -x^{3/2} + (\frac{7}{2}\tau - \frac{1}{2})x^3 - (\frac{21}{4}\tau^2 - \frac{43}{8}\tau + \frac{7}{8})x^{7/2} \\ \quad +(\frac{63}{8}\tau^3 - \frac{129}{16}\tau^2 - \frac{29}{16}\tau - \frac{1}{2})x^4 + ... \end{cases}$$

donc $\gamma_i = \Gamma^{(i)}$ *pour tout* $i \in \{1,2,3,4\}$.

Exemple 2.5.3 Le contact entre les trois branches de C n'est pas un exposant caractéristique.

Soit $C \equiv f = f_1.f_2.f_3 = 0$ *où*

$$f_1(x,y) = y^4 - 4y^3x^2 + (6x^2 - 2x^3)y^2 + (4x^5 - 8x^6)y - x^9 + x^6 + 5x^8 - 2x^7$$

$$f_2(x,y) = y^4 + 4y^3x^2 + (6x^4 - 2x^3)y^2 + (-4x^5 + 4x^6 - 4x^7)y - 4x^9 + x^6 + x^8 - 2x^7 - x^{11}$$

et

$$f_3(x,y) = (y^2 - x^3)^2 - 4yx^6 - x^9.$$

Les développements de Puiseux de $f_1(x,y) = 0$ *sont*

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^2 + x^{9/4} \\ y_2 = -x^{3/2} + x^2 + ix^{9/4} \\ y_3 = x^{3/2} + x^2 - x^{9/4} \\ y_2 = -x^{3/2} + x^2 - ix^{9/4} \end{cases}$$

donc

$$\{\beta_0^1, \beta_1^1, \beta_2^1\} = \{4, 6, 9\}$$

$$l_1^1 = \text{p.g.c.d.}\{4,6\} = 2 \quad n_1^1 = 2 \quad m_1^1 = 3$$

$$l_2^1 = \text{p.g.c.d.}\{2,9\} = 1 \quad n_2^1 = 2 \quad m_2^1 = 9$$

et

$$S_1^1 \cup S_1^2 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right\} \bigcup \{2\}.$$

Les développements de Puiseux de $f_2(x,y) = 0$ *sont*

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} - x^2 + x^{11/4} \\ y_2 = -x^{3/2} - x^2 + ix^{11/4} \\ y_3 = x^{3/2} - x^2 - x^{11/4} \\ y_4 = -x^{3/2} - x^2 - ix^{11/4} \end{cases}$$

donc

$$\{\beta_0^2, \beta_1^2, \beta_2^2\} = \{4, 6, 11\}$$

$$l_1^2 = \text{p.g.c.d.}\{4,6\} = 2 \quad n_1^2 = 2 \quad m_1^2 = 3$$

$$l_2^2 = \text{p.g.c.d.}\{2,7\} = 1 \quad n_2^2 = 2 \quad m_2^2 = 11$$

et

$$S_2^1 \cup S_2^2 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right\} \bigcup \{2\}.$$

Les développements de Puiseux de $f_3(x,y) = 0$ *sont*

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^{9/4} \\ y_2 = -x^{3/2} + ix^{9/4} \\ y_3 = x^{3/2} - x^{9/4} \\ y_4 = -x^{3/2} - ix^{9/4} \end{cases}$$

donc

$$(\beta_0^3, \beta_1^3, \beta_2^3) = (4,6,9)$$

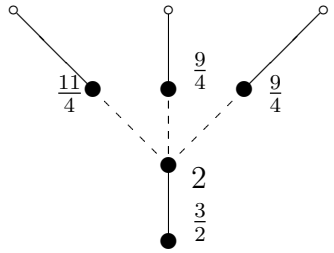
$$l_1^3 = \text{p.g.c.d.}\{4,6\} = 2 \quad n_1^3 = 2 \quad m_1^3 = 3$$

$$l_2^3 = \text{p.g.c.d.}\{2,9\} = 1 \quad n_2^3 = 2 \quad m_2^3 = 9$$

et

$$S_3^1 \cup S_3^2 = \{\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\} \bigcup \{2\}.$$

L'arbre de C *est*



donc d'après le théorème (2.4.1)on sait que :

1. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{3}{2}$ *on a* $k := k(Q) = 0$ *et il existe une composante* γ_1 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_1) = n_1^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\text{cont}(C_i, \gamma_1^r) = m(C_i).v(Q) = 4.\frac{3}{2} = 6 \quad \text{pour tout } i \in \{1, 2, 3\}$$

pour chaque composante irréductible γ_1^r *de* γ_1.

2. *Pour* $Q \in K_1$ *tel que* $v(Q) = \frac{9}{4}$ *on a* $k := k(Q) = 1$ *et il existe une composante* γ_2 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_2) = n_1^1(n_2^1 - 1) = 2(2 - 1) = 2$$

$$\text{cont}(C_1, \gamma_2^r) = m(C_1).v(Q) = 9$$

$$\text{cont}(C_i, \gamma_2^r) = \text{cont}(C_1, C_i) = 8 \quad \text{pour tout } i \in \{2, 3\}$$

pour chaque composante irréductible γ_2^r *de* γ_2.

3. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{11}{4}$ *on a* $k := k(Q) = 1$ *et il existe une composante* γ_3 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_3) = n_1^2(n_2^2 - 1) = 2(2 - 1) = 2$$

$$\text{cont}(C_i, \gamma_3^r) = \text{cont}(C_2, C_i) = 8 \quad \text{pour tout } i \in \{1, 3\}$$

$$\text{cont}(C_2, \gamma_3^r) = m(C_2).v(Q) = 11$$

pour chaque composante irréductible γ_3^r *de* γ_3.

4. *Pour* $Q \in K_3$ *tel que* $v(Q) = \frac{9}{4}$ *on a* $k := k(Q) = 1$ *et il existe une composante* γ_4 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_4) = n_1^3(n_2^3 - 1) = 2(2 - 1) = 2$$

$$\text{cont}(C_3, \gamma_4^r) = m(C_3).v(Q) = 9$$

$$\text{cont}(C_i, \gamma_4^r) = \text{cont}(C_3, C_i) = 8 \quad \text{pour tout } i \in \{1, 2\}$$

pour chaque composante irréductible γ_4^r *de* γ_4.

5. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = 2$ *on a* $k := k(Q) = 1$ *et il existe une composante* γ_5 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_5) = (3 - 1)n_1^1 = 2.2 = 4$$

$$\text{cont}(C_i, \gamma_5^r) = 8 \quad \text{pour tout } i \in \{1, 2, 3\}$$

pour chaque composante irréductible γ_5^r *de* γ_5.

Mais si on calcule les différentes branches de $P_\tau(C)$ *on a*

$$P_\tau(C) := \left(\tau\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0\right) = \Gamma^{(1)}\bigcup\Gamma^{(2)}\bigcup\Gamma^{(3)}\bigcup\Gamma^{(4)}\bigcup\Gamma^{(5)}$$

où :

$$\Gamma^{(1)} = \big\{ y = \tfrac{3\tau}{2}x^2 + (-\tfrac{2}{3} - \tfrac{10\tau}{3})x^3 + (-1 + 8\tau - \tfrac{15\tau^2}{2} - \tfrac{21\tau^3}{2})x^4 + ...$$

$$\Gamma^{(2)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^2 + \frac{3}{2}x^{5/2} - \frac{11}{4}x^3 + (\frac{203}{16} + \frac{43\tau}{4})x^{7/2} \\ \quad +(-81 - \frac{1359\tau}{16} + \frac{129\tau^2}{8})x^4 + ... \\ y_2 = -x^{3/2} + x^2 - \frac{3}{2}x^{5/2} - \frac{11}{4}x^3 + (-\frac{203}{16} - \frac{43\tau}{4})x^{7/2} \\ \quad +(-81 - \frac{1359\tau}{16} + \frac{129\tau^2}{8})x^4 + ... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(3)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} - x^2 - \frac{3}{2}x^{7/2} + \frac{3}{8}x^4 + (-\frac{9}{32} + \frac{45\tau}{4})x^{9/2} \\ \quad +(\frac{623}{128} - \frac{17\tau}{16} + \frac{135\tau^2}{8})x^5 + ... \\ y_2 = -x^{3/2} - x^2 + \frac{3}{2}x^{7/2} + \frac{3}{8}x^4 + (\frac{9}{32} - \frac{45\tau}{4})x^{9/2} \\ \quad +(\frac{623}{128} - \frac{17\tau}{16} + \frac{135\tau^2}{8})x^5 + ... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(4)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} + \frac{1}{2}x^3 + (-2 + \frac{43\tau}{4})x^{7/2} + (\frac{11}{4} - \frac{87\tau}{4} + \frac{129\tau^2}{8})x^4 \\ \quad +(-\frac{15}{4} + \frac{43\tau}{4} - \frac{261\tau^2}{8} + \frac{387\tau^3}{16})x^{9/2} + ... \\ y_2 = -x^{3/2} + \frac{1}{2}x^3 + (2 - \frac{43\tau}{4})x^{7/2} + (\frac{11}{4} - \frac{87\tau}{4} + \frac{129\tau^2}{8})x^4 \\ \quad +(\frac{15}{4} - \frac{43\tau}{4} + \frac{261\tau^2}{8} - \frac{387\tau^3}{16})x^{9/2} + ... \end{cases}$$

et $\Gamma^{(5)} = \Gamma_1^{(5)}\bigcup\Gamma_2^{(5)}$ *où*

$$\Gamma_1^{(5)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} + ax^2 + (-\frac{7}{12} - \frac{a}{4})x^{5/2} + ((\frac{31}{24} + \frac{41a}{16}) + \frac{7\tau}{6})x^3 \\ \quad +((-\frac{1387}{288} - \frac{759a}{64}) + (-\frac{19}{2} - \frac{17a}{2})\tau + \frac{7\tau^2}{4})x^{7/2} + ... \\ y_2 = -x^{3/2} + ax^2 + (\frac{7}{12} + \frac{a}{4})x^{5/2} + ((\frac{31}{24} + \frac{41a}{16}) + \frac{7\tau}{6})x^3 \\ \quad +((\frac{1387}{288} + \frac{759a}{64}) + (\frac{19}{2} + \frac{17a}{2})\tau - \frac{7\tau^2}{4})x^{7/2} + ... \end{cases}$$

$$\Gamma_2^{(5)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} - ax^2 + (-\frac{7}{12} + \frac{a}{4})x^{5/2} + ((\frac{31}{24} - \frac{41a}{16}) + \frac{7\tau}{6})x^3 \\ \quad +((-\frac{1387}{288} + \frac{759a}{64}) + (-\frac{19}{2} + \frac{17a}{2})\tau + \frac{7\tau^2}{4})x^{7/2} + ... \\ y_2 = -x^{3/2} - ax^2 + (\frac{7}{12} - \frac{a}{4})x^{5/2} + ((\frac{31}{24} - \frac{41a}{16}) + \frac{7\tau}{6})x^3 \\ \quad +((\frac{1387}{288} - \frac{759a}{64}) + (\frac{19}{2} - \frac{17a}{2})\tau - \frac{7\tau^2}{4})x^{7/2} + ... \end{cases}$$

où $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *donc* $\gamma_i = \Gamma^{(i)}$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, 5\}$.

Exemple 2.5.4 *Soit* $C \equiv f = f_1.f_2.f_3 = 0$ *où*

$$f_1(x,y) = y^4 - 4y^3x^2 + (6x^2 - 2x^3)y^2 + (4x^5 - 8x^6)y - x^9 + x^6 + 5x^8 - 2x^7$$

$$f_2(x,y) = y^4 + 4y^3x^2 + (6x^4 - 2x^3)y^2 + (-4x^5 + 4x^6 - 4x^7)y - 4x^9 + x^6 + x^8 - 2x^7 - x^{11}$$

et

$$f_3(x,y) = (y^2 - x^3)^2 - 4yx^5 - x^7.$$

Les développements de Puiseux de $f_1(x,y) = 0$ *sont*

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^2 + x^{9/4} \\ y_2 = -x^{3/2} + x^2 + ix^{9/4} \\ y_3 = x^{3/2} + x^2 - x^{9/4} \\ y_2 = -x^{3/2} + x^2 - ix^{9/4} \end{cases}$$

donc

$$\{\beta_0^1, \beta_1^1, \beta_2^1\} = \{4, 6, 9\}$$
$$l_1^1 = \text{p.g.c.d.}\{4,6\} = 2 \quad n_1^1 = 2 \quad m_1^1 = 3$$
$$l_2^1 = \text{p.g.c.d.}\{2,9\} = 1 \quad n_2^1 = 2 \quad m_2^1 = 9$$

et

$$S_1^1 \cup S_1^2 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right\} \bigcup \left\{2, \frac{7}{4}\right\}.$$

Les développements de Puiseux de $f_2(x,y) = 0$ *sont*

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} - x^2 + x^{11/4} \\ y_2 = -x^{3/2} - x^2 + ix^{11/4} \\ y_3 = x^{3/2} - x^2 - x^{11/4} \\ y_4 = -x^{3/2} - x^2 - ix^{11/4} \end{cases}$$

donc

$$\{\beta_0^2, \beta_1^2, \beta_2^2\} = \{4, 6, 11\}$$
$$l_1^2 = \text{p.g.c.d.}\{4,6\} = 2 \quad n_1^2 = 2 \quad m_1^2 = 3$$
$$l_2^2 = \text{p.g.c.d.}\{2,7\} = 1 \quad n_2^2 = 2 \quad m_2^2 = 11$$

et

$$S_2^1 \cup S_2^2 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right\} \bigcup \left\{2, \frac{7}{4}\right\}.$$

Les développements de Puiseux de $f_3(x,y) = 0$ *sont*

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^{7/4} \\ y_2 = -x^{3/2} + ix^{7/4} \\ y_3 = x^{3/2} - x^{7/4} \\ y_4 = -x^{3/2} - ix^{7/4} \end{cases}$$

donc

$$\{\beta_0^3, \beta_1^3, \beta_2^3\} = \{4, 6, 7\}$$

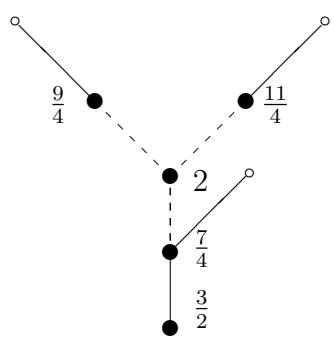
$$l_1^3 = \text{p.g.c.d.}\{4, 6\} = 2 \quad n_1^3 = 2 \quad m_1^3 = 3$$

$$l_2^3 = \text{p.g.c.d.}\{2, 7\} = 1 \quad n_2^3 = 2 \quad m_2^3 = 7$$

et

$$S_3^1 \cup S_3^2 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\}.$$

L'arbre de C *est*



donc d'après le théorème (2.4.1) on sait que :

1. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{3}{2}$ *on a* $k := k(Q) = 0$ *et il existe une composante* γ_1 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_1) = n_1^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\text{cont}(C_i, \gamma_1^r) = m(C_i).v(Q) = 4.\frac{3}{2} = 6 \quad \text{pour tout } i \in \{1, 2, 3\}$$

pour chaque composante irréductible γ_1^r *de* γ_1.

2. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{7}{4}$ *on a* $k := k(Q) = 1$ *et il existe une composante* γ_2 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_2) = n_1^3(1 + n_2^3 - 1) = 2(1 + 2 - 1) = 4$$

$$\mathrm{cont}(C_1, \gamma_2^r) = \mathrm{cont}(C_3, C_1) = 7$$
$$\mathrm{cont}(C_2, \gamma_2^r) = \mathrm{cont}(C_3, C_2) = 7$$
$$\mathrm{cont}(C_3, \gamma_2^r) = m(C_3).v(Q) = 7$$

pour chaque composante irréductible γ_2^r *de* γ_2.

3. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{9}{4}$ *on a* $k := k(Q) = 1$ *et il existe une composante* γ_3 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_3) = n_1^1(n_2^1 - 1) = 2(2 - 1) = 2$$

$$\mathrm{cont}(C_1, \gamma_3^r) = m(C_1).v(Q) = 9$$
$$\mathrm{cont}(C_2, \gamma_3^r) = \mathrm{cont}(C_2, C_1) = 8$$
$$\mathrm{cont}(C_3, \gamma_3^r) = \mathrm{cont}(C_3, C_1) = 7$$

pour chaque composante irréductible γ_3^r *de* γ_3.

4. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{11}{4}$ *on a* $k := k(Q) = 1$ *et il existe une composante* γ_4 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_4) = n_1^2(n_2^2 - 1) = 2(2 - 1) = 2$$

$$\mathrm{cont}(C_1, \gamma_4^r) = \mathrm{cont}(C_2, C_1) = 8$$
$$\mathrm{cont}(C_2, \gamma_4^r) = m(C_2).v(Q) = 11$$
$$\mathrm{cont}(C_3, \gamma_4^r) = \mathrm{cont}(C_2, C_3) = 7$$

pour chaque composante irréductible γ_4^r *de* γ_4.

5. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = 2$ *on a* $k := k(Q) = 1$ *et il existe une composante* γ_5 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_5) = (2 - 1)n_1^1 = 2$$

$$\mathrm{cont}(C_i, \gamma_5^r) = 8 \quad \textit{pour} \quad i \in \{1, 2\}$$
$$\mathrm{cont}(C_3, \gamma_5^r) = 7$$

pour chaque composante irréductible γ_5^r *de* γ_5.

Mais si on calcule les différentes branches de $P_\tau(C)$ *on a*

$$P_\tau(C) := \left(\tau\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0\right) = \Gamma^{(1)}\bigcup\Gamma^{(2)}\bigcup\Gamma^{(3)}\bigcup\Gamma^{(4)}\bigcup\Gamma^{(5)}$$

où

$$\Gamma^{(1)} = \begin{cases} y = (-\frac{1}{3} + \frac{3\tau}{2})x^2 + (\frac{10}{27} - \frac{157\tau}{36} - \frac{13\tau^2}{4})x^3 \\ \quad +(-\frac{854}{243} + \frac{3413\tau}{324} + \frac{1633\tau^2}{54} - \frac{811\tau^3}{48} - \frac{117\tau^4}{16})x^4 + ... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(2)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} + ax^{7/4} + \frac{1}{12}x^2 + \frac{11a}{64}x^{9/4} + (-\frac{25}{144} + \frac{13\tau}{24})x^{5/2} \\ \quad +(\frac{24959a}{73728} - \frac{29a\tau}{64})x^{11/4} + (\frac{271}{864} - \frac{41\tau}{36} + \frac{13\tau^2}{16})x^3 + ... \\ y_2 = x^{3/2} - ax^{7/4} + \frac{1}{12}x^2 - \frac{11a}{64}x^{9/4} + (-\frac{25}{144} + \frac{13\tau}{24})x^{5/2} \\ \quad +(-\frac{24959a}{73728} + \frac{29a\tau}{64})x^{11/4} + (\frac{271}{864} - \frac{41\tau}{36} + \frac{13\tau^2}{16})x^3 + ... \\ y_3 = x^{3/2} + aix^{7/4} + \frac{1}{12}x^2 + \frac{11ai}{64}x^{9/4} + (-\frac{25}{144} + \frac{13\tau}{24})x^{5/2} \\ \quad +(\frac{24959ai}{73728} - \frac{29ai\tau}{64})x^{11/4} + (\frac{271}{864} - \frac{41\tau}{36} + \frac{13\tau^2}{16})x^3 + ... \\ y_4 = x^{3/2} - aix^{7/4} + \frac{1}{12}x^2 - \frac{11ai}{64}x^{9/4} + (-\frac{25}{144} + \frac{13\tau}{24})x^{5/2} \\ \quad +(-\frac{24959ai}{73728} + \frac{29ai\tau}{64})x^{11/4} + (\frac{271}{864} - \frac{41\tau}{36} + \frac{13\tau^2}{16})x^3 + ... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(3)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^2 + \frac{1}{2}x^{5/2} + \frac{1}{4}x^3 + (-\frac{21}{8} + \frac{21\tau}{2})x^{7/2} \\ \quad +(\frac{5}{16} - \frac{79\tau}{8} + \frac{63\tau^2}{4}))x^4 + ... \\ y_2 = -x^{3/2} + x^2 - \frac{1}{2}x^{5/2} + \frac{1}{4}x^3 + (\frac{21}{8} - \frac{21\tau}{2})x^{7/2} \\ \quad +(\frac{5}{16} - \frac{79\tau}{8} + \frac{63\tau^2}{4}))x^4 + ... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(4)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} - x^2 - \frac{1}{2}x^{7/2} + \frac{19}{8}x^4 + (\frac{51}{32} + 11\tau)x^{9/2} \\ \quad +(\frac{219}{128} - \tau + \frac{33\tau^2}{2})x^5 + ... \\ y_2 = -x^{3/2} - x^2 + \frac{1}{2}x^{7/2} + \frac{19}{8}x^4 + (-\frac{51}{32} - 11\tau)x^{9/2} \\ \quad +(\frac{219}{128} - \tau + \frac{33\tau^2}{2})x^5 + ... \end{cases}$$

$$\Gamma^{(5)} = \begin{cases} y_1 = x^{3/2} + \frac{1}{4}x^{5/2} + (-\frac{17}{16} + \frac{41\tau}{8})x^3 + (\frac{43}{32} - \frac{331\tau}{32} + \frac{123\tau^2}{16})x^{7/2} + ... \\ y_2 = -x^{3/2} - \frac{1}{4}x^{5/2} + (-\frac{17}{16} + \frac{41\tau}{8})x^3 + (-\frac{43}{32} + \frac{331\tau}{32} - \frac{123\tau^2}{16})x^{7/2} + ... \end{cases}$$

où $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$, *donc* $\gamma_i = \Gamma^{(i)}$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, 5\}$.

Exemple 2.5.5 *Soit la courbe* $C \equiv f = f_1.f_2 = 0$ *telle que*

$$f_1(x,y) = y^3 - x^{11}$$

et

$$f_2(x,y) = y^4 - 2y^2x^5 - 4yx^8 + x^{10} - x^{11}.$$

Les développements de Puiseux de $f_1(x,y)=0$ *sont*

$$y=\rho x^{11/3}$$

où $\rho^3=1$ *donc*

$$\{\beta_0^1,\beta_1^1\}=\{3,11\}$$

$$l_1^1=\text{p.g.c.d.}\{3,11\}=1 \quad n_1^1=3 \quad m_1^1=11$$

et

$$S_1^1\cup S_1^2=\left\{\frac{11}{3}\right\}\bigcup\left\{\frac{5}{2}\right\}.$$

Les développements de Puiseux de $f_2(x,y)=0$ *sont*

$$\begin{cases} y_1=x^{5/2}+x^{11/4}\\ y_2=x^{5/2}-x^{11/4}\\ y_3=-x^{5/2}+ix^{11/4}\\ y_4=-x^{5/2}-ix^{11/4}\end{cases}$$

donc

$$\{\beta_0^2,\beta_1^2,\beta_2^2\}=\{4,10,11\}$$

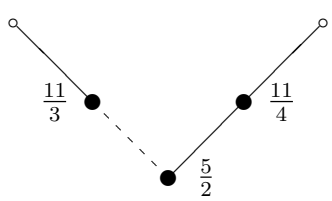
$$l_1^2=\text{p.g.c.d.}\{4,10\}=2 \quad n_1^2=2 \quad m_1^2=5$$

$$l_2^2=\text{p.g.c.d.}\{2,11\}=1 \quad n_2^2=2 \quad m_2^2=11$$

et

$$S_2^1\cup S_2^2=\left\{\frac{5}{2},\frac{11}{4}\right\}\bigcup\left\{\frac{5}{2}\right\}.$$

L'arbre d'Eggers de C *est*



donc d'après le théorème (2.4.1) on sait que :

1. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{5}{2}$ *on a* $k = 0$ *et il existe une composante* γ_1 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_1) = 1 + n_1^2 - 1 = n_1^2 = 2$$

$$\mathrm{cont}(C_1, \gamma_1^r) = m(C_1)v(Q) = 3\frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\mathrm{cont}(C_2, \gamma_1^r) = m(C_2)v(Q) = 4\frac{5}{2} = 10$$

pour chaque composante irréductible γ_1^r *de* γ_1.

2. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{11}{3}$ *on a* $k = 0$ *et il existe une composante* γ_2 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_2) = 0 + n_1^1 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\mathrm{cont}(C_1, \gamma_2^r) = m(C_1)v(Q) = 3\frac{11}{3} = 11$$

$$\mathrm{cont}(C_2, \gamma_2^r) = \mathrm{cont}(C_2, C_1) = 4\frac{5}{2} = 10$$

pour chaque composante irréductible γ_2^r *de* γ_2.

3. *Pour* $Q \in T(C)$ *tel que* $v(Q) = \frac{11}{4}$ *on a* $k = 1$ *et il existe une composante* γ_3 *de* $P_\tau(C)$ *qui vérifie :*

$$m(\gamma_3) = n_1^2(0 + 1n_2^2 - 1) = 2(0 + 2 - 1) = 2$$

$$\mathrm{cont}(C_1, \gamma_3^r) = \mathrm{cont}(C_1, C_2) = 3\frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\mathrm{cont}(C_2, \gamma_3^r) = m(C_2)v(Q) = 4\frac{11}{4} = 11$$

pour chaque composante irréductible γ_3^r *de* γ_3.

Mais si on calcule les différentes branches de $P_\tau(C)$ *on a*

$$P_\tau(C) = \Gamma^{(1)} \bigcup \Gamma^{(2)} \bigcup \Gamma^{(3)}$$

où

$$\Gamma^{(1)} = \begin{cases} y_1 = ax^{5/2} - 2x^3 + \frac{427}{24}ax^{7/2} + (-\frac{539}{4} + \frac{5}{7}\tau)x^4 + \dots \\ y_2 = -ax^{5/2} - 2x^3 - \frac{427}{24}ax^{7/2} + (-\frac{539}{4} + \frac{5}{7}\tau)x^4 + \dots \end{cases}$$

où $a = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

$$\Gamma^{(2)} = \begin{cases} y_1 = bx^{9/2} + (\frac{1}{2}a - \frac{21}{8}a\tau)x^{11/2} + \cdots \\ y_2 = -bx^{9/2} - (\frac{1}{2}a - \frac{21}{8}a\tau)x^{11/2} + \cdots \end{cases}$$

où $b = \frac{2i}{\sqrt{3}}$.

$$\Gamma^{(3)} = \begin{cases} y_1 = x^{5/2} + 2x^3 - \frac{93}{8}x^{7/2} + \frac{539}{4}x^4 + (-\frac{31245}{16} + 9\tau)x^{9/2} + \cdots \\ y_2 = -x^{5/2} + 2x^3 + \frac{93}{8}x^{7/2} + \frac{539}{4}x^4 - (-\frac{31245}{16} + 9\tau)x^{9/2} + \cdots \end{cases}$$

donc $\gamma_i = \Gamma^{(i)}$ *pour tout* $i \in \{1, 2, 3\}$.

On doit remarquer que dans le paquet $\Gamma^{(2)}$, *d'après le théorème (2.4.1) et le lemme (2.4.1), le premier terme qui peut apparaître après le contact dépend de* τ. *Ceci montre que le résultat du théorème (2.4.1) est optimal.*

Chapitre 3

Zones de concentration de courbure.

3.1 Introduction.

Étant donnée une courbe analytique complexe réduite plane C, on va étudier ce qui se passe au voisinage d'une singularité isolée.

On peut se placer dans des coordonnées affines (x, y) dans lesquelles la singularité est $(x = 0, y = 0)$ et considérer le germe de la courbe en ce point. Ce germe est représenté par une série $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, convergente au voisinage de l'origine.

D'après Milnor (voir [Mi]), on peut choisir des nombres réels positifs ϵ_0 et η tels que

1. Pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$, la sphère $\mathbb{S}_\epsilon$ de centre 0 et de rayon ϵ est transverse à la courbe C.
2. Pour $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| < \eta$, la fibre de Milnor $C_\epsilon(\lambda) = f^{-1}(\lambda) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ est une courbe non singulière, où $\mathbb{B}_\epsilon$ est la boule complexe de centre l'origine et de rayon ϵ.

Pour étudier la singularité en 0 nous allons fixer ϵ, $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et étudier comment "évolue la forme" des fibres de Milnor (courbes de niveau) $C_\epsilon(\lambda) \equiv f(x, y) = \lambda$ lorsque λ tend vers 0. Pour avoir une image on peut supposer ϵ très petit, et laisser λ tendre vers 0, mais le résultat est en realité asymptotique pour $\epsilon, \lambda \to 0$ au sens suivant : Il existe un ouvert semianalytique $A \subset \mathbb{R}^2_+$ (le germe de $\bar{A}$ en 0 ne depend que du germe de f en 0) contenant un intervalle $[0, \epsilon_0]$ de l'axe des ϵ dans

son adhérence, et tel que lorsque (ϵ, λ) tend vers 0 en restant dans A , le comportement de $C_\epsilon(\lambda) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ soit descriptible comme nous le faisons ici. La notation $\lim\limits_{\epsilon,\lambda\to 0, |\lambda|<<\epsilon}$ signifiera toujours que $(\epsilon, \lambda) \to (0, 0)$ en restant dans A.On écrira $C(\lambda) = C_\epsilon(\lambda)$ (voir remarque 2.3.3 pag. 81 de [L-T]).

Pour étudier la courbure on utilisera l'application de Gauss complexe, qui à tout point de $C(\lambda)$ associe la direction de sa tangente complexe, vue comme un élément de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Les courbes polaires de C que nous avons étudiées dans le chapitre deux seront l'outil essentiel de cette étude.

Nous allons montrer dans ce chapitre que beaucoup de courbure des fibres $C(\lambda)$ se concentre autour des points d'intersection entre ces fibres et les courbes polaires de la courbe C.

Pour relier les courbes polaires à la courbure des courbes de niveau on utilisera l'intuition géométrique selon laquelle là où il y a *"beaucoup de courbure"* la direction de la tangente *"change très vite"*, et le fait que la plupart des composantes de la courbe polaire bougent "assez lentement" en fonction de la direction de projection.

3.2 L'application de Gauss.

Définition 3.2.1 *Soit V une hypersurface complexe lisse de $\mathbb{C}^{n+1}$. L'application $\gamma : V \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ qui à chaque point P de V fait correspondre la direction de l'espace tangent à V , vue comme un élément de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, est appelée application de Gauss complexe.*

On doit remarquer que couramment, l'application de Gauss est définie sur la sphère unité $\mathbb{S}^{2n+1}$, mais ici nous prenons seulement la direction.

Définition 3.2.2 *Si V est une hypersurface complexe lisse de $\mathbb{C}^{n+1}$ on appelle courbure gaussienne complexe de V le jacobien de l'application de Gauss associée à cette hypersurface.*

Maintenant considérons une sous-varieté différentielle V de dimension n de $\mathbb{R}^{n+p}$ et un point P de V.

Soit $T_P(V)$ l'espace tangent à P en V et $N_P(V)$ l'espace vectoriel des vecteurs normaux à V en P.

Si $\omega \in N_P(V)$ on considére $T_P(V) \oplus < \omega > \sim \mathbb{R}^{n+1}$, alors la projection orthogonale $\overline{V_\omega}$ de V sur $T_P(V) \oplus < \omega >$ est une hypersurface non singulière en P de $T_P(V) \oplus < \omega >$, dont on peut calculer la courbure de Gauss réelle $k(P, \omega)$ en P.

Par définition, la courbure de Lipschitz-Killing de V en P est

$$K(P) = c(n,p) \int_{N_P(V)} k(P, \omega)$$

où $c(n,p) = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+p}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}$ est une constante qui dépend seulement des dimensiones.

Lorsque V est une hypersurface réelle de $\mathbb{R}^{n+p}$, la courbure de Lipschitz-Killing est la courbure de Gauss.

Maintenant si V est une hypersurface complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$, c'est aussi une sous-varieté de codimension 2 de $\mathbb{R}^{2n+2}$ et on peut calculer la courbure de Lipschitz-Killing de V.

La proposition suivante relie la courbure gaussienne complexe et la courbure de Lipschitz-Killing de V .

Proposition 3.2.1 (Langevin [La2]) *Si V est une hypersurface complexe plongée dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et P est un point de V, on a l'égalité :*

$$K(P) = (-1)^n \, c(n,p)\pi \, |jacobien\gamma(P)|^2$$

où γ est l'application de Gauss complexe de V.

Ainsi on peut définir simultanément l'application de Gauss de toutes les fibres $C(\lambda)$ de la façon suivante :
Considérons l'application

$$\begin{aligned} \gamma : B_\epsilon - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (a,b) &\longrightarrow \left(\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} : \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

et $\gamma_{C(\lambda)} = \gamma|_{C(\lambda)}$.
Le graphe de γ est l'ensemble

$$\left\{\left(a, b, \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} : \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\right)\right\} \subseteq (B_\epsilon - \{0\}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Si Z est l'adhérence dans $B_\epsilon \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ du graphe de γ, alors Z a pour équation $v\dfrac{\partial f}{\partial y} - u\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ et on a les deux projections

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ \Pi\downarrow & & \\ B_\epsilon & & \end{array}$$

Ainsi si $(1 : -\tau) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ on a :

$$\begin{aligned} \Pi(G^{-1}(1 : -\tau)) &= \left\{(a,b) \in B_\epsilon \ / \ \left(\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} : \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\right) = (1 : -\tau)\right\} \\ &= \left\{(a,b) \in B_\epsilon \ / \ \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} + \tau\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 0\right\}. \end{aligned}$$

La courbe d'équation $\dfrac{\partial f}{\partial y} + \tau\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ est, par définition la courbe polaire de l'application $f : \mathbb{B}_\epsilon \longrightarrow \mathbb{C}$ correspondant à la direction $(1 : -\tau) \in \mathbb{P}^1$, nous dirons pour abréger "correspondant à la direction τ".

Nous voulons montrer que la quantité globale de courbure des courbes de niveau de C est concentrée au voisinage des points d'intersection de ces fibres et de la courbe polaire de C, c'est-à-dire dans $\gamma_{C(\lambda)}^{-1}((1 : -\tau)) = P_\tau(C) \cap C(\lambda)$.

Pour ce faire, on doit pouvoir relier la courbure mesurée sur $C(\lambda)$ et le nombre de points où la tangente a une direction donnée mesuré sur l'espace de ces tangentes, c'est-à-dire $\mathbb{P}^1$.

Langevin donne des résultats dans ce sens dans [La1].

Soit V un ouvert d'une courbe holomorphe lisse de $\mathbb{C}^2$, $\gamma : V \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'application de Gauss complexe et K la courbure de Lipschitz-Killing de C. Alors on vérifie :

Proposition 3.2.2 (Langevin [La1])

$$\int_V |K| dv = 2\pi \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \sharp\gamma^{-1}(\tau) dp$$

■

Remarque 3.2.1 *D'après le lemme (**), pag. 42 de l'appendice de [Tr] il existe une constante* c *ne dépendant que de* V, *tel que* $\sharp\gamma^{-1}(\tau) \leq c$ *pour tout* $(1 : -\tau)$ *tel que* $\gamma^{-1}(\tau)$ *soit fini.*

Rappelons que en général, si $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ est un germe d'hypersurface à singularité isolée et d'équation $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$, le nombre de Milnor du germe est :

$$\mu^{(n+1)}(X_0, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x_0, \ldots, x_n\} / \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Ensuite, pour tout $i \leq n$ on définit $\mu^{(i)}(X_0, 0)$ comme étant le nombre de Milnor de l'intersection de $(X_0, 0)$ avec un i-plan général de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$.

Alors on vérifie :

Théorème 3.2.1 (Teissier) *Posons* $M(C) = \sup_L (C, L)_0$ *lorsque* L *parcourt les droites de* $\mathbb{C}^2$ *passant par* 0.

1. $\mu^{(2)} + \mu^{(1)} \leq (P_\tau(C), C) \leq \mu^{(2)} + M(C) - 1$.
2. *Si la droite* D_τ *n'est pas dans le cône tangent à* C *en* 0 *et en particulier si* $P_\tau(C)$ *est une polaire générique, alors* $(P_\tau(C), C) = \mu^{(2)} + \mu^{(1)}$ *où* $\mu^{(1)} = m_0(C) - 1$ *et le membre de droite on dépend que de la topologie de* C.

Remarque 3.2.2 *Si* C *contient des facteurs linéaires,* $M(C) = \infty$, *mais il est toujours possible par un changement analytique de coordonnées, de se ramener au cas où* $m(C) < \infty$. *De plus, si toutes les branches sont singulières on a l'égalité* $M(C) = \sum_{i=1}^{r} \beta_1^i$.

Démonstration

Soit $P_\tau(C) = \bigcup_q \Gamma_q$ la décomposition de la polaire en composantes irréductibles et pour chaque q, $(x(t_q), y(t_q))$ une paramétrisation de Γ_q .

Alors

$$
\begin{aligned}
(P_\tau(C), C) &= \sum_q (\Gamma_q, C) \\
&= \sum_q \mathrm{ord}_{t_q}(f(x(t_q), y(t_q)) \\
&= \sum_q \left[\mathrm{ord}_{t_q}\left(\frac{\partial f(x(t_q), y(t_q))}{\partial t_q}\right) + 1\right] \\
&= \sum_q \left[\mathrm{ord}_{t_q}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_q}\left(\frac{\partial x}{\partial t_q}\right)_{\Gamma_q} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma_q}\left(\frac{\partial y}{\partial t_q}\right)_{\Gamma_q}\right) + 1\right] \\
&= \sum_q \left[\mathrm{ord}_{t_q}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_q}\left(\frac{\partial x}{\partial t_q}\right)_{\Gamma_q} - \tau\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_q}\left(\frac{\partial y}{\partial t_q}\right)_{\Gamma_q}\right) + 1\right] \\
&= \sum_q \left[\mathrm{ord}_{t_q}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_q}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t_q}\right)_{\Gamma_q} - \tau\left(\frac{\partial y}{\partial t_q}\right)_{\Gamma_q}\right)\right) + 1\right] \\
&= \sum_q \left[\mathrm{ord}_{t_q}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_q}\right) + \mathrm{ord}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t_q}\right)_{\Gamma_q} - \tau\left(\frac{\partial y}{\partial t_q}\right)_{\Gamma_q}\right) + 1\right] \\
&= \sum_q \left[\mathrm{ord}_{t_q}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_q}\right) + \mathrm{ord}\left(\left(\frac{\partial (x-\tau y)}{\partial t_q}\right)_{\Gamma_q}\right) + 1\right] \\
&= \sum_q \left[\mathrm{ord}_{t_q}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_q}\right) + \mathrm{ord}\left((x-\tau y)_{\Gamma_q}\right)\right] \\
&= \sum_q \left(\Gamma_q, \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \sum_q (\Gamma_q, x - \tau y)
\end{aligned}
$$

donc

$$(P_\tau(C), C) = \left(P_\tau(C), \frac{\partial f}{\partial x}\right) + (P_\tau(C), D_\tau)$$

où $D_\tau \equiv x - \tau y = 0$.

Mais

$$\left(P_\tau(C), \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

puisque si $\frac{\partial f}{\partial x} = \cup \Phi_j$ est sa décomposition en composantes irréductibles on

peut écrire :

$$\begin{aligned}\left(P_\tau(C), \frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \sum_j (P_\tau(C), \Phi_j) \\ &= \sum_j \operatorname{ord}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \tau\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Phi_j}\right) \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial y}, \Phi_j\right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

de plus

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\{x,y\}/\left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mu^{(2)}$$

donc $(P_\tau(C), C)_0 = \mu^{(2)} + (P_\tau(C), D_\tau)_0$.

Maintenant on va voir que $\mu^{(1)} \leq (P_\tau(C), D_\tau)_0 \leq M(C) - 1$.

On sait que

$$(P_\tau(C), D_\tau) \geq m(P_\tau(C))m(D_\tau) = m(P_\tau(C)) = m(C) - 1$$

mais

$$\begin{aligned}\mu^{(1)} &= \text{nombre de Milnor de } (f(x,y) = 0 \cap (x = 0)) \\ &= \text{nombre de Milnor de } (y^n = 0) \\ &= \dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\{x,y\}/(ny^{n-1}) \\ &= m(C) - 1\end{aligned}$$

donc $\mu^{(1)} \leq (P_\tau(C), D_\tau)$.

Maintenant faisant le changement de variable affine

$$\begin{cases} x = \tau y_1 + x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

on a $D_\tau \equiv x_1 = 0$ et $P_\tau(C) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y_1} = 0$ donc $(P_\tau(C), D_\tau) = (x_1, \frac{\partial f}{\partial y_1})$, et on peut supposer que la droite $x = 0$ est "générique".

Mais, à l'aide du théorème de préparation de Weierstrass on peut écrire $f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$ et on a $\mathrm{ord}(a_i(x)) \geq i$ pour tout i si et seulement si $x = 0$ est transverse en 0 à la courbe $f(x,y) = 0$. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = ny_1^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)$$

et

$$\begin{aligned}\left(x_1, \frac{\partial f}{\partial y_1}\right) &= \mathrm{ord}_t(nt^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(0)) \\ &= n-1 \\ &= (x_1, f) - 1 \\ &\leq M(C) - 1\end{aligned}$$

donc on a aussi que $(P_\tau(C), D_\tau) \leq M(C)$.

Il est très facile de voir qu'un changement de coordonnés

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x \\ y &\longrightarrow y + ax^2 \quad , \end{aligned}$$

où a est générique transforme f en une équation sans facteurs linéaires. De plus après un changement de coordonnées le type topologique de la polaire est conservé (voir [Te4]).

Maintenant on va à démontrer la deuxième partie du théorème.

On sait que

$$(P_\tau(C), D_\tau)_0 \geq m_0(P_\tau(C))m_0(D_\tau)_0$$

et on a l'égalité si D_τ est transverse à $P_\tau(C)$.

Mais si $\tilde{\tau}$ est la direction de D_τ alors

$$P_{\tilde{\tau}}(C) = \frac{\partial f}{\partial y} = (n-1)y^{n-1} + a_1(x)y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(x).$$

Puisque la droite $x = 0$ est "générique", elle est transverse à C en 0. On a donc $\mathrm{ord}(a_i(x)) \geq i$ pour tout i, ce qui implique que $x = 0$ est aussi transverse à la courbe polaire $P_0(C)$, d'où le résultat.

■

Ainsi Langevin ([La1]) a démontré en utilisant le Théorème (3.2.1)

Théorème 3.2.2 (Langevin) *On a l'égalité :*

$$\lim_{\epsilon,\lambda\to 0,|\lambda|<<\epsilon} \int_{C_\lambda \cap B_\epsilon} |K| dv = 2\pi(\mu^{(2)} + \mu^{(1)}) \tag{3.1}$$

■

Ces résultats sont la clé pour l'étude de la courbure que on va développer ci-dessous.

3.3 Calculs préliminaires.

D'après la définition de la relation d'équivalence (2.3) et le remarque (2.3.4), pour chaque paquet de branches de la polaire, il existe un unique sommet noir de l'arbre d'Eggers de C qui détermine le contact de ces branches avec C. Cette correspondance est bijective.

Le théorème (2.4.1) exprime non seulement les développements de Puiseux des composantes irréductibles de $P_\tau(C)$ en fonction des développements de Puiseux des branches de C mais aussi leur variation avec la direction $(1:\tau)$ qui définit la courbe polaire.

Ainsi les premiers coefficients des développements des branches de la polaire sont indépendants de la direction $(1:\tau)$.

En substituant ces développements dans l'équation de C, on va calculer la multiplicité d'intersection de la courbe originale C avec chaque branche de la courbe polaire et obtenir des paramétrisations dans $\mathbb{C}\{\tau,\lambda\}$ des points d'intersection des courbes de niveau $C(\lambda)$ de C avec les branches de la polaire.

Pour chaque branche $\Gamma_k^{(i)}$ du paquet $\Gamma^{(i)}$ de la courbe polaire nous noterons par :

1. $Q^{(i)}$ le sommet de $T(C)$ associé au paquet $\Gamma^{(i)}$.
2. $\gamma_k^{(i)}$ le plus petit exposant plus grand ou égal à $v(Q^{(i)})m(\Gamma_k^{(i)})$ apparaissant dans le développement de Puiseux de $y_{\Gamma_k^{(i)}}$ en puissances de t_k.

Donc les coefficients des puissances dans t_k plus petites que $\gamma_k^{(i)}$ de la branche $\Gamma_k^{(i)}$ de $P_\tau(C)$ sont *indépendants de* τ puisque ils coïncident avec les coefficients des branches C_j de C telles que $j \in I_{Q^{(i)}}$, c'est-à-dire les branches de C telles que $Q^{(i)}$ est un sommet de la chaîne élémentaire correspondante.

D'après le théorème (2.4.1) on sait qu'au voisinage de chaque point de $\{0\} \times U$ on a une paramétrisation de $\Gamma_k^{(i)}$ dans $B_{\epsilon_0} \times U$ de la forme

$$\begin{cases} x = t_k^{m_k^{(i)}} \\ y(t_k, \tau) = a_{n_i} t_k^{m_k^{(i)}} + \cdots + a_{\gamma_k^{(i)}}(\tau) t_k^{\gamma_k^{(i)}} + \cdots \end{cases}$$

Maintenant on va calculer la multiplicité d'intersection de la courbe originale C avec chaque branche de la courbe polaire.

Soit $\Gamma_k^{(i)}$ une branche du paquet $\Gamma^{(i)}$ de la courbe polaire de C. Comme

$$(C, \Gamma_k^{(i)}) \geq m(C) m(\Gamma_k^{(i)}) \geq m(\Gamma_k^{(i)}) := m_k^{(i)},$$

on peut écrire

$$(C, \Gamma_k^{(i)}) = m_k^{(i)} + e_k^{(i)}$$

où $e_k^{(i)} \in \mathbb{N}$.

Lemme 3.3.1 *Avec les conditions précédentes on a l'inégalité :*

$$e_k^{(i)} \geq \mathrm{ord}_{t_k} \left(\frac{\partial f(t_k^{m_k^{(i)}},\ y_{\Gamma_k^{(i)}})}{\partial x} \right)$$

Pour τ générique on a égalité.

Démonstration
Puisque $(C, \Gamma_k^{(i)}) = m_k^{(i)} + e_k^{(i)}$, d'après la définition de la multiplicité d'intersection, on a :

$$m_k^{(i)} + e_k^{(i)} = \mathrm{ord}_{t_k}(f(t_k^{m_k^{(i)}}, y_{\Gamma_k^{(i)}}))$$

donc

$$m_k^{(i)} + e_k^{(i)} - 1 = \mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial f(t_k^{m_k^{(i)}},\ y_{\Gamma_k^{(i)}})}{\partial t_k}\right)$$
$$= \mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial f(t_k^{m_k^{(i)}},\ y_{\Gamma_k^{(i)}})}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} + \frac{\partial f(t_k^{m_k^{(i)}},\ y_{\Gamma_k^{(i)}})}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right).$$

Mais $\Gamma_k^{(i)}$ est une branche de $P_\tau(C)$ donc elle vérifie l'équation $\tau\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} = -\tau\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}.$$

Alors

$$m_k^{(i)} + e_k^{(i)} - 1 = \mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial f(t_k^{m_k^{(i)}},\ y_{\Gamma_k^{(i)}})}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} - \tau\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left(\frac{\partial y}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right)$$
$$= \mathrm{ord}_{t_k}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} - \tau\left(\frac{\partial y}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right]\right)$$
$$= \mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} + \mathrm{ord}_{t_k}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} - \tau\left(\frac{\partial y}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right). \quad (3.2)$$

On déduit d'après $\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} = \frac{\partial t_k^{m_k^{(i)}}}{\partial t_k} = m_k^{(i)} t_k^{m_k^{(i)}-1}$ que

$$\mathrm{ord}_{t_k}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right) = m_k^{(i)} - 1. \quad (3.3)$$

De la même façon comme $\mathrm{ord}_{t_k}(y_{\Gamma_k^{(i)}}) \geq m(\Gamma_k^{(i)}) = m_k^{(i)}$ on a

$$\mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial y_{\Gamma_k^{(i)}}}{\partial t_k}\right) \geq m_k^{(i)} - 1. \quad (3.4)$$

Alors si on remplace (3.3) et (3.4) dans (3.2) on a

$$m_k^{(i)} + e_k^{(i)} - 1 \geq \mathrm{ord}_{t_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} + m_k^{(i)} - 1$$

c'est-à-dire

$$e_k^{(i)} \geq \mathrm{ord}_{t_k} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right) = \mathrm{ord}_{t_k} \left(\frac{\partial f(t_k^{m_k^{(i)}}, y_{\Gamma_k^{(i)}})}{\partial x}\right)$$

Ainsi on a prouvé la première partie du lemme.

On va voir maintenant l'égalité.

On sait que $y_{\Gamma_k^{(i)}} = \sum_{s \geq m_k^{(i)}} \alpha_s(\tau) t_k^s$.

Si $\alpha_{m_k^{(i)}}(\tau) = 0$ alors $\mathrm{ord}_{t_k}(y_{\Gamma_k^{(i)}}) > m_k^{(i)}$ et $\mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial y_{\Gamma_k^{(i)}}}{\partial t_k}\right) > m_k^{(i)} - 1$, donc

$$\mathrm{ord}_{t_k} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} - \tau \left(\frac{\partial y}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right) = m_k^{(i)} - 1$$

et d'après (3.2) on peut écrire

$$e_k^{(i)} = \mathrm{ord} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_k^{(i)}},$$

donc on a l'égalité.

Si $\alpha_{m_k^{(i)}}(\tau) \neq 0$, c'est-à-dire si $y = 0$ n'est pas tangent à la courbe polaire, alors

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} = m_k^{(i)} \alpha_{m_k^{(i)}}(\tau) t_k^{m_k^{(i)}-1} + \text{termes de degré plus grand}$$

et

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} - \tau \left(\frac{\partial y}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} = (m_k^{(i)}(1 - \tau \alpha_{m_k^{(i)}}(\tau))) t_k^{m_k^{(i)}-1} + \text{termes de degré plus grand.}$$

Ainsi

$$\mathrm{ord}_{t_k}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} - \tau\left(\frac{\partial y}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right) = m_k^{(i)} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_k^{(i)}(1-\tau\alpha_{m_k^{(i)}}(\tau)) \neq 0$$

en particulier on a l'égalité pour $\tau = 0$, c'est-à-dire pour toute direction générique. (En fait le calcul montre que l'égalité a bien dis que D_τ est transverse à C). ∎

Ainsi $(C, \Gamma_k^{(i)}) = e_k^{(i)} + m_k^{(i)}$ et

$$\mathrm{ord}_{t_k}(f(x_{\Gamma_k^{(i)}}, y_{\Gamma_k^{(i)}})) = e_k^{(i)} + m_k^{(i)}.$$

Finalement on peut écrire

$$\boxed{\mathrm{f}(\mathrm{t}_k^{m_k^{(i)}},\ y_{\Gamma_k^{(i)}}(t_k,\tau)) = c_{m_k^{(i)}+e_k^{(i)}}(\tau) t_k^{m_k^{(i)}+e_k^{(i)}} + \cdots (3.5)}$$

où $c_{m_k^{(i)}+e_k^{(i)}}(\tau) \neq 0$.

Nous allons maintenant chercher jusqu'à quel ordre les coefficients dans (3.5) sont indépendants de τ.

Il faut calculer

$$\mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial f(t_k^{m_k^{(i)}},\ y_{\Gamma_k^{(i)}}(t_k,\tau))}{\partial \tau}\right).$$

Mais

$$\frac{\partial f(t_k^{m_k^{(i)}},\ y_{\Gamma_k^{(i)}}(t_k,\tau))}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}$$

et comme $\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} = \frac{\partial t_k^{m_k^{(i)}}}{\partial \tau} = 0$ alors

$$\frac{\partial f(t_k^{m_k^{(i)}}, y_{\Gamma_k^{(i)}}(t_k,\tau))}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}. \tag{3.6}$$

Puisque dans le développement de $y_{\Gamma_k^{(i)}}$ les puissances de t_k de degré plus petit que $\gamma_k^{(i)}$ sont indépendants de τ on a :

$$\mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}} \geq \gamma_k^{(i)} \tag{3.7}$$

Lemme 3.3.2 *Avec les conditions précédentes et si τ est générique on a l'égalité :*

$$ord_{t_k}\left(\frac{\partial f(t_k^{m_k^{(i)}},\ y_{\Gamma_k^{(i)}}(t_k,\tau))}{\partial y}\right) = e_k^{(i)}.$$

Démonstration

Comme

$$\frac{\partial f}{\partial y}_{|\Gamma_k^{(i)}} + \tau\frac{\partial f}{\partial x}_{|\Gamma_k^{(i)}} = 0$$

alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}_{|\Gamma_k^{(i)}} = -\tau\frac{\partial f}{\partial x}_{|\Gamma_k^{(i)}}$$

donc

$$\mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial f}{\partial y}_{|\Gamma_k^{(i)}}\right) = \mathrm{ord}_{t_k}\left(\tau\frac{\partial f}{\partial x}_{|\Gamma_k^{(i)}}\right)$$

et d'après le lemme (3.3.1) on a l'égalité

$$\mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial f}{\partial y}_{|\Gamma_k^{(i)}}\right) = e_k^{(i)}$$

pour tout τ générique. ∎

Ainsi d'après (3.6) et le lemme (3.3.2) on a trouvé

$$\mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial f(t_k^{m_k^{(i)}}, y_{\Gamma_k^{(i)}}(t_k,\tau))}{\partial \tau}\right) \geq e_k^{(i)} + \gamma_k^{(i)}$$

c'est-à-dire que les termes de $f(t_k^{m_k^{(i)}}, y_{\Gamma_k^{(i)}}(t_k,\tau))$ de exposants plus petites que $e_k^{(i)} + \gamma_k^{(i)}$ sont indépendants de τ et on peut écrire

$$f(t_k^{m_k^{(i)}}, y_{\Gamma_k^{(i)}}(t_k,\tau)) = \sum_{\alpha=e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}^{e_k^{(i)}+\gamma_k^{(i)}-1} c_\alpha t_k^\alpha + \sum_{\alpha\geq e_k^{(i)}+\gamma_k^{(i)}} c_\alpha(\tau) t_k^\alpha \tag{3.8}$$

Maintenant on va en déduire des paramétrisations dans $\mathbb{C}\{\tau,\lambda\}$ des points d'intersection de $C(\lambda)$ avec $\Gamma_k^{(i)}$.

D'après (3.8) les points de $C(\lambda)\cap\Gamma_k^{(i)}$ vérifient

$$\sum_{\alpha=e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}^{e_k^{(i)}+\gamma_k^{(i)}-1} c_\alpha t_k^\alpha + \sum_{\alpha\geq e_k^{(i)}+\gamma_k^{(i)}} c_\alpha(\tau) t_k^\alpha = \lambda$$

où $c_{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}} \neq 0$. Donc on peut écrire

$$t_k^{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}} V(t_k,\tau) = \lambda$$

où

$$V(t_k,\tau) = \sum_{\alpha=0}^{\gamma_k^{(i)}-m_k^{(i)}-1} c_{\alpha+e_k^{(i)}+m_k^{(i)}} t_k^\alpha + \sum_{\alpha\geq\gamma_k^{(i)}-m_k^{(i)}} c_{\alpha+e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}(\tau) t_k^\alpha$$

est une unité de $\mathbb{C}\{t_k,\tau\}$.

Soit maintenant $g(\lambda,t_k,\tau) = t_k^{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}} V(t_k,\tau)-\lambda$. Nous allons calculer le t_k-discriminant de $g(\lambda,t_k,\tau)$. On peut voir le t_k-discriminant comme l'image dans le plan des (λ,τ) du lieu critique de la projection dans ce plan de la surface $g(\lambda,t_k,\tau)=0$, (on rappelle qu'un lieu est un <u>ensemble</u> algébrique).

Ce lieu est défini par les équations :

$$\begin{cases} g(\lambda,t_k,\tau) = t_k^{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}} V(t_k,\tau) - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial g(\lambda,t_k,\tau)}{\partial t_k} = 0 \end{cases}$$

Mais

$$\frac{\partial g(\lambda, t_k, \tau)}{\partial t_k} = t_k^{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}-1} \underbrace{\left[(e_k^{(i)} + m_k^{(i)})V(t_k, \tau) + t_k \frac{\partial V(t_k, \tau}{\partial t_k}\right]}_{U(t_k,\tau)}$$

où $U(t_k, \tau)$ est une unité de $\mathbb{C}\{t_k, \tau\}$.

Donc $\dfrac{\partial g(\lambda, t_k, \tau)}{\partial t_k} = 0$ si et seulement si $t_k^{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}-1} = 0$, c'est-à-dire $t_k = 0$. Le discriminant de la projection dans le plan des (λ, τ) de $g(\lambda, t_k, \tau) = 0$ est définie par $\lambda = 0$.

Ainsi il existe une unité $\eta(\lambda, \tau) \in \mathbb{C}\{\lambda, \tau\}$ et un nombre M tels que

$$\Delta_{t_k}(g(\lambda, t_k, \tau)) = \lambda^M \eta(\lambda, \tau)$$

et, d'après le théorème de Zariski (1.3.1), on peut écrire

$$t_k = \sum_{\alpha=1}^{\infty} d_\alpha(\tau) \lambda^{\frac{\alpha}{m_k^{(i)}+e_k^{(i)}}} \tag{3.9}$$

où $d_\alpha(\tau) \in \mathbb{C}\{\tau\}$, c'est-à-dire que les $d_\alpha(\tau)$ sont des fonctions holomorphes de τ.

Mais on peut dire un peu plus si on regarde combien des coefficients dans (3.9) sont indépendants de τ.

Pour ce faire nous allons calculer la dérivée de la série (3.9) par rapport à τ, pour λ fixé. L'ordre par rapport à λ de cette dérivée nous donnera bien la dépendence par rapport à τ de la série. En fait, si nous fixons λ assez petit pour que, posant $p = \lambda^{\frac{1}{m_k^{(i)}+e_k^{(i)}}}$, on ait

$$t_k = \sum_{\alpha=1}^{\infty} p^\alpha d_\alpha(\tau) \in \mathbb{C}\{\tau\}$$

alors

$$\frac{\partial t_k}{\partial \tau} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} p^\alpha \frac{\partial d_\alpha(\tau)}{\partial \tau}. \tag{3.10}$$

Puisque $f(t_k^{m_k^{(i)}},\ y_{\Gamma_k^{(i)}}(t_k,\tau)) = \lambda$ on a :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left(\frac{\partial t_k}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left(\frac{\partial t_k}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}+\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right]=\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}=0$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial t_k}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left(\frac{\partial y}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right]+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}=0$$

donc

$$\left(\frac{\partial t_k}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}=\frac{\overbrace{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}}^{(C)}}{\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left(\frac{\partial y}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}}_{(D)}} \tag{3.11}$$

Mais d'après le lemme (3.3.2), pour τ générique on a :

$$\mathrm{ord}_{t_k}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right)=e_k^{(i)} \tag{3.12}$$

et par définition du nombre $\gamma_k^{(i)}$, on peut écrire

$$\mathrm{ord}_{t_k}\left(\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right)\geq \gamma_k^{(i)}. \tag{3.13}$$

De plus comme $\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}=m_k^{(i)}t_k^{m_k^{(i)}-1}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{t_k}(D) &= \mathrm{ord}_{t_k}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\left[-\frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}+\left(\frac{\partial y}{\partial t_k}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right]\right)\\ &=^{(*)} e_k^{(i)}+m_k^{(i)}-1\end{aligned} \tag{3.14}$$

pour τ générique et où on a (*) d'après les lemmes (3.3.1) et (3.3.2) et le développement de Puiseux de $\Gamma_k^{(i)}$.

Ainsi d'après (3.11) on trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{t_k}\left(\left(\frac{\partial t_k}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_k^{(i)}}\right) &= \mathrm{ord}((C)) - \mathrm{ord}((D)) \\ &\geq e_k^{(i)} + \gamma_k^{(i)} - (e_k^{(i)} + m_k^{(i)} - 1) \\ &= \gamma_k^{(i)} - m_k^{(i)} + 1\end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ assez petit.

Mais

$$\frac{\partial t_k}{\partial \tau} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} p^\alpha \frac{\partial d_\alpha(\tau)}{\partial \tau}$$

donc

$$\mathrm{ord}_p\left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} p^\alpha \frac{\partial d_\alpha(\tau)}{\partial \tau}\right) \geq \gamma_k^{(i)} - m_k^{(i)} + 1$$

puisque s'il existe $\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}$, $\tilde{\alpha} \leq \gamma_k^{(i)} - m_k^{(i)}$ tel que $\frac{\partial d_\alpha(\tau)}{\partial \tau} \neq 0$ et en choisissant α_0 minimal pour cette proprieté on a

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{\infty} p^\alpha \frac{\partial d_\alpha(\tau)}{\partial \tau} &= p^{\alpha_0} \frac{\partial d_{\alpha_0}(\tau)}{\partial \tau} + \sum_{\alpha>\alpha_0} p^\alpha \frac{\partial d_\alpha(\tau)}{\partial \tau} \\ &= \lambda^{\frac{\alpha_0}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \frac{\partial d_{\alpha_0}(\tau)}{\partial \tau} + \sum_{\alpha>\alpha_0} \lambda^{\frac{\alpha}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \frac{\partial d_\alpha(\tau)}{\partial \tau} \\ &= \underbrace{t_k^{\alpha_0} V(t_k,\tau)^{\frac{\alpha_0}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \frac{\partial d_{\alpha_0}(\tau)}{\partial \tau}}_{A} + \sum_{\alpha>\alpha_0} \underbrace{t_k^{\alpha} V(t_k,\tau)^{\frac{\alpha}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \frac{\partial d_\alpha(\tau)}{\partial \tau}}_{B}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{t_k}\left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} p^{\alpha}\frac{\partial d_{\alpha}(\tau)}{\partial\tau}\right) &= \mathrm{ord}_{t_k}\left(t_k^{\alpha_0}V(t_k,\tau)^{\frac{\alpha_0}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}}\frac{\partial d_{\alpha_0}(\tau)}{\partial\tau}\right)\\ &= \mathrm{ord}_{t_k}(t_k^{\alpha_0}) + \mathrm{ord}_{t_k}\left(V(t_k,\tau)^{\frac{\alpha_0}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}}\right)\\ &= \alpha_0\end{aligned}$$

Mais $\alpha_0 \leq \gamma_k^{(i)} - m_k^{(i)} < \gamma_k^{(i)} - m_k^{(i)} + 1$, ce qui est une contradiction.

Ainsi

$$\mathrm{ord}_p\left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} p^{\alpha}\frac{\partial d_{\alpha}(\tau)}{\partial\tau}\right) \geq \gamma_k^{(i)} - m_k^{(i)} + 1$$

donc

$$\frac{\partial d_{\alpha}(\tau)}{\partial\tau} = 0 \quad \text{pour tout } \ 1 \leq \alpha \leq \gamma_k^{(i)} - m_k^{(i)}$$

et $d_{\alpha}(\tau)$ est indépendant pour tout $1 \leq \alpha \leq \gamma_k^{(i)} - m_k^{(i)}$.

Ainsi les premiers $\gamma_k^{(i)} - m_k^{(i)}$ termes du développement de t_k en puissances de λ sont indépendants de τ et d'après (3.9) on peut écrire

$$\boxed{\mathrm{t}_k = \sum_{\alpha=1}^{m_k^{(i)}+\gamma_k^{(i)}} d_{\alpha}\lambda^{\frac{\alpha}{m_k^{(i)}+e_k^{(i)}}} + \sum_{\alpha\geq m_k^{(i)}+\gamma_k^{(i)}+1} d_{\alpha}(\tau)\lambda^{\frac{\alpha}{m_k^{(i)}+e_k^{(i)}}} \qquad (3.15)}$$

Si maintenant on substitue cette formule dans le développement de la branche $\Gamma_k^{(i)}$, étant donné que

1. $\mathrm{ord}_{\lambda}(x) = \mathrm{ord}_{\lambda}(t_k^{m_k^{(i)}}) = m_k^{(i)}\mathrm{ord}_{\lambda}(t_k) = \dfrac{m_k^{(i)}}{m_k^{(i)} + e_k^{(i)}}$
2. $\mathrm{ord}_{t_k}(y) \geq m_k^{(i)}$,

on a :

$$\mathrm{ord}_\lambda(y(t_k,\tau)) \geq \frac{m_k^{(i)}}{m_k^{(i)}+e_k^{(i)}}$$

donc

$$\begin{cases} x = \displaystyle\sum_{\alpha \geq m_k^{(i)}} g_\alpha(\tau)\lambda^{\frac{\alpha}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} & \text{où } \ g_{m_k^{(i)}}(\tau) \neq 0 \\ y = \displaystyle\sum_{\alpha \geq m_k^{(i)}} h_\alpha(\tau)\lambda^{\frac{\alpha}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \end{cases} \tag{3.16}$$

Maintenant on va voir combien des coefficients sont indépendants de τ dans (3.16).

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé assez petit pour que les séries x, y convergent. Alors $x, y \in \mathbb{C}\{\tau\}$ puisque, si $p = \lambda^{\frac{1}{m_k^{(i)}+e_k^{(i)}}}$ on a :

$$\begin{cases} x = \displaystyle\sum_{\alpha \geq m_k^{(i)}} p^\alpha g_\alpha(\tau) \\ y = \displaystyle\sum_{\alpha \geq m_k^{(i)}} p^\alpha h_\alpha(\tau) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \tau} = \displaystyle\sum_{\alpha \geq m_k^{(i)}} p^\alpha \frac{\partial g_\alpha(\tau)}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \tau} = \displaystyle\sum_{\alpha \geq m_k^{(i)}} p^\alpha \frac{\partial h_\alpha(\tau)}{\partial \tau} \end{cases}$$

Mais,

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial x}{\partial t_k}\left[\frac{\partial t_k}{\partial \lambda}\underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}}_{0} + \frac{\partial t_k}{\partial \tau}\right] = \frac{\partial x}{\partial t_k}\frac{\partial t_k}{\partial \tau}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right) &= \mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right) + \mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial t_k}{\partial \tau}\right)\\ &\geq m_k^{(i)} - 1 + \gamma_k^{(i)} - m_k^{(i)} + 1\\ &= \gamma_k^i\end{aligned}$$

pour tout λ assez petit et de façon similaire on a :

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial y}{\partial t_k}\left[\frac{\partial t_k}{\partial \lambda}\underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}}_{0} + \frac{\partial t_k}{\partial \tau}\right] = \frac{\partial y}{\partial t_k}\frac{\partial t_k}{\partial \tau}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right) &= \mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial y}{\partial t_k}\right) + \mathrm{ord}_{t_k}\left(\frac{\partial t_k}{\partial \tau}\right)\\ &\geq m_k^{(i)} - 1 + \gamma_k^{(i)} - m_k^{(i)} + 1\\ &= \gamma_k^i\end{aligned}$$

pour tout λ assez petit.

Ainsi on a :

1. $\mathrm{ord}_{t_k}\left(\sum_{\alpha \geq m_k^{(i)}} p^\alpha \frac{\partial g_\alpha(\tau)}{\partial \tau}\right) \geq \gamma_k^{(i)}$
2. $\mathrm{ord}_{t_k}\left(\sum_{\alpha \geq m_k^{(i)}} p^\alpha \frac{\partial h_\alpha(\tau)}{\partial \tau}\right) \geq \gamma_k^{(i)}$,

donc en raisonnant comme ci-dessus on trouve :

1. $\mathrm{ord}_{p}\left(\sum_{\alpha \geq m_k^{(i)}} p^\alpha \frac{\partial g_\alpha(\tau)}{\partial \tau}\right) \geq \gamma_k^{(i)}$
2. $\mathrm{ord}_{p}\left(\sum_{\alpha \geq m_k^{(i)}} p^\alpha \frac{\partial h_\alpha(\tau)}{\partial \tau}\right) \geq \gamma_k^{(i)}$,

alors

$$\frac{\partial g_\alpha(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial h_\alpha(\tau)}{\partial \tau} = 0$$

pour tout $1 \leq \alpha < \gamma_k^{(i)}$, donc $g_\alpha(\tau), h_\alpha(\tau)$ sont indépendants de τ pour tout $1 \leq \alpha < \gamma_k^{(i)}$.

Ainsi d'après (3.16) on a pour les points de $C(\lambda) \cap \Gamma_k^{(i)}$ des développements de Puiseux de x et y en fonction de λ et τ de la forme suivante :

$$\boxed{\begin{cases} x = \displaystyle\sum_{\alpha=m_k^{(i)}}^{\gamma_k^{(i)}-1} g_\alpha \lambda^{\frac{\alpha}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} + \sum_{\alpha \geq \gamma_k^{(i)}} g_\alpha(\tau) \lambda^{\frac{\alpha}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \qquad \text{où } g_{m_k^{(i)}} \neq 0 \\ y = \displaystyle\sum_{\alpha=m_k^{(i)}}^{\gamma_k^{(i)}-1} h_\alpha \lambda^{\frac{\alpha}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} + \sum_{\alpha \geq \gamma_k^{(i)}} h_\alpha(\tau) \lambda^{\frac{\alpha}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \end{cases}} \tag{3.17}$$

donc la plus petite puissance de λ dont le coefficient dépend de τ est $\lambda^{\frac{\gamma_k^{(i)}}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}}$.

Ainsi quand $(1 : -\tau)$ varie dans U, les coordonnées des points où la tangente à la courbe de niveau a pour direction $(1 : -\tau)$ ne dépendent effectivement de τ qu'à partir de l'exposant $\gamma_k^{(i)}$.

3.4 Concentration de courbure.

Ensuite on va voir que la courbure des courbes de niveau $C(\lambda)$ de C est concentrée autour des points d'intersection de ces fibres avec les branches des courbes polaires générales de C.

À partir de (3.17) on peut définir le point

$$\xi_{k,0}^{(i)}(\lambda) := \left(\sum_{\alpha=m_k^{(i)}}^{\gamma_k^{(i)}-1} g_\alpha \lambda^{\frac{\alpha}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}}, \sum_{\alpha=m_k^{(i)}}^{\gamma_k^{(i)}-1} h_\alpha \lambda^{\frac{\alpha}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \right)$$

dont les coordonées sont les parties indépendants de τ des développements de Puiseux (3.17).

On note $\xi_{k,l}^{(i)}(\lambda)$ le point obtenu en remplaçant λ par $\omega^l\lambda$ où ω est une racine primitive $(e_k^{(i)}+m_k^{(i)})-$ ème de l'unité et $l \in \{0,1,\ldots,(e_k^{(i)}+m_k^{(i)}-1)\}$.

On va voir maintenant qu'autour des points $\xi_{k,l}^{(i)}(\lambda)$ se concentre beaucoup de la courbure de $C(\lambda)$.

Proposition 3.4.1 *Soit $T \subset U$ un compact quelconque. Alors pour tout $\tau \in T$ et pour tout $\epsilon < \epsilon_0$ il existe $c(T) \in \mathbb{R}^+$ tel que les points d'intersection de $C(\lambda)$ et la branche $\Gamma_k^{(i)}$ du paquet $\Gamma^{(i)}$ de $P_\tau(C)$ sont dans les boules fermées de centre $\xi_{k,l}^{(i)}(\lambda)$ et de rayon $c(T)|\lambda|^{\frac{\gamma_k^{(i)}}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}}$ quand λ vers 0.*

Démonstration

Soit (x,y) un point de $C_\lambda \cap \Gamma_k^{(i)}$. Il existe $l \in \{0,\ldots,(e_k^{(i)}+m_k^{(i)}-1)\}$ tel que

$$\begin{aligned}
M &= \|(x,y)-\xi_{k,l}^{(i)}(\lambda)\| \\
&= \left\| \left(\sum_{\alpha \geq \gamma_k^{(i)}} g_\alpha(\tau)\lambda^{\frac{\alpha}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}}, \sum_{\alpha \geq \gamma_k^{(i)}} h_\alpha(\tau)\lambda^{\frac{\alpha}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \right) \right\| \\
&= \left\| \lambda^{\frac{\gamma_k^{(i)}}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \underbrace{\left(\sum_{\alpha \geq \gamma_k^{(i)}} g_\alpha(\tau)\lambda^{\frac{\alpha-\gamma_k^{(i)}}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}}, \sum_{\alpha \geq \gamma_k^{(i)}} h_\alpha(\tau)\lambda^{\frac{\alpha-\gamma_k^{(i)}}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \right)}_{\rho} \right\| \\
&= |\lambda|^{\frac{\gamma_k^{(i)}}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \|\rho\| \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Mais les $g_s(\tau), h_s(\tau)$ sont holomorphes et restent donc bornées sur le compact T. Ainsi quand λ assez petit il existe une constante $c(T) \in \mathbb{R}^+$ et il existe $\sigma(T) \in \mathbb{R}^+$ tels que pour $\tau \in T$ et λ plus petit que $\sigma(T)$ on ait $\|\rho\| \leq c(T)$ et donc

$$M \leq c(T)|\lambda|^{\frac{\gamma_k^{(i)}}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}}.$$

■

Maintenant on va affiner un peu plus. On peut regrouper les paquets $\{\Gamma^{(i)}\}$ de la décomposition de la courbe polaire $P_\tau(C)$ décrit dans le théorème (2.4.1) en deux ensembles :

$$A := \{\Gamma^{(i)} \ / \ Q^{(i)} \text{ est un sommet simple de } T(C)\}$$

$$B := \{\Gamma^{(i)} \ / \ Q^{(i)} \text{ est un sommet de bifurcation de } T(C)\}$$

Alors on distingue les cas suivants :

1. Le paquet $\Gamma^{(i)}$ est dans A.
   Dans ce cas-là $d_1(Q^{(i)}) + d_2(Q^{(i)}) = 1$ donc $v(Q^{(i)}) = \frac{\beta_q^{i_0}}{n_{i_0}}$ pour tout $i_0 \in I_{Q^{(i)}}$ où $k(Q^{(i)}) = q-1$, ainsi

   $$\gamma_k^{(i)} \geq v(Q^{(i)}) m(\Gamma_k^{(i)}) = \frac{\beta_q^{i_0}}{n_{i_0}} m_k^{(i)} = \tilde{\beta}_q^{i_0}$$

   et d'après le lemme (2.4.1) la puissance $\tilde{\beta}_q^{i_0}$ n'apparaît pas dans le développement de $y_{\Gamma_k^{(i)}}$. Alors $\gamma_k^{(i)} > \tilde{\beta}_q^{i_0}$ et en conséquence

   $$\text{Si} \quad \Gamma^{(i)} \in A \quad \text{alors} \quad \gamma_k^{(i)} > \tilde{\beta}_q^{i_0} = \frac{\beta_q^{i_0} m(\Gamma_k^{(i)})}{n_{i_0}} \tag{3.19}$$

   pour tout $i_0 \in I_{Q^{(i)}}$ et $k(Q^{(i)}) = q-1$.

2. Le paquet $\Gamma^{(i)}$ est dans B.
   On peut distinguer aussi deux cas :
   (a) On a $d_2(Q^{(i)}) = 0$.

   Dans ce cas-là $Q^{(i)}$ est un sommet de bifurcation mais tous les arêtes qui sortent de $Q^{(i)}$ sont pointillées.

   Soit $k(Q^{(i)}) = q$. On va distinguer deux cas :

   i. Si $q \geq 1$ alors $v(Q^{(i)}) \gneq \frac{\beta_q^{i_0}}{n_{i_0}}$ pour tout $i_0 \in I_{Q^{(i)}}$.
   ii. Si $q = 0$ alors $v(Q^{(i)}) \geq 1$.

Donc si $q \geq 1$ on a

$$\gamma_k^{(i)} \geq v(Q^{(i)})m(\Gamma_k^{(i)}) \gneq \frac{\beta_q^{i_0} m(\Gamma_k^{(i)})}{n_{i_0}} = \tilde{\beta}_q^{i_0} \tag{3.20}$$

pour tout $i_0 \in I_{Q^{(i)}}$ et si $q = 0$ on peut écrire

$$\gamma_k^{(i)} \geq m(\Gamma_k^{(i)}) = m_k^{(i)}.$$

(b) On a $d_2(Q^{(i)}) \neq 0$.
Dans ce cas, $Q^{(i)}$ est un sommet de bifurcation mais sa valuation est en correspondance avec un exposant caractéristique d'une branche C_{i_0} de C qui "passe" par $Q^{(i)}$, c'est-à-dire qu'il existe une branche C_{i_0} de C telle que $i_0 \in I_{Q^{(i)}}$ et $v(Q^{(i)}) = \frac{\beta_q^{i_0}}{n_{i_0}}$ où $k(Q^{(i)}) = q - 1$.

Comme dans ce cas-là le terme en $t^{\tilde{\beta}_q^{i_0}}$ apparaître dans le développement de $y_{\Gamma_k^{(i)}}$ en puissances de t_k on a :

$$\gamma_k^{(i)} \geq v(Q^{(i)})m(\Gamma_k^{(i)}) = \frac{\beta_q^{i_0} m(\Gamma_k^{(i)})}{n_{i_0}} = \tilde{\beta}_q^{i_0} \tag{3.21}$$

où $i_0 \in I_{Q^{(i)}}$ et $k(Q^{(i)}) = q - 1$.

Remarque 3.4.1 *Dans le cas d'une branche l'inégalité (3.19) remonte à H.J.S. Smith ([S]), et pour une branche générique dans sa classe d'équisingularité, Casas dans ([Ca1], [Ca2]) a étudié en profondeur le contact de la polaire $P_\tau(C)$ avec C et en particulier déterminé la valeur de $\gamma_k^{(i)}$.*

Proposition 3.4.2 *Soit $T \subset U$ un compact quelconque. Soit aussi $\Gamma^{(i)}$ un paquet de la courbe polaire et $\Gamma_k^{(i)}$ une branche de ce paquet. Alors pour tout $\tau \in T$ et pour tout $|\lambda|$ assez petit on a :*

1. *Si $\Gamma^{(i)} \in A$ les points d'intersection de $\Gamma_k^{(i)}$ et $C(\lambda)$ sont dans les boules $\mathbf{B}(\xi_{k,l}^{(i)}(\lambda),\ |\lambda|^{\frac{\tilde{\beta}_q^{i_0}}{m_k^{(i)}+e_k^{(i)}}})$ où $i_0 \in I_{Q^{(i)}}$ et $k(Q^{(i)}) = q - 1$.*
2. *Si $\Gamma^{(i)} \in B$ et $d_2(Q^{(i)}) \neq 0$, il existe $i_0 \in I_{Q^{(i)}}$ tel que les points d'intersection de $\Gamma_k^{(i)}$ et $C(\lambda)$ sont dans les boules $\mathbf{B}(\xi_{k,l}^{(i)}(\lambda),\ |\lambda|^{\frac{\tilde{\beta}_{q-1}^{i_0}}{m_k^{(i)}+e_k^{(i)}}})$ où $k(Q^{(i)}) = q - 1$.*

3. *Si* $\Gamma^{(i)} \in B$ *tel que* $d_2(Q^{(i)}) = 0$ *et* $v(Q^{(i)}) > 1$ *les points d'intersection de* $\Gamma_k^{(i)}$ *et* $C(\lambda)$ *sont dans les boules* $\mathbf{B}(\xi_{k,l}^{(i)}(\lambda),\ |\lambda|^{\frac{\tilde{\beta}_q^{i_0}}{m_k^{(i)}+e_k^{(i)}}})$ *où* $i_0 \in I_{Q^{(i)}}$ *et* $k(Q^{(i)}) = q$.

Remarque 3.4.2 *S'il existe un sommet de valuation 1 ce ne peut être que le point base* $Q^{(0)}$. *Cela signifie que la courbe* C *contient au moins deux branches transverses. Si* $v(Q^{(0)}) = 1$, *nous noterons* $\Gamma^{(0)}$ *le paquet de branches de la courbe polaire correspondant à* $Q^{(0)}$.

Démonstration

D'après la proposition ci-dessus on sait que les points d'intersection de $\Gamma_k^{(i)}$ et $C(\lambda)$ sont dans les boules fermées $\mathbf{B}(\xi_{k,l}^{(i)}(\lambda), c(T)|\lambda|^{\frac{\gamma_k^{(i)}}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}})$ quand $|\lambda|$ est assez petit.

1. Si $\Gamma^{(i)} \in A$ alors $\gamma_k^{(i)} > \tilde{\beta}_q^j$ pour tout $j \in I_{Q^{(i)}}$ et où $k(Q^{(i)}) = q-1$.

   Donc il existe $\eta \in \mathbb{N} - \{0\}\ :\ \gamma_k^{(i)} = \eta + \tilde{\beta}_q^j$.

   Ainsi d'après la proposition (3.4.1) si $(x,y) \in C(\lambda) \cap \Gamma_k^{(i)}$ il existe $l \in \{0, \ldots, (e_k^{(i)} + m_k^{(i)} - 1)\}$ et $c(T) \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\begin{aligned} M &= \|(x,y) - \xi_{k,l}^{(i)}(\lambda)\| \\ &\leq c(T)|\lambda|^{\frac{\gamma_k^{(i)}}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \\ &= \underbrace{c(T)|\lambda|^{\frac{\eta}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}}}_{\sigma} |\lambda|^{\frac{\tilde{\beta}_q^j}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}} \end{aligned}$$

   et pour $|\lambda|$ assez petit on a $\sigma < 1$, donc

$$M < |\lambda|^{\frac{\tilde{\beta}_q^j}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}}.$$

   Ainsi

$$(x,y) \in \bigcap_{j \in I(Q^{(i)})} \mathbf{B}(\xi_{k,l}^{(i)}(\lambda), |\lambda|^{\frac{\tilde{\beta}_q^j}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}}) = \mathbf{B}(\xi_{k,l}^{(i)}(\lambda), |\lambda|^{\frac{\tilde{\beta}_q^{i_0}}{e_k^{(i)}+m_k^{(i)}}})$$

où $i_0 \in I(Q^{(i)})$.

En effet si $i_0, s \in I(Q^{(i)})$ alors $\dfrac{\beta_q^s}{m(C_s)} = \dfrac{\beta_q^{i_0}}{m(C_{i_0})}$ où $q-1 = k(Q^{(i)})$. Donc

$$\tilde{\beta}_q^s = \frac{\beta_q^s m(\Gamma_k^{(i)})}{m(C_s)} = \frac{\beta_q^{i_0} m(\Gamma_k^{(i)})}{m(C_{i_0})} = \tilde{\beta_q^{i_0}}$$

et

$$\frac{\tilde{\beta}_q^s}{m_k^{(i)} + e_k^{(i)}} = \frac{\tilde{\beta_q^{i_0}}}{m_k^{(i)} + e_k^{(i)}}.$$

2. Dans ce cas-là $\Gamma^{(i)} \in B$ et $d_2(Q^{(i)}) \neq 0$, donc il existe $i_0 \in I(Q^{(i)})$ tel que $\gamma_k^{(i)} \geq \tilde{\beta}_q^{i_0}$ où $k(Q^{(i)}) = q-1$ (donc $q \geq 1$). Mais $\beta_{q-1}^{i_0} < \beta_q^{i_0}$ ainsi

$$\beta_{q-1}^{i_0} \frac{m_k^{(i)}}{n_{i_0}} < \beta_q^{i_0} \frac{m_k^{(i)}}{n_{i_0}}$$

et $\tilde{\beta}_{q-1}^{i_0} < \tilde{\beta}_q^{i_0}$. Alors $\gamma_k^{(i)} > \tilde{\beta}_{q-1}^{i_0}$ et il existe $\eta \in \mathbb{N} - \{0\}$: $\gamma_k^{(i)} = \eta + \tilde{\beta}_{q-1}^{i_0}$.

Donc si $(x, y) \in C(\lambda) \cap \Gamma_k^{(i)}$ il existe $l \in \{0, \ldots, (e_k^{(i)} + m_k^{(i)} - 1)\}$ et $c(T) \in \mathbb{R}^+$ tels que pour tout $\tau \in T$

$$\begin{aligned} M &= \|(x, y) - \xi_{k,l}^{(i)}(\lambda)\| \\ &\leq c(T)|\lambda|^{\frac{\gamma_k^{(i)}}{e_k^{(i)} + m_k^{(i)}}} \\ &= \underbrace{c(T)|\lambda|^{\frac{\eta}{e_k^{(i)} + m_k^{(i)}}}}_{\sigma} |\lambda|^{\frac{\tilde{\beta}_{q-1}^{i_0}}{e_k^{(i)} + m_k^{(i)}}} \end{aligned}$$

et pour $|\lambda|$ assez petit on a $\sigma < 1$, donc

$$M < |\lambda|^{\frac{\tilde{\beta}_{q-1}^{i_0}}{e_k^{(i)} + m_k^{(i)}}}.$$

(Remarque : dans ce cas-là si $k(Q^{(i)}) = 0$ (c'est-à-dire $q = 1$) alors $\tilde{\beta}^{i_0}_{q-1} = \tilde{\beta}^{i_0}_0 = \frac{\beta^{i_0}_0}{n_{i_0}} m^{(i)}_k$ et $\tilde{\beta}^{i_0}_{q-1} = m^{(i)}_k$.)

3. Si $\Gamma^{(i)} \in B$ et $d_2(Q^{(i)}) = 0$ alors $\gamma^{(i)}_k \geq \tilde{\beta}^j_q$ pour tout $j \in I_{Q^{(i)}}$ et où $q = k(Q^{(i)})$.

   On va distinguer deux cas :

   (a) $q \geq 1$.
   Dans ce cas-là $\gamma^{(i)}_k > \tilde{\beta}^j_q$ pour tout $j \in I_{Q^{(i)}}$ et on obtient un résultat de forme analogue au cas (a).

   (b) $q = 0$.
   Dans ce cas-là $\gamma^{(i)}_k \geq m^{(i)}_k$ et comme $v(Q^{(i)}) > 1$ on trouve $\gamma^{(i)}_k > m^{(i)}_k$ et les points de $C(\lambda) \cap \Gamma^{(i)}_k$ sont dans les boules $\mathbf{B}(\xi^{(i)}_{k,l}, |\lambda|^{\frac{m^{(i)}_k}{e^{(i)}_k + m^{(i)}_k}})$ où $m^{(i)}_k = \tilde{\beta}^j_0$, pour tout $j \in I(Q^{(i)})$. Donc on a le résultat. ∎

Remarque 3.4.3 *Pour tout compact T il existe $\sigma(T)$ tel que pour tout λ, $|\lambda| < \sigma(T)$ les points d'intersection $(P_\tau(C) - \Gamma^{(0)}) \cap C(\lambda)$ sont dans la réunion des boules définies ci-dessus, pour tout $\tau \in T$.*

Corollaire 3.4.1 *Les exposants e qui apparaisent dans les rayons $|\lambda|^e$ des boules de la proposition (3.4.2) ne dépendent que de la topologie de C.*

Démonstration
Le rayon d'une boule est de la forme

$$|\lambda|^{\frac{\tilde{\beta}^{i_0}_q}{m^{(i)}_k + e^{(i)}_k}}$$

où λ assez petit, C_{i_0} est une branche de C et

1. $e^{(i)}_k + m^{(i)}_k = (C, \Gamma^{(i)}_k)$
2. $\tilde{\beta}^{i_0}_q = \frac{\beta^{i_0}_q}{m(\Gamma^{(i)}_k)} m(C_{i_0})$.

Mais $(C, \Gamma_k^{(i)}) = \sum_j (C_j, \Gamma_k^{(i)})$ et si

$$\beta_l^j \leq \rho < \beta_{l+1}^j$$

alors

$$\frac{(C_j, \Gamma_k^{(i)})}{m(\Gamma_k^{(i)})} = \underbrace{\frac{\overline{\beta_l^j}}{n_1^j \cdots n_{l-1}^j} + \frac{\rho - \beta_l^j}{n_1^j \cdots n_l^j}}_{A_j}$$

c'est-à-dire $(C_j, \Gamma_k^{(i)}) = m(\Gamma_k^{(i)}) A_j$ donc

$$m_k^{(i)} + e_k^{(i)} = (C, \Gamma_k^{(i)}) = m(\Gamma_k^{(i)}) \sum_j A_j.$$

Ainsi

$$\frac{\tilde{\beta_q^{(i_0)}}}{m_k^{(i)} + e_k^{(i)}} = \frac{\beta_q^{(i_0)} m(\Gamma_k^{(i)})}{(C, \Gamma_k^{(i)}) m(C_{i_0})} = \frac{\beta_q^{(i_0)}}{m(C_{i_0}) \sum_j A_j}$$

Il suffit donc de prouver que les A_j ne dépendent que de la topologie de C. Mais on a :

$$A_j = \frac{\overline{\beta_l^j}}{n_1^j \cdots n_{l-1}^j} + \frac{\rho - \beta_l^j}{n_1^j \cdots n_l^j}$$

et il suffit de prouver que $\rho = \mathrm{cont}(C_j, \Gamma_k^{(i)})$ ne dépend que de la topologie de C.

On considére deux cas :

1. Si $j \in I(Q^{(i)})$ alors $\mathrm{cont}(C_j, \Gamma_k^{(i)}) = n_j v(Q^{(i)})$ et
2. Si $j \notin I(Q^{(i)})$ alors $\mathrm{cont}(C_j, \Gamma_k^{(i)}) = \mathrm{cont}(C_j, C_l)$ pour tout $l \in I(Q^{(i)})$.

donc ρ ne dépend que de la topologie de C et on trouve le résultat.

■

Remarque 3.4.4 *En principe les centres des boules que nous avons définiees dans la proposition (3.4.2) dépendent du type analytique de* C *et pas seulement du type topologique.*

Nous allons maintenant evaluer la quantité globale de courbure concentrée dans ces boules, c'est-à-dire comparer :

$$\int_{C(\lambda)\bigcap(\bigcup_{i,k,q,l}\mathbf{B}_{(\xi_{k,l}^{(i)}(\lambda),\rho_{k,i_0,q}^{(i)})})} |K|\, dv$$

et

$$\int_{C(\lambda)\cap B_\epsilon} |K| dv$$

où $\rho_{k,i_0,q}^{(i)}$ dénotera les différents rayons des boules que nous avons déjà définies.

Pour ce faire, les résultats de Langevin dejà exposés sont indispensables.

On prendra garde que bien que les boules ne soient pas disjointes, à chaque point d'intersection de la courbe polaire avec les courbes de niveau correspond une boule bien définie.

Lemme 3.4.1 *Soit* $\Gamma^{(0)}$ *le paquet de la courbe polaire* $P_\tau(C)$ *dont le sommet associé* $Q^{(0)}$ *vérifie* $v(Q^{(0)}) = 1$. *Alors*

$$(\Gamma^{(0)}, C) = \begin{cases} 0 & \textit{s'il n'existe aucun sommet de valuation égale à 1} \\ (t-1)m(C) & \textit{s'il existe un sommet de valuation égale à 1} \end{cases}$$

où t *est le nombre de composantes tangentielles de* C.
C'est-à-dire s'il existe un sommet de valuation égal à 1 alors $\Gamma^{(0)}$ *est la partie de* $P_\tau(C)$ *qui est transverse à* C, *et s'il n'existe pas* $\Gamma^{(0)}$ *est vide.*

Démonstration
S'il n'existe aucun sommet de valuation égale à 1 alors $\Gamma^{(0)}$ est vide et $(\Gamma^{(0)}, C) = 0$.

Maintenant on va supposer qu'il existe un sommet $Q^{(0)}$ de valuation égale à 1.

On sait que $(\Gamma^{(0)}, C) = \sum_k (\Gamma_k^{(0)}, C)$. Mais

$$\begin{aligned}(\Gamma_k^{(0)}, C) &= \sum_{i\in I} (\Gamma_k^{(0)}, C_i) \\ &= \sum_{i\in I_{Q^{(0)}}} (\Gamma_k^{(0)}, C_i) + \sum_{i\notin I_{Q^{(0)}}} (\Gamma_k^{(0)}, C_i).\end{aligned}$$

Donc comme $v(Q^{(0)}) = 1$ et $I_{Q^{(0)}} = I$ on a

$$(\Gamma_k^{(0)}, C) = \sum_{i\in I_{Q^{(0)}}} (\Gamma_k^{(0)}, C_i).$$

Si on prend $i \in I_{Q^{(0)}}$ alors

$$\mathrm{cont}(C_i, \Gamma_k^{(0)}) = n_i v(Q^{(0)}) = n_i = \beta_0^1$$

et d'aprés (1.2.2) on peut écrire :

$$\frac{(C_i, \Gamma_k^{(0)})}{m(\Gamma_k^{(0)})} = n_i$$

donc $(C_i, \Gamma_k^{(0)}) = (\Gamma_k^{(0)}, C_i) = n_i m(\Gamma_k^{(0)})$ et

$$(C, \Gamma^{(0)})_0 = m(C)m(\Gamma^{(0)})$$

c'est-à-dire $\Gamma^{(0)}$ est transverse à C. Comme de plus chaque composante qui est transverse à C est dans le paquet correspondant à $Q^{(0)}$, $\Gamma^{(0)}$ est la partie de $P_\tau(C)$ qui est transverse à C.
De plus $m(\Gamma^{(0)}) = d_1(Q^{(0)}) - 1 = t - 1$ donc

$$(\Gamma^{(0)}, C) = (t-1)m(C).$$

■

Théorème 3.4.1 *Reprenons la notation de la proposition (3.4.2). Soit* $\Gamma^{(0)}$ *le paquet de la courbe polaire* $P_\tau(C)$ *dont le sommet associé* $Q^{(0)}$ *vérifie* $v(Q^{(0)}) = 1$. *Alors*

1. *Si* $\Gamma^{(0)}$ *est vide on a :*

$$\lim_{\epsilon,\lambda\to 0,|\lambda|<<\epsilon}\left(\int_{C(\lambda)}|K|dv-\int_{C(\lambda)\cap(\bigcup_{i,k,l,q}B^{(i)}_{k,l,q}(\lambda))}|K|\,dv\right)=0 \quad (3.22)$$

2. *Si* $\Gamma^{(0)}$ *n'est pas vide on a :*

$$\lim_{\epsilon,\lambda\to 0,|\lambda|<<\epsilon}\left(\int_{C(\lambda)}|K|dv-\int_{C(\lambda)\cap(\bigcup_{i,k,l,q}B^{(i)}_{k,l,q}(\lambda))}|K|\,dv\right)=2\pi(t-1)m(C) \quad (3.23)$$

où t *est le nombre de composantes tangentielles de* C.

Démonstration

Soit $V=B^{(i)}_{k,l,q}(\lambda)=B(\xi^{(i)}_{k,l}(\lambda),\rho^{(i)}_{k,l,q})$. D'après (3.2.2) on a

$$\int_{B^{(i)}_{k,l,q}(\lambda)\cap C(\lambda)}|K|dv\geq 2\pi$$

puisque dans chaque boule $B^{(i)}_{k,l,q}(\lambda)=B(\xi^{(i)}_{k,l}(\lambda),\rho^{(i)}_{k,l,q})$ il y a au moins un point de la courbe polaire. Mais

$$\begin{aligned}\int_{C(\lambda)}|K|-\int_{C(\lambda)-B^{(i)}_{k,l,q}(\lambda)}|K| &= \int_{\mathbb{P}^1}|K|-\int_T|K|\\ &=\int_{\mathbb{P}^1-T}|K|\\ &\leq\int_{\mathbb{P}^1-T}(\mu^{(2)}+M-1)\\ &\leq(\mu^{(2)}+M-1)\text{mesure}(\mathbb{P}^1-T) \quad (3.24)\end{aligned}$$

et d'après la remarque 3.4.3 si on somme sur toutes les boules, on trouve :

$$\int_{C(\lambda)\cap\ \bigcup_{i,k,l,q}B^{(i)}_{k,l,q}(\lambda)}|K|dv\geq 2\pi\left[(P_\tau(C),C)-(\Gamma^{(0)},C)\right] \quad (3.25)$$

Donc d'après le théorème (3.2.2) et (3.25) on a

$$\lim_{\lambda,\epsilon\to 0,|\lambda|<<\epsilon}\left(\int_{C(\lambda)\cap B_\epsilon}|K|dv-\int_{C(\lambda)\cap(\bigcup_{i,k,l,q}B^{(i)}_{k,l,q}(\lambda))}|K|\,dv\right)=2\pi(\Gamma^{(0)},C) \quad (3.26)$$

Ainsi d'après le lemme ci-dessus on trouve le résultat. ∎

Remarque 3.4.5 *Dans la démonstration du théorème (3.4.1) on pourrait remplacer l'inégalité (3.24) par celle de la remarque (3.2.1), et éviter d'avoir à évoquer un changement de variables qui élimine d'éventuelles composantes linéaires de la courbe.*

Corollaire 3.4.2 *On n'a aucune concentration de courbure si et seulement si* $\mu^{(2)} = \mu^{(1)2}$, *c'est-à-dire le point singulier est un* n*-uple ordinaire (i.e.* $t = \mu^{(1)} + 1$ *).* ∎

Corollaire 3.4.3 *Si* $\Gamma^{(0)}$ *est vide la courbure de* $C(\lambda)$ *se concentre assymptotiquement quand* $\lambda \to 0$ *dans les boules* $B^{(i)}_{k,l,q}(\lambda) = B(\xi^{(i)}_{k,l}(\lambda), \rho^{(i)}_{k,l,q})$ *que nous avons définie dans la proposition (3.4.2).*

∎

Remarque 3.4.6 *On doit remarquer que les boules où se concentre asymptotiquement la courbure de* $C(\lambda)$ *quand* $\lambda \to 0$ *sont indépendantes de* τ *et que leurs rayons dépendent seulement de* λ *et de la topologie de* C *mais en principe leurs centres dépendent du type analytique de* $P_\tau(C)$*. De toute façon bien que les centres dépendent du type analytique on peut contrôler la "taille" de la région où se concentre asymptotiquement la courbure de* $C(\lambda)$ *quand* $\lambda \to 0$ *à partir de la topologie de la courbe* C *.*

Bibliographie

[Ab1] S. Abhyankar, *On the semigroup of a meromorphic curve*, Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometri, Kyoto, 1977.

[Ab2] S. Abhyankar, *Lectures on expansion techniques in algebraic geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, 1977.

[Bou] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chapitres 8 et 9.

[Ca1] E. Casas-Alvero, *Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves*, Mathematische Annalen 287, 1990.

[Ca2] E. Casas-Alvero, *Base points of polar curves*, Ann. Inst. Fourier, 41, 1991.

[Che] A. Chenciner, *Courbes algébriques planes*, Publications Mathématiques d l'Université Paris VII.

[De1] F. Delgado de la Mata, *An arithmetical factorization for the critical point set of some map germs from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^2$*, Singularities, Lille 1991, Editeur :J-P Brasselet, L.M.S. Lecture Note Series, 201, Cambridge University Press, 1994, pp. 61-100.

[De2] F. Delgado de la Mata, *A factorization theorem for the polar of a curve with two branches*, Compositio Mathematica,92,1994, pp. 327-375.

[E] H. Eggers, *Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitaen,* Bonner Mathematische Schriften, 147,1983.

[En] F. Enriques, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche,* Bologna, 1915.

[K-L] T.C. Kuo- Y.C. Lu, *On analytic function germs of two complex variables,* Topology 16, 299-310,1977.

[La1] R. Langevin, *Courbure et singularités complexes*, Commentarii Mathematici Helvetici 54, 1979.

[La2] R. Langevin, *Courbures, feuilletages et surfaces*, Thèse, Centre d'Orsay, 1980.

[La3] R.Langevin, *Focalisation de la courbure au voisinage des singularités*, Rapport IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[L-M-W] Lê- F. Michel- C. Weber, *Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes*, Compositio Mathematica, 72, 1989.

[L-T] Lê D.T.- B. Teissier, *Cycles evanescents, sections planes et conditions de Whitney II*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 40 (1983), Part 2, American Mathematical Society.

[L-J] M. Lejeune-Jalabert,*Contributions a l'étude des singularités du point de vue du polygone de Newton*, Thèse, Paris 7, 1973.

[M-W] F. Michel- C. Weber, *Topologie des germes des courbes planes à plusiers branches*, Université de Genève, 1985.

[Me] M. Merle, *Invariants polaires des courbes planes*, Inventiones Math. 41, 103-111 (1977).

[Mi] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*,Annals of Mathematics Studies, 61. Princenton University Press.

[Ne] L. Ness, *Curvature on algebraic plane curves*, thesis, Harvard, 1975.

[S] H.J.S. Smith, *On the higher singularities of plane curves,* Proc. London Math. Soc., Vol. VI, 1875, p.153-182.

[Te1] B. Teissier, *Introduction to equisingularity problems*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Algebraic Geometry, Arcata 1974, Vol. 29.

[Te2] B. Teissier, *Cycles évanescents, section planes, et conditions de Whitney*, Singularités à Cargèse, Astérique, 7-8, S.M.F.

[Te3] B. Teissier, *Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités des hypersurfaces*, Inventiones Mathematicae 40, 1977.

[Te4] B. Teissier, *Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney*, Proceedings, La Rábida, 1981, Lectures Notes in Mathematics,961.

[Te5] B. Teissier, *Courbes polaires relatives et courbure d'hypersurfaces de niveau*, non publié.

[Te6] B. Teissier, *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*, Nordic Summer School, Symposium in Mathematics, Oslo 1976.

[Tr] F. Treves, *On the local solvability and the local integrability of systems of vector fields*, Acta mathematica, Vol. 151, 1983.

[Za1] O. Zariski, *Le problème des modules pour les branches planes,* Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1973. Reédition Hermann, 1986.

[Za2] O. Zariski, *General theory of saturation and of saturated local rings II*, Equisingularity on Algebraic Varieties, Collected Papers, Volume IV.

[Za3] O. Zariski, *Questions in Algebraic varieties*, Contribution to the problems of equisingularity, CIME, Edizioni Cremonese, Roma 1970, pp. 261-343.