LA LÓGICA DE LAS MODALIDADES EPISTÉMICAS GRADUADAS (O CÓMO MEDIR LA CONFIANZA)

José Rafael Herrera González
rahego@ull.es
Universidad de La Laguna
GRUPO LEMA*

RESUMEN

La lógica modal epistémica estándar se ha constituido en una herramienta realmente útil para los estudiosos interesados en la descripción formal de diferentes nociones epistémicas, tales como las de conocimiento y creencia, que desempeñan un importante papel en muchos estudios filosóficos. En este trabajo se muestra cómo el mayor poder expresivo de las modalidades graduadas puede ser utilizado en la lógica epistémica para poder hacer referencia a un tipo de conocimiento que no es siempre absolutamente verdadero, sino que puede admitir excepciones e incertidumbre.

PALABRAS CLAVE: lógica epistémica, modalidades epistémicas graduadas, conocimiento, creencia, incertidumbre.

ABSTRACT

«Graded Modal Epistemic Logic (or How to Measure Confidence)». Standard Modal Epistemic Logic has become a really helpful tool for all those researchers interested in the formal description of several epistemic notions, such as knowledge and belief, which play an important role in many philosophical studies. This paper shows how the greater expressibility of graded modalities can be used in epistemic logic in order to deal with a kind of knowledge that is not always absolutely true, but can admit exceptions and uncertainty.

KEY WORDS: epistemic logic, graded epistemic modalities, knowledge, belief, uncertainty.

1. ALGUNAS LIMITACIONES EXPRESIVAS DE LA LÓGICA MODAL EPISTÉMICA ESTÁNDAR

La lógica de las modalidades epistémicas que está a la base de la mayor parte de los análisis formales de las nociones epistémicas y doxásticas (como las de *conocimiento* y *creencia*), y que aquí denominaremos «lógica (modal) epistémica estándar», recurre, la mayor parte de las veces, a los siguientes operadores modales para el conocimiento y la creencia:

KA: «saber que A es el caso».
MA: «considerar posible que A es el caso».
BA: «creer que A es el caso».

El operador K, y la noción epistémica que representa (el conocimiento), se define en función de las alternativas epistémicas del sujeto cognoscente, es decir, del conjunto de mundos posibles que son compatibles con el conocimiento de dicho sujeto. Lo mismo vale decir para el operador B de la creencia, pero en relación a las alternativas doxásticas, esto es, los mundos posibles compatibles con el conjunto de creencias del sujeto en cuestión. El operador M se define tomando como base ambos tipos de mundos posibles, dependiendo de que nos estemos refiriendo a lo que un sujeto considera posible en base a sus conocimientos o a sus creencias.

Puede establecerse, además, las siguientes equivalencias lógicas entre los anteriores operadores modales: $KA \equiv \neg M \neg A$ y $BA \equiv \neg M \neg A$[1].

De acuerdo con las anteriores consideraciones, la definición semántica de los operadores K, B y M de la lógica modal epistémica estándar puede expresarse formalmente como sigue:

$v(KA,m)=1$ syss $\forall n \in M$: mRn, $v(A,n)=1$
$v(BA,m)=1$ syss $\forall n \in M$: mRn, $v(A,n)=1$
$v(MA,m)=1$ syss $\exists n \in M$: mRn, $v(A,n)=1$

A pesar de la notación que hemos empleado (por mor de una mayor simplicidad), las definiciones semánticas de K y B no establecen exactamente lo mismo, puesto que, en el primer caso, R representa las relaciones de accesibilidad respecto al conocimiento, mientras que, en el segundo, representa las relaciones de accesibilidad respecto a la creencia. Así, por ejemplo, en el Sistema de Kraus y Lehmann[2],

* Este artículo forma parte de los trabajos de investigación llevados a cabo en el seno del Grupo LEMA (Grupo de Investigación en Lógica, Epistemología, Mente y Acción) de la Universidad de La Laguna, cuyo director es Manuel Liz. Agradezco a los miembros del grupo sus aportaciones y comentarios a versiones previas de este trabajo.

[1] Como acabamos de indicar, el operador K se define en función de las alternativas epistémicas de los sujetos, mientras que B se define tomando como base sus alternativas doxásticas; y las alternativas que un sujeto considera posibles en base a su conocimiento no tienen por qué coincidir con las que es capaz de concebir en función de sus creencias. Por ello no ocurre que $KA \equiv BA$, a pesar de que $KA \equiv \neg M \neg A$ y $BA \equiv \neg M \neg A$. Es así que los sistemas formales que presentaremos en este trabajo no permiten la combinación de operadores K y B. Para desarrollar sistemas que permitan la ocurrencia conjunta de ambos tipos de operadores habría que introducir, en el plano semántico y/o en la sintaxis, restricciones formales que impidieran que $KA \equiv \neg M \neg A \equiv BA$.

[2] S. KRAUS & D. LEHMANN, «Knowledge, Belief and Time», *Theoretical Computer Science*, 58, 1988, pp. 155-174.

al que aludiremos nuevamente un poco más adelante, se nos dice que las relaciones R respecto al conocimiento son reflexivas, simétricas y transitivas (relaciones de equivalencia), mientras que las relaciones R respecto a la creencia son seriales, simétricas, transitivas y euclídeas[3]. Por ello, Kraus y Lehmann denotan las relaciones de accesibilidad para el conocimiento por R, y para la creencia por S.

Los sistemas formales de la lógica epistémica estándar permiten expresar propiedades importantes de las nociones epistémicas y doxásticas con las que operan, así como interesantes relaciones lógico-formales que pueden establecerse entre las mismas.

En este sentido, el Sistema S5 de la lógica epistémica proposicional, que sirve de base a muchos de los desarrollos que se han llevado a cabo en este ámbito de la lógica, incorpora una serie de principios formales fundamentales, cuyo contenido epistemológico no es menos relevante. Entre estos principios cabe destacar los siguientes[4]:

i) $[KA \wedge K(A \rightarrow B)] \rightarrow KB$ o también: $K(A \rightarrow B) \rightarrow (KA \rightarrow KB)$. Se trata del *Axioma K*. Establece que el conocimiento de un sujeto está cerrado bajo la implicación, lo que es tanto como afirmar que cualquier sujeto cognoscente, cuyo conocimiento se rija por este principio lógico, ha de conocer todas las consecuencias lógicas de sus conocimientos.

ii) $KA \rightarrow A$. Es el denominado *Axioma T*. Según este axioma los hechos conocidos son verdaderos, expresando así la idea clásica de que se conocen sólo verdades. De aquí se desprende que $A \rightarrow MA$, es decir, que no puede ocurrir nada que sea considerado imposible por el sujeto cognoscente.

iii) $KA \rightarrow KKA$ y $\neg KA \rightarrow K\neg KA$. Son los *Axiomas S4 y S5*. Ambos pueden concebirse como axiomas de introspección, y así expresarían que un sujeto es introspectivo, es decir, que puede acceder a su conocimiento base y saber qué es lo que conoce y lo que no.

---

[3] Una relación R es *reflexiva* si $\forall m \in M$, mRm.
Una relación R es *simétrica* si $\forall m,n \in M$ ($mRn \Rightarrow nRm$).
Una relación R es *transitiva* si $\forall m,n,o \in M$ ($mRn \wedge nRo \Rightarrow mRo$).
Una relación *R* es *serial* si $\forall m \in M, \exists n \in M: mRn$
Una relación R es *euclídea* si $\forall m,n,o \in M$ ($mRn \wedge mRo \Rightarrow nRo$).

[4] Los elementos básicos de la lógica modal epistémica estándar pueden encontrarse en un buen número de trabajos. Por su rigor y completa presentación merece ser destacado J.J. Ch. Meyer & W. van der Hoek, *Epistemic Logic for AI and Computer Science*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995 (cuya exposición y análisis del Sistema epistémico S5 podemos encontrar en las pp. 23 y 24). Útiles presentaciones generales de los elementos formales a los que recurro en este primer apartado del artículo se encuentran en, por ejemplo, J.-J. Ch. Meyer, «Epistemic Logic», en L. Goble, (ed.), *Philosophical Logic*, Blackwell Publishers, Oxford, 2001, pp. 183-202 y W. Lenzen, «Epistemic Logic», en I. Niiniluoto, M. Sintonen, & J. Wolenski (eds.), *Handbook of Epistemology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004, pp. 963-983.

Por su parte, el Sistema doxástico KD45[5] incorpora el siguiente principio para la creencia:

iv) BA→¬B¬A. Este axioma (*Axioma D*) exige la consistencia de las creencias de los sujetos epistémicos, es decir, que aunque un sujeto podría albergar creencias falsas, no podría, sin embargo, mantener creencias contradictorias sobre un mismo hecho.

Otros sistemas formales de la lógica epistémica estándar, como el propuesto por S. Kraus y D. Lehmann[6], permiten establecer relaciones lógicas entre los operadores del conocimiento y la creencia:

v) KA→BA. Se trata del *Axioma 14* del Sistema de Kraus y Lehmann para el conocimiento y la creencia. De acuerdo con este principio formal, siempre que un sujeto sabe algo, también lo cree, lo cual apunta a la concepción clásica del conocimiento, según la cual éste es *un tipo particular de creencia* (y, más concretamente, una creencia *verdadera* y *justificada*, como ya estableciera el mismo Platón[7]).

vi) BA→KBA. Es el *Axioma 15* del Sistema de Kraus y Lehmann para el conocimiento y la creencia. Este axioma establece, nada más y nada menos, que siempre que un sujeto cree algo, ha de saber que lo cree.

---

[5] Este sistema formal viene a ser la versión doxástica del Sistema S5, en el que se ha sustituido el operador K (conocimiento) por B (creencia) y el *Axioma T* por una versión débil del mismo, el *Axioma D*. Para una visión completa de este sistema, cf. J.J. Ch. Meyer & W. van der Hoek, *op. cit.*, pp. 68-71.

[6] S. Kraus & D. Lehmann, *op. cit*.

[7] En el *Teeteto* de Platón (201d) leemos:

«TEETETO.- Recuerdo en este momento, Sócrates, algo que yo había oído decir y que ya mi memoria había olvidado. Se decía, en efecto, que *la opinión verdadera acompañada de razón constituye la ciencia, y que, asimismo, privada de razón, cae fuera de ella*. Y la cuestión se precisaba todavía más: se afirmaba que de todo aquello de lo que no hay razón, no hay aprendizaje posible, cosa que sí puede ocurrir cuando la razón actúa».

Y, unas líneas más abajo, es el propio Sócrates quien corrobora este punto de vista sobre el conocimiento:

«SÓCRATES.- Por tanto, cuando alguien se forja una opinión verdadera de algo, aun sin llegar a intuir su razón, su alma vislumbra ya la verdad sobre esto, pero no posee todavía su conocimiento. La persona que no puede dar ni recibir la razón de un objeto, carece de ciencia de él, y aquella que en cambio le añade una razón, posee todas las perfecciones y tiene además una ciencia cabal del objeto. ¿Es eso, o es por el contrario otra cosa, lo que tú has visto en sueños?

TEETETO.- Es precisamente eso.

SÓCRATES.- ¿Te satisface, pues, y le das tu aprobación? Si así ocurre, *la opinión verdadera acompañada de razón es ciencia*». [Platón, *Teeteto*, 202c; versión española de J.A. Míguez, Aguilar, Bs. As., 1977 (cursivas mías)].

Estos y otros desarrollos formales de la lógica modal epistémica estándar han dado lugar a un amplio debate acerca de cuáles de estos principios lógicos se ajustan mejor a nuestras intuiciones acerca de lo que significa *saber* o *creer* que algo es el caso. Y, precisamente, la búsqueda de sistemas lógicos epistémicos que formalicen nociones epistémicas y doxásticas lo más realistas posible (en el sentido de poder ser referidas, por ejemplo, a sujetos epistémicos como los humanos), ha generado una buena parte de los resultados más sobresalientes en el ámbito de la lógica de las modalidades epistémicas en las últimas décadas.

Pero en la discusión acerca de las ventajas y los inconvenientes que acarrea el análisis formal del conocimiento (y/o la creencia) basado en este tipo de elementos lógico-formales, se ha puesto de manifiesto también algunas de las limitaciones de los mismos. Y entre estas limitaciones cabe destacar el hecho de que no se haya contemplado, en la mayor parte de los sistemas, una diferenciación gradual de distintos tipos de nociones epistémicas y doxásticas, pues generalmente se ha mantenido que existe una distinción tajante entre lo que significa *saber* y lo que supone *creer* algo. Sin embargo, en muchos contextos, que suelen estar alejados de la clásica concepción del conocimiento como creencia verdadera justificada, resulta útil poder expresar los distintos grados en los que un determinado sujeto concibe (o, si se quiere, «considera posible que») algo puede ser o no el caso. Esto se aprecia de forma clara con el operador modal M de la lógica epistémica estándar que presentamos más arriba.

Si, en función de lo que sabe o cree, un determinado sujeto pudiera concebir, por ejemplo, diez alternativas epistémicas en las que sólo en una de ellas se da A, podríamos afirmar MA («el sujeto considera posible que A es el caso»); pero, si en lugar de una, fueran nueve las alternativas epistémicas las que satisficieran A, únicamente podríamos expresar lo mismo que en el caso anterior, esto es, MA. Y es que es éste el límite máximo al que nos permite llegar el poder expresivo de los operadores de la lógica a la que nos venimos refiriendo como «modal epistémica estándar».

Debido a este tipo de limitaciones expresivas de los operadores epistémicos estándar, J.-J. Ch. Meyer y W. van der Hoek propusieron operadores modales «graduados» para la lógica epistémica proposicional. Al análisis de las propiedades formales de este tipo de operadores, y de las implicaciones epistemológicas que en ellos subyacen, dedicaremos el próximo apartado de este trabajo.

2. OPERADORES DE LA LÓGICA MODAL EPISTÉMICA GRADUADA

El desarrollo de la lógica modal graduada comenzó en los años 70 del pasado siglo, siendo K. Fine uno de los primeros en estudiar las propiedades formales de los operadores modales que podemos denominar «graduados». En los años 80 fueron redescubiertos por lógicos italianos como M. Fattorosi-Barnaba, F. de Caro y C. Cerrato. Basándose en estos trabajos previos sobre la utilización de «modalidades graduadas» como recurso para mejorar la capacidad expresiva del lenguaje modal estándar (en este caso, de la lógica de las modalidades aléticas), Meyer y van der Hoek han desarrollado, a partir de la década de los 90, una serie de interesantes aportaciones que configuran la *lógica de las modalidades epistémicas graduadas*[8].

Los operadores epistémicos graduados que introducen Meyer y van der Hoek son los dos siguientes:

$M_n A$ (siendo n un número natural, es decir, $n \in \mathbb{N}$) expresa que «hay más de n alternativas epistémicas en las que se da A».
$K_n A$ ($n \in \mathbb{N}$) expresa que «a lo sumo n alternativas epistémicas refutan A».

La interpretación semántica de los operadores M_n y K_n se lleva a cabo en función de las siguientes cláusulas:

$v(M_n A, w_1)=1$ syss $|\{w_2 \in W \ / \ w_1 R w_2$ y $v(A,w_2)=1\}| > n \ (n \in \mathbb{N})$
$v(K_n A, w_1)=1$ syss $|\{w_2 \in W \ / \ w_1 R w_2$ y $v(\neg A,w_2)=1\}| \leq n \ (n \in \mathbb{N})$

Estableciéndose la siguiente equivalencia lógica entre ambos operadores:

$K_n A \equiv \neg M_n \neg A \ (n \in \mathbb{N})$

Podemos también expresar el número exacto de alternativas epistémicas que satisfacen A. Así, si $M!_n A$ expresa «exactamente n alternativas epistémicas satisfacen A», tendríamos que:

$M!_n A \equiv (M_{n-1} A \wedge \neg M_n A)$, si $n>0$
Siendo $M!_0 A \equiv K_0 \neg A \equiv K \neg A$

En función de su caracterización semántica, resulta fácil concluir que el operador K_n expresa una forma de *conocimiento incierto*, algo así como el «grado de confianza» que un sujeto mantiene en que algo sea o no el caso. Esto acerca significativamente el operador K_n a la noción de *creencia* que en la lógica doxástica estándar se representa mediante B, y, en cualquier caso, permite formalizar tipos de conocimiento más realistas (al menos en lo que se refiere a sujetos epistémicos humanos) que los que usualmente se reflejan en los sistemas epistémicos habituales (esto es, aquellos que no incluyen modalidades graduadas). Y es éste, precisamente, uno de los principales méritos, si no el principal de ellos, de la lógica de las moda-

[8] Para las referencias bibliográficas sobre los trabajos previos en los que se inspiraron Meyer y van der Hoek, cf. J J. Ch. MEYER & W. VAN DER HOEK, *op. cit.*, p. 104. Los elementos formales de la lógica modal epistémica graduada que se analizan en lo que sigue pueden encontrarse en dicha obra (pp. 103-112), así como en W. VAN DER HOEK & J.-J. Ch. MEYER, «Graded Modalities in Epistemic Logic» y «Modalities for Reasoning about Knowledge and Uncertainties», *Graded Model and Epistemic Logic,* Technical Report RUU-CS-93-44, Utrecht University, 1993. <http://www.cs.uu.nl/research/techreps/repo/CS-1993/1993-44.pdf> [Consulta: 23 enero 2010].

lidades epistémicas graduadas, pues, a diferencia de la estándar, no tropieza con el denominado *problema de la omnisciencia lógica*, evitando, de una forma clara y relativamente simple, tener que asumir que los sujetos epistémicos cuyo conocimiento se formaliza hayan de conocer todas las verdades lógicas (en función de la Regla de Generalización de K) y todas las consecuencias lógicas de sus propios conocimientos (en virtud del *Axioma K*), pues en los sistemas modales graduados no encontraremos ni una Regla de Generalización de K_n ni un axioma del tipo $K_nA \rightarrow A$[9].

Pero, ¿qué relación existe, entonces, entre la lógica epistémica estándar y aquella que opera con modalidades graduadas? ¿Son compatibles ambos enfoques lógico-formales? Ambas cuestiones quedan contestadas teniendo en cuenta que la lógica epistémica estándar («no graduada») puede ser interpretada como un caso especial de la lógica de las modalidades epistémicas graduadas, pues esta última no excluye ni sustituye a la primera, sino que la amplía, resultando así que K y M no son sino casos especiales de los operadores graduados K_n y M_n:

$MA \equiv M_0A$
$KA \equiv K_0A$

Por otra parte, si tal y como señalamos anteriormente, K_nA ($n\in\mathbb{N}$) significa que «a lo sumo n alternativas epistémicas refutan A», cuanto mayor sea el valor del subíndice n, menor será el grado de certeza del conocimiento. Además, si el número de estados alternativos que son compatibles con el conocimiento de un sujeto es infinito, obtenemos la siguiente cadena infinita[10]:

$$K_0A \rightarrow K_1A \rightarrow \ldots K_nA \rightarrow K_{n+1}A \ldots \Rightarrow \ldots M_{n+1}A \rightarrow M_nA \rightarrow \ldots \rightarrow M_1A \rightarrow M_0A^{11}$$

$$\xrightarrow{\hspace{12cm}}$$

(*Grado de certeza decreciente*)

K_0A representa *el grado más elevado de seguridad en el conocimiento de A* («conocimiento absoluto», equivalente a KA de la lógica epistémica estándar), mientras que M_0A representa *el mayor grado de incertidumbre en el conocimiento de A*. Podemos así interpretar la fórmula más fuerte de esta cadena (K_0A) como «el sujeto sabe que A es el caso» y la más débil (M_0A) como «A no es imposible para el sujeto» (o, incluso, como «el sujeto cree que A puede ser el caso»). Y entre este mero «considerar posible» y aquel «conocimiento (infalible)» de A encontramos

---

[9] El problema de la omnisciencia lógica, así como algunos de los principales intentos de solución del mismo desde planteamientos puramente modales, se analizan en Rafael HERRERA, «La lógica del conocimiento y la creencia», *Laguna*, 9, julio 2001, pp. 163-175.

[10] J.J. Ch. MEYER & W. VAN DER HOEK, *Epistemic Logic for AI and Computer Science*, *op. cit.*, p. 109.

[11] Si, tal y como venimos suponiendo, el número de alternativas epistémicas es infinito, esta secuencia también lo es, y el símbolo Þ hace entonces referencia a un tipo de implicación en la que todas las fórmulas del tipo M_n son lógicamente más débiles que las fórmulas del tipo K_n.

infinidad de grados de certeza (o incertidumbre) en relación con el conocimiento o la creencia de A.

En todo caso, aunque con los operadores epistémicos graduados se haga referencia a diferentes grados de confianza o de certeza, que puede ser más o menos fuerte, y que, por consiguiente, puede dar cabida a niveles más o menos altos de incertidumbre, en los sistemas epistémicos que incluyen modalidades cuantitativas podemos contar con una forma de conocimiento absoluto (esto es, «absolutamente cierto»), representado por K_0, que elimina cualquier atisbo de *relativismo* o de *escepticismo epistemológico*.

Si, por el contrario, el número de alternativas epistémicas a considerar fuera finito[12], siendo N el número total de las mismas, obtendríamos la siguiente secuencia[13]:

$$K_0A\ (\equiv M_{N-1}A) \rightarrow K_1A\ (\equiv M_{N-2}A) \rightarrow \ldots \rightarrow K_nA\ (\equiv M_{N-n-1}A) \rightarrow \ldots \rightarrow K_{N-1}A\ (\equiv M_0A) \rightarrow K_NA$$

El mayor grado de confianza o certeza viene representado nuevamente por K_0A, y el menor por $K_{N-1}A$ (en realidad K_NA es una tautología, y no nos dice gran cosa acerca del conocimiento del sujeto en cuestión, pues está claro que si el número total de alternativas epistémicas que concibe un sujeto es N, N será también el máximo número de tales alternativas que puede contradecir un determinado hecho A).

Por tanto, si el número de alternativas epistémicas es finito, no todas las fórmulas del tipo M_n son lógicamente más débiles que las del tipo K_n, sino que más bien toda fórmula del tipo K_n tiene su equivalente (en cuanto a su «fortaleza lógica», o, lo que es lo mismo, en cuanto al nivel de certidumbre que expresa) en una fórmula del tipo M_n. Esto ilustra hasta qué punto la noción de «conocimiento» expresada por K_n aparece debilitada respecto a la expresada por K (resultando posible incluso expresar exactamente lo mismo mediante los operadores K_n y M_n). En suma, si el número de alternativas epistémicas a considerar es finito, podemos reflejar el *grado de confianza* que un sujeto tiene respecto a que un hecho sea el caso, tanto en términos de operadores del tipo K_n como del tipo M_n, con lo que, en lo que a eficacia expresiva se refiere, la confluencia entre ambos tipos de operadores es máxima.

3. EL SISTEMA GR(S5)

J. J. Ch. Meyer y W. van der Hoek presentan, para la lógica de las modalidades epistémicas graduadas, el Sistema axiomático Gr(S5), que pretende ser el

12 Como cabe esperar que ocurra en el caso de sujetos epistémicos humanos.
13 J.J. Ch. Meyer & W. van der Hoek, *op. cit.*, p. 109.

equivalente del Sistema S5 de la lógica modal epistémica estándar[14]. Este sistema axiomático consta de los siguientes *esquemas de axiomas*:

A0 Un conjunto suficiente de Axiomas para derivar todas las tautologías de la LCP
A1 $K_0(A \to B) \to (K_nA \to K_nB)$ $(n \in \mathbb{N})$
A2 $K_nA \to K_{n+1}A$ $(n \in \mathbb{N})$
A3 $K_0\neg(A \wedge B) \to [(M!_nA \wedge M!_mB) \to M!_{n+m}(A \vee B)]$ $(n,m \in \mathbb{N})$
A4 $\neg K_nA \to K_0\neg K_nA$ $(n \in \mathbb{N})$
A5 $K_oA \to A$

Las *Reglas de derivación* del Sistema Gr(S5) son la Regla de Separación o *Modus Ponens* (MP) y la Regla de Generalización de K_0 (Si $\vdash A$, entonces $\vdash K_0A$), siendo el Sistema consistente y completo[15].

En el plano semántico, las relaciones de accesibilidad R, para el caso del sistema Gr(S5), son reflexivas, simétricas y transitivas (relaciones de equivalencia) y euclídeas[16].

La presencia del *Axioma A0* y la *Regla de deducción MP* nos indica que *la lógica epistémica graduada es una extensión de la Lógica clásica de proposiciones* (LCP).

En virtud de la *Regla de Generalización de K_0* el sujeto epistémico es capaz de conocer todas las verdades lógicas (representadas por los distintos axiomas y teoremas del Sistema); pero esto sólo ocurre en el caso de que estemos considerando un tipo especial de *conocimiento absoluto*, como el representado por el operador epistémico K_0, que puede, de este modo, ser contemplado como un *tipo ideal de conocimiento*. En ningún caso esta regla de derivación es válida para K_n si $n \neq 0$.

El *Axioma A1*, que expresa que $K_0(A \to B) \to (K_nA \to K_nB)$, para n!, pone de manifiesto que si un sujeto sabe que $A \to B$ (es decir, si $A \to B$ en todas las alternativas epistémicas del agente de acuerdo con la información de que dispone), entonces, si imagina a lo sumo n excepciones para A, no podrá imaginar más de n excepciones para B, ya que toda excepción para B también lo será para A. Este axioma también puede expresarse así[17]: $K_0(A \to B) \to (M_nA \to M_nB)$, pues si el sujeto sabe que $A \to B$, al menos en todas sus alternativas epistémicas en las que se dé A tiene que darse también B[18].

---

[14] Cf. W. van der Hoek & J.-J. Ch. Meyer, *Graded Model and Epistemic Logic*, *op. cit.*, pp. 4 y 11; y J.J. Ch. Meyer & W. van der Hoek, *Epistemic Logic for AI and Computer Science*, *op. cit.*, p. 105.

[15] J.J. Ch. Meyer & W. van der Hoek, *Epistemic Logic for AI and Computer Science*, *op. cit.*, p. 107.

[16] Cf. supra., nota 3.

[17] Cf. J.J. Ch. Meyer & W. van der Hoek, *Epistemic Logic for AI and Computer Science*, *op. cit.*, p. 108.

[18] Que $K_0(A \to B) \to (K_nA \to K_nB)$ sea equivalente a $K_0(A \to B) \to (M_nA \to M_nB)$, pone de relieve que estamos trabajando con un operador de «necesidad» (K) tan debilitado, a causa de su «graduación», que en algunos casos puede ser transcrito como operador de «posibilidad» (M). Esto ocurre, como vimos en el apartado anterior, cuando el sujeto concibe un número finito de alternativas epistémicas.

El *Axioma A2* establece que $K_nA \rightarrow K_{n+1}A$ (para $n\in\mathbb{N}$), lo cual indica que si un agente prevé a lo sumo n excepciones para A, también considerará, a lo sumo, n+1 excepciones para A. Este axioma es equivalente a $M_{n+1}A\rightarrow M_nA$, y lo que nos permite es aumentar grados en operador K_n y disminuirlos en M_n, lo que equivale, de acuerdo con la interpretación de ambos operadores, a disminuir la confianza que un agente tiene en que algo sea el caso[19].

El *Axioma A3* expresa que $K_0\neg(A\wedge B) \rightarrow [(M!_nA \wedge M!_mB) \rightarrow M!_{n+m}(A\vee B)]$ (para $n,m \in \mathbb{N}$), es decir, que si un sujeto sabe que A y B son eventos mutuamente excluyentes, y concibe n situaciones en las que A es el caso y m situaciones en las que lo es B, en total cuenta con n+m situaciones en las que, o bien A, o bien B, o ambos, son verdad. Este axioma permite aumentar grados en el operador M_n, lo que equivale a aumentar el grado de confianza que un sujeto tiene en que un hecho sea verdad.

Con el *Axioma A4*, según el cual $\neg K_nA \rightarrow K_0\neg K_nA$ (para $n\in\mathbb{N}$)[20], asumimos un tipo de introspección negativa considerablemente atenuada, al menos si se la compara con la que en la lógica epistémica estándar supone el *Axioma S5* (al que aludimos en al apartado 1, y que establece que $\neg KA\rightarrow K\neg KA$[21]). De acuerdo con el *Axioma A4*, si un agente no concibe más de n excepciones para A, entonces el agente sabe (con seguridad) que no concibe más de n excepciones. Este axioma es equivalente a $M_nA\rightarrow K_0M_nA$, que viene a indicar que el sujeto en cuestión sabe que considera posibles más de n situaciones en las que se da A.

El *Axioma A5* del Sistema Gr(S5), $K_0A\rightarrow A$[22], alude a la tradicional conexión entre *conocimiento y verdad*, estipulando que *sólo se pueden conocer con seguridad hechos verdaderos*. En el caso de la lógica epistémica graduada este axioma sólo es válido para el caso del conocimiento absoluto (e ideal) expresado por el operador K_0 (que viene a ser el tipo de conocimiento representado por el operador K de la lógica epistémica estándar). Hemos de tener en cuenta que la generalización del *Axioma A5* (es decir, $K_nA\rightarrow A$) no es válida en ningún caso para n>0, y no otra cosa cabe esperar de acuerdo a la interpretación que venimos haciendo del operador K_n, pues si un sujeto no sabe con seguridad que A es el caso (si admite posibles excepciones para A),

---

19 Así, al aumentar grados en el operador M_n, aumentamos la confianza o nivel de certidumbre del agente, y al disminuir grados, disminuimos esta confianza (justo lo contrario de lo que acontece con el operador K_n).

20 El Axioma A4 es la versión graduada de la propiedad euclídea de las relaciones de accesibilidad R entre mundos posibles (cf. supra, nota 3).

21 Este axioma de introspección negativa de la lógica epistémica estándar ha sido objeto de controversia en no pocas ocasiones, por considerarse que conlleva una concepción inapropiada, por excesivamente idealista, del conocimiento. Interesantes argumentos en contra de la aceptación de este axioma de introspección negativa pueden encontrarse en J. HINTIKKA, *Knowledge and Belief*, Cornell University Press, Cornell, 1962; v.e. de J.J. ACERO, *Saber y creer*, Tecnos, Madrid, 1979, pp. 85-86.

22 El Axioma A5 es la versión de la reflexividad de la lógica epistémica graduada; es decir, que la validez de este axioma (al igual que la del axioma T del Sistema S5 de la lógica epistémica estándar) se debe a que las relaciones de accesibilidad son reflexivas (cf. supra, nota 3).

entonces no puede concluir que A es el caso. Esto pone de manifiesto, una vez más, que el tipo de actitud proposicional representado por $K_n A$ puede ser calificada como «conocimiento incierto» o, simplemente, «creencia»[23]. Asimismo, muestra también que K_o puede contemplarse como un caso especial (y, en todo caso, ideal) del tipo de conocimiento o (in)certidumbre representado por K_n, y que *la lógica epistémica estándar (no graduada) puede verse también como un caso especial de la lógica de las modalidades epistémicas graduadas*.

En el Sistema Gr(S5), que venimos analizando a lo largo de este apartado, es derivable el teorema $K_n(A \rightarrow B) \rightarrow (K_m A \rightarrow K_{n+m} B)$ (para $n,m \in \mathbb{N}$)[24]. Si n=m, resulta: $K_n(A \rightarrow B) \rightarrow (K_n A K_{2n} B)$, y si n=m=0, resulta el *Axioma K*. Es decir, que este teorema, que también es derivable en el Sistema Gr(K)[25], resulta ser una generalización del *Axioma K* de la lógica modal epistémica estándar, es decir, del axioma K $(A \rightarrow B) \rightarrow (KA \rightarrow KB)$, el cual pone de manifiesto que el conocimiento de un agente está cerrado bajo la implicación, o, lo que es lo mismo, que conoce todas las consecuencias lógicas de su conocimiento[26].

Volviendo al teorema $K_n(A \rightarrow B) \rightarrow (K_m A \rightarrow K_{n+m} B)$ (para $n,m \in \mathbb{N}$), el mismo establece que si un sujeto tiene cierta confianza (aunque no plena) en que $A \rightarrow B$, y también tiene cierta confianza (aunque no absoluta) en que A es el caso, la confianza que tiene en que se dé B será menor que para cada una de los dos hechos anteriores considerados por separado. Esto pone de manifiesto una propiedad interesante del razonamiento que se lleva a cabo en condiciones de incertidumbre (o «razonamiento con excepciones»), y es que cuanto más larga sea la cadena de razonamientos basados en argumentos inciertos, menor será la confianza del sujeto en la conclusión que obtenga[27]. En suma, este teorema permite aumentar grados en el operador K_n y, por ende, disminuir la confianza que un sujeto alberga en relación con sus conocimientos.

A modo de conclusión de este apartado, cabe decir que el Sistema Axiomático Gr(S5) nos permite soslayar, de forma eficaz, las dificultades con las que tropiezan los sistemas más extendidos de la lógica modal epistémica estándar, y especialmente

---

[23] Cf. J.J. Ch. MEYER & W. VAN DER HOEK, *op. cit.*, p. 108.

[24] Ibídem, p. 106.

[25] Gr(K) es el sistema axiomático de la lógica epistémica graduada análogo al Sistema K de la lógica epistémica estándar (sistema modal básico de la lógica epistémica). Gr(K) consta de las reglas de derivación MP y Generalización de K_0, y los esquemas de axiomas A0, A1, A2 y A3 que establecimos anteriormente para Gr(S5) (cf. W. VAN DER HOEK & J.-J. Ch. MEYER, «Graded Modalities in Epistemic Logic», *op. cit.*, p. 5).

[26] El *Axioma K* de la lógica epistémica estándar, al que ya aludimos en el apartado 1, resulta ser una clara fuente de omnisciencia lógica, pues conlleva contemplar nociones de conocimiento (o creencia) excesivamente idealizadas. Pero, como venimos argumentando, con la lógica epistémica graduada operamos con una noción de conocimiento «más débil» y realista, resultando que el *Axioma K* únicamente es válido para el caso K_0, el cual, como hemos apuntado anteriormente, puede ser considerado como una forma de conocimiento ideal (o, en todo caso, referido a cognoscentes ideales).

[27] Es decir, que con este teorema, al emplear la regla MP en un contexto de conocimiento incierto, las conclusiones obtenidas son aun más débiles (menos seguras) que las propias premisas.

aquellas que tienen que ver con el alto grado de omnisciencia lógica que acarrean sistemas como S5. En Gr(S5) la *omnisciencia lógica*, y, en particular, el conocimiento de todas las verdades lógicas y de todas las consecuencias de sus propios conocimientos, por parte de los sujetos epistémicos, sólo se asume para K_0, pero no para K_n (con $n \geq 1$). Podemos contemplar, por tanto, el Sistema Gr(S5) como una generalización del Sistema S5, quedando este último como aparato lógico regulador de un conocimiento ideal, propio de sujetos omniscientes, que sólo puede hacer referencia a un conjunto, seguramente muy reducido, de verdades incontrovertibles, mientras que Gr(S5) vendría a dar cuenta del comportamiento formal de nociones epistémicas que son las más habituales en sujetos que, como los seres humanos, razonan y conocen bajo condiciones de incertidumbre.

4. SABER CON INCERTIDUMBRE

Lo hasta aquí expuesto pone de manifiesto que la lógica de las modalidades epistémicas graduadas da cuenta del comportamiento lógico-formal de sujetos epistémicos que no son cognoscentes ideales, como puede ser el caso de los seres humanos. La lógica epistémica estándar podría, entonces, ser interpretada como un ámbito particular, y muy especial, de la lógica epistémica graduada, referida a un tipo de conocimiento seguro, en relación con el cual no cabe la incertidumbre, pues constituye el núcleo central del sistema de conocimientos de cualquier sujeto.

El conocer presupone la posibilidad de dudar[28], pero la posibilidad misma de la duda exige que haya hechos verdaderos, y que estos hechos puedan ser conocidos: yo dudo de algo porque si lo comparo con aquello que sé que es verdad, hay aspectos relevantes que no concuerdan o lo contradicen. Si no existe la verdad, o ésta es incognoscible, no habría lugar para la duda, sino sólo para la fe más infundada, pues no dispondríamos de ningún criterio para decidir por qué algo debería ser objeto de nuestra desconfianza. Hasta el escepticismo más radical requiere de alguna noción de verdad para poder poner en duda todo aquello que no se ajuste a dicho criterio.

En el contexto de un comentario a una cita de Wittgenstein, M. Liz sostiene que:

> No sólo tenemos creencias. Creencias con apetito por la verdad. Creencias que quieren convertirse en conocimientos. Podemos tener razones para creer que conocemos. Y podemos tener, también, razones para creer que, en nuestro mundo, estamos justificados en creer que conocemos algunos de las cosas que creemos conocer[29].

---

[28] M. Liz, *Justificar y explicar. La justificación epistémica como un tipo de explicación naturalista guiada por la reflexión*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna, La Laguna, 2003, pp. 179-181.

[29] Ibídem, p. 180.

Pero, ¿qué es lo que puede hacer que una creencia pueda llegar a constituirse en conocimiento? ¿Cómo pasar del mero K_nA al auténtico conocimiento que representa K_0A? ¿Se trata sólo de acumular evidencias que nos permitan eliminar conjeturas que resultan refutadas, o, en caso contrario, apuntalar otras que se ven corroboradas? ¿Basta, entonces, con aproximarse paulatinamente a la verdad, ajustando nuestra concepción del mundo de tal forma que ésta coincida con la realidad? La respuesta es que no, que todo esto no es suficiente, pues para que pueda hablarse de conocimiento debe mediar una buena *justificación epistémica*, que M. Liz concibe como un tipo de «explicación orientada por nuestra reflexión epistemológica», o, siendo más precisos, *un tipo de explicación naturalista guiada por la reflexión*[30].

En relación con la justificación epistémica, una cuestión relevante es la determinación del «umbral mínimo», respecto al número de alternativas epistémicas que pueda concebir, a partir del cual un sujeto puede estar justificado en creer o no que algo es el caso. Así, si afirmamos que M_nA, ¿a partir de qué valor de n puede un agente creer razonablemente que A es el caso? Por otra parte, para creer que A, ¿basta con que una mayoría de alternativas epistémicas satisfagan A? Esto podría ser una condición necesaria, pero no suficiente, pues otro requisito puede ser que A no contradiga ninguna creencia central para el sujeto, pues las creencias no se dan aisladas, sino en conjuntos o redes de creencias, y entre estas creencias interdependientes unas ocupan un lugar más central que otras[31]. En cualquier caso, Meyer y van der Hoek nos hablan de al menos dos *grados de certidumbre* (o justificación):

a) Un grado más débil: Si $K_nA \wedge K_m\neg A$, el sujeto estará justificado en creer que A es el caso si $n<m$. Pero si $M_nA \wedge M_m\neg A$, estará justificado en creer que A es el caso si $n>m$.
b) Un grado más fuerte: Se trata de un tipo de creencia «práctica» o «de trabajo», en función de la cual un sujeto cree que A es el caso si A es verdadero en más de la mitad de sus alternativas epistémicas (por ello Meyer y van der Hoek hacen referencia, en este segundo caso, a un «principio democrático de creencia»). Eso sí, esta definición de la creencia requiere que haya un número determinado y conocido de alternativas epistémicas compatibles con el sistema de creencias del sujeto en cuestión[32].

---

30 Ibídem, p. 179.

31 Para el tratamiento formal de las creencias como «conjuntos» o «racimos» de creencias, cf. R. Fagin & J.Y. Halpern (1988), «Belief, Awareness and Limited Reasoning», *Artificial Intelligence*, 34, pp. 39-76.

32 Cf. W. van der Hoek & J.-J. Ch. Meyer, «Graded Modalities in Epistemic Logic», *op. cit.*, p. 12 y W. van der Hoek & J.-J. Ch. Meyer, «Modalities for Reasoning about Knowledge and Uncertainties», *op. cit.*, p. 14.

Una cuestión interesante, relacionada con la interpretación intuitiva de los operadores M_n, $M!_n$ y K_n, es la de si el subíndice n está o no bajo el alcance del conocimiento del sujeto considerado; es decir, ¿sabe el sujeto que hay más de n situaciones posibles en las que se da A (si M_nA), o exactamente n situaciones en las que se da A (si $M!_nA$), o a lo sumo n situaciones que refutan A (en el caso de K_nA)? Si esto es así, ¿podrían darse otras situaciones posibles, compatibles con lo que el sujeto sabe, pero no contempladas por él, en las que también se dé A? Cabría pensar, asimismo, que las distintas alternativas epistémicas sólo las conoce un «observador externo» que emplea la lógica epistémica graduada como un metalenguaje formal, con el que analiza el conocimiento (o las creencias) del sujeto en cuestión. Meyer y van der Hoek consideran que la utilización de modalidades graduadas en lógica epistémica admite cualquiera de las anteriores interpretaciones y dejan abierta esta cuestión.[33], pero no es aventurado pensar que un sujeto epistémico dotado de un cierto grado de sofisticación intelectual, capaz de desarrollar un conocimiento reflexivo, ha de poder ser consciente de las posibles situaciones que confirman o refutan sus creencias, y de ahí que pueda estar dispuesto a mantenerlas o rechazarlas, en función de su mayor o menor grado de verosimilitud (o en la medida en que sean o no compatibles con otras creencias o conocimientos que resultan fiables para el sujeto).

Preguntarse si el subíndice n se encuentra o no bajo el alcance del conocimiento de un sujeto epistémico, cuyo conocimiento o creencias se representen mediante los operadores M_n, $M!_n$ y K_n, es tanto como intentar discernir si el grado de justificación epistémica de dicho sujeto se determina de forma subjetiva (interna al sujeto) o de forma objetiva (por un observador ideal situado fuera del mundo). Como acabamos de comentar, Meyer y van der Hoek dejan abierta esta cuestión, aunque la misma reviste no poca importancia para entender lo que significa conocer y el alcance que tiene el afirmar que una creencia puede o no estar epistémicamente justificada. A este respecto, la distinción de Ernesto Sosa entre *justificación* y *aptitud* arroja alguna luz sobre lo que puede significar decantarse por una u otra alternativa de esta disyuntiva. Que un sujeto mantiene una *creencia apta* significa que dicha creencia es producto de disposiciones cognitivas virtuosas referidas al entorno real; se trata, pues, de una justificación de tipo externo u objetivo. Una *creencia justificada*, en cambio, deriva de disposiciones cognitivas consideradas virtuosas por la propia perspectiva epistémica del sujeto (justificación en sentido interno o subjetivo)[34]. Sosa vincula la creencia apta al conocimiento animal y la creencia justificada al conocimiento reflexivo (el tipo de conocimiento específicamente humano), y es que el conocimiento reflexivo, además de la razón reflexiva, requiere de un «posicionamiento epistémico por parte

---

[33] J.J. Ch. MEYER & W. VAN DER HOEK, *Epistemic Logic for AI and Computer Science*, *op. cit.*, p. 108.

[34] Cf. E. SOSA, *Knowledge in Perspective. Selected Essays in Epistemology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991, caps. 14 y 16. Una interesante discusión de las propuestas de E. Sosa puede encontrarse en M. LIZ, *op. cit.*, pp. 153-158.

[35] T. GRIMALTOS y V. IRANZO, «El debate externismo/internismo en la justificación epistémica», en: D. QUESADA (coord..), *Cuestiones de teoría del conocimiento,* Tecnos, Madrid, 2009, p. 47.

del sujeto»[35], resultando determinantes, para alcanzar creencias justificadas (y no meramente aptas) las creencias que alberguen los sujetos en relación con su propia dotación cognitiva. Es decir, que la perspectiva epistémica del sujeto resulta crucial para la justificación epistémica en el ámbito del conocimiento reflexivo. Por ello, y volviendo a la cuestión que Meyer y van der Hoek dejaban sin resolver, habría que decir que, al menos si nos referimos a sujetos epistémicos humanos, dotados de capacidad para el conocimiento reflexivo, no podemos sino admitir que, en efecto, el valor y el significado del subíndice n de los operadores modales M_n, $M!_n$ y K_n tienen que formar parte de lo que dichos sujetos son capaces de contemplar como parte de su conocimiento.

De lo hasta ahora expuesto se desprende que un sujeto, cuyo sistema de conocimientos-creencias se encuentre regulado por los principios lógicos del Sistema Axiomático Gr(S5), dispondrá de ciertos conocimientos seguros (representados por K_0), y de un conjunto, previsiblemente más amplio, de «conocimientos falibles» (o creencias), que podrán ser desde meras conjeturas, sin mucho fundamento, como las representadas por M_0 (que, simplemente, no se consideran imposibles), hasta otros conocimientos dotados de un grado creciente de credibilidad, en función de que aumente el valor del subíndice n del operador modal M_n (o disminuya, en el caso del operador K_n). Y, dentro del amplio espectro de conocimientos que puede albergar un sujeto (conocimientos que se distinguen por su distinto grado de fiabilidad), el representado por K_0 desempeña una *función regulativa*, por ser el tipo de conocimiento basado en creencias verdaderas y justificadas, es decir, el paradigma de todo conocimiento bien fundado. Este último tipo de conocimiento mantiene una conexión directa e ideal con la verdad, y su sola posibilidad ejerce de antídoto contra el relativismo y el escepticismo epistemológicos, especialmente en sus versiones más radicales.

Por otra parte, si en la lógica epistémica graduada el tipo de conocimiento representado por el operador modal K_n puede conllevar tal grado de incertidumbre que podemos llegar a equipararlo con el operador B de la creencia de la lógica doxástica estándar (que puede hacer referencia a hechos que son falsos, y del que, lo más que se exige, es que mantenga la consistencia del sistema, esto es, $BA \rightarrow \neg B \neg A$), entonces, en lo que respecta a los operadores K_n y M_n (con $n \neq 0$) se hace innecesaria la distinción entre alternativas epistémicas y doxásticas, pues el sujeto epistémico, simplemente, concebiría distintos mundos posibles, sin poder determinar si lo hace en función de lo que sabe o de lo que cree. En este sentido, K_n vendría a representar algo tan general como una «actitud proposicional que informa acerca del mundo», y que podría llegar a alcanzar el estatus de conocimiento si el sujeto en cuestión es capaz de eliminar aquellas alternativas o posibles concepciones del mundo que no se correspondan con la realidad[36].

---

[36] En R. HERRERA, «Lógica epistémica para una realidad sin velos», en: M. LIZ (ed.), *Realidad sin velos*, Laertes, Barcelona, 2009, pp. 229-261, se muestra que la interpretación intuitiva de los desarrollos lógico-formales de la lógica modal epistémica graduada puede coincidir, de forma natural, con las principales concepciones epistemológicas del *realismo directo*.

En suma, la lógica modal epistémica graduada nos ofrece una serie de herramientas formales que nos asisten, de forma eficaz, en la clarificación conceptual de algunos de los principales conceptos de la epistemología, como son el de conocimiento, creencia o justificación epistémica. Este tipo de desarrollos lógicos incrementa notablemente la capacidad expresiva de la lógica epistémica estándar, permitiéndonos cuantificar el *grado de confianza* de los sujetos epistémicos. Hace posible, además, analizar el comportamiento formal de importantes nociones epistémicas referidas a sujetos no omniscientes, tales como la de «incertidumbre», «grados de certeza», «confianza», «nivel de justificación», y otros conceptos afines que se encuentran emparentados con lo que podríamos denominar «conocimiento con incertidumbre». Y es que los operadores modales Kn, junto con sus duales M_n, forman un enorme espectro de operadores epistémicos de certeza decreciente: K_0 (certeza absoluta), K_1, K_2, ..., M_2, M_1, M_0 (que simplemente expresa que algo no se considera imposible). De acuerdo con esto, en la lógica de las modalidades epistémicas graduadas se recogen las propiedades formales de una forma de *conocimiento incierto*, que refleja el grado de confianza o justificación de un agente al afirmar que algo es o no verdadero. Por tanto, el tipo de conocimiento al que alude K_n está más próximo a la creencia que a la forma de conocimiento absoluto con el que opera la lógica modal epistémica estándar. Así pues, este tipo de lógica epistémica nos permite formalizar una forma de razonamiento que presenta cierto grado de incertidumbre, a diferencia de lo que ocurre, por ejemplo, con el tipo de razonamiento representado por el Sistema S5 de la lógica epistémica no graduada[37].

Recibido: mayo 2010
Aceptado: septiembre 2011

[37] Otros desarrollos formales, dentro de la lógica epistémica estándar («no graduada»), tienen también como objetivo principal el de reflejar el comportamiento lógico de nociones epistémicas caracterizadas por cierto nivel de incertidumbre. Una presentación y valoración de este tipo de propuestas puede encontrarse en R. Herrera, «Sistemas formales para el conocimiento falible», *Actas del V Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, Granada, 2006, pp. 41-46.